



# **Hocheffiziente Modellierung, Charakterisierung und Analyse von Mixed-Signal Phasenregelkreisen unter Berücksichtigung von nichtlinearen und nicht-idealen Effekten**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

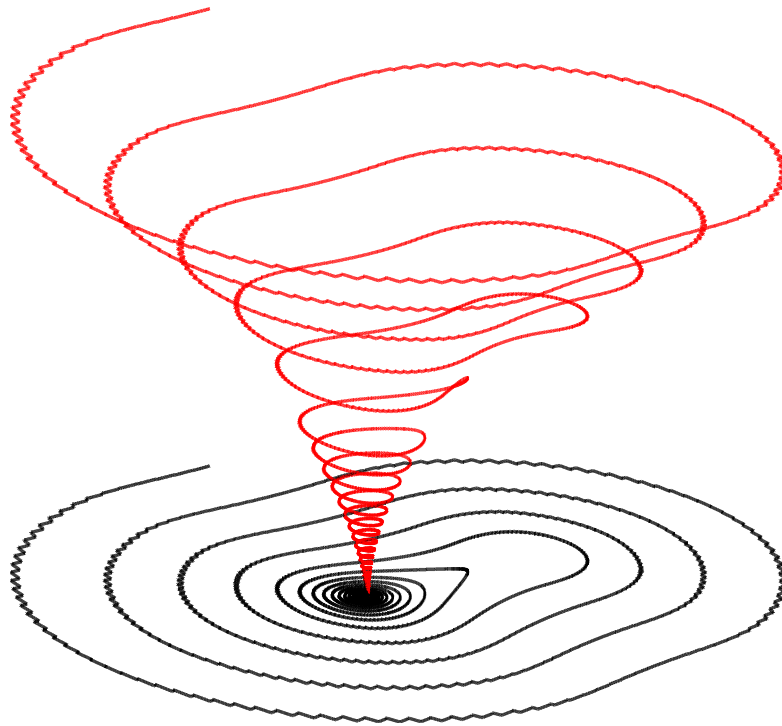
Dipl.-Ing. Christian Hangmann

Erster Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Ulrich Hilleringmann
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. techn. Felix Gausch

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juni 2017

Paderborn 2017

Diss. EIM-E/333



Kontakt: Christian Hangmann

E-Mail: [c.hangmann@web.de](mailto:c.hangmann@web.de)

---

Fraunhofer ENAS - Advanced System Engineering

---

## Kurzfassung

Die Mixed-Signal (MS) Systeme stellen die Kombination von analogen und digitalen Komponenten dar und werden oft in aktuellen Schaltungen eingesetzt, da viele integrierte Funktionen weiterhin analog realisiert werden, bzw. eine gemischt digital analoge Regelung darstellen (z.B. einige A/D-Wandler). Auch in mobilen Anwendungen werden oft MS Systeme eingesetzt. Der Entwurf dieser Systeme stellt aufgrund der zwei Domänen jedoch eine Herausforderung dar. Analytische Beschreibungsformen basieren daher oft auf Annahmen und a priori Linearisierungen, wodurch eine präzise Charakterisierung des schaltenden Verhaltens nur sehr bedingt möglich ist. Der Phasenregelkreis (PLL) zur Frequenzsynthese stellt ein solches System dar und weist darüber hinaus nichtlineare und nicht-ideale Eigenschaften auf. Die typischen Modelle zur Beschreibung und Analyse dessen dynamischen Verhaltens führen zu langen Simulationszeiten. Eine rigorose Charakterisierung der schaltenden, nicht-linearen, nicht-idealen und teils chaotischen MS Systeme (wie die PLL) ist somit nur mit hohem Zeit-, Kosten- und Ressourcenaufwand möglich. Diese ist für einen robusten Systementwurf jedoch von großer Bedeutung.

Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit effizienten Modellierungs- und Charakterisierungsansätzen für MS Systeme. Der Fokus liegt dabei auf der MS PLL zur Frequenzsynthese, wobei die Ergebnisse auch für weitere PLL Anwendungsgebiete, wie zum Beispiel die Takt- und Datenrückgewinnung, gezeigt werden. Des Weiteren lassen sich die diskutierten Ergebnisse auch auf andere MS Systeme übertragen.

Hier werden sowohl die gängigen linearen Modelle als auch die Verhaltensbeschreibungen der idealen PLL hinsichtlich ihrer Genauigkeit und Effizienz analysiert. Darüber hinaus wird ein komplett ereignisgesteuertes (ED) Modell vorgestellt, mit dessen Hilfe autonome Differenzengleichungen abgeleitet werden und schließlich eine neue Stabilitätsbedingung der Ruhelage hergeleitet wird. Diese erlaubt die Konvergenzbeurteilung der PLL für Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage, sodass eine robustere Verhaltensvorhersage der schaltenden und chaotischen PLL möglich ist.

Zusätzlich zum idealen Verhalten werden typische nichtlineare und nicht-ideale Eigenschaften der realen PLL betrachtet und entsprechende Modellierungsmethoden diskutiert. Für die Beschreibung der PLL und deren nichtlinearen und nicht-idealen Effekte wird ein intuitives, modulares und hocheffizientes erweitertes ED Modell eingeführt. Dessen Berechnung ist über 10.000-mal schneller als eine Transistor-Level (TL) Simulation und weist eine relative Differenz von lediglich 0,1% auf. Beim Vergleich mit einer Evaluationsschaltung beträgt die Abweichung zwischen den Messungen und den Ergebnissen des eingeführten Modells in etwa 1%. Das ED Modell vereint somit die hocheffiziente Simulation mit einer hohen Genauigkeit.

Der erweiterte und schnelle ED Ansatz wird im Folgenden für die umfassende Charakterisierung der nichtlinearen, nicht-idealen und chaotischen PLL verwendet. Die Erkenntnisse der rigorosen Analyse werden für die Einführung eines robusteren und analytischen Systementwurfs der MS PLL zugrunde gelegt.

## Abstract

Mixed-Signal (MS) systems combine analog and digital components and are often used in modern circuits, since some functions are realized in the analog domain and are digitally controlled, like e.g. some A/D converters. MS Systems are often used in mobile applications. Nevertheless, the design of such circuits is challenging due to a mixture of the two domains. Analytical descriptions are therefore mostly based on assumptions and a priori linearizations whereby a precise characterization of the switching nature and the dynamic behavior of MS systems becomes difficult.

A phase-locked loop (PLL) used e.g. for frequency synthesis is a typical example for such MS systems and exhibits additional nonlinear and non-ideal properties. The classical models used to predict its behavior can result in long simulation durations. Thus, a rigorous characterization of the switching, nonlinear, non-ideal and chaotic MS system, like the PLL, is only feasible with considerable simulation efforts resulting in high design costs. Nevertheless, these investigations are necessary in order to obtain a robust system design.

Therefore, this work deals with efficient modeling and characterization approaches for MS systems. For this, this thesis focuses on the MS PLL architecture used for frequency synthesis, whereas it will be shown that the obtained modeling approach and results are also applicable for other MS PLL applications such as clock and data recovery. Furthermore, the discussed results can be extrapolated to other MS systems.

Here both the common linear models and the behavior descriptions of the ideal PLL are analyzed in terms of accuracy and efficiency. Then, a fully event-driven (ED) model is presented, allowing the derivation of autonomous difference equations which are finally used to derive a new, simple and accurate stability condition for the rest position. Utilizing this boundary, the convergence of the PLL can be assessed even for initial conditions far from the steady state, enabling a more robust convergence prediction of the switching and chaotic PLL.

In addition to the ideal behavior of the PLL, also the typical non-ideal features of the real system are considered in this work and appropriate modeling methods are discussed. For the description of the PLL and its non-ideal effects an intuitive, modular and highly efficient advanced ED model is introduced. Its calculation is about 10,000 times faster than a transistor-level (TL) simulation. The relative difference between the ED and the TL results is only 0.1% and the relative deviation between the ED simulation and measurement results of an evaluation board is approximately 1%, showing that the exhaustive modeling, presented in this thesis, combines strongly reduced simulation resources with high accuracy results.

The extended and fast ED approach is then used for a comprehensive characterization of the nonlinear, non-ideal and chaotic PLL behavior. The results of this rigorous analysis are utilized to introduce a more robust and analytical system design of the MS PLL.



---

# Vorwort

---

Diese Dissertation entstand während meiner wissenschaftlichen Tätigkeiten am Fachgebiet Sensorik der Universität Paderborn und in der Abteilung „Advanced System Engineering“ (ASE) des Fraunhofer Instituts für Elektronische Nanosysteme (ENAS).

Durch die enge Zusammenarbeit des Fachgebiets Sensorik unter der Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Hilleringmann und der Abteilung ASE, die von Herrn Dr.-Ing. Hedayat geführt wird, wurde das Thema der Modellierung und Charakterisierung von gemischt digital analogen Phasenregelkreisen an der Universität Paderborn etabliert. Ohne diese Kooperation wäre die Möglichkeit dieser Dissertation nicht gegeben gewesen.

Daher gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Hilleringmann, für die Möglichkeit diese Arbeit durchzuführen. Darüber hinaus haben die inspirierenden Diskussionen, Kommentare und gewährten Freiräume zu der Fertigstellung dieses Manuskripts beigetragen.

Für die Übernahme des Koreferats, die hilfreichen Kommentare und die guten Gespräche geht mein Dank an Herrn Prof. Dr. techn. Gausch.

Im Verlauf meiner Arbeiten stand mir Herr Dr.-Ing. Hedayat mit seinen langjährigen Erfahrungen im Bereich der Modellierung und Analyse von Phasenregelkreisen zur Seite. Ohne die Heranführung an das Thema der Phasenregelkreise wäre dieses Manuskript nicht entstanden. Die konstruktiven Diskussionen während der Erstellung meiner Dissertation resultierten in zahlreichen guten Ideen, die wesentlich zur Verbesserung der Lehrveranstaltung „Anwendung und Theorie von Phasenregelkreisen“ beitrugen und diese Arbeit vervollständigten. Des Weiteren möchte ich mich für die gewährten Freiräume bedanken.

Zusätzliche Unterstützung erhielt ich von allen Mitarbeitern der Abteilung ASE und

des Fachgebiets Sensorik. Das gute Arbeitsklima und das freundschaftliche Verhältnis in der Abteilung trugen zur stetigen Steigerung der Motivation bei. Speziell die Möglichkeit das Thema der nichtlinearen und nicht-idealen Phasenregelkreise „außenstehenden“ Kollegen zu veranschaulichen, verlieh der Darstellung meiner Ergebnisse eine zusätzliche Perspektive. Besonders möchte ich mich bei Lisa Mesch für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts bedanken.

Einer der im Zuge dieser Arbeit veröffentlichten Artikel behandelt das Phasenrauschen unter Berücksichtigung von nicht-idealen Effekten. Für die Zuarbeiten in Form von einer Projekt- und einer Diplomarbeit geht mein Dank an Ingo Wüllner. Des Weiteren möchte ich mich bei Tobias Vasmer und Ehsan Ali für ihre Unterstützung durch Masterarbeiten bedanken.

Ein spezieller Dank geht an Christopher Wiegand, der mich auch an das Thema der Modellierung herangeführt hat. Im Laufe meiner Arbeiten promovierte Christopher Wiegand und veröffentlichte einige wissenschaftliche Artikel, an denen ich beteiligt war.

Insbesondere danke ich meinen Eltern Werner und Julia, die mich während der gesamten Zeit unterstützten und großes Interesse an den Ergebnissen dieser Arbeit zeigten. Ein ganz großer Dank geht an meine Freundin Patrizia Held, die mich zu jeder Zeit unterstützte, mich motivierte und viel Verständnis für meine geringe Freizeit zeigte. Ohne den Rückhalt meiner Freundin, meiner Eltern und meiner Brüder wäre die Fertigstellung dieser Dissertation nicht möglich gewesen.

---

# Verwendete Symbole und Abkürzungen

---

## Typographische Kennzeichnungen

Vektoren	Kleinbuchstaben in Fettschrift	z. B. $\mathbf{x}$
Matrizen	Großbuchstaben in Fettschrift	z. B. $\mathbf{A}$
Laufindex	tiefgestelltes kursives Symbol	z. B. $N_i$
Differenz zweier Größen	vorangestelltes $\Delta$	z. B. $\Delta t$
Mittelwert einer Größe	hochgestelltes $\overline{\phantom{x}}$	z. B. $\overline{N}$
Zeitliche Ableitung	hochgestelltes $\dot{\phantom{x}}$	z. B. $\dot{x}$

## Wichtigste Symbole

### Lateinisches Alphabet

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_{\text{e}})$	nichtlineare statische Beschreibungsfunktion
$\mathbf{C}^T$	Ausgangsmatrix
$C_1$	Erste Kapazität des Schleifenfilters
$C_2$	Zweite Kapazität des Schleifenfilters

$\mathcal{C}_{-1,0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der endlichen Steigung des Stroms
$\mathcal{C}_{0,1}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der endlichen Steigung des Stroms
$\mathcal{C}_{0,-1}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der endlichen Steigung des Stroms
$\mathcal{C}_{1,0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der endlichen Steigung des Stroms
$\mathbf{D}$	Durchgriffsmatrix
$D(s)$	Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion im $s$ -Bereich
$D(z)$	Nennerpolynom einer Übertragungsfunktion im $z$ -Bereich
$\mathcal{D}_{-1,0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Totzone
$\mathcal{D}_{0,1}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Totzone
$\mathcal{D}_{0,-1}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Totzone
$\mathcal{D}_{1,0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Totzone
$\mathcal{D}_{-c,c}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Kombination aus Totzone und endlicher Steigung des Stroms
$\mathcal{D}_{c,-c}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Kombination aus Totzone und endlicher Steigung des Stroms
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
$E(t_n)$	Aufgetretenes Ereignis zum Zeitpunkt $t_n$
$f_{\text{ref}}$	Frequenz des Referenzsignals
$f_{\text{vco}}$	Frequenz des Oszillatorsignals
$f_{\text{div}}$	Frequenz des Dividierersignals
$f_{\text{vco},0}$	Ruhefrequenz des Oszillators
$f_{\text{frac}}$	Frequenz des Ausgangssignals des $\Sigma\Delta$ -Modulators
$f_{e,0}$	Initialer Frequenzfehler der Regelung
$f_e$	Frequenzfehler der Regelung
$f_t$	Zielfrequenz innerhalb der Regelung
$G_0(s)$	Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises
$H_{\text{vco}}(s)$	Übertragungsfunktion des Oszillators (lineares Modell)
$H_{\text{pd}}(s)$	Übertragungsfunktion des PFD und der Ladungspumpe (lineares Modell)

$H_{\text{DIV}}(s)$	Übertragungsfunktion des Dividierers (lineares Modell)
$H_{\text{LF}}(s)$	Übertragungsfunktion des Schleifenfilters
$i_{\text{p}}(t)$	Zeitabhängiger Strom der Ladungspumpe
$\pm I_{\text{p}}$	Stromamplitude der Ladungspumpe
$I_{\text{g}}$	Stromüberschwinger der Ladungspumpe
$I_{\text{L}}$	Leckstrom der Ladungspumpe
$\mathbf{J}(\cdot)$	Jacobi-Matrix
$J_{i,j}(\cdot)$	Einträge der Jacobi-Matrix
$K_{\text{v},\omega}$	Steigung der linearen Oszillatorkennlinie im Bezug auf die Kreisfrequenz
$K_{\text{v}}$	Steigung der linearen Oszillatorkennlinie im Bezug auf die Frequenz
$K_{\varphi}$	Proportionalglied des PFD und der Ladungspumpe (lineares Modell)
$K$	Substitutionsvariable
$N(t)$	Zeitabhängiges Teilerverhältnis
$N_{\text{i}}$	Ganzzahliger Anteil des Teilerverhältnisses
$N_{\text{f}}$	Rationaler Anteil des Teilerverhältnisses
$N$	Konstantes Teilerverhältnis
$q_{1,n}$	Internes Signal des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-Architektur
$q_{2,n}$	Internes Signal des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-Architektur
$Q$	Elektrische Ladung
$R_1$	Widerstand des Schleifenfilters
$\mathbf{r}_n$	Zustandsvektor des ereignisgesteuerten Modells des $n$ -ten Iterationsschritts
$\mathbf{r}_n^{\text{Fi}}$	Zustandsvektor des ereignisgesteuerten Modells des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$\mathcal{S}_{-1}$	Erster Zustand des PFD
$\mathcal{S}_0$	Zweiter Zustand des PFD
$\mathcal{S}_{+1}$	Dritter Zustand des PFD
$\mathcal{S}(t_n)$	Zustand des PFD zum Zeitpunkt $t_n$
$\mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Verzögerungszeiten des Multi-Modulus-Teilers

$\mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Verzögerungszeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Verzögerungszeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\mathcal{S}_{-0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Verzögerungszeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\mathcal{S}_{+0}$	Zusätzlicher Zustand des PFD zur Modellierung der Verzögerungszeiten des Multi-Modulus-Teilers
$S_x(\cdot)$	Leistungsdichtespektrum
$SFDR$	nebertonfreier Dynamikbereich (engl. <i>Spur Free Dynamic Range</i> )
$t$	Zeit
$t_0$	Anfangszeitpunkt
$T(s)$	Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises
$T_e(s)$	Fehlerübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises
$t_n$	Zeitpunkt der steigenden Flanke des $n$ -ten Iterationsschritts
$t_r$	Anstiegszeit der Regelung
$t_{Mp}$	Zeitpunkt der Überschinger des linearen Modells des Phasenregelkreises
$t_s$	Ausregelzeit des Phasenregelkreises
$t_{pn}$	Zeitpunkt des Phasenfehlernulldurchgangs des Phasenregelkreises
$t_{n+1}^{\text{ref}}$	Zeitpunkt der steigenden Flanke des Referenzsignals des $n + 1$ -ten Iterationsschritts
$t_{n+1}^{\text{div}}$	Zeitpunkt der steigenden Flanke des Dividierersignals des $n + 1$ -ten Iterationsschritts
$T_{\text{ref}}$	Periodendauer des Referenzsignals
$\Delta t$	Differenz der Zeitpunkte der steigenden Flanken des Dividierer- und Referenzsignals
$\Delta t_1$	Differenz zwischen dem Zeitpunkt der steigenden Flanke des Referenzsignals und dem vorherigen Zeitpunkt
$\Delta t_2$	Differenz zwischen dem Zeitpunkt der steigenden Flanke des Dividierersignals und dem vorherigen Zeitpunkt
$\Delta t_{n+1}$	Differenz zwischen dem aktuellen und dem vorherigen Zeitpunkt

$\Delta t_S$	Verweildauer des endlichen Automaten im vorherigen Zustand
$u_{\text{up}}(t)$	Erstes Ausgangssignal des PFD
$u_{\text{dn}}(t)$	Zweites Ausgangssignal des PFD
$u_{\text{ctl}}(t)$	Steuerspannung des Oszillators
$u_{\text{c1}}(t)$	Spannung über der ersten Kapazität des Filters
$u_{\text{div}}(t)$	Ausgangssignal des Dividierers
$u_{\text{vco}}(t)$	Ausgangssignal des Oszillators
$u_{\text{ref}}(t)$	Referenzsignal
$u_{\text{ref}}^{\uparrow}$	Steigende Flanke des Referenzsignals
$u_{\text{div}}^{\uparrow}$	Steigende Flanke des Dividierersignals
$u_{\text{ctl},n}$	Steuerspannung des Oszillators des $n$ -ten Iterationsschritts
$u_{\text{c1},n}$	Spannung über der ersten Kapazität des Filters des $n$ -ten Iterationsschritts
$u_t$	Zielspannung der Steuerspannung des VCO innerhalb der Regelung
$v_{\text{ctl},n}$	Normierte Steuerspannung des Oszillators des $n$ -ten Iterationsschritts
$v_{\text{c1},n}$	Normierte Spannung über der ersten Kapazität des Filters des $n$ -ten Iterationsschritts
$v_{\text{ctl},n}^{\text{Fi}}$	Normierte Steuerspannung des Oszillators des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$v_{\text{c1},n}^{\text{Fi}}$	Normierte Spannung über der ersten Kapazität des Filters des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$y_{1,n}$	Internes Signal des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-Architektur
$y_{2,n}$	Internes Signal des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-Architektur
$y_{3,n}$	Internes Signal des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-Architektur

## Griechisches Alphabet

Symbol	Bedeutung
$\alpha_n^{\text{Fi}}$	Substitutionsvariable im Fall $i$
$\beta_n^{\text{Fi}}$	Substitutionsvariable im Fall $i$
$\gamma$	Übergangsfunktion der Zustände des PFD

$\gamma_{\text{delay}}$	Übergangsfunktion der Zustände des PFD mit eingebrachten Laufzeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\gamma_{\text{set}}$	Endliche Steigung des Ladungspumpenstroms für den Aktivierungsfall
$\gamma_{\text{rst}}$	Endliche Steigung des Ladungspumpenstroms für den Deaktivierungsfall
$\gamma_{\text{DZ}}$	Übergangsfunktion der Zustände des PFD mit Totzone
$\Gamma(\cdot)$	Funktion für die Differenzengleichung des $\Sigma\Delta$ -Modulators (z.B. $\text{sgn}(\cdot)$ oder $\text{round}(\cdot)$ )
$\delta$	Tastverhältnis von PWM-Signalen
$\delta_n^{\text{Fi}}$	Substitutionsvariable im Fall $i$
$\zeta_{\text{ref}}(t)$	Normierte Phase des Referenzsignals
$\zeta_{\text{div}}(t)$	Normierte Phase des Oszillatorsignals
$\zeta_{\text{e}}(t)$	Normierter Phasenfehler
$\zeta_{\text{ref},n}^{\text{Fi}}$	Normierte Phase des Referenzsignals des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$\zeta_{\text{div},n}^{\text{Fi}}$	Normierte Phase des Oszillatorsignals des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$\zeta_{\text{e},n}^{\text{Fi}}$	Normierter Phasenfehler des $n$ -ten Iterationsschritts für den Fall $i$
$\zeta$	Dämpfungsbeiwert des Phasenregelkreises
$\vartheta_n$	Ausgangssignal des digitalen Integrierers im $\Sigma\Delta$ -Modulator
$\kappa_n$	Ausgangssignal des $\Sigma\Delta$ -Modulators
$\xi_n$	Substitutionsvariable
$\sigma_n^{\text{Fi}}$	Substitutionsvariable im Fall $i$
$\tau_i$	Zeitkonstanten
$\tau_{\text{set}}$	Breite der Totzone bei der Aktivierung der Signale
$\tau_{\text{rst}}$	Breite der Totzone bei der Deaktivierung der Signale
$\varphi_{\text{ref}}(t)$	Phase des Referenzsignals
$\varphi_{\text{vco}}(t)$	Phase des Oszillatorsignals
$\varphi_{\text{div}}(t)$	Phase des Dividierersignals
$\varphi_{\text{e}}(t)$	Phasenfehler zwischen dem Referenz- und Dividierersignal
$\varphi_{\text{e0}}$	Initialer Phasenfehler der Regelung



$\varphi_{e,s}$	Mittlerer statischer Phasenfehler
$\varphi_{PM}(t)$	Phasenreserve der offenen Regelschleife
$\varphi_{n,i}(t)$	Phasenrauschen im Zeitbereich
$\varphi_n^{\text{ref}}(t)$	Phasenrauschen des Referenzsignals im Zeitbereich
$\varphi_n^{\text{div}}(t)$	Phasenrauschen des Dividierersignals im Zeitbereich
$\Phi_{\text{vco}}(s)$	Phase des Oszillators im $s$ -Bereich
$\Phi_{\text{ref}}(s)$	Phase des Referenzsignals im $s$ -Bereich
$\Phi_{\text{div}}(s)$	Phase des Dividierersignals im $s$ -Bereich
$\Phi_e(s)$	Phasenfehler im $s$ -Bereich
$\Phi(t - t_0)$	Transitionsmatrix
$\psi$	Ausgangsfunktion des PFD
$\psi_{\text{delay}}$	Ausgangsfunktion des PFD mit eingebrachten Laufzeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\psi_{\text{DZ}}$	Ausgangsfunktion des PFD mit eingebrachten Laufzeiten des Multi-Modulus-Teilers
$\omega_{\text{ref}}$	Kreisfrequenz des Referenzsignals
$\omega_n$	Natürliche Eigenkreisfrequenz des Phasenregelkreises
$\omega_D$	Durchtrittskreisfrequenz des Phasenregelkreises
$\Delta\omega_{\text{PO}}$	Ausrastbereich (engl. <i>Pull-Out</i> ) des Phasenregelkreises

## Wichtigste Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
ADS	Schaltungssimulator Advanced Design System
AMS	Gemischt digital analog mit dem Fokus auf dem analogen Teil (engl. <i>Analog Mixed Signal</i> )
CDR	Takt- und Datenrückgewinnung (engl. <i>Clock and Data Recovery</i> )
CL	Geschlossener Regelkreis (engl. <i>Closed Loop</i> )
CO-CP-PLL	Stromgesteuerte CP-PLL (engl. <i>Current Operated CP-PLL</i> )
CP	Ladungspumpe (engl. <i>Charge Pump</i> )
DIV	Dividierer

DZ	Totzone (engl. <i>Dead Zone</i> )
ED	Ereignisgesteuert (engl. <i>Event Driven</i> )
IC	Integrierte Schaltung (engl. <i>Integrated Circuit</i> )
LF	Schleifenfilter (engl. <i>Loop Filter</i> )
MS	Gemischt digital analog (engl. <i>Mixed-Signal</i> )
OL	Offener Regelkreis (engl. <i>Open Loop</i> )
PD	Phasendetektor
PFD	Phasen- und Frequenzdetektor
PFD & CP	Kombination aus Phasen- und Frequenzdetektor und Ladungspumpe
PLL	Phasenregelkreis (engl. <i>Phase-Locked Loop</i> )
PSD	Leistungsdichtespektrum (engl. <i>Power Spectral Density</i> )
PVT	Prozess, Spannung und Temperatur (engl. <i>Process, Voltage and Temperature</i> )
PWM	Pulsweitenmodulation
RMS	Quadratisches Mittel (engl. <i>Root Mean Square</i> )
SFDR	nebentonfeier Dynamikbereich (engl. <i>Spur Free Dynamic Range</i> )
$\Sigma\Delta$ -Mod.	$\Sigma\Delta$ -Modulator
Sim	Simulation
TL	Transistor-Level
VCO	Spannungsgesteuerter Oszillator (engl. <i>Voltage Controlled Oscillator</i> )
VO-CP-PLL	Spannungsgesteuerte CP-PLL (engl. <i>Voltage Operated CP-PLL</i> )
XOR	exklusives Oder (engl. <i>exclusive Or</i> )

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Kurzfassung / Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Verwendete Symbole und Abkürzungen</b>	<b>vii</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation und Stand der Forschung . . . . .	1
1.2. Übersicht der Kapitel . . . . .	7
<b>2. Architektur und Funktionsweise von Phasenregelkreisen</b>	<b>9</b>
2.1. Allgemeiner Aufbau von Phasenregelkreisen . . . . .	9
2.2. Frequenzsynthese . . . . .	11
2.2.1. Integer-N CP-PLL . . . . .	12
2.2.2. Fractional-N CP-PLL . . . . .	21
2.3. Weitere PLL Architekturen . . . . .	26
2.3.1. Spannungsgesteuerte CP-PLL zur Frequenzsynthese . . . . .	26
2.3.2. Takt- und Datenrückgewinnung . . . . .	28
<b>3. Grundlegende Modellierungsansätze der CP-PLL</b>	<b>31</b>
3.1. Lineares Modell . . . . .	32
3.2. Verhaltensbeschreibung . . . . .	39
3.2.1. Simulink . . . . .	39
3.2.2. Verilog-AMS . . . . .	40
3.2.3. SystemC-AMS . . . . .	42
3.3. Ereignisgesteuerte Modellierung . . . . .	43
3.4. Vergleich der verschiedenen Modelle . . . . .	47
<b>4. Stabilität der modellierten idealen CP-PLL</b>	<b>53</b>
4.1. Stabilität des linearen zeitkontinuierlichen Modells . . . . .	54

4.2.	Stabilität des linearen zeitdiskreten Modells . . . . .	56
4.3.	Stabilität basierend auf dem Abtastverhältnis . . . . .	59
4.4.	Analytische Stabilitätsbedingung basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell . . . . .	61
4.4.1.	Herleitung autonomer Differenzengleichungen . . . . .	62
4.4.2.	Herleitung der Stabilitätsgrenze . . . . .	78
4.5.	Vergleich der Stabilitätsbedingungen . . . . .	86
4.6.	Überlastgrenze des Phasenregelkreises zweiter und dritter Ordnung	95
<b>5.</b>	<b>Modellierung der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte</b>	<b>97</b>
5.1.	Typen der Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte . . . . .	98
5.2.	Phasenrauschverhalten anhand des linearen Modells . . . . .	105
5.3.	Ereignisgesteuerte Modellierung nicht-idealer Effekte . . . . .	108
5.3.1.	Modellierung der nicht-idealen Effekte des PFD & CP Blocks	109
5.3.2.	Dividiererlaufzeiten . . . . .	121
5.3.3.	Phasenrauschen . . . . .	124
5.4.	Vergleich der Modellierungsansätze . . . . .	126
<b>6.</b>	<b>Validierung mittels Hardware-Realisierung</b>	<b>133</b>
6.1.	Aufbau der Testschaltung . . . . .	133
6.2.	Charakterisierung der einzelnen Bauelemente . . . . .	136
6.3.	Validierung der ereignisgesteuerten Modellierung . . . . .	140
<b>7.</b>	<b>Charakterisierung und Analyse der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte</b>	<b>145</b>
7.1.	Phasenrauschverhalten . . . . .	145
7.2.	Statischer Phasenfehler . . . . .	152
7.3.	Dynamisches Verhalten . . . . .	160
7.3.1.	Totzone . . . . .	160
7.3.2.	Leckstrom und Stromüberschwinger . . . . .	163
7.3.3.	Ausrastbereich . . . . .	165
7.3.4.	Durchtrittsfrequenz . . . . .	168
7.4.	Stabilität des Phasenregelkreises mit Totzone . . . . .	170
7.5.	Statistische Betrachtung der CP-PLL . . . . .	172
7.5.1.	Dynamikwechsel in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen	172
7.5.2.	Überschwinger in Abhängigkeit vom Schleifenfilterwiderstand	174
7.5.3.	PVT-Charakterisierung . . . . .	176
7.5.4.	Attraktivität zweier möglicher Ruhelagen . . . . .	177
7.6.	Robuster Systementwurf basierend auf den Charakterisierungen . .	179
7.6.1.	Entwurf anhand der Durchtrittsfrequenz und der Phasenreserve	179
7.6.2.	Entwurf anhand der natürlichen Eigenfrequenz . . . . .	181
7.6.3.	Entwurf anhand des Phasenrauschens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes . . . . .	183

<b>8. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>189</b>
<b>A. Messtechnische Aufnahme der PFD-Kennlinie</b>	<b>197</b>
<b>B. Ereignisgesteuerte Modellierungen weiterer Phasenregelkreise</b>	<b>201</b>
B.1. Spannungsgesteuerte CP-PLL . . . . .	201
B.2. Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung . . . . .	204
B.3. CP-PLL mit 5-State PFD . . . . .	206
<b>C. Digitale Schaltung zur Einrastdetektion</b>	<b>211</b>
C.1. Einrastdetektion nach Wiegand . . . . .	211
C.2. Neue Ansätze zur Einrastdetektion . . . . .	213
C.2.1. $\pi$ -Durchgang des Phasenfehlers . . . . .	213
C.2.2. Lokales Maximum des Phasenfehlers . . . . .	214
<b>D. Grafische Benutzeroberfläche</b>	<b>217</b>
<b>E. Einblick in die C++ Implementierung des ereignisgesteuerten Mo-</b>	
<b>dells</b>	<b>219</b>
E.1. Simulationsaufruf . . . . .	219
E.2. Programmablauf in C++ . . . . .	220
E.3. Konfigurationsdatei . . . . .	220
<b>F. Verilog-AMS Verhaltensmodelle der <i>Fractional-N</i> PLL</b>	<b>225</b>
<b>G. Beziehung der Determinantenmethode und der Tabellenform von</b>	
<b>Jury</b>	<b>231</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>237</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>245</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>259</b>



# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

*„Success is the progressive realization of a worthy ideal.“  
Earl Nightingale*

### 1.1. Motivation und Stand der Forschung

In den letzten Jahren nimmt die Bedeutung mobiler Kommunikation und anderer mobiler Anwendungsbereiche stetig zu. Aufgrund dieser Einsatzgebiete werden technische Komponenten energieeffizient, miniaturisiert und integriert realisiert. Ein Beispiel hierfür ist die Familie der gemischt digital analogen Systeme, die sich zudem durch die kombinierte Verwendung von digitalen und analogen Baugruppen auszeichnen. Exemplarisch seien hier der Digital-Analog-Konverter, der DC-DC-Konverter und die Phasenregelkreise genannt. Da die Charakterisierung und der Entwurf dieser Schaltungen durch die Vermischung beider Domänen Herausforderungen darstellen, ist eine präzise und effiziente Beschreibung der gemischt digital analogen Systeme von großer Bedeutung. Aus diesem Grund untersucht diese Arbeit Ansätze zur effizienten Modellierung und Charakterisierung und den robusten Entwurf von gemischt digital analogen Systemen, wobei exemplarisch die Phasenregelkreise zugrunde gelegt werden. Da sich die Ergebnisse der Modellierung auch auf andere gemischt digital analoge Anwendungen extrapolieren lassen, stellt diese Auswahl jedoch keine Einschränkung dar.

Phasenregelkreise werden unter anderem zur Frequenzsynthese, Taktsynchronisation oder für die Takt- und Datenrückgewinnung (engl. *Clock- and Data-Recovery*, kurz: CDR) in elektronischen Baugruppen verwendet [1]. Weitere Anwendungsgebiete sind beispielsweise die Modulation und Demodulation von Signalen und die Auswertung von Sensoren [2]. Ein großer Vorteil des Phasenregelkreises (engl. *Phase-*

*Locked Loop*, kurz: PLL) besteht in der Frequenzreinheit des Ausgangssignals, wodurch er speziell für die Anwendung in der Frequenzsynthese weit verbreitet ist. Innerhalb der PLL zur Frequenzsynthese wird meist ein digitaler Phasen- und Frequenzdetektor verwendet, dem eine Ladungspumpe (engl. *Charge-Pump*, kurz: CP) und ein digitaler Frequenzteiler im Rückkopplungspfad folgen. Durch die Kombination mit einem analogen Schleifenfilter mit Tiefpasscharakter und einem analogen spannungsgesteuerten Oszillator (engl. *Voltage Controlled Oscillator*, kurz: VCO) ergibt sich die gemischt digital analoge Architektur der CP-PLL, die auch *Mixed-Signal* CP-PLL genannt wird. Im Fall der CP-PLL resultiert aus dieser Architektur ein nichtlineares, schaltendes und pulswertenmoduliertes System [3]. Darüber hinaus weist der reale Phasenregelkreis eine Vielzahl von nichtlinearen und nicht-idealen Effekten auf. So sind beispielsweise der spannungsgesteuerte Oszillator durch eine nichtlineare Kennlinie definiert, der Phasendetektor durch eine Totzone beeinflusst und die Ladungspumpe mit einem Leckstrom überlagert.

Aufgrund dieser gemischt digitalen und analogen Eigenschaften sind die allgemeinen Ansätze der Systemtheorie zur Beschreibung des Systemverhaltens und zum Entwurf des Regelkreises nur bedingt anwendbar [4, 5]. Zudem werden die nicht-idealen Effekte meist nicht berücksichtigt, obwohl diese das dynamische Verhalten beeinflussen. In [3, 6, 7] werden zwar lineare zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Modelle eingeführt, jedoch basieren diese Ansätze auf einer frühen Linearisierung und weisen einen kleinen Gültigkeitsbereich auf. Darüber hinaus ist eine Charakterisierung des nichtlinearen, schaltenden und nicht-idealen Verhaltens basierend auf diesen linearen Modellen nur bedingt möglich [8]. Zwar lassen sich einige nichtlineare und nicht-ideale Effekte in der Praxis durch schaltungstechnischen Aufwand, wie in [9, 10] für eine Totzone gezeigt wird, reduzieren, jedoch ist es essentiell, den Einfluss dieser Effekte für eine genaue Systembeschreibung und einen robusten Entwurf zu charakterisieren. Hinsichtlich der Totzone konnte beispielsweise beobachtet werden, dass ihre Breite in etwa dem Peak-to-Peak-Jitter<sup>1</sup> entspricht [10, 11]. Das bedeutet, dass das Erfassen und/oder Vermeiden der Totzone gerade in rauschoptimierten Anwendungen und bei der Jitter-Vorhersage von größter Bedeutung ist. Die Totzone und weitere nicht-ideale Effekte stellen somit eine Herausforderung bezüglich des Entwurfs von gemischt digital analogen Systemen dar [5, 12].

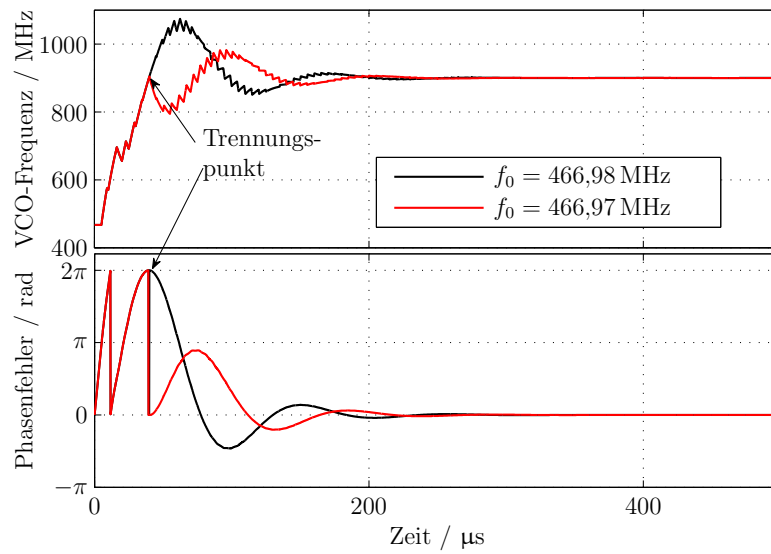
Zur Vereinfachung der Systemcharakterisierung und des Entwurfs unter Berücksichtigung nicht-idealer Effekte werden daher in der Regel Simulatoren verwendet. Die Simulationen basieren auf Transistorlevel- (z.B. Spice oder Cadence) oder Verhaltensmodellen (z.B. Verilog-AMS oder Simulink). Je nach Modellierungsaufwand ermöglichen diese Modelle eine sehr genaue Charakterisierung des Mixed-Signal Systems. Deutliche Nachteile dieser Methoden sind jedoch die lange Simulationszeit (insbesondere bei Phasenregelkreisen mit einem Nieder- und Hochfrequenzteil) [12–15], die Menge der generierten Daten und die Auslastung der Computerressourcen. Typi-

---

<sup>1</sup>Der Peak-to-Peak-Jitter beschreibt die maximale Differenz zwischen der kürzesten und längsten Periodendauer eines Jitter-behafteten periodischen Signals.



sche Simulationszeiten liegen bei mehreren Stunden, Tagen oder Wochen [13,16–18]. Des Weiteren gestaltet sich die Analyse der Simulationsdaten schwierig, da verschiedene nichtlineare und nicht-ideale Effekte nur in Kombination simuliert werden [4, 19]. Da das Verhalten eines gemischt digital analogen Phasenregelkreises zusätzlich stark von den Anfangsbedingungen abhängt, führen minimale Abweichungen dieser Initialwerte zu unterschiedlichen dynamischen Verhaltensweisen, die sich im Beispiel (siehe Abb. 1.1) durch verschiedene Überschwinger und Ausregelzeiten äußern und darüber hinaus ebenfalls die Konvergenz des Gesamtsystems beeinflussen [20].



**Abb. 1.1.:** *Dynamisches Verhalten des Phasenregelkreises bei unterschiedlichen Anfangsfrequenzen zur Verdeutlichung der Bifurkation*

Aufgrund dieser Abhängigkeiten ist eine Vielzahl von Simulationen mit Parametervariationen notwendig, um das dynamische Verhalten vollständig charakterisieren zu können. Diese Simulationen führen jedoch im präzisen Entwurfsprozess zu hohem Zeit-, Ressourcen- und Kostenaufwand. Des Weiteren fehlen meist die Modelle auf der Transistorebene, um das Gesamtsystem exakt simulieren zu können.

Für die Vereinfachung des Entwurfs des Phasenregelkreises wurde von Analog Devices das Simulationswerkzeug ADIsimPLL<sup>TM</sup> entwickelt. Es ermöglicht den Entwurf von PLL-Systemen mit IC-Komponenten<sup>2</sup> von Analog Devices. Bei diesem Simulationsansatz wird jedoch der ungünstigste Fall angenommen (*Worst-Case-Annahme*). Hier kann der Fall eintreten, dass die Anforderungen an Schaltungen für hoch präzise Anwendungen nicht erfüllt werden, obgleich eine technische Umsetzung durch

<sup>2</sup>IC bezeichnet hier eine integrierte Schaltung (engl. *Integrated Circuit*, kurz: IC).

optimierte Entwurfsverfahren realisiert werden könnte. Zudem beschränkt sich der Entwurf auf einzelne Architekturen der Frequenzsynthese, wodurch beispielsweise verschiedene Schleifenfilter sowie CDR-Anwendungen unberücksichtigt bleiben.

Entwurfswerkzeuge für gemischt digital analoge Systeme basierend auf SystemC [21] kombinieren zwar die System- mit der Schaltungsebene und beinhalten das nicht-lineare und nicht-ideale Verhalten, beruhen jedoch auf dem Abtasttheorem und können, wie die Transistorlevel-Simulationen, zu langen Simulationszeiten führen.

Zur Optimierung des Systementwurfs ist daher die schnelle Simulationsplattform CppSimulator von M.H. Perrott eingeführt worden [22, 23]. Diese Plattform basiert auf einer C++ Implementierung, wobei die Abtastzeit die Simulationszeit, speziell bei Hoch- und Niederfrequenzteilen der Schaltung, stark beeinflusst.

Ein ereignisgesteuerter Modellierungsansatz, der die Problematik der Abtastzeit nicht aufweist, wird in [24] vorgestellt. Das Konzept der ereignisgesteuerten Modellierung liefert die Möglichkeit, das nichtlineare, schaltende und pulsweitenmodulierte Verhalten des Systems äußerst effizient und mit hoher Genauigkeit zu simulieren. Gleichzeitig erlaubt das ereignisgesteuerte Modell eine sehr präzise Charakterisierung des Mixed-Signal Systems [4, 19, 24–29], wodurch sich im Vergleich zu Simulationen auf Transistor- und Verhaltensebene ein signifikanter Geschwindigkeitsgewinn ergibt. Das Prinzip der ereignisgesteuerten Modellierung liegt in der Diskretisierung des Differentialgleichungssystems (DGLS) zu den Zeitpunkten, an denen der Phasen- und Frequenzdetektor (PFD) schaltet und somit ein Ereignis aufgetreten ist [4, 19, 24, 25, 30, 31]. Dieses Prinzip ist auch in SystemC AMS mit dem *dynamic Timed-Data-Flow* umgesetzt worden [32]. Die Arbeiten von [4, 24–26] beschränken sich dabei jedoch auf die Frequenzsynthese mit PFD und einem ganzzahligen Frequenzteiler. Des Weiteren betrachten diese Arbeiten lediglich die idealen Systeme, d.h. keine nichtlinearen und nicht-idealen Effekte wie die Totzone und die Signalüberschwinger, obwohl diese die Leistungsfähigkeit des Gesamtsystems und die Konvergenz beeinflussen.

Da zudem der Filter das dynamische Verhalten des Systems maßgeblich festlegt, bestimmt gerade die Ordnung des Schleifenfilters die Komplexität des zu lösenden Differentialgleichungssystems. Für eine PLL zweiter Ordnung können Gleichungen mit analytischer Lösung bestimmt werden [24, 25]. Für Regelkreise höherer Ordnung ergibt sich im Allgemeinen eine nicht-bijektive Abbildung bezüglich der Phaseninformation und der Zeit, wodurch das Lösen der Differenzgleichungen durch nichtlineare Näherungsverfahren notwendig ist. In [19] wurde ein ereignisgesteuertes Modell einer PLL dritter Ordnung mit Ladungspumpe analysiert, wobei die Phasengleichung mit Hilfe eines Newton-Verfahrens gelöst wird. Simulationsmodelle für Filter beliebiger Ordnung innerhalb dieser Beschreibung sind ausgeblieben.

Für eine analytische Bestimmung der Systemgleichungen für Filter höherer Ordnung wurde das Konzept der Ladungsapproximation in [33–35] eingeführt. Die Intention des Verfahrens der Ladungsapproximation beruht dabei auf einer Reduktion der Modellgleichungen durch die Anwendung der Newton-Cotes-Formel. Im Folgenden lieferte die Einführung der Ladungsapproximation eine Näherungsmethode zur Be-

stimmung der Stabilitätsgrenzen des Phasenregelkreises [36, 37], wobei nichtlineare und nicht-ideale Effekte unberücksichtigt blieben.

Für die Berücksichtigung nicht-idealer Effekte wurden in [19, 38] Ansätze zur ereignisgesteuerten Modellierung der Totzone, sowie zur nichtlinearen ereignisgesteuerten Beschreibung der VCO-Charakteristik vorgestellt. In [39] wurde die Totzone im Phasenregelkreis zweiter Ordnung genauer betrachtet und in [39, 40] wurden Modellierungsansätze für weitere nicht-ideale Effekte vorgestellt. Genauere Untersuchungen der Einflüsse der nicht-idealen Effekte auf das Rauschverhalten und die dynamischen Kenngrößen des Regelkreises sowie die Betrachtung des Phasenregelkreises dritter Ordnung sind nicht durchgeführt worden.

Eine wichtige Kenngröße von Regelkreisen ist die Stabilität. Bezüglich der Stabilität des Phasenregelkreises konnte Acco in [30] das Stabilitätskriterium im Vergleich zum linearen Modell von Gardner [3] signifikant erweitern, da die Linearisierung nicht a priori vorgenommen wurde, sondern erst als das nichtlineare Modell von Paemel [25] in ein autonomes, normiertes, in den Ursprung verschobenes, nichtlineares und schaltendes Differenzengleichungssystem überführt wurde. Dadurch konnte mittels der indirekten Methode von Lyapunov die Stabilität des Equilibriums für eine CP-PLL zweiter Ordnung mit PFD untersucht werden. In [39] wurden diese Stabilitätsbetrachtungen für den Phasenregelkreis zweiter Ordnung durch die Berücksichtigung des nicht-idealen Effekts der Totzone erweitert. Dabei wurden die Fractional-N Frequenzsynthesizer, die CDR-Architekturen und weitere nicht-ideale Effekte bislang nicht mit Hilfe der ereignisgesteuerten Modellierung nach Hedayat [19, 24] oder nach Paemel [25] im Hinblick auf Stabilität betrachtet. Zwar existieren Verfahren, die das lineare Modell mit der a priori-Linearisierung charakterisieren [41–44], jedoch gehen das Schalten des Teilers und das digitale Verhalten des PFD nicht in die Betrachtung mit ein. Zudem wurde die Konvergenz in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen für Filter höherer Ordnungen nicht analysiert.

Neben den deterministischen, nicht-idealen Effekten ist das Phasenrauschverhalten der PLL speziell für die Frequenzsynthese und die Takt- und Datenrückgewinnung von großer Bedeutung. Darüber hinaus ist es essentiell, die Wechselwirkungen zwischen den deterministischen, nicht-idealen Effekten und dem Phasenrauschen zu charakterisieren und innerhalb des Systementwurfs zu berücksichtigen. Zwar wird in [22, 23, 45] im Vergleich zum Transistorlevel Simulator eine effizientere Simulationstechnik zur Vorhersage von Phasenrauschverhalten eingeführt, jedoch bleiben die deterministischen, nicht-idealen Effekte unberücksichtigt. Das ereignisgesteuerte Modell nach Hedayat realisiert eine weitere Simulationsbeschleunigung und stellt somit eine weitere Optimierung dar, wobei das Phasenrauschverhalten und weitere nicht-ideale Effekte (ausgenommen der Totzone) jedoch nicht modelliert worden sind.

Der Entwurfsprozess der CP-PLL wird durch den Entwurf konstanter Stromquellen der Ladungspumpe weiter erschwert. Einige Kommerzielle IC-Bausteine beinhalten

daher eine spannungsgesteuerte Ladungspumpe, da die Auslegung von konstanten Spannungsquellen in der Regel weniger aufwändig ist. In [46, 47] wird diese Familie der Phasenregelkreise beschrieben. Eine exakte und zugleich effiziente Modellierung des Phasenregelkreises zur Optimierung des Charakterisierungsprozesses und des Entwurfs blieb jedoch aus.

Neben den Phasenregelkreisen für die Frequenzsynthese existieren weitere Anwendungen, die auf unterschiedliche Phasendetektoren zurückgreifen und die innerhalb des ereignisgesteuerten Modellierungskonzepts nicht umgesetzt wurden. Das bedeutet, dass sich die Ergebnisse, die insbesondere von Daniels, Van Paemel und Acco berichtet werden, auf das ideale digitale Verhalten eines Phasenregelkreises mit Tri-State-PFD beschränken. Zwar konnten verschiedene Modellierungsansätze für die Klasse der Bang-Bang-Phasendetektoren angegeben werden [48–53], jedoch basieren diese Ansätze zum einen auf einer Linearisierung [49, 51] und zum anderen auf einer Quantisierungsvorschrift [50, 53, 54]. Eine exakte und zugleich effiziente Modellierung wird jedoch nicht vorgestellt.

Aufgrund der ungeklärten Fragestellungen und Herausforderungen bezüglich der hocheffizienten Modellierung, der Charakterisierung, der Analyse und des Entwurfs von gemischt digital analogen Systemen unter Berücksichtigung deterministischer, nicht-idealer und nichtlinearer Effekte und des Phasenrauschens, werden in dieser Arbeit exemplarisch für den Phasenregelkreis verschiedene Modellierungs- und Charakterisierungsansätze analysiert und neue Verfahren eingeführt. Die eingeführten Modellierungsansätze lassen sich dabei auf weitere gemischt digital analoge Systeme anwenden. Die erzielten Ergebnisse werden im Anschluss für einen optimierten, robusteren und analytischen Systementwurf des Mixed-Signal Phasenregelkreises unter Berücksichtigung der nichtlinearen und nicht-idealen Effekte und des Phasenrauschens herangezogen.

## 1.2. Übersicht der Kapitel

Diese Arbeit ist in sieben weitere Kapitel unterteilt, die im Folgenden kurz dargelegt werden.

### **Kapitel 2: *Architektur und Funktionsweise von Phasenregelkreisen***

In diesem Kapitel werden der generelle Aufbau des Phasenregelkreises und dessen Kategorien vorgestellt. Da der Phasenregelkreis für die Frequenzsynthese sehr verbreitet ist, wird die detaillierte Architektur der sogenannten Integer-N und der Fractional-N PLL dargelegt. Dabei wird auf die einzelnen Funktionsblöcke der PLL eingegangen. Neben dem Phasenregelkreis zur Frequenzsynthese werden die Funktionsweisen der PLL mit spannungsgesteuerter Ladungspumpe und der Regelschleife zur Takt- und Datenrückgewinnung erläutert.

### **Kapitel 3: *Grundlegende Modellierungsansätze der CP-PLL***

Für die Charakterisierung des Phasenregelkreises werden in diesem Kapitel verschiedene Modellierungsansätze betrachtet. Im ersten Schritt wird das lineare Modell für den zeitkontinuierlichen und den zeitdiskreten Fall eingeführt. Anhand dieser Modelle werden einige dynamische Kenngrößen des Regelkreises definiert. Für die Modellierung des schaltenden und nichtlinearen Verhaltens und die spätere Berücksichtigung nicht-idealer Effekte werden im Anschluss exemplarisch drei Verhaltensmodellierungen vorgestellt. Darüber hinaus wird das ereignisgesteuerte Modell nach Hedayat für die effiziente Modellierung erläutert, um im Anschluss die Vor- und Nachteile der betrachteten Modelle aufzuzeigen.

### **Kapitel 4: *Stabilität der modellierten idealen CP-PLL***

Zur Beurteilung der Stabilität werden meist lineare Modelle und empirische Grenzen verwendet. Dieses Kapitel führt die gängigen Methoden der Stabilitätsbetrachtung ein. Dies beinhaltet sowohl die linearen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Modelle als auch die empirische Grenze basierend auf dem Verhältnis der Referenzfrequenz und der Eigenfrequenz des Systems. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird das effiziente ereignisgesteuerte Modell zur Herleitung autonomer Differenzengleichungen der PLL dritter Ordnung verwendet. Diese ermöglichen eine Analyse der Stabilität der Ruhelage und deren Einzugsgebiet, die keine frühe Linearisierung zu Grunde legt. Im Anschluss werden die verschiedenen Methoden verglichen und die Stärken und Schwächen der Ansätze betrachtet.

