Joh. Müller's Lehrbuch der kosmischen Physik

Müller, Johann Heinrich Jacob

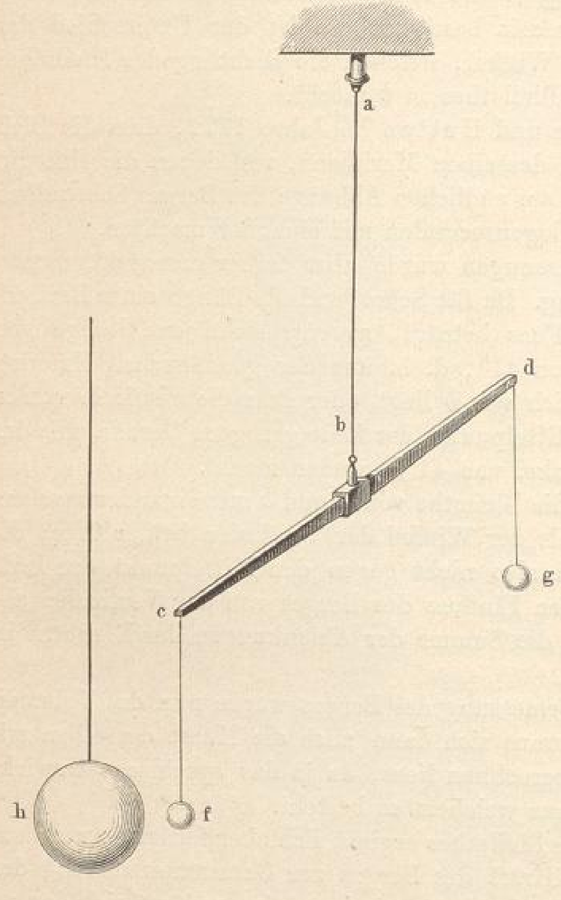
Braunschweig, 1894

109. Anwendung der Drehwage und anderer Apparate zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde

zu bestimmen, und zwar um so mehr, als die Berechnung auf diesem Wege eine ziemlich schwierige ist, ohne deshalb so genaue Resultate liefern zu können, wie die Methode, welche im nächsten Paragraphen besprochen werden soll.

109 **Anwendung der Drehwage und anderer Apparate zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.** Ein englischer Physiker, Mitchell, construirte eine Drehwage, mit deren Hülfe er die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen gedachte; er starb aber, ehe er zur Anstellung der Versuche kam, welche erst nach seinem Tode von Cavendish ausgeführt wurden. Der Grundgedanke des Apparates ist folgender:

Fig. 166.



An einem dünnen Metalldraht ab, Fig. 166, hängt ein horizontaler, gleicharmiger Hebel cd, welcher an seinen Enden die Kugeln f und g trägt. Dem Einfluss aller störenden Kräfte entzogen, wird die ganze Vorrichtung eine solche Stellung annehmen, dass der Draht ab ohne Torsion ist.

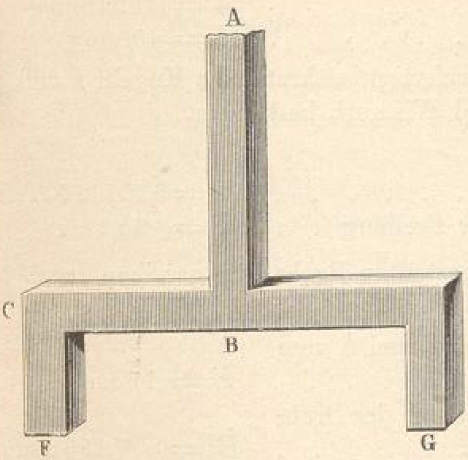
Bringt man nun neben der Kugel f eine Kugel h von bedeutender Masse an, so wird h anziehend auf f wirken, und dadurch wird der horizontale Hebel cd um einen Winkel aus seiner früheren Gleichgewichtslage herausgedreht, welcher der anziehenden Kraft k proportional ist, mit welcher die Kugeln h und f gegenseitig auf einander wirken.

Die Grösse dieser Kraft k lässt sich aber berechnen, wenn man die Schwingungszeit kennt, mit welcher der horizontale Hebel cd um seine Gleichgewichtslage oscillirt, sobald er auf irgend eine Weise aus derselben herausgebracht worden ist.

Aus dem Verhältniss der Kraft k zu dem Gewichte m der Kugel f (der Kraft, mit welcher die ganze Erdkugel die Kugel f anzieht) ergiebt sich dann das Verhältniss zwischen der leicht zu ermittelnden Masse M der Kugel h und der Masse Q der Erdkugel.

