

**Hybride Modellierung der Dynamik technischer Systeme
auf Basis von Diskrepanzen**

zur Erlangung des akademischen Grades
DOKTOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)
der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Paderborn

genehmigte
DISSERTATION

von
Meike Claudia Wohlleben, M.Sc.
aus Dernbach

Tag des Kolloquiums:	22. September 2026
Referent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Sextro
Korreferent:	Prof. Dr. Sebastian Peitz

Geleitwort des Herausgebers

Neue technische Entwicklungen entstehen heute immer öfter an den Grenzen zwischen den Disziplinen, wo verschiedene Denkweisen sich begegnen und miteinander wechselwirken. Die Entwicklung neuer mechatronischer oder intelligenter technischer Systeme setzt ein interdisziplinäres Denken und Handeln voraus.

Mechatronische Systeme bestehen aus einer mechanischen Grundstruktur, die durch Integration von Sensoren und Aktoren sowie durch informationsverarbeitende Komponenten ein hohes Maß an Flexibilität und Leistungsfähigkeit gewinnt. Die Mechatronik stellt somit eine interdisziplinäre Kombination der Fächer Maschinenbau, Elektrotechnik und Informatik dar.

Der Lehrstuhl für Dynamik und Mechatronik gehört der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn an. In Forschung und Lehre befassen wir uns mit der Modellierung, Simulation, Zuverlässigkeit, Optimierung, Betrieb, Überwachung, Diagnose und Prognose von mechanischen, mechatronischen und intelligenten technischen Systemen. Die Forschungsschwerpunkte liegen in den Bereichen Mehrkörpersysteme, Reibung, Verschleiß, Condition Monitoring, Predictive Maintenance, KI-unterstütztes Engineering, Ultraschallprozesse und -systeme. Sie spiegeln sich in den Bänden dieser Schriftenreihe, in denen Ergebnisse unserer Forschung veröffentlicht werden. Die Schriftenreihe soll dazu beitragen, den Wissenstransfer zwischen der Universität und der praktischen Anwendung zu verbessern.

Die von Frau Dr.-Ing. Meike Wohlleben betrachteten Verfahren zur Diskrepanzmodellierung wurden auf Systemebene einheitlich hergeleitet und systematisch kategorisiert. Die Methodik wurde zunächst auf Basis synthetischer Messungen angewandt und anschließend anhand realer Messdaten validiert. Darüber hinaus zeigt Frau Wohlleben, dass die auf Systemebene entwickelten Ansätze auf die Komponentenebene übertragbar sind. Die Validierung setzt Frau Wohlleben anhand realer Messdaten um, und zeigt damit die Praxis-tauglichkeit des von ihr erweiterten Ansatzes. Zudem wurden durch einen Vergleich unter praxisrelevanten Bedingungen Handlungsempfehlungen erarbeitet.

Paderborn, den 29. September 2026

Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Sextro

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Dynamik und Mechatronik der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn. Allen, die mich auf diesem Weg begleitet, unterstützt und geprägt haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Sextro für die Betreuung dieser Arbeit und sein Vertrauen, in Phasen der Zuversicht wie in Momenten des Zweifels. Prof. Dr. Sebastian Peitz, der meinen Weg ebenfalls seit vielen Jahren begleitet, danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens. Ebenso danke ich Prof. Dr.-Ing. Balázs Magyar für den Vorsitz sowie Dr.-Ing. Osman Altun für die Mitwirkung in der Promotionskommission.

Meinen ehemaligen und heutigen Kolleg:innen am Lehrstuhl danke ich für ihre Begleitung auf allen Etappen meines Weges: in Lehrveranstaltungen, bei meinen Abschlussarbeiten, beim Übergang in die wissenschaftliche Mitarbeit und im Arbeitsalltag. Ausdrücklich einschließen möchte ich jene, die mir mit meiner ersten Hilfskraftstelle den Weg an den Lehrstuhl eröffnet haben.

Hervorheben möchte ich außerdem Tobias. Auf seine Erfahrung und seinen Rat war stets Verlass, und sein Einsatz für einen reibungslosen Ablauf hat mir den Rücken für die Forschung freigehalten. Meinen Teamleitern Lars und später Jan danke ich für ihre fachliche wie persönliche Unterstützung. Ein ganz besonderer Dank gilt Claus. Ohne unseren fachlichen und mehr noch nicht-fachlichen Austausch wäre diese Zeit um vieles mühsamer gewesen. Für Erfolge wie für Rückschläge hatte er immer ein offenes Ohr. Für die Unterstützung in organisatorischen Belangen danke ich Sandra, im Labor Eduard und Stefan. In Dankbarkeit erinnere ich mich zudem an Martin, der viel zu früh verstorben ist und eine große Lücke hinterlassen hat.

Mein größter Dank gilt meiner Familie. Meinen Eltern Petra und Otfried danke ich dafür, dass sie mich in allem bedingungslos unterstützt haben. Ihnen und meinen Lehrer:innen danke ich zudem dafür, dass für sie nie zur Debatte stand, ob ein technisches Studium das Richtige für mich als Frau ist, eine Selbstverständlichkeit, die leider bis heute keine ist. Meiner Schwester Anika danke ich dafür, dass sie mir als große Schwester immer einen Schritt voraus war und deshalb oft schon wusste, was ich brauchte, bevor ich es selbst wusste.

Und schließlich danke ich von Herzen meinem Partner Lars, der auf diesem Weg von Anfang an an meiner Seite war, für seine Geduld, sein Verständnis und seinen Rückhalt, gerade wenn diese Arbeit mehr Raum einnahm als geplant.

Paderborn, im September 2026

Meike Claudia Wohlleben

Kurzfassung

Die Modellierung der Dynamik technischer Systeme bewegt sich zwischen physikalisch fundierten White-Box-Ansätzen und rein datengetriebenen Black-Box-Modellen. Gray-Box-Modelle verbinden beide Paradigmen. Hybride Modelle stellen dabei einen Sonderfall dar, bei dem physikalisches Wissen explizit beibehalten und gezielt um datenbasierte Anteile ergänzt wird. Diese Arbeit untersucht hybride Modellierungsansätze auf Basis von Diskrepanzen zur Kompensation von Modellabweichungen. Obwohl dazu verschiedene Ansätze in der Literatur vorgeschlagen wurden, fehlt bislang ein systematischer Vergleich unter identischen Bedingungen. Auf Systemebene werden kontinuierliche und diskrete Verfahren für vollständig sowie nicht vollständig beobachtbare Systeme analysiert, sodass insgesamt fünf Ansätze gegenübergestellt werden. Die Bewertung erfolgt anhand synthetischer Messdaten eines Drei-Massen-Schwingers, die reale Bedingungen wie Rauschen, Trends und vereinfachte Modellannahmen isoliert berücksichtigen und damit Aussagen zur Generalisierungsfähigkeit erlauben. Anschließend werden ausgewählte Verfahren auf reale Messdaten eines Gelenkvierecks und eines Doppelpendels angewendet. Der Vergleich zeigt, dass kein Verfahren universell überlegen ist, sondern die Eignung maßgeblich von Anwendungskontext, Messsituation und verfügbarer Systembeschreibung abhängt. Die Übertragung auf Komponentenebene wird an Stoßdämpfer und Gummi-Metall-Lager demonstriert. Es zeigt sich, dass hybride Modellierung die Rechenzeit bei gleichbleibender Genauigkeit deutlich reduziert.

Abstract

The modeling of the dynamics of technical systems ranges between physics-based white-box approaches and purely data-driven black-box approaches. Gray-box models combine both approaches. Hybrid models represent a special case in which physical knowledge is explicitly retained and specifically supplemented by data-driven components. This work investigates hybrid modeling approaches based on discrepancies for the compensation of model deviations. Although various approaches have been proposed in the literature, a systematic comparison under identical conditions is still lacking. At the system level, continuous and discrete methods for fully and partially observable systems are analyzed, resulting in a comparison of five approaches in total. The evaluation is carried out using synthetic measurement data from a three-mass oscillator, which incorporates real conditions such as noise, trends, and simplified model assumptions in isolation, thereby enabling statements on generalization capability. Subsequently, selected methods are applied to real measurement data from a four-bar linkage and a double pendulum. The comparison shows that no method is universally superior, but rather that suitability depends on application context, measurement situation, and available system description. The transfer to component level is demonstrated using shock absorbers and rubber-metal bushings. It is shown that hybrid modeling significantly reduces computation time while maintaining accuracy.

Vorveröffentlichungen

Teile der vorliegenden Dissertation oder Vorarbeiten hierzu wurden in den nachfolgenden Artikeln zuerst veröffentlicht.

Begutachtete Zeitschriftenartikel

DE PAYREBRUNE, K.; FLASSKAMP, K.; STRÖHLA, T.; SATTEL, T.; BESTLE, D.; RÖDER, B.; EBERHARD, P.; PEITZ, S.; STOFFEL, M.; RUTWIK, G.; ADITYA, B.; WOHLLEBEN, M.; SEXTRO, W.; RAFF, M.; REMY, C. D.; YADAV, M.; STENDER, M.; VAN DELDEN, J.; LÜDDENCKE, T.; LANGER, S. C.; SCHULTZ, J.; BLECH, C. The Impact of AI on Engineering Design Procedures for Dynamical Systems. In: *Technische Mechanik – European Journal of Engineering Mechanics* (2025), S. 1–23

WOHLLEBEN, M.; BERKEMEIER, M. B.; SCHÜTTE, J.; PEITZ, S.; SEXTRO, W. Evaluating Physics-Based, Hybrid, and Data-Driven Models for Rubber-Metal Bushings. In: *Multibody System Dynamics* (2026): S. 1–21

Begutachtete Beiträge in Tagungsbänden

AIMIYEKAGBON, O. K.; MUTH, L.; WOHLLEBEN, M.; BENDER, A.; SEXTRO, W. Rule-based Diagnostics of a Production Line. In: *Proceedings of the European Conference of the PHM Society 2021* (2021), S. 527–536

WOHLLEBEN, M.; BENDER, A.; PEITZ, S.; SEXTRO, W. Development of a Hybrid Modeling Methodology for Oscillating Systems with Friction. In: *Machine Learning, Optimization, and Data Science* (2022), S. 101–115

WOHLLEBEN, M.; MUTH, L.; PEITZ, S.; SEXTRO, W. Transferability of a Discrepancy Model for the Dynamics of Electromagnetic Oscillating Circuits. In: *PAMM* (2023), S. e202300039

WOHLLEBEN, M.; RÖDER, B.; EBEL, H.; MUTH, L.; SEXTRO, W.; EBERHARD, P. Hybrid Modeling of Multibody Systems: Comparison of Two Discrepancy Models for Trajectory Prediction. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* (2024), S. e202400027

AMAKOR, A. C.; BERKEMEIER, M. B.; WOHLLEBEN, M.; SEXTRO, W.; PEITZ, S. Surrogate-Assisted Multi-Objective Design of Complex Multibody Systems. In: *Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN 2025* (2026), S. 251–262

Nicht begutachtete Beiträge

WOHLLEBEN, M.; LINNEWEBER, J. M.; SCHÜTTE, J.; SEXTRO, W. Enabling Hybrid Modeling in Commercial MBS Software: A Force-Level Approach. In: *Preprints.org* (2025)

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xiii
1 Einleitung	1
1.1 Zielsetzung der Arbeit	2
1.2 Aufbau der Arbeit	3
2 Grundlagen und Stand der Technik	5
2.1 Dynamik technischer Systeme	5
2.2 White-Box-Modellierung	6
2.2.1 Physikalische Grundgleichungen	7
2.2.2 Mehrkörpersysteme	8
2.2.3 Systemparameter	11
2.2.4 Numerische Integrationsverfahren	14
2.2.5 Vor- und Nachteile	14
2.3 Black-Box-Modellierung	15
2.3.1 Verfahren	17
2.3.2 Training	22
2.3.3 Regression Learner App	24
2.3.4 Vor- und Nachteile	25
2.4 Gray-Box-Modellierung	26
2.4.1 Verfahren	27
2.4.2 Light-Gray-Box-Modellierung	29
2.4.3 Dark-Gray-Box-Modellierung	31
2.4.4 Hybride Modellierung	32
2.4.5 Zusammenfassung	36
2.5 Hybride Modellierung auf Basis von Diskrepanzen	38
3 Methoden	41
3.1 Kontinuierliche Verfahren	42
3.1.1 Kraftbasiertes Δh -Verfahren	42
3.1.2 Kontinuierliches $\Delta \dot{x}$ -Verfahren	43
3.1.3 Kontinuierliches $\Delta \dot{y}$ -Verfahren	45
3.2 Diskrete Verfahren	46
3.2.1 Diskretes Δx -Verfahren	46
3.2.2 Diskretes Δy -Verfahren	48
3.3 Hybride Modellierung auf Komponentenebene	50
3.3.1 Gewichtung	52
3.3.2 Regimebasierter Ansatz	53

4	Anwendungen	55
4.1	Drei-Massen-Schwinger	55
4.1.1	Referenzmodell	59
4.1.2	Numerische Lösung	65
4.1.3	Generalisierungsfähigkeit	69
4.1.4	Modellstruktur	74
4.1.5	Unsicherheiten	79
4.1.6	Erkenntnisse	85
4.2	Doppelpendel	90
4.2.1	White-Box-Modell	90
4.2.2	Messungen	91
4.2.3	Hybride Modelle	92
4.2.4	Zusammenfassung	95
4.3	Gelenkviereck	96
4.3.1	White-Box-Modell	97
4.3.2	Messungen	97
4.3.3	Hybride Modelle	100
4.3.4	Zusammenfassung	104
4.4	Stoßdämpfer	105
4.4.1	White-Box-Modell	106
4.4.2	Messungen	107
4.4.3	Hybrides Modell	109
4.5	Gummi-Metall-Lager	112
4.5.1	White-Box-Modell	114
4.5.2	Messungen	116
4.5.3	Hybride Modelle	118
4.5.4	Zusammenfassung	124
4.6	Zusammenfassung	125
5	Zusammenfassung und Ausblick	127
	Literatur	131
A	Verwendete Hard- und Software	143
B	Drei-Massen-Schwinger	144
C	Doppelpendel	150
D	Gelenkviereck	151
E	Gummi-Metall-Lager	152

Nomenklatur

Aus Gründen der Kompaktheit enthält dieses Verzeichnis verwendeter Formelzeichen nur Zeichen, die an mehreren Stellen verwendet werden oder von wesentlicher Bedeutung sind.

Allgemeine Notation

$\bar{(\cdot)}$	Gemessene bzw. messbasierte Größe
$\Delta(\cdot)$	Diskrepanz / Korrekturgröße
$\dot{(\cdot)}, \ddot{(\cdot)}$	Zeitableitung
$\tilde{(\cdot)}$	Modellapproximation
$(\cdot)^*$	Ergebnis eines hybriden Modells
$(\cdot)^+$	(Pseudo-)Inverse / über (Pseudo-)Inverse ermittelter Zustand/Ausgang
$\hat{(\cdot)}$	Amplitude

Formelzeichen und Symbole

$\underline{A}$	Systemmatrix
$\underline{B}$	Eingangsmatrix
$\underline{C}$	Ausgangsmatrix
c	Federsteifigkeit
c_{dyn}	Dynamische Steifigkeit
$\underline{D}$	Durchgangsmatrix
d	Dämpfungskonstante
f	Frequenz (häufig)
$\underline{f}$	Zustandsgleichung/Bekannte Systemdynamik
$\underline{f}^u$	unbekannte Systemdynamik
$F, \underline{F}$	Kraft
g	Erdbeschleunigung
$\underline{g}$	Ausgangsgleichung/Messgleichung
$\underline{h}$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte

$\underline{h}^u$	unbekannte verallgemeinerte eingeprägte Kräfte
$\underline{J}$	Trägheitsmoment
k	Kernel-Funktion
$\underline{k}$	verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskräfte
m	Masse
$M, \underline{M}$	Moment, Momentenvektor, Massenmatrix
n_G	Anzahl der Gelenke im MKS
n_K	Anzahl der Körper im MKS
$\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{\ddot{q}}$	Verallgemeinerte Koordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen
$\underline{Q}$	Verallgemeinerte Kräfte
$\underline{r}$	Ortsvektor
$\underline{s}$	Störgrößenvektor
$S_{x_{\text{lim}}, \mu}$	Sigmoid-Funktion
$\underline{u}$	Eingangsvektor
w	Weganregung
W_d	Dämpfungsarbeit
$\underline{x}$	Zustandsvektor
$\underline{y}$	Systemausgang
$\underline{\mu}$	Systemparameter
φ	Winkel
$\underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}}$	Fluss-Operator
$\underline{\xi}$	Hyperparameter

Abkürzungen

AWP	Anfangswertproblem
BT	Bagged Trees
DGL	Differentialgleichung
dyn	dynamisch
GML	Gummi-Metall-Lager
GPR	Gauß-Prozess-Regression
ITM	Institut für Technische und Numerische Mechanik
LDM	Lehrstuhl für Dynamik und Mechatronik
MAPE	mittlerer absoluter prozentualer Fehler
MKS	Mehrkörpersystem
ML	Maschinelles Lernen

MSE	mittlerer quadratischer Fehler
MW	Maxwell(-Element)
NLF	nichtlineare Feder
NN	Neuronales Netz
NRMSE	normalisierte Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers
VDA	Verband der Automobilindustrie
PINN	Physikalisch informiertes Neuronales Netz
qs	quasistatisch
RMSE	Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers
SINDy	Sparse Identification of Nonlinear Dynamics
SVM	Support Vector Machine
UPB	Universität Paderborn

Zur sprachlichen Überarbeitung dieses Beitrags wurden ChatGPT und DeepL Write unterstützend eingesetzt. Für die inhaltliche Gestaltung und Verantwortung zeichnet sich ausschließlich die Autorin verantwortlich.

1 Einleitung

Die modellbasierte Beschreibung dynamischer Systeme stellt eine zentrale Grundlage für die Analyse, Simulation und Auslegung technischer Systeme dar. Es haben sich zwei grundlegende Konzepte etabliert: die White-Box- und die Black-Box-Modellierung. Für White-Box-Modelle gibt es in der Literatur unterschiedliche Bezeichnung, darunter axiomatische [83], physikalische [90], mechanistische [54], theoretische [45, 51], parametrische [110, 113] oder First-Principles [77, 85] Modelle. Gemein ist ihnen, dass sie auf bekannten physikalischen Gesetzen beruhen und in der Regel eine parametrische mathematische Struktur besitzen. Ihre Vorteile liegen in der guten Interpretierbarkeit, der Extrapolationsfähigkeit sowie der Möglichkeit, gezielt physikalische Zusammenhänge zu analysieren. Demgegenüber stehen ein oft hoher Modellierungsaufwand sowie Abhängigkeiten von vereinfachenden Annahmen.

Black-Box-Modelle werden häufig als datengetriebene [90], empirische [54, 83], experimentelle [45, 51] oder nicht-parametrische [110] Modelle bezeichnet und sind eng mit Methoden des Maschinellen Lernens (ML) verknüpft. Sie zeichnen sich durch eine hohe Flexibilität und eine gute Anpassungsfähigkeit an Messdaten aus. Gleichzeitig fehlt ihnen in der Regel eine physikalische Interpretation, ihre Vorhersagequalität ist stark von der Verfügbarkeit und Qualität der Messdaten abhängig, und zur Datengenerierung ist typischerweise ein existierendes System erforderlich. Damit ist ihr Einsatz insbesondere in frühen Phasen des Entwurfsprozesses eingeschränkt. [82]

Zwischen diesen beiden Extremen existiert ein Zwischenbereich, der häufig unter dem Begriff der Gray-Box-Modellierung zusammengefasst wird. Darunter fallen Ansätze, die physikalisches Vorwissen und datenbasierte Modellanteile in unterschiedlicher Form kombinieren. In der Literatur werden hierfür auch Bezeichnungen wie hybride [70], semi-physikalische [65] oder semi-parametrische [110, 113] Modelle verwendet, wobei die Begriffe nicht einheitlich verwendet und oftmals nicht scharf voneinander abgegrenzt werden.

Während der Begriff Gray-Box allgemein Modelle beschreibt, die sich zwischen reiner White-Box- und reiner Black-Box-Modellierung einordnen lassen (z. B. physikalische informierte Neuronale Netze (PINN)), bezeichnet hybride Modellierung in dieser Arbeit eine spezifische Untergruppe. Diese ist durch das explizite Zusammenspiel eines White-Box-Modells mit einem Black-Box-Modell gekennzeichnet, wobei beide Anteile strukturell getrennt bleiben.

Die Modellierung dynamischer Systeme folgt der Idee, Modelle so einfach wie möglich und nur so komplex wie nötig zu gestalten. Sie bewegt sich damit stets im Spannungsfeld zwischen Modellierungsaufwand und Modellgüte. Für ideale Systeme stellen White-Box-Modelle, die auf bekannten physikalischen Gesetzen beruhen, eine geeignete und gut interpretierbare Beschreibung dar. Mit zunehmender Annäherung an reale Systeme treten jedoch Effekte wie Reibung oder aerodynamische Einflüsse in den Vordergrund, die

häufig stark nichtlinear sind und nur mit hohem Aufwand physikalisch parametrisiert werden können.

Die beschriebenen Unterschiede zwischen idealisierter White-Box-Modellierung und realem Systemverhalten lassen sich am Beispiel eines einfachen Fadenpendels veranschaulichen. Abb. 1.1 zeigt schematisch den Vergleich zwischen einer Messung des realen Systems und der Simulation eines idealisierten White-Box-Modells. Während das physikalische Grundmodell die wesentliche Dynamik korrekt erfasst, treten im Zeitverlauf systematische Abweichungen auf, die auf nicht modellierte reale Effekte zurückzuführen sind.

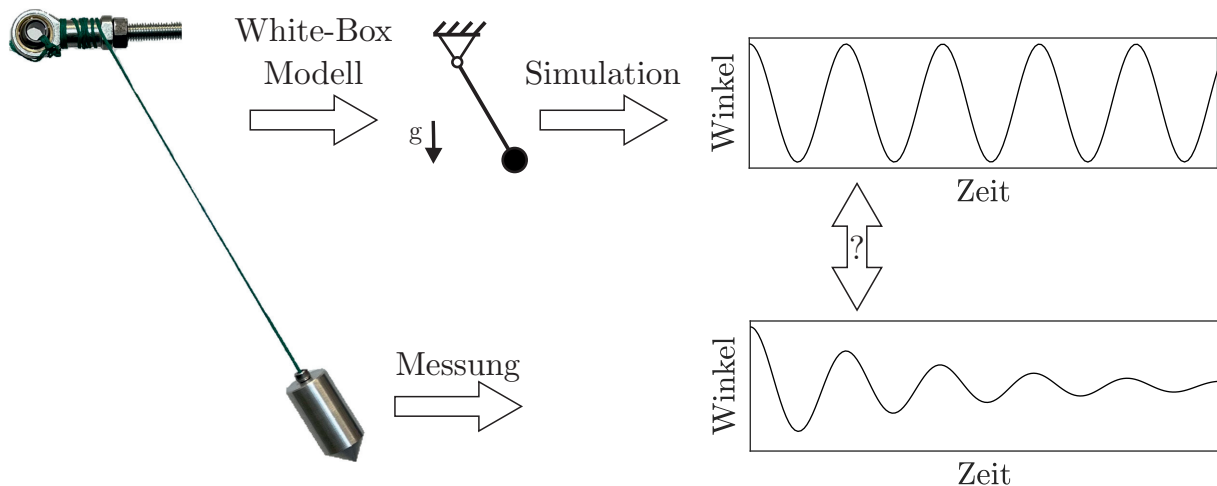


Abbildung 1.1: Zusammenbringen von Messung und Simulationsergebniss des White-Box-Modells eines Fadenpendels

Diese Abweichungen ließen sich prinzipiell durch die Einführung zusätzlicher physikalischer Effekte, etwa einer Dämpfungskraft, in das White-Box-Modell reduzieren, eine solche Erweiterung erfordert jedoch eine Identifikation und die Parametrierung entsprechender Koeffizienten, deren Bestimmung in der Praxis häufig mit größerem Aufwand verbunden ist und nicht zwangsläufig zu einem zusätzlichen Erkenntnisgewinn auf Systemebene führt.

Hybride Modellierungsansätze setzen an dieser Stelle an, indem ein bewusst einfach gehaltenes White-Box-Grundmodell die wesentlichen Systemzusammenhänge abbildet und systematische Abweichungen zur Realität gezielt durch datenbasierte Modellanteile kompensiert werden. Auf diese Weise kann die Vorhersagegüte des Gesamtmodells verbessert werden, ohne die physikalische Modellstruktur unnötig zu verkomplizieren, und zugleich bleibt die Interpretierbarkeit und Modularität des Modells erhalten, insbesondere mit Blick auf frühe Phasen des Entwurfsprozesses und eine spätere schrittweise Modellverfeinerung.

1.1 Zielsetzung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung, Systematisierung und Bewertung hybrider Modellierungsansätze zur Kompensation von Modellabweichungen (Diskrepanzen) in der Dynamik technischer Systeme. Der Fokus liegt auf der Kombination physikalischer White-Box-Modelle mit datenbasierten Black-Box-Komponenten, die gezielt zur Korrektur ver-

bleibender Modellabweichungen eingesetzt werden.

Dafür werden in dieser Arbeit bestehende Diskrepanzmodellierungsansätze strukturiert gegenübergestellt und eingeordnet. Obwohl in der Literatur bereits verschiedene Methoden zur datenbasierten Kompensation fehlender oder unvollständig modellierter physikalischer Effekte vorgeschlagen wurden, fehlt bislang eine systematische Untersuchung dieser Ansätze unter vergleichbaren und praxisrelevanten Bedingungen. Insbesondere existieren nur wenige Arbeiten, die unterschiedliche Diskrepanzmodelle auf dasselbe Mehrkörpersystem (MKS) anwenden und deren Eigenschaften hinsichtlich Robustheit, Generalisierungsfähigkeit und Anwendbarkeit im Entwurfs- und Simulationskontext vergleichen.

Vor diesem Hintergrund adressiert die vorliegende Arbeit folgende wesentliche Forschungslücken:

- Anwendung und systematischer Vergleich der in der Literatur vorgestellten Diskrepanzmodelle [28, 64, 126, 127] am selben MKS (Drei-Massen-Schwinger) unter praxisrelevanten Bedingungen wie Extrapolation, Parameterunsicherheiten oder Rauschen.
- Integration und Validierung der Modelle anhand realer Messdaten komplexerer MKSs (Doppelpendel, Gelenkviereck) unter Berücksichtigung experimenteller Unsicherheiten.
- Erweiterung der Diskrepanzmodellierung auf Komponentenebene zur gezielten Kompensation lokaler Modellabweichungen, sowie Demonstration der entwickelten Methoden anhand zweier Anwendungsbeispiele (Stoßdämpfer, Gummi-Metall-Lager (GML)).

Untersucht werden sowohl kontinuierliche als auch diskrete Verfahren, die sich hinsichtlich der Ebene der Korrektur unterscheiden.

Die Arbeit leistet damit einen Beitrag zur methodischen Einordnung hybrider Modellierungsansätze und zeigt deren Potential für eine praxisnahe und effiziente Modellbildung technischer Systeme.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in fünf Kapitel untergliedert. Kapitel 2 legt die theoretischen und methodischen Grundlagen der Arbeit. Aufbauend auf dem Begriff des technischen Systems werden die unterschiedlichen Modellierungsparadigmen systematisch vorgestellt. Die White-Box-Modellierung wird dabei ausgehend von einzelnen physikalischen Gesetzen und Gleichungen bis hin zur Formulierung vollständiger Bewegungsgleichungen entwickelt. Für die Black-Box-Modellierung wird der umgekehrte Weg beschritten, bei dem ausgehend von einem gegebenen Datensatz ein Modell zur Beschreibung des Systemverhaltens abgeleitet wird. Anschließend wird die Gray-Box-Modellierung eingeführt, in dem sich physikalische und datenbasierte Modellanteile gegenseitig ergänzen. Eine besondere Rolle nimmt hierbei die hybride Modellierung auf Basis von Diskrepanzen ein, bei der ein physikalisches White-Box-Modell als Ausgangspunkt dient und verbleibende Abweichungen zwischen Modellvorhersage und realem Systemverhalten durch ein separates Black-Box-Modell kompensiert werden.

Kapitel 3 widmet sich der Entwicklung und Vorstellung hybrider Modellierungsverfahren.

ren. Es werden fünf unterschiedliche Ansätze präsentiert, die sich hinsichtlich der Ebene der Korrektur unterscheiden und eine systematische Analyse der Möglichkeiten hybride Modellierung ermöglichen.

In Kapitel 4 werden die vorgestellten Methoden auf verschiedene Anwendungsbeispiele übertragen. Die Untersuchungen gliedern sich in zwei Bereiche: Auf Systemebene erfolgt zunächst eine vergleichende Analyse der hybriden Modellierungsverfahren anhand synthetischer Messdaten eines Drei-Massen-Schwingers unter unterschiedlichen Szenarien und Störeinflüssen. Anschließend werden ausgewählte Verfahren auf Systeme mit realen Messdaten angewandt, konkret auf ein Doppelpendel sowie ein Gelenkviereck. Auf Komponentenebene werden die Ansätze exemplarisch auf einen Stoßdämpfer und ein GML übertragen, wobei die Modellierung typischerweise auf Ebene von Kraftgesetzen und weniger auf vollständigen Differentialgleichungen erfolgt.

Kapitel 5 fasst die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weiterführende Fragestellungen und mögliche Erweiterungen der vorgestellten Ansätze.

2 Grundlagen und Stand der Technik

Dieses Kapitel führt in die Grundlagen und den Stand der Technik der Modellierung technischer Systeme und insbesondere der hybriden Modellierung ein und schafft damit die Basis für die später in Kapitel 3 entwickelten Methoden. Zunächst werden die wesentlichen Eigenschaften technischer Systeme beschrieben, bevor die klassische White-Box-Modellierung behandelt wird. Dazu zählen sowohl die grundlegenden physikalischen Gleichungen als auch deren Anwendung zur Beschreibung der Systemdynamik sowie die Bestimmung und Anpassung von Systemparametern. Anschließend wird die Black-Box-Modellierung als datengetriebener Gegenpol eingeführt, inklusive der zentralen Lernparadigmen, der wichtigsten Verfahren und der Trainingsstrategien. Darauf aufbauend werden Gray-Box-Ansätze vorgestellt, die physikalisches und datenbasiertes Wissen kombinieren. Den Abschluss bilden hybride Verfahren auf Basis von Diskrepanzen, die gezielt systematische Modellabweichungen adressieren. Die genannten Konzepte werden dabei insbesondere am Beispiel von Mehrkörpersystemen (MKS) konkretisiert.

2.1 Dynamik technischer Systeme

Dieses Kapitel soll die Basis für ein einheitliches Verständnis der in dieser Arbeit verwendeten Begriffe legen. Dazu werden zunächst grundlegende Konzepte technischer Systeme eingeführt und voneinander abgegrenzt. Aufbauend darauf werden MKSs sowie deren Beschreibung als dynamische Systeme betrachtet, um eine konsistente Grundlage für die anschließende Modellierung zu schaffen.

Der Begriff technisches System dient als Sammelbegriff, „der an die Stelle der uneinheitlich definierten, schlecht abgrenzbaren Ausdrücke Maschine, Gerät, Apparat u. Ä. tritt. Ein technisches System ist durch die Funktion gekennzeichnet, Stoff (Masse), Energie und/oder Information zu wandeln, zu transportieren und/oder zu speichern.“[15]

Technische Systeme werden durch ihre Struktur und ihre Funktion beschrieben:

Die Systemstruktur besteht aus einzelnen Komponenten und Modulen. Bei Komponenten handelt es sich um Elemente mit einer klar abgegrenzten Teilfunktion, die sich nicht weiter zerlegen lassen ohne diese Funktion zu verlieren, beispielsweise Federn, Massen oder Dämpfer. Ein Modul ist eine funktionale Einheit die aus mehreren Komponenten besteht, und die isoliert analysiert und entworfen werden kann. Durch eine Systemgrenze wird das technische System von der Umwelt abgegrenzt, und wechselwirkt mit dieser über Systemein- und -ausgänge. [21]

Die Systemfunktion wird durch die Beziehung zwischen den Systemein- und -ausgängen beschrieben und beeinflusst die Systemstruktur maßgeblich. Sie kann durch Störeinflüsse oder Dissipationseffekte beeinflusst werden. [21]

Abhängig von der betrachteten Systemgröße lassen sich technische Systeme unterschiedlich klassifizieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird sich auf MKSs beschränkt. Diese Be-

schränkung dient der anschaulichen und konsistenten Darstellung der Methoden. Die entwickelten Ansätze sind jedoch nicht auf die mechanische Domäne limitiert, sondern lassen sich prinzipiell auf andere dynamische Systeme übertragen.

Zur formalen Beschreibung dieser zeitabhängigen Entwicklungen werden MKSs im Folgenden als dynamische Systeme aufgefasst. Ein dynamisches System ist ein System, dessen Zustand sich im Zeitverlauf verändert und durch vergangene Zustände beeinflusst wird. Die zeitliche Entwicklung des Systemzustands kann durch ein Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, t) \\ \text{mit } \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 \end{aligned}$$

beschrieben werden, bestehend aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung (DGL) $\underline{f}$ und einem zugehörigen Anfangszustand $\underline{x}_0$. Formal lässt sich ein dynamisches System als Tripel $(T, X, \underline{\Phi})$ auffassen, wobei T den betrachteten Zeitraum, X den Zustandsraum und der Operator $\underline{\Phi}$ den zugehörigen (Phasen-)Fluss darstellt [25]. Dieser ist über

$$\underline{\Phi}^{t,t_0}(\underline{x}_0) = \underline{x}(t). \quad (2.1)$$

definiert, was bedeutet, dass das AWP für den Zeitpunkt t gelöst wird, wodurch er den Fluss der Bewegung im Phasenraum beschreibt [25, 38]. Der Operator erfüllt folgende Eigenschaften:

- $\underline{\Phi}^{t_0,t_0}(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$
- $\frac{d}{d\tau} \underline{\Phi}^{t+\tau,t}(\underline{x})|_{\tau=0} = \underline{f}(\underline{x}(t), t)$
- $\underline{\Phi}^{t_2,t_1} \underline{\Phi}^{t_1,t_0}(\underline{x}_0) = \underline{\Phi}^{t_2,t_0}(\underline{x}_0)$, für $t_0 \leq t_1 \leq t_2$

Die bisherige Beschreibung technischer Systeme über Struktur, Funktion und Zustandsgrößen liefert die konzeptionelle Grundlage, ist jedoch für eine quantitative Analyse nicht ausreichend. Für die Untersuchung des Systemverhaltens ist daher eine formale Modellierung erforderlich, bei der der Zusammenhang zwischen Systemeintritten und -ausgängen sowie internen Zustandsgrößen mathematisch beschrieben wird. Diese Beschreibung kann dabei auf unterschiedlichen Annahmen und Informationsständen beruhen. In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Modellierungsparadigmen zur Generierung solcher Modelle vorgestellt.

2.2 White-Box-Modellierung

Die White-Box-Modellierung folgt einem deduktiven Ansatz, bei dem aus allgemeinen Modellannahmen schrittweise konkrete Simulationsdaten gewonnen werden. Dieses Top-down-Vorgehen führt von einer abstrakten Systembeschreibung über modell- und parameterspezifische Annahmen hin zu konkreten numerischen Simulationsergebnissen. Der sukzessive Übergang vom Allgemeinen zum Spezifischen wird in Abb. 2.1 durch die Darstellung in Form eines Dreiecks veranschaulicht.

Im ersten Schritt wird das physikalische System beschrieben. Hierzu werden in Kapitel 2.2.1 die grundlegenden Gleichungen eingeführt, welche die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der betrachteten Energie- und Kraftflüsse abbilden. Darauf aufbauend zeigt

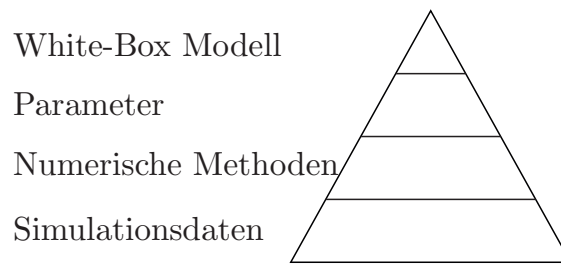


Abbildung 2.1: Top-down-Vorgehen bei der White-Box-Modellierung, angelehnt an [91]

Kapitel 2.2.2, wie aus diesen Grundgleichungen das Modell eines dynamischen Systems in Form einer DGL abgeleitet werden kann.

Der zweite Schritt umfasst die Parametrierung des Modells. Hier werden die für die Simulation benötigten Systemparameter bestimmt, entweder aus physikalischem Vorwissen oder mittels Identifikations- und Optimierungsverfahren. Die methodische Grundlage hierfür wird in Kapitel 2.2.3 gelegt, in dem u. a. Fehlermetriken (Kapitel 2.2.3.1) sowie Optimierungsstrategien (Kapitel 2.2.3.2) vorgestellt werden.

Im dritten Schritt wird das parametrierte Modell mithilfe numerischer Verfahren simuliert. Dafür kommen numerische Verfahren wie Finite-Differenzen-Methoden sowie numerische Integrationsverfahren für gewöhnliche DGLs (Kapitel 2.2.4) zum Einsatz, um die zugrunde liegenden DGLs zu lösen oder zu approximieren. Abschließend werden die erzeugten Simulationsdaten ausgewertet, um das Systemverhalten zu analysieren und Erkenntnisse über Dynamik, Stabilität, Sensitivitäten oder mögliche Modellabweichungen zu gewinnen.

2.2.1 Physikalische Grundgleichungen

Die Modellierung dynamischer Systeme beginnt stets mit vereinfachenden Annahmen über den zugrunde liegenden Prozess. Diese Annahmen reduzieren die Komplexität realer Systeme so weit, dass Berechnungen handhabbarer oder überhaupt erst ermöglicht werden. Im Mittelpunkt stehen dabei die unterschiedlichen Grundgleichungen, welche die physikalischen Beziehungen und Abhängigkeiten im System formal beschreiben und damit die Basis jeder weiteren Modellierung bilden. [21, 50]

2.2.1.1 Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen setzen Größen derselben Einheit in Beziehung und beschreiben das globale Verhalten eines Systems. Fundamentale Erhaltungssätze, wie die Erhaltung der Masse, der Energie oder des Impulses, gelten unabhängig von der Art des betrachteten Systems und bilden die Grundlage ingenieurwissenschaftlicher Modelle. [21, 50, 66]

Aus diesen Bilanzgleichungen lassen sich die Bewegungsgleichungen für komplexe MKSs ableiten. Hierbei bieten sich insbesondere die Lagrange-Gleichung (basierend auf dem Energieprinzip) und die Jourdain-Gleichung (basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit) an. [96, 122]

2.2.1.2 Konstitutive Gleichungen

Konstitutive Gleichungen setzen Größen unterschiedlicher Einheiten in Beziehung. Sie beschreiben die Eigenschaften von Materialien oder Komponenten und stellen den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen dar. Es kann sich dabei um Quellen (z. B. Aktoren), Senken (z. B. Dämpfer, Reibelemente), Speicher (z. B. Federn, Massen), Übertrager (z. B. Getriebe) oder Wandler (z. B. Kolben im Zylinder) handeln [21, 50]. Bei diesen Beziehungen kann es sich um physikalische Grundgesetze oder auch um phänomenologische Gleichungen handeln.

Phänomenologische Gleichungen beschreiben physikalische Phänomene auf makroskopischer Ebene, indem sie die Abhängigkeit zwischen verschiedenen Größen durch eine analytische Funktion oder eine Kennlinie ausdrücken. Diese Gleichungen stützen sich hauptsächlich auf Messungen und Beobachtungen, ohne die mikroskopischen Prozesse im Detail zu erklären. Sie liefern eine pragmatische Beschreibung der Beziehungen, die in der Regel den experimentellen Ergebnissen entsprechen, ohne sie vollständig theoretisch zu erklären [41].

2.2.1.3 Schaltungsgleichungen

Schaltungsgleichungen beschreiben die Wechselwirkungen und Verbindungen zwischen den verschiedenen Komponenten eines Systems. Sie legen fest, wie Größen wie Kräfte oder Momente an den Schnittstellen zwischen den Bauteilen miteinander in Beziehung stehen und ermöglichen es dadurch, das Verhalten des gesamten Systems zu berechnen. Es wird zwischen Knoten- und Umlaufgleichungen unterschieden. [21, 45, 50]

2.2.2 Mehrkörpersysteme

Ein klassisches Mehrkörpersystem (MKS) besteht aus mindestens zwei starren Körpern, die durch nachgiebige Koppelemente und ideale kinematische Bindungen miteinander verbunden sind, siehe Abb. 2.2. Bei den Koppelementen kann es sich beispielsweise um Federn, Dämpfer oder beliebige Kraftelemente handeln, welche zwischen den Körpern wechselwirken und eingeprägte Kräfte in den Körpern hervorrufen. Die Bindungen, die die Relationen zwischen den Körpern beschreiben, werden durch Lager oder Lagestellglieder realisiert und rufen Reaktionskräfte hervor. [83, 96]

Elastische Körper können über modale reduzierte Finite-Elemente-Modelle, etwa mittels der Craig-Bampton-Methode eingebunden werden. Ihre Verformung wird dabei durch eine endliche Anzahl verallgemeinerter Koordinaten approximiert. [20, 63, 96]

Die Beschreibung des Bewegungsverhaltens eines MKS baut auf den Grundlagen der technischen Mechanik auf. Für die Modellierung des zeitabhängigen Systemverhaltens ist dabei insbesondere die Dynamik maßgeblich. Sie umfasst die Kinematik, welche die Bewegung der Körper unabhängig von den verursachenden Kräften beschreibt, sowie die Kinetik, die den Zusammenhang zwischen Kräften, Massen und den daraus resultierenden Bewegungen herstellt.

Im Folgenden werden zunächst die Bewegungsgleichungen eines MKS hergeleitet. Anschließend wird die Zustandsraumdarstellung eingeführt, die eine systematische Beschrei-

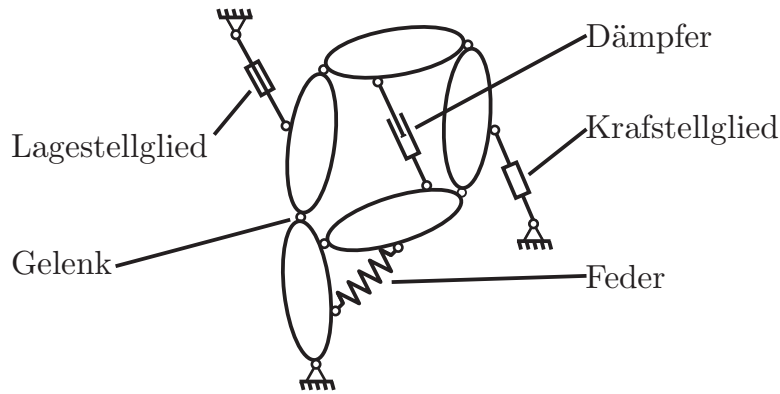


Abbildung 2.2: Modellelemente eines Mehrkörpersystems, angelehnt an [122]

bung der Systemdynamik ermöglicht und häufig als Grundlage für Analyse, Simulation und Regelung dient.

2.2.2.1 Bewegungsgleichungen

Für die Beschreibung der Dynamik von MKSs existieren diverse etablierte Ansätze. Im Folgenden sollen zwei näher erläutert werden: der Newton-Euler-Formalismus und der Lagrange-Formalismus. [83, 96]

Beim Newton-Euler-Formalismus werden die Körper eines MKS durch Freischneiden voneinander getrennt und einzeln betrachtet. Für jeden Starrkörper werden die Bewegungsgleichungen separat aufgestellt.

Für die translatorische Bewegung des Massenmittelpunkts gilt der Schwerpunktsatz

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F},$$

wobei m die konstante Masse des Körpers, $\ddot{\underline{r}}$ die Beschleunigung des Massenmittelpunkts und $\underline{F}$ die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte darstellt.

Für die rotatorische Bewegung gilt der Drallsatz

$$\dot{\underline{L}}^{(0)} = \underline{M}^{(0)},$$

wobei $\underline{L}^{(0)}$ der Drall bezüglich eines Bezugspunktes 0 und $\underline{M}^{(0)}$ das resultierende Moment um diesen Punkt ist. Für die Rotation um den Massenmittelpunkt vereinfacht sich dies im körperfesten Koordinatensystem zu

$$\underline{J} \ddot{\underline{\varphi}} = \underline{M},$$

mit dem Trägheitstensor $\underline{J}$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\underline{\varphi}}$. Diese Gleichungen gelten unter der Annahme konstanter Massen und Trägheiten.

Die Kopplung zwischen den Körpern erfolgt über Zwangskräfte an den Verbindungsstellen. Diese Reaktionskräfte treten gemäß dem dritten Newtonschen Gesetz paarweise und entgegengesetzt auf und erscheinen in den Bewegungsgleichungen beider verbundener Körper. Das entstehende Gleichungssystem enthält somit neben den gesuchten Bewegungsgrößen auch die unbekannten Zwangskräfte als zusätzliche Variablen.

Zur Reduktion des Systems werden Zwangsbedingungen eingeführt. Sind diese holonom (d. h. algebraische Beziehungen, z. B. konstante Abstände bei Gelenken) können verallgemeinerte Koordinaten $q_1, \dots, q_n$ eingeführt werden, die nur die unabhängigen Freiheitsgrade beschreiben. Durch Anwendung des d'Alembertschen Prinzips der virtuellen Arbeit werden die Zwangskräfte eliminiert, sodass ein System von n DGLs für die n generalisierten Koordinaten verbleibt, in dem die Reaktionskräfte nicht mehr explizit auftreten. [83, 96]

Der Lagrange-Formalismus bietet einen alternativen Zugang, der auf skalaren Energiegrößen statt auf vektoriellen Kräften und Momenten basiert. Die Dynamik wird durch die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Gesamtsystems beschrieben, formuliert in verallgemeinerten Koordinaten q_i .

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Lagrange-Gleichung zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{\text{n.k.}}, \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = T - V,$$

wobei $\mathcal{L}$ die Lagrange-Funktion und $Q_i^{\text{n.k.}}$ die nicht-konservativen verallgemeinerten Kräfte darstellen. Letztere umfassen sowohl dissipative Einflüsse (z. B. Dämpfung) als auch eingepreiste nicht-konservative Kräfte (z. B. von Antrieben).

Der Lagrange-Formalismus verwendet ausschließlich skalare Energiegrößen, wodurch er oft einfacher zu handhaben ist als die vektorielle Kräfteformulierung des Newton-Euler-Ansatzes. Zudem eignet er sich besser für die Verwendung beliebiger Koordinatensysteme, da Zwangskräfte durch die Wahl geeigneter verallgemeinerter Koordinaten automatisch eliminiert werden. [43, 83, 103]

Unabhängig vom gewählten Formalismus führen beide Ansätze auf eine einheitliche Darstellung der Systemdynamik. Die resultierenden Bewegungsgleichungen lassen sich für ein System mit n Freiheitsgraden in kompakter Matrixform schreiben als

$$\underline{M}(\underline{q}, t) \ddot{\underline{q}} + \underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t), \quad (2.2)$$

wobei $\underline{M}(\underline{q}, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Massenmatrix, $\underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) \in \mathbb{R}^n$ die geschwindigkeitsabhängigen Trägheitskräfte (Coriolis-, Zentrifugal- und Kreiselkräfte) und $\underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) \in \mathbb{R}^n$ den Vektor der verallgemeinerten eingepreisten Kräfte darstellt. Diese Darstellung der Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten bildet die Grundlage für die weitere Analyse des Systemverhaltens. [96]

2.2.2.2 Zustandsraum

Für eine weitergehende analytische und numerische Behandlung wird der Zustandsraum eingeführt. Hierzu wird das DGL-System zweiter Ordnung in ein DGL-System erster Ordnung überführt, indem der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}$ und dessen zeitliche Ableitung $\dot{\underline{q}}$ zu einer Zustandsvariablen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix}^\top$$

zusammengefasst werden, welche den inneren Zustand des Systems vollständig charakterisiert. Im linearen Fall wird die Dynamik durch die Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{E} \underline{s}(t)$$

und die Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) + \underline{F} \underline{s}(t)$$

mit konstanten Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$ und $\underline{F}$ beschrieben. Dabei bezeichnet $\underline{x}$ den Zustandsvektor, $\underline{u}$ den Eingangsvektor, $\underline{y}$ den Ausgangsvektor und $\underline{s}$ den Störgrößenvektor. Nichtlineare Systeme erweitern diesen Ansatz durch allgemeine nichtlineare Funktionen. Dies ist in Abb. 2.3 dargestellt. Die Zustandsgleichung hat hier die Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{s}(t)), \quad (2.3)$$

während die Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{s}(t)) \quad (2.4)$$

lautet. Die Funktionen $\underline{f}$ und $\underline{g}$ sind entsprechende nichtlineare Funktionen des Systems, und können beliebige nichtlineare Abhängigkeiten ausdrücken. Sie eignen sich zur Beschreibung komplexer realer Phänomene, bei denen lineare Ansätze nicht ausreichend sind. [31, 69]

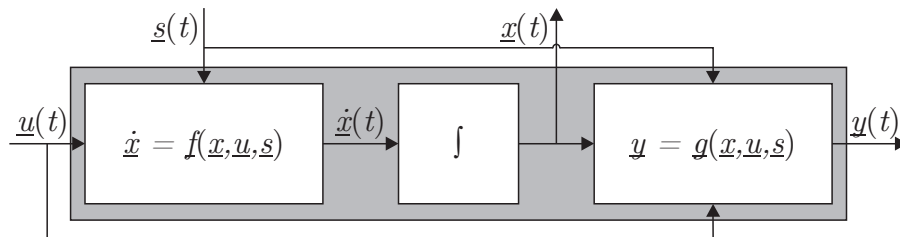


Abbildung 2.3: Allgemeine Zustandsraumdarstellung eines nichtlinearen Systems mit Zustandsvektor $\underline{x}(t)$, Ausgang $\underline{y}(t)$, Eingang $\underline{u}(t)$ und Störgröße $\underline{s}(t)$

2.2.3 Systemparameter

Die Qualität eines White-Box-Modells hängt wesentlich von den verwendeten Systemparametern ab. Viele dieser Parameter lassen sich direkt bestimmen, ohne dass Messungen am dynamischen System erforderlich sind. Dazu zählen Größen, die aus Datenblättern technischen Zeichnungen oder einfachen, statischen Messungen gewonnen werden können, etwa Massen über Dichte und Volumen, geometrische Abmessungen mittels Messschieber, oder Materialkennwerte, sofern sie spezifiziert sind. Diese Vorgehensweise ist vollständig innerhalb der klassischen White-Box-Modellierung anzusiedeln.

Sind einzelne Parameter nicht verfügbar oder nur unzureichend spezifiziert, können sie

aus dynamischen Messungen am realen Systems bestimmt werden. In diesem Fall werden die Parameter so gewählt, dass das Modell die gemessenen Werte möglichst gut reproduziert. Auch wenn es sich bei diesem Schritt streng genommen nicht mehr um reine White-Box-Modellierung handelt, wird er im Rahmen dieses Kapitels behandelt, da er weiterhin auf einer festgelegten physikalischen Modellstruktur basiert.

Die Identifikation erfolgt üblicherweise, indem ein geeignetes Fehlermaß definiert und anschließend über ein Optimierungsverfahren minimiert wird [50]. Im nächsten Abschnitt werden gängige Fehlermaße vorgestellt, gefolgt von typischen Optimierungsansätzen zur Bestimmung der gesuchten Parameter.

2.2.3.1 Fehlermaße

Zur Bewertung der Übereinstimmung zwischen Modell und Messdaten stehen verschiedene Fehlermaße zur Verfügung. Sie lassen sich grob in skalenabhängige und prozentuale Maße einteilen [48]. Im Folgenden seien die tatsächlichen Werte mit $\underline{A} = [A_1, \dots, A_n]$ (actual) bezeichnet und die vorhergesagten Werte mit $\underline{F} = [F_1, \dots, F_n]$ (forecast).

Skalenabhängige Fehlermaße eignen sich für Vergleiche innerhalb desselben Datensatzes. Ein Vergleich von Datensätzen mit unterschiedlichen Größenordnungen ist dagegen nicht sinnvoll. Ein häufig verwendetes Maß ist der mittlere quadratische Fehler (Mean Square Error; MSE)

$$\text{MSE}(\underline{F}, \underline{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - F_i)^2. \quad (2.5)$$

Aufgrund der Quadrierung ist die Fehlerfunktion glatt, wodurch sie sich besonders gut für (gradientenbasierte) Optimierungsverfahren eignet. Gleichzeitig wird jeder Fehler quadratisch gewichtet, wodurch der MSE empfindlich gegenüber Ausreißern ist. Dies ist vorteilhaft, wenn die Streuung der Vorhersagefehler eine zentrale Rolle spielt oder wenn größere Abweichungen stärker bestraft werden sollen. Aufgrund der Quadrierung ist die Interpretation jedoch erschwert.

Die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (Root Mean Square Error; RMSE)

$$\text{RMSE}(\underline{F}, \underline{A}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - F_i)^2} \quad (2.6)$$

erbt die Eigenschaften vom MSE: Er ist glatt (unendlich oft differenzierbar) und empfindlich gegenüber Ausreißern. Zusätzlich ist er leichter zu interpretieren, da die Einheit mit denen der Daten übereinstimmt.

Der mittlere absolute Fehler (Mean Absolute Error; MAE) ist definiert als

$$\text{MAE}(\underline{F}, \underline{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A_i - F_i|.$$

Aufgrund der Betragsfunktion liegt die Metrik auf derselben Skala wie die Daten, was eine intuitive Interpretation ermöglicht. Zudem ist der MAE robuster gegenüber Ausreißern, da große Fehler nicht wie beim MSE quadratisch, sondern linear gewichtet werden. Allerdings ist die Fehlerfunktion nicht überall differenzierbar, an den Stellen mit $A_i = F_i$

existiert die Ableitung nicht, was ihn weniger geeignet für (gradientenbasierte) Optimierungsverfahren macht. Desweiteren unterscheidet der MAE weniger stark zwischen kleinen und großen Fehlern, daher ist er weniger sensitiv bei Modellen, bei denen die Streuung der Fehler oder das Auftreten extremer Abweichungen relevant sind.

Skalenunabhängige Fehlermaße ermöglichen Vergleiche zwischen Datensätzen unterschiedlicher Größenordnung. Eine Möglichkeit zur Skalenunabhängigkeit ist die Normierung auf die Spannweite der Daten. Der normalisierte RMSE (NRMSE)

$$\text{NRMSE}(\underline{F}, \underline{A}) = 100\% \frac{\text{RMSE}(\underline{F}, \underline{A})}{\max(\underline{A}) - \min(\underline{A})} \quad (2.7)$$

normiert den RMSE auf die Spannweite der Daten und wird üblicherweise in Prozent angegeben. Er behält die vorteilhaften Eigenschaften des RMSE bei (Glattheit, Sensitivität gegenüber Ausreißern) und vermeidet Divisionen durch kleine Werte nahe null.

Alternativ kann die Skalenunabhängigkeit durch Division durch die tatsächlichen Werte erreicht werden. Diese Fehlermaße werden jedoch undefiniert oder sehr groß, wenn der Referenzwert gegen null geht. Voraussetzung für die sinnvolle Anwendung und Interpretation ist außerdem ein bedeutungsvoller Nullpunkt der betrachteten Größen. Dies ist beispielsweise bei Temperaturen in Grad Celsius oder Fahrenheit nicht der Fall, da deren Nullpunkt willkürlich gewählt ist (z. B. Gefrierpunkt des Wassers) und nicht „keine Wärme“ bedeutet.

Ein häufig eingesetztes Maß ist der mittlere absolute prozentuale Fehler (Mean Absolute Percentage Error; MAPE)

$$\text{MAPE}(\underline{F}, \underline{A}) = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i - F_i}{A_i} \right|. \quad (2.8)$$

Der MAPE ist intuitiv verständlich. Er bestraft eine Überschätzung stärker als eine Unterschätzung und ist wenig geeignet bei Daten mit Extremwerten, da identische absolute Fehler bei unterschiedlich skalierten Zielwerten zu stark variierenden prozentualen Fehlern führen, sodass insbesondere kleine tatsächliche Werte (nahe Null) übermäßig stark gewichtet werden, während sehr große tatsächliche Werte vernachlässigt werden.

2.2.3.2 Parameteridentifikation

Die Parameteridentifikation von White-Box-Modellen basiert auf der Optimierung, bei der unbekannte Parameter so bestimmt werden, dass das modellierte Verhalten den Messdaten möglichst gut entspricht. Dies führt typischerweise auf ein Minimierungsproblem der Form

$$\min_{\underline{p}} J(\underline{p}), \quad \underline{p} \in P$$

wobei die Zielfunktion $J(\underline{p})$ häufig ein Fehlermaß aus Kapitel 2.2.3.1 ist und die Menge P der zulässigen Parameter $\underline{p}$ durch Nebenbedingungen eingeschränkt sein kann. [107]

Da analytische Lösungen selten existieren, werden in der Praxis meist numerische Verfahren eingesetzt. Gradientenbasierte Methoden nutzen Ableitungen zur Bestimmung der Suchrichtung und einer Schrittweite, z. B. durch Liniensuche, und konvergieren effizient bei glatten Funktionen, sind jedoch empfindlich gegenüber Startwerten und können in

lokalen Minima stecken bleiben. Trust-Region-Verfahren ersetzen die explizite Schrittweitenbestimmung durch eine adaptive Anpassung eines lokalen Modells innerhalb eines Vertrauensbereichs, was die Robustheit gegenüber Nichtlinearitäten erhöht. [79, 107]

Für Optimierungsprobleme ohne oder mit aufwendiger Ableitungsberechnung kommen ableitungsfreie Verfahren wie das Nelder-Mead-Verfahren oder stochastische Verfahren wie Evolutionäre Algorithmen zum Einsatz. Diese sind robuster gegenüber lokalen Minima, erfordern jedoch oft eine höhere Rechenzeit. [79]

2.2.4 Numerische Integrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Numerische Integrationsverfahren für gewöhnliche DGLs sind Verfahren zur Lösung von AWP. Ziel ist die Approximation der zeitlichen Entwicklung eines dynamischen Systems ausgehend von gegebenen Anfangsbedingungen. Formal lässt sich die numerische Integration als diskreter Abbildungsprozess auffassen, der den kontinuierlichen Phasenfluss (Gleichung (2.1)) approximiert.

Es wird zwischen Einschritt- und Mehrschrittverfahren unterschieden. Einschrittverfahren berechnen den nächsten Zeitschritt ausschließlich auf Basis des aktuellen Zustands, während Mehrschrittverfahren zusätzlich bereits berechnete Stützstellen früherer Zeitschritte nutzen. Weiterhin wird zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterschieden. Explizite Verfahren sind so formuliert, dass die Systemdynamik nur von bekannten Größen abhängt, während implizite Verfahren den zukünftigen Zustand implizit definieren und so ein Gleichungssystem zu lösen ist. Zusätzlich können numerische Integrationsverfahren mit fester oder adaptiver Schrittweite arbeiten. Verfahren mit adaptiver Schrittweite passen die Schrittweite automatisch an die lokale Dynamik an, um Genauigkeit und Effizienz zu verbessern.

Verfahren wie der explizite Euler-Algorithmus

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(t_k, x(t_k)) \quad (2.9)$$

nutzen ausschließlich lokale Informationen und weisen begrenzte Stabilität auf. Verfahren aus der Runge-Kutta-Familie bieten eine deutlich verbesserte Genauigkeit. Ein weit verbreiteter Vertreter ist das Verfahren nach Dormand-Prince, das in MATLAB als `ode45`¹ implementiert ist. Dabei handelt es sich um ein explizites Einschrittverfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung. [26]

2.2.5 Vor- und Nachteile der White-Box-Modellierung

Ein wesentlicher Vorteil der White-Box-Modellierung liegt in ihrer Anwendung im Rahmen der Entwicklung neuer Systeme. Sie ermöglicht es, Systeme zu modellieren, die noch nicht existieren oder für die keine experimentellen Daten vorliegen.

Da diese Modellierung auf physikalischen Gesetzen basiert, ist das Modell in der Regel für eine ganze Systemklasse und verschiedene Betriebsbedingungen gültig. Dies eröffnet die Möglichkeit, Systeme unter unterschiedlichen Szenarien zu analysieren und vorherzusagen, wie sie sich in verschiedenen Zuständen verhalten.

¹<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>

Ein weiterer Vorteil der White-Box-Modellierung ist die feste Modellstruktur, die auf grundlegenden physikalischen Prinzipien basiert. Diese Struktur sorgt dafür, dass das Modell klar dokumentiert und nachvollziehbar ist, wodurch es transparent bleibt und die zugrunde liegenden Annahmen jederzeit überprüfbar sind.

Darüber hinaus ermöglicht die White-Box-Modellierung nicht nur die Beschreibung der Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Systems, sondern auch die Erfassung der inneren Zustände. Dies trägt wesentlich zur Verifikation des Modells bei und fördert das Verständnis und die Analyse der internen Wechselwirkungen innerhalb des Systems.

Die White-Box-Modellierung erfordert ein tiefgehendes Verständnis des Systems, da das innere Verhalten vollständig bekannt und mathematisch beschreibbar sein muss. Dies stellt eine hohe Anforderung an das Expertenwissen dar und schränkt die Anwendbarkeit ein, vor allem bei komplexen oder schlecht verstandenen Systemen. Zudem ist die Modellierung häufig zeitaufwändig, da alle relevanten physikalischen Prinzipien sorgfältig formuliert und integriert werden müssen. Dies kann den Entwicklungsprozess erheblich verlangsamen, insbesondere wenn iterative Anpassungen erforderlich sind.

Ein weiteres Problem stellt die steigende Komplexität der Modelle dar, insbesondere wenn versucht wird, möglichst viele physikalische Effekte zu berücksichtigen. Während moderne Simulationssoftware eine Vielzahl vorgefertigter Bibliotheken bereitstellt, führt die zunehmende Modellkomplexität häufig zu Gleichungssystemen, die numerisch nur schwer lösbar sind oder sehr hohe Rechenzeiten erfordern. Dies kann die praktische Nutzbarkeit der Modelle erheblich einschränken.

Schließlich steht die White-Box-Modellierung stets vor der Herausforderung, ein Gleichgewicht zwischen Detaillierung und Handhabbarkeit zu finden. Während ein detailliertes Modell eine genauere Beschreibung des Systems ermöglicht, muss es gleichzeitig so generiert werden, dass es effizient nutzbar ist. Dieses Spannungsfeld erfordert eine sorgfältige Abwägung und kann dazu führen, dass Modelle trotz ihres physikalischen Fundaments nur begrenzt praktikabel sind.

2.3 Black-Box-Modellierung

Die Black-Box-Modellierung folgt einem induktiven Ansatz, bei dem aus konkreten Messdaten schrittweise ein allgemeines Modell gewonnen wird. Dieses Bottom-up-Vorgehen führt von konkreten Messdaten über Annahmen bezüglich der Modellstruktur und Training hin zu einer allgemeinen Systembeschreibung. Der sukzessive Übergang vom Spezifischen zum Allgemeinen wird in Abb. 2.4 durch die Darstellung in Form eines umgedrehten Dreiecks veranschaulicht.

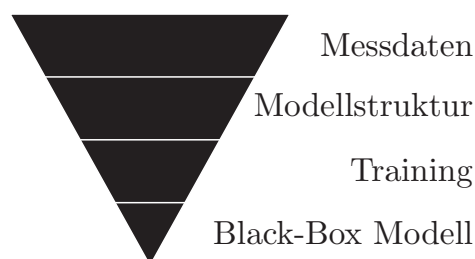


Abbildung 2.4: Bottom-up-Vorgehen bei der Black-Box-Modellierung, angelehnt an [91]

Im ersten Schritt erfolgt die Erfassung von Messdaten. Dabei werden Messungen durchgeführt, die typische Eingangs- und Ausgangsgrößen unter repräsentativen Betriebsbedingungen abbilden. Die Qualität und Repräsentativität dieser Daten bilden die Grundlage für die Gültigkeit des Modellierungsergebnisses.

Im zweiten Schritt in Kapitel 2.3.1 wird die Modellstruktur gewählt. Hierzu zählen klassische statistische Modelle wie die einfache oder multiple lineare Regression ebenso wie Methoden des Maschinellen Lernens (ML), etwa Neuronale Netze (NN) oder Support Vector Machines (SVM). Die gewählte Struktur legt fest, welche Zusammenhänge zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen erfasst werden können und welche Freiheitsgrade für die Anpassung der Parameter zur Verfügung stehen.

Der dritte Schritt in Kapitel 2.3.2 umfasst das Training. Dabei werden die lernbaren Modellparameter anhand der Messdaten so angepasst, dass das Modell die beobachteten Zusammenhänge möglichst genau abbildet.

Anschließend liegt das trainierte Black-Box-Modell vor, welches für Simulation, Vorhersage oder Regelung des Systems genutzt werden kann. Da keine physikalischen Gesetzmäßigkeiten hinterlegt sind, ergibt sich das Systemverhalten ausschließlich aus den gelernten Datenmustern. Dies ermöglicht eine hohe Flexibilität, beschränkt die Validität jedoch auf den Bereich, der durch die beim Training berücksichtigten Messdaten abgedeckt ist.

ML ist ein Teilbereich der künstlichen Intelligenz, der es Computern ermöglicht, aus Daten zu lernen und Muster zu identifizieren, ohne explizit programmiert zu werden. Statt feste Regeln vorzugeben, werden Algorithmen entwickelt, die sich durch Erfahrung verbessern [73]. Es wird zwischen drei großen Gruppen unterschieden: Das überwachte Lernen, das unüberwachte Lernen und das bestärkende Lernen. [17, 112]

Überwachtes Lernen Das überwachte Lernen stellt einen der grundlegenden Ansätze im ML dar, bei dem ein Modell darauf trainiert wird, Muster aus einem Datensatz zu identifizieren, der sowohl Eingabedaten als auch die zugehörigen Zielwerte enthält. Je nachdem ob die Zielwerte diskret oder kontinuierlich sind handelt es sich um eine Klassifikation oder um eine Regression. [112]

Ziel des Trainingsprozesses ist es, ein Modell abzuleiten, welches in der Lage ist, für neue, unbekannte Eingabedaten die korrekten Zielwerte vorherzusagen. Beim Training werden Modellparameter so angepasst, dass die Abweichung zwischen Vorhersagen und Zielwerten minimiert wird. Anschließend wird die Generalisierungsfähigkeit anhand separater Validierungs- oder Testdaten überprüft.

Unüberwachtes Lernen Das unüberwachte Lernen stellt einen weiteren wichtigen Ansatz im ML dar, bei dem das Modell darauf trainiert wird, Muster und Strukturen in einem Datensatz zu identifizieren, ohne dass Zielwerte vorgegeben sind. Im Gegensatz zum überwachten Lernen liegt der Fokus auf der Identifikation zugrundeliegender Zusammenhänge innerhalb der Daten selbst. [112]

Im Training optimieren die Verfahren interne Kriterien wie Ähnlichkeit, Dichte oder Rekonstruktionsfehler, da keine Zielwerte vorgegeben sind.

Bestärkendes Lernen Das bestärkende Lernen (Reinforcement Learning) ist ein Ansatz des ML, bei dem ein sogenannter Agent durch Ausprobieren selbstständig eine Strategie entwickelt, um eine Aufgabe möglichst gut zu lösen. Anstatt feste Regeln oder

Zielwerte vorzugeben, erhält der Agent Rückmeldungen in Form von Belohnungen oder Bestrafungen. Ziel ist es, durch wiederholtes Handeln die beste Strategie zu finden, um langfristig möglichst viele Belohnungen zu sammeln. [112]

Im Rahmen der hybriden Modellierung dient das Black-Box-Modell primär der Lösung einer Regressionsaufgabe, bei der eine kontinuierliche Zielgröße aus Eingangsvariablen vorherzusagen ist. Daher wird sich im Folgenden auf Verfahren des überwachten Lernens beschränkt.