### **Kapitel 5: *Modellierung der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte***

Dieses Kapitel diskutiert die Modellierung des Phasenregelkreises unter Berücksichtigung nicht-idealer Effekte. Anfangs werden die Arten der Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte vorgestellt. Hier werden

Transistor-Level Simulationen verwendet. Für die Analyse des Phasenrauschverhaltens wird zunächst das lineare zeitkontinuierliche Modell verwendet. Für die effiziente Modellierung der Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte und des Phasenrauschens wird das ereignisgesteuerte Modell nach Hedayat entsprechend erweitert und verallgemeinert, um im Anschluss diese drei Modellierungsarten gegenüberzustellen und somit das ereignisgesteuerte Modell durch Simulationen zu validieren. Darüber hinaus wird das ereignisgesteuerte Modell mit dem Transistor-Level Modell hinsichtlich Simulationsdauer und Genauigkeit verglichen.

### **Kapitel 6: *Validierung mittels Hardware-Realisierung***

Hier erfolgt die Validierung des erweiterten und verallgemeinerten ereignisgesteuerten Modells durch Messungen an einer Evaluierungsschaltung. Die einzelnen Komponenten der Schaltungen werden zunächst separat charakterisiert und deren Eigenschaften mittels der eingeführten Modellierungen in das ereignisgesteuerte Modell eingebracht. Anschließend werden die Messungen und die ereignisgesteuerte Simulation sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich beurteilt.

### **Kapitel 7: *Charakterisierung und Analyse der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte***

Nach der Validierung des erweiterten ereignisgesteuerten Modells wird dieses Simulationswerkzeug für eine umfassende Charakterisierung des nichtlinearen, nicht-idealen und schaltenden Systems verwendet. Hierbei werden die Wechselwirkungen der nicht-idealen Effekte und des Phasenrauschens aufgezeigt. Des Weiteren wird der Einfluss einer Totzone auf das dynamische Verhalten des Regelkreises analysiert und eine Beschreibung dieser Effekte eingeführt. Diese wird im Anschluss für einen optimierten und robusteren Systementwurf des Phasenregelkreises unter Berücksichtigung der Totzone zugrunde gelegt, wobei sich dieser Ansatz auch für die Berücksichtigung weiterer nicht-idealer Effekte eignet.

### **Kapitel 8: *Zusammenfassung und Ausblick***

Es erfolgen die Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten.

---

# Architektur und Funktionsweise von Phasenregelkreisen

---

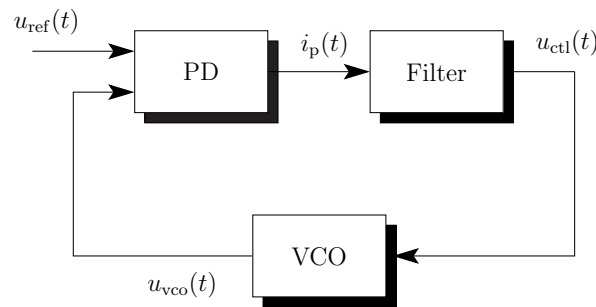
Für mobile Anwendungsgebiete sind die Frequenzsynthese, die Takt- und Datenrückgewinnung, die Rauschunterdrückung, die Taktsynchronisierung und die Modulation und Demodulation von Signalen von großer Bedeutung. Der Phasenregelkreis (PLL) lässt sich für diese Bereiche verwenden und stellt ein hochpräzises und robustes System dar, wobei verschiedene Klassen von PLLs Verwendung finden. Bei Phasenregelkreisen für die Frequenzsynthese und zur Takt- und Datenrückgewinnung handelt es sich im Allgemeinen um gemischt digital analoge Systeme, was für den Entwurf dieser Systeme eine Herausforderung darstellt. Für den Systementwurf werden daher meist Modelle und Simulationen verwendet. Im Folgenden wird das allgemeine Konzept der Phasenregelkreise vorgestellt, um im Anschluss die Funktionsweise der Frequenzsynthese und der Takt- und Datenrückgewinnung genauer zu beleuchten (basierend auf [6, 7, 55, 56]). Die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich später für die Modellbildung, die Analyse und den Entwurf dieser Regelkreise heranziehen.

## 2.1. Allgemeiner Aufbau von Phasenregelkreisen

Das Prinzip des Phasenregelkreises besteht in der Angleichung der Frequenz- und Phaseninformation eines internen steuerbaren Oszillators an ein gegebenes Referenz- bzw. Eingangssignal. Da diese Regelschleife den Frequenz- und Phasenänderungen des Eingangssignals folgt und hierfür das Steuersignal des internen Oszillators anpasst, lässt sich dieses Signal für die Demodulation der Frequenzinformationen des Eingangssignals verwenden. Für die Takt- und Datenrückgewinnung wird das Ausgangssignal des internen Oszillators als neuer Takt zugrunde gelegt, der sowohl für

die neue Abtastung der empfangenen Daten als auch für die Taktung der nachfolgenden Schaltung herangezogen wird. Bei der Frequenzsynthese ist die Frequenz des Referenzsignals in der Regel konstant. Mittels Frequenzteiler im Rückkopplungspfad lässt sich dann die  $N$ -fache Referenzfrequenz am Ausgang des internen Oszillators generieren.

Der allgemeine Aufbau des Phasenregelkreises dieser Anwendungen ist in Abb. 2.1 dargestellt. Zur Minimierung der Phasendifferenz zwischen dem Referenz- und dem



**Abb. 2.1.:** Allgemeiner Aufbau eines Phasenregelkreises

Rückkopplungssignal wird ein Phasendetektor (PD) zur Detektion des Fehlers zwischen diesen Signalen in den Phasenregelkreis eingebracht. Das Ausgangssignal des Phasendetektors beinhaltet einen Nieder- und einen Hochfrequenzanteil, sodass nachfolgend ein Schleifenfilter zur Dämpfung der hochfrequenten Signalanteile verwendet wird. Der interne Oszillator lässt sich mit Hilfe dieses gefilterten Signals steuern, wobei das sich ergebende periodische Signal auf den Phasendetektor rückgekoppelt wird. In Abb. 2.1 ist dieser allgemeine Aufbau des Phasenregelkreises dargestellt. Hierbei wird exemplarisch ein spannungsgesteuerter Oszillator (VCO) zur Generierung des periodischen Rückkopplungssignals benutzt.

Die verschiedenen Phasenregelkreise lassen sich dabei in folgende Klassen unterteilen

**LPLL** Die lineare PLL, oder präziser die analoge PLL, ist ein Phasenregelkreis, der sowohl digitale als auch analoge Komponenten aufweisen kann. Der Name der analogen bzw. linearen PLL bezieht sich dabei auf die Verwendung eines analogen Phasendetektors, zum Beispiel einen Multiplizierer. Dieser Phasendetektor weist für sehr kleine Phasenfehler zwischen dem Referenz- und dem Oszillatorsignal in erster Näherung ein lineares Verhalten auf.

**DPLL** Die digitale PLL zeichnet sich durch einen digitalen Phasendetektor aus, wobei die weiteren Komponenten dieses Regelkreises digital und analog sein können. Die PLL mit digitalem Phasendetektor weist ein schaltendes Verhalten auf, was eine Herausforderung für den Entwurf darstellt.

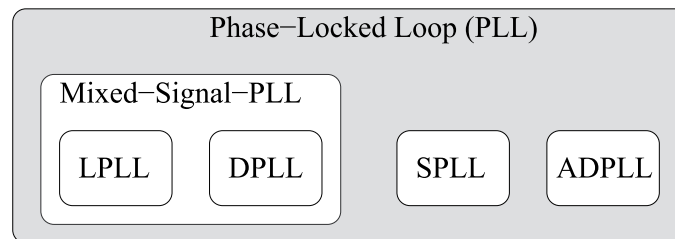
**ADPLL** Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Varianten des Phasenregelkreises beinhaltet die komplett-digitale Phasenregelschleife (engl. *All Digital PLL*,



kurz: ADPLL) lediglich digitale Bauteile.

**SPLL** Eine weitere Variante ist die Software PLL, deren Verhalten in Gänze durch Software definiert wird.

In Abb. 2.2 ist die Unterteilung der Phasenregelkreisklassen grafisch dargestellt, wobei zu erkennen ist, dass die beiden ersten Klassen der Phasenregelschleife (LPLL und DPLL) als gemischt digital analoge Systeme (engl. *Mixed-Signal Systems*, kurz MS-Systeme) bezeichnet werden. Die Analyse, die Simulation und der Entwurf sol-



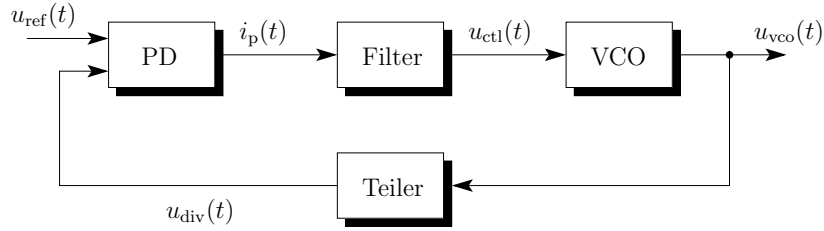
**Abb. 2.2.:** Darstellung der verschiedenen Klassen des Phasenregelkreises

cher Systeme stellen aufgrund des sowohl digitalen als auch analogen Verhaltens eine Herausforderung dar. Welche Herausforderungen sich für die gemischt digital analogen Phasenregelkreise ergeben und welche Methoden zur Beschreibung und zum Entwurf verwendet werden können, wird im weiteren Verlauf diskutiert. Zum grundlegenden Verständnis der Funktionsweise dieser Phasenregelkreise werden in den folgenden Unterkapiteln zwei wichtige Anwendungsgebiete genauer beleuchtet.

## 2.2. Frequenzsynthese

Die Frequenzsynthese stellt ein wichtiges Anwendungsgebiet für Phasenregelkreise dar und wird für die Übertragung von Daten in verschiedenen Frequenzbändern benötigt. Das Signal eines Referenzoszillators wird hierzu mit Hilfe der PLL in ein Ausgangssignal überführt, dessen Frequenz ein Vielfaches der Referenzfrequenz ist. Das Grundprinzip dieses Phasenregelkreises besteht ebenfalls in der Minimierung der Frequenz- und Phasendifferenz zwischen dem Referenz- und dem Rückkopplungssignal. Innerhalb der Frequenzsynthese wird meist eine DPLL eingesetzt, für die verschiedene Phasendetektoren existieren. Beispiele hierfür sind das exklusiv Oder (engl. *exclusive Or*, kurz: XOR), das JK-Flip-Flop und der Phasen- und Frequenzdetektor (PFD) [6], der auch Tri-State PFD genannt wird. Das XOR und der JK-Flip-Flop haben, gegenüber dem Tri-State PFD, den Vorteil eines einfacheren und kleineren Aufbaus. Nichtsdestotrotz wird der Tri-State PFD meist für die Frequenzsynthese verwendet, da dessen Charakteristik neben der Detektion des Phasenfehlers auch sensitiv für den Frequenzfehler zwischen dem Referenz- und

dem Rückkopplungssignal ist. Das Ausgangssignal dieser digitalen Phasendetektoren wird anschließend Tiefpass-gefiltert und für die Steuerung des VCO verwendet. Bei der Frequenzsynthese wird das periodische Ausgangssignal des VCO über einen Frequenzteiler/Dividierer, der ein Proportionalglied bezüglich der Phase darstellt, auf den Phasendetektor rückgekoppelt. In Abb. 2.3 ist dieser Phasenregelkreis schematisch dargestellt. Für ein Teilverhältnis verschieden von Eins lassen sich mit



**Abb. 2.3.:** Schematische Darstellung eines Frequenzsynthesizers als Phasenregelkreis

diesem Phasenregelkreis Frequenzen am Ausgang des Oszillators generieren, die ein Vielfaches der Referenzfrequenz darstellen. Die etablierten Architekturen zur Frequenzsynthese sind die *Integer-N* PLL und die *Fractional-N* PLL. Diese beiden Phasenregelkreise werden hier kurz vorgestellt.

### 2.2.1. Integer-N CP-PLL

Die *Integer-N* PLL generiert ein periodisches Ausgangssignal des Oszillators, dessen Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Referenzfrequenz ist. Zu diesem Zweck wird der Dividierer im Phasenregelkreis mit einem ganzzahligen Teilverhältnis realisiert. Bei gegebenem periodischen Referenzsignal  $u_{\text{ref}}(t)$  mit der Phase

$$\varphi_{\text{ref}}(t) = \varphi_{\text{ref},0} + 2\pi \int_{t_0}^t f_{\text{ref}}(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

generiert die *Integer-N* PLL ein periodisches Ausgangssignal  $u_{\text{vco}}(t)$  mit der Phase

$$\varphi_{\text{vco}}(t) = \varphi_{\text{vco},0} + 2\pi \int_{t_0}^t f(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau. \quad (2.2)$$

$\varphi_{\text{ref},0}$  und  $\varphi_{\text{vco},0}$  beschreiben die Anfangsphase der Signale zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $f_{\text{ref}}(t)$  ist die Frequenz des Referenzsignals.  $f(\cdot)$  symbolisiert die Abhängigkeit der Ausgangsfrequenz des Oszillators von der Steuerspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$ . Die Frequenz  $f_{\text{ref}}(t)$  ist im Fall der Frequenzsynthese konstant und für die Phase des Referenzsignals gilt

$$\varphi_{\text{ref}}(t) = \varphi_{\text{ref},0} + 2\pi f_{\text{ref}}(t - t_0). \quad (2.3)$$

Da der Phasenregelkreis den Phasenfehler

$$\varphi_e(t) = \varphi_{\text{ref}}(t) - \varphi_{\text{div}}(t) \quad (2.4)$$

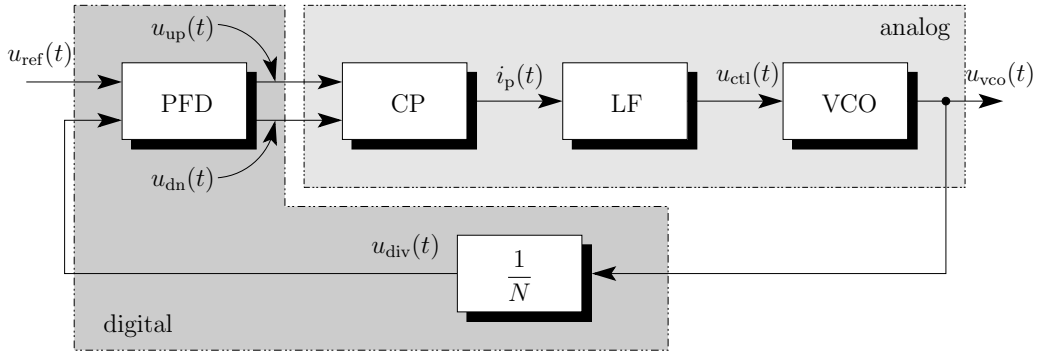
zu Null regelt und

$$\varphi_{\text{div}}(t) = \frac{1}{N} \varphi_{\text{vco}}(t) \quad (2.5)$$

gilt, stellt sich für den ausgeglichenen Zustand die Ausgangsfrequenz

$$f_{\text{vco}} = N \cdot f_{\text{ref}} \quad (2.6)$$

ein, wobei  $N$  das ganzzahlige Teilverhältnis ist und  $f_{\text{vco}}$  die Frequenz des Oszillators beschreibt. Die *Integer-N* PLL wird dabei mit zwei digitalen und drei analogen Elementen realisiert. In Abb 2.4 ist der schematische Aufbau der *Integer-N* PLL zu sehen.



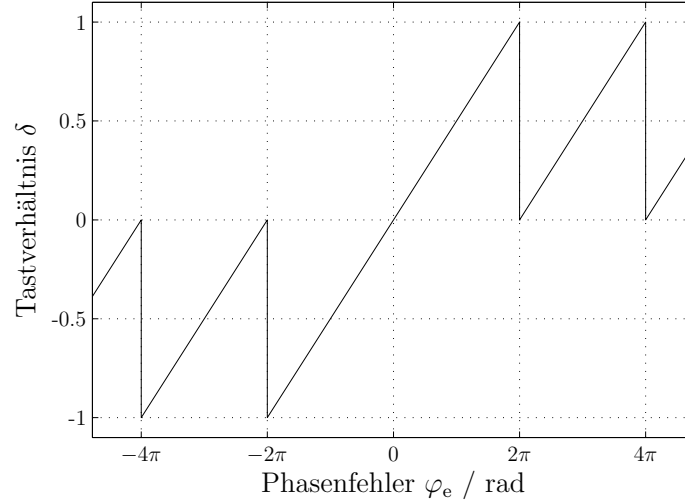
**Abb. 2.4.:** Blockschaltbild einer *Integer-N* Charge-Pump PLL

Hier ist zu erkennen, dass die *Integer-N* PLL einen flankengesteuerten Phasen- und Frequenzdetektor verwendet, dessen zwei Ausgangssignale  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$  mittels einer Ladungspumpe (engl. *Charge-Pump*, kurz: CP) in einen entsprechenden Strom  $i_{\text{p}}(t)$  umgesetzt werden. Für die Charakterisierung des Phasen- und Frequenzdetektors wird die Kennlinie mittels des Tastgrades

$$\delta = \frac{t_{\text{pulse}}}{T_{\text{ref}}} \quad (2.7)$$

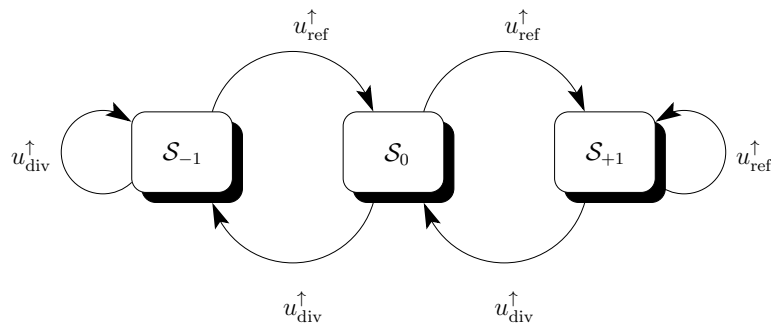
des Ausgangssignals  $u_{\text{d}} = u_{\text{up}} - u_{\text{dn}}$  und der Zeitdifferenz  $\Delta t$  zwischen den steigenden bzw. fallenden Flanken des Referenz- und Rückkopplungssignals definiert, wobei  $t_{\text{pulse}}$  die Zeitspanne des angeschalteten Signals beschreibt und  $T_{\text{ref}}$  die Referenzperiode ist. Die Zeitdifferenz zwischen den Flanken der Eingangssignale des Phasendetektors korrespondiert zum Phasenfehler dieser Signale. Da der PFD zwei Ausgangssignale bereitstellt und  $u_{\text{up}}$  für positive und  $u_{\text{dn}}$  für negative Phasenfehler

aktiv ist, wird das Tastverhältnis des UP-Signals ( $u_{\text{up}}$ ) als positiv und das Tastverhältnis des DN-Signals ( $u_{\text{dn}}$ ) als negativ aufgefasst. In Abb. 2.5 ist die sich ergebende Kennlinie dargestellt. Da diese lediglich positive Steigungen aufweist und



**Abb. 2.5.:** Kennlinie des idealen Tri-State Phasen- und Frequenzdetektors

der PFD in der Lage ist zwischen positiven und negativen Phasenfehlern zu unterscheiden, ist dieser sensitiv gegenüber Frequenzfehlern. Darüber hinaus schließt der Tri-State PFD, bei geeigneter Auslegung des Phasenregelkreises, eine Fehldetektion der Frequenz (*false locking*) aus<sup>1</sup> [15]. In Abb. 2.6 ist das Verhalten des PFD als endlicher Automat zu erkennen, wobei  $u_{\text{ref}}^{\uparrow}$  und  $u_{\text{div}}^{\uparrow}$  eine steigende Flanke im Referenz beziehungsweise Dividierersignal beschreiben. Der dargestellte endliche Automat ist



**Abb. 2.6.:** Darstellung des Verhaltens des PFD als endlicher Zustandsautomat

ein MOORE-Automat, dessen Ausgabe vom aktuellen Zustand abhängt. Somit lässt

<sup>1</sup>Eruiert der Phasendetektor eine subharmonische Frequenz der Referenzspannung, wird dies mit *false locking* bezeichnet (siehe auch Kapitel B.3).

sich der MOORE-Automat mittels eines 6-Tupels

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \gamma, \psi, \mathcal{S}_i\} \quad (2.8)$$

definieren. Hierbei gilt

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+1}\} \quad \text{Menge von Zuständen,} \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{I} = \{u_{\text{ref}}^\uparrow, u_{\text{div}}^\uparrow\} \quad \text{Eingangsalphabet,} \quad (2.9b)$$

$$\mathcal{O} = \{u_{\text{up}}(t), u_{\text{dn}}(t)\} \quad \text{Ausgangsalphabet,} \quad (2.9c)$$

$$\gamma = \quad \text{Übergangsfunktion,} \quad (2.9d)$$

$$\psi = \quad \text{Ausgabefunktion,} \quad (2.9e)$$

$$\mathcal{S}_i \in \mathcal{S} \quad \text{Anfangszustand.} \quad (2.9f)$$

Die Zustandsübergangsfunktion für den Automaten in Abb. 2.6 lässt sich durch

$$\gamma = \begin{cases} \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{falls } u_{\text{div}}^\uparrow \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{falls } u_{\text{ref}}^\uparrow \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{falls } u_{\text{div}}^\uparrow \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{falls } u_{\text{ref}}^\uparrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{falls } u_{\text{div}}^\uparrow \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{falls } u_{\text{ref}}^\uparrow \end{cases} \quad (2.10)$$

beschreiben. Die Ausgabefunktion des PFD ist mit

$$\psi = \begin{cases} u_{\text{up}}(t) = low, u_{\text{dn}}(t) = high & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \\ u_{\text{up}}(t) = low, u_{\text{dn}}(t) = low & \text{falls } \mathcal{S}_0 \\ u_{\text{up}}(t) = high, u_{\text{dn}}(t) = low & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \end{cases} \quad (2.11)$$

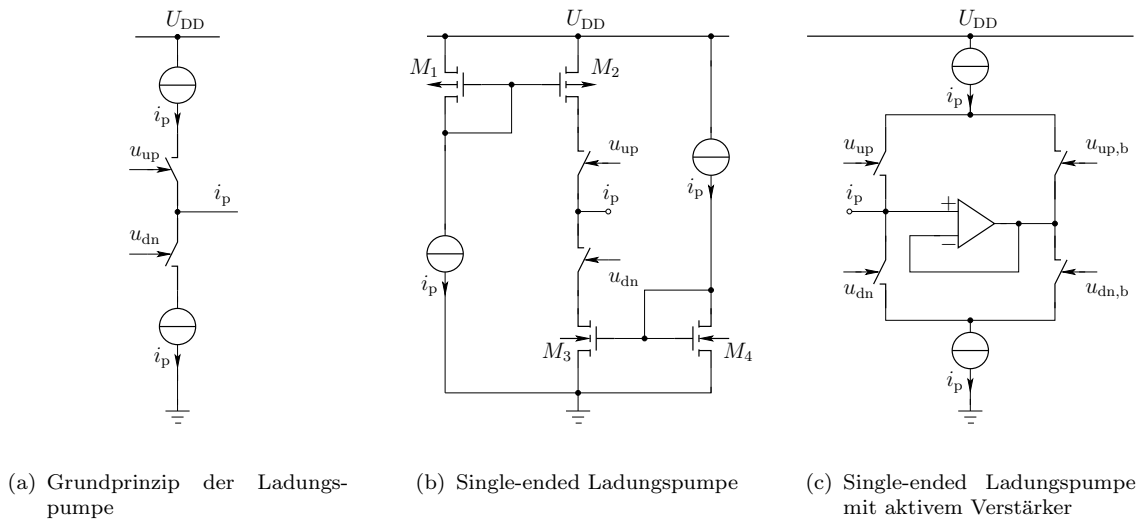
gegeben, wobei *low* den logisch inaktiven und *high* den logisch aktiven Zustand definieren.

Innerhalb der Regelung wird der PFD dazu benutzt zwei pulswidenmodulierte Signale  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$  auf Basis der steigenden Flanken von  $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$  zu generieren. Ist beispielsweise der initiale Zustand des PFD  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$  und eine steigende Flanke von  $u_{\text{ref}}(t)$  wird detektiert, wird die Frequenz des Dividierersignals  $u_{\text{div}}(t)$

als zu gering interpretiert und der Folgezustand  $\mathcal{S}_{+1}$  angenommen. In diesem Zustand gilt  $u_{\text{up}}(t) = \text{high}$  und  $u_{\text{dn}}(t) = \text{low}$ , wodurch die nachfolgende Ladungspumpe einen positiven Strom liefert, den Schleifenfilter auflädt und die Steuerspannung und somit die VCO-Frequenz anhebt. Bei erneuter Detektion einer steigenden Flanke im Referenzsignal verbleibt der endliche Automat im Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$  und erhöht die VCO-Frequenz weiter. Wird jedoch eine steigende Flanke von  $u_{\text{div}}(t)$  detektiert, ist der Folgezustand  $\mathcal{S}_0$  mit  $u_{\text{up}}(t) = \text{low}$  und  $u_{\text{dn}}(t) = \text{low}$  und die VCO-Frequenz bleibt näherungsweise konstant. Die Betrachtung für die Detektion einer steigenden Flanke bei  $u_{\text{div}}(t)$  im initialen Zustand  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_0$  ist analog zur vorangegangenen Betrachtung und ergibt den linken Zweig des endlichen Zustandsautomaten, indem die VCO-Frequenz verringert wird.

Somit detektiert der PFD den Phasen- und Frequenzfehler, regelt diese Differenzen innerhalb der Schleife zu Null und gewährleistet ein Rückkopplungssignal, das äquivalent zum Referenzsignal ist. Dies hat zur Folge, dass das Tastverhältnis  $\delta$  geringer wird und ebenfalls gegen Null strebt. Es resultiert ein punktsymmetrisches Verhalten des PFD bezüglich des Phasenfehlers, das mit Hilfe der beiden Signale  $u_{\text{up}}$  und  $u_{\text{dn}}$  eine Detektion des Phasenfehlers im Bereich von  $-2\pi$  bis  $2\pi$  ermöglicht.

Der zweite Block der Regelschleife ist die Ladungspumpe (CP), mit deren Hilfe die beiden digitalen Signale  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$  in einen Strom  $i_p(t)$  ( $i_p(t) \in \{-I_p, 0, +I_p\}$ ) umgesetzt werden. In Abb. 2.7 sind drei Modelle der Ladungspumpe dargestellt [57]. Die beiden Stromquellen und Schalter werden mit den Signalen  $u_{\text{up}}(t)$  und  $u_{\text{dn}}(t)$



**Abb. 2.7.:** Abbildung der Charge-Pump, wobei aus Gründen der Übersicht auf die Anschlüsse des Substrats verzichtet wurde. Die Substratanschlüsse der p-Kanal Transistoren sind auf  $U_{\text{DD}}$  gelegt und die der n-Kanal Transistoren auf Masse

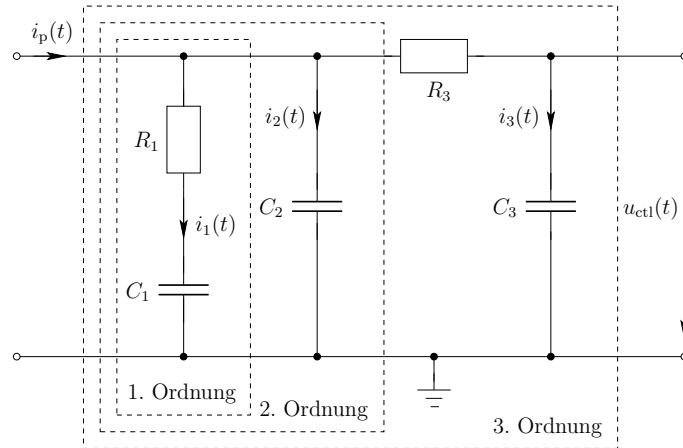
angesteuert. Bei einem logisch positiven Steuersignal wird der jeweilige Schalter

geschlossen. Das Ausgangssignal der Ladungspumpe ergibt sich somit zu

$$i_p(t) = \begin{cases} -I_p & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \\ 0 & \text{falls } \mathcal{S}_0 \\ +I_p & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \end{cases}, \quad (2.12)$$

wobei der positive Strom in Richtung des nachfolgenden Schleifenfilters fließt und dessen Kapazitäten auflädt.

Bei der Umsetzung der PWM-Signale  $u_{up}(t)$  und  $u_{dn}(t)$  in den Strom  $i_p(t)$  entstehen ein Hoch- und ein Niederfrequenzanteil. Da der spannungsgesteuerte Oszillator zur Frequenzsynthese eine niederfrequente Steuerspannung  $u_{ctl}(t)$  benötigt, ist es notwendig, den Hochfrequenzanteil von  $i_p(t)$  zu verringern. Hierzu stehen in der Literatur verschiedene Schleifenfilter zur Verfügung. Als Beispiele sind die aktiven und passiven PI-Filter und der *Lead-Lag*-Filter zu nennen [6]. Für die Frequenzsynthese werden meist die passiven Filter verwendet, da diese im Vergleich zu aktiven Filtern eine kleinere Rauschquelle darstellen und eine geringere Temperaturabhängigkeit aufweisen. Die passiven PI-Filter und *Lead-Lag*-Filter sind in Abb. 2.8 dargestellt. Ein analytischer Vergleich der passiven Filter ist in [58] durchgeführt worden. Zur



**Abb. 2.8.:** Schaltung des Schleifenfilters

Realisierung von Schleifenfiltern höherer Ordnungen wird eine Serienschaltung aus Kapazität und Widerstand kanonisch ergänzt. Eine mathematische Beschreibung der Filter lässt sich mit Hilfe der Kombination aus Maschen- und Knotengleichungen des Filters und der Bauteilgleichungen ableiten. Die sich ergebenden Differenzialgleichungen werden im Zustandsraummodell

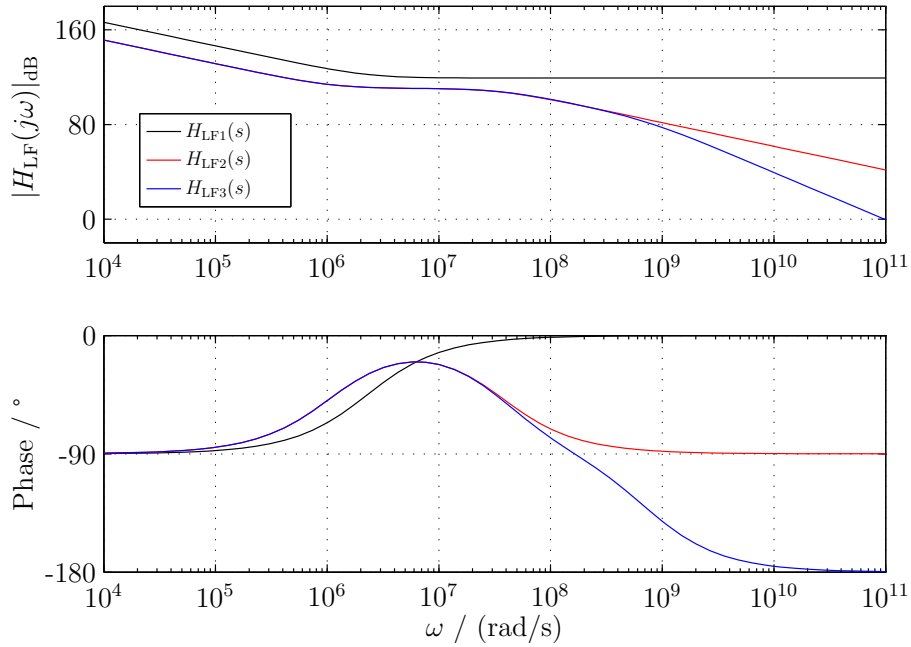
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}i_p(t) \\ u_{ctl}(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + di_p(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

zusammengefasst, wobei  $\mathbf{x}(t)$  die Kapazitätsspannungen des Filters beinhaltet. Für

den Schleifenfilter erster Ordnung resultieren die Systemmatrizen

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{1}{C_1}, \quad \mathbf{c}_1^T = 1 \quad \text{und} \quad d_1 = R_1. \quad (2.14)$$

Es ist ersichtlich, dass dieser Schleifenfilter einen Durchgriff des Eingangssignals auf das Ausgangssignal besitzt. Da der Strom  $i_p(t)$  Sprünge aufweist, beinhaltet die Steuerspannung  $u_{ctl}(t)$  ebenfalls Sprünge mit der Höhe  $\pm R_1 I_p$ . Aus diesem Grund ist es sinnvoll, Schleifenfilter höherer Ordnung einzuführen. Durch die weitere Kapazität im Schleifenfilter ergibt sich ein Zustandsraummodell mit zwei Dimensionen und ein weiterer Pol in der Übertragungsfunktion, der zu einem stärkeren Betragsabfall im Frequenzbereich führt (siehe Abb. 2.9). Mit diesem höheren Betragsabfall



**Abb. 2.9.:** BODE-Diagramme der verschiedenen Schleifenfilter

werden die hochfrequenten Anteile des Stroms stärker gedämpft. Für die Zustandsraummatrizen des Schleifenfilters zweiter Ordnung gilt

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_2} & \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d_2 = 0. \quad (2.15)$$

Offensichtlich weist der Schleifenfilter zweiter Ordnung keinen Durchgriff und somit keinen Sprung in der Steuerspannung  $u_{ctl}(t)$  auf. Für eine weitere Glättung der Steuerspannung wird der Schleifenfilter dritter Ordnung mit den Zustandsraummatrizen



$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_3 R_3} & 0 & \frac{1}{C_3 R_3} \\ 0 & -\frac{1}{C_1 R_1} & \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & \frac{1}{C_2 R_1} & -\left(\frac{1}{C_2 R_3} + \frac{1}{C_2 R_1}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{b}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

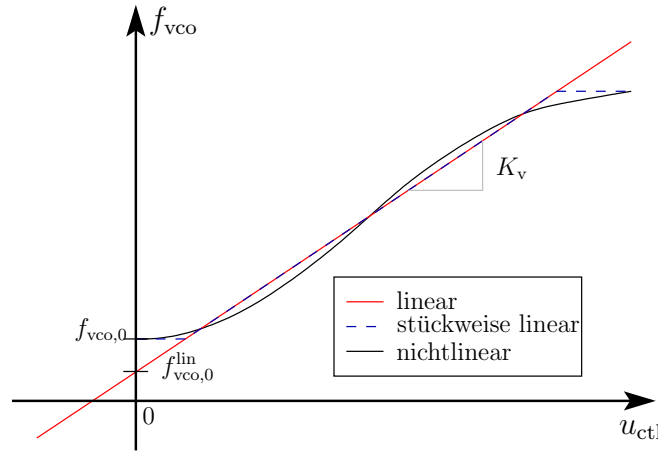
$$\mathbf{c}_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

und  $d_3 = 0$  verwendet. Die Übertragungsfunktionen der Schleifenfilter lassen sich dabei mit

$$H_{\text{LF}}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{d} \quad (2.19)$$

bestimmen, wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix bezeichnet und  $s$  die komplexe Frequenz ist.

Der vierte Block innerhalb des Phasenregelkreises ist der VCO, dessen Ausgangsfrequenz von der Ausgangsspannung des Schleifenfilters  $u_{\text{ctl}}(t)$  gesteuert wird. Die



**Abb. 2.10.:** Exemplarische lineare und nichtlineare Kennlinien des spannungsgesteuerten Oszillators

generierte periodische Ausgangsspannung des VCO besitzt eine Frequenz, die in erster Näherung proportional zur Steuerspannung ist. Somit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \varphi_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}(t) = 2\pi [f_{\text{vco},0}^{\text{lin}} + K_v u_{\text{ctl}}(t)], \quad (2.20)$$

wobei  $f_{\text{vco},0}^{\text{lin}}$  die Grundschwingung des VCO darstellt und  $K_v$  die Gewichtung der Eingangsspannung beschreibt. Für eine nichtlineare Beziehung zwischen der Steuer-

spannung und der Ausgangsfrequenz lässt sich die Phase des spannungsgesteuerten Oszillators allgemein durch

$$\varphi_{\text{vco}}(t) = \varphi_{\text{vco},0} + 2\pi \int_{t_0}^t f(u_{\text{ctl}}(\tau)) \, d\tau \quad (2.21)$$

beschreiben, wobei  $f(\cdot)$  den funktionalen Zusammenhang zwischen der VCO-Frequenz und der Steuerspannung definiert. Beispielhafte Kennlinien des VCO sind in Abb. 2.10 dargestellt.

Der im Rückkopplungsweig der PLL eingebrachte Dividierer  $1/N$  stellt für die Phase ein Proportionalglied dar und teilt die Frequenz des VCO durch den Faktor  $N$ . Somit stellt der Teiler ein periodisches Signal zur Verfügung, dessen Phase, im ausgeglichenen Zustand des Phasenregelkreises, äquivalent zu der Referenzphase ist. Durch den Dividierer besteht demnach die Möglichkeit, die Frequenz der Ausgangsspannung des VCO als ein Vielfaches der Eingangsfrequenz einzustellen. Ein Beispiel für einen solchen Dividierer ist ein Flankenzähler, der bei jeder  $N$ -ten steigenden Eingangsflanke eine steigende Ausgangsflanke generiert.

Der geschlossene Regelkreis regelt die Steuerspannung des VCO in der Art, dass im idealen Fall der Frequenz- und Phasenfehler zwischen dem Referenz- und dem Dividierersignal gleich Null sind. Exemplarische Verläufe der Schleifensignale sind in Abb. 2.11 zu sehen. Hier wird deutlich, dass sich die Regelung in drei Bereiche unterteilen lässt. Zu Beginn der Regelung, auch Ziehbereich genannt, ist der Frequenzfehler zwischen dem Referenz- und dem Rückkopplungssignal so groß, dass der Phasenfehler mehrfach den Bereich von  $\pm 2\pi$  verlässt. Da die Kennlinie des Phasen- und Frequenzdetektors keine Unterscheidung zwischen Phasenfehlern innerhalb und außerhalb des  $\pm 2\pi$ -Bereichs zulässt, werden Phasenfehler mit  $|\varphi_e| > 2\pi$  wie Differenzen mit  $-2\pi < \varphi_e < 2\pi$  interpretiert. Somit weist die PLL in diesem Bereich ein hochgradig nichtlineares Verhalten auf. Die Zeitpunkte, an denen der  $\pm 2\pi$ -Bereich verlassen wird, die PLL ausrastet und dem Referenzsignal vorerst nicht folgen kann, werden mit *Out Of Lock* bezeichnet. Sobald der Phasenfehler im Bereich  $\pm 2\pi$  verbleibt, ist die PLL eingerastet und wird mit *Locked* betitelt. Je nach Auslegung der Regelschleife treten in diesem Bereich Phasenfehlernulldurchgänge auf, die zu einem Vorzeichenwechsel im Strom der Ladungspumpe führen. Zwischen diesen Nulldurchgängen weist die Steuerspannung lokale Extrema auf, die auch als Überschwinger beschrieben werden können. Zur schaltungstechnischen Detektion der Ausrastzeitpunkte und der Überschwinger wird eine sogenannte *Lock-Detection* verwendet (siehe Anhang C). Da diese lediglich die Nulldurchgänge des Phasenfehlers detektiert, diese als Überschwinger interpretiert und daraus auf den eingerasteten Zustand der Schleife schließt, werden die Nulldurchgänge auch als Überschwinger des nichtlinearen Modells bezeichnet. Der dritte Bereich der Regelung ist nahe der Ruhelage des Systems. Hier ist der Regelkreis nahezu ausgeglichen und wird mit *Settled* beschrieben.

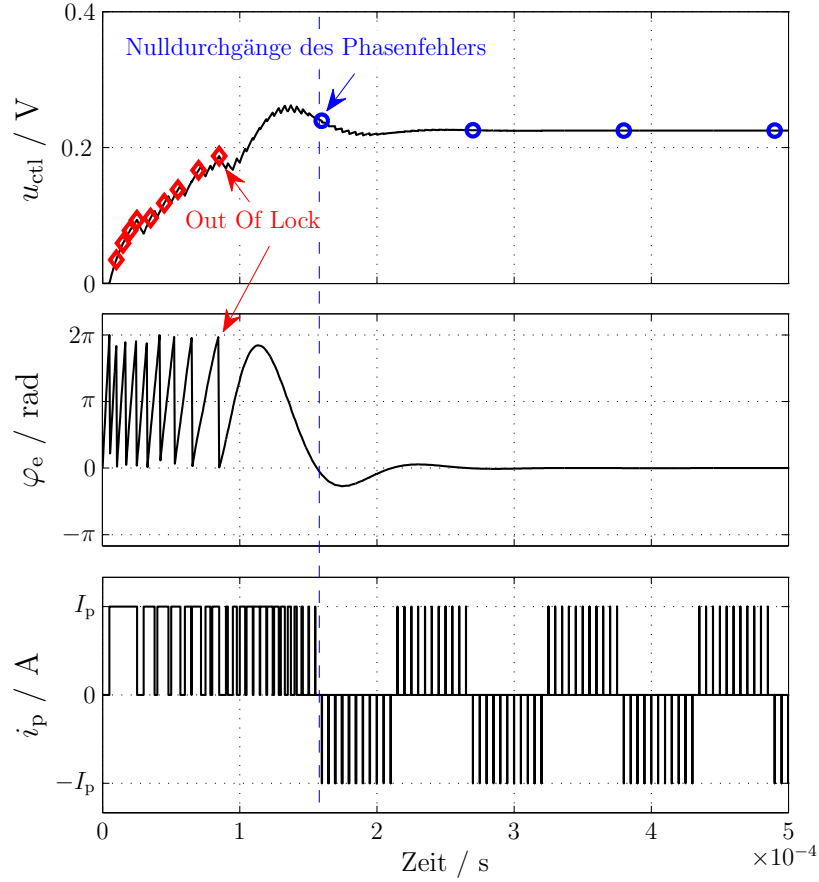


Abb. 2.11.: Exemplarische Signalverläufe des Integer- $N$  Phasenregelkreises

### 2.2.2. Fractional- $N$ CP-PLL

Die Fractional- $N$  PLL liefert die Möglichkeit, die Phase und somit auch die Frequenz eines Referenzsignals mittels eines rationalen Teilverhältnisses zu vervielfachen. Der Vorteil dieses Verfahrens zeigt sich in der technischen Anwendung. Für die drahtlose Übertragung von Informationen, zum Beispiel via Bluetooth, werden die Übertragungskanäle durch das Schalten des Teilers gewechselt ( $f_{\text{vco},1} \rightarrow f_{\text{vco},2}$ ). Ist die Kanalbreite schmalbandig, ergibt sich nach der Beziehung im ausgeregelten Zustand

$$f_{\text{vco}} = N \cdot f_{\text{ref}} \quad (2.22)$$

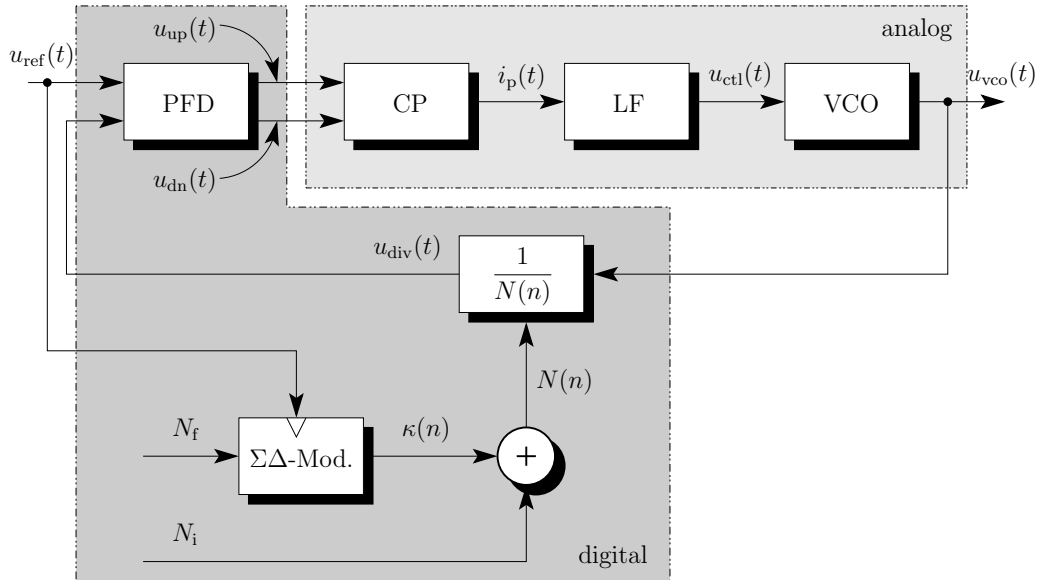
eine niedrige Referenzfrequenz  $f_{\text{ref}}$  und ein hohes Teilverhältnis  $N$ . Das hohe Teilverhältnis führt zu einer Verstärkung der im Eingangssignal vorhandenen Störungen (vgl. [59] und Kapitel 5). Ein rationales Teilverhältnis löst das Problem der niedrigen Referenzfrequenz und reduziert somit die Verstärkung der eingangsseitigen

gen Störungen.

Das Konzept einer Fractional-N PLL unterscheidet sich vom Prinzip der Integer-N PLL lediglich durch den Dividierer im Rückkopplungsweig [6,7,60]. Um ein rationales Teilverhältnis zu gewährleisten, wird in der Fractional-N PLL zum Beispiel ein Multi-Modulus-Teiler verwendet. Dieser Dividierer schaltet zwischen unterschiedlichen ganzzahligen Teilverhältnissen und stellt somit ein digitales Bauelement dar. Zur Realisierung des rationalen Teilverhältnisses ergibt sich die Bedingung

$$\overline{N} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P N(t_i) \quad (2.23)$$

für die Schaltsequenz des Multi-Modulus-Teilers. Hierbei beschreibt  $N(t_i)$  die ganzzahligen Teilverhältnisse zu den Zeitpunkten  $t_i$  und  $\overline{N}$  ist das gewünschte mittlere Teilverhältnis. Die Auslegung der Schaltsequenz beeinflusst dabei maßgeblich die Reinheit des Ausgangsspektrums des Phasenregelkreises. Bei einer periodischen Ansteuerung mit einer Frequenz  $f_{\text{frac}}$  ergeben sich Nebentöne im Spektrum, die *Fractional-Spurs* genannt werden [61] und  $f_{\text{frac}}$  von der Trägerfrequenz entfernt sind. Zur Minimierung der im Leistungsdichtespektrum unerwünschten Nebentöne ist eine geeignete Schaltung des Multi-Modulus-Teilers erforderlich. Eine entsprechende Ansteuerungsmethode ist der  $\Sigma\Delta$ -Modulator [62]. In Abb. 2.12 ist das Blockschaltbild einer Fractional-N PLL mit  $\Sigma\Delta$ -Modulator abgebildet (vgl. [7]). Hier wird der



**Abb. 2.12.:** Blockschaltbild einer  $\Sigma\Delta$ -Fractional-N Charge-Pump PLL

$\Sigma\Delta$ -Modulator durch das Referenzsignal getaktet. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den  $\Sigma\Delta$ -Modulator mit dem Ausgangssignal des Dividierers zu takten. Das Eingangswort des  $\Sigma\Delta$ -Modulators wird mit dem rationalen Teil  $N_f$  des Teilverhältnisses

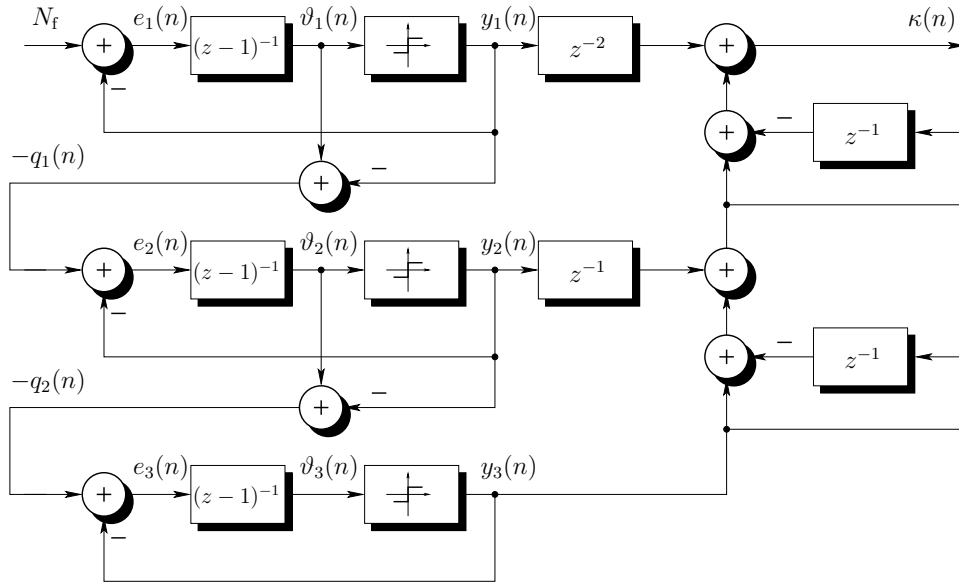
nisses beschaltet und gegebenenfalls mit mittelwertfreiem Rauschen überlagert. Anhand des Eingangsworts generiert der  $\Sigma\Delta$ -Modulator eine ganzzahlige Zahlenfolge  $\kappa(n)$ , deren Mittelwert  $N_f$  entspricht:

$$N_f = \overline{\kappa(n)} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P \kappa(n). \quad (2.24)$$

Die ganzzahlige Zahlenfolge  $\kappa(n)$  am Ausgang des  $\Sigma\Delta$ -Modulators wird additiv mit dem ganzzahligen Anteil des gewünschten Teilverhältnisses  $N_i$  überlagert:

$$N(n) = N_i + \kappa(n). \quad (2.25)$$

Für den  $\Sigma\Delta$ -Modulator existieren sowohl verschiedene Ordnungen als auch unterschiedliche Zusammenschaltungen. Die MASH-Architektur<sup>2</sup> ist beispielsweise eine Zusammenschaltung aus  $\Sigma\Delta$ -Modulatoren erster Ordnung und ist somit stets stabil, falls sich die generierten Teilverhältnisse über den Wertebereich des Quantisierers abbilden lassen. In Abb. 2.13 ist die MASH-1-1-1 Architektur mit einer Zusammenschaltung aus drei  $\Sigma\Delta$ -Modulatoren dargestellt [63]. Ein weiterer Vorteil dieser Rea-



**Abb. 2.13.:** Blockschaltbild des  $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-1-1-1 Architektur

lisierung ist das deutliche Hochpassverhalten dieses  $\Sigma\Delta$ -Modulators, wodurch das resultierende Rauschen des schaltenden Teilverhältnisses bei geeignetem Entwurf des Phasenregelkreises außerhalb der Schleifenbandbreite liegt und sich ein präzises Trägersignal generieren lässt. Für die mathematische Beschreibung lassen sich die

<sup>2</sup>Die Abkürzung MASH bedeutet *multi-stage noise shaping*.

