Joh. Müller's Lehrbuch der kosmischen Physik

Müller, Johann Heinrich Jacob

Braunschweig, 1894

159. Der Regenbogen

Ein jeder Punkt der Erdoberfläche geht nun in Folge der Axendrehung der Erde in 24 Stunden zweimal durch diesen Dämmerungsgürtel hindurch, und es ist leicht einzusehen, dass die Dauer des Verweilens in demselben von der geographischen Breite des Ortes abhängig ist.

Für einen Punkt des Erdäquators dauert die astronomische Dämmerung so lange, als er braucht, den Bogen ab zu durchlaufen. Dieser Bogen beträgt aber 18^0; folglich ist die entsprechende Zeitdauer 72^m oder 1 Stunde 12 Minuten.

Für einen Ort, welcher auf dem 45. Breitengrade liegt, dauert die astronomische Dämmerung so lange als er braucht, um den Bogen fg zu durchlaufen, also nahezu 2 Stunden, da der Winkel fpg gleich 30^0 ist.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass für den 63. Breitengrad die Dauer der astronomischen Dämmerung ungefähr 3 Stunden beträgt.

Ein Ort auf dem 80. Breitengrade gelangt gar nicht mehr bis an die Nachtgrenze des Dämmerungsgürtels; zur Zeit des Aequinoctiums beträgt also für ihn die Dauer der Dämmerung volle 12 Stunden.

Die Dauer der bürgerlichen Dämmerung beträgt ungefähr $^1/_3$ von der der astronomischen; die bürgerliche Dämmerung betrüge demnach zur Zeit des Aequinoctiums:

auf dem Aequator etwas über $^1/_3$ Stunde,
auf dem 45. Breitengrade ungefähr $^2/_3$ Stunde,
auf dem 63. Breitengrade ungefähr 1 Stunde,
auf dem 72. Breitengrade ungefähr 2 Stunden.

Der Unterschied in der Dämmerungsdauer für verschiedene Breiten ist aber in der That noch grösser, als er sich aus den eben durchgeführten Betrachtungen ergiebt, weil das Ende der Dämmerung nicht allein durch die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte, sondern auch durch den Zustand der Atmosphäre bedingt ist. Je durchsichtiger und reiner die Luft, desto kürzer ist die Dämmerung, während sie durch zarte, in der Höhe schwebende Nebel verlängert wird. So ist denn für einen und denselben Ort die Dauer der Dämmerung sehr veränderlich. Diejenigen Gegenden, welche sich eines tiefblauen Himmels erfreuen, werden eine verhältnissmässig kurze Dämmerung haben. In Chile dauert die Dämmerung nur $^1/_4$ Stunde, zu Cumana ist sie noch kürzer.

Wir haben oben die Dämmerungsverhältnisse für die Zeit der Aequinoctien betrachtet; im Sommer sowohl als im Winter wird, wie sich durch eine einfache geometrische Betrachtung nachweisen lässt, die Dämmerungsdauer für alle Breiten etwas grösser.

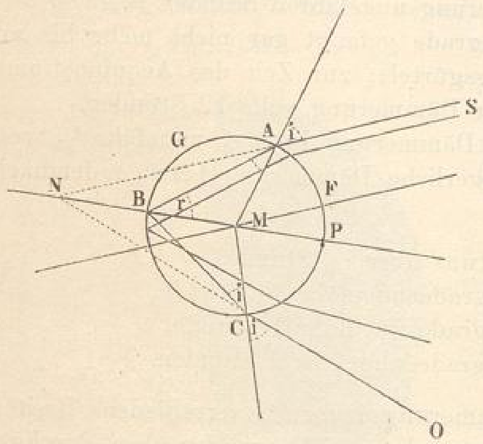
Der Regenbogen. Es ist allgemein bekannt, dass man einen 159
Regenbogen sieht, wenn man eine regnende Wolke vor sich und die Sonne im Rücken hat. Der Regenbogen bildet gleichsam die Basis eines Kegels, in dessen Spitze das Auge steht und dessen Axe mit der geraden Linie zusammenfällt, welche man durch die Sonne und das Auge legen

kann. Unter den eben angegebenen Bedingungen erscheint der Regenbogen auch in dem Staubregen der Wasserfälle und Springbrunnen.