2.3.1 Verfahren der Black-Box-Modellierung

Im Folgenden werden einige bekannte und in dieser Arbeit verwendete ML-Verfahren des überwachten Lernens vorgestellt. Dabei seien als Trainingsdaten die Eingänge $\underline{X} = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n]^\top$ und die Ausgänge $\underline{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^\top$ gegeben. Neue Eingänge seien mit $\underline{x}_*$ bezeichnet, der dazugehörige Ausgang mit y_* .

2.3.1.1 Entscheidungsbäume

Entscheidungsbäume sind hierarchische Modelle des überwachten Lernens. Sie bestehen aus einer Wurzel, inneren Knoten und Blättern. Jeder Knoten m besitzt eine Testfunktion $f_m(\underline{x}_i)$ mit diskreten Ausgängen, die bestimmt, welcher Folgeknoten als nächstes durchlaufen wird. Das Prinzip entspricht einer verschachtelten if-else-Struktur. Für einen neuen Eingabevektor $\underline{x}_*$ beginnt die Auswertung an der Wurzel; anschließend wird über die Testfunktion $f_m(\underline{x}_*)$ der jeweils nächste Knoten ausgewählt, bis ein Blatt erreicht ist, welches die zugehörige Ausgabe y_* liefert. Entscheidungsbäume können sowohl für die Regression, als auch für die Klassifikation verwendet werden. [6, 14, 47]

2.3.1.2 Support Vector Machines

Support Vector Machines (SVM) sind Modelle des überwachten Lernens, die Entscheidungsgrenzen mit möglichst großem Abstand zu den Trainingsdaten bestimmen. Dieser Abstand wird als Margin bezeichnet. Gesucht wird eine Hyperebene, die die Klassen trennt und deren Margin maximal ist. Trainingspunkte, die dieser Hyperebene am nächsten liegen, heißen Stützvektoren (support vectors) und bestimmen die genaue Lage der Entscheidungsgrenze. [6, 17, 47, 97]

Für eine neue Eingabe $\underline{x}_*$ erfolgt die Vorhersage anhand der Position relativ zur gelernten Hyperebene, welche durch ihren Normalenvektor $\underline{w}$ beschrieben wird. Die Entscheidungsfunktion lässt sich dabei im linearen Fall als

$$y_* = \underline{w}^\top \underline{x}_* + \beta$$

schreiben. Hierbei ist β der sogenannte Bias-Term, der den Abstand zwischen dem Ursprung und der Hyperebene beschreibt.

Für nichtlineare Entscheidungsgrenzen wird die Eingabe $\underline{x}_*$ implizit durch eine Abbildung $\phi(\underline{x})$ in einen hochdimensionalen Merkmalsraum transformiert, in dem eine lineare

Hyperebene existiert. Die Entscheidungsfunktion besitzt dann die Form

$$y_* = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n \langle \underline{\phi}(\underline{x}_*), \underline{\phi}(\underline{x}_n) \rangle + \beta.$$

Hierbei sind α_n die im Training ermittelten Lagrange-Multiplikatoren und β der Bias-Term. Nur die Trainingspunkte mit $\alpha_n > 0$, d. h. die Stützvektoren, tragen zur Summe bei und bestimmen somit die Entscheidungsgrenze. Damit die Abbildung $\underline{\phi}$ nicht explizit berechnet werden muss, wird der Kernel-Trick verwendet: Statt des inneren Produkts wird ein Kernel

$$k(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \langle \underline{\phi}(\underline{x}_i), \underline{\phi}(\underline{x}_j) \rangle$$

direkt im ursprünglichen Raum definiert. So lassen sich nichtlineare Entscheidungsflächen realisieren, ohne den höherdimensionalen Merkmalsraum explizit konstruieren zu müssen. In dieser Arbeit findet der Gauß-Kernel

$$k(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \exp \left(-\frac{\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|^2}{2\sigma^2} \right)$$

Anwendung. Er entspricht dem inneren Produkt zweier Punkte in einem unendlichdimensionalen, implizit definierten Merkmalsraum. Der Parameter σ beeinflusst den Einflussbereich des Kernels und steuert damit die Glattheit und Form der resultierenden Entscheidungsfläche.

2.3.1.3 Neuronale Netze

Neuronale Netze (NN) basieren auf der Nachahmung biologischer neuronaler Systeme, wie sie beispielsweise im menschlichen Gehirn vorhanden sind. Diese Modelle haben in den letzten Jahrzehnten massiv an Bedeutung gewonnen und spielen heute eine Schlüsselrolle in Bereichen wie Sprachverarbeitung, Bilderkennung, Medizin und autonomes Fahren. NNs bestehen aus mehreren Schichten, siehe Abb. 2.5 a). Dazu gehören die Eingabeschicht (i), welche externe Daten aufnimmt, und die Ausgabeschicht (iv), die das Endergebnis liefert. Dazwischen befinden sich eine oder mehrere verborgene Schichten (ii) und (iii), die für die eigentliche Verarbeitung verantwortlich sind.

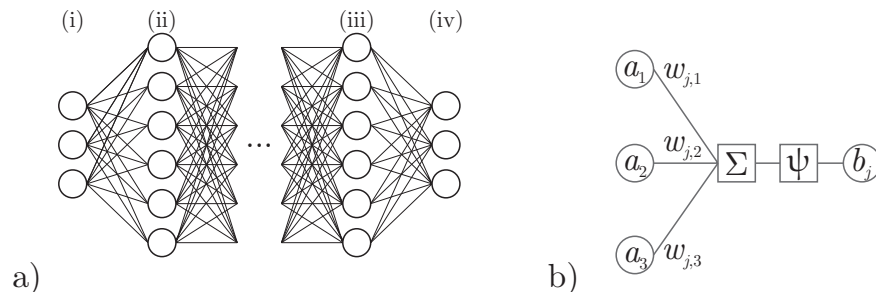


Abbildung 2.5: a) Ein vollständiges NN und b) die Berechnung eines einzelnen Neurons

Jedes Neuron b_j in einer Schicht empfängt Informationen von Neuronen a_i der vorherigen Schicht, siehe Abb. 2.5 b). Die Verbindungen zwischen den Neuronen sind mit Gewichten $w_{i,j}$ versehen, die steuern, wie stark das Signal eines Neurons auf ein anderes

übertragen wird. Ein Neuron selbst berechnet die Summe seiner gewichteten Eingaben, und transformiert das Ergebnis mithilfe einer Aktivierungsfunktion ψ , so dass sich der Wert

$$b_j = \psi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n w_{j,i} a_i}_{z_j}\right)$$

ergibt, welcher als Eingang für eine nächste Schicht dienen kann. Bei den Aktivierungsfunktionen kann es sich beispielsweise um die Sigmoid-Funktion oder einen Gleichrichter (Rectified Linear Unit, ReLU) handeln, der auf die Positivteile

$$\psi(z_j) = \text{ReLU}(z_j) = \max(0, z_j)$$

abbildet. [6, 112, 114]

Durch die Aktivierungsfunktionen kann das Gesamtsystem als Komposition mehrerer nichtlinearer Abbildungen aufgefasst werden, wodurch die Fähigkeit entsteht, komplexe funktionale Zusammenhänge darzustellen; ohne Aktivierungsfunktionen würde die Hintereinanderschaltung mehrerer Schichten auf eine einzelne lineare Abbildung zurückfallen. Aus dieser Fähigkeit ergibt sich auch die sogenannte *universelle Approximationseigenschaft*, nach der ein NN mit mindestens einer verborgenen Schicht und geeigneter nichtlinearer Aktivierungsfunktion stetige Funktionen auf kompakten Definitionsbereichen prinzipiell beliebig genau approximieren kann. Diese Eigenschaft stellt jedoch eine reine Existenzaussage dar und impliziert weder eine bestimmte Netzgröße noch eine effiziente Trainingsbarkeit oder gute Generalisierung außerhalb des Trainingsbereichs. [112, 114]

2.3.1.4 Gauß-Prozess-Regression

Die Gauß-Prozess-Regression (GPR) ist ein probabilistisches ML-Verfahren. Statt eine feste funktionale Form anzunehmen, beschreibt sie eine Verteilung über mögliche Funktionen, die mit den Beobachtungen konsistent sind. In Abb. 2.6 ist dies dargestellt: Der tatsächliche Kurvenverlauf ist schwarz eingezeichnet, für das Training stehen jedoch lediglich die durch Punkte markierten Daten zur Verfügung. In Bereichen ohne Beobachtungsdaten wird eine Vorhersageverteilung berechnet, die durch den grauen Bereich (Unsicherheitsbereich) dargestellt ist.

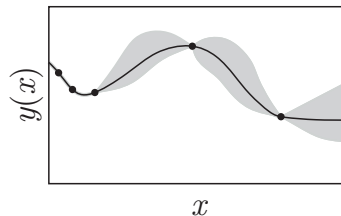


Abbildung 2.6: Funktionsweise eines GPR-Modells schematisch dargestellt

Mithilfe einer Kernel-Funktion $k(\underline{x}_*, \underline{x}_i)$ wird festgelegt wie ähnlich sich zwei Eingabepunkte sind, und damit, wie stark ein Trainingspunkt $\underline{x}_i$ aus $\underline{X}$ die Vorhersage eines neuen Punktes $\underline{x}_*$ beeinflusst. Liegen $\underline{x}_*$ und $\underline{x}_i$ nah beieinander nimmt $k(\underline{x}_*, \underline{x}_i)$ große

Werte an, andernfalls klein. Die in dieser Arbeit verwendete Kernel-Funktionen entstammen der Familie der Matérn-Kernel, welche die gezielte Steuerung der Glattheit der modellierten Funktion erlaubt und sich besonders für Systeme, deren Verhalten nicht vollständig glatt, sondern leicht rau ist, d. h. sich mit der Eingangsgröße vergleichsweise schnell ändert, eignet. [87]

Im Folgenden sei

$$r = \sqrt{(\underline{x}_*, \underline{x}_i)^\top (\underline{x}_*, \underline{x}_i)},$$

der Parameter σ_f die Standardabweichung, und der Parameter σ_l die charakteristische Längenskala (length-scale), welche bestimmt über welche Distanz Punkte noch signifikant korreliert sind. Kleine σ_l -Werte erzeugen stark schwankende Funktionen, große σ_l -Werte glatte Verläufe. [87, 111]

- Matérn-1/2 (Exponential-Kernel):

$$k(\underline{x}_*, \underline{x}_i) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{r}{\sigma_l}\right)$$

Dieser Kernel erzeugt stetige, jedoch nicht glatte Funktionen und eignet sich für Prozesse mit abrupten Änderungen oder nicht differenzierbaren Verläufen, z. B. Reibung oder Schaltvorgänge. [87, 111]

- Matérn-3/2:

$$k(\underline{x}_*, \underline{x}_i) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right)$$

Dieser Kernel erzeugt einmal differenzierbare Funktionen und stellt einen Kompromiss zwischen Flexibilität und Glattheit dar. [87, 111]

- Matérn-5/2:

$$k(\underline{x}_*, \underline{x}_i) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l} + \frac{5r^2}{3\sigma_l^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l}\right)$$

Dieser Kernel führt zu zweifach differenzierbaren Funktionen und erzeugt damit glattere Verläufe als der Matérn-3/2-Kernel. [87, 111]

- Matérn- ∞ (Squared Exponential-Kernel):

$$k(\underline{x}_*, \underline{x}_i) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_l^2}\right)$$

Der Squared Exponential-Kernel ist unendlich glatt und eignet sich für sehr gleichmäßige, kontinuierliche Prozesse, wie sie in physikalischen Systemen ohne abrupte Änderungen auftreten. [87, 111, 112]

Mit der Kernel-Funktion lässt sich die Kovarianzmatrix $\underline{K}$ mit den Einträgen $\underline{K}_{i,j} = k(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ für die Trainingspunkte in $\underline{X}$ berechnen. Messrauschen wird durch die Berücksichtigung der Rauschvarianz (noise variance) σ_n^2 einbezogen. Für die Vorhersage an einem neuen Punkt $\underline{x}_*$ werden zunächst die Korrelationen $\underline{k}_* = [k(\underline{x}_*, \underline{x}_1), k(\underline{x}_*, \underline{x}_2), \dots, k(\underline{x}_*, \underline{x}_n)]^\top$ zu allen Trainingspunkten berechnet, so dass sich die Ausgabe y_* dem Erwartungswert μ_* entspricht und sich über

$$y_* = \mu_* = \underline{k}_*^\top (\underline{K} + \sigma_n^2 \underline{E})^{-1} \underline{Y}$$

berechnen lässt. Zusätzlich lässt sich die Unsicherheit über

$$\sigma_*^2 = k(\underline{x}_*, \underline{x}_*) - \underline{k}_*^\top (\underline{K} + \sigma_n^2 \underline{E})^{-1} \underline{k}_*$$

berechnen.

2.3.1.5 Ensembles

Jeder ML-Algorithmus basiert auf einer bestimmten Annahmestruktur, die den Lernprozess prägt. Wenn diese Annahmen nicht mit den Eigenschaften der tatsächlichen Daten übereinstimmen, führt dies zu Fehlern in der Vorhersage und insbesondere in der Generalisierungsfähigkeit. Da ML ein unterbestimmtes Problem darstellt – es gibt unendlich viele mögliche Modelle, die die Daten erklären könnten – führt bei einem endlichen Datensatz jeder Algorithmus zu einer anderen Lösung, deren Güte variieren kann.

Statt nach dem besten einzelnen Algorithmus zu suchen, kann auch eine geeignete Kombination von mehreren sogenannten Basislernern die Genauigkeit verbessern. Die Entwicklung solcher Ensemble-Systeme wurde durch sinkende Hardwarekosten und steigende Rechenleistung möglich und hat in den letzten Jahrzehnten an Bedeutung gewonnen. Dabei stellen sich zwei zentrale Fragen:

1. **Wie werden Basislerner generiert, die sich gegenseitig ergänzen?**

Dazu können verschiedene Algorithmen, unterschiedliche Hyperparameter, variierende Trainingsmengen oder sogar verschiedene Datensätze eingesetzt werden. Die Idee ist, dass die Modelle zwar unterschiedliche Fehler machen, aber diese Fehler nicht systematisch sind.

2. **Wie können die Ausgaben der Basislerner kombiniert werden, um die höchstmögliche Genauigkeit zu erreichen?**

Möglichkeiten hierfür sind die Summe, gewichtete Summe, der Median, das Minimum oder andere Aggregationsstrategien, je nach Problemart und Modelltyp.

Ein zentrales Ziel ist es daher, durch eine intelligente Kombination von einfachen, aber unterschiedlichen Basismodellen ein Gesamtmodell zu generieren, welches im Mittel besser abschneidet als jeder einzelne der Bausteine. Zu den gängigsten Ansätzen gehören Bagging, Boosting und Stacking. [6, 47]

Ein klassisches, und in dieser Arbeit verwendetes Verfahren ist das sogenannte Bagging (Bootstrap Aggregating). Dabei werden mehrere Modelle auf leicht unterschiedlichen Trainingsdaten trainiert, um die Varianz des Gesamtsystems zu reduzieren. Der Prozess läuft in drei Schritten ab:

1. **Bootstrapping:** Aus dem ursprünglichen Datensatz mit N Instanzen werden L neue Trainingsmengen erzeugt, indem jeweils N Instanzen mit Zurücklegen zufällig ausgewählt werden. Dadurch entstehen Stichproben, die sich teilweise überschneiden, aber jeweils leicht unterschiedliche Daten enthalten, eine Annahme, die auf der Repräsentativität der ursprünglichen Stichprobe basiert.
2. **Paralleles Training:** Auf jeder dieser Bootstrap-Stichproben wird ein Basismodell (z. B. ein Entscheidungsbaum) trainiert.
3. **Aggregation:** Die Vorhersagen der einzelnen Modelle werden zu einer gemeinsamen Entscheidung zusammengeführt. Bei Regression wird der Mittelwert der einzelnen Basismodelle gebildet.

Durch diese Vorgehensweise wird die Varianz des Modells reduziert und die Generalisierungsfähigkeit verbessert. Bagging ist daher besonders effektiv bei hochvariablen Modellen wie Entscheidungsbäumen, die allein leicht instabil sind. [6, 13, 47, 112]

2.3.2 Training von Black-Box-Modellen

Bevor das Training eines ML-Modells beginnen kann, werden die verfügbaren Daten in Trainings-, Validierungs- und Testdaten unterteilt. Eine allgemeingültige Aussage über die Anteile kann nicht getroffen werden, aber eine gängige Aufteilung ist 80 : 10 : 10. Die Trainingsdaten dienen zum Anpassen der Modellparameter, wie der Gewichte, der Stützvektoren oder der Testfunktionen. Die Validierungsdaten werden zur Bewertung und Optimierung verschiedener Hyperparametereinstellungen, sowie zur Überwachung des Generalisierungsprozesses genutzt und die Testdaten ermöglichen eine unabhängige Beurteilung des finalen Modells. [47, 114]

Während des Trainings wird der Fehler für jedes Element der Trainingsdaten über eine Verlustfunktion $\mathcal{L}$ bestimmt. Hierbei können Fehlermaße wie in Kapitel 2.2.3.1 vorgestellt, aber auch andere Funktionen zum Einsatz kommen. Die Kostenfunktion ergibt sich als Mittelwert dieser Verluste über alle Trainingsdaten. Damit wird das Lernproblem als Optimierungsaufgabe formuliert, deren Ziel es ist, den Fehler zu minimieren. [114]

Generalisierung Die Generalisierung beschreibt die Fähigkeit des trainierten Modells, auch für unbekannte Eingaben verlässliche Ausgaben zu liefern. Dabei kann zwischen Überanpassung (Overfitting) und Unteranpassung (Underfitting) unterschieden werden. Überanpassung tritt auf, wenn das Modell zu stark an die Trainingsdaten angepasst ist und dadurch eine hohe Varianz zeigt. Gegenmaßnahmen umfassen etwa die Kreuzvalidierung, die Regularisierung, Ensemble-Methoden oder die Verwendung von zusätzlichen Daten. Unteranpassung liegt vor, wenn das Modell die grundlegenden Zusammenhänge nicht erfasst und eine hohe Verzerrung (Bias) aufweist. Dies äußert sich in hohen Fehlern sowohl bei den Trainings- als auch bei neuen Daten und kann durch verringerte Regularisierung, längeres Training oder geeignete Merkmalsauswahl reduziert werden. Das Verzerrung-Varianz-Dilemma beschreibt das zugrundeliegende Problem: Ein Modell mit zu niedriger Komplexität weist hohe Verzerrung auf, während zu komplexe Modelle eine hohe Varianz aufweisen, was beides die Generalisierungsfähigkeit beeinträchtigt. Da diese beiden Fehlermaße gegenläufige Ziele verfolgen, stellt die Modellentwicklung ein klassisches Mehrzieloptimierungsproblem dar. Ein ausgewogenes Modell findet daher den optimalen Kompromiss, um sowohl Verzerrung als auch Varianz zu minimieren und die Vorhersagegenauigkeit auf neuen Daten zu maximieren [47, 112].

Die Wahl einer geeigneten Modellstruktur kann durch Kreuzvalidierung unterstützt werden. Dabei wird die Datenmenge in k gleich große Teilmengen aufgeteilt. Jede Teilmenge übernimmt einmal die Rolle der Validierungsdaten, während die übrigen als Trainingsdaten dienen. Die resultierenden k Modelle werden bewertet und ihre Güten gemittelt. Nach der Auswahl der geeigneten Modellstruktur erfolgt das eigentliche Training mit allen verfügbaren Trainingsdaten. [47, 87]

Regularisierung dient dazu, Modelle zur Abbildung allgemeiner Muster statt zum Auswendiglernen (memorizing) einzelner Beispiele zu bewegen. Typische Verfahren sind Early Stopping, Dropout (bei NNs) sowie L1- und L2-Regularisierung. Beim Early Stopping

wird das Training beendet, wenn die Güte der Validierungsergebnisse nicht weiter steigt oder sogar absinkt. Beim Dropout werden beim Training eines NN zufällig Neuronen deaktiviert um die Generalisierung zu verbessern.

Bei der sogenannten L1-Regularisierung (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator; LASSO) wird ein Regularisierungsterm auf die Kostenfunktion addiert, der einfache Modelle begünstigt [112, 114]. Zur Erläuterung wird ein lineares Modell mit $f(\underline{x}) = \underline{\Theta} \underline{x}$ angenommen. Der Verlust ergibt sich aus dem absoluten Fehler zwischen Modellvorhersage und Zielwert. In der zugehörigen Kostenfunktion wird zusätzlich der Regularisierungsterm $\alpha \|\underline{\Theta}\|_{l_1} = \alpha \sum(|\Theta_j|)$ berücksichtigt, der bei einer Minimierung Modelle mit dünnbesetzten Parametervektoren $\underline{\Theta}$ begünstigt. Die vollständige Kostenfunktion lautet damit

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \underline{\Theta} \underline{x}_i)^2 + \alpha \|\underline{\Theta}\|_{l_1}.$$

Bei der L2-Regularisierung (ridge regression) ist die Idee ganz ähnlich zur L1-Regularisierung, nur dass beim Regularisierungsterm $\alpha \|\underline{\Theta}\|_{l_2}^2 = \alpha \sum(|\Theta_j|^2)$ die l_2 -Norm verwendet wird. Dadurch zielt die L2-Regularisierung im Gegensatz zur L1-Regularisierung nicht auf dünnbesetzte Parametervektoren, sondern auf betragsmäßig kleine und gleichmäßig verteilte Parameter ab. [112, 114]

Während die L1-Regularisierung durch das Erzwingen von Nulleinträgen eine implizite Variablenselektion bewirkt und somit zu sparsamen sowie gut interpretierbaren Modellen führt, kann dies mit einem Genauigkeitsverlust einhergehen, wenn relevante Gewichte vollständig eliminiert werden. Die L2-Regularisierung hingegen reduziert Parameter kontinuierlich, ohne sie exakt auf null zu setzen. Dadurch entstehen glattere Lösungen mit moderaten Gewichtsänderungen, was die Generalisierungsfähigkeit verbessert, ohne die Modellgenauigkeit in gleichem Maße zu beeinträchtigen wie bei einer starken L1-Regularisierung. [24]

Optimierung der Hyperparameter Hyperparameter steuern den Trainingsprozess, etwa die Anzahl der Blätter eines Entscheidungsbaums oder die Zahl der Neuronen und Schichten eines NN. Sie werden nicht im Training selbst gelernt, sondern vorab mittels Optimierungsverfahren (siehe Kapitel 2.2.3.2), über automatisierte ML-Workflows oder basierend auf Erfahrungswerten heuristisch ermittelt. Es kann das Optimierungsproblem

$$\min_{\underline{\xi} \in \Xi} \mathcal{M}(h_{\underline{\xi}}, V), \quad h_{\underline{\xi}} = A(D, \underline{\xi})$$

formuliert werden, wobei $\underline{\xi}$ der Vektor der Hyperparameter im entsprechenden Suchraum Ξ ist, $\mathcal{M}$ ein Fehlermaß (vgl. Kapitel 2.2.3.1), $h_{\underline{\xi}}$ ein mit dem Algorithmus A trainiertes Black-Box-Modell, D die Menge der Trainingsdaten und V die Menge der Validierungsdaten. Für jede Hyperparameterkombination muss dabei ein neues Training des Modells durchgeführt werden. Zwar ist nicht jedes Training bis zu Ende durchzuführen, sondern es kann basierend auf statistischen Kriterien abgebrochen werden, dennoch ist der Prozess sehr zeitaufwändig. Nach Auswahl der optimalen Einstellung wird das Modell erneut mit allen Trainingsdaten trainiert. [33, 87]

Evaluation Die Evaluation des Modells erfolgt anhand der zuvor zurückgehaltenen Testdaten. Dabei kommen Fehlermaße wie in Kapitel 2.2.3.1 beschrieben zum Einsatz,

um die Güte des finalen Modells quantitativ zu bewerten.

2.3.3 Regression Learner App

Die *Regression Learner App*² ist eine in MATLAB integrierte Umgebung zum interaktiven Trainieren, Validieren und Optimieren von ML-Regressionsmodellen. Der typische Arbeitsablauf gliedert sich in mehrere Schritte.

Zunächst werden die Trainingsdaten ausgewählt und eine Kreuzvalidierung (Standardeinstellung $k = 5$) vorgenommen. Eine explizite Testdatenmenge ist standardmäßig nicht vorgesehen; stattdessen erfolgt die Bewertung über Validierungsdaten aus der Kreuzvalidierung.

Im nächsten Schritt werden die Regressionsoptionen festgelegt. Dazu gehören die Merkmalsauswahl, die optionale Anwendung einer Hauptkomponentenanalyse (principal component analysis; PCA; standardmäßig deaktiviert) sowie die Wahl des Optimierungsverfahrens für optimierbare Modelle. Als Voreinstellung kommt eine Bayessche Optimierung zum Einsatz.

Anschließend werden die ausgewählten Regressionsmodelle trainiert, wobei MATLAB die Modelle parallel trainieren kann. Insgesamt stehen 28 Modelle aus verschiedenen Modellklassen zur Verfügung:

- **Linear Regression Model:** Linear, Interactions Linear, Robust Linear, Stepwise Linear
- **Regression Trees:** Fine Tree, Medium Tree, Coarse Tree
- **Support Vector Machine:** Linear SVM, Quadratic SVM, Cubic SVM, Fine Gaussian SVM, Medium Gaussian SVM, Coarse Gaussian SVM
- **Efficiently Trained Linear Regression Models:** Efficient Linear Least Squares, Efficient Linear SVM
- **Gauß Process Regression Models:** Rational Quadratic, Squared Exponential, Matern 5/2, Exponential
- **Kernel Approach Methods:** SVM Kernel, Least Squares Kernel Regression
- **Ensembles of Trees:** Boosted Trees, Bagged Trees
- **Neural Networks:** Narrow Neural Network, Medium Neural Network, Wide Neural Network, Bilayered Neural Network, Trilayered Neural Network

Diese Modelle werden jeweils mit variierenden, voreingestellten Hyperparametern und gegebenenfalls unterschiedlichen Kernelfunktionen trainiert. Für nahezu alle Modellklassen steht zudem eine optimierbare Variante zur Verfügung, deren Hyperparameter automatisch angepasst werden können.

Die Bewertung erfolgt anhand verschiedener Kennzahlen, insbesondere des Validierungs-RMSE, das ist der RMSE der bei der Anwendung des Modells auf die Validierungsdaten erzielt wurde. Darüber hinaus können Werte wie der MAPE, MAE, Vorhersagegeschwindigkeit sowie Trainingszeit ausgegeben werden.

Zuletzt können die Modelle entweder direkt exportiert oder als Code zum erneuten Trainieren ausgegeben werden.

²<https://de.mathworks.com/help/stats/regression-learner-app.html>

Sofern nicht anders angegeben, werden in dieser Arbeit sämtliche Standardeinstellungen beibehalten, und das Modell wird auf Basis des Validierungs-RMSE ohne zusätzliche Optimierung der Hyperparameter ausgewählt, da die Strategie hybrider Modellierung darin besteht, robuste, einfach gehaltene ML-Modelle zu etablieren, die als transparente Ergänzung zu physikalischen Grundlagen dienen. Eine Anpassung der Hyperparameter erfolgt ausschließlich dann, wenn die Ergebnisse der Standardkonfiguration die gestellten Anforderungen nicht erfüllen.

2.3.4 Vor- und Nachteile der Black-Box-Modellierung

Ein bedeutender Vorteil der Black-Box-Modellierung ist ihre hohe Flexibilität. Die zur Verfügung stehenden Methoden können auf eine Vielzahl von Systemen angewandt werden, unabhängig von deren Komplexität, solange ausreichend Messdaten vorliegen.

Des Weiteren wird die Modellierung physikalischer Prozesse ermöglicht, die nicht vollständig verstanden oder schwer zugänglich sind.

Ein weiterer Vorteil ist die schnelle Modellerstellung. Da die Black-Box-Modellierung auf den vorhandenen Daten basiert und keine tiefgehende physikalische Ableitung erfordert, kann sie in relativ kurzer Zeit durchgeführt werden. Dies macht sie besonders attraktiv für Anwendungen, bei denen schnelle Ergebnisse benötigt werden, detaillierte physikalische Modelle schwer umsetzbar sind und eine gute Interpretierbarkeit nicht notwendig ist.

Zudem lässt sich die Modellgenauigkeit je nach Bedarf anpassen. Je nach Anforderungen können Modelle mit hoher Präzision erstellt werden, indem größere Datensätze und komplexere Modellierungsansätze verwendet werden, gleichzeitig ist es möglich, einfachere Modelle zu wählen, wenn eine grobe Annäherung ausreicht, der Rechenaufwand minimiert werden soll oder nur wenig Daten zur Verfügung stehen.

Ein zentraler Nachteil der Black-Box-Modellierung ist ihre Abhängigkeit von Messdaten, die sowohl die Qualität als auch den Gültigkeitsbereich des Modells bestimmen. Da diese Modelle ausschließlich auf gemessenen Ein- und Ausgangsdaten basieren, können sie nur für jene Betriebsbedingungen angewandt werden, unter denen die Daten erfasst wurden. Eine Verallgemeinerung auf andere Betriebszustände oder Skalierungen des Systems sind in der Regel nicht möglich. Dies macht zuverlässige Vorhersagen unter veränderten Bedingungen schwierig.

Gleichzeitig kann die Erhebung geeigneter Daten aufwändig sein. Die Qualität des Modells hängt stark von der Verfügbarkeit und Genauigkeit dieser Daten ab, verrauschte, unzureichende oder nicht repräsentative Messwerte können zu fehlerhaften oder unzuverlässigen Vorhersagen führen. Besonders in frühen Entwicklungsphasen stellt dies ein Problem dar, da oft noch keine realen Daten vorliegen. Ohne experimentelle Daten ist die Modellbildung nicht möglich, was die Anwendung des Modellierungsansatzes auf neue oder noch nicht realisierte Systeme ausschließt.

Schließlich müssen geeignete Modellstrukturen gewählt werden, was oft heuristisch geschieht, da physikalische Prinzipien als Orientierung fehlen. Zudem haben die ermittelten Modellparameter keine physikalische Bedeutung, was die Interpretierbarkeit erschwert und das Verständnis der Systemdynamik behindert.

2.4 Gray-Box-Modellierung

Gray-Box-Modellierung verfolgt das Ziel, physikalisch motivierte Modellansätze mit datengetriebenen Methoden zu kombinieren, um die jeweiligen Stärken beider Ansätze zu nutzen. Während White-Box-Modelle auf expliziten physikalischen Beschreibungen beruhen und eine hohe Interpretierbarkeit bieten, erfordern sie häufig einen hohen Modellierungsaufwand (vgl. Kapitel 2.2). Black-Box-Modelle erlauben demgegenüber eine flexible Abbildung komplexer Zusammenhänge auf Basis von Daten, sind jedoch in ihrem Gültigkeitsbereich und ihrer Transparenz eingeschränkt (vgl. Kapitel 2.3).

Gray-Box-Modelle positionieren sich zwischen diesen beiden Extremen und vereinen physikalisches Vorwissen und Messdaten in einem gemeinsamen Modellansatz. Ein Ansatz in diesem Zwischenbereich ist besonders attraktiv, da er die Vorteile beider Welten kombiniert, ohne sich strikt für eine vollständige White-Box- oder vollständige Black-Box-Modellierung entscheiden zu müssen. Dadurch lässt sich vorhandenes Expertenwissen nutzen, auch wenn es für eine vollständige White-Box-Modellierung nicht ausreicht, oder es können vorhandene Modellstrukturen genutzt und zugleich datenbasierte Anteile ergänzt werden, um Unsicherheiten oder schwer modellierbare Effekte abzudecken. Es kann nach Art und Richtung der Integration unterschieden werden: Bildet ein White-Box-Modell die Basis und wird um Black-Box-Anteile ergänzt, handelt es sich um ein Light-Gray-Box-Modell (Kapitel 2.4.2), dies ist in Abb. 2.7 in der oberen Zeile dargestellt. Bildet umgekehrt ein Black-Box-Modell die Basis welches durch Expertenwissen (White-Box) angereichert wird, so wird es als Dark-Gray-Box-Modell bezeichnet (Kapitel 2.4.3), dies ist in Abb. 2.7 in der unteren Zeile dargestellt. Handelt es sich um eine gleichberechtigte Kopplung von White- und Black-Box-Anteilen, bei der beide Anteile unverzichtbar und im Gesamtsystem enthalten sind wird von einem hybriden Modell

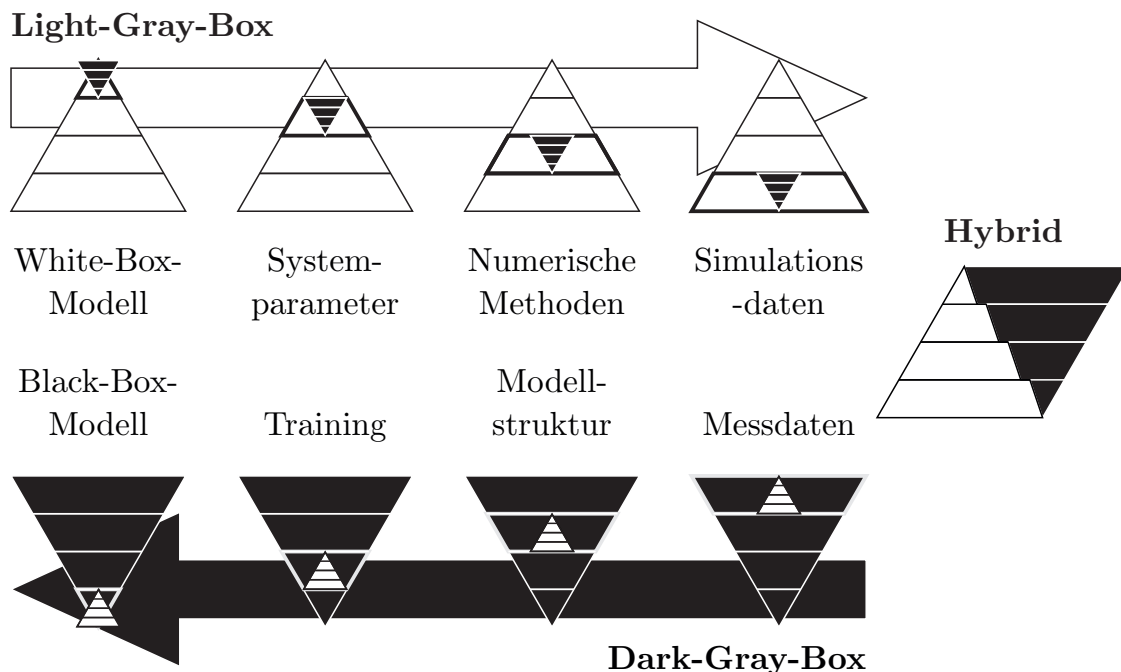


Abbildung 2.7: Gray-Box-Modellierung als Zusammenspiel von White-Box- und Black-Box-Modellierung

gesprochen (Kapitel 2.4.4). Durch den White-Box-Anteil kann hierbei die Erklärbarkeit des Gesamtmodells erhalten bleiben, während sich Genauigkeit und Recheneffizienz durch den Black-Box-Anteil steigern lassen. In Abb. 2.7 ist die hybride Modellierung rechts dargestellt. [45, 51, 91, 92]

2.4.1 Verfahren der Gray-Box-Modellierung

Bevor Gray-Box-Verfahren analysiert und klassifiziert werden, sollen im Folgenden einige bekannte Ansätze der Gray-Box-Modellierung vorgestellt werden. Ziel ist es, ein grundlegendes Verständnis für die Idee und Bandbreite dieser Verfahren zu vermitteln und dazulegen, wie physikalisches Vorwissen und Black-Box Methoden in unterschiedlichen Formen miteinander kombiniert werden können.

2.4.1.1 Physikalisch Informierte Neuronale Netze

Physikalisch Informierte Neuronale Netze (PINN) stellen eine Erweiterung klassischer NNs dar, die gezielt zur Lösung von partiellen und gewöhnlichen DGLs mit explizit bekannten physikalischen Gesetzen eingesetzt werden. Während herkömmliche NNs Zusammenhänge ausschließlich aus Beobachtungsdaten lernen, integrieren PINNs zusätzlich a-priori bekanntes physikalisches Wissen direkt in den Trainingsprozess. Dies erfolgt über eine erweiterte Verlustfunktion der Form

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}_{\text{u}} + \mathcal{L}_{\text{f}}.$$

Der datenbasierte Term $\mathcal{L}_{\text{u}}$ beschreibt die Übereinstimmung zwischen den Modellergebnissen und den verfügbaren Messdaten und wird typischerweise über etablierte Fehlermaße den MSE (Gleichung (2.5)) formuliert. Der physikbasierte Term $\mathcal{L}_{\text{f}}$ fördert die Einhaltung der zugrundeliegenden DGLs. Zur Auswertung von $\mathcal{L}_{\text{f}}$ werden die Residuen der DGLs an sogenannten Kollokationspunkten minimiert. Dabei handelt es sich um vor dem Training fest gewählte Punkte im Definitionsbereich, an denen die physikalischen Bedingungen überprüft werden. Erforderliche Ableitungen der Netzwerkausgabe werden mithilfe der automatischen Differentiation berechnet und in die physikalischen Gleichungen eingesetzt. Diese Methode ermöglicht es, die Gleichungen direkt im Trainingsprozess zu fördern, ohne dass sie durch Daten oder Architektur eingeschränkt werden.

Durch die direkte Integration der physikalischen Gleichung in die Verlustfunktion lernt das Netzwerk nicht nur eine Approximation der Beobachtungsdaten, sondern auch die strukturellen Eigenschaften des zugrundeliegenden physikalischen Modells. Dadurch liefern PINNs Lösungen, die sowohl datenkonsistent als auch physikalisch plausibel sind, insbesondere bei begrenzter oder verrauschter Datenlage. [86]

2.4.1.2 Sparse Identification of Nonlinear Dynamics

Das Verfahren für Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) ist ein mathematisches Verfahren zur Modellierung dynamischer Systeme in kompakter und interpretierbarer Form. Es basiert auf der Annahme, dass die wesentliche Dynamik eines Systems dünnbesetzt ist, d. h. dass nur wenige Terme signifikant zur Beschreibung des Systemverhaltens beitragen. Das Ziel von SINDy ist die Identifikation von DGLs, die

die Entwicklung eines Systems aus beobachteten Daten modellieren. Gegeben sei ein dynamisches System der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$$

wobei $\underline{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^\top$ den Systemzustand zu einem Zeitpunkt t beschreibt und $\underline{f}(\underline{x}(t))$ die zugrundeliegende nichtlineare Dynamik. Das Verfahren identifiziert $\underline{f}$ aus gegebenen Messdaten durch eine Zerlegung und dünnbesetzte Optimierung, und ist in Abb. 2.8 schematisch dargestellt. [16, 17]

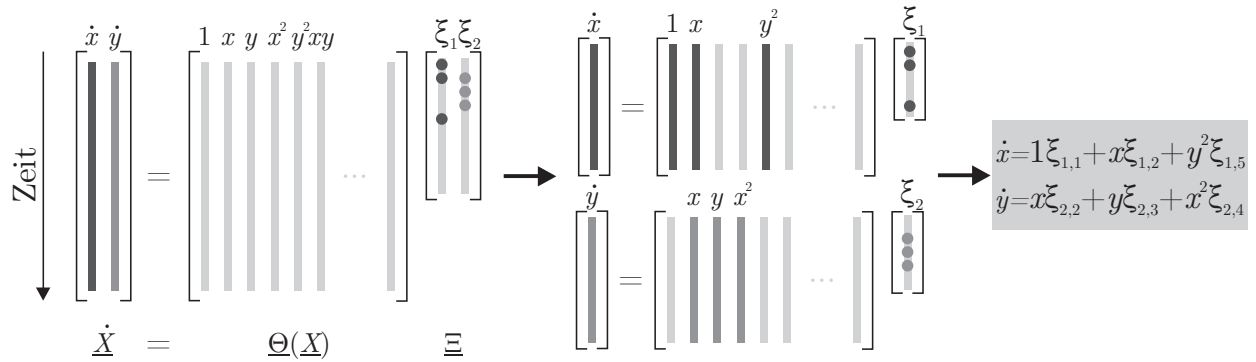


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung des SINDy Verfahrens [16, 108]

Die Messdaten $\underline{x}(t)$ werden in Matrixform als

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}^\top(t_1) \\ \underline{x}^\top(t_2) \\ \vdots \\ \underline{x}^\top(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \dots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \dots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \dots & x_n(t_m) \end{bmatrix}.$$

dargestellt. Hierbei entspricht jede Zeile einem Zeitstempel t_i . Analog wird $\underline{\dot{X}}$ definiert. Im nächsten Schritt wird eine sogenannte Kandidatbibliothek $\underline{\Theta}(\underline{X})$ konstruiert, die mögliche Terme enthält, die die Dynamik des Systems approximieren könnten. Die Bibliothek umfasst häufig polynomiale Terme oder auch trigonometrische Funktionen:

$$\underline{\Theta}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{1} & \underline{X} & \underline{X}^2 & \underline{X}^3 & \dots & \sin(\underline{X}) & \cos(\underline{X}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Für den Fall von Polynomtermen enthält $\underline{X}^2$ beispielsweise Terme zweiten Grades

$$\underline{X}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2(t_1) & x_1(t_1)x_2(t_1) & \dots & x_2^2(t_1) & \dots & x_n^2(t_1) \\ x_1^2(t_2) & x_1(t_2)x_2(t_2) & \dots & x_2^2(t_2) & \dots & x_n^2(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^2(t_m) & x_1(t_m)x_2(t_m) & \dots & x_2^2(t_m) & \dots & x_n^2(t_m) \end{bmatrix}.$$

Das Kernziel von SINDy ist die Bestimmung einer dünnbesetzten Koeffizientenmatrix

$\Xi = [\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_n]$, die das Gleichungssystem

$$\dot{X} = \Theta(X)\Xi$$

löst. Dabei steht jede Spalte $\underline{\xi}_i$ für die Koeffizienten der Dynamik des i -ten Zustands des Systems. Um die Dünnbesetztheit der Lösung zu gewährleisten, kann das Problem beispielsweise unter Anwendung der L1-Regularisierung (siehe Kapitel 2.3.2) gelöst werden.

2.4.2 Light-Gray-Box-Modellierung

Light-Gray-Box-Modelle basieren auf einem White-Box-Modell, welches durch Black-Box-Ansätze ergänzt wird. Dadurch können beispielsweise unbekannte oder komplexe Beziehungen, die sich schwer durch explizite Gleichungen abbilden lassen erlernt werden, während die physikalische Konsistenz und die interpretierbaren Grundlagen des White-Box-Modells erhalten bleiben und damit zur Erklärbarkeit des Gesamtmodells beitragen. Die möglichen Anknüpfungspunkte lassen sich aus den vier Schritten der White-Box-Modellierung (Kapitel 2.2) ableiten und sind in Abb. 2.7 links dargestellt. Im Folgenden wird für die vier Schritte der White-Box-Modellierung erläutert, wie Black-Box-Elemente diese Schritt ergänzen können.

White-Box-Modell

Die Ergänzung eines White-Box-Modells durch Black-Box-Elemente kann beispielsweise in Form von Ersatzmodellen (Surrogate Models) oder der Datenassimilation erfolgen. Ersatzmodelle dienen dazu, komplexe und detaillierte White-Box-Modelle zu approximieren, um Rechenkosten zu sparen. Es lassen sich makroskopische Verhaltensweisen, Muster und Trends analysieren, ohne die vollständige Komplexität des ursprünglichen Modells zu berücksichtigen. Durch Ersatzmodelle können die Regionen identifiziert werden, die mittels hochgenauem White-Box-Modell detaillierter betrachtet werden sollten. Die Grundlage dieser Modelle können reale Beobachtungsdaten (z. B. Experimente) oder synthetisch generierte Daten aus hochgenauen White-Box-Simulationen sein. Bei den in Kapitel 2.2.1.2 vorgestellten phänomenologischen Gleichungen handelt es sich streng genommen ebenfalls um Ersatzmodelle, die sich durch umfassende Überprüfungen als hinreichend zuverlässig und physikalisch tragfähig erwiesen haben und heute als Grundgleichungen gelten. [7, 75, 82, 91]

Eine Möglichkeit zur Generierung eines Ersatzmodells ist die Reduktion der Modellordnung (Model Order Reduction). Diese Technik reduziert systematisch die Modellordnung und damit deren Komplexität, indem sie eine vereinfachte Version des Modells entwickelt, die das dynamische Verhalten des ursprüngliche Modells annähern soll, und kann daher als kontrollierter Verlust an Genauigkeit interpretiert werden. Dies kann klassisch projektionsbasiert oder mit ML-Methoden erfolgen. Ziel ist, ein reduziertes Modell, das dynamisch äquivalent bleibt und in umfangreichen Analysen oder Optimierungsprozessen mit erheblich geringeren Rechenzeiten eingesetzt werden kann. [82, 104, 120]

Eine weitere Möglichkeit zur Integration von Black-Box-Ansätzen ist die Datenassimilation. Dabei handelt es sich um einen iterativen Prozess, bei dem Beobachtungsdaten mit

Modellvorhersagen kombiniert werden, um die Zustandsvariablen oder Parameter eines Systems an die Realität anzugleichen. [57]

Systemparameter

Bei der Identifizierung der Systemparameter spielen Black-Box-Ansätze insbesondere dann eine Rolle, wenn herkömmliche Methoden zur Parameteridentifikation unwirtschaftlich oder nicht anwendbar sind. Moderne White-Box-Modelle umfassen oft eine Vielzahl von Parametern, deren Schätzung essentiell für genaue Simulationsergebnisse ist. Klassische Optimierungsverfahren wie Maximum-Likelihood-Schätzung oder Markov-Chain-Monte-Carlo stoßen bei hochdimensionalen Systemen oft an ihre rechnerischen Grenzen. Black-Box-Methoden können diese Prozesse entlasten, indem sie aus vergleichsweise wenigen Simulationen charakteristische Systemreaktionen extrahieren und daraus Rückschlüsse auf Parameterabhängigkeiten ermöglichen. Insbesondere Surrogate-Optimierungsverfahren, die rechenintensive Simulationen durch schnell auswertbare Ersatzmodelle approximieren, ermöglichen eine dateneffiziente Exploration des Parameterraums. Dadurch lassen sich Suchräume eingrenzen oder strukturelle Sensitivitäten aufdecken, ohne jede mögliche Parameterkombination explizit simulieren zu müssen. Ergänzend erlauben neuronale DGLs die schnelle Approximation von Wahrscheinlichkeitsdichten für Parameter, was insbesondere bei probabilistischen Modellierungen oder Unsicherheitsanalysen von Vorteil ist. [7, 37, 57, 58, 62, 82, 91, 101]

Numerische Methoden

Auch wenn ein White-Box-Modell, etwa in Form einer DGL, vollständig bekannt ist, kann die numerische Lösung mit klassischen Verfahren wie Finite-Differenzen- oder Finite-Elemente-Verfahren sehr rechenintensiv sein. Black-Box-Ansätze bieten hier eine effiziente Alternative, indem sie die Lösung der DGL direkt approximieren und damit den numerischen Aufwand deutlich reduzieren. NN und andere ML-Modelle können entweder als eigenständige Löser eingesetzt werden oder klassische numerische Verfahren ergänzen, etwa indem sie schwer zu modellierende Anteile berücksichtigen oder lokale Korrekturen vornehmen. Dies ist besonders vorteilhaft, wenn das zugrunde liegende physikalische Modell nur teilweise bekannt ist oder wenn Beobachtungsdaten genutzt werden müssen, um systematische Abweichungen auszugleichen. Die Approximation kann dabei sowohl vollständig datengetrieben erfolgen oder explizit die aus der DGL abgeleiteten algebraischen Bedingungen berücksichtigen. [75, 91, 120]

Simulationsdaten

Die automatische Auswertung umfangreicher, durch ein White-Box-Modell generierter Simulationsdaten mit ML-Algorithmen erleichtert die Erkennung von Mustern, Trends und Anomalien, die mit herkömmlichen Methoden schwer detektierbar sind. Insbesondere in technisch-wissenschaftlichen Anwendungen helfen ML-Ansätze dabei, den Analyseaufwand zu verringern, etwa durch Dimensionsreduktion, Clustering oder effiziente Datenverwaltung. [74, 91]

2.4.3 Dark-Gray-Box-Modellierung

Dark-Gray-Box-Modelle basieren auf einem Black-Box-Modell, welches durch Expertenwissen (White-Box) angereichert wird. Dadurch kann beispielsweise die Generalisierungsfähigkeit oder die Extrapolationsfähigkeit gesteigert, und physikalische Konsistenz gewährleistet werden. Die möglichen Anknüpfungspunkte sind in Abb. 2.7 rechts dargestellt. Im Folgenden wird für die vier Schritte der Black-Box-Modellierung erläutert, wie White-Box-Elemente diese Schritte ergänzen können. [91, 92, 104]

Messdaten

Der erste Schritt eines ML-Prozesses ist die Bereitstellung geeigneter Trainingsdaten auf Basis vorhandener Messdaten. Um optimale Ergebnisse zu erzielen, kann Expertenwissen dabei auf mehreren Ebenen eingesetzt werden. [91, 120]

Besonders in datenarmen Umgebungen bietet die Generierung von synthetischen Daten durch Simulationen eine effektive Möglichkeit, realistische und kontrollierte Szenarien nachzustellen.

Im Feature-Engineering können Experten definieren, welche Merkmale (Features) in den Daten besonders relevant sind. Beispielsweise können physikalische Parameter wie Geschwindigkeit, Temperatur oder Druck als wichtige Eingangsgrößen hervorgehoben, oder Eigenschaften wie Periodizität berücksichtigt werden. [60, 129]

Bei der Dataaugmentation kann Expertenwissen verwendet werden, um künstliche Variationen der verfügbaren Daten zu erzeugen. Beispiele hierfür sind zufällige Variationen innerhalb realistischer Grenzen oder die Anwendung physikalischer Symmetrieeigenschaften, wie z. B. Rotations- oder Verschiebungsinvarianzen. [56, 92, 129]

Vorverarbeitungsschritte, die auf Expertenwissen basieren, können bei der Datenbereinigung helfen, und dabei Fehler oder irrelevante Muster aus den Daten zu entfernen. [129]

Modellstruktur

Die Integration von Expertenwissen in die Architektur eines Modells ist ein entscheidender Aspekt, um die Interpretierbarkeit, Plausibilität und physikalische Konsistenz der Ergebnisse sicherzustellen. Die Modellstruktur ist ein zentraler Bestandteil des ML, da sie die Art und Weise vorgibt, wie Daten verarbeitet und Vorhersagen getroffen werden. Domänenspezifische Kenntnisse können auf unterschiedliche Arten integriert werden. [56, 91, 92]

Ein Beispiel ist die Integration von Rekurrenten Neuronalen Netzen (RNN), die insbesondere dann nützlich sind, wenn es um zeitabhängige Prozesse oder serielle Daten geht. Solche Netzwerke zeichnen sich dadurch aus, dass sie Informationen aus vorherigen Zeitschritten speichern können, was sie beispielsweise für die Modellierung dynamischer Systeme besonders geeignet macht. [92, 104, 120, 129]

Ergänzend zur Standardarchitektur können logische oder physikalische Randbedingungen direkt in die Modellstruktur integriert werden. Zum Beispiel können bei der Verwendung von NNs oder RNNs spezielle Modellschichten entworfen werden, um Symmetrieeigenschaften von physikalischen Größen zu berücksichtigen, spezifische mathematische Beziehungen zwischen Variablen explizit abzubilden, oder systemeigene Nichtlinearitäten zu erfassen. [92]

Neben neuronalen Architekturen stellen auch bibliotheksbasierte Modellidentifikationen wie SINDy (siehe Kapitel 2.4.1.2) oder die Extended Dynami Mode Decomposition Ansätze zur Integration von Expertenwissen dar. In diesen Verfahren wird die Modellstruktur durch eine vorab definierte Bibliothek von Funktionen festgelegt, welche auf physikalischem Vorwissen oder bekannten Nichtlinearitäten basiert. Die eigentliche Modellidentifikation erfolgt anschließend durch die datengetriebene Auswahl relevanter Terme aus dieser Bibliothek, wodurch explizite Gleichungen zur Beschreibung des betrachteten dynamischen Systems abgeleitet werden können. [16, 17, 121]

Training

Beim Training von Dark-Gray-Box-Modellen können domänenspezifische Mechanismen wie eine Initialisierung durch Simulationsdaten (Vortraining) oder die Implementierung von spezialisierten Verlustfunktionen genutzt werden. Durch die Einbindung physikalischer Gesetze oder Randbedingungen in die Verlustfunktion wird nicht nur der Fehler minimiert, sondern auch die physikalische Konsistenz der Ergebnisse gewährleistet. [56, 91, 92, 104, 120]

Ein prominentes Beispiel stellen PINNs dar (siehe Kapitel 2.4.1.1), bei denen die zugrunde liegenden DGLs sowie Nebenbedingungen explizit, meist additiv in die Verlustfunktion integriert werden. Dadurch erfolgt das Training nicht ausschließlich datengetrieben, sondern unter direkter Berücksichtigung des bekannten physikalischen Modells, was insbesondere bei begrenzter Datenverfügbarkeit oder verrauschten Messungen von Vorteil ist. [86]

Die Anpassung von Hyperparametern mithilfe von Expertenwissen kann dazu beitragen, dass Modelle für spezifische Anwendungen optimiert werden. [92]

Einen weiteren Ansatz für die Nutzung von Expertenwissen während des Trainings ist das Transfer-Learning: Hierbei wird ein Modell zuerst auf einem großen, aber generischen Datensatz (z. B. aus White-Box-Simulationen) vortrainiert und anschließend auf spezifische Messdaten angepasst. Dies spart Rechenressourcen und verringert den Bedarf an umfangreichen, teuren Messungen. [104, 120]

Black-Box-Modell

Black-Box-Modelle profitieren erheblich von der Validierung durch Expertenwissen. Experten können nicht nur physikalische oder logische Plausibilitätskontrollen durchführen, sondern auch spezifische Randbedingungen definieren, die das Modell erfüllen muss [91, 92, 104]. Diese Form der Validierung steigert die Vertrauenswürdigkeit des Modells, überführt es jedoch nicht zwingend in ein Dark-Gray-Box-Modell.

2.4.4 Hybride Modellierung

Wenn beide Modellanteile, White- und Black-Box, für die Auswertung des Gesamtmodells unverzichtbar sind handelt es sich um ein hybrides Modell. Allgemein bedeutet der Begriff *hybrid* in der Technik, dass zwei Technologien miteinander kombiniert werden. Abhängig von der Disziplin kann es sich dabei um ganz unterschiedliche Methoden handeln. [64, 80, 102, 109, 113]

In dieser Arbeit werden hybride Modelle als eine Kombination von White-Box-Modell mit Black-Box-Modell verstanden. Während sich die Erklärbarkeit des White-Box-Modells auf das hybride Modell überträgt lässt sich die Genauigkeit und Recheneffizienz durch das Black-Box-Modell steigern.

2.4.4.1 Hybride Modellstruktur

Zwei Modelle lassen sich grundlegend auf drei unterschiedliche Arten anordnen, siehe Abb. 2.9: Sie können wie in a) parallel angeordnet sein, wobei noch keine Aussage über die Art der Verknüpfung der Teilmodelle getroffen ist, oder sie können wie in b) und c) in Reihe bzw. seriell angeordnet sein, wobei die Reihenfolge im Allgemeinen entscheidend und nicht austauschbar ist. [4, 44, 45, 90, 102, 105, 109, 113]

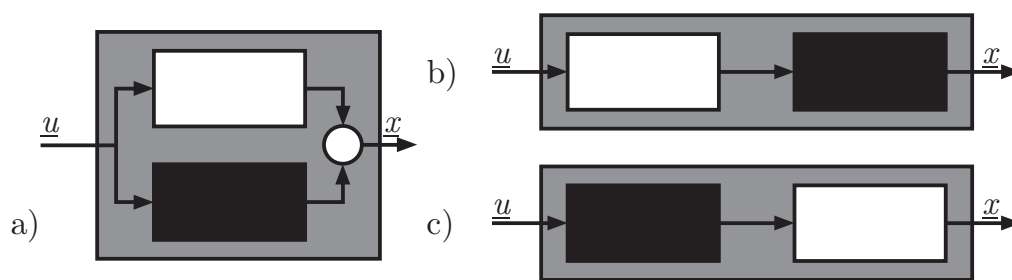


Abbildung 2.9: Strukturen hybrider Modelle: a) Parallelschaltung, b) physikbasierte Vorverarbeitung (seriell), und c) Feature Learning (seriell)

Parallelschaltung

Bei parallelen hybriden Modellen werden White-Box- und Black-Box-Modell unabhängig voneinander ausgewertet und die Ergebnisse werden anschließend zu einem gemeinsamen Ausgang zusammengeführt. Diese Struktur eignet sich besonders, wenn bereits ein White-Box-Modell vorhanden ist, dieses bestimmte Phänomene jedoch nur unzureichend abbildet. Die parallele Anordnung ermöglicht es, die physikalische Grundstruktur beizubehalten und zugleich systematische Abweichungen gezielt zu korrigieren. Am häufigsten erfolgt die Kopplung durch Addition, während gewichtete Kombinationen oder Multiplikationen seltener, aber ebenfalls möglich sind. [90, 109]

Addition Häufig findet die Verknüpfung bei paralleler Anordnung in Form von Addition statt. Das White-Box-Modell beschreibt die Dynamik des Systems auf Grundlage physikalischer Gesetzmäßigkeiten, weist jedoch Vereinfachungen oder nicht modellierte Phänomene auf. Das Black-Box-Modell erfasst die daraus entstehenden Diskrepanzen und ergänzt das White-Box-Modell um diese fehlenden Anteile. Das Erhalten der physikalischen Struktur führt in vielen Fällen zu einem stabileren Verhalten außerhalb des Trainingsbereichs. Dadurch, dass neue Daten genutzt werden können, um ausschließlich den Black-Box-Anteil zu aktualisieren, ohne das physikalische Modell verändern zu müssen, wird sowohl das Prototyping als auch die spätere Pflege des Modells erleichtert. Darüber hinaus beeinflusst die Qualität des White-Box-Modells unmittelbar die

Diskrepanz-Anteile, was bei unpassenden strukturellen Annahmen die Qualität des Gesamtmodells begrenzen kann. Insbesondere ist eine Reduktion des Lernaufwands nur dann zu erwarten, wenn das White-Box-Modell einen wesentlichen Anteil der Systemstruktur korrekt abbildet und die verbleibende Diskrepanz im Vergleich eine geringere funktionale Komplexität aufweist. Ist dies nicht gegeben, kann die Approximation der Diskrepanz eine vergleichbare Datenmenge erfordern wie ein reiner Black-Box-Ansatz, sodass kein impliziter Vorteil hinsichtlich des Trainingsaufwands besteht. [32, 90, 109] In Kapitel 2.5 werden hybride Modelle auf Basis von Diskrepanzen detaillierter beschrieben.

Gewichtung Eine weitere Möglichkeit, die sich bei der parallelen Anordnung von White- und Black-Box-Modell bietet, ist die Gewichtung [52, 54, 67, 109, 110]. Alle Modelle haben einen eingeschränkten Geltungsbereich. Bei White-Box-Modellen kann dies an zugrundeliegenden, vereinfachenden Annahmen liegen, bei Black-Box-Modellen sind in der Regel die zur Verfügung stehenden Messungen ursächlich. Durch eine geeignete Gewichtung lassen sich ihre jeweiligen Stärken kombinieren. Um über einen großen Geltungsbereich hinweg gute Ergebnisse erzielen zu können werden mehrere lokale Modelle mit jeweils eingeschränkten Geltungsbereichen über Gewichtungsfunktionen zu einem globalen Modell zusammengefasst. Die Gewichtungsfunktionen sind in der Regel kontinuierlich und nehmen große Werte an, wenn sich der auszuwertende Punkt im, oder nah am Geltungsbereich des zugehörigen lokalen Modells befindet, und kleinere Werte, wenn der Abstand von diesem Bereich zunimmt. [53, 54]

Ein anschauliches Beispiel für den Einsatz findet sich in [54] im Kontext der Simulation eines pH-Neutralisationstanks. Dort werden drei verschiedene Modellansätze kombiniert: Ein White-Box-Modell, das auf physikalisch-chemischen Grundlagen basiert und gute Vorhersagen im Bereich hoher und niedriger pH-Werte liefert, jedoch im mittleren pH-Bereich Schwächen aufweist. Ein Black-Box-Modell, welches im mittleren pH-Bereich, wo die meisten Messdaten vorliegen, sehr gute Ergebnisse erzielt, bei der Extrapolation zu extremen pH-Werten jedoch versagt. Sowie ein weiteres White-Box-Modell mit vereinfachten Annahmen, das über den gesamten Betriebsbereich eine akzeptable, wenn auch nicht optimale Genauigkeit aufweist. Durch die Gewichtung dieser drei Teilmodelle entsteht ein globales Modell, das die jeweiligen Stärken der Einzelmodelle nutzt: Im mittleren pH-Bereich dominiert das Black-Box-Modell mit seiner hohen Präzision, während bei hohen und niedrigen pH-Werten zunehmend auf die White-Box-Modelle zurückgegriffen wird.

Multiplikation Neben der Superposition und der Addition der Modellausgänge bei hybriden Modellen besteht eine weitere Möglichkeit darin, die Ausgänge der White- und Black-Box-Teilmodelle zu multiplizieren. Dieser Ansatz wird in der Literatur nur selten genutzt [109]. Ein Beispiel für den Einsatz findet sich in [77]. Ein häufiges Problem bei der Modellierung chemischer Reaktoren ist, dass die Reaktionsraten nicht vollständig bekannt sind. Um dieses Problem zu adressieren, wird in [9] das Konzept des „Minimal Kinetic Modeling“ entwickelt, bei dem die Reaktionsraten in bekannte und unbekannte Anteile zerlegt werden. In [77] werden die bekannten kinetischen Funktionen, die auf physikalisch-chemischen Grundlagen basieren, mit datenbasierten Termen multipliziert, welche die unbekannten kinetischen Phänomene abbilden. Durch diese multiplikative

Verknüpfung entsteht eine hybride Modellstruktur, die theoretisches Prozesswissen mit datengetriebenen Korrekturen kombiniert.

Serielle Modelle

Bei der seriellen Anordnung kann im Allgemeinen davon ausgegangen werden, dass sich die Reihenfolge der Modelle nicht austauschen lässt, wodurch es zwei Fälle gibt: Wird zunächst das White-Box-Modell ausgewertet und dessen Ausgänge dienen als Eingang für das Black-Box-Modell wird auch von *physikbasierter Vorverarbeitung* gesprochen. Wird umgekehrt erst das Black-Box-Modell ausgewertet und dessen Ausgänge dienen als Eingang für das White-Box-Modell spricht man auch von *Feature Learning*. [18, 90, 102, 119]

Einige Quellen sehen *physikalische Nebenbedingungen* als dritte Alternative. Da hier das Gesamtmodell jedoch nur noch als Black-Box-Modell vorliegt wird dies im Kontext dieser Arbeit als Gray-Box-Modell, aber nicht als hybrides Modell verstanden (siehe Kapitel 2.4.3). [64, 90, 119]

Physikbasierte Vorverarbeitung Bei der physikasierten Vorverarbeitung wird erst das White-Box-Modell ausgewertet und im Anschluss das Black-Box-Modell, dies ist in Abb. 2.9 b) dargestellt. Auf diese Weise dient das White-Box-Modell als physikalisch begründeter induktiver Bias, der bereits die für die Vorhersage relevanten Merkmale bestimmt und damit die Dimension des Eingangsraums reduzieren kann. Dies steigert die Effizienz des Black-Box-Modells und vereinfacht seine Struktur, da die Trainingsdaten häufig weniger Rauschen beinhalten und weniger irrelevante Anteile gelernt werden müssen. Dadurch steigt die Robustheit, da das Black-Box-Modell nicht erst selbst aus den Rohdaten herausarbeiten muss, welche Merkmale relevant sind. Zugleich profitiert die Interpretierbarkeit, da die datenbasierte Komponente direkt auf physikalisch motivierten Größen operiert. [56, 85, 90, 102]

In datenreichen Situationen kann es jedoch vorkommen, dass das White-Box-Modell nicht alle für die Vorhersage wichtigen Rohmerkmale abbildet. In solchen Fällen kann ein reines Black-Box-Modell im Vorteil sein, da es nicht durch die physikalische Transformation begrenzt wird. [90, 102, 109]

Ein praktisches Anwendungsbeispiel findet sich in [75] bei der Berechnung der Reibarbeit über die Reifenbreite. Klassische, meist FE-basierte Ansätze sind für diese Aufgabe zu rechenintensiv. Daher wird zunächst ein einfaches White-Box-Modell eingesetzt, welches die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge approximiert und relevante Zwischengrößen berechnet. Auf Basis dieser physikalisch motivierten Merkmale wird anschließend mittels Black-Box-Modell die finale Vorhersage der Reibarbeit vorgenommen. Dieser zweistufige Ansatz kombiniert die Effizienz eines reduzierten physikalischen Modells mit der Flexibilität datengetriebener Methoden und ermöglicht deutlich schnellere Berechnungen bei gleichzeitig hoher Genauigkeit.

Feature Learning Beim sogenannten Feature Learning wird zunächst das Black-Box-Modell ausgewertet und im Anschluss das White-Box-Modell, siehe Abb. 2.9 c). Dieser Aufbau eignet sich insbesondere dann, wenn das White-Box-Modell Eingangsgrößen benötigt, die nicht oder nur ungenau messbar oder strukturell unbekannt sind. Das Black-

Box-Modell übernimmt hierbei die Aufgabe, diese fehlenden Merkmale zu schätzen. Die dabei entstehenden Größen besitzen in der Regel eine physikalische Interpretation, was die Nachvollziehbarkeit verbessert und den Anwendungsbereich des Gesamtsystems erweitert. Durch diese Ergänzung kann das White-Box-Modell auch unter unvollständiger Sensorik ausgewertet werden, wodurch das Black-Box-Modell als virtueller Sensor aufgefasst werden kann. Da die finalen Vorhersagen weiterhin den bekannten physikalischen Grundgesetzen folgen, bleibt die Zuverlässigkeit hoch, während die Genauigkeit durch die datenbasierte Rekonstruktion fehlender Eingangsgrößen deutlich gesteigert werden kann. [34, 90, 109, 119]

Ein Beispiel für die Anwendung findet sich bei der Modellierung (bio)chemischer Prozesse, die typischerweise auf makroskopischen Bilanzgleichungen basieren [18]. Solche Bilanzgleichungen enthalten verschiedene Ratenausdrücke. Während einige Terme, wie Ein- und Ausgangsströme, direkt bekannt sind, weisen Reaktionskinetiken oft komplexe nichtlineare Zusammenhänge auf, deren White-Box-Modellierung tiefgehendes Expertenwissen erfordert. Anstatt diese aus Grundgleichungen herzuleiten, können die kinetischen Beziehungen durch ein Black-Box-Modell approximiert werden. Die vorhergesagten Ratenausdrücke werden anschließend in die Bilanzgleichungen eingesetzt. So bleibt die physikalisch fundierte Struktur erhalten, während unbekannte Terme datengetrieben modelliert werden.