Differenzengleichungen

$$\vartheta_i(n+1) = e_i(n) + \vartheta_i(n) \quad i \in (1,2,3) \quad (2.26a)$$

$$y_i(n) = \Gamma(\vartheta_i(n)) \quad i \in (1,2,3) \quad (2.26b)$$

$$q_i(n) = y_i(n) - \vartheta_i(n) \quad i \in (1,2,3) \quad (2.26c)$$

$$w_i(n) = \begin{cases} N_f & i = 1 \\ -q_{i-1}(n) & i \in (2,3) \end{cases} \quad (2.26d)$$

$$e_i(n) = w_i(n) - y_i(n) \quad i \in (1,2,3) \quad (2.26e)$$

angeben [63]. Die Ausgangsgröße  $\kappa(n)$  ergibt sich zu

$$\kappa(n) = y_1(n-2) + y_2(n-1) - y_2(n-2) + y_3(n) - 2y_3(n-1) + y_3(n-2). \quad (2.27)$$

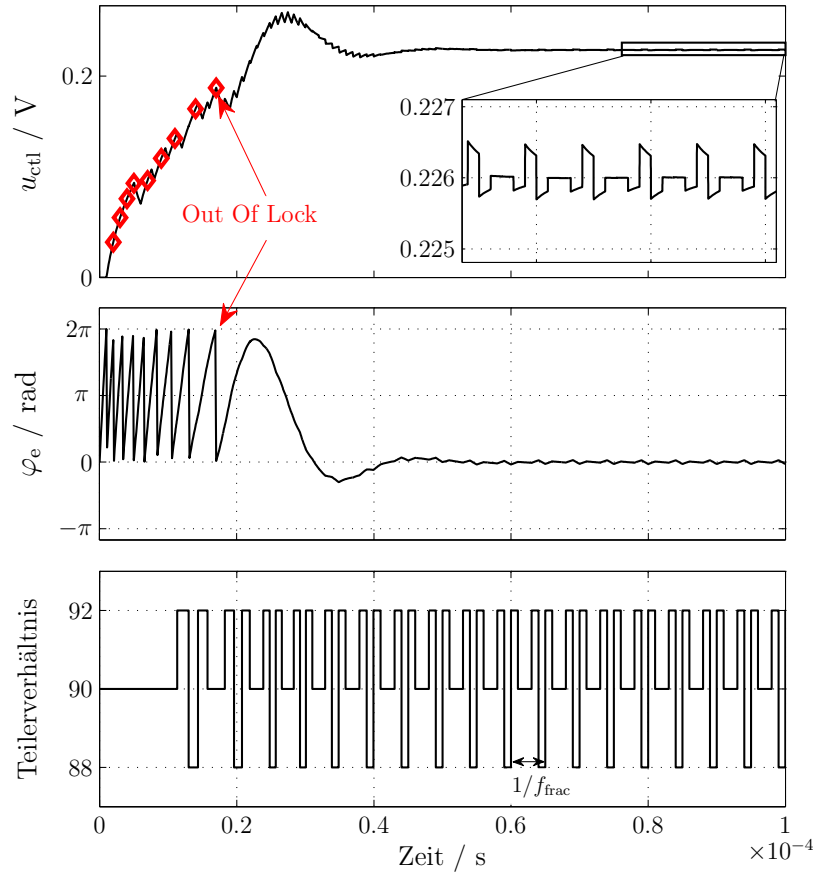
Der geschlossene Regelkreis der Fractional-N PLL verhält sich analog zum Integer-N Phasenregelkreis mit Ausnahme des schaltenden Teilverhältnisses. In Abb. 2.14 sind exemplarisch die Signale der Regelung für eine Fractional-N PLL mit konstantem Eingangswort des MASH-1-1-1  $\Sigma\Delta$ -Modulators dargestellt. Hierbei wird deutlich, dass das Schalten des Teilverhältnisses einen Einfluss auf die Regelung speziell nahe der Ruhelage aufweist. Sowohl in der Steuerspannung/VCO-Frequenz als auch im Phasenfehler sind periodische Variationen mit der Periodendauer  $1/f_{\text{frac}}$  zu erkennen, da der  $\Sigma\Delta$ -Modulator für ein konstantes Eingangswort eine periodische Schaltsequenz generiert. Für die Reduzierung dieser Einflüsse und der Periodizität, wird in der Praxis das Eingangswort des  $\Sigma\Delta$ -Modulators mit leichtem Rauschen überlagert. Darüber hinaus wird der Phasenregelkreis mit  $\Sigma\Delta$ -Modulator so ausgelegt, dass das schaltende Teilverhältnis nur zu geringen Variationen der VCO Frequenz führt. Für den Vergleich beider Varianten im Frequenzbereich lässt sich das Leistungsdichtespektrum

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.28)$$

heranziehen, wobei

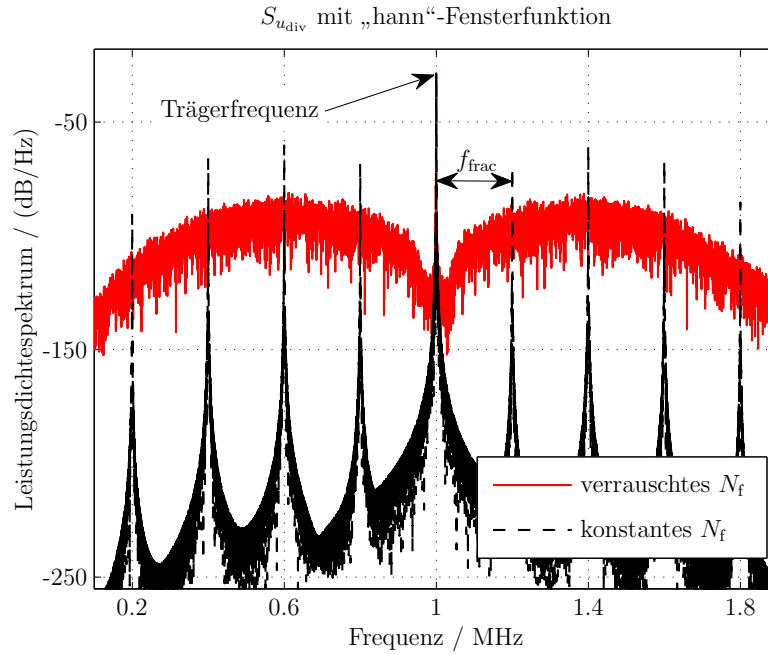
$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_w \rightarrow \infty} \frac{1}{T_w} \int_{-T_w/2}^{T_w/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt \quad (2.29)$$

die Autokorrelationsfunktion beschreibt und  $x$  in diesem Fall mit  $u_{\text{div}}$  korrespondiert. Des Weiteren ist  $T_w$  das betrachtete Zeitfenster. Abb. 2.15 zeigt das Leistungsdichtespektrum der Fractional-N PLL sowohl für ein verrauschtes als auch ein konstantes Eingangswort des  $\Sigma\Delta$ -Modulators. Die in diesem Spektrum sichtbaren Nebentöne, deren Abstände zur Trägerfrequenz ein Vielfaches von  $f_{\text{frac}}$  betragen,



**Abb. 2.14.:** Exemplarische Signalverläufe des Fractional-N Phasenregelkreises mit konstantem Eingangswort des  $\Sigma\Delta$ -Modulators der MASH-1-1-1 Architektur

lassen sich durch ein verrauschtes Eingangssignal des  $\Sigma\Delta$ -Modulators verringern. Für ein verrauschtes Eingangssignal des  $\Sigma\Delta$ -Modulators ist das Hochpassverhalten der MASH-Architektur deutlich zu erkennen. Dieses Hochpassverhalten ermöglicht die Frequenzreinheit der Trägerfrequenz.



**Abb. 2.15.:** Exemplarische Darstellung des Leistungsdichtespektrums des Ausgangssignal des Dividierers einer Fractional-N PLL mit sowohl konstantem als auch verrauschtem (Varianz  $\sigma = 10^{-6}$ ) Eingangswort des  $\Sigma\Delta$ -Modulators der MASH-1-1-1 Architektur

### 2.3. Weitere PLL Architekturen

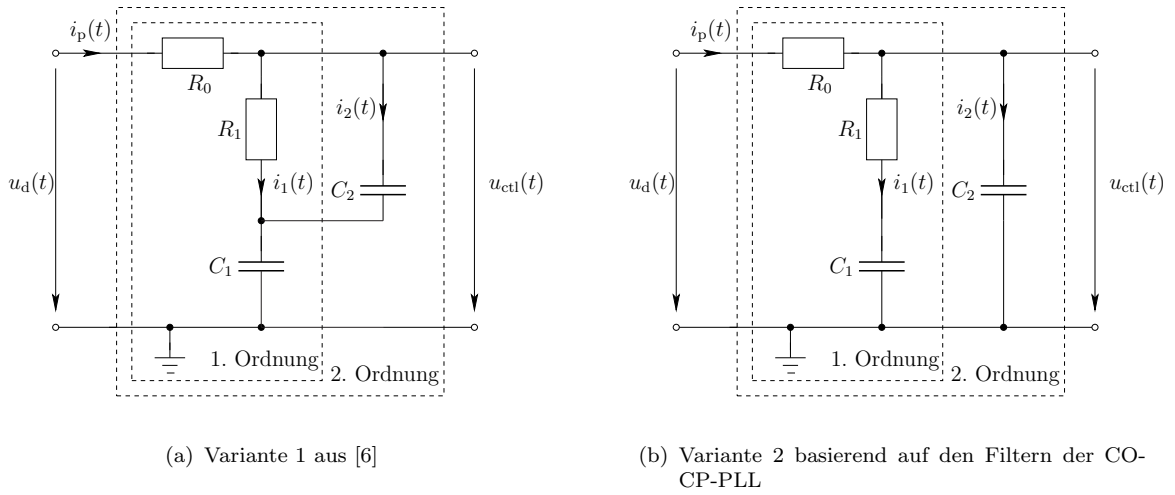
Neben der bereits vorgestellten stromgesteuerten CP-PLL zur Frequenzsynthese existieren noch andere Architekturen des Mixed-Signal Phasenregelkreises. In diesem Kapitel werden zwei weitere und weit verbreitete Varianten vorgestellt. Zunächst wird eine Abwandlung des Regelkreises für die Frequenzsynthese dargestellt, der anstelle der konstanten Stromquellen in der Ladungspumpe konstante Spannungsquellen verwendet. Dies bietet den Vorteil einer einfacheren Implementierung, beschränkt jedoch das dynamische Verhalten. Des Weiteren wird die Verwendung des Phasenregelkreises für die Takt- und Datenrückgewinnung beleuchtet, da dieses Anwendungsgebiet neben der Frequenzsynthese eine wichtige Rolle in der drahtlosen Kommunikation spielt.

#### 2.3.1. Spannungsgesteuerte CP-PLL zur Frequenzsynthese

In einigen kommerziell erhältlichen Phasenregelkreisen wird anstatt der stromgesteuerten (siehe Abb. 2.7(a)) eine spannungsgesteuerte Ladungspumpe verwendet (z.B. die 4046 PLL Familie). Diese Ladungspumpe weist keine Stromquellen auf, sondern verbindet jeweils eins der zwei Spannungsversorgungspotentiale über zwei Schalter mit dem nachgeschalteten Schleifenfilter. Diese Variante der CP-PLL hat

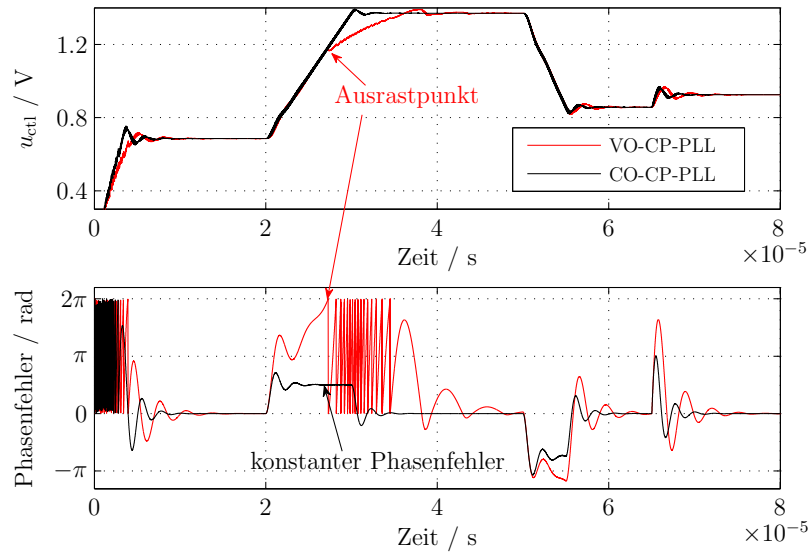


den Vorteil, dass der Entwurf von konstanten Spannungsquellen weniger aufwändig ist als die Auslegung von konstanten Stromquellen [46, 56]. Somit lassen sich die Kosten innerhalb der Entwurfsphase reduzieren. Lediglich ein weiterer Widerstand wird für den Schleifenfilter erforderlich, um das Potential der Ausgangsspannung  $u_d(t)$  der Ladungspumpe vom Eingang des spannungsgesteuerten Oszillators zu trennen. Der Schleifenfilter aus [6] ist in Abb. 2.16(a) zu sehen, wobei  $R_0$  die Trennung der Potentiale realisiert. Eine weitere Variante basiert auf den Schleifenfiltern der stromgesteuerten CP-PLL und ist in Abb. 2.16(b) dargestellt. Hier wird ebenfalls  $R_0$  für die Trennung der Potentiale verwendet. Beide Varianten weisen bei gleichen Bauteilparametern lediglich kleine Unterschiede in der Durchtrittsfrequenz des geschlossenen Regelkreises auf. Die konstanten Spannungsquellen der Ladungspumpe



**Abb. 2.16.:** Elektrische Ersatzschaltbilder der verwendeten Schleifenfilter für die spannungsgesteuerte CP-PLL

generieren einen variierenden Strom  $i_p(t)$ , dessen Amplitude von den Ladungen auf den Kapazitäten des Schleifenfilters abhängt. Dies kann dazu führen, dass der resultierende Strom zu Beginn der Regelung größer als der Strom der konventionellen stromgesteuerten CP-PLL (engl. *Current Operated CP-PLL*, kurz: CO-CP-PLL) ist. Im weiteren Verlauf nimmt der Strom der spannungsgesteuerten CP-PLL (engl. *Voltage Operated CP-PLL*, kurz: VO-CP-PLL) mit steigenden Kapazitätsspannungen ab. Die somit variierende Schleifenverstärkung beeinflusst das dynamische Verhalten des Regelkreises und führt zu einem asymmetrischen Verhalten, falls die Zielspannung ungleich der halben Versorgungsspannung ist. In Abb. 2.17 ist exemplarisch eine Frequenzsynthese mit Referenzfrequenzsprüngen und -rampen dargestellt. Der Vergleich der strom- und spannungsgesteuerten Phasenregelkreise zeigt, dass die spannungsgesteuerte PLL nur bedingt in der Lage ist, den Frequenzrampen zu folgen. Da der Phasenfehler während der Frequenzrampe stetig größer wird, rastet der Phasenregelkreis aus (siehe Abb. 2.17) [64]. Dies schließt die VO-CP-PLL beispiels-

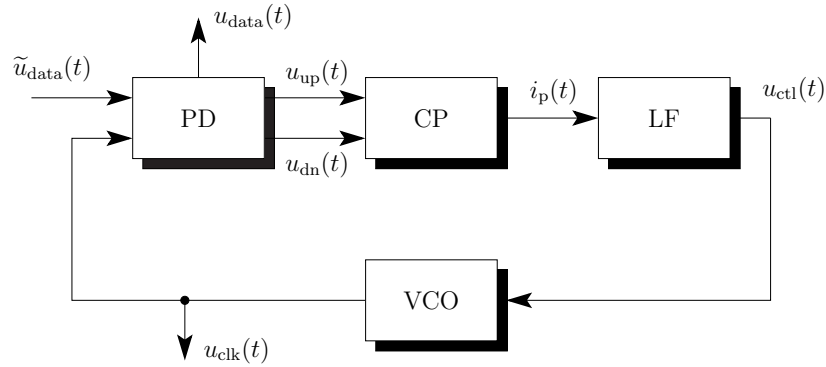


**Abb. 2.17.:** Vergleich der Dynamik des strom- und spannungsgesteuerten Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese

weise für Radaranwendungen aus. Eine weitere nichtlineare Eigenschaft der VO-CP-PLL stellt das asymmetrische Verhalten der Regelung für eine Zielspannung ungleich der halben Versorgungsspannung dar. Die somit enthaltenen verschiedenen Schleifenverstärkungen führen zu unterschiedlichen Voraussetzungen bei der Stabilitätsbetrachtung und der Phasenrauschenanalyse und zu verschiedenen natürlichen Eigenfrequenzen des Systems innerhalb des Auflade- und Entladeprozesses des Schleifenfilters [65]. Die weiteren dynamischen Betrachtungen dieses Systems sind sehr ähnlich zur Charakterisierung und Analyse des Phasenregelkreises mit stromgesteuerter Ladungspumpe und stehen daher nicht im Fokus dieser Arbeit. Detaillierte Erläuterungen der Architektur und Funktionsweise der spannungsgesteuerten CP-PLL sind in [6, 46, 47] zu finden.

### 2.3.2. Takt- und Datenrückgewinnung

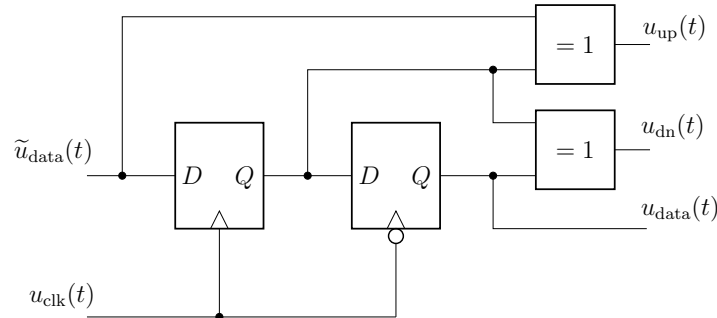
In der Kommunikationstechnik wird der Phasenregelkreis auch für die Takt- und Datenrückgewinnung eingesetzt. Die verrauschten Takt- und Datensignale lassen sich somit im Empfänger wieder herstellen und im weiteren Verlauf bereinigt verwenden [55]. Das empfangene Datensignal wird bei diesen Phasenregelkreisen als Referenzsignal zugrunde gelegt. Aus diesen Daten, die zum Teil mit Jitter überlagert sind, extrahiert die PLL den Takt. Dieses bereinigte Taktsignal weist eine konstante Frequenz auf und lässt sich für die neue Abtastung der empfangenen Daten benutzen, sodass das aufgefrischte Datensignal synchron zum extrahierten Takt ist. Dieser Regelkreis ist bis auf den Phasendetektor analog zur CP-PLL der



**Abb. 2.18.:** Blockschaltbild eines Phasenregelkreises zur Takt- und Datenrückgewinnung

Frequenzsynthese aufgebaut. Die Abb. 2.18 zeigt den schematischen Aufbau dieses Phasenregelkreises [55]. Die mit Jitter behafteten empfangenen Daten  $\tilde{u}_{data}(t)$  werden im speziellen Phasendetektor zur Takt- und Datenrückgewinnung mit dem Taktsignal der Regelschleife  $u_{clk}(t)$  abgeglichen. Die detektierte Differenz wird analog zur CP-PLL für die Frequenzsynthese in zwei entsprechende Ausgangssignale zur Steuerung der Ladungspumpe überführt. Die Frequenz des VCO-Signals wird schließlich in der Art geregelt, dass dieser erzeugte Takt zum Eingangsdatensignal korrespondiert. Das zeitlich neu abgetastete Datensignal  $u_{data}(t)$  und der entsprechende Takt  $u_{clk}(t)$  werden als Ausgangssignale des Phasenregelkreises an die nachfolgenden Schaltungen weitergegeben.

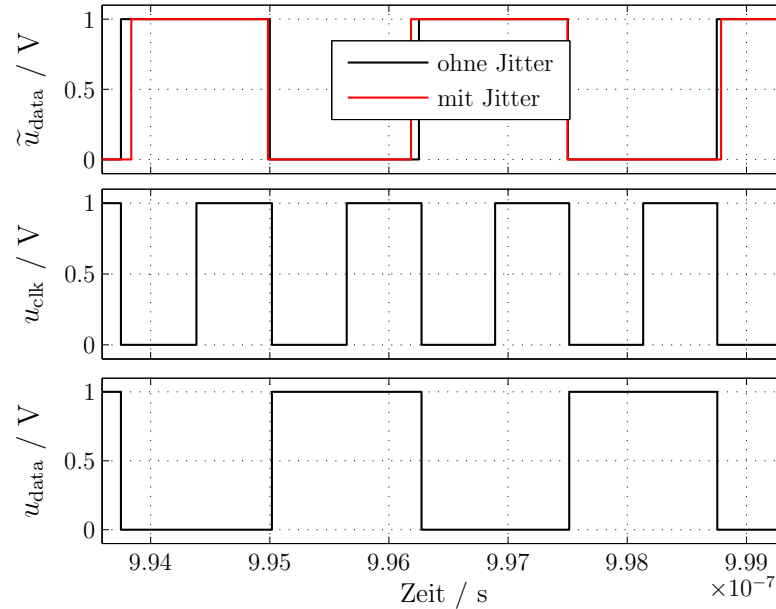
Für den Phasendetektor zur Takt- und Datenrückgewinnung eignet sich speziell der Hogge-Phasendetektor [55,66], der in Abb. 2.19 dargestellt ist. Dieser Phasendetek-



**Abb. 2.19.:** Blockschaltbild des Hogge-Phasendetektors für den Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung

tor ist, wie auch der Phasen- und Frequenzdetektor, flankengesteuert. In Abb. 2.20 sind exemplarische Signalverläufe dieses Phasenregelkreises gezeigt. Das zugrunde liegende Datensignal ist in der oberen Achse in schwarz dargestellt, wobei das mit Jitter behaftete Referenzdatensignal des Phasenregelkreises rot ist. Der Phasenregelkreis ist in der Lage, den Takt aus dem Jitter behafteten Datensignal zu extrahieren und ein zeitlich aufbereitetes Datensignal entsprechend dem rekonstruierten Takt

zur Verfügung zu stellen (siehe die unteren beiden Achsen), wobei die D-Flip-Flops in diesem Beispiel durch fallende Flanken der Signale getriggert werden. Lediglich



**Abb. 2.20.:** Exemplarische Darstellung der Signalverläufe der Phasenregelschleife zur Takt- und Datenrückgewinnung

die zeitliche Verzögerung des rekonstruierten Datensignals fällt auf, wobei dieser Zeitversatz im Vergleich zum Jitter eine untergeordnete Rolle in der Kommunikationstechnik spielt. Über dieses Beispiel hinaus ist der Phasenregelkreis mit dem Hogge-Phasendetektor in der Lage, beliebige Bitfolgen zu verarbeiten.

Zwar ist das Anwendungsgebiet dieses Phasenregelkreises von der Frequenzsynthese verschieden, dennoch sind die Charakterisierungs- und Analyseansätze aufgrund der Ähnlichkeit der Phasendetektoren vergleichbar zur CP-PLL.

---

# Grundlegende Modellierungsansätze der CP-PLL

---

*„Models Simplify the World.“*

Für die Charakterisierung und Analyse der Mixed-Signal Phasenregelkreise lassen sich analytische oder numerische Modellierungsansätze verwenden. Den analytischen linearen Modellen liegt eine a priori Linearisierung zugrunde, sodass sich eine mathematische Darstellung des mittleren Verhaltens ergibt. Diese eignet sich für eine schnelle Beurteilung des Systemverhaltens nahe der Ruhelage, jedoch lassen sich der schaltende Charakter und das nichtlineare und nicht-ideale Verhalten des Mixed-Signal Systems durch die Linearisierung kaum abbilden. Aus diesem Grund werden oft Verhaltensmodelle für die Beschreibung verwendet, die durch numerische Simulationsverfahren gelöst werden. Diese Ansätze ermöglichen eine Berücksichtigung von nichtlinearen und nicht-idealen Effekten, weisen jedoch einen abtastzeitbezogenen Lösungsansatz auf, der unter Umständen zu langen Simulationszeiten führt. Für eine zeit- und ressourceneffiziente Modellierung des Mixed-Signal Phasenregelkreises bietet sich ein ereignisgesteuertes Modell an, das lediglich die Zeitpunkte der steigenden oder fallenden Flanken des Referenz- bzw. Rückkopplungssignals berechnet. Dieses Verfahren stellt somit einen Lösungsansatz mit variierenden Abtastzeitpunkten dar, wobei diese Zeitpunkte direkt durch das Verhalten des Mixed-Signal Systems vorgegeben werden.

Im Folgenden werden diese drei verschiedenen Modellierungsansätze des Mixed-Signal Phasenregelkreises vorgestellt. Darüber hinaus werden deren Genauigkeiten und Simulationszeiten miteinander verglichen und beurteilt. Diese Untersuchungen werden exemplarisch für die stromgesteuerte CP-PLL zur Frequenzsynthese gezeigt, wobei sich die Ergebnisse leicht auf die Anwendungen der spannungsgesteuerten

CP-PLL, der Takt- und Datenrückgewinnung und der PLL mit weiteren Phasendetektoren übertragen lassen (vgl. Anhang B).

## 3.1. Lineares Modell

Zur Herleitung des linearen Modells wird der Phasenregelkreis in einem Arbeitspunkt nahe der Ruhelage betrachtet, sodass der Phasenfehler innerhalb der Regelung im Schlauch  $\pm 2\pi$  verbleibt. In diesem Fall lassen sich die einzelnen Funktionsblöcke bezüglich der Phaseninformation der Signale linearisieren [6]. Die Darstellung der periodischen Signale mittels deren Phaseninformationen ist sinnvoll, da der Phasenregelkreis lediglich für die Phaseninformationen sensitiv ist und die Amplitudengrößen eine untergeordnete Rolle spielen.

Die Kennlinie des Phasen- und Frequenzdetektors ist für Phasenfehler zwischen  $\pm 2\pi$  linear (siehe Abb. 2.5). Für diesen Bereich lässt sich die Kombination aus PFD und Ladungspumpe (kurz: PFD & CP Block) wie folgt linearisieren [3]. Wird der resultierende Strom der Ladungspumpe jeweils über eine Periode des Referenzsignals  $T_{\text{ref}}$  integriert und diese Ladung auf die gesamte Periode gleich verteilt, lässt sich im Mittel die Beziehung zwischen Phasenfehler und Strom durch

$$i_p(t) = \frac{I_p}{2\pi} \varphi_e(t) \quad (3.1)$$

beschreiben. Die Kombination aus PFD und Ladungspumpe stellt somit ein Proportionalglied

$$K_\varphi = \frac{I_p}{2\pi} \quad (3.2)$$

bezüglich der Phase sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich dar.

Das lineare Modell des spannungsgesteuerten Oszillators ergibt sich aus dessen Phasenbeschreibung

$$\varphi_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco},0} t + 2\pi K_v \int_0^t u_{\text{ctl}}(\tau) d\tau + \varphi_{\text{vco},0}, \quad (3.3)$$

wobei ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Steuerspannung und der VCO-Frequenz zugrunde gelegt wird. Für die Linearisierung wird sowohl die Grundkreisfrequenz  $\omega_{\text{vco},0}$  als auch die Anfangsphase  $\varphi_{\text{vco},0}$  als Null angenommen. Somit stellt der VCO bezüglich der Phase einen reinen Integrierer mit der Verstärkung  $2\pi K_v$  dar. Die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich ergibt sich zu

$$H_{\text{vco}}(s) = \frac{K_{v,\omega}}{s} = \frac{2\pi K_v}{s}, \quad (3.4)$$

wobei  $s$  die komplexe Frequenz ist.

Der Frequenzteiler im Rückkopplungspfad ist ebenfalls ein reines Proportionalglied bezüglich der Phaseninformation und die Übertragungsfunktion ist durch

$$H_{\text{DIV}}(s) = \frac{1}{N} \quad (3.5)$$

gegeben. Mit der Übertragungsfunktion des Schleifenfilters (siehe Gleichung (2.19)) sind alle Blöcke in ein lineares Modell überführt und es ergibt sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$G_0(s) = \frac{K_{v,\omega} K_\varphi}{N s} H_{\text{LF},i}(s). \quad (3.6)$$

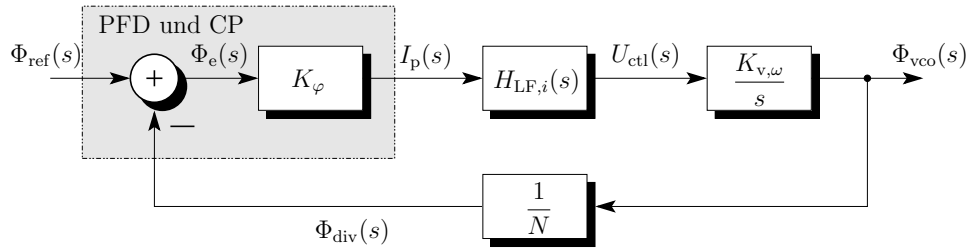
Der geschlossene Regelkreis ist in Abb. 3.1 zu erkennen, wobei sich die Übertragungsfunktion zu

$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\Phi_{\text{div}}(s)}{\Phi_{\text{ref}}(s)} \quad (3.7)$$

und schließlich zu

$$T(s) = \frac{K_{v,\omega} K_\varphi H_{\text{LF},i}(s)}{N s + K_{v,\omega} K_\varphi H_{\text{LF},i}(s)} \quad (3.8)$$

ergibt. Hierbei sind  $\Phi_{\text{div}}(s)$  und  $\Phi_{\text{ref}}(s)$  die Laplace-Transformierten der Zeitsignale  $\varphi_{\text{div}}(t)$  und  $\varphi_{\text{ref}}(t)$ . Wird der geschlossene Regelkreis mit einem Schleifenfilter erster



**Abb. 3.1.:** Blockschaltbild des linearen Modells des Phasenregelkreises

Ordnung betrachtet, lässt sich die Normalform des linearen Modells des Phasenregelkreises wie folgt definieren [6]

$$T(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (3.9)$$

Hierbei stellt

$$\zeta = \frac{1}{2} \omega_n \tau_1 \quad (3.10)$$

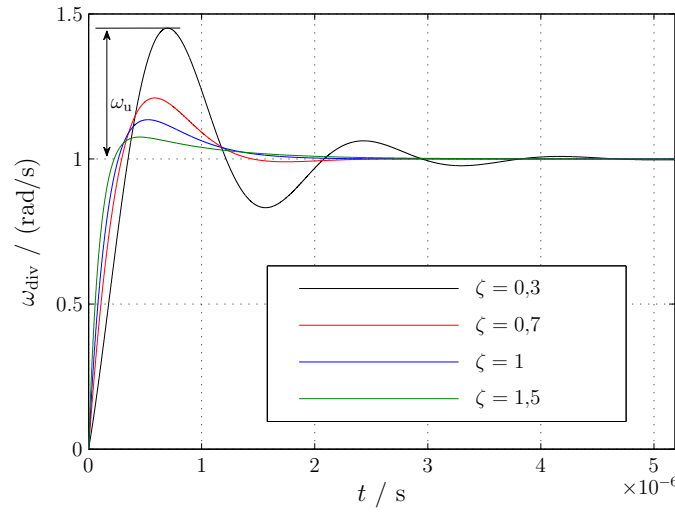
den Dämpfungsbeiwert des Systems dar und

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{v,\omega} K_\varphi}{NC_1}} \quad (3.11)$$

ist die natürliche Eigenkreisfrequenz des Regelkreises. Des Weiteren ist  $\tau_1 = R_1 C_1$  die Zeitkonstante des Schleifenfilters erster Ordnung. Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Phasenregelkreises lässt sich sowohl für die Phaseninformationen  $\Phi_{\text{ref}}(s)$  und  $\Phi_{\text{div}}(s)$  als auch für die Frequenzsignale  $\Omega_{\text{ref}}(s)$  und  $\Omega_{\text{div}}(s)$  im Frequenzbereich verwenden

$$T(s) = \frac{\Phi_{\text{div}}(s)}{\Phi_{\text{ref}}(s)} = \frac{\frac{1}{s}\Omega_{\text{div}}(s)}{\frac{1}{s}\Omega_{\text{ref}}(s)} = \frac{\Omega_{\text{div}}(s)}{\Omega_{\text{ref}}(s)}. \quad (3.12)$$

$\Omega_{\text{div}}(s)$  und  $\Omega_{\text{ref}}(s)$  beschreiben die Kreisfrequenzen  $\omega_{\text{div}}(t)$  und  $\omega_{\text{ref}}(t)$  im Frequenzbereich. In Abb. 3.2 sind exemplarisch vier Kreisfrequenzsprungantworten für einen Sprung der Höhe  $\Delta\omega = 1 \text{ rad/s}$  für verschiedene  $\zeta$  dargestellt. In dieser Abbildung



**Abb. 3.2.:** Verlauf der Sprungantworten des linearen Modells des Phasenregelkreises in Abhängigkeit von  $\zeta$

ist für  $\zeta = 0,3$  sowohl der exponentielle Abfall der Schwingung als auch der Überschwinger  $\omega_u$  deutlich zu erkennen. Mit zunehmendem  $\zeta$  vergrößert sich die Dämpfung, sodass die Schwingung schneller abklingt und das Überschwingen geringer wird. Nach Transformation der Normalform im Frequenzbereich (Gleichung (3.9)) in den Zeitbereich ist dies auch im mathematischen Ausdruck für die Sprungantwort



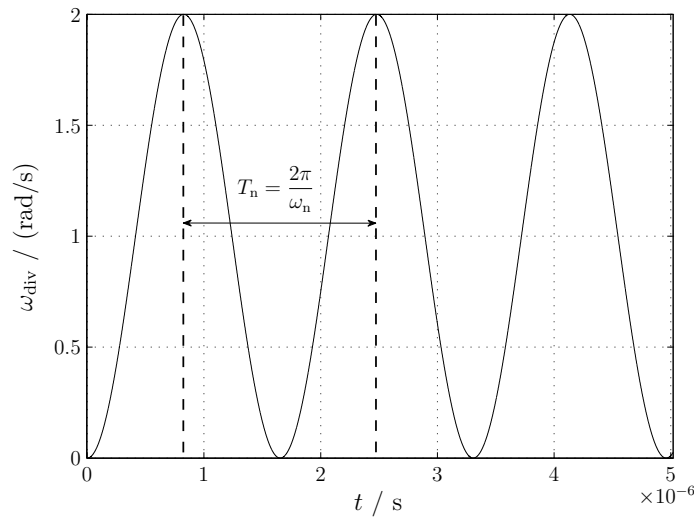
ten zu erkennen

$$\begin{aligned} \omega_{\text{div}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta\omega}{s} \cdot T(s) \right\} &= \Delta\omega + \Delta\omega e^{-\zeta\omega_n t} \left( -\cosh \left( \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \left( \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t \right) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit  $\zeta > 1$  und

$$\begin{aligned} \omega_{\text{div}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta\omega}{s} \cdot T(s) \right\} &= \Delta\omega + \Delta\omega e^{-\omega_n \zeta t} \left( -\cos \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $\zeta < 1$ . Für  $\zeta = 1$  wird der aperiodische Grenzfall erreicht und es ergibt sich die



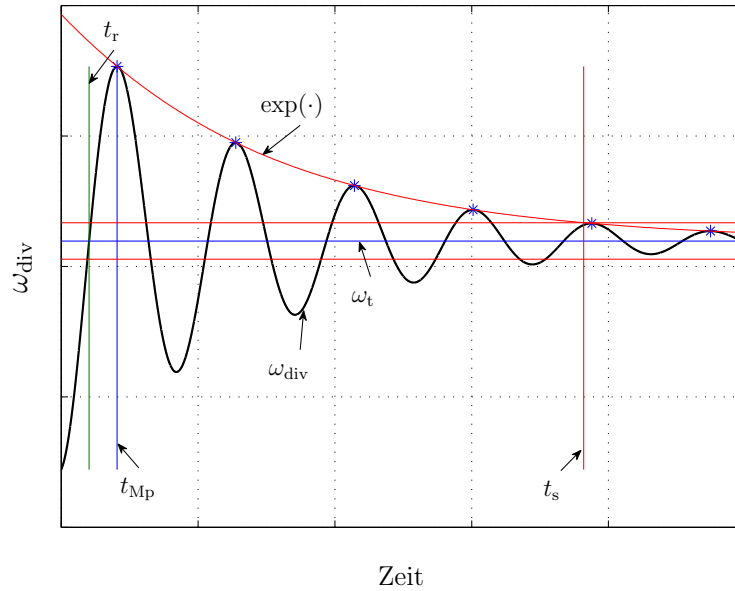
**Abb. 3.3.:** Verlauf der Sprungantwort des linearen Modells des Phasenregelkreises für  $\zeta = 0$  zur Veranschaulichung der natürlichen Eigenkreisfrequenz des Modells

Sprungantwort

$$\omega_{\text{div}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta\omega}{s} \cdot T(s) \right\} = \Delta\omega + \Delta\omega (\omega_n t - 1) e^{-\omega_n t}. \quad (3.15)$$

Wird der Spezialfall  $\zeta = 0$  betrachtet, so ist die Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  in der Sprungantwort zu erkennen (siehe Abb. 3.3), da die Dynamik des Systems ungedämpft ist. In der Regel wird der Phasenregelkreis jedoch mit einem Dämpfungsbeiwert kleiner eins realisiert, da dies einen guten Kompromiss zwischen einem kleinen maximalen Überschwinger, einer kurzen Ausregelzeit und der Rauschbandbreite darstellt.

Basierend auf dem linearen Modell lässt sich das mittlere dynamische Verhalten des Phasenregelkreises für kleine Phasenfehler darstellen. Wird ein Kreisfrequenzsprung am Eingang des linearen Modells mit  $\zeta < 1$  angenommen, ergibt sich eine Sprungantwort wie in Abb. 3.4. Hier lassen sich die dynamischen Parameter der Anstiegszeit, der Überschwinger und der Ausregelzeit definieren, die für die praktische Anwendung der Phasenregelkreise eine große Bedeutung haben. Die Anstiegszeit



**Abb. 3.4.:** Signalverlauf von  $\omega_{div}(t)$  bei einem Kreisfrequenzsprung zur Definition der charakteristischen Parameter im Zeitbereich des linearen Modells

$t_r$  wird mit Hilfe des Schnittpunkts der Kreisfrequenz  $\omega_{div}(t)$ , mit der Zielkreisfrequenz  $\omega_t$  und der Anfangskreisfrequenz  $\omega_{div}(t_0)$  bestimmt. Bei der analytischen Berechnung der Anstiegszeit wird  $\omega_{div}(t_r) = \Delta\omega$  für einen Kreisfrequenzsprung  $\Delta\omega = \omega_t - \omega_{div}(t_0)$  am Eingang des linearen Modells der PLL nach  $t_r$  umgestellt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Ableitung des Phasenfehlers  $\varphi_e(t)$  gleich Null zu setzen und nach  $t_r$  umzustellen, da sich das lineare Modell in etwa wie ein Pendel verhält und das Maximum des Phasenfehlers beim Nulldurchgang des Frequenzfehlers erreicht wird. Die Anstiegszeit und somit der erste Schnittpunkt von

$\omega_{\text{div}}(t)$  mit  $\omega_t$  ergibt sich schließlich zu

$$t_r = \begin{cases} \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} & \forall 0 < \zeta < 1 \\ \frac{1}{\omega_n} & \text{für } \zeta = 1 \\ \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta}\right)}{\omega_n \sqrt{\zeta^2-1}} & \forall \zeta > 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Für die nachfolgenden Schaltungen des Phasenregelkreises ist oft eine stabile Frequenz des VCO-Signals notwendig. Aus diesem Grund ist die Ausregelzeit der Regel-schleife eine wichtige Kenngröße. Die Ausregelzeit  $t_s$  ist die Zeitspanne, in der die lokalen Maxima kleiner einer vorgegebenen Grenze werden. Dies lässt sich mittels der Einhüllenden  $\exp(-\zeta\omega_n t)$  der abklingenden Schwingung in den Gleichungen (3.13) bis (3.15) beschreiben:

$$\exp(-\zeta\omega_n t) \leq \frac{n_s}{100} \quad \text{für } t \geq t_s \quad (3.17a)$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{\ln\left(\frac{100}{n_s}\right)}{\zeta\omega_n}, \quad (3.17b)$$

wobei  $n_s$  eine prozentuale Größe der noch vorhandenen abklingenden Schwingung ist und die vorgegebene Grenze darstellt.

Zur Berechnung der lokalen Maxima und deren Zeitpunkte  $t_{\text{Mp}}$  lässt sich die Ableitung von  $\omega_{\text{div}}(t)$  gleich Null setzen. Es resultiert

$$t_{\text{Mp}} = \begin{cases} \frac{\arctan\left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2-1}\right) + g \cdot \pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} & \forall 0 < \zeta < 1 \\ \frac{2}{\omega_n} & \text{für } \zeta = 1 \\ \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}}{2\zeta^2-1}\right)}{\omega_n \sqrt{\zeta^2-1}} & \forall \zeta > 1 \end{cases}, \quad (3.18)$$

wobei der Faktor  $g$  die  $\pi$ -Periodizität des  $\tan(\cdot)$  verdeutlicht und eine Bestimmung der verschiedenen lokalen Maxima ermöglicht. Dies ist ebenfalls wichtig wenn das Argument von  $\arctan(\cdot)$  negativ wird, da sich somit  $t_{\text{Mp}} < 0$  ergeben würde. Da je-

doch innerhalb der Betrachtung des linearen Modells der Frequenzsprung bei  $t = 0$  angenommen wird und die Überschwinger für  $t_{Mp} > 0$  zu berechnen sind, muss der Faktor  $g$  entsprechend definiert werden. Das erste lokale Maximum für  $t_{Mp} > 0$  und  $2\zeta^2 < 1$  ist mit  $g = 1$  gegeben. Für  $2\zeta^2 > 1$  und somit positiven Argumenten von  $\arctan(\cdot)$  resultiert  $g = 0$  für das erste lokale Maximum nach dem Sprung.

Für die weitere Betrachtung sind jedoch die Phasenfehlernulldurchgänge relevant, da diese eine Änderung der Regeldynamik beschreiben. Der erste Phasenfehlernulldurchgang ist für  $0 < \zeta < 1$  durch

$$t_{pn} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.19)$$

gegeben. Für sehr kleine Dämpfungsbeiwerte  $\zeta$  ist dieser Zeitpunkt eine gute Abschätzung der Gleichung (3.18), da sich in diesem Fall der Phasenregelkreis wie ein ideales Pendel verhält und der Phasenfehlernulldurchgang näherungsweise zum gleichen Zeitpunkt des lokalen Maximums von  $\omega_{div}$  auftritt. Der Kreisfrequenzfehler bei  $t_{pn}$  bezogen auf den Kreisfrequenzsprung am Eingang

$$\omega_{pn} = \frac{\omega_{div}(t_{pn}) - \omega_{ref}}{\Delta\omega} \quad (3.20)$$

ist für  $\omega_{ref} = \Delta\omega$  und  $0 < \zeta < 1$  durch

$$\omega_{pn} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (3.21)$$

gegeben.

Die Gültigkeit des linearen Modells für einen Kreisfrequenzsprung am Eingang des Regelkreises wird durch den linearen Bereich des Phasendetektors bestimmt. Für die CP-PLL zur Frequenzsynthese ist dieser Bereich durch  $-2\pi \leq \varphi_e \leq 2\pi$  definiert. Die Fähigkeit des Phasenregelkreises auf Frequenzänderungen am Eingang derart zu reagieren, dass der Phasenfehler in dem genannten Bereich verbleibt, lässt sich ebenfalls mittels des linearen Modells abschätzen. Der sogenannte Ausrastbereich (engl. *Pull-Out region*)  $\Delta\omega_{PO}$  ist der Kreisfrequenzbereich, bei dem ein Kreisfrequenzsprung den Phasenregelkreis gerade zum Ausrasten bringt und der Phasenfehler den Bereich  $\pm 2\pi$  verlässt. Wird das Maximum des Phasenfehlers bestimmt, mit  $2\pi$  gleichgesetzt und nach dem Kreisfrequenzsprung aufgelöst, ergibt sich

$$\Delta\omega_{PO} = \begin{cases} 2\pi\omega_n e^{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\left(\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)} & \forall 0 < \zeta < 1 \\ 2\pi\omega_n e^1 & \text{für } \zeta = 1 \\ 2\pi\omega_n e^{\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta}\right)} & \forall \zeta > 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Es hat sich jedoch die Approximation

$$\Delta\omega_{PO} \approx 11,55 \omega_n (0,5 + \zeta) \quad (3.23)$$

etabliert, die eine gute erste Näherung darstellt [6].

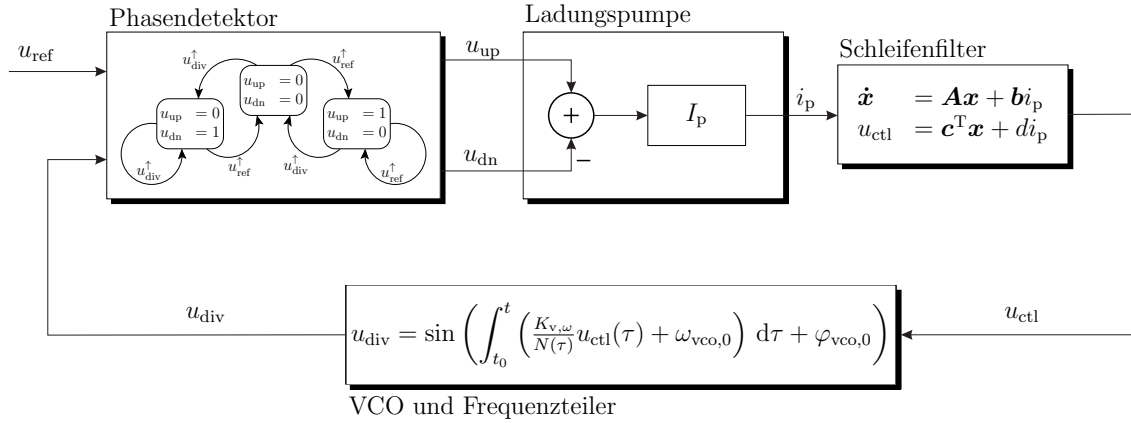
Es bleibt zu bemerken, dass dieses Modell lediglich das mittlere Verhalten des Phasenregelkreises abbildet, solange der Phasenfehler zwischen  $\pm 2\pi$  verbleibt.

## 3.2. Verhaltensbeschreibung

Da das lineare Modell auf einer Mittelung des Stromsignals und auf einer Linearisierung bezüglich der Phasen basiert, wird das nichtlineare und schaltende Verhalten des realen Regelkreises vernachlässigt auch wenn dieses die Leistungsfähigkeit des Phasenregelkreises beeinflusst. Daher wird für eine genauere Modellierung und Charakterisierung dieses Verhaltens oft eine Verhaltensbeschreibung des Systems verwendet. Eine Verhaltensmodellierung des Phasenregelkreises wird in [67] dargestellt. Dieser Ansatz verwendet die sogenannte *Periodic Steady State* Methode, in der der Schaltkreis im eingeschwungenen Zustand und für eine definierte Grundfrequenz betrachtet wird. Hierbei lassen sich jedoch die Signale im Zeitbereich für den Ziehbereich des Regelkreises nicht abbilden. Plattformen für Modellierungsansätze im Zeitbereich sind beispielsweise Verilog-AMS, SystemC-AMS und Matlab-Simulink [68]. Die Abkürzung AMS verdeutlicht die gemischt analog digitalen Modellierungsmöglichkeiten. Weitere Methoden der PLL-Beschreibung, wie zum Beispiel VHDL-AMS (*Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language*) [68] oder die nichtlineare Makromodellierung in [69], verfolgen einen ähnlichen Ansatz und werden daher hier nicht genauer beschrieben. Die genannten Verhaltensmodellierungen berücksichtigen zunächst das ideale Verhalten des Systems und repräsentieren dieses durch Zustandsautomaten, mathematische Beschreibungen und benutzerdefinierte Algorithmen. Generell lassen sich bei der Verhaltensmodellierung sowohl ideale als auch nicht-ideale Effekte beschreiben. An dieser Stelle wird eine Auswahl an verhaltensbasierten Modellierungsansätzen verglichen, wobei zunächst das ideale Verhalten der Bauelemente angenommen wird.

### 3.2.1. Simulink

Für die Modellierung von Regelkreisen ist Simulink weit verbreitet. Es handelt sich hierbei um einen Teil von Matlab, der die Kombination von mathematischen Beschreibungen, endlichen Zustandsautomaten, elektrischen Baugruppen und benutzerspezifischen Algorithmen ermöglicht. Diese Form der Modellierung basiert auf dem Abtasttheorem und verwendet in erster Näherung eine konstante Abtastzeit. Für die Modellierung des Phasenregelkreises wird das Verhalten der Komponenten aus Kapitel 2.2 umgesetzt. In Abb. 3.5 ist dieses Prinzip dargestellt. Der Phasen-



**Abb. 3.5.:** Prinzipdarstellung der verhaltensbasierten Modellierung

und Frequenzdetektor wird mittels des endlichen Zustandsautomaten (Simulink stellt den *Stateflow (chart)* zur Verfügung) realisiert. Die Ausgangssignale  $u_{up}$  und  $u_{dn}$  sind ideale pulswidenmodulierte Signale und weisen eine Anstiegs- und Abfallzeit auf, die der Abtastzeit der Simulation entsprechen. Der Strom der nachfolgenden Ladungspumpe wird durch die Differenz der Ausgangssignale des PFD und eine Gewichtung mit  $I_p$  berechnet. Der Strom weist somit auch sehr kleine Anstiegs- und Abfallzeiten auf. Sowohl der Schleifenfilter als auch der spannungsgesteuerte Oszillator und der Frequenzteiler werden durch analytische Gleichungen beschrieben. Der Vorteil der kombinierten Modellierung des VCO und des Dividierers besteht in der Vermeidung eines Hoch- und Niederfrequenzteils der Simulation, da das periodische VCO-Signal lediglich implizit berechnet wird. Wird der Frequenzteiler beispielsweise mit Hilfe eines Flankenzählers separat modelliert und das VCO-Signal explizit bestimmt, würde sich die Abtastzeit aufgrund des Nyquist-Kriteriums deutlich verkleinern und sich somit die Simulationszeit und die erzeugte Datenmenge drastisch vergrößern [13, 14]. Wird die kombinierte Modellierung verwendet, lässt sich das hochfrequente Ausgangssignal des einzelnen VCO in der Nachbearbeitung der Simulation mathematisch erzeugen.

Bei der Simulation ist darauf zu achten, dass die Integration innerhalb der VCO-Modellierung diskreter Natur ist und sich für relativ große Abtastzeiten eine entsprechende Ungenauigkeit der Simulation einstellt. Die Simulationsgenauigkeit und -dauer werden somit direkt von der Abtastzeit beeinflusst.

#### 3.2.2. Verilog-AMS

Für die Verhaltensmodellierung und spätere Verifikation des Gesamtsystems wird oft Verilog-AMS verwendet. AMS steht für *Analog-Mixed-Signal* und beschreibt die Möglichkeit, sowohl die analogen als auch die digitalen Komponenten einer Schaltung modellieren zu können. Dieser Ansatz wird von vielen Simulationsplattformen, wie zum Beispiel Cadence und dem CppSim Simulator von Perrott [23, 70], un-

terstützt.

Da die Modellierung vergleichbar mit der Realisierung in Kapitel 3.2.1 ist und sich nur durch die Syntax unterscheidet, wird hier lediglich das Lösungsverfahren näher betrachtet. Die digitalen Teile des zu simulierenden Systems werden dabei lediglich beim Über- oder Unterschreiten vordefinierter Schwellwerte ausgewertet. Dieses Verhalten wird in der Literatur als ereignisgesteuert bezeichnet, obwohl die Simulation des Gesamtsystems durch den analogen Teil der Schaltung nicht in Gänze ereignisgesteuert ist. Der Analogteil wird mittels einer näherungsweise konstanten Abtastzeit abgetastet und ausgewertet [71]. Zu jedem dieser Zeitpunkte wird auch das digitale Modul abgefragt und bei Über- oder Unterschreiten der Schwellwerte ausgewertet. Somit stellt der Kern von Verilog-AMS einen Abtastzeit-basierten Lösungsansatz dar, wobei die digitalen Module nur zu bestimmten Zeiten ausgewertet werden. Ein Beispiel einer Verilog-AMS Modellierung sei hier gezeigt.

```

1  [...]
2  @ ( cross(V(Ref)-0.5,1)) begin
3      if (state==1 || state==0)
4          state=1;
5          else state=0;
6      end
7  [...]
8      analog begin
9          phase_lin      = wc * $abstime;
10         num_cycles     = phase_lin / 'M.TWO.PI;
11         phase_lin      = phase_lin - num_cycles * 'M.TWO.PI;
12         phase_nonlin    = 'M.TWO.PI*vco_gain*idtmod(V(v_ctl),0,1000.0,0.0);
13         V(v_vco)        <+ vco_amp*sin(phase_lin+phase_nonlin+phase_init);
14         inst_freq       = vco_cf + vco_gain * V(v_ctl);
15         $bound_step     (1/(vco_ppc*inst_freq));
16     end
17  [...]
```

Bei diesem Ausschnitt ist zu erkennen, dass die ersten Zeilen lediglich ausgeführt werden, falls die Schwellwerte erreicht werden. Die unteren Zeilen zeigen einen analogen Teil des Systems, der mit einer begrenzten Abtastzeit (siehe Zeile 15) ausgewertet wird. Die ausführlichen Verilog-AMS Modelle eines Phasenregelkreises sind im Anhang F zu sehen.

Für die spätere Verifikation von gemischt digital analogen Systemen bietet Cadence für Verilog-AMS eine Vielzahl von Möglichkeiten an. Hierbei ist es jedoch erforderlich, dass die digitalen und analogen Module des Systems mittels sogenannter Adapter verknüpft werden, damit die Verifikationsregeln sowohl aus dem digitalen als auch aus dem analogen Bereich angewendet werden können [71]. Wegen dieser Adapter und des abtastbasierten Lösungsverfahrens ist die Simulationszeit gerade für Systeme mit einem Hoch- und einem Niederfrequenzteil nicht sehr effizient [13, 14].