Um den Regenbogen zu erklären, muss man den Weg der Sonnenstrahlen durch die Regentropfen verfolgen.

Wenn ein Sonnenstrahl SA, Fig. 259, einen Regentropfen trifft, so wird er gebrochen, und es ist leicht, die Richtung des gebrochenen Strahles AB zu berechnen oder zu construiren. Bezeichnet man den Einfallswinkel mit i, den Brechungswinkel mit r, so ist $\sin i = 1{,}33 \sin r$, weil 1,33 der Brechungsexponent für Wasser ist. In B wird der Strahl theils gebrochen, theils gespiegelt; der gespiegelte Strahl trifft in C von Neuem die Oberfläche des Tropfens und wird nach der Richtung CO gebrochen. Verlängert man die Linien SA und OC, so schneiden sie sich in N. Der Winkel ANC, den wir mit d bezeichnen wollen, ist der Winkel, welchen der austretende Sonnenstrahl mit dem einfallenden macht, und die Grösse dieses Winkels soll zunächst bestimmt werden. Ziehen wir in dem Punkte B, in welchem der Strahl gespiegelt wird, das Einfallsloth BN, so ist der Winkel $BNA = \frac{1}{2} d$. Der Winkel PMA ist, wie leicht einzusehen, $= 2r$ (als Aussenwinkel des Dreiecks MBA), und da $2r$ auch ein Aussenwinkel des Dreiecks MAN ist, so haben wir

Fig. 259.



$$\frac{1}{2} d = 2r - i;$$

denn der Winkel MAN ist gleich i. Daraus folgt aber

$$d = 4r - 2i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Dieser Werth von d zeigt, dass der Winkel der eintretenden und austretenden Sonnenstrahlen mit der Grösse des Einfallswinkels sich ändert; denn von i hängt r und von beiden hängt d ab. Je nachdem also die unter sich parallel eintretenden Sonnenstrahlen in verschiedenen Punkten den Regentropfen treffen, erleiden sie auch nach zweimaliger Brechung und einmaliger Spiegelung verschiedene Ablenkungen. Der auffallende Strahl, dessen Verlängerung durch den Mittelpunkt des Tropfens geht, erleidet gar keine Ablenkung, denn für diesen Strahl ist $i = 0$; wenn aber $i = 0$, so sind auch r und $d = 0$. Je mehr nun der Einfallswinkel nach A hinrückt, desto grösser wird i, und die stetige Veränderung von i hat auch eine stetige Veränderung von d zur Folge. Es ist leicht, zu jedem i das zugehörige r und dann das zugehörige d nach Gleichung 1) zu berechnen, wie es in folgender

Tabelle für einige Werthe von i geschehen ist. Es ist hierbei 1,33 als Brechungsexponent beim Uebergang der Lichtstrahlen aus Luft in Wasser angenommen.

i	r	d
10^0	$7^0\ 30'$	10^0
20	14 54	19 36′
30	22 5	28 20
40	28 54	35 36
50	35 10	40 40
60	40 37	42 28
70	44 57	39 48
80	47 46	31 4
90	48 45	15

Nach dieser Tabelle ist die obere Curve der Fig. 1 auf Tab. 11 construirt, welche das Verhältniss anschaulich macht, in welchem der Einfallswinkel i zur Ablenkung d steht. Die verschiedenen Werthe von i sind als Abscissen, die zugehörigen Werthe von d als Ordinaten aufgetragen. Man ersieht aus dieser Figur sehr deutlich, wie mit zunehmendem Werthe von i auch die Ablenkung wächst, bis sie ein Maximum erreicht, wenn i gegen 59 bis 60^0 ist. Wächst i noch mehr, so nimmt die Ablenkung wieder ab.

