Joh. Müller's Lehrbuch der kosmischen Physik

Müller, Johann Heinrich Jacob

Braunschweig, 1894

105. Abnahme der Centralkraft mit wachsender Entfernung von der Sonne

urn:nbn:de:hbz:466:1-96939

bestimmten Parallelogramms durchlaufen. Während des zweiten Zeittheilchens t beschreibt also der Leitstrahl das Dreieck gkm. Denken wir uns nun den Punkt h mit m durch eine gerade Linie verbunden, so ist das $\triangle\ gkm = \triangle\ ghm$, weil sie eine Seite gm gemeinschaftlich haben, und die gegenüber liegenden Spitzen der Dreiecke auf einer der Seite gm parallelen Linie liegen. Ferner ist aber auch $\triangle\ ghm = \triangle\ dgm$, weil dg und gh auf einer geraden Linie liegen und einander gleich sind, sowie auch die Spitze von beiden Dreiecken zusammenfällt. Es ist also auch $\triangle\ gkm = \triangle\ dgm$, d. h. der Leitstrahl hat in zwei gleichen Zeittheilchen gleiche Flächenräume beschrieben.

Wir haben hier allerdings das Zeittheilchen t so klein angenommen, dass die in demselben zurückgelegten Wege als geradlinig angesehen werden konnten; es ist indessen klar, dass der Satz, welcher für jedes einzelne Zeittheilchen t gilt, auch für die Summe vieler solcher Zeittheilchen Gültigkeit behält. Wir erhalten demnach den Satz, dass die in gleichen Zeiten von dem Leitstrahl beschriebenen Flächenräume einander gleich sind, wenn nur die beschleunigende Kraft stets gegen denselben Punkt hin gerichtet ist, nach welchem Gesetze im Uebrigen die beschleunigende Kraft mit der Entfernung von m sich ändern mag.

Die Eigenthümlichkeit, dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, findet nur dann statt, wenn der Mittelpunkt, von dem aus man die Leitstrahlen nach dem beweglichen Körper gezogen denkt, zugleich der Punkt ist, nach welchem die beschleunigende Kraft stets hinwirkt. Wirkte z. B. auf den in g angekommenen Körper eine beschleunigende Kraft, deren Richtung nicht in die Linie gm fällt, so würde der Körper am Ende des nächsten Zeittheilchens in irgend einem Punkte p ankommen, welcher nicht auf der mit gm parallelen Linie hk, sondern diesseits oder jenseits derselben liegt, das Dreieck gmp würde also grösser oder kleiner sein als dgm.

Da nun in der That der von dem Planeten zur Sonne gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, so ist klar, dass die Sonne den Centralpunkt bildet, gegen welchen die auf die Planeten einwirkenden beschleunigenden Kräfte stets gerichtet sind.

Abnahme der Centralkraft mit wachsender Entfernung von der Sonne. 105 Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetze (nach welchem der Leitstrahl des Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume zurücklegt) konnte man nur den Schluss ziehen, dass die Planeten stets gegen die Sonne hingetrieben, wir können also auch sagen, von der Sonne angezogen werden; in welchem Verhältnisse aber diese anziehende Kraft der Sonne zu dem Abstande der Planeten von derselben stehe, das lässt das zweite Kepler'sche Gesetz, wie schon bemerkt wurde, völlig unentschieden, denn es findet statt, welches auch das Gesetz sein mag, welchem dieses Verhältniss unterworfen ist. Dieses Gesetz ergiebt sich aber als nothwendige Folge aus dem dritten Kepler'schen Gesetze.

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne (S. 153). Bezeichnen wir mit T und t die Umlaufszeiten, mit R und r die mittleren Abstände zweier Planeten, so haben wir also:

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Es muss indessen bemerkt werden, dass das Gesetz in dieser Form nicht strenge richtig ist und nur deswegen bei den Bewegungen der Planeten sehr nahe zutrifft, weil die Massen der Planeten sehr klein sind im Verhältniss zur Masse der Sonne.

