



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das Feldmessen

Schewior, Georg

Leipzig, 1915

3. Die Koordinatenberechnung der Polygonpunkte

[urn:nbn:de:hbz:466:1-97237](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-97237)

Wäre beispielsweise auf $\odot 2$ $\alpha_2 = 31^\circ 20'$, demnach $\text{tg } \alpha_2 = 0,6088$ in natürlichen Zahlen, so ist $h_2 = p_2 \cdot \text{tg } \alpha_2 = 100 \text{ mm} \cdot 0,6088 = 60,88 = \text{rd. } 60,9 \text{ mm}$.

Wird die Ordinate $h_2 = 60,9 \text{ mm}$ gezeichnet und über $\odot 2$ und den kartierten Ordinatenendpunkt eine Bleilinie gezogen, so ist, nachdem weiter von $\odot 2$ ab auf dieser die Polygonseite s_2 abgesetzt ist, für $\odot 2 - \odot 3$ die Kartierung bewerkstelligt. Das Verfahren ist im Wesen das gleiche, wie bei den gebrochenen Abscissenlinien nach Seite 133.

Die obige Auftragemethode wird bei offenen Polygonzügen stets gute Dienste leisten, wenn nicht auch hier die bei den geschlossenen Polygonzügen sehr zu empfehlende „Koordinatenberechnung“ des folgenden Abschnittes zur Anwendung gelangt.

3. Koordinatenberechnung der Polygonpunkte.

Der in Betracht kommende Rechen-Vorgang bezweckt die Ermittlung der rechtwinkligen Koordinaten der Polygonpunkte auf Grund einer Haupt-Abscissenlinie, ähnlich wie die Aufnahme der Knickpunkte B C D E... der Fig. 164, wo die Punkte auf A G als Haupt-Abscissenlinien nach Koordinaten aufgemessen sind. In der Regel wird aber — entgegengesetzt dem Beispiele in Fig. 164 — bei den Polygonzügen die Hauptabszissenlinien nicht den ersten und letzten Polygonpunkt verbinden, sie wird,

Fig. 260.

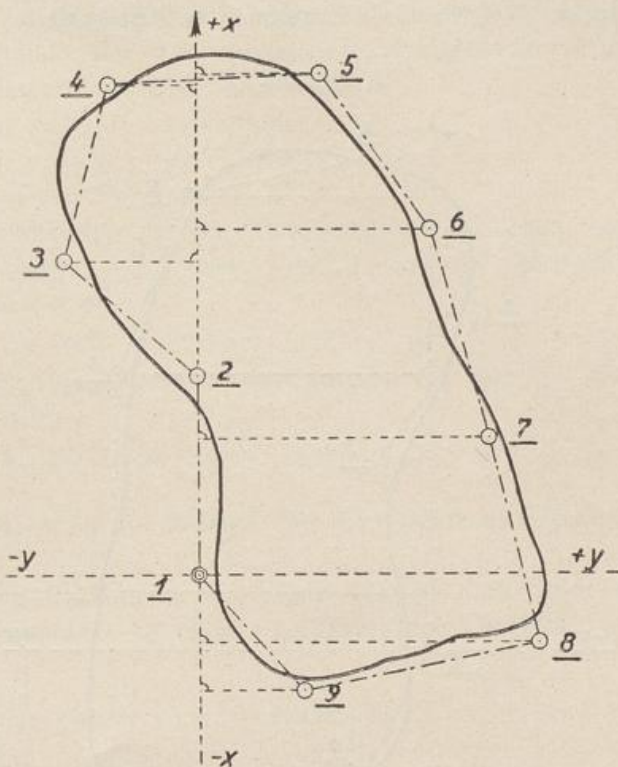
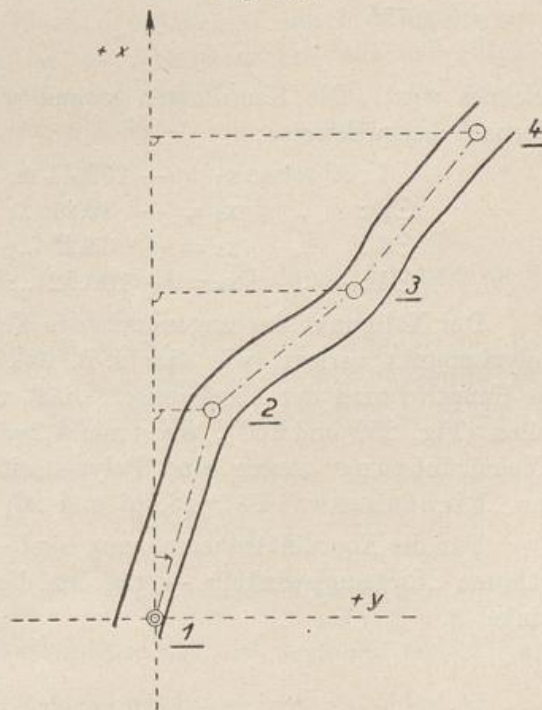
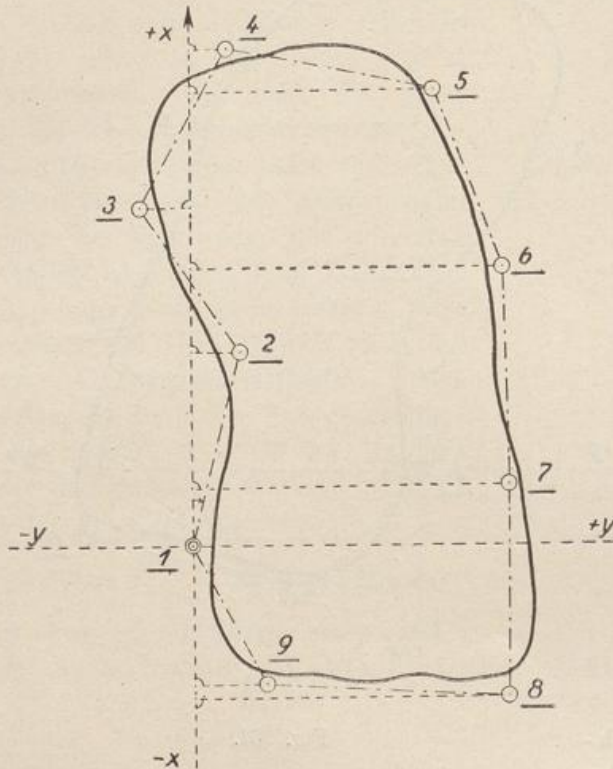