Modulare Modelle

Darüber hinaus bietet sich in großen Gesamtmodellen die Möglichkeit, einzelne Komponenten oder Module auf unterschiedliche Arten zu modellieren. Dieser Ansatz passt weder vollständig in die serielle noch in die parallele Struktur und kann daher als eigene Kategorie betrachtet werden. [113]

Der modulare Ansatz bringt mehrere Vorteile mit sich: Durch die Modularisierung erhält das Gesamtsystem eine klare Struktur, was die Erklärbarkeit und Transparenz fördert. Zudem können Messungen direkt auf Komponentenebene durchgeführt werden, was den Messaufwand senkt, den Modellen eine höhere Genauigkeit verleiht, und gleichzeitig eine Wiederverwendbarkeit als Module in anderen Gesamtsystemen ermöglicht. [35, 67]

2.4.4.2 Prognose mit hybriden Modellen

Neben dem strukturellen Aufbau lassen sich hybride Modelle auch nach der Art der Vorhersage einteilen. Es gibt zum Einen die Modelle, bei denen Ein- und Ausgang für den gleichen Zeitschritt erfolgen, also ohne Zustandsfortschreitung, siehe Abb. 2.10 a). Des Weiteren gibt es die Modelle mit Zustandsfortschreitung, wo auf Basis des Zustandes zu t_n der Zustand zu t_{n+1} (Ein-Schritt-Vorhersage) oder sogar t_{n+m} (Mehrschritt-Vorhersage) berechnet wird. [12, 95, 99, 109, 110]

2.4.5 Zusammenfassung der Gray-Box-Modellierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Gray-Box-Ansätze zeigen, dass die Kombination physikalischer White-Box-Modellstrukturen mit datengetriebenen Black-Box-Anteilen auf

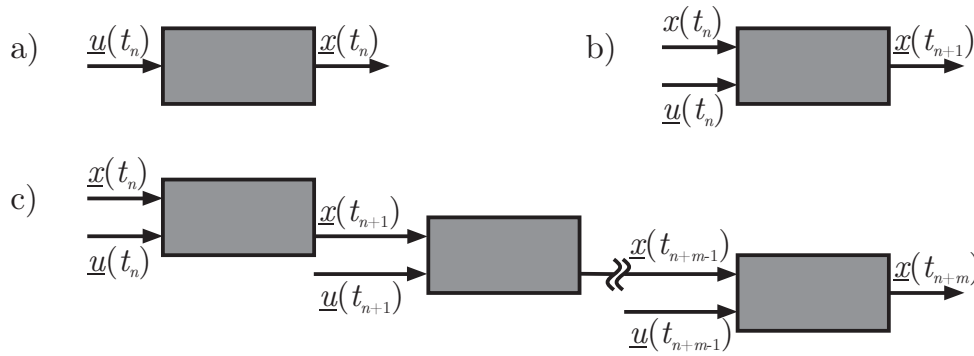


Abbildung 2.10: a) Vorhersage ohne Zustandsfortschreitung, b) als Ein-Schritt-Vorhersage, und c) als Mehrschritt-Vorhersage

unterschiedliche Weise realisiert werden kann. Abhängig davon, ob White-Box-Modelle erweitert, Black-Box-Modelle strukturiert oder beide Ansätze gleichberechtigt gekoppelt werden, ergeben sich unterschiedliche Schwerpunkte hinsichtlich Modellkomplexität, Datenbedarf und Interpretierbarkeit.

Light-Gray-Box-Ansätze erlauben es, bestehende White-Box-Modelle gezielt zu ergänzen, etwa um schwer modellierbare Effekte oder systematische Diskrepanzen abzubilden. Dadurch kann der Modellierungsaufwand reduziert werden, ohne die physikalische Struktur des Gesamtsystems aufzugeben. Dark-Gray-Box-Modelle verfolgen den umgekehrten Weg, indem Black-Box-Modelle durch physikalische Nebenbedingungen, oder Strukturannahmen stabilisiert werden und ihre Interpretierbarkeit gesteigert wird. Hybride Modelle schließlich koppeln White-Box- und Black-Box-Komponenten explizit, wodurch eine flexible Anpassung einzelner Modellteile möglich wird.

Gemeinsam ist allen Ansätzen, dass sie eine gezielte Reduktion von Modellabweichungen und Komplexität ermöglichen, ohne vollständig auf physikalische Interpretierbarkeit oder datenbasierte Flexibilität zu verzichten. Ein weiterer zentraler Vorteil liegt in der erhöhten Modularität vieler Gray-Box- und hybrider Modelle. Insbesondere bei hybriden Modellen erleichtert die klare Trennung zwischen physikalisch begründeten White-Box- und datengetriebenen Black-Box-Anteilen die Erklärbarkeit, Validierung und Weiterentwicklung der Modelle. Zudem erlaubt die modulare Struktur eine flexible Anpassung an neue Daten oder veränderte Systemanforderungen, ohne das gesamte Modell neu aufbauen zu müssen. [82]

Im Folgenden Kapitel soll eine spezielle Klasse der hybriden Ansätze näher beleuchtet werden, bei der Black-Box-Komponenten nicht zur freien Erweiterung oder Strukturierung von Teilmodellen eingesetzt werden, sondern gezielt zur Abbildung verbleibender Abweichungen zwischen White-Box-Modell und Systemverhalten dienen. Diese sogenannten diskrepanzbasierten Ansätze verstehen Modellabweichungen explizit als eigenständige Modellanteile, die das White-Box-Modell ergänzen, ohne dessen Grundstruktur zu verändern.

2.5 Hybride Modellierung auf Basis von Diskrepanzen

Diskrepanzbasierte hybride Modelle zielen darauf ab, systematische Abweichungen zwischen White-Box-Modellen und realem Systemverhalten zu erfassen und zu korrigieren. Durch die Modellierung solcher Diskrepanzen lässt sich die Vorhersagegenauigkeit steigern, ohne die physikalische Struktur des White-Box-Modells aufzugeben. Zusätzlich bleibt die Interpretierbarkeit bestehen, da die bekannten Modellanteile erhalten bleiben und die Black-Box-Komponenten lediglich die fehlenden oder unzureichend abgebildeten Effekte ergänzen.

Besonders im Bereich der Verfahrenstechnik und auch der Fluidodynamik sind hybride Modelle auf Basis von Diskrepanzen bereits seit den 90er Jahren verbreitet [12, 32, 39, 85, 113]. In den vergangenen Jahren werden sie zunehmend auf Systeme im Bereich der Geowissenschaften [5, 30, 117] und auch auf dynamische Systeme [28, 55, 64, 72, 126] angewandt.

In [64] wird die Korrektur von Modellabweichungen durch Diskrepanzen untersucht, wobei verschiedene grundlegende Unterscheidungen getroffen werden:

Addition – Verkettungen:

Additive Diskrepanzen werden als Ergänzung zu einem vertrauenswürdigen White-Box-Modell betrachtet. Sie steigern die Interpretierbarkeit, da die physikalische Struktur erhalten bleibt und ausschließlich die modellierten Abweichungen additiv kompensiert werden. Die Idee ist eng verwandt mit Boosting-Ansätzen, bei denen ein schwaches Modell durch schrittweise Ergänzungen verbessert wird.

Hybride Modelle auf Basis von Verkettungen finden nur Anwendung in Szenarien mit einfachen nicht-additiven Diskrepanzen wie beispielsweise Koordinatentransformationen. Diese Art Modell kann mit dem in Kapitel 2.3.1.5 vorgestellten Bagging verglichen werden.

In dieser Arbeit werden ausschließlich additive Diskrepanzen betrachtet.

Kontinuierlich – Diskret:

Kontinuierliche Verfahren modellieren Diskrepanzen auf der Ableitungsebene. Mit der Systemgleichung (2.3) können durch

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \Delta \dot{\underline{x}}$$

Korrekturen zu jedem beliebigen Zeitpunkt ausgewertet werden, was insbesondere bei unregelmäßig abgetasteten Zeitreihen vorteilhaft ist. Für diese Ansätze müssen jedoch zeitliche Ableitungen der Messdaten in ausreichender Qualität vorliegen und es muss Zugriff auf die zu lösenden Gleichungen bestehen [30]. Diese Art von Modellen findet sich beispielsweise in [46, 55, 126].

Diskrete Verfahren arbeiten auf der Zustandsebene über

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{\Phi}^{t_{n+1}, t_n} \underline{x}_n + \Delta \underline{x}_n.$$

Die Korrektur erfolgt schrittweise und ist robust gegenüber größeren Modellabweichungen. Die Methoden sind einfach zu implementieren und nicht-invasiv, da kein direkter Zugriff auf die Bewegungsgleichungen erforderlich ist. Das hybride Modell kann jedoch nur zu den diskreten Zeitpunkten ausgewertet werden und längere Rechenzeiten, insbesondere bei langen Integrationshorizonten, sind zu erwarten [126].

In [19, 30, 117, 124] werde diese Art von hybridem Modell bereits angewandt.

Vollständig beobachtbar – Teilweise beobachtbar:

Es wird zwischen vollständiger Beobachtbarkeit, also in Bezug auf Gleichung (2.4) gilt $\underline{y} = \underline{x}$, und teilweiser Beobachtbarkeit mit $\mathbb{R}^n \ni \underline{x} \neq \underline{y} \in \mathbb{R}^m$ (und insbesondere $n < m$) unterschieden. Unter der Voraussetzung, dass die Abbildung $\underline{g}$ eine lineare Funktion von $\underline{x}$ ist lässt sich mit

$$\underline{x} = \underline{g}^{-1}(\underline{y}) \quad \text{und} \quad \dot{\underline{y}} = \frac{d}{dt}\underline{g}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}}$$

die Zustandsgleichung (2.3) in die Form

$$\dot{\underline{y}} = \underline{g}(\underbrace{f(\underbrace{\underline{g}^{-1}(\underline{y})}_{\underline{x}}, \underline{u}, \underline{s}, t)}_{\dot{\underline{x}}}).$$

überführen, welche unabhängig von $\underline{x}$ ist [46, 64]. Hier können dann die gleichen Verfahren wie bei vollständiger Beobachtbarkeit angewandt werden.

Ohne Gedächtnis – Mit Gedächtnis:

Diskrepanzen können ausschließlich vom aktuellen Zustand abhängen (mit Markow-Eigenschaft) oder zusätzlich vergangene Zustände einbeziehen (ohne Markow-Eigenschaft).

Die in [64] vorgestellten Ergebnisse basieren auf simulierten, synthetischen Daten. Betrachtet werden unter anderem Rauschen sowie teilweise beobachtbare Zustände. Methodisch liegt der Fokus auf NNs. Unter Verwendung der Bewertungsmetriken Trajektorienvaliditätszeit, invariante Verteilung und Autokorrelation werden Untersuchungen hinsichtlich der Zeitschrittweite, der Länge der Trainingsdaten und der Anzahl der zufälligen Merkmalsfunktionen durchgeführt.

In [28] wird der Ansatz der Diskrepanzmodellierung erweitert, indem die Diskrepanzen selber systematisch klassifiziert werden.

Deterministische Abweichungen – Systematische Residuen:

Deterministische Diskrepanzen entstehen durch fehlende oder ungenau modellierte physikalische Effekte. Diese Abweichungen treten typischerweise kontinuierlich auf und können als additive Terme in den DGLs modelliert werden. Ziel ist es, diese modellierten Abweichungen als explizite dynamische Anteile in das physikalische Modell zu integrieren, sodass bekannte Physik und datenbasierte Korrekturen klar voneinander abgegrenzt bleiben. Diese Sichtweise lässt sich unmittelbar der kontinuierlichen Diskrepanzmodellierung nach [64] zuordnen.

Systematische Residuen entstehen durch Messfehler, Beobachtungsunsicherheiten oder andere nicht modellierte Effekte und werden auf der Zustandsebene betrachtet. Sie enthalten sowohl stochastische Anteile (z. B. Rauschen) als auch systematische, strukturelle Abweichungen. Diese Sichtweise lässt sich unmittelbar der diskreten Diskrepanzmodellierung nach [64] zuordnen.

Die Ergebnisse in [28] basieren auf synthetischen Messdaten von Systemen mit bis zu drei Zustandsgrößen. Es wird eine kleine Auswahl von Black- und Dark-Gray-Box-Modellen berücksichtigt (GPR, DMD, SINDy, NN).

Bei den Black-Box-Modellen wird sich in den meisten Quellen auf NNs [28, 64, 72] oder auf das SINDy Verfahren [28, 55] beschränkt, aber auch GPR-Modelle [28] finden Anwendung. In dieser Arbeit wird eine solche Einschränkung vorab nicht getroffen, unter Zuhilfenahme der Regression Learner App wird in jeder Anwendung einzeln entschieden, welches Black-Box-Verfahren das geeignete ist.

Das folgende Kapitel 3 widmet sich der methodischen Entwicklung entsprechender Verfahren. Dabei werden sowohl kontinuierliche als auch diskrete Methoden für vollständig und teilweise beobachtbare Systeme vorgestellt. Die zunächst auf Systemebene hergeleiteten Verfahren (mit Zustandsfortschreitung) werden anschließend für Kraftkomponenten (ohne Zustandsfortschreitung) abgeleitet. In Kapitel 4 erfolgt schließlich die Validierung der vorgestellten Methoden anhand konkreter Anwendungsbeispiele.

3 Methoden

Dieses Kapitel behandelt hybride Modellierungsmethoden auf Basis von Diskrepanzen, die primär auf Systemebene entwickelt wurden, jedoch auf Komponentenebene übertragbar sind. Es werden fünf additive Methoden vorgestellt, die sich in diskrete und kontinuierliche Ansätze unterteilen. Drei Verfahren arbeiten kontinuierlich (Kapitel 3.1), zwei diskret (Kapitel 3.2). Innerhalb beider Kategorien ist jeweils ein Verfahren für teilweise beobachtbare Systeme geeignet, während die anderen bei vollständiger Beobachtbarkeit anwendbar sind. Tabelle 3.1 gibt einen Überblick über die behandelten Methoden und ihre Einordnung. Abschließend wird in Kapitel 3.3 gezeigt, wie dieses Vorgehen auf Komponentenebene übertragen werden kann.

Tabelle 3.1: Einteilung der in diesem Kapitel betrachteten Verfahren

	Vollständig beobachtbar	Teilweise beobachtbar
Kontinuierlich	$\Delta \underline{h}$ (Kapitel 3.1.1)	$\Delta \underline{y}$ (Kapitel 3.1.3)
	$\Delta \underline{\dot{x}}$ (Kapitel 3.1.2)	
Diskret	$\Delta \underline{x}$ (Kapitel 3.2.1)	$\Delta \underline{y}$ (Kapitel 3.2.2)

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf Systemen, die wie in Abb. 3.1 aufgebaut sind. Systemeingang $\underline{u}$ und Störgrößenvektor $\underline{s}$ wirken in der Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{s}, t).$$

Es wird davon ausgegangen, dass alle zur Modellierung notwendigen abgeleiteten Größen (beispielsweise die zeitliche Ableitung einer Weganregung) bereits in den Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{s}$ enthalten sind.

Die Ausgangsgleichung wird, wie häufig auch in der Realität vorzufinden ist, durch

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \tag{3.1}$$

realisiert. Die Matrix $\underline{C}$ ist dabei konstant, muss aber nicht quadratisch oder invertierbar sein.

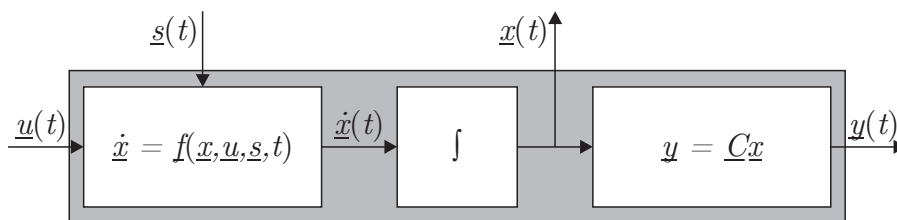


Abbildung 3.1: Aufbau der in dieser Arbeit betrachteten Systeme

Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Darstellung der Fall einer Translation betrachtet, bei der Verschiebungen und Kräfte im Vordergrund stehen. Rotationen lassen sich jedoch auf die gleiche Weise behandeln. Die Anwendungsbeispiele in Kapitel 4 demonstrieren die Verfahren sowohl für Translationen als auch für Rotationen.

In den folgenden Beschreibungen zum Training und zur Inferenz von hybriden Modellen kennzeichnet der Querstrich ($\bar{\cdot}$) über Variablen gemessene oder auf Messungen basierende Werte. Die Tilde ($\tilde{\cdot}$) kennzeichnet approximative Modellwerte, und das Plus ($\cdot^+$) weist darauf hin, dass es sich um eine (Pseudo-)Inverse, oder um einen, mittels (Pseudo-)Inverser ermittelten Wert handelt. Das Ergebnis eines hybriden Modells wird durch einen Stern ($\cdot^*$) markiert. An diskreten Zeitschritten ausgewertete Zustände oder Ausgänge ($\cdot(t_n, \dots)$) werden auch als $(\cdot)_n$ geschrieben.

3.1 Kontinuierliche Verfahren

Die folgenden Verfahren korrigieren Modelldiskrepanzen auf Ebene der Ableitungen, wodurch eine kontinuierliche Integration des resultierenden System von Differentialgleichungen (DGL) möglich ist.

3.1.1 Kraftbasiertes $\Delta\bar{h}$ -Verfahren

In Kapitel 2.2.2.1 wurde die Bewegungsgleichung eines Mehrkörpersystems (MKS) in der Form

$$\underline{M}(\underline{q}, t)\ddot{\underline{q}} + \underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) = \underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t)$$

hergeleitet (vgl. Gleichung (2.2)). Dabei ist $\underline{M}$ die Massematrix, $\underline{k}$ beinhaltet die Kreisel-, Coriolis- und Zentrifugalkräfte, und $\underline{h}$ die eingepprägten Kräfte. Das tatsächliche Systemverhalten weicht jedoch von diesem White-Box-Modell ab. Diese Abweichung kann durch eine unbekannte Kraftkomponente $\Delta\bar{h}$ in das Modell integriert werden

$$\underline{M}(\underline{q}, t)\ddot{\underline{q}} + \underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) = \underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \Delta\bar{h}. \quad (3.2)$$

Auflösen nach der Beschleunigung $\ddot{\underline{q}}$ liefert

$$\ddot{\underline{q}} = \underline{M}^{-1}(\underline{q}, t) \left(\underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) - \underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \Delta\bar{h} \right). \quad (3.3)$$

Das **kraftbasierte $\Delta\bar{h}$ -Verfahren** approximiert die unbekannte Kraftkomponente $\Delta\bar{h}$ durch ein Black-Box-Modell. Der zentrale Vorteil liegt in der physikalischen Interpretierbarkeit: $\Delta\bar{h}$ repräsentiert fehlende oder unvollständig modellierte Kraftanteile, wie sie beispielsweise durch nichtlineare Kontakt- oder Dämpfungseffekte, Reibungsphänomene oder nicht abgebildete Wechselwirkungen entstehen. Diese Arbeit auf Ebene von Kräften erleichtert die Einbindung in bestehende MKS-Modelle erheblich, da viele Programme das Einbringen zusätzlicher Kräfte unterstützen. [127]

Training

1. Aus den Messdaten $\bar{\underline{q}}$ und $\dot{\bar{\underline{q}}}$ werden falls nötig die Beschleunigungen $\ddot{\bar{\underline{q}}}$ bestimmt (z. B. durch numerische Differentiation).

2. Die unbekannte Kraft wird aus der Bewegungsgleichung (3.3) berechnet:

$$\Delta \bar{h} = \underline{M}(\bar{q}, t) \ddot{\bar{q}} + \underline{k}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \tilde{u}, \tilde{s}, t) - \underline{h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \tilde{u}, \tilde{s}, t).$$

3. Das Black-Box-Modell

$$\Delta_{\xi}^h(q, \dot{q}, u, s, t) = \Delta h$$

wird mit $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \tilde{u}, \tilde{s}, t)$ als Eingang und $\Delta \bar{h}$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit ξ bezeichnet.

Inferenz Während der Anwendung wird die Kraftdiskrepanz durch das Black-Box-Modell approximiert:

$$\ddot{q}^* = \underline{M}^{-1}(q^*, t) \left(\underline{h}(q^*, \dot{q}^*, \tilde{u}, \tilde{s}, t) - \underline{k}(q^*, \dot{q}^*, \tilde{u}, \tilde{s}, t) + \Delta_{\xi}^h(q^*, \dot{q}^*, \tilde{u}, \tilde{s}, t) \right).$$

Dieses System kann mit einem geeigneten numerischen Integrationsverfahren gelöst werden, um die zeitliche Entwicklung von q^* zu bestimmen.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das kraftbasierte Δh -Verfahren ist ein Verfahren zur Mehrschritt-Vorhersage mit paralleler Struktur. Es kommt ohne konstante Zeitschrittweite aus. Die Korrekturgröße ist physikalisch gut interpretierbar und erlaubt eine gezielte Abbildung fehlender Effekte.

Ein wesentlicher Vorteil ist die natürliche Integration in mechanische Simulationsumgebungen, da das Black-Box-Modell als externe Kraftkomponente implementiert werden kann. Dies macht das Verfahren besonders attraktiv für die praktische Anwendung in der Mehrkörpersimulation.

Einschränkungen ergeben sich aus dem notwendigen Zugriff auf die einzelnen bekannten Elemente der Kraftbilanzgleichung, welcher in manchen kommerziellen MKS-Umgebungen nicht gegeben ist. Zusätzlich müssen die Beschleunigungen $\ddot{q}$ mit hinreichender Genauigkeit verfügbar sein, was eine entsprechende Qualität der Messdaten oder eine sorgfältige numerische Differentiation erfordert.

Das kraftbasierte Δh -Verfahren wurde in [127] eingeführt.

3.1.2 Kontinuierliches $\Delta \dot{x}$ -Verfahren

Mit dem Zustandsvektor $\underline{x} = [q, \dot{q}]^T$ lässt sich Gleichung (3.3) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \underline{M}^{-1}(q, t) (\underline{h}(q, \dot{q}, u, s, t) - \underline{k}(q, \dot{q}, u, s, t) + \Delta h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \underline{M}^{-1}(q, t) (\underline{h}(q, \dot{q}, u, s, t) - \underline{k}(q, \dot{q}, u, s, t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{M}^{-1}(q, t) \Delta h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u, s, t) + \Delta \dot{\underline{x}} \quad (3.4)$$

umformen, wobei $\underline{f}$ die bekannte Systemdynamik und $\Delta \dot{\underline{x}}$ die unbekannte Systemdynamik beinhaltet.

Das **kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren** setzt hier an und approximiert die unbekannte Dynamik $\Delta\dot{x}$ durch ein Black-Box-Modell. [126]

Für MKSs mit konstanter Massematrix $\underline{M}(q,t) = \underline{M}$ gilt $\underline{M}^{-1}\Delta\dot{h} = \Delta\dot{x}$, wodurch das $\Delta\dot{h}$ -Verfahren und das $\Delta\dot{x}$ -Verfahren bis auf den Faktor $\underline{M}^{-1}$ identisch sind. Der wesentliche Vorteil des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens liegt jedoch in der breiteren Anwendbarkeit: Es ist nicht auf mechanische Systeme beschränkt, sondern kann für beliebige differenzierbare Zustandsraummodelle eingesetzt werden, von elektrischen Netzwerken bis zu biologischen Prozessen.

Training

1. Aus den Messdaten $\underline{\bar{x}}$ wird falls nötig die gemessene Zustandsdynamik $\dot{\underline{\bar{x}}}$ bestimmt (z. B. durch numerische Differentiation).
2. Die modellbasierte Zustandsdynamik

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{f}(\underline{\bar{x}}, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t)$$

wird berechnet und die Diskrepanz

$$\Delta\dot{\underline{\hat{x}}} = \dot{\underline{\bar{x}}} - \dot{\underline{\hat{x}}}$$

bestimmt.

3. Das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta\dot{\hat{x}}}_{\underline{\xi}}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{s}, t) = \Delta\dot{\underline{\hat{x}}}$$

wird mit $(\underline{\bar{x}}, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t)$ als Eingang und $\Delta\dot{\underline{\hat{x}}}$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit $\underline{\xi}$ bezeichnet.

Inferenz Während der Anwendung wird das hybride Modell

$$\dot{\underline{x}}^* = \dot{\underline{\hat{x}}} + \Delta\dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t) + \underline{\Delta\dot{\hat{x}}}_{\underline{\xi}}(\underline{x}^*, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t).$$

direkt im Zustandsraum formuliert und mit einem numerischen Integrationsverfahren gelöst.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren ist ein Verfahren zur Mehrschritt-Vorhersage mit paralleler Struktur. Es kommt ohne konstante Zeitschrittweite aus und ist in der Anwendung sehr effizient, da direkt das hybride Gesamtsystem numerisch integriert wird.

Ein wesentlicher Vorteil gegenüber dem $\Delta\dot{h}$ -Verfahren ist die breitere Anwendbarkeit: Das Verfahren ist nicht auf MKSs beschränkt, sondern kann für beliebige differenzierbare Zustandsraummodelle eingesetzt werden, von elektrischen Netzwerken bis zu biologischen Prozessen.

Einschränkungen ergeben sich aus dem erforderlichen Zugriff auf die DGLs, was in kommerzieller MKS-Software häufig nicht gegeben ist. Zusätzlich muss die Ableitung der Zustandsgrößen $\dot{\underline{\hat{x}}}$ mit hinreichender Genauigkeit gegeben sein.

Das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren wurde in verschiedenen Formen parallel entwickelt. Grundlegende Ansätze zur Korrektur von Systemdynamiken durch datengetriebene Terme finden sich in [46, 55, 64]. Anwendungen in den Geowissenschaften beschreibt [30], weitere Arbeiten zu dynamischen Systemen [28]. Die systematische Anwendung auf mechanische Systeme wird in [126] behandelt.

3.1.3 Kontinuierliches $\Delta\dot{y}$ -Verfahren

Im Folgenden soll der Modellierungsansatz auf Systeme erweitert werden, bei denen nicht alle Zustandsgrößen messbar sind. Anstatt die Korrektur im Zustandsraum vorzunehmen, wird sie auf die Ausgangsebene verschoben. Dies erfordert zwei wesentliche Schritte:

1. Abbildung des Ausgangs auf den Zustand: Im Fall einer invertierbaren Matrix $\underline{C}$ kann der Zustand $\underline{x}$ direkt mit der Inverse $\underline{C}^{-1}$ über $\underline{x} = \underline{C}^{-1}\underline{y}$ aus dem Ausgang berechnet werden. Bei nicht-quadratischer Matrix $\underline{C}$ kann sich mit einer Pseudoinversen $\underline{C}^+$ beholfen werden, so dass für einen Systemausgang ein passender Systemzustand

$$\underline{x}^+ = \underline{C}^+\underline{y} \quad (3.5)$$

rekonstruiert werden kann. Eine exakte Rekonstruktion von $\underline{x}$ ist aufgrund des Informationsverlustes jedoch nicht zu erwarten.

2. Abbildung der Zustandsableitung auf die Ausgangsableitung: Die Ableitung der Ausgangsgleichung (3.1) nach der Zeit ergibt

$$\dot{\underline{y}} = \underline{C} \dot{\underline{x}}. \quad (3.6)$$

Durch Einsetzen von (3.5) und (3.6) in (3.4) ergibt sich

$$\dot{\underline{y}} = \underline{C}f(\underline{C}^+\underline{y}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \Delta\dot{\underline{y}}. \quad (3.7)$$

Das **kontinuierliche $\Delta\dot{y}$ -Verfahren** approximiert den unbekannten Anteil $\Delta\dot{\underline{y}}$ durch ein Black-Box-Modell.

Training

1. Aus den Messdaten $\bar{\underline{y}}$ wird falls nötig die Ausgangsdynamik $\dot{\bar{\underline{y}}}$ bestimmt (z. B. über numerische Differentiation).
2. Die modellbasierte Zustands- und Ausgangsdynamik

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = f(\underline{C}^+\bar{\underline{y}}, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t), \quad \dot{\hat{\underline{y}}} = \underline{C} \dot{\hat{\underline{x}}}$$

wird berechnet und die Diskrepanz

$$\Delta\dot{\underline{y}} = \dot{\bar{\underline{y}}} - \dot{\hat{\underline{y}}}$$

bestimmt.

3. Das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{\dot{\underline{y}}}(x, y, u, s, t) = \Delta\dot{\underline{y}}$$

wird mit $(\underline{x}^+, \underline{\bar{y}}, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t)$ als Eingang und $\Delta \dot{\underline{y}}$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit $\underline{\xi}$ bezeichnet.

Inferenz Während der Anwendung wird das hybride Modell

$$\dot{\underline{y}} = \underline{C}f(\underline{C}^+ \underline{y}^*, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t) + \Delta \dot{\underline{y}}_{\underline{\xi}}(\underline{x}^+, \underline{y}^*, \underline{\tilde{u}}, \underline{\tilde{s}}, t)$$

auf Ebene des Systemausgangs formuliert und mit einem numerischen Integrationsverfahren gelöst.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das kontinuierliche $\Delta \dot{\underline{y}}$ -Verfahren ist ein Verfahren zur Mehrschritt-Vorhersage mit paralleler Struktur. Es kommt ohne konstante Zeitschrittweite aus und ermöglicht eine hybride Modellierung auch bei unvollständiger Zustandserfassung, da die Korrektur direkt auf Ebene des Systemausgangs erfolgt.

Die Qualität der Ergebnisse hängt maßgeblich von der Zustandsrekonstruktion ab. Ist eine eindeutige Invertierung von $\underline{C}$ nicht möglich und es wird stattdessen eine Pseudoinverse $\underline{C}^+$ genutzt, kann es zu einem Informationsverlust kommen, so dass eine vollständige Rekonstruktion des Systemzustandes nicht mehr gewährleistet ist. Alternativ kann auch ein Beobachter, beispielsweise ein Kalman-Filter, eingesetzt werden, wodurch die direkte Invertierung entfällt.

Im Fall einer invertierbaren Ausgangsgleichung $\underline{y} = \underline{C}_{\text{inv}} \underline{x}$ lässt sich die Diskrepanz $\Delta \underline{\dot{x}} = \dot{\underline{x}} - \underline{C}_{\text{inv}}^{-1} \dot{\underline{y}}$ eindeutig berechnen, so dass direkt das kontinuierliche $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahren angewandt werden kann.

Einschränkungen liegen im notwendigen Zugriff auf die Zustandsraumdarstellung und der erforderlichen Genauigkeit bei der Bestimmung von $\dot{\underline{y}}$.

Das diskrete $\Delta \dot{\underline{y}}$ -Verfahren für Systeme mit unvollständiger Zustandsmessung wird in [46, 64] entwickelt und auf verschiedene dynamische Systeme angewandt.

3.2 Diskrete Verfahren

Während die kontinuierlichen Verfahren die Diskrepanz auf Ebene der Ableitungen korrigieren und das resultierende Differentialgleichungssystem kontinuierlich integrieren, arbeiten diskrete Verfahren schrittweise zu diskreten Zeitpunkten. Analog zu den kontinuierlichen Ansätzen werden zwei Varianten unterschieden: Korrektur im Zustandsraum ($\Delta \underline{x}$, entsprechend $\Delta \underline{\dot{x}}$) oder im Ausgangsraum ($\Delta \underline{y}$, entsprechend $\Delta \dot{\underline{y}}$) für teilweise beobachtbare Systeme.

3.2.1 Diskretes $\Delta \underline{x}$ -Verfahren

Das diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren ist das diskrete Gegenstück zum kontinuierlichen $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahren (Kapitel 3.1.2). Anstatt die Zustandsableitung $\dot{\underline{x}}$ zu korrigieren, wird hier direkt die Zustandsdifferenz zwischen zwei Zeitschritten korrigiert. Nach Gleichung (2.1) lässt sich das Systemverhalten über

$$\underline{x}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1} + \Delta \underline{x}_n \quad (3.8)$$

beschreiben, wobei der erste Summand die bekannte Systemdynamik beschreibt und $\Delta \underline{x}_n$ die unbekannten Anteile enthält.

Das **diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren** approximiert die unbekannten Anteile $\Delta \underline{x}$ durch ein Black-Box-Modell. Die zentrale Annahme ist, dass über einen kleinen Zeitschritt Δt nur eine kleine Diskrepanz $\Delta \underline{x}$ auftritt (vgl. Abb. 3.2). Wird diese Diskrepanz in jedem Schritt durch ein Black-Box-Modell korrigiert, kann das Gesamtmodell das reale Systemverhalten über längere Zeiträume genau vorhersagen. [123, 124, 125, 126]

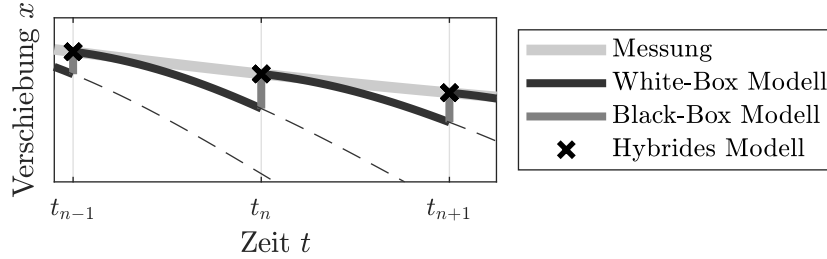


Abbildung 3.2: Grundidee hinter den diskreten Verfahren zur hybriden Modellierung

Das Verfahren kann in zwei Varianten realisiert werden (siehe Abb. 3.3): Im parallelen Ansatz in a) werden White-Box- und Black-Box-Modell gleichzeitig ausgewertet, im seriellen Ansatz in b) dient der Ausgang des White-Box-Modells als Eingang für das Black-Box-Modell. Im Folgenden wird der serielle Ansatz vorgestellt, das parallele Vorgehen lässt sich analog formulieren.

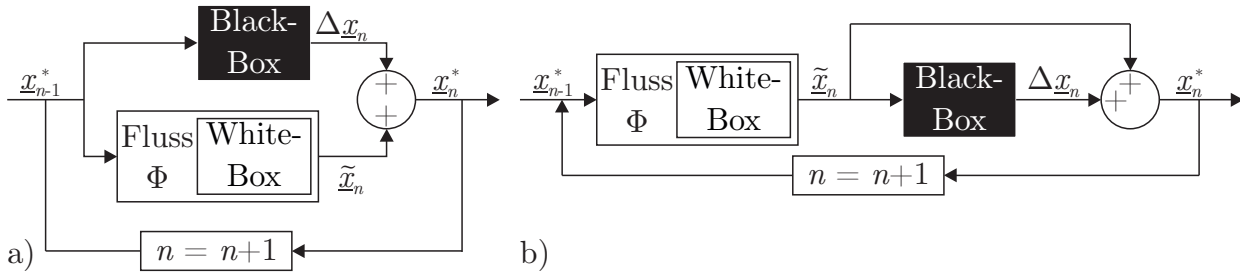


Abbildung 3.3: Inferenz des diskreten $\Delta \underline{x}$ -Verfahrens a) in paralleler und b) in serieller Ausführung

Training

1. Aus den Messdaten $\bar{x}_n$ wird der modellbasierte Systemzustand

$$\tilde{x}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \bar{x}_{n-1}.$$

vorhergesagt und die Diskrepanz

$$\Delta \bar{x}_n = \bar{x}_n - \tilde{x}_n$$

berechnet.

2. Das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\bar{x}}^x(\underline{x}_n, \underline{u}_n, \underline{s}_n, t) = \Delta \underline{x}_n$$

wird mit $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, \tilde{s}_n, t_n)_{n=1}^N$ als Eingang und $(\Delta \tilde{x}_n)_{n=1}^N$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit $\underline{\xi}$ bezeichnet.

Inferenz Bei der Inferenz sind die Anfangsbedingungen $(t_0, \underline{x}_0^*) = (t_0, \underline{x}_0)$ gegeben. Dann wird für jeden Zeitschritt t_n mit $n \in \{1, \dots, N\}$ wie folgt vorgegangen:

1. Berechnen des modellbasierten Zustandes:

$$\tilde{x}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^*.$$

2. Bestimmen der Diskrepanz mittels Black-Box-Modell:

$$\Delta \tilde{x}_n = \underline{\Delta}_{\underline{\xi}}^x(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, \tilde{s}_n, t_n).$$

3. Kombinieren von White-Box- und Black-Box-Anteil zum hybriden Zustand:

$$\underline{x}_n^* = \tilde{x}_n + \Delta \tilde{x}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^* + \underline{\Delta}_{\underline{\xi}}^x(\underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^*, \tilde{u}_n, \tilde{s}_n, t_n).$$

Dieses Vorgehen ist auch in Abb. 3.3 a) dargestellt.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren ist ein Verfahren zur Mehrschritt-Vorhersage, das sowohl parallel als auch seriell realisiert werden kann. Voraussetzung für die Anwendung ist eine konstante Zeitschrittweite Δt . Das Verfahren zeichnet sich durch eine einfache Implementierung aus und ist mit bestehenden numerischen Integrationsverfahren kompatibel.

Im Vergleich zum kontinuierlichen $\Delta \dot{x}$ -Verfahren bietet der diskrete Ansatz eine bessere Kompatibilität mit bestehender Software. Ein Einsatz in kommerzieller MKS-Software wie etwa MSC Adams ist beispielsweise über Co-Simulation möglich, ohne dass direkter Zugriff auf die Differentialgleichungen erforderlich ist. Durch die schrittweise Kompensation von Modelldiskrepanzen ermöglicht das Verfahren eine gute Langzeitvorhersage, abhängig vom Integrationsverfahren und der Schrittweite kann es jedoch zu längeren Rechenzeiten kommen.

Das diskrete Δx -Verfahren wurde in verschiedenen Formen parallel entwickelt. Anwendungen finden sich auf chaotische dynamische Systeme [117], mechanische Systeme [123, 126], elektrische Systeme [124], in den Geowissenschaften [30] sowie auf allgemeine dynamische Systeme [19, 28]. Vergleiche mit dem kontinuierlichen $\Delta \dot{x}$ -Verfahren werden in [28, 30, 126] durchgeführt.

3.2.2 Diskretes Δy -Verfahren

Das diskrete Δy -Verfahren ist das diskrete Gegenstück zum kontinuierlichen $\Delta \dot{y}$ -Verfahren (Kapitel 3.1.3). Es erweitert den Modellierungsansatz des $\Delta \underline{x}$ -Verfahrens auf Systeme, bei denen nicht alle Zustandsgrößen messbar sind. Anstatt die Ausgangsableitung $\dot{y}$ zu korrigieren wird hier direkt die Ausgangsdiskrepanz zwischen zwei Zeitschritten korrigiert. Nach Gleichung (2.1) und mit (3.5) lässt sich das Systemverhalten über

$$\underline{y}_n = \underline{C} \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} (\underline{C}^+ \underline{y}_{n-1}) + \Delta \underline{y}_n \quad (3.9)$$

beschreiben, wobei der erste Term die bekannte Systemdynamik beschreibt und $\Delta \underline{y}$ die unbekannten Anteile enthält.

Das **diskrete $\Delta \underline{y}$ -Verfahren** approximiert die unbekannten Anteile $\Delta \underline{y}$ durch ein Black-Box-Modell.

Das Verfahren kann in vier Varianten realisiert werden: die Anordnung kann parallel und seriell ausgeführt sein, und als Eingang i das Black-Box-Modell kann der Systemzustand $\underline{x}$ oder der Systemausgang $\underline{y}$ gewählt werden. In Abb. 3.4 sind diese vier Möglichkeiten mit folgender Zuweisung dargestellt:

	$\underline{y}$	$\underline{x}$
parallel	a) b)	b) c)
seriell	d) c)	c) c)

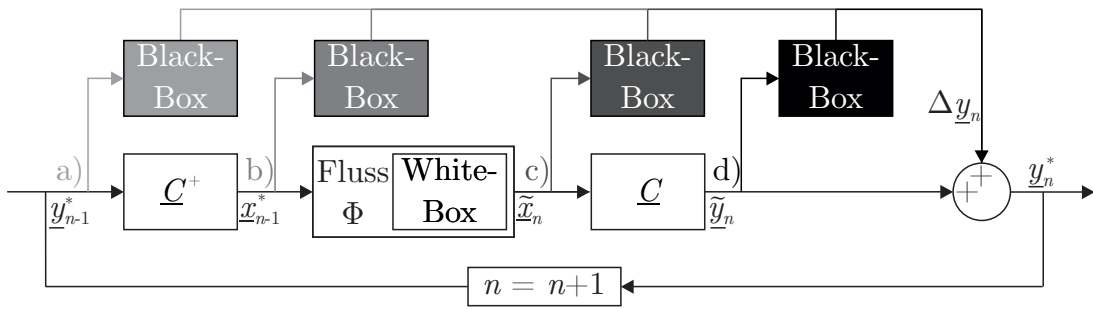


Abbildung 3.4: Inferenz des diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahren a)+b) in paralleler und c)+d) in serieller Ausführung jeweils mit den Eingängen a)+d) $\underline{y}$ und b)+c) $\underline{x}$ für das Black-Box-Modell

Im Folgenden wird die serielle Struktur mit $\underline{x}$ als Eingang für das Black-Box-Modell vorgestellt (Struktur c)), die anderen Strukturen lassen sich analog ableiten.

Training

1. Aus den Messdaten $\bar{\underline{y}}$ wird der geschätzte Systemzustand bestimmt:

$$\underline{x}_n^+ = \underline{C}^+ \bar{\underline{y}}_n.$$

2. Der modellbasierte Systemzustand und -ausgang

$$\tilde{\underline{x}}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^+, \quad \tilde{\underline{y}}_n = \underline{C} \tilde{\underline{x}}_n$$

wird vorhergesagt und die Diskrepanz

$$\Delta \bar{\underline{y}}_n = \bar{\underline{y}}_n - \tilde{\underline{y}}_n$$

bestimmt.

3. Das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\underline{\xi}}^{\underline{y}}(\underline{x}_n, \underline{u}_n, \underline{s}_n, t_n) = \Delta \underline{y}_n,$$

wird mit $(\underline{x}_n^+, \tilde{\underline{u}}_n, \tilde{\underline{s}}_n, t_n)_{n=1}^N$ als Eingang und $(\Delta \bar{\underline{y}}_n)_{n=1}^N$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit $\underline{\xi}$ bezeichnet.

Inferenz Bei der Inferenz sind die Anfangsbedingungen $(t_0, \underline{x}_0^*) = (t_0, \underline{x}_0)$ gegeben. Dann wird für jeden Zeitschritt t_n mit $n \in \{1, \dots, N\}$ wie folgt vorgegangen:

1. Berechnen des modellbasierten Systemzustands und -ausgangs:

$$\tilde{\underline{x}}_n = \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^*, \quad \tilde{\underline{y}}_n = \underline{C} \tilde{\underline{x}}_n.$$

2. Bestimmen der Diskrepanz mittels Black-Box-Modell:

$$\Delta \tilde{\underline{y}}_n = \underline{\Delta}_{\tilde{\underline{y}}}^y(\tilde{\underline{x}}_n, \tilde{\underline{u}}_n, \tilde{\underline{s}}_n, t_n).$$

3. Kombinieren von White-Box- und Black-Box-Anteil zum hybriden Systemausgang:

$$\underline{y}_n^* = \tilde{\underline{y}}_n + \Delta \tilde{\underline{y}}_n = \underline{C} \underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^* + \underline{\Delta}_{\tilde{\underline{y}}}^y(\underline{\Phi}^{t_n, t_{n-1}} \underline{x}_{n-1}^*, \tilde{\underline{u}}_n, \tilde{\underline{s}}_n, t_n).$$

4. Berechnen des zugehörigen Systemzustands:

$$\underline{x}_n^* = \underline{C}^+ \underline{y}_n^*.$$

Dieses Vorgehen ist in Abb. 3.4 als b) dargestellt.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das diskrete $\Delta \underline{y}$ -Verfahren ist ein Verfahren zur Mehrschritt-Vorhersage, das sowohl parallel als auch seriell realisiert werden kann. Voraussetzung für die Anwendung ist eine konstante Zeitschrittweite Δt . Das Verfahren ermöglicht eine hybride Modellierung auch bei unvollständiger Zustandserfassung, da die Korrektur direkt auf Ebene des Systemausgangs erfolgt. Abhängig vom Integrationsverfahren und der Schrittweite kann es jedoch zu längeren Rechenzeiten kommen.

Die Qualität der Ergebnisse hängt maßgeblich von der Zustandsrekonstruktion ab. Wird eine Pseudoinverse $\underline{C}^+$ verwendet, können Inkonsistenzen zwischen rekonstruiertem Zustand und tatsächlicher Systemdynamik auftreten. Der zusätzliche Rückschluss vom Ausgang auf den Zustand führt zu einem erhöhten Rechenaufwand. Alternativ kann auch ein Beobachter, beispielsweise ein Kalman-Filter, eingesetzt werden, wodurch die direkte Invertierung entfällt. Dadurch ist das Verfahren insbesondere für Systeme mit unvollständiger Sensorik oder nicht injektiver Ausgangsgleichung geeignet. Gute Ergebnisse lassen sich mit diesem Vorgehen für den Systemausgang $\underline{y}$ erzielen, eine Rekonstruktion des Zustandes $\underline{x}$ war hier nur begrenzt möglich. [3]

Im Fall einer invertierbaren Ausgangsgleichung $\underline{y} = \underline{C}_{\text{inv}} \underline{x}$ lässt sich die Diskrepanz $\Delta \underline{x} = \underline{\bar{x}} - \underline{C}_{\text{inv}}^{-1} \tilde{\underline{y}}$ eindeutig berechnen, so dass direkt das diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren angewandt werden kann.

Das diskrete $\Delta \underline{y}$ -Verfahren wird in [46, 64] entwickelt und auf verschiedene dynamische Systeme mit unvollständiger Zustandsmessung angewandt. Die Arbeiten enthalten auch Vergleiche mit dem diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahren.

3.3 Hybride Modellierung auf Komponentenebene

Komponenten werden in dieser Arbeit als funktionale Einheiten verstanden, die sich nicht weiter zerlegen lassen, ohne ihre Funktion zu verlieren. Ihre Modellierung erfolgt in der

Regel über konstitutive Gleichungen, sodass der Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang direkt beschrieben wird. Typische Beispiele sind Kraftkomponenten, bei denen das Verhalten ohne explizite Zustandsfortschreitung formuliert wird (vgl. Abb. 2.10 a)).

Die in den Kapiteln 3.1 und 3.2 vorgestellten Verfahren basieren auf der Beschreibung eines MKS gemäß Gleichung (2.2). Wird eine einzelne masselose Komponente (z. B. ein Stoßdämpfer) betrachtet gilt $\underline{M}(\underline{q}, t) = \underline{0}$. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung jedoch zu

$$\underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) = \underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t)$$

Dies führt jedoch zu einem Problem: Bei allen bisher vorgestellten Verfahren ($\Delta \underline{h}$, $\Delta \dot{\underline{x}}$, $\Delta \dot{\underline{y}}$, $\Delta \underline{x}$, $\Delta \underline{y}$) ist die Diskrepanz stets die Differenz zwischen Messung und Modell (ausgewertet an der Messung), also

$$\Delta = \text{Messung} - \text{Modell}(\text{Messung}).$$

Beim $\Delta \underline{h}$ -Verfahren dient $\underline{M}(\bar{\underline{q}}, t) \ddot{\bar{\underline{q}}}$ als Messung und $\underline{h}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t) - \underline{k}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t)$ als Modell. Nun sind jedoch beide Elemente Modellgrößen, die zwar an Messwerten ausgewertet werden, aber nicht mit einer Messung verglichen werden. Um die Diskrepanz bestimmen zu können, muss daher die tatsächlich wirkende (verallgemeinerte) Kraft $\underline{Q}$ direkt gemessen werden so, dass sich die Diskrepanzen

$$\Delta \bar{\underline{Q}} = \bar{\underline{Q}} + \underline{k}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t) - \underline{h}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t) \quad (3.10)$$

berechnen lassen. Als hybrides Modell zur Berechnung der wirkenden Kräfte wird dann

$$\underline{Q} = \underline{h}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) - \underline{k}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \Delta \underline{Q} \quad (3.11)$$

genutzt.

Das **$\Delta \underline{Q}$ -Verfahren auf Komponentenebene** lässt sich somit aus den allgemeinen Systemgleichungen ableiten. Der entscheidende Unterschied liegt in den erforderlichen Messgrößen: Während bei Systemen mit Masse kinematische Messungen ($\bar{\underline{q}}$, $\dot{\bar{\underline{q}}}$ oder $\ddot{\bar{\underline{q}}}$) ausreichen, sind bei masselosen Komponenten direkte Kraftmessungen erforderlich.

Training

1. Aus den Messungen $\bar{\underline{q}}$, $\dot{\bar{\underline{q}}}$ und $\bar{\underline{Q}}$ werden die Modellgrößen

$$\tilde{\underline{k}} = \underline{k}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t) \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{h}} = \underline{h}(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t)$$

berechnet und die Diskrepanz

$$\Delta \bar{\underline{Q}} = \bar{\underline{Q}} - (\tilde{\underline{h}} - \tilde{\underline{k}})$$

bestimmt.

2. Das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\xi}^Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) = \Delta \underline{Q}$$

wird mit $(\bar{\underline{q}}, \dot{\bar{\underline{q}}}, \tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{s}}, t)$ als Eingang und $\Delta \bar{\underline{Q}}$ als Zielgröße trainiert. Die Hyperparameter des Black-Box-Modells werden mit $\underline{\xi}$ bezeichnet.

Inferenz Während der Anwendung wird die Kraftdiskrepanz durch das trainierte Black-Box-Modell approximiert. Die hybride Komponente liefert die Kraft

$$\underline{Q}^* = \underline{k}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) - (\underline{h}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t) + \underline{\Delta}_{\underline{\xi}}^Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u}, \underline{s}, t))$$

Ob es sich bei den Eingängen in das hybride Modell um Messungen $(\bar{\cdot})$ oder um Modellergebnisse $(\tilde{\cdot})$ oder $(\cdot)^*$ handelt hängt vom Anwendungsfall ab. Eine numerische Integration ist nicht notwendig.

Besonderheiten und Einsatzgebiet Das ΔQ -Verfahren auf Komponentenebene ist ein Verfahren zur Vorhersage ohne Zustandsfortschreitung mit paralleler Struktur. Während bei Systemen mit Masse kinematische Messungen $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}$ oder $\ddot{\bar{q}})$ ausreichen, um die Diskrepanz zu bestimmen, sind bei masselosen Komponenten direkte Kraftmessungen $\bar{Q}$ erforderlich. Dies liegt daran, dass bei masselosen Komponenten die Massenmatrix $\underline{M}(\underline{q}, t) = 0$ ist und sich die Bewegungsgleichung zu einer rein algebraischen Beziehung zwischen Kräften reduziert.

Das Verfahren eignet sich besonders für Kraftkomponenten mit komplexem nichtlinearem Verhalten, bei denen White-Box-Modelle vereinfachende Annahmen treffen müssen, wie beispielsweise Stoßdämpfer, Gummi-Metall-Lager (GML) oder Reibelemente.

Anwendung findet das Vorgehen in [10, 128] auf GML und in [131] auf einen Stoßdämpfer.

Im Folgenden soll der regimebasierte Ansatz erläutert werden. Da es sich dabei um einen Spezialfall eines hybriden Modells mit paralleler Struktur und Gewichtung handelt wird diese jedoch zuerst näher erläutert.

3.3.1 Gewichtung

Bei der Gewichtung werden mehrere spezialisierte Modelle zu einem umfassenden Gesamtmodell kombiniert. Jedes Teilmodell ist für einen bestimmten Betriebsbereich optimiert; durch intelligente Gewichtung entsteht ein Modell, das den gesamten gewünschten Bereich abdeckt.

Es seien $\underline{z}(\underline{x}, \underline{u}) \in Z$ Gültigkeitsvariablen, die sich aus Größen des betrachteten Modells ableiten. Mit Z sei der Gültigkeitsbereich bezeichnet, den das gewünschte Modell abdecken soll. Häufig haben Modelle jedoch nur begrenzte Gültigkeitsbereiche $Z_i \subsetneq Z$. Diese Einschränkungen können auf den zugrundeliegenden Annahmen eines White-Box-Modells oder auf der Begrenztheit der verfügbaren Messdaten beim Training eines Black-Box-Modells beruhen. Im Folgenden werden solche Modelle mit begrenztem Gültigkeitsbereich als lokale Modelle bezeichnet. Gegeben seien N lokale Modelle

$$\underline{y} = \underline{f}_i(\underline{x}, \underline{u}), \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

deren individuelle Gültigkeitsbereiche Z_i sich zu

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^N Z_i$$

vereinigen. Diese Vereinigung muss nicht disjunkt sein. Ein globales Modell kann durch

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i(\underline{x}, \underline{u}) w_i(\underline{z})$$

definiert werden, wobei

$$w_i(\underline{z}) = \frac{\rho_i(\underline{z})}{\sum_{j=1}^N \rho_j(\underline{z})}.$$

die Gewichte sind und $\rho_i(\underline{z}) \in [0,1]$ die Aktivierungsfunktion für das lokale Modell $\underline{f}_i$ beschreibt. [53, 54]

Abb. 3.5 veranschaulicht dieses Vorgehen anhand eines zweidimensionalen Beispiels. Hier gibt es zwei Gültigkeitsvariablen z_1 und z_2 , die sich aus den Größen des betrachteten Systems (beispielsweise $\underline{x}$) ableiten lassen. Es ist ein Modell für den in grau dargestellten Gültigkeitsbereich Z gesucht, es existieren aber nur vier Modelle $\underline{f}_i$, die beispielsweise die Genauigkeitsanforderungen jeweils für einen begrenzten Gültigkeitsbereich $Z_i \subsetneq Z$ erfüllen. Mit allen vier Gültigkeitsbereichen lässt sich jedoch eine Überdeckung von Z erreichen. Daher werden die lokalen Modelle im nächsten Schritt durch eine gewichtete Summe zu einem globalen Modell verbunden. Die Gewichte w_i sind in b) zu sehen. Zusätzlich sind dort die Zentren der Gültigkeitsbereiche gestrichelt markiert. Die Gewichte w_i erreichen ihr Maximum nicht notwendigerweise am jeweiligen Zentrum des Gültigkeitsbereichs Z_i , da sie sich aus der Normierung aller Aktivierungsfunktionen ergeben. Die Aktivierungsfunktionen ρ_i hingegen sind an den Zentren der jeweiligen Gültigkeitsbereiche maximal.

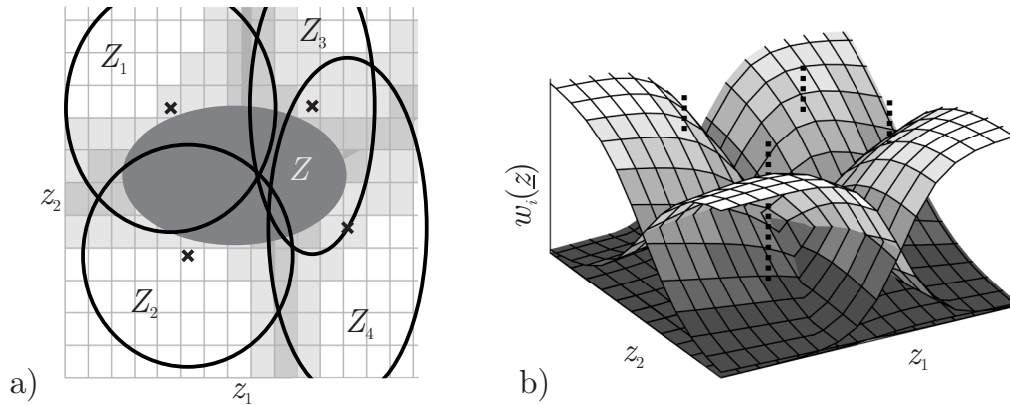


Abbildung 3.5: a) Globaler und lokale Gültigkeitsbereiche, und b) Gewichte der lokalen Modelle, angelehnt an [54]

3.3.2 Regimebasierter Ansatz

Während die in vorigen Abschnitt 3.3.1 beschriebene gewichtete Modellkombination eine gleichberechtigte Fusion mehrerer lokaler Modelle ermöglicht, liegt bei der hybriden Modellierung von Komponenten häufig eine andere Ausgangssituation vor: Es existiert

ein White-Box-Basismodell, welches den dominanten Anteil des Komponentenverhaltens beschreibt, jedoch einzelne Effekte nicht oder nur unzureichend abbildet. Diese Effekte treten oft nur in bestimmten Betriebsbereichen auf, beispielsweise Stick-Slip-Phänomene bei niedrigen Geschwindigkeiten, Anschlageffekte bei großen Auslenkungen oder Hysterese bei Lastumkehr. Für solche Fälle wird ein regimebasierter Ansatz verwendet, bei dem ein Basismodell kontinuierlich aktiv ist und das Diskrepanzmodell bedarfsabhängig zugeschaltet wird. Das hybride Modell hat dann die Form

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + \rho(\underline{z}) \Delta \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (3.12)$$

wobei $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ das White-Box-Basismodell bezeichnet, $\Delta \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ das Black-Box-Korrekturmodell, und $\rho(\underline{z})$ die Aktivierungsfunktion ist, die von der Gültigkeitsvariablen $\underline{z}(\underline{x}, \underline{u})$ abhängt.

Die Gültigkeitsvariable $\underline{z}$ wird so gewählt, dass sie das Auftreten der zu korrigierenden Effekte charakterisiert. Dabei kann es sich beispielsweise um die Position (Anschlag), die Geschwindigkeit (Stick-Slip), die Lastrichtung (Hysterese) oder auch um Mehrdimensionale Abhängigkeiten handeln.

Im Vergleich zur allgemeinen gewichteten Modellkombination bietet der regimebasierte Ansatz für die Komponentenmodellierung mehrere Vorteile. Die Interpretierbarkeit bleibt erhalten, da das Basismodell physikalisch nachvollziehbar bleibt und das Korrekturmodell gezielt identifizierte Defizite adressiert. Gleichzeitig ergibt sich eine höhere Dateneffizienz, weil das Black-Box-Modell nur die Abweichung vom physikalischen Modell lernen muss und nicht das gesamte Verhalten. Die Extrapolationsfähigkeit verbessert sich, da sich das Modell außerhalb des Aktivierungsbereichs rein physikalisch verhält. Zudem führt der Ansatz zu einer reduzierten Komplexität, da ein einzelnes Korrekturmodell ausreichend ist, statt mehrere lokale Modelle trainieren zu müssen.

Der regimebasierte Ansatz ist damit besonders geeignet für Komponenten, bei denen ein gutes physikalisches Verständnis des Grundverhaltens vorliegt, aber spezifische, bereichsabhängige Effekte eine Korrektur erfordern.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden werden im folgenden Kapitel 4 an fünf Anwendungsbeispielen demonstriert und evaluiert. Die ersten drei Beispiele (Drei-Massen-Schwinger, Doppelpendel, Gelenkviereck) behandeln die hybride Modellierung auf Systemebene, während die letzte zwei Beispiele (Stoßdämpfer, Gummi-Metall-Lager) die hybride Modellierung auf Komponentenebene untersuchen.

4 Anwendungen

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren zur hybriden Modellierung auf Basis von Diskrepanzen angewandt. Die ersten drei Beispiele behandeln die hybride Modellierung auf Systemebene:

Der *Drei-Massen-Schwinger* (Kapitel 4.1) wird anhand synthetischer Messungen untersucht. Mit drei Freiheitsgraden und Weganregung ermöglicht er eine systematische Untersuchung und den Vergleich aller fünf Verfahren unter verschiedenen Szenarien.

Für das *Doppelpendel* (Kapitel 4.2) liegen reale Messungen vor. Es besitzt zwei Freiheitsgrade und wird ohne äußere Anregung betrachtet. Hier kommen zwei Verfahren für vollständig beobachtbare Systeme zur Anwendung.

Das *Gelenkviereck* (Kapitel 4.3) mit einem Freiheitsgrad und externer Anregung wird ebenfalls auf Basis realer Messungen analysiert, wobei die gleichen Verfahren wie beim Doppelpendel verwendet werden.

Anschließend wird die hybride Modellierung auf Komponentenebene behandelt. Es werden zwei mechanische Komponenten untersucht:

Der *Stoßdämpfer* (Kapitel 4.4) wird anhand synthetischer Messungen untersucht. Er weist eine nichtlineare Dämpfungscharakteristik auf und ermöglicht die Analyse hybrider Ansätze für dissipative Komponenten.

Für das *Gummi-Metall-Lager* (Kapitel 4.5) liegen reale Messungen vor. Es zeigt nichtlineares Kraft-Weg-Verhalten mit ausgeprägter Hysterese. Hier findet auch ein regimebasierter Modellierungsansatz Anwendung.

Die gewählten Beispiele sollen die Vielseitigkeit und Grenzen hybrider Modellierungsansätze verdeutlichen und eine Grundlage für die Bewertung ihrer Anwendbarkeit unter verschiedenen Bedingungen liefern.

4.1 Drei-Massen-Schwinger

Als erstes Anwendungsbeispiel zur Erläuterung der Verfahren dient ein Drei-Massen-Schwinger wie in Abb. 4.1 dargestellt. Er dient als einfaches, aber hinreichend komplexes Mehrkörpersystem (MKS), um die Eigenschaften der hybriden Verfahren darzustellen. Durch seine drei Freiheitsgrade und eine äußere Weganregung lassen sich sowohl deterministische Abweichungen als auch systematische Residuen untersuchen. Die Systemparameter sind in Tabelle B.1 im Anhang aufgeführt.

Die nichtlinearen Feder- und Dämpferkräfte zwischen Masse m_{i-1} und Masse m_i sind über

$$F_{c_i} = c_i(q_i - q_{i-1})^3 \quad \text{und} \quad F_{d_i} = d_i |\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}| (\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) \quad (4.1)$$

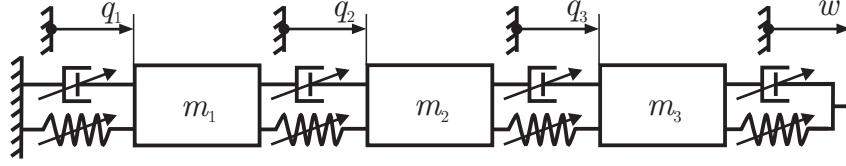


Abbildung 4.1: Mechanisches Ersatzsystem des Drei-Massen-Schwingers

gegeben. Die Bewegungsgleichung für die i -te Masse lautet

$$m_i \ddot{q}_i = (F_{c_{i+1}} - F_{c_i}) + (F_{d_{i+1}} - F_{d_i}).$$

Die harmonische Funktion

$$w(t) = \hat{w} \sin(2\pi f t)$$

dient als Weganregung, und der Eingangsvektor ist als $\underline{u} = [w, \dot{w}]$ definiert.

Die Differentialgleichung (DGL) des Gesamtsystems lautet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{c_2}(q_1, q_2) - F_{c_1}(q_1) \\ F_{c_3}(q_2, q_3) - F_{c_2}(q_1, q_2) \\ F_{c_4}(q_3, w) - F_{c_3}(q_2, q_3) \end{bmatrix}}_{\underline{h}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u})} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_{d_2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) - F_{d_1}(\dot{q}_1) \\ F_{d_3}(\dot{q}_2, \dot{q}_3) - F_{d_2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ F_{d_4}(\dot{q}_3, \dot{w}) - F_{d_3}(\dot{q}_2, \dot{q}_3) \end{bmatrix}}_{\underline{h}^u(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u})}. \quad (4.2)$$

Die Massematrix $\underline{M}$ ist konstant, es wirken keine Kreisel-, Coriolis- und Zentrifugalkräfte, und die eingepprägten Kräfte werden eingeteilt in bekannte eingepprägte Kräfte $\underline{h}$ und unbekannte eingepprägte Kräfte $\underline{h}^u$. Mit dem Zustandsvektor

$$\underline{x} = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^\top$$

lässt sich Gleichung (4.2) als Zustandsraummodell

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \frac{1}{m_1}(F_{c_2}(\underline{x}) - F_{c_1}(\underline{x})) \\ \frac{1}{m_2}(F_{c_3}(\underline{x}) - F_{c_2}(\underline{x})) \\ \frac{1}{m_3}(F_{c_4}(\underline{x}, \underline{u}) - F_{c_3}(\underline{x})) \end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x}, \underline{u})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1}(F_{d_2}(\underline{x}) - F_{d_1}(\underline{x})) \\ \frac{1}{m_2}(F_{d_3}(\underline{x}) - F_{d_2}(\underline{x})) \\ \frac{1}{m_3}(F_{d_4}(\underline{x}, \underline{u}) - F_{d_3}(\underline{x})) \end{bmatrix}}_{\underline{f}^u(\underline{x}, \underline{u})} \quad (4.3)$$

schreiben, wobei $\underline{f}$ die als bekannt angenommene Dynamik, und $\underline{f}^u$ die als unbekannt angenommene Dynamik enthält. Dadurch, dass es sich um eine Weganregung mit nur teilweise bekannter Kraftübertragung auf die Masse m_3 handelt, lässt sich dieses System auch im Sinne einer unvollständig bekannten Kraftanregung auffassen.

Zur Generierung der Trainingsdaten wird das Anfangswertproblem

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{f}^u(\underline{x}, \underline{u}), \quad \underline{x}_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^\top$$

für 0 s bis 15 s mit der MATLAB-Funktion `ode45`³ gelöst, die Trajektorie ist in Abb. 4.2 zu sehen.

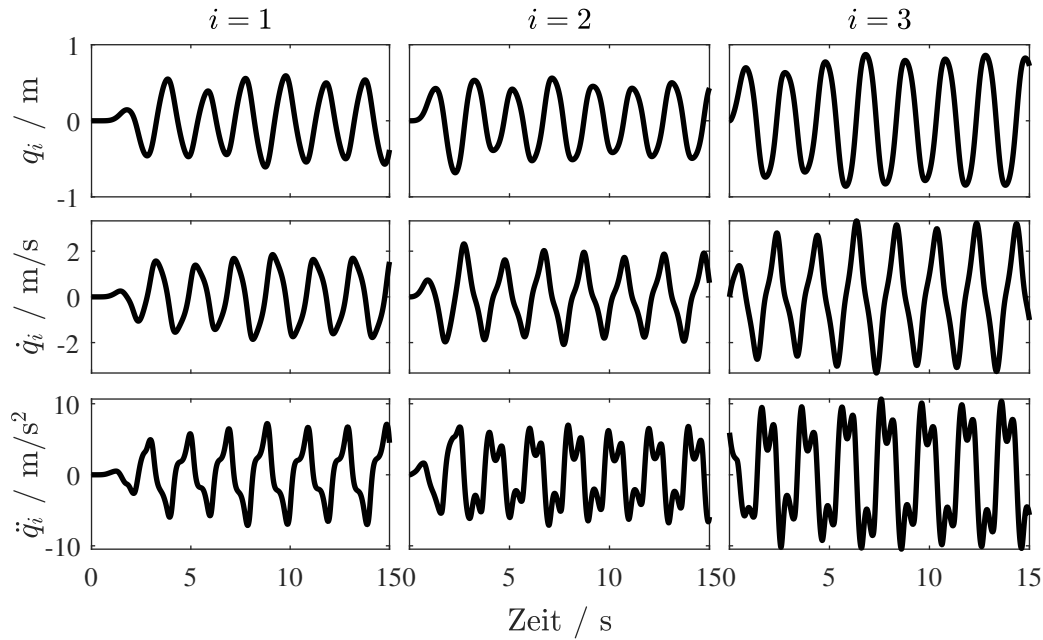


Abbildung 4.2: Synthetische Messung des Systemzustands $\underline{x}$ des Drei-Massen-Schwingers

Für den Fall der nur teilweisen Beobachtbarkeit des Systems wird in dieser Anwendung davon ausgegangen, dass nur die relativen Bewegungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Massen zur Verfügung stehen, also

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_2 - q_1 \\ q_3 - q_2 \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{23} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{23} \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}. \quad (4.4) \\
 \Rightarrow \underline{y} &= \underline{C} \underline{x}
 \end{aligned}$$

In Abb. 4.3 ist die im Training verwendete Trajektorie zu sehen.

Es ist zu beachten, dass $\underline{y}$ weniger Elemente als $\underline{x}$ enthält, was impliziert, dass die Transformation $\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$ eine Reduktion der Dimensionalität darstellt und insbesondere die Matrix $\underline{C}$ nicht invertierbar ist. Dadurch ist eine exakte Rekonstruktion des Systemzustandes $\underline{x}$ aus dem Systemausgang $\underline{y}$ mittels einer einfachen Inversen, also $\underline{x} = \underline{C}^{-1} \underline{y}$, nicht möglich. Auch mit Hilfe der Moore-Penrose-Inversen $\underline{C}^+$ ist eine vollständige Rückgewinnung der ursprünglichen Information nicht gewährleistet, da der Verlust an Information durch die Dimensionreduktion strukturell gegeben ist.

