Joh. Müller's Lehrbuch der kosmischen Physik

Müller, Johann Heinrich Jacob

Braunschweig, 1894

Siebentes Capitel. Die allgemeine Schwere.

urn:nbn:de:hbz:466:1-96939

Siebentes Capitel.

Die allgemeine Schwere.

Mechanische Erklärung der Planetenbewegung durch Newton. Nachdem Kepler die Gesetze der Planetenbewegung aus den Beobachtungen abgeleitet hatte, war es die nächste Aufgabe der Astronomie, die mechanischen Ursachen derselben aufzusuchen, die Planetenbewegung auf mechanische Gesetze zurückzuführen. Es ist Newton's unsterbliches Verdienst, diese grosse Aufgabe gelöst zu haben. 103

Schon früher hatte es nicht an Versuchen gefehlt, die Kräfte auszumitteln, welche bei der Planetenbewegung thätig sind; man kam aber nicht zu einem Resultate, weil die Vorbedingungen fehlten, ohne welche ein solcher Schritt nicht gemacht werden konnte. Um eine mechanische Erklärung der Planetenbewegung geben zu können, musste man nicht allein wissen, welches die wahren Gestalten der Planetenbahnen sind und mit welcher Geschwindigkeit sie durchlaufen werden, sondern es mussten die Grundgesetze der Mechanik selbst erst ermittelt sein. So lange man das Wesen und die Gesetze der krummlinigen Bewegung überhaupt nicht kannte, war auch eine mechanische Erklärung der Planetenbewegung nicht möglich.

Die Begründung der Mechanik geschah mit der Entdeckung der wahren Gesetze der Planetenbewegung fast gleichzeitig. Es war Galilei, welcher die Gesetze des freien Falles, der Pendelbewegung, der Wurfbewegung erkannte, welcher das Gesetz der Trägheit begründete und dadurch gerade der Schöpfer der Mechanik wurde. Das Gesetz der Trägheit zeigt, wie ein Körper, welcher in geradliniger und gleichmässiger Bewegung ist, diese Bewegung unverändert beibehält, wenn nicht äussere Kräfte sie aufheben oder modificiren und wie jede krummlinige Bewegung durch die Combination der dem Körper bereits innewohnenden und durch das Beharrungsvermögen ihm verbleibenden Geschwindigkeit mit den Wirkungen irgend einer continuirlich auf ihn wirkenden Kraft entsteht.

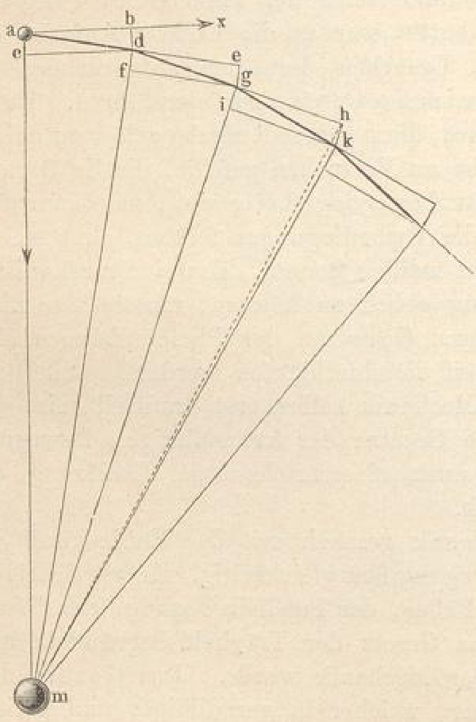
Kepler und Galilei sind es also, welche den Grund zu dem wissenschaftlichen Gebäude legten, welches durch Newton's Entdeckung der allgemeinen Schwere vollendet wurde.

Wie durch die Combination irgend einer beschleunigenden Kraft mit der Geschwindigkeit, welche ein Körper bereits hat, überhaupt eine krummlinige Bewegung entsteht, wie der Körper beständig um einen festen Anziehungsmittelpunkt kreist, wenn die beschleunigende Kraft stets gegen diesen Anziehungsmittelpunkt hin gerichtet ist, wird hier als bekannt vorausgesetzt (Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., 1. Bd., S. 142). In den folgenden Paragraphen sollen nun die mechanischen Gesetze der Planetenbewegung überhaupt näher betrachtet, zunächst aber aus den Kepler'schen Gesetzen die Natur der beschleunigenden Kräfte abgeleitet werden, welche auf die Planeten wirken.

104 Die Planeten werden durch Centralkräfte angetrieben.

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze sind die Flächenräume gleich, welche der die Sonne und den Planeten verbindende Leitstrahl in gleichen Zeiten zurücklegt. Aus diesem Gesetz folgt aber, dass die beschleunigende Kraft, welche auf die Planeten wirkt, stets gegen die Sonne hin gerichtet sein muss.

Fig. 163.



Wenn der Planet in einem kleinen Zeittheilchen t den Weg dg, Fig. 163, zurücklegt, so beschreibt der Leitstrahl während dieses Zeittheilchens das Dreieck dgm, wo m den Mittelpunkt der Sonne bezeichnet. Im nächsten gleich grossen Zeittheilchen würde der Planet unter dem alleinigen Einflusse der Geschwindigkeit, mit welcher er in g ankommt, den Weg gh zurücklegen, welcher in der Verlängerung von dg liegt und gleich dg ist. Nehmen wir nun an, eine in m befindliche Kraft bestrebt sich, den Planeten fortwährend nach m hinzuziehen, und diese Kraft sei so beschaffen, dass sie für sich allein den Planeten in dem Zeittheilchen t von g nach i bewegen würde, so wird der Planet in Wirklichkeit den Weg gk, d. h. die Diagonale des durch gh und gi

bestimmten Parallelogramms durchlaufen. Während des zweiten Zeittheilchens t beschreibt also der Leitstrahl das Dreieck gkm. Denken wir uns nun den Punkt h mit m durch eine gerade Linie verbunden, so ist das $\triangle\ gkm = \triangle\ ghm$, weil sie eine Seite gm gemeinschaftlich haben, und die gegenüber liegenden Spitzen der Dreiecke auf einer der Seite gm parallelen Linie liegen. Ferner ist aber auch $\triangle\ ghm = \triangle\ dgm$, weil dg und gh auf einer geraden Linie liegen und einander gleich sind, sowie auch die Spitze von beiden Dreiecken zusammenfällt. Es ist also auch $\triangle\ gkm = \triangle\ dgm$, d. h. der Leitstrahl hat in zwei gleichen Zeittheilchen gleiche Flächenräume beschrieben.

Wir haben hier allerdings das Zeittheilchen t so klein angenommen, dass die in demselben zurückgelegten Wege als geradlinig angesehen werden konnten; es ist indessen klar, dass der Satz, welcher für jedes einzelne Zeittheilchen t gilt, auch für die Summe vieler solcher Zeittheilchen Gültigkeit behält. Wir erhalten demnach den Satz, dass die in gleichen Zeiten von dem Leitstrahl beschriebenen Flächenräume einander gleich sind, wenn nur die beschleunigende Kraft stets gegen denselben Punkt hin gerichtet ist, nach welchem Gesetze im Uebrigen die beschleunigende Kraft mit der Entfernung von m sich ändern mag.

Die Eigenthümlichkeit, dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, findet nur dann statt, wenn der Mittelpunkt, von dem aus man die Leitstrahlen nach dem beweglichen Körper gezogen denkt, zugleich der Punkt ist, nach welchem die beschleunigende Kraft stets hinwirkt. Wirkte z. B. auf den in g angekommenen Körper eine beschleunigende Kraft, deren Richtung nicht in die Linie gm fällt, so würde der Körper am Ende des nächsten Zeittheilchens in irgend einem Punkte p ankommen, welcher nicht auf der mit gm parallelen Linie hk, sondern diesseits oder jenseits derselben liegt, das Dreieck gmp würde also grösser oder kleiner sein als dgm.

Da nun in der That der von dem Planeten zur Sonne gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, so ist klar, dass die Sonne den Centralpunkt bildet, gegen welchen die auf die Planeten einwirkenden beschleunigenden Kräfte stets gerichtet sind.

Abnahme der Centralkraft mit wachsender Entfernung von der Sonne. 105 Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetze (nach welchem der Leitstrahl des Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume zurücklegt) konnte man nur den Schluss ziehen, dass die Planeten stets gegen die Sonne hingetrieben, wir können also auch sagen, von der Sonne angezogen werden; in welchem Verhältnisse aber diese anziehende Kraft der Sonne zu dem Abstande der Planeten von derselben stehe, das lässt das zweite Kepler'sche Gesetz, wie schon bemerkt wurde, völlig unentschieden, denn es findet statt, welches auch das Gesetz sein mag, welchem dieses Verhältniss unterworfen ist. Dieses Gesetz ergiebt sich aber als nothwendige Folge aus dem dritten Kepler'schen Gesetze.

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne (S. 153). Bezeichnen wir mit T und t die Umlaufszeiten, mit R und r die mittleren Abstände zweier Planeten, so haben wir also:

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Es muss indessen bemerkt werden, dass das Gesetz in dieser Form nicht strenge richtig ist und nur deswegen bei den Bewegungen der Planeten sehr nahe zutrifft, weil die Massen der Planeten sehr klein sind im Verhältniss zur Masse der Sonne.

Genau würde die obige Gleichung folgendermaassen auszudrücken sein:

$$\frac{R^3}{r^3} = \frac{T^2\,(M + m)}{t^2\,(M + \mu)},$$

wo M die Masse der Sonne, dagegen m und μ diejenige der Planeten mit den mittleren Entfernungen R und r bezeichnen. Da nun in unserem Sonnensystem die Massen der Planeten äusserst klein im Verhältniss zur Sonnenmasse sind, so wird nur ein sehr geringer Fehler begangen, wenn wir $\frac{M + m}{M + \mu} = 1$ setzen, wodurch wir das dritte Kepler'sche Gesetz erhalten.

Ganz allgemein würde das Gesetz folgendermaassen lauten müssen:

Die Quadrate der gegenseitigen Umlaufszeiten je zweier Paare in Folge der Gravitation um einander bewegter Himmelskörper, multiplicirt mit den Summen der respectiven Massen, verhalten sich wie die Cuben der gegenseitigen mittleren Entfernungen.

Es seien z. B. M, m, sowie M', m' die Massen zweier Paare sich um einander bewegender Körper, die wir mit den nämlichen Buchstaben bezeichnen wollen, ferner R die mittlere Entfernung zwischen M und m, sowie R' diejenige zwischen M' und m', endlich T die Umlaufszeit von M und m, und T' diejenige von M' und m' um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, so findet immer das Verhältniss statt:

$$(A) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad R^3 : R'^3 = T^2\,(M + m) : T'^2\,(M' + m');$$

woraus, wenn $M = M'$, sowie m und m' verschwindend klein wird, das dritte Kepler'sche Gesetz hervorgeht.

Wir wollen nun die Bewegung zweier Planeten, deren Masse wir vernachlässigen können, und die sich in Kreisbahnen um die Sonne bewegen, näher betrachten.

Die Mechanik lehrt uns, dass, wenn ein Körper, z. B. ein Planet, um einen Anziehungsmittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit t zurücklegt, alsdann die beschleunigende Kraft v, welche den Planeten gegen den Mittelpunkt hintreibt, ist (Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., 1. Band, S. 157):

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Für einen zweiten Planeten, dessen Umlaufszeit T und dessen Abstand von der Sonne R ist, haben wir demnach:

$$V = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

folglich:

$$\frac{v}{V} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 R} = \frac{r \cdot T^2}{R t^2}.$$

Nun aber ist, wie Kepler auf empirischem Wege gefunden hat, und wenn wir die Masse der Planeten als Null annehmen, $\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}$, folglich haben wir:

$$\frac{v}{V} = \frac{r}{R} \cdot \frac{R^3}{r^3} = \frac{R^2}{r^2},$$

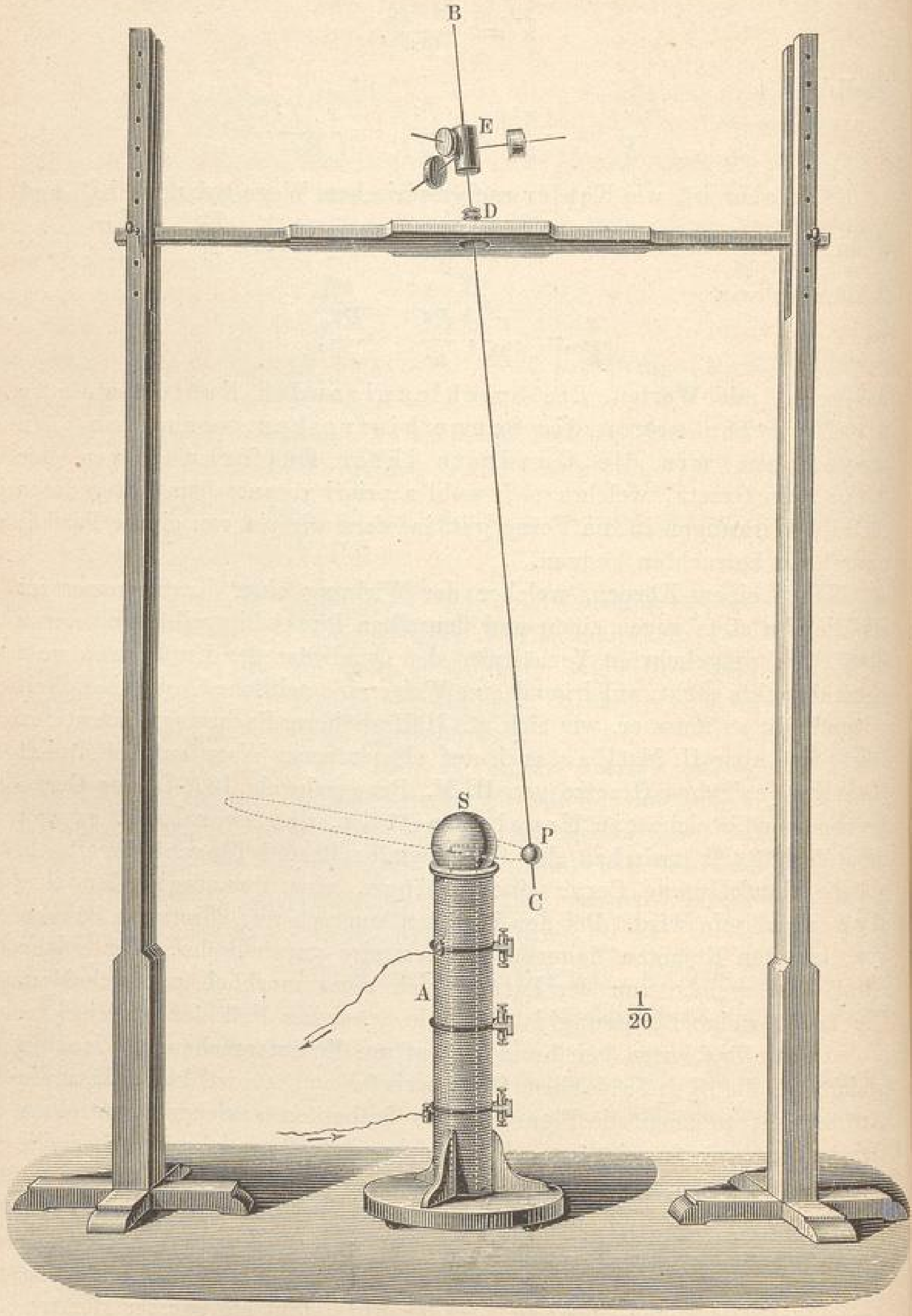
das heisst mit Worten: die beschleunigenden Kräfte, welche die Planeten gegen die Sonne hintreiben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Sonne, ein Gesetz, welches sich wohl a priori voraussehen liess, da es für alle Wirkungen in die Ferne gilt, insofern wir sie von einem Punkte ausgehend betrachten können.

Wird einem Körper, welcher der Wirkung einer Kraft ausgesetzt ist, die ihn stets gegen einen und denselben Punkt hintreibt, und deren Stärke im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung vom Centralpunkte steht, auf irgend eine Weise eine seitliche Geschwindigkeit mitgetheilt, so muss er, wie sich mit Hülfe höherer Rechnung nachweisen lässt, wie aber H. Müller auch auf elementarem Wege entwickelt hat (Die Kepler'schen Gesetze von H. M., Braunschweig 1870), eine Curve beschreiben, welche ein Kegelschnitt ist, und zwar hängt es von dem Verhältniss zwischen der Centripetalkraft und Tangentialkraft ab, ob die durchlaufene Curve eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein wird. Bei den Planeten kommen nur elliptische Bahnen vor, bei den Kometen dagegen vorzugsweise parabolische, oder solche elliptische, welche von der Parabel sich nicht merklich unterscheiden. Die kreisförmige Bewegung ist nur ein specieller Fall der elliptischen.