Fig. 261.



besonders auch bei den geschlossenen Zügen, eine beliebige Richtung, zweckmäßig jedoch die „Nordrichtung“ (s. S. 90) erhalten. Hierdurch kann es geschehen,

Fig. 262.



daß, wenn ein „Koordinatensystem“ nach Fig. 257 mit einem beliebigen Anfangs- oder Nullpunkte 0,00 der „Abscissenachse“ x und der auf ihr rechtwinklig stehenden „Ordinatenachse“ y gewählt wird, die Polygonpunkte in den vier Quadranten I, II, III und IV liegen können. Um nun die Lage der Polygonpunkte in diesem System un- zweideutig durch die Koordinaten selbst anzugeben, erhält die Haupttrichtung der Abscissenachse, die durch eine Pfeilsignatur (Norden) angedeutet wird, das Vorzeichen $+$, in entgegengesetzter Richtung über den Nullpunkt hinaus (nach Süden) das Vorzeichen $-$, während die Ordinatenrichtung nach rechts (nach Osten) mit $+$, nach links (nach Westen) mit $-$ gekennzeichnet wird.

Die Koordinaten x und y des Polygonzuges in Fig. 258 sind hiernach beispielsweise:

⊙1:	Abscisse $x_1 = -162,44$ m;	Ordinate $y_1 = -35,22$ m.
⊙2:	„ $x_2 = -39,21$ „;	„ $y_2 = +76,21$ „
⊙3:	„ $x_3 = +63,25$ „;	„ $y_3 = -65,44$ „
⊙4:	„ $x_4 = +160,52$ „;	„ $y_4 = +37,11$ „

Der Nullpunkt des angenommenen Koordinatensystems wird meist in einen Polygonpunkt verlegt, wie dies z. B. aus den Fig. 259 bis 262 zu ersehen ist; die Haupttrichtung der Abscissenachse läßt man mit einer Polygonseite zusammenfallen (Fig. 259 und 260), wenn nicht, wie schon gesagt wurde (s. S. 86), die „Nordrichtung“ gegen eine Polygonseite, Fig. 261 und 262 ⊙1 — ⊙2, durch den „Richtungswinkel“ (S. 86 und 90) festgelegt ist.

Für die Koordinatenberechnung sind — abgesehen etwa von dem eben erwähnten „Richtungswinkel“ — gegeben die Polygonseiten s und die Brechungswinkel β .

a) Koordinatenberechnung eines offenen Polygonzuges.