#### 3.2.3. SystemC-AMS

SystemC-AMS stellt ein Simulationswerkzeug für heterogene gemischt digital analoge Systeme zur Verfügung, mit dessen Hilfe zunächst das dynamische Verhalten repräsentiert wird [72–75]. Hierbei ist der Simulationsansatz, ähnlich wie bei Verilog-AMS, zweigeteilt. Der digitale Teil der Schaltung wird lediglich beim Erreichen von vordefinierten Schwellwerten der Eingangssignale ausgewertet, wobei der analoge Teil des Systems basierend auf einer Abtastzeit berechnet wird [56]. Die Erweiterungen von SystemC-AMS stellen eine Umgebung für die Modellierung, die Validierung und den virtuellen Prototypenentwurf von gemischt digital analogen Systemen bereit [73]. Hierbei lassen sich die drei verschiedenen Lösungsverfahren *Timed Data Flow* (TDF), *Linear Signal Flow* (LSF) und *Electrical Linear Networks* (ELN) unterscheiden [21, 68]. TDF verwendet eine näherungsweise konstante Abtastzeit und tastet die Signale und Daten entsprechend ab. LSF verwendet hingegen zeitkontinuierliche Module und beschreibt das Eingangs-Ausgangsverhalten mittels mathematischer Funktionen. Für die Realisierung von elektrischen Baugruppen lässt sich ELN verwenden. Hier werden einfache elektrische Quellen und lineare konzentrierte Senken zugrunde gelegt und miteinander verbunden.

Obwohl Teile dieses Modellierungsansatzes ereignisgesteuert sind, bleibt der analoge Teil Abtastzeit-basiert und unterliegt dem Nyquist-Kriterium. Gerade für pulswertenmodulierte Systeme und Regelkreise mit einem Hoch- und Niederfrequenzteil weist SystemC-AMS eine lange Simulationszeit auf [74] und begrenzt somit die Möglichkeit einen schnellen Einblick in das Systemverhalten zu erhalten und einen effizienten und robusten Entwurf zu gewährleisten [5].

Zu diesem Zweck wurde in [32] die Erweiterung SystemC-AMS *dynamic* TDF (DTDF) eingeführt. Diese ermöglicht eine dynamische Anpassung der Abtastzeit bezüglich des Systemverhaltens. Gerade für pulswertenmodulierte Systeme bringt diese Erweiterung eine deutliche Beschleunigung der Simulation mit sich. Dieser Ansatz ist vergleichbar mit dem ereignisgesteuerten Modell aus [19], dass in Kapitel 3.3 genauer beschrieben wird und in Kapitel 5.3 für nichtlineare und nicht-ideal Effekte erweitert wird. In [32] wird beispielhaft ein pulswertenmodelliertes Modul in SystemC-AMS DTDF modelliert, wobei dessen Eingangssignal zwischen den Zeitpunkten der Ereignisse undefiniert bzw. als näherungsweise konstant angenommen wird<sup>1</sup>. Das ereignisgesteuerte Modell nach [19] verwendet hingegen keine Näherung.

---

<sup>1</sup>Ein persönliches Gespräch mit Herrn Dr. Torsten Maehne, einem der Autoren von [32], ergab am 20.05.2016, dass SystemC-AMS dynamic TDF die Änderungen des Eingangssignals zwischen den Ereignissen des PWM-Moduls als hinreichend klein annimmt und als konstant interpretiert.

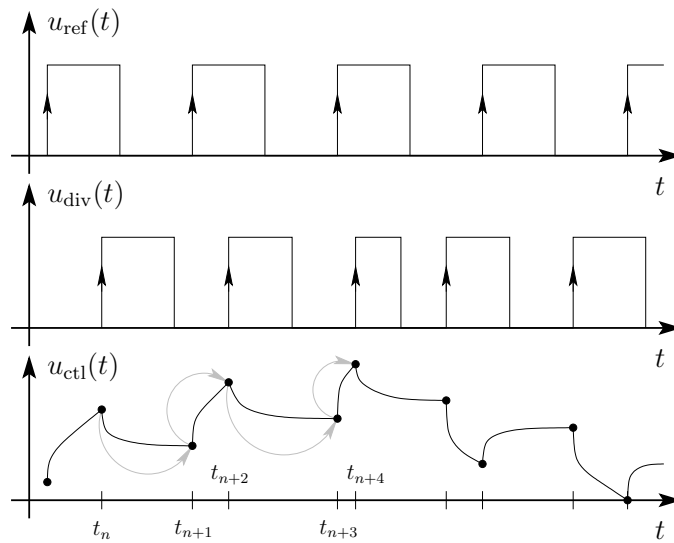


### 3.3. Ereignisgesteuerte Modellierung

Da die CP-PLL einen gemischt digital analogen Regelkreis darstellt und der schaltende Charakter des Phasen- und Frequenzdetektors die Dynamik des Systems lediglich zu den steigenden oder fallenden Flanken des Referenz- bzw. des Dividierersignals ändert, liegt es nahe, die Beschreibung der Dynamik basierend auf diesen Ereignissen zu realisieren. Da die Signalverläufe der Steuerspannung, des Stroms und der beiden Phasen zwischen den Ereignissen bekannt sind, ist es ausreichend, den Phasenregelkreis zu den Zeitpunkten der Ereignisse zu beschreiben und somit die Simulation deutlich zu beschleunigen.

In [24, 25, 34] werden effiziente Ansätze zur Modellierung von Phasenregelkreisen eingeführt. [25] stellt dabei ein nichtlineares Modell mit einer gleichmäßigen Abtastung zu den Flanken des Referenzsignals dar. Das Modell von [24] basiert auf einer ungleichmäßigen Abtastung. Beide Modelle werden in [4] miteinander verglichen, wobei sich herausstellt, dass der Ansatz in [24] sehr akkurat und effizient ist.

In [19, 24] wurde das Grundprinzip des ereignisgesteuerten Modells des Phasenregelkreises zweiter und dritter Ordnung vorgestellt. Diese Grundidee des ereignisgesteuerten Modells lässt sich in Abb. 3.6 erkennen. Die Ereignisse  $t_n, t_{n+1}, \dots$  werden



**Abb. 3.6.:** Verlauf der Steuerspannung eines Phasenregelkreises dritter Ordnung zur Verdeutlichung des Grundprinzips der ereignisgesteuerten Modellierung

durch die steigenden Flanken des Referenzsignals und des Dividierersignals definiert. Das ereignisgesteuerte Modell eines Phasenregelkreises stellt ein iteratives Verfahren dar, das basierend auf den Phasengleichungen der Eingangssignale des Phasendetektors lediglich die Zeitpunkte dieser Ereignisse berechnet [19, 24, 38] und somit zu einer deutlichen Beschleunigung der Simulation führt. Dieses Verfahren wird hier kurz vorgestellt und auf die Fractional-N PLL mit beliebiger Ordnung des Schleifenfilters erweitert.

Die Phase des Referenzsignals zwischen den beiden Ereignissen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ergibt sich aus der Frequenz und der Anfangsphase zu

$$\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{\text{ref}}(\tau) d\tau. \quad (3.24)$$

Da die Frequenz  $f_{\text{ref}}$  des Referenzsignals für die Frequenzsynthese konstant ist, resultiert die Phasengleichung des Referenzsignals zu

$$\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_n) + 2\pi f_{\text{ref}} (t_{n+1} - t_n). \quad (3.25)$$

Für die Definition der Phase des Ausgangssignales des Dividierers wird zunächst die Phase des Ausgangssignals des VCO

$$\varphi_{\text{vco}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{vco}}(t_n) + 2\pi \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau \quad (3.26)$$

angegeben, wobei  $f(\cdot)$  eine Funktion mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist und  $\varphi_{\text{vco}}(t_n)$  die Phase zum Zeitpunkt  $t_n$  beschreibt. Da der Dividierer ein Proportionalglied bezüglich der Phase darstellt, ergibt sich die Phase am Ausgang des Dividierers zu

$$\varphi_{\text{div}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{div}}(t_n) + 2\pi \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{N(\tau)} f(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau. \quad (3.27)$$

Der wesentliche Unterschied dieser Gleichung im Vergleich zur Darstellung in [24] besteht im zeitvarianten Teilverhältnis  $N(\tau)$ . Mittels dieser Verallgemeinerung lässt sich das ereignisgesteuerte Modell zusätzlich auf die *Fractional-N* PLL anwenden, wobei  $N(\tau)$  durch die Differenzengleichungen in Kapitel 2.2.2 definiert ist.

Mit den Gleichungen (3.25) und (3.27) lassen sich die Zeitpunkte der steigenden Flanken des Referenz- und des Dividierersignals bestimmen. Für die steigende Flanke im Referenzsignal wird Gleichung (3.25) mit  $2\pi$  gleichgesetzt und nach  $t_{n+1}$  umgestellt. Es gilt

$$t_{n+1}^{\text{ref}} = t_n + \frac{1 - \frac{\varphi_{\text{ref}}(t_n)}{2\pi}}{f_{\text{ref}}}. \quad (3.28)$$

Hierbei bezeichnet  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  den Zeitpunkt der steigenden Flanke des Referenzsignals und  $t_n$  beschreibt den vorherigen Zeitpunkt des iterativen Algorithmus zur ereignisgesteuerten Modellierung. Für die Berechnung von  $t_{n+1}^{\text{div}}$  wird analog zum vorangegangenen Schritt die Gleichung (3.27) mit  $2\pi$  gleichgesetzt. Es ergibt sich

$$2\pi = \varphi_{\text{div}}(t_n) + 2\pi \int_{t_n}^{t_{n+1}^{\text{div}}} \frac{1}{N(\tau)} f(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau. \quad (3.29)$$

Für die Berechnung des Ereignisses von  $u_{\text{div}}(t)$  ist die analytische Beschreibung der Steuerspannung  $u_{\text{ctl}}(t)$  (siehe Gleichung (2.13)) notwendig. Für eine nichtlineare Kennlinie des VCO oder eine nicht bijektive Steuerspannung zwischen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ist die analytische Berechnung des Zeitpunktes  $t_{n+1}^{\text{div}}$  nicht möglich. In diesem Fall müssen numerische Verfahren die Gleichung

$$\varphi_{\text{div}}(t_{n+1}^{\text{div}}) - 2\pi = 0 \quad (3.30)$$

lösen. Das Regula-Falsi-Verfahren (auch Sekantenverfahren genannt) [76] löst dabei die Gleichung  $g(c) = 0$  mit der Vorschrift

$$c_{n+1} = c_n - \frac{c_n - c_m}{g(c_n) - g(c_m)} g(c_n) \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots \text{ und } m < n \quad (3.31)$$

und  $c_0$  und  $c_1$  sind dabei als Startwerte gegeben. Dieses Verfahren konvergiert sicher, wenn  $m$  jeweils so gewählt wird, dass  $g(c_n)$  und  $g(c_m)$  verschiedene Vorzeichen aufweisen [76].

Mit den eingeführten Gleichungen lassen sich alle Zeitpunkte der steigenden Flanken und deren zugehörige Phasen berechnen. Der Zeitpunkt des nächsten Ereignisses ergibt sich aus dem Minimum der Zeiten  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1}^{\text{div}}$ . Somit resultiert

$$t_{n+1} = \min \{ t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{div}} \}. \quad (3.32)$$

Auf Basis des Zeitpunktes  $t_{n+1}$  lassen sich die weiteren Signale des Phasenregelkreises bestimmen. Die Signale des Phasen- und Frequenzdetektors und der Ladungspumpe sind in Kapitel 2.2.1 definiert. Die Steuerspannung ist durch das Zustandsraummodell definiert und lässt sich durch

$$u_{\text{ctl}}(t_{n+1}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t_{n+1}) + d i_p(t_n) \quad (3.33)$$

beschreiben, wobei

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{\Phi}(t_{n+1} - t_n) \mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{\Phi}(t_{n+1} - \tau) \mathbf{b} i_p(\tau) d\tau \quad (3.34)$$

gilt.  $\mathbf{x}(t_n)$  definiert dabei den Vektor aus den Spannungen über den Kapazitäten des Schleifenfilters und  $\mathbf{\Phi}(t_{n+1} - t_n)$  ist die Transitionsmatrix. Der Phasenfehler ergibt sich aus

$$\varphi_e(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) - \varphi_{\text{div}}(t_{n+1}). \quad (3.35)$$

Die periodischen Eingangssignale des PFD und das Ausgangssignal des VCO lassen sich nach der Simulation mittels der Phasen rekonstruieren. Somit lassen sich alle Zeitpunkte  $t_n$  und die zugehörigen Signale iterativ berechnen.

Mit dieser Verallgemeinerung des ereignisgesteuerten Modells ist sowohl eine beliebige Ordnung des Schleifenfilters als auch eine nichtlineare Kennlinie des VCO möglich (vgl. [40]). Für den Algorithmus lassen sich die relevanten Größen des Phasenregelkreises in einem Vektor

$$\mathbf{r}_n = [t_n, \mathcal{S}(t_n), E(t_n), N(t_n), \varphi_{\text{ref}}(t_n), \varphi_{\text{div}}(t_n), \mathbf{x}(t_n), i_p(t_n)]^T \quad (3.36)$$

zusammenfassen. Hierbei beschreibt  $E(t_n)$  das auftretende Ereignis zum Zeitpunkt  $t_n$ . Der sich ergebende Algorithmus 3.3.1 ist in Abb. 3.7 grafisch dargestellt.

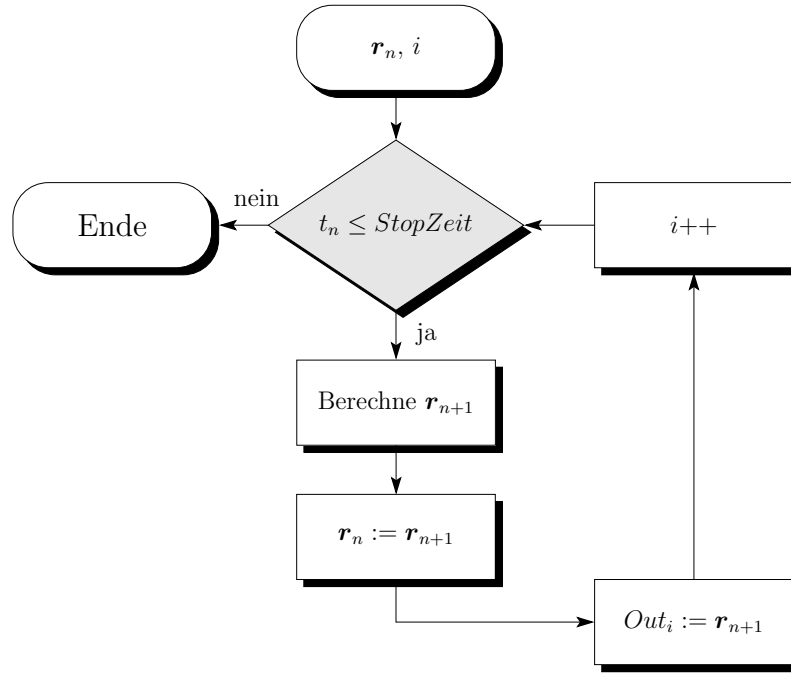
---

**Algorithmus 3.3.1** Iteratives Verfahren der ereignisgesteuerten Modellierung

---

- 1: Initialisierung von  $\mathbf{r}_k$  und  $i := 1$
  - 2: **while**  $t_n \leq \text{StopZeit}$  **do**
  - 3:   Berechnung der Zeiten  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1}^{\text{div}}$
  - 4:    $t_{n+1} := \min \{t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{div}}\}$
  - 5:   Bestimmung des Zustands und des Stroms
  - 6:   Berechnung der Steuerspannung
  - 7:   Bestimmung der Phase des Referenz- und des Dividierersignals
  - 8:   Speichern der berechneten Parameter in  $\mathbf{r}_{n+1}$
  - 9:   Neue Anfangsbedingung  $t_n := t_{n+1}$
  - 10:   Neue Anfangsbedingungen  $\mathbf{r}_n := \mathbf{r}_{n+1}$
  - 11:    $\text{Out}_i := \mathbf{r}_{n+1}$
  - 12:    $i++$
  - 13: **end while**
- 

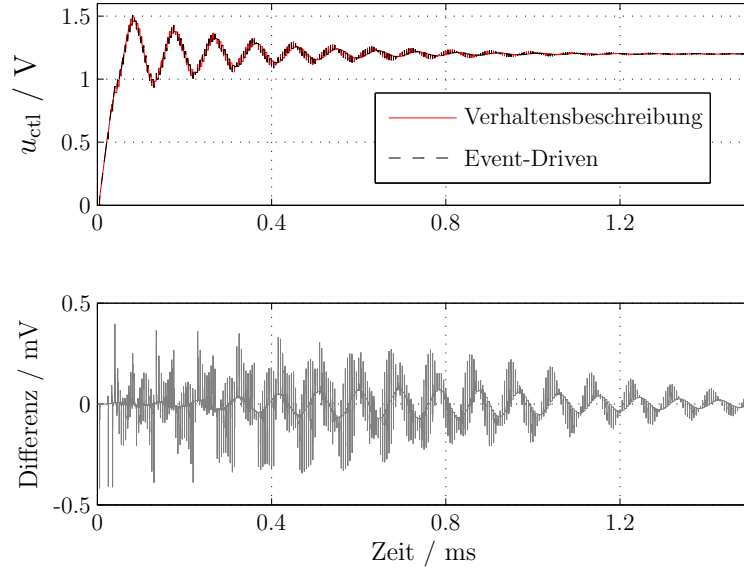
Der große Vorteil dieser Modellierung besteht im komplett ereignisgesteuerten und akkuraten Lösungsverfahren, sodass sowohl die Simulationszeit als auch die generierten Daten deutlich reduziert werden können und die Genauigkeit des Modells gewährleistet wird. Somit wird eine effiziente und umfassende Charakterisierung des dynamischen Systemverhaltens ermöglicht.



**Abb. 3.7.:** Grafische Darstellung des ereignisgesteuerten Algorithmus

### 3.4. Vergleich der verschiedenen Modelle

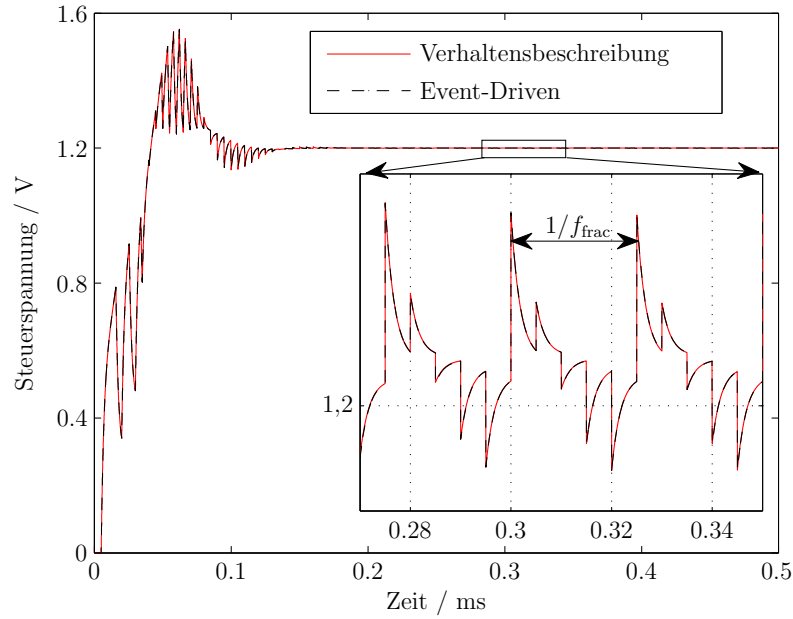
Die vorgestellten Methoden der Modellierung lassen sich auf zwei Ebenen miteinander vergleichen. Der erste und vielleicht wichtigste Vergleich ist die Gültigkeit und die Genauigkeit der Modelle. Die zweite Ebene ist die Simulationsgeschwindigkeit und der damit einhergehende effiziente Einblick und Entwurf des Systemverhaltens. Zu diesem Zweck wird zunächst ein idealer Phasenregelkreis entfernt der Ruhelage für die Verhaltensbeschreibung und für das ereignisgesteuerte Modell untersucht. Dieser Phasenregelkreis ist für eine Bluetooth-Anwendung ausgelegt und weist die folgenden Parameter auf:  $f_{\text{ref}} = 200 \text{ kHz}$ ,  $f_{\text{vco}} = 2,4 \text{ GHz}$ ,  $I_p = 30 \mu\text{A}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 0,1 \text{ nF}$  und  $K_v = 2 \text{ GHz/V}$ . Die Simulationsergebnisse der Verhaltensbeschreibung (hier wurde Simulink verwendet) und der ereignisgesteuerten Modellierung sind in Abb. 3.8 zu sehen. Zur besseren Vergleichbarkeit und zur Berechnung der Differenz zwischen beiden Modellen wurde das ereignisgesteuerte Modell mit zusätzlichen Punkten zwischen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  simuliert. Es ist zu erkennen, dass beide Modelle identische Ergebnisse liefern. Die Differenz bewegt sich in einem Bereich von  $\pm 0,04\%$  der Zielspannung  $u_t = 1,2 \text{ V}$ . Dieser Unterschied ist nicht durch die verschiedenen Modellierungsansätze begründet, sondern ist auf die numerischen Ungenauigkeiten der unterschiedlichen Lösungsmethoden zurückzuführen. Trotz dieser großen Genauigkeit beträgt die Simulationszeit der Verhaltensbeschreibung 16s und die des ereignisgesteuerten Modells lediglich 1,2s. Dies bedeutet, dass das ereignisgesteuerte Modell bereits ca. 15-mal schneller ist, obwohl die Ver-



**Abb. 3.8.:** Vergleich der verhaltensbasierten Beschreibung mittels Simulink und des ereignisgesteuerten Modells anhand einer Integer-N PLL

haltensbeschreibung keinen Hochfrequenzteil aufweist und das ereignisgesteuerte Modell mit jeweils 100 zusätzlichen Punkten zwischen den eigentlichen Ereignissen simuliert wurde. Diese 100 zusätzlichen Punkte wurden lediglich für die feinere grafische Darstellung und die somit bessere Vergleichbarkeit der Simulationsergebnisse verwendet; sie sind für die ereignisgesteuerte Simulation nicht notwendig. Eine entsprechende ereignisgesteuerte Simulation ohne diese zusätzlichen Punkte dauert 0,14 s und ist somit über 100-mal schneller als die verhaltensbasierte Simulation. Werden der Hochfrequenzteil im Verhaltensmodell mit berücksichtigt und die Abtastzeit entsprechend angepasst, wird die Simulationszeit deutlich verlängert. Der Geschwindigkeitsgewinn des ereignisgesteuerten Modells ist somit erheblich größer. Wird der CppSim Simulator von M.H. Perrott aus [70] für die Simulation einer idealen PLL zugrunde gelegt und die Ergebnisse mit denen des ereignisgesteuerten Modells verglichen, zeigt sich, dass die ereignisgesteuerte Simulation fast 150-mal schneller als die Simulation mit CppSim ist.

Werden das Teilverhältnis und der Filterwiderstand des Phasenregelkreises zu  $N = 12000,2$  und  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  geändert, lässt sich eine Fractional-N PLL mit einem größeren Dämpfungsbeiwert betrachten. Die Ergebnisse der verhaltensbasierten Simulation und des ereignisgesteuerten Modells sind in Abb. 3.9 dargestellt. Auch für eine Fractional-N PLL sind die Ergebnisse beider Modellierungsansätze nicht voneinander zu unterscheiden. Selbst nahe der Ruhelage ist das Schalten des  $\Sigma\Delta$ -Modulators beider Modelle identisch und führt zu einer Periodizität der Steuerungsspannung. Die Periode  $1/f_{\text{frac}}$  wird dabei durch den  $\Sigma\Delta$ -Modulator mit konstanter

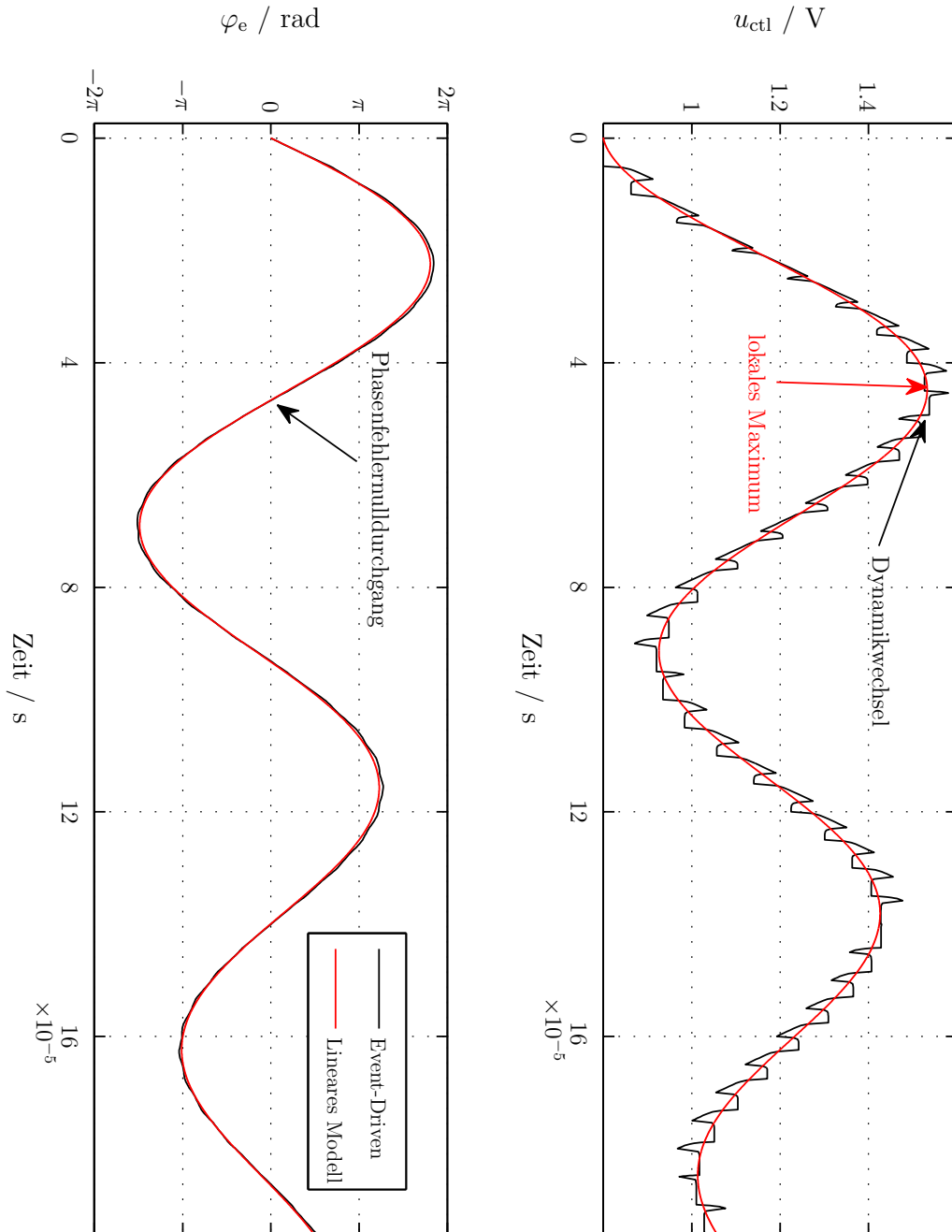


**Abb. 3.9.:** Ausschnitt der Simulationsergebnisse einer Fractional-N PLL basierend auf der Verhaltensbeschreibung und dem ereignisgesteuerten Modell

Eingangsgröße definiert. Wird dieser Phasenregelkreis für einen Betrachtungszeitraum von 5 ms simuliert, ist das ereignisgesteuerte Modell für dieses Beispiel über 200-mal schneller als die Verhaltensbeschreibung.

Für den Vergleich des linearen Modells mit der ereignisgesteuerten Modellierung wird die oben eingeführte Integer-N PLL nahe der Ruhelage betrachtet. Hierzu werden die Kapazitäten des Schleifenfilters vorgeladen, sodass sich eine Spannung über den Kapazitäten von 0,8 V ergibt. Die Ergebnisse beider Modelle sind in Abb. 3.10 dargestellt.

Während das ereignisgesteuerte Modell innerhalb der Steuerspannung die Auf- und Endladeeffekte des Schleifenfilters berücksichtigt, repräsentiert das lineare Modell lediglich das mittlere Verhalten des Phasenregelkreises. Für kleine Phasenfehler ist die Steuerspannung des linearen Modells nahe der unteren Werte der Aufladeeffekte und für Phasenfehler nahe  $2\pi$  entspricht das lineare Modell den oberen Werten der Aufladekurve. Werden die Phasenfehlernulldurchgänge betrachtet, ist ersichtlich, dass diese Zeitpunkte für das lineare und das ereignisgesteuerte Modell identisch sind. Zudem entsprechen diese Zeitpunkte den Wechseln zwischen Auf- und Endladeeffekten des ereignisgesteuerten Modells (engl. *Event-Driven Model*, kurz: ED-Modell). Dies ist durch die Mittelung des linearen Modells zu erklären. Da die Phaseninformationen einer Integration der Steuerspannung entsprechen und somit der Mittelung ähneln, sind die Phasenfehler des linearen und des ereignisgesteuerten Modells identisch. Die lokalen Maxima der Steuerspannung des linearen Modells



**Abb. 3.10.:** Vergleich des linearen Modells und der ereignisgesteuerten Modellierung anhand einer Integer-N PLL

sind jedoch gegenüber dem ED-Modell zeitlich versetzt.  
Aufgrund der Vergleichbarkeit der Phasenfehler des linearen und des ereignisgesteu-



erten Modells lassen sich die dynamischen Kenngrößen im Zeitbereich des linearen Modells (siehe Kapitel 3.1) für  $-2\pi \leq \varphi_e \leq 2\pi$  in erster Näherung auch für das schaltende System verwenden. Lediglich die Bestimmung der lokalen Extrema wird durch die Betrachtung der Phasenfehlernulldurchgänge ersetzt. Für Phasenfehler außerhalb  $\pm 2\pi$  ergibt sich jedoch ein Ziehbereich in der Regelung, wie in Abb. 3.8 zu erkennen ist. Das lineare Modell ist nicht in der Lage, dieses Verhalten nachzubilden, womit dessen Kenngrößen im Zeitbereich nicht mehr gültig sind.

Für eine Betrachtung des Phasenregelkreises nahe der Ruhelage bietet sich das lineare Modell aufgrund der einfachen Auswertung und Analyse an. Ist es jedoch notwendig, das nichtlineare und schaltende Verhalten des Phasenregelkreises bei der Charakterisierung zu berücksichtigen, ist entweder die Verhaltensbeschreibung oder das ereignisgesteuerte Modell zu verwenden. In diesem Fall weist das ereignisgesteuerte Modell den Vorteil der hocheffizienten und akkuraten Simulation auf und ermöglicht eine schnelle und umfassende Charakterisierung.



---

# Stabilität der modellierten idealen CP-PLL

---

Bei der Beurteilung der Performanz von Regelkreisen ist die Stabilität eine der wichtigsten Kenngrößen, da diese ein Maß für die Regelgüte sein kann. Beispielsweise beeinflusst sie bei der Frequenzsynthese die Frequenzreinheit erheblich. Aufgrund des nichtlinearen und schaltenden Verhaltens des Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese werden in der Literatur verschiedenste Approximationsansätze zur Beurteilung der Stabilität verwendet. Basierend auf dem linearen Modell (siehe Kapitel 3.1) lässt sich die Stabilität beispielsweise mittels des Hurwitzpolynoms überprüfen. Das schaltende Verhalten des Systems wird hierbei jedoch nicht berücksichtigt. Daher wurde 1980 von F.M. Gardner [3] ein lineares zeitdiskretes Modell verwendet, um die Konvergenzeigenschaften des Systems zu beurteilen. Die zugrunde liegenden Annahmen beschränken die Gültigkeit dieses Modell erheblich und stellen für den Phasenregelkreis dritter Ordnung eine komplexe Bedingung dar. Aus diesem Grund wird für den praktischen Entwurf meist eine empirische Richtlinie [7] verwendet. Diese basiert auf dem Verhältnis der Referenzfrequenz zur Eigenfrequenz des ungedämpften linearen Modells. Da die vorangegangenen Bedingungen auf einer frühen Linearisierung beruhen, ist der Geltungsbereich auf den Bereich nahe der Ruhelage beschränkt. Daher wird im Verlauf dieses Kapitels die Stabilitätsbetrachtung zusätzlich basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell untersucht und mit den bekannten Kriterien verglichen. Die Beurteilung der verschiedenen Stabilitätskriterien ermöglicht einen robusten Systementwurf des gemischt digital analogen Phasenregelkreises. Teile dieser Untersuchungen wurden auch in [20] veröffentlicht.

## 4.1. Stabilität des linearen zeitkontinuierlichen Modells

Wird die Stabilität des linearen zeitkontinuierlichen Modells betrachtet, lässt sich die Stabilität mit verschiedenen Methoden prüfen. Zwei Beispiele hierfür sind die Hurwitz-Stabilität, die das Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises beurteilt, und das Nyquist-Kriterium, das die offene Regelschleife für die Betrachtung verwendet [77].

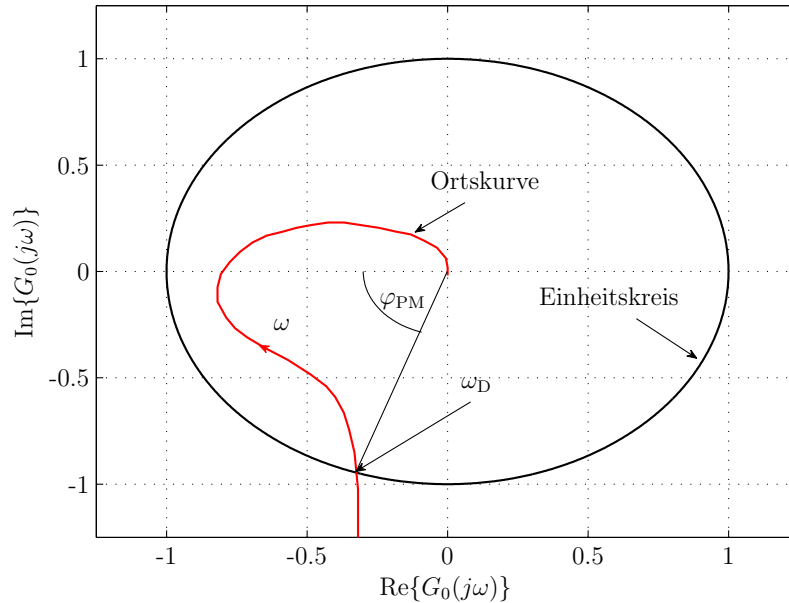
Das Nyquist-Kriterium beruht auf der Phasenreserve  $\varphi_{\text{PM}}$  und der Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_{\text{D}}$  des offenen Regelkreises. Diese Parameter werden häufig auch für den Entwurf der Schleife verwendet, da die Phasenreserve direkt mit dem Überschwinger und die Durchtrittskreisfrequenz mit der Anstiegszeit des linearen Modells zusammenhängen. Die Durchtrittskreisfrequenz ist die Kreisfrequenz, bei der der Betrag der Übertragungsfunktion der offenen Regelschleife gleich eins ist [78] (siehe Abb. 4.1)

$$|G_0(j\omega_{\text{D}})|^2 = 1 \quad (4.1)$$

Basierend auf der Durchtrittskreisfrequenz lässt sich die Phasenreserve zu

$$\varphi_{\text{PM}} = \arg(G_0(j\omega_{\text{D}})) + \pi \quad (4.2)$$

definieren. Für einen *BIBO*-stabilen<sup>1</sup> Regelkreis vom einfachen Typ muss eine posi-



**Abb. 4.1.:** Ortskurve des linearen kontinuierlichen Systems

tive Phasenreserve gewährleistet werden.

Für die Hurwitz-Stabilitätsbetrachtung wird die *BIBO*-Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit Hilfe der Übertragungsfunktion des linearen Modells herangezogen. Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion lässt sich dabei in die Form

$$D(s) = \sum_{i=0}^M r_i s^i = r_M \prod_{j=1}^M (s - p_j) \quad (4.3)$$

bringen. Ein lineares dynamisches System mit dem Nennerpolynom der Übertragungsfunktion aus Gleichung (4.3) erfüllt die *BIBO*-Stabilität, falls alle Nullstellen  $p_j$  des Nennerpolynoms in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen. Dies ist gegeben, wenn die Nullstellen einen negativen Realteil aufweisen ( $\operatorname{Re}\{p_j\} < 0$ ). Ein solches Nennerpolynom wird Hurwitzpolynom genannt. Mit Hilfe des Routh-Schemas lässt sich prüfen, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt [78–80]. Für ein Nennerpolynom mit reellen Koeffizienten und  $r_M > 0$ , wobei  $M$  die Ordnung des Polynoms bezeichnet, ergeben sich in Abhängigkeit von der Ordnung folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Hurwitzpolynom:

Für  $M = 2$  ergibt sich

$$r_i > 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, M = 2 \quad (4.4)$$

mit  $M = 3$  resultieren

$$\begin{aligned} r_i &> 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, M = 3 \\ r_1 r_2 &> r_0 r_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

und für  $M = 4$  sind

$$\begin{aligned} r_i &> 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, M = 4 \\ r_2 r_3 &> r_1 r_4 \quad \text{und} \quad r_1 r_2 r_3 > r_0 r_3^2 + r_1^2 r_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

gegeben. Werden diese Bedingungen auf die Übertragungsfunktion des Phasenregelkreises zweiter Ordnung angewendet (siehe Gleichung (3.9)), ist ersichtlich, dass die Regelschleife zweiter Ordnung für eine positive Schleifenverstärkung  $K_v I_p / (2\pi N)$  und passive Elemente des Schleifenfilters immer *BIBO*-stabil ist.

Für eine positive Schleifenverstärkung und passive Schleifenfilterelemente ist die notwendige Bedingung  $r_i > 0$  mit  $i = 0, \dots, M = 3$  für den Phasenregelkreis dritter Ordnung ebenfalls erfüllt. Die Auswertung der hinreichenden Bedingungen aus Gleichung (4.5) ergibt

$$C_1 + C_2 > C_2 \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>*BIBO*-Stabilität (*Bounded Input Bounded Output*) beschreibt die Stabilität des Systems in Bezug auf das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Systems.

und ist für einen typischen Schleifenfilter mit  $C_1 > 0$  erfüllt. Das Modell dieses Phasenregelkreises beschreibt somit für reale Bauteilparameter ebenfalls immer einen *BIBO*-stabilen Regelkreis und es zeigt sich deutlich, dass eine Stabilitätsbetrachtung anhand des linearen zeitkontinuierlichen Modells bis zur dritten Ordnung des Systems nicht aussagekräftig ist. Die Realität zeigt, dass die nichtlinearen und schaltende Phasenregelkreise durchaus instabiles Verhalten aufweisen können.

## 4.2. Stabilität des linearen zeitdiskreten Modells

Das zeitkontinuierliche lineare Modell des Phasenregelkreises aus Kapitel 3.1 eignet sich für die Stabilitätsbetrachtung nur bedingt, da dieses Modell für positive Schleifenparameter, die für einen realen Phasenregelkreis gegeben sind, bis zur dritten Ordnung des Systems immer *BIBO*-stabiles Verhalten vorhersagt. Daher wird in [3] von F.M. Gardner das lineare zeitdiskrete Modell für die Stabilitätsuntersuchung verwendet, welches das diskrete Verhalten der Schleife berücksichtigt. Dazu werden Differenzgleichungen der PLL im eingerasteten Bereich aufgestellt, wobei die Annahmen und Vereinfachungen  $\varphi_{\text{ref}} \approx \varphi_{\text{div}}$  und  $T_{\text{ref}} \approx T_{\text{div}}$  getroffen werden. Im Speziellen wird dabei eine Schaltsequenz des Phasen- und Frequenzdetektors betrachtet, die aus einem Überschwinger der VCO-Frequenz resultiert. Basierend auf dem PFD-Zustand lässt sich diese Schaltsequenz durch

$$\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \quad (4.8)$$

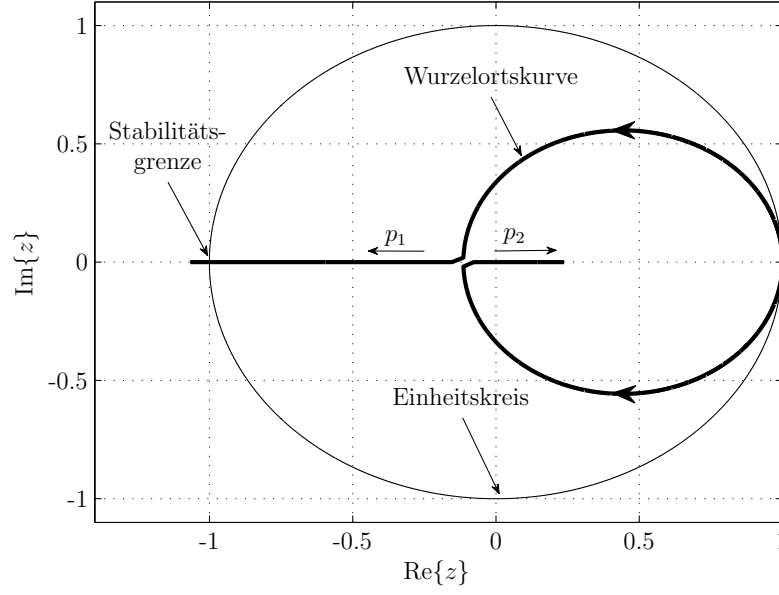
beschreiben. Zur weiteren Vereinfachung werden der Zeitpunkt für den Übergang  $\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0$ , der durch die gesteuerte Flanke des VCO ausgelöst wird, und die Phase des Oszillators approximiert. Mittels dieser Betrachtung lässt sich eine Übertragungsfunktion des linearen zeitdiskreten Modells im  $z$ -Bereich ableiten, dessen Nennerpolynom für das Modell zweiter Ordnung wie folgt angegeben werden kann

$$D(z) = (z - 1)^2 + (z - 1) \frac{2\pi K'}{\omega_{\text{ref}} \tau_1} \left[ 1 + \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}} \tau_1} \right] + \frac{4\pi^2 K'}{\omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2}. \quad (4.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\omega_{\text{ref}}$  die Eingangskreisfrequenz. Des Weiteren ergibt sich  $K' = K_{\varphi} K_{v,\omega} R_1 \tau_1 / N$  und  $\tau_1 = R_1 C_1$  [3]. Für

$$K' < \frac{4}{\left(1 + \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}} \tau_1}\right)^2} \quad (4.10)$$

verlaufen die Nullstellen  $p_i$  auf einem Kreis innerhalb des Einheitskreises (siehe Abb. 4.2 [39]) und das Modell des Phasenregelkreises ist *BIBO*-stabil. Wird der Faktor  $K'$  größer, bewegt sich eine Nullstelle auf der reellen Achse Richtung  $-\infty$ , während die andere Nullstelle auf der reellen Achse den Mittelpunkt des Kreises innerhalb des Einheitskreises anstrebt. Die Nullstellen  $p_i$  des Nennerpolynoms ver-



**Abb. 4.2.:** Wurzelortskurve des linearen Abtastsystems zweiter Ordnung [39]

lassen den Einheitskreis, wenn

$$K' \geq \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} \left(1 + \frac{\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}\right)} \quad (4.11)$$

gilt. In diesem Fall ist das Modell der PLL instabil.

Wird die vorangegangene Betrachtung auf die PLL dritter Ordnung angewendet, ergibt sich das Nennerpolynom zu

$$\begin{aligned} D_3(z) = & z^3 + z^2 \left[ -a - 2 + \beta \left( \frac{2\pi}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} + \frac{(1-a)(b-1)}{b} \right) \right] \\ & + z \left[ 2a + 1 - \beta \left( \frac{2\pi a}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} + \frac{(1-a)(b-1)}{b} \right) \right] - a, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei

$$\beta = \frac{2\pi K\tau_1(b-1)}{b\omega_{\text{ref}}\tau_1} \quad (4.13)$$

gilt. Die daraus resultierende Stabilitätsbedingung ist durch

$$K\tau_1 < \frac{2(1+a)b\omega_{\text{ref}}\tau_1}{\pi(b-1)\left(\frac{2\pi(1+a)}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} + \frac{2(1-a)(b-1)}{b}\right)} \quad (4.14)$$

gegeben [3]. Hierbei gelten die Zusammenhänge

$$b = 1 + \frac{C_1}{C_2} \quad (4.15)$$

und

$$a = e^{-\frac{2\pi b}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}}. \quad (4.16)$$

Des Weiteren ist der Verstärkungsfaktor des geschlossenen Regelkreises mit

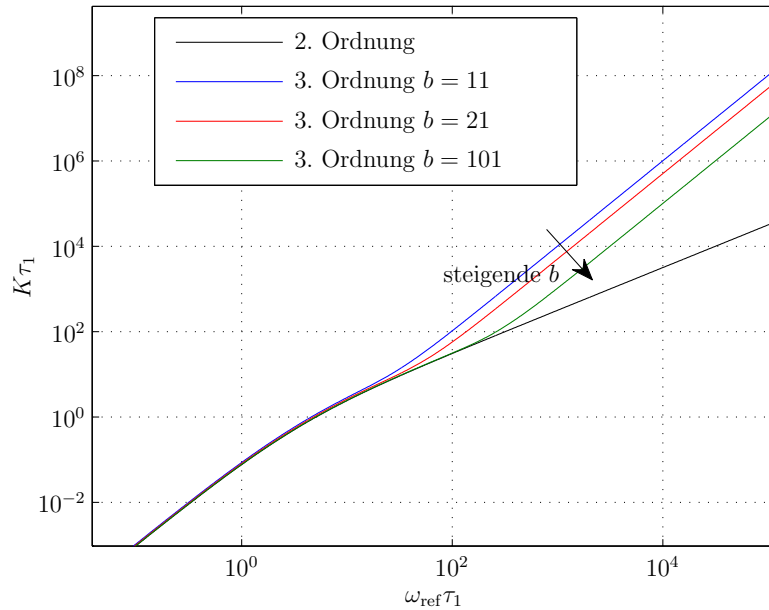
$$K = \frac{K_\varphi K_{v,\omega} R_1}{N} \quad (4.17)$$

definiert und der Schleifenfilterparameter  $\tau_1$  ergibt sich zu

$$\tau_1 = R_1 C_1. \quad (4.18)$$

Für den Grenzübergang des Phasenregelkreises dritter Ordnung zur Regelschleife zweiter Ordnung tendiert die Kapazität  $C_2$  gegen Null und  $b$  somit gegen  $\infty$ . Der Quotient  $b/(b-1)$  lässt sich entsprechend mit eins approximieren und schließlich geht die Stabilitätsbedingung für den Regelkreis dritter Ordnung in das Kriterium der PLL zweiter Ordnung über. Der Vergleich der Grenzen für den Regelkreis zweiter und dritter Ordnung ist in Abb. 4.3 dargestellt. Die Differenz zwischen den Stabilitätsgrenzen des Phasenregelkreises zweiter und dritter Ordnung ist gerade für große  $\omega_{\text{ref}}\tau_1$  erkennbar, wobei der Ablösepunkt beider Grenzen durch  $b$  definiert wird und für  $b \rightarrow \infty$  gegen unendlich verschoben wird.





**Abb. 4.3.:** Grafische Darstellung der Stabilitätsgrenze nach Gardner für den Phasenregelkreis zweiter und dritter Ordnung mit variierendem  $b$

### 4.3. Stabilität basierend auf dem Abtastverhältnis

Die bisher vorgestellten Stabilitätsbedingungen sind entweder für die Auslegung der Regelschleife nur bedingt verwendbar oder liefern komplexe Beziehungen, die sich nur mit entsprechendem Aufwand auswerten lassen. Für den einfachen und schnellen Entwurf des Phasenregelkreises unter Berücksichtigung der Stabilität wird daher oft eine „Daumenregel“ verwendet [7]. Da diese Regel in der Praxis bestätigt werden konnte, lässt sie sich auch als empirische Stabilitätsbedingung bezeichnen. Diese Grenze basiert auf dem Verhältnis der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems, die eine grobe Abschätzung der Schleifenbandbreite ist, und der Kreisfrequenz des Referenzsignals:

$$\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \alpha. \quad (4.19)$$

Diese Bedingung stellt eine Art Abtastverhältnis dieses Regelkreises dar, wobei typischerweise  $\alpha = 10$  definiert wird. Ist die Referenzkreisfrequenz um mindestens eine Größenordnung größer als die Eigenkreisfrequenz des Systems, sodass eine genügende Abtastung des dynamischen Verhaltens gegeben ist, und der Phasenfehler verbleibt innerhalb des Schlauchs  $\pm 2\pi$ , wird bei diesem Ansatz das schaltende Verhalten der PLL vernachlässigt und ein lineares und quasi-kontinuierliches Modell

zugrunde gelegt. Dieses Modell ist für den Phasenregelkreis zweiter und dritter Ordnung *BIBO*-stabil, wie in Kapitel 4.1 gezeigt wird.

Für die bessere Vergleichbarkeit der empirischen Grenze mit der Bedingung von Gardner, lässt sich diese wie folgt umformen. Die Eigenkreisfrequenz des Phasenregelkreises zweiter Ordnung ist mit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{v,\omega} K_\varphi}{N C_1}} \quad (4.20)$$

definiert. Mit dieser Eigenkreisfrequenz und der Gleichung (4.19) lässt sich die empirische Stabilitätsbedingung des Regelkreises zweiter Ordnung in die Gardner-Darstellung (siehe Kapitel 4.2) umformen

$$K \tau_1 < \frac{1}{\alpha^2} (\omega_{\text{ref}} \tau_1)^2. \quad (4.21)$$

Aufgrund des lediglich quadratischen Verlaufes mit  $\omega_{\text{ref}} \tau_1$ , ist diese Bedingung deutlich einfacher auszuwerten, als die Kriterien aus Kapitel 4.2.

Für den Phasenregelkreis dritter Ordnung lässt sich eine Approximation der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{v,\omega} K_\varphi}{N(C_1 + C_2)}} \quad (4.22)$$

aus [1] (S.106 und S.42) verwenden. Wird Gleichung (4.22) in (4.19) eingesetzt, lässt sich die empirische Stabilitätsbedingung in die Form der Gardner-Grenze bringen

$$K \tau_1 < \frac{b}{\alpha^2(b-1)} (\omega_{\text{ref}} \tau_1)^2. \quad (4.23)$$

Es ist ersichtlich, dass auch diese empirische Grenze eine lediglich quadratische Abhängigkeit von  $\omega_{\text{ref}} \tau_1$  aufweist und somit deutlich einfacher auszuwerten und zu analysieren ist. Wird der Grenzübergang des Phasenregelkreises dritter Ordnung hin zur zweiten Ordnung betrachtet, tendiert die Kapazität  $C_2$  gegen Null. Der Term  $b$  wird dabei immer größer und der Quotient  $b/(b-1)$  lässt sich mit eins approximieren. Somit geht die Stabilitätsbedingung des Phasenregelkreises dritter Ordnung für kleiner werdende Kapazitäten  $C_2$  in die Bedingung des Phasenregelkreises zweiter Ordnung über.

## 4.4. Analytische Stabilitätsbedingung basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell

Die vorgestellten Stabilitätsbedingungen basieren auf dem linearen Modell des Phasenregelkreises, welches durch eine frühe Approximation hergeleitet wird. In [30] wird gezeigt, dass diese a priori Linearisierung der einzelnen Komponenten des Phasenregelkreises keine vollständige Analyse erlaubt. Daher wird das ereignisgesteuerte Modell zur Herleitung einer neuen analytischen Stabilitätsbedingung herangezogen. Dieser Ansatz, der eine deutlich spätere Linearisierung verwendet, ermöglicht eine Berücksichtigung von nichtlinearen und nicht-idealen Effekten und vergrößert den Gültigkeitsbereich der Stabilitätsbetrachtung. Eine entsprechende Stabilitätsbedingung für den Phasenregelkreis zweiter Ordnung wird in [39] vorgestellt.