Es kommt also vor allen Dingen darauf an, die Ablenkung des horizontalen Hebels durch die Einwirkung der Kugel h, sowie die Schwingungszeit des horizontalen Pendels cd mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln; jeder Luftzug wirkt aber störend sowohl auf die Ablenkung als auf die Schwingungszeit, und deshalb muss die ganze Vorrichtung in ein möglichst enges Gehäuse eingeschlossen und an einem Orte aufgestellt sein, an welchem möglichst wenig Temperaturschwankungen stattfinden.

Fig. 167.



Das hölzerne Gehäuse, welches die Drehwage einschliesst, hat ungefähr die Gestalt von Fig. 167. In AB befindet sich der Aufhängedraht, CD schliesst den horizontalen Hebel ein und in den verticalen Armen CF und DG befinden sich die Kugeln f und g mit ihren Aufhängedrähten. Das Ganze ist nur so weit, dass dem Hebel cd der nöthige Spielraum für die kleine durch h hervorgebrachte Ablenkung und die kleinen Schwingungen bleibt.

An einigen Stellen ist die Wand des Gehäuses durchbrochen, die Oeffnungen aber sind dann wieder durch Platten von Spiegelglas geschlossen, durch welche hindurch man den Hebel und seine Oscillationen beobachten kann.

Cavendish wandte ausser der ablenkenden Masse h noch eine zweite, neben der Kugel g hängende an, welche die Wirkung der ersteren unterstützt; aus seinen, nach der eben angedeuteten Methode angestellten Versuchen ergab sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde der Werth 5,48 oder nach Hutton's Revision der Rechnungen 5,32.

Im Jahre 1837 stellte F. Reich neue Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage an. Eine wesentliche Verbesserung des Apparates erzielte er dadurch, dass er ihn mit einer Poggendorff'schen Spiegelvorrichtung versah, welche auch Gauss mit so grossem Vortheil bei seinem Magnetometer angewandt hatte. Der Spiegel war am unteren Ende des Aufhängedrahtes bei b, Fig. 166, angebracht. Die ganze Drehwage war an der Decke eines Kellers aufgehängt und die Scala durch eine Lampe mittelst eines Hohlspiegels erleuchtet.

Die Grössen, deren Kenntniss zur Berechnung der Masse und Dichtigkeit der Erde nothwendig sind, waren beim Reich'schen Apparat:

Abstand des Aufhängepunktes der Kugeln f und g von der Mitte des Hebels	$r = 100{,}1$ cm
Jede der Kugeln f und g wog	$m = 484{,}2$ g
Das auf den Aufhängepunkt der Kugel reducirte Gewicht des halben Hebels sammt dem Gewichte der Aufhängevorrichtung	$m' = 34{,}7$ g
Abstand der Scala vom Spiegel	$\mu = 4523$ mm
Gewicht der ablenkenden Kugel h	$M = 45006$ g

Diese Kugel h war aus Blei verfertigt, während die Kugeln f und g aus einer Composition von Blei und Wismuth bestanden.

Ferner ist:

Der Halbmesser der Erde	$R = 636462400$ cm
Die Länge des Secundenpendels für Freiberg . .	$l = 99{,}4$ cm

Bei einer der von Reich angestellten Beobachtungsreihen ergaben sich folgende Resultate:

Der Abstand des Mittelpunktes der Kugel h vom Mittelpunkt der Kugel f war	$E = 17$ cm
Die auf der Scala abgelesene Ablenkung der Drehwage	$B = 7{,}156$ mm
Die Schwingungszeit der Drehwage	$t = 405^s$.

Aus diesen Daten lässt sich nun die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde in folgender Weise berechnen.

Bei den Schwingungen der Drehwage hat die Elasticität des Drahtes eine träge Masse in Bewegung zu setzen, deren Trägheit gerade so wirkt, als ob am Ende des Hebels eine Masse $2(m + m')$, in unserem Falle also eine Masse von 1038 g angehängt wäre.

Nun aber wirkt die ablenkende Kraft der Kugel h nur auf die kleine Kugel f. Hätte die Elasticität des Aufhängedrahtes nur diese eine Kugel f in Bewegung zu setzen gehabt, deren Gewicht $m = 484{,}2$ g beträgt, so würden die Schwingungen schneller gewesen sein, und zwar würde die Schwingungszeit im Verhältniss von $\sqrt{2(m + m')}$ zu $\sqrt{m}$ abgenommen haben, kurz die Schwingungszeit t' würde sein:

$$t' = t\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(m + m')}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

in unserem Falle also:

$$t' = 405\sqrt{\frac{484}{1038}} = 276{,}55^s.$$

Dies ist also die Schwingungszeit eines einfachen, 100,1 cm langen Pendels, welches unter dem Einfluss der Elasticität des Aufhängedrahtes schwingt.