Wird die Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ (Fig. 263) als Hauptabszissenrichtung und der Polygonpunkt $\odot 1$ als Nullpunkt des Koordinatensystems angenommen, so folgen aus der Figur die Koordinaten für den Polygonpunkt:

$$\odot 1: x_1 = 0,00; \quad y_1 = 0,00$$

$$\odot 2: x_2 = +s_1; \quad y_2 = 0,00$$

d. h. $x_2 =$ der Länge der gemessenen Polygonseite s_1 .

Fällt man von $\odot 3$ die Senkrechte auf die Abszissenachse, so erhält man die „Koordinatenunterschiede“ Δx_2^3 und Δy_2^{3*}) und die gesuchten Koordinaten des Polygonpunktes $\odot 3$ zu:

$$x_3 = x_2 + \Delta x_2^3; \quad y_3 = y_2 + \Delta y_2^3,$$

dementsprechend, wenn man die Hauptabszissenachse parallel bis zum $\odot 3$ verschiebt, die Koordinaten von $\odot 4$ zu:

$$x_4 = x_3 + \Delta x_3^4; \quad y_4 = y_3 + \Delta y_3^4$$

und so fort.

Zu ermitteln sind also allgemein die Beträge der Koordinatenunterschiede Δx und Δy .

Ergänzt man durch einige Buchstaben die Figur 263 zu Figur 264, so findet man das aus der Trigonometrie in einem rechtwinkligen Dreiecke bekannte Verhältnis:

$$\cos \alpha_2 = \frac{\Delta x_2^3}{s_2}, \quad \text{woraus } \Delta x_2^3 = \cos \alpha_2 \cdot s_2.$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\Delta y_2^3}{s_2}, \quad \text{woraus } \Delta y_2^3 = \sin \alpha_2 \cdot s_2.$$

Hierbei ist s_2 , die Polygonseite, durch Messung gegeben, α_2 jedoch unbekannt. Auf $\odot 2$ ist nun aber der Brechungswinkel β_2 durch Winkelmessung gegeben, so daß α_2 für diesen Fall, da die Abszissenachse mit der Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ zusammenfällt, sich berechnet nach:

$$\alpha_2 = \beta_2 - 180^\circ.$$

Aus s_2 und α_2 läßt sich somit:

$$\Delta x_2^3 = \cos \alpha_2 \cdot s_2$$

$$\Delta y_2^3 = \sin \alpha_2 \cdot s_2$$

bestimmen, also auch die Koordinaten des Punktes $\odot 3$ durch Addition zu den Koordinaten von $\odot 2$, wie oben gezeigt wurde.

Die Berechnung der Koordinatenunterschiede erfolgt in der Regel mit Hilfe von fünfstelligen Logarithmen**), doch werden vielfach vierstellige Logarithmen***) ausreichen. Die Koordinaten selbst werden auf cm, also auf zwei Stellen hinter dem Komma angegeben.

Für den Punkt $\odot 4$ werden:

$$\Delta x_3^4 = \cos \alpha_3 \cdot s_3; \quad \Delta y_3^4 = \sin \alpha_3 \cdot s_3$$

*) Δx_2^3 gelesen: Abszissenunterschied des Polygonpunktes $\odot 2$ und $\odot 3$.

Δy_2^3 gelesen: Ordinatenunterschied „ „ $\odot 2$ und $\odot 3$.

**) Zu empfehlende fünfstellige Logarithmentafeln sind z. B. diejenigen von Dr. Gauß, siehe Seite 138 Anm.

***) Vierstellige Logarithmen siehe im Anhang des Bandes unter Nr. V und VI.

der Fig. 264 zu berechnen sein, wobei wieder s_3 gegeben, α_3 zunächst noch unbekannt ist, aber durch die sogen. „Richtungsübertragung“ ermittelt wird.

Fig. 263.