Da die Trabanten bei ihrem Umlauf um die entsprechenden Planeten gleichfalls die Kepler'schen Gesetze befolgen, so ist klar, dass die Kräfte, mit welchen die Planeten ihre Trabanten anziehen, demselben Gesetze unterworfen sind, wie die Anziehungskraft, welche zwischen der Sonne und den Planeten wirksam ist.

Zur Demonstration der Kepler'schen Gesetze hat Hagenbach einen von der Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique ausgeführten Apparat erdacht, welchen Fig. 164 (a. f. S.) in $^1/_{20}$ der natürlichen Grösse darstellt. In der Mitte steht ein grosser Elektromagnet, dessen Kern noch etwas über die oberste der vier Spiralen hervorragt und auf welchen eine polirte hölzerne Kugel S geschoben wird, welche den anziehenden Körper, etwa die Sonne, vorstellt. BC ist ein

Fig. 164.



langer, dünner Stahlmagnet. Bei D ist dieser Magnetstab vermöge einer Cardani'schen Aufhängung so befestigt, dass seine Schwere eliminirt ist, dass also der Schwerpunkt des Magnetstabes mit Allem, was er trägt, mit dem Durchschnittspunkte der beiden Schneiden der Cardani'schen Aufhängung zusammenfällt. Um die Lage dieses Schwerpunktes gehörig reguliren zu können, dient das Laufgewicht E, welches an seitlichen Armen noch drei kleinere Laufgewichte trägt, die auf Schrauben laufen. Nahe an seinem unteren Ende trägt der lange Magnetstab BC die kleine Holzkugel P, welche den Planeten darstellt.

Die in Fig. 50, S. 75 dargestellte Cardani'sche Aufhängung ist eigentlich für diesen Apparat construirt; der magnetisirte Stahlstab BC geht durch die Mitte der Hülse ab hindurch, in welcher er befestigt ist.

Die nicht zu beseitigenden Mängel, mit denen der Apparat behaftet ist, bestehen in dem Einflusse des unteren Poles des Elektromagneten und des Erdmagnetismus, dem Widerstande der Luft und dem Umstande, dass sich die Stange BC bei schiefer Lage etwas biegt. Trotz dieser Mängel lässt sich die elliptische Bewegung der Kugel P leicht erhalten, wenn man den Stab aus der senkrechten Lage bringt und der Kugel P einen kleinen seitlichen Stoss giebt. Sehr deutlich zeigt sich dann die schnelle Bewegung im Perihel und die langsame im Aphel. Die verschiedenen Widerstände bewirken allerdings, dass die Ellipse bald kleiner wird und dass die kleine Kugel nach etwa drei Umläufen an die grosse anstösst.

Die allgemeine Schwere. Ueber den Fall der Körper auf 106
der Oberfläche der Erde nachdenkend, kam Newton auf die Idee, ob nicht vielleicht dieselbe Kraft, welche den Stein zur Erde herabfallen macht, also das, was wir die Schwere nennen, weit über die Grenzen der Atmosphäre hinaus, ja bis an den Mond reiche, dass nichts Anderes als die Schwere die Centralkraft sei, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält.

Diese Idee lässt sich leicht prüfen. Auf der Erdoberfläche ist die beschleunigende Kraft der Schwere (die Endgeschwindigkeit der ersten Fallsecunde) gleich 9,8088 m. Der Mond ist nun 60 mal so weit von dem Centrum der Erde entfernt, als ein Punkt auf der Erdoberfläche; wenn also die Schwerkraft bis an den Mond reicht, so muss dort ihre beschleunigende Kraft 60^2, also 3600 mal geringer sein, als auf der Erdoberfläche, sie wäre also:

$$\frac{9{,}8088}{3600} = 0{,}002724 \text{ m}.$$

Nun aber können wir die Grösse der beschleunigenden Kraft, welche wirklich den Mond nach der Erde hintreibt, aus dem Halbmesser seiner Bahn und seiner Umlaufszeit berechnen. Wir haben:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = \frac{2\pi r \,.\, 2\pi}{t^2}.$$

Der Umfang der Erde ist 40 000 000 m, also ist der Umfang der Mondbahn, d. h. der Werth $2\pi r$, welcher in obiger Gleichung zu setzen ist, gleich 40 . 60 oder 2 400 000 000 m. Diesen Weg legt der Mond in 27 Tagen 7 Stunden 4 Minuten oder in 2 360 580 Secunden zurück; wir haben also:

$$v = \frac{2400000000 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14}{2\,360\,580^2} = 0{,}002761 \text{ m.}$$

Wenn wir die kleine Differenz zwischen 0,002724 und 0,002761 vernachlässigen, welche übrigens nur daher rührt, dass wir für die Entfernung und die Umlaufszeit des Mondes statt der vollkommen genauen nur Näherungswerthe in Rechnung gebracht haben, so sehen wir, dass sich derselbe Werth für die beschleunigende Kraft ergiebt, welche den Mond zur Erde treibt, mögen wir nun dieselbe aus den astronomischen Beobachtungen oder aus der Hypothese ableiten, dass die Schwerkraft auch noch auf den Mond wirke, dass sie aber im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnehme, und diese Uebereinstimmung ist eben ein Beweis für die Richtigkeit dieser Hypothese.

Newton hatte zuerst für den Erdhalbmesser, folglich auch für die Entfernung des Mondes (60 Erdhalbmesser), einen zu kleinen Werth in Rechnung gebracht und fand deshalb, von der Intensität der Schwerkraft auf der Erde ausgehend, die Intensität der Kraft, welche den Mond gegen die Erde treibt, grösser, als die aus den astronomischen Beobachtungen abgeleitete. Der Unterschied war von der Art, dass, in umgekehrter Ordnung aus der Mondbewegung auf den Fall auf der Erdoberfläche schliessend, der Fallraum der ersten Secunde nur 13 Fuss hätte betragen müssen, während er in der That 15 Fuss ist.

Diese Differenz war so gross, dass Newton selbst seine Theorie ganz aufgab, d. h. er gab die Idee auf, dass die Centripetalkraft, welche bei der Mondbewegung thätig ist, mit der Schwere identisch sei.

Zwölf Jahre lang hatte er diesen Gegenstand vollständig liegen gelassen, als er im Juni des Jahres 1682 die Kunde von einer neuen, in Frankreich durch Picard ausgeführten Gradmessung erhielt, nach welcher der Durchmesser der Erde grösser und zwar um $^1/_7$ grösser war, als man nach früheren, weniger genauen Messungen angenommen hatte. Alsbald nahm er seine alten Rechnungen wieder vor und hatte nun die Freude, seine schon aufgegebene Theorie aufs Vollständigste bestätigt zu sehen.

Die Sonne zieht die Planeten, die Planeten aber ziehen ihre Satelliten an, und die Kraft, welche die Monde gegen ihre Planeten hintreibt, ist identisch mit der Schwerkraft, welche alle Körper niederzieht, die sich auf der Oberfläche der Planeten befinden. Das Gesetz dieser Anziehung, welches unser ganzes Planetensystem beherrscht, lässt sich in folgender Weise aussprechen:

Je zwei materielle Körper ziehen sich mit einer Kraft an, welche ihren Massen direct und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man mit m und m' die Massen der beiden Körper, mit r ihre Entfernung, so ist also ihre gegenseitige Anziehung gleich

$$f \frac{m \, . \, m'}{r^2},$$

wo f ein constanter Factor ist.

Das Gewicht eines Körpers auf der Oberfläche eines Planeten ist die Resultirende aller Anziehungen, welche sämmtliche Molecüle, aus denen der Planet zusammengesetzt ist, auf den fraglichen Körper ausüben. Diese Resultirende ist stets gegen den Mittelpunkt des Planeten hin gerichtet, insofern man ihn als vollkommen kugelförmig betrachtet und also von seiner Abplattung abstrahirt. Für diesen Fall wirkt auch die Gesammtanziehung eines Planeten in die Ferne sowohl wie auf einen Körper, welcher sich auf seiner Oberfläche befindet, gerade so, als ob die ganze Masse des Planeten sich in seinem Mittelpunkte befände. Bezeichnen wir also mit m die Masse, mit ϱ den Halbmesser eines Planeten, so ist die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse auf der Oberfläche des Planeten gegen den Mittelpunkt hingezogen wird:

$$V = f \frac{m}{\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Die Geschwindigkeit, also auch die Beschleunigung, mit welcher ein Körper auf der Planetenoberfläche fällt, ist von seiner Masse unabhängig, sie ist gleich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, mit welcher die Masseneinheit fällt, sie ist also:

$$g = h \frac{m}{\varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

wo h einen constanten Factor bezeichnet, dessen Bestimmung für uns jetzt kein Interesse hat.

Betrachtet man die Bewegung eines Planeten, so ist streng genommen der Mittelpunkt der Sonne kein fester Punkt, sondern der Planet sowohl als auch die Sonne selbst beschreiben mit gleicher Umlaufszeit Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, welcher aber stets dem Mittelpunkte der Sonne sehr nahe liegt, weil die Masse der Planeten nur ein höchst unbedeutender Bruchtheil der Sonnenmasse ist; bezieht man aber die Bewegung des Planeten auf den Mittelpunkt der Sonne, indem man denselben als fest betrachtet, so ist seine Bahn gleichfalls eine elliptische.

Es sei M die Masse der Sonne, m die Masse eines Planeten und R der Abstand beider von einander, so ist die beschleunigende Kraft, welche den Planeten gegen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt treibt:

$$G = h \frac{M}{R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

während die Sonne gegen denselben Schwerpunkt mit einer Beschleunigung:

$$\Gamma = h \frac{m}{R^2}$$

hingetrieben wird. Letztere Grösse kann man aber als verschwindend klein gegen die erstere betrachten, so dass also G das Maass der Beschleunigung ist, mit welchem der Planet um die Sonne gravitirt. Ebenso ist

$$G' = h \frac{m}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

der Werth der Beschleunigung, mittelst deren ein Satellit um seinen Planeten kreist, wenn r die Entfernung beider bezeichnet und die Masse des Trabanten im Vergleich zur Masse m des Planeten als verschwindend klein betrachtet werden kann.

107 **Masse der Sonne und der Planeten.** Die Formeln, welche wir im vorigen Paragraphen kennen lernten, geben uns ein Mittel an die Hand, die Masse der Planeten, welche Satelliten haben, mit der Masse der Sonne zu vergleichen.

Es sei M die Masse der Sonne, m die Masse eines Planeten, μ die eines Satelliten dieses Planeten; ferner R die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, r die des Satelliten von den Planeten; T die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, t die des Satelliten um den Planeten, so geht die Gleichung (A) auf S. 277 in folgende über:

$$R^3 : r^3 = T^2 (M + m) : t^2 (m + \mu),$$

oder:

$$\frac{M + m}{m + \mu} = \frac{t^2 R^3}{T^2 r^3}.$$

Nehmen wir die Entfernung des Mondes von der Erde zur Längeneinheit, so ist $r = 1$ und für die Erde $R = 387$.

Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt 27,321661, die der Erde um die Sonne beträgt 365,256 Tage. Setzen wir nun in unserer letzten Gleichung $t = 27{,}321661$ und $T = 365{,}256$ und ausserdem für R und r die obigen Zahlenwerthe, so kommt:

$$\frac{M + m}{m + \mu} = 324124,$$

d. h. die Masse der Sonne + der Masse der Erde ist 324 124 mal so gross, als die Masse der Erde + der Masse des Mondes. Da aber die Masse der Erde gegen diejenige der Sonne, und die Masse des Mondes gegen die der Erde sehr klein ist, so bezeichnet die obige Zahl sehr genähert das Verhältniss der Sonnen- zur Erdmasse, oder die Grösse $\frac{M}{m}$.

Die Umlaufszeit t' des äussersten Jupitertrabanten ist 16,689018 Tage, seine Entfernung vom Mittelpunkte des Jupiter ist 26,486 Jupiterhalbmesser oder in Mondabständen ausgedrückt, $r' = 4{,}8743$. Bezeichnen wir also mit m' die Masse des Jupiter, so haben wir, wenn wir die Masse seines Satelliten und die des Mondes vernachlässigen:

$$\frac{m'}{m} = \frac{r'^3 t^2}{r^3 t'^2},$$

und wenn wir für r, r', t und t' ihre Zahlenwerthe setzen:

$$\frac{m'}{m} = 310.$$

Nach derselben Methode findet man, dass die Masse des Mars 0,1 mal, die des Saturn 92 mal, die des Uranus 13,5 mal und die des Neptun 16,5 mal so gross ist, als die Masse der Erde. Bei denjenigen Planeten, welche keine Monde haben, wie Mercur und Venus, lässt sich die Masse auf die vorher beschriebene Weise nicht ermitteln, sondern muss aus den Störungen abgeleitet werden, welche diese Planeten auf andere Weltkörper, namentlich periodische Kometen, ausüben.

Es ist bereits oben der wahre Durchmesser der Sonne und der Planeten angegeben worden, und daraus lässt sich dann leicht ihr Volumen berechnen. Setzt man das Volumen der Erde gleich 1, so ergiebt sich das Volumen der Sonne und der Planeten, wie es die zweite Columne der folgenden Tabelle angiebt.

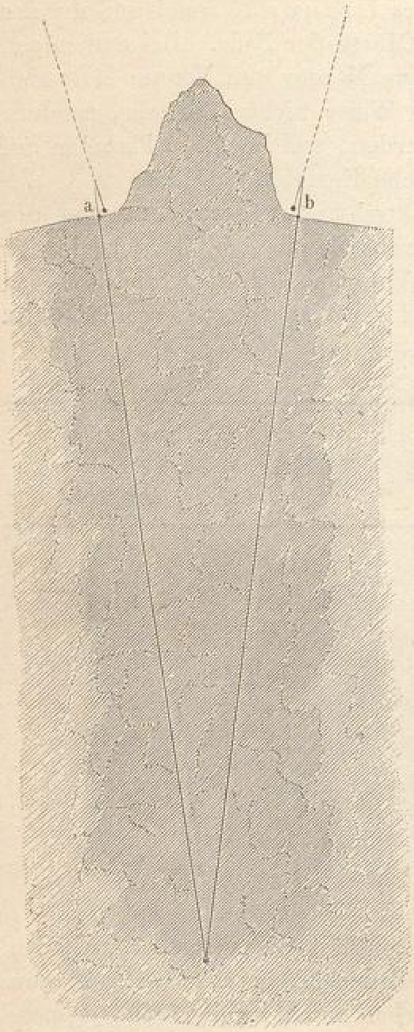
	Volumen	Masse	Dichtigkeit im Vergleiche zu der Erde
Sonne	1283720	324439	0,253
Mercur	0,052	0,061	1,173
Venus	0,975	0,787	0,807
Erde	1,000	1,000	1,000
Mars	0,147	0,105	0,711
Jupiter	1279,412	308,990	0,242
Saturn	718,883	91,919	0,128
Uranus	69,237	13,518	0,195
Neptun	54,955	16,469	0,300

Die dritte Columne dieser Tabelle enthält die eben besprochenen Werthe für die Massen der genannten Himmelskörper. Man sieht nun sogleich, dass die Massen dem körperlichen Inhalte keineswegs proportional bleiben; während z. B. der cubische Inhalt des Jupiter 1279 mal grösser ist, als der der Erde, so ist die Masse des Jupiter doch nur 309 mal so gross, als die Masse der Erde, es ist also klar, dass Jupiter weniger dicht sein muss als die Erde.

Dividirt man die Zahlen der dritten Columne durch die entsprechenden Zahlen der zweiten, so findet man die Werthe des mittleren Eigengewichtes, wie sie in der letzten Verticalreihe aufgeführt sind. Die Sonne ist also nahezu viermal weniger dicht als die Erdmasse; der Jupiter ist nicht ganz so dicht wie die Sonne, noch weit weniger dicht aber sind Saturn und Uranus.

108 **Dichtigkeit der Erde.** Wir haben eben das Eigengewicht der Sonne und mehrerer Planeten nur mit dem mittleren specifischen der Erde verglichen, wir wollen nun sehen, auf welche Weise man die Masse und das auf Wasser bezogene Eigengewicht der Erdkugel selbst bestimmen kann.

Fig. 165.



Wäre die Erde eine Kugel von homogener Masse, so würde ein Bleiloth, welches in einer vollkommen ebenen Gegend im Freien aufgehängt wäre, stets gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet sein; befände sich aber auf einer Seite des Bleilothes eine bedeutende, über die Oberfläche der Erde hervorragende Masse, etwa ein Gebirgszug, so würde diese gleichfalls anziehend auf die Kugel des Lothes wirken und eine Ablenkung desselben aus der Verticalen veranlassen.