Für ein einfaches Pendel von gleicher Länge, welches unter dem Einfluss der Schwere schwingt, würde die Schwingungszeit gewesen sein:

$$t'' = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

in unserem speciellen Falle:

$$t'' = \frac{\sqrt{100{,}1}}{\sqrt{99{,}4}} = 1{,}0035 \text{ Secunden.}$$

Für zwei gleichlange einfache Pendel verhalten sich aber bei gleichem Ausschlagswinkel die beschleunigenden Kräfte, welche die Kugel in die Gleichgewichtslage zurücktreiben, umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Bezeichnen wir die beschleunigende Kraft, mit welcher die Elasticität des Aufhängedrahtes die Drehwage in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, mit k, mit K aber die Kraft, mit welcher die Kugel eines gewöhnlichen Pendels gegen seine Gleichgewichtslage getrieben wird, so haben wir:

$$k : K = t''^2 : t'^2,$$

also:

$$k = K \frac{t''^2}{t'^2}$$

oder:

$$k = K \cdot \frac{r}{l \cdot t^2} \cdot \frac{2(m + m')}{m} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

wenn man für t' und für t'' ihre Werthe bei 1) und 2) setzt. Setzt man für t' und t'' die für unseren speciellen Fall berechneten Zahlenwerthe, so kommt:

$$k = \frac{K}{75945}.$$

Durch den Einfluss der Kugel h wird die Drehwage um B Theilstriche der Scala abgelenkt; wenn wir also mit x den Ablenkungswinkel bezeichnen, so ist:

$$\sin x = \frac{B}{2\mu}.$$

Wenn ein gewöhnliches einfaches Pendel um den Winkel x aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, so ist die Kraft K, welche die Kugel nach ihrer Gleichgewichtslage zurücktreibt, gleich $m \,.\, \sin x$, wenn m das Gewicht der Kugel ist: setzen wir für $\sin x$ den eben gefundenen Werth, so haben wir:

$$K = \frac{m \,.\, B}{2\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

also in unserem speciellen Falle, wenn für m, B und μ die oben angegebenen Zahlenwerthe gesetzt werden:

$$K = 0{,}3832 \text{ g}.$$

Demnach ist auch

$$k = \frac{B \,.\, r \,.\, (m + m')}{\mu \,.\, l \,.\, t^2} \quad \dots\dots\dots \quad 5)$$

oder für unseren speciellen Fall ergiebt sich für k der Zahlenwerth:

$$k = 0{,}0000050467 \text{ g}.$$

Dies ist also die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die Kugel h auf die Seite gezogen wird, während die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die gesammte Erde angezogen wird, gleich m ist. Denken wir uns nun die Masse M der Kugel h, sowie die Masse Q der ganzen Erde in den entsprechenden Mittelpunkten vereinigt, so haben wir zur Berechnung der Masse Q die Gleichung:

$$m : k = \frac{Q}{R^2} : \frac{M}{E^2}$$

und daraus:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2}{E^2 k} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 6)$$

oder wenn man für k seinen oben bei 5) angegebenen Werth setzt:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2 \mu l t^2}{E^2 \,.\, Br(m + m')}.$$

Setzen wir aber in Gleichung 6) für k, m, M, R und E die früher angegebenen Zahlenwerthe, so finden wir für die Masse der Erde den Werth:

$$Q = 5\,914\,500\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ g}$$

oder:

118 000 Trillionen Centner.

Die mittlere Dichtigkeit der Erde findet man, wenn man die Masse Q durch das Volumen der Erde, also durch $^4/_3\, \pi R^3$ dividirt; man findet alsdann:

$$D = \frac{3\,Q}{4\pi R^3} = \frac{3\,M \,.\, \mu l}{4\pi R \,.\, r} \cdot \frac{m}{m + m'} \cdot \frac{t^2}{E^2 B} \cdot \quad \dots \quad 7)$$

und wenn man für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt:

$$D = 5{,}476.$$

Aus einer grossen Reihe von Versuchen, welche Reich im Jahre 1837 anstellte, fand er als Mittel, mit Berücksichtigung aller nothwendigen Correctionen den Werth:

$$D = 5{,}44.$$

(F. Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage. Freiberg 1838.)

Im Jahre 1843 publicirte Baily in London die Resultate einer grossen Reihe von Versuchen, welche er im Auftrage der Royal Astronomical Society nach der Methode von Cavendish angestellt hatte.