Genau würde die obige Gleichung folgendermaassen auszudrücken sein:

$$\frac{R^3}{r^3} = \frac{T^2\,(M + m)}{t^2\,(M + \mu)},$$

wo M die Masse der Sonne, dagegen m und μ diejenige der Planeten mit den mittleren Entfernungen R und r bezeichnen. Da nun in unserem Sonnensystem die Massen der Planeten äusserst klein im Verhältniss zur Sonnenmasse sind, so wird nur ein sehr geringer Fehler begangen, wenn wir $\frac{M + m}{M + \mu} = 1$ setzen, wodurch wir das dritte Kepler'sche Gesetz erhalten.

Ganz allgemein würde das Gesetz folgendermaassen lauten müssen:

Die Quadrate der gegenseitigen Umlaufszeiten je zweier Paare in Folge der Gravitation um einander bewegter Himmelskörper, multiplicirt mit den Summen der respectiven Massen, verhalten sich wie die Cuben der gegenseitigen mittleren Entfernungen.

Es seien z. B. M, m, sowie M', m' die Massen zweier Paare sich um einander bewegender Körper, die wir mit den nämlichen Buchstaben bezeichnen wollen, ferner R die mittlere Entfernung zwischen M und m, sowie R' diejenige zwischen M' und m', endlich T die Umlaufszeit von M und m, und T' diejenige von M' und m' um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, so findet immer das Verhältniss statt:

$$(A) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad R^3 : R'^3 = T^2\,(M + m) : T'^2\,(M' + m');$$

woraus, wenn $M = M'$, sowie m und m' verschwindend klein wird, das dritte Kepler'sche Gesetz hervorgeht.

Wir wollen nun die Bewegung zweier Planeten, deren Masse wir vernachlässigen können, und die sich in Kreisbahnen um die Sonne bewegen, näher betrachten.

Die Mechanik lehrt uns, dass, wenn ein Körper, z. B. ein Planet, um einen Anziehungsmittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit t zurücklegt, alsdann die beschleunigende Kraft v, welche den Planeten gegen den Mittelpunkt hintreibt, ist (Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., 1. Band, S. 157):

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Für einen zweiten Planeten, dessen Umlaufszeit T und dessen Abstand von der Sonne R ist, haben wir demnach:

$$V = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

folglich:

$$\frac{v}{V} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 R} = \frac{r \,.\, T^2}{R t^2}.$$

Nun aber ist, wie Kepler auf empirischem Wege gefunden hat, und wenn wir die Masse der Planeten als Null annehmen, $\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}$, folglich haben wir:

$$\frac{v}{V} = \frac{r}{R} \cdot \frac{R^3}{r^3} = \frac{R^2}{r^2},$$

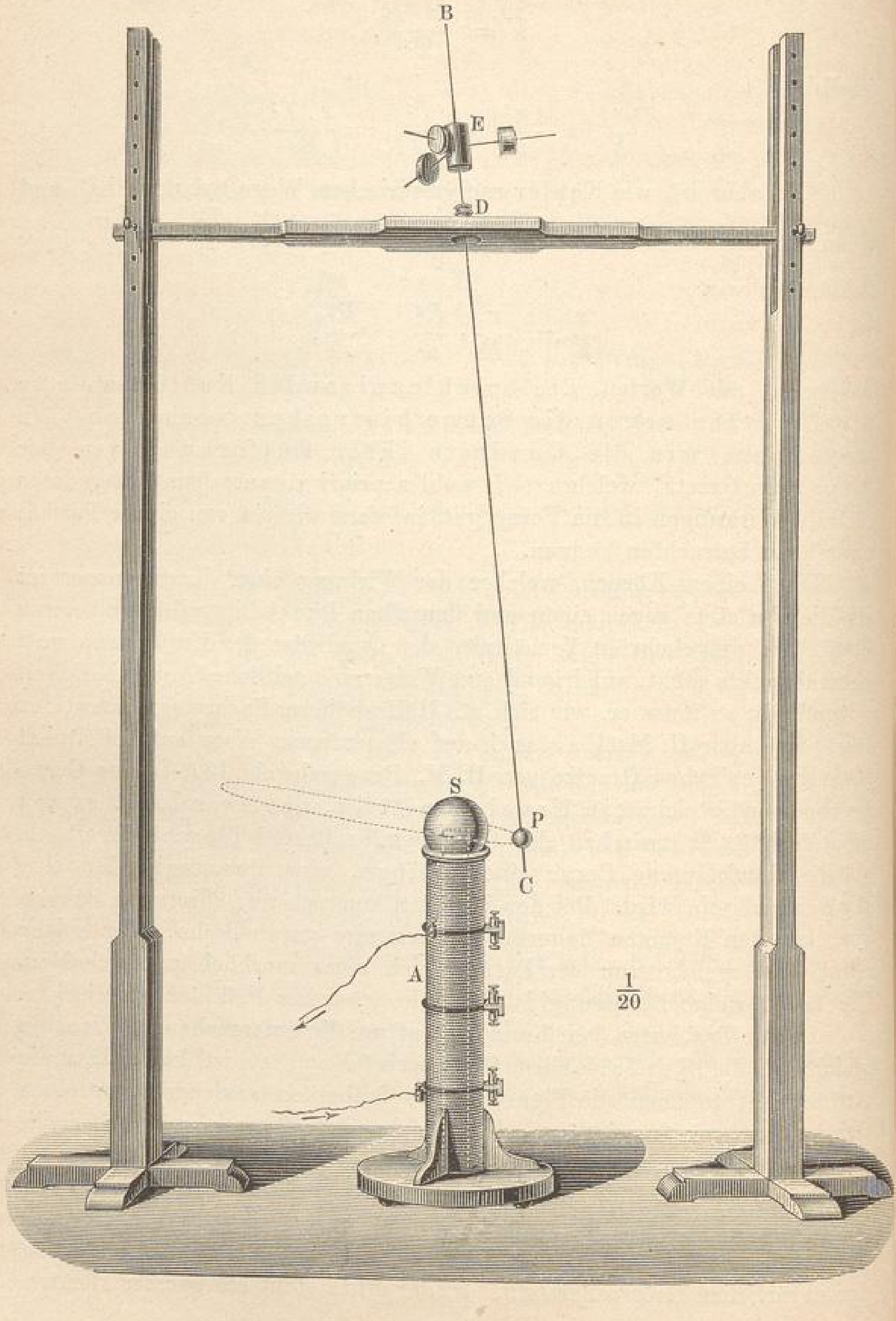
das heisst mit Worten: die beschleunigenden Kräfte, welche die Planeten gegen die Sonne hintreiben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Sonne, ein Gesetz, welches sich wohl a priori voraussehen liess, da es für alle Wirkungen in die Ferne gilt, insofern wir sie von einem Punkte ausgehend betrachten können.

Wird einem Körper, welcher der Wirkung einer Kraft ausgesetzt ist, die ihn stets gegen einen und denselben Punkt hintreibt, und deren Stärke im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung vom Centralpunkte steht, auf irgend eine Weise eine seitliche Geschwindigkeit mitgetheilt, so muss er, wie sich mit Hülfe höherer Rechnung nachweisen lässt, wie aber H. Müller auch auf elementarem Wege entwickelt hat (Die Kepler'schen Gesetze von H. M., Braunschweig 1870), eine Curve beschreiben, welche ein Kegelschnitt ist, und zwar hängt es von dem Verhältniss zwischen der Centripetalkraft und Tangentialkraft ab, ob die durchlaufene Curve eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein wird. Bei den Planeten kommen nur elliptische Bahnen vor, bei den Kometen dagegen vorzugsweise parabolische, oder solche elliptische, welche von der Parabel sich nicht merklich unterscheiden. Die kreisförmige Bewegung ist nur ein specieller Fall der elliptischen.