In gleicher Weise wird die Nähe von Gebirgen auch eine Abweichung der freien Oberfläche der Gewässer von der wahren Horizontalen bewirken, da ja dieselbe stets rechtwinkelig auf der Richtung des Bleilothes steht.

Bouguer war der Erste, welcher die Idee hatte, in der Anziehung der Gebirge einen Beweis für die allgemeine Anziehung der Materie zu suchen. Er stellte seine Versuche an den Abhängen des Chimborasso an und fand eine Ablenkung des Bleilothes von 7″ bis 8″. Dass bei der bedeutenden Ausdehnung des Gebirges keine grössere Ablenkung gefunden wurde, rührt vielleicht daher, dass sich grosse Höhlungen im Inneren jener vulcanischen Berge befinden.

Sehen wir nun zunächst, wie man im Stande ist, eine Ablenkung des Bleilothes von der Verticalen (d. h. von der nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Geraden) nachzuweisen.

An unseren astronomischen Höhenkreisen bestimmen wir die Richtung der Horizontalen mit Hülfe der Wasserwage, folglich fällt die Richtung des Zeniths, wie sie uns der Höhenkreis angiebt, zusammen mit der Richtung des Bleilothes. Die durch den Höhenkreis gemessene Zenithdistanz eines Gestirnes ist der Winkel, welchen die nach dem Sterne gerichtete Visirlinie mit der Richtung des Bleilothes macht.

Wenn man nun an zwei Orten, a und b, Fig. 165, welche auf demselben Erdmeridian liegen, die Zenithdistanz eines und desselben Fixsternes zur Culminationszeit bestimmt, so ist der Unterschied der beiden Zenithdistanzen der Winkel, welchen die Richtung des Bleilothes in a mit der Richtung des Bleilothes in b macht.

So fanden Maskelyne und Hutton im Jahre 1772, dass die Bleilothe zweier Orte, a und b, desselben Meridians, von denen die eine auf dem nördlichen, die andere am südlichen Abhange des Berges Schehallien lag, einen Winkel von 53 Bogensecunden mit einander machten.

Durch geodätische Messungen wurde aber ferner ermittelt, dass a 3900 Fuss nördlich von b lag. Da für Schottland die Länge eines Breitengrades ungefähr 342 500 Fuss beträgt, so entspricht jene Länge von 3900 Fuss einem Bogen von $41''$, d. h. aus der geodätischen Messung folgt, dass a um $41''$ nördlich von b liegt, oder dass die Verticale von a, d. h. die von a nach dem Mittelpunkte der Erde gezogene Gerade, mit der Verticalen von b einen Winkel von 41 Secunden macht.

Der Winkel, welchen die Bleilothe von a und b mit einander machen, ist also um $12''$ grösser, als der Winkel der Verticalen beider Orte; die Bleilothe von a und b sind also nicht gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet, sie sind durch den Einfluss des Berges von der Verticalen abgelenkt, und zwar beträgt die Summe der Ablenkungen der Bleilothe in a und b $12''$.

Durch eine genaue Vermessung des Berges wurde nun das Volumen des Gebirges bestimmt, woraus sich dann auch die Masse desselben mit annähernder Genauigkeit berechnen liess, da ja das specifische Gewicht des Gesteins bekannt ist, aus welchem es besteht.

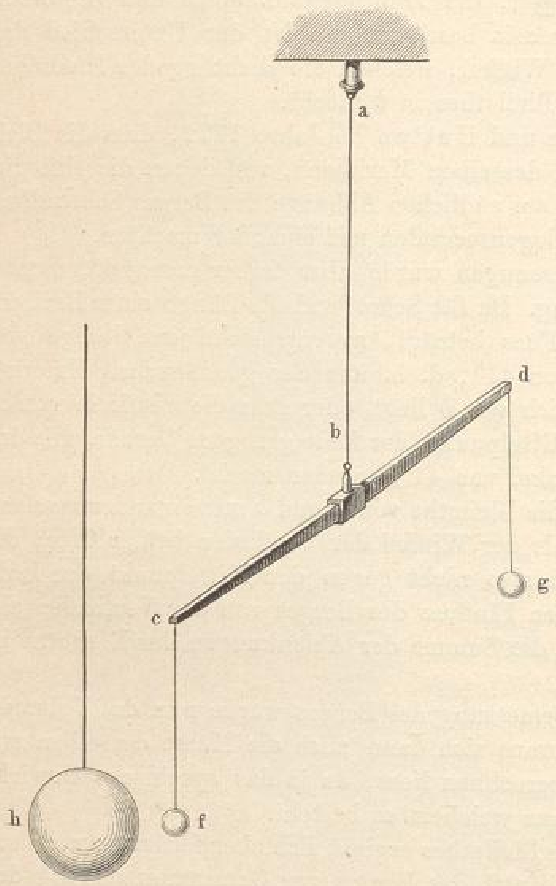
Aus der Ablenkung des Bleilothes ergiebt sich aber ferner, in welchem Verhältniss die anziehende Kraft des Berges zur Gesammtanziehung der Erde steht, und da die Masse des Berges bekannt ist, so lässt sich daraus auch auf die Masse und die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erdkugel schliessen.

Maskelyne ermittelte auf diesem Wege, dass das mittlere specifische Gewicht der Erde 4,71 sei, ein Resultat, welches der Wahrheit schon sehr nahe kam.

Wir begnügen uns hier, die Methode nur anzudeuten, welche Maskelyne anwandte, um die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, und zwar um so mehr, als die Berechnung auf diesem Wege eine ziemlich schwierige ist, ohne deshalb so genaue Resultate liefern zu können, wie die Methode, welche im nächsten Paragraphen besprochen werden soll.

109 **Anwendung der Drehwage und anderer Apparate zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.** Ein englischer Physiker, Mitchell, construirte eine Drehwage, mit deren Hülfe er die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen gedachte; er starb aber, ehe er zur Anstellung der Versuche kam, welche erst nach seinem Tode von Cavendish ausgeführt wurden. Der Grundgedanke des Apparates ist folgender:

Fig. 166.



An einem dünnen Metalldraht ab, Fig. 166, hängt ein horizontaler, gleicharmiger Hebel cd, welcher an seinen Enden die Kugeln f und g trägt. Dem Einfluss aller störenden Kräfte entzogen, wird die ganze Vorrichtung eine solche Stellung annehmen, dass der Draht ab ohne Torsion ist.

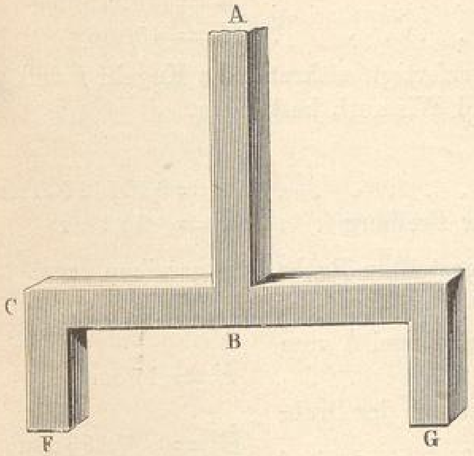
Bringt man nun neben der Kugel f eine Kugel h von bedeutender Masse an, so wird h anziehend auf f wirken, und dadurch wird der horizontale Hebel cd um einen Winkel aus seiner früheren Gleichgewichtslage herausgedreht, welcher der anziehenden Kraft k proportional ist, mit welcher die Kugeln h und f gegenseitig auf einander wirken.

Die Grösse dieser Kraft k lässt sich aber berechnen, wenn man die Schwingungszeit kennt, mit welcher der horizontale Hebel cd um seine Gleichgewichtslage oscillirt, sobald er auf irgend eine Weise aus derselben herausgebracht worden ist.

Aus dem Verhältniss der Kraft k zu dem Gewichte m der Kugel f (der Kraft, mit welcher die ganze Erdkugel die Kugel f anzieht) ergiebt sich dann das Verhältniss zwischen der leicht zu ermittelnden Masse M der Kugel h und der Masse Q der Erdkugel.

Es kommt also vor allen Dingen darauf an, die Ablenkung des horizontalen Hebels durch die Einwirkung der Kugel h, sowie die Schwingungszeit des horizontalen Pendels cd mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln; jeder Luftzug wirkt aber störend sowohl auf die Ablenkung als auf die Schwingungszeit, und deshalb muss die ganze Vorrichtung in ein möglichst enges Gehäuse eingeschlossen und an einem Orte aufgestellt sein, an welchem möglichst wenig Temperaturschwankungen stattfinden.

Fig. 167.



Das hölzerne Gehäuse, welches die Drehwage einschliesst, hat ungefähr die Gestalt von Fig. 167. In AB befindet sich der Aufhängedraht, CD schliesst den horizontalen Hebel ein und in den verticalen Armen CF und DG befinden sich die Kugeln f und g mit ihren Aufhängedrähten. Das Ganze ist nur so weit, dass dem Hebel cd der nöthige Spielraum für die kleine durch h hervorgebrachte Ablenkung und die kleinen Schwingungen bleibt.

An einigen Stellen ist die Wand des Gehäuses durchbrochen, die Oeffnungen aber sind dann wieder durch Platten von Spiegelglas geschlossen, durch welche hindurch man den Hebel und seine Oscillationen beobachten kann.

Cavendish wandte ausser der ablenkenden Masse h noch eine zweite, neben der Kugel g hängende an, welche die Wirkung der ersteren unterstützt; aus seinen, nach der eben angedeuteten Methode angestellten Versuchen ergab sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde der Werth 5,48 oder nach Hutton's Revision der Rechnungen 5,32.

Im Jahre 1837 stellte F. Reich neue Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage an. Eine wesentliche Verbesserung des Apparates erzielte er dadurch, dass er ihn mit einer Poggendorff'schen Spiegelvorrichtung versah, welche auch Gauss mit so grossem Vortheil bei seinem Magnetometer angewandt hatte. Der Spiegel war am unteren Ende des Aufhängedrahtes bei b, Fig. 166, angebracht. Die ganze Drehwage war an der Decke eines Kellers aufgehängt und die Scala durch eine Lampe mittelst eines Hohlspiegels erleuchtet.

Die Grössen, deren Kenntniss zur Berechnung der Masse und Dichtigkeit der Erde nothwendig sind, waren beim Reich'schen Apparat:

Abstand des Aufhängepunktes der Kugeln f und g von der Mitte des Hebels	$r = 100{,}1$ cm
Jede der Kugeln f und g wog	$m = 484{,}2$ g
Das auf den Aufhängepunkt der Kugel reducirte Gewicht des halben Hebels sammt dem Gewichte der Aufhängevorrichtung	$m' = 34{,}7$ g
Abstand der Scala vom Spiegel	$\mu = 4523$ mm
Gewicht der ablenkenden Kugel h	$M = 45006$ g

Diese Kugel h war aus Blei verfertigt, während die Kugeln f und g aus einer Composition von Blei und Wismuth bestanden.

Ferner ist:

Der Halbmesser der Erde	$R = 636462400$ cm
Die Länge des Secundenpendels für Freiberg . .	$l = 99{,}4$ cm

Bei einer der von Reich angestellten Beobachtungsreihen ergaben sich folgende Resultate:

Der Abstand des Mittelpunktes der Kugel h vom Mittelpunkt der Kugel f war	$E = 17$ cm
Die auf der Scala abgelesene Ablenkung der Drehwage	$B = 7{,}156$ mm
Die Schwingungszeit der Drehwage	$t = 405^s$.

Aus diesen Daten lässt sich nun die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde in folgender Weise berechnen.

Bei den Schwingungen der Drehwage hat die Elasticität des Drahtes eine träge Masse in Bewegung zu setzen, deren Trägheit gerade so wirkt, als ob am Ende des Hebels eine Masse $2(m + m')$, in unserem Falle also eine Masse von 1038 g angehängt wäre.

Nun aber wirkt die ablenkende Kraft der Kugel h nur auf die kleine Kugel f. Hätte die Elasticität des Aufhängedrahtes nur diese eine Kugel f in Bewegung zu setzen gehabt, deren Gewicht $m = 484{,}2$ g beträgt, so würden die Schwingungen schneller gewesen sein, und zwar würde die Schwingungszeit im Verhältniss von $\sqrt{2(m + m')}$ zu $\sqrt{m}$ abgenommen haben, kurz die Schwingungszeit t' würde sein:

$$t' = t \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(m + m')}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

in unserem Falle also:

$$t' = 405 \sqrt{\frac{484}{1038}} = 276{,}55^s.$$

Dies ist also die Schwingungszeit eines einfachen, 100,1 cm langen Pendels, welches unter dem Einfluss der Elasticität des Aufhängedrahtes schwingt.

Für ein einfaches Pendel von gleicher Länge, welches unter dem Einfluss der Schwere schwingt, würde die Schwingungszeit gewesen sein:

$$t'' = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

in unserem speciellen Falle:

$$t'' = \frac{\sqrt{100,1}}{\sqrt{99,4}} = 1,0035 \text{ Secunden.}$$

Für zwei gleichlange einfache Pendel verhalten sich aber bei gleichem Ausschlagswinkel die beschleunigenden Kräfte, welche die Kugel in die Gleichgewichtslage zurücktreiben, umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Bezeichnen wir die beschleunigende Kraft, mit welcher die Elasticität des Aufhängedrahtes die Drehwage in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, mit k, mit K aber die Kraft, mit welcher die Kugel eines gewöhnlichen Pendels gegen seine Gleichgewichtslage getrieben wird, so haben wir:

$$k : K = t''^2 : t'^2,$$

also:

$$k = K \frac{t''^2}{t'^2}$$

oder:

$$k = K \cdot \frac{r}{l \,.\, t^2} \cdot \frac{2\,(m + m')}{m} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

wenn man für t' und für t'' ihre Werthe bei 1) und 2) setzt. Setzt man für t' und t'' die für unseren speciellen Fall berechneten Zahlenwerthe, so kommt:

$$k = \frac{K}{75945}.$$

Durch den Einfluss der Kugel h wird die Drehwage um B Theilstriche der Scala abgelenkt; wenn wir also mit x den Ablenkungswinkel bezeichnen, so ist:

$$\sin x = \frac{B}{2\,\mu}.$$

Wenn ein gewöhnliches einfaches Pendel um den Winkel x aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, so ist die Kraft K, welche die Kugel nach ihrer Gleichgewichtslage zurücktreibt, gleich $m \,.\, \sin x$, wenn m das Gewicht der Kugel ist: setzen wir für $\sin x$ den eben gefundenen Werth, so haben wir:

$$K = \frac{m \,.\, B}{2\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

also in unserem speciellen Falle, wenn für m, B und μ die oben angegebenen Zahlenwerthe gesetzt werden:

$$K = 0,3832\,\text{g}.$$

Demnach ist auch

$$k = \frac{B \cdot r \cdot (m + m')}{\mu \cdot l \cdot t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

oder für unseren speciellen Fall ergiebt sich für k der Zahlenwerth:

$$k = 0{,}0000050467 \text{ g}.$$

Dies ist also die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die Kugel h auf die Seite gezogen wird, während die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die gesammte Erde angezogen wird, gleich m ist. Denken wir uns nun die Masse M der Kugel h, sowie die Masse Q der ganzen Erde in den entsprechenden Mittelpunkten vereinigt, so haben wir zur Berechnung der Masse Q die Gleichung:

$$m : k = \frac{Q}{R^2} : \frac{M}{E^2}$$

und daraus:

$$Q = \frac{m \cdot M \cdot R^2}{E^2 k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

oder wenn man für k seinen oben bei 5) angegebenen Werth setzt:

$$Q = \frac{m \cdot M \cdot R^2 \mu l t^2}{E^2 \cdot Br(m + m')}.$$

Setzen wir aber in Gleichung 6) für k, m, M, R und E die früher angegebenen Zahlenwerthe, so finden wir für die Masse der Erde den Werth:

$$Q = 5\,914\,500\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ g}$$

oder:

118 000 Trillionen Centner.

Die mittlere Dichtigkeit der Erde findet man, wenn man die Masse Q durch das Volumen der Erde, also durch $\frac{4}{3} \pi R^3$ dividirt; man findet alsdann:

$$D = \frac{3\,Q}{4\pi R^3} = \frac{3\,M \cdot \mu l}{4\pi R \cdot r} \cdot \frac{m}{m + m'} \cdot \frac{t^2}{E^2 B} \cdot \quad \ldots \quad 7)$$

und wenn man für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt:

$$D = 5{,}476.$$

Aus einer grossen Reihe von Versuchen, welche Reich im Jahre 1837 anstellte, fand er als Mittel, mit Berücksichtigung aller nothwendigen Correctionen den Werth:

$$D = 5{,}44.$$

(F. Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage. Freiberg 1838.)