Er fand die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}66.$$

Nach dem Bekanntwerden dieses Resultates wiederholte auch Reich seine Versuche, nachdem er einige Verbesserungen in seinem Apparate angebracht hatte, und fand:

$$D = 5{,}58.$$

(Abhandlungen der mathematisch-phyikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Band, 1852, S. 385.)

Im Jahre 1878 wurden neue Versuche mit der Drehwage von Cornu und Baille angestellt und ergaben für die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}56.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung dieser Grösse wurde im Jahre 1824 von Carlini angewandt, der die Länge des einfachen Secundenpendels auf dem Mont Cenis bestimmte, und durch Vergleichung mit Beobachtungen, welche Biot in Bordeaux angestellt hatte, die Grösse der Anziehung des Berges und daraus die mittlere Dichtigkeit der Erde ermittelte, für die er den Werth 4,39 fand, der aber von Schmidt nach einer Revision der Rechnungen zu

$$D = 4{,}84$$

festgestellt wurde.

Andere Pendelbeobachtungen wurden in grossen Tiefen angestellt; auf diese Weise fand Drobisch 1826

$$D = 5{,}43,$$

und Airy 1856 nach der Berechnung von Haughton:

$$D = 5{,}48.$$

Eine wesentlich andere Methode wurde vor einigen Jahren von Jolly angewandt. Derselbe befestigte an der unteren Seite der Schalen einer empfindlichen Wage Drähte von 21 m Länge, welche durch Oeffnungen in der Tischplatte, auf welcher die Wage stand, hindurchgingen, und an deren unteren Enden ebenfalls Schalen befestigt waren. Die Wage hatte also jetzt vier Schalen, von denen zwei dem Mittelpunkte der Erde um 21 m näher waren als die beiden anderen. Es zeigte sich deutlich, dass ein Gewicht, welches auf eine der unteren Schalen gesetzt wurde, von der Erde stärker angezogen wurde, als wenn man es auf die gerade darüber befindliche Schale setzte. Wurde nun noch unter die unteren Schalen eine Bleikugel von 1 m Durchmesser gebracht, so zeigte sich der Unterschied noch grösser. Aus diesen Versuchen ergab sich der Unterschied zwischen der Anziehung der Erde und derjenigen der Bleikugel, und hieraus konnte die mittlere Dichtigkeit der Erde ebenfalls abgeleitet werden. Dieselbe ergab sich zu

$$D = 5{,}692.$$

Aehnliche Versuche von Poynting aus dem Jahre 1878 haben fast genau dasselbe Resultat ergeben.

Eine Modification der von Jolly angewandten Methode ist von König und Richarz vorgeschlagen, indessen sind die von ihnen angestellten Versuche, durch welche die Anziehungskraft einer parallelepipedischen Bleimasse von 2000 Centner Gewicht ermittelt werden soll, noch nicht bis zur Ableitung eines definitiven Resultates gediehen.

Die neueste Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde ist auf dem astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam von Wilsing ausgeführt. Der Apparat bestand aus einem Pendel, dessen Schneide sich sehr nahe bei dem Schwerpunkte befand, wodurch die Schwingungszeit sehr langsam wurde. Als anziehende Massen wurden zwei Cylinder von Gusseisen im Gewichte von je 325 kg benutzt, und es ergab sich als Resultat der sehr sorgfältig ausgeführten Untersuchungen:

$$D = 5{,}579.$$

(Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, VI. Band, Potsdam 1889.)

110 **Dichtigkeit der Weltkörper verglichen mit der des Wassers.** Aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Resultaten ergiebt sich, dass die mittlere Dichtigkeit der Erde etwa 5,6 mal so gross ist als die des Wassers. Da nun das specifische Gewicht der Felsmassen' welche die feste Erdrinde bilden, kaum halb so gross ist, so müssen wir schliessen, dass das Innere der Erde aus Körpern von grösserem specifischen Gewichte bestehe, als die uns zugängliche äussere Kruste.

Verglichen mit Wasser, ist das specifische Gewicht

der Sonne	1,42
des Mercur	6,57
der Venus	4,52
der Erde	5,60
des Mars	3,98
des Jupiter	1,36
des Saturn	0,72
des Uranus	1,09
des Neptun	1,68

Die mittlere Dichtigkeit der Sonne und des Jupiter ist also ungefähr die des Ebenholzes, während Saturn und Uranus in ihrer Dichtigkeit dem Rothbuchen- und Weissbuchenholz nahe stehen.

Unter allen Planeten ist also Mercur der dichteste, nach ihm die Erde. Die geringste Dichtigkeit unter allen Planeten hat der Saturn.

111 **Grösse der Schwerkraft auf der Oberfläche der Sonne und der Planeten.** Nach §. 106 ist $V = f\frac{m}{\varrho^2}$ das Maass für die