Im Folgenden wird die Stabilitätsbedingung für den Phasenregelkreis dritter Ordnung mittels der indirekten LYAPUNOV-Methode hergeleitet. Ist ein freies und zeit-invariantes nichtlineares System

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \quad (4.24)$$

mit der Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  gegeben, ermöglicht die indirekte LYAPUNOV-Methode einen Rückschluss auf die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems anhand der Stabilitätsanalyse des um die Ruhelage linearisierten Systems (vgl. [81]). Ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  nicht Null, lässt sich dies durch eine Koordinatentransformation erreichen. Für die Linearisierung lässt sich die Taylorreihenentwicklung um die Ruhelage nach dem ersten Glied abbrechen. Es gilt

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{r}(\mathbf{x}_n), \quad (4.25)$$

wobei  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_n)$  die Restglieder der Taylorreihe beschreibt und  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  gilt. Die Restglieder der Taylorreihe konvergieren für  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$  schneller gegen Null als die Norm des Zustandsvektors

$$\lim_{\|\mathbf{x}_n\| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x}_n)}{\|\mathbf{x}_n\|} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

und das nichtlineare System lässt sich in der Form

$$\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad (4.27)$$

darstellen. Die Stabilitätsprüfung der Ruhelage basiert nunmehr auf der Analyse des charakteristischen Polynoms der Matrix  $\mathbf{A}$  mittels des JURY-Kriteriums für lineare zeitdiskrete Systeme [82]. Liegen alle Nullstellen dieses Polynoms innerhalb des Einheitskreises, ist das linearisierte System asymptotisch stabil und mittels der indirekten LYAPUNOV-Methode ist somit die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  des nichtlinearen Systems ebenfalls asymptotisch stabil [81].

Da sich das ereignisgesteuerte Modell des Phasenregelkreis jedoch als zeitvariantes, nichtlineares und gesteuertes Gleichungssystem

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n, \varphi_{\text{ref},n}, t_n) \quad (4.28)$$

mit  $\mathbf{x}_n = [u_{\text{ctl},n}, u_{\text{c1},n}, \varphi_{\text{e},n}]^T$  darstellt (siehe folgendes Kapitel und vgl. Kapitel 3.3), wird im Folgenden ein freies und zeitinvariantes Gleichungssystem hergeleitet, dass sich auch als ein autonomes Differenzengleichungssystem bezeichnen lässt. Hierzu werden die Gleichungen der Schleifenfilterspannungen  $u_{\text{ctl}}(t)$ ,  $u_{\text{c1}}(t)$  und des Phasenfehlers  $\varphi_{\text{e}}(t)$  zugrunde gelegt. Die CP-PLL stellt ein schaltendes System dar, sodass das Gleichungssystem jeweils zwischen den Schaltzeitpunkten ausgewertet wird. Da diese Schaltzeitpunkte wiederum von den Schleifenfilterspannungen beeinflusst werden, ist das Gleichungssystem nichtlinear. Dieses wird hier zunächst linearisiert. Anschließend werden die resultierenden Gleichungen in ein Differenzengleichungssystem überführt, dass nicht explizit von der Zeit und der Eingangsgröße abhängt. Solche Differenzengleichungen werden autonom genannt [83]. Mittels des Jury-Kriteriums für lineare Differenzengleichungen lässt sich dann das lineare, zeitinvariante und zeitdiskrete Modell auf Stabilität prüfen. Die indirekte LYAPUNOV-Methode erlaubt schließlich einen Rückschluss auf die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Phasenregelkreises. Es wird gezeigt, dass sich trotz der späteren Linearisierung Stabilitätsbedingungen mit lediglich quadratischer Abhängigkeit von  $\omega_{\text{ref}}\tau_1$  ergeben.

#### 4.4.1. Herleitung autonomer Differenzengleichungen

Da für die Herleitung der Stabilitätsbedingungen des Phasenregelkreises dritter Ordnung keine a priori Linearisierung verwendet wird, werden die exakten Gleichungen der Schleifenfilterspannungen

$$\begin{aligned} u_{\text{c1}}(t) = & \frac{C_2 \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\} \right) u_{\text{ctl}}(t_0)}{C_2 + C_1} \\ & + \frac{\left( C_2 \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\} + C_1 \right) u_{\text{c1}}(t_0)}{C_2 + C_1} \\ & + \frac{i_{\text{p}}(t_0) (C_1 + C_2) (t - t_0)}{(C_2 + C_1)^2} \\ & + \frac{i_{\text{p}}(t_0) R_1 C_1 C_2 \left( \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\} - 1 \right)}{(C_2 + C_1)^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

und

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ctl}}(t) &= \frac{\left(C_1 \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\} + C_2\right) u_{\text{ctl}}(t_0)}{C_2 + C_1} \\
 &+ \frac{C_1 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\}\right) u_{\text{c1}}(t_0)}{C_2 + C_1} \\
 &+ \frac{i_{\text{p}}(t_0) (C_1 + C_2) (t - t_0)}{(C_2 + C_1)^2} \\
 &+ \frac{i_{\text{p}}(t_0) R_1 C_1^2 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t-t_0)}{R_1 C_1 C_2} \right\}\right)}{(C_2 + C_1)^2}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

verwendet. Diese resultieren aus der Zustandsraumdarstellung des Schleifenfilters in Abb. 2.8 (siehe auch Kap. 2.2.1) und der Lösung des Zustandsvektors

$$\mathbf{x}_{\text{LF}}(t) = \begin{bmatrix} u_{\text{ctl}}(t) \\ u_{\text{c1}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t - t_0) \mathbf{x}_{\text{LF}}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{b}_2 i_{\text{p}}(\tau) \, d\tau, \tag{4.31}$$

wobei  $\mathbf{\Phi}(t - t_0)$  die Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t - t_0) = e^{\mathbf{A}_2(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_2^k \frac{(t - t_0)^k}{k!} \tag{4.32}$$

ist. Für die schaltende CP-PLL wird dieses Gleichungssystem zwischen den Schaltzeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ausgewertet.  $t_{n+1}$  wird dabei wiederum durch die Schleifenfilterspannungen  $u_{\text{ctl}}$  und  $u_{\text{c1}}$  zum Zeitpunkt  $t_n$  beeinflusst (siehe Kap. 3.3), sodass sich die explizit von der Zeit abhängigen und nichtlinearen Gleichungen der Spannungen

$$\begin{aligned}
 u_{\text{c1},n+1} &= \frac{C_2 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\}\right) u_{\text{ctl},n}}{C_2 + C_1} \\
 &+ \frac{\left(C_2 \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\} + C_1\right) u_{\text{c1},n}}{C_2 + C_1} \\
 &+ \frac{i_{\text{p},n} (C_1 + C_2) (t_{n+1} - t_n)}{(C_2 + C_1)^2} \\
 &+ \frac{i_{\text{p},n} R_1 C_1 C_2 \left(\exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\} - 1\right)}{(C_2 + C_1)^2},
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\text{ctl},n+1} = & \frac{\left(C_1 \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\} + C_2\right) u_{\text{ctl},n}}{C_2 + C_1} \\
 & + \frac{C_1 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\}\right) u_{\text{c1},n}}{C_2 + C_1} \\
 & + \frac{i_{\text{p},n} (C_1 + C_2) (t_{n+1} - t_n)}{(C_2 + C_1)^2} \\
 & + \frac{i_{\text{p},n} R_1 C_1^2 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{(C_2+C_1)(t_{n+1}-t_n)}{R_1 C_1 C_2} \right\}\right)}{(C_2 + C_1)^2}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

und des Phasenfehlers

$$\varphi_{\text{e},n+1} = \varphi_{\text{ref},n+1}(\varphi_{\text{ref},n}, f_{\text{ref}}, t_{n+1} - t_n) - \varphi_{\text{div},n+1}(\varphi_{\text{div},n}, u_{\text{ctl},n}, u_{\text{c1},n}, i_{\text{p},n}, t_{n+1} - t_n) \tag{4.35}$$

ergeben. Hierbei stellt der tiefgestellte Index  $n$  den Zeitpunkt  $t_n$  dar ( $u_{\text{ctl},n} = u_{\text{ctl}}(t_n)$ ). Der Index  $n + 1$  beschreibt entsprechend den Zeitpunkt  $t_{n+1}$ . Aufgrund der Übersichtlichkeit wird diese Notation im weiteren Verlauf dieses Kapitels verwendet. Für die spätere Stabilitätsbetrachtung werden an dieser Stelle die explizit von der Zeit abhängigen und nichtlinearen Gleichungen linearisiert und in autonome Differenzengleichungen überführt. Da dies keine a priori Linearisierung darstellt, lassen sich in den nichtlinearen Gleichungen die nicht-idealen Effekte berücksichtigen, sodass deren Eigenschaften mit in die linearisierte Darstellung einfließen. Im Folgenden werden die Linearisierung und die Überführung in autonome Differenzengleichungen vorgestellt.

Für die Linearisierung der Gleichungen (4.33) und (4.34) hinsichtlich  $t_{n+1}$  wird **im ersten Schritt** die Taylorreihe der Spannungen um den Zeitpunkt  $t_n$  entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen. Es resultieren

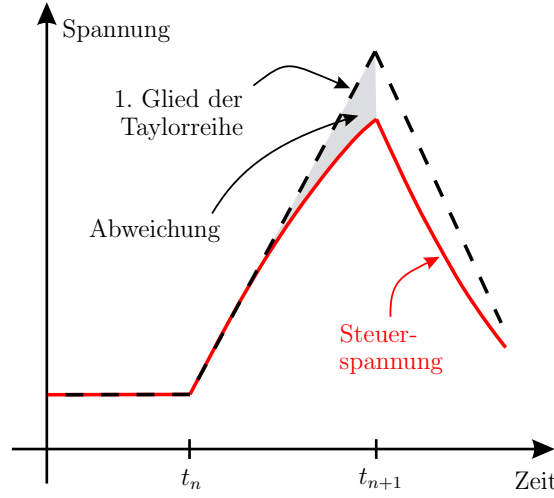
$$u_{\text{c1},n+1}^{\text{lin}} = u_{\text{c1},n}^{\text{lin}} + \frac{1}{R_1 C_1} (u_{\text{ctl},n}^{\text{lin}} - u_{\text{c1},n}^{\text{lin}}) (t_{n+1} - t_n) \tag{4.36}$$

und

$$u_{\text{ctl},n+1}^{\text{lin}} = u_{\text{ctl},n}^{\text{lin}} + \left( \frac{1}{R_1 C_2} (u_{\text{c1},n}^{\text{lin}} - u_{\text{ctl},n}^{\text{lin}}) + \frac{i_{\text{p},n}}{C_2} \right) (t_{n+1} - t_n), \tag{4.37}$$

wobei  $u_{\text{ctl},n}^{\text{lin}}$  und  $u_{\text{c1},n}^{\text{lin}}$  den linearen Zusammenhang der Spannungen mit der Zeit im Punkt  $t_n$  beschreiben. Der sich ergebende Approximationsfehler (siehe Abb. 4.4) ist maßgeblich von den Regelschleifenparametern abhängig, zum Beispiel den Zeitkonstanten des Schleifenfilters, dem Strom der Ladungspumpe und dem aktuellen Zustand der Regelung (z.B. Zeitdifferenz  $t_{n+1} - t_n$  zwischen zwei aufeinander folgenden

den Ereignissen und den Kapazitätsspannungen). Da der Schleifenfilter maßgeblich



**Abb. 4.4.:** Darstellung der Taylor-Approximation erster Ordnung der Spannungen

die Dynamik des Regelkreises bestimmt, werden für die Beurteilung des Approximationsfehlers die Taylor-Restglieder

$$\chi_1 = u_{\text{ctl},n+1} - u_{\text{ctl},n+1}^{\text{lin}} \quad (4.38)$$

und

$$\chi_2 = u_{\text{c1},n+1} - u_{\text{c1},n+1}^{\text{lin}} \quad (4.39)$$

für verschiedene Grenzwerte der Kapazitäten und Widerstände des passiven Schleifenfilters betrachtet. Die Grenzwerte der Kapazitätsspannungen werden dabei nicht betrachtet, da diese durch die Versorgungsspannung beschränkt sind und deren Einfluss auf die Taylor-Restglieder somit begrenzt ist. Bei der Auswertung von  $\chi_1$  und  $\chi_2$  wird angenommen, dass die Kapazitätsspannungen der Bedingung

$$u_{\text{c1},n} = a_u \cdot u_{\text{ctl},n} = u_{\text{c1},n}^{\text{lin}} = a_u \cdot u_{\text{ctl},n}^{\text{lin}} \quad (4.40)$$

genügen und positiv sind. Der Faktor  $a_u$  bleibt für eine typische CP-PLL nahe eins, da die Spannungsdifferenzen beider Kapazitäten durch Umladeprozesse im Zustand  $\mathcal{S}_0$  des PFD (siehe Abb. 2.6) ausgeglichen werden. Die weitere Annahme, dass die linearen Spannungen im Zeitpunkt  $t_n$  gleich den nichtlinearen Spannungen sind, ist durch die Linearisierung in  $t_n$  gegeben. Darüber hinaus werden  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  und  $t_{n+1} - t_n$  sowohl positiv als auch rein reell vorausgesetzt.  $i_p$  und  $a_u$  sind ebenfalls rein reell. Die Auswertung der Restglieder  $\chi_1$  und  $\chi_2$  ist in Tab. 4.1 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass sich für steigende Schleifenfilterparameter die Spannungsgleichungen besser mittels der linearen Approximation abbilden lassen. Hierbei ist zu bemerken,

#### 4. STABILITÄT DER MODELLIERTEN IDEALEN CP-PLL

**Tab. 4.1.:** Grenzwerte der Taylor-Restglieder für die Anfangsbedingungen  $u_{c1,n} = a \cdot u_{ctl,n} = u_{c1,n}^{\text{lin}} = a_u \cdot u_{ctl,n}^{\text{lin}}$

	$\chi_1$	$\chi_2$
$\lim_{C_1 \rightarrow +0}$	$g_1(u_{ctl,n}, a_u, (t_{n+1} - t_n), R_1, C_2)$	$\infty \cdot \text{sgn}(a_u - 1)$
$\lim_{C_2 \rightarrow +0}$	$-\infty \cdot \text{sgn}(u_{ctl,n}(a_u - 1) + i_{p,n} R_1)$	$g_2(u_{ctl,n}, a_u, (t_{n+1} - t_n), i_{p,n}, R_1, C_1)$
$\lim_{R_1 \rightarrow +0}$	$-\infty \cdot \text{sgn}(u_{ctl,n}(a_u - 1))$	$\infty \cdot \text{sgn}(u_{ctl,n}(a_u - 1))$
$\lim_{C_1 \rightarrow \infty}$	$g_3(u_{ctl,n}, a_u, (t_{n+1} - t_n), i_{p,n}, R_1, C_2)$	$+0$
$\lim_{C_2 \rightarrow \infty}$	$+0$	$g_4(u_{ctl,n}, a_u, (t_{n+1} - t_n), R_1, C_1)$
$\lim_{R_1 \rightarrow \infty}$	$+0$	$+0$

dass der Betrag der Funktionen  $g_1(\cdot)$  bis  $g_4(\cdot)$  für typische CP-PLLs sehr viel kleiner als eins ist. Speziell für kleine Zeitdifferenzen  $(t_{n+1} - t_n) \rightarrow 0$  verschwinden auch die Funktionen  $g_1(\cdot)$  bis  $g_4(\cdot)$ .

In Hardware-Realisierungen wird der Schleifenfilter oft vorgeladen bevor die Regelung frei gegeben wird (vgl. Kapitel 6), wodurch die Spannungen über den Kapazitäten bei Beginn der Regelung identisch sind und sich die Bedingung  $a_u = 1$  ergibt. Dies hat den Vorteil, dass die Regelung immer von einem definierten Zustand startet. Für diesen speziellen Fall ergibt sich die Grenzwertbetrachtung der Taylor-Restglieder aus Tab. 4.2. In dieser Tabelle ist zu erkennen, dass die lineare

**Tab. 4.2.:** Grenzwerte der Taylor-Restglieder für die Anfangsbedingungen  $u_{c1,n} = u_{ctl,n} = u_{c1,n}^{\text{lin}} = u_{ctl,n}^{\text{lin}}$  ( $a_u = 1$ )

	$\chi_1$	$\chi_2$
$\lim_{C_1 \rightarrow +0}$	$+0$	$\frac{i_{p,n}}{C_2}(t_{n+1} - t_n)$
$\lim_{C_2 \rightarrow +0}$	$-\infty \cdot \text{sgn}(i_{p,n})$	$\frac{i_{p,n}}{C_1}(t_{n+1} - t_n)$
$\lim_{R_1 \rightarrow +0}$	$-\frac{i_{p,n} C_1}{C_2(C_1 + C_2)}(t_{n+1} - t_n)$	$\frac{i_{p,n}}{C_1 + C_2}(t_{n+1} - t_n)$
$\lim_{C_1 \rightarrow \infty}$	$\frac{i_{p,n}}{C_2} \left[ R_1 C_2 \left( 1 - e^{-\frac{(t_{n+1} - t_n)}{R_1 C_2}} \right) - (t_{n+1} - t_n) \right]$	$+0$
$\lim_{C_2 \rightarrow \infty}$	$+0$	$+0$
$\lim_{R_1 \rightarrow \infty}$	$+0$	$+0$

Approximation der Spannungsgleichungen für große Schleifenfilterparameter besser wird. Für  $(t_{n+1} - t_n) \rightarrow 0$  konvergiert auch  $\chi_1$  für  $C_1 \rightarrow \infty$  gegen Null.

Da die hier approximierten Spannungen eine größere Steigung als die nichtlinearen Spannungen aufweisen, ist die Schleifendynamik der Approximation größer als



die des nichtlinearen Systems. Für abnehmende Zeitkonstanten des Schleifenfilters nimmt der Unterschied der Schleifendynamik der Approximation und des nichtlinearen Systems weiter zu. Diese Schleifendynamik lässt sich, analog zum linearen Modell in Kapitel 3.1, als Schleifenverstärkung interpretieren. Basierend auf den Resultaten aus Kapitel 4.2 und 4.3 ist ein System mit größerer Schleifenverstärkung jedoch weniger stabil. Daher stellt die hier eingeführte Approximation eine konservativere Abschätzung bezüglich der Stabilität dar als das zugrunde liegende nichtlineare und nicht approximierte ereignisgesteuerte Modell. Es ist daher zu erwarten, dass die Stabilitätsbedingungen basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell und dieser Linearisierung zu konservativen Kriterien führen. Für die Herleitung der Stabilitätsbedingungen sind die Restglieder der Taylorreihen somit nur bedingt relevant, da sie lediglich die Güte der Approximation und den Grad des Konservatismus darstellen. Für die Beurteilung der sich ergebenden Stabilitätsbedingungen, basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell, lässt sich die Auswertung der Taylor-Restglieder jedoch heranziehen. Dies wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels erläutert.

Zur Berechnung der Ereignisse  $t_{n+1}$  basierend auf der Approximation werden die Spannungsgleichungen (4.36) und (4.37) geeignet normiert und zusammengefasst. Schließlich ergeben sich die Spannungen zu

$$v_{c1,n+1} = v_{c1,n} + \left( \frac{v_{ctl,n} - v_{c1,n}}{a_1} \right) \frac{\Delta t_{n+1}}{T_{\text{ref}}} \quad (4.41)$$

und

$$v_{ctl,n+1} = v_{ctl,n} + \left( \frac{v_{c1,n} - v_{ctl,n}}{a_2} + b_{1,n} \right) \frac{\Delta t_{n+1}}{T_{\text{ref}}}, \quad (4.42)$$

wobei

$$a_1 = \frac{R_1 C_1}{T_{\text{ref}}}, \quad (4.43)$$

$$a_2 = \frac{R_1 C_2}{T_{\text{ref}}}, \quad (4.44)$$

$$b_{1,n} = \frac{i_{p,n} K_v T_{\text{ref}}^2}{C_2}, \quad (4.45)$$

$$v_{ctl,c1}(t) = K_v T_{\text{ref}} u_{ctl,c1}^{\text{lin}}(t) \quad (4.46)$$

und

$$\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n \quad (4.47)$$

gilt. Des Weiteren ist  $T_{\text{ref}}$  die Periodendauer des Referenzsignals. Aus den Spannungen und der allgemeinen Phasengleichung des Dividierers ergibt sich die Berechnungsvorschrift der Phase des Dividierersignals zu

$$\zeta_{\text{div},n+1} = \zeta_{\text{div},n} + \frac{1}{N_n} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n}}{a_2} + b_{1,n} \right) \frac{\Delta t_{n+1}^2}{T_{\text{ref}}^2} + v_{\text{ctl},n} \frac{\Delta t_{n+1}}{T_{\text{ref}}} \right]. \quad (4.48)$$

Hierbei beschreibt  $\zeta_{\text{div}}$  die Normierung der Phase auf

$$\zeta_{\text{div}}(t) = \frac{\varphi_{\text{div}}(t)}{2\pi}. \quad (4.49)$$

Für die Berechnung des Ereignisses des Dividierersignals wird die normierte Phase  $\zeta_{\text{div},n+1}$  gleich eins gesetzt und ausgewertet. Es resultiert die Gleichung

$$\frac{\Delta t_2}{T_{\text{ref}}} = \frac{-v_{\text{ctl},n} + \sqrt{(v_{\text{ctl},n})^2 + 2 \left( \frac{v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n}}{a_2} + b_{1,n} \right) N_n (1 - \zeta_{\text{div},n})}}{\left( \frac{v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n}}{a_2} + b_{1,n} \right)}. \quad (4.50)$$

$\Delta t_2$  stellt dabei die Differenz von  $t_{n+1}^{\text{div}}$  und  $t_n$  dar. Für den Fall

$$\frac{v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n}}{a_2} + b_{1,n} = 0 \quad (4.51)$$

wird die beschriebene Herleitung des Dividiererereignisses etwas einfacher und es ergibt sich schließlich die Berechnungsvorschrift

$$\frac{\Delta t_2}{T_{\text{ref}}} = \frac{(1 - \zeta_{\text{div},n}) N_n}{v_{\text{ctl},n}}. \quad (4.52)$$

Die Gleichungen für die Phase und den Zeitpunkt des Ereignisses des Referenzsignals ergeben sich analog zum bisherigen Vorgehen zu

$$\frac{\Delta t_1}{T_{\text{ref}}} = 1 - \zeta_{\text{ref},n} \quad (4.53)$$

und

$$\zeta_{\text{ref},n+1} = \zeta_{\text{ref},n} + \frac{\Delta t_{n+1}}{T_{\text{ref}}}, \quad (4.54)$$

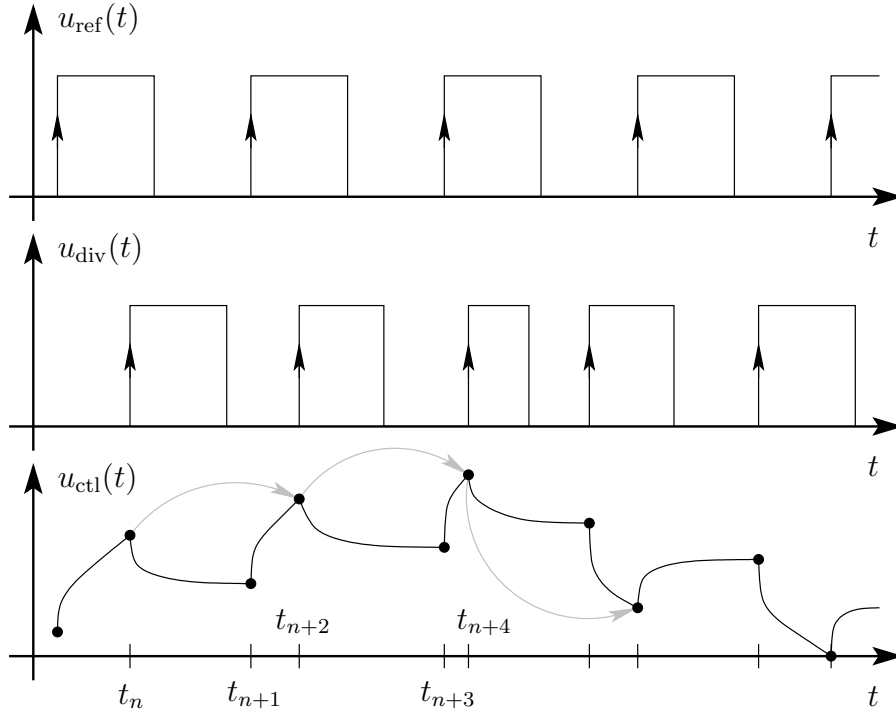
wobei  $\Delta t_1$  die Differenz von  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_n$  definiert. Der Zeitpunkt des neuen Ereignisses lässt sich schließlich mittels

$$\Delta t_{n+1} = \min \{ \Delta t_1, \Delta t_2 \} \quad (4.55)$$

bestimmen und der normierte Phasenfehler ist durch

$$\zeta_{e,n} = \zeta_{\text{ref},n} - \zeta_{\text{div},n} \quad (4.56)$$

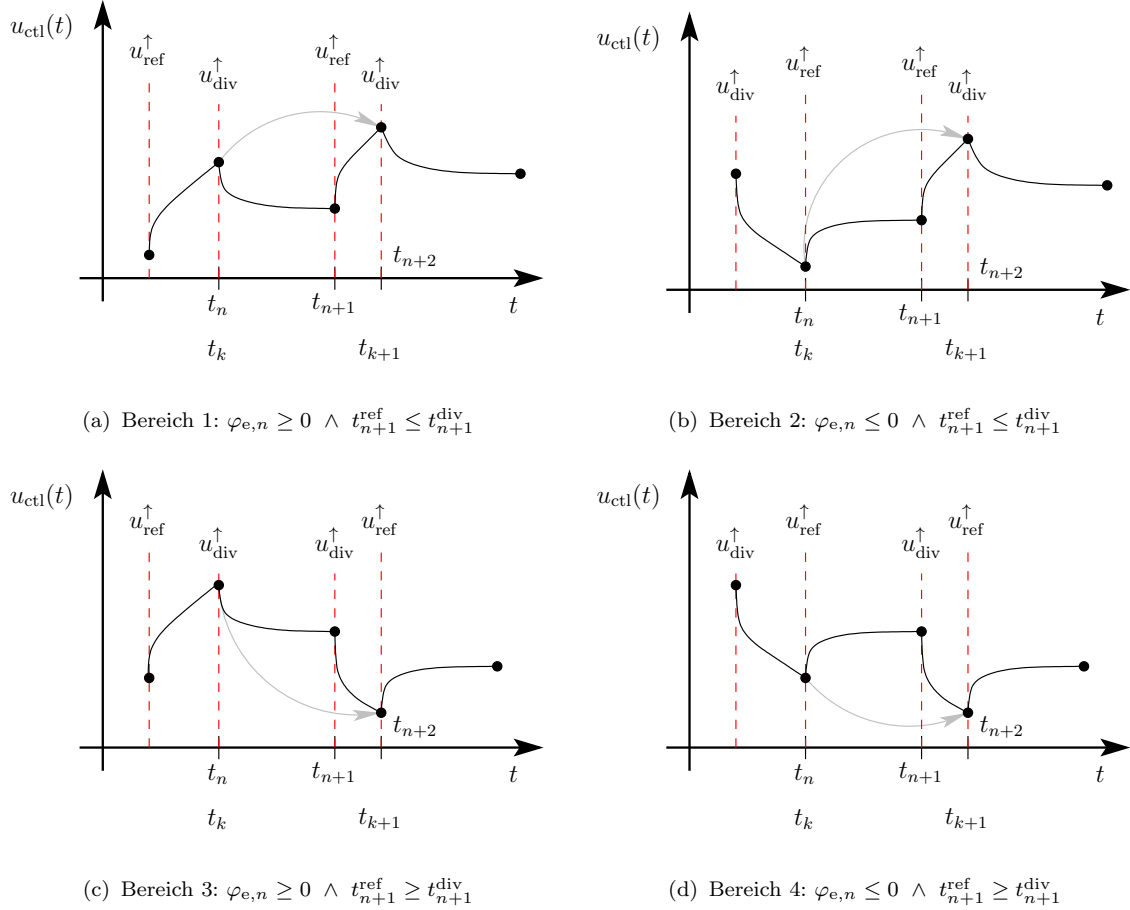
gegeben.



**Abb. 4.5.:** Verlauf der Steuerspannung einer PLL dritter Ordnung zur Verdeutlichung des Grundprinzips des erweiterten ereignisgesteuerten Modells

Da diese Gleichungen noch explizit von der Zeit und der Eingangsgröße abhängen, werden diese im weiteren Verlauf in autonome Differenzengleichungen überführt. Hierzu wird **im zweiten Schritt** der Ansatz des ereignisgesteuerten Modells erweitert. Diese Erweiterung betrachtet lediglich die Ereignisse, in denen der Folgezustand des Phasendetektors  $\mathcal{S}_0$  ist, wodurch die Abhängigkeit der Gleichungen von der Zeit und der Eingangsgröße nur noch implizit gegeben ist. In Abb. 4.5 ist dieses Prinzip veranschaulicht. Für die Berechnung dieser Differenzengleichungen werden die Zustände des Phasenregelkreises ( $v_{c1}$ ,  $v_{ctl}$  und  $\zeta_e$ ) zum Zeitpunkt  $t_{n+2}$  in Abhängigkeit von den Zuständen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  bestimmt, wobei diese wiederum durch die Zustände in  $t_n$  definiert werden. Es ergibt sich somit ein Doppelschritt der Berechnungsvorschrift von  $t_n$  direkt zu  $t_{n+2}$  und die Berechnungen bei  $t_{n+1}$  sind nur noch implizit enthalten. Hierzu werden die Gleichungen (4.41), (4.42) und (4.56) zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  in die Gleichungen (4.41), (4.42) und (4.56) zum Zeitpunkt  $t_{n+2}$  eingesetzt. Da die Gleichung des Phasenfehlers vom Zustand des Phasendetektors

abhängt (zu jedem Ereignis ist entweder die Phase des Referenzsignals oder die Phase des Dividierersignals gleich Null), ergeben sich für den eingerasteten Bereich vier Fälle für die Herleitung der autonomen Differenzgleichungen. Die vier Fallunterscheidungen sind den Abb. 4.6(a) bis 4.6(d) zu entnehmen.



**Abb. 4.6.:** Darstellung der Steuerspannung zur Verdeutlichung der Fallunterscheidung für die Herleitung der Differenzgleichungen

Der Zustandsraum des Phasenregelkreises lässt sich in die vier Bereiche

**Bereich 1:**  $\varphi_{e,n} \geq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \leq t_{n+1}^{\text{div}}$ ,

**Bereich 2:**  $\varphi_{e,n} \leq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \leq t_{n+1}^{\text{div}}$ ,

**Bereich 3:**  $\varphi_{e,n} \geq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \geq t_{n+1}^{\text{div}}$  und

**Bereich 4:**  $\varphi_{e,n} \leq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \geq t_{n+1}^{\text{div}}$ .

unterteilen. Diese vier Bereiche bilden sowohl den positiven und den negativen Beschleunigungsbereich als auch den Über- und Unterschinger der Ausgangsfrequenz

des VCO-Signals ab. Für die Darstellung der vier Bereiche im Zustandsraum des Phasenregelkreises, auch Phasenplan genannt, werden die Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen berechnet und dreidimensional veranschaulicht. Die Grenze zwischen den Bereichen 1 und 3 wird durch die Zeitpunkte der Ereignisse von Referenz- und Dividierersignal bestimmt. Werden die Zeitpunkte  $t_{n+1}^{\text{ref}}$  und  $t_{n+1}^{\text{div}}$  gleichgesetzt, lässt sich die Grenze  $\zeta_{e,g,1,n}$  für die gegebenen Spannungen  $v_{\text{ctl},n}$  und  $v_{\text{c1},n}$  berechnen

$$\zeta_{e,g,1,n} = -\frac{-a_2 v_{\text{ctl},n} + a_2 \sqrt{\frac{v_{\text{ctl},n}^2 a_2 + 2N_n v_{\text{c1},n} - 2N_n v_{\text{ctl},n+1}}{a_2}} + v_{\text{c1},n} + v_{\text{ctl},n}}{v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n}}. \quad (4.57)$$

Für den Fall gleicher Spannungen ( $v_{\text{c1},n} - v_{\text{ctl},n} = 0$ ) ergibt sich die Grenzfläche zu

$$\zeta_{e,g,2,n} = -\frac{N_n - v_{\text{ctl},n}}{v_{\text{ctl},n}}. \quad (4.58)$$

Die Betrachtung für die Bereiche 2 und 4 ist analog und für die Grenzfläche gilt

$$\zeta_{e,g,3,n} = \frac{-v_{\text{c1},n} + 2N_n a_2 + v_{\text{ctl},n} - 2a_2 v_{\text{ctl},n}}{2N_n a_2}. \quad (4.59)$$

Des Weiteren existiert eine Grenzfläche für den Phasenfehler  $\zeta_{e,n} = 0$ , die sowohl die Bereiche 1 und 2 als auch die Bereiche 3 und 4 voneinander trennt. Mit diesen Gleichungen ergibt sich die Unterteilung des Zustandsraums der PLL in Abb. 4.7. Hierbei bezeichnet  $v_t$  die normierten Zielspannungen der Kapazitäten des Schleifenfilters für den ausgeregelten Zustand des Phasenregelkreises. Es ist zu erkennen, dass die Grenzfläche zwischen den Bereichen 2 und 4 linear ist, wobei die Grenzfläche für die Bereiche 1 und 3 eine Polstelle für steigende  $\zeta_{e,n}$  aufweist. Diese Unterteilung zeigt, dass die Ruhelage des Phasenregelkreises im Schnittpunkt der vier Bereiche liegt. Daher ist es notwendig, dass alle vier Bereiche für das Simulationsmodell mittels der autonomen Differenzgleichungen berücksichtigt werden. Die Berechnungsvorschriften für dieses Modell des Phasenregelkreises werden im Folgenden angegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird für die Definition des Differenzgleichungssystem der neue Zeitindex  $k$  eingeführt. Hierbei geht  $t_{n+2}$  in  $t_{k+1}$  über und  $t_n$  wird zu  $t_k$ . Die entsprechende Definition ist in Abb. 4.6 veranschaulicht. Für die kürzere Notation gilt im weiteren Verlauf  $v_{\text{c1},k} = v_{\text{c1}}(t_k)$ .

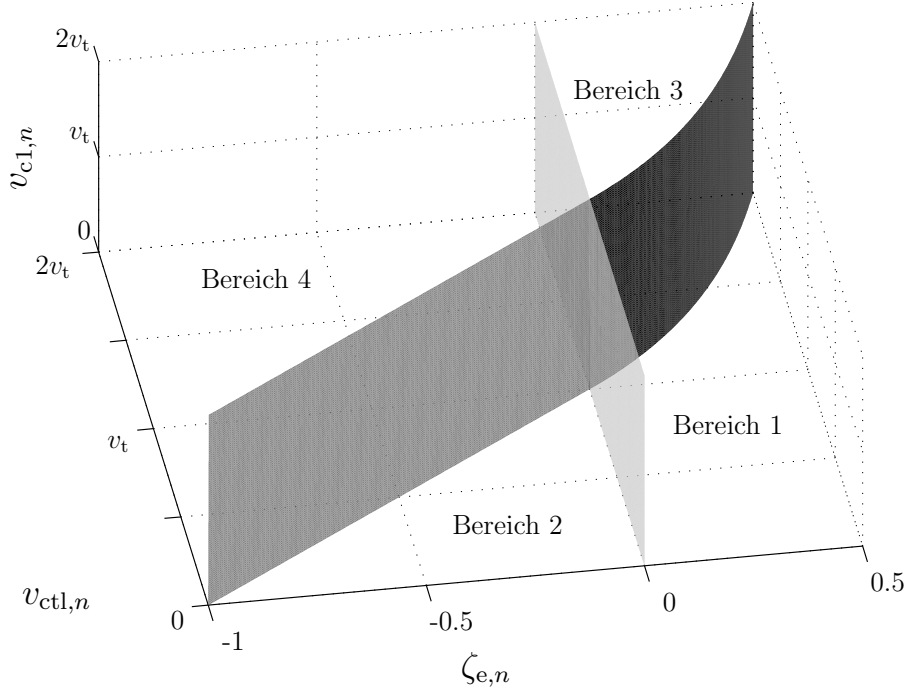


Abb. 4.7.: Aufteilung des Zustandsraums der PLL

Für **Bereich 1** werden die Differenzengleichungen durch

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F1}} = v_{\text{cl},k} + \frac{(v_{\text{ctl},k} - v_{\text{cl},k})(1 - \zeta_{\text{e},k})}{a_1} - \frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_1 \left( \frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_2} + b_1 \right)} \cdot \left( -\alpha_k^{\text{F1}} + \sqrt{(\alpha_k^{\text{F1}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_2} + b_1 \right) \zeta_k s_k^{\text{F1}}} \right), \quad (4.60)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F1}} = \sqrt{(\alpha_k^{\text{F1}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_2} + b_1 \right) \zeta_k s_k^{\text{F1}}} \quad (4.61)$$

und

$$\zeta_{\text{e},k+1}^{\text{F1}} = \frac{1}{\frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_2} + b_1} \left( -\alpha_k^{\text{F1}} + \sqrt{(\alpha_k^{\text{F1}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F1}}}{a_2} + b_1 \right) \zeta_k s_k^{\text{F1}}} \right) \quad (4.62)$$

definiert, wobei

$$\alpha_k^{\text{F1}} = v_{\text{ctl},k} - \frac{(v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k})(1 - \zeta_{\text{e},k})}{a_2}, \quad (4.63)$$

$$\beta_k^{\text{F1}} = (v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}) \left( \frac{1 - \zeta_{\text{e},k}}{a_1} + \frac{1 - \zeta_{\text{e},k}}{a_2} - 1 \right), \quad (4.64)$$

$$\xi_k = N_{\text{i}} + \Gamma(\vartheta_k + N_{\text{f}} - \kappa_k), \quad (4.65)$$

$$s_k^{\text{F1}} = \left( 1 - \frac{(1 - \zeta_{\text{e},k})(\alpha_k^{\text{F1}} + v_{\text{ctl},k})}{2(N_{\text{i}} + \kappa_k)} \right) \quad (4.66)$$

und

$$b_1 = \frac{I_{\text{p}} K_{\text{v}} T_{\text{ref}}^2}{C_2} \quad (4.67)$$

gilt.  $\vartheta_k$  und  $\kappa_k$  werden durch die Differenzengleichungen des  $\Sigma\Delta$ -Modulators aus Gleichung (2.26) definiert.

Die Gleichungen für **Bereich 2** lauten

$$\begin{aligned} v_{\text{c1},k+1}^{\text{F2}} &= v_{\text{c1},k} + \frac{(v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k})}{a_1} - \frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_1 \left( \frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_2} + b_1 \right)} \\ &\quad \cdot \left( -\alpha_k^{\text{F2}} + \sqrt{(\alpha_k^{\text{F2}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_2} + b_1 \right) \xi_k s_k^{\text{F2}}} \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F2}} = \sqrt{(\alpha_k^{\text{F2}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_2} + b_1 \right) \xi_k s_k^{\text{F2}}} \quad (4.69)$$

und

$$\zeta_{\text{e},k+1}^{\text{F2}} = \frac{1}{\frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_2} + b_1} \left( -\alpha_k^{\text{F2}} + \sqrt{(\alpha_k^{\text{F2}})^2 + 2 \left( \frac{\beta_k^{\text{F2}}}{a_2} + b_1 \right) \xi_k s_k^{\text{F2}}} \right), \quad (4.70)$$

wobei

$$\alpha_k^{\text{F2}} = v_{\text{ctl},k} - \frac{(v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k})}{a_2}, \quad (4.71)$$

$$\beta_k^{\text{F2}} = (v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1 \right) \quad (4.72)$$

und

$$s_k^{\text{F2}} = \left( 1 + \zeta_{\text{e},k} - \frac{(\alpha_k^{\text{F2}} + v_{\text{ctl},k})}{2(N_{\text{i}} + \kappa_k)} \right) \quad (4.73)$$

gilt.

Im **Bereich 3** ergeben sich die Differenzgleichungen

$$\begin{aligned} v_{\text{c1},k+1}^{\text{F3}} = & v_{\text{c1},k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F3}} + \frac{1}{a_1} \left( \delta_k^{\text{F3}} - v_{\text{c1},k} + \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F3}} \right) \\ & \cdot \left( 1 - \zeta_{\text{e},k} + \frac{a_2}{v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}} \sigma_k^{\text{F3}} \right), \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F3}} = \delta_k^{\text{F3}} + \left( \frac{v_{\text{c1},k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F3}} - \delta_k^{\text{F3}}}{a_2} + b_2 \right) \left( 1 - \zeta_{\text{e},k} + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F3}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}} \right) \quad (4.75)$$

und

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{e},k+1}^{\text{F3}} = & -\frac{1}{N_{\text{i}} + \kappa_k} \left[ \left( \frac{v_{\text{c1},k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F3}} - \delta_k^{\text{F3}}}{2a_2} + \frac{b_2}{2} \right) \right. \\ & \cdot \left( 1 - \zeta_{\text{e},k} + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F3}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}} \right)^2 + \delta_k^{\text{F3}} \left( 1 - \zeta_{\text{e},k} + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F3}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k}} \right) \left. \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

wobei

$$\delta_k^{\text{F3}} = \sqrt{v_{\text{ctl},k}^2 - \frac{2(v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k})(N_{\text{i}} + \kappa_k)}{a_2}}, \quad (4.77)$$

$$\sigma_k^{\text{F3}} = \delta_k^{\text{F3}} - v_{\text{ctl},k} \quad (4.78)$$

und

$$b_2 = \frac{-I_{\text{p}} K_{\text{v}} T_{\text{ref}}^2}{C_2} \quad (4.79)$$

gilt. Sind die Spannungen zum Zeitpunkt  $t_k$  gleich und es gilt  $v_{\text{ctl},k} - v_{\text{c1},k} = 0$ , lassen



sich die Differenzengleichungen durch

$$v_{c1,k+1}^{\text{F3S}} = v_{\text{ctl},k}, \quad (4.80)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F3S}} = v_{\text{ctl},k} + b_2 \left( 1 - \zeta_{e,k} - \frac{N_i + \kappa_k}{v_{\text{ctl},k}} \right) \quad (4.81)$$

und

$$\zeta_{e,k+1}^{\text{F3S}} = - \frac{\frac{b_2}{2} \left( 1 - \zeta_{e,k} - \frac{N_i + \kappa_k}{v_{\text{ctl},k}} \right)^2 + v_{\text{ctl},k} \left( 1 - \zeta_{e,k} - \frac{N_i + \kappa_k}{v_{\text{ctl},k}} \right)}{N_i + \kappa_k} \quad (4.82)$$

beschreiben.

Für **Bereich 4** ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$v_{c1,k+1}^{\text{F4}} = v_{c1,k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F4}} + \frac{1}{a_1} \left( \delta_k^{\text{F4}} - v_{c1,k} + \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F4}} \right) \left( 1 + \frac{a_2}{v_{\text{ctl},k} - v_{c1,k}} \sigma_k^{\text{F4}} \right), \quad (4.83)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F4}} = \delta_k^{\text{F4}} + \left( \frac{v_{c1,k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F4}} - \delta_k^{\text{F4}}}{a_2} + b_2 \right) \left( 1 + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F4}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{c1,k}} \right) \quad (4.84)$$

und

$$\begin{aligned} \zeta_{e,k+1}^{\text{F4}} = & - \frac{1}{N_i + \kappa_k} \left[ \left( \frac{v_{c1,k} - \frac{a_2}{a_1} \sigma_k^{\text{F4}} - \delta_k^{\text{F4}}}{2a_2} + \frac{b_2}{2} \right) \left( 1 + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F4}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{c1,k}} \right)^2 \right. \\ & \left. + \delta_k^{\text{F4}} \left( 1 + \frac{a_2 \sigma_k^{\text{F4}}}{v_{\text{ctl},k} - v_{c1,k}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

wobei

$$\delta_k^{\text{F4}} = \sqrt{v_{\text{ctl},k}^2 - \frac{2(v_{\text{ctl},k} - v_{c1,k})(N_i + \kappa_k)(1 + \zeta_{e,k})}{a_2}} \quad (4.86)$$

und

$$\sigma_k^{\text{F4}} = \delta_k^{\text{F4}} - v_{\text{ctl},k} \quad (4.87)$$

gilt. Für den Fall  $v_{\text{ctl},k} - v_{\text{cl},k} = 0$  lassen sich die Differenzengleichungen durch

$$v_{\text{cl},k+1}^{\text{F4S}} = v_{\text{ctl},k}, \quad (4.88)$$

$$v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F4S}} = v_{\text{ctl},k} + b_2 \left( 1 - \frac{(1 + \zeta_{\text{e},k})(N_i + \kappa_k)}{v_{\text{ctl},k}} \right) \quad (4.89)$$

und

$$\zeta_{\text{e},k+1}^{\text{F4S}} = \frac{\frac{b_2}{2} \left( 1 - \frac{(1 + \zeta_{\text{e},k})(N_i + \kappa_k)}{v_{\text{ctl},k}} \right)^2 + v_{\text{ctl},k} \left( 1 - \frac{(1 + \zeta_{\text{e},k})(N_i + \kappa_k)}{v_{\text{ctl},k}} \right)}{N_i + \kappa_k} \quad (4.90)$$

beschreiben.

Die gezeigten Gleichungen für die vier Bereiche lassen sich in den Vektoren

$$\mathbf{r}_k^{\text{Fi}} = [t_k, \zeta_{\text{e},k}^{\text{Fi}}, v_{\text{ctl},k}^{\text{Fi}}, v_{\text{cl},k}^{\text{Fi}}, N_k]^T \quad (4.91)$$

zusammenfassen und für ein Simulationsmodell basierend auf den autonomen Differenzengleichungen heranziehen. Dieses Simulationsmodell ist im Algorithmus 4.4.1 verdeutlicht. Zur Visualisierung ist der Ablauf des Simulationsmodells in Abb. 4.8

---

**Algorithmus 4.4.1** Verfahren der ereignisgesteuerten Modellierung basierend auf den autonomen Differenzengleichungen

---

```

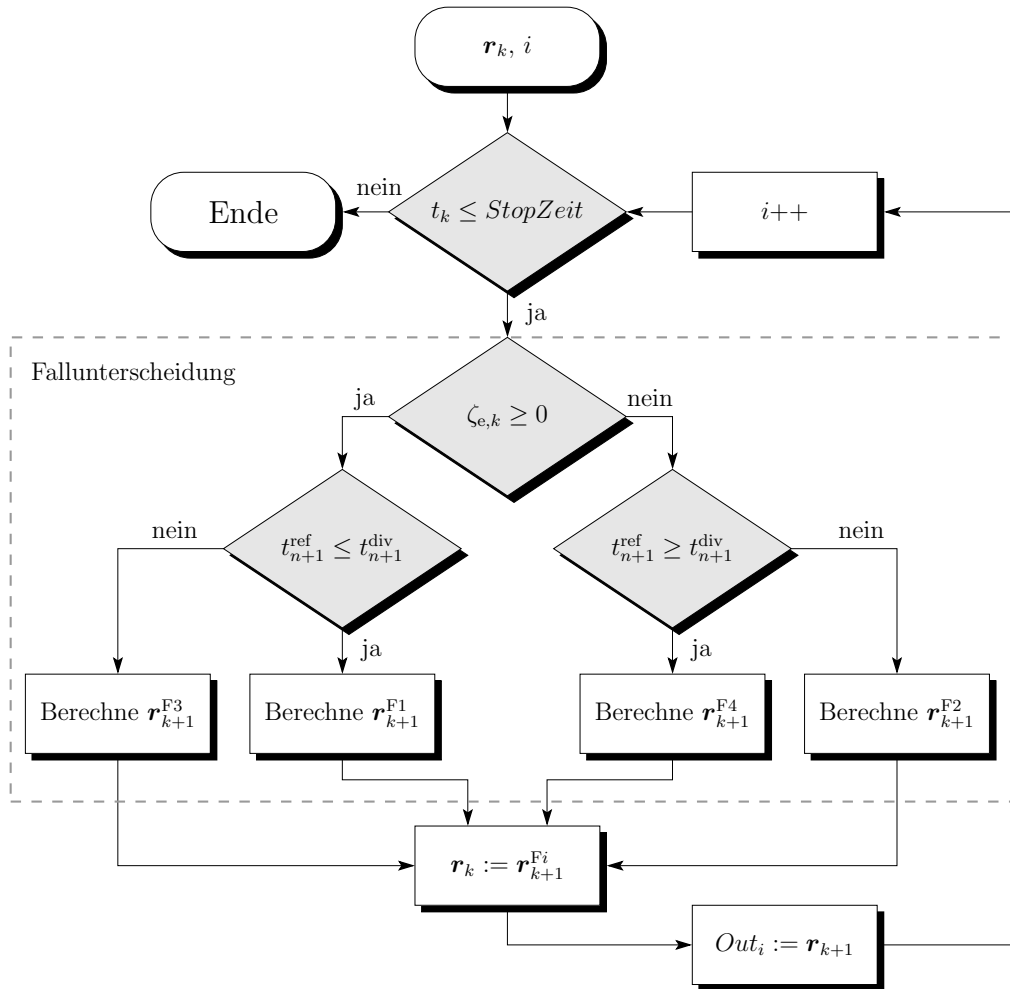
1: Initialisierung von  $\mathbf{r}_k$  und  $i := 1$ 
2: while  $t_k \leq \text{StopZeit}$  do
3:   if  $\zeta_{\text{e},k} \geq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \leq t_{n+1}^{\text{div}}$  then
4:     Berechne  $\mathbf{r}_{k+1}^{\text{F1}}$ 
5:   else if  $\zeta_{\text{e},k} \leq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \leq t_{n+1}^{\text{div}}$  then
6:     Berechne  $\mathbf{r}_{k+1}^{\text{F2}}$ 
7:   else if  $\zeta_{\text{e},k} \geq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \geq t_{n+1}^{\text{div}}$  then
8:     Berechne  $\mathbf{r}_{k+1}^{\text{F3}}$ 
9:   else if  $\zeta_{\text{e},k} \leq 0 \wedge t_{n+1}^{\text{ref}} \geq t_{n+1}^{\text{div}}$  then
10:    Berechne  $\mathbf{r}_{k+1}^{\text{F4}}$ 
11:   end if
12:   Neue Anfangsbedingungen  $\mathbf{r}_k := \mathbf{r}_{k+1}^{\text{Fi}}$ 
13:    $\text{Out}_i := \mathbf{r}_{k+1}$ 
14:    $i++$ 
15: end while

```

---

grafisch dargestellt.

Der Simulationsablauf unterscheidet sich von dem des ereignisgesteuerten Modells nur marginal. Lediglich die Erweiterung der Fallunterscheidung der vier Bereiche ist notwendig (vgl. Abb. 3.7). Die Simulationsbeschleunigung ist hingegen deutlich

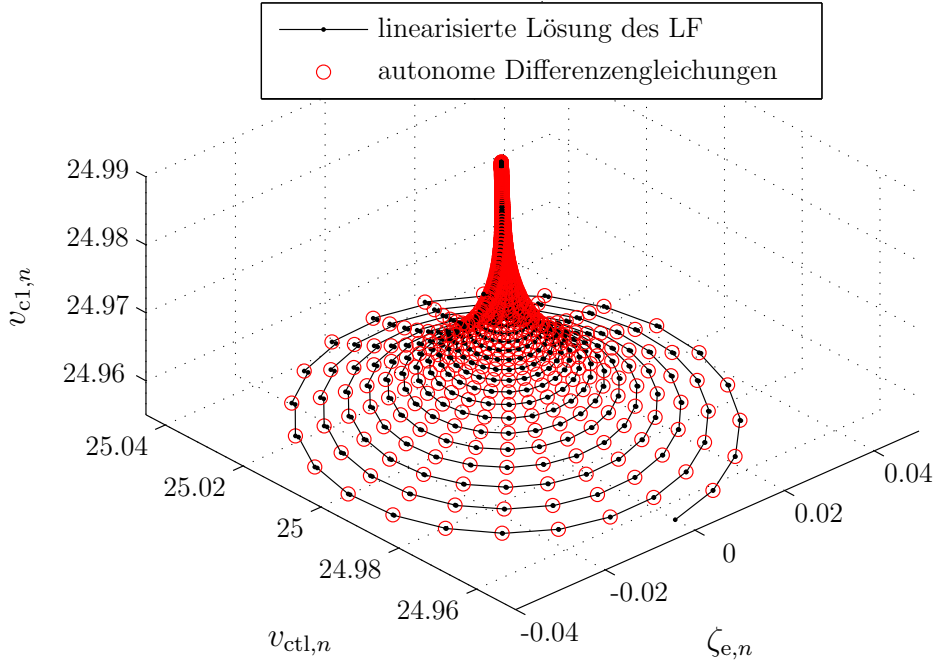


**Abb. 4.8.:** Graphische Darstellung des ereignisgesteuerten Modells basierend auf den autonomen Differenzengleichungen

zu messen und benötigt im Schnitt 25% der Simulationszeit des ereignisgesteuerten Modells aus Kapitel 3.3. Die Beschleunigung ist zum einen darauf zurückzuführen, dass lediglich jedes zweite Ereignis explizit berechnet werden muss. Zum anderen ergibt sie sich aus den analytischen Gleichungen, die für die Berechnung verwendet werden.