Im Jahre 1843 publicirte Baily in London die Resultate einer grossen Reihe von Versuchen, welche er im Auftrage der Royal Astronomical Society nach der Methode von Cavendish angestellt hatte.

Er fand die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}66.$$

Nach dem Bekanntwerden dieses Resultates wiederholte auch Reich seine Versuche, nachdem er einige Verbesserungen in seinem Apparate angebracht hatte, und fand:

$$D = 5{,}58.$$

(Abhandlungen der mathematisch-phyikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Band, 1852, S. 385.)

Im Jahre 1878 wurden neue Versuche mit der Drehwage von Cornu und Baille angestellt und ergaben für die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}56.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung dieser Grösse wurde im Jahre 1824 von Carlini angewandt, der die Länge des einfachen Secundenpendels auf dem Mont Cenis bestimmte, und durch Vergleichung mit Beobachtungen, welche Biot in Bordeaux angestellt hatte, die Grösse der Anziehung des Berges und daraus die mittlere Dichtigkeit der Erde ermittelte, für die er den Werth 4,39 fand, der aber von Schmidt nach einer Revision der Rechnungen zu

$$D = 4{,}84$$

festgestellt wurde.

Andere Pendelbeobachtungen wurden in grossen Tiefen angestellt; auf diese Weise fand Drobisch 1826

$$D = 5{,}43,$$

und Airy 1856 nach der Berechnung von Haughton:

$$D = 5{,}48.$$

Eine wesentlich andere Methode wurde vor einigen Jahren von Jolly angewandt. Derselbe befestigte an der unteren Seite der Schalen einer empfindlichen Wage Drähte von 21 m Länge, welche durch Oeffnungen in der Tischplatte, auf welcher die Wage stand, hindurchgingen, und an deren unteren Enden ebenfalls Schalen befestigt waren. Die Wage hatte also jetzt vier Schalen, von denen zwei dem Mittelpunkte der Erde um 21 m näher waren als die beiden anderen. Es zeigte sich deutlich, dass ein Gewicht, welches auf eine der unteren Schalen gesetzt wurde, von der Erde stärker angezogen wurde, als wenn man es auf die gerade darüber befindliche Schale setzte. Wurde nun noch unter die unteren Schalen eine Bleikugel von 1 m Durchmesser gebracht, so zeigte sich der Unterschied noch grösser. Aus diesen Versuchen ergab sich der Unterschied zwischen der Anziehung der Erde und derjenigen der Bleikugel, und hieraus konnte die mittlere Dichtigkeit der Erde ebenfalls abgeleitet werden. Dieselbe ergab sich zu

$$D = 5{,}692.$$

Aehnliche Versuche von Poynting aus dem Jahre 1878 haben fast genau dasselbe Resultat ergeben.

Eine Modification der von Jolly angewandten Methode ist von König und Richarz vorgeschlagen, indessen sind die von ihnen angestellten Versuche, durch welche die Anziehungskraft einer parallelepipedischen Bleimasse von 2000 Centner Gewicht ermittelt werden soll, noch nicht bis zur Ableitung eines definitiven Resultates gediehen.

Die neueste Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde ist auf dem astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam von Wilsing ausgeführt. Der Apparat bestand aus einem Pendel, dessen Schneide sich sehr nahe bei dem Schwerpunkte befand, wodurch die Schwingungszeit sehr langsam wurde. Als anziehende Massen wurden zwei Cylinder von Gusseisen im Gewichte von je 325 kg benutzt, und es ergab sich als Resultat der sehr sorgfältig ausgeführten Untersuchungen:

$$D = 5{,}579.$$

(Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, VI. Band, Potsdam 1889.)

110 **Dichtigkeit der Weltkörper verglichen mit der des Wassers.** Aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Resultaten ergiebt sich, dass die mittlere Dichtigkeit der Erde etwa 5,6 mal so gross ist als die des Wassers. Da nun das specifische Gewicht der Felsmassen' welche die feste Erdrinde bilden, kaum halb so gross ist, so müssen wir schliessen, dass das Innere der Erde aus Körpern von grösserem specifischen Gewichte bestehe, als die uns zugängliche äussere Kruste.

Verglichen mit Wasser, ist das specifische Gewicht

der Sonne	1,42
des Mercur	6,57
der Venus	4,52
der Erde	5,60
des Mars	3,98
des Jupiter	1,36
des Saturn	0,72
des Uranus	1,09
des Neptun	1,68

Die mittlere Dichtigkeit der Sonne und des Jupiter ist also ungefähr die des Ebenholzes, während Saturn und Uranus in ihrer Dichtigkeit dem Rothbuchen- und Weissbuchenholz nahe stehen.

Unter allen Planeten ist also Mercur der dichteste, nach ihm die Erde. Die geringste Dichtigkeit unter allen Planeten hat der Saturn.

111 **Grösse der Schwerkraft auf der Oberfläche der Sonne und der Planeten.** Nach §. 106 ist $V = f\frac{m}{\varrho^2}$ das Maass für die

Schwerkraft auf der Oberfläche eines Weltkörpers, wenn ϱ den Halbmesser und m die Masse desselben bezeichnet.

Setzen wir die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde gleich 1; nehmen wir ferner die Masse der Erde zur Masseneinheit, den Radius derselben zur Längeneinheit, so wird auch f gleich 1, und wir haben alsdann für die Schwerkraft auf der Oberfläche irgend eines anderen Weltkörpers

$$V = \frac{m}{\varrho^2},$$

wenn m und ϱ in den eben bezeichneten Einheiten ausgedrückt wird. So ist der Radius des Jupiter 11,06 mal so gross als der Erdhalbmesser, und die Masse des Jupiter ist 309 mal so gross als die Masse der Erde; folglich ist für Jupiter

$$V = \frac{309}{11{,}06^2} = 2{,}53.$$

In Folge der Abplattung der Planeten und der durch ihre Rotation entstehenden Fliehkraft müssen die auf obigem Wege gefundenen Zahlen noch etwas modificirt werden. So finden sich für die Sonne, den Mond und die Planeten folgende Werthe für die Schwerkraft auf ihrer Oberfläche im Aequator:

Namen der Himmelskörper	Schwere auf dem Aequator
Sonne	27,62
Mercur	0,44
Venus	0,80
Erde	1,00
Mars	0,38
Jupiter	2,25
Saturn	0,89
Uranus	0,75
Neptun	1,56
Mond	0,18

Dieselbe Masse, welche auf der Erdoberfläche 1 Centner wiegt, würde, auf die Oberfläche der Sonne gebracht, auf ihre Unterlage einen Druck ausüben, welcher gleich ist dem Druck von 27,6 Centnern auf der Erdoberfläche, während dagegen auf dem Monde die gleiche Masse nahezu sechsmal weniger stark auf ihre Unterlage drückt als auf der Erde. Es würde ungefähr gleiche Anstrengung erfordern, um auf der Erde einen Block von 2 cbdm Eisen, auf dem Jupiter einen solchen von 1 cbdm oder auf dem Monde einen solchen von 12 cbdm Rauminhalt zu tragen.

112 **Die Störungen.** Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz ist die Sonne, wie dies bereits angedeutet wurde, nicht mehr ein absolut fester Punkt, und wäre ausser der Sonne nur noch ein einziger Planet vorhanden, so würde der Planet sowohl wie die Sonne um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt eine Ellipse beschreiben. Dieser gemeinschaftliche Schwerpunkt wird dem Mittelpunkte der Sonne um so näher liegen, je kleiner die Masse des Planeten im Vergleich zu dem der Sonne ist, so dass also die Ellipse, welche der Mittelpunkt der Sonne zu beschreiben hätte, sehr klein wäre im Vergleich zu der vom Planeten beschriebenen. Mag man aber die Bewegung des Planeten nun auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt oder auf den Mittelpunkt der Sonne beziehen, so würde seine Bahn eine rein elliptische sein, so lange nur ein einziger Planet die Sonne umkreiste.

So verhält sich aber die Sache nicht. Die Sonne wird von vielen Planeten umkreist, und jeder dieser Planeten wird nicht allein von der Sonne, sondern zugleich von allen übrigen angezogen. Daraus folgt nun, dass die Bewegung eines jeden Körpers im Planetensysteme weit verwickelter ist, als wir bisher angenommen haben. Weil aber die Masse der Sonne die Masse der Planeten so bedeutend übertrifft, so ist die wahre Bahn jedes Planeten doch nur sehr wenig von der rein elliptischen abweichend.

Die Kepler'schen Gesetze sind demnach nur als Annäherungsgesetze zu betrachten, welche nahezu die wahre Bewegung der Planeten darstellen, aber doch noch Differenzen von derselben zeigen, welche glücklicherweise nicht gross genug waren, um Kepler an der Auffindung seiner einfachen Gesetze zu hindern.

Die Anziehungen, welche ein Planet von Seiten aller übrigen erfährt, werden ihn also nur sehr wenig von der elliptischen Bahn entfernen, welche er ohnedies verfolgen würde; die Modificationen, welche auf diese Weise in der Planetenbewegung hervorgebracht werden, nennt man Störungen (Perturbationen).

Um die Untersuchung dieser verwickelten Bewegung zu erleichtern, stellt man sich einen Planeten vor, welcher sich in einer elliptischen Bahn bewegt, deren Elemente eine allmähliche Aenderung erleiden, während dann der wahre Planet bald auf der einen, bald auf der anderen Seite dieses fictiven Planeten oscillirt, ohne sich zu weit von demselben zu entfernen.

Die allmählichen Veränderungen in den Elementen der elliptischen Bewegung des fictiven Planeten nennt man säculare Störungen, die Oscillationen des wahren Planeten aber auf die eine oder andere Seite des fictiven werden periodische Störungen genannt. Die allmähliche Aenderung der Schiefe der Ekliptik, das langsame Fortrücken des Periheliums der Planeten sind solche säculare Störungen, welche die Beobachtung nachgewiesen hat und von welchen die Theorie der allgemeinen Schwere Rechenschaft giebt.

Eines der merkwürdigsten Resultate, zu denen man geführt wurde, indem man die Störungen der Planetenbahnen zu berechnen suchte, ist das, dass die grossen Axen der elliptischen Bahnen, auf welchen sich die fictiven Planeten bewegen, stets dieselben Werthe beibehalten. Die säcularen Störungen afficiren alle Elemente der elliptischen Bewegung mit Ausnahme der grossen Axe, welche stets dieselbe bleibt. Da die Umlaufszeit eines Planeten durch das dritte Kepler'sche Gesetz mit der Länge der grossen Axe verknüpft ist, so hat die Unveränderlichkeit der grossen Axe auch die Unveränderlichkeit der Umlaufszeit zur Folge.

Die Excentricität und die Neigung der Planetenbahnen erleiden allmählich fortschreitende Veränderungen. Obgleich nun aber diese Aenderungen Jahrhunderte hindurch in demselben Sinne vor sich gehen, so sind sie dennoch periodisch, wenngleich diese Perioden von sehr langer Dauer sind, so dass weder die Excentricitäten noch die Neigungen der Planetenbahnen über gewisse ziemlich enge Grenzen hinaus ab- oder zunehmen.

In der Gesammtheit der eben angedeuteten Resultate in Betreff der grossen Axen, der Excentricitäten und der Neigungen der Planetenbahnen besteht das, was man die Stabilität des Weltsystems nennt.

Die Störungen, welche ein Planet auf die übrigen und namentlich auf diejenigen ausübt, deren Bahnen der seinigen zunächst liegen, sind natürlich von seiner Masse abhängig, und so kommt es, dass man aus den durch einen Planeten erzeugten Störungen auf seine Masse schliessen kann. Dies ist nun auch der einzige Weg, auf welchem sich die Masse derjenigen Planeten ermitteln lässt, welche nicht von Trabanten umkreist sind. Es ist begreiflich, dass die aus den Störungen abgeleiteten Werthe der Massen der Planeten nicht den Grad der Genauigkeit haben wie diejenigen, welche man aus Vergleichung ihrer Trabanten berechnet.

Entdeckung des Neptun. Bouvard fand 1821, dass die von 113
Herschel gemachten Beobachtungen des Uranus sich nicht mit denjenigen Bahnelementen in Uebereinstimmung bringen liessen, welche sich aus den Beobachtungen von 1781 und 1820 ergaben; aber auch später wich Uranus wieder merklich von der Bahn ab, welche er nach den von Bouvard berechneten Tafeln hätte durchlaufen sollen. Aus den Beobachtungen von 1833 bis 1834 hat Airy nachgewiesen, dass der Radius Vector für diese Jahre von den Tafeln um eine Grösse abweiche, welche die Entfernung des Mondes von der Erde übertrifft.

Daraus ergiebt sich nun, dass die Bahnelemente des Uranus verschieden ausfallen, je nachdem man sie aus verschiedenen Beobachtungsperioden ableitet.

Schon Bouvard zeigte, dass sich diese Abweichungen nicht auf die von Jupiter und Saturn herrührenden Störungen zurückführen liessen, und dass man zu ihrer Erklärung einen noch jenseits des Uranus um die Sonne kreisenden Planeten annehmen müsse.

In einem Vortrage, den Bessel am 28. Februar 1840 in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg hielt, sprach er ebenfalls über die Abweichung der Bewegung des Uranus von seiner berechneten Bahn, und fügte hinzu:

„Man muss nicht etwa glauben, dass dieser merkwürdige Fall gegen die Anziehungslehre selbst stritte...... Wahrscheinlich wird gerade die Lehre von der Anziehung den hier berührten Fall endlich erklären, indem sie zugleich eine Entdeckung im Sonnensysteme ergeben wird. Fernere Versuche der Erklärung werden nämlich die Absicht verfolgen, einem unbekannten Planeten jenseits des Uranus, der vielleicht wegen zu grosser Lichtschwäche nicht sichtbar ist, eine Bahn und eine Masse anzuweisen, welche so beschaffen sind, dass daraus Störungen des Uranus hervorgehen, welche die jetzt nicht vorhandene Uebereinstimmung seiner Beobachtungen herstellen.“

In der That war Bessel ernstlich mit der Untersuchung der auf die Bewegung des Uranus wirkenden, störenden Kräfte beschäftigt, als eine unheilbare Krankheit allen seinen ferneren Arbeiten ein Ende machte.

Nachdem sich darauf Leverrier von Neuem überzeugt hatte, dass man durch die bekannten Planeten die Störungen des Uranus nicht erklären könne, unternahm er es, den Ort und die Masse des noch unbekannten Planeten zu berechnen, welcher die fraglichen Abweichungen veranlasse.

Adams in Cambridge bearbeitete gleichzeitig denselben Gegenstand, ohne dass Einer von den Bestrebungen des Anderen Kenntniss hatte. Beide Gelehrte gelangten ganz unabhängig von einander zu demselben Ziele, indem sie den Ort am Fixsternhimmel bestimmten, wo der neue Planet zu suchen sei. Ihre Resultate stimmen fast ganz genau überein.

Leverrier publicirte indess seine Arbeit früher als Adams. Am 23. September 1846 erhielt Galle in Berlin die Nachricht von dem Resultat der Leverrier'schen Rechnungen, und es gelang ihm in der That, indem er das Fernrohr nach der bezeichneten Stelle des Himmels richtete, den gesuchten Planeten aufzufinden, welcher später den Namen Neptun erhielt.

Eigenthümliche Abweichungen haben sich ferner nach Leverrier's Untersuchungen in der Bewegung des Mercur gezeigt, dessen Perihel sich um 40 Bogensecunden während eines Jahrhunderts schneller bewegt, als die Berechnung der durch die anderen Planeten bewirkten Störungen ergiebt. Leverrier vermuthete daher einen oder eine Anzahl von Planeten innerhalb der Mercurbahn, es haben sich aber solche weder jemals vor der Sonne noch bei totalen Sonnenfinsternissen mit Sicherheit nachweisen lassen, im Gegentheil ist es höchst wahrscheinlich, dass vermeintliche Beobachtungen intramercurieller Planeten auf Irrthümern beruhten. Welches die wirkliche Ursache der Anomalien in der Mercurbewegung ist, lässt sich demnach noch nicht mit einiger Sicherheit angeben.

Störungen der Kometen. Die Kometen erleiden, wenn sie in 114
die Nähe von Planeten kommen, so grosse Störungen, dass ihre Umlaufszeit dadurch bedeutend vergrössert oder verkleinert, ja dass ihre Bahn so verändert wird, dass sie mit ihrer vorherigen Gestalt gar keine Aehnlichkeit mehr hat.