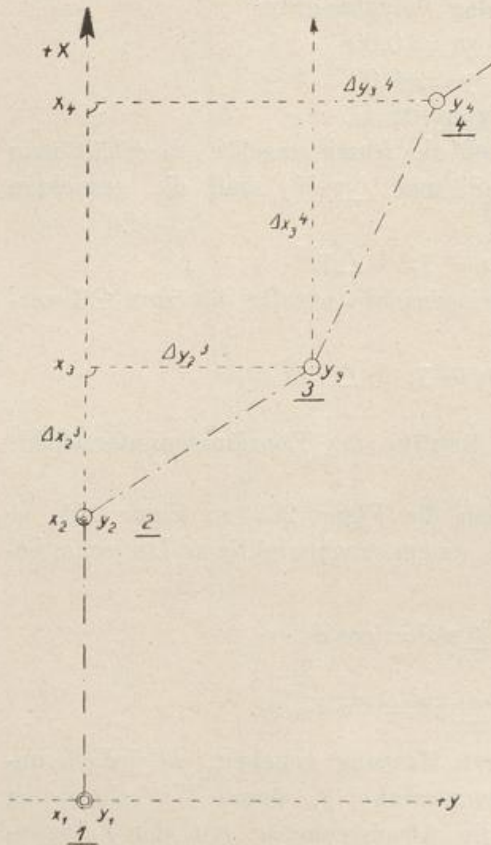
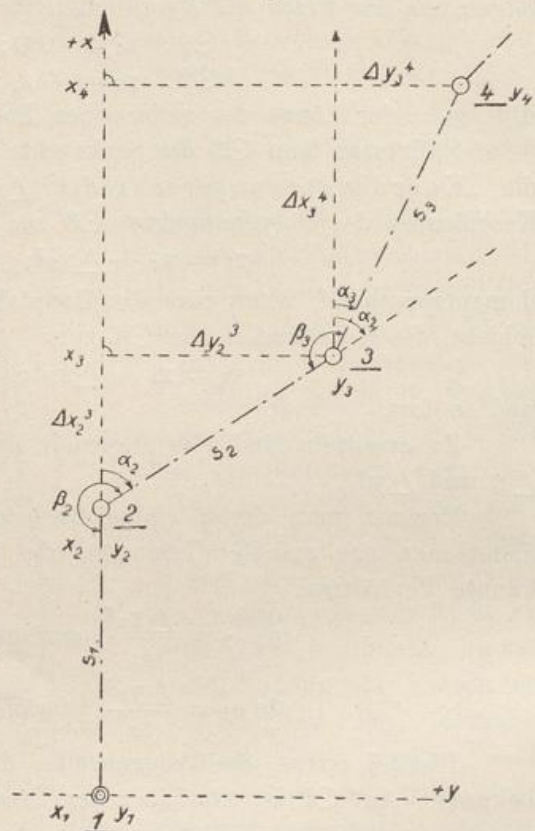


Fig. 264.



Verlängert man die Polygonseite $\odot 2 - \odot 3$ über $\odot 3$ hinaus, so erhält man auf $\odot 3$ gleichfalls den Richtungswinkel α_2 , gerechnet von der durch $\odot 3$ parallel zur Hauptabszissenachse gelegten Linie. Aus der Fig. 264 folgt unmittelbar:

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \beta_3 - 180^\circ,$$

so daß also wieder Δx_3^4 und Δy_3^4 und die Koordinaten zu:

$$x_4 = x_3 + \Delta x_3^4$$

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3^4$$

berechnet werden können.

In der angegebenen Weise lassen sich nach einander alle Koordinatenunterschiede und damit auch die Koordinaten der einzelnen Polygonpunkte ermitteln. Die Koordinatenberechnung erfolgt am zweckmäßigsten in einem Rechenformular von nachstehender Anordnung (s. S. 143).

Beispiel. Die auf Seite 118 im Winkelbuche aufgeführten Winkel und Seiten eines offenen Polygons sollen mit der Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ (Fig. 180) als Hauptabszissenrichtung der Koordinatenberechnung dienen. Hierzu sind die im Anhang unter Nr. V und VI aufgeführten vierstelligen Logarithmen benutzt worden.

Abzug gelangen; dieses trifft dann zu, wenn der Richtungswinkel α nach Abzug von 180° immer noch größer als 360° ist. Der Fall $\alpha_3 = \alpha_2 + \beta_3 + 180^\circ$ ist z. B. bei $\odot 3$ der obigen Polygonzugberechnung zu sehen.

Die logarithmische Berechnung nach Richtungswinkeln und Polygonseiten ist in den Spalten 5 und 6 durchzuführen und die Koordinatenunterschiede ihrem Vorzeichen entsprechend in den Spalten 7 und 8 aufzunehmen. Die Koordinaten selbst werden schließlich in den Spalten 9 und 10 ermittelt. Die Koordinaten des letzten Polygonpunktes, hier $\odot 5$, müssen mit der Summe der Koordinatenunterschiede in den Spalten 7 und 8 übereinstimmen, siehe das Rechenschema.