Aus dem eben Gesagten folgt nun unmittelbar, dass die parallel auf den Tropfen fallenden Sonnenstrahlen, die wir bisher betrachtet haben, nach ihrem Austritte aus dem Tropfen divergiren. Es ist begreiflich, dass durch diese Divergenz der aus dem Tropfen kommenden Strahlen die Stärke des Lichteindruckes, den sie hervorbringen, ganz ausserordentlich geschwächt wird, namentlich, wenn die Tropfen in einer nur etwas bedeutenden Entfernung vom Auge sich befinden. Unter allen aus dem Tropfen nach zweimaliger Brechung und einmaliger Spiegelung ins Auge kommenden Strahlen können demnach nur diejenigen einen merklichen Lichteindruck machen, für welche diese Divergenz ein Minimum ist, oder, mit anderen Worten, nur diejenigen, welche sehr nahe parallel austreten.

Suchen wir nun in der Curve ABC (Fig. 1, Tab. 11) diejenige Stelle, wo bei gleichmässiger Veränderung der Abscissen i die Ablenkung sich verhältnissmässig am wenigsten ändert, so finden wir, dass dies der Fall ist, wenn die Ablenkung ein Maximum ist; denn an dieser Stelle ist die Curve fast horizontal. Für alle Einfallswinkel i, welche selbst einige Minuten grösser oder kleiner sind als $59^0\ 30'$, ist die Ablenkung fast ganz dieselbe, sie beträgt sehr nahe $42^0\ 30'$; eine ziemliche Menge parallel einfallender Sonnenstrahlen verlässt also den Tropfen fast in derselben Richtung, nachdem sie eine Ablenkung von sehr nahe $42^0\ 30'$ erlitten haben; und diese Strahlen werden unter allen aus den Tropfen kommenden allein einen merklichen Lichteindruck hervorbringen können.

Dasselbe Resultat, welches wir eben auf graphischem Wege abgeleitet haben, lässt sich aber auch in folgender Weise durch Rechnung erhalten.

Wenn der Einfallswinkel i um eine ganz kleine Grösse i' wächst oder abnimmt, so wird r um r' wachsen oder abnehmen und d die Aenderung d' erleiden. Die Gleichung 1) wird alsdann:

$$d + d' = 4r + 4r' - 2i - 2i' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Es handelt sich nun darum, denjenigen Werth von i zu finden, für welchen die Aenderung um die kleine Grösse i' keine Aenderung von d zur Folge hat, für welchen also $d' = 0$ wird. Aus der Combination der Gleichungen 1) und 2) folgt:

$$d' = 4r' - 2i',$$

also für den Fall, dass $d' = 0$ wird

$$i' = 2r' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

i und r sind aber durch die Gleichung

$$sin\,i = n\,.\,sin\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

verbunden, wenn n den Brechungsexponenten aus Luft in Wasser bezeichnet, wir haben also auch:

$$sin\,(i + i') = n\,sin\,(r + r')$$

oder

$$sin\,i\,cos\,i' + cos\,i\,sin\,i' = n\,.\,sin\,r\,.\,cos\,r' + n\,cos\,r\,.\,sin\,r';$$

da aber i' und r' sehr klein sind, so kann man

$$cos\,i' = cos\,r' = 1,\ sin\,i' = i' \text{ und } sin\,r' = r'$$

setzen und demnach wird die vorige Gleichung

$$sin\,i + i'\,cos\,i = n\,.\,sin\,r + n\,r'\,cos\,r$$

und wenn man von dieser Gleichung die Gleichung 4) abzieht

$$i'\,cos\,i = n\,r'\,cos\,r.$$

Daraus wird, wenn man für i' seinen Werth aus Gleichung 3) setzt:

$$2\,r'\,cos\,i = n\,r'\,cos\,r$$

$$2\,cos\,i = n\,cos\,r.$$

Wird diese Gleichung aufs Quadrat erhoben, so kommt:

$$4\,.\,cos\,i^2 = n^2\,cos\,r^2$$

$$4\,(1 - sin\,i^2) = n^2\,(1 - sin\,r^2)$$

und wenn man für $sin\,i$ seinen Werth aus Gleichung 4) setzt:

$$4\,(1 - n^2\,sin\,r^2) = n^2\,(1 - sin\,r^2)$$

oder nach einigen Umformungen:

$$sin\,r = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

und

$$sin\,i = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Setzen wir für n seinen Zahlenwerth 1,33, so kommt

$$sin\, i = 0{,}86238 \text{ also } i = 59^0\ 35',$$

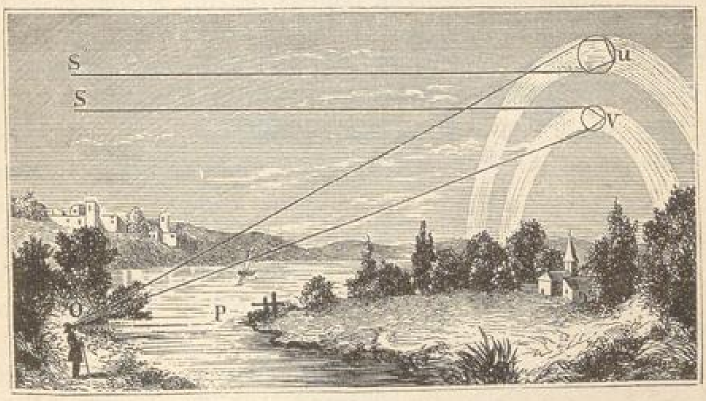
wonach ferner

$$sin\, r = \frac{0{,}86238}{1{,}33} = 0{,}6483 \text{ also } r = 40^0\ 25'$$

und endlich $$d = 42^0\ 30'.$$

Man denke sich durch die Sonne und das Auge des Beobachters eine gerade Linie OP, Fig. 260, gezogen und durch dieselbe eine Verticalebene gelegt. Man ziehe ferner durch O eine Linie OV, so dass der Winkel $POV = 42^0\ 30'$, so werden nach dieser Richtung hin sich befindende Regentropfen nach einmaliger innerer Spiegelung wirksame

Fig. 260.



Strahlen ins Auge senden. Jedoch nicht allein in dieser Richtung empfängt das Auge wirksame Strahlen, sondern, wie leicht begreiflich, von allen Regentropfen, die in der Kegeloberfläche liegen, welche durch Umdrehung der Linie OV um die Axe OP entsteht; das Auge wird also einen lichten Kreis sehen, dessen Mittelpunkt auf der von der Sonne durch das Auge gezogenen Geraden liegt und dessen Halbmesser unter einem Winkel von $42^0\ 30'$ erscheint.

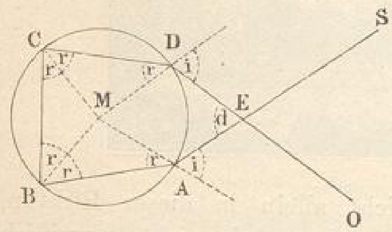
Bei der obigen Betrachtung wurde 1,33 als Brechungsexponent in Rechnung gebracht. Es ist dies aber der Brechungsexponent der rothen Strahlen, das Auge sieht also in der erwähnten Richtung einen rothen Kreis, der als ein rother Ring von 30′ Breite erscheint, weil die Sonne nicht ein Punkt, sondern eine Scheibe ist, die den scheinbaren Durchmesser von 30′ hat. Für violette Strahlen ist der Brechungsexponent 1,34, und daraus ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von i und d:

i	d	i	d
0	0	50^0	39^0
10^0	$9^0\ 40'$	60	40 28′
20	18 57	70	37 28
30	27 22	80	28 28
40	34 20	90	12 18

Nach diesen Zahlen ist die unterste Curve (Fig. 1, Tab. 11) construirt. Das Maximum der Ablenkung, welche die violetten Strahlen nach einmaliger innerer Spiegelung im Tropfen erleiden, ist demnach nahe $40^0\ 30'$; dies ist also die Richtung, in welcher die wirksamen violetten Strahlen austreten. Es wird also concentrisch mit dem rothen ein violetter Kreisbogen von geringerem Halbmesser sichtbar sein, welcher gleichfalls eine Breite von 30′ hat. Zwischen diesen äussersten Bogen erscheinen die der übrigen prismatischen Farben, und so bildet also gewissermaassen der Regenbogen ein zu einem kreisförmigen Bande ausgedehntes Spectrum. Die ganze Breite des Regenbogens beträgt ungefähr 2^0, da ja der Halbmesser des rothen Bogens um 2^0 grösser ist als der des violetten.