Zur Verifikation der autonomen Differenzengleichungen wird die Simulation dieses Modells mit der Simulation des Modells mit linearisierter Lösung des Schleifenfilters (Gleichung (4.36) und (4.37)) verglichen.

In Abb. 4.9 ist dieser Vergleich dargestellt. Es ist zu erkennen, dass beide Modelle identische Ergebnisse liefern und alle vier Bereiche des Phasenplans durchlaufen.



**Abb. 4.9.:** Vergleich des Modells mit autonomen Differenzgleichungen und des Modells mit linearisierter Lösung des Schleifenfilters

#### 4.4.2. Herleitung der Stabilitätsgrenze

Die hergeleiteten autonomen Differenzgleichungen können über die Simulation des Phasenregelkreises hinaus für die Stabilitätsuntersuchung herangezogen werden. Die erste Wahl bei der Untersuchung der Stabilität nichtlinearer Systeme ist die Linearisierung um die Ruhelage mit anschließender Stabilitätsanalyse, da mittels der indirekten LYAPUNOV-Methode auf die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems zurückgeschlossen werden kann [81]. Aus diesem Grund werden die vorgestellten nichtlinearen, autonomen Differenzgleichungen linearisiert. Dazu sollen die Differenzgleichungen mit Hilfe einer Taylorreihe um die Ruhelage approximiert werden. In Kapitel 4.4.1 ist beschrieben, dass die Bereiche 3 und 4 eine Singularität in der Ruhelage aufweisen. Die Linearisierung mittels Taylor wird daher lediglich in den Bereichen 1 und 2 durchgeführt. Diese beiden Bereiche zeichnen sich dadurch aus, dass aufgrund der Kombination aus Kapazitätsspannungen und Phasenfehler die Frequenz des VCO-Signals erhöht wird. Der Vorteil besteht darin, dass das implizit gegebene Ereignis des autonomen Differenzgleichungssystems bei  $t_{n+1}$  durch eine Flanke im Referenzsignal ausgelöst wird. Dieses Ereignis unterliegt nicht der Regelung der PLL und wird nicht, wie die Flanke des Dividierersignals, durch die variierende Steuerspannung während der Umladeprozesse im Schleifenfilter verschoben.

In der Praxis wird der  $\Sigma\Delta$ -Modulator oft durch das Dividierersignal getriggert, sodass das Teilverhältnis in den Bereichen 1 und 2 konstant bleibt. Da sich darüber hinaus die schaltende und nichtlineare Differenzengleichung des  $\Sigma\Delta$ -Modulators auf Grund der Vorzeichenfunktion  $\text{sgn}(\cdot)$  nicht ohne Weiteres in eine Taylorreihe entwickeln lässt, werden hier die autonomen Differenzengleichungen für ein konstantes Teilverhältnis betrachtet. Dies entspricht einer Eingangsgröße des  $\Sigma\Delta$ -Modulators von  $N_f = 0$ . Die Differenzengleichungen des  $\Sigma\Delta$ -Modulators brauchen daher hier nicht berücksichtigt werden. Für die Stabilitätsuntersuchung wird später das kleinste auftretende Teilverhältnis der *Fractional-N* PLL verwendet, da somit die maximale Schleifenverstärkung berücksichtigt wird und eine konservative Abschätzung der Stabilität möglich ist.

Für die Herleitung der Stabilitätsbedingungen wird das Differenzengleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen (4.68) bis (4.70), in der Vektorschreibweise

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (4.92)$$

dargestellt. Die nichtlineare Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  wird durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}_k) \\ f_2(\mathbf{x}_k) \\ f_3(\mathbf{x}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{c1,k+1}^{\text{F2}}(\mathbf{x}_k) \\ v_{\text{ctl},k+1}^{\text{F2}}(\mathbf{x}_k) \\ \zeta_{e,k+1}^{\text{F2}}(\mathbf{x}_k) \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

definiert. Der Vektor  $\mathbf{x}_k$  beschreibt die Zustände der PLL

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{c1,k} \\ v_{\text{ctl},k} \\ \zeta_{e,k} \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Zur Linearisierung des nichtlinearen Differenzengleichungssystems wird die JACOBI-Matrix mit den Einträgen

$$J_{i,j}(\mathbf{x}_R) = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_R} \quad (4.95)$$

berechnet und in der Ruhelage des normierten Modells

$$\mathbf{x}_R = \begin{pmatrix} N \\ N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

ausgewertet. Der Index  $i$  bezeichnet die  $i$ -te Zeile und der Index  $j$  beschreibt die  $j$ -te Spalte der JACOBI-Matrix. Für die JACOBI-Matrix an der Stelle  $\mathbf{x}_R$  ergibt sich

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_R) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 - 1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 \\ \frac{2N - b_1}{2Na_2} & \frac{2N(a_2 - 1) - b_1(2a_2 - 1)}{2Na_2} & b_1 \\ -\frac{1}{2Na_2} & -\frac{2a_2 - 1}{2Na_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

Das lineare Differenzengleichungssystem lässt sich schließlich mit

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{J}(\mathbf{x}_R) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_R) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_R)\mathbf{x}_k + \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_R)\mathbf{x}_R \quad (4.98)$$

beschreiben. Wird an dieser Stelle eine Koordinatentransformation in der Art vorgenommen, dass  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  gilt, lässt sich mittels der Stabilitätsanalyse der linearen Beschreibung auf die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Modells schließen. Da die JACOBI-Matrix in Gleichung (4.98) äquivalent zur Systemmatrix des linearen Differenzengleichungssystems ist, lässt sich die Stabilität mit Hilfe des charakteristischen Polynoms der JACOBI-Matrix

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{J}(\mathbf{x}_R)) \quad (4.99)$$

untersuchen, wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix ist. Es resultiert das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 \quad (4.100)$$

mit den Koeffizienten

$$p_3 = 1 \quad (4.101a)$$

$$p_2 = -3 + \frac{b_1}{N} + \frac{1}{a_2} - \frac{b_1}{2Na_2} + \frac{1}{a_1} \quad (4.101b)$$

$$p_1 = 3 - \frac{b_1}{N} - \frac{2}{a_2} + \frac{b_1}{2Na_2} - \frac{2}{a_1} + \frac{b_1}{Na_1} \quad (4.101c)$$

$$p_0 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1. \quad (4.101d)$$

Das lineare Differenzengleichungssystem in Gleichung (4.98) ist asymptotisch stabil, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms innerhalb des Einheitskreises liegen. Mit Hilfe des JURY-Stabilitätskriteriums zeitdiskreter Systeme lassen sich Bedingungen an die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms stellen, sodass das lineare Differenzengleichungssystem asymptotisch stabil ist [78, 82, 84, 85]. Hierbei

werden in [82] verschiedene Methoden und Vereinfachungen vorgestellt. Exemplarisch werden an dieser Stelle die Ergebnisse der *Determinantenmethode*, die auch in [84] verwendet wird, und der *Tabellenform* kurz gezeigt. Die Bedingungen der *Tabellenform* [78, 82, 85] für ein charakteristisches Polynom dritter Ordnung mit reellen Koeffizienten ergeben sich zu

$$p_3 > 0 \tag{4.102a}$$

$$P(\lambda = 1) > 0 \tag{4.102b}$$

$$P(\lambda = -1) < 0 \tag{4.102c}$$

$$|p_0| < p_3 \tag{4.102d}$$

$$|p_0^2 - p_3^2| > |p_0 p_2 - p_1 p_3|, \tag{4.102e}$$

wobei die Bedingungen der ebenfalls oft verwendete *Determinantenmethode* den obigen Grenzen sehr ähnlich sind. Die Ergebnisse der *Determinantenmethode* lassen sich mit

$$p_3 > 0 \tag{4.103a}$$

$$P(\lambda = 1) > 0 \tag{4.103b}$$

$$P(\lambda = -1) < 0 \tag{4.103c}$$

$$|p_0| < p_3 \tag{4.103d}$$

$$p_0^2 - p_3^2 < p_0 p_2 - p_1 p_3 \tag{4.103e}$$

angeben [82, 84]. Die Ergebnisse beider Methoden unterscheiden sich lediglich durch die Betragsstriche in den jeweils letzten Ungleichungen, wobei JURY in [82, 86] zeigt, dass sich die *Tabellenform* in die *Determinantenmethode* überführen lässt. Ein kurzer Einblick in diese Überführung ist im Anhang G zu finden.

Für das hier betrachtete charakteristische Polynom resultiert die folgende Auswertung. Die Ungleichung (4.102a) ist bedingungslos erfüllt, da  $p_3 = 1$  gilt. Aus den Ungleichungen (4.102b) und (4.102c) resultieren die Bedingungen

$$b_1 > 0 \tag{4.104a}$$

$$b_1 < 4N, \tag{4.104b}$$

wobei Ungleichung (4.104a) mit  $b_1 = I_p K_v T_{\text{ref}}^2 / C_2$  für positive Schleifenverstärkungen und Schleifenfilterparameter immer erfüllt ist.

Die Stabilitätsgrenze (4.104b) lässt sich für die Vergleichbarkeit mit der Bedingung von Gardner, die auf dem normalisierten Verstärkungsfaktor  $K\tau_1$  und der normalisierten Referenzkreisfrequenz  $\omega_{\text{ref}}\tau_1$  basiert, umformen:

$$K\tau_1 < \frac{\tau_2}{\pi^2 \tau_1} \omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2. \tag{4.105}$$

Wird der Parameter

$$b = 1 + \frac{C_1}{C_2} \quad (4.106)$$

eingeführt, ergibt sich

$$K\tau_1 < \frac{1}{\pi^2(b-1)}\omega_{\text{ref}}^2\tau_1^2. \quad (4.107)$$

Beim Vergleich dieser Ungleichung mit der Ungleichung (4.14) ist ersichtlich, dass beide Stabilitätsbedingungen eine ähnliche Parametrisierung aufweisen, das hier hergeleitete Kriterium jedoch einen lediglich quadratischen Verlauf in  $\omega_{\text{ref}}\tau_1$  aufweist. Wird Ungleichung (4.107) in die Form der Ungleichung (4.19) umgestellt, resultiert die einfache Bedingung

$$\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \pi\sqrt{b}, \quad (4.108)$$

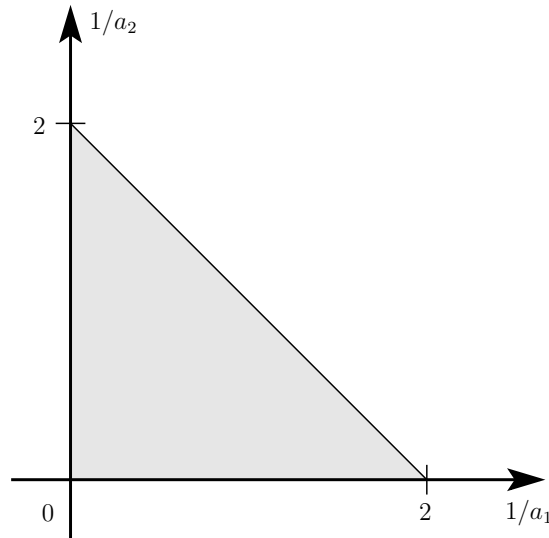
wobei  $\omega_n$  durch Gleichung (4.22) definiert ist. Es ist ersichtlich, dass sich die Ungleichungen (4.108) und (4.19) sehr ähneln und für typische Entwürfe des Phasenregelkreises mit  $b = 11$  und  $\alpha = 10$  nahezu identische Ergebnisse liefern.

Eine Bedingung an die Parameter des Schleifenfilters ergibt sich aus der Ungleichung (4.102d) zu

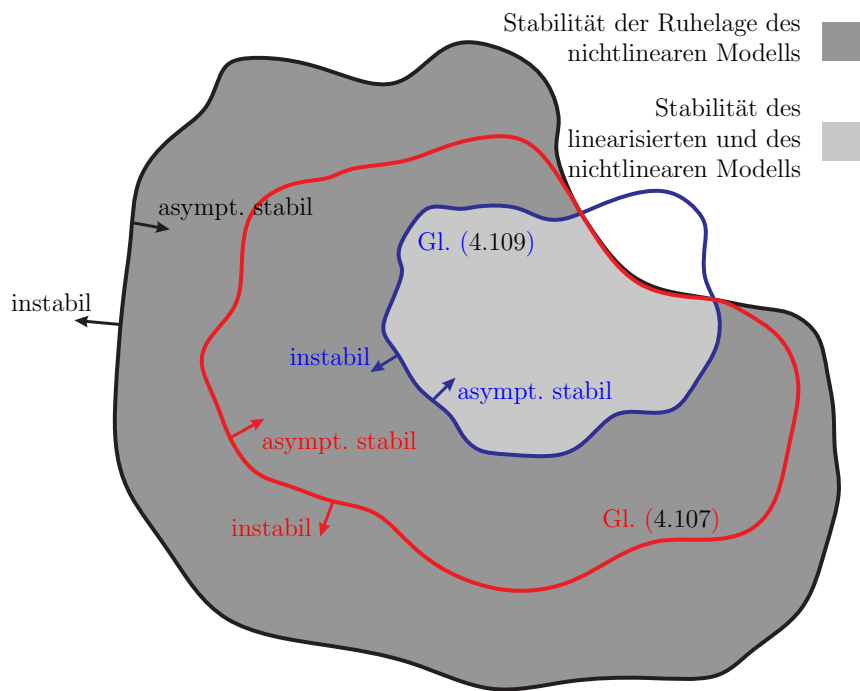
$$0 < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{T_{\text{ref}}}{R_1C_1} + \frac{T_{\text{ref}}}{R_1C_2} < 2 \quad (4.109)$$

und ist in Abb. 4.10 grafisch dargestellt. Da für typische Auslegungen des Phasenregelkreises die Summe der Quotienten positiv ist, ist der linke Teil der Ungleichung erfüllt. Der rechte Teil der Ungleichung beschränkt die Schleifenfilterparameter bezüglich der Referenzfrequenz. Für kleine Zeitkonstanten des Filters gegenüber der Referenzperiode ist die Stabilität des linearisierten Modells nicht gegeben. In Abb. 4.11 wird eine schematische Darstellung der Stabilitätsgrenzen und des Stabilitätsverhaltens der verschiedenen Modelle gezeigt. Die Ungleichungen (4.109) und (4.107) sind erforderliche Stabilitätsgrenzen für das linearisierte Modell. Lediglich im hellgrauen Bereich ist das linearisierte Modell asymptotisch stabil. Die Konvergenz des nichtlinearen Modells in die Ruhelage (asymptotische Stabilität) ist jedoch weit über diese Bedingung an die Schleifenfilterparameter hinaus gegeben (dunkel- und hellgrauer Bereich), da die nichtlinearen Eigenschaften des realen Phasenregelkreises die Schleifendynamik reduzieren. Wie in Kapitel 4.4.1 beschrieben, weist das linearisierte Modell für kleine Widerstände und Kapazitäten des Filters eine deutlich höhere Schleifenverstärkung als das nichtlineare Modell auf und stellt somit ein weniger stabiles Regelsystem dar. Dies spiegelt sich auch in den Taylor-Restgliedern wider. So lässt sich beispielsweise zeigen, dass bestimmte Auslegungen der PLL zu





**Abb. 4.10.:** Grafische Darstellung der Stabilitätsbedingung (4.109) im Bereich 2



**Abb. 4.11.:** Schematische Mengendarstellung der Stabilität der linearisierten Beschreibung und der Ruhelage des nichtlinearen Modells sowie der zwei Stabilitätsbedingungen basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell

instabilem Verhalten der linearen Approximation führen, obgleich der nichtlineare Regelkreis in die Ruhelage konvergiert. Wird hingegen ein nichtlinearer Phasenregelkreis mit einem stabilen Grenzyklus (keine Konvergenz in die Ruhelage) betrachtet, zeigt dessen lineare Approximation eine Divergenz. Die Ruhelage ist somit instabil.

Ist die Approximation jedoch asymptotisch stabil, so ist die Ruhelage des nichtlinearen Phasenregelkreises ebenfalls asymptotisch stabil.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass ein Phasenregelkreis, der einen Grenzyklus mit nicht vernachlässigbarem Radius  $\delta$  aufweist, für die Frequenzsynthese in der Praxis nicht verwendet wird, da  $\delta$  und somit die Dauerschwingungen die Frequenzreinheit des VCO-Signals beeinflussen (vgl. Kapitel 2.2.2). Da ein solcher Phasenregelkreis nicht in die Ruhelage konvergiert und unerwünscht ist, wird dieser hier im übertragenen Sinn als instabil bezeichnet.

Die verwendete Linearisierung ist daher bezüglich der Stabilität eine konservative Approximation, deren Konservatismus mit kleiner werdenden Zeitkonstanten des Schleifenfilters zunimmt. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Bedingung (4.109) eine Abschätzung der Approximationsgüte und des Grads des Konservatismus ist und für die Stabilitätsuntersuchung des nichtlinearen und nicht approximierten Modells eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Auswertung der Ungleichungen (4.103e) aus der *Determinantenmethode* ergibt

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 2. \quad (4.110)$$

Diese Grenze stellt keine zusätzliche Bedingung dar, da diese durch Ungleichung (4.109) bereits abgedeckt ist. Wird die Ungleichungen (4.102e) der *Tabellenform* verwendet, ergibt die Auswertung die Stabilitätsbedingung

$$K\tau_1 < \frac{b}{\pi^2(b-1)^2} \omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2. \quad (4.111)$$

Diese Ungleichung ist weniger streng als Ungleichung (4.107), da

$$\frac{b}{(b-1)^2} > \frac{1}{b-1} \Leftrightarrow b > b-1 \quad (4.112)$$

gilt. Somit ist Ungleichung (4.111) immer erfüllt, wenn Ungleichung (4.107) eingehalten wird und stellt somit ebenfalls keine weitere Einschränkung bezüglich der Stabilität dar.

Da die Linearisierung um die Ruhelage der nichtlinearen Differenzengleichungen im Bereich 1 identisch zu der Linearisierung im Bereich 2 ist, ergeben sich keine neuen Stabilitätsbedingungen. Die vorgestellten Stabilitätsbedingungen

$$\boxed{K\tau_1 < \frac{1}{\pi^2(b-1)} \omega_{\text{ref}}^2 \tau_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \pi\sqrt{b}} \quad (4.113)$$

lassen sich somit für den Entwurf des Phasenregelkreises verwenden. Hierbei ist zu erkennen, dass diese Stabilitätsbedingungen, anders als die Gardner-Grenze, nicht für  $C_2 \rightarrow 0$  gegen die Bedingung des Phasenregelkreises zweiter Ordnung tendieren.

Aus  $C_2 \rightarrow 0$  folgt  $b \rightarrow \infty$  und die Schleifenverstärkung müsste für ein stabiles lineares Modell des Phasenregelkreises null sein. Dass die Ungleichung (4.113) für den Phasenregelkreis dritter Ordnung nicht gegen die Grenze für die PLL zweiter Ordnung konvergiert, ist durch die Approximation und die Grenzwertuntersuchungen der Taylor-Restglieder in Tab. 4.1 und 4.2 zu erklären. Mit sehr kleinen Kapazitäten  $C_2$  nimmt der Approximationsfehler zu.

Durch die spätere Linearisierung innerhalb der Stabilitätsbetrachtung als beim linearen zeitdiskreten Modell, weist die hier hergeleitete Bedingung einen größeren Gültigkeitsbereich auf und erlaubt die Abschätzung von Konvergenzeigenschaften auch für Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage des Systems. Dies wird im folgenden Kapitel genauer erläutert. Darüber hinaus lassen sich nicht-ideale Effekte in den zugrunde liegenden Gleichungen berücksichtigen. Ein weiterer positiver Aspekt des hergeleiteten Kriteriums ist die lediglich quadratische Abhängigkeit der Ungleichung von  $\omega_{\text{ref}}\tau_1$ .

## 4.5. Vergleich der Stabilitätsbedingungen

In diesem Kapitel werden die verschiedenen vorgestellten Stabilitätsbedingungen miteinander verglichen und deren Verwendbarkeit diskutiert. Hierzu wird zunächst eine analytische Untersuchung der Grenzen durchgeführt. Im Anschluss werden die Stabilitätsbedingungen und deren Konvergenzprognosen für das nichtlineare ereignisgesteuerte Modell des Systems unter Berücksichtigung von verschiedenen Regelkreisentwürfen und Anfangsbedingungen analysiert.

Für die Stabilitätsbetrachtung des nichtlinearen Phasenregelkreises wird die Stabilität dessen Ruhelagen untersucht. Da der in diesem Kapitel verwendete Phasenregelkreis lediglich die Ruhelage für  $\varphi_e = 0$  und  $f_e = f_{\text{ref}} - f_{\text{vco}} = 0$  aufweist, ist diese die einzige Ruhelage. Zur Vereinfachung der folgenden Ausführungen wird daher nicht mehr explizit auf die Stabilitätsanalyse der Ruhelage des Systems hingewiesen, sondern lediglich von der Stabilitätsuntersuchung des Regelkreises gesprochen. Hierbei können sowohl eine instabile oder stabile Ruhelage als auch Grenzzyklen mit einhergehenden Dauerschwingungen auftreten. Dabei können sich Grenzzyklen für den untersuchten Phasenregelkreis einstellen, falls die Ruhelage instabil ist, oder das Einzugsgebiet der stabilen Ruhelage verlassen wird. Diese Dauerschwingungen führen jedoch zu Nebentönen im Leistungsdichtespektrum des VCO-Signals und sind somit für die Frequenzsynthese und Taktgenerierung unerwünscht. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf ein Simulationsergebnis das einen Grenzzyklus aufweist und somit nicht in den Punkt der Ruhelage konvergiert ebenfalls im übertragenen Sinn als instabil bezeichnet. Die genauen Kriterien werden bei der simulativen Konvergenzanalyse beschrieben.

Die vorgestellten Stabilitätsbedingungen des Phasenregelkreises dritter Ordnung sind für die Übersichtlichkeit hier noch einmal zusammengestellt:

**Gardner:**

$$K\tau_1 < \frac{2(1+a)b\omega_{\text{ref}}\tau_1}{\pi(b-1)\left(\frac{2\pi(1+a)}{\omega_{\text{ref}}\tau_1} + \frac{2(1-a)(b-1)}{b}\right)} \quad \text{mit} \quad a = e^{-\frac{2\pi b}{\omega_{\text{ref}}\tau_1}}$$

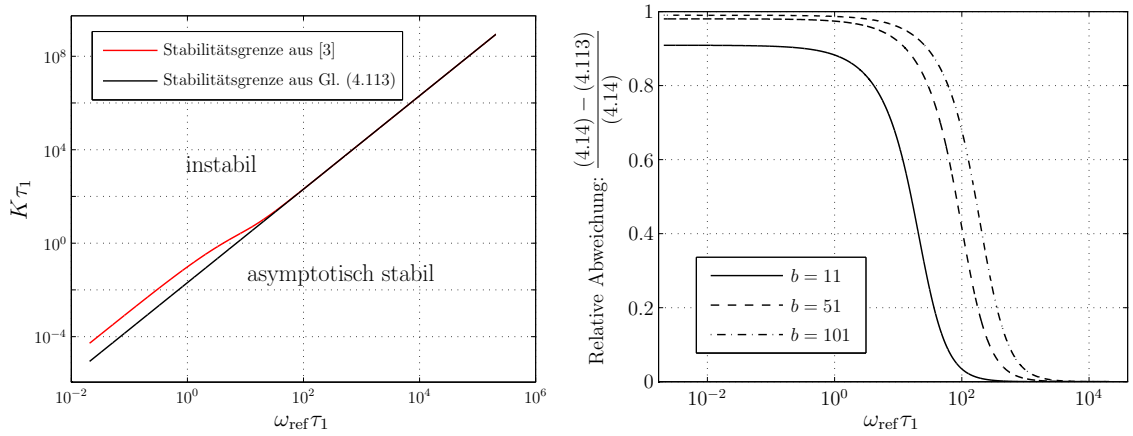
**Empirische Bedingung:**

$$K\tau_1 < \frac{b}{\alpha^2(b-1)}\omega_{\text{ref}}^2\tau_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \alpha$$

**Basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell:**

$$K\tau_1 < \frac{1}{\pi^2(b-1)}\omega_{\text{ref}}^2\tau_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \pi\sqrt{b}$$

Werden die Stabilitätsbedingungen miteinander verglichen, ist erkennbar, dass die Stabilitätsgrenze von Gardner deutlich komplexer und aufwändiger auszuwerten ist als bei den verbleibenden zwei Ansätzen. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die empirische Grenze und die hergeleitete Bedingung eine unterschiedliche Abhängigkeit von  $b$  aufweisen.



(a) Vergleich der Stabilitätsgrenzen mit  $b = 11$

(b) Relative Abweichung zwischen den Stabilitätsbedingungen für verschiedene Verhältnisse der Filterkapazitäten  $b = 1 + C_1/C_2$

**Abb. 4.12.:** Vergleich der Stabilitätsgrenze aus [3] und der Stabilitätsgrenze aus Ungleichung (4.113)

Im späteren Verlauf dieses Kapitels wird gezeigt, dass die empirische Grenze und die Bedingung des ereignisgesteuerten Modells in einer doppelt-logarithmischen Darstellung parallel zueinander verlaufen. Im speziellen Fall für  $\alpha = 10$  und  $b = 1 + C_1/C_2 = 11$  sind die beiden Grenzen nahezu identisch. Später wird gezeigt, dass die empirische Grenze jedoch für größere  $b$  keine verlässlichen Stabilitätsvorhersagen trifft.

In Abb. 4.12(a) ist die grafische Darstellung der Stabilitätsbedingung aus [3] (siehe Ungleichung (4.14)) und der Stabilitätsgrenze (4.113) zu erkennen. Es ist ersichtlich, dass die Stabilitätsgrenze basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell eine konservativere Bedingung als die Stabilitätsgrenze aus [3] liefert. Dies ist durch die konservative Approximation des nichtlinearen ereignisgesteuerten Modells aus Kapitel 4.4.1 zu erklären. Für konstante Schleifenfilterparameter und kleine Referenzkreisfrequenzen  $\omega_{\text{ref}}$  ist der Unterschied beider Grenzen ausgeprägter, da die längeren Referenzperioden und somit der größer werdende Abstand der Ereignisse den Grad des Konservatismus steigern. Wird die relative Differenz zwischen beiden Bedingungen betrachtet (siehe Abb. 4.12(b)), ist deutlich zu erkennen, dass die hier eingeführte Stabilitätsbedingung für den gesamten Geltungsbereich und für verschiedene Verhältnisse der Filterkapazitäten konservativer ist.

Da in der Praxis verschiedene Anfangsbedingungen des Phasenregelkreises auftreten, ist es sinnvoll, das Einzugsgebiet der Ruhelage zu untersuchen. Mit Anfangsbedingungen innerhalb des Einzugsgebietes einer asymptotisch stabilen Ruhelage konvergiert der Regelkreis in die Ruhelage, wobei diese Konvergenz für Anfangsbedingungen außerhalb dieses Einzugsgebietes nicht gegeben ist. Für die Beurteilung der Güte der verschiedenen Ansätze zur Konvergenzvorhersage wird das exakte nichtlineare ereignisgesteuerte Modell verwendet und mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen die Attraktivität des Fixpunktes untersucht. Am Beispiel der CP-PLL mit den Parametern

$$\begin{array}{ll} R_1 \approx 2 \text{ k}\Omega & N = 3 \\ C_1 = 10 \text{ pF} & C_2 = 1 \text{ pF} \\ K_v \approx 233 \text{ MHz/V} & \end{array}$$

wird der Regelkreis mit verschiedenen Stromstärken  $I_p$  von  $0,1 \mu\text{A}$  bis  $10 \text{ mA}$  (entspricht einem Faktor zwischen kleinster und größter Stromamplitude von 10.000) und variierenden Referenzfrequenzen im Bereich der Stabilitätsgrenze simuliert. Zur Beurteilung der Stabilitätsgrenze aus Kapitel 4.2 werden die Anfangsbedingungen der PLL zunächst so gewählt, dass sich der Regelkreis nahe der Ruhelage befindet und somit die Annahmen von [3] ( $f_{\text{ref}} \approx f_{\text{div}}$  und  $\varphi_e \approx 0$ ) erfüllt sind. Anhand der Simulationsergebnisse im Zeitbereich und des Verhaltens der Überschwinger wird das System auf Konvergenz überprüft.

Für die Darstellung der Ergebnisse werden hier die folgenden Kriterien verwendet<sup>2</sup>:

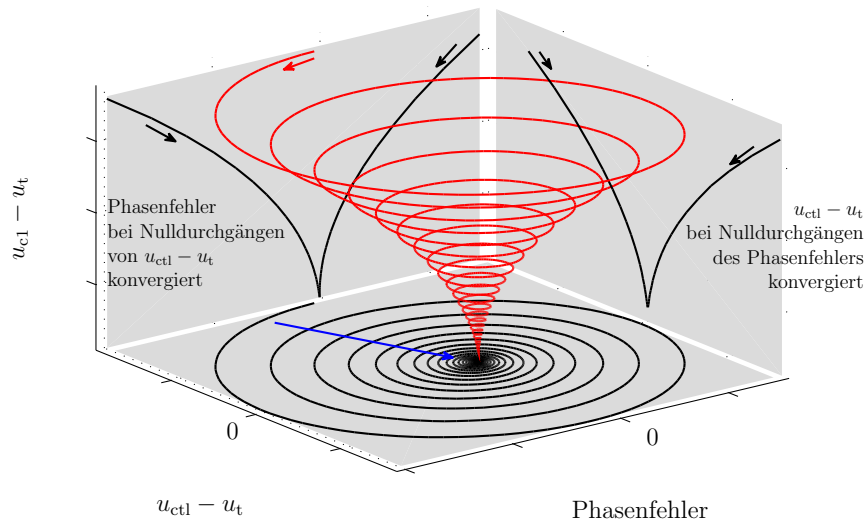
**Stabil:** Die Dynamik der PLL wird als stabil bezeichnet, wenn die Steuerspannung zu 40 aufeinander folgenden Zeitpunkten der Phasenfehlernulldurchgänge (Dynamikwechsel) streng monoton fallend ist, 40 Dynamikwechsel in Folge in einem definiert kleinen Schlauch ( $\pm 0,01\%$ ) um die Zielspannung verbleiben oder wenn 200 Steuerspannungswerte in Folge in diesem kleinen Schlauch liegen (vgl. Abb. 4.13(a)).  $\Rightarrow$  **Konvergenz in die Ruhelage (asymptotisch stabile Ruhelage)**

**Instabil:** Falls 40 Dynamikwechsel der Steuerspannung in Folge streng monoton wachsend sind, wird die Dynamik als instabil gewertet, auch wenn sich vielleicht ein Grenzyklus außerhalb des Schlauches  $\pm 0,01\%$  um die Zielspannung einstellt (vgl. Abb. 4.13(b)).  $\Rightarrow$  **instabile Ruhelage und/oder Grenzyklus außerhalb des  $\pm 0,01\%$  Schlauches**

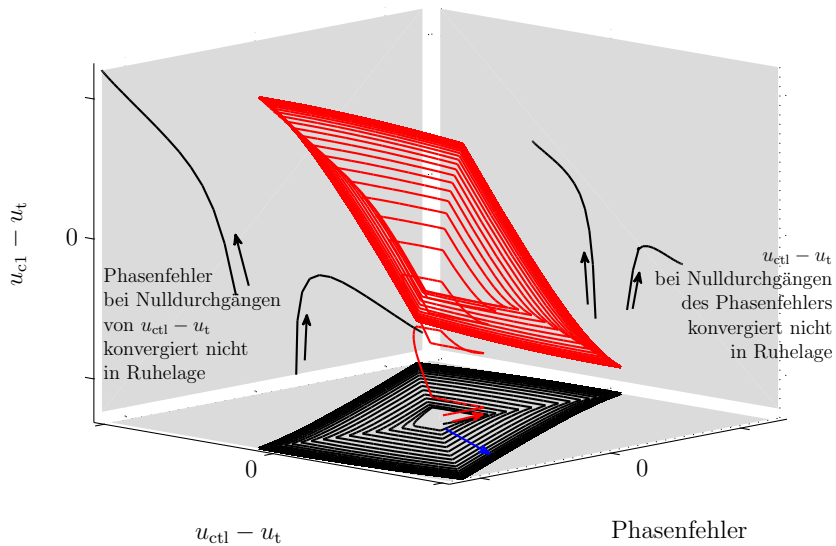
**Nicht aussagekräftig:** Wird keine der oben genannten Konditionen erfüllt und das Ende der Simulation erreicht, wird keine Aussage über die Konvergenz getroffen.

---

<sup>2</sup>Untersuchungen mit strengeren Bedingungen führen zu vergleichbaren Ergebnissen, verlängern jedoch direkt die Simulationszeit.



(a) Phasenplan eines in die Ruhelage konvergierenden Phasenregelkreises



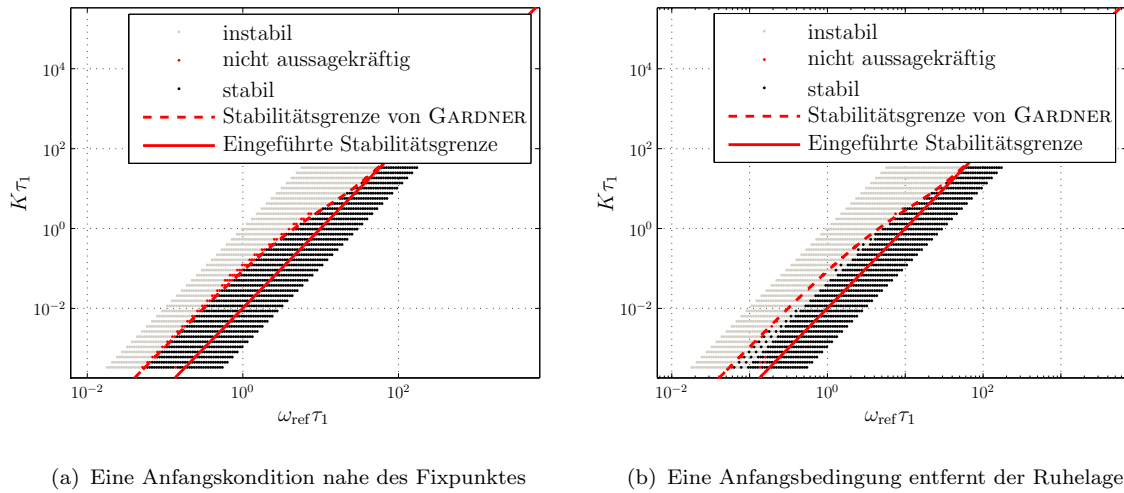
(b) Phasenplan eines Phasenregelkreises mit Grenzyklus

**Abb. 4.13.:** Dreidimensionale Darstellung des Phasenplans für Phasenregelkreise mit unterschiedlichen Konvergenzeigenschaften

Für die automatisierte Verkürzung der Simulationszeiten werden die Einrastdetektoren aus Anhang C verwendet. Werden keine Dynamikwechsel identifiziert, obwohl der Phasenregelkreis eingerastet ist, wird die Simulation abgebrochen. Die Simulationsergebnisse sind in Abb. 4.14(a) abgebildet. Es ist zu erkennen, dass die Simulationsergebnisse die Stabilitätsgrenze von Gardner bestätigen. Es befinden sich lediglich instabile Simulationsergebnisse im instabilen Bereich der Gardner-Grenze

und der hier hergeleiteten Stabilitätsbedingung. Das bedeutet, dass die hier verwendeten Anfangsbedingungen innerhalb des Einzugsgebietes der Ruhelage liegen und sich nur ein Grenzyklus einstellt, wenn die Ruhelage instabil ist. Für eine stabile Ruhelage stellt sich hingegen eine Konvergenz ein. Diese Ergebnisse konnten mit verschiedenen Auslegungen des Phasenregelkreises reproduziert werden.

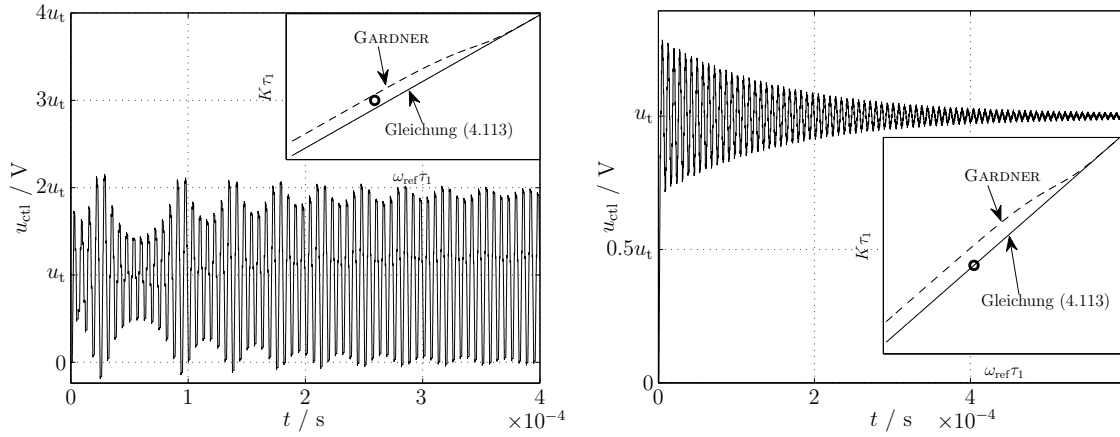
In der praktischen Anwendung ist es nicht gegeben, dass die initialen Konditionen des Phasenregelkreises sehr nahe dem Fixpunkt liegen und daher eventuell außerhalb des Einzugsgebietes der Ruhelage fallen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, das vorangegangene Experiment mit Anfangskonditionen, die nicht nahe dem Fixpunkt sind, zu wiederholen. Die Ergebnisse dieses Experiments sind in Abb. 4.14(b) dargestellt. Die verwendeten Anfangsbedingungen führen zu einem System, dass zu Beginn der Simulation ausgerastet ist. Das bedeutet, dass der initiale Kreisfrequenzfehler größer als  $\Delta\omega_{PO}$  ist. Es ist ersichtlich, dass einige Simulationsergebnisse im



**Abb. 4.14.:** Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen (Konvergenzvorhersagen) für zwei unterschiedliche Anfangsbedingungen

Bereich zwischen beiden Stabilitätsgrenzen nicht in die Ruhelage konvergieren. Diese Ergebnisse weisen einen Grenzyklus mit einhergehenden Dauerschwingungen auf. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 4.15(a) die Steuerspannung für einen solchen Phasenregelkreis mit Dauerschwingung dargestellt.  $u_t$  bezeichnet dabei die Zielspannung der Regelung und die negativen Steuerspannungen werden durch eine stückweise lineare Kennlinie des VCO in eine Frequenz gleich null überführt. D.h. für  $u_{ctl} > 0$  ist die Kennlinie durch die Steigung  $K_v$  definiert und für  $u_{ctl} \leq 0$  wird  $f_{vco} = 0$  gesetzt. Das Ergebnis zeigt, dass die Stabilitätsgrenze von Gardner für Anfangsbedingungen entfernt vom Fixpunkt und somit außerhalb des Einzugsgebietes nicht hinreichend konservativ für die Konvergenzvorhersage in die Ruhelage ist. Dieses Ergebnis konnte auch in [87] durch numerische Iterationen einer Ladungsapproximation des Schleifenfilters gezeigt werden.





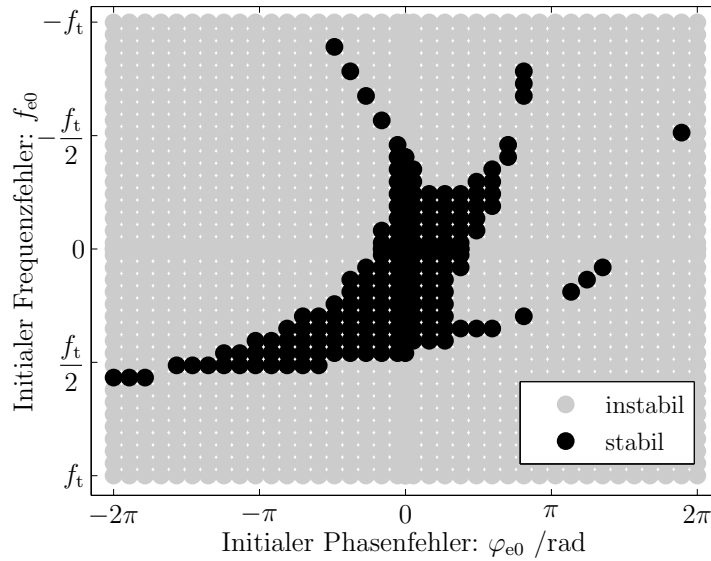
(a) Parameter zwischen den Stabilitätsgrenzen ( $I_p \approx 0,134 \mu\text{A}$ ,  $\omega_{\text{ref}} \approx 0,798 \text{ MHz}$ ), einer stückweise linearen Charakteristik des VCO und Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage

(b) Parameter auf der hergeleiteten Stabilitätsgrenze ( $I_p \approx 0,1 \mu\text{A}$ ,  $\omega_{\text{ref}} \approx 1,395 \text{ MHz}$ ) und Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage

**Abb. 4.15.:** Simulation eines Phasenregelkreises mit Grenzyklus (zwischen den Stabilitätsbedingungen) und eines Regelkreises mit stabiler Ruhelage (auf der hergeleiteten Stabilitätsbedingung)

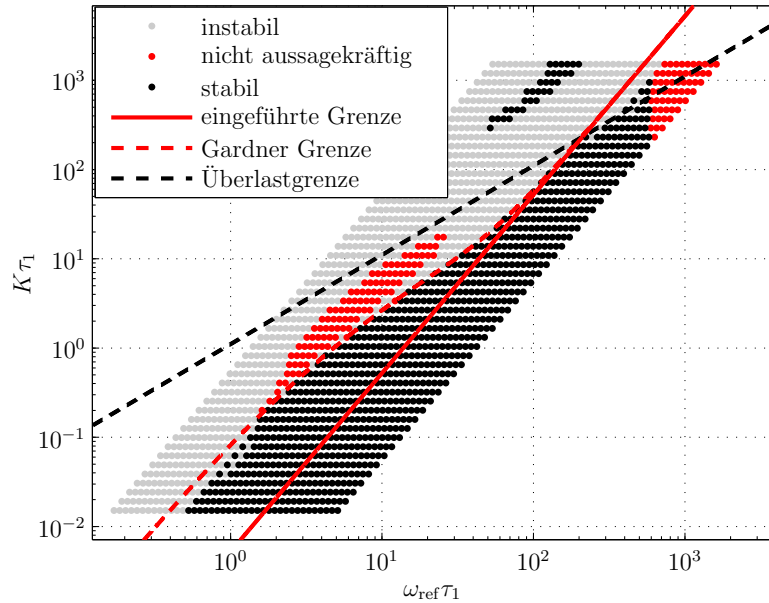
Die auf dem ereignisgesteuerten Modell basierende Stabilitätsbedingung ist in der Lage, die Konvergenz des nichtlinearen Regelkreises in die Ruhelage korrekt vorherzusagen. Abb. 4.15(b) stellt eine Simulation auf der hergeleiteten Stabilitätsgrenze dar. Es ist zu erkennen, dass dieser Phasenregelkreis eine klare Konvergenz in die Ruhelage aufweist.

Die Beobachtung bezüglich der beiden Beispiele legt die Vermutung nahe, dass die Konvergenz in die Ruhelage des Phasenregelkreises zwischen der Grenze von Gardner und der hergeleiteten Bedingung von den Anfangsbedingungen und dem Einzugsgebiet der Ruhelage abhängt. Wird diese Konvergenz eines Phasenregelkreises für verschiedene Anfangsbedingungen untersucht, lässt sich die Attraktivität der Ruhelage (engl. *Basin Of Attraction*) also das Einzugsgebiet darstellen. Für den Beispielphasenregelkreis in Abb. 4.15(a) ist die Attraktivität der Ruhelage in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen in Abb. 4.16 dargestellt. Hierbei beschreibt  $f_t$  die Zielfrequenz des VCO-Signals. Diese Untersuchung verdeutlicht die Abhängigkeit der Konvergenz in die Ruhelage von den Anfangsbedingungen, falls ein Entwurf des Phasenregelkreises zwischen den Stabilitätsbedingungen von Gardner und der Ungleichung (4.113) gewählt wird. Wird ein Entwurf korrespondierend zu einem Punkt auf der rechten Seite der Stabilitätsgrenze (4.113) verwendet, ist die Konvergenz unabhängig von den Anfangsbedingungen gegeben (das Einzugsgebiet der Ruhelage schließt alle untersuchten Anfangsbedingungen ein). Dies zeigt die Kombination der vorangegangenen Untersuchungen, die im Folgenden erläutert wird. Wird für jeden einzelnen Punkt der Stabilitätsbetrachtung in Abb. 4.14 die Attrak-



**Abb. 4.16.:** Darstellung der Attraktivität der Ruhelage für verschiedene Anfangsbedingungen des Phasenregelkreises und einen Systementwurf zwischen den Stabilitätsgrenzen von Gardner und Ungleichung (4.113)

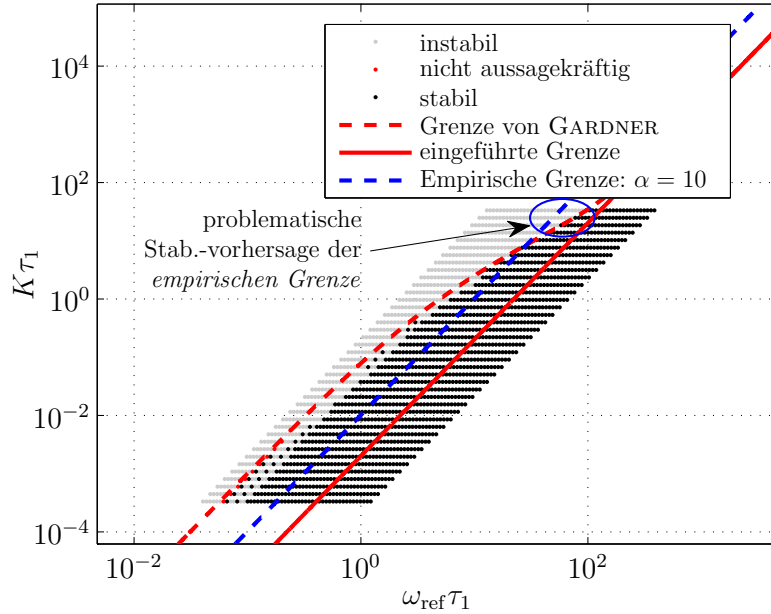
tivität der Ruhelage untersucht (vgl. Abb. 4.16), lässt sich die Konvergenz für die Kombination der Anfangsbedingungen des Phasenfehlers  $\varphi_{e0} = -2\pi \dots 2\pi$  und des Frequenzfehlers  $f_{e0} = -f_t \dots f_t$  und verschiedener Schleifenverstärkungen und Referenzkreisfrequenzen zeigen. Hierbei wird ein System, entsprechend der Definition auf Seite 88, als instabil bezeichnet, sobald eine einzige Kombination der Anfangsbedingungen  $f_{e0}$  und  $\varphi_{e0}$  zu einer Dynamik führt, die nicht in die Ruhelage konvergiert. Lediglich wenn alle Anfangsbedingungen in die Ruhelage führen, wird das System als stabil bewertet. Hier sei darauf hingewiesen, dass lediglich die Anfangsbedingungen von  $f_{e0} = -f_t \dots f_t$  und  $\varphi_{e0} = -2\pi \dots 2\pi$  untersucht wurden. Da sich allerdings ein Phasenfehler  $|\varphi_e| > 2\pi$  nicht von einer Differenz  $|\varphi_e| < 2\pi$  unterscheiden lässt, stellt der untersuchte Phasenfehlerbereich keine Einschränkung dar. Der begrenzte Bereich des initialen Frequenzfehlers ist sinnvoll, da sonst die Arbeitsbereiche der Ladungspumpe und des VCO verlassen werden könnten. Das Ergebnis aus bis zu 3.840.000 Simulationen ( $40 \times 40$  Anfangsbedingung für jeweils  $40 \times 60$  Referenzfrequenzen und Schleifenverstärkungen) ist in Abb. 4.17 zu sehen. Der verwendete Phasenregelkreis weist eine stückweise lineare Kennlinie des VCO auf, die für negative Steuerspannungen eine VCO-Frequenz identisch mit Null generiert. In Kapitel 6 wird sich zeigen, dass sowohl der Digital- und Analogteil der PLL als auch die Ladungspumpe einen unterschiedlichen Masse-Bezugspunkt aufweisen können und somit negative Spannungen über den Filterkapazitäten möglich sind. Die weiteren Systemparameter sind  $R_1 \approx 1,4 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 \approx 51 \text{ nF}$ ,  $C_2 \approx 2,6 \text{ nF}$ ,  $K_v = 1,8 \text{ GHz/V}$  und



**Abb. 4.17.:** Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsbedingungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen im Bereich  $\varphi_{e0} = -2\pi \dots 2\pi$  und  $f_{e0} = -f_t \dots f_t$

$N = 12000$ . Hierbei ist der Phasenregelkreis für eine Stromstärke von  $I_p = 313 \mu\text{A}$  ausgelegt. Es ist zu erkennen, dass für realistische Stromstärken der Ladungspumpe alle Simulationen rechtsseitig der hergeleiteten Stabilitätsgrenze in die Ruhelage konvergierendes Modell des Phasenregelkreises beschreiben und somit alle Anfangsbedingungen innerhalb des Einzugsgebietes der Ruhelage liegen. Lediglich für große Schleifenverstärkungen mit  $I_p > 15 \text{ mA}$  konvergiert die Regelung nicht in den Fixpunkt. In diesem Bereich wird der Phasenregelkreis durch die hohe Stromstärke überlastet, indem die Korrekturhübe der Steuerspannung größer als die Zielspannung sind. Diese Überlastgrenze wird in Kapitel 4.6 genauer erläutert. Des Weiteren ist der Strom der Ladungspumpe in diesem Bereich circa 50-fach größer als bei der nominalen Auslegung berücksichtigt und stellt somit einen ungeeigneten Entwurf dar. Zwischen der Stabilitätsgrenze nach Gardner und der hier eingeführten Stabilitätsgrenze sind Simulationsergebnisse zu erkennen, die nicht in die Ruhelage konvergieren (es stellt sich ein Grenzzyklus ein), da die Gardner-Grenze für Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage nicht hinreichend konservativ für die Konvergenzprognose ist.

Eine analoge Untersuchung lässt sich für einen Entwurf des Phasenregelkreises durchführen, bei dem das Verhältnis der Filterkapazitäten deutlich größer ist ( $b = 1 + C_1/C_2$ ). Die Ergebnisse der Simulationen sind in Abb. 4.18 zu sehen. Das gewählte Verhältnis der Filterkapazitäten resultiert in  $b = 51$ . Der Vergleich der Stabilitätsgrenzen von Gardner und der empirischen Bedingung mit der Grenze



**Abb. 4.18.:** Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen für eine Anfangsbedingung entfernt der Ruhelage und  $b = 51$

basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell zeigt die Nachteile der ersten beiden Ansätze. Auch für größere  $b$  ist die Bedingung von Gardner nicht konservativ genug. Bei der Betrachtung der empirischen Grenze ist ersichtlich, dass die Konvergenzvorhersage für große  $b$  und  $\alpha = 10$  im Bereich von hohen Referenzkreisfrequenzen nicht zuverlässig ist. Für eine robuste Abschätzung müsste  $\alpha$  eine Abhängigkeit von  $b$  aufweisen. Diese ist bei der Stabilitätsbedingung basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell gegeben und ermöglicht eine verlässlichere Analyse der Konvergenzeigenschaften.

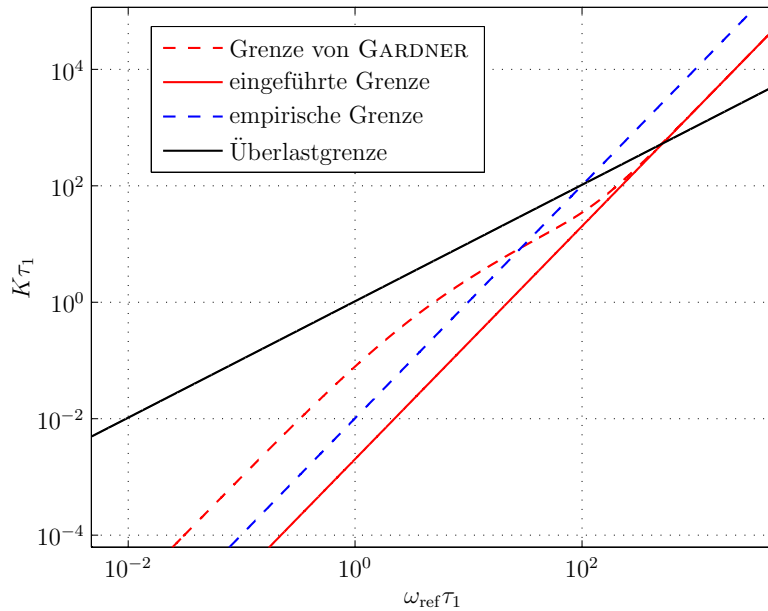
Bezüglich der durchgeführten Simulationen liegt es nahe, dass die hergeleitete Stabilitätsgrenze zu einem robusteren Entwurf von Phasenregelkreisen dritter Ordnung führt, obwohl nur zwei Bereiche in der Phasenebene und keine Transitionen zwischen den Bereichen betrachtet wurden. Diese Stabilitätsgrenze lässt sich auch dann verwenden, wenn die Anfangsbedingungen des Phasenregelkreises entfernt von der Ruhelage sind, d.h. dass die hier hergeleitete Bedingung auch eine Abschätzung des Einzugsgebietes der Ruhelage ermöglicht. Des Weiteren lässt sich das Vorgehen zur Herleitung der Stabilitätsgrenze auf beliebige Ordnungen des Phasenregelkreises erweitern.