Bei der Entnahme der Logarithmen für die Richtungswinkel α größer als 90° können mit Rücksicht auf die Einrichtung der Logarithmentafeln nur die Ueberschüsse von 90° bzw. 180° bzw. 270° benutzt werden. Die Winkel­funktionen erhalten dabei, je nach der Größe des Winkels ein Vorzeichen, das auch maßgebend für die Koordinatenunterschiede Δx und Δy ist. Für einen Winkel von:

0° bis 90°	ist das Vorzeichen bei $\sin = +$, bei $\cos = +$
90° „ 180° „ „ „	„ $\sin = +$, bei $\cos = -$
180° „ 270° „ „ „	„ $\sin = -$, bei $\cos = -$
270° „ 360° „ „ „	„ $\sin = -$, bei $\cos = +$

Hierbei wird auch als bekannt hervorgehoben, daß die in den Logarithmentafeln aufzuschlagenden $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ bei Winkeln zwischen 0° und 90° bzw. 180° und 270° den in den Tafeln angegebenen Werten entsprechen,

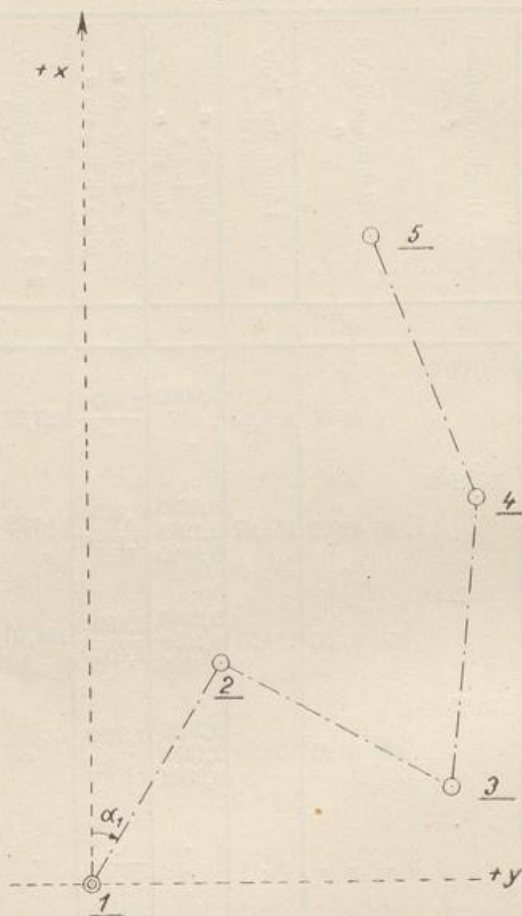
bei Winkeln

zwischen 90° und 180° bzw. 270° und 360° ist für den **sin** der **cos**, für den **cos** der **sin** der Tafel zu entnehmen.

Beispiel:

$\sin 45^\circ 12' 12'' = + \sin 45^\circ 12' 12''$	hiernach hat Δy das Vorzeichen $+$
$\cos 45^\circ 12' 12'' = + \cos 45^\circ 12' 12''$	„ „ Δx „ „ $+$
$\sin 107^\circ 15' 24'' = + \cos 17^\circ 15' 24''$	„ „ Δy „ „ $+$
$\cos 107^\circ 15' 24'' = - \sin 17^\circ 15' 24''$	„ „ Δx „ „ $-$

Fig. 265.



$\sin 222^{\circ} 38' 52'' = -\sin 42^{\circ} 38' 52''$;	hiernach hat Δy das Vorzeichen —
$\cos 222^{\circ} 38' 52'' = -\cos 42^{\circ} 38' 52''$;	„ „ Δx „ „ —
$\sin 333^{\circ} 53' 33'' = -\cos 63^{\circ} 53' 33''$;	„ „ Δy „ „ —
$\cos 333^{\circ} 53' 33'' = +\sin 63^{\circ} 53' 33''$;	„ „ Δx „ „ +

Ist statt der Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ der Fig. 180 als Abscissenachse eine andere Richtung, z. B. die „Nordrichtung“, vorgesehen (Fig. 265), so bleibt die Koordinatenberechnung im wesentlichen dieselbe. Der für die Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ gemessene „Magnetische oder Astronomische Richtungswinkel“ ist aber hier als Richtungswinkel α_1 auf $\odot 1$ einzuführen. Dadurch muß im Gegensatz zu der obigen Berechnung, wo $\alpha_1 = 0^{\circ}$ und