Die hier präsentierten Ergebnisse hängen jedoch entscheidend von der Wahl der Matrix $\underline{C}$ ab. Da die Struktur und Eigenschaften von $\underline{C}$ direkt den Grad des Informationsverlustes beeinflussen, können die Ergebnisse nicht allgemeingültig formuliert werden. Stattdessen

³<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>

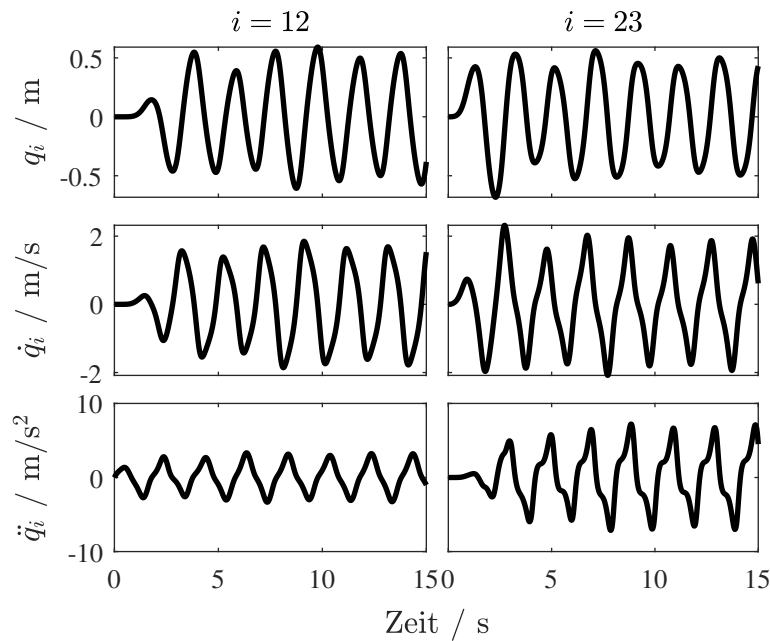


Abbildung 4.3: Synthetische Messung des Systemausgangs $\underline{y}$ des Drei-Massen-Schwingers

sind sie stark kontextabhängig und erfordern eine sorgfältige Analyse der zugrundeliegenden Transformation sowie des damit verbundenen Informationsverlustes, um valide Interpretationen zu ermöglichen.

Im Rahmen dieses Kapitels sollen die Leistungsfähigkeit und Robustheit der hybriden Modellierungskonzepte systematisch untersucht werden. Zunächst werden relevante Aspekte für die verschiedenen Verfahren berücksichtigt, wie die Wahl des Eingang in das Black-Box-Modell (bei Verfahren auf Ebene des Systemausgangs), die Schrittweite (bei diskreten Verfahren), und die Anordnung (bei diskreten Verfahren).

Nachdem die grundsätzliche Funktionsfähigkeit aller fünf Verfahren dargelegt ist werden die Verfahren hinsichtlich verschiedener Untersuchungsaspekte analysiert. Zur Übersicht sind diese in Abb. 4.4 (in Anlehnung an Abb. 2.3) farblich gekennzeichnet:

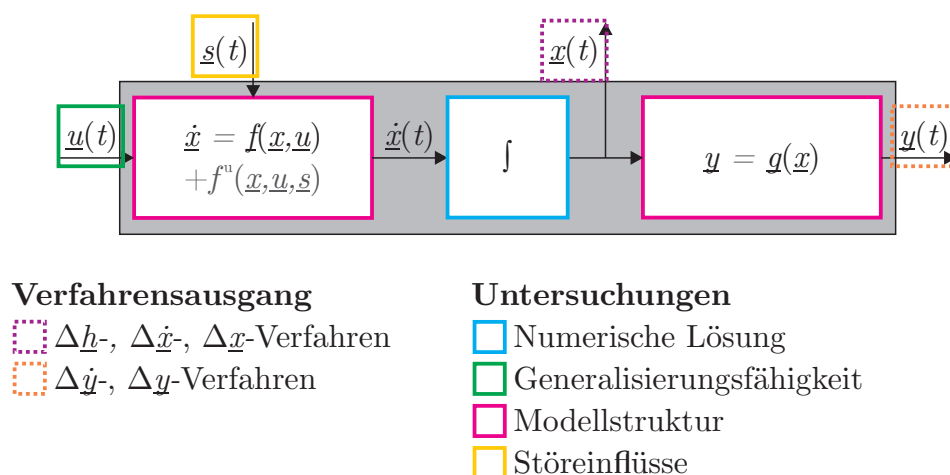


Abbildung 4.4: Zuordnung der unterschiedlichen Untersuchungsaspekte in der Zustandsraumdarstellung

Numerische Lösung (blau): Zunächst wird die numerische Lösung betrachtet, dazu zählen die Wahl eines geeigneten Integrationsverfahrens, sowie die resultierenden Rechenzeiten

Generalisierungsfähigkeit (grün): Anschließend wird die Generalisierungsfähigkeit des Modells bei variierenden Eingangssignalen untersucht. Dabei wird sowohl die zeitliche Generalisierung über den im Training verwendeten Zeithorizont hinaus, als auch die räumliche Generalisierung über die im Training verwendeten Eingangssignale hinaus untersucht.

Modellstruktur (magenta): Darüber hinaus werden strukturelle Modellvariationen analysiert, wie optimierte Systemparameter, Parameterunsicherheiten, die Wahl eines linearen Modells, sowie die Auswirkungen einer Reduktion der Freiheitsgrade durch vereinfachte White-Box-Modelle (bei Verfahren auf Ebene des Systemausgangs).

Störeinflüsse (gelb): Abschließend wird die Sensitivität der Modelle gegenüber verschiedenen Störeinflüssen wie Messrauschen, konstante Offset-Abweichungen und Trends untersucht. Diese Störeinflüsse wirken dabei nur auf den unbekannten Teil der Dynamik $\underline{f}^u$.

Zur Bewertung der Genauigkeit der hybriden Modelle wird die normalisierte Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (NRMSE; Gleichung (2.7)) verwendet.

4.1.1 Referenzmodell

Dieses Modell dient als Basis, um eine Referenz für die folgenden Untersuchungen zu schaffen. Dabei werden bei den Verfahren auf Ebene des Systemausgangs die unterschiedlichen Möglichkeiten der Wahl des Eingangs in das Black-Box-Modell, und bei den diskreten Verfahren die Abhängigkeit von der Simulationsschrittweite Δt untersucht. Ein Vergleich aller Verfahren findet sich am Ende des Kapitels, dort sind auch in Abb. 4.6 a) die NRMSE-Werte grafisch dargestellt, die numerischen Werte sind in Tabelle B.2 im Anhang zusammengefasst.

4.1.1.1 Kraftbasiertes kontinuierliches $\Delta \underline{h}$ -Verfahren

Im Rahmen des kraftbasierten kontinuierlichen $\Delta \underline{h}$ -Verfahrens sind die unbekannten Kräfte $\underline{h}^u$ in Gleichung (4.2) als $\Delta \underline{h}$ in Gleichung (3.3) aufzufassen. Für jedes Element i des Kraftvektors wird ein separates Gauß-Prozess-Regression-Modell (GPR; siehe Kapitel 2.3.1.4) mit Matérn-5/2-Kernel trainiert:

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{h,i} : [\underline{x}^*, \underline{\tilde{u}}] \mapsto \Delta h_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

4.1.1.2 Kontinuierliches $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahren

Im Rahmen des kontinuierlichen $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahrens ist die unbekannte Dynamik $\underline{f}^u$ in Gleichung (4.3) als $\Delta \underline{\dot{x}}$ in Gleichung (3.4) aufzufassen. Da beim Drei-Massen-Schwinger eine DGL zweiter Ordnung vorliegt, werden nur die Diskrepanzen der Beschleunigungen $\Delta \ddot{q}_i$ betrachtet. Die zu lösende DGL lautet damit

$$\underline{\dot{x}}^* = \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{\tilde{u}}) + [0, 0, 0, \Delta \ddot{q}_1, \Delta \ddot{q}_2, \Delta \ddot{q}_3]^\top.$$

Für jedes $\Delta\ddot{q}_i$ wird ein separates GPR-Modell mit Matérn-5/2-Kernel trainiert:

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{\dot{x},i} : [\underline{x}^*, \underline{\tilde{u}}] \mapsto \Delta\ddot{q}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

4.1.1.3 Kontinuierliches $\Delta\dot{y}$ -Verfahren

Zur Anwendung des $\Delta\dot{y}$ -Verfahrens wird davon ausgegangen, dass $\underline{\tilde{x}}$ nicht zur Verfügung steht und nur $\underline{\tilde{y}}$ gegeben ist. Mithilfe von Gleichung (3.7) und der Moore-Penrose Pseudoinversen lässt sich die DGL (4.3) in $\dot{y}$ als

$$\dot{y} = \underline{C}f(\underline{C}^+ \underline{y}, \underline{u})$$

formulieren und das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren anwenden.

Bevor jedoch mit der Ausgangsmatrix $\underline{C}$ nach Gleichung (4.4) gearbeitet wird, soll in einem ersten Schritt nachgewiesen werden, dass das $\Delta\dot{y}$ -Verfahren für invertierbare Matrizen $\underline{C}_{\text{inv}}$ funktioniert. Dafür wird

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - q_1 \\ q_3 - q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - q_1 \\ q_3 - q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{y}_{\text{inv}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}_{\text{inv}}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

definiert, wo neben den relativen Bewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen auch die absolute Bewegung der ersten Masse m_1 zur Verfügung steht. Es wird mit GPR-Modellen mit Matérn-5/2-Kernel mit dem Eingang $[\underline{y}^*, \underline{\tilde{u}}]$ gearbeitet.

In Tabelle 4.1 ist der NRMSE für das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren und das kontinuierliche $\Delta\dot{y}$ -Verfahren zusammengefasst. Die Ergebnisse des $\Delta\dot{y}$ -Verfahrens erreichen hier sogar eine geringfügig niedrigeren NRMSE als das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren. Der NRMSE des $\Delta\dot{y}$ -Verfahrens für den Ausgangsvektor $\underline{y}_{\text{inv}}$ befindet sich in einer ähnlichen Größenordnung. Die Funktionalität dieses Ansatzes für invertierbare Matrizen ist somit nachgewiesen, so dass im Folgenden mit der nicht-invertierbaren Matrix $\underline{C}$ nach Gleichung (4.4) gearbeitet wird.

Tabelle 4.1: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen des $\Delta\dot{x}$ - und des $\Delta\dot{y}$ -Verfahrens für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und den Ausgangsvektor $\underline{y}$ bei einer invertierbaren Ausgangsmatrix $\underline{C}_{\text{inv}}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta\dot{x}$	0,0479	0,0363	0,0306	0,0467	0,0297	0,0278
$\Delta\dot{y}$	0,0428	0,0324	0,0208	0,0411	0,0281	0,0198
	q_1	$q_2 - q_1$	$q_3 - q_2$	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2 - \dot{q}_1$	$\dot{q}_3 - \dot{q}_2$
$\Delta\dot{y}$	0,0428	0,0229	0,0187	0,0411	0,0327	0,0306

Anordnung Beim $\Delta\dot{y}$ -Verfahren stellt sich die Frage des richtigen Eingangs für das Black-Box-Modell, es kann sowohl der Systemausgang $\underline{y}^*$ als auch der Zustandsvektor $\underline{x}^+ = \underline{C}^+ \underline{y}^*$ als Eingang dienen. Zum Vergleich werden jeweils zwei GPR-Modelle mit Matérn-5/2-Kernel trainiert. In Abb. 4.5 a) sind die Modellierungsergebnisse für beide Anordnungen für den Systemausgang q_{12} dargestellt, in b) ist der zugehörige NRMSE für alle Elemente in $\underline{y}$ dargestellt. Beide Anordnungen liefern gute Ergebnisse. Mit dem Eingang $[\underline{y}^*, \underline{\tilde{u}}]$ ist der NRMSE jedoch etwas niedriger, daher wird im Folgenden mit

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{\dot{y},i} : [\underline{y}^*, \underline{\tilde{u}}] \mapsto \Delta\ddot{q}_i, \quad i \in \{12, 23\}$$

gearbeitet.

In Abb. 4.5 c) sind die Modellierungsergebnisse für die (nicht-messbare) Verschiebung q_2 dargestellt. Es ist zu sehen, dass beide Modelle nicht auf den Messungen liegen, aber sie liegen nahe beieinander und rekonstruieren das selbe falsche Verhalten, welches genau $\underline{C}^+ \underline{\bar{y}}$ entspricht.

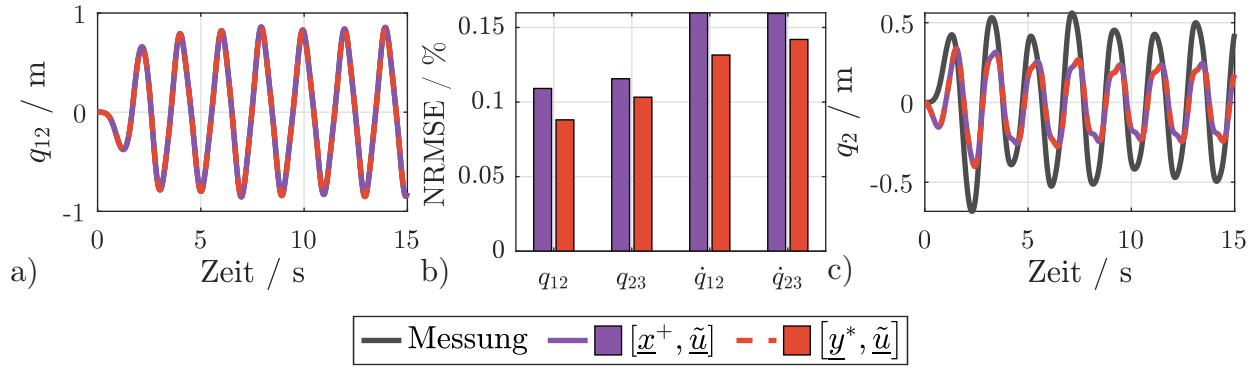


Abbildung 4.5: Vergleich zwischen Messung und Ergebnissen des $\Delta\dot{y}$ -Verfahrens mit den zwei möglichen Eingängen des Black-Box-Modells: a) Verlauf für q_{12} , b) NRMSE (in %), c) Verlauf für q_2

4.1.1.4 Diskretes $\Delta\dot{x}$ -Verfahren

Beim $\Delta\dot{x}$ -Verfahren erfolgt die Korrektur auf Ebene des Zustandsvektors $\underline{x}$ nach Gleichung (3.8), d. h. über $\Delta\dot{\underline{x}} = [\Delta\dot{q}_1, \Delta\dot{q}_2, \Delta\dot{q}_3, \Delta\dot{q}_1, \Delta\dot{q}_2, \Delta\dot{q}_3]^\top$. Zur Gewährleistung der physikalischen Kontinuität und zur Reduktion von Rechenaufwand wird die Diskrepanz der Geschwindigkeit betrachtet und

$$\dot{q}_{i,n}^* = \dot{q}_{i,n} + \Delta\dot{q}_{i,n}$$

gerechnet. Die Verschiebung lässt sich dann beispielsweise mittels Trapezformel über

$$q_{i,n}^* = q_{i,n-1}^* + \frac{\Delta t}{2} (\dot{q}_{i,n-1}^* + \dot{q}_{i,n}^*)$$

bestimmen [93]. [123, 124]

Anordnung Das $\Delta\hat{x}$ -Verfahren ist sowohl in paralleler, als auch in serieller Anordnung umsetzbar. Für den Drei-Massen-Schwinger werden beide Anordnungen umgesetzt und die Ergebnisse verglichen. Für den Vergleich wird mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s gearbeitet, bevor das optimale Δt im nächsten Schritt ermittelt wird. Pro Anordnung wird für jedes Δq_i ein separates GPR-Modell mit Matérn-5/2-Kernel trainiert (siehe Kapitel 2.3.1.4). Der NRMSE beider Anordnungen ist in Abb. 4.6 a) zu sehen. Zielt die Anwendung auf eine hohe Genauigkeit ab, ist die serielle Anordnung der parallelen vorzuziehen. Vor dem Hintergrund der Rechenzeit könnte vermutet werden, dass eine parallel Anordnung Vorteile hat, dies lässt sich in MATLAB jedoch nicht überprüfen, da der Parallelisierungs-Overhead die Ergebnisse verfälscht. Dieser entsteht durch die Aufteilung und Verwaltung der Aufgaben auf mehrere Worker, den Datenaustausch zwischen Hauptprozess und Arbeitsspeichern sowie durch die Synchronisation der Ergebnisse. Bei kurzen oder stark sequentiell abhängigen Rechenschritten, wie sie hier vorliegen, kann dieser zusätzliche Aufwand die eigentliche Berechnungszeit deutlich übersteigen und damit zu irreführenden Laufzeitvergleichen führen^{4,5}.

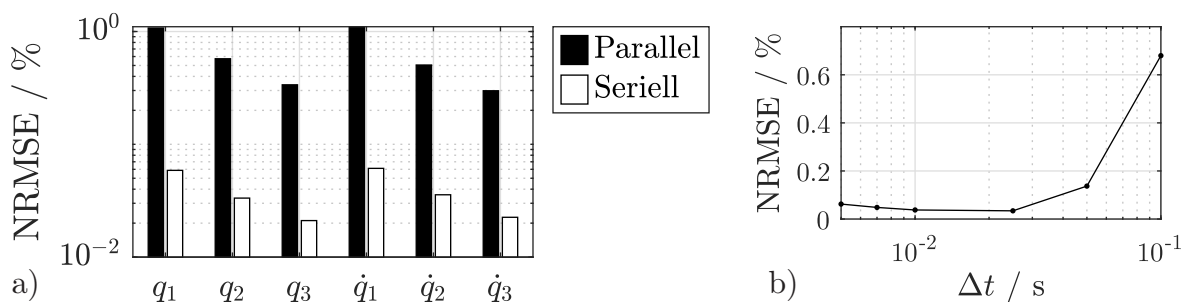


Abbildung 4.6: a) NRMSE (in %) zwischen Messung und den Ergebnissen des $\Delta\hat{x}$ -Verfahrens in zwei Anordnungen, und b) NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen des $\Delta\hat{x}$ -Verfahrens (seriell) in Abhängigkeit der Schrittweite

Im Folgenden wird für den Drei-Massen-Schwinger mit der parallelen Anordnung gearbeitet, so dass die Black-Box-Modelle über

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{x,i} : [\tilde{x}_n, \tilde{u}_n] \mapsto \Delta \dot{q}_{i,n}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

definiert sind.

Schrittweite Bei der diskreten hybriden Modellierung spielt die Wahl der richtigen Schrittweite eine entscheidende Rolle: Wird sie zu groß gewählt sind die Ergebnisse ungenau; ist sie jedoch zu klein steigt die Rechenzeit deutlich an. Für die Schrittweiten $\Delta t \in \{0,005; 0,007; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1\}$ s werden jeweils neue Black-Box-Modelle trainiert und die hybride Modellierung angewandt, wobei von einer ausreichend feinen Abtastrate ausgegangen wird, sodass das Ausgangssignal stets downgesampelt wird. In

⁴<https://de.mathworks.com/help/parallel-computing/choose-spmdd-parfor-parfeval.html>

⁵<https://de.mathworks.com/help/parallel-computing/decide-when-to-use-parfor.html>

Abb. 4.6 b) ist zu sehen wie sich der mittlere Modellfehler der Verschiebungen

$$\frac{1}{3} \left(\text{NRMSE}(\underline{q}_1^*, \bar{\underline{q}}_1) + \text{NRMSE}(\underline{q}_2^*, \bar{\underline{q}}_2) + \text{NRMSE}(\underline{q}_3^*, \bar{\underline{q}}_3) \right) \quad (4.6)$$

mit der Schrittweite Δt verhält. Es fällt auf, dass der Fehler zunächst mit sinkender Schrittweite ebenfalls kleiner wird, dann aber ab $\Delta t = 0,01$ s wieder ansteigt. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass der Black-Box-Anteil bei kleinen Schrittweiten sehr kleine Diskrepanzen approximieren muss, was die Trainierbarkeit des Black-Box-Modells erschwert. Es entsteht somit ein Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Approximationsqualität der Black-Box. Aus diesen Ergebnissen lässt sich $\Delta t = 0,025$ s als eine gute Wahl für die Schrittweite ableiten.

4.1.1.5 Diskretes Δy -Verfahren

Zur Anwendung des Δy -Verfahrens wird davon ausgegangen, dass $\bar{\underline{x}}$ nicht zur Verfügung steht und nur $\bar{\underline{y}}$ gegeben ist. Mithilfe der Moore-Penrose-Pseudoinversen lässt sich nach Gleichung (3.9) vorgehen.

Wie bereits beim kontinuierlichen Δy -Verfahren wird auch hier zunächst ein Funktionsnachweis des Vorgehens mit einer invertierbaren Ausgangsmatrix $\underline{C}_{\text{inv}}$ nach Gleichung (4.5) durchgeführt. Es wird mit GPR-Modellen mit Matérn-5/2-Kernel mit dem Eingang $[\underline{x}^*, \tilde{\underline{u}}]$ gearbeitet.

In Tabelle 4.2 ist der NRMSE zwischen Messung und den Ergebnissen des diskreten Δx - und des diskreten Δy -Verfahrens zusammengefasst. Anders als beim kontinuierlichen Δy -Verfahren liegt hier etwa der Faktor 10 zwischen den Ergebnissen des Δx - und des Δy -Verfahrens für den Zustandsvektor $\underline{x}$. Eine Identitätsabbildung, bei der die Trainingsdaten ohne Nutzung eines Black-Box-Modells direkt zurückgegeben werden, liefert NRMSE-Werte für $\underline{x}$ in der Größenordnung von 10^{-14} . Dies deutet darauf hin, dass der Unterschied im Black-Box-Modell begründet ist. Im Rahmen dieser Arbeit konnte für diese Anwendung jedoch kein Modell gefunden werden, dass bessere Ergebnisse liefert. Auch wenn die Genauigkeit der Ergebnisse gesunken ist, sind die Ergebnisse nach wie vor gut. Daher wird im Folgenden mit der nicht-invertierbaren Matrix $\underline{C}$ nach Gleichung (4.4) gearbeitet. Hier erzielten Bagged Trees-Modelle (BT; siehe Kapitel 2.3.1.5) beim Training eine höhere Genauigkeit als GPR-Modelle.

Tabelle 4.2: NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen des Δx - und des Δy -Verfahrens für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und den Ausgangsvektor $\underline{y}$ bei einer invertierbaren Ausgangsmatrix $\underline{C}_{\text{inv}}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
Δx	0,0489	0,0306	0,0231	0,0530	0,0408	0,0283
Δy	0,5620	0,4266	0,2233	0,4569	0,2873	0,1649
	q_1	$q_2 - q_1$	$q_3 - q_2$	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2 - \dot{q}_1$	$\dot{q}_3 - \dot{q}_2$
Δy	0,5620	0,2634	0,1842	0,4569	0,3698	0,2413

Anordnung Für den Drei-Massen-Schwinger werden alle vier Anordnungen aus Abb. 3.4 umgesetzt und die Ergebnisse verglichen. Dafür werden pro Anordnung und für alle vier

Elemente in $\underline{y}$ jeweils ein BT-Modell trainiert; im Gegensatz zum diskreten $\Delta \underline{x}$ -Verfahren hat sich hier die alleinige Berücksichtigung der Geschwindigkeit nicht als ausreichend herausgestellt. Es wird mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s gearbeitet, die optimale Schrittweite wird erst im nächsten Schritt ermittelt.

Tabelle 4.3 enthält den NRMSE zwischen Messung und Ergebnissen aller vier Anordnungen für den Systemausgang $\underline{y}$. Alle Anordnungen liefern gute Ergebnisse und der NRMSE ist sich sehr ähnlich, wobei der von „seriell, $\underline{x}$ “ etwas niedriger ist, weswegen diese Anordnung im Folgenden verwendet wird. Wie beim kontinuierlichen $\Delta \underline{y}$ -Verfahren kann der Zustandsvektor $\underline{x}$ bei nicht-invertierbarer Ausgangsmatrix $\underline{C}$ nicht rekonstruiert werden.

Im Folgenden wird für den Drei-Massen-Schwinger mit der seriellen Anordnung und dem Eingang $\tilde{x}$ gearbeitet, so dass die Black-Box-Modelle über

$$\underline{\Delta}_{\xi}^{y,i} : [\tilde{x}_n, \underline{u}_n] \mapsto \Delta y_{i,n}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

definiert sind.

Tabelle 4.3: NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen des diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahrens in paralleler und serieller Struktur, mit $[\underline{x}, \underline{u}]$ und $[\underline{y}, \underline{u}]$ als Eingang in das Black-Box-Modell

	parallel				seriell			
	$\underline{q}_{12}$	$\underline{q}_{23}$	$\dot{\underline{q}}_{12}$	$\dot{\underline{q}}_{23}$	$\underline{q}_{12}$	$\underline{q}_{23}$	$\dot{\underline{q}}_{12}$	$\dot{\underline{q}}_{23}$
$[\underline{x}, \underline{u}]$	1.5158	1.7417	2.0287	2.3572	0.9632	1.5135	1.3835	1.9599
$[\underline{y}, \underline{u}]$	1.6832	1.6165	2.2563	2.0903	1.5551	1.4894	2.1503	1.8964

Schrittweite Auch beim $\Delta \underline{y}$ -Verfahren spielt die Wahl der richtigen Schrittweite Δt eine entscheidende Rolle, weswegen das hybride Modell für $\Delta t \in \{0,005; 0,007; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1\}$ s trainiert und ausgewertet wird. Im Gegensatz zum $\Delta \underline{x}$ -Verfahren steigt der mittlere NRMSE der Verschiebung

$$\frac{1}{2} \left(\text{NRMSE}(\underline{q}_{12}^*, \bar{\underline{q}}_{12}) + \text{NRMSE}(\underline{q}_{23}^*, \bar{\underline{q}}_{23}) \right) \quad (4.7)$$

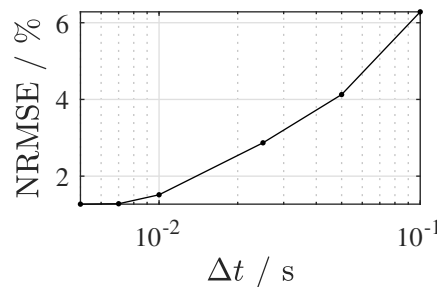


Abbildung 4.7: NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen des $\Delta \underline{y}$ -Verfahrens in Abhängigkeit der Schrittweite

mit steigender Schrittweite monoton an, ein Minimum lässt sich nicht ausmachen. Als Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit wird im folgenden mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s gearbeitet.

4.1.1.6 Ergebnisse

In Abb. 4.8 ist der NRMSE für alle fünf Verfahren grafisch dargestellt, die numerischen Werte sind in Tabelle B.2 im Anhang aufgeführt.

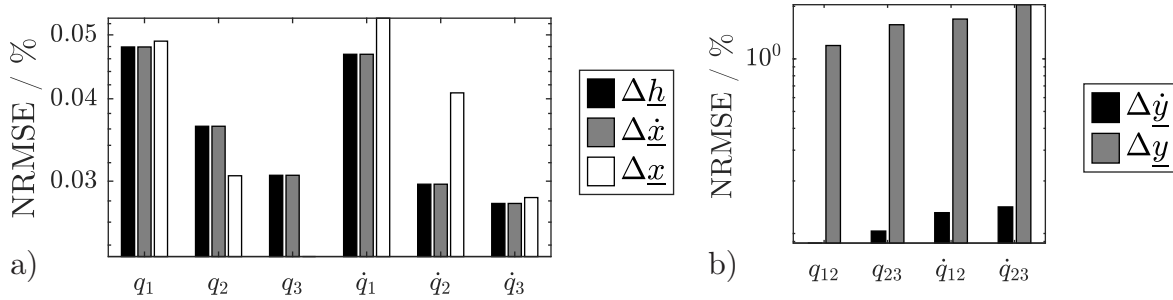


Abbildung 4.8: NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen aller fünf hybriden Verfahren für den Referenzfall

In a) sind die Ergebnisse der Verfahren aufgeführt, die den Zustandsvektor $\underline{x}$ rekonstruieren, also $\Delta \underline{h}$, $\Delta \dot{\underline{x}}$ und $\Delta \underline{x}$. Die Genauigkeit aller drei Verfahren ist in derselben Größenordnung und es gibt nur kleinere Abweichungen. Zwischen den Ergebnissen der kontinuierlichen Verfahren lässt sich kein Unterschied erkennen. Dies liegt daran, dass sich das kraftbasierte $\Delta \underline{h}$ -Verfahren durch eine einfache Umformung aus dem $\Delta \dot{\underline{x}}$ -Verfahren ergibt und sich die Diskrepanzen nur um den Faktor $\underline{M}$ unterscheiden.

Bei der Abbildung der Verschiebungsgrößen ist der NRMSE des diskreten $\Delta \underline{x}$ -Verfahrens für q_2 und q_3 niedriger als der der kontinuierlichen Verfahren, bei den Geschwindigkeitsgrößen ist der NRMSE des kontinuierlichen Verfahrens niedriger. Das diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren korrigiert unmittelbar auf Ebene der Zustandsgrößen und wirkt daher direkt auf die Verschiebungen. Beim kontinuierlichen $\Delta \dot{\underline{x}}$ -Verfahren erfolgt die Korrektur hingegen auf Beschleunigungsebene und beeinflusst die Verschiebung erst nach zweifacher Integration, wodurch sich Integrationsfehler akkumulieren.

In b) sind die Ergebnisse der Verfahren aufgeführt, die den Systemausgang $\underline{y}$ rekonstruieren, also $\Delta \dot{\underline{y}}$ und $\Delta \underline{y}$. Der NRMSE des kontinuierlichen $\Delta \dot{\underline{y}}$ -Verfahrens ist für alle Elemente des Systemausgangs deutlich niedriger, als der des diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahrens. Dies hat sich durch die Untersuchungen mit invertierbarer Messgleichung $\underline{C}_{\text{inv}}$ bereits angekündigt. Dennoch liegt der NRMSE auch für das diskrete $\Delta \underline{y}$ -Verfahren im Bereich weniger Prozent.

4.1.2 Numerische Lösung

Die numerische Lösung des Zustandsraummodells (blau in Abb. 4.4) bildet das Fundament der Simulation und beeinflusst maßgeblich sowohl die Genauigkeit als auch die Effizienz der Berechnungen. Dieser Abschnitt widmet sich zwei wesentlichen Aspekten, die für die praktische Anwendbarkeit hybrider Modellierungsansätze von entscheidender

Bedeutung sind.

Zunächst wird in Kapitel 4.1.2.1 der Einfluss von numerischen Integrationsverfahrens betrachtet. Für die praktische Anwendbarkeit der vorgestellten hybriden Modellierungsansätze ist gerade die Austauschbarkeit des numerischen Integrationsverfahrens von zentraler Bedeutung. Insbesondere bei der Übertragung in andere Softwareumgebungen ist nicht immer gewährleistet, dass identische Integrationsverfahren während des Trainings und in der späteren Anwendung zur Verfügung stehen. Dies betrifft beispielsweise Co-Simulationsszenarien, bei denen unterschiedliche Subsysteme mit jeweils eigenen Integrationsverfahren und festen internen Zeitschrittweiten gekoppelt werden.

Anschließend werden in Kapitel 4.1.2.2 die Rechenzeiten analysiert, die sich aus der Kombination von numerischer Integration und den Black-Box-Komponenten ergeben. Die Effizienz der numerischen Lösung ist entscheidend für die Einsetzbarkeit in echtzeitfähigen Anwendungen und bei umfangreichen Parameterstudien.

4.1.2.1 Numerisches Integrationsverfahren

Die Wahl des numerischen Integrationsverfahrens hat entscheidenden Einfluss auf die Genauigkeit, Stabilität und Rechenzeit der Simulation dynamischer Systeme. In diesem Kapitel wird die Auswirkung der Verwendung eines einfacheren Verfahrens auf die Ergebnisse der hybriden Modellierung untersucht. Alle bisherigen Berechnung sind unter Verwendung des Dormand-Prince-Verfahrens aus der Familie der Runge-Kutta-Verfahren entstanden (siehe Kapitel 2.2.4). Nachfolgend wird das explizite Euler-Verfahren mit der festen Zeitschrittweite Δt verwendet und mit *ode1* bezeichnet (siehe Gleichung (2.9)).

Bei den kontinuierlichen Verfahren wird mit einer Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s gearbeitet. Die Genauigkeit aller drei Verfahren nimmt deutlich ab. Während sich dies beim Δh - und beim $\Delta \dot{x}$ -Verfahren jedoch auf leichte Abweichungen an den Umkehrpunkten beschränkt, wobei der grundsätzliche Kurvenverlauf noch erkennbar ist, sind die Abweichungen beim $\Delta \dot{y}$ -Verfahren signifikanter, wie in Abb. 4.9 dargestellt. Für den Zustand q_{12} ist eine ansteigende Amplitude und eine leicht ansteigende Frequenz zu sehen, für den Zustand q_{23} wird die Schwingung ab einem gewissen Zeitpunkt scheinbar von einer zweiten überlagert.

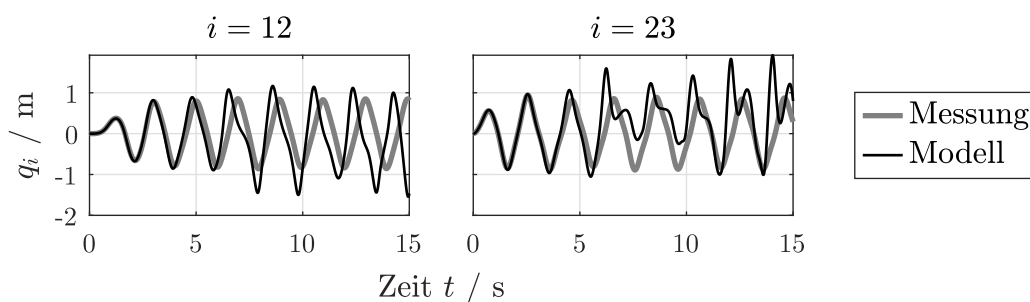


Abbildung 4.9: Vergleich zwischen Messung und Ergebnissen des $\Delta \dot{y}$ -Verfahrens unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens

Bei den diskreten Verfahren der hybriden Modellierung beeinflusst die Wahl des numerischen Integrationsverfahrens nicht nur die zeitliche Integration, sondern auch die berechnete Diskrepanz zwischen White-Box- und hybridem Modell was ein Neutraining sinnvoll, wenn nicht sogar notwendig macht. Für das diskrete $\Delta \underline{x}$ -Verfahren mit $\Delta t = 0,025$ s zeigt

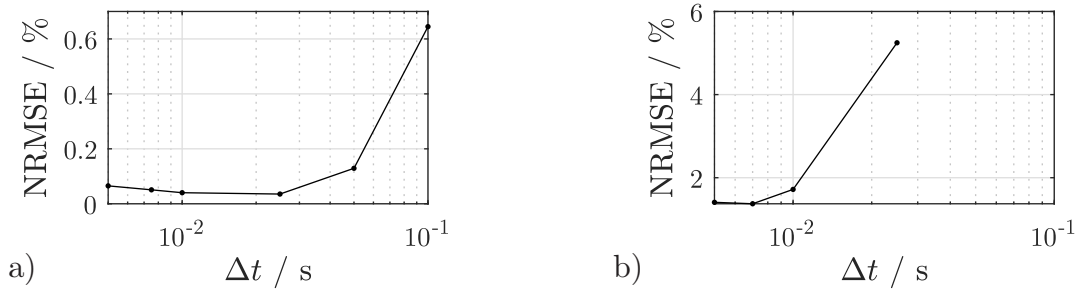


Abbildung 4.10: NRMSE zwischen Messung Ergebnissen a) des Δx -Verfahrens und b) des Δy -Verfahrens unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens in Abhängigkeit der Schrittweite

sich eine Differenz zwischen den in Kapitel 4.1.1 ermittelten Diskrepanzen und den auf Basis des expliziten Euler-Verfahrens berechneten Diskrepanzen. Diese Abweichung liegt für alle drei betrachteten Zustände in einer Größenordnung von 10^{-3} . Eine vergleichbare Größenordnung liegt auch für das diskrete Δy -Verfahren vor.

Findet kein Neutraining statt verschlechtern sich die Ergebnisse beider diskreter Verfahren. Beim Δx -Verfahren betrifft dies hauptsächlich die Umkehrpunkte, beim Δy -Verfahren liegt auch ein minimaler Phasenversatz vor. Dies führt zu einem leicht gestiegenen NRMSE-Werten. Insgesamt ist die Modellgüte beider Verfahren aber sehr gut.

Mit Neutraining bewirkt die Änderung des numerischen Integrationsverfahrens nahezu keine Reduktion der Modellgenauigkeit, die Fehler, die durch das numerische Integrationsverfahren entstehen, können kompensiert werden. Unabhängig ob mit oder ohne Neutraining führt der Einsatz des expliziten Euler-Verfahrens aufgrund der festen Schrittweite und der einfachen Iterationsvorschrift zu einer erheblichen Reduktion der Rechenzeit.

Des weiteren wurden die diskreten Verfahren in Kombination mit dem Euler-Verfahren für unterschiedliche Schrittweiten untersucht, dafür wurden wieder die Schrittweiten $\Delta t \in \{0,005; 0,007; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1\}$ s untersucht. In Abb. 4.10 sind in a) die Ergebnisse des Δx -Verfahrens dargestellt. Diese ähneln den Ergebnissen des Referenzmodells in Abb. 4.6 b) sehr, ab $\Delta t > 0,025$ s steigt der NRMSE deutlich an. In b) sind die Ergebnisse des Δy -Verfahrens dargestellt. Auch hier steigt der NRMSE mit steigender Schrittweite ebenfalls an. Zu Beginn ähnelt die Kurve der unter Verwendung des Dormand-Prince-Verfahrens in Abb. 4.7, für $\Delta t > 0,025$ s konnten jedoch keine numerischen Lösungen mehr berechnet werden.

Es ist zu berücksichtigen, dass mit der Wahl des expliziten Euler-Verfahrens bewusst ein stark vereinfachtes und damit überspitztes Szenario betrachtet wurde. Die beobachteten Abweichungen stellen daher keine allgemeingültige Aussage über die Eignung kontinuierlicher Verfahren dar, sondern verdeutlichen vielmehr deren erhöhte Sensitivität gegenüber numerischen Integrationsfehlern bei sehr einfachen Integrationsschemata.

Für eine gute Vergleichbarkeit wird im Folgenden mit dem Dormand-Prince-Verfahren (`ode45`) gearbeitet.

4.1.2.2 Rechenzeit

Zur Analyse der Rechenzeit wurden alle Verfahren jeweils zehnmal mit aktiviertem MATLAB-Profilier (`profile`⁶) ausgeführt, die Ergebnisse wurden gemittelt. Dadurch erhöht sich zwar die absolute Rechenzeit, dieser Effekt tritt jedoch bei allen Methoden gleichermaßen auf, sodass die Vergleichbarkeit der Ergebnisse erhalten bleibt. Die verwendete Hard- und Software ist Tabelle A.1 im Anhang zu entnehmen.

Die untersuchten Setups sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Für die diskreten Verfahren wurden insbesondere die Schrittweite Δt sowie die verwendete numerischen Integrationsverfahren variiert. Bei den kontinuierlichen Verfahren wurde das Integrationsverfahren nicht gewechselt, da sich dies wie in Kapitel 4.1.2.1 gezeigt negativ auf die Genauigkeit der Verfahren auswirkt. Für das Δy -Verfahren wurde zusätzlich ein anderer Algorithmus für das Black-Box-Modells verwendet.

Tabelle 4.4: Betrachtete Setups zur Untersuchung der Rechenzeit

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
	$\Delta \underline{h}$	$\Delta \underline{\dot{x}}$	$\Delta \underline{\dot{y}}$	$\Delta \underline{x}$	$\Delta \underline{x}$	$\Delta \underline{x}$	$\Delta \underline{y}$	$\Delta \underline{y}$	$\Delta \underline{y}$
Δt	/	/	/	0,01 s	0,025 s	0,025 s	0,01 s	0,01 s	0,01 s
Verfahren	ode45	ode45	ode45	ode45	ode45	ode1	ode45	ode45	ode1
Black-Box Modell	GPR	GPR	GPR	GPR	GPR	GPR	BT	GPR	GPR

Oben in Abb. 4.11 ist die Rechenzeit pro Setup in dargestellt. Die Rechenzeit der Black-Box-Anteile ist schwarz markiert und wurde über die, in der Funktion `predict` verbrachte Zeit erfasst. Vereinfachend entspricht die verbleibende Zeit der Rechenzeit für die White-Box-Anteile, welche dadurch neben der eigentlichen Integration auch Kopplungs- und Transformationsoperationen umfassen. Zusätzlich ist jeweils die Anzahl der Auswertungen eines Black-Box-Modells angegeben, welche mit der Anzahl der Aufrufe von `predict` gleichgesetzt wird.

Unten in Abb. 4.11 sind die relativen Anteile von Black-Box- und White-Box-Auswertung an der Gesamtzeit dargestellt.

Bei den kontinuierlichen Verfahren (a)–c)) liegt die Rechenzeit im Allgemeinen unter der der diskreten Verfahren (d)–i)), was an der invasiven Formulierung liegt. Die Auswertung der Black-Box-Anteile nimmt den größten Teil der Rechenzeit ein.

Für das $\Delta \underline{x}$ -Verfahren wird zunächst eine Schrittweite von $\Delta t = 0,01$ s gewählt (d), um einen direkten Vergleich mit dem $\Delta \underline{y}$ -Verfahren zu ermöglichen. Eine Erhöhung der Schrittweite auf $\Delta t = 0,025$ s (e) führt zu einer Reduktion der Anzahl der Berechnungsschritte insgesamt und damit zu einer geringeren Rechenzeit. Der relative Anteil von Black-Box- zu White-Box-Zeit bleibt dabei nahezu unverändert, da in beiden Fällen `ode45` verwendet wird. Beim Wechsel auf `ode1` (f) reduziert sich der Rechenaufwand der White-Box-Anteile, während sich der Anzahl der Black-Box-Auswertungen nicht verändert, sodass der relative Anteil der Black-Box-Zeit an der Gesamtzeit zunimmt.

Beim $\Delta \underline{y}$ -Verfahren (g) zeigt sich ein deutlich höherer Rechenaufwand, was mit der großen

⁶<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/profile.html>

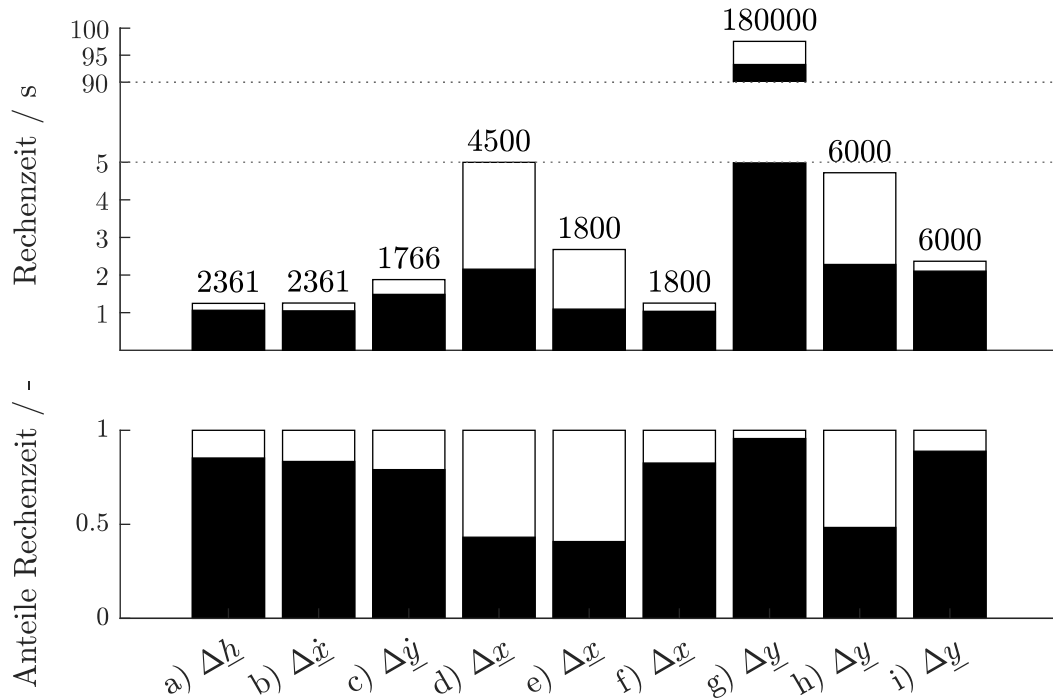


Abbildung 4.11: Absolute und relative Rechenzeit der White-Box- und Black-Box-Anteile der Setups nach Tabelle 4.4

Anzahl an Black-Box-Auswertungen zusammenhängt. Bei diesem Verfahren werden BT-Modelle genutzt, also Ensembles mit jeweils 30 Einzelbäumen, welche alle bei jeder Auswertung durchlaufen werden. Entsprechend werden sehr viele Black-Box-Modelle pro Zeitschritt ausgewertet, der Anteil der White-Box-Rechenzeit ist dagegen vernachlässigbar. Ergänzend wurde daher die Anwendung von GPR-Modellen untersucht (h), wodurch sich eine deutliche Reduktion der Gesamtzeit erzielen ließ. Der relative Black-Box-Anteil liegt bei identischem Setup etwas über dem des $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahrens (e), da vier anstelle von drei Black-Box-Modellen auszuwerten sind. Der Wechsel auf `ode1` (i) zeigt ein analoges Verhalten wie beim $\Delta \underline{\dot{x}}$ -Verfahren.

4.1.3 Generalisierungsfähigkeit

Die Leistungsfähigkeit hybrider Modellierungsansätze zeigt sich insbesondere in ihrer Fähigkeit, auch außerhalb der Trainingsbedingungen zuverlässige Vorhersagen zu liefern. Während das Training typischerweise auf einem begrenzten Datensatz mit spezifischen Eingangssignalen und endlichen Zeithorizonten erfolgt, muss das Modell in der Anwendung häufig mit anderen Betriebsbedingungen und deutlich längeren Simulationszeiträumen umgehen können. Die Untersuchung dieser Generalisierungsfähigkeit, sowohl hinsichtlich variierender Eingangssignale als auch des zeitlichen Verhaltens, ist daher von entscheidender Bedeutung für die praktische Einsetzbarkeit.

Dieser Abschnitt (grün in Abbildung 4.4) widmet sich zwei Aspekten der Modellvalidierung: Zunächst wird in Kapitel 4.1.3.2 das Dynamik- und Zeitverhalten untersucht. Hier steht die zeitliche Extrapolationsfähigkeit im Fokus: Während das Training auf einem Zeithorizont von 15s erfolgte, wird die Modellgüte über einen Simulationszeitraum

von 15 s evaluiert. Dabei wird sowohl das transiente Verhalten, als auch das stationäre Langzeitverhalten analysiert. Diese Untersuchung ist besonders relevant, da Akkumulationseffekte numerischer Fehler oder unzureichend erfasste Systemdynamiken erst über längere Zeithorizonte sichtbar werden können.

Anschließend wird in Kapitel 4.1.3.1 die Interpolation und Extrapolation bei variierenden Eingangssignalen $\underline{u}(t)$ betrachtet. Dabei wird analysiert, wie das Modell auf Eingangssignale reagiert, die sich in ihren Amplituden oder ihren Frequenzen von den Trainingsdaten unterscheiden. Die Unterscheidung zwischen Interpolation (Verhalten innerhalb des Trainingsbereichs) und Extrapolation (Verhalten außerhalb des Trainingsbereichs) gibt dabei Aufschluss über die Robustheit und die Grenzen der Modellgültigkeit.

4.1.3.1 Zeitliche Extrapolation

Zur Untersuchung der Dynamik und des Zeitverhaltens werden im Folgenden alle Verfahren mit einer Messreihe von 15 s trainiert und anschließend für einen Zeitraum von 1500 s simuliert. Dadurch werden sowohl die dynamische Anfangsphase als auch das stationäre Langzeitverhalten erfasst.

Zur Analyse des zeitlichen Modellverhaltens zeigt Abb. 4.12 die Entwicklung des NRMSE zwischen Messung und Modell nach Gleichung (4.6) über die Simulationszeit, in a) für das kontinuierliche $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahren und in b) für das diskrete $\Delta\underline{x}$ -Verfahren. Die Kurve für das $\Delta\underline{h}$ -Verfahren entspricht der des $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahrens und wird daher an dieser Stelle nicht gezeigt. Für die zeitliche Entwicklung wird der NRMSE kumulativ berechnet: Zum Zeitpunkt t_N werden alle Werte vom Simulationsstart t_0 bis zum betrachteten Zeitpunkt t_N berücksichtigt, d. h.

$$\text{NRMSE}((t_n, \bar{q}_i(t_n))_{n=0}^N, (t_n, q_i^*(t_n))_{n=0}^N). \quad (4.8)$$

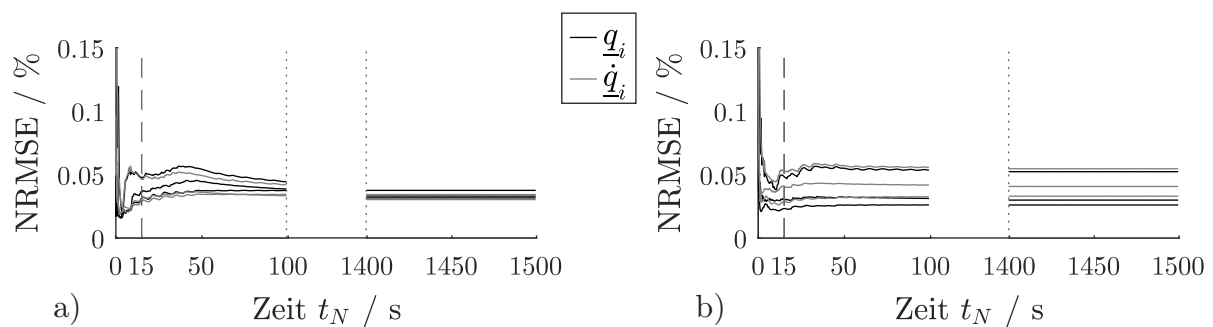


Abbildung 4.12: Entwicklung des NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen a) des $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahrens und b) des $\Delta\underline{x}$ -Verfahrens über der Zeit

Zu Beginn ist der NRMSE sehr hoch. Dies liegt daran, dass die berücksichtigten Messwerte zu Beginn sehr klein sind. Dadurch führen bereits kleine Abweichungen, wenn sie auf kleine Sollwerte bezogen werden, zu sehr hohen Fehlern. Beim kontinuierlichen $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahren an a) erreicht der NRMSE zum Ende der ersten vollen Periode ($t_N = 2$ s; siehe Abb. 4.2) ein lokales Minimum. Dieses lokale Minimum wird gehalten, bis auch

der letzte Zustand (q_1) eine vollständige Schwingung durchlaufen hat. Der unmittelbar folgende Anstieg markiert das transiente Verhalten, da während des Einschwingvorgangs für beide Verfahren die größten Abweichungen auftreten. Ab einem gewissen Zeitpunkt stabilisiert sich der NRMSE und pendelt sich auf einen konstanten Wert ein.

Beim diskreten Δx -Verfahren ist der Verlauf recht ähnlich. Das lokale Minimum nach der ersten vollen Periode ist jedoch deutlich weniger stark ausgeprägt.

In Abb.4.13 ist die zeitliche Entwicklung des NRMSE zwischen Messung und Modell nach Gleichung (4.7) über der Simulationszeit für das kontinuierliche $\Delta \dot{y}$ -Verfahren in a) und für das diskrete Δy -Verfahren in b) dargestellt.

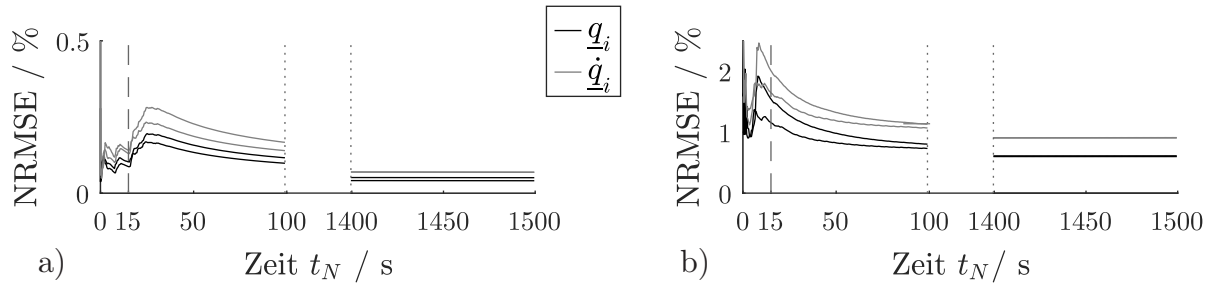


Abbildung 4.13: Entwicklung des NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen a) des $\Delta \dot{y}$ -Verfahrens und b) des Δy -Verfahrens über der Zeit

Auch hier nimmt der NRMSE zu Beginn einen sehr hohen Wert an, bevor er wieder kurzzeitig sinkt. Beim $\Delta \dot{y}$ -Verfahren sind anschließend Schwankungen zu beobachten und insgesamt steigt der NRMSE deutlich länger an als bei allen anderen Verfahren. Nach dem Erreichen seines Maximums sinkt der Wert jedoch auch wieder mit der Zeit ab und erreicht einen konstanten Endwert.

Beim Δy -Verfahren erreicht der NRMSE bereits vor dem Ende der Trainingsdaten (15 s) sein Maximum, fällt dann mit der Zeit und nähert sich einem konstanten Endwert an. Die anfänglich großen Fehler resultieren aus der transienten Phase, in der kleine Rekonstruktionsfehler durch die Pseudoinverse verstärkt werden. Im stationären Bereich dominieren hingegen periodische Anteile mit begrenzter Amplitude, wodurch sich der Fehler relativ zur Gesamtdynamik stabilisiert.

Abb. 4.14 zeigt einen Ausschnitt der Messungen und Modellierungsergebnisse mit dem diskreten Δy -Verfahren für $\dot{q}_{12}$, bei dem aufgrund des größten NRMSE die Abweichungen auch am deutlichsten sichtbar sind. Die Abweichungen weisen ein periodisches Muster auf

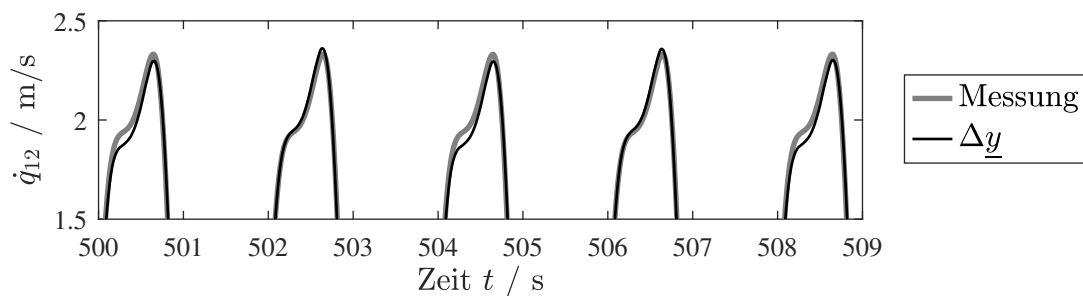


Abbildung 4.14: Ausschnitt von q_{12} mit periodischen Abweichungen zwischen Messungen und Ergebnissen des Δy -Verfahrens

und wiederholen sich nach jeweils zwei Vollschrwingungen. Dieses systematische Verhalten führt dazu, dass der kumulativ berechnete NRMSE für t_N gegen unendlich nicht gegen null konvergiert, sondern auf einem konstanten Niveau verbleibt.

4.1.3.2 Räumliche Interpolation und Extrapolation

Zur Bewertung der räumlichen Generalisierungsfähigkeit werden zwei Szenarien untersucht: Interpolation innerhalb des durch die Trainingsdaten aufgespannten Bereichs und Extrapolation bei Eingangssignalen, die über die trainierten Amplituden- und Frequenzbereiche hinausgehen. Im Fokus steht die Frage, inwieweit die hybriden Verfahren auch in diesen unbekannten Bereichen physikalisch konsistente Vorhersagen liefern.

Ausgehend vom Referenzfall mit einer Amplitude $\hat{w} = 1$ m und einer Frequenz $f = 0,5$ Hz werden diese variiert und neue synthetische Datensätze generiert. Dabei werden Paarungen mit

- Amplituden $\hat{w} \in \hat{\mathcal{W}} = \{0,75; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,25\}$ m, und
- Frequenzen $f \in \mathcal{F} = \{0,4; 0,5; 0,6\}$ Hz

gebildet.

Die Zuordnung der Testfälle zu den Kategorien Interpolation und Extrapolation ist bei diesem System mit sechs bis acht Eingängen nicht trivial: Während sich manche Eingangssignale innerhalb des trainierten Bereichs befinden, können andere gleichzeitig außerhalb liegen. Hinzu kommt, dass die Trainingsdaten den Parameterraum nicht gleichmäßig abdecken, sodass selbst formal innerhalb liegende Parameterkombinationen schlechte Ergebnisse liefern können.

Zur Darstellung der Genauigkeit wird der Mittelwert des NRMSE nach Gleichung (4.6) bzw. (4.7) in Abb. 4.15 abgebildet; zwischen den Stützstellen wird bilinear interpoliert⁷. Der Kreis kennzeichnet die Trainingsdaten.

Alle Verfahren zeigen qualitativ ähnliches Verhalten bei deutlichen quantitativen Unterschieden: Amplitudenvariationen $\hat{w}$ werden bei konstanter Frequenz deutlich besser kompensiert als Frequenzänderungen. Die Ausgangsraum-Verfahren ($\Delta\dot{y}$, Δy) generalisieren deutlich schlechter als die Zustandsraum-Verfahren ($\Delta\hat{h}$, $\Delta\hat{x}$, $\Delta\hat{x}$): $\Delta\dot{y}$ versagt bereits bei geringen Abweichungen, Δy ist robuster, aber eingeschränkt. Beide lernen primär lokale Korrekturen. Der NRMSE überschreitet beim $\Delta\dot{y}$ -Verfahren gerade in Randbereichen die dargestellte Skala (100 %) deutlich.

Auffällig ist der Punkt $\hat{w} = 0,75$ m, $f = 0,6$ Hz mit durchweg schlechteren Ergebnissen, während $\hat{w} = 1,25$ m, $f = 0,6$ Hz trotz Extrapolation bessere Vorhersagen ermöglicht.

Zur Erklärung dieses Verhaltens sind in Abb. 4.16 die Phasenportraits für ausgewählte Anregungen dargestellt. Abb. 4.16 a) zeigt die Trainingsdaten ($\hat{w} = 1$ m, $f = 0,5$ Hz) im Vergleich zur Anregung mit $\hat{w} = 0,75$ m und $f = 0,6$ Hz. Obwohl diese Parameterkombination für alle Zustandsgrößen $\underline{x}$ und den Systemeingang $\underline{u}$ eine Interpolation darstellt, zeigt sich ein stark unterschiedliches dynamisches Verhalten: Das System befindet sich nahe einer Tilgerfrequenz, wodurch Masse 1 kaum Bewegung aufweist. Diese qualitativ andere Phasenraumstruktur führt zu schlechteren Vorhersagen trotz formaler Interpolation.

Im Gegensatz dazu zeigt Abb. 4.16 b) die Anregung mit $\hat{w} = 1,25$ m und $f = 0,6$ Hz. Hier

⁷<https://blogs.mathworks.com/graphics/2015/09/17/what-is-a-contour/>

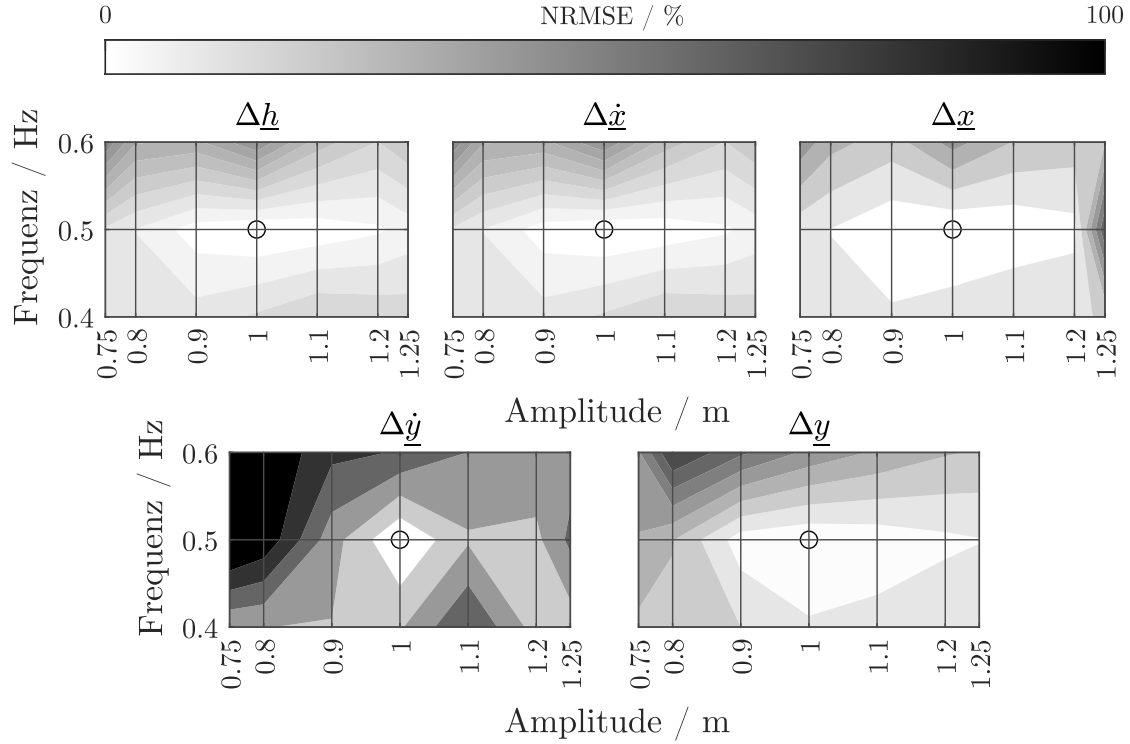


Abbildung 4.15: NRMSE (in %) zwischen Messung und Ergebnissen aller fünf Verfahren zur hybriden Modellierung für Interpolation und Extrapolation

liegt für einen großen Teil der Eingänge in die Black-Box-Modelle eine Extrapolation vor. Dennoch sind die Vorhersagen deutlich besser, da das dynamische Verhalten des Systems eher dem der Trainingsdaten entspricht.

Diese Beobachtung verdeutlicht, dass gerade bei nichtlinearen Systemen die Lernbarkeit

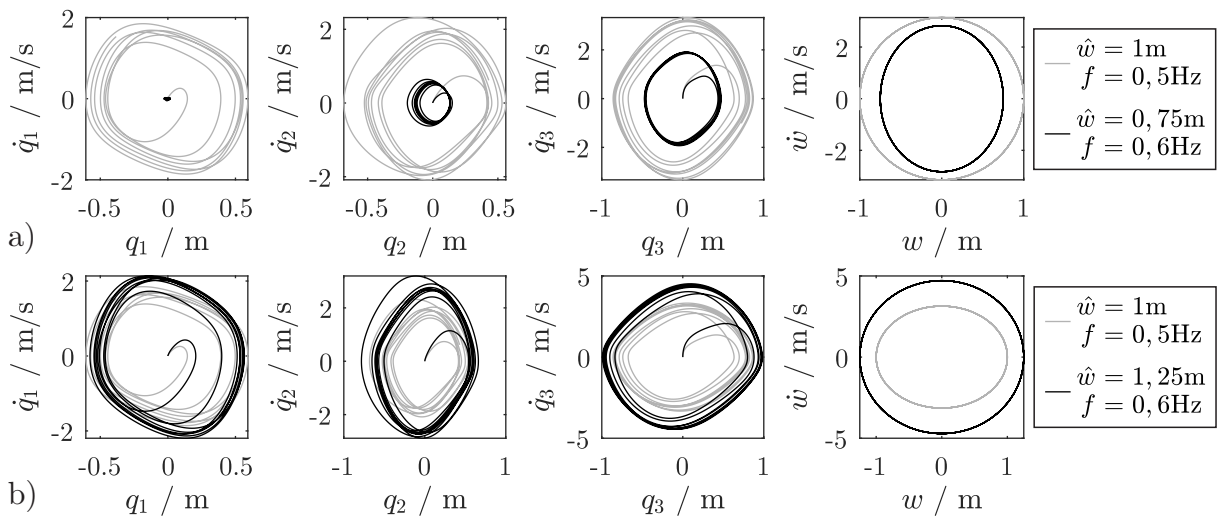


Abbildung 4.16: Phasenportraits aller drei Massen und des Eingangs a) für die Trainingsdaten ($\hat{w} = 1\text{m}$, $f = 0,5\text{Hz}$) und Interpolation ($\hat{w} = 0,75\text{m}$, $f = 0,6\text{Hz}$), und b) für die Trainingsdaten und Extrapolation ($\hat{w} = 1,25\text{m}$, $f = 0,6\text{Hz}$)

nicht nur durch die Klassifikation als Interpolation oder Extrapolation im Parameterraum bestimmt wird, sondern auch durch die Zugehörigkeit zu ähnlichen dynamischen Regimen. Testpunkte mit ähnlicher Phasenraumstruktur ermöglichen bessere Generalisierung als parametrisch nähere Punkte mit qualitativ unterschiedlicher Systemdynamik.

4.1.4 Modellstruktur

Die bisherige Analyse hat gezeigt, wie die Verfahren unter identischen Modellannahmen arbeiten. Im nächsten Schritt wird untersucht, wie sensibel sie auf Veränderungen der Modellstruktur reagieren (magenta in Abb. 4.4). Dazu werden sowohl die Systemparameter des White-Box-Modells optimiert als auch strukturelle Vereinfachungen betrachtet. Ziel ist es, die Robustheit der Verfahren gegenüber Modellabweichungen und unterschiedlichen physikalischen Beschreibungen zu bewerten.

4.1.4.1 Optimierte Systemparameter

Bevor die Modellstruktur selbst verändert wird, wird zunächst geprüft, welchen Einfluss eine Anpassung der Systemparameter auf die hybride Modellierung hat. In [40] wurden unterschiedliche Parametrierungsstrategien für die hybride Modellierung untersucht. Die sogenannte Gesamtzeitdiskrepanz, bei der der Abstand zwischen Messung und Modell für den gesamten Zeithorizont numerisch minimiert wird, hat sich insbesondere für das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren als besonders geeignet herausgestellt. Im Gegensatz zu dem in [40] verwendeten White-Box-Modellen enthält das hier verwendete jedoch keine dissipativen Elemente, wodurch die Abstände zwischen Messung und Modell sehr groß werden, und eine sehr starke Abhängigkeit von den Startwerten entsteht. Daher wird auf andere, in [40] empfohlene Parametrierungsstrategien zurückgegriffen.

Für das diskrete $\Delta\dot{x}$ -Verfahren wird ein inkrementeller Ansatz zur Optimierung empfohlen, was die inkrementelle Natur des Verfahrens widerspiegelt. Es wird die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (RMSE; Gleichung (2.6)) über die Funktion

$$\sum_{i=1}^3 \text{RMSE}(\tilde{q}_i, \bar{q}_i) \quad \text{mit } \tilde{q}_{i,n} = [\Phi^{t_n, t_{n-1}} \bar{x}_{n-1}]_i \quad (4.9)$$

minimiert. Auch hier lässt sich eine Abhängigkeit von den Startwerten beobachten, welche sich jedoch durch die Integration von Expertenwissen

$$m_i = m \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{und } c_i = c \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (4.10)$$

auf $c : m \approx 10,1$ kondensieren lässt (bei der Gesamtzeitdiskrepanz war dies nicht möglich).