Da die Trabanten bei ihrem Umlauf um die entsprechenden Planeten gleichfalls die Kepler'schen Gesetze befolgen, so ist klar, dass die Kräfte, mit welchen die Planeten ihre Trabanten anziehen, demselben Gesetze unterworfen sind, wie die Anziehungskraft, welche zwischen der Sonne und den Planeten wirksam ist.

Zur Demonstration der Kepler'schen Gesetze hat Hagenbach einen von der Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique ausgeführten Apparat erdacht, welchen Fig. 164 (a. f. S.) in $^1/_{20}$ der natürlichen Grösse darstellt. In der Mitte steht ein grosser Elektromagnet, dessen Kern noch etwas über die oberste der vier Spiralen hervorragt und auf welchen eine polirte hölzerne Kugel S geschoben wird, welche den anziehenden Körper, etwa die Sonne, vorstellt. BC ist ein

Fig. 164.



langer, dünner Stahlmagnet. Bei D ist dieser Magnetstab vermöge einer Cardani'schen Aufhängung so befestigt, dass seine Schwere eliminirt ist, dass also der Schwerpunkt des Magnetstabes mit Allem, was er trägt, mit dem Durchschnittspunkte der beiden Schneiden der Cardani'schen Aufhängung zusammenfällt. Um die Lage dieses Schwerpunktes gehörig reguliren zu können, dient das Laufgewicht E, welches an seitlichen Armen noch drei kleinere Laufgewichte trägt, die auf Schrauben laufen. Nahe an seinem unteren Ende trägt der lange Magnetstab $B\,C$ die kleine Holzkugel P, welche den Planeten darstellt.

Die in Fig. 50, S. 75 dargestellte Cardani'sche Aufhängung ist eigentlich für diesen Apparat construirt; der magnetisirte Stahlstab $B\,C$ geht durch die Mitte der Hülse ab hindurch, in welcher er befestigt ist.

Die nicht zu beseitigenden Mängel, mit denen der Apparat behaftet ist, bestehen in dem Einflusse des unteren Poles des Elektromagneten und des Erdmagnetismus, dem Widerstande der Luft und dem Umstande, dass sich die Stange $B\,C$ bei schiefer Lage etwas biegt. Trotz dieser Mängel lässt sich die elliptische Bewegung der Kugel P leicht erhalten, wenn man den Stab aus der senkrechten Lage bringt und der Kugel P einen kleinen seitlichen Stoss giebt. Sehr deutlich zeigt sich dann die schnelle Bewegung im Perihel und die langsame im Aphel. Die verschiedenen Widerstände bewirken allerdings, dass die Ellipse bald kleiner wird und dass die kleine Kugel nach etwa drei Umläufen an die grosse anstösst.

Die allgemeine Schwere. Ueber den Fall der Körper auf 106
der Oberfläche der Erde nachdenkend, kam Newton auf die Idee, ob nicht vielleicht dieselbe Kraft, welche den Stein zur Erde herabfallen macht, also das, was wir die Schwere nennen, weit über die Grenzen der Atmosphäre hinaus, ja bis an den Mond reiche, dass nichts Anderes als die Schwere die Centralkraft sei, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält.

Diese Idee lässt sich leicht prüfen. Auf der Erdoberfläche ist die beschleunigende Kraft der Schwere (die Endgeschwindigkeit der ersten Fallsecunde) gleich 9,8088 m. Der Mond ist nun 60 mal so weit von dem Centrum der Erde entfernt, als ein Punkt auf der Erdoberfläche; wenn also die Schwerkraft bis an den Mond reicht, so muss dort ihre beschleunigende Kraft 60^2, also 3600 mal geringer sein, als auf der Erdoberfläche, sie wäre also:

$$\frac{9{,}8088}{3600} = 0{,}002724 \text{ m}.$$

Nun aber können wir die Grösse der beschleunigenden Kraft, welche wirklich den Mond nach der Erde hintreibt, aus dem Halbmesser seiner Bahn und seiner Umlaufszeit berechnen. Wir haben:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = \frac{2\pi r \,.\, 2\pi}{t^2}.$$