## 4.6. Überlastgrenze des Phasenregelkreises zweiter und dritter Ordnung

Ein weiterer limitierender Faktor neben der Stabilität ist die Überlastgrenze des Phasenregelkreises. Die Überlastgrenze wird in [3] für den Phasenregelkreis zweiter Ordnung basierend auf dem Spannungssprung über dem Widerstand  $R_1$  bei schaltendem Strom der Ladungspumpe definiert. Überschreitet dieser Spannungssprung den Abstimmbereich des spannungsgesteuerten Oszillators, ist dieser nicht länger in der Lage der Spannung zu folgen oder wird beschädigt. Im theoretischen Extremfall ist es möglich, dass das Modell des VCO mit linearer Charakteristik negative Ausgangsfrequenzen des VCO generiert. Da dies physikalisch nicht möglich ist, wird der Phasenregelkreis in diesem Fall als überlastet bezeichnet. Die Überlastgrenze ergibt sich zu

$$K\tau_1 < \frac{\omega_{\text{ref}}\tau_1}{2\pi}. \quad (4.114)$$

Analog zum Phasenregelkreis zweiter Ordnung wird die Überlastgrenze für das System dritter Ordnung über das Modell des VCO mit linearer Charakteristik definiert [88]. Hierfür wird die Gleichung der Steuerspannung betrachtet und der Grenzwert für den exponentiellen Teil der Gleichung für die Ladezeit  $t_p \rightarrow \infty$  gebildet. Übersteigt dieser Grenzwert die zur Referenzfrequenz korrespondierende Steuerspan-



**Abb. 4.19.:** Grafische Darstellung der Überlastgrenze des Phasenregelkreises dritter Ordnung im Vergleich mit den Stabilitätsgrenzen ( $b = 51$ )

nung, ist der Phasenregelkreis überlastet und das Modell des VCO generiert negative Ausgangsfrequenzen. Die mathematische Bedingung ist [88]

$$K\tau_1 < \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1^2} \omega_{\text{ref}} \tau_1 = \left(1 + \frac{1}{b-1}\right)^2 \omega_{\text{ref}} \tau_1. \quad (4.115)$$

Der Vergleich der Überlastgrenze des Phasenregelkreises dritter Ordnung mit den Stabilitätsgrenzen ist in Abb. 4.19 zu sehen.

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Stabilitätsbedingungen des Phasenregelkreises anhand des exakten nichtlinearen ereignisgesteuerten Modells für verschiedene Schleifenparameter verifiziert. Dabei blieb der Strom auf den Bereich von  $0,1 \mu\text{A}$  bis  $10 \text{ mA}$  begrenzt. Diese Beschränkung basierte zum einen auf der Plausibilität der Stromwerte und zum anderen auf der Überlastgrenze des Phasenregelkreises dritter Ordnung, die die Schleifenverstärkung und die Referenzkreisfrequenz für die gezeigten Untersuchungen limitiert.

---

# Modellierung der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte

---

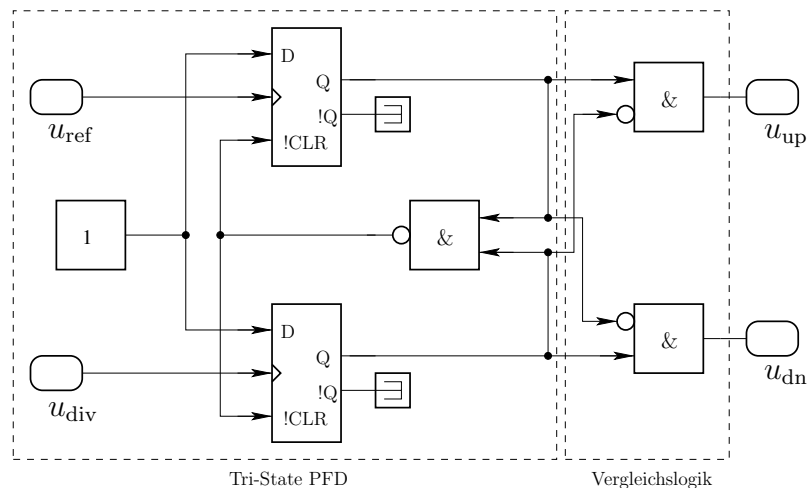
Die bisher betrachteten Modellierungen und Charakterisierungen beziehen sich auf einen idealen Phasenregelkreis ohne parasitäre und nicht-ideale Effekte, wie zum Beispiel endliche Steigungen der Signalfanken, Totzonen und Phasenrauschen. Für die Berücksichtigung dieser Effekte lassen sich Modelle basierend auf dem elektrischen Verhalten der Schaltung verwenden. Diese Modelle binden zudem das analoge Transistorverhalten mit ein und lassen sich daher als Transistor-Level (TL) Modell bezeichnen. Es wird sich zeigen, dass dieses TL Modell eine sehr hohe Genauigkeit aufweist, jedoch eine sehr lange Simulationszeit und eine hohe Datenmenge mit sich bringt. Aufgrund der herausfordernden Auswertung der großen Datenmenge und der zeitaufwändigen TL Simulation werden hier die bereits eingeführten Modelle (lineares Modell und ereignisgesteuertes Modell) um die nichtlinearen und nicht-idealen Effekte erweitert, sodass sich diese Effekte effizient analysieren lassen.

Zunächst werden das Transistor-Level Modell und die inhärenten parasitären und nicht-idealen Effekte vorgestellt. Im weiteren Verlauf werden diese nicht-idealen Effekte in das lineare und das ereignisgesteuerte Modell überführt, um eine effiziente Simulation zu gewährleisten. Abschließend werden die Genauigkeit und die Simulationszeiten der Modelle miteinander verglichen.

## 5.1. Typen der Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte

Zur Berücksichtigung der nichtlinearen, nicht-idealen und parasitären Effekte lässt sich der Phasenregelkreis zur Frequenzsynthese mittels Transistorschaltungen realisieren. Diese Modellierung kommt der physikalischen Realität sehr nahe und ist daher ein weit verbreitetes Werkzeug für die Verifikation von Systemen. Für die folgende Transistor-Level Modellierung wird das BSIM4 Modell der Transistoren [89] verwendet. Dieses Modell zeichnet sich durch eine Vielzahl von Parametern aus, die das analoge Verhalten der Transistoren beschreiben. Im Folgenden werden die einzelnen Modellierungen der Komponenten des Phasenregelkreises mit ihrem jeweiligen Verhalten beschrieben (basierend auf [7, 67]), um deren nichtlinearen und nicht-idealen Charakteristika herauszuarbeiten.

Die drei Zustände des endlichen Zustandsautomaten des Phasen- und Frequenzdetektors lassen sich mittels zweier D-Flip-Flops realisieren. In Abb. 5.1 ist diese Schaltung abgebildet (vgl. [6]). Werden für  $t = 0$  die Ausgangssignale der Flip-Flops



**Abb. 5.1.:** Darstellung des PFD mit integrierter Vergleichslogik zur Unterdrückung des Falls  $u_{dn} = 1\text{ V} \ \& \ u_{up} = 1\text{ V}$

mit  $u_{up} = u_{dn} = 0\text{ V}$  angenommen und eine steigende Flanke im Referenzsignal tritt auf, wird das obere Flip-Flop auf *logisch high* gesetzt.

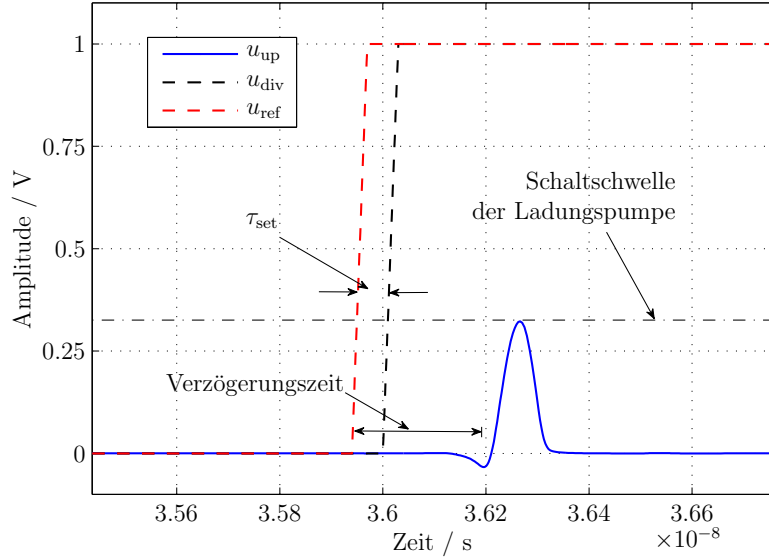
In der weiteren Betrachtung wird die Versorgungsspannung  $U_{dd}$  mit  $1\text{ V}$  angenommen und ein *logisch high* im oberen Flip-Flop wird zu  $u_{up} = 1\text{ V}$ . Ein *logisch low* wird durch  $u_{up} = 0\text{ V}$  repräsentiert. Diese Wahl der Versorgungsspannung dient lediglich der Übersichtlichkeit und der Veranschaulichung, da die Modellierungsansätze unabhängig von der absoluten Versorgungsspannung sind.

Wird anschließend eine steigende Flanke im Dividierersignal detektiert, wird im unteren Flip-Flop ein *logisch high* gespeichert. Anschließend werden beide Flip-Flops



über das NAND zurückgesetzt, sodass beide im Zustand *logisch low* sind. In diesem Fall sind  $u_{\text{up}} = 0 \text{ V}$  und  $u_{\text{dn}} = 0 \text{ V}$ . Da die Signale innerhalb der Transistor-Level Modellierung Laufzeiten aufweisen und diese Laufzeiten das Verhalten des PFD beeinflussen, ist in dieser Arbeit eine Vergleichslogik nachgeschaltet, die den virtuellen Zustand  $u_{\text{up}} = 1 \text{ V} \wedge u_{\text{dn}} = 1 \text{ V}$  nach außen unterdrückt. Dieser virtuelle Zustand würde ansonsten beide Stromquellen der Ladungspumpe aktivieren und zu einer höheren Verlustleistung der Schaltung führen.

Aufgrund der endlichen Flankensteilheit der Signale  $u_{\text{up}}$  und  $u_{\text{dn}}$  besteht die Möglichkeit, dass die Signale  $u_{\text{up}}$  und  $u_{\text{dn}}$  die Schwellspannungen der nachfolgenden Ladungspumpe nicht überschreiten, falls sehr kleine Phasenfehler und somit sehr kleine Zeitdifferenzen zwischen den steigenden Flanken von  $u_{\text{ref}}$  und  $u_{\text{div}}$  vorliegen. Wird die Schwellspannung der Ladungspumpe nicht überschritten, ist der Phasenregelkreis nicht in der Lage, diesen kleinen Phasenfehler in einen entsprechenden Strom zu überführen. Dieser Effekt ist in Abb. 5.2 visualisiert.

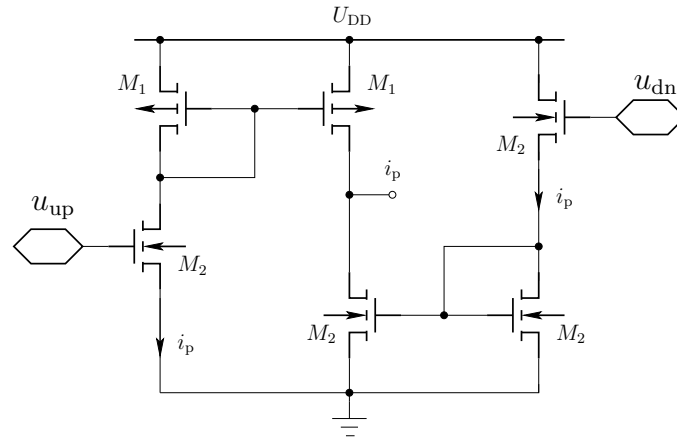


**Abb. 5.2.:** Signalverlauf des Transistor-Level Modells des PFD zur Verdeutlichung der Signallaufzeiten und der Totzone

Hier sind die Signallaufzeit und die endliche Flankensteilheit von  $u_{\text{up}}$  zu erkennen. Verbleibt  $u_{\text{up}}$  unterhalb der Schwellspannung der Ladungspumpe, ist diese nicht in der Lage, die Informationen über den Phasenfehler weiterzuleiten. Somit reagiert der Phasenregelkreis nicht auf kleine Zeitdifferenzen und weist eine Totzone  $\tau_{\text{set}}$  auf [67]. Diese Totzone beeinflusst den Regelkreis speziell nahe der Ruhelage und stellt somit einen kritischen Parameter für den Entwurf der PLL dar. Der Einfluss dieser Totzone lässt sich zwar mittels des sogenannten *Anti-Backlash* Pulses, der durch eine zusätzliche Verzögerungszeit im Rückkopplungspfad des PFD realisiert

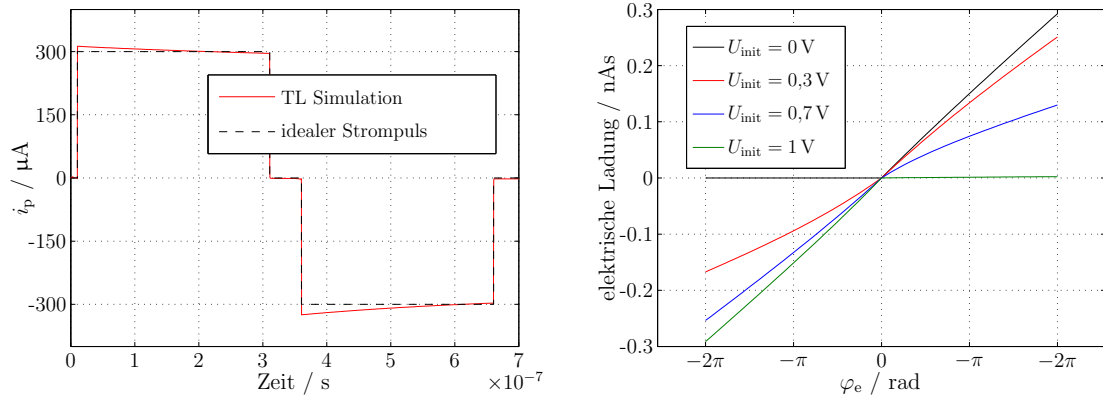
wird, teilweise beziehungsweise komplett kompensieren [67], dennoch ist die Charakterisierung des Einflusses der Totzone auf den Phasenregelkreis notwendig. Da die Realisierung des *Anti-Backlash* Pulses zusätzlichen schaltungstechnischen Aufwand benötigt und sich die Totzone durch eine zu geringe Verzögerungszeit im Rückkopplungspfad des PFD nicht kompensieren lässt, bleibt die Totzone eine Eigenschaft, die für den optimalen Entwurf der Phasenregelkreise berücksichtigt werden muss. Des Weiteren bedarf es bei der Verwendung des *Anti-Backlash* Pulses einer präzisen Auslegung der Ladungspumpe, da sich sonst die Auf- und Entladeströme nicht ausgleichen, die Regelung der CP-PLL beeinträchtigt wird und Nebentöne im Ausgangsspektrum entstehen [7]. Darüber hinaus reduziert der *Anti-Backlash* Puls den linearen Bereich des PFD [90] und verringert somit  $\Delta\omega_{\text{PO}}$ , also den Bereich in dem der Phasenregelkreis nicht ausrastet.

In dieser Arbeit wird für die Realisierung der Ladungspumpe eine einfache Struk-



**Abb. 5.3.:** Abbildung der in dieser Arbeit verwendeten Ladungspumpe, wobei aus Gründen der Übersicht auf die Anschlüsse des Substrats verzichtet wurde. Die Substratanschlüsse der  $p$ -Transistoren sind auf  $U_{\text{DD}}$  gelegt und die der  $n$ -Transistoren auf Masse

tur gewählt, da anhand der sich ergebenden nichtlinearen und nicht-idealen Effekte die Ansätze der späteren Modellierung deutlich werden. Der Aufbau der hier verwendeten Ladungspumpe ist ähnlich zu Abb. 2.7(b). Lediglich die idealen Schalter und Stromquellen werden durch entsprechende Transistorschaltungen ersetzt (siehe Abb. 5.3). Für die Kanallänge  $L_{\text{n,p}} = 120 \text{ nm}$  und die Kanalweiten  $W_{\text{p}} = 1500 \text{ nm}$  und  $W_{\text{n}} = 4000 \text{ nm}$  ergibt sich im völlig entladenen bzw. aufgeladenen Zustand der Schleifenfilterkapazitäten die Amplitude des Ladungspumpenstroms zu  $\pm I_{\text{p}} = \pm 300 \mu\text{A}$  (siehe Abb. 5.4(a)). Wird das Verhalten der Ladungspumpe für verschiedene Kapazitätsspannungen betrachtet, ergibt sich das Kennlinienfeld in Abb. 5.4(b). Die auf den Schleifenfilter aufgebrauchte elektrische Ladung zeigt eine deutliche Abhängigkeit von den initialen Spannungen  $U_{\text{init}}$  über den Filterkapazitäten. Das bedeutet, dass auch der maximale Ladungspumpenstrom  $I_{\text{p}}(u_{\text{ctl}})$  von den Spannungen des Schleifenfilters abhängt. Für Schleifenfilterspannungen nahe

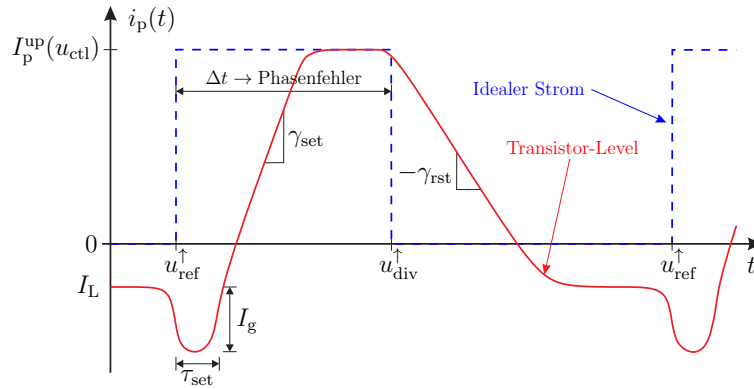


(a) Verlauf des Ladungspumpenstroms am Schleifenfiltereingang bei idealen Anfangsspannungen der Filterkapazitäten

(b) Kennlinienfeld der Ladungspumpe basierend auf der Transistor-Level Modellierung für unterschiedliche Anfangsbedingungen der Filterkapazitäten

**Abb. 5.4.:** Eigenschaften der Ladungspumpe basierend auf der Transistor-Level Modellierung

der Versorgungsspannung der Ladungspumpe ist der generierte Aufladestrom gering, wobei der Entladestrom maximal ist. Diese Veränderung der Schleifenverstärkung beeinflusst die Dynamik des Regelkreises und somit die Kenngrößen aus Kapitel 3.1 und 4. Darüber hinaus weist die Ladungspumpe einen Leckstrom  $I_L$  und Signalüber-



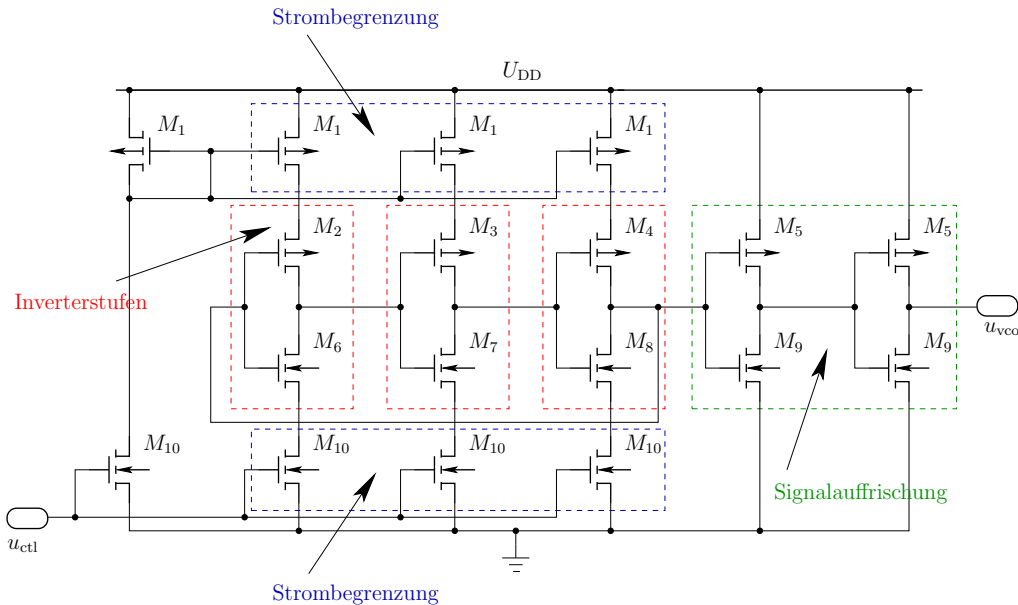
**Abb. 5.5.:** Schematische Darstellung des Ladungspumpenstroms zur Veranschaulichung der nicht-idealen Effekte des PFD und der Ladungspumpe basierend auf dem Transistor-Level Modell

schwinger  $I_g$  auf. Aufgrund der Kompensation dieser beiden Effekte innerhalb der Regelung der PLL ergibt sich im Ausgangssignal des VCO und des Frequenzteilers ein periodischer Jitter und somit entstehen Nebentöne im Leistungsdichtespektrum. Des Weiteren beeinflussen die endlichen Flankensteilheiten  $\gamma_{\text{set}}$  und  $\gamma_{\text{rst}}$  des Stroms der Ladungspumpe die Fähigkeit des Phasenregelkreises, kleine Phasenfehler auszu-regeln. Eine schematische Darstellung des Stroms zur Verdeutlichung der genannten

nicht-idealen Effekte des PFD und der Ladungspumpe ist in Abb. 5.5 dargestellt.

Für die Filterung des Stroms wird die elektrische Schaltung des Schleifenfilters aus Kapitel 2.2.1 aufgebaut. Bis auf Rauschen und Prozessvariationen verhalten sich diese diskreten Bauelemente zunächst ideal. Weitere parasitäre Effekte, zum Beispiel die Spannungsabhängigkeit integrierter Kapazitäten, werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Der darauf folgende spannungsgesteuerte Oszillator lässt sich beispielsweise als LC-Oszillator oder als Ringoszillator realisieren. Der hier exemplarisch verwendete Ringoszillator stellt einen *Single-Ended* Ringoszillator dar, dessen Frequenz durch spannungsgesteuerte Stromquellen im Versorgungszweig der Inverterstufen kontrolliert wird. Für die Aufbereitung des Ausgangssignals des VCO werden zwei weitere Inverterstufen nachgeschaltet. Das entsprechende elektrische Schaltbild ist in Abb. 5.6



**Abb. 5.6.:** Abbildung eines single-ended current starved Ringoszillators mit Signalauffrischung, wobei aus Gründen der Übersicht auf die Anschlüsse des Substrats verzichtet wurde. Die Substratanschlüsse der p-Kanal Transistoren sind auf  $U_{DD}$  gelegt und die der n-Kanal Transistoren auf Masse

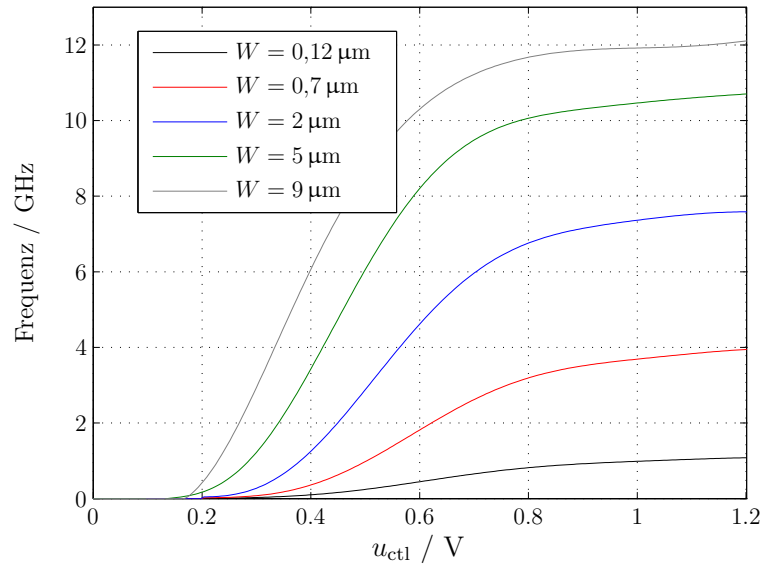
zu sehen [91], wobei die Auslegung der Transistoren in Tab. 5.1 zusammengefasst ist. Die Transistoren  $M_1$  und  $M_{10}$  stellen die spannungsgesteuerten Stromquellen zur Regelung der VCO-Frequenz dar. Die Abhängigkeit der VCO-Frequenz von der Steuerspannung und den Kanalweiten von  $M_1$  und  $M_{10}$  ist in Abb. 5.7(a) zu sehen, wobei die Kanallänge  $0,1\mu\text{m}$  beträgt. Das nichtlineare Verhalten des spannungsgesteuerten Oszillators ist speziell in der Darstellung seiner Steigung zu erkennen. Oft wird die Kennlinie eines Oszillators um die Mittenfrequenz linearisiert, obwohl in Abb. 5.7(b) deutlich wird, dass die Steigung der Kennlinie auch in diesem Bereich keineswegs konstant ist.

**Tab. 5.1.:** Dimensionierung der Transistoren des Ringoszillators

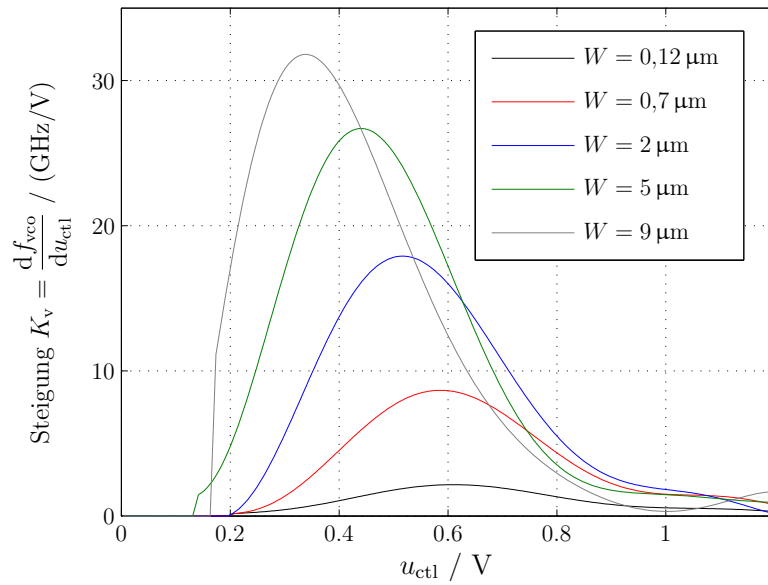
Transistor	Weite / $\mu\text{m}$	Länge / $\mu\text{m}$
$M_1$	abhängig von der Steigung $K_v$	
$M_2$	1,76	0,1
$M_3$	$M_2 \parallel M_2$	
$M_4$	$M_2 \parallel M_2 \parallel M_2$	
$M_5$	0,88	0,1
$M_6$	1,02	0,1
$M_7$	$M_6 \parallel M_6$	
$M_8$	$M_6 \parallel M_6 \parallel M_6$	
$M_9$	0,51	0,1
$M_{10}$	abhängig von der Steigung $K_v$	

Die Trägheit des hier verwendeten Ringoszillators gegenüber Sprüngen der Steuerspannung stellt sich nach dessen Untersuchungen mittels Transistor-Level Simulationen als vernachlässigbar klein heraus. Selbst für eine Variation der Steuerspannung von 100 mV (1/3 der nominalen Steuerspannung) über eine Zeitspanne von etwa 100 fs (0,00145 % der nominalen Periodendauer) ist der Frequenzwechsel innerhalb der Simulation erkennbar. Die sich ergebende Verringerung der Periodendauer entspricht dem zu erwartenden theoretischen Wert dieses Beispiels von etwa 1,7 ps (0,02 % der nominalen Periodendauer). Daher wird die Trägheit des VCO hier nicht weiter betrachtet. Sollte diese bei einem anderen Entwurf des VCO relevant werden und die Regelung des VCO selbst Überschwinger aufweisen, lässt sich dieses Verhalten charakterisieren und beispielsweise mit zusätzlichen Polen und Verzögerungszeiten in der Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen Modells berücksichtigen.

Zur Frequenzsynthese wird im Rückkopplungsweig des Phasenregelkreises ein Frequenzteiler integriert. Ein Beispiel für einen einfachen Frequenzteiler ist eine Aneinanderreihung von D-Flip-Flops, die die Frequenz des Eingangssignals jeweils durch zwei teilen. Eine weitere Möglichkeit ist ein Flankenzähler mit Vergleichslogik, der bei jeder  $N$ -ten steigenden Eingangsflanke eine steigende Ausgangsflanke generiert. Diese Vergleichslogik lässt sich für die Realisierung einer Fractional-N PLL unter anderem von einem  $\Sigma\Delta$ -Modulator steuern. Jedes Teilverhältnis kann eine unterschiedliche Verzögerungszeit zwischen der Flanke im Eingangssignal und der Flanke im Ausgangssignal aufweisen. Diese sogenannten *Propagation-Delays* führen zu einem systematischen Phasenversatz zwischen dem Referenz- und dem VCO-Signal.



(a) Kennlinienfeld des Ringoszillators für verschiedene Kanalweiten der Transistoren im Spannungsversorgungsweig



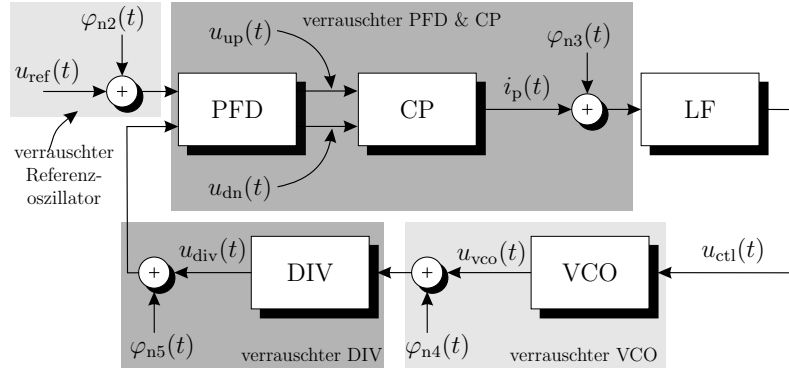
(b) Darstellung der Spannungsabhängigkeit der Steigung der Oszillatorkennlinie für verschiedene Kanalweiten der Transistoren im Spannungsversorgungsweig

**Abb. 5.7.:** Eigenschaften des Ringoszillators basierend auf der Transistor-Level Modellierung

## 5.2. Phasenrauschverhalten anhand des linearen Modells

Neben den Transistor-Level-basierten nichtlinearen und nicht-idealen Effekten ist das Phasenrauschen eine essentielle Kenngröße des Phasenregelkreises. Für die Modellierung des Phasenrauschens bietet sich beispielsweise die Plattform SpectreRF an. Sie ist eine Erweiterung des Simulators Spectre von Cadence um die Methoden *Periodic Steady State* und *Periodic Small-Signal Analyses* und kombiniert somit die Schaltungssimulation mit Kleinsignal-Betrachtungen. Eine Verhaltensmodellierung des Phasenrauschens in Phasenregelkreisen wird darüber hinaus in [67] diskutiert. Speziell für die Kleinsignal-Betrachtung des Phasenregelkreises bietet sich jedoch auch das lineare Modell aus Kapitel 3.1 an [7, 92], dass analytische Betrachtungen ermöglicht.

Das Phasenrauschen im Phasenregelkreis resultiert beispielsweise aus dem thermischen Rauschen der Bauteile und des Rauschens der Versorgungsspannungen und führt zu ungewollten stochastischen Verschiebungen der steigenden und fallenden Flanken der Signale. Diese zeitlichen Verschiebungen der Flanken werden als Jitter bezeichnet und korrespondieren zum Phasenrauschen der periodischen Signale. Die wesentlichen Phasenrauschquellen in der PLL sind in Abb. 5.8 schematisch dargestellt [7, 14, 45, 92–96]. Die Phasenrauschquellen sind hier aufgrund der Über-



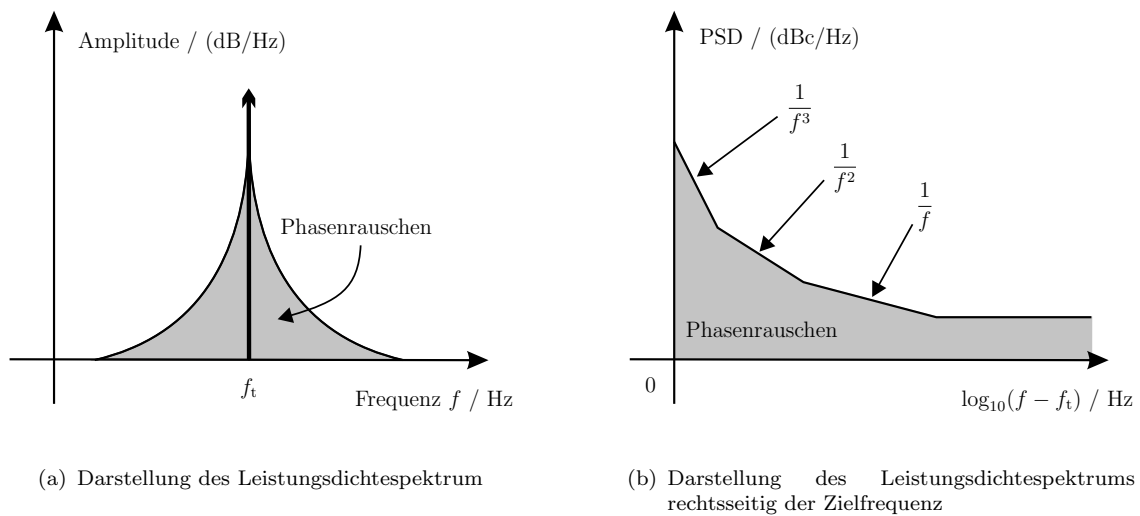
**Abb. 5.8.:** Schematische Darstellung des Phasenregelkreises mit den wesentlichen Phasenrauschquellen, wobei die hellgrauen Blöcke akkumulierendes und die dunkelgrauen Blöcke synchrones Phasenrauschen aufweisen

sichtlichkeit als additive Größen dargestellt, obwohl dieses Rauschen die Phasen der periodischen Signale beeinflusst.

Das periodische Ausgangssignal des spannungsgesteuerten Oszillators entspricht unter Berücksichtigung des Phasenrauschens

$$u_{\text{vco}}(t) = A_{\text{vco}} \sin \left( 2\pi \int_{t_0}^t f(u_{\text{ctl}}(\tau)) d\tau + \varphi_{\text{vco},0} + \varphi_{\text{n},4}(t) \right), \quad (5.1)$$

wobei  $A_{\text{vco}}$  die konstante Amplitude des VCO ist. Wird das Leistungsdichtespektrum des Referenz- und des spannungsgesteuerten Oszillators  $S(u_{\text{ref}})$  und  $S(u_{\text{vco}})$  betrachtet, resultiert das Phasenrauschen in einer Aufweitung des Spektrums um die Zielfrequenz  $f_t$  (siehe Abb. 5.9(a)). Sehr nahe der Zielfrequenz fällt diese Aufweitung im Mittel mit  $1/f^3$  ab. Für größere Abweichung zur Trägerfrequenz beträgt der Abfall in etwa  $1/f^2$  und geht schließlich für noch größere Abstände in  $1/f$  über [14, 92]. Wird das Leistungsdichtespektrum rechtsseitig der Zielfrequenz über die Abweichung zur Zielfrequenz  $\Delta f = f - f_t$  doppelt-logarithmisch aufgetragen, ergeben sich lineare Abschnitte mit den Steigungen  $-30\text{dB/Dekade}$ ,  $-20\text{dB/Dekade}$  und  $-10\text{dB/Dekade}$  für die genannten drei Bereiche (vgl. Abb. 5.9(b)). Diese Fre-



**Abb. 5.9.:** Verschiedene Darstellungen des Leistungsdichtespektrums freilaufender Oszillatoren zur Verdeutlichung deren Phasenrauschverhaltens

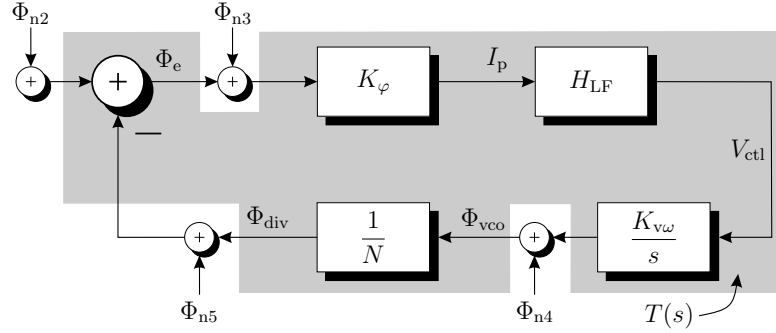
quenzabhängigkeit des Phasenrauschens von freilaufenden Oszillatoren ergibt sich aus der Akkumulation des Phasenrauschens über die Zeit. Eine Störung der Phase von freilaufenden Oszillatoren führt zu einer permanenten Abweichung der Phase und zukünftiges Phasenrauschen wird entsprechend akkumuliert [92].

Das Phasenrauschverhalten der getriggerten Komponenten des Phasenregelkreises überlagert sich jeweils mit der steigenden bzw. fallenden Flanke des Eingangssignals und resultiert somit in keiner bleibenden Abweichung der Phasenlage. Dieses synchrone Phasenrauschen zeigt sich in einem frequenzunabhängigen Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens von der Kombination aus PFD und Ladungspumpe (PFD & CP) [14]. Wird der Dividierer als Kette aus D-Flip-Flops aufgebaut, zählt auch dieser zu den getriggerten Bauteilen. Für eine Fractional-N PLL mit  $\Sigma\Delta$ -Modulator ist das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens vom Dividierer frequenzabhängig und wird maßgeblich von der Architektur des Modulators bestimmt.

Da die Phasenrauschbetrachtung nahe der Ruhelage des Regelkreises durchgeführt



wird und somit das Kleinsignalverhalten beurteilt wird, lässt sich das Verhalten der Bauteile der PLL mitteln und das lineare Modell aus Kapitel 3.1 herleiten. Dieses lineare Modell im Frequenzbereich ist in Abb. 5.10 inklusive der additiven Phasenrauschquellen dargestellt.



**Abb. 5.10.:** Darstellung des linearen Modells der CP-PLL im Frequenzbereich mit den wesentlichen Phasenrauschquellen

Wird das Phasenrauschverhalten des Regelkreises mit Hilfe des linearen Modells beschrieben, resultiert das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens am Ausgang der PLL:

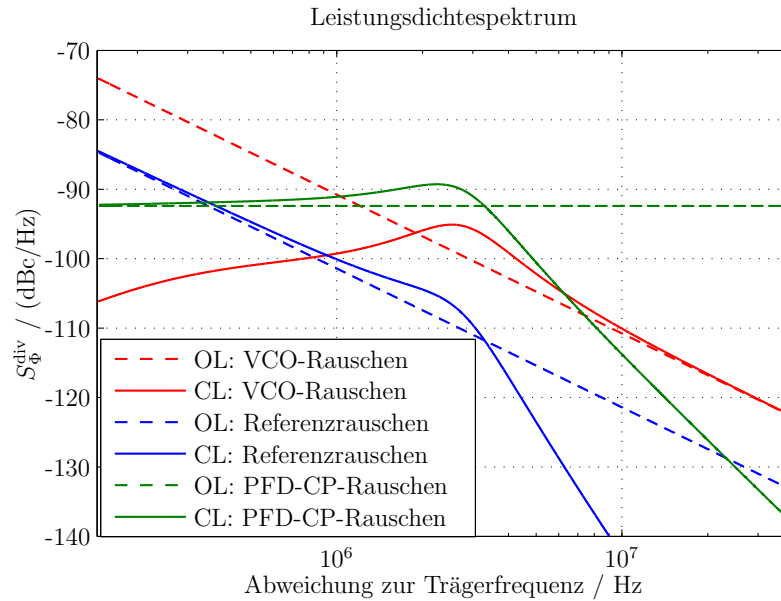
$$S_{\Phi}^{\text{vco}}(\Delta f) = (S_{\Phi}^{\text{n2}}(\Delta f) + S_{\Phi}^{\text{n3}} + S_{\Phi}^{\text{n5}}) |N T(j2\pi\Delta f)|^2 + S_{\Phi}^{\text{n4}}(\Delta f) |1 - T(j2\pi\Delta f)|^2. \quad (5.2)$$

Das Phasenrauschverhalten am Ausgang des Dividierers lässt sich mittels

$$S_{\Phi}^{\text{div}}(\Delta f) = \frac{1}{N^2} S_{\Phi}^{\text{vco}}(\Delta f) \quad (5.3)$$

bestimmen [7].  $S_{\Phi}^{\text{ni}}$  bezeichnen dabei die Leistungsdichtespektren des Phasenrauschens  $\Phi_{\text{ni}}$  mit  $i = 2, \dots, 5$ . Abb. 5.11 zeigt die Phasenrauschanteile der einzelnen Komponenten der PLL separat - sowohl für den freilaufenden Fall (engl. *Open Loop*, kurz: OL) als auch innerhalb der Regelung (engl. *Closed Loop*, kurz: CL). Bei Betrachtung des Phasenrauschverhaltens für den offenen Regelkreis ist zu erkennen, dass das Phasenrauschen der Oszillatoren eine Steigung von  $-20\text{dB/Dekade}$  zeigt und die getriggerten Komponenten der PLL ein frequenzunabhängiges Phasenrauschverhalten aufweisen. Innerhalb des geschlossenen Regelkreises wird das Phasenrauschen des spannungsgesteuerten Oszillators durch die Fehlerübertragungsfunktion  $T_e(s) = 1 - T(s)$  Hochpass-gefiltert, wobei das Phasenrauschen des Referenzoszillators und des PFD & CP Blocks mittels der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises Tiefpass-gefiltert wird.

Diese analytische Betrachtung des Phasenrauschens ermöglicht einen schnellen Einblick in das Systemverhalten, berücksichtigt jedoch keine weiteren nichtlinearen und nicht-idealen Effekte.



**Abb. 5.11.:** Separate Darstellung des Phasenrauschens der PLL-Komponenten für den offenen (OL) und geschlossenen Regelkreis (CL)

### 5.3. Ereignisgesteuerte Modellierung nicht-idealer Effekte

Die Kombination der eingeführten nichtlinearen und nicht-idealen Effekte der CP-PLL beeinflussen das dynamische Verhalten des Regelkreises nicht nur nahe der Ruhelage, sondern auch während der nichtlinearen Ziehphase. Aus diesem Grund ist das lineare Modell nicht ohne Weiteres verwendbar. Darüber hinaus werden auch die Konvergenzeigenschaften der Regelschleife beeinträchtigt. Für einen robusten und verlässlichen Entwurf des gemischt digital analogen Systems ist es daher unabdingbar, die Kombination dieser Effekte zu berücksichtigen. Da eine Transistor-Level oder verhaltensbasierte Simulation zu sehr langen Simulationszeiten führen kann [12] und eine große Datenmenge erzeugt wird, deren Interpretation eine Herausforderung darstellt [4, 19], liegt die ereignisgesteuerte Modellierung nahe.

Zur Berücksichtigung der nichtlinearen und nicht-idealen Effekte wird in dieser Arbeit das ereignisgesteuerte Modell nach [19, 24] erweitert, um sowohl die Transistor-Level-basierten Effekte als auch das Phasenrauschen und deren Kombination zu berücksichtigen. Diese Ansätze wurden auch in [97–100] veröffentlicht.

### 5.3.1. Modellierung der nicht-idealen Effekte des PFD & CP Blocks

Die **Totzone** des Phasenregelkreises resultiert aus der endlichen Steigung der Ausgangssignale des Phasen- und Frequenzdetektors und der Schwellspannung der nachfolgenden Transistoren der Ladungspumpe. Für kleine Phasenfehler ist die Zeitdifferenz zwischen den steigenden Flanken des Referenz- und des Dividierersignals so gering, dass das steigende Ausgangssignal des PFD die Schwellspannung der Ladungspumpe nicht erreicht und die Ladungspumpe nicht in der Lage ist, die Information des Phasenfehlers an den Schleifenfilter weiterzugeben. Für diese kleinen Zeitdifferenzen verhält sich der Phasenregelkreis gewissermaßen wie ein offener Regelkreis und weist somit eine Totzone auf.

Zur Berücksichtigung dieser Totzone (engl. *dead-zone*, kurz: DZ) des Phasenregelkreises wurden in [19] erste Vorarbeiten veröffentlicht. Diese Vorarbeiten wurden in [38] genauer betrachtet. Zur ereignisgesteuerten Modellierung der Totzone wird das analoge Verhalten der Ausgangssignale des PFD erneut als digital interpretiert und der endliche Zustandsautomat aus Kapitel 2.2.1 durch vier virtuelle Zustände erweitert (siehe Abb. 5.12 [38]).

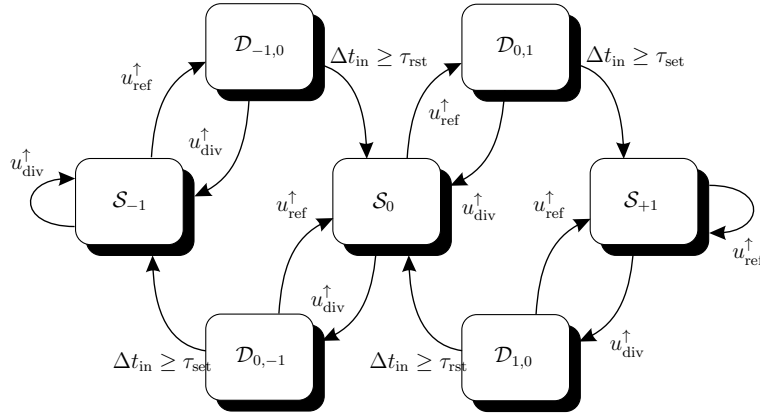


Abb. 5.12.: Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Totzone

Diese vier zusätzlichen Zustände  $D_{i,j}$  beschreiben den Phasenfehlerbereich, in dem der Phasendetektor nicht reagiert. Ist der Phasenfehler sehr klein, dass heißt die Zeitdifferenz zwischen  $u_{ref}^{\uparrow}$  und  $u_{div}^{\uparrow}$  ist geringer als  $\tau_{set}$ , befindet sich der Phasenregelkreis in der Totzone (die Zustandsfolge ist zum Beispiel durch  $S_0 \rightarrow D_{0,1} \rightarrow S_0$  gegeben) und die Ausgänge des PFD bleiben unverändert. Mathematisch lässt sich der endliche Automat unter Berücksichtigung der Totzone wie folgt definieren.

$$\mathcal{A}_{DZ} = \{S_{DZ}, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{T}_{DZ}, \gamma_{DZ}, \psi_{DZ}, S_i\}, \quad (5.4)$$

wobei

$$\mathcal{S}_{\text{DZ}} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{D}_{-1,0}, \mathcal{D}_{0,1}, \mathcal{D}_{0,-1}, \mathcal{D}_{1,0}\} \quad \text{Zustände,} \quad (5.5a)$$

$$\mathcal{I} = \{u_{\text{ref}}^{\uparrow}, u_{\text{div}}^{\uparrow}\} \quad \text{Eingangsalphabet,} \quad (5.5b)$$

$$\mathcal{O} = \{u_{\text{up}}(t), u_{\text{dn}}(t)\} \quad \text{Ausgangsalphabet,} \quad (5.5c)$$

$$\mathcal{T}_{\text{DZ}} = \{t, t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{div}}, \tau_{\text{set}}, \tau_{\text{rst}}\} \quad \text{Menge der Zeiten,} \quad (5.5d)$$

$$\gamma_{\text{DZ}} = \quad \text{Übergangsfunktion,} \quad (5.5e)$$

$$\psi_{\text{DZ}} = \quad \text{Ausgabefunktion,} \quad (5.5f)$$

$$\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}_{\text{DZ}} \quad \text{Anfangszustand} \quad (5.5g)$$

gilt.

Für die Zustandsübergangsfunktion gilt

$$\gamma_{\text{DZ}} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S}_{-1} & \rightarrow & \mathcal{D}_{-1,0} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathcal{D}_{0,1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathcal{D}_{0,-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{+1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{+1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{+1} & \rightarrow & \mathcal{D}_{1,0} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{D}_{-1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } \Delta t_{\text{in}} \geq \tau_{\text{rst}} \\ \mathcal{D}_{-1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_{-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{D}_{0,1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{+1} \quad \text{falls } \Delta t_{\text{in}} \geq \tau_{\text{set}} \\ \mathcal{D}_{0,1} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{D}_{0,-1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{-1} \quad \text{falls } \Delta t_{\text{in}} \geq \tau_{\text{set}} \\ \mathcal{D}_{0,-1} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{D}_{1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } \Delta t_{\text{in}} \geq \tau_{\text{rst}} \\ \mathcal{D}_{1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_{+1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Hierbei ist  $\Delta t_{\text{in}}$  die Zeitdifferenz zwischen der Simulationszeit  $t_n$  und dem Eintritt

$t_{\text{in}}$  in einen der Zustände  $\mathcal{D}_{i,j}$ :

$$\Delta t_{\text{in}} = t_n - t_{\text{in}}. \quad (5.7)$$

Die Ausgabefunktion dieses erweiterten Phasendetektors ist mit

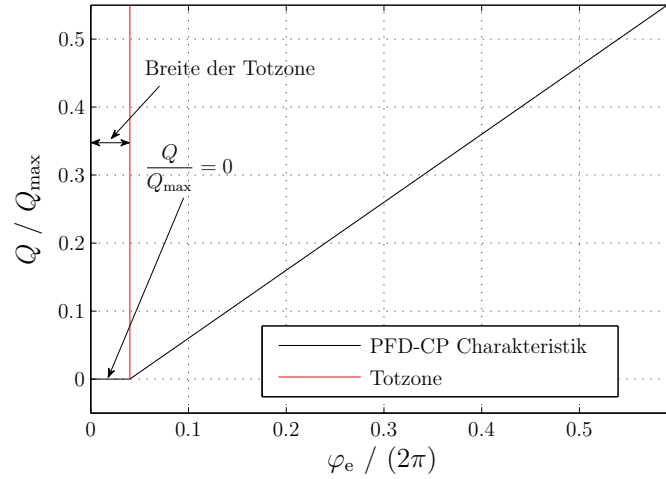
$$\psi_{\text{DZ}} = \begin{cases} u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{high} & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{D}_{-1,0} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{D}_{0,-1} \vee \mathcal{D}_{0,1} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{high}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{D}_{1,0} \end{cases} \quad (5.8)$$

gegeben.

Wird die Charakteristik der Baugruppe bestehend aus PFD und Ladungspumpe (kurz: PFD & CP Block) betrachtet, ergibt sich der Verlauf in Abb. 5.13, wobei die Verschiebung der elektrischen Ladung durch

$$Q = \int_{t_n}^{t_n + T_{\text{ref}}} i_p(t) dt \quad (5.9)$$

definiert ist und  $Q_{\text{max}}$  die maximale Ladungsverschiebung bei  $\varphi_e = 2\pi$  und idealer PLL beschreibt.