Ein merkwürdiges Beispiel der Art liefert uns der Lexell'sche Komet von 1770. Er hatte sich der Erde bis auf 360000 Meilen genähert, und die beobachteten Orte wichen so sehr von einer parabolischen Bahn ab, dass man für ihn eine elliptische Bahn zu berechnen suchte. In der That genügte den Beobachtungen eine Ellipse, deren grosse Axe 3,14 Erdweiten betrug, bei einer Umlaufszeit von 5 Jahren 209 Tagen.

Wenn man für die erwähnte elliptische Bahn rückwärts rechnet, so ergiebt sich, dass der Komet im Mai 1767 dem Jupiter so nahe war, dass die Wirkung dieses Planeten momentan stärker als die der Sonne sein musste; erst durch diese Einwirkung wurde der Komet in die Bahn gebracht, in welcher man ihn 1770 beobachtete, während er bis dahin eine ganz andere Bahn verfolgt hatte. In seiner neuen Bahn kam der Komet im Jahre 1776 abermals ins Perihelium, konnte aber nicht beobachtet werden, weil zu dieser Zeit die Sonne gerade zwischen den Kometen und die Erde zu stehen kam.

In der aus den Beobachtungen von 1770 berechneten Ellipse fortlaufend, musste aber dieser Komet im August 1779 dem Jupiter abermals sehr nahe, und zwar so nahe kommen, dass er zwischen dem Planeten und dem vierten Satelliten hindurchging. In dieser Nähe musste er vom Jupiter eine 24 mal stärkere Wirkung erfahren als von der Sonne, und dadurch wurde er wieder vollständig aus der Bahn gebracht, die er seit 1767 verfolgt hatte, weshalb er denn auch im Jahre 1781 nicht wieder beobachtet wurde, wo man eine sichtbare Wiederkehr desselben hätte erwarten können, wenn er nicht durch jene Störungen aus der Bahn von 1770 wäre abgelenkt worden.

Am 6. Juli 1889 entdeckte Brooks in Geneva (N. Y.) einen schwachen Kometen, dessen Bahn sich bald als elliptisch herausstellte. Es zeigte sich ferner nach einer Untersuchung, welche Chandler in Cambridge (Mass.) anstellte, dass der Komet sich im Mai 1886 innerhalb des Satellitensystems des Jupiter befunden hat, und dass in dieser Zeit die Anziehung des Jupiter diejenige der Sonne gegen den Kometen derartig überwog, dass der letztere eine hyperbolische Bahn um den Jupiter beschrieb. Es zeigte sich aber ferner, dass auch schon im Jahre 1779 eine starke Annäherung desselben Kometen an den Jupiter stattgefunden habe, und dass die Bahnelemente des Brooks'schen Kometen vor 1886 und die des Lexell'schen Kometen nach 1779 eine grosse Aehnlichkeit zeigen. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass im Jahre 1889 eine erneute Erscheinung des Lexell'schen Kometen beobachtet worden ist, doch sind die Untersuchungen hierüber noch nicht definitiv abgeschlossen.

Nach den früher bestimmten Bahnelementen sollte die Rückkehr des Halley'schen Kometen gegen Anfang des Jahres 1758 stattfinden. Nach Clairaut's Rechnungen hatte er aber seit seinem letzten Erscheinen bedeutende Störungen erlitten, und nach denselben war seine Rückkehr durch den Jupiter ungefähr um 518, durch Saturn um 100 Tage verzögert worden, so dass sie erst in der Mitte des April 1759 zu erwarten war. In Wirklichkeit ging der Halley'sche Komet am 12. März 1759 durch das Perihelium.

Während also einerseits die Kometen sehr bedeutende Störungen durch die Planeten erfahren, hat man bis jetzt noch keine Störungen nachweisen können, welche die Planeten durch Kometen erlitten hätten, woraus sich ergiebt, dass die Masse der Kometen sehr klein im Vergleich zu der Masse der Planeten sein muss.

Wäre z. B. der Komet von 1770 an Masse der Erde gleich, so müsste er in seiner Erdnähe solche Störungen hervorgebracht haben, dass das Erdjahr dadurch um fast drei Stunden verlängert worden wäre. Es ist aber nicht die mindeste Verlängerung der Jahresdauer bemerkt worden, während eine Verlängerung von zwei Secunden der Beobachtung nicht hätte entgehen können, woraus dann folgt, dass die Masse des Kometen von 1770 gewiss noch nicht $^1/_{5000}$ der Erdmasse sein kann.

115 **Störungen der Mondbahn.** Die raschen Aenderungen, welchen die Elemente der Mondbahn unterworfen sind (§. 70, S. 183), sind die Folge bedeutender störender Kräfte. Für den Mond ist die Erde der Centralkörper, und wenn sie nebst dem Monde allein im Raume sich befände, so würde der Mond eine Ellipse beschreiben, deren einen Brennpunkt die Erde einnimmt und deren Gestalt ebenso unveränderlich sein würde wie ihre Lage im Raume. Nun aber wirkt die Sonne auf den Mond als störender Körper, und in Folge ihrer so bedeutenden Masse sind auch die Störungen, welche sie im Mondlaufe hervorbringt, sehr bedeutend.

Die Erde wird ebenso wie der Mond beständig von der Sonne angezogen, und indem sie ihre Bahnen durchlaufen, fallen sie gewissermaassen stets gegen diesen Centralkörper hin. Wenn nun die Anziehungen der Sonne auf den Mond und auf die Erde immer gleich wären, so würde der Fall beider Weltkörper gegen die Sonne hin ganz derselbe sein; ihre gegenseitige Stellung würde also dadurch nicht alterirt werden, der Mond würde ganz so um die Erde kreisen, als ob die Sonne gar nicht vorhanden wäre.

So verhält es sich aber nicht. Die Anziehung, welche die Sonne auf den Mond ausübt, ist bald grösser, bald kleiner, als die Kraft, mit welcher die Erde von der Sonne angezogen wird, und daraus gehen dann Störungen hervor, deren vorzüglichste Wirkungen wir schon früher kennen lernten.

Zur Zeit des Neumondes ist der Mond der Sonne näher als die Erde, also wird zu dieser Zeit der Mond stärker von der Sonne angezogen als die Erde, der Mond gravitirt schneller gegen die Sonne hin als die Erde, der störende Einfluss der Sonne wirkt also jetzt dahin, den Abstand des Mondes und der Erde zu vergrössern.

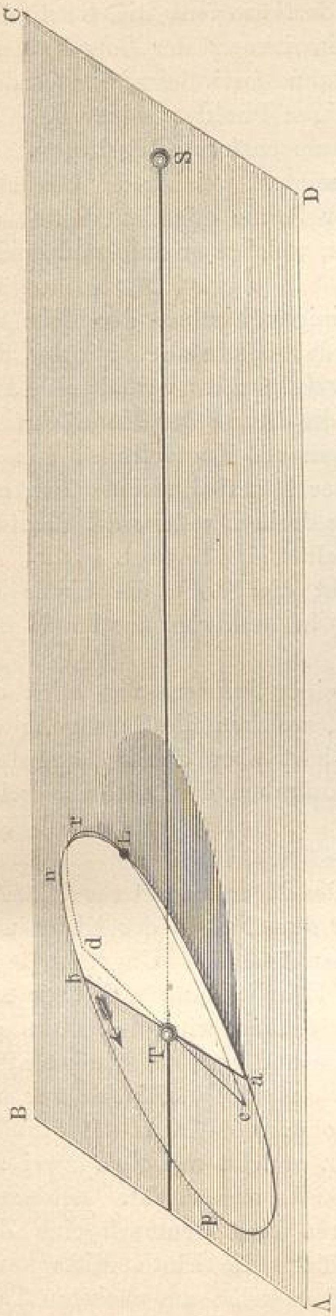


Fig. 168.

Zur Zeit des Vollmondes ist die Erde der Sonne näher, die Erde gravitirt also zu dieser Zeit stärker gegen die Sonne hin als der Mond, also auch jetzt wirkt die störende Kraft der Sonne dahin, die Entfernung der beiden Körper zu vergrössern.

Diese störende Wirkung der Sonne ist aber offenbar grösser, wenn sich die Erde in der Sonnennähe, kleiner, wenn sie sich in der Sonnenferne befindet, die Mondbahn muss sich deshalb etwas zusammenziehen, während die Erde sich vom Perihelium zum Aphelium bewegt, um sich dann wieder etwas auszudehnen, während die Erde den Bogen vom Aphelium bis zum Perihelium durchläuft.

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz muss aber diese Erweiterung und Zusammenziehung der Mondbahn auch ein periodisches Ab- und Zunehmen der Umlaufszeit des Mondes zur Folge haben; die Umlaufszeit des Mondes muss also ungefähr zur Zeit des Wintersolstitiums etwas grösser sein, als zur Zeit des Sommersolstitiums.

Diese periodische Aenderung in der Umlaufszeit des Mondes, welche den Namen der jährlichen Gleichung führt, war bereits von Tycho Brahe beobachtet worden. In der That ist die siderische Umlaufszeit des Mondes zu Anfang des Jahres ungefähr um $1/_4$ Stunde grösser als in der Mitte des Jahres.

Wir wollen nun noch versuchen, so weit es auf elementarem Wege möglich ist, verständlich zu machen, wie durch den störenden Einfluss der Sonne der Rückgang der Knoten der Mondbahn bewirkt wird.

Es stelle $ABCD$, Fig. 168 (a. v. S.), ein Stück der Ebene der Erdbahn dar; S sei die Sonne, T die Erde, $aLbp$ die Mondbahn, welche die Ekliptik in der Knotenlinie ab schneidet. Ohne die Einwirkung der Sonne würde der Mond stets in derselben Ebene sich fortbewegen, die Knotenlinie würde also unverändert bleiben. Die Einwirkung der Sonne äussert aber ein Bestreben, die Ebene seiner Bahn fortwährend zu ändern, namentlich wenn der Mond sich in denjenigen Punkten seiner Bahn befindet, welche der Sonne am nächsten und am entferntesten liegen.

In dem Punkte L seiner Bahn angekommen, welcher der Sonne am nächsten liegt, strebt die Einwirkung der Sonne offenbar dahin, den Mond aus der durch T und das Bogenstück, welches er zuletzt durchlief, gelegten Ebene herauszubringen.

Statt dass der Mond unter dem alleinigen Einfluss der Erde nun den Bogen Lnb zurückgelegt haben würde, beschreibt er unter dem störenden Einfluss der Sonne den Bogen Lrd, kurz, es verhält sich Alles so, als ob unter dem Einfluss der Sonne die Ebene der Mondbahn um die Linie LT gedreht würde, wodurch dann die Knotenlinie ab in die Lage cd gebracht wird; die Knotenlinie der Mondbahn muss sich also in der Ebene der Ekliptik in einer Richtung drehen, welche der Richtung entgegengesetzt ist, in welcher der Mond selbst sich bewegt.

Ganz in der gleichen Richtung strebt die Sonne die Ebene der Mondbahn zu drehen, wenn sich derselbe in dem von der Sonne entferntesten Theile seiner Bahn befindet.

So giebt denn das Gesetz der allgemeinen Schwere von allen den verschiedenen Ungleichheiten Rechenschaft, welchen die Bewegung des Mondes unterworfen ist; ohne Zweifel gehört aber dieser Gegenstand zu den schwierigsten und verwickeltsten Aufgaben der mathematischen Analysis.

116 **Ebbe und Fluth.** Die Oberfläche des Meeres zeigt regelmässige und periodische Oscillationen, welche unter dem Namen der Ebbe und Fluth oder der Gezeiten (Tiden) bekannt sind. Ungefähr sechs Stunden lang steigt das Meer, das ist die Fluth; dann fällt es wieder in den nächsten sechs Stunden, und dieses Sinken wird die Ebbe genannt. An jedem Tage findet zweimal Ebbe und zweimal Fluth statt.

Der Zeitraum, innerhalb dessen diese doppelte Oscillation vor sich geht, ist jedoch nicht genau 24 Stunden, sondern im Mittel 24 Stunden 50 Minuten 28 Secunden, gerade die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen des Mondes verstreicht. Zwischen einem Maximum der Fluth bis zum anderen liegt demnach eine Zeit von $12^h\,25^m\,14^s$. Wenn also an einem Tage die Fluth Mittags um 12 Uhr ihre grösste Höhe erreicht, so wird dasselbe am nächsten Tage um $12^h\,50^m$, am zweiten um $1^h\,41^m$, am dritten um $2^h\,31^m$ u. s. w. stattfinden, und zwischen zwei Nachmittags- oder Abendfluthen wird dann immer eine Morgenfluth in der Mitte liegen.

Die Höhe der Fluth, d. h. der Unterschied zwischen dem Niveau des Meeres zur Zeit seines höchsten und seines darauf folgenden tiefsten Standes ist selbst für einen und denselben Ort nicht unveränderlich, sondern erleidet theils periodische, theils zufällige Schwankungen. Die letzteren werden vorzugsweise durch Winde und Stürme bedingt, welche je nach Umständen das Steigen der Fluth bald begünstigen, bald hemmen. Die periodischen Schwankungen, welchen die Höhe der Fluth unterworfen ist, sind aber in ihrem grössten Theile von den Phasen des Mondes abhängig. Die Höhe der Fluthen wird am grössten zur Zeit des Neumondes und des Vollmondes (Springfluth), sie ist am kleinsten zur Zeit der Quadraturen.

Aus alledem ersieht man, dass Ebbe und Fluth eine vorzugsweise vom Mond abhängige Erscheinung ist, und in der That tritt auch das Maximum der Fluth stets um eine bestimmte Zeit, nach dem Durchgange des Mondes durch den Meridian, ein. Die Uhrzeit des Hochwassers an den Tagen des Vollmondes und Neumondes nennt man die Hafenzeit (engl. Establishment); dieselbe ist von einem Orte zum anderen in Folge localer Ursachen verschieden.

So beträgt die Hafenzeit in

Plymouth	$5^h\ 37^m$	Cuxhaven	$0^h\ 49^m$
Dublin	11 12	Hamburg	5 10
Stromness (Orkney-I.)	9 0	Wilhelmshaven	0 50
Aberdeen	1 0	Boulogne	11 0
Newcastle	3 46	Cherbourg	7 49
London	1 58	St. Malo	9 51
List	2 0	Brest	3 47
Helgoland	11 33	Lissabon	2 30

Ebenso ist die Fluthhöhe sehr von localen Verhältnissen abhängig; im Mittelländischen Meere ist die Ebbe und Fluth kaum merklich, dagegen ist sie an den Küsten von Frankreich und England sehr bedeutend. So ist z. B. die Fluthhöhe bei Springfluthen über dem mittleren Niedrigwasser in

Plymouth	4,7 m	Hamburg	1,9 m
Dublin	3,7	Wilhelmshaven	3,5
Aberdeen	3,7	Boulogne	7,7
London	6,3	St. Malo	10,7
Helgoland	2,1	Brest	5,8
Cuxhaven	2,8		

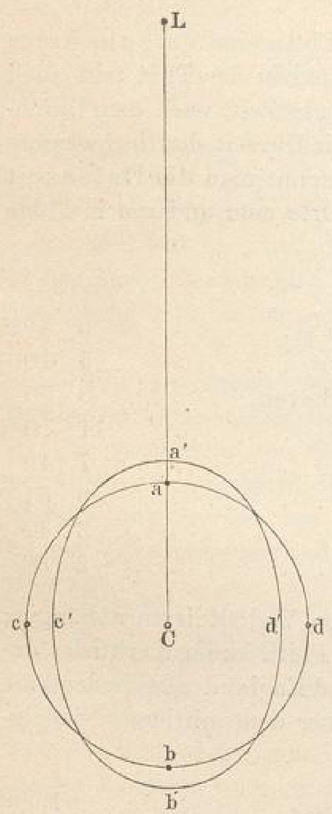
Bei Newport am Bristol-Canal erreicht die Springfluth die Höhe von 11,6 m. Die höchsten Fluthen auf der ganzen Erde hat wohl die Fundybai, an der südöstlichen Küste des britischen Nordamerika, aufzuweisen. Im Hintergrunde dieser Bai steigen die Springfluthen bis zu einer Höhe von 20 bis 23 m.

An kleinen mitten im Ocean liegenden Inseln ist die Fluth nicht bedeutend; so beträgt die Fluthhöhe auf St. Helena nur 0,3, auf den Inseln der Südsee nur 0,2 m.

Unter sonst gleichen Umständen nimmt die Fluthhöhe von dem Aequator nach den Polen hin ab; an der nördlichen Küste von Norwegen ist sie sehr unbedeutend.