Für das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren wird eine Minimierung auf Beschleunigungsebene empfohlen, d. h.

$$\sum_{i=1}^3 \text{RMSE}(\ddot{q}_i, \ddot{\bar{q}}_i) \quad \text{mit } \ddot{q}_i = [f(\bar{x}, \bar{u})]_{3+i}$$

wird minimiert. Unter der Voraussetzung (4.10) manifestiert sich auch hier das Verhältnis $c : m \approx 10,1$. Aufgrund der Ähnlichkeit der Optimierungsergebnisse wird ein Ergebnis

der Minimierung von (4.9) mit Startwert $[1, 1]$ als neue Systemparameter gewählt. Die Optimierung erfolgt mittels `fmincon`⁸, so dass sichergestellt ist, dass alle Parameter positiv sind. Die Systemparameter sind in Tabelle B.1 im Anhang zu finden. Die Genauigkeit des White-Box-Modells lässt sich durch diese Parameteroptimierung nur unwesentlich verbessern, siehe Tabelle B.4. Mit den neuen Systemparametern müssen die Black-Box-Modelle neu trainiert werden, bevor sie dann für die hybride Modellierung genutzt werden können.

Es ist zu beachten, dass die Parameter unter der Verwendung des Zustandsvektors $\bar{x}$ optimiert wurden. Steht dieser nicht zur Verfügung muss auf andere Parametrierungsstrategien zurückgegriffen werden. Es lässt sich jedoch festhalten, dass eine geringfügig verbesserte Genauigkeit des White-Box-Modells für den Systemausgang y mit der durchgeführten Optimierung einhergegangen ist.

Die NRMSE-Werte für die hybride Modellierung mit voriger Parameteroptimierung sind in Tabelle B.4 im Anhang zu finden. Nur für das Δh - und das $\Delta \dot{x}$ -Verfahren hat die Optimierung der Systemparameter zu einer Verbesserung der Ergebnisse geführt. Beim Δx -Verfahren haben sich die Ergebnisse nicht verändert, beim $\Delta \dot{y}$ - und Δy -Verfahren ist eine leichte Verschlechterung der Ergebnisse aufgetreten.

4.1.4.2 Parameterunsicherheiten

Um die Sensitivität der Verfahren gegenüber physikalischen Ungenauigkeiten zu bewerten, werden kleine Abweichungen in den Systemparametern erzeugt. Dadurch lässt sich prüfen, wie stark jedes Verfahren auf veränderte Modellparameter reagiert. Zur Erzeugung dieser Unsicherheiten werden die Parameter m_i und c_i jeweils um bis zu 5 % variiert, so dass sich die Parameter für die unterschiedlichen Indizes i unterscheiden können. Die Genauigkeit des White-Box-Modells sinkt dadurch geringfügig, siehe Tabelle B.5 im Anhang.

Die NRMSE-Werte für die hybride Modellierung mit ungenauen Systemparametern sind in Tabelle B.5 zu finden. Für das Δh -, $\Delta \dot{x}$ - und Δy -Verfahren ist der NRMSE leicht angestiegen. Beim Δx -Verfahren haben sich die Ergebnisse nicht verändert. Beim $\Delta \dot{y}$ -Verfahren ist der NRMSE nahezu gleich geblieben und teilweise sogar gefallen.

4.1.4.3 Lineares White-Box-Modell

Auf die Parametervariationen folgt ein zweiter Schritt, in dem nicht nur eine Modellvereinfachung vorgenommen wird, sondern gleichzeitig eine strukturelle Anpassung erfolgt: Die nichtlinearen Federkennlinien werden durch lineare Zusammenhänge ersetzt, während zusätzlich eine lineare Dämpfung ergänzt wird. Dadurch entsteht ein Modell, das einerseits weniger physikalische Detailtiefe besitzt, andererseits aber zusätzlich dissipative Anteile enthält. Diese veränderte Struktur stellt die Black-Box-Komponenten vor eine andere Aufgabe als zuvor und ermöglicht eine Einschätzung, wie zuverlässig die Verfahren fehlende Nichtlinearitäten rekonstruieren und zusätzliche modellierte Effekte integrieren können. Somit lässt sich bewerten, wie das System auf qualitativ falsche Modellgleichungen reagiert, d. h. wenn die Phänomene zwar berücksichtigt, aber mit

⁸<https://de.mathworks.com/help/releases/R2024b/optim/ug/fmincon.html>

linearen statt nichtlinearen Zusammenhängen beschrieben werden. Anstelle der nichtlinearen Kennfunktionen nach Gleichung (4.1) werden die Feder- und Dämpferkräfte im White-Box-Modell durch die linearen Zusammenhänge

$$F_{c_i} = c_i(q_i - q_{i-1}) \quad \text{und} \quad F_{d_i} = d_i(\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}).$$

beschrieben. Unter der vereinfachenden Annahme

$$m_i = m \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \quad c_i = c \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}, \quad \text{und} \quad d_i = d \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \quad (4.11)$$

liefert die Gesamtzeitdiskrepanz

$$\sum_{i=1}^3 \text{RMSE}(\tilde{q}_i, \bar{q}_i), \quad \text{mit} \quad \tilde{q}_{i,n} = [\Phi^{t_n, t_0} \bar{x}_0]_i$$

für verschiedene Startwerte ein Verhältnis von $m : c : d \approx 1 : 5,47 : 0,85$.

Die Optimierung erfolgt mittels `fmincon` mit den Startwerten $[1, 5, 1]$. Die optimierten Parameter sind in Tabelle B.1 zu finden.

Der NRMSE des White-Box-Modells ist im Vergleich zum Referenzfall deutlich gesunken, siehe Tabelle B.6. Mit diesem neuen White-Box-Modell, müssen auch die Black-Box-Modelle mit den entsprechenden Diskrepanzen neu trainiert werden.

Auch hier ist zu beachten, dass die Parameter für das neue White-Box-Modell unter Verwendung der Systemzustände $\bar{x}$ identifiziert wurden. Stehen diese nicht zur Verfügung muss auf andere Parametrierungsstrategien zurückgegriffen werden.

Obwohl sich der NRMSE des White-Box-Modells durch die Linearisierung verringert, steigt der NRMSE der hybriden Modelle teilweise deutlich an, siehe Tabelle B.5. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich mit der strukturellen Änderung nicht nur der Betrag, sondern insbesondere die Form der verbleibenden Diskrepanz ändert. Im Referenzfall bestand die Diskrepanz ausschließlich aus fehlender Dämpfung; nach Einführung einer linearen Dämpfung weisen die verbleibenden Diskrepanzen eine komplexere Zustandsabhängigkeit auf und sind für die Black-Box-Anteile schwerer zu approximieren.

4.1.4.4 Stark reduziertes White-Box-Modell

Für die folgende Untersuchung wird ein Spezialfall betrachtet, bei dem sich das reale System und das zugehörige White-Box-Modell in der Anzahl der Freiheitsgrade unterscheiden. Solche Abweichungen ergeben sich beispielsweise dann, wenn im White-Box-Modell ideale Gelenke angenommen werden, das reale System jedoch zusätzliche Freiheitsgrade durch Gummi-Metall-Lager (GML) aufweist.

Während es sich beim betrachteten System um einen Drei-Massen-Schwinger handelt, wird das White-Box-Modell als Zwei-Massen-Schwinger formuliert. Mit dem Zustands-

vektor $\underline{z} \in \mathbb{R}^{2,2}$ lässt sich dessen Bewegungsgleichung durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{z}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \frac{1}{m_1} \left((F_{\tilde{c}_1}(\underline{z}) - F_{\tilde{c}_2}(\underline{z})) + (F_{\tilde{d}_1}(\underline{z}) - F_{\tilde{d}_2}(\underline{z})) \right) \\ \frac{1}{m_2} \left((F_{\tilde{c}_2}(\underline{z}) - F_{\tilde{c}_3}(\underline{z}, \underline{u})) + (F_{\tilde{d}_2}(\underline{z}) - F_{\tilde{d}_3}(\underline{z}, \underline{u})) \right) \end{bmatrix}}_{\underline{f}_z(\underline{z}, \underline{u})}$$

beschreiben.

Demgegenüber steht der Zustandsvektor des betrachteten Systems $\underline{x} \in \mathbb{R}^{3,2}$, der vollständig oder nur teilweise bekannt sein kann. Die jeweiligen Systemausgänge werden durch $\underline{y}_x = \underline{C}_x \underline{x}$ und $\underline{y}_z = \underline{C}_z \underline{z}$ beschrieben. Ziel ist es, einen gemeinsamen Ausgangsvektor

$$\underline{y} = \underline{C}_x \underline{x} = \underline{C}_z \underline{z}$$

zu definieren, wobei die Ausgangsgleichungen nicht notwendigerweise identisch oder trivial sind.

Es werden zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall ist die Ausgangsfunktion des White-Box-Modells die Identität, sodass $\underline{y} = \underline{z}$ gilt. Die zugehörigen Ausgangsmatrizen lauten

$$\underline{C}_{x,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_{z,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Im zweiten Fall ist $\underline{g}_z$ nicht die Identität, sodass lediglich ausgewählte Ausgangsgrößen betrachtet werden:

$$\underline{C}_{x,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_{z,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der unterschiedlichen Zustandsdimensionen erfolgt die hybride Modellierung ausschließlich auf Ausgangsebene mittels der Verfahren $\Delta \underline{y}$ und $\Delta \dot{\underline{y}}$.

Im ersten Schritt wird eine Parametrierung des White-Box-Modells auf Basis der gemessenen Ausgänge $\bar{\underline{y}}_x$ durchgeführt. Dieser Schritt setzt den ersten Fall voraus, da in diesem Fall eine direkte Zuordnung der Ausgänge möglich ist. Die Optimierung erfolgt analog zu Kapitel 4.1.4.1 unter der Annahme identischer Parameter gemäß Gleichung (4.11). Für den betrachteten Anwendungsfall stellt dies eine stark vereinfachende Annahme dar, da die Feder $\tilde{c}_1$ sowie der Dämpfer $\tilde{d}_1$ das gesamte dynamische Verhalten links von s_1 abbilden müssen. Gemäß der Definition der Ausgangsmatrix $\underline{C}_x$ in Gleichung (4.12) entspricht s_1 der Koordinate q_2 , daher müssen folglich die Wirkungen der Federn c_1 und c_2 durch die einzelne Feder $\tilde{c}_1$ repräsentiert werden. Dies widerspricht der Annahme gleicher Parameter $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$; eine analoge Argumentation gilt für die Dämpfer. Die Annahme wird dennoch getroffen, um reproduzierbare und eindeutig identifizierbare Systemparameter zu erhalten. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich näherungsweise das Verhältnis $m : c : d \approx 1 : 5,47 : 1,65$.

Für den zweiten Fall ist eine vergleichbare Parametrierung deutlich aufwendiger, da keine

direkte Zuordnung zwischen Modell- und Systemausgängen vorliegt. Aus diesem Grund wird im Folgenden mit den im ersten Fall identifizierten Parametern weitergearbeitet. Im zweiten Schritt wird das parametrisierte White-Box-Modell durch einen Black-Box-Anteil hybrid erweitert. Das Training erfolgt analog zu den Verfahren aus Kapitel 3.2.2 für $\Delta \underline{y}$ sowie Kapitel 3.1.3 für $\Delta \underline{\dot{y}}$, wobei anstelle der Zustände $\underline{x}$ die White-Box-Zustände $\underline{z}$ verwendet werden. Die benötigten Zustände werden dabei über die Pseudoinverse der Ausgangsfunktion rekonstruiert.

Die Ergebnisse sind in Abb. 4.17 zu sehen, der NRMSE ist Tabelle B.7 zu entnehmen. In a) sind die Ergebnisse für den ersten Fall dargestellt, also dass es sich bei der Messgleichung $\underline{C}_{z,1}$ um die Identität handelt. Die Ergebnisse des kontinuierlichen $\Delta \underline{\dot{y}}$ -Verfahrens links weichen bereits nach kurzer Zeit für s_1 und s_2 deutlich in Amplitude und unterliegender Frequenz von den Messungen ab. Rechts sind die Ergebnisse für das diskrete $\Delta \underline{y}$ -Verfahren zu sehen. Bei s_1 sind geringe Abweichungen zwischen Messung (grau) und Modell (schwarz) zu sehen, aber insgesamt ist die Modellgüte gut.

In b) sind die Ergebnisse für den zweiten Fall dargestellt, bei dem $\underline{z}$ auf s_2 abgebildet wird. Die Ergebnisse des diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahrens sind hier ebenfalls gut. Beim kontinuierlichen $\Delta \underline{\dot{y}}$ -Verfahren weicht das Modell wieder nach Zeit kurzer deutlich von den Messungen ab, divergiert aber nicht.

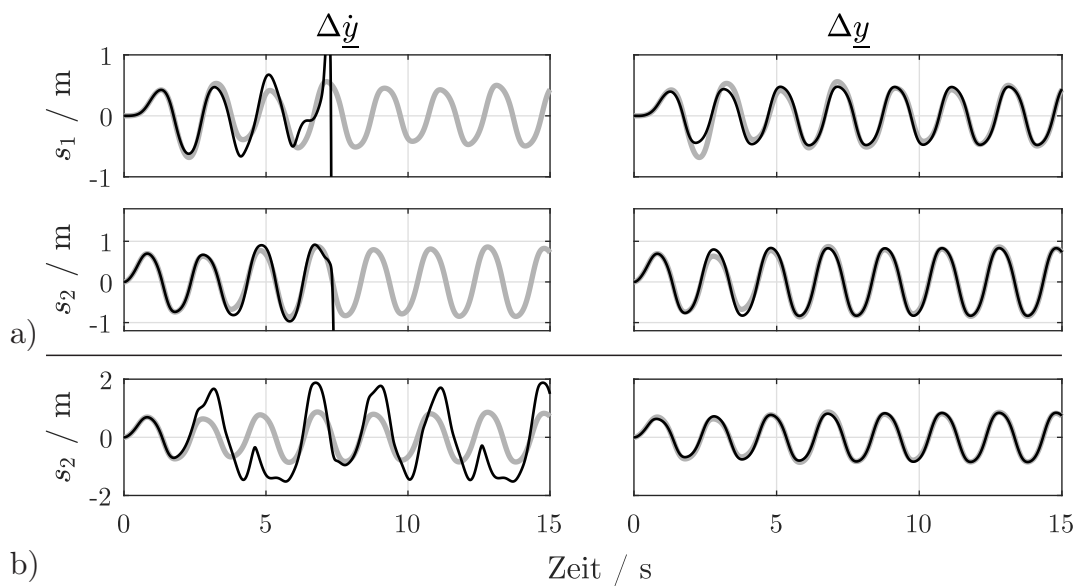


Abbildung 4.17: Vergleich der Messungen (grau) mit den Ergebnissen des kontinuierlichen $\Delta \underline{\dot{y}}$ - und des diskreten $\Delta \underline{y}$ -Verfahrens (schwarz) a) für den Fall dass die Ausgangsfunktion die Identität ist und b) dass die Ausgangsfunktion nicht die Identität ist

Das diskrete Verfahren zeigt im betrachteten Szenario eine höhere Robustheit, da es Fehler lokal auf diskreter Ebene korrigiert. Das kontinuierliche Verfahren wirkt hingegen direkt auf die Dynamik und integriert Korrekturfehler über die Zeit, wodurch strukturelle Abweichungen verstärkt werden können. Die bessere Modellgüte im zweiten Fall, in dem $\underline{C}_{z,2}$ nicht der Identität entspricht, ist darauf zurückzuführen, dass weniger Zustandsgrößen berücksichtigt werden müssen. Die reduzierte Ausgangsdimension vereinfacht die Diskrepanzstruktur.

Eine Anwendung dieser Herangehensweise außerhalb der betrachteten Betriebsbedingungen erscheint problematisch, da die beiden Systeme aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Freiheitsgraden unterschiedliche Eigenfrequenzen und Eigenmoden besitzen. Diese strukturellen Abweichungen können durch ein hybrides Modell auf Basis von Diskrepanzen nicht kompensiert werden.

4.1.5 Unsicherheiten

Neben strukturellen Abweichungen werden auch typische Messunsicherheiten betrachtet (gelb in Abb. 4.4). Dazu zählen Rauschen, konstanter Offset und zeitliche Trends, wie sie in realen Sensorsignalen auftreten. Die Störsignale wirken nur auf den unbekannten Teil der Systemdynamik $\underline{f}^u$.

4.1.5.1 Rauschen

Diese Untersuchung analysiert die Empfindlichkeit der Verfahren gegenüber Messrauschen in den Eingangsdaten. Damit lässt sich einschätzen, wie gut die Ansätze mit realen Sensorsignalen umgehen können.

Die Störungen sind gleichverteilt im Bereich $\pm p \max(\bar{q})$, wobei $p \in \{0,01; 0,025; 0,05\}$ den Rauschpegel beschreibt. In realen Messsystemen wird häufig nur eine der Größen (Verschiebung, Geschwindigkeit oder Beschleunigung) direkt gemessen, während die übrigen abgeleitet werden. Da eine Ableitung nach der Zeit tendentiell zu einer Abschwächung des Rauschens führt, wird die Verschiebung $\bar{q}(t)$ als primäres Messsignal verwendet und das Rauschsignal darauf addiert. Zur Bestimmung von $\dot{\bar{q}}$ und $\ddot{\bar{q}}$ wird das verrauschte Signal zunächst mit einem Butterworth-Tiefpass gefiltert, numerisch differenziert und anschließend erneut gefiltert. Für alle Größen wird dieselbe Grenzfrequenz ω_c genutzt [49].

Die Ergebnisse sind in Abb. 4.18 zu sehen, die NRMSE-Werte stehen in den Tabellen B.8, B.9, B.10 und B.11. Die erste Spalte in Abb. 4.18 (1% (GPR)) zeigt die Ergebnisse für q_1 bzw. q_{12} bei einem Rauschpegel von 0,01 für die Verfahren mit GPR Modellen; die zugehörigen NRMSE-Werte sind in Tabelle B.8 aufgeführt. Alle hier dargestellten Verfahren weichen sehr schnell und sehr deutlich sowohl in Amplitude als auch in Frequenz von den Messungen ab.

Das Δy -Verfahren mit BT-Modellen liefert deutlich bessere Ergebnisse (Abb. 4.18, zweite Spalte). Die Robustheit ergibt sich aus der reduzierten Varianz durch das Bagging sowie aus der impliziten Glättung: Durch die Unterteilung des Eingangsraums in Regionen mit nahezu konstanten Vorhersagen erfassen BT Modelle vor allem größere, stabile Strukturen und reagieren weniger auf kleine lokale Störungen [47]. Aus diesem Grund wurden auch die anderen Verfahren in Kombination mit BT Modellen umgesetzt. Die entsprechenden Ergebnisse sind in den Spalten zwei bis vier in Abb. 4.18 dargestellt; die zugehörigen NRMSE-Werte befinden sich in den Tabellen B.9, B.10 und B.11. Für alle Verfahren ergibt sich eine deutliche Verbesserung gegenüber den GPR Modellen.

Beim Δx -Verfahren sind bereits bei einem Rauschpegel von 0,01 deutliche Abweichungen von den Messungen zu beobachten, welche sich bei einem Rauschpegel von 0,025 noch steigern. Bei einem Rauschpegel von 0,05 liegt das Modell jedoch wieder näher an den Messungen und der NRMSE ist deutlich gesunken, dies wird im Folgenden als Berg-

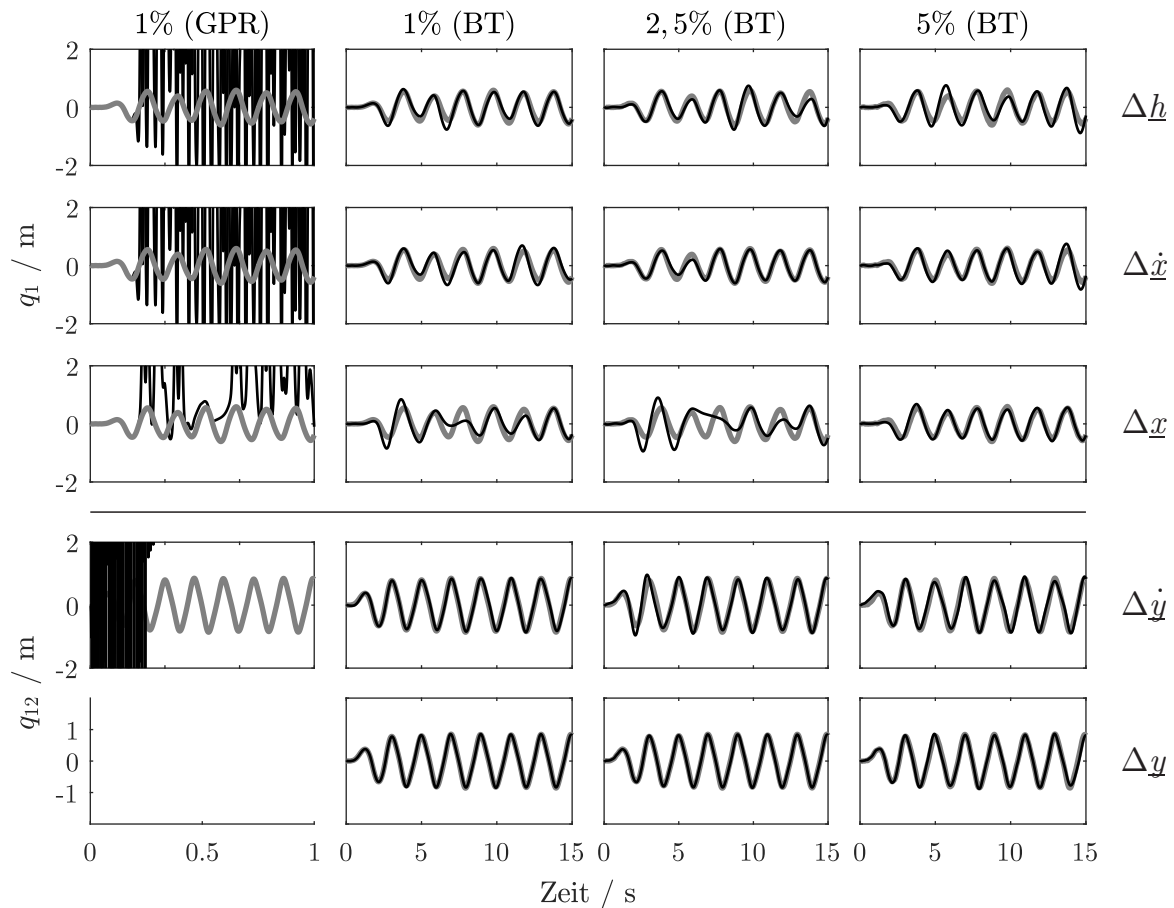


Abbildung 4.18: Vergleich der Messung (grau) mit allen fünf hybriden Modellen (schwarz) für unterschiedliche Rauschpegel

Schema bezeichnet.

Bei dieser Untersuchung treten erstmalig beobachtbare Unterschiede zwischen den Ergebnissen des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens und denen des $\Delta\dot{h}$ -Verfahren auf. Bei beiden Verfahren hat die Modellgüte im Vergleich zur Referenz durch das Rauschen abgenommen, beim $\Delta\dot{x}$ -Verfahren sinkt der NRMSE zunächst mit steigendem Rauschpegel und steigt danach jedoch wieder an. Dies wird im Folgenden als Tal-Schema bezeichnet. Die Verschlechterung des $\Delta\dot{h}$ -Verfahrens ist ausgeprägter als die des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens. Beim $\Delta\dot{y}$ -Verfahren ist wie beim $\Delta\dot{x}$ -Verfahren das Berg-Schema zu sehen, beim $\Delta\dot{y}$ -Verfahren das Tal-Schema.

Hypothese Bei der Analyse des NRMSE zeigt sich neben einem annähernd proportionalen Zusammenhang auch ein Berg- bzw. Talverlauf, die in Abb. 4.19 links schematisch dargestellt sind. Es wird die Hypothese formuliert, dass Berg- und Talverlauf keine unterschiedlichen Effekte darstellen, sondern jeweils Teilbereiche eines gemeinsamen zugrunde liegenden Prozesses sind, der in Abb. 4.19 rechts skizziert ist.

In der Literatur sind nicht-monotone Zusammenhänge zwischen Störniveau und Modellgüte bereits aus verschiedenen Kontexten bekannt. Ein prominentes Beispiel ist die stochastische Resonanz, bei der ein gewisser Anteil an Rauschen die Detektion schwacher Signale in nichtlinearen Systemen verbessern kann [11, 36]. In verschiedenen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen zeigt sich dabei, dass die Leistungsfähig-

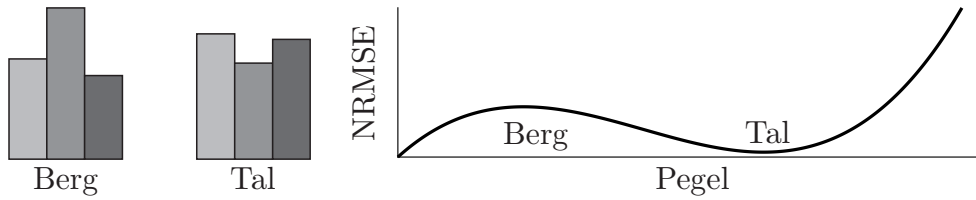


Abbildung 4.19: Berg- und Tal-Schema

keit zunächst mit zunehmendem Rauschen steigt, ein Optimum erreicht und bei weiter zunehmender Störintensität wieder abnimmt. Entsprechende Effekte wurden auch im Bereich des Maschinellen Lernens (ML) beobachtet, etwa in Klassifikationsaufgaben, bei denen kontrolliert hinzugefügtes Rauschen die Erkennungsrate schwacher oder knapp separierbarer Klassen verbessert [68, 130]. In Entscheidungsbäumen, und damit auch in Ensembleverfahren wie BT, lässt sich dies anschaulich mit der Lage von Schwellenwerten verknüpfen: Rauschen kann Datenpunkte gerade so über eine Entscheidungsgrenze verschieben, sodass ein zuvor verborgener Signalanteil für das Modell nutzbar wird.

Eng verwandt ist das Konzept, Rauschen explizit als Regularisierung zu nutzen. Werden synthetische Messdaten gezielt mit Rauschen überlagert lässt sich Überanpassung reduzieren, so dass eine Anwendung auf reale Daten bessere Ergebnisse liefern kann [132].

Darüber hinaus sind nicht-monotone Fehlerverläufe auch in anderen Bereichen des ML dokumentiert. Das sogenannte Double-Descent-Phänomen beschreibt, dass der Testfehler in Abhängigkeit von der Modellkomplexität nicht einfach monoton abnimmt, sondern nach einer ersten Abnahme wieder ansteigen und bei weiterer Komplexitätszunahme erneut fallen kann [76]. Auch wenn Double-Descent primär mit der Modellkapazität in Verbindung gebracht wird, lässt sich daraus ableiten, dass komplexe Lernsysteme grundsätzlich empfindlich auf das Zusammenspiel von Modellstruktur, Datenkomplexität und Rauschen reagieren. Insbesondere ist bekannt, dass die Interaktion von Rausch- bzw. Label-Noise mit der verfügbaren Modellkapazität maßgeblich die Form der beobachteten Fehlerkurven beeinflusst.

Vor diesem Hintergrund erscheint ein NRMSE-Verlauf mit Berg- und Tal-Schema im Rauschpegel plausibel: Bei sehr geringen Störungen sind die zusätzlichen Anteile für das Modell noch nicht hinreichend strukturiert, um systematisch erlernt zu werden, sodass die Modellgüte zunächst abnimmt. Mit zunehmender Störintensität gewinnen diese Anteile an deterministischer Struktur und können vom datenbasierten Modellteil mitgelernt werden, was zu einer Verbesserung der Genauigkeit führt. Überschreitet das Rauschniveau jedoch eine kritische Schwelle, dominiert der Störanteil und überfordert die Repräsentationsfähigkeit des hybriden Modells, sodass der Fehler erneut ansteigt.

Um diese Hypothese zu prüfen wurden insgesamt 30 Rauschpegel mit logarithmischer Verteilung zwischen 10^{-5} und 10^0 untersucht. In Abb. 4.20 ist der NRMSE zwischen den nicht-verrauschten Messdaten und den Modellergebnissen über dem Rauschpegel abschnittsweise aufgetragen.

Die Ergebnisse in a) gehören zu den kontinuierlichen $\Delta\dot{x}$ - und $\Delta\dot{y}$ -Verfahren. Da der Verlauf für das Δh -Verfahren dem des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens stark ähnelt wird an dieser Stelle auf eine Abbildung verzichtet.

Für das $\Delta\dot{x}$ -Verfahren lässt sich das Berg-Tal-Schema aus Abb. 4.19 gut erkennen. Bei weiter steigendem Rauschpegel steigt auch der NRMSE deutlich an und nimmt schnell

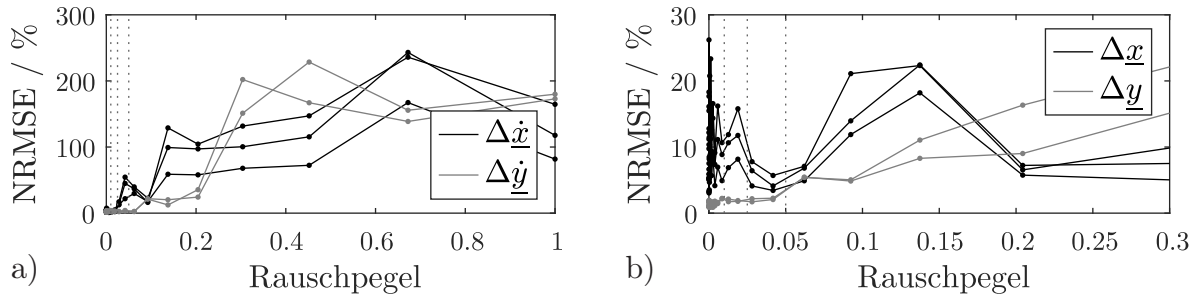


Abbildung 4.20: Entwicklung des NRMSE der Verschiebungen q_i zwischen Messung und Modell über dem Rauschpegel a) für das $\Delta \dot{x}$ - und das $\Delta \dot{y}$ -Verfahren, und b) für das Δx - und Δy -Verfahren

Werte jenseits von 100% an. Ab einem gewissen Punkt sinkt der NRMSE mit steigendem Rauschen wieder, liegt dann jedoch noch immer über 100%.

Die Ergebnisse in b) gehören zu den diskreten Verfahren (Δx , Δy). Für das Δx -Verfahren lässt sich das Berg-Tal-Schema gut erkennen, es fällt jedoch auf, dass der NRMSE nach einem ausgeprägten Berg-Tal-Verlauf bei weiter wachsendem Rauschpegel erneut abnimmt und anschließend nur noch mit geringem Gradienten ansteigt. Da der NRMSE anhand nicht-verrauschter Messungen berechnet wird, ist dieses Verhalten nicht als Overfitting zu interpretieren, vielmehr deutet es darauf hin, dass sich die interne Repräsentation des hybriden Modells im hochverrauschten Regime reorganisiert. Im intermediären Rauschbereich verschmelzen Modellfehler und moderate Störungen zu einem schwer approximierbaren Restterm. Bei sehr hohen Rauschpegeln wirkt das Rauschen hingegen als harte Regularisierung: Feine Details verschwinden, das Modell konzentriert sich ausschließlich auf robuste, rauschunempfindliche Systemmerkmale und erzielt so eine stabilere, generalisierbare Repräsentation. Ein qualitativ ähnliches Verhalten ist aus der Literatur zur stochastischen Multiresonanz bekannt, die mehrfache Resonanzmaxima beschreibt [115]. Beim Δy -Verfahren ist dieses Berg-Tal Schema derart nicht zu beobachten. Das Verfahren operiert ausschließlich im reduzierten Ausgangsraum und der durch die Pseudoinverse bedingte Informationsverlust wirkt als zusätzliche Glättung bzw. Regularisierung. Dadurch wird der Effekt stochastischer Resonanz abgeschwächt und nicht in ausgeprägter Berg-Tal-Form sichtbar.

In dieser Untersuchung wurde das Rauschsignal auf die Verschiebung aufgebracht. Bei den diskreten Verfahren genügt eine einfache numerische Ableitung dieser verrauschten (und geglätteten) Daten. Für die kontinuierlichen Verfahren ist jedoch eine weitere numerische Ableitung erforderlich, wodurch sich die Rauscheffekte deutlich verstärken. Dies erklärt den deutlichen Skalierungsunterschied in Abb. 4.20 zwischen a) und b). Wird der Einsatz kontinuierlicher Verfahren angestrebt, sollten daher direkte Messungen der Geschwindigkeit oder Beschleunigung durchgeführt werden.

4.1.5.2 Konstanter Offset

Diese Untersuchung bewertet die Empfindlichkeit der hybriden Verfahren gegenüber systematischen Fehlern in den Eingangsdaten, die sich als konstanter Offset (auch als Bias bezeichnet) in den Messsignalen manifestieren. Ziel ist es zu prüfen, wie zuverlässig die Verfahren diesen systematischen Verschiebungsfehler erkennen und abbilden können.

Der Offset wird additiv auf nur eine gemessene Verschiebung aufgebracht. Ist $\bar{x}$ vollständig messbar, wird

$$\bar{q}_2(t) = \underline{q}_2(t) + p \max(\underline{q}_2)$$

verwendet. Falls ausschließlich $\bar{y}$ vorliegt, wird

$$\bar{q}_{23}(t) = \underline{q}_{23}^*(t) + p \max(\underline{q}_{23})$$

verwendet. Es werden Offset-Stärken von $p = \{0,05; 0,1; 0,25\}$ untersucht.

Für $p = 0,25$ sind die NRMSE-Werte in Tabelle B.5 zu finden. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur geringfügig von denen des Referenzmodells und weisen teilweise sogar eine höhere Genauigkeit auf. Auf tabellarische Darstellung der anderen Offset-Stärken wird daher verzichtet, in Abb. 4.23 sind diese dargestellt.

4.1.5.3 Trend

Diese Untersuchung analysiert die Empfindlichkeit der hybriden Verfahren gegenüber systematischen Veränderungen in den Messdaten, die sich als Trend manifestieren.

Ziel ist es, zu bewerten, wie gut die Verfahren einen zeitlich konstanten, linearen Anstieg erkennen und modellieren können. Der Trend wird als konstante Geschwindigkeit auf nur eine Zustandsänderung addiert, was sich dann in der Verschiebung akkumuliert. Für den Fall, dass $\bar{x}$ vollständig messbar ist wird

$$\dot{\bar{q}}_2(t) = \dot{\underline{q}}_2(t) + p \max(\dot{\underline{q}}_2), \quad \bar{q}_2(t) = \underline{q}_2(t) + tp \max(\dot{\underline{q}}_2)$$

verwendet, falls nur $\bar{y}$ messbar ist wird

$$\dot{\bar{q}}_{23}(t) = \dot{\underline{q}}_{23}(t) + p \max(\dot{\underline{q}}_{23}(t)), \quad \bar{q}_{23}(t) = \underline{q}_{23}(t) + tp \max(\dot{\underline{q}}_{23}(t))$$

mit $p \in \{0,01; 0,025; 0,05\}$ verwendet.

Die Ergebnisse sind in Abb. 4.21 zu sehen, die NRMSE-Werte stehen in den Tabellen B.13, B.14 und B.15.

Ein linearer Trend stellt für alle Verfahren eine größere Herausforderung dar, und wie beim Rauschen ist eine große Abhängigkeit von der Trend-Stärke zu sehen. Beim $\Delta\bar{x}$ -Verfahren nimmt die Modellgüte augenscheinlich mit der Trend-Stärke ab, dies gilt allerdings nur für die Verschiebung q_2 , für die anderen Zustandsgrößen lässt sich in Abb. 4.23 ein Tal-Schema erkennen. Auch beim $\Delta\dot{x}$ - und $\Delta\dot{h}$ -Verfahren wird das Tal-Schema deutlich, wobei die Abweichungen zwischen Modell und Messung in Amplitude und Frequenz für eine Trend-Stärke von 0,05 sehr deutlich sind.

Beim $\Delta\bar{y}$ -Verfahren lassen sich in Abb. 4.21 ergibt sich unter Berücksichtigung des NRMSE ein Berg-Schema. Beim $\Delta\dot{y}$ -Verfahren unterscheidet sich der NRMSE für die unterschiedlichen Elemente des Systemausgang y deutlich.

Insgesamt ist anhand der NRMSE-Werte kein Unterschied zwischen der vom Trend betroffenen Größe q_2 bzw. q_{23} und den anderen Zustandsgrößen zu erkennen.

Wie das Rauschen erfordert der lineare Trend das Erlernen zeitlich strukturierter Kompensationsmuster, die mit den Modellfehlern interferieren und das charakteristische Berg-

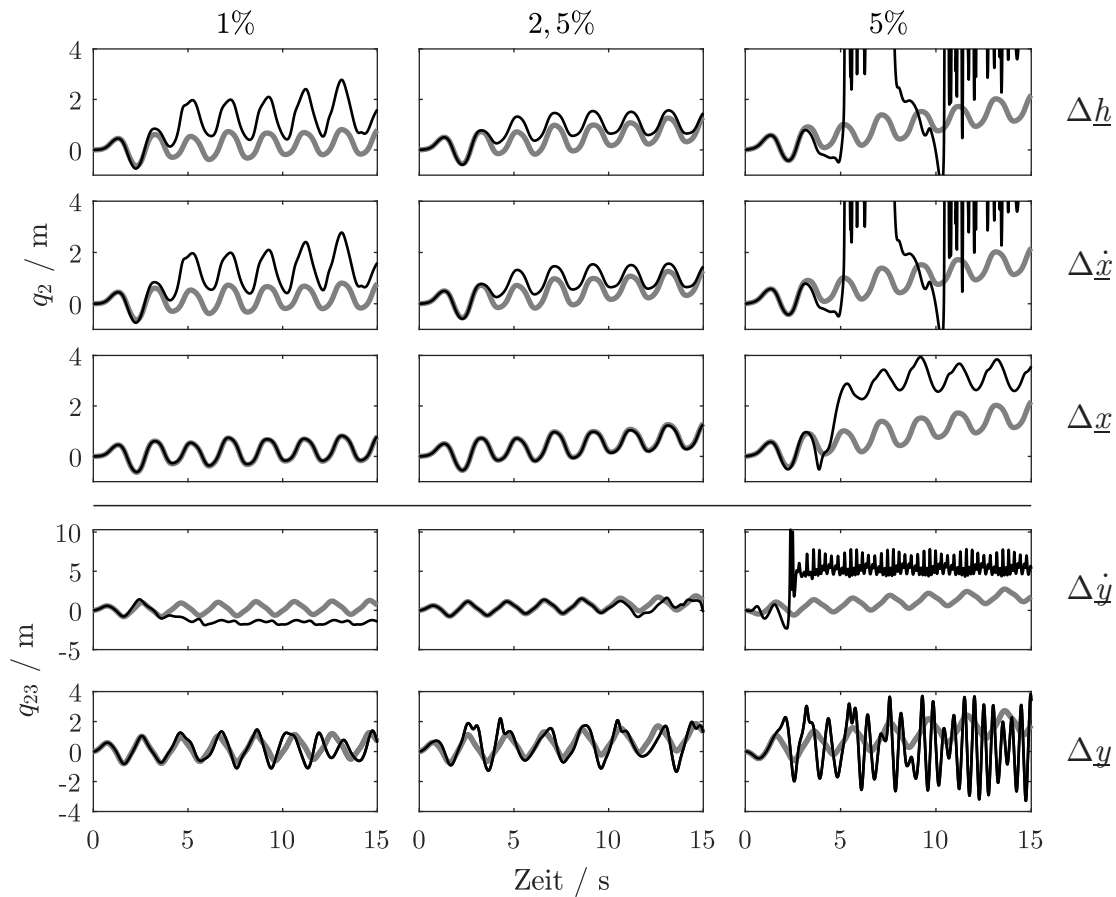


Abbildung 4.21: Vergleich der Messung (grau) mit allen fünf hybriden Modellen (schwarz) für unterschiedliche Trend-Stärke

Tal-Muster hervorrufen.

Zur näheren Untersuchung wurden wieder insgesamt 30 Trend-Stärken mit logarithmischer Verteilung zwischen 10^{-5} und 10^0 simuliert. In Abb. 4.22 ist der NRMSE zwischen den mit Trend versehenen Messungen, und den Ergebnissen der hybriden Modelle über der Trend-Stärke dargestellt, die zu q_2 bzw. q_{23} gehörenden Kurven sind dicker gezeichnet. Auch hier sind die Ähnlichkeiten zwischen den Ergebnissen für verrauschte Daten in Abb. 4.20 und den hier dargestellten Ergebnisse für Messungen mit Trend deutlich. Ein

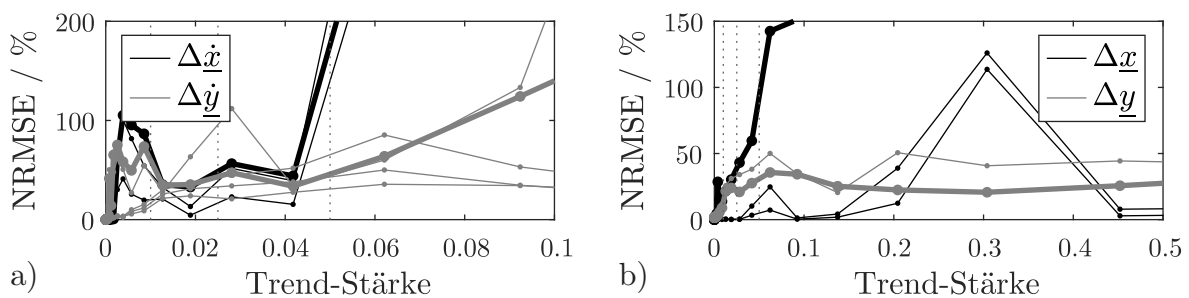


Abbildung 4.22: Entwicklung des NRMSE der Verschiebungen q_i zwischen Messung und Modell über der Trend-Stärke a) für das $\Delta\dot{x}$ - und das $\Delta\dot{y}$ -Verfahren, und b) für das Δx - und Δy -Verfahren

Trend beeinflusst primär die Verschiebung und die Geschwindigkeit, ist aber in der Beschleunigung nicht mehr erkennbar. Daher haben Verfahren, die auf Beschleunigungsebene korrigieren ($\Delta\dot{h}$, $\Delta\dot{x}$), deutlich größere Schwierigkeiten, den Trend zu kompensieren, während $\Delta\ddot{x}$ hier bessere Voraussetzungen bietet.

4.1.6 Erkenntnisse

Abb. 4.23, Tabelle 4.5 und Tabelle 4.6 fassen die Ergebnisse der vorangegangenen Untersuchungen über alle Versuchsgruppen hinweg zusammen und stellen gegenüber, wie die hybriden Verfahren unter den verschiedenen Störeinflüssen und Anregungsszenarien abschneiden. Das $\Delta\dot{h}$ -Verfahren wurde in den Tabellen nicht berücksichtigt, da die Ergebnisse in großen Teilen denen des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens entsprechen.

Im Referenzfall erreichen die drei Zustandsraumverfahren vergleichbare Modellgenauigkeiten mit einem NRMSE zwischen Messung und Modell von unter 0,1%. Das diskrete $\Delta\ddot{x}$ -Verfahren liefert leicht bessere Ergebnisse bei den Verschiebungen, während die kontinuierlichen Verfahren bei den Geschwindigkeiten geringfügig genauer sind. Zwischen $\Delta\dot{h}$ und $\Delta\dot{x}$ zeigt sich kein relevanter Unterschied; beide verhalten sich im Referenzfall praktisch identisch. Das $\Delta\dot{y}$ -Verfahren liefert für den Fall einer invertierbaren Messgleichung $\underline{y} = \underline{C}_{\text{inv}}\underline{x}$ vergleichbare Ergebnisse wie das $\Delta\dot{x}$ -Verfahren und erreicht bei nicht-invertierbarem $\underline{C}$ eine hohe Genauigkeit für den Ausgangsvektor $\underline{y}$. Bei nicht-invertierbarer Messgleichung ist bei Ausgangsraumverfahren die Rekonstruierbarkeit des vollständigen Zustandsvektors $\underline{x}$ jedoch nicht gegeben. Das $\Delta\ddot{y}$ -Verfahren liefert für den Fall einer invertierbaren Messgleichung schlechtere Ergebnisse als das $\Delta\ddot{x}$ -Verfahren, was im Black-Box-Modell begründet ist. Bei nicht-invertierbarem $\underline{C}$ liefert es ebenfalls für $\underline{y}$ schlechtere Ergebnisse als das $\Delta\ddot{y}$ -Verfahren, der NRMSE befindet sich jedoch auch hier in einem Bereich von nur 1% bis 2%.

Bezüglich der Schrittweite zeigt das $\Delta\ddot{x}$ -Verfahren ein optimales Δt , das sich als Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Lernbarkeit ergibt. Beim $\Delta\ddot{y}$ -Verfahren sinkt der Fehler monoton mit kleiner werdendem Δt . Die optimale Wahl der Schrittweite ist bei diskreten Verfahren systemspezifisch und für jedes neue System erneut zu bestimmen. Bei diskreten Verfahren ist bei verändertem numerischem Integrationsverfahren ein Neutraining möglich, so dass Integrationsfehler berücksichtigt werden können. Bei kontinuierlichen Verfahren besteht jedoch keine Möglichkeit zum Neutraining bei verändertem numerischem Integrationsverfahren. Folglich erlauben diskrete Verfahren die flexible Wahl effizienterer Integrationsverfahren durch Neutraining und Kompensation der Integrationsfehler im hybriden Modell.

Die Rechenzeit der diskreten Verfahren kann durch Anpassung der Schrittweite und des Integrationsverfahrens gesteuert werden. Eine größere Schrittweite reduziert beim $\Delta\ddot{x}$ -Verfahren die Anzahl der Black-Box-Auswertungen und damit die Gesamtzeit; beim Wechsel auf `ode1` sinkt vor allem der White-Box-Anteil, sodass der relative Black-Box-Anteil zunimmt, aber die Gesamtzeit sinkt. Das $\Delta\ddot{y}$ -Verfahren verursacht mit BT-Modellen die höchsten Rechenzeiten. Durch den Einsatz von GPR-Modellen statt BT-Modellen kann die Gesamtzeit deutlich reduziert werden. Aufgrund zusätzlicher Transformationen zwischen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ ist der White-Box-Anteil bei den ausgangsbasierten Verfahren generell höher. Bei den kontinuierlichen Verfahren nimmt die Auswertung des White-Box-Modells nur eine nachgestellte Position ein, hier ist die Rechenzeit der Black-Box-Modelle maßgeblich.

Tabelle 4.5: Vergleich der Verfahren $\Delta\dot{\underline{x}}$ (kontinuierlich), $\Delta\dot{\underline{y}}$ (kontinuierlich), $\Delta\underline{x}$ (diskret) und $\Delta\underline{y}$ (diskret)

Eigenschaft	$\Delta \underline{\dot{x}}$		$\Delta \underline{\dot{y}}$	$\Delta \underline{x}$	$\Delta \underline{y}$
Implementierung	Invasiv; direkter Zugriff auf DGL erforderlich; in kommerzieller Software oft nicht umsetzbar ($\Delta \underline{h}$ -Verfahren kann bei $\Delta \underline{\dot{x}}$ Abhilfe schaffen)			Nicht-invasiv; keine Eingriffe in Simulationssoftware; in kommerzieller Software umsetzbar	
Trainingsdaten	Beschleunigungen benötigt; ggf. zweifaches numerisches Differenzieren; Rauschen kann sich verstärken; bevorzugt direkte Beschleunigungsmessungen			Geschwindigkeiten ausreichend; ggf. einfaches numerisches Differenzieren	
Abhängigkeit vom Solver	Neutraining bei Solverwechsel nicht möglich; Solver-Wahl in kommerzieller Software oft eingeschränkt			Neutraining bei Solverwechsel möglich	
Rechenzeit	Primär durch Black-Box-Evaluierung bestimmt				
	White-Box-Anteil nachgelagert	Durch Transformationen zwischen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ erhöhter White-Box-Anteil		Steuerbar über Δt und Solver-Wahl	Steuerbar über Δt und Solver-Wahl; durch Transformationen zwischen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ erhöhter White-Box-Anteil
Genauigkeit (Referenzfall)	NRMSE $< 0,1\%$; leicht besser bei Geschwindigkeiten (als $\Delta \underline{x}$)	$\underline{C}$ invertierbar: vergleichbar mit $\Delta \underline{\dot{x}}$; $\underline{C}$ nicht invertierbar: hohe Genauigkeit für $\underline{y}$		NRMSE $< 0,1\%$; leicht besser bei Verschiebungen (als $\Delta \underline{x}$)	$\underline{C}$ invertierbar: Genauigkeitsverlust gegenüber $\Delta \underline{x}$ ⁹ ; $\underline{C}$ nicht invertierbar: NRMSE ca. 1–2 % für $\underline{y}$
Zeitliche Extrapolation	Konstantes Fehlerniveau	Konstantes Fehlerniveau; transienter Bereich mit zunächst größerem Fehler		Konstantes Fehlerniveau	Konstantes Fehlerniveau; transienter Bereich mit zunächst größerem Fehler
Räumliche Extrapolation	Lernbarkeit durch Zugehörigkeit zu ähnlichen dynamischen Regimen bestimmt				
	Deutlich robuster als $\Delta \underline{\dot{y}}$; moderater NRMSE-Anstieg	Starker NRMSE-Anstieg abseits der Trainingsdaten		Deutlich robuster als $\Delta \underline{\dot{y}}$; moderater NRMSE-Anstieg	Deutlicher NRMSE-Anstieg

Fortsetzung auf nächster Seite

⁹Black-Box-Modell ist ursächlich, kein inhärentes Problem des $\Delta\dot{\underline{y}}$ -Verfahrens

Tabelle 4.5 – Fortsetzung

Eigenschaft	$\Delta \underline{\dot{x}}$	$\Delta \underline{\dot{y}}$	Δx	Δy
Parameter-unsicherheiten	Kein signifikanter Einfluss; Parameteroptimierung verbessert hybride Modellgüte nicht zwangsläufig; ungenaue Parameter verschlechtern hybride Modellgüte nicht zwangsläufig			
Reduziertes White-Box-Modell	Moderater Genauigkeitsverlust bei Verwendung eines White-Box-Modells mit reduzierter Passung			
Strukturelle Unsicherheiten	Strukturelle Freiheitsgradreduktionen nicht vollständig durch Diskrepanzmodell kompensierbar			
	Geringere Robustheit bei strukturellen Vereinfachungen als $\Delta \underline{y}$		Zusätzliche Reduktion vom Systemzustand zum Systemausgang kann vorteilhaft sein	
Messrauschen	Stärkere Empfindlichkeit, insbesondere bei höheren Rauschpegeln; direkte Beschleunigungsmessung empfohlen		Moderate Zunahme des NRMSE mit steigendem Rauschpegel; Wahl des ML-Modells beeinflusst Robustheit	
Offset	Kein signifikanter Einfluss; unproblematisch für alle Verfahren			
Trend	Nicht-monotone Abhängigkeit von der Trendstärke		Stabil bei kleinen Trendstärken; bei größeren signifikanter NRMSE-Anstieg	

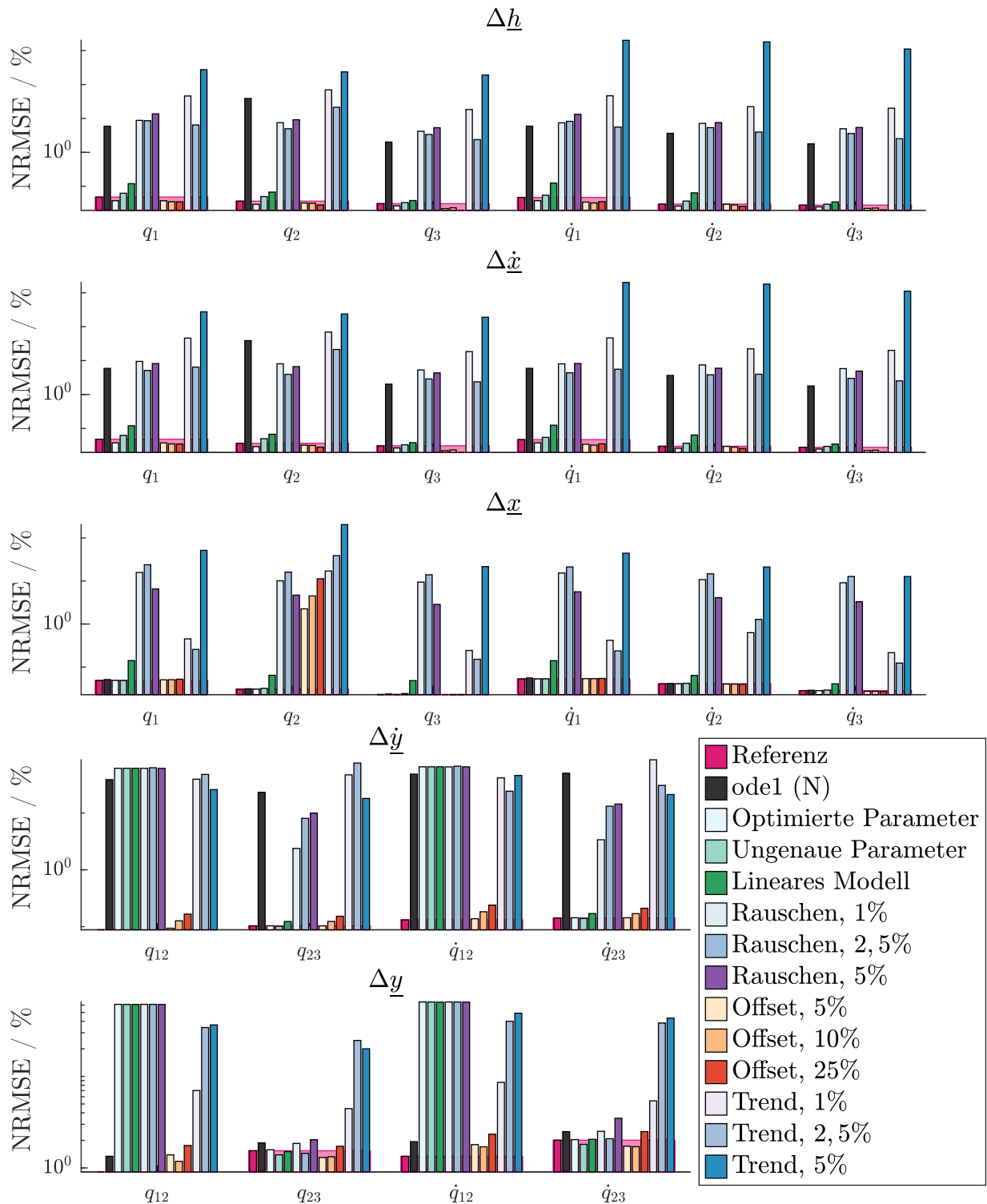


Abbildung 4.23: Ergebnisse aus den unterschiedlichen Untersuchungen sortiert nach Verfahren

Im Langzeitverhalten erreichen alle Verfahren ein stationäres Fehlerniveau. Bei den Ausgangsraumverfahren tritt im transienten Bereich zunächst ein größerer Fehler auf, der im stationären Zustand jedoch vernachlässigbar wird.

Bei der räumlichen Extrapolation zeigen die Zustandsraumverfahren ($\Delta \underline{h}$, $\Delta \underline{\dot{x}}$, $\Delta \underline{x}$) deutlich robustere Ergebnisse als $\Delta \underline{y}$ und $\Delta \underline{\dot{y}}$. Entscheidend ist hier weniger Interpolation vs.

Extrapolation, sondern die Zugehörigkeit zu ähnlichen dynamischen Regimen.

Ungenauere Systemparameter führen nicht automatisch zu einer Verschlechterung der Modellgüte. Ebenso verbessert eine Optimierung der White-Box-Parameter die Modellgüte nicht zwangsläufig.

Offset ist für alle Verfahren unproblematisch.

Die Wahl eines linearen White-Box-Modells inklusive Berücksichtigung der Dämpfung reduziert zwar den NRMSE des White-Box-Modells, verschlechtert jedoch die hybride Modellgüte. Dies deutet darauf hin, dass eine klare Aufgabenteilung vorteilhaft ist: Bekannte Phänomene sollten so präzise wie möglich im White-Box-Modell erfasst werden, während unbekannte oder schlecht parametrierbare Effekte dem Black-Box-Modell überlassen werden sollten, um dessen Lernprozess durch eindeutige Fehlerstrukturen zu unterstützen.

Strukturelle Freiheitsgradreduktionen können durch Diskrepanzmodelle nicht vollständig kompensiert werden. Das diskrete Δy -Verfahren zeigt hier eine höhere Robustheit als das kontinuierliche $\Delta \dot{y}$ -Verfahren. Eine zusätzliche Reduktion vom Systemzustand zum Systemausgang kann vorteilhaft sein. Dies ist physikalisch plausibel, da Systeme mit unterschiedlicher Freiheitsgradanzahl über eine unterschiedliche Anzahl von Eigenmoden verfügen. Eine reine Black-Box-Korrektur kann fehlende strukturelle Moden nicht aus den vorhandenen Messgrößen rekonstruieren, insbesondere wenn diese Moden im Systemausgang nicht oder nur schwach beobachtbar sind. Die höhere Robustheit des diskreten Δy -Verfahrens lässt sich dadurch erklären, dass es direkt die Ausgangsgröße korrigiert und somit nur die beobachtbaren Freiheitsgrade berücksichtigen muss, während das kontinuierliche $\Delta \dot{y}$ -Verfahren stärker von der strukturellen Vollständigkeit des White-Box-Modells abhängt.

Für Rauschen und Trend treten nicht-monotone Fehlerverläufe über dem Störpegel auf. Bei Rauschen werden insbesondere die Verfahren mit GPR-Modellen stark beeinflusst. Durch eine Änderung des ML-Algorithmus von GPR zu BT kann die Robustheit gegenüber Rauschen jedoch deutlich erhöht werden. Die Untersuchungen der Verfahren für diverse Rauschpegel (Abb. 4.20) deuten auch darauf hin, dass die kontinuierlichen Verfahren stärker auf Rauschen (insb. auf größere Rauschpegel) reagieren, als diskrete Verfahren (bei kleineren Rauschpegeln ist dies weniger relevant). Wird der Einsatz kontinuierlicher Verfahren angestrebt, sollten daher direkte Messungen der Geschwindigkeit (z. B. mittels Laservibrometer) oder Beschleunigung (z. B. mittels piezoresistivem Beschleunigungsaufnehmer) durchgeführt werden.

Handlungsempfehlung

Tabelle 4.6 fasst die Eignung der Verfahren für verschiedene Anwendungsfälle zusammen. Die Bewertung basiert auf den numerischen Untersuchungen in diesem Kapitel:

Sehr gut geeignet (++) kennzeichnet Verfahren, die nahezu perfekte Ergebnisse liefern oder strukturell für den Anwendungsfall konzipiert sind. **Geeignet** (+) markiert Verfahren mit akzeptablen Ergebnissen bei leichten Einschränkungen; die Ergebnisse sollten überprüft werden. **Bedingt geeignet** (-) weist auf deutliche Schwächen hin; ein Einsatz ist stark einzelfallabhängig. **Nicht geeignet** (--) bedeutet, dass das Verfahren aufgrund starker Fehler, struktureller Limitierungen oder fehlender konzeptioneller

Tabelle 4.6: Eignung der Verfahren für verschiedene Anwendungsfälle

Anwendungsfall	$\Delta \dot{x}$	$\Delta \dot{y}$	Δx	Δy
Kommerzielle Software	+*	--	++	++
Nicht-invertierbare Messgleichung		++		++
Rechengeschwindigkeit	++	+	+	--
Zeitliche Extrapolation	++	+	++	+
Räumliche Extrapolation	+	--	+	-
Reduziertes White-Box-Modell	+	+	+	+
Strukturelle Unsicherheiten		--		-
Stark verrauschte Daten	-	-	+	+
Trend in Messdaten	-	-	+	+

++ sehr gut geeignet, + geeignet, - bedingt geeignet, -- nicht geeignet

* unter Verwendung des $\Delta \underline{h}$ -Verfahrens möglich

Eignung nicht empfohlen wird.

4.2 Doppelpendel

Beim Doppelpendel handelt es sich um zwei miteinander verbundene Pendel, wie es in Abb. 4.24 a) zu sehen ist. Es besitzt die zwei Freiheitsgrade φ_1 (zwischen der Senkrechten und dem ersten Pendelarm) und φ_2 (zwischen der Senkrechten und dem zweiten Pendelarm).

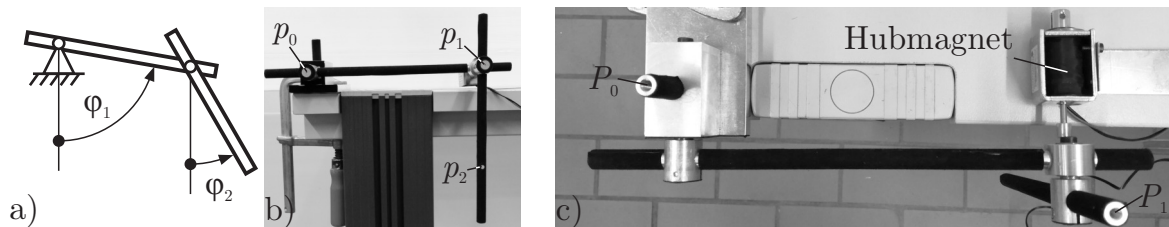


Abbildung 4.24: a) Skizze eines Doppelpendels, und b) Frontansicht und c) Draufsicht des Doppelpendel-Prüfstands (Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$) [123]

Das Doppelpendel wird als nichtlineares, autonomes, dynamisches System mit zwei Freiheitsgraden betrachtet. Es wird nur reproduzierbares Bewegungsverhalten betrachtet. Dafür müssen die Anfangsbedingungen und der Grad der Dissipation gut abgestimmt werden.

4.2.1 White-Box-Modell

Im Folgenden sei der Zustandsvektor über

$$\underline{x} = [\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2]$$

definiert. Die nichtlineare Bewegungsgleichung des Doppelpendels in Abb. 4.24 a) lautet nach Gleichung (2.2) [23]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{s_1}{l_1}\right)^2 + \frac{J_1^{(S_1)}}{m_1 l_1^2} + \frac{m_2}{m_1} & \frac{m_2 s_2}{m_1 l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{m_2 s_2}{m_1 l_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{s_2}{l_1}\right)^2 + \frac{J_2^{(S_2)}}{m_1 l_1^2} \end{bmatrix}}_{\underline{M}(\varphi_1, \varphi_2, t)} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{m_2 s_2}{m_1 l_1} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -\frac{m_2 s_2}{m_1 l_1} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{bmatrix}}_{\underline{k}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_1} \sin(\varphi_1) \\ -\frac{m_2 s_2}{m_1 l_1} \frac{g}{l_1} \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}}_{\underline{h}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)}. \quad (4.13)$$

Dabei ist $J_i^{(S_i)}$ das Trägheitsmoment des Pendelarms bezogen auf seinen Schwerpunkt S_i , m_i die Masse des Pendelarms, s_i die Entfernung zwischen Gelenk und Schwerpunkt, und l_1 der Abstand zwischen den beiden Gelenken, siehe Abb. C.1 im Anhang. In den Bewegungsgleichungen wird keinerlei Dissipation z. B. durch Reibung oder Luftwiderstand berücksichtigt.

Die nichtlineare Zustandsraumdarstellung ist über

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \underline{M}^{-1}(\varphi_1, \varphi_2, t)(\underline{h}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t) - \underline{k}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)) \end{bmatrix}$$

gegeben.

4.2.2 Messungen

Das betrachtete Doppelpendel befindet sich im Labor des Lehrstuhls für Dynamik und Mechanik (LDM) an der Universität Paderborn (UPB) und ist in Abb. 4.24 b) und c) dargestellt. Die Systemparameter des Prüfstands sind in Tabelle C.1 im Anhang aufgeführt. Der Prüfstand besteht aus dünnen Stäben aus Aluminium, die über Drehgelenke miteinander und mit der Umgebung verbunden sind. Neben dem wirkenden Luftwiderstand können zusätzliche dissipative Kräfte in Form von Reibkontakten in das System eingebracht werden. Dafür befinden sich an den Drehgelenken in P_0 und P_1 der Abb. 4.24 c) kleine Kunststoffklötze deren Anpresskraft auf das jeweilige Lager durch eine Feder und eine Schraube einzeln variiert werden kann. Es ist zu beachten, dass die genaue Einstellung der Anpresskraft nicht reproduzierbar ist und zusätzlich Verschleißprozesse an den Kunststoffklötzen wirken.

Als Messsystem wird das Aicon-Kamerasystem MoveInspect HF verwendet, welches Aufnahmen mit bis zu 1000 Hz bei einer Auflösung von bis zu 1,3 Megapixel ermöglicht. Die vorliegenden Messungen werden mit einer Frequenz von 200 Hz durchgeführt. Dafür werden reflektierende Punktmarken auf die zu messenden Stellen (p_0, p_1, p_2 in Abb. 4.24 b)) aufgebracht. Für einen besseren Kontrast wird das ebenfalls reflektierende Aluminium mit schwarzer Flockfolie überklebt. Mithilfe von räumlicher Triangulation (Photogrammetrie) werden die 3D-Koordinaten der Punktmarken ermittelt, welche dann in die Winkel φ_1 und φ_2 überführt werden [123]. Geschwindigkeit und Beschleunigung werden mittels numerischer Differentiation bestimmt.

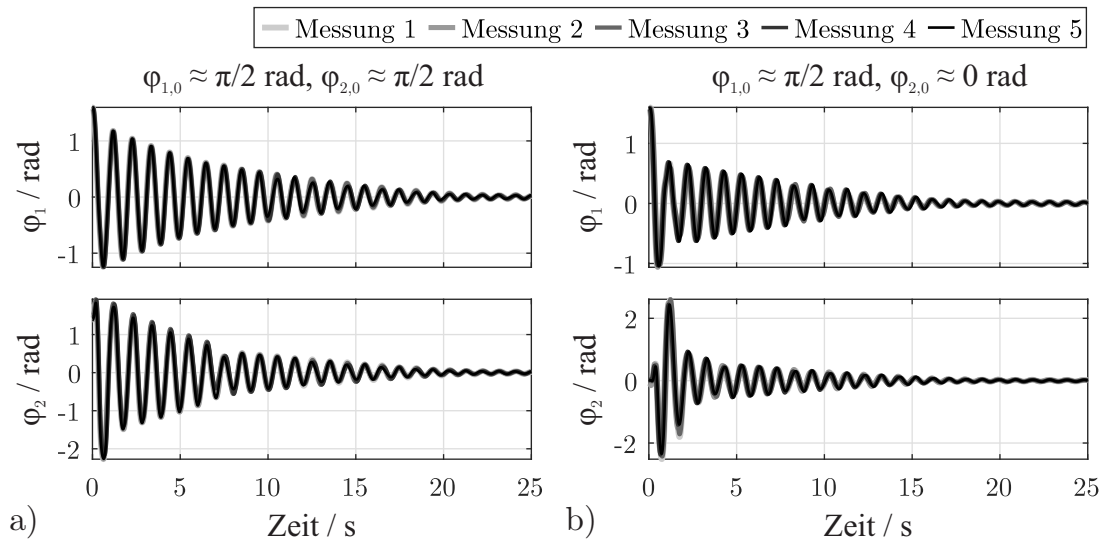


Abbildung 4.25: Jeweils fünf Messungen für die Anfangsbedingung a) $\underline{x}_{0,1}$ und b) $\underline{x}_{0,2}$

Es wird mit zwei unterschiedlichen Anfangsbedingungen gearbeitet:

- Für $\underline{x}_{0,1}$ wird das Gelenk zwischen den Pendelarmen auf einen Hubmagneten aufgelegt, wodurch ein Anfangswinkel von ungefähr $\varphi_{1,0} \approx \pi/2$ rad erreicht wird, zusätzlich wird der zweite Pendelarm ebenfalls in einer nahezu waagerechten Position $\varphi_{2,0} \approx \pi/2$ rad gehalten.
- Für $\underline{x}_{0,2}$ wird das Gelenk zwischen den Pendelarmen ebenfalls auf dem Hubmagneten abgelegt, der zweite Pendelarm hängt mit $\varphi_{2,0} \approx 0$ rad nach unten (vgl. Abb. 4.24 a)).