$$\Delta x_1^2 = \cos 0^{\circ} \cdot s_1 = 1,0000 \cdot s_1^*) = s_1$$

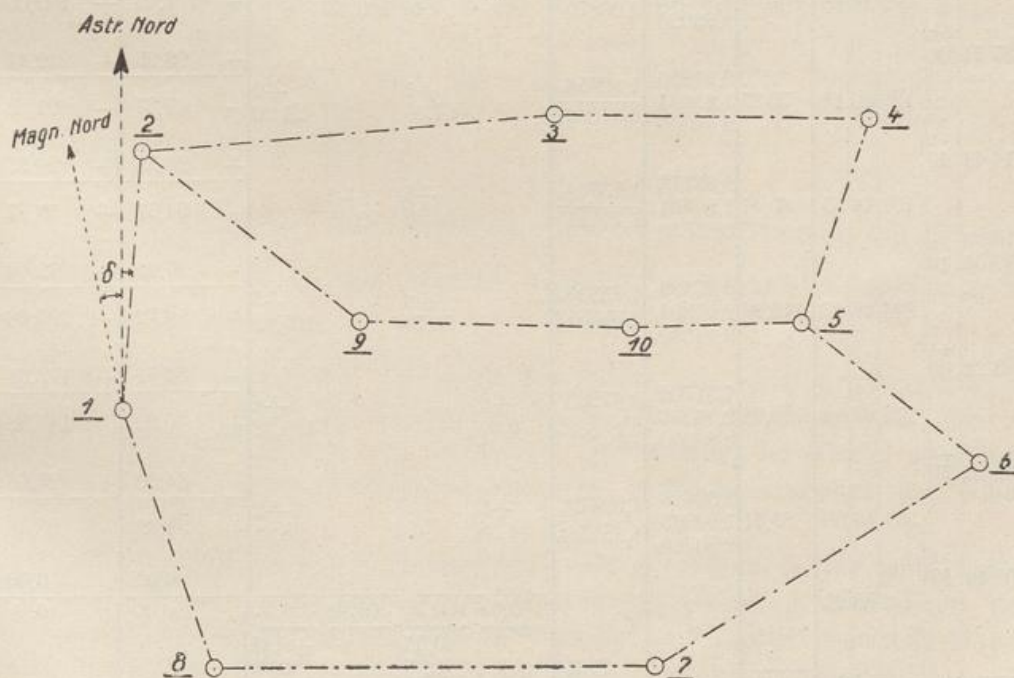
$$\Delta y_1^2 = \sin 0^{\circ} \cdot s_1 = 0,0000 \cdot s_1^*) = 0,00.$$

war, die Rechnung schon vom Polygonpunkte $\odot 1$ ab in der früher angegebenen Weise durchgeführt werden. Der Richtungswinkel α_2 auf $\odot 2$ ist daher auch, wie auf Seite 142 und 143 auseinandergesetzt wurde, zu ermitteln.

b) Koordinatenberechnung für geschlossene Polygonzüge.

Die Berechnungsmethode für offene Polygonzüge gilt auch für geschlossene Polygone, wo eine sehr wertvolle Kontrolle darin besteht, daß die Summe der „Koordinatenunterschiede“ $[\Delta x]$ einerseits und $[\Delta y]$ **)) andererseits

Fig. 266.



*) 1,000 die „natürliche trigonometrische Zahl“ von $\cos 0^{\circ}$
0,000 „ „ „ „ „ „ $\sin 0^{\circ}$

***) Die eckige Klammer [] ist das Zeichen für die Summe.

„Null“ ergeben muß. Das rührt daher, daß im Zuge der fortschreitenden Berechnung die Koordinaten auch für den ersten Polygonpunkt noch einmal bestimmt werden, so daß sich also die Koordinatenunterschiede aufheben.

Beispiel. Für das in der Fig. 266 gegebene „geschlossene“ Umringspolygon mit den Polygonpunkten $\odot 1$ bis $\odot 8$ und dem „Astronomischen Richtungswinkel“ $A = \alpha_1 = 3^\circ 58' 20''$ auf $\odot 1$ sollen die Koordinaten ermittelt werden. Der Richtungswinkel α_1 , die Brechungswinkel β und die gemittelten Polygonseiten s sind dem Winkelbuche auf Seite 122 zu entnehmen.

Die Koordinatenberechnung ist im Rechenformular, Seite 146, durchgeführt.