117 **Mechanische Erklärung der Ebbe und Fluth.** Da alle Wirkungen im Planetensystem gegenseitig sind, so gravitirt nicht allein der Mond gegen die Erde, sondern auch die Erde gegen den Mond. Da aber nicht alle Punkte der Erdkugel in gleichem Abstande von dem Monde stehen, so sind sie auch ungleichen Anziehungskräften unterworfen und daraus eben entspringt die Ebbe und Fluth.

Fig. 169.



Wir wollen zunächst die Wirkung der anziehenden Kraft des Mondes auf das Meer unter der Voraussetzung betrachten, dass die Oberfläche des Wassers in jedem Augenblicke diejenige Form annimmt, welche durch die gemeinsame Anziehung des Mondes und der Erde bedingt wird; wir sehen also ab von allen Hindernissen, die sich der freien Bewegung des Wassers entgegenstellen können.

Es sei C der Mittelpunkt der Erde (Fig. 169), L der Mond, so wird der Punkt a der Erdoberfläche stärker vom Monde angezogen werden als C, und wenn a nicht fest mit C verbunden ist, so wird a mit grösserer Beschleunigung gegen L gravitiren als C, es wird sich ein Streben zeigen, a von C zu entfernen. Wenn sich also auf der dem Monde zugewandten Seite der Erde gerade ein grosser Ocean befindet, so wird hier das Niveau des Meeres steigen.

Ganz das Gleiche findet an der von dem Monde entferntesten Stelle b der Erdoberfläche statt. Hier in b wirkt die anziehende Kraft des Mondes geringer als in C, der Mittelpunkt der Erde gravitirt stärker gegen den Mond als b, und so wird sich auch bei den in der Nähe von b gelegenen Massen das Streben geltend machen, sich von dem Erdmittelpunkte zu entfernen.

Wäre die Erde ganz mit Wasser bedeckt, so würde die sonst kugelförmige Oberfläche derselben die Gestalt $a'c'b'd'$ annehmen; denn indem das Wasser bei a und b steigt, muss es nothwendig bei c und d sinken. Es würde also Fluth sein an den Orten, für welche der Mond im Meridian steht, sei es nun in oberer oder unterer Culmination, Ebbe aber an den Orten, für welche der Mond gerade auf- oder untergeht.

Bezeichnen wir mit d den Abstand des Erdmittelpunktes von dem Mittelpunkte des Mondes, so ist die Kraft, mit welcher die Masseneinheit in C vom Monde angezogen wird, $\frac{fm}{d^2}$, wenn m die Masse des Mondes ist. Die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse in a vom Monde angezogen wird, ist aber $\frac{fm}{(d - r^2)}$, wenn r den Halbmesser der Erde bezeichnet; folglich ist die Differenz der Kräfte, welche in C und a wirken:

$$D = \frac{fm}{(d - r)^2} - \frac{fm}{d^2}.$$

Entwickelt man den ersten Theil dieses Werthes, indem man die Division von fm durch $(d - r)^2$ (also durch $d^2 - 2dr + r^2$) ausführt, so kommt:

$$\frac{fm}{(d - r)^2} = \frac{fm}{d^2} + \frac{2fmr}{d^3} + \frac{3fmr^2}{d^4} + \text{etc.},$$

und wenn man davon $\frac{fm}{d^2}$ abzieht, so bleibt:

$$D = \frac{2fmr}{d^3} + \frac{3fmr^2}{d^4} + \text{etc.}$$

Da der Werth von d sehr gross ist im Vergleich gegen r, so kann man ohne Weiteres alle Glieder dieser Reihe vernachlässigen, welche d^4 und höhere Potenzen von d im Divisor haben; es bleibt also:

$$D = \frac{2fmr}{d^3}.$$

Nun aber bewirkt die Sonne in ganz ähnlicher Weise Ebbe und Fluth, wie der Mond, nur sind die Sonnenfluthen wegen der grösseren Entfernung der Sonne weniger hoch als die Mondfluthen. Bezeichnen wir mit m' die Masse der Sonne, mit d' ihre Entfernung von der Erde, so haben wir also für die Kraft, welche die Sonnenfluth veranlasst:

$$D' = \frac{2fm'r}{d'^3}.$$

Nun aber ist $d' = 387\,d$ und $m' = 324439.81 . m$ (da die Masse des Mondes $^1/_{81}$ von der Erde beträgt) und danach ergiebt sich dann:

$$D' = \frac{2fr . m . 324439 . 81}{d^3 387^3} = 0{,}411\,D;$$

die Höhe der Sonnenfluthen ist also nahe $^2/_5$ so gross, als die Höhe der Mondfluthen. Da sich nun zur Zeit des Neu- und Vollmondes die Sonnen- und Mondfluthen summiren, so ist die Kraft, welche die Gesammtfluth veranlasst:

$$1 . 4\,D.$$

Zur Zeit der Quadraturen aber fällt die Mondfluth mit der Sonnenebbe zusammen, die Gesammtfluth erreicht alsdann die Höhe

$$D - 0{,}4\,D = 0{,}6\,D,$$

zur Zeit der Syzygien erreicht also die Fluth eine mehr als zweimal grössere Höhe, als zur Zeit des ersten und letzten Mondviertels. Diejenigen Fluthen, bei welchen die Wirkung der Sonne und des Mondes sich vollständig addiren, nennt man Springfluthen, diejenigen dagegen, bei welchen sich die Wirkungen am meisten gegenseitig aufheben, Nippfluthen oder taube Fluthen.

Wäre die ganze Erdoberfläche mit Wasser bedeckt, wäre ferner die Tiefe des Meeres überall gleich und fände die Bewegung des Wassers keinen Widerstand am Grunde des Meeres, so würde der Verlauf der Ebbe und Fluth ein sehr einfacher sein. Alle Punkte, welche auf demselben Meridian liegen, müssten zu gleicher Zeit Hochwasser haben; die Fluthwellen würden, von Nord nach Süd sich erstreckend, in der Richtung von Osten nach Westen fortschreiten, und zwar würde eine solche Fluthwelle den Weg um die ganze Erde in 24 Stunden zurücklegen, am Aequator also mit einer Geschwindigkeit von 225 geographischen Meilen in der Stunde fortschreiten müssen. — Ihre grösste Höhe müsste eine Fluthwelle an derjenigen Stelle eines Meridians erreichen, an welcher der Mond durch das Zenith geht.

In Folge der ungleichen Vertheilung von Wasser und Land, sowie des Widerstandes, welchen die Bewegung der Wellen durch den Meeresboden erfährt, wird das Phänomen der Ebbe und Fluth nicht unwesentlich verändert. Die Beobachtungen ergeben nämlich, dass das Hochwasser nicht zu der Zeit der Culmination des Mondes stattfindet, sondern später, und dass die Springfluthen sich zum Theil um mehrere Tage gegen den Eintritt des Neu- oder Vollmondes verspäten. So tritt z. B. bei Brest das höchste Wasser $1^1/_2$ Tage nach den Syzygien ein, und in der Nordsee ist die Verspätung eine noch weit grössere. Es ist dies eine Folge davon, dass die Geschwindigkeit der Wellen auf der Meeresoberfläche, welche durch die Anziehung des Mondes und der Sonne entstehen, von der Tiefe des Meeres und der Configuration der Festländer bedeutend beeinflusst wird.

Newton war der Erste, welcher das Phänomen der Gezeiten durch die Attraction des Mondes und der Sonne erklärte. Er machte die Voraussetzung, dass die ganze Erde vom Wasser bedeckt sei, dass die Erde dieselbe Dichtigkeit habe wie das Wasser, und dass die Oberfläche des Meeres in jedem Augenblicke diejenige Gestalt annähme, bei welcher es sich unter der anziehenden Kraft des Mondes, der Sonne und der Erde im Gleichgewicht befände. Dabei fand sich, was wir ebenfalls oben gefunden haben, dass die Kraft, mit welcher eine Masseneinheit des Wassers durch die Anziehung eines Gestirns vom Erdmittelpunkte entfernt wird, direct proportional der Masse des anziehenden Körpers und umgekehrt proportional dem Würfel seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte ist. Da aber diese Entfernung sowohl bei der Sonne als auch beim Monde periodisch veränderlich ist, so ist auch die Fluthhöhe veränderlich und hat zwei Perioden, deren eine einen Mondmonat und die andere ein Jahr umfasst. Wir fanden für die Kraft, mit welcher der Mond den Punkt a (Fig. 169) vom Mittelpunkte C der Erde zu entfernen strebt, $D = \frac{2fmr}{d^3}$. In der Entfernung d zieht aber der Mond den Mittelpunkt der Erde mit einer Kraft $\varDelta$ zu sich, welche $= \frac{fm}{d^2}$ ist, und es ist demnach $\frac{D}{\varDelta} = \frac{2r}{d}$, d. h. es verhält sich die flutherzeugende Kraft des Mondes zu der Anziehung des Mondes gegen den Mittelpunkt der Erde, wie der Durchmesser der Erde zu der Entfernung des Mondes von der Erde. Ganz ebenso verhält sich die flutherzeugende Kraft der Sonne zu der Kraft, mit welcher die Erde von der Sonne angezogen wird, wie der Durchmesser der Erde zu der Entfernung der Erde von der Sonne. Da nun die Entfernung des Mondes von der Erde 30 mal und die der Sonne von der Erde 12 000 mal so gross ist, wie der Durchmesser der Erde, so ergiebt sich, dass der 30. Theil der Anziehung des Mondes, und der 12 000. Theil der Anziehung der Sonne auf die Bildung der Fluth wirkt. Da ferner die anziehende Kraft der Sonne gegen die Erde 160 mal so gross ist wie die des Mondes, so verhält sich die fluthbildende Kraft des Mondes zu derjenigen der Sonne wie 12 000 : 160 . 30 oder wie 10 : 4, sowie wir auch oben gefunden haben.

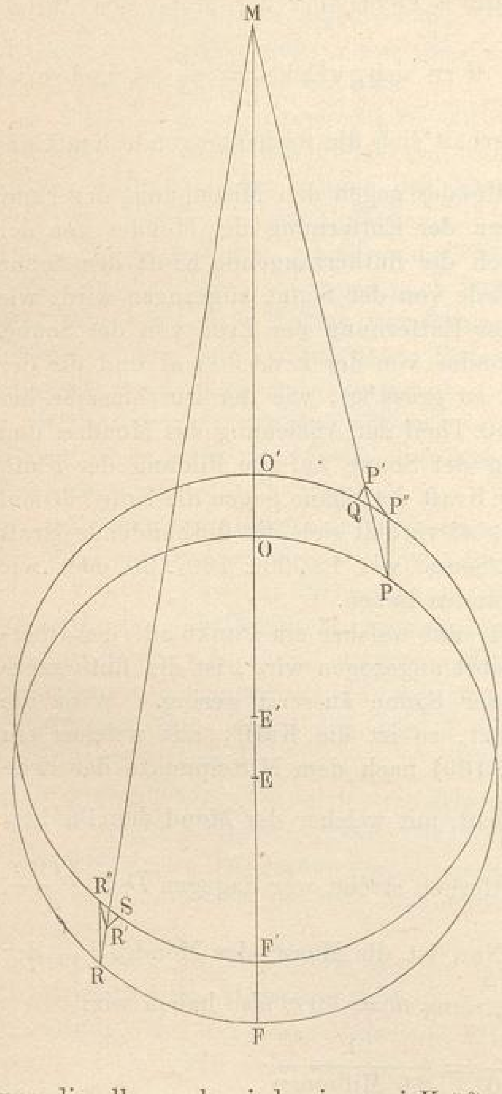
Im Verhältniss zu der Kraft, mit welcher ein Punkt auf der Oberfläche der Erde von der Erde selbst angezogen wird, ist die flutherzeugende Kraft des Mondes und der Sonne äusserst gering. Wird die Masse der Erde mit μ bezeichnet, so ist die Kraft, mit welcher ein Punkt a der Erdoberfläche (Fig. 169) nach dem Mittelpunkte der Erde gezogen wird, $\delta = \frac{f\mu}{r^2}$. Die Kraft, mit welcher der Mond den Punkt a vom Mittelpunkte der Erde zu entfernen strebt, war dagegen $D = \frac{2fmr}{d^3}$, und es ist also $\frac{D}{\delta} = \frac{2r^3m}{\mu d^3}$. Nun ist die Masse des Mondes $^1/_{80}$ der Masse der Erde, und seine Entfernung $d = 60\,r$, also haben wir:

$$\frac{D}{\delta} = \frac{2}{60^3 . 80} = \frac{1}{8{,}6 \text{ Millionen}}.$$

Für die Sonne findet sich der entsprechende Werth $\frac{D'}{\delta} = \frac{2}{5} \cdot \frac{D}{\delta}$ $= \frac{1}{21{,}5 \text{ Millionen}}$. Befindet sich demnach der Mond im Zenith des Punktes a, so wird das Gewicht irgend eines in a befindlichen Gegen-standes durch die Einwirkung des Mondes um seinen neunmillionten Theil verringert; es ist dieses eine Gewichtsveränderung, welche selbst mit den schärfsten Instrumenten nicht direct nachgewiesen werden kann.

Wenn diese geringe flutherzeugende Kraft trotzdem im Meere Niveauunterschiede von sehr merkbarem Betrage hervorrufen kann, so liegt dies daran, dass wir hier die Gesammtwirkung auf eine sehr grosse Anzahl von Wassertheilen beobachten.

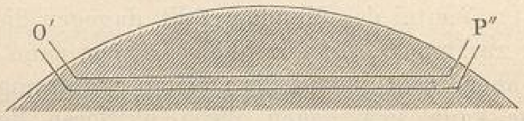
Fig. 170.



Es sei in E (Fig. 170) der Mittelpunkt der Erde, in M der Mittelpunkt des Mondes. In irgend einer Zeiteinheit wird E sich durch die Anziehung des Mondes nach E' bewegen. Ein Punkt P auf der Oberfläche des Meeres wird in derselben Zeiteinheit ebenfalls in der Richtung nach M fallen, und möge nach P' kommen, so dass $PP' > EE'$ ist. Wäre die Erde eine starre Masse, so würde P sich in derselben Zeit nicht nach P', sondern nach P'' bewegt haben, so dass PP'' gleich und parallel EE' wäre. Das Wassertheilchen P hat also das Bestreben, ausser der Bewegung, welche es in Folge der Bewegung des Erdmittelpunktes annimmt, sich noch von P'' nach P' zu bewegen. Die Kraft, welche das Theilchen zu bewegen strebt, wollen wir ihrer Grösse und Richtung nach durch die Linie $P'P''$ darstellen. Wir können uns dieselbe noch wieder in zwei Kräfte $P'Q$ und $P''Q$ zerlegt denken, von denen die eine $P'Q$ normal gegen die Oberfläche des Meeres wirkt, und bestrebt ist, das Gewicht des Wassertheilchens zu verringern, während die andere ($P''Q$) tangential gegen die Erdoberfläche wirkt, und dem Wassertheilchen eine seitliche Bewegung in der Richtung nach dem Punkte O' ertheilt, in welchem der Mond sich im Zenith befindet. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass durch jede dieser beiden Kräfte eine Erhöhung der Wasserfläche entstehen muss, welche in O' ihr Maximum hat.

Denken wir uns eine Röhre, welche in O' und P'' (Fig. 170 und 171) aufwärts gebogen ist, deren übriger Theil sich aber unter der Wasseroberfläche befindet. Wir wollen zunächst annehmen, dass das Wasser in der Röhre unter dem alleinigen Einflusse der Erdanziehung im Gleichgewichte ist. Tritt dann eine Anziehung des Mondes M ein, den wir uns im Zenith von O' vorstellen, so wird diese Anziehung in O' stärker wirken als in P'', es wird also derselbe Fall eintreten, als wenn der nach O' gelegene Theil der Röhre mit einer leichteren Flüssigkeit gefüllt wäre, als der nach P'' gelegene. Das Wasser in der Röhre muss also bei O' höher steigen als bei P'', und zwar wird der Unterschied um so grösser sein, je länger die Röhre ist, d. h. je weiter O' von P'' entfernt ist, und sein Maximum dann erreichen, wenn für P'' der Mond im Horizont steht. Es hat aber, wie vorhin gezeigt ist, auch jedes Wassertheilchen in der Röhre das Bestreben, sich in der Richtung nach O' fortzubewegen; hierdurch wird ein Druck auf alle weiter vorn befindlichen Wassertheilchen ausgeübt, und in Folge dessen wird ebenfalls ein Steigen des Wassers in O'

Fig. 171.



und ein Fallen in P'' bewirkt. Man kann sich aber die um O' befindliche Wasserfläche als aus einer grossen Anzahl einzelner Röhren zusammengesetzt denken, und es folgt daraus, dass durch den Einfluss des Mondes das Wasser in O' um so höher steigen muss, je grösser die um O' befindliche Wasserfläche ist.