Was den Umfang des farbigen Bogens betrifft, so hängt er offenbar von der Höhe der Sonne über dem Horizonte ab. Wenn die Sonne eben untergeht, so erscheint der Regenbogen im Osten, der Mittelpunkt des Bogens liegt dann gerade im Horizonte, weil die durch die Sonne und das Auge gezogene Linie eine horizontale ist; wenn der Beobachter in der Ebene steht, so bildet der Regenbogen gerade einen Halbkreis; er kann aber mehr als einen Halbkreis übersehen, wenn er auf einer isolirten Bergspitze von geringer Breite oder auf einem hohen Thurme steht. Bei Sonnenaufgang erscheint der Regenbogen im Westen. Je höher die Sonne steigt, desto tiefer liegt der Mittelpunkt des farbigen Bogens unter dem Horizont, desto kleiner ist also das dem Auge sichtbare Bogenstück. Wenn die Sonne $42^0\ 30'$ hoch steht, ist für einen in der Ebene stehenden Beobachter gar kein Regenbogen mehr sichtbar, weil alsdann der höchste Theil desselben gerade in den Horizont, der ganze Bogen also unter den Horizont fallen würde. Von den Masten der Schiffe sieht man oft Regenbogen, welche einen ganzen Kreis bilden; solche ganze kreisförmige Regenbogen sieht man auch oft an Wasserfällen und Springbrunnen.

Fig. 261.



Ausser dem eben besprochenen Hauptregenbogen sieht man gewöhnlich noch einen zweiten grösseren, mit dem ersteren concentrischen, den Nebenregenbogen, bei welchem die Ordnung der Farben die umgekehrte ist; beim äusseren Regenbogen ist nämlich das Roth innen, das Violett aussen. Der Nebenregenbogen ist weit weniger lichtstark als der innere, er erscheint weit blasser. Man hatte früher die irrige Ansicht, der Nebenregenbogen sei gleichsam ein Spiegelbild des Hauptregenbogens. Die Entstehung des äusseren Regenbogens beruht auf denselben Principien wie die des inneren, er entsteht durch Sonnenstrahlen, welche in den Regentropfen eine zweimalige Brechung und eine zweimalige innere Reflexion erlitten haben.

In Fig. 261 ist der Gang eines Lichtstrahles dargestellt, welchen derselbe im Regentropfen nimmt, um ihn nach zweimaliger innerer Spiegelung zu verlassen. SA ist der einfallende Sonnenstrahl, welcher nach AB gebrochen, dann in B und C gespiegelt wird und bei D in der Richtung DO wieder austritt. In diesem Falle schneiden sich der einfallende und der austretende Strahl und bilden einen Winkel d mit einander, dessen Grösse veränderlich ist, je nachdem der einfallende Strahl den Tropfen an einer anderen Stelle, also unter einem anderen Einfallswinkel, trifft. Suchen wir nun den Werth des Ablenkungswinkels d zu ermitteln.

Die Summe aller Eckwinkel des Fünfecks $ABCDE$ beträgt, wie dies bei jedem Fünfeck der Fall ist, sechs Rechte oder 540°. Um den Winkel d zu finden, haben wir also nur von 540° die Eckwinkel bei A, B, C und D abzuziehen: jeder der Eckwinkel bei B und C beträgt $2r$, zusammen machen sie also $4r$ aus; der Winkel bei D sowohl als der bei A ist aber gleich $r +$ dem Winkel MDE; für den Winkel MDE können wir aber seinen Werth $180 - i$ setzen, folglich ist der Winkel CDE gleich $r + 180 - i$, die beiden Eckwinkel bei A und D sind also zusammen:

$$2r + 360^0 - 2i;$$

wir haben also:

$$d = 540^0 - 4r - (2r + 360^0 - 2i)$$

oder

$$d = 180^0 + 2i - 6r.$$

Nach dieser Formel ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe des Einfallswinkels i und des Ablenkungswinkels d für violettes und rothes Licht:

Einfallswinkel	Ablenkungswinkel	
	für Roth	für Violett
0	180°	180°
40	86 36′	88 0′
60	56 18	58 24
70	50 18	53 24
80	53 24	56 12
90	68 30	70 18

Wenn ein rechtwinklig auf den Tropfen fallender Strahl, an der Rückwand des Regentropfens reflectirt, die Vorderfläche wieder trifft, so tritt er zum Theil in der Richtung wieder aus, in der er gekommen war, der Winkel des eintretenden und des austretenden Strahles ist für diesen Fall gleich Null; zum Theil erleidet er aber an der Vorderwand eine zweite Reflexion und tritt dann in einer Richtung aus, welche die Verlängerung des einfallenden Strahles bildet; die Ablenkung ist alsdann 180°. Trifft der einfallende Strahl nicht rechtwinklig auf den Tropfen, so nimmt die Totalablenkung nach zweimaliger innerer Spiegelung ab, wenn der

Einfallswinkel wächst. Für einen Einfallswinkel von ungefähr 71° ist die Ablenkung ein Minimum, und zwar beträgt sie für die rothen Strahlen ungefähr 50°, für violette nahe $53^1/_2$°. Für noch grössere Einfallswinkel nimmt die Ablenkung wieder zu.

Nach den Zahlen der letzten Tabelle sind die beiden Curven der Fig. 2 auf Tab. 11 construirt, und zwar gilt die untere für die rothen, die obere für die violetten Strahlen. Man sieht aus dem Anblick der Figur, dass in der Nähe des Minimums der Ablenkung eine kleine Veränderung des Einfallswinkels keine bedeutende Veränderung in der Ablenkung hervorbringt, dass also in der Richtung der kleinsten Ablenkung ein Bündel ziemlich paralleler Strahlen austritt, und diese Strahlen sind die einzigen unter allen, welche, den Tropfen nach zweimaliger innerer Spiegelung verlassend, einen merklichen Lichteindruck hervorbringen können. Aus der für den ersten Regenbogen entwickelten Schlussweise ergiebt sich, dass man unter den geeigneten Umständen einen rothen Bogen sehen wird, dessen Halbmesser unter einem Winkel von 50°, und einen violetten, dessen Radius unter einem Winkel von $53^1/_2$° erscheint. Die Breite des zweiten Regenbogens beträgt also ungefähr $3^1/_2$°.

Der Zwischenraum der beiden Regenbogen beträgt ungefähr $7^1/_2$°.

Der äussere Regenbogen ist blasser, weil er durch Strahlen gebildet wird, welche eine zweimalige innere Spiegelung erlitten haben, indem das Licht bei jeder Spiegelung eine Schwächung erleidet. Man würde noch einen dritten und einen vierten Regenbogen sehen können, welche durch Strahlen gebildet werden, die eine dreimalige und eine viermalige innere Spiegelung erlitten haben, wenn diese Strahlen nicht zu lichtschwach wären.

160 **Secundäre Regenbogen.** Im vorigen Paragraphen wurde nur die Haupterscheinung des Regenbogens betrachtet, welche er jedesmal ohne wesentliche Veränderung zeigt; es kommt indessen noch eine interessante Nebenerscheinung vor, die nur unter besonderen Umständen und nicht immer in ganz gleicher Weise eintritt, nämlich die sogenannten secundären oder überzähligen Regenbogen.

Die überzähligen Regenbogen bestehen darin, dass der Hauptregenbogen nach innen, und manchmal auch der Nebenregenbogen nach aussen nicht mit dem Violett abschliesst, sondern dass sich jenseits des Violett noch mehrere, meist abwechselnd grüne und rothe Bogen anschliessen. Die secundären Bogen erscheinen in der Regel nur am obersten Theile der primären, indem sie nach beiden Seiten hin allmählich matter werden und lange bevor sie den unteren Rand erreichen, ganz verschwinden.

Venturi suchte die überzähligen Regenbogen durch die Annahme zu erklären, dass die herabfallenden Regentropfen zum Theil wenigstens