Zu Beginn der Messung wird die Stromzufuhr zum Hubmagneten getrennt, wodurch dieser einfährt und das Doppelpendel loslässt.

In Abb. 4.25 sind für beide Anfangsbedingungen $\underline{x}_{0,1}$ und $\underline{x}_{0,2}$ jeweils fünf separate Messungen der Winkel φ_1 und φ_2 zu sehen (abgestufte Grautöne). Die gewählten Anfangsbedingungen und dissipativen Kräfte liefern reproduzierbare Messungen und sind somit geeignet, um für die hybride Modellierung genutzt zu werden.

Die zuvor vorgestellte DGL (Gleichung (4.13)) beinhaltet keinerlei Dissipation. Um Messungen und Modell zur Übereinstimmung zu bringen wird das White-Box-Modell im Folgenden um Black-Box-Anteile zu einem hybriden Modell ergänzt.

4.2.3 Hybride Modelle

Das Doppelpendel verfügt über zwei Freiheitsgrade, von denen beide gemessen werden, weshalb Verfahren auf Ebene des Systemzustands eingesetzt werden. Die Wahl fällt auf das $\Delta\dot{\underline{x}}$ - und das $\Delta\underline{x}$ -Verfahren. Da eine konstante Massenmatrix $\underline{M}$ vorliegt wird das $\Delta\underline{h}$ -Verfahren nicht gesondert betrachtet. Es liegen ausschließlich Messungen der Positionen vor, aus denen die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen numerisch abgeleitet werden müssen. Die Systemparameter sind vermutlich ungenau, da insbesondere die Trägheiten der Gelenke nur näherungsweise berechnet werden können. Das White-Box-Modell sollte die wesentlichen Systemdynamiken jedoch weitgehend korrekt abbilden, während eine Vielzahl nicht modellierter Phänomene existiert. Da die Untersuchungen

am Drei-Massen-Schwinger zeigen, dass ungenaue Parameter die hybride Modellgüte nicht zwangsläufig verschlechtern, sind die gewählten Verfahren für dieses System gut geeignet.

Zum Training werden Messungen mit Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$ genutzt, zur Inferenz werden sowohl die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$ als auch $\underline{x}_{0,2}$ verwendet. Zur Bewertung der Genauigkeit wird der NRMSE genutzt (siehe Gleichung (2.7)), eine Zusammenfassung findet sich in Tabelle 4.7 am Ende des Kapitels. Zur Bewertung der Rechendauer wird mit den MATLAB-Funktionen `tic`¹⁰ und `toc`¹¹ die Rechenzeit gemessen, die Ergebnisse befinden sich ebenfalls in Tabelle 4.7. Die verwendete Hard- und Software ist Tabelle A.1 im Anhang zu entnehmen.

4.2.3.1 Kontinuierliches $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahren

Zur Anwendung des kontinuierlichen $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahrens werden die Diskrepanzen der Winkelbeschleunigungen $\Delta\ddot{\varphi}_1$ und $\Delta\ddot{\varphi}_2$ berechnet. Als Eingänge in das jeweilige Black-Box-Modell haben sich die jeweiligen Winkel φ_i und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ als ausreichend erwiesen.

Um eine Diskontinuität des Black-Box-Modells von $\varphi_{i,n} = 2\pi - \varepsilon \pmod{2\pi} \equiv 2\pi - \varepsilon$ nach $\varphi_{i,n+1} = 2\pi + \varepsilon \pmod{2\pi} \equiv \varepsilon$ für kleine ε zu vermeiden, werden die Sinus- und Kosinusfunktionen auf $\varphi_{i,n}$ angewandt [60], wodurch sich für das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta\dot{\underline{x}}}_{\xi,i} : [\varphi_{i,n}, \dot{\varphi}_{i,n}]^\top \mapsto [\sin(\varphi_{i,n}), \cos(\varphi_{i,n}), \dot{\varphi}_{i,n}]^\top \mapsto \Delta\ddot{\varphi}_{i,n}$$

ergibt. Zum Training werden BT-Modelle verwendet (siehe Kapitel 2.3.1.5).

Die Ergebnisse für die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$ sind in Abb. 4.26 zu sehen, es handelt sich also um die zum Training genutzte Trajektorie. Beide Winkel werden gut vom hybriden Modell abgebildet, nur in den ersten Sekunden gibt es Abweichungen bei der Höhe der Amplitude. Gegen Ende ist eine leichte Phasenverschiebung zu beobachten, die Amplitudenhöhe wird dort gut abgebildet.

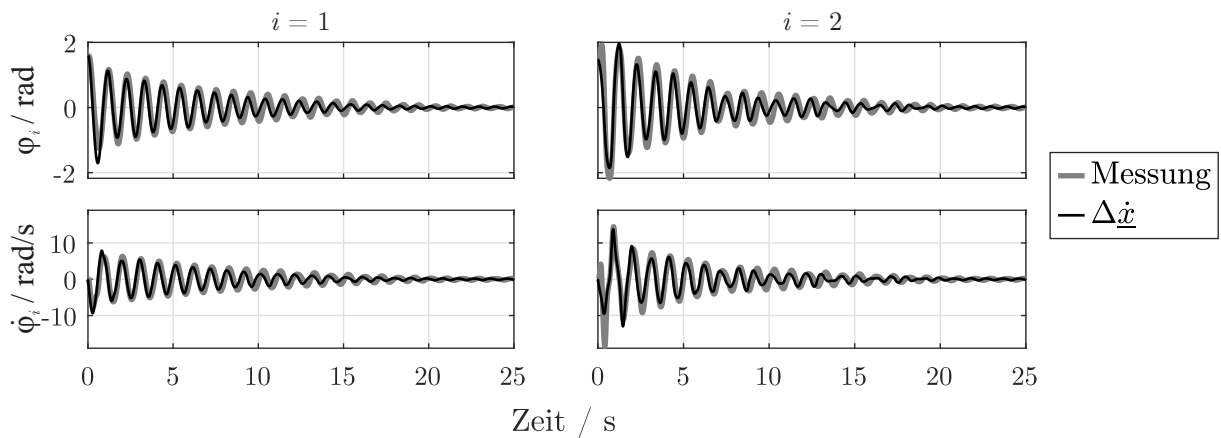


Abbildung 4.26: Messung und Ergebnis des kontinuierlichen $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahrens für die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$, trainiert mit Messungen zu $\underline{x}_{0,1}$

¹⁰<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/tic.html>

¹¹<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/toc.html>

Für die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,2}$ sind die Ergebnisse in Abb. 4.27 zu sehen. Hier entsprechen die Testdaten nicht den Trainingsdaten. Auch hier gibt es in den ersten Sekunden etwas größere Abweichungen bei der Höhe der Amplitude. Eine Phasenverschiebung ist nicht ausgeprägt zu sehen.

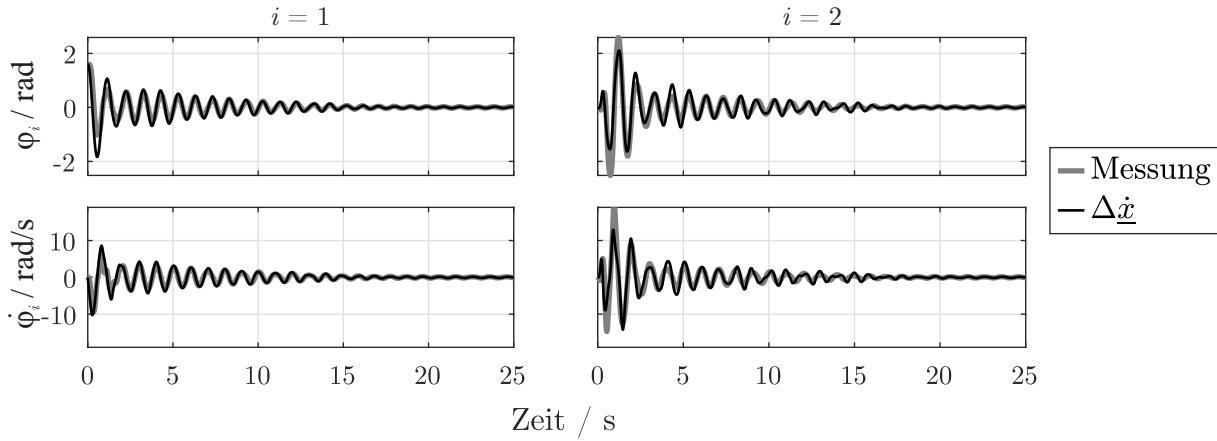


Abbildung 4.27: Messung und Ergebnis des kontinuierlichen $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahrens für die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,2}$, trainiert mit Messungen zu $\underline{x}_{0,1}$

4.2.3.2 Diskretes $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahren

Anschließend wird das diskrete $\Delta\dot{\underline{x}}$ -Verfahren angewandt. Bei Gleichung (4.13) handelt es sich um eine DGL zweiter Ordnung mit zwei Freiheitsgraden, damit folgt

$$\Delta\dot{\underline{x}} = [\Delta\dot{\varphi}_1, \Delta\dot{\varphi}_2, \Delta\dot{\psi}_1, \Delta\dot{\psi}_2]^\top.$$

Wie bereits beim Drei-Massen-Schwinger in Kapitel 4.1.1 wird zur Gewährleistung der physikalischen Kontinuität und zur Reduktion von Rechenaufwand die Diskrepanz der Winkelgeschwindigkeit betrachtet und

$$\dot{\varphi}_{i,n}^* = \dot{\varphi}_{i,n} + \Delta\dot{\varphi}_{i,n},$$

gerechnet. Der Winkel

$$\varphi_{i,n}^* = \varphi_{i,n-1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\varphi}_{i,n-1}^* + \dot{\varphi}_{i,n}^*)$$

wird anschließend über numerische Integration bestimmt [93]. [123, 124]

Die Diskrepanzen $\Delta\dot{\varphi}_i$ mit $i \in \{1,2\}$ sind abhängig von dem jeweiligen Winkel φ_i und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$. Auch hier werden die Sinus- und Kosinusfunktion auf die Winkel $\varphi_{i,n}$ angewandt [60], so dass sich für das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\xi,i}^x : [\varphi_{i,n}, \dot{\varphi}_{i,n}]^\top \mapsto [\sin(\varphi_{i,n}), \cos(\varphi_{i,n}), \dot{\varphi}_{i,n}]^\top \mapsto \Delta\dot{\varphi}_{i,n}$$

ergibt. Fürs Training des Black-Box-Anteils werden GPR-Modelle mit exponentiellem Kernel verwendet (siehe Kapitel 2.3.1.4).

Die Ergebnisse für die Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,1}$ sind in Abb. 4.28 zu sehen, es handelt sich also um die im Training genutzte Trajektorie. Für beide Winkel werden die Messungen

relativ gut vom hybriden Modell abgebildet, nur in den ersten Sekunden gibt es Abweichungen. Gegen Ende ist eine kleine Phasenverschiebung zu beobachten.

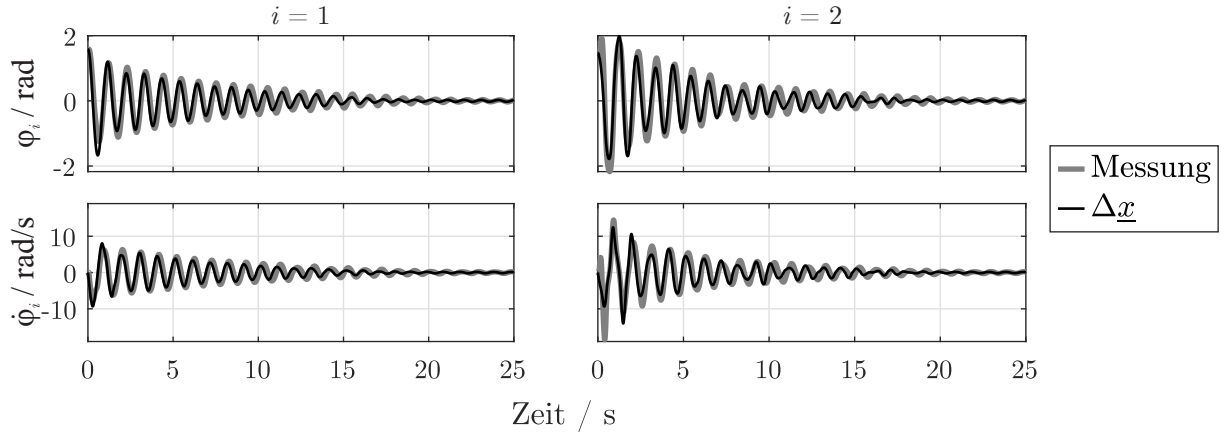


Abbildung 4.28: Messung und Ergebnis des diskreten Δx -Verfahrens für die Anfangsbedingung $x_{0,1}$, trainiert mit Messungen zu $x_{0,1}$

In Abb. 4.29 sind die Ergebnisse für die Anfangsbedingung $x_{0,2}$ zu sehen. Hier entsprechen die Testdaten nicht den Trainingsdaten. Auch hier gibt es in den ersten Sekunden größere Abweichungen. Im weiteren Zeitverlauf weicht die Abbildung von φ_2 und $\dot{\varphi}_2$ vom harmonischen Verhalten ab, eine ausgeprägte Phasenverschiebung ist aber nicht zu beobachten.

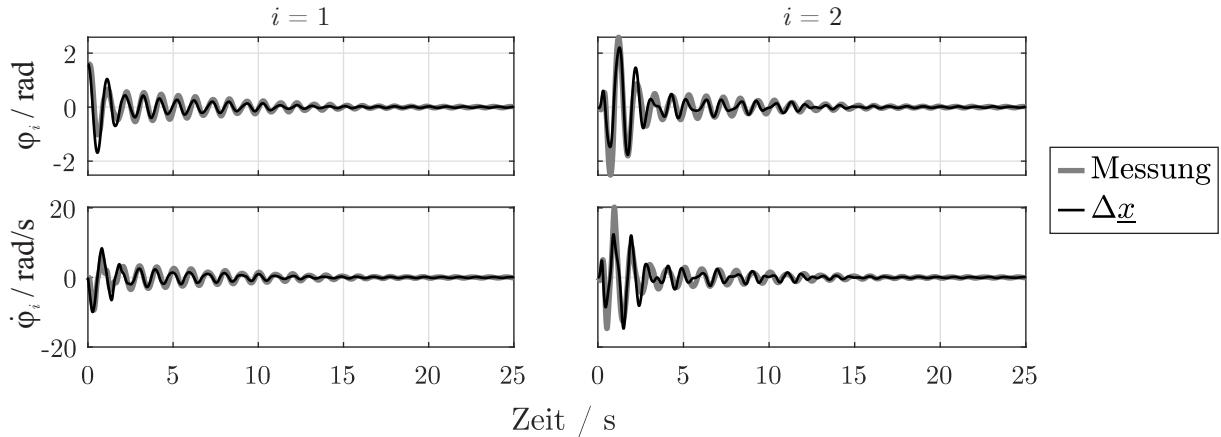


Abbildung 4.29: Messung und Ergebnis des diskreten Δx -Verfahrens für die Anfangsbedingung $x_{0,2}$, trainiert mit Messungen zu $x_{0,1}$

4.2.4 Zusammenfassung

Das $\Delta \dot{x}$ - und das Δx -Verfahren wurde auf reale Messdaten eines Doppelpendels angewandt. Die notwendige Datenvorverarbeitung umfasste die Bestimmung der Pendelwinkel aus 3D-Positionsdaten, was mit zusätzlichen Ungenauigkeiten verbunden ist. Zudem war eine numerische Differentiation erforderlich, einmal für das Δx -Verfahren und zweimal für das $\Delta \dot{x}$ -Verfahren, wodurch sich der Einfluss von Messrauschen weiter verstärkt.

Tabelle 4.7: NRMSE (in %) zwischen Messung und Modell, und Rechenzeit ($\odot$, in s) für das $\Delta\dot{x}$ - und das Δx -Verfahren für die Anfangsbedingungen $\underline{x}_{0,1}$ und $\underline{x}_{0,2}$

Training	$\underline{x}_{0,1}$				
	φ_1	φ_2	$\dot{\varphi}_1$	$\dot{\varphi}_2$	$\odot$
Inferenz	$\underline{x}_{0,1}$				
$\Delta\dot{x}$	5,1777	4,4103	6,2131	3,6145	16,5
Δx	5,2916	4,6506	6,3911	3,8095	81,1
Inferenz	$\underline{x}_{0,2}$				
$\Delta\dot{x}$	4,8117	2,8152	3,8912	3,2769	18,4
Δx	4,9556	3,3201	4,6505	3,8208	80,1

Neben dem Messrauschen wirkten sich auch ungenaue Modellparameter auf die Ergebnisse aus. Voruntersuchungen am Drei-Massen-Schwinger zeigen jedoch, dass geringes Rauschen und Parameterunsicherheiten die Ergebnisgüte der betrachteten Verfahren nur gering beeinflussen. Entsprechend liefern beide hybriden Modelle auch beim Doppelpendel eine gute Nachbildung der Systemdynamik, insbesondere hinsichtlich der nicht im Training verwendeten Anfangsbedingung $\underline{x}_{0,2}$.

Bei beiden Verfahren ist der NRMSE für die Testdaten sogar geringfügig niedriger als bei Anwendung auf die Trainingsdaten. Dies lässt sich durch unterschiedliche Fehlercharakteristiken erklären: Bei identischen Anfangsbedingungen in den Trainings- und den Testdaten werden die Amplituden zwar besser abgebildet, jedoch führt eine Phasenverschiebung zu einem größeren NRMSE. Bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen treten größere Abweichungen bei den Amplituden auf, aber ohne Phasenverschiebung, was zu einem kleineren NRMSE führt. Da das Doppelpendel ein nichtlineares System darstellt, sind dessen Eigenfrequenzen abhängig von der Amplitude. Das hybride Modell scheint somit besser zu der zweiten Anfangsbedingung zu passen.

Das kontinuierliche Verfahren weist eine deutlich geringere Rechendauer als das diskrete auf. Beim diskreten Verfahren ließe sich die Rechenzeit nach Erkenntnissen aus dem Kapitel 4.1.2.2 durch Anpassung von Integrationsverfahren und Schrittweite noch reduzieren.

4.3 Gelenkviereck

Bei einem ebenen Gelenkviereck handelt es sich um eine geschlossene Gelenkkette, die aus vier Gliedern und vier Drehgelenken besteht. Der in dieser Arbeit betrachtete Aufbau ist in Abb. 4.30 zu sehen. Es handelt sich dabei um eine Kurbelschwinge, d. h. dass der angetriebene Arm 2 eine Kurbel ist und unveränderlich in eine Richtung rotiert, und dass Arm 4 eine Schwinge ist, die zwischen zwei Grenzlagen schwingt [42, 89]. Unter dem Mechanismus ist ein Behälter platziert, welcher Flüssigkeiten aufnehmen kann. Durch das Anbringen eines Rührers an den Koppelpunkt C , welcher durch die Flüssigkeit fährt kann nichtlineare Dämpfung in das System eingebracht werden. In dieser Arbeit dient handelsüblicher Honig als Flüssigkeit und der Rührer ist paddelförmig, wie in Abb. 4.30 unten rechts zu sehen, wodurch der Widerstand richtungsabhängig ist. [89, 126]

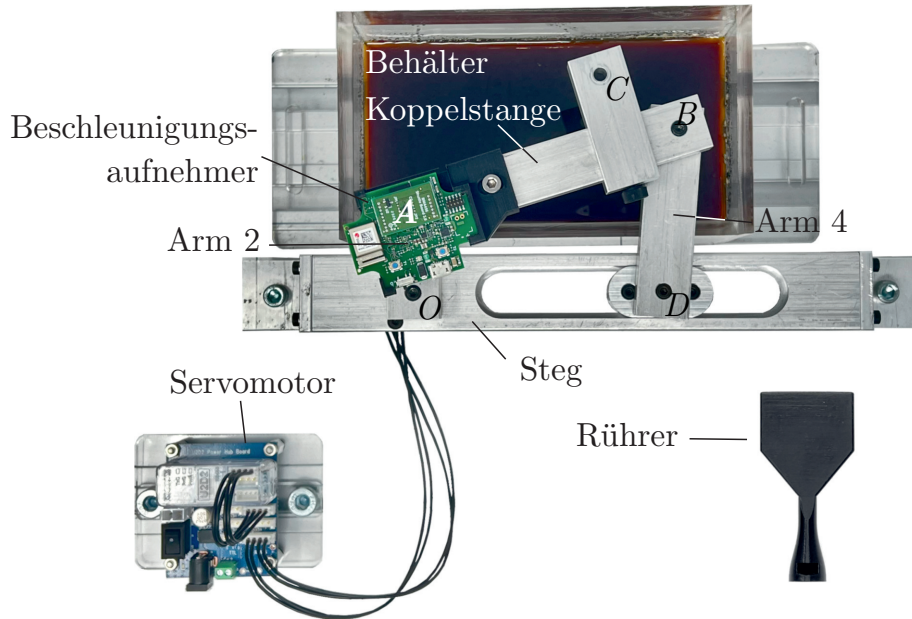


Abbildung 4.30: Elemente des Gelenkviereck-Prüfstands am Institut für Technische und Numerische Mechanik (ITM) [126]

4.3.1 White-Box-Modell

Das White-Box-Modell wird in der MATLAB-basierten MKS-Software Neweul-M² ¹² des ITM der Universität Stuttgart aufgebaut [61].

Wie in Abb. 4.31 zu sehen ist, besteht das White-Box-Modell aus drei Starrkörpern und vier Gelenken (O , A , B , D). Die Gelenke O , A und B werden in Neweul-M² durch verallgemeinerte Koordinaten realisiert, die kinematische Kette wird in Gelenk D durch eine Zwangsbedingung umgesetzt. Der Servomotor wird als Kraftelement modelliert, welches ein Moment $u_M(t)$ auf Arm 2 in O aufprägt.

Für numerische Stabilität soll des weiteren ein viskoser Rotationsdämpfer in das Modell integriert werden. Vor dem Hintergrund, dass die tatsächliche Dämpfung am Koppelpunkt C des Prüfstands angreift wird die Dämpfung zunächst auch im Punkt C realisiert (vgl. Abb. 4.31, orange).

Die physikalischen Parameter (Längen, Massen, Trägheiten) werden dem Modell übergeben, sie sind in Tabelle D.1 im Anhang zu finden. Automatisiert generiert Neweul-M² eine Bewegungsgleichung der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u_M, t) \quad \text{mit} \quad \underline{x} = [\varphi_O, \dot{\varphi}_O]^\top$$

wobei $\varphi_O(t)$ die unabhängige Koordinate ist.

4.3.2 Messungen

Das in dieser Arbeit betrachtete Gelenkviereck befindet sich am ITM der Universität Stuttgart und ist in Abb. 4.30 zu sehen [89]. Die geometrischen Parameter des Prüfstands sind in Tabelle D.1 im Anhang zu finden.

¹²<https://www.itm.uni-stuttgart.de/software/neweul-m2/>

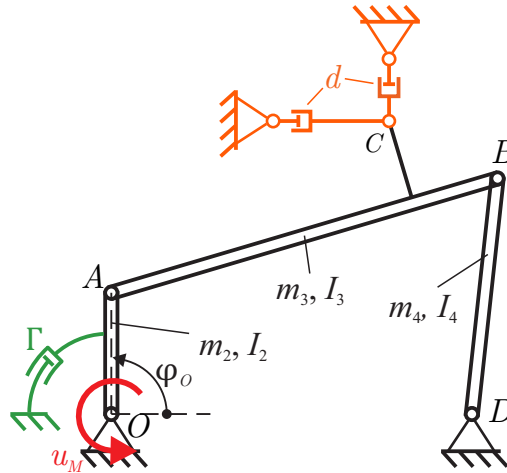


Abbildung 4.31: White-Box-Modell des Gelenkvierecks mit viskosem Dämpfer in Gelenk O (grün) und viskosem Dämpfer im Koppelpunkt C (orange), angelehnt an [126]

Arm 2 wird durch einen Dynamixel XH430-W350-R Servomotor stromgeregelt angetrieben. Das durch den Motor aufgeprägte Moment ist proportional zum Strom. Der Servomotor hat eine Auflösung von 2,69 mA, so dass alle Stromvorgaben ganzzahlige Vielfache von 2,69 mA sind. Zusätzlich gibt der Motor gemessene Winkel und Winkelgeschwindigkeiten aus. Messungen des in Abb. 4.30 dargestellte Beschleunigungsaufnehmers stehen nicht zur Verfügung.

Es stehen Messungen

$$(t_n, \bar{u}_I, \bar{\varphi}_{O,n}, \dot{\bar{\varphi}}_{O,n})_{n=1}^N$$

für verschiedene Input-Signale zur Verfügung. Dabei entsprechen die Eingangssignale $\bar{u}_I$ Stromvorgaben für den Servomotor, welcher daraufhin das proportionale Drehmoment u_M auf das System aufprägt. In dieser Arbeit wird sich auf zwei Input-Signale konzentriert:

- Das erste Input-Signal wird mit „Treppe“ bezeichnet und hat eine Dauer von 40 s. Der Strom startet zu $t_0 = 8$ s mit 5,38 mA und steigt alle 10 s um 5,38 mA an (vgl. „Stair 0“ in [89]). Dieses Signal dient in Abb. 4.32 als Beispiel.
- Das zweite Input-Signal wird als „Sinus“ bezeichnet und hat eine Dauer von 59,7 s, während die Stromvorgabe in Schritten von 2,69 mA steigt bzw. fällt. Im Zeitraum von 0 s bis 5,23 s steigt das Signal von 8,07 mA auf 18,83 mA an, wo es dann gehalten wird. Ab 9,97 s bis 19,16 s sinkt das Signal bis auf 0 mA. Im Zeitraum von 26,37 s bis 49,43 s steigt das Signal erneut bis auf 18,83 mA und fällt zurück auf 0 mA. Ab 56,69 s bis zum Ende der Messung steigt das Signal nochmal auf 5,39 mA an. Durch das wiederholte Fallen und Sinken, sowie das konstante Halten auf 0 mA handelt es sich hierbei um ein komplexes Input-Signal (vgl. „Sine 0“ in [89]).

Datenvorverarbeitung Zur Erweiterung des White-Box-Modells zu einem hybriden Modell soll ein Black-Box-Modell generiert werden. Dafür müssen zunächst die Messungen vorverarbeitet werden, bevor Trainingsdaten erzeugt werden können. In diesem Fall

besteht die Datenvorverarbeitung aus zwei Schritten:

1. Um Spitzen in den Beschleunigungen zu vermeiden und somit geringere Diskrepanzen zu erhalten werden die Stufen im Eingangssignal durch Rampen ersetzt, dies ist in Abb. 4.32 a) dargestellt.
2. Außerdem werden die Daten von 200 Hz auf 10 Hz downgesampelt, um Rechenaufwand zu reduzieren und ebenfalls Beschleunigungsspitzen zu vermeiden (vgl. Abb. 4.32 b)). Beim Downsampling ist zu beachten, dass dies prinzipiell mit einem Informationsverlust und damit einem Verlust an Genauigkeit einhergeht. Bei dieser Anwendung gibt es keinen signifikanten Genauigkeitsverlust bei Abtastfrequenzen bis zu 10 Hz.

Zusätzlich zu den bereits genannten Datenvorverarbeitungsschritten wird für die kontinuierliche hybride Modellierung ein weiterer Schritt durchgeführt:

3. Beim kontinuierlichen Verfahren wird die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_O$ benötigt. Numerisches Differenzieren der Rohdaten führt zu vielen Sprüngen in der Beschleunigung, siehe Abb. 4.32 b). Werden die downgesampelten Daten differenziert lässt sich eine deutlichere Beschleunigungskurve erkennen, welche aber noch deutliche Unstetigkeiten aufweist. Durch ein zusätzliches Glätten der differenzierten Beschleunigung lässt sich eine glatte Beschleunigungskurve erzielen.

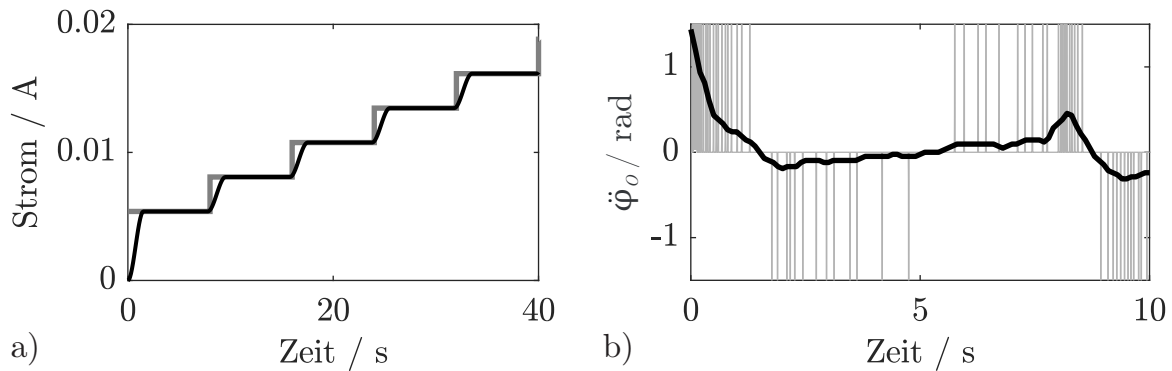


Abbildung 4.32: a) Durch die Eingabedatei definierter Strom (grau) und Eingangssignal im Modell (schwarz); b) Winkelbeschleunigung als numerische Ableitung der Rohdaten (grau) und der downgesampelten und anschließend geglätteten Daten (schwarz), angelehnt an [126]

In Abb. 4.33 sind jeweils drei Messungen, sowie die Ergebnisse des in Kapitel 4.3.1 vorgestellten White-Box-Modells zu sehen. In a) sind die Ergebnisse mit Dämpfung in Punkt C zu sehen. Während der simulierte Winkel φ_O (orange) die Messungen (schwarz) gut abbildet sind bei der simulierten Winkelgeschwindigkeit große Sprünge zu sehen, die sich in den Messungen nicht finden lassen. Diese Sprünge treten zu Winkeln $\varphi_O \in \{0,47; 4,19\}$ rad auf, was genau den Umkehrpunkten des Koppelpunktes C entspricht. In Abb. 4.33 b) ist das Ergebnis zu sehen, wenn ein Dämpfer mit in Gelenk O wirkt (grün), dies ist auch in Abb. 4.31 eingezeichnet. Hier treten keine Spitzen in der Winkelgeschwindigkeit auf und der Trend der Simulation entspricht dem der Messungen, wenn auch die Zwischenschwingungen fehlen. Daher wird das White-Box-Modell mit einem viskosen Dämpfer in Gelenk O umgesetzt.

4.3.3 Hybride Modelle

Das Gelenkviereck verfügt über einen Freiheitsgrad, der gemessen wird, weshalb Verfahren auf Ebene des Systemzustands eingesetzt werden. Die Wahl fällt auf das $\Delta\dot{x}$ - und das $\Delta\ddot{x}$ -Verfahren. Da eine konstante Massenmatrix vorliegt, wird das $\Delta\ddot{h}$ -Verfahren nicht gesondert betrachtet. Das System wird durch eine externe Kraft angeregt. Es liegen Messungen des Winkels vor, wobei der Sensor die Winkelgeschwindigkeit bereits intern ableitet. Für die Anwendung der Verfahren muss die Winkelbeschleunigung zusätzlich numerisch abgeleitet werden. Die Systemparameter weisen eine hinreichende Genauigkeit auf, wobei die Masse des Beschleunigungsaufnehmers im Modell nicht berücksichtigt wurde. Das White-Box-Modell bildet hauptsächlich die Kinematik des Systems ab. Ein Dämpfungselement wurde zur Gewährleistung der numerischen Stabilität eingefügt, entspricht jedoch nicht der physikalischen Realität, weder hinsichtlich des Angriffspunkts noch der Art der Dämpfung. Da die Untersuchungen am Drei-Massen-Schwinger zeigen, dass die Wahl eines linearen White-Box-Modells mit zusätzlichen Dämpfern die hybride Modellgüte verschlechtern kann, ist zu erwarten, dass die Diskrepanzmodelle neben nicht modellierten Phänomenen auch diese strukturellen Abweichungen kompensieren müssen.

Beide Verfahren werden einzeln mit denselben zwei Trainingsdatensätzen („Treppe“ und „Sinus“) trainiert und ausgewertet. Dadurch lässt sich nicht nur die methodische Unterschiedlichkeit vergleichen, sondern auch die Empfindlichkeit beider Verfahren gegenüber der Wahl des Trainingsdatensatzes bewerten. [126]

4.3.3.1 Kontinuierliches $\Delta\dot{x}$ -Verfahren

Beim kontinuierlichen $\Delta\dot{x}$ -Verfahren lässt sich die Diskrepanz über

$$\Delta\ddot{\varphi}_O = \ddot{\varphi}_O - \ddot{\varphi}_O \quad (4.14)$$

berechnen. In dieser Anwendung hat es sich als ausreichend herausgestellt, die Diskrepanz $\Delta\ddot{\varphi}_O$ in Abhängigkeit vom Winkel $\tilde{\varphi}_O$ und von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\tilde{\varphi}}_O$ zu

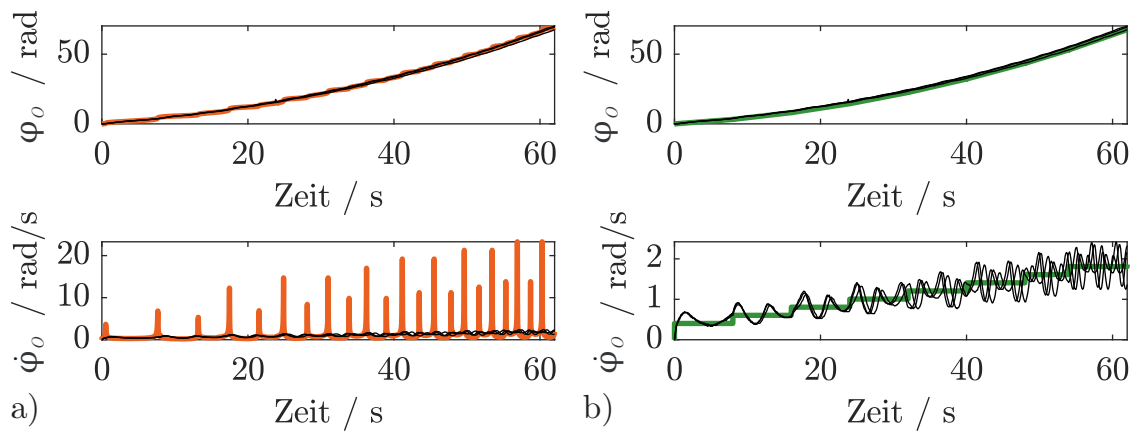


Abbildung 4.33: Messungen (schwarz) und Ergebnisse des White-Box-Modells mit a) viskosem Dämpfer in Punkt C (orange) und b) viskosem Dämpfer in Gelenk O (grün)

modellieren. Wie bereits beim Doppelpendel, werden auch hier wieder die Sinus- und die Kosinusfunktion angewandt um die Periodizität des Winkels $\tilde{\varphi}_O$ zu berücksichtigen [60], so dass sich für das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta \dot{x}} : \underline{x} = [\varphi_O, \dot{\varphi}_O]^\top \mapsto [\sin(\varphi_O), \cos(\varphi_O), \dot{\varphi}_O]^\top \mapsto \Delta \ddot{\varphi}_O \quad (4.15)$$

ergibt. Beim Training wird ein Support Vector Machine (SVM)-Modell mit Gauß-Kernel verwendet (siehe Kapitel 2.3.1.2).

Die Ergebnisse der Modellvalidierung sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

In Abb. 4.34 sind die Ergebnisse für das mit dem Input-Signal „Treppe“ trainierte Modell zu sehen. In Teil a) der Abbildung, bei dem Trainings- und Testdaten identisch sind, zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung sowohl für den Winkel als auch für die Winkelgeschwindigkeit. Lediglich gegen Ende der Simulation treten Abweichungen bei der Winkelgeschwindigkeit auf.

In b) unterscheiden sich die Trainings- und die Testdaten. Hier lässt sich für den ersten Abschnitt ebenfalls eine gute Abbildung der Messungen durch das Modell feststellen. Die konstante Null konnte nicht vollständig gehalten werden. In der zweiten Hälfte ist das Modell zwar weiterhin relativ gut, es zeigen sich jedoch deutliche Abweichungen, die insbesondere beim Winkel sichtbar werden.

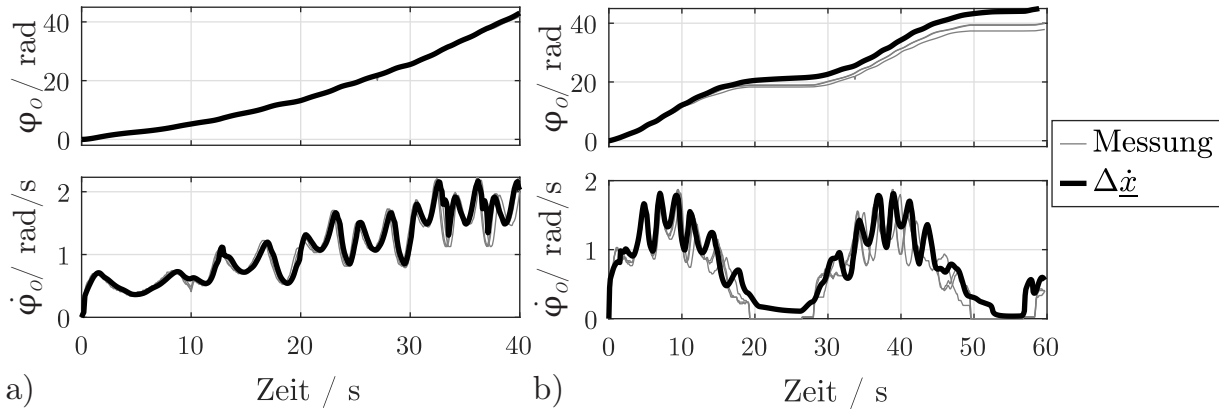


Abbildung 4.34: Messungen und Ergebnisse des auf „Treppe“ trainierten $\Delta \dot{x}$ -Verfahrens:
a) Input „Treppe“, b) Input „Sinus“

Abb. 4.35 zeigt die Ergebnisse für das mit dem Input-Signal „Sinus“ trainierte Modell. In a), wo Training und Test übereinstimmen, ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung erkennbar. Der Wert Null wird im ersten Abschnitt sehr gut gehalten, während im zweiten Abschnitt ein Wert minimal höher als Null beibehalten wird.

In b) unterscheiden sich Trainings- und Testdaten und es ergibt sich eine weniger gute Übereinstimmung, insbesondere bei der Winkelgeschwindigkeit. Zu Beginn scheint ein leichter zeitlicher Versatz vorzuliegen.

In Abb. 4.36 ist die Entwicklung des RMSE zwischen Messung und Modell über der Zeit nach Gleichung (4.8) dargestellt. Die Winkel wurden hierfür auf den Bereich $[0, 2\pi]$ abgebildet. In a) sind die Ergebnisse beider trainierter Modelle unter Anwendung des Treppe-Signals dargestellt. Während der NRMSE des Winkels beim mit Sinus trainierten Modell stetig weiter ansteigt, wird beim mit Treppe trainierten Modell ein nahezu

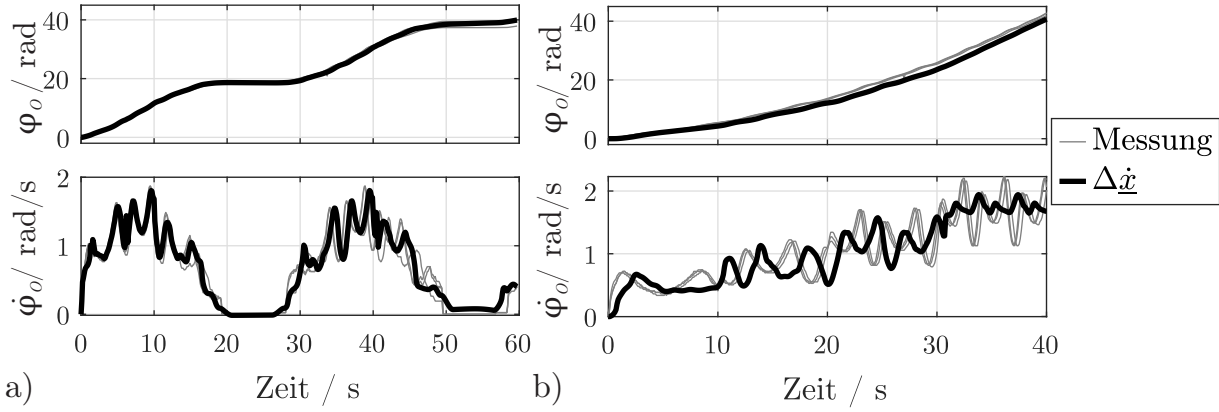


Abbildung 4.35: Messungen und Ergebnisse des auf „Sinus“ trainierten $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens:
a) Input „Sinus“, b) Input „Treppe“

stabiler Endwert erreicht.

In b) sind beide trainierten Modelle unter Anwendung des Sinus-Signals dargestellt. Die Ergebnisse sind ähnlich wie in a), jedoch mit vertauschten Rollen: Das Modell, bei dem die Trainingsdaten den Testdaten entsprechen gute Ergebnisse, die gegen einen stationären Endwert konvergieren. Im anderen Fall zeigt sich hingegen ein stetig ansteigender NRMSE.

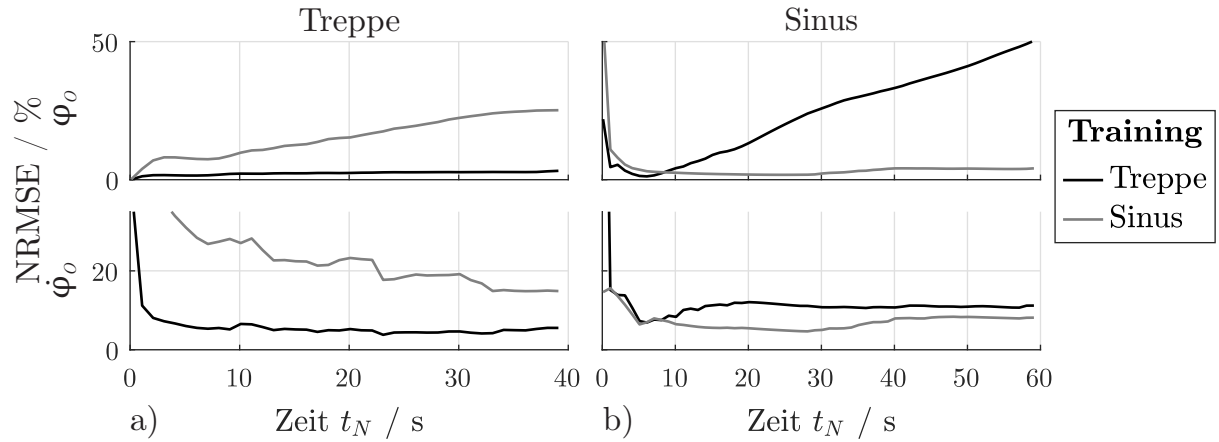


Abbildung 4.36: Zeitlicher Verlauf des NRMSE zwischen Messungen und Ergebnissen des $\Delta\dot{x}$ -Verfahrens angewandt a) auf „Treppe“ und b) auf „Sinus“

4.3.3.2 Diskretes $\Delta\dot{x}$ -Verfahren

Für das diskrete hybride $\Delta\dot{x}$ -Verfahren lässt sich die Diskrepanz über

$$\Delta\dot{\tilde{\phi}}_{O,n} = \dot{\tilde{\phi}}_{O,n} - \dot{\phi}_{O,n}$$

berechnen. Die Diskrepanz $\Delta\dot{\tilde{\phi}}_O$ ist vom Winkel $\tilde{\phi}_O$ sowie der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\tilde{\phi}}_O$ abhängig. Um die Periodizität des Winkels zu gewährleisten werden die Sinus- und

die Kosinusfunktion auf $\tilde{\varphi}_O$ angewandt [60], wodurch sich für das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta \underline{x}} : \underline{x}_n = [\varphi_{O,n}, \dot{\varphi}_{O,n}]^\top \mapsto [\sin(\varphi_{O,n}), \cos(\varphi_{O,n}), \dot{\varphi}_{O,n}]^\top \mapsto \Delta \dot{\varphi}_{O,n} \quad (4.16)$$

ergibt. Zum Training wird ein GPR-Modell mit Squared-Exponential-Kernel verwendet (siehe Kapitel 2.3.1.4). Mit berechneter Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}_{O,n}^* = \dot{\varphi}_{O,n} + \Delta \dot{\varphi}_{O,n} \quad (4.17)$$

lässt sich der Winkel mithilfe der Trapezformel berechnen [93].

Die Ergebnisse der Modellvalidierung sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

In Abb. 4.37 sind die Ergebnisse für das mit dem Input-Signal „Treppe“ trainierte Modell dargestellt. In a), bei dem Trainings- und Testdaten übereinstimmen, wird der Winkel sehr gut abgebildet, während bei den Winkelgeschwindigkeiten erhebliche Schwierigkeiten auftreten. Es zeigt sich ein ähnlicher zeitlicher Versatz wie in Abb. 4.35 b).

In b) unterscheiden sich die Trainings- und die Testdaten. Hier werden sowohl Winkel als auch Winkelgeschwindigkeit über einen langen Zeitraum sehr gut abgebildet. Das erste Halten der Null wird nahezu getroffen, wobei der Wert etwas unterhalb von Null liegt. Das zweite Halten der Null gelingt deutlich schlechter, wodurch sich auch beim Winkel eine größere Abweichung ergibt.

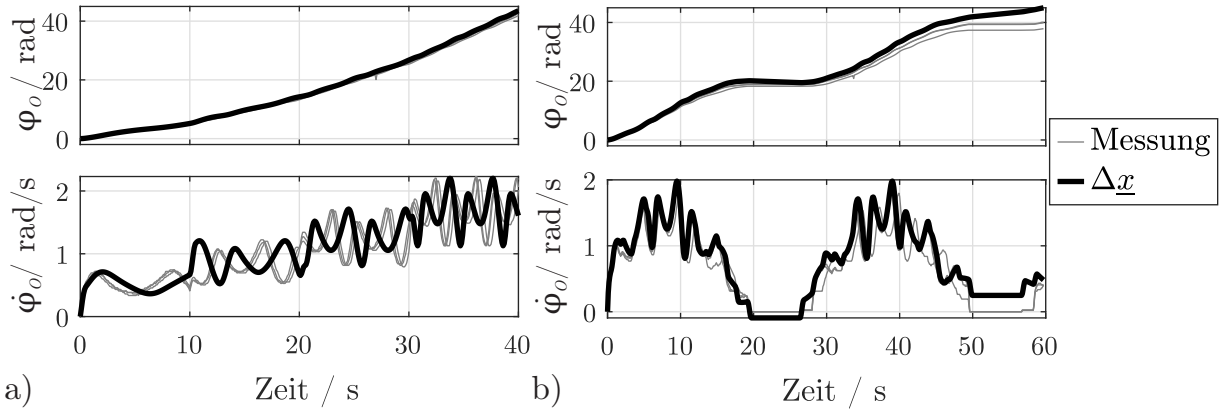


Abbildung 4.37: Messungen und Ergebnisse des auf „Treppe“ trainierten $\Delta \underline{x}$ -Verfahrens:
a) Input „Treppe“, b) Input „Sinus“

Abb. 4.38 zeigt die Ergebnisse für das mit dem Input-Signal „Sinus“ trainierte Modell. In a), wo die Trainingsdaten den Testdaten entsprechen, zeigen sich zu Beginn wieder sehr gute Ergebnisse. Ab dem zweiten Halten der Null treten jedoch sehr große Abweichungen in der Winkelgeschwindigkeit auf, die sich anschließend auch im Winkel bemerkbar machen.

In b) unterscheiden sich Trainings- und Testdaten und es ergeben sich ähnliche Schwierigkeiten wie zuvor: Der Winkel wird gut abgebildet, die Winkelgeschwindigkeit jedoch nicht.

Die Entwicklung des NRMSE zwischen Messung und Modell über der Zeit ist in Abb. 4.39 dargestellt. In a) sind beide Modelle unter Anwendung des Treppe-Signals zu sehen. Überraschenderweise schneidet hier das mit Sinus trainierte Modell deutlich besser ab und erreicht einen stationären Endwert.

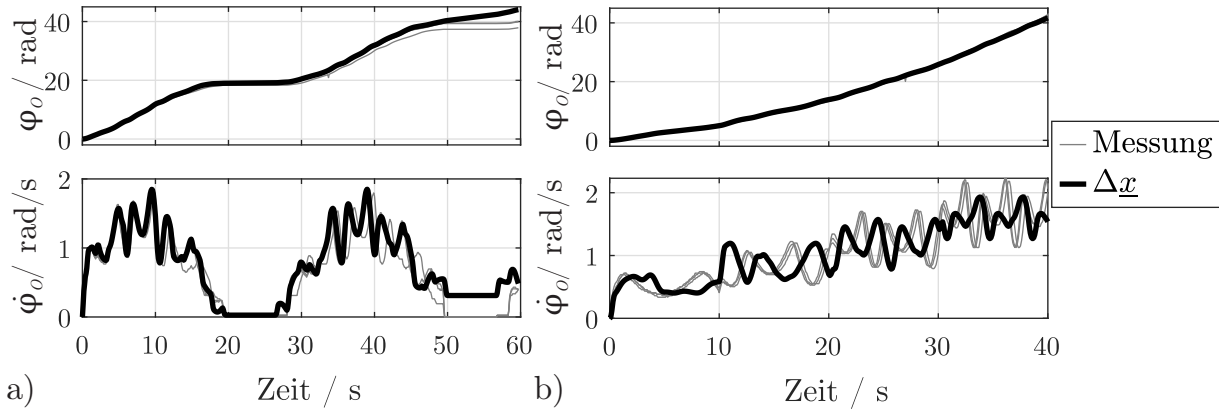


Abbildung 4.38: Messungen und Ergebnisse des auf „Sinus“ trainierten $\Delta\hat{x}$ -Verfahrens:
a) Input „Sinus“, b) Input „Treppe“

In b) sind beide Modelle unter Anwendung des Sinus-Signals dargestellt. Auch hier schneidet das mit Sinus trainierte Modell besser ab. Allerdings erreicht keines der beiden Modelle einen konstanten Endwert, und der NRMSE des Winkels steigt stetig weiter an.

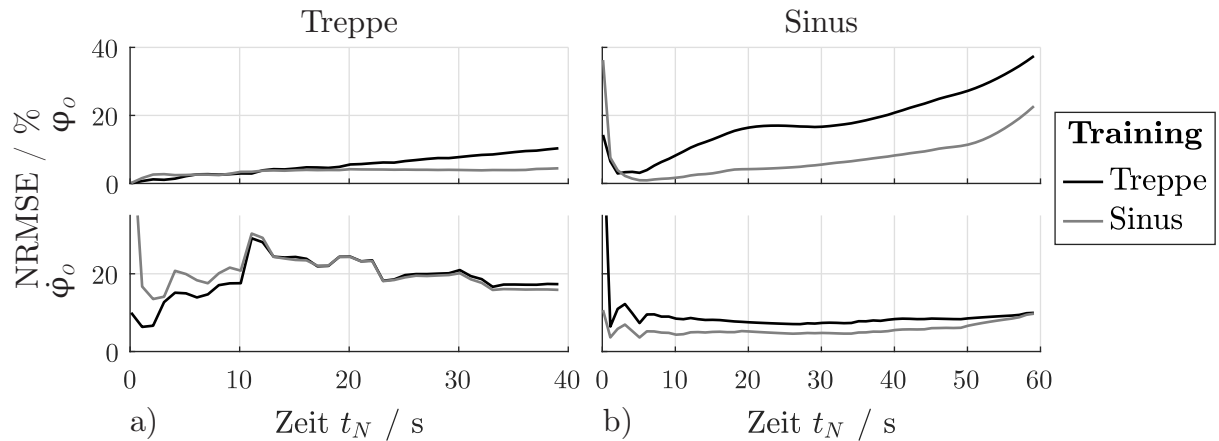


Abbildung 4.39: Zeitlicher Verlauf des NRMSE zwischen Messungen und diskretem $\Delta\hat{x}$ -Modell angewandt a) auf „Treppe“ und b) auf „Sinus“

4.3.4 Zusammenfassung

Die Untersuchung zeigt, dass die Vorhersagegüte stark von der Übereinstimmung zwischen Trainings- und Testanregung abhängt. Das kontinuierliche $\Delta\hat{x}$ -Verfahren erzielt jeweils sehr gute Ergebnisse, wenn es mit dem für die betreffende Testanregung passenden Datensatz trainiert wurde. Wird hingegen ein nicht repräsentativer Trainingsdatensatz verwendet, nehmen die Abweichungen deutlich zu. Das diskrete $\Delta\hat{x}$ -Verfahren liefert in vielen Fällen brauchbare Vorhersagen insbesondere für den Winkel, zeigt aber eher eine zeitliche Verschiebung bei der Winkelgeschwindigkeit und ein ansteigendes Fehlerverhalten über die Simulationszeit, was je nach benötigtem Prädiktionshorizont jedoch vernachlässigt werden kann. Diese Beobachtungen bestätigen und erweitern die Erkenntnisse vom

Drei-Massen-Schwinger: Auch dort zeigte sich, dass das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren bei gut passenden Trainingsdaten eine hohe Genauigkeit erreichen, die Performance jedoch bei Abweichungen zwischen Trainings- und Testbedingungen (etwa durch Rauschen oder Trends) deutlich nachlässt.

4.4 Stoßdämpfer

Beim ersten Anwendungsbeispiel auf Komponentenebene handelt es sich um einen Stoßdämpfer, wie er in vielen Fahrzeugen verbaut ist. Er hat die Aufgabe Schwingungen zu reduzieren und eine gute Bodenhaftung der Räder sicherzustellen, was durch Umwandlung von mechanischer in thermische Energie geschieht. Das Dämpfungsverhalten ist dabei hochkomplex, da zahlreiche Einflussfaktoren zu berücksichtigen sind, etwa die Kompressibilität des Dämpferöls, die Nachgiebigkeit der Zylinderwand oder die temperaturabhängige Viskosität des Öls. [1, 29, 59, 84, 88]

Stoßdämpfer kommen in verschiedenen Bauformen zum Einsatz, wobei der Fokus in dieser Arbeit auf einen Teleskop-Zweirohrdämpfer gelegt wird (vgl. Abb. 4.40 a)). Diese Bauart ist einfach, robust und gilt sowohl in der Fertigung als auch im Betrieb als besonders unempfindlich. [71]

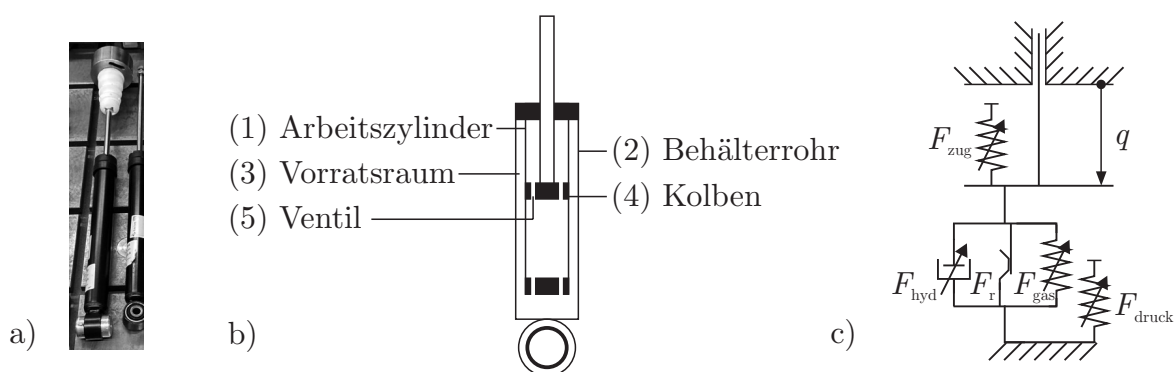


Abbildung 4.40: Betrachteter Zweirohrdämpfer a) im Labor, b) als Prinzipskizze, und c) mechanisches Ersatzmodell

Die Bauteile des Zweirohrdämpfers sind in Abb. 4.40 b) dargestellt. Er besteht aus einem inneren Arbeitszylinder (1) und einem konzentrisch angeordneten äußeren Behälterrohr (2). Dazwischen befindet sich ein ringförmiger Vorratsraum (3), der mit Dämpferöl sowie einem komprimierten Gas gefüllt ist. Das Gaspolster dient dem Volumenausgleich, der durch das Ein- und Ausfahren der Kolbenstange entsteht. Im Inneren des Arbeitszylinders bewegt sich der Kolben (4) in dem mit Öl gefüllten Raum. Beim Einfedern (Druckstufe) wird Öl durch die Ventile (5) des Kolbens in den oberen Bereich des Arbeitszylinders gedrückt. Beim Ausfedern (Zugstufe) strömt das Öl wieder in den unteren Bereich zurück. Die Dämpfungskraft entsteht durch den Strömungswiderstand des Öls beim Passieren der Ventile. [29, 71, 88]

Zusätzlich zur Dämpfung des Fahrzeugaufbaus sollen durch Druck- und Zuganschlag der Ein- und der Ausfederweg begrenzt werden. [1, 29, 88]

Der Druckanschlag kann im Dämpferrohr untergebacht sein [29], wird aber häufig konzentrisch an der Kolbenstange, meist am Dämpferkopflager platziert. In diesem zweiten Fall

handelt es sich beim Druckanschlag um eine einzelne Komponente, so dass Stoßdämpfer und Druckanschlag zusammen ein Modul bilden. Der Druckanschlag begrenzt den Einfederweg des Rades, nach Überschreiten eines definierten Freiwegs wird er aktiv und verhindert ein mechanisches Anschlagen der Kolbenstange im Dämpfer. Druckanschläge werden meist aus Elastomeren mit nichtlinearer Kennlinie oder in Form hydraulischer Dämpfer realisiert. [1, 29, 59, 88]

Der Zuganschlag begrenzt den Ausfederweg und ist an der Kolbenstange angebracht. Auch hier wird nach einem Freiweg eine Gegenkraft aufgebaut, die ein Überdehnen des Dämpfers verhindert und zusätzlich die Kolbenstangenführung entlastet. Zuganschläge können als einfache lineare Stahlfeder mit konstanter Steifigkeit, als progressive Elastomerkomponenten oder mittels hydraulischer Dämpfung ausgeführt sein. [1, 29, 59, 88]

4.4.1 White-Box-Modell

Das Verhalten eines Stoßdämpfers setzt sich aus verschiedenen Phänomenen und Abhängigkeiten zusammen. Im Folgenden wird ein phänomenologisches White-Box-Modell basierend auf [59] entwickelt, wie es in Abb. 4.40 c) dargestellt ist.

Den größten Anteil an der Dämpfungswirkung hat beim Zweirohrdämpfer die hydraulische Dämpfung, die durch den erzwungenen Ölfluss durch die Ventile entsteht. Die resultierende Kraft ist primär von der Relativgeschwindigkeit abhängig. Sie lässt sich durch eine Kennlinie

$$F_{\text{hyd}} = F(\dot{q}), \quad (4.18)$$

beschreiben, welche häufig mittels Akima-Spline modelliert wird. Bei der Kennlinie handelt es sich um eine degressive Kurve mit asymmetrischer Teilung zwischen Zug- und Druckstufe. Frequenz- oder amplitudenabhängige Effekte lassen sich damit nicht abbilden. [1, 84, 88]

Ergänzend wirkt gerade bei niederfrequenten Anregungen eine Reibungskraft F_r , die durch Relativbewegung der inneren Dämpferkomponenten entsteht. Reibung tritt insbesondere an Kontaktstellen wie Kolbenstange - Dichtung, Kolbenstange - Führung oder Kolben - Zylinder auf. Beim Zweirohrdämpfer liegt ihr Anteil typischerweise bei ± 30 N. Diese Effekte dominieren bei niedrigen Geschwindigkeiten und werden oft durch eine stetige Funktion genähert. Die einzelne Berücksichtigung dieser Reibungsstellen ist mit viel Aufwand und langen Rechenzeiten verbunden, was nur in den seltensten Fällen sinnvoll ist. Eine komplette Vernachlässigung ist in der Regel jedoch keine Option. Eine Alternative ist die Annahme einer fiktiven Gesamtreibung, die alle Reibungseffekte in vertikaler Richtung abdeckt und sich über

$$F_r = F_{r,0} \tanh\left(\frac{\dot{q}}{k_r}\right) \quad (4.19)$$

berechnen lässt. Dabei ist $F_{r,0}$ die Gleitkraft und k_r der Glättungsfaktor. Die Reibkraft hat einen Einfluss auf die Größe der Kraft-Verschiebungs-Hysterese und die Anhebung der beiden asymmetrischen Verläufe im Zug- und Druckbereich. Der Einfluss ist insbesondere bei niedrigen Geschwindigkeiten zu erkennen, wenn der Einfluss der hydraulischen Dämpfung gering ist. [59, 84, 88]

Ein weiterer niederfrequenter Effekt ist die Gaskraft, die sich aus einem unter Druck ste-

henden Gaspolster ergibt. Sie wirkt wegabhängig, liefert eine statische Grundkraft und dient zugleich der Vorspannung, um Kavitation zu vermeiden. Mithilfe der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase lässt sich für die Gaskraft

$$F_{\text{gas}} = F_{\text{gas},0} + c_{\text{gas}}q$$

herleiten. Dabei ist $F_{\text{gas},0}$ die statische Grundkraft und c_{gas} die Steifigkeit. Die Effekte der Gaskraft lassen sich vor allem bei großem Hub und niedriger Geschwindigkeit beobachten, da dann der Anteil der hydraulischen Dämpferkraft gering ist. [1, 59, 84]

Zur Modellierung von Zug- und Druckanschlag werden häufig Kontaktmodelle oder nicht-lineare Federn mit progressiven Kennlinien und Freiwegen q_{zug} bzw. q_{druck} genutzt, so dass sich die Kräfte über

$$F_{\text{zug}}(q) = \begin{cases} 0, & q > q_{\text{zug}} \\ F(q), & q \leq q_{\text{zug}} \end{cases} \quad \text{und} \quad F_{\text{druck}}(q) = \begin{cases} F(q), & q > q_{\text{druck}} \\ 0, & q \leq q_{\text{druck}} \end{cases}$$

berechnen lassen. [1, 29, 59, 88]

Zusätzlich beeinflussen temperaturabhängige Änderungen der Ölviskosität sowie mögliche Kavitation bei direktem Öl-Gas-Kontakt das Dämpferverhalten. Auch elastische Verformungen der Außenwand können eine Rolle spielen, werden jedoch meist vernachlässigt. [88]

Durch Addition der einzelnen Modellteile zu

$$F(q, \dot{q}) = F_{\text{hyd}}(\dot{q}) + F_{\text{gas}}(q) + F_{\text{r}}(\dot{q}) + F_{\text{zug}}(q) + F_{\text{druck}}(q). \quad (4.20)$$

lässt sich nun das Verhalten eines Stoßdämpfers abbilden. [59]

4.4.2 Messungen

Bei den Messungen am Stoßdämpfer wird eine Verschiebung

$$q(t) = \hat{q} \sin(2\pi ft)$$

aufgeprägt, wobei $\hat{q}$ die Amplitude und f die Frequenz der Anregung darstellen. Die Systemantwort wird über die Kraft $\underline{F}$ gemessen.

Ursprünglich sollten die in [101] dokumentierten Messdaten als Grundlage der hybriden Modellierung dienen. Da der Stoßdämpfer im Waagerechten vermessen wurde kam es zu ausgeprägter Kavitation, also zur Bildung von Dampfblasen im Dämpferöl infolge lokal stark reduzierten Drucks. Dieser Effekt tritt bevorzugt in der Zugstufe auf, wenn der Druck im unteren Zylinderbereich stark absinkt. Kavitation kann zu einer plötzlichen Reduktion der Dämpferkraft, störenden Geräuschen und langfristigen Schäden an Bauteilen führen. Durch geeignete Ventilauslegung, ausreichende Gasdruckvorspannung im Vorratsraum und den senkrechten Einbau des Dämpfers lässt sich Kavitation in der Praxis weitgehend vermeiden. [71, 88]

Durch die Kavitation sind die Kraftverläufe nicht repräsentativ und insbesondere nicht reproduzierbar, weswegen diese Daten in dieser Arbeit nicht verwendet werden. Stattdes-

sen kommen synthetische Messdaten zum Einsatz, die mit dem in Kapitel 4.4.1 beschriebenen White-Box-Modell, und den in [101] identifizierten Parametern erzeugt werden. Das hybride Modell basiert auf einer reduzierten Variante dieses Modells, welche die relevanten physikalischen Effekte ohne Kavitation abbildet. Da die Validierung ausschließlich anhand der synthetischen Daten erfolgt, ist weder eine Genauigkeitssteigerung noch eine deutliche Reduktion der Rechenzeit zu erwarten. Der Fokus liegt vielmehr auf der Demonstration der prinzipiellen Eignung des hybriden Ansatzes.

Im Folgenden werden die Untersuchungen beschrieben, die in [101] am Prüfstand durchgeführt wurden, und welche zur Generierung der in dieser Arbeit verwendeten synthetischen Messdaten mit dem in Kapitel 4.4.1 beschriebenen Modell simuliert wurden.

Quasistatische Messungen Zur Parametrierung der Reibkraft und Gaskraft werden quasistatische Versuche mit einer niedrigen Frequenz $f = 0,001$ Hz und einer großen Amplitude $\hat{q} = 0,12$ m durchgeführt. Dabei lassen sich insbesondere die Parameter der Reibkraft $F_r(\dot{q})$ und der Gaskraft $F_{\text{gas}}(q)$ bestimmen, da bei kleinen Geschwindigkeiten der Einfluss der hydraulischen Dämpfung vernachlässigbar ist. Die Messung sei mit

$$(t_{\text{qs}}, \bar{q}_{\text{qs}}, \dot{\bar{q}}_{\text{qs}}, \bar{F}_{\text{qs}})$$

bezeichnet.

Auch die Kräfte von Zuganschlag $F_{\text{zug}}(q)$ und Druckanschlag $F_{\text{druck}}(q)$ lassen sich über die quasistatischen Messungen ermitteln. In dieser Arbeit werden die Kennlinien über Polynome dritten Grades (Druckanschlag) und vierten Grades (Zuganschlag) abgebildet, die Ergebnisse sind in Abb. 4.41 zu sehen.