Dass auf der vom Monde abgekehrten Seite der Erde ähnliche Verhältnisse stattfinden, lässt sich gleichfalls leicht zeigen.

In der Zeit, während welcher der Erdmittelpunkt durch die Anziehung des Mondes von E nach E' fällt, würde, wenn die Erde starr wäre, ein Punkt R auf der Erdoberfläche sich nach R'' bewegen, so dass RR'' gleich und parallel EE' ist. Dagegen hat der Punkt R das Bestreben, sich während derselben Zeit in der Richtung RM nach dem Monde M zu bewegen, und zwar nach einem Punkte R' hin, der wegen der grösseren Entfernung von M näher bei R liegt, als E' von E. Ausser der Bewegung, welche der Punkt R in Folge des Fallens der Erde gegen den Mond erhält und welche ihn nach R'' bringen würde, hat er demnach noch das Bestreben, sich von R'' nach R' zu bewegen. Die Kraft, welche ihn dorthin zu bewegen strebt, können wir wieder in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine, die wir mit $R''S$ bezeichnen wollen, den Punkt nach F' hin bewegt, wo der Mond sich im Nadir befindet, während der andere ihn von dem Mittelpunkte E' der Erde zu entfernen strebt. Beide Wirkungen werden sich wieder vereinigen, um die Oberfläche des Wassers in der Nähe von F zu erhöhen, und zwar um so mehr, je ausgebreiteter die um F'' befindliche Wassermasse ist.

Wäre die Erdoberfläche ganz vom Wasser bedeckt, und nähme sie in jedem Augenblicke die Gestalt an, welche die Anziehung der Erde selbst, sowie der Sonne und des Mondes ihr mitzutheilen streben, so würde die grösste Fluthhöhe im Meere den Betrag von nicht ganz einem Meter haben. In einem eingeschlossenen Meeresbecken von Dimensionen, welche gegen die Oberfläche der Erde sehr klein sind, würde aber die Fluthhöhe sehr viel geringer sein, und die Folge davon ist, dass man in solchen Meeresbecken, wie z. B. dem Caspischen, Schwarzen und selbst im Mittelländischen Meere, nur sehr geringe Spuren der Ebbe und Fluth wahrnimmt.

Es habe nun an irgend einem Punkte der Meeresoberfläche die Fluth, soweit sie von der Sonne allein hervorgebracht wird, eine Höhe von 20 cm, so wird die durch den Mond hervorgebrachte Fluth, da seine flutherzeugende Kraft, wie oben gezeigt, $2^1/_2$ mal so gross ist, als die der Sonne, eine Höhe von 50 cm haben. Zur Zeit der Syzygien (Neu- und Vollmond) werden die beiden genannten Fluthen zusammenfallen, ihre Gesammthöhe wird also 70 cm betragen. Zur Zeit der Quadraturen (erstes und letztes Viertel des Mondes) fällt dagegen die Mondfluth mit der Sonnenebbe zusammen, die Fluthhöhe beträgt dann also nur 30 cm. Der Mond hat aber nicht immer die gleiche Entfernung von der Erde, sondern dieselbe kann sich gegen ihren mittleren Betrag um ihren 18. Theil vergrössern oder verkleinern. Es ist aber oben gezeigt, dass die flutherzeugende Kraft umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung ist; setzen wir demnach die flutherzeugende Kraft des Mondes in seiner mittleren Entfernung $A = V$, in der Entfernung $A \pm \frac{1}{18} A = V'$, so ist

$$\frac{V}{V'} = \left(A \pm \frac{1}{18} A\right)^3 : A^3$$

$$= \left\{A\left(1 \pm \frac{1}{18}\right)\right\}^3 : A^3$$

$$= A^3\left(1 \pm \frac{1}{6} + \frac{3}{18^2} \pm \frac{1}{18^3}\right) : A^3$$

oder sehr nahe $$= A^3\left(1 \pm \frac{1}{6}\right) : A^3,$$

also $$V = V'\left(1 \pm \frac{1}{6}\right).$$

Es kann sich demnach die flutherzeugende Kraft des Mondes gegen ihren mittleren Betrag um ihren sechsten Theil vergrössern oder verringern, und da wir sie in unserem Beispiele im Mittel zu 50 cm annahmen, so kann sie zwischen 42 und 58 cm variiren. Die höchste Fluth würde hiernach den Betrag 78, die niedrigste 22 cm betragen.

Ebenfalls hat die verschiedene Entfernung der Sonne einen Einfluss auf die Fluthhöhe; da sie sich aber nur um ihren 60. Theil gegen den mittleren Betrag vergrössern oder verringern kann, so kann die fluth-erzeugende Kraft der Sonne sich nur um ihren 20. Theil verändern. Da wir die mittlere Sonnenfluth zu 20 cm annahmen, so kann demnach die höchste Springfluth bis auf 79, die niedrigste Nippfluth bis auf 21 cm kommen.

Wir haben bisher noch nicht untersucht, wie sich die Höhe einer Zenithfluth zu derjenigen der gleichzeitigen Nadirfluth verhält. Die flutherzeugende Kraft des Mondes in a (Fig. 169) fanden wir zu

$$\frac{2fmr}{d^3} + \frac{3fmr^2}{d^4} + \cdots$$

Wir wollen diese Kraft jetzt mit $D_{(a)}$ bezeichnen. Die flutherzeugende Kraft in b würde sich dagegen folgendermaassen ergeben:

$$D_{(b)} = \frac{2fmr}{d^3} - \frac{3fmr^2}{d^4} + \cdots$$

Es ergiebt sich also die Differenz zwischen den flutherzeugenden Kräften in a und b, wenn wir von höheren Potenzen von $\frac{1}{d}$ absehen,

$$D_{(a)} - D_{(b)} = 6\frac{fmr^2}{d^4}.$$

Nun war aber $D_{(a)}$ genähert $= \frac{2fmr}{d^3}$, und demnach, für unseren Zweck mit hinreichender Genauigkeit,

$$D_{(a)} - D_{(b)} = 3\frac{r}{d} \cdot D_{(a)}.$$

Für den Mond ist $\frac{r}{d} = \frac{1}{60}$, und da wir in unserem Beispiele $D_{(a)} = 50$ cm annahmen, so wird $D_{(a)} - D_{(b)} = 2{,}5$ cm, und also $D_{(b)} = 47{,}5$ cm.

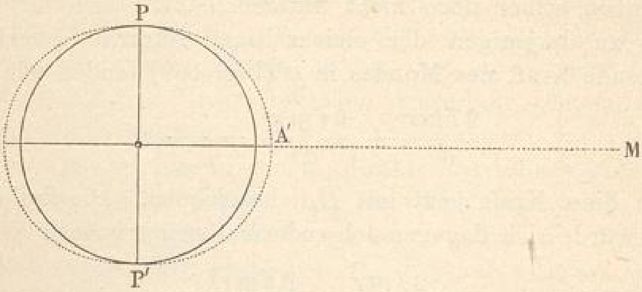
Mit Rücksicht hierauf kann demnach die niedrigste Nippfluth den Betrag von 18,5 cm haben. Bei der Sonne ist der Unterschied zwischen Zenith- und Nadirfluth völlig bedeutungslos, weil hier $\frac{r}{d}$ nur den Betrag von $\frac{1}{23000}$ hat, woraus sich in unserem Beispiel $D_{(a)} - D_{(b)}$ zu $^1/_{40}$ mm ergiebt.

Es lässt sich übrigens leicht sehen, dass für einen bestimmten Beobachtungsort die Höhe der Fluth auch von der geographischen Breite und der Declination des Mondes und der Sonne abhängig ist.

Nehmen wir zunächst an, dass sich das anziehende Gestirn M (Fig. 172, a. f. S.) in der Ebene des Aequators befindet, dann wird offenbar die höchste

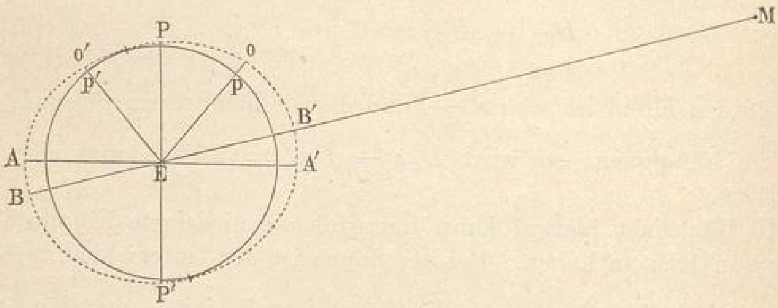
Fluth an denjenigen Punkten der Erdoberfläche stattfinden, welche sich auf dem Erdäquator AA' befinden; in höheren Breiten wird dagegen die Höhe der Fluth successive geringer und an den Polen P und P' wird sie völlig verschwinden. Es geht hieraus also hervor, dass die Fluthhöhe eine Function der geographischen Breite ist. Wenn aber der Mond sich nördlich oder südlich vom Aequator befindet (Fig. 173), so

Fig. 172.



wird die höchste Fluth nicht mehr unter dem Aequator AA', sondern in jedem Augenblicke an zwei Punkten B und B' stattfinden, von denen der eine den Mond im Zenith und der andere im Nadir hat; auch an den Polen P und P' wird jetzt ein kleiner Fluthwechsel stattfinden. In diesem Falle wird aber für jeden Ort, welcher sich nicht gerade auf dem Aequator oder einem der Pole befindet, die Höhe der Fluth eine verschiedene sein, je nachdem der Mond sich in der oberen oder unteren Culmination befindet. Es sei z. B. o (Fig. 173) ein Punkt der Meeres-

Fig. 173.

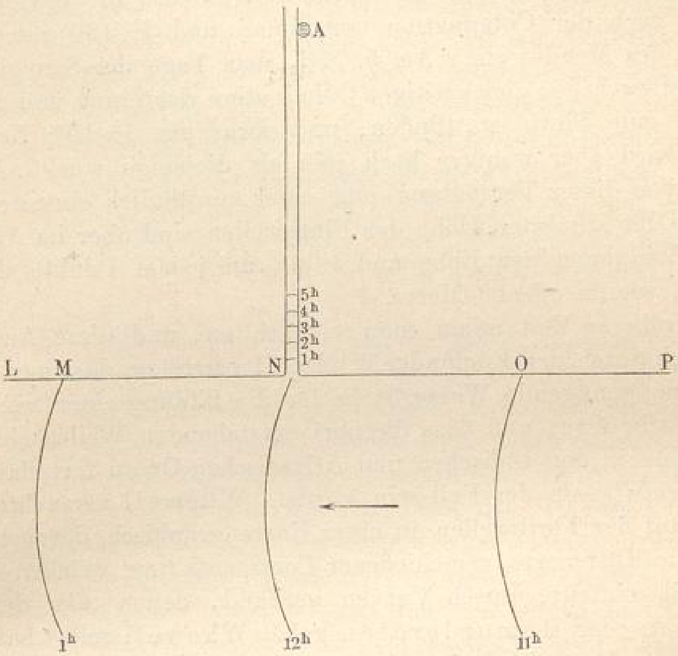


oberfläche, für den der Mond in oberer Culmination ist, so würde op den Betrag der Fluth bezeichnen. Nach 12 Stunden ist aber der Punkt, welcher vorher in o war, nach o' gekommen, wo der Mond in unterer Culmination ist, und es wird dann, wie die Figur sofort ergiebt, der Betrag $o'p'$ der Fluth geringer sein als op. Hierdurch entsteht die sogenannte tägliche Ungleichheit der Fluthhöhe, deren Betrag von der geographischen Breite des Beobachtungsortes und der Declination des anziehenden Gestirnes abhängig, übrigens immer sehr unbedeutend ist.

Bei Festhaltung der Zahlen unseres Beispieles beträgt der Unterschied zwischen den halbtäglichen Fluthen höchstens 2 bis 3 cm.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die ganze Erdoberfläche in gleichmässiger Tiefe vom Meere bedeckt ist, und dass die Meeresoberfläche in jedem Augenblicke sofort die Gestalt annimmt, welche allein durch die anziehenden Kräfte bedingt wird. In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse aber sehr verschieden von unserer Annahme, da nur zwei Drittheile der Erdoberfläche vom Wasser, und zwar in sehr verschiedener Tiefe bedeckt sind. Es ist ferner Rücksicht darauf zu nehmen, dass jede vorübergehende Erhöhung der Meeresfläche Wellenbewegungen hervorruft, und dass diese Bewegungen sowohl in ihrer Richtung als

Fig. 174.



auch in ihrer Grösse abhängig sind von der Tiefe der Wasserbecken, über welche sie hinstreichen, und von den Configurationen der Begrenzungen dieser Becken.

Es sei LP (Fig. 175) ein in der Richtung von Westen nach Osten sich erstreckendes Meeresufer, südlich davon sei Wasser, nördlich Land. Durch das Land erstrecke sich nach Norden hin ein Canal NA, in A sei ein Beobachtungsort für die Gezeiten, also ein Pegel, der regelmässig abgelesen wird. Wir wollen voraussetzen, dass an einem bestimmten Tage, z. B. dem 5. Mai, genau 12 Uhr Mittags, Neumond sei, und die Sonne und der Mond um dieselbe Zeit am Orte N culminiren. Nach unserer bisherigen Annahme, dass der Bewegung der Fluthwellen kein Hinderniss entgegenstehe, würde also das Hochwasser an diesem Tage bei N genau um 12ʰ Mittags stattfinden, während die Fluthwelle sich um 11ʰ bei O und um 1ʰ bei M befinden würde.

In dem Canal wird nun ebenfalls die Wellenbewegung fortschreiten, indessen wegen der Reibung, welche das Wasser an den Ufern erfährt, mit sehr verringerter Geschwindigkeit. Für jeden einzelnen Punkt des Canals, z. B. A, wird ebenso, wie im offenen Meere, täglich zweimal eine Fluth eintreten müssen, eine aufmerksame Beobachtung der Fluthhöhen wird aber zeigen, dass die Springfluthen später als die Syzygien eintreten. Wenn z. B. die Fluthwellen 51 Stunden gebrauchen, um von N nach A zu gelangen, so wird in unserem oben angenommenen Falle die Springfluth bei N am 5. Mai 12 Uhr Mittags, dagegen bei A erst am 7. Mai 3 Uhr Nachmittags stattfinden. An diesem Tage culminirt der Mond aber erst um $1^h\ 41^m$, und es tritt also die Springfluth drei Stunden nach der Culmination der Sonne und $1^h\ 19^m$ nach der Culmination des Mondes ein. Am 5. Mai, dem Tage des Syzygiums, wird zwar bald nach der gleichzeitigen Culmination der Sonne und des Mondes ebenfalls eine Fluth stattfinden, und zwar um $1^h\ 19^m$ Nachmittags, dieselbe wird aber weniger hoch sein als diejenige vom 7. Mai. Abgesehen von dieser Verspätung und einer gewöhnlich eintretenden Veränderung der absoluten Höhe der Fluthwellen sind aber im Allgemeinen die Erscheinungen der Ebbe und Fluth an jedem Punkte des Canals dieselben, wie im offenen Meere.

In früherer Zeit nahm man vielfach an, und diese Annahme ist namentlich durch den Engländer Whewell vertreten, dass nur der Grosse Ocean eine genügende Wasserfläche für die Bildung einer selbständigen Fluthwelle besässe, und dass die dort entstehenden Wellen sich in ähnlicher Weise in den Indischen und Atlantischen Ocean fortpflanzten, wie es in einem Canale der Fall sein würde. Whewell versuchte es auch, den Verlauf der Fluthwellen in einer Karte graphisch darzustellen, indem er die Küstenorte verschiedener Continente, an welchen die Fluth gleichzeitig eintritt, durch Curven verband, denen man den Namen Isorachien oder Homopleroten gab. Whewell selbst hat indessen später eingesehen, dass über den Verlauf der Fluthwellen im offenen Meere, da hier keine Fluthbeobachtungen angestellt werden können, eine völlige Ungewissheit herrscht, und dass daher die von ihm früher gezeichneten Isorachien keine reelle Bedeutung haben. In der That ist aber auch die Voraussetzung, von welcher Whewell ausging, wonach nur im Grossen Ocean sich eine selbständige Fluthwelle bilden könne, eine irrige. In kleineren eingeschlossenen Seen, wie z. B. dem Michigansee, ist deutlich ein Fluthwechsel, wenngleich von geringer Höhe, erkennbar, um so mehr muss sich in ausgebreiteten Meeren, wie dem Atlantischen Ocean, ein solcher ausbilden.