Es sei hier als wesentlich hervorgehoben, daß durch die fortschreitende Berechnung der Richtungswinkel $A = \alpha_1$ von $\odot 1$ über $\odot 2$ usw. schließlich wieder auch der Richtungswinkel der Polygonseite $\odot 1 - \odot 2$ erhalten wird, der hier zu $\alpha_1 = 3^\circ 58' 20''$ eingesetzt war. Der so nochmals ermittelte Richtungswinkel (α_1) wird mit dem eingesetzten Richtungswinkel $\alpha_1 = A$ übereinstimmen, wenn keine Winkelmeßfehler begangen sind, was kaum zutrifft. Die Winkeldifferenz $\alpha_1 - (\alpha_1)$ wird durch die Anzahl der Polygonpunkte dividiert und der errechnete Betrag, abgerundet auf ganze Sekunden ($''$), nach dem Vorzeichen der Differenz den Brechungswinkeln zugefügt.

Diese Rechnung wird sofort nach Eintragung der Winkel β in das Formular in der Weise vorgenommen, daß man zu dem gemessenen Richtungswinkel $\alpha_1 = A$ sämtliche Brechungswinkel β addiert und diesem Werte die Summe $\alpha_1 + (2n + 4) \cdot 90^\circ$ gegenüberstellt, wo n die Anzahl der Brechungswinkel bedeutet. Die Rechnung erfolgt in der Spalte 2, wie unser Beispiel (S. 146) zeigt. Hier ist die erste Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots = 1803^\circ 58' 10''$, die zweite Summe $\alpha_1 + (2n + 4) 90^\circ = 1803^\circ 58' 20''$; dann ist die Differenz $f\beta = 1803^\circ 58' 20'' - 1803^\circ 58' 10''$

$$= +10''.$$

Dividiert man $f\beta = +10''$ durch die Anzahl der Brechungswinkel, also durch 8, so sind $+ \frac{10''}{8} = +1''$ und zweimal je $+2''$ die Winkelverbesserungen, die man in Spalte 2 einträgt.

Die Differenz $f\beta$ darf höchstens den Betrag von $1,5' \sqrt{n}$ *) betragen, wo n , wie bereits oben gesagt, die Anzahl der Brechungswinkel bedeutet. Der zulässige Grenzwert läßt sich bei vorsichtiger Beobachtung der Winkel stets innehalten. Eine zu starke Abweichung kann nur durch Nachmessung der Winkel behoben werden.

Die Ermittlung der Richtungswinkel erfolgt sodann in der früher angegebenen Art, wobei aber neben den gemessenen Winkeln β auch deren Verbesserungen zu berücksichtigen sind. Der in Spalte 3 (unten) nochmals berechnete Richtungswinkel (α_1) ist gleich dem in der ersten Zeile eingesetzten, also $= 3^\circ 58' 20''$, wie es sein muß.

*) Die Beobachtung ist als „Gut“ zu bezeichnen, wenn der Betrag von rund $30'' \sqrt{n}$ nicht überschritten wird.

Werden nun die Koordinatenunterschiede Δx und Δy in den Spalten 7 und 8 berechnet, so muß die Summe der Abscissen- und Ordinatenunterschiede je für sich „Null“ ergeben.

In dem vorliegenden Beispiele beträgt in Spalte 7:

für $[\Delta x]$ der + Wert = 180,05 m
der - Wert = 180,16 „

demnach ein Unterschied = -0,11 m
das Soll ist 0,00 „

demnach der Widerspruch $f_x = 0,00 - (-0,11) = +0,11$ m

ferner

für $[\Delta y]$ der + Wert = 301,38 m
der - Wert = 301,59 „

demnach ein Unterschied = -0,21 m
das Soll ist 0,00 „

demnach der Widerspruch $f_y = 0,00 - (-0,21) = +0,21$ m.

Wir haben also $f_x = +0,11$ m, $f_y = +0,21$ m erhalten.

Um hier die zulässige Abweichung zu ermitteln, wird

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

berechnet, wobei f_s , je nach der erforderlichen Genauigkeit, die auf Seite 49 mitgeteilten zulässigen Fehlergrenzen d für die Gesamtlänge der Polygonseiten $[s]$ nicht überschreiten soll. Wird

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{0,11^2 + 0,21^2} = 0,23 \text{ m}$$

für unseren Fall berechnet, so sieht man, daß bei der Länge der Polygonseiten von $[s] = \text{rd. } 828$ m, die in Spalte 4 (unten) angegeben ist, nach den Vorschriften der preußischen Katasterverwaltung (s. Anhang unter Nr. II) bei günstigem Gelände eine Abweichung von $d_1 = 0,82$ m erlaubt ist; $f_s = 0,23$ m liegt demnach innerhalb der zulässigen Fehlergrenze.

Würde f_s einen unzulässigen Betrag erreichen, so sind die Längen der Polygonseiten (event. auch die Winkel) durch eine nochmalige Messung nachzuprüfen.