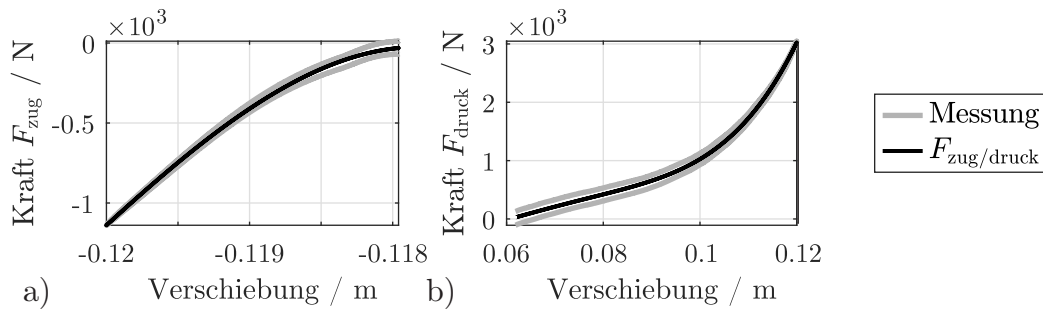


Abbildung 4.41: Messungen und Modellierung des a) Zuganschlages und b) Druckanschlages

VDA-Test Zur Charakterisierung eines Dämpfers wurde vom Verband der Automobilindustrie (VDA) ein Prüfverfahren entwickelt, welches gewährleisten soll, dass die Messungen verschiedener Dämpfer vergleichbar sind. Der sogenannte VDA-Test definiert sowohl die Prüfeinrichtung, als auch den Prüfablauf, und soll dafür sorgen, dass Einflüsse durch Kavitation oder durch Erwärmung gleich bewertet werden. Bei der Betrachtung der Fahrdynamik ist vor allem das niederfrequente Verhalten des Dämpfers von Interesse (< 2 Hz), welches z. B. durch das Nicken und Wanken beim Lenken, Bremsen oder Antreiben auftritt. Beim VDA-Test werden daher Versuche mit einer Amplitude von $\hat{q} = 0,025$ m und Frequenzen $f \in \mathcal{F} = \{0,2; 0,42; 0,82; 1,67; 3,33; 6,67\}$ Hz gefahren. Die

Dämpferkraft wird beim sechsten Prüfhub gemessen. Die vorigen fünf Leerhübe dienen der ausreichenden Entlüftung des Dämpfers, und bei höheren Geschwindigkeiten auch der Gewährleistung, dass die geforderte Geschwindigkeit auch erreicht wird. Die Messungen werden mit

$$(\underline{t}_{\text{vda}}, \underline{\bar{q}}_{\text{vda}}, \underline{\dot{\bar{q}}}_{\text{vda}}, \underline{\bar{F}}_{\text{vda}})_{f \in \mathcal{F}}$$

bezeichnet und sind in Abb. 4.42 dargestellt. [84, 88, 118]

Aus den Messungen wird für jede Anregungsfrequenz die maximale Zug- und Druckkraft bestimmt und den entsprechenden Geschwindigkeiten zugeordnet. Auf diese Weise entsteht die Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie der hydraulischen Dämpfung $F_{\text{hyd}}(\dot{q})$ die anschließend zur Parametrierung des Dämpfermodells genutzt wird, siehe Abb. 4.42, rechts.

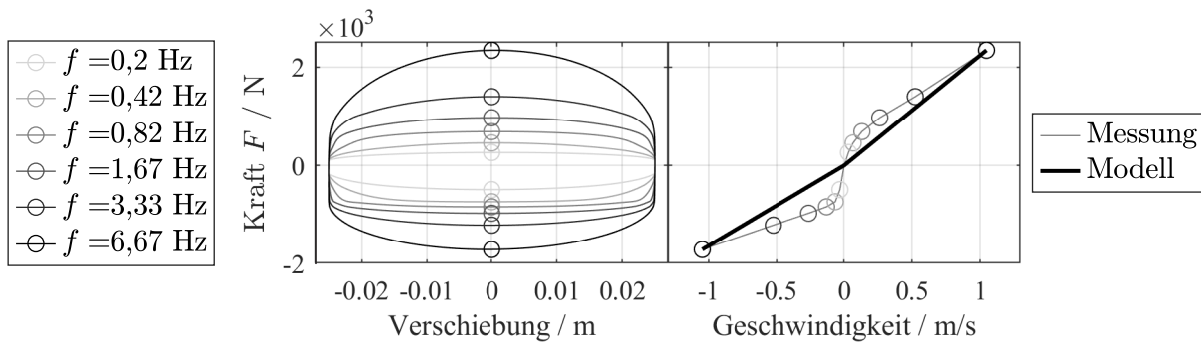


Abbildung 4.42: VDA-Messungen und daraus abgeleitete Kennlinien für die hydraulische Dämpfung

4.4.3 Hybrides Modell

Zur hybriden Modellierung des Stoßdämpfers wird wie in Kapitel 3.3 beschrieben vorgegangen, anstelle verallgemeinerte Kräfte Q wird hier mit Kräften $\underline{F}$ gearbeitet. Nach Gleichung (3.11) lässt sich das hybride Modell als Summe eines reduzierten White-Box-Modells $\tilde{F}$ und eines Black-Box-Modells ΔF berechnen [131]:

$$F^* = \tilde{F} + \Delta F.$$

Zur Bewertung von Modellierungsergebnissen wird der mittlere absolute prozentuale Fehler (MAPE; Gleichung (2.8)) verwendet, die Werte finden sich in Tabelle 4.8 am Ende des Kapitels.

4.4.3.1 Reduziertes White-Box-Modell

Bei der hybriden Modellierung soll das White-Box-Modell möglichst simpel gehalten werden, weswegen nur der viskose Anteil der Dämpfung durch jeweils eine lineare Kennlinie

für die Zug- und die Druckstufe abgebildet wird, so dass

$$\tilde{F}_{\text{hyd}}(\dot{q}) = \begin{cases} a_{\text{zug}}\dot{q}, & \dot{q} \leq 0 \\ a_{\text{druck}}\dot{q}, & \dot{q} > 0 \end{cases}$$

gilt, siehe Abb. 4.42 rechts. Zur Parametrierung wurden der Ursprung und die Stützstellen, die zu $f = 6,67 \text{ Hz}$ gehören, genutzt und dazwischen linear interpoliert. [1, 27] Zusätzlich werden Zug- und Druckanschlag wie in Kapitel 4.4.2 beschrieben parametrisiert, so dass für das Gesamtsystem gilt

$$\tilde{F}(q, \dot{q}) = \tilde{F}_{\text{hyd}}(\dot{q}) + \tilde{F}_{\text{zug}}(q) + \tilde{F}_{\text{druck}}(q).$$

In Abb. 4.43 sind die Ergebnisse für das reduzierte White-Box-Modell zu sehen. In a) ist zu sehen, dass insbesondere der Verlauf von Zug- und Druckanschlag gut, die verrichtete Arbeit aber nicht gut abgebildet wird. Bei den VDA-Messungen in b) ist zu sehen, dass das einfache Modell für $\tilde{F}_{\text{hyd}}(\dot{q})$ das tatsächliche Verhalten des Dämpfers nur bedingt abbilden kann, insbesondere werden die in den Messungen deutlicheren Ecken bei großen (positiven und negativen) Verschiebungen vom Modell stark abgerundet. Der MAPE für die unterschiedlichen Anregungsformen ist in Tabelle 4.8 am Ende des Kapitels zu finden.

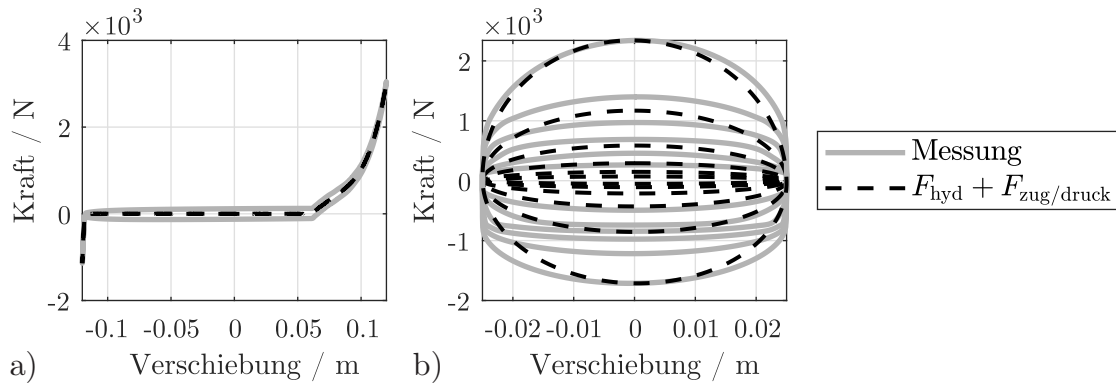


Abbildung 4.43: Messungen und Ergebnisse des reduzierten White-Box-Modells für a) quasistatische Anregung und b) den VDA-Test

Um die Ergebnisse des Modells zu verbessern, sollen die nicht abgebildeten Phänomene im Folgenden durch Black-Box-Modelle ergänzt werden. [131]

4.4.3.2 Hybrides Modell basierend auf allen Messungen

Zur Generierung des hybriden Modells müssen zunächst die Trainingsdaten, also die Diskrepanzen

$$\Delta \bar{F}_{\text{qs}} = \bar{F}_{\text{qs}} - \tilde{F}(q_{\text{qs}}, \dot{q}_{\text{qs}}) \quad \text{und} \quad \Delta \bar{F}_{\text{vda}} = \bar{F}_{\text{vda}} - \tilde{F}(q_{\text{vda}}, \dot{q}_{\text{vda}})$$

nach Gleichung (3.10) bestimmt werden. Diese sind in Abb. 4.44 zu sehen. Im Frequenzbereich wurde die schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transformation; FFT) der Ergebnisse betrachtet, es waren jedoch keine Abweichungen festzustellen, weswegen

im Folgenden nicht weiter darauf eingegangen wird.

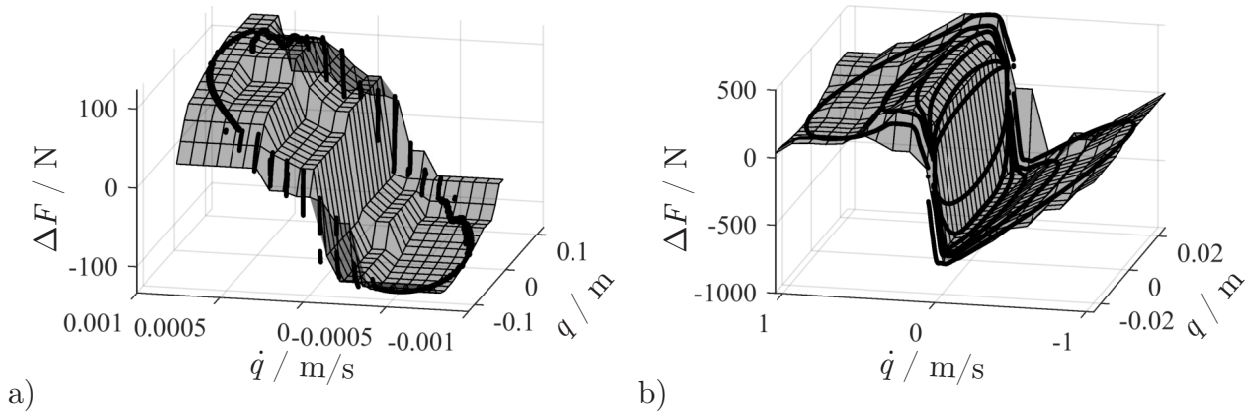


Abbildung 4.44: Diskrepanzen zwischen reduziertem White-Box-Modell und a) den quasistatischen Messung und b) den Messungen des VDA-Tests

Für das Training von

$$\Delta_{\xi}^Q : [q, \dot{q}]^T \mapsto \Delta F_{\text{ges}}$$

werden zunächst sowohl die quasistatischen Messungen als auch die Messungen des VDA-Tests verwendet. Um kein Ungleichgewicht in den Trainingsdaten zu erhalten, werden die quasistatischen Messungen soweit reduziert, dass für jede der sieben Frequenzen die gleiche Menge an Datenpunkten vorliegt. Es wird ein BT-Modell verwendet (siehe Kapitel 2.3.1.5), der Validierungs-RMSE beträgt 14,95 N.

In Abb. 4.45 sind die Ergebnisse für $\Delta F_{\text{ges}}(q, \dot{q})$ zu sehen. Sowohl die Messungen unter quasistatischer Anregung in a), als auch die des VDA-Tests in b) werden sehr gut getroffen. In a) sind lediglich in den Verschiebungsbereichen am Rande des VDA-Tests ($\pm 0,025$ m) sind Unstetigkeiten zu beobachten.

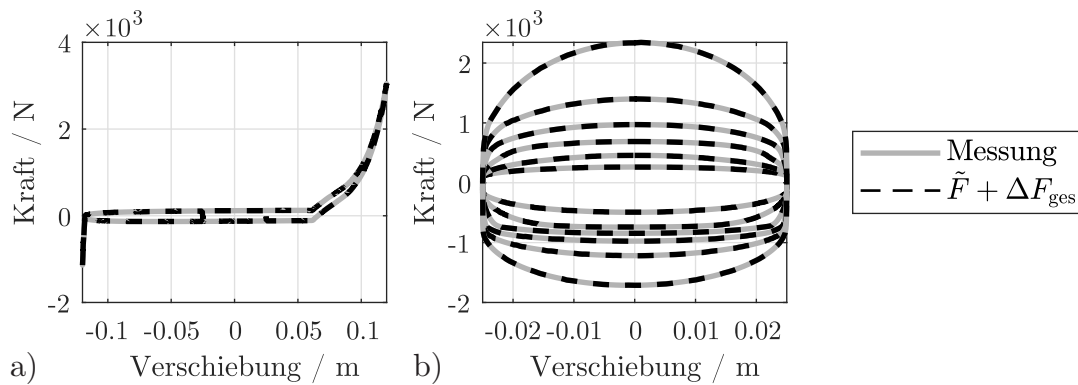


Abbildung 4.45: Messungen und Ergebnis des hybriden Modells basierend auf dem VDA-Test und den quasistatischen Messungen a) für quasistatische Anregung und b) für den VDA-Test

Zusätzlich wurde ein hybrides Modell basierend alleine auf den quasistatischen Messungen (ΔF_{qs}) und ein hybrides Modell basierend alleine auf den Messungen des VDA-Tests (ΔF_{vda}) aufgestellt. Auch hierfür ist jeweils der MAPE zwischen Messungen und Modell

in Tabelle 4.8 zu finden. Werden nur die quasistatischen Messungen im Training mit einbezogen kommt es zu einer leichten Genauigkeitssteigerung bei der Anwendung auf quasistatische Messungen, aber zu einer deutlichen Verschlechterung der Ergebnisse unter dynamischer Anregung (VDA-Test). Beim hybriden Modell auf Basis des VDA-Tests verhält es sich umgekehrt genauso.

Tabelle 4.8: MAPE (in %) zwischen synthetischen Messungen und den unterschiedlichen Modellen für quasistatische und dynamische Anregung

Frequenz f [Hz]	qs	VDA					
	0,001	0,2	0,42	0,83	1,67	3,44	6,67
$\tilde{F}$	88,8	85,7	80,5	74,2	61,5	42,5	21,1
$\tilde{F} + \Delta F_{\text{ges}}$	3,38	1,28	1,09	1,20	1,37	0,80	0,71
$\tilde{F} + \Delta F_{\text{qs}}$	0,89	38,3	47,6	50,5	44,6	29,7	16,7
$\tilde{F} + \Delta F_{\text{vda}}$	100	1,37	0,91	1,18	1,12	0,93	0,80

Insgesamt konnten alle drei Modelle zu einer Verbesserung des reduzierten White-Box-Modells beitragen. Dabei ist jeweils der Trainingsbereich der Black-Box-Anteile entscheidend. Eine Vereinigung der Trainingsdaten zu einem großen Datensatz ist in dieser Anwendung durchaus sinnvoll.

4.5 Gummi-Metall-Lager

Gummi-Metall-Lager (GML) sind wesentliche Komponenten in MKSs, die Kraftübertragung, kontrollierte Flexibilität und Schwingungsdämpfung ermöglichen. Ihr Elastomerkern absorbiert mechanische Belastungen und isoliert gleichzeitig Geräusche, was sowohl die Leistung als auch die Haltbarkeit verbessert. GMLs werden in einer Vielzahl von Anwendungen eingesetzt, von Fahrwerken in Kraftfahrzeugen und Industriemaschinen bis hin zu Schienenfahrzeugen, wo sie unter unterschiedlichen Lastbedingungen und Anregungsfrequenzen funktionieren müssen.

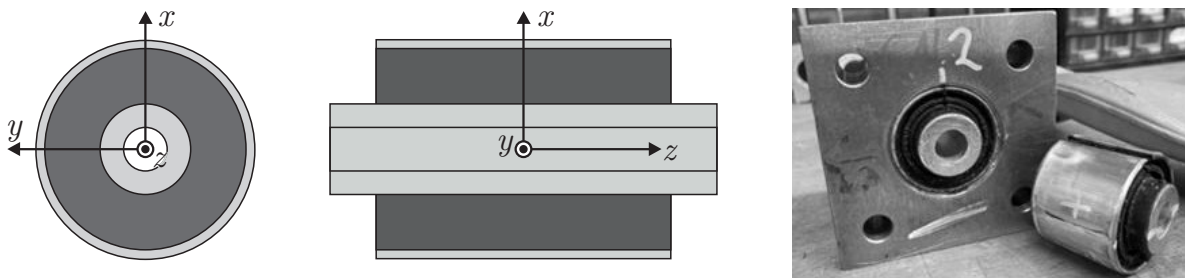


Abbildung 4.46: Aufbau eines GML [101]

GMLs sind Verbundbauteile, die aus einem Gummielement bestehen, das fest mit einem Metall- oder Kunststoffteil verbunden ist, siehe Abb. 4.46. Diese dauerhafte Verbindung entsteht durch Vulkanisation, bei der das Gummi unter Hitze und Druck mit dem Konterpart verhaftet wird. Die besonderen Eigenschaften der GMLs ergeben sich vor allem

charakterisieren, können die dynamische Steifigkeit c_{dyn} und die Dämpfungsarbeit W_d verwendet werden [98, 116]. Wie in Abb. 4.48 a) dargestellt, reagiert das System auf eine kleine sinusförmige Verschiebung gemäß Gleichung (4.21) mit einer sinusförmigen Kraft

$$F(t) = \hat{F} \sin(2\pi f t + \delta).$$

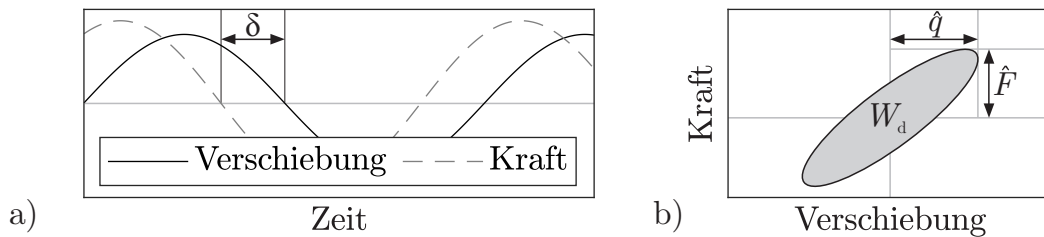
Die dynamische Steifigkeit c_{dyn} beschreibt die durchschnittliche Steifigkeit des Bauteils und wird über

$$c_{\text{dyn}} = \frac{\hat{F}}{\hat{q}}$$

berechnet. Da die Amplituden von Weg und Kraft nicht gleichzeitig auftreten, sondern um den Verlustwinkel δ verschoben sind, tritt im Kraft-Verschiebungs-Diagramm eine Hysterese auf, siehe Abb. 4.48 b). Die Fläche dieser Hysterese (grau) entspricht der Dämpfungsarbeit

$$W_d = \oint F dq,$$

die sich durch ein Ringintegral über einen vollständigen Zyklus berechnet.



Abbildungung 4.48: a) Weganregung und Kraftantwort über der Zeit, und b) Hysterese mit Dämpfungsarbeit W_d (grau) im Kraft-Verschiebungs-Diagramm [128]

4.5.1 White-Box-Modell

In dieser Arbeit werden die GMLs phänomenologisch modelliert, da ihr nichtlinear-viskoelastisches Verhalten auf makroskopischer Ebene durch analytische Funktionen und Kennlinien beschrieben werden kann, die auf Messungen und Beobachtungen beruhen. Diese Vorgehensweise erlaubt es, die komplexe Abhängigkeit zwischen Kräften, Verformungen und Dämpfungsverhalten realitätsnah abzubilden, ohne die zugrunde liegenden mikroskopischen Prozesse im Detail zu erfassen. Phänomenologische Modelle liefern somit eine pragmatische und zugleich experimentell fundierte Beschreibung des Lagerverhaltens, die insbesondere für die Abbildung nichtlinearer Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften geeignet ist.

Abb. 4.49 a) zeigt den allgemeinen Aufbau eines phänomenologischen Modells eines GML, während Abb. 4.49 b) das in dieser Arbeit verwendete White-Box-Modell zeigt, basierend auf [59, 101]. Der schwarze Block rechts in Abb. 4.49 symbolisiert den später hinzugefügten Black-Box-Anteil und wird für das White-Box-Modell nicht betrachtet.

Die Grundsteifigkeit beschreibt die grundlegenden, nichtlinearen Steifigkeitseigenschaften des Systems. Sie berücksichtigt die elastische Verformung des Materials unter Belastung und ist von der Anregungsamplitude abhängig. Sie wird häufig mit einer linearen

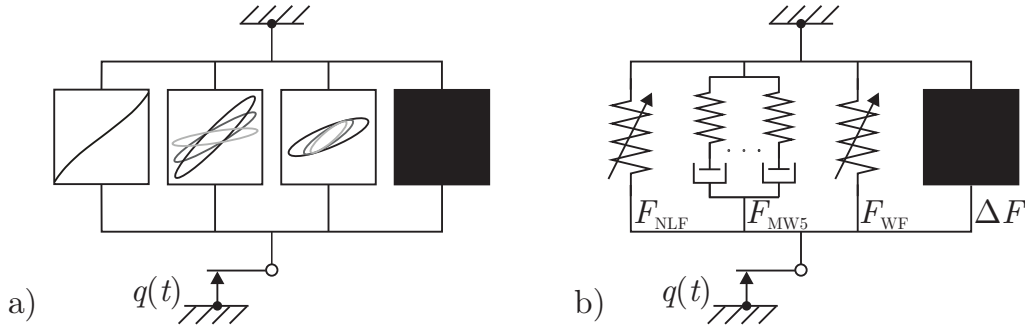


Abbildung 4.49: a) Allgemeines phänomenologisches Modell, und b) Modellstruktur in dieser Arbeit [128]

oder nichtlinearen Feder modelliert. In dieser Arbeit wird sie durch eine nichtlineare Feder (NLF), welche durch ein Polynom dritten Grades

$$F_{\text{NLF}} = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + p_3 q^3$$

charakterisiert wird, modelliert.

Die frequenzabhängige Versteifung spiegelt die viskoelastischen Eigenschaften des Materials wieder. Bei der Modellierung werden häufig (mehrere) Serien- und Parallelkonfigurationen, wie das Kelvin-Voigt-Element oder das Maxwell-Element (MW) verwendet [2, 98, 116]. Das MW-Element besteht aus einer Reihenschaltung von einer linearen Feder und einem linearen Dämpfer. Die Kräfte in beiden Elementen sind gleich, während sich die Verformungen summieren. Die Kraft lässt sich über die DGL

$$\dot{F}_{\text{MW}}(t) + \frac{c}{d} F_{\text{MW}}(t) = c \dot{q}(t)$$

berechnen. Um diese DGL zu lösen, muss die Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$ als Funktion der Zeit t gegeben sein [78, 116]. In dieser Arbeit wird die Parallelschaltung von fünf MW-Elementen mit unterschiedlichen Parametern c_i und d_i für jedes MW-Element i verwendet und mit F_{MW5} bezeichnet. Diese Konfiguration ermöglicht es, sich überlagernde Effekte mit unterschiedlichem zeitlichen viskoelastischen Verhalten von realen Materialien zu modellieren.

Die amplitudenabhängige Entfestigung stellt die Energiedissipationsmechanismen dar, die die effektive Steifigkeit des Systems mit zunehmender Erregungsamplitude verringern. Das Entfestigungsverhalten resultiert in erster Linie aus inneren Reibungsmechanismen im Material und ist besonders bei quasistatischen Belastungen oder langsamen Erregungen von Bedeutung. Zur Modellierung werden Elemente wie die Bouc-Wen-Hysterese, der triboelastische Standardkörper, das Reibungsmodell nach Berg und zahlreiche andere Elemente verwendet [2, 116]. Viele von ihnen haben gemeinsam, dass sie nicht differenzierbar sind oder zusätzliche Zustände einführen.

In dieser Arbeit wird eine Feder mit wegabhängiger Steifigkeit verwendet [59, 83]. Wenn die kumulierte Verschiebung als $q_{\text{WF}}(t, \tau) = \int_{\tau}^t |\dot{q}(\bar{\tau})| d\bar{\tau}$ mit $\tau \leq \bar{\tau} \leq t$ definiert ist, berechnet sich die Kraft über

$$F_{\text{WF}}(t) = F_{\text{WF},0} + \int_0^t \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau.$$

Um die Kraft zu berechnen muss die Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$ als Funktion der Zeit t gegeben sein. Bei konstanter Steifigkeit $\bar{c}(q_{WF}(t, \tau)) = c$ vereinfacht sich die Gleichung zu $F_{WF}(t) = c q_{WF}(t)$, was einer linearen Feder entspricht. Im Fall einer exponentiell fallenden Federsteifigkeit $\bar{c}(q_{WF}(t, \tau)) = c \exp(-\theta q_{WF}(t, \tau))$ und der Annahme $F_{WF,0} = 0$ ist das Verhalten über die DGL

$$\dot{F}_{WF}(t) + \theta \dot{q}(t) \operatorname{sgn}(\dot{q}(t)) F_{WF}(t) = c \dot{q}(t)$$

gegeben, eine genaue Herleitung findet sich in Kapitel E.1. Dieses Modell ist in der Lage die Gedächtniseffekte von gummiartigen Materialien abzubilden.

Durch Addition der drei Modellteile zu

$$\tilde{F} = F_{NLF} + F_{MW5} + F_{WF}$$

lässt sich das komplexe Verhalten von GMLs flexibel und anwendungsspezifisch abbilden.

4.5.2 Messungen

Am LDM der UPB wurden GMLs unterschiedlicher Bauarten unter dynamischer und quasistatischer Anregung vermessen [100]. Auf die Innenhülse wurde dafür eine radiale Weganregung, wie in Gleichung (4.21) beschrieben aufgeprägt, an der Außenhülse wurde die Reaktionskraft gemessen. Für die quasistatischen Messungen wurde eine Frequenz $f = 0,05$ Hz mit verschiedenen Amplituden $\hat{q}$ aufgeprägt, wobei $\hat{q}$ in Abhängigkeit der Lager-Steifigkeit gewählt wurde. Für die dynamischen Messungen wurden

- Amplituden $\hat{q} \in \mathcal{Q} = \{0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,14; 0,2; 0,3\}$ mm, und
- Frequenzen $f \in \mathcal{F} = \{2; 5; 10; 15; 20; \dots; 85; 90; 95; 100\}$ Hz

genutzt.

Bei den dynamischen Messungen wurde eine Sinusregression von Kraft- und Wegdaten durchgeführt, bei den quasistatischen Messungen nur eine Sinusregression der Wegdaten. [100]

Im Folgenden seien die quasistatischen Messungen mit $(\bar{q}_{qs}, \bar{F}_{qs})$ und die dynamischen Messungen mit

$$(\underline{t}_{dyn}, \bar{q}_{dyn}, \bar{F}_{dyn})_{\hat{q} \in \mathcal{Q}, f \in \mathcal{F}},$$

bezeichnet.

Insgesamt stehen in [100] pro GML 168 dynamische Messungen (8 Amplituden, 21 Frequenzen), sowie 3 quasistatische Messungen zur Verfügung. Um den Trainingsaufwand und für zukünftige Messungen den Messaufwand zu reduzieren werden nicht alle dynamischen Messsetups bei der Generierung des Black-Box-Anteils berücksichtigt, sondern nur diejenigen, welche eine Amplitude $\hat{q}$ in $\mathcal{Q}' = \{0,04; 0,1; 0,12; 0,3\}$ mm oder eine Frequenz f in $\mathcal{F}' = \{2; 20; 35; 50; 65; 80; 100\}$ Hz haben, damit insgesamt 112 Setups.

Im Folgenden wird auf die Ergebnisse für die Messdaten *bush1* eingegangen, eine Zusammenfassung der Modellierungsergebnisse befindet sich in Tabelle 4.9 am Ende dieses Kapitels. Für *bush2* sind die Ergebnisse im Anhang E.3 zu finden. Zur Bewertung der Modellgüte wird für die quasistatische Steifigkeit c_{qs} , für die quasistatische Dämpfungsarbeit $W_{d,qs}$, für die dynamische Steifigkeit c_{dyn} und für die dynamische Dämpfungsarbeit

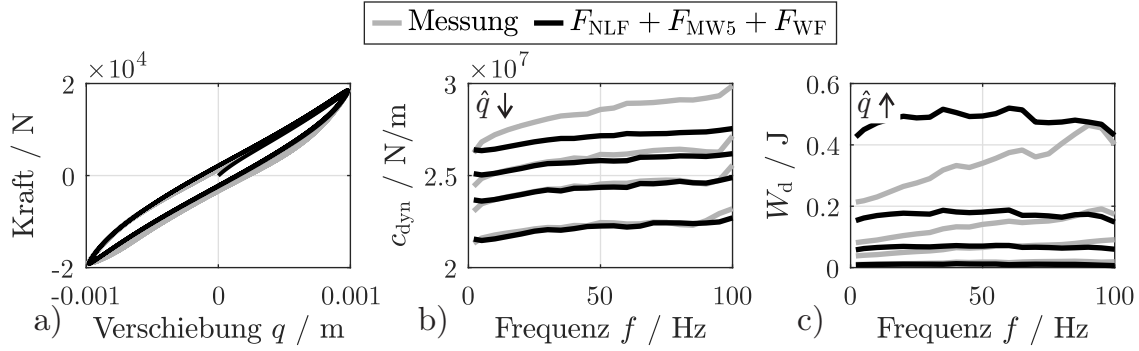


Abbildung 4.50: Messung und Ergebnisse des vollständigen White-Box-Modells a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

$W_{d,dyn}$ der MAPE nach Gleichung (2.8) bestimmt, sowie die Berechnungszeit ermittelt. Dafür wird die Funktion `timeit`¹³ eingesetzt, die die betrachtete Funktion mehrfach ausführt und den Median zurückgibt. Für die Auswertung werden alle 168 dynamischen Setups jeweils über zehn Perioden durchgeführt. Die verwendete Hard- und Software ist Tabelle A.1 im Anhang zu entnehmen.

Die Messungen, sowie die Ergebnisse des in Kapitel 4.5.1 vorgestellten White-Box-Modells mit den Parametern aus [101] sind in Abb. 4.50 zu sehen. In a) ist das Modellergebnis für eine quasistatische Anregung abgebildet, das White-Box-Modell ist in der Lage die gemessene Hysterese gut wiederzugeben. Der mittlere absolute prozentuale Fehler (MAPE) der Steifigkeit beträgt 1,04%, der der Dämpfungsarbeit ist mit 16,47% höher. Die dynamische Steifigkeit in b) wird vom Modell sehr gut abgebildet, der MAPE beträgt 1,03%. Die Frequenzabhängigkeit der Dämpfungsarbeit wird vom Modell jedoch nicht richtig erfasst, so dass sich hier ein MAPE von 35% ergibt.

Für das White-Box-Modell ergibt sich eine Berechnungszeit von 13,04 s, dies liegt unter anderem daran, dass durch die wegabhängige Feder und die MW-Elemente bei jeder Berechnung sechs DGLs gelöst werden müssen. Zu berücksichtigen ist, dass das dargestellte Modell nur für eine der sechs Raumrichtungen gilt. Für jedes GML existieren somit sechs Einzelmodelle, deren Detaillierungsgrad je nach Anwendungsfall variieren kann. Darüber hinaus wird in realen Systemen in der Regel nicht nur ein einzelnes GML verbaut, sondern eine Vielzahl. In [101] werden beispielsweise zur Modellierung einer Halbachse zwölf GML-Modelle vergleichbaren Detaillierungsgrades eingesetzt. Für eine vollständige Achse ergibt sich dadurch eine erhebliche Anzahl zu lösender DGLs: Eine Achse besteht aus zwei Halbachsen mit jeweils zwölf GMLs, die sich jeweils in sechs Raumrichtungen bewegen können. Für jede Raumrichtung ist ein Modell mit bis zu sechs DGLs hinterlegt. Dies führt zu insgesamt $2 \times 12 \times 6 \times 6 = 864$ DGLs erster Ordnung, die gelöst werden müssen. Diese hohe Modellkomplexität wirkt sich nachteilig auf die Echtzeitfähigkeit aus und erschwert zudem Systemoptimierungen oder umfangreiche Parameterstudien. Zur Reduktion der Rechenzeit unter Beibehaltung oder möglicherweise sogar einer Verbesserung der Modellgenauigkeit werden im Folgenden hybride Modellierungsansätze vorgestellt und untersucht. Die reine Black-Box-Modellierung von GMLs kann mit einem Verlust an Genauigkeit oder wenig Gewinn bei der Rechenzeit einhergehen, wie in [128]

¹³<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/timeit.html>

und im Anhang E.2 gezeigt.

4.5.3 Hybride Modelle

Hybride Ansätze zur Modellierung von GMLs sind bislang wenig etabliert, einzelne Arbeiten liegen jedoch vor. In [22] wird ein nichtlineares White-Box-Modell verwendet, das aus einer nichtlinearen, temperaturabhängigen Feder, einem MW-Element parallel zu einer Feder sowie einem Berg-Element besteht. Das Modell bildet das Verhalten bei niedrigen Anregungsfrequenzen (unter 10 Hz) gut ab, zeigt jedoch bei steigender Frequenz zunehmende Abweichungen zu den Messungen. Zur Korrektur wird dem White-Box-Modell ein Neuronales Netz (NN) nachgeschaltet, das Verschiebung, Geschwindigkeit, Temperatur sowie den Ausgang des physikalischen Modells als Eingangsgrößen nutzt und so die Modellgüte verbessert. In [106] wird ein paralleler hybrider Ansatz verfolgt. Das White-Box-Modell besteht aus einem Kelvin-Voigt-Element, während eine zusätzliche Kraft über ein Black-Box-Modell beschrieben wird. Neben der aktuellen Verschiebung werden auch vergangene Verschiebungen und Lagerkräfte als Eingangsgrößen verwendet, um Hystereseeffekte abzubilden; es handelt sich somit um ein System mit Gedächtnis (siehe Kapitel 2.5). Die Trainingsdaten werden sowohl über zufällige als auch über harmonische Weganregungen mit Amplituden bis 3 mm und Frequenzen bis 10 Hz erzeugt. Für die betrachteten Simulationen liefert der Ansatz jedoch keine zufriedenstellenden Ergebnisse.

Für die hybride Modellierung wird wie in Kapitel 3.3 beschrieben vorgegangen. Die Diskrepanz

$$\Delta \bar{F} = \bar{F} - \tilde{F}$$

zwischen den Messungen $\bar{F}$ und dem Ergebnis des White-Box-Modells $\tilde{F}$ wird nach Gleichung (3.10) berechnet und als Ausgangsgröße für das Black-Box-Modell verwendet. Das hybride Modell wird dann nach Gleichung (3.11) mittels

$$F^* = \tilde{F} + \Delta F \quad (4.22)$$

gebildet. [10, 128]

4.5.3.1 Reduziertes White-Box-Modell

Die nichtlineare Grundsteifigkeit eines GML ist hauptsächlich durch eine NLF definierbar, daher hat dieses recht einfache Modell ein breites Anwendungsspektrum. Insbesondere bei Parameterstudien oder in der frühen Entwicklungsphase technischer Systeme ist die Grundsteifigkeit oft ein wichtiger Hebel zur Einstellung des gewünschten Systemverhaltens. Mit fortschreitender Entwicklung werden zusätzliche Eigenschaften wie statische Hysterese oder amplituden- und frequenzabhängiges Verhalten immer wichtiger. Dennoch bleibt die Grundsteifigkeit ein entscheidender Parameter für die Anpassung des Systemverhaltens im Simulationsmodell, sei es manuell, durch Parameterstudien oder durch numerische Optimierungen. Als physikalische Grundlage eines hybriden GML-Modells bietet die NLF ein ideales Gleichgewicht, da es die Erklärbarkeit des physikalischen Ansatzes beibehält und gleichzeitig den Aufwand für die Parametrierung und die Rechenzeit

verringern kann. Die NLF wird anhand der quasistatischen Messungen unter Verwendung von `polyfit`¹⁴ parametrisiert.

In Abb. 4.51 sind die Ergebnisse für das reduzierte White-Box-Modell zu sehen. Für die quasistatische Anregung in a) verlaufen die Modellierungsergebnisse entlang des Rückgrats der gemessenen Hysterese, eine Hystereseschleife kann das Modell aufgrund seiner Einfachheit nicht darstellen. Der sehr kleine MAPE von 1,04% für die Steifigkeit geht daher mit einem MAPE von 100% für die Dämpfungsarbeit einher.

In b) und c) ist zu sehen, dass das Modell nicht in der Lage ist die Amplituden- und Frequenzabhängigkeiten der dynamischen Steifigkeit und der Dämpfungsarbeit abzubilden. Eine konstante dynamische Steifigkeit von etwa $15 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}$ entspricht der Steifigkeit aus a) für kleine Verschiebungen. Eine Dämpfungsarbeit von 0 J bestätigt die Abwesenheit der Hystereseschleife in a).

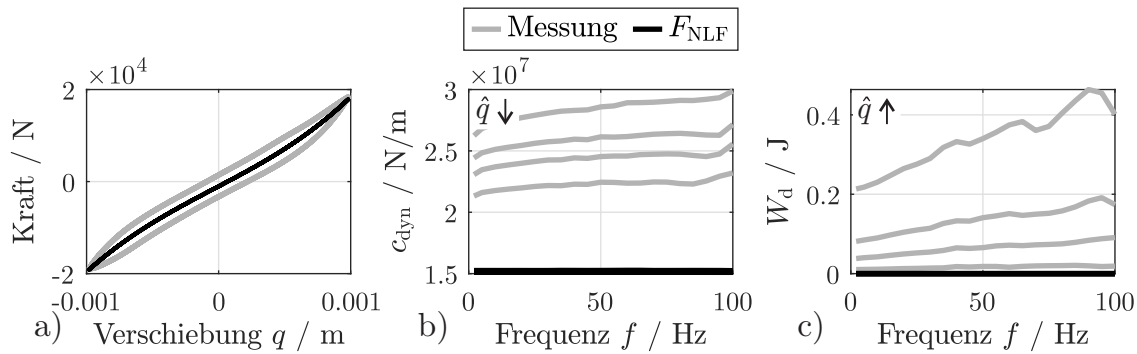


Abbildung 4.51: Messung und Ergebnisse des reduzierten White-Box-Modells a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

Aufgrund seiner Einfachheit benötigt dieses reduzierte Modell nur 0,03s für die Auswertung, was das Gesamtmodell in Bezug auf die Verarbeitungsgeschwindigkeit deutlich übertrifft.

Für die Generierung eines hybriden Modells gemäß Gleichung (4.22) werden die Diskrepanzen

$$\Delta \bar{F}_{qs} = \bar{F}_{qs} - \tilde{F}_{NLF} \quad \text{und} \quad \Delta \bar{F}_{dyn} = \bar{F}_{dyn} - \tilde{F}_{NLF}$$

berechnet. In Abb. 4.52 a) sind diese über der Verschiebung q und der Geschwindigkeit $\dot{q}$ dargestellt. Unter Berücksichtigung des Phasenportraits in Abb. 4.52 b) zeigt sich, dass die Abbildung $[q, \dot{q}] \mapsto \Delta F$ im Gegensatz zu den Trainingsdaten beim Stoßdämpfer (vgl. Abb. 4.44) nicht injektiv ist: Eine Korrektur der Diskrepanz basierend lediglich auf q und $\dot{q}$ in einem Bereich führt zwangsläufig zu einer Verschlechterung in einem anderen. Zudem weisen quasistatische und dynamische Diskrepanzen bei identischen Werten von q und $\dot{q}$ Differenzen von bis zu 2000 N auf, was etwa $1/3$ der maximal wirkenden Kraft unter dynamischer Anregung entspricht.

Im Folgenden werden verschiedene hybride Modellierungsansätze untersucht, die das reduzierte White-Box-Modell um Black-Box-Komponenten erweitern. Das reduzierte White-Box-Modell besitzt kein Gedächtnis, es reagiert ausschließlich auf den aktuellen Zustand ohne Berücksichtigung der Vorgeschichte. Um das komplexe Hystereseverhalten von GMLs vollständig abzubilden, muss das Black-Box-Modell daher Informationen über

¹⁴<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>

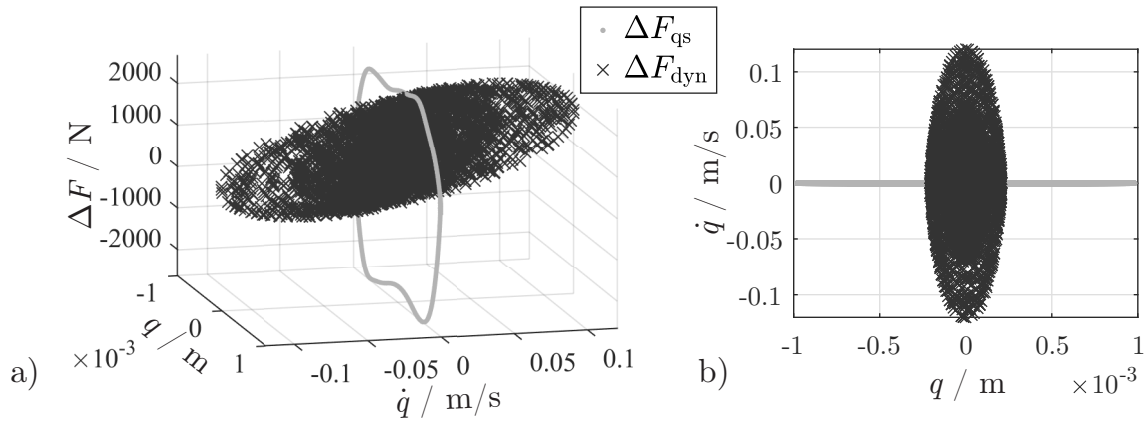


Abbildung 4.52: a) Diskrepanz $\Delta \bar{F}$, und b) Phasenportrait $\dot{q}(q)$ jeweils für quasistatische Messungen $\bar{F}_{qs}$ und dynamische Messungen $\bar{F}_{dyn}$ (dunkelgrau)

vergangene Zustände erfassen.

Eine Möglichkeit, Gedächtniseffekte zu modellieren, besteht darin, explizit vergangene Werte von Verschiebung und Geschwindigkeit als Eingänge zu verwenden. In [106] wird die Verwendung von vergangenen Werten von Verschiebung und Kraft als Eingänge vorgeschlagen. Hier muss die Schrittweite berücksichtigt werden, und bei der Modellierung des GML mittels DGLs ist eine lange Rechenzeit zu erwarten. Der Ansatz aus [106] lieferte für die in dieser Arbeit verwendeten Daten jedoch keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Auch die Implementierung in MKS-Simulationsprogrammen wie MSC Adams würde erschwert, da dort das „Merken“ und Verwalten vergangener Zustände aufwendig ist.

Eine Alternative bietet die Beschleunigung $\ddot{q}$ als dritter Eingang: Da die Beschleunigung zum Zeitpunkt n näherungsweise als

$$\ddot{q}_n \approx \frac{\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1}}{\Delta t}$$

berechnet werden kann, enthält sie implizit Informationen über die Vergangenheit, ohne dass explizit frühere Zustände gespeichert werden müssen. Zudem ist beispielsweise in MSC Adams die Erfassung der Beschleunigung und deren Verwendung in Kraftelementen unkompliziert möglich.

Daher wird zunächst ein hybrides Modell mit den drei Eingängen Verschiebung q , Geschwindigkeit $\dot{q}$ und Beschleunigung $\ddot{q}$ betrachtet. Dieser Ansatz verspricht die umfassendste Erfassung des dynamischen Verhaltens einschließlich der Gedächtniseffekte. Allerdings wirft er auch die Frage auf, ob die Beschleunigung in allen praktischen Anwendungen verfügbar ist: Wenn GMLs als Teil größerer dynamischer Systeme modelliert werden, die mittels DGLs formuliert sind, ist die Beschleunigung oft keine unabhängige Eingangsgröße, sondern muss erst aus der Kraft berechnet werden und steht somit nicht als Eingang für das Black-Box-Modell zur Verfügung.

Anschließend werden daher auch Ansätze mit nur zwei Eingängen ($q, \dot{q}$) untersucht, die diese praktische Einschränkung umgehen.

4.5.3.2 Hybrides Modell mit drei Eingängen

Das reduzierte White-Box-Modell wird um ein Black-Box-Modell ergänzt, welches neben Verschiebung q und Geschwindigkeit $\dot{q}$ auch die Beschleunigung $\ddot{q}$ als Eingang nutzt, um Gedächtniseffekte implizit zu erfassen, die für die Abbildung des Hystereseverhaltens erforderlich sind. Es werden sowohl die dynamischen Messungen $(\bar{q}_{\text{dyn}}, \dot{\bar{q}}_{\text{dyn}}, \ddot{\bar{q}}_{\text{dyn}})_{\hat{q} \in Q', f \in \mathcal{F}'}$ als auch die quasistatischen Messungen $(\bar{q}_{\text{qs}}, \dot{\bar{q}}_{\text{qs}}, \ddot{\bar{q}}_{\text{qs}})$ genutzt. Als Ausgänge dienen die entsprechenden Diskrepanzen $(\Delta \bar{F}_{\text{dyn}})_{\hat{q} \in Q', f \in \mathcal{F}'}$ und $\Delta \bar{F}_{\text{qs}}$. Diese Umsetzung birgt jedoch eine Herausforderung: In der Datenvorverarbeitung geht der zeitliche Bezug der quasistatischen Kräfte $\bar{F}_{\text{qs}}$ verloren. Während Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung über die Zeit definiert sind, ist die Kraft nur über der Verschiebung verfügbar [100]. Um den zeitlichen Zusammenhang wiederherzustellen, werden die Messdaten in monotonen Abschnitten der Schwingung nacheinander interpoliert. Für das Black-Box-Modell

$$\underline{\Delta}_{\xi}^Q : [q, \dot{q}, \ddot{q}]^T \mapsto \Delta F$$

wird ein Fine Tree¹⁵ aus der Familie der Entscheidungsbäume (siehe Kapitel 2.3.1.1) gewählt. Das hybride Modell berechnet sich über

$$F^* = F_{\text{NLF}} + \Delta F. \quad (4.23)$$

Die Ergebnisse sind in Abb. 4.53 dargestellt. Unter quasistatischer Anregung in a) ist deutlich eine Hystereseschleife zu erkennen, welche nahezu deckungsgleich auf den Messungen liegt, dies spiegelt sich auch in den MAPE-Werten von 0,20% für die Steifigkeit und 0,09% für die Dämpfungsarbeit wider. Die dynamische Steifigkeit in b) wird vom hybriden Modell mit drei Eingängen leicht überschätzt, was zu einem MAPE von 2,49% führt. Die Dämpfungsarbeit in c) wird vom hybriden Modell mit drei Eingängen gut abgebildet, wodurch der MAPE mit 10,40% den niedrigsten Wert aller vorgestellten Modelle darstellt. Die Rechenzeit beträgt 0,69 s und bleibt damit um mehrere Größenordnungen unter der des vollständigen White-Box-Modells.

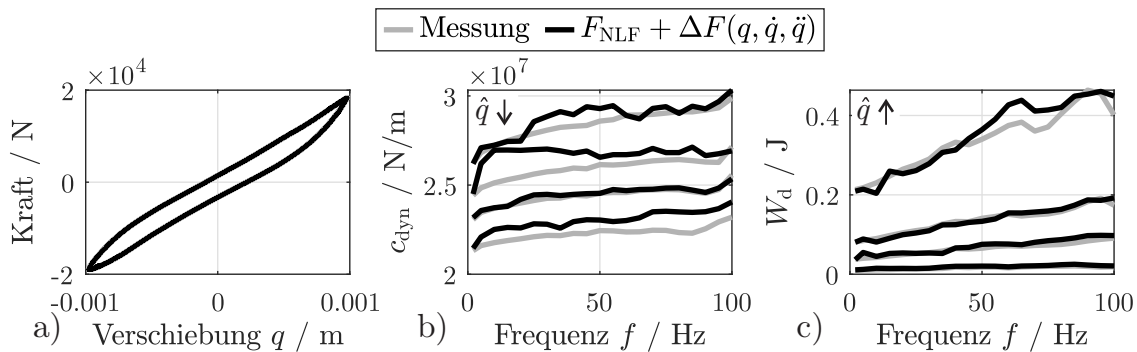


Abbildung 4.53: Messung und Ergebnisse des hybriden Modells mit drei Eingängen a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

Das hybride Modell mit drei Eingängen liefert sehr gute Ergebnisse sowohl für quasistatisches als auch dynamisches Verhalten. Die Verwendung der Beschleunigung $\ddot{q}$ als dritten

¹⁵<https://de.mathworks.com/help/stats/choose-regression-model-options.html>

Eingang ermöglicht eine genaue Modellierung über beide Betriebszustände.

Allerdings setzt dieser Ansatz voraus, dass die Beschleunigung als unabhängige Eingangsgröße zur Verfügung steht. In vielen praktischen Anwendungen ist dies jedoch nicht gegeben: Wenn das GML als Kraftelement in einem größeren dynamischen System integriert wird, welches mittels DGLs simuliert wird, muss die Beschleunigung aus der Kraft berechnet werden und steht nicht direkt als Eingang zur Verfügung. Zwar könnte die Beschleunigung eines vergangenen Zeitschritts verwendet werden, jedoch müsste dabei voraussichtlich die Schrittgröße des numerischen Integrationsverfahrens berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird daher untersucht, ob ein hybrides Modell mit nur zwei Eingängen (q , $\dot{q}$) ausreicht, um zumindest das dynamische Verhalten präzise abzubilden.

4.5.3.3 Hybrides Modell mit zwei Eingängen

Das reduzierte White-Box-Modell wird um ein Black-Box-Modell mit zwei Eingängen ergänzt. Dadurch werden neben den quasistatischen Messungen, die zur Parametrierung des reduzierten White-Box-Modells verwendet werden, auch die dynamischen Messungen berücksichtigt.

Im Training des Black-Box-Modells

$$\underline{\Delta}_{\xi}^Q : [q, \dot{q}]^T \mapsto \Delta F$$

dienen die Verschiebung und die Geschwindigkeit $(\bar{q}_{\text{dyn}}, \dot{\bar{q}}_{\text{dyn}})_{\hat{q} \in Q', f \in \mathcal{F}'}$ als Eingang und die Diskrepanz $(\Delta \bar{F}_{\text{dyn}})_{\hat{q} \in Q', f \in \mathcal{F}'}$ als Ausgang. Es wird ein Fine Tree trainiert, welcher sich durch viele Endknoten für eine feine Unterscheidung der Klassen auszeichnet. Das hybride Modell berechnet sich dann nach Gleichung (4.23).

Die Ergebnisse sind in Abb. 4.54 dargestellt. Unter quasistatischer Anregung, zu sehen in a), zeigt sich keine bzw. nur eine rudimentäre Hystereseschleife, was einen MAPE von 98,67% liefert. Das Rückgrat der gemessenen Hystereseschleife wird insbesondere im mittleren Bereich nicht genau abgebildet, wodurch der MAPE im Vergleich zum reduzierten White-Box-Modell auf 6,75% ansteigt. Im dynamischen Bereich zeigt das hybride Modell eine deutliche Verbesserung im Vergleich zum reduzierten White-Box-Modell: Die dynamische Steifigkeit in b) wird mit einem MAPE von 0,79% gut nachgebildet. Die Dämpfungsarbeit in c) wird mit einem MAPE von 27,17% gegenüber dem White-Box-Modell signifikant genauer abgebildet. Die Rechenzeit beträgt 0,21s und ist damit um den Faktor 62 geringer als die des White-Box-Modells.

Die Verbesserung der Abbildungsleistung für das dynamische Verhalten wurde auf Kosten einer Verschlechterung der Abbildungsleistung für das quasistatische Verhalten erzielt. Um diesen Konflikt zu adressieren, wird im Folgenden ein regimebasierter Ansatz vorgestellt, der die Vorteile des reduzierten White-Box-Modells für quasistatisches Verhalten mit der Genauigkeit des Black-Box-Modells für dynamisches Verhalten kombiniert.

4.5.3.4 Regimebasiertes hybrides Modell

Um eine Verschlechterung der Ergebnisse unter quasistatischer Anregung zu vermeiden wird ein regimebasierter Ansatz wie in Kapitel 3.3.2 beschrieben implementiert, so dass

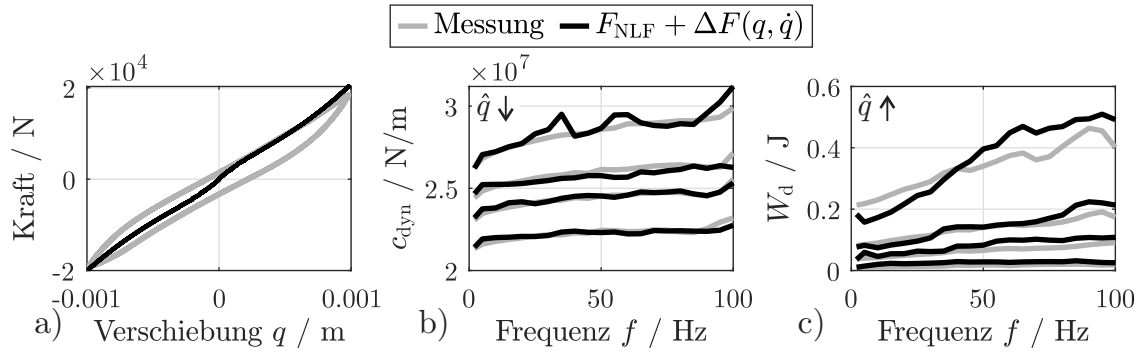


Abbildung 4.54: Messung und Ergebnisse des hybriden Modells mit zwei Eingängen a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

das im vorherigen Kapitel trainierte Black-Box-Modell hauptsächlich unter dynamischer Anregung aktiviert wird. Die Unterscheidung zwischen dynamischer und quasistatischer Anregung erfolgt über die Gültigkeitsvariable $\underline{z} = [q, \dot{q}]$, d. h. über Verschiebung und Geschwindigkeit. Eine dynamische Anregung wird angenommen, wenn die Verschiebung $q \leq q_{\text{lim}}$ klein und gleichzeitig die Geschwindigkeit $\dot{q} \geq \dot{q}_{\text{lim}}$ groß ist. Diese Zuordnung lässt sich in Abb. 4.52 b) gut erkennen. Als Aktivierungsfunktion für den Black-Box-Anteil wird als Kombination von zwei Sigmoidfunktionen

$$S_{x_{\text{lim}}, \mu}(x) = \left(\frac{1}{1 + \exp(-\mu(x_{\text{lim}} - x))} \right)$$

umgesetzt, wobei x_{lim} die Grenze des Regimes und μ das Übergangsverhalten beschreibt. Die Aktivierungsfunktion lautet damit

$$\rho(q, \dot{q}) = 1 - ((1 - S_{q_{\text{lim}}, \mu_q}(q))S_{\dot{q}_{\text{lim}}, \mu_{\dot{q}}}(\dot{q})).$$

Diese Funktion aktiviert das Black-Box-Modell nur dann, wenn sowohl die Verschiebung als auch die Geschwindigkeit die jeweiligen Schwellenwerte über- bzw. unterschreiten, und ermöglicht einen glatten Übergang zwischen den Regimen. Die Berechnung der Kräfte ist dann nach Gleichung (3.12) möglich.

Die Ergebnisse des regimebasierten hybriden Modells sind in Abb. 4.55 dargestellt. Bei der quasistatischen Hystere in a) zeigen Abweichungen zwischen dem hybriden Modell mit zwei Eingängen und dem regimebasierten hybriden Modell: die Ergebnisse des regimebasierten hybriden Modells nähern sich bei größeren positiven Verschiebungen wieder dem Rückgrat der gemessenen Hysterese an, wodurch der MAPE mit 1,04% im Vergleich zum hybriden Modell mit zwei Eingängen sinkt, und den gleichen Wert annimmt, wie beim reduzierten physikalischen Modell. Bei dynamischer Anregung in b) und in c) sind die Kurven für das hybride Modell mit zwei Eingängen und das regimebasierte hybride Modell nahezu identisch.

Der regimebasierte Ansatz erreicht eine Leistung, die sich als Kompromiss darstellt: Die quasistatische Modellierung wird auf dem Niveau des reduzierten White-Box-Modells gehalten, während die dynamische Genauigkeit dem des hybriden Modells mit zwei Eingängen entspricht.

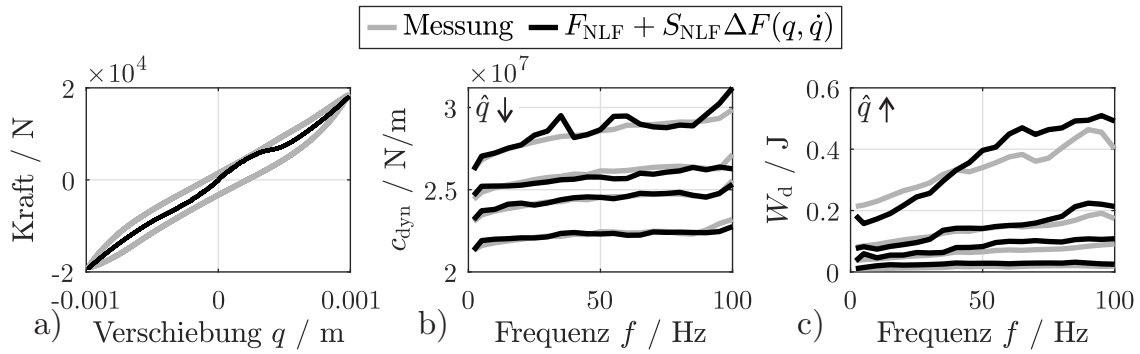


Abbildung 4.55: Messung und Ergebnisse des regimebasierten hybriden Modells a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

4.5.4 Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse zeigt Tabelle 4.9. Das vollständige White-Box-Modell erreicht in beiden Betriebszuständen eine hohe Modellgenauigkeit, ist jedoch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Wenn der Fokus auf der Abbildung dynamischer Verhaltensweisen liegt und eine hohe Genauigkeit im quasistatischen Bereich nicht zwingend erforderlich ist, stellen hybride Modelle eine effiziente Alternative dar.

Tabelle 4.9: MAPE (in %) zwischen Messung und Modell, und Rechenzeit für alle dynamischen Anregungen (in s) für *bush1*

	c_{qs}	$W_{\text{d,qs}}$	c_{dyn}	$W_{\text{d,dyn}}$	Zeit
$F_{\text{NLS}} + F_{\text{MW5}} + F_{\text{WF}}$	1,04	16,47	1,03	35,00	13,04
F_{NLS}	1,04	100,00	38,21	100,00	0,03
$F_{\text{NLS}} + \Delta F(q, \dot{q}, \ddot{q})$	0,20	0,09	2,49	10,48	0,69
$F_{\text{NLS}} + \Delta F(q, \dot{q})$	6,75	98,67	0,79	27,17	0,21
$F_{\text{NLS}} + S_{\text{NLS}} \Delta F(q, \dot{q})$	1,04	99,40	0,77	27,17	0,26

Das hybride Modell mit drei Eingängen (q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$) zeigt die beste Gesamtleistung aller hybriden Ansätze. Es erreicht sehr gute Genauigkeit sowohl bei quasistatischer Anregung als auch bei dynamischer Anregung. Die Rechenzeit liegt mit 0,69 s deutlich unter der des vollständigen White-Box-Modells. Die Anwendbarkeit dieses Modells setzt jedoch die Verfügbarkeit der Beschleunigung voraus, was in bestimmten Anwendungen, insbesondere bei der Integration in größere DGL-basierte Systeme, eine praktische Einschränkung darstellen kann.

Für Anwendungen, in denen die Beschleunigung nicht als unabhängiger Eingang zur Verfügung steht, wurde das hybride Modell mit zwei Eingängen (q , $\dot{q}$) entwickelt. Dieses Modell erzielt hohe Genauigkeit im dynamischen Bereich bei signifikant reduzierter Rechenzeit. Im quasistatischen Bereich zeigt es jedoch deutliche Abweichungen von den Messwerten, insbesondere bei der Dämpfungsarbeit, und auch eine Verschlechterung im Vergleich zum reduzierten White-Box-Modell.

Um diese Schwäche zu adressieren, wurde ein regimebasiertes Modell implementiert, das den Black-Box-Anteil nur unter dynamischer Anregung aktiviert. Dieses Modell er-

reicht eine Verbesserung der Abbildung des quasistatischen Verhaltens auf das Niveau des reduzierten White-Box-Modells, ohne die hohe Genauigkeit bei der Abbildung des dynamischen Verhaltens zu beeinträchtigen.

Zusammenfassend bietet das Modell mit drei Eingängen die höchste Genauigkeit, während das regimebasierte Modell mit zwei Eingängen einen Kompromiss zwischen Genauigkeit, Rechenzeit und praktischer Anwendbarkeit darstellt, insbesondere wenn die Beschleunigung nicht verfügbar ist oder das Modell in komplexere Systeme integriert werden soll.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden hybride Modellierungsansätze anhand von fünf unterschiedlichen mechanischen Systemen untersucht. Die Anwendungen umfassen sowohl Beispiele auf Systemebene (Drei-Massen-Schwinger, Doppelpendel, Gelenkviereck) als auch auf Komponentenebene (Stoßdämpfer, GML) und decken dabei ein breites Spektrum an Komplexität und Modellierungsherausforderungen ab.

Der Drei-Massen-Schwinger diente als Referenzsystem zur systematischen Evaluation der fünf hybriden Modellierungsverfahren. Diese umfassen drei kontinuierliche und zwei diskrete Ansätze, wobei drei Verfahren eine Korrektur im Systemzustand und zwei eine Korrektur im Systemausgang vornehmen. Anhand synthetischer Messdaten wurden Recheneffizienz, Generalisierungsfähigkeit, Einfluss der White-Box-Modellstruktur und Einfluss von Unsicherheiten untersucht. Die wichtigsten Erkenntnisse sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst und bildeten die Grundlage für die Auswahl geeigneter Verfahren in den nachfolgenden Anwendungen.

Aufbauend auf den Erkenntnissen am Drei-Massen-Schwinger wurden zwei ausgewählte Verfahren, das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ - und das diskrete Δx -Verfahren, auf reale Messdaten angewandt. Am Beispiel des frei schwingenden Doppelpendels mit zwei Freiheitsgraden gelang beiden hybriden Modellen eine gute Nachbildung der Systemdynamik, trotz zusätzlicher Unsicherheiten durch die Bestimmung der Pendelwinkel aus 3D-Positionsdaten sowie notwendige numerische Differentiationen. Das kontinuierliche Verfahren erreichte dabei eine deutlich geringere Rechendauer als das diskrete, ohne große Genauigkeitseinbußen.

Das kraftangeregte Gelenkviereck mit einem Freiheitsgrad zeigte eine deutliche Abhängigkeit der Vorhersagegüte von der Übereinstimmung zwischen Trainings- und Testanregung. Das kontinuierliche $\Delta\dot{x}$ -Verfahren lieferte sehr genaue Vorhersagen bei repräsentativen Trainingsdaten, reagierte jedoch empfindlich auf nicht passende Anregungen. Das diskrete Δx -Verfahren erwies sich als robuster gegenüber variierenden Anregungen, wies jedoch häufiger zeitliche Verschiebungen und einen mit der Simulationszeit zunehmenden Fehler auf. Diese Beobachtungen stehen im Einklang mit den am Drei-Massen-Schwinger gewonnenen Erkenntnissen zur unterschiedlichen Robustheit der beiden Verfahren.

Ergänzend zur Systemebene wurde die hybride Modellierung auch auf Komponentenebene untersucht. Grundlage bildet ein paralleler Ansatz, bei dem ein physikalisches White-Box-Modell durch datenbasierte Black-Box-Anteile ergänzt wird, um systematische Modellabweichungen zu kompensieren. Für den Stoßdämpfer standen keine direkten Messungen des Systemverhaltens zur Verfügung. Stattdessen wurde ein detailliertes

White-Box-Modell nach [59] verwendet, das anhand von Messdaten parametrisiert wurde und als Grundlage zur Erzeugung synthetischer Daten diente. Als reduziertes White-Box-Modell wurde ein vereinfachtes stückweise lineares Modell eingesetzt. Durch additive Black-Box-Anteile konnte die Modellgenauigkeit gegenüber dem reduzierten White-Box-Modell deutlich gesteigert werden.

Am Beispiel des GML wurden reale Messdaten verwendet, um die Leistungsfähigkeit des Ansatzes zu bewerten. Obwohl das betrachtete System ein Gedächtnisverhalten aufweist, konnten mit einem Black-Box-Modell ohne explizite Gedächtnisstruktur, dafür mit den drei Eingangsgrößen q , $\dot{q}$ und $\ddot{q}$, relativ gute Ergebnisse erzielt werden. Es ließ sich eine deutliche Reduktion der Rechenzeit bei gleichzeitig guter Modellgenauigkeit erreichen. Zusätzlich wurde ein regimebasierter Ansatz vorgestellt, bei dem das Black-Box-Diskrepanzmodell abhängig vom aktuellen Betriebszustand aktiviert wird.

Die untersuchten Anwendungen zeigen, dass hybride Modellierungsansätze sowohl auf System- als auch auf Komponentenebene erfolgreich eingesetzt werden können. Die Wahl des geeigneten Verfahrens hängt dabei von den spezifischen Anforderungen ab: Kontinuierliche Verfahren bieten Vorteile bei der Recheneffizienz, während diskrete Ansätze teilweise eine höhere Robustheit gegenüber variierenden Betriebsbedingungen aufweisen. Die Qualität und Repräsentativität der Trainingsdaten erweist sich durchgängig als entscheidender Faktor für die Vorhersagegüte der hybriden Modelle.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst wurde auf grundlegende Modellierungsansätze für dynamische Systeme eingegangen. Ausgangspunkt bildet die White-Box-Modellierung, bei der das Systemverhalten vollständig auf bekannten physikalischen Gesetzen, Bilanzgleichungen und konstitutiven Beziehungen basiert. Demgegenüber wurde die Black-Box-Modellierung betrachtet, bei der der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen ausschließlich datengetrieben erlernt wird, ohne explizite Nutzung physikalischen Vorwissens. Zwischen diesen beiden Extremen wurde der Bereich der Gray-Box-Modellierung eingeordnet, in dem physikalisches Vorwissen und datenbasierte Ansätze gezielt kombiniert werden. Gray-Box-Modelle nutzen bekannte Modellstrukturen oder physikalische Zusammenhänge und ergänzen diese durch frei parametrisierte oder datengetriebene Anteile. Hybride Modellierungsansätze stellen hierbei einen Spezialfall dar, bei dem ein physikalisch motiviertes White-Box-Modell explizit mit einem Black-Box-Modell gekoppelt wird.

Ein besonderer Fokus lag dabei auf hybrider Modellierung auf Basis von Diskrepanzen, die eine gezielte Korrektur unvollständiger oder reduzierter White-Box-Modelle erlaubt. Darauf aufbauend wurden in dieser Arbeit verschiedene kontinuierliche und diskrete hybride Modellierungsansätze vorgestellt, systematisiert und unter vergleichbaren Bedingungen gegenübergestellt. Die betrachteten Verfahren unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich der Ebene der Korrektur, die im Zustandsraum, im Ausgangsraum oder auf der Kraftebene erfolgen kann. Die entwickelte Systematisierung nach Korrektorebene, zeitlicher Formulierung und Kopplung mit dem White-Box-Modell ermöglicht dabei eine gezielte Auswahl geeigneter Ansätze in Abhängigkeit von der verfügbaren Systembeschreibung und den spezifischen Anforderungen der Anwendung.