Sehr eigenthümliche Erscheinungen können eintreten, wenn die Wellen verschiedener Fluthsysteme zusammentreffen. Es können dann Interferenzerscheinungen entstehen, in Folge deren die Gezeiten ganz oder theilweise verschwinden, anderentheils aber können sich die Wirkungen der Gezeiten summiren, wodurch sie bedeutend vergrössert werden. Die grössten Höhen erreicht aber die Fluth in Buchten, in denen das Wasser sich staut und die eindringende Fluthwelle mit dem aus der Bucht zurückfliessenden Wasser zusammentrifft. Auf diese Weise entstehen die grössten Fluthen, welche auf der ganzen Erde beobachtet werden, wie z. B. in St. Malo, dem Bristol Canal und namentlich der Fundybai.

Einen wie grossen Einfluss die Tiefe und Weite der Meere auf die Geschwindigkeit der Fluthwellen hat, zeigt sich besonders deutlich an den Küsten Grossbritanniens. Eine vom Atlantischen Meere sich ostwärts bewegende Fluthwelle trennt sich südlich von Irland in drei Wellen, deren eine sich durch den Canal, die zweite durch die Irische See und die dritte westlich von Irland nach Norden bewegt. Nach sieben Stunden ist die erste bis Dover, die zweite bis zur Insel Man gelangt, während die dritte sich mit grosser Geschwindigkeit an der Nordspitze von Schottland vorbei bis östlich von den Orkney-Inseln fortbewegt hat. Diese letztere schreitet dann in der Richtung nach Süden mit abnehmender Geschwindigkeit durch die Nordsee vor, und gelangt nach weiteren 12 Stunden in die Gegend von Dover, wo sie mit einer Welle zusammentrifft, welche sieben Stunden vorher westlich in den Canal eingedrungen war.

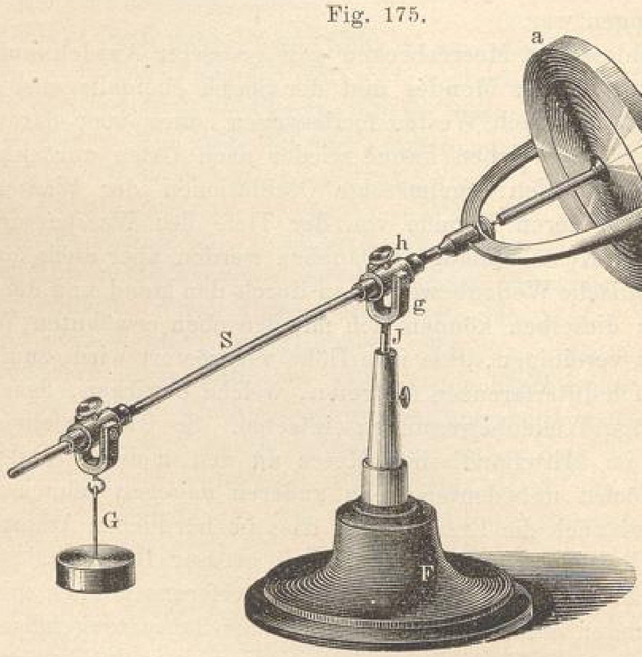
In eingeschlossenen Meeresbecken von grösserer Ausdehnung wird durch die Anziehung des Mondes und der Sonne ebenfalls eine Fluthwelle sich von Osten nach Westen fortbewegen, muss aber darauf, da sie westlich nicht entweichen kann, wieder nach Osten zurückkehren. Auf diese Weise werden regelmässige Oscillationen der Wasserfläche entstehen müssen, deren Periode von der Tiefe des Wassers und der Configuration der Küste abhängt. Daneben werden aber auch fortwährend neue periodische Wellenbewegungen durch den Mond und die Sonne hervorgebracht; dieselben können sich mit den eben erwähnten Wellensystemen derart vereinigen, dass ihre Höhe vergrössert wird, zum Theil können aber auch Interferenzen eintreten, welche bewirken, dass keine oder sehr geringe Wellenbewegungen eintreten. So ist es vielleicht zu erklären, dass im Mittelländischen Meere an den meisten Stellen der Fluthwechsel höchst unbedeutend, an anderen dagegen sehr merklich ist. Ferrel hat auch die Erscheinung, dass im nördlichen Atlantischen Ocean die Fluthwellen von ganz besonders grosser Höhe sind, durch ähnliche Ursachen erklären wollen. Durch Interferenz können mitunter auch die Wirkungen einzelner Componenten der flutherzeugenden Kraft aufgehoben werden. So ist z. B. bei Tahiti die Sonnenfluth grösser als die Mondfluth, wodurch bewirkt wird, dass der Fluthwechsel immer nahe zu denselben Tageszeiten eintritt; dieselbe Erscheinung findet sich bei Courtown an der östlichen Küste von Irland, und bei Tonkin findet täglich nur eine einmalige Fluth statt.

Bei Neu Guinea ist vorwiegend eine Sonnenfluth bemerkbar, welche eine sehr starke tägliche Ungleichheit hat, so dass zur Zeit der Springfluthen fast nur ein Hochwasser täglich bemerkbar wird. Die Mondfluth mit halbmonatlicher und ebenfalls starker täglicher Ungleichheit bewirkt eine kleine Veränderlichkeit in der Zeit und Höhe der Hauptfluth.

Aus Obigem geht hervor, dass das Phänomen der Gezeiten ein höchst complicirtes ist, und es wird wohl schwerlich jemals gelingen, eine nach allen Richtungen befriedigende Theorie über die Flutherscheinungen aufzustellen. Entgegen der Voraussetzung von Laplace, welcher in seinen grundlegenden Untersuchungen über die Bewegung der Fluthwellen die Annahme machte, dass die ganze Oberfläche der Erde vom Wasser bedeckt sei, hat Airy in seinen die Gezeiten behandelnden Arbeiten die Erscheinung der Ebbe und Fluth als eine Wellenbewegung in einem, die Erde in einem grössten Kreise umgebenden, verhältnissmässig engen Canal betrachtet. Weder diese noch die Vorausetzung, welche Laplace machte, entspricht im Allgemeinen der Wirklichkeit, und so ist es noch nicht gelungen, für irgend einen Ort die Hafenzeit theoretisch ohne Zuhülfenahme von Beobachtungen zu berechnen.

118 **Erklärung der Präcession.** Die Erscheinung der Präcession selbst haben wir bereits in §. 35 kennen gelernt; die mechanische Er-

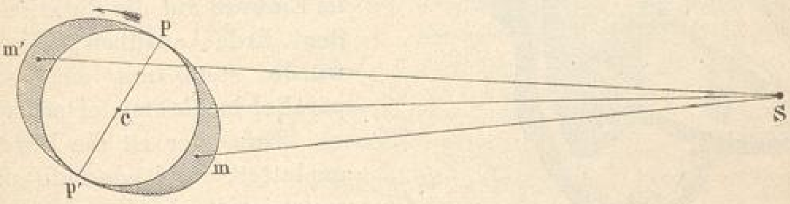
Fig. 175.



klärung derselben ergiebt sich aus den Erscheinungen, welche in §. 74 des ersten Bandes des Lehrbuches der Physik (9. Aufl., S. 326) besprochen wurden. Zur Erläuterung der Präcessionserscheinung wollen wir aber zunächst noch ein Gyroskop von etwas veränderter Construction betrachten, wie solches in Fig. 175 dargestellt ist. Der Ring R, innerhalb dessen die metallene Scheibe a rotirt, ist an einem Stabe S befestigt, welcher mittelst eines horizontalen Stiftes in der Gabel g befestigt ist. Die Gabel g sitzt am Ende eines Stahlstäbchens J, dessen untere Hälfte in einer vertical stehenden Hülse steckt, so dass die ganze obere Vorrichtung um die verticale Axe J und um den horizontalen Stift in g drehbar ist.

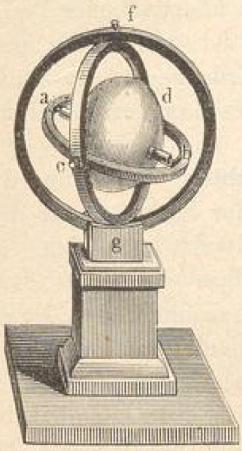
An dem Stäbchen S ist eine Hülse verschiebbar, an welche das Gewicht G angehängt werden kann. Denken wir uns dasselbe vor der Hand noch weg und die Metallscheibe a in Rotation versetzt, so erfolgt die Drehung des Apparates um die verticale Axe J ganz so, wie wir sie bei dem Gyroskop, Fig. 313, des Lehrbuches der Physik kennen gelernt haben. Wird ein Gewicht G angehängt, welches dem Uebergewicht der Scheibe a nur theilweise das Gleichgewicht hält, so findet die Rotation

Fig. 176.



um die Axe J in unveränderter Richtung, aber mit verringerter Geschwindigkeit statt. Hat das Gewicht G eine solche Grösse, dass es dem Uebergewichte der rotirenden Scheibe gerade das Gleichgewicht hält, dass also keine Kraft mehr vorhanden ist, welche den Winkel, welchen das Stäbchen S mit der Verticalen macht, zu verändern strebt, so hört die Drehung des Apparates um die verticale Axe J ganz auf, wenn auch die Scheibe a in Rotation ist. Ist endlich das Uebergewicht auf der Seite des angehängten Gewichtes G, so erfolgt die Drehung des Apparates um die Axe J in einer Richtung, welche der zuerst besprochenen entgegengesetzt ist.

Fig. 177.



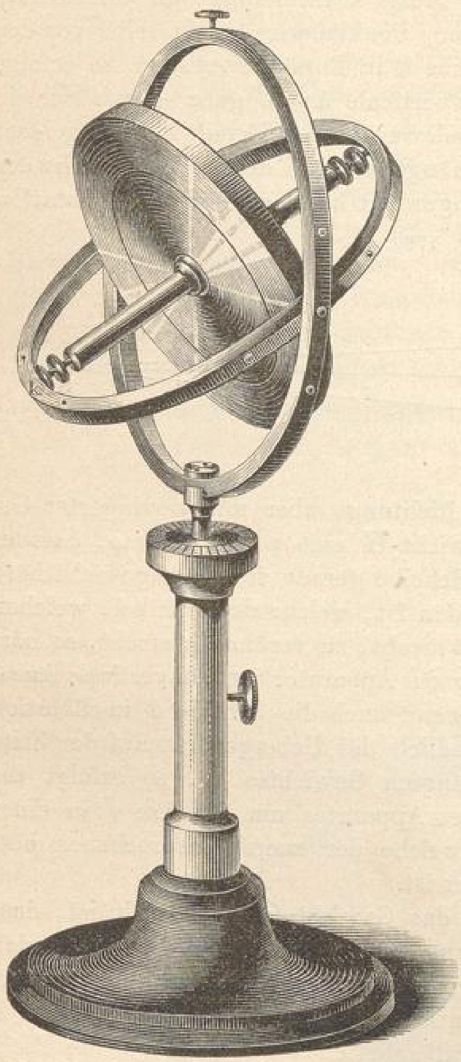
Wenn das Gewicht G so gestellt ist, dass keine Drehung um die verticale Axe J stattfindet, so wird, wenn man den ganzen Apparat frei im Zimmer herumträgt (wobei jedoch die Axe J stets vertical gehalten werden muss), die Richtung des Stäbchens S und der Rotationsaxe der Scheibe a doch ganz unverändert bleiben, oder mit anderen Worten, das Stäbchen S sowohl wie auch die Umdrehungsaxe der Scheibe a werden parallel mit sich selbst verschoben.

Aehnliche Verhältnisse kommen nun auch bei der Erde vor; sie rotirt um eine Axe, welche einen bestimmten Winkel mit der Ebene der

Ekliptik macht, während Kräfte auf sie wirken, welche dahin streben, die Umdrehungsaxe der Erde rechtwinkelig zur Ekliptik zu stellen.

Die Kraft, welche die Erdaxe rechtwinkelig auf die Ebene der Ekliptik zu stellen strebt, rührt von der Anziehung her, welche die Sonne und der Mond auf die Erde ausüben. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel und ihre Masse gleichförmig um ihren Mittelpunkt vertheilt wäre, so würde die Resultirende aller Wirkungen, welche die Sonne und der Mond auf die einzelnen Theile der Erde ausüben, durch ihren Mittelpunkt gehen. Diese Resultirende könnte also keinerlei Einfluss auf die Rotationsaxe der Erde ausüben, dieselbe würde stets mit sich selbst parallel im Raume fortschreiten.

Fig. 178.



Nun aber ist die Erde abgeplattet, und deshalb kann man sie als eine Kugel betrachten, deren Radius dem halben Polardurchmesser gleich, und welche noch mit einem Wulst bedeckt ist, welcher, am Aequator am dicksten, nach den Polen zu abnimmt, wie dies Fig. 176 (a. v. S.) in übertriebener Weise angedeutet ist, welche die Stellung der Erde gegen die Sonne zur Zeit des Sommersolstitiums darstellt.

Betrachten wir nun die Wirkung der Sonne S auf den Aequatorialwulst für sich, so ist klar, dass die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse bei m von der Sonne angezogen wird, grösser ist als die Anziehung, welche die Sonne auf eine gleich grosse Masse bei m' ausübt; die Wirkung der Sonne auf den fraglichen Wulst strebt also dahin, die Erde in der Richtung des Pfeiles um eine Axe zu drehen, welche in der Ebene der Ekliptik liegt und senkrecht auf SC steht. Wir haben also hier in der That ein ganz ähnliches Verhältniss, wie wir es beim Kreisel und der Fessel'schen Rotationsmaschine, Fig. 175, kennen lernten.

Zur Zeit des Wintersolstitiums, wenn die Erde auf der entgegengesetzten Seite der Sonne steht, ist der Südpol p' der Sonne zugekehrt; es wird alsdann m' stärker von der Sonne angezogen als m, so dass also auch zu dieser Zeit die Sonne ein Streben äussert, die Erde in der Richtung des Pfeiles zu drehen, also die Erdaxe aufzurichten. Zur Zeit der Aequinoctien, wo die Erdaxe rechtwinkelig auf SC steht, ist die Kraft, welche die Erdaxe zu drehen strebt, gleich Null, wir sehen also, dass die Kraft, welche die Schiefe der Ekliptik zu verkleinern strebt, zur Zeit der Solstitien ein Maximum wird und von da bis zu den Aequinoctien abnimmt. Eine ähnliche, aber noch bedeutendere Wirkung als die Sonne hat der Mond auf den Rückgang der Aequinoctialpunkte.

Zur Erläuterung des Rückganges der Aequinoctialpunkte hat Bohnenberger einen Apparat construirt, welcher nach ihm den Namen des „Bohnenberger'schen Maschinchens" führt. Eine Kugel oder ein Sphäroid von Elfenbein oder noch besser von Metall ist um eine Axe ab drehbar, die in Spitzen läuft, welche in einem messingenen Ringe befestigt sind, Fig. 177 (a. S. 315). Dieser innerste Ring ist wieder um eine horizontale Axe cd (der Endpunkt d ist in unserer Figur verdeckt) innerhalb eines zweiten Ringes drehbar, welcher selbst wieder um eine verticale Axe fg innerhalb des äussersten auf einem Postamentchen befestigten Ringes gedreht werden kann. Auf diese Weise ist die Kugel sowohl wie ihre Umdrehungsaxe vollkommen frei beweglich.

Ist das Gleichgewicht der Kugel und des innersten Ringes so hergestellt, dass ihr Schwerpunkt auf die Axe cd fällt, dass also keine Kraft vorhanden ist, welche eine Drehung um die Axe cd zu bewirken strebt, so wird die Axe ab ihre Stellung im Raume unverändert beibehalten, wenn man die Kugel in rasche Rotation um diese Axe versetzt hat, wie man auch den ganzen Apparat, am Fussgestell haltend, herumtragen und drehen mag. Sobald aber ein kleines Uebergewicht bei b angebracht wird, ist jetzt eine Kraft vorhanden, welche den innersten Ring sammt der Kugel um die Axe cd zu drehen strebt, und zwar so, dass die Axe ab aufgerichtet und a dem Punkte f, b dem Punkte g genähert werden würde, wenn die Kugel nicht rotirte. Ist aber die Rotation der Kugel hinlänglich rasch, so bleibt trotz des Uebergewichtes bei b die Neigung der Axe ab gegen fg unverändert, während dagegen eine Drehung der Kugel sammt ihrer Rotationsaxe um die Axe fg stattfindet.

Es treten also hier ganz dieselben Verhältnisse ein, wie bei der Rotation der Erdaxe, nur mit dem Unterschiede, dass die Kraft, welche die Axe ab aufzurichten strebt, beim Bohnenberger'schen Apparate stets gleich stark wirkt.

Fig. 178 stellt eine veränderte Form des Bohnenberger'schen Apparates dar.