Die Widersprüche f_x und f_y werden auf die einzelnen Koordinatenunterschiede Δx und Δy nach Verhältnis der Polygonseitenlängen verteilt. Man bildet die Quotienten

$$\frac{f_x}{[s]} \text{ und } \frac{f_y}{[s]}$$

und erhält die Verbesserungen

$$\begin{aligned} \text{für } \Delta x_1^2 \text{ zu: } & \frac{f_x}{[s]} \cdot s_1; \text{ für } \Delta y_1^2 \text{ zu: } \frac{f_y}{[s]} \cdot s_1 \\ \Delta x_2^3 \text{ zu: } & \frac{f_x}{[s]} \cdot s_2; \text{ für } \Delta y_2^3 \text{ zu: } \frac{f_y}{[s]} \cdot s_2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Verbesserungen werden über die zugehörigen Koordinatenunterschiede mit den entsprechenden Vorzeichen in Spalte 7 bzw. 8 eingetragen, siehe Rechenschema S. 146.

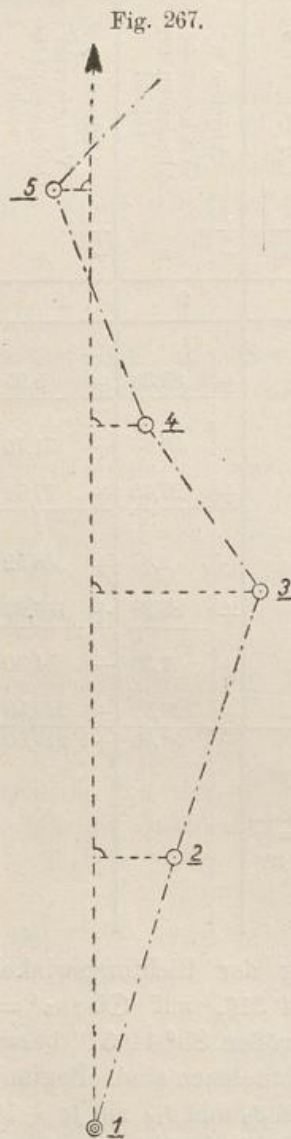
Die Ermittlung der Koordinaten erfolgt schließlich, bei $\odot 1$ angefangen, der Reihe der Punkte nach unter Beachtung der verbesserten Koordinatenunter-

Die Rechnung zeigt, daß die Messung der Brechungswinkel und Polygonseiten in zulässigen Grenzen differieren.

In vorstehender Weise sind stets Zwischenzüge, wie z. B. auch die Züge II, III und IV in Fig 172 und $\odot 8$ und $\odot 9$ der Tafel IV einzurechnen. In letzterer ist die Polygonseite $\odot 8 - \odot 10$ als „offener“ Zug anzusehen, mit den Anfangskordinaten des $\odot 8$.

4. Auftragen der Polygonpunkte nach Koordinaten.

Offene Polygonzüge, deren Abscissenachse nur wenig von der Gesamttrichtung des aufgemessenen Flächenstreifens abweicht, werden nach Zeichnung der



Achse durch den Anfangs-Polygonpunkt entsprechend den Koordinaten abgetragen, siehe Figur 267. Es besteht hier also wieder die gleiche Aufgabe, wie bei der Kartierung der Messung nach S. 133 u. Fig. 162.

Die Polygonseiten werden in feinen Bleilinien ausgezeichnet und mit den gemessenen Maßen verglichen. Ueber die zulässige Abweichung ist auf Seite 131 das Nähere gesagt. Sie wird in der Regel auf die einzelnen Abscissenmaße der Polygonseite im Verhältnis zur Gesamtlänge verteilt. Der Vorgang sei an der Fig. 268 gezeigt. Von der Polygonseite $\odot 5 - \odot 6$ sind aufgemessen die Grenzpunkte (20) bis (23). Die abgegriffene Polygonseite beträgt 125,2 m, gemessen ist 125,75 m, also beträgt die Abweichung $w = 125,2 - 125,75 = -0,55$ m für die Länge von rd. 126 m. Die Abweichung ist nach Seite 131 und Anhang unter Nr. II mit $d^*) = 1,5 \cdot 0,34 = 0,51$ m eben noch zulässig und wird auf die einzelnen Abscissen nach $v =$

$$\frac{w}{s} \cdot x \text{ verteilt, wo } v \text{ die Verbesserung (abgerundet auf cm),}$$

s die Länge der Polygonseite, x die Abscisse, die beiden letzten auf ganze m abgerundet, bedeutet.

*) Ungünstiges Gelände.