Die kontinuierlichen Verfahren arbeiten direkt auf Ebene der Differentialgleichungen (DGL). Sie ermöglichen eine konsistente Modellformulierung und eine effiziente Simulation, setzen jedoch einen tieferen Zugriff auf die Modellgleichungen sowie eine hinreichend genaue Bestimmung von Ableitungen voraus. Die diskreten Verfahren korrigieren Modellabweichungen schrittweise auf Basis von Zustands- oder Ausgangsdiskrepanzen und sind eng an die numerische Integration gekoppelt. Sie zeichnen sich insbesondere durch ihre einfache Implementierung und ihre dadurch gute Integrierbarkeit in bestehende Simulationsumgebungen aus, erfordern jedoch konstante Zeitschrittweiten.

Die vorgestellten Verfahren wurden hinsichtlich des Einflusses der Wahl des numerischen Integrationsverfahrens sowie ihrer Generalisierungsfähigkeiten untersucht. Darüber hinaus wurde ihre Robustheit gegenüber abweichenden Modellstrukturen des White-Box-Modells sowie gegenüber Unsicherheiten und Störeinflüssen wie Rauschen, Offsets und Trends untersucht. Grundlage dieser Untersuchungen war ein systematischer Vergleich der Diskrepanzmodelle an einem gemeinsamen mechanischen Referenzsystem in Form eines Drei-Massen-Schwingers, wodurch die Eigenschaften der verschiedenen Verfahren unter identischen und praxisrelevanten Bedingungen bewertet werden konnten. Ergänzend wurde die Anwendbarkeit der Methoden anhand realer Messdaten komplexerer

MKSs untersucht. Hierzu wurden ein Doppelpendel sowie ein Gelenkviereck betrachtet, um den Einsatz der Verfahren unter experimentellen Randbedingungen und mit realen Messunsicherheiten zu demonstrieren.

Insgesamt zeigte sich, dass keine der betrachteten Methoden universell überlegen ist, sondern ihre Eignung maßgeblich von der verfügbaren Systembeschreibung, der Messsituation und den Randbedingungen der jeweiligen Zielanwendung abhängt. Die durchgeführten Untersuchungen am Drei-Massen-Schwinger liefern dabei Handlungsempfehlungen für die Auswahl des jeweils geeigneten Diskrepanzansatzes unter praxisrelevanten Bedingungen. Über die Systemebene hinaus wurde die Anwendbarkeit der hybriden Modellierungsansätze auf Komponentenebene untersucht. Hierzu dienten ein Stoßdämpfer sowie ein GML als Anwendungsbeispiele. Beide Komponenten zeichnen sich durch komplexes nichtlineares Verhalten aus, das physikalisch nur näherungsweise abbildbar ist. Die Ergebnisse zeigen, dass durch die gezielte Kompensation lokaler Modellabweichungen mittels Diskrepanzmodellen sowohl die Modellgenauigkeit signifikant verbessert als auch die physikalische Interpretierbarkeit der Gesamtmodellierung erhalten werden kann. Die hybride Modellierung auf Komponentenebene erlaubt dabei eine modulare Integration in komplexere MKSs, ohne dass das gesamte Systemmodell angepasst werden muss. Dies demonstriert das Potential der vorgestellten Methoden für eine effiziente und praxisnahe Modellbildung technischer Komponenten mit schwer modellierbaren physikalischen Effekten wie Reibung, Dämpfung oder viskoelastischem Materialverhalten.

Die durchgeführten Untersuchungen adressieren damit die eingangs identifizierten Forschungslücken: Der systematische Vergleich der Literaturansätze am Drei-Massen-Schwinger unter praxisrelevanten Bedingungen ermöglicht eine fundierte Bewertung ihrer Eigenschaften unter identischen Randbedingungen. Die Validierung anhand realer Messdaten von Doppelpendel und Gelenkviereck demonstriert die Anwendbarkeit unter experimentellen Unsicherheiten. Die Erweiterung auf Komponentenebene zeigt schließlich, dass lokale Modellkorrekturen eine modulare und effiziente Verbesserung der Modellgüte ermöglichen, ohne die Gesamtsystemstruktur grundlegend verändern zu müssen. Diese Arbeit leistet damit einen Beitrag zur Einordnung hybrider Modellierungsansätze auf Basis von Diskrepanzen und zeigt, wie physikalisches White-Box-Wissen und datenbasierte Black-Box-Modelle systematisch kombiniert werden können, um die Modellgüte der Dynamik technischer Systeme sowohl auf System- als auch auf Komponentenebene zu verbessern, ohne die physikalische Interpretierbarkeit aufzugeben. Die entwickelten Verfahren ermöglichen eine effiziente Modellbildung, bei der vorhandenes White-Box-Wissen genutzt und gezielt durch Black-Box-Korrekturen ergänzt wird, was insbesondere bei komplexen technischen Systemen mit teilweise unbekannten oder schwer modellierbaren Effekten einen praktischen Mehrwert gegenüber reinen White-Box- oder reinen Black-Box-Ansätzen bietet.

Die in dieser Arbeit vorgestellten hybriden Modellierungsansätze eröffnen mehrere Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen. Ein zentraler Aspekt ist die Übertragbarkeit und Modularisierung hybrider Modelle. Dies betrifft sowohl die Wiederverwendbarkeit identifizierter Diskrepanzmodelle bei veränderten Betriebsbedingungen oder Systemkonfigurationen als auch die Integration hybrid modellierter Komponenten in Gesamtsysteme. Erste Arbeiten zur Übertragbarkeit liegen bereits vor, unter anderem anhand eines Doppelpendels, und bilden eine geeignete Grundlage für weiterführende Untersu-

chungen [94]. Die modulare Kopplung ermöglicht dabei die Anwendung auf komplexere Systeme, ohne die physikalische Interpretierbarkeit einzelner Komponenten oder die Nachvollziehbarkeit der Modellkorrekturen aufzugeben.

Darüber hinaus eröffnet die Kopplung der vorgestellten Verfahren mit modellstrukturierten Identifikationsmethoden sowie mit Beobachter- oder Zustandsrekonstruktionsansätzen zusätzliche Perspektiven. Dies gilt insbesondere für Systeme mit eingeschränkter Sensorik oder unvollständiger Zustandserfassung, bei denen hybride Modellierungsansätze eine Brücke zwischen verfügbarer Messinformation und physikalischer Modellstruktur schlagen können. [3]

Obwohl die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen ausschließlich aus dem Bereich der MKSs stammen, ist die entwickelte Methodik nicht auf diese Domäne beschränkt. Die vorgestellten kontinuierlichen und diskreten Diskrepanzverfahren basieren auf einer allgemeinen mathematischen Formulierung im Zustandsraum und sind daher grundsätzlich auf beliebige dynamische Systeme anwendbar, die sich in dieser Form beschreiben lassen. Eine erste eigene Untersuchung zur Übertragbarkeit auf elektrische Systeme wurde in [124] am Beispiel eines Schwingkreises durchgeführt. Die systematische Gegenüberstellung der hier vorgestellten Verfahren über verschiedene physikalische Domänen hinweg kann dazu beitragen, domänenspezifische Besonderheiten sowie domänenübergreifende Gemeinsamkeiten bei der hybriden Modellierung zu identifizieren und die Allgemeingültigkeit der gewonnenen Erkenntnisse weiter zu validieren.

Literatur

- [1] D. Adamski. *Simulation in der Fahrwerktechnik : Einführung in die Erstellung von Komponenten- und Gesamtfahrzeugmodellen*. Springer Vieweg. ISBN: 978-3-658-06535-5.
- [2] R. Adduci, M. Vermaut, M. Perrelli, F. Cosco, S. Vanpaemel, F. Naets und D. Mundo. „A Review of Bushing Modelling Approaches for Multibody Simulations“. In: *Mechanism and Machine Theory* 191 (Jan. 2024). ISSN: 0094-114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105496.
- [3] J. Adelbert und M. Wohlleben (Betreuerin). „Entwicklung eines Vorgehens zur hybriden Modellierung mithilfe von Teilmessungen“. Unveröffentlichte Masterarbeit. Universität Paderborn, Jan. 2025.
- [4] M. Agarwal. „Combining Neural and Conventional Paradigms for Modelling, Prediction and Control“. In: *International Journal of Systems Science* 28.1 (Jan. 1997), S. 65–81. ISSN: 1464-5319. DOI: 10.1080/00207729708929364.
- [5] L. Akmal und M. J. Pyrcz. „Physics-Based Discrepancy Modeling for Well Log Imputation“. In: *Mathematical Geosciences* 57.7 (Okt. 2025), S. 1235–1264. ISSN: 1874-8961, 1874-8953. DOI: 10.1007/s11004-025-10203-7.
- [6] E. Alpaydin. *Maschinelles Lernen*. 3., aktualisierte und erweiterte Auflage. De Gruyter Studium. Berlin Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2022. ISBN: 978-3-11-074014-1. DOI: 10.1515/9783110740196.
- [7] A. C. Amakor, M. B. Berkemeier, M. Wohlleben, W. Sextro und S. Peitz. „Surrogate-Assisted Multi-objective Design of Complex Multibody Systems“. In: *Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN 2025*. Hrsg. von W. Senn, M. Sanguineti, A. Saudargiene, I. V. Tetko, A. E. P. Villa, V. Jirsa und Y. Bengio. Cham: Springer Nature Switzerland, 2026, S. 251–262. ISBN: 978-3-032-04555-3.
- [8] H. Amelunxen. „Fahrdynamikmodelle für Echtzeitsimulationen im komfortrelevanten Frequenzbereich“. Diss. Universität Paderborn, 2013.
- [9] G. Bastin und D. Dochain. *On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Process Measurement and Control 1. Amsterdam New York: Elsevier, 1990. ISBN: 978-0-444-88430-5.
- [10] T. Beier und M. Wohlleben (Betreuerin). „Vergleich von physikalischer und hybrider Modellierung eines Gummi-Metall-Lagers“. unveröffentlichte Studienarbeit. Universität Paderborn, Dez. 2023.
- [11] R. Benzi, A. Sutera und A. Vulpiani. „The Mechanism of Stochastic Resonance“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 14.11 (Nov. 1981), S. L453–L457. ISSN: 0305-4470, 1361-6447. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006.

- [12] H. te Braake, H. van Can und H. Verbruggen. „Semi-Physical Modeling of Chemical Processes with Neural Networks“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 29.1 (Juni 1996), S. 6119–6124. ISSN: 1474-6670. DOI: 10.1016/s1474-6670(17)58662-0.
- [13] L. Breiman. „Bagging Predictors“. In: *Machine Learning* 24.2 (Aug. 1996), S. 123–140. ISSN: 0885-6125, 1573-0565. DOI: 10.1007/BF00058655.
- [14] L. Breiman, J. H. Friedman, R. A. Olshen und C. J. Stone. *Classification and Regression Trees*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2017. ISBN: 978-1-315-13947-0.
- [15] NE GmbH Brockhaus. *Technik*. Abrufdatum: 2025-11-18. Brockhaus Enzyklopädie Online. 2025. URL: <https://brockhaus.de/ecs/enzy/article/technik-20> (besucht am 18. 11. 2025).
- [16] S. L. Brunton, J. L. Proctor und J. N. Kutz. „Discovering Governing Equations from Data by Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113.15 (März 2016), S. 3932–3937. DOI: 10.1073/pnas.1517384113.
- [17] S. L. Brunton und J. N. Kutz. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, Jan. 2019. ISBN: 978-1-108-42209-3. DOI: 10.1017/9781108380690.
- [18] H. J. L. van Can, H. A. B. te Braake, S. Dubbelman, C. Hellinga, K. C. A. M. Luyben und J. J. Heijnen. „Understanding and Applying the Extrapolation Properties of Serial Gray-box Models“. In: *AIChE Journal* 44.5 (Mai 1998), S. 1071–1089. ISSN: 1547-5905. DOI: 10.1002/aic.690440507.
- [19] Z. Chen und D. Xiu. „On Generalized Residual Network for Deep Learning of Unknown Dynamical Systems“. In: *Journal of Computational Physics* 438 (Aug. 2021), S. 110362. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110362.
- [20] R. R. Craig und M. C. C. Bampton. „Coupling of Substructures for Dynamic Analyses.“ In: *AIAA Journal* 6.7 (Juli 1968), S. 1313–1319. ISSN: 0001-1452, 1533-385X. DOI: 10.2514/3.4741. (Besucht am 15. 04. 2026).
- [21] H. Czichos. *Mechatronik: Grundlagen und Anwendungen technischer Systeme*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019. ISBN: 978-3-658-26293-8. DOI: 10.1007/978-3-658-26294-5.
- [22] L. Dai, M. Chi, C. Xu, H. Gao, J. Sun, X. Wu und S. Liang. „A Hybrid Neural Network Model Based Modelling Methodology for the Rubber Bushing“. In: *Vehicle System Dynamics* 60.9 (Sep. 2022), S. 2941–2962. ISSN: 0042-3114, 1744-5159. DOI: 10.1080/00423114.2021.1933090. (Besucht am 27. 01. 2025).
- [23] J. Dankert und H. Dankert. *Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinetik/Kinetik*. 7. Aufl. 2013. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint Springer Vieweg, 2013. ISBN: 978-3-8348-2235-2.
- [24] S. Deepa, R. Siddalingappa, P. Kalpana, J. Loveline Zeema, M. Vinay, J. Jayapriya, J. Suganthi und I. Priya Stella Mary. „A Comparative Analysis of L1, L2, and L1L2 Regularization Techniques in Neural Networks for Image Classification“. In: *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)* 73.10 (2025), S. 107–116. DOI: 10.14445/22315381/IJETT-V73I10P108.

-
- [25] M. Denker, Hrsg. *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN: 978-3-540-20713-9. DOI: 10.1007/b137966.
 - [26] P. Deuffhard und F. Bornemann. *Numerische Mathematik 2: gewöhnliche Differentialgleichungen*. 4. Auflage. De Gruyter Studium. Berlin Boston: Walter de Gruyter, 2013. ISBN: 978-3-11-031633-9. DOI: 10.1515/9783110316360.
 - [27] J. C. Dixon. *The Shock Absorber Handbook*. 2. ed., repr. Wiley-Professional Engineering Publishing Series. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0-470-51020-9.
 - [28] M. R. Ebers, K. M. Steele und J. N. Kutz. „Discrepancy Modeling Framework: Learning Missing Physics, Modeling Systematic Residuals, and Disambiguating between Deterministic and Random Effects“. In: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 23.1 (Jan. 2024), S. 440–469. ISSN: 1536-0040. DOI: 10.1137/22m148375x.
 - [29] M. Ersoy und S. Gies, Hrsg. *Fahrwerkhandbuch*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. DOI: 10.1007/978-3-658-15468-4.
 - [30] A. Farchi, P. Laloyaux, M. Bonavita und M. Bocquet. „Using Machine Learning to Correct Model Error in Data Assimilation and Forecast Applications“. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 147.739 (Juli 2021), S. 3067–3084. ISSN: 1477-870X. DOI: 10.1002/qj.4116.
 - [31] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. 12. Aufl. VDE Verlag, 2016. ISBN: 978-3-8007-4202-8.
 - [32] U. Forssell und P. Lindskog. „Combining Semi-Physical and Neural Network Modeling: An Example of Its Usefulness“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 30.11 (1997), S. 767–770. ISSN: 1474-6670. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)42938-7.
 - [33] L. Franceschi, M. Donini, V. Perrone, A. Klein, C. Archambeau, M. Seeger, M. Pontil und P. Frasconi. „Hyperparameter Optimization in Machine Learning“. In: *Foundations and Trends® in Machine Learning* 18.6 (2025), S. 1054–1201. ISSN: 1935-8237, 1935-8245. DOI: 10.1561/22000000088. (Besucht am 19.12.2025).
 - [34] V. Galvanauskas, R. Simutis und A. Lübbert. „Hybrid Process Models for Process Optimisation, Monitoring and Control“. In: *Bioprocess and Biosystems Engineering* 26.6 (Dez. 2004), S. 393–400. ISSN: 1615-7591, 1615-7605. DOI: 10.1007/s00449-004-0385-x.
 - [35] V. Galvanauskas, R. Simutis und A. Lübbert. „Hybrid Modeling of Biochemical Processes“. In: *Hybrid Modeling in Process Industries*. CRC Press, 2018, S. 89–127. ISBN: 978-1-351-18437-3.
 - [36] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung und F. Marchesoni. „Stochastic Resonance“. In: *Reviews of Modern Physics* 70.1 (Jan. 1998), S. 223–287. ISSN: 0034-6861, 1539-0756. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223. (Besucht am 20.02.2026).
 - [37] T. Gaskin, G. A. Pavliotis und M. Girolami. „Neural Parameter Calibration for Large-Scale Multiagent Models“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 120.7 (Feb. 2023). ISSN: 1091-6490. DOI: 10.1073/pnas.2216415120.
 - [38] E. Gekeler, Hrsg. *Mathematische Methoden zur Mechanik: Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten*. SpringerLink Bücher. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-30267-4. DOI: 10.1007/3-540-30269-7.

- [39] J. Glassey und M. von Stosch, Hrsg. *Hybrid Modeling in Process Industries*. First issued in paperback. Boca Raton London New York: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-4987-4086-9.
- [40] Z. Gong und M. Wohlleben (Betreuerin). „Untersuchung von Parametrierungsstrategien für hybride Modelle“. unveröffentlichte Studienarbeit. Universität Paderborn, 2024.
- [41] W. Göpel und C. Ziegler. *Einführung in die Materialwissenschaften: Physikalisch-chemische Grundlagen und Anwendungen*. Einführung in die Materialwissenschaften: Physikalisch-chemische Grundlagen und Anwendungen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1996. ISBN: 978-3-322-93440-6. DOI: 10.1007/978-3-322-93440-6.
- [42] K. F. A. Grashof. *Theoretische Maschinenlehre*. Hamburg und Leipzig: Verlag von Leopold Voss, 1883.
- [43] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall. *Technische Mechanik 3: Kinetik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021. ISBN: 978-3-662-63064-8. DOI: 10.1007/978-3-662-63065-5.
- [44] E. J. Hagendorfer. „Knowledge Incorporation for Machine Learning in Condition Monitoring: A Survey“. In: *2021 International Symposium on Electrical, Electronics and Information Engineering*. Seoul Republic of Korea: ACM, Feb. 2021, S. 230–240. ISBN: 978-1-4503-8983-9. DOI: 10.1145/3459104.3459144.
- [45] C. Halfmann und H. Holzmann. *Adaptive Modelle Für Die Kraftfahrzeugdynamik*. Springer, 2003. ISBN: 9783642621154.
- [46] J. Harlim, S. W. Jiang, S. Liang und H. Yang. „Machine Learning for Prediction with Missing Dynamics“. In: *Journal of Computational Physics* 428 (März 2021). ISSN: 00219991. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109922.
- [47] T. Hastie, R. Tibshirani und J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning*. Springer New York, 2009. ISBN: 978-0-387-84858-7. DOI: 10.1007/978-0-387-84858-7.
- [48] R. J. Hyndman und A. B. Koehler. „Another Look at Measures of Forecast Accuracy“. In: *International Journal of Forecasting* 22.4 (Okt. 2006), S. 679–688. ISSN: 01692070. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.
- [49] R. Isermann. *Digitale Regelsysteme*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1977. ISBN: 978-3-642-96342-1. DOI: 10.1007/978-3-642-96341-4. (Besucht am 27. 11. 2025).
- [50] R. Isermann. *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. 2. vollständig neu bearbeitete Auflage. SpringerLink Bücher. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-32512-3. DOI: 10.1007/978-3-540-32512-3.
- [51] R. Isermann. *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 978-3-540-78878-2.
- [52] T. Johansen und B. Foss. „State-Space Modeling Using Operating Regime Decomposition and Local Models“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 26.2 (Juli 1993), S. 39–42. ISSN: 14746670. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)48422-9. (Besucht am 23. 04. 2026).

-
- [53] T. A. Johansen. „Operating Regime Based Process Modeling and Identification“. Diss. University of Trondheim, 1994.
 - [54] T. A. Johansen und B. A. Foss. „Operating Regime Based Process Modeling and Identification“. In: *Computers & Chemical Engineering* 21.2 (Okt. 1997), S. 159–176. ISSN: 00981354. DOI: 10.1016/0098-1354(95)00260-X.
 - [55] K. Kaheman, E. Kaiser, B. Strom, J. N. Kutz und S. L. Brunton. *Learning Discrepancy Models From Experimental Data*. 2019. DOI: 10.48550/ARXIV.1909.08574. (Besucht am 08.05.2026).
 - [56] G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang und L. Yang. „Physics-Informed Machine Learning“. In: *Nature Reviews Physics* 3.6 (Mai 2021), S. 422–440. ISSN: 2522-5820. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
 - [57] A. Karpatne, G. Atluri, J. H. Faghmous, M. Steinbach, A. Banerjee, A. Ganguly, S. Shekhar, N. Samatova und V. Kumar. „Theory-Guided Data Science: A New Paradigm for Scientific Discovery from Data“. In: *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 29.10 (Okt. 2017), S. 2318–2331. ISSN: 1041-4347. DOI: 10.1109/tkde.2017.2720168.
 - [58] M. Kelber, S. Brück, N. Bhardwaj, O. K. Aimiyeagbon, R. Naumann und W. Sextro. „Methodik Zur Untersuchung Der Fahrwerksparameter von Schienenfahrzeugen Auf Basis Optischer Schwingungsmessungen an Einer Ortsfesten Messstelle“. In: *Tagungsband Rad-Schiene-Tagung 2026*. Hrsg. von F. M. Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden. Hamburg: DVV Media Group GmbH - Eurailpress, 2026, S. 206–208.
 - [59] S. Kohl. *Analyse der Reibleistungsverteilung im Reifenlatsch unter Berücksichtigung der Fahrwerkdynamik eines Mehrlenkerachssystems zur Bewertung des Reifenverschleißes*. Bd. 8. Schriften des Lehrstuhls für Dynamik und Mechatronik. Düren: Shaker Verlag, 2019. ISBN: 9783844065022.
 - [60] A. Kud. *Why We Need Encoding Cyclical Features*. Dez. 2023. URL: <https://medium.com/@axelazara6/why-we-need-encoding-cyclical-features-79ecc3531232> (besucht am 21.02.2025).
 - [61] T. Kurz und P. Eberhard. „Symbolic Modeling and Analysis of Elastic Multibody Systems“. In: *Proceedings of International Symposium on Coupled Methods in Numerical Dynamics*. 2009.
 - [62] J. N. Kutz. „Machine Learning for Parameter Estimation“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 120.12 (März 2023), e2300990120. ISSN: 0027-8424, 1091-6490. DOI: 10.1073/pnas.2300990120. (Besucht am 21.05.2025).
 - [63] M. Lehner und P. Eberhard. „Modellreduktion in Elastischen Mehrkörpersystemen (Model Reduction in Flexible Multibody Systems)“. In: *auto* 54.4 (Apr. 2006), S. 170–177. ISSN: 2196-677X, 0178-2312. DOI: 10.1524/auto.2006.54.4.170. (Besucht am 15.04.2026).
 - [64] M. Levine und A. Stuart. „A Framework for Machine Learning of Model Error in Dynamical Systems“. In: *Communications of the American Mathematical Society* 2.7 (Okt. 2022), S. 283–344. ISSN: 2692-3688. DOI: 10.1090/cams/10.

- [65] P. Lindskog und L. Ljung. „Tools for Semi-Physical Modeling“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 27.8 (Juli 1994), S. 1199–1204. ISSN: 1474-6670. DOI: 10.1016/s1474-6670(17)47872-4.
- [66] L. Ljung, T. Glad und L. Ljung. *Modeling of Dynamic Systems*. Nachdr. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Englewood Cliffs, N.J: PTR Prentice Hall, 2002. ISBN: 978-0-13-597097-3.
- [67] A. Lübbert und R. Simutis. „Advances in Modeling for Bioprocess Supervision and Control“. In: *Bioseparation and Bioprocessing*. Hrsg. von G. Subramanian. 1. Aufl. Wiley, Sep. 1998, S. 411–461. ISBN: 978-3-527-28876-2. DOI: 10.1002/9783527619641.ch15.
- [68] S. Ludwig. *Stochastic Resonance Improves the Detection of Low Contrast Images in Deep Learning Models*. 2025. DOI: 10.48550/ARXIV.2502.14442. (Besucht am 20.02.2026).
- [69] J. Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-60745-9 978-3-662-60746-6. DOI: 10.1007/978-3-662-60746-6. (Besucht am 08.05.2026).
- [70] I. Matei, J. de Kleer, A. Feldman, R. Rai und S. Chowdhury. *Hybrid Modeling: Applications in Real-Time Diagnosis*. 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2003.02671. (Besucht am 18.12.2025).
- [71] W. Matschinsky. *Radführungen Der Straßenfahrzeuge*. Springer, 2007, S. 399. ISBN: 978-3-540-64155-1.
- [72] M. Merino-Olagüe, X. Iriarte, C. Castellano-Aldave und A. Plaza. „Hybrid Modeling and Identification of Mechanical Systems Using Physics-Enhanced Machine Learning“. In: *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 159 (Nov. 2025), S. 111762. ISSN: 09521976. DOI: 10.1016/j.engappai.2025.111762.
- [73] T. M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw Hill Education, 1997.
- [74] L. Muth, C. Noll und W. Sextro. „Generation of a Reduced, Representative, Virtual Test Drive for Fast Evaluation of Tire Wear by Clustering of Driving Data“. In: *Advances in Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks II*. Hrsg. von A. Orlova und D. Cole. Cham: Springer International Publishing, 2022, S. 992–1004. ISBN: 978-3-031-07304-5. DOI: 10.1007/978-3-031-07305-2_92. (Besucht am 15.04.2026).
- [75] L. Muth, R. Zharia, H. Sahin und W. Sextro. „Prediction of the Frictional Power Distribution in the Tire Contact Patch Based on an Empirical Tire Model and an Artificial Neural Network“. In: *Tire Science And Technology* (Feb. 2025). ISSN: 1945-5852, 0090-8657. DOI: 10.2346/TST-24-009. (Besucht am 04.07.2025).
- [76] P. Nakkiran, G. Kaplun, Y. Bansal, T. Yang, B. Barak und I. Sutskever. *Deep Double Descent: Where Bigger Models and More Data Hurt*. 2019. DOI: 10.48550/ARXIV.1912.02292. (Besucht am 20.02.2026).
- [77] R. Oliveira. „Combining First Principles Modelling and Artificial Neural Networks: A General Framework“. In: *Computers & Chemical Engineering* 28.5 (Mai 2004), S. 755–766. ISSN: 00981354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2004.02.014.

-
- [78] M. Pahl, W. Geißle und H.-M. Laun. *Praktische Rheologie der Kunststoffe und Elastomere*. 4. Aufl. VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik, 1995.
 - [79] M. Papageorgiou, M. Leibold und M. Buss. *Optimierung: Statische, Dynamische, Stochastische Verfahren Für Die Anwendung*. Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN: 978-3-662-46936-1. DOI: 10.1007/978-3-662-46936-1.
 - [80] J. Pathak, A. Wikner, R. Fussell, S. Chandra, B. R. Hunt, M. Girvan und E. Ott. „Hybrid Forecasting of Chaotic Processes: Using Machine Learning in Conjunction with a Knowledge-Based Model“. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.4 (Apr. 2018), S. 041101. ISSN: 1054-1500, 1089-7682. DOI: 10.1063/1.5028373.
 - [81] A. R. Payne. „The Dynamic Properties of Carbon Black-loaded Natural Rubber Vulcanizates. Part I“. In: *Journal of Applied Polymer Science* 6.19 (Jan. 1962), S. 57–63. ISSN: 0021-8995, 1097-4628. DOI: 10.1002/app.1962.070061906.
 - [82] K. de Payrebrune, K. Flaßkamp, T. Ströhla, T. Sattel, D. Bestle, B. Röder, P. Eberhard, S. Peitz, M. Stoffel, G. Rutwik, B. Aditya, M. Wohlleben, W. Sextro, M. Raff, C. D. Remy, M. Yadav, M. Stender, J. van Delden, T. Lüddecke, S. C. Langer, J. Schultz und C. Blech. „The Impact of AI on Engineering Design Procedures for Dynamical Systems“. In: *Technische Mechanik - European Journal of Engineering Mechanics* 45.1 (2025), S. 1–23. ISSN: 2199-9244. DOI: 10.24352/UB.OVGU-2025-037. (Besucht am 05.03.2025).
 - [83] K. Popp und W. Schiehlen. *Ground Vehicle Dynamics. A System Dynamics Approach*. Springer, 2010, S. 350. ISBN: 978-3-540-24038-9.
 - [84] V. Pracný und M. Eichler. „Rheologisches Dämpfermodell für Gesamtfahrzeugsimulationen: Von der Fahrdynamik bis zur Missbrauchssimulation“. In: *VDI-Berichte Nr. 2137* (2011). ISSN: 0083-5560.
 - [85] D. C. Psychogios und L. H. Ungar. „A Hybrid Neural Network-first Principles Approach to Process Modeling“. In: *AIChE Journal* 38.10 (Okt. 1992), S. 1499–1511. ISSN: 1547-5905. DOI: 10.1002/aic.690381003.
 - [86] M. Raissi, P. Perdikaris und G. E. Karniadakis. *Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. 2017. DOI: 10.48550/ARXIV.1711.10561.
 - [87] C. E. Rasmussen und C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. 3. print. Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2008. ISBN: 978-0-262-18253-9.
 - [88] J. Reimpell und H. Stoll. *Fahrwerktechnik: Stoß- und Schwingungsdämpfer*. 2. Aufl. Vogel-Fachbuch : Technik : Kraftfahrzeugwesen. Vogel, 1989. ISBN: 3-8023-0202-8.
 - [89] B. Röder, H. Ebel und P. Eberhard. *Motion and Motor-Current Data of a Four-Bar Linkage*. 2024. DOI: 10.18419/DARUS-4152.
 - [90] M. Rudolph, S. Kurz und B. Rakitsch. „Hybrid Modeling Design Patterns“. In: *Journal of Mathematics in Industry* 14.1 (März 2024), S. 3. ISSN: 2190-5983. DOI: 10.1186/s13362-024-00141-0.

- [91] L. von Rueden, S. Mayer, R. Sifa, C. Bauckhage und J. Garcke. „Combining Machine Learning and Simulation to a Hybrid Modelling Approach: Current and Future Directions“. In: *Advances in Intelligent Data Analysis XVIII*. Hrsg. von M. R. Berthold, A. Feelders und G. Kreml. Bd. 12080. Cham: Springer International Publishing, 2020, S. 548–560. ISBN: 978-3-030-44583-6. DOI: 10.1007/978-3-030-44584-3_43.
- [92] L. von Rueden, S. Mayer, K. Beckh, B. Georgiev, S. Giesselbach, R. Heese, B. Kirsch, M. Walczak, J. Pfrommer, A. Pick, R. Ramamurthy, J. Garcke, C. Bauckhage und J. Schuecker. „Informed Machine Learning - A Taxonomy and Survey of Integrating Prior Knowledge into Learning Systems“. In: *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* (2021), S. 1–1. DOI: 10.1109/TKDE.2021.3079836.
- [93] T. D. Sauer. *Numerical Analysis*. Third edition. Hoboken: Pearson, 2018. ISBN: 978-0-13-469645-4.
- [94] J. Schenkel und M. Wohlleben (Betreuerin). „Modularisierung Hybrider Komponenten Zur Verwendung in Mehrkörpersimulationen“. Unveröffentlichte Studienarbeit. Universität Paderborn, Nov. 2024.
- [95] B. Schenker und M. Agarwal. „Online-Optimized Feed Switching in Semi-Batch Reactors Using Semi-Empirical Dynamic Models“. In: *Control Engineering Practice* 8.12 (Dez. 2000), S. 1393–1403. ISSN: 0967-0661. DOI: 10.1016/s0967-0661(00)00077-0.
- [96] W. Schiehlen und P. Eberhard. *Technische Dynamik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 9783658184575. DOI: 10.1007/978-3-658-18457-5.
- [97] B. Schölkopf. *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge, Mass: MIT Press, 2002. ISBN: 978-0-262-19475-4.
- [98] A. Scholz. „Ein Beitrag zur Optimierung des Schwingungsverhaltens komplexer Rotorsysteme mit viskoelastischen Dämpfungselementen“. Diss. Technischen Universität Berlin, 2011.
- [99] J. Schoukens und L. Ljung. „Nonlinear System Identification: A User-Oriented Road Map“. In: *IEEE Control Systems* 39.6 (Dez. 2019), S. 28–99. ISSN: 1066-033X, 1941-000X. DOI: 10.1109/MCS.2019.2938121.
- [100] J. Schütte. *Experimental Dataset: Force and Displacement Measurements of Four Rubber-Metal Bushing Types from a Passenger Car under Harmonic Displacement Excitation*. Juli 2025. DOI: 10.5281/ZENODO.14851316. (Besucht am 04.08.2025).
- [101] J. K. Schütte. „Optimierungspotenziale elastokinematischer Achseigenschaften hinsichtlich Reifenverschleiß“. Diss. Universität Paderborn, Feb. 2026.
- [102] A. M. Schweidtmann, D. Zhang und M. Von Stosch. „A Review and Perspective on Hybrid Modeling Methodologies“. In: *Digital Chemical Engineering* 10 (März 2024), S. 100136. ISSN: 27725081. DOI: 10.1016/j.dche.2023.100136.
- [103] W. Sextro. *Mehrkörperdynamik (Vorlesungsskript)*. Vorlesung im Sommersemester 2025 an der Universität Paderborn. 2025.

-
- [104] N. Sharma und Y. A. Liu. „A Hybrid Science-guided Machine Learning Approach for Modeling Chemical Processes: A Review“. In: *AIChE Journal* 68.5 (Mai 2022), e17609. DOI: 10.1002/aic.17609.
- [105] B. Sohlberg und E. Jacobsen. „Grey Box Modelling – Branches and Experiences“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 41.2 (2008), S. 11415–11420. ISSN: 1474-6670. DOI: 10.3182/20080706-5-kr-1001.01934.
- [106] J.-H. Sohn, S.-K. Lee und W.-S. Yoo. „Hybrid Neural Network Bushing Model for Vehicle Dynamics Simulation“. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 22.12 (Dez. 2008), S. 2365–2374. ISSN: 1738-494X, 1976-3824. DOI: 10.1007/s12206-008-0712-2.
- [107] O. Stein. *Grundzüge der Nichtlinearen Optimierung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021. ISBN: 978-3-662-62531-6. DOI: 10.1007/978-3-662-62532-3. (Besucht am 17. 12. 2025).
- [108] M. Stender, S. Oberst und N. Hoffmann. „Recovery of Differential Equations from Impulse Response Time Series Data for Model Identification and Feature Extraction“. In: *Vibration* 2.1 (Jan. 2019), S. 25–46. ISSN: 2571-631X. DOI: 10.3390/vibration2010002. (Besucht am 17. 12. 2025).
- [109] M. von Stosch, R. Oliveira, J. Peres und S. Feyer de Azevedo. „Hybrid Semi-Parametric Modeling in Process Systems Engineering: Past, Present and Future“. In: *Computers & Chemical Engineering* 60 (Jan. 2014), S. 86–101. ISSN: 0098-1354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2013.08.008.
- [110] M. von Stosch, R. M. C. Portela und R. Oliveira. „Hybrid Model Structures for Knowledge Integration“. In: *Hybrid Modeling in Process Industries*. CRC Press, Feb. 2018, S. 13–35. ISBN: 978-1-351-18437-3. DOI: 10.1201/9781351184373-2.
- [111] The MathWorks Inc.. *Statistics and machine learning toolbox: Kernel (Covariance) Function Options*. Natick, Massachusetts, United States, 2025. URL: <https://de.mathworks.com/help/stats/kernel-covariance-function-options.html>.
- [112] S. Theodoridis. *Machine Learning: A Bayesian and Optimization Perspective*. 2nd edition. London San Diego: Academic press. ISBN: 978-0-12-818803-3.
- [113] M. L. Thompson und M. A. Kramer. „Modeling Chemical Processes Using Prior Knowledge and Neural Networks“. In: *AIChE Journal* 40.8 (Aug. 1994), S. 1328–1340. ISSN: 1547-5905. DOI: 10.1002/aic.690400806.
- [114] X. Vasuques. *Machine Learning Theory and Applications: Hands-on Use Cases with Python on Classical and Quantum Machines*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2024. ISBN: 978-1-394-22063-2.
- [115] J. M. G. Vilar und J. M. Rubí. „Stochastic Multiresonance“. In: *Physical Review Letters* 78.15 (Apr. 1997), S. 2882–2885. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.2882. (Besucht am 20. 02. 2026).
- [116] M. Waltz. „Dynamisches Verhalten von gummigefederten Eisenbahnradern“. Diss. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2005.
- [117] P. A. G. Watson. „Applying Machine Learning to Improve Simulations of a Chaotic Dynamical System Using Empirical Error Correction“. In: *Journal of Advances in Modeling Earth Systems* 11.5 (Mai 2019), S. 1402–1417. ISSN: 1942-2466. DOI: 10.1029/2018ms001597.

- [118] D. B. Wegener. „Test methods for in situ evaluation of vehicle dampers“. Diss. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Mai 2020. DOI: 10.18154/RWTH-2020-11304.
- [119] M. Wenzel, S. R. Raisch, M. Schmitz und C. Hopmann. „Comparison of Hybrid Machine Learning Approaches for Surrogate Modeling Part Shrinkage in Injection Molding“. In: *Polymers* 16.17 (Aug. 2024), S. 2465. ISSN: 2073-4360. DOI: 10.3390/polym16172465.
- [120] J. Willard, X. Jia, S. Xu, M. Steinbach und V. Kumar. *Integrating Scientific Knowledge with Machine Learning for Engineering and Environmental Systems*. 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2003.04919.
- [121] M. O. Williams, I. G. Kevrekidis und C. W. Rowley. „A Data-Driven Approximation of the Koopman Operator: Extending Dynamic Mode Decomposition“. In: *Journal of Nonlinear Science* 25.6 (Dez. 2015), S. 1307–1346. ISSN: 0938-8974, 1432-1467. DOI: 10.1007/s00332-015-9258-5. (Besucht am 17. 12. 2025).
- [122] C. Woernle. *Mehrkörpersysteme: Eine Einführung in Die Kinematik Und Dynamik von Systemen Starrer Körper*. Springer Berlin / Heidelberg, 2022. ISBN: 978-3-662-64529-1.
- [123] M. Wohlleben und T. Kaul (Betreuer). *Hybride Modellierung Dynamischer Systeme*. unveröffentlichte Masterarbeit. 2020.
- [124] M. Wohlleben, A. Bender, S. Peitz und W. Sextro. „Development of a Hybrid Modeling Methodology for Oscillating Systems with Friction“. In: *Machine Learning, Optimization, and Data Science*. Springer International Publishing, 2022, S. 101–115. DOI: 10.1007/978-3-030-95470-3_8.
- [125] M. Wohlleben, L. Muth, S. Peitz und W. Sextro. „Transferability of a discrepancy model for the dynamics of electromagnetic oscillating circuits“. In: *PAMM* (2023). DOI: 10.1002/pamm.202300039.
- [126] M. Wohlleben, B. Röder, H. Ebel, L. Muth, W. Sextro und P. Eberhard. „Hybrid Modeling of Multibody Systems: Comparison of Two Discrepancy Models for Trajectory Prediction“. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 24 (Sep. 2024). ISSN: 1617-7061. DOI: 10.1002/pamm.202400027.
- [127] M. Wohlleben, J. M. Linneweber, J. Schütte und W. Sextro. *Enabling Hybrid Modeling in Commercial MBS Software: A Force-Level Approach*. Juli 2025. DOI: 10.20944/preprints202507.1581.v1. Preprints: 2025071581. (Besucht am 28. 07. 2025).
- [128] M. Wohlleben, J. Schütte, M. B. Berkemeier, W. Sextro und S. Peitz. „Evaluating Physics-Based, Hybrid, and Data-Driven Models for Rubber-Metal Bushings“. In: *Multibody System Dynamics* (2026), S. 1–21. ISSN: 1384-5640. DOI: 10.1007/s11044-026-10146-9.
- [129] S. Zampini, G. Parodi, L. Oneto, A. Coraddu und D. Anguita. „A Review on Full-, Zero-, and Partial-Knowledge Based Predictive Models for Industrial Applications“. In: *Information Fusion* 119 (Juli 2025), S. 102996. ISSN: 15662535. DOI: 10.1016/j.inffus.2025.102996.
- [130] Z.-M. Zhai, L.-W. Kong und Y.-C. Lai. „Emergence of a Resonance in Machine Learning“. In: *Physical Review Research* 5.3 (Aug. 2023), S. 033127. ISSN: 2643-1564. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.033127. (Besucht am 20. 02. 2026).

- [131] X. Zhang und M. Wohlleben (Betreuerin). „Vergleich von physikalischer und hybrider Modellierung eines Stoßdämpfers“. unveröffentlichte Studienarbeit. Universität Paderborn, 2023.
- [132] Y. Zhang, D. Borisov, S. Abbasi, A. Hoch, R. D. Miller und S. D. Sloan. „Enhancing Machine Learning Based Seismic Inversion with Noise-Augmented Training Datasets“. In: *Geophysical Journal International* 244.1 (Nov. 2025), ggaf429. ISSN: 0956-540X, 1365-246X. DOI: 10.1093/gji/ggaf429. (Besucht am 20.02.2026).

A Verwendete Hard- und Software

Sofern nicht anders angegeben wurde im Rahmen dieser Arbeit mit der Hard- und Software in Tabelle A.1 gearbeitet.

Tabelle A.1: Verwendete Hard- und Software

Komponente	Spezifikation
Betriebssystem	Microsoft Windows 11 Pro (Version 10.0.26100, Build 26100)
Systemtyp	x64-basierter PC
Rechner	Lenovo ThinkPad P53 (Typ 20QN000KGE)
Prozessor	Intel Core i7-9850H @ 2.60 GHz 6 Kerne, 12 logische Prozessoren
Arbeitsspeicher	32 GB RAM
BIOS-Modus	UEFI
MATLAB	R2024b
Neweul-M ²	V3.22.2

B Drei-Massen-Schwinger

Tabelle B.1: Systemparameter für die Generierung der synthetischen Messungen, und mittels Optimierung ermittelte Systemparameter (Optimiert) für das ungedämpfte nichtlineare und für das gedämpfte lineare White-Box-Modell (Lineares Modell)

	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4
	[kg]	[kg]	[kg]	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$
synthetische Messungen	1	1	1	10	10	10	10	0,5	0,3	0,4	0,6
Optimiert (Kapitel 4.1.4.1)	0,17	0,17	0,17	1,73	1,73	1,73	1,73	-	-	-	-
	[kg]	[kg]	[kg]	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$
Lineares Modell (Kapitel 4.1.4.3)	0,92	0,92	0,92	5,07	5,07	5,07	5,07	0,78	0,78	0,78	0,78

Tabelle B.2: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen des White-Box-Modells und der fünf hybriden Verfahren für den Referenzfall für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
White-Box	100,8120	123,9839	69,8368	176,8133	159,4852	103,4019
$\Delta \underline{h}$	0,0479	0,0363	0,0306	0,0467	0,0297	0,0278
$\Delta \dot{\underline{x}}$	0,0479	0,0363	0,0306	0,0467	0,0297	0,0278
$\Delta \dot{\underline{y}}$	16,3600	15,7258	11,2639	16,0104	13,4386	8,8636
$\Delta \underline{x}$	0,0489	0,0306	0,0231	0,0530	0,0408	0,0283
$\Delta \underline{y}$	16,7811	16,0783	10,8291	16,3215	13,7543	8,6235
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
White-Box	66,9098	63,4713		156,3713	155,8902	
$\Delta \dot{\underline{y}}$	0,0881	0,1033		0,1316	0,1420	
$\Delta \underline{y}$	1,1926	1,5687		1,6904	2,0431	

Tabelle B.3: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens zur Lösung der Differentialgleichung (DGL) ohne und mit Neutraining (N)

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	5,8902	3,5608	2,0160	5,9220	2,6367	1,7847
$\Delta \underline{\dot{x}}$	5,8902	3,5608	2,0160	5,9220	2,6367	1,7847
$\Delta \underline{\dot{y}}$	34,8411	29,2413	33,4458	45,1139	32,3476	34,6612
$\Delta \underline{x}$	6,7999	4,5149	2,6196	6,3523	3,2318	2,2558
$\Delta \underline{x}$ (N)	0,0512	0,0313	0,0237	0,0557	0,0415	0,0289
$\Delta \underline{y}$	16,2087	16,5794	12,6506	15,9389	14,2754	10,4764
$\Delta \underline{y}$ (N)	16,2087	16,8337	10,7424	16,4148	13,8389	10,4764
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	38,5670	30,7730		48,2407	50,0806	
$\Delta \underline{y}$	6,9702	3,1994		8,4893	4,3067	
$\Delta \underline{y}$ (N)	1,3408	1,8794		1,9361	2,4925	

Tabelle B.4: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen des White-Box-Modells und der fünf hybriden Verfahren für den Fall der Parameteroptimierung für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
White-Box	99,5961	123,3789	70,0637	172,5235	157,7200	103,6654
$\Delta \underline{h}$	0,0373	0,0291	0,0264	0,0375	0,0260	0,0246
$\Delta \underline{\dot{x}}$	0,0373	0,0291	0,0264	0,0375	0,0260	0,0246
$\Delta \underline{\dot{y}}$	16,3592	15,7248	11,2652	16,0092	13,4382	8,8646
$\Delta \underline{x}$	0,0491	0,0307	0,0231	0,0530	0,0408	0,0283
$\Delta \underline{y}$	16,7021	16,0464	10,9066	16,2471	13,7198	8,6837
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
White-Box	66,5287	63,0126		152,0270	155,8476	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	0,0932	0,1034		0,1375	0,1434	
$\Delta \underline{y}$	1,0972	1,5796		1,5344	2,0396	

Tabelle B.5: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen des White-Box-Modells und der fünf hybriden Verfahren für den Fall ungenauer Systemparameter für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
White-Box	106,4647	131,4046	73,5765	182,3804	168,0219	102,6345
$\Delta \underline{h}$	0,0622	0,0496	0,0329	0,0543	0,0365	0,0295
$\Delta \underline{\dot{x}}$	0,0622	0,0496	0,0329	0,0543	0,0365	0,0295
$\Delta \underline{\dot{y}}$	16,3600	15,7261	11,2637	16,0099	13,4389	8,8636
$\Delta \underline{x}$	0,0488	0,0320	0,0242	0,0532	0,0419	0,0292
$\Delta \underline{y}$	16,7857	16,0178	10,8416	16,3421	13,6867	8,6237
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
White-Box	68,0376	65,0711		165,2395	166,3230	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	0,0871	0,1015		0,1298	0,1398	
$\Delta \underline{y}$	0,9418	1,3897		1,4064	1,8094	

Tabelle B.6: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen des White-Box-Modells und der fünf hybriden Verfahren für den Fall des linearen White-Box-Modells für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
White-Box	9,8895	16,7145	8,1996	9,8811	14,8224	7,6794
$\Delta \underline{h}$	0,1192	0,0672	0,0379	0,1240	0,0637	0,0345
$\Delta \underline{\dot{x}}$	0,1192	0,0672	0,0379	0,1240	0,0637	0,0345
$\Delta \underline{\dot{y}}$	16,3796	15,7313	11,2467	16,0227	13,4423	8,8549
$\Delta \underline{x}$	0,1412	0,0643	0,0484	0,1405	0,0639	0,0408
$\Delta \underline{y}$	16,5321	15,7702	11,2858	16,0696	13,4867	9,0136
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
White-Box	15,3693	7,3042		17,1756	11,6850	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	0,1226	0,1232		0,1831	0,1698	
$\Delta \underline{y}$	1,6749	1,4391		2,3756	1,9752	

Tabelle B.7: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der hybriden Verfahren auf Ebene des Systemausgangs für den Fall eines stark reduzierten White-Box-Modells

	s_1	s_2	$\dot{s}_1$	$\dot{s}_2$
$\Delta \underline{\dot{y}}$	10067	3375	1410	581
$\Delta \underline{y}$	26,28	28,64	29,00	31,31
$\Delta \underline{\dot{y}}$		32,64		34,19
$\Delta \underline{y}$		28,59		31,29

Tabelle B.8: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der vier hybriden Verfahren für den Fall Rauschen mit einem Rauschpegel von 0,01 unter der Verwendung von GPR-Modellen für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	304,9388	311,3245	179,3170	1720,0523	1384,2815	912,6900
$\Delta \underline{\dot{x}}$	304,9388	311,3245	179,3170	1720,0523	1384,2815	912,6900
$\Delta \underline{\dot{y}}$	702,1338	195,6751	545,9675	3287,5079	4222,0832	2502,9585
$\Delta \underline{x}$	153,6194	193,9033	80,6984	296,1026	265,6185	159,3192
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	466,2403	596,8199		5118,4377	6070,7837	

Tabelle B.9: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Rauschen mit einem Rauschpegel von 0,01 unter der Verwendung von BT-Modellen für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	8,7912	7,5042	4,1652	7,4190	7,1739	4,9684
$\Delta \underline{\dot{x}}$	9,4670	8,0710	5,2724	7,9439	7,4838	5,8208
$\Delta \underline{\dot{y}}$	17,5553	16,0211	10,8501	17,3307	13,6688	8,7405
$\Delta \underline{x}$	15,7810	10,1309	9,4189	15,3264	10,8335	9,1151
$\Delta \underline{y}$	17,1021	16,2651	10,5517	16,6413	14,0202	8,4271
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	3,7119	2,3884		4,6372	3,3913	
$\Delta \underline{y}$	1,5784	1,8632		2,3248	2,5084	

Tabelle B.10: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Rauschen mit einem Rauschpegel von 0,025 unter der Verwendung von BT-Modellen für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	8,6033	4,9623	3,3724	8,2958	5,2480	3,5707
$\Delta \underline{\dot{x}}$	5,1171	3,8982	2,8704	4,4135	3,6984	2,9526
$\Delta \underline{\dot{y}}$	18,6917	16,7974	11,4550	19,3847	15,5922	10,0240
$\Delta \underline{x}$	23,9502	16,0240	13,8998	21,4895	14,4563	12,5936
$\Delta \underline{y}$	16,8465	15,8511	10,9645	16,5823	13,4922	8,7030
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	6,3470	7,9872		9,7116	13,0744	
$\Delta \underline{y}$	1,5572	1,4737		2,4516	1,9906	

Tabelle B.11: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Rauschen mit einem Rauschpegel von 0,05 unter der Verwendung von BT-Modellen für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	13,4775	9,1662	5,3030	13,2696	7,6447	5,4382
$\Delta \underline{\dot{x}}$	8,1285	6,7208	4,2984	8,3866	6,1375	5,0131
$\Delta \underline{\dot{y}}$	17,5928	16,6536	13,0445	17,7299	15,1556	11,7429
$\Delta \underline{x}$	6,4364	4,7020	2,8828	5,7717	4,2232	3,4378
$\Delta \underline{y}$	16,8871	15,8181	10,8829	16,7214	13,5585	8,9263
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	5,9914	10,0001		9,0244	13,9489	
$\Delta \underline{y}$	3,4021	2,0203		4,8072	3,6540	

Tabelle B.12: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall konstanter Offset mit einer Offset-Stärke von 0,25 für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	0,0346	0,0279	0,0195	0,0351	0,0256	0,0200
$\Delta \underline{\dot{x}}$	0,0346	0,0279	0,0195	0,0351	0,0256	0,0200
$\Delta \underline{\dot{y}}$	17,7719	23,8412	14,3026	16,0293	13,4442	8,8509
$\Delta \underline{x}$	0,0517	0,0321	0,0232	0,0542	0,0404	0,0280
$\Delta \underline{y}$	17,8489	24,1601	14,0129	16,1460	13,9222	8,6996
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	0,1661	0,1525		0,2394	0,2108	
$\Delta \underline{y}$	1,7576	1,7245		2,3366	2,4932	

Tabelle B.13: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Trend mit einer Trend-Stärke von 0,01 für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	45,9844	69,4322	18,3945	46,5917	22,2195	20,0117
$\Delta \underline{\dot{x}}$	45,9844	69,4322	18,3945	46,5917	22,2195	20,0117
$\Delta \underline{\dot{y}}$	78,6115	23,6968	67,5241	16,2808	25,8889	19,9373
$\Delta \underline{x}$	0,4524	0,8783	0,2438	0,4190	0,3099	0,2163
$\Delta \underline{y}$	35,1465	30,0959	32,0778	39,8781	27,6290	28,9174
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	47,6696	75,5986		24,1455	30,5501	
$\Delta \underline{y}$	34,2034	24,7186		40,0263	38,3102	

Tabelle B.14: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Trend mit einer Trend-Stärke von 0,025 für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	6,4303	21,3164	2,3691	5,5563	3,9606	2,5244
$\Delta \underline{\dot{x}}$	6,4303	21,3164	2,3691	5,5563	3,9606	2,5244
$\Delta \underline{\dot{y}}$	31,6375	38,4244	25,6310	43,9392	25,8808	18,4705
$\Delta \underline{x}$	0,2564	1,0546	0,1512	0,2375	0,1709	0,1238
$\Delta \underline{y}$	40,1376	41,1559	33,3883	48,5979	34,1649	28,8062
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	25,7406	13,8077		45,6659	21,1765	
$\Delta \underline{y}$	36,5053	20,0357		49,0568	43,3166	

Tabelle B.15: NRMSE (in %) zwischen Messungen und Ergebnissen der fünf hybriden Verfahren für den Fall Trend mit einer Trend-Stärke von 0,05 für den Zustandsvektor $\underline{x}$ und für den Systemausgang $\underline{y}$

	q_1	q_2	q_3	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$	$\dot{q}_3$
$\Delta \underline{h}$	274,5657	236,1010	190,2638	2019,4767	1805,0210	1115,8239
$\Delta \underline{\dot{x}}$	274,5657	236,1010	190,2638	2019,4767	1805,0210	1115,8239
$\Delta \underline{\dot{y}}$	210,3904	50,0571	208,3914	917,2923	555,1325	347,7376
$\Delta \underline{x}$	51,5135	61,6422	21,6433	44,1746	20,7504	12,6934
$\Delta \underline{y}$	69,3898	48,7502	61,2251	170,6240	218,0639	117,8002
	q_{12}	q_{23}		$\dot{q}_{12}$	$\dot{q}_{23}$	
$\Delta \underline{\dot{y}}$	156,6043	124,2604		1048,0409	612,8069	
$\Delta \underline{y}$	81,8590	54,8652		275,1794	298,5222	

C Doppelpendel

Tabelle C.1: Gemessene Systemparameter des Doppelpendels

$J_1^{(S_1)}$ [kg·m ²]	m_1 [kg]	l_1 [m]	s_1 [m]	$J_2^{(S_2)}$ [kg·m ²]	m_2 [kg]	s_2 [m]
0,0018	0,0819	0,2080	0,0986	0,0007	0,0702	0,0520

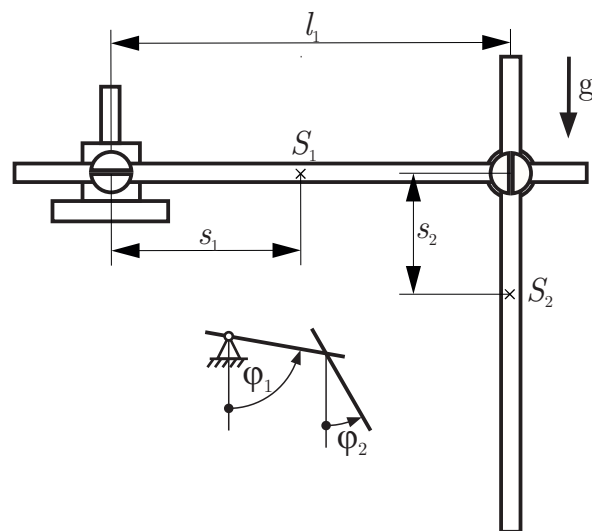


Abbildung C.1: Skizze des Doppelpendel-Prüfstands, angelehnt an [123]

D Gelenkviereck

Tabelle D.1: Geometrische Parameter (in mm) des betrachteten Gelenkvierecks

	Steg	Arm 2	Koppelstange	Arm 4
physische Länge	-	50	124	80
Abstand zwischen Gelenken	95	30	104	60

E Gummi-Metall-Lager

E.1 Herleitung der Formel für Feder mit wegabhängiger Steifigkeit

Bei einer Feder mit wegabhängiger Steifigkeit $\bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau))$ berechnet sich die Federkraft als Funktion der kumulierte Verschiebung

$$q_{\text{WF}}(t, \tau) = \int_{\tau}^t |\dot{q}(\bar{\tau})| d\bar{\tau}.$$

Die Federkraft lässt sich über

$$F_{\text{WF}}(t) = F_{\text{WF},0} + \int_0^t \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau.$$

berechnen. Ableitung nach der Zeit mit der Leibnizregel für Parameterintegrale liefert

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\text{WF}}(t) &= \frac{d}{dt} \left(F_{\text{WF},0} + \int_0^t \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau \right) \\ &= \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, t)) \dot{q}(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Im betrachteten Fall einer exponentiell fallenden Federsteifigkeit gelte

$$\bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) = c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, \tau)) \quad \text{und} \quad F_{\text{WF},0} = 0.$$

Zunächst wird der vordere Teil von Gleichung (E.1) berechnet. Durch

$$q_{\text{WF}}(t, t) = \int_t^t |\dot{q}(\bar{\tau})| d\bar{\tau} = 0$$

gilt

$$\bar{c}(q_{\text{WF}}(t, t)) \dot{q}(t) = c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, t)) \dot{q}(t) = c \exp(0) \dot{q}(t) = c \dot{q}(t).$$

Für den hinteren Teil von Gleichung (E.1) gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) = \frac{\partial}{\partial t} c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, \tau)).$$

Über die Kettenregel und mit

$$\frac{\partial}{\partial s} c \exp(-\theta s) = -\theta c \exp(-\theta s) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} q_{\text{WF}}(t, \tau) = |\dot{q}(t)|$$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) = -\theta c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, \tau)) |\dot{q}(t)|.$$

Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau &= \int_0^t -\theta c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, \tau)) |\dot{q}(t)| \dot{q}(\tau) d\tau \\ &= -\theta |\dot{q}(t)| \int_0^t c \exp(-\theta q_{\text{WF}}(t, \tau)) \dot{q}(\tau) d\tau \\ &= -\theta \dot{q}(t) \operatorname{sgn}(\dot{q}(t)) F_{\text{WF}}(t). \end{aligned}$$

Zur Berechnung einer Feder mit wegababhängiger, exponentiell fallender Steifigkeit gilt damit

$$\dot{F}_{\text{WF}} + \theta \dot{q}(t) \operatorname{sgn}(\dot{q}(t)) F_{\text{WF}}(t) = c \dot{q}(t).$$

E.2 Black-Box-Modellierung eines Gummi-Metall-Lagers (*bush1*)

Zum Vergleich wurden auch einfache reine Black-Box-Modelle auf die Daten *bush1* aus [100] angewandt, die Ergebnisse befinden sich in Tabelle E.1.

Für die Berücksichtigung von den zwei Eingängen, der Verschiebung und der Geschwindigkeit, wurde anhand der dynamischen Messungen ein Wide Neural Network¹⁶ trainiert. Die Ergebnisse für die dynamische Anregung sind in einer ähnlichen Größenordnung wie die in Tabelle 4.9 in Kapitel 4.5, die Rechenzeit ist jedoch höher als die der dort vorgestellten Modelle und die Genauigkeit für die quasistatische Anregung ist deutlich schlechter. Zur zusätzlichen Berücksichtigung der Beschleunigung wurde ein Bagged Trees (BT)-Modell anhand der dynamischen und der quasistatischen Messungen trainiert. Hierbei ist die Genauigkeit vergleichbar oder schlechter als die des Vergleichsmodells in Tabelle 4.9 in Kapitel 4.5, aber die Rechendauer ist um ein Vielfaches länger als die des hybriden Modells mit drei Eingängen.

Tabelle E.1: MAPE (in %) zwischen Messungen und Modell, und Rechenzeit für alle dynamischen Anregungen (in s) der betrachteten Black-Box-Modelle für *bush1*

	c_{dyn}	$W_{\text{d,dyn}}$	Zeit	c_{stat}	$W_{\text{d,stat}}$
$F_{\text{BB}}(q, \dot{q}, \ddot{q})$	2,7016	16,67	9,55	0,51	17,48
$F_{\text{BB}}(q, \dot{q})$	1,744	27,72	0,58	43,37	99,54

E.3 Hybride Modellierung eines Gummi-Metall-Lagers (*bush2*)

Die fünf in Kapitel 4.5 beschriebenen Modelle wurden ebenfalls auf die Messungen des Gummi-Metall-Lagers (GML) *bush2* aus [100] angewandt. Eine Zusammenfassung der

¹⁶<https://de.mathworks.com/help/stats/choose-regression-model-options.html>

Ergebnisse ist in Tabelle E.2 zu sehen. Diese decken sich im Großen und Ganzen mit den Erkenntnissen in Kapitel 4.5.

Tabelle E.2: MAPE (in %) zwischen Messungen und Modell, und Rechenzeit für alle dynamischen Anregungen (in s) der betrachteten Modelle für *bush2*

	c_{dyn}	$W_{\text{d,dyn}}$	Zeit	c_{qs}	$W_{\text{d,qs}}$
$F_{\text{NLS}} + F_{\text{MW5}} + F_{\text{WF}}$	1,43	29,54	13,00	0,03	15,85
F_{NLS}	49,84	100,00	0,03	2,18	100,00
$F_{\text{NLS}} + \Delta F(q, \dot{q}, \ddot{q})$	2,51	14,06	0,54	1,13	3,91
$F_{\text{NLS}} + \Delta F(q, \dot{q})$	1,26	27,52	0,28	7,97	98,85
$F_{\text{NLS}} + S_{\text{NLS}} \Delta F(q, \dot{q})$	1,24	27,52	0,28	2,18	98,87

In Abb. E.1 sind die Ergebnisse für das vollständige White-Box-Modell. Das White-Box-Modell ist in der Lage die quasistatische Hysterese in a), die dynamische Steifigkeit in b) und die Dämpfungsarbeit in c) gut wiederzugeben. Ähnlich wie in Abb. 4.51 in Kapitel 4.5 ist das reduzierte White-Box-Modell nicht in der Lage die Hysterese abzubilden.

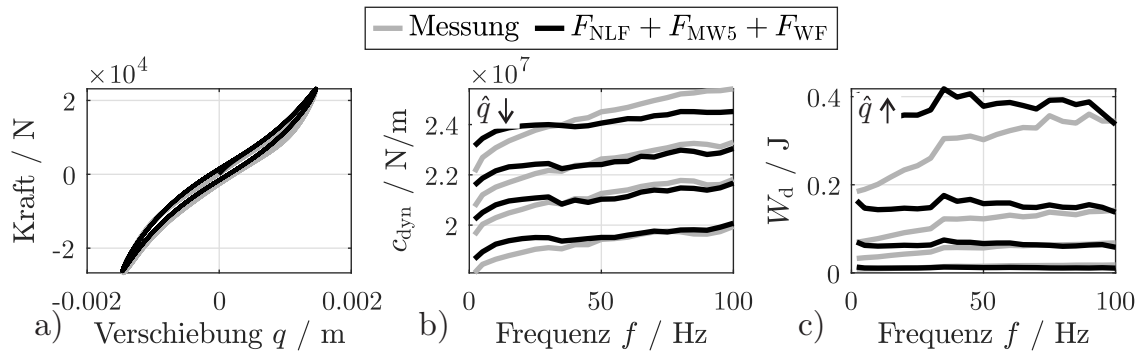


Abbildung E.1: Messung und Ergebnisse des vollständigen White-Box-Modells a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

In Abb. E.2 sind die Ergebnisse des hybriden Modells mit drei Eingängen zu sehen. Als Black-Box-Modell wurde ein Fine Tree verwendet. Dieses Modell gibt das tatsächliche Verhalten des GML gut wieder, nur in der quasistatischen Hysterese ist für kleine Verschiebungen eine Unstetigkeit zu sehen.

In Abb. E.3 sind die Ergebnisse für das regimebasierte hybride Modell mit zwei Eingängen zu sehen. Als Black-Box-Modell wird hier ein Fine Tree verwendet. Beim quasistatischen Verhalten in a) fehlt die Hystereseschleife, bzw. ist nur rudimentär vorhanden. Das dynamische Verhalten in b) und c) wird vom beiden Modellen gut abgebildet.

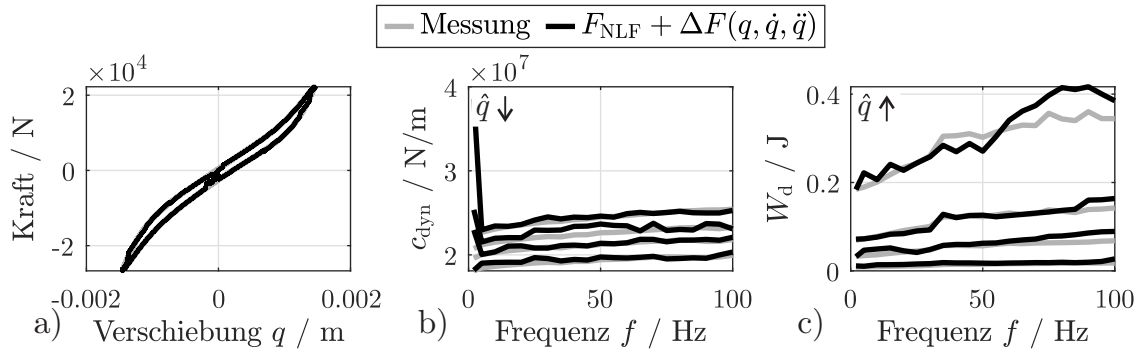


Abbildung E.2: Messung und Ergebnisse des hybriden Modells mit drei Eingängen a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

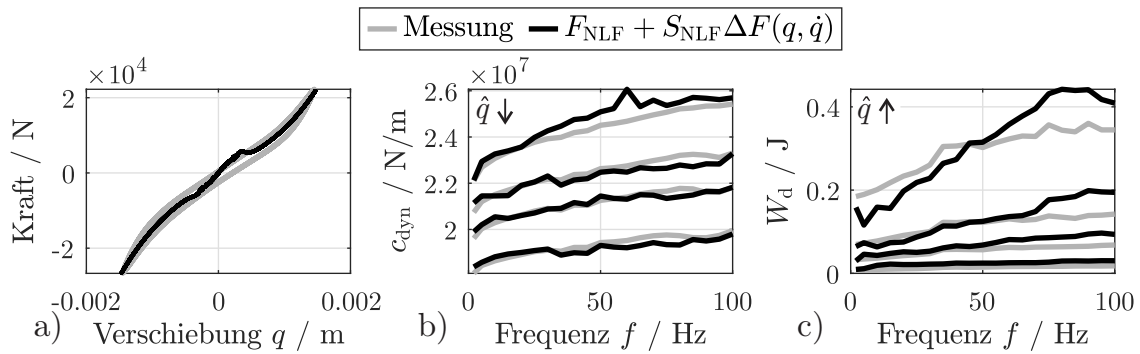


Abbildung E.3: Messung und Ergebnisse des regimebasierten hybriden Modells a) für quasistatische Anregung, sowie b) die dynamische Steifigkeit und c) die Dämpfungsarbeit bei dynamischer Anregung

Erklärung zur Zitation von Inhalten aus studentischen Arbeiten

In Ergänzung zu meinem Antrag auf Zulassung zur Promotion in der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn erkläre ich gemäß §11 der Promotionsordnung und unter Beachtung der Regelung zur Zitation studentischer Arbeiten:

Die von mir vorgelegte Dissertation habe ich selbstständig verfasst, und ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Es sind Inhalte studentischen Ursprungs (studentische Arbeiten) in dieser Dissertation enthalten.

Ich habe die verwendeten Arbeiten entsprechend der Regelung „Zitation aus studentischen Arbeiten in Dissertationen“ zitiert.

Paderborn, im Mai 2026

Meike Claudia Wohlleben