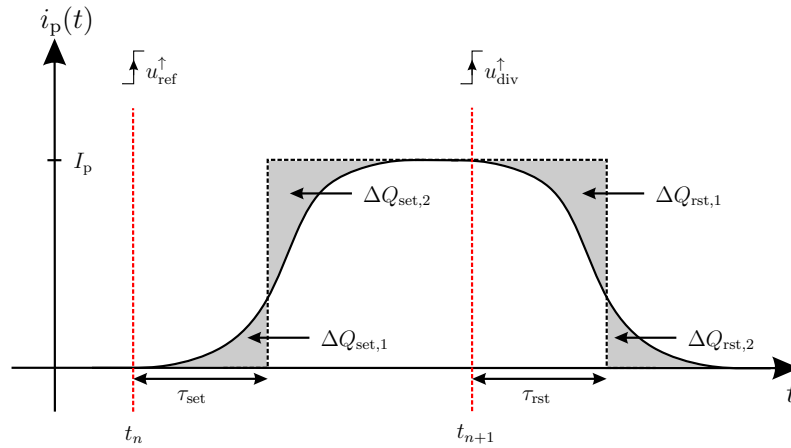
**Abb. 5.13.:** Charakteristische Kennlinie des PFD & CP Blocks mit Totzone, wobei  $\tau_{\text{rst}} = 0$  und  $\tau_{\text{set}} \neq 0$  gilt

Es ist zu erkennen, dass die Kombination von PFD und Ladungspumpe für kleine Phasenfehler nicht in der Lage ist, den Schleifenfilter zu laden oder zu entladen. Der Phasenregelkreis ist in diesem Bereich quasi aufgetrennt. Da dieser Effekt gerade bei kleinen Phasenfehlern auftritt, beeinflusst die Totzone die Stabilität des

Phasenregelkreises [39] und das Phasenrauschverhalten.

### Endliche Steigungen des Ladungspumpenstroms

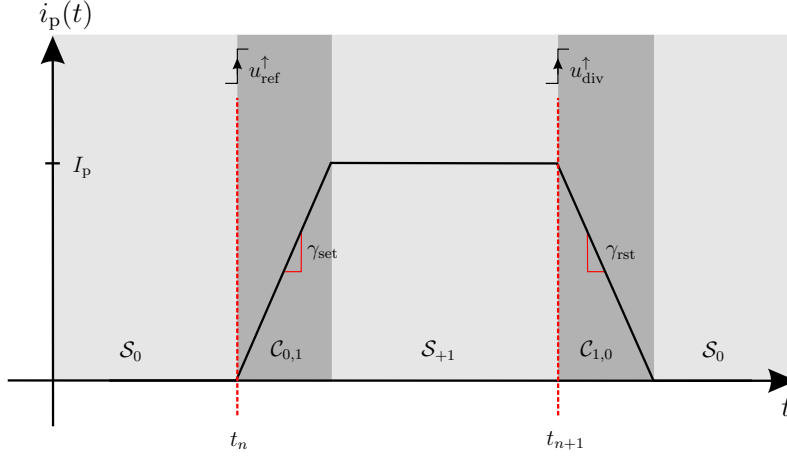
Zusätzlich zur Totzone ist die endliche Steigung des Ladungspumpenstroms ein nicht-idealer Effekt. In Abb. 5.14 ist ein exemplarischer Verlauf eines Stromimpulses der Ladungspumpe dargestellt (vgl. [19]). Es ist ersichtlich, dass der Stromver-



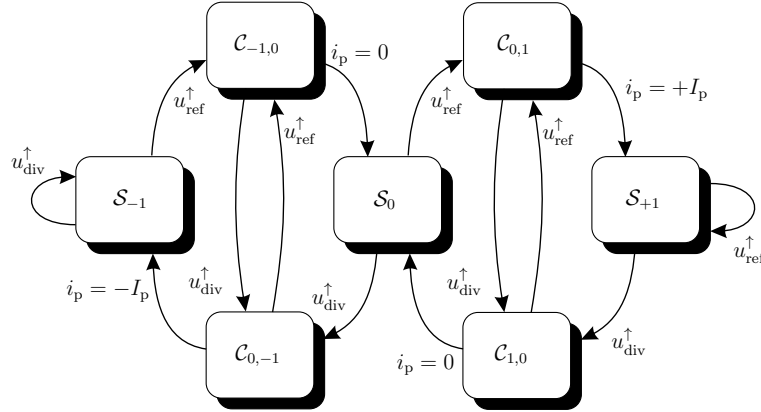
**Abb. 5.14.:** Modellierung der endlichen Flankensteilheit des Ladungspumpenstroms mittels Verzögerungszeiten (durchgezogene schwarze Kurve: realer Impuls – gestrichelte Kurve: idealer Impuls)

lauf mit endlicher Flankensteilheit in erster Näherung mit einem verzögerten rechteckförmigen Verlauf approximiert werden kann. Dabei werden die Zeiten  $\tau_{\text{set}}$  und  $\tau_{\text{rst}}$  zur Modellierung verwendet. Die Flächen zwischen beiden Verläufen entsprechen der Ladungsdifferenz, die die Ladungspumpe auf den Schleifenfilter aufbringt. Für den Fall  $\Delta Q_{\text{set},1} \approx \Delta Q_{\text{set},2}$  und  $\Delta Q_{\text{rst},1} \approx \Delta Q_{\text{rst},2}$  lässt sich die endliche Steigung im Mittel ebenfalls mit dem PFD in Abb. 5.12 abbilden.

Für die Stabilitätsanalyse des Phasenregelkreises ist der Bereich nahe dem Fixpunkt von großer Bedeutung. Da die erste Näherung der endlichen Steigung die Dynamik nahe dem Fixpunkt jedoch nicht hinreichend gut abbilden kann, ist es notwendig, den Funktionsblock bestehend aus PFD und Ladungspumpe um eine endliche Steigung des Stroms zu erweitern. Für diese Modellierung wird hier eine Geradengleichung mit konstanter Steigung angenommen (siehe Abb. 5.15). Die sich ergebende Erweiterung des PFD ist in Abb. 5.16 zu sehen. In den Zuständen  $\mathcal{C}_{i,j}$  entspricht der Ausgangsstrom der Ladungspumpe einer Rampe mit vorgegebener konstanter Steigung, die in den Zuständen  $\mathcal{C}_{0,1}$  und  $\mathcal{C}_{-1,0}$  positiv und in den Zuständen  $\mathcal{C}_{0,-1}$  und  $\mathcal{C}_{1,0}$  negativ ist. Die Zustände  $\mathcal{C}_{i,j}$  können durch das Erreichen des Stroms  $i_p(t) = -I_p$ ,  $i_p(t) = 0$ ,  $i_p(t) = +I_p$  oder durch eine steigende Flanke des Signals, das den vorherigen Zustandswechsel nicht verursacht hat, verlassen werden.



**Abb. 5.15.:** Strompuls der Ladungspumpe mit linearer Näherung der endlichen Flankensteilheit



**Abb. 5.16.:** Erweiterung des PFD zur Beschreibung der endlichen Steigung des Stroms

Dieser endliche Automat lässt sich wie folgt mathematisch beschreiben:

$$\mathcal{A}_{CS} = \{\mathcal{S}_{CS}, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{T}_{CS}, \gamma_{CS}, \psi_{CS}, \mathcal{S}_i\}, \quad (5.10)$$

wobei

$$\mathcal{S}_{\text{CS}} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_0, \mathcal{C}_{-1,0}, \mathcal{C}_{0,1}, \mathcal{C}_{0,-1}, \mathcal{C}_{1,0}\} \quad \text{Zustände,} \quad (5.11a)$$

$$\mathcal{I} = \{u_{\text{ref}}^{\uparrow}, u_{\text{div}}^{\uparrow}\} \quad \text{Eingangsalphabet,} \quad (5.11b)$$

$$\mathcal{O} = \{u_{\text{up}}(t), u_{\text{dn}}(t)\} \quad \text{Ausgangsalphabet,} \quad (5.11c)$$

$$\mathcal{T}_{\text{CS}} = \{-I_p, 0, +I_p\} \quad \text{Menge der Ströme,} \quad (5.11d)$$

$$\gamma_{\text{CS}} = \quad \text{Übergangsfunktion,} \quad (5.11e)$$

$$\psi_{\text{CS}} = \quad \text{Ausgabefunktion,} \quad (5.11f)$$

$$\mathcal{S}_i \in \mathcal{S}_{\text{CS}} \quad \text{Anfangszustand} \quad (5.11g)$$

gilt. Für die Zustandsübergangsfunktion gilt

$$\gamma_{\text{CS}} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S}_{-1} & \rightarrow & \mathcal{C}_{-1,0} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{0,1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathcal{C}_{0,-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{+1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{+1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{+1} & \rightarrow & \mathcal{C}_{1,0} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{C}_{-1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } i_p = 0 \\ \mathcal{C}_{-1,0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{0,-1} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{C}_{0,1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{+1} \quad \text{falls } i_p = +I_p \\ \mathcal{C}_{0,1} & \rightarrow & \mathcal{C}_{1,0} \quad \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{C}_{0,-1} & \rightarrow & \mathcal{S}_{-1} \quad \text{falls } i_p = -I_p \\ \mathcal{C}_{0,-1} & \rightarrow & \mathcal{C}_{-1,0} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{C}_{1,0} & \rightarrow & \mathcal{S}_0 \quad \text{falls } i_p = 0 \\ \mathcal{C}_{1,0} & \rightarrow & \mathcal{C}_{0,1} \quad \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \end{array} \right. . \quad (5.12)$$

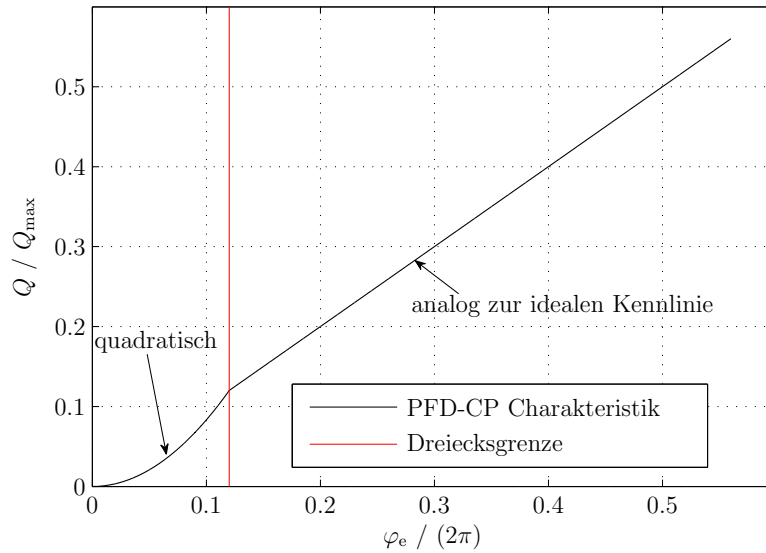


Die Ausgabefunktion dieses erweiterten Phasendetektors ist mit

$$\psi_{\text{CS}} = \begin{cases} u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{high} & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{C}_{0,-1} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{C}_{-1,0} \vee \mathcal{C}_{1,0} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{high}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{C}_{1,0} \end{cases} \quad (5.13)$$

gegeben.

Die Verallgemeinerung des ereignisgesteuerten Modells auf beliebige Ordnungen des Phasenregelkreises (siehe Kapitel 3.3) ist an dieser Stelle von großem Vorteil, da der Strom der Ladungspumpe nicht mehr als stückweise konstant angenommen werden kann und die Rampe des Stroms in der Berechnung des Schleifenfilters berücksichtigt werden muss. Die Charakteristik der Zusammenschaltung des PFD und der Ladungspumpe mit endlicher Steigung des Stroms ist in Abb. 5.17 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sie einen quadratischen Verlauf für kleine



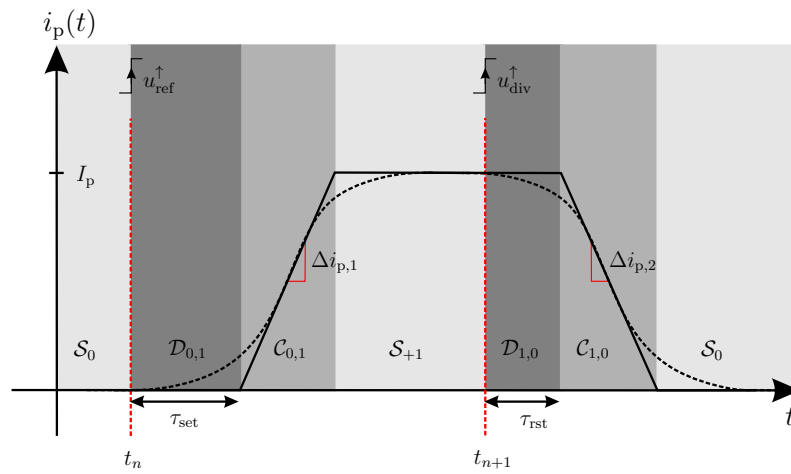
**Abb. 5.17.:** Charakteristische Kennlinie des PFD & CP-Blocks mit endlicher Steigung des Stroms ( $|\gamma_{\text{set}}| = |\gamma_{\text{rst}}|$ )

Phasenfehler aufweist. Für größere Phasenfehler ist die Charakteristik analog zum idealen Verlauf, falls der Betrag der positiven und negativen Steigung gleich ist ( $|\gamma_{\text{set}}| = |\gamma_{\text{rst}}|$ ). Der quadratische Verlauf ergibt sich aus der folgenden Untersuchung. Der trapezförmige Verlauf des Stroms (siehe Abb. 5.15) resultiert in einer Charakteristik, die analog zum idealen PFD ist, da der Flächeninhalt des Trapez gleich dem des idealen Rechteck ist. Wird der Phasenfehler kleiner, ist der Verlauf des Stroms dreieckförmig und die Fläche unter dem Strom hängt quadratisch vom Phasenfehler ab (siehe Dreiecksgrenze in Abb. 5.17).

Die endliche Flankensteilheit des Stroms führt somit zu einer weiteren Glättung der Steuerspannung im Bereich der Schaltzeitpunkte  $t_n$ . Darüber hinaus beeinträchtigt die endliche Steigung des Stroms die Konvergenzeigenschaften des Regelkreises, da die Schleifenverstärkung für kleine Phasenfehler abnimmt.

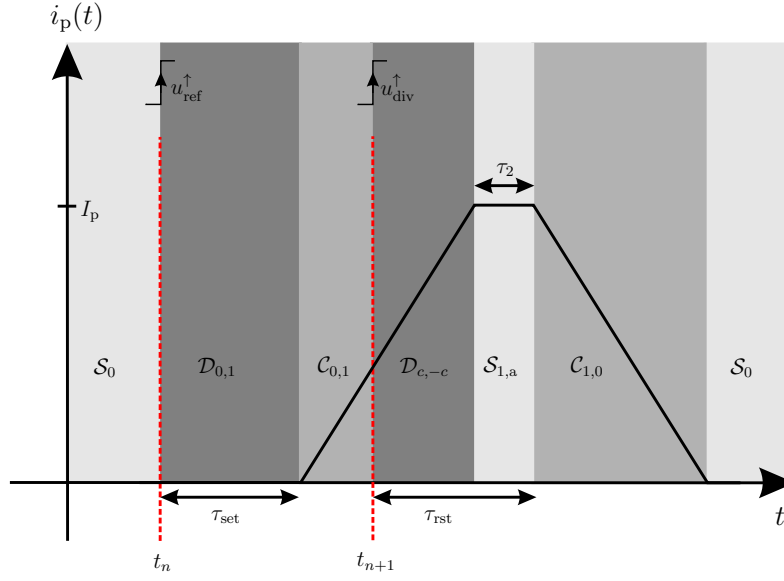
### Kombination der Totzone und der endlichen Steigung des Stroms

Für eine Modellierung, die nahe den physikalischen Gegebenheiten ist, werden die Totzone und die endliche Steigung des Stroms kombiniert. In Abb. 5.20 ist ein realistischerer Strompuls (gestrichelt) dargestellt. Zusätzlich ist der im ereignisgesteu-



**Abb. 5.18.:** Strompuls der Ladungspumpe mit Totzone und endlicher Steigung (durchgezogene schwarze Kurve: modellierter Impuls – gestrichelte Kurve: realer Impuls)

ten Modell implementierte Strompuls zu sehen. Durch die Kombination der Totzone ( $\mathcal{D}_{0,1}$  und  $\mathcal{D}_{1,0}$ ) und der endlichen Flankensteilheit ( $\mathcal{C}_{0,1}$  und  $\mathcal{C}_{1,0}$ ) ist eine Modellierung des Stroms nahe des realen Verlaufs möglich. Hierbei ist darauf zu achten, dass während einer Rampe des Ladungspumpenstroms eine zurücksetzende Flanke in den Eingangssignalen des PFD auftreten kann. Da der Einfluss der steigenden Flanke im Eingangssignal durch die Laufzeiten der Totzone ( $\tau_{\text{set}}$  oder  $\tau_{\text{rst}}$ ) verzögert wird, ist zu berücksichtigen, dass sowohl das Erreichen des maximalen Stroms als auch die Verzögerungszeit selber zu einem weiteren Zustandswechsel des PFD führen. In Abb. 5.19 ist ein beispielhaftes Szenario dargestellt. Der Anfangszustand wird in diesem Beispiel durch eine steigende Flanke im Referenzsignal verlassen. Nach der Verzögerungszeit  $\tau_{\text{set}}$  der Totzone wird der Zustand  $\mathcal{C}_{0,1}$  angenommen. Dieser wird durch eine steigende Flanke im Dividiersignal verlassen. Durch die Verzögerungszeit  $\tau_{\text{rst}}$  der Totzone bleibt die Dynamik des Stroms zunächst erhalten. In diesem Beispiel wird der maximale Strom  $+I_p$  erreicht, bevor die Verzögerungszeit erreicht ist. Der folgende Zustand  $\mathcal{S}_{1,a}$  ist eine Kopie des Zustandes  $\mathcal{S}_{+1}$ , wobei  $\mathcal{S}_{1,a}$  nach der



**Abb. 5.19.:** Spezialfall des Ladungspumpenstroms mit Totzone und endlicher Steigung

Zeit

$$\tau_2 = \tau_{rst} - \Delta t_S \quad (5.14)$$

verlassen wird.  $\Delta t_S$  beschreibt die Zeitspanne des Verweilens im vorherigen Zustand (in diesem Fall der Zustand  $\mathcal{D}_{c,-c}$ ). Die anschließende negative Rampe des Stroms wird durch das Erreichen des Stroms  $i_p(t) = 0$  beendet.

Mit Hilfe dieser Betrachtung lässt sich der erweiterte endliche Automat des PFD herleiten. Das Resultat ist in Abb. 5.20 dargestellt. Hierbei beschreiben  $\mathcal{D}_{i,j}$  die Totzone und  $\mathcal{C}_{g,h}$  entsprechen der endlichen Steigung des Stroms. Die zusätzlichen Zustände  $\mathcal{D}_{-c,c}$  und  $\mathcal{D}_{c,-c}$  der Totzone resultieren aus dem obigen Beispiel. Diese Zustände werden durch die Überschreitung der Verzögerungszeit  $\tau_{set}$  beziehungsweise  $\tau_{rst}$  oder durch das Erreichen des Sollstroms verlassen.  $\mathcal{S}_{p,a}$  stellen Kopien der Zustände  $\mathcal{S}_p$  dar, wobei  $p = -1, 0, +1$  gilt. Die weiteren Zeiten, die in diesem endlichen Automat verwendet werden, sind wie folgt definiert:

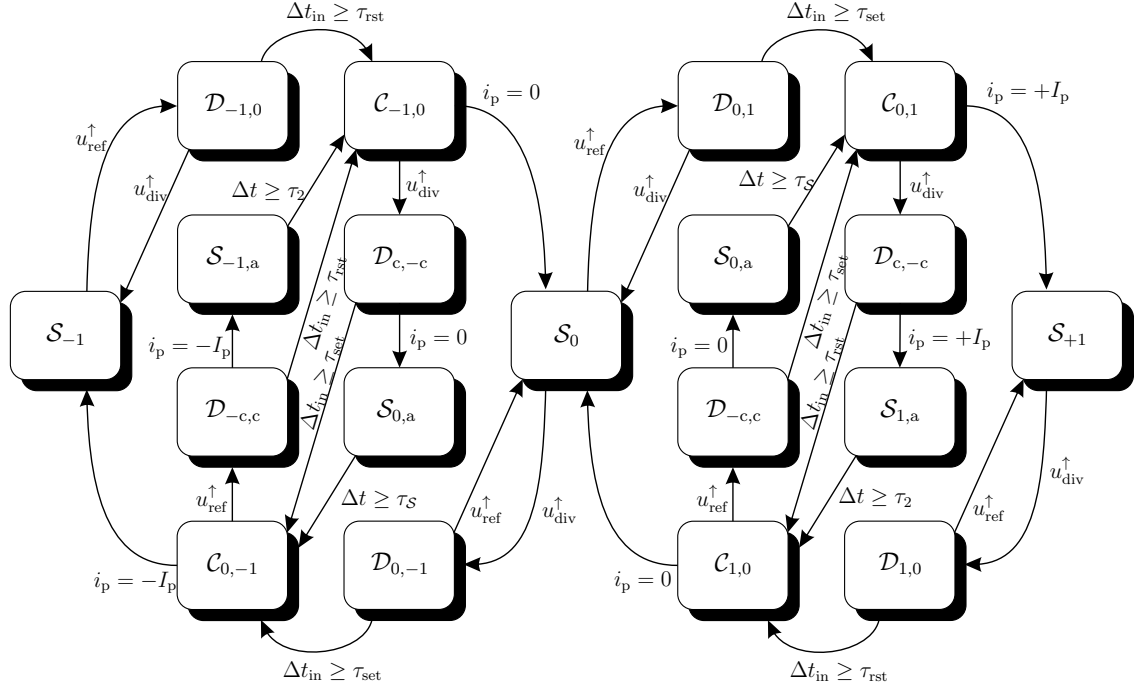
$$\tau_S = \tau_{set} - \Delta t_S \quad (5.15)$$

und

$$\Delta t_{in} = t_n - t_{in}, \quad (5.16)$$

wobei  $t_{in}$  den Eintrittszeitpunkt in einen Zustand definiert.

Bei dieser Modellierung ist darauf zu achten, dass die Summe der Verzögerungszeiten  $\tau_{set}$ ,  $\tau_{rst}$  und der Anstiegszeit des Stroms geringer als die Periodendauer des



**Abb. 5.20.:** Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Totzone und der endlichen Steigung des Stroms

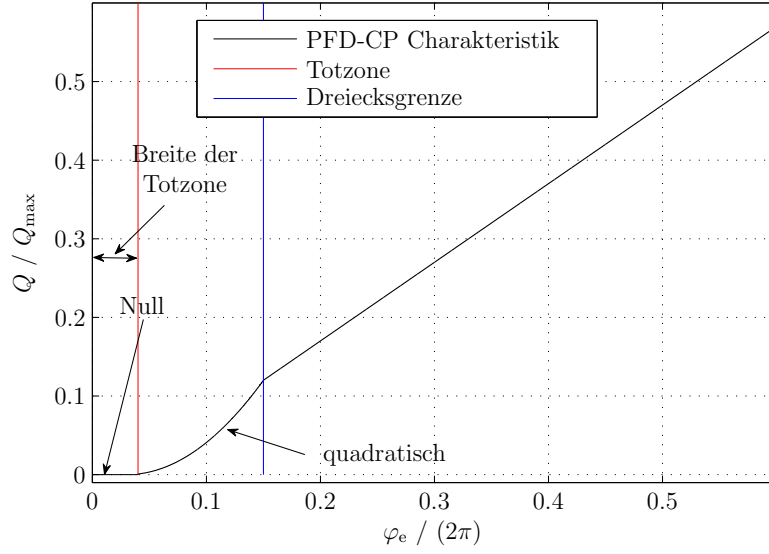
Referenz- und des Dividierersignals ist. Diese Annahme wird in der Regel erfüllt, da die verwendeten Komponenten sonst den Ansprüchen der Applikation nicht genügen. Die PFD & CP Charakteristik mit der Kombination der Totzone und der endlichen Steigung des Stromanstiegs ist in Abb. 5.21 zu sehen. Es ist ersichtlich, dass sowohl der quadratische Verlauf als auch die Totzone in der Charakteristik auftreten. Die Addition beider Bereiche beeinflusst das Phasenrauschverhalten und reduziert die Konvergenzeigenschaften des Phasenregelkreises und ist daher für den Systementwurf zu berücksichtigen.

### Leckstrom, Stromüberschwinger und Spannungsabhängigkeit der Stromamplitude

Die vorgestellten Erweiterungen des Phasendetektors zur Berücksichtigung der nicht-idealen Effekte weisen in den Zuständen  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_{0,a}$ ,  $\mathcal{D}_{0,1}$  und  $\mathcal{D}_{0,-1}$  einen Strom  $i_p = 0$  auf. Wird dieser Strom neu definiert, können alle Modelle für die Modellierung des Leckstroms herangezogen werden:

$$i_p(t) = \pm I_L \quad \forall \mathcal{S} \in [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{0,a}, \mathcal{D}_{0,1}, \mathcal{D}_{0,-1}]. \quad (5.17)$$

Diese Definition führt zu einer Verschiebung der Kennlinie der elektrischen Ladung des PFD & CP Blocks. Die Verschiebung in  $y$ -Richtung entspricht  $\pm I_L \cdot T_{\text{ref}}$ , wobei



**Abb. 5.21.:** Charakteristische Kennlinie des PFD & CP-Blocks mit Totzone ( $\tau_{rst} = 0$  und  $\tau_{set} \neq 0$ ) und endlicher Steigung des Stroms ( $|\gamma_{set}| = |\gamma_{rst}|$ )

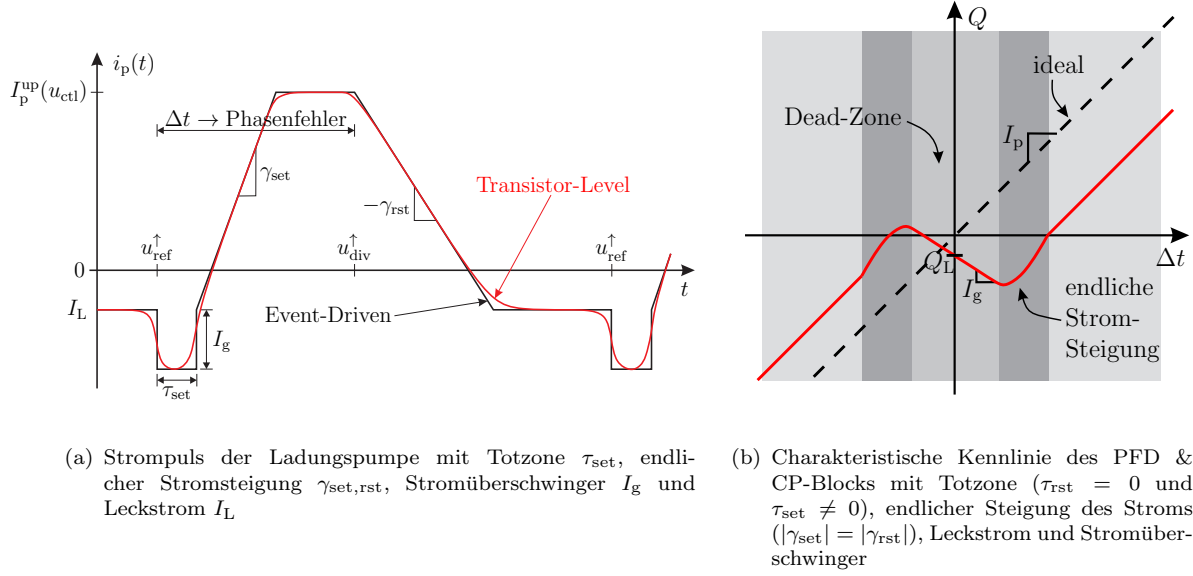
$T_{ref}$  die Periodendauer des Referenzsignals ist. Das Resultat dieser Eigenschaft ist ein mittlerer statischer Phasenfehler in der Regelung, da sich nur so der Leckstrom ausgleichen lässt (siehe Kapitel 7.2).

Analog zur Einführung des Leckstroms lässt sich ein Stromüberschwinger modellieren. Hierfür wird der Ladungspumpenstrom in den Zuständen  $\mathcal{D}_{0,1}$ ,  $\mathcal{D}_{1,0}$ ,  $\mathcal{S}_{0,a}$ ,  $\mathcal{S}_{1,a}$ ,  $\mathcal{D}_{0,-1}$ ,  $\mathcal{D}_{-1,0}$  und  $\mathcal{S}_{-1,a}$  neu definiert:

$$i_p(t) = I_L - I_g \quad \forall \mathcal{S} \in [\mathcal{D}_{0,1}, \mathcal{D}_{1,0}, \mathcal{S}_{0,a}, \mathcal{S}_{1,a}, \mathcal{D}_{0,-1}, \mathcal{D}_{-1,0}, \mathcal{S}_{-1,a}]. \quad (5.18)$$

Somit sind die vorangegangenen Modellierungen in der Lage, einen Stromüberschwinger zu berücksichtigen. Dieser Überschwinger des Stromsignals resultiert in einer negativen Steigung  $-I_g$  der Ladungskennlinie des PFD & CP Blocks nahe  $\varphi_e = 0$  und beeinträchtigt den statischen Phasenfehler und die Konvergenzeigenschaften des Phasenregelkreises (zwei stabile Ruhelagen möglich) und die Frequenzreinheit des VCO-Signals. Abb. 5.22(b) zeigt die resultierende Kennlinie des PFD & CP Blocks mit Totzone, Leckstrom, Stromüberschwinger (engl. *Glitch*) und endlichen Flankensteilheiten des Stroms.

Des Weiteren lässt sich die maximale Amplitude des Stroms  $I_p$  variabel definieren. Für das ereignisgesteuerte Modell der CP-PLL wird diese maximale Amplitude zwischen den Ereignissen  $t_n$  als konstant approximiert, wobei sich diese jedoch zu jedem Ereignis neu definieren lässt. Für den spannungsabhängigen Ausgangsstrom



**Abb. 5.22.:** Charakteristiken des PFD mit Totzone, Leckstrom, endlicher Steigung und Überschwinger des Ladungspumpenstroms

der Ladungspumpe bietet sich folgende Definition an

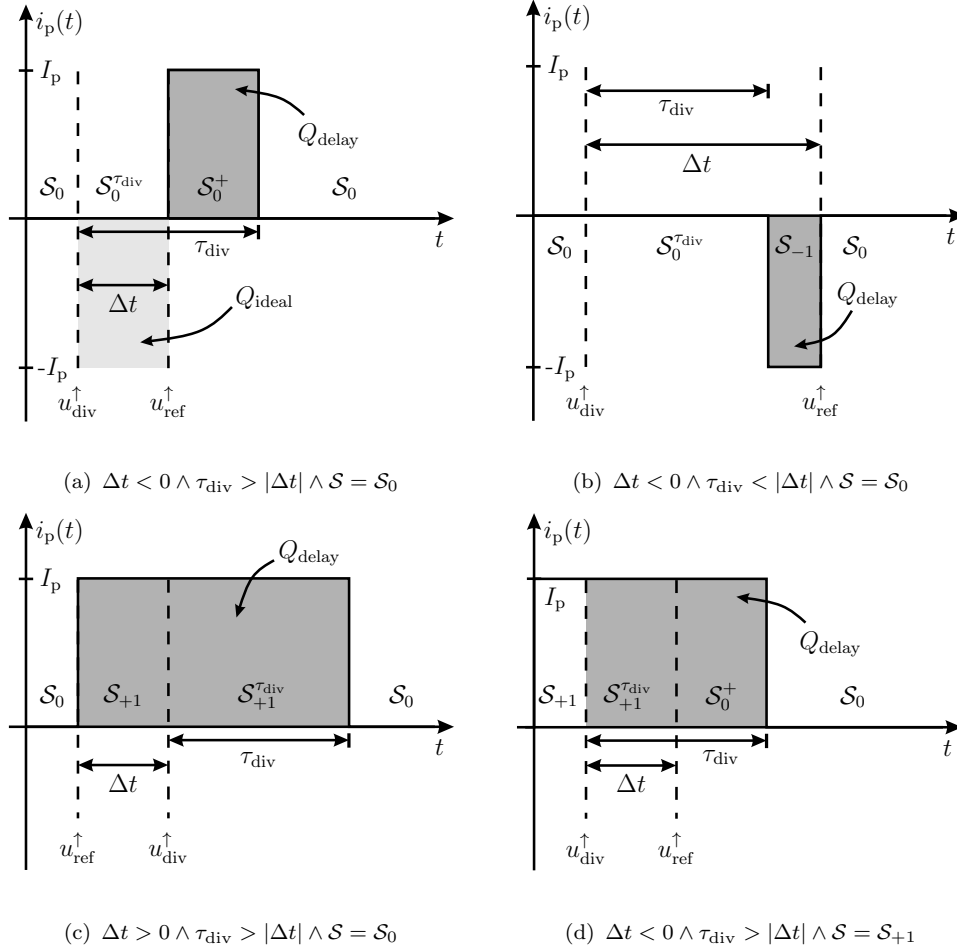
$$i_p(t) = \pm I_p(u_{\text{ctl}}(t_n)) \quad \forall \mathcal{S} \in [\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{1,a}, \mathcal{S}_{-1,a}]. \quad (5.19)$$

Basierend auf dieser Modellierung lassen sich die eingeführten endlichen Zustandsautomaten dazu verwenden, eine variable aber stückweise konstante Stromamplitude  $I_p(\cdot)$  zu realisieren. Dieser nicht-ideale Effekt führt zu einer variablen Schleifenverstärkung und beeinflusst somit das dynamische Verhalten, wie zum Beispiel die Anstiegs- und die Ausregelzeit.

Die ereignisgesteuerte Modellierung eines exemplarischen Strompulses der Ladungspumpe ist in Abb. 5.22(a) zu erkennen. Hier ist ersichtlich, dass sich der Strompuls mit dem eingeführten ereignisgesteuerten Modell gut abbilden lässt.

### 5.3.2. Dividiererlaufzeiten

Der Frequenzteiler innerhalb des Rückkopplungspfad des Phasenregelkreises weist für verschiedene Teilverhältnisse unterschiedliche Signallaufzeiten auf.



**Abb. 5.23.:** Darstellung der wesentlichen Effekte der Dividiererlaufzeiten auf den Phasenregelkreis anhand des Ladungspumpenstroms

Diese Verzögerungen resultieren in einer Zeitdifferenz der einfallenden Flanken und der generierten Ausgangsflanken. Der so generierte Phasenfehler beeinflusst das dynamische Verhalten des Phasenregelkreises. Speziell für die Fractional-N PLL, bei der zwischen verschiedenen Teilverhältnissen geschaltet wird, ergeben sich unterschiedliche Verzögerungszeiten.

Für die Modellierung dieser Dividiererlaufzeiten lässt sich ebenfalls der endliche Zustandsautomat des Phasen- und Frequenzdetektors erweitern. Dies hat den Vorteil, dass sich der Einfluss der Laufzeiten auf das dynamische Verhalten der Regelschleife detailliert und modular beschreiben lässt und zu einem besseren Verständnis dieses nicht-idealen Effektes beiträgt. Der Einfluss der Dividiererlaufzeiten auf

die Regelschleife ist in Abb. 5.23 dargestellt. Der erste Fall ist in Abb. 5.23(a) zu sehen, wobei der initiale Zustand des PFD als  $\mathcal{S}_0$  angenommen wird. Des Weiteren ist hier die Zeitdifferenz zwischen der idealen steigenden Dividiererflanke  $u_{\text{div}}^\uparrow$  und der des Referenzsignals  $u_{\text{ref}}^\uparrow$  kleiner als die Verzögerungszeit des Dividierers  $|\Delta t| = |t_{n+1}^{\text{ref}} - t_{n+1}^{\text{div}}| < \tau_{\text{div}}$ . Für diesen Fall wird die Reaktion auf die steigende Flanke  $u_{\text{div}}^\uparrow$  hinter die Referenzflanke verschoben und die elektrische Ladung des idealen Dividierers  $Q_{\text{ideal}}$  wird zu  $Q_{\text{delay}}$ . Es ist offensichtlich, dass sich das Vorzeichen der elektrischen Ladung ändert und die VCO-Frequenz erhöht wird, obwohl diese bereits höher als die Zielfrequenz ist. Wird  $|\Delta t| > \tau_{\text{div}}$  betrachtet, wird die ideale elektrische Ladung der Ladungspumpe um  $I_p \tau_{\text{div}}$  reduziert (siehe Abb. 5.23(b)). Das bedeutet, dass die Reduzierung der VCO-Frequenz und somit das Regelverhalten der PLL verlangsamt wird.

Tritt die Referenzflanke zuerst auf, tritt der dritte Fall aus Abb. 5.23(c) ein. Hier vergrößert die Laufzeit den Strompuls um  $I_p \tau_{\text{div}}$ , wodurch die VCO-Frequenz stärker erhöht wird als durch die Zeitdifferenz  $\Delta t$  vorgegeben und das Regelverhalten wird beschleunigt. Der vierte kritische Fall nimmt den initialen PFD-Zustand als  $\mathcal{S}_{+1}$  an (vgl. Abb. 5.23(d)). Tritt die Dividiererflanke  $u_{\text{div}}^\uparrow$  zuerst auf, würde die ideale Dividiererflanke die Beschleunigung des VCO-Signals beenden bis  $u_{\text{ref}}^\uparrow$  detektiert wird. Durch die Laufzeit des Dividierers wird für  $|\Delta t| < \tau_{\text{div}}$  die Beschleunigungsphase hingegen erst nach der Referenzflanke beendet und somit die elektrische Ladung erhöht. Des Weiteren weist diese Referenzflanke keinen Einfluss mehr auf die Regelung auf.

Diese vier kritischen Fälle lassen sich für die Erweiterung der Beschreibung des PFD als endlicher Zustandsautomat verwenden. Der resultierende Automat ist in Abb. 5.24 zu sehen. Dieser Automat lässt sich mit Hilfe des 7-Tupels

$$\mathcal{A}_{\text{delay}} = \{\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \gamma_{\text{delay}}, \psi_{\text{delay}}, \mathcal{S}_i\} \quad (5.20)$$

mathematisch beschreiben, wobei

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_{-1}, \mathcal{S}_{-0}, \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{+0}, \mathcal{S}_{+1}, \mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}}, \mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}}, \mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}}\} \quad \text{Zustände,} \quad (5.21a)$$

$$\mathcal{I} = \{u_{\text{ref}}^\uparrow, u_{\text{div}}^\uparrow\} \quad \text{Eingangsalphabet,} \quad (5.21b)$$

$$\mathcal{O} = \{u_{\text{up}}(t), u_{\text{dn}}(t)\} \quad \text{Ausgangsalphabet,} \quad (5.21c)$$

$$\mathcal{T} = \{t, t_{n+1}^{\text{ref}}, t_{n+1}^{\text{div}}, \tau_{\text{div}}\} \quad \text{Menge der Zeiten,} \quad (5.21d)$$

$$\gamma_{\text{delay}} = \quad \text{Übergangsfunktion,} \quad (5.21e)$$

$$\psi_{\text{delay}} = \quad \text{Ausgabefunktion} \quad (5.21f)$$



und

$$\mathcal{S}_i \in \mathcal{S} \quad \text{Anfangszustand} \quad (5.22)$$

gilt. Die Ausgabefunktion des erweiterten Phasendetektors ist mit

$$\psi_{\text{delay}} = \begin{cases} u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{high} & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \vee \mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{low}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_0 \vee \mathcal{S}_{-0} \vee \mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}} \\ u_{\text{up}}(t) = \text{high}, u_{\text{dn}}(t) = \text{low} & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \vee \mathcal{S}_{+0} \vee \mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}} \end{cases} \quad (5.23)$$

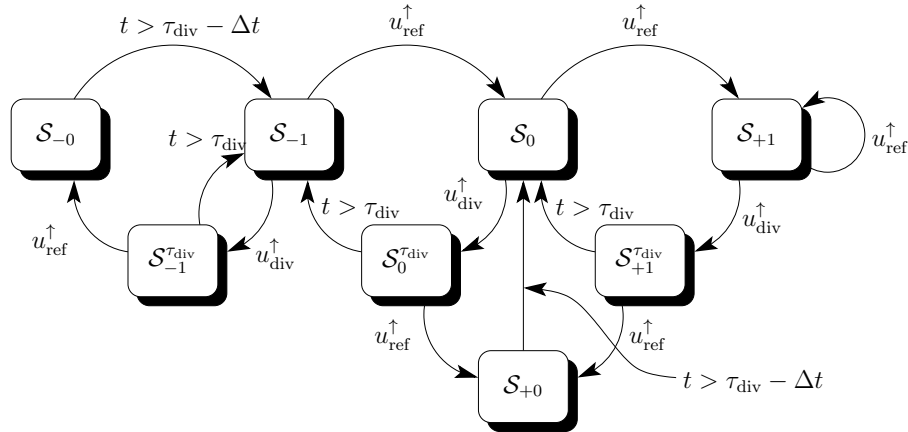
gegeben. Für die Zustandsübergangsfunktion gilt

$$\gamma_{\text{delay}} = \begin{cases} \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}} & \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}} & \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-0} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{falls } t > \tau_{\text{div}} - \Delta t \\ \mathcal{S}_{+0} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{falls } t > \tau_{\text{div}} - \Delta t \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1} & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}} & \text{falls } u_{\text{div}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_{-0} & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_{-1}^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{falls } t > \tau_{\text{div}} \\ \mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_{+0} & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \\ \mathcal{S}_0^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_{-1} & \text{falls } t > \tau_{\text{div}} \\ \mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_0 & \text{falls } t > \tau_{\text{div}} \\ \mathcal{S}_{+1}^{\tau_{\text{div}}} \rightarrow \mathcal{S}_{+0} & \text{falls } u_{\text{ref}}^{\uparrow} \end{cases} \quad (5.24)$$

Hierbei ist  $\Delta t$  die zeitliche Differenz der steigenden Flanken der Eingangssignale des Phasendetektors ( $u_{\text{ref}}(t)$  und  $u_{\text{div}}(t)$ ):

$$\Delta t = t_{n+1}^{\text{div}} - t_{n+1}^{\text{ref}}. \quad (5.25)$$

Durch die Laufzeiten des Dividierers wird die elektrische Ladungskennlinie des PFD & CP Blocks in negative  $x$ -Richtung verschoben, wodurch sich bei der CP-PLL ein mittlerer statischer Phasenfehler ergibt. Für unterschiedliche Dividiererlaufzeiten



**Abb. 5.24.:** Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Laufzeiten des Dividierers

der Fractional-N PLL ergibt sich ein mittlerer statischer Phasenfehler, der sich aus der Häufigkeit der auftretenden Laufzeiten und dessen Größe ergibt.

### 5.3.3. Phasenrauschen

Ein weiterer nicht-idealer Effekt ist das Rauschen in Phasenregelkreisen. Da die Informationen der Signale des Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese innerhalb der Phase gespeichert sind und die Amplituden eine weniger wichtige Rolle spielen, ist die Betrachtung des Phasenrauschens für den Systementwurf essentiell. Trotz verschiedener Methoden zur Reduzierung des Phasenrauschens (beispielsweise in Oszillatoren [101]), bleibt das Phasenrauschen Bestandteil des Regelkreises und muss entsprechend modelliert, charakterisiert und analysiert werden. Zwar lässt sich das Phasenrauschen mittels des linearen Modells beschreiben (siehe Kapitel 5.2), jedoch eignet sich dieses Modell nicht für die Untersuchung des Ziehbereichs und der Kombination des Phasenrauschens mit weiteren nichtlinearen und nicht-idealen Effekten. Für die Charakterisierung des Einflusses der nicht-idealen Effekte auf das Phasenrauschverhalten der PLL wird daher das ereignisgesteuerte Modell hinsichtlich des Phasenrauschens erweitert. Da das ereignisgesteuerte Modell die CP-PLL anhand der Phasengleichungen des Referenz- und des Dividierersignals im Zeitbereich repräsentiert, werden die Rauschquellen aus Abb. 5.8 in die Referenz- bzw. Dividierphase überführt, sodass sich

$$\varphi_n^{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{n2}(t_{n+1}) + \varphi_{n3}(t_{n+1}) - \varphi_{n3}(t_n) \quad (5.26a)$$

$$\varphi_n^{\text{div}}(t_{n+1}) = \sqrt{N}\varphi_{n4}(t_{n+1}) + \varphi_{n5}(t_{n+1}) - \varphi_{n5}(t_n) \quad (5.26b)$$

ergibt. Da das Phasenrauschen des Referenz- und des spannungsgesteuerten Oszillators akkumulierend ist ( $\varphi_{n2}$  und  $\varphi_{n4}$ ), werden diese Komponenten in jedem Iterationsschritt des ereignisgesteuerten Modells (engl. *Event-Driven Modell*, kurz:

ED-Modell) aufsummiert. Das synchrone Phasenrauschen des Dividierers und des PFD & CP Blocks ( $\varphi_{n5}$  und  $\varphi_{n3}$ ) wird durch die Subtraktion des vorangegangenen Phasenrauschterms im ED-Modell realisiert. Die Phasen des Referenz- und des Dividierersignals ergeben sich mit dem Phasenrauschen zu

$$\varphi_{\text{ref}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{ref}}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_{\text{ref}}(t) dt + \varphi_n^{\text{ref}}(t_n) \quad (5.27a)$$

$$\varphi_{\text{div}}(t_{n+1}) = \varphi_{\text{div}}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\omega_{\text{vco}}(t)}{N(t)} dt + \varphi_n^{\text{div}}(t_n). \quad (5.27b)$$

Das Phasenrauschverhalten für freilaufende Oszillatoren wird oft durch die Rauschleistung in dBc/Hz (Leistung pro Hz bezogen auf die Leistung der Trägerfrequenz) bei einem definierten Abstand zur Trägerfrequenz angegeben. Eine exemplarische Angabe in Datenblättern könnte wie folgt aussehen:

$$|S_{\Phi}(f_1)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} (|S_{\Phi}(f_1)|) = -110 \text{ dBc/Hz}, \quad (5.28)$$

wobei beispielsweise  $f_1 = 10 \text{ MHz}$  den Abstand zur Oszillatorfrequenz definiert. Da die ereignisgesteuerte Modellierung das dynamische Verhalten jedoch im Zeitbereich beschreibt, lässt sich die Standardabweichung der Jitter-behafteten Periodendauern von der idealen Periodendauer durch

$$\text{std}(\varphi_{n2}) = \sqrt{S_{\Phi}^2(f_1) \frac{f_1^2}{f_{\text{ref}}^3}} \cdot 2\pi f_{\text{ref}} \quad (5.29)$$

bestimmen (vgl. [92] S. 32 und folgende). Der rechte Multiplikator  $2\pi f_{\text{ref}}$  überführt den Jitter der Periodendauern in einen Phasen-Jitter und somit in das Phasenrauschen. Mit dieser Gleichung lässt sich sowohl das Phasenrauschen des Referenz- als auch des spannungsgesteuerten Oszillators bestimmen.

Für die freilaufenden synchronen Komponenten der Regelschleife (PFD, Ladungspumpe oder Dividierer) wird das Phasenrauschen meist in der Form  $|S_{\Phi}|_{\text{dB}} = -130 \text{ dBc/Hz}$  angegeben<sup>1</sup>. Die Standardabweichung des Phasenrauschens und somit der Phasen-Jitter lassen sich mit

$$\text{std}(\varphi_{n3}) = \sqrt{S_{\Phi}^3 \frac{1}{4\pi^2 f_{\text{ref}}}} \cdot 2\pi f_{\text{ref}} \quad (5.30)$$

bestimmen (vgl. [7] S. 205 und 232). Bei beiden Betrachtungen wird weißes Rauschen angenommen, da die Breite des betrachteten Frequenzbands 0 bis  $f_{\text{ref}}$  neben der Oszillatorfrequenz meist geringer als die Bandbreite des Rauschens ist und sich somit als näherungsweise konstant annehmen lässt [7]. Die eingeführten Standardabweichungen des Phasenrauschens im Zeitbereich lassen sich innerhalb der

<sup>1</sup>Der numerische Wert stellt lediglich ein Beispiel dar.

Gleichung (5.26) des iterativen ereignisgesteuerten Modells durch

$$\varphi_{ni} = \text{std}(\varphi_{ni}) \cdot \text{randn} \quad (5.31)$$

berücksichtigen. Das  $i$  im Index bezeichnet dabei die verschiedenen Phasenrauschgrößen  $\varphi_{n2}$  bis  $\varphi_{n5}$ . Die Funktion  $\text{randn}$  stellt eine normalverteilte Rauschgröße dar, wobei auch andere Verteilungen im ereignisgesteuerten Modell verwendet werden können.

Das resultierende Phasenrauschen der geschlossenen Regelung  $S_\Phi(\cdot)$  lässt sich allgemein anhand des Leistungsdichtespektrums der periodischen Signale bestimmen. Die Wurzel des mittleren quadratischen (engl. *Root-Mean-Square*, kurz: RMS) Phasenrauschens im Zeitbereich ergibt sich schließlich zu

$$\varphi_n^{\text{rms}} = \sqrt{\int_0^\infty 2S_\Phi(\Delta f) d\Delta f} \quad (5.32)$$

(siehe [1] Seite 99 und folgende, [59] und [102]). Für die doppelt-logarithmische Darstellung aus Abb. 5.9(b) lässt sich das Integral in Gleichung (5.32) durch

$$A_{\text{int}} = S_\Phi(f_1) f_1^{-\frac{m}{10}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\frac{m}{10} + 1} \left( f_2^{\frac{m}{10} + 1} - f_1^{\frac{m}{10} + 1} \right) & \forall m \neq -10 \\ \ln(f_2) - \ln(f_1) & \forall m = -10 \end{cases} \quad (5.33)$$

vereinfacht darstellen, wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Grenzen und  $m$  die Steigung der linearen Abschnitte sind.

Nach der Erweiterung des ereignisgesteuerten Modells durch die Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte und das Phasenrauschen lassen sich diese Effekte und deren Wechselbeziehungen effizient charakterisieren und der Systementwurf des Phasenregelkreises optimieren. Dies wird in Kapitel 7 genauer betrachtet.

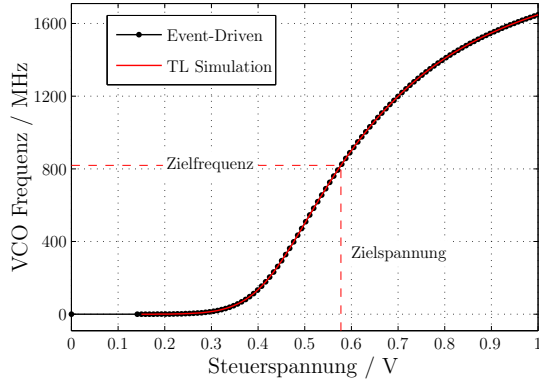
## 5.4. Vergleich der Modellierungsansätze

Zur Beurteilung der Erweiterung des ereignisgesteuerten (ED) Modells durch die Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte wird dieses mit der Transistor-Level (TL) Simulation verglichen. Hierzu lässt sich der Phasenregelkreis mit den Komponenten aus Kapitel 5.1 in Cadence / Spectre oder Advanced Design System (ADS) aufbauen. Exemplarisch sei hier ADS verwendet. Für die Beschreibung des Verhaltens der Transistoren wird das BSIM4 Modell [89] eingesetzt. Die Ergebnisse dieser Validierung wurden auch in [100] veröffentlicht. Für den Vergleich des ED Modells mit der TL Simulation werden im ersten Schritt die Komponenten des Phasenregelkreises auf Transistor-Level separat charakterisiert und mittels der makroskopischen Parameter aus Kapitel 5.3 in das ereignisgesteuerte Modell eingebracht.

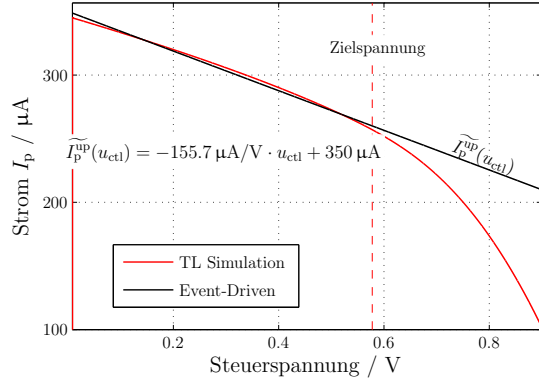
Für die Charakterisierung der VCO-Kennlinie wird der spannungsgesteuerte Oszillator mit einer konstanten Steuerspannung beschaltet und die Frequenz des Ausgangssignals bestimmt. Wird die Frequenz über verschiedene konstante Steuerspannungen aufgetragen, ergibt sich die Kennlinie des verwendeten Ringoszillators in Abb. 5.25(a). Im ereignisgesteuerten Modell lässt sich diese Charakteristik mit einem Polynom oder einer stückweise linearen Approximation realisieren, wobei beide Methoden zum gleichen Ergebnis führen. An dieser Stelle wird die VCO-Kennlinie mit 100 Stützstellen stückweise linear approximiert.

Die Spannungsabhängigkeit der Stromamplitude der verwendeten Ladungspumpe wird während eines Aufladeprozesses der Filterkapazitäten aufgenommen. Zu diesem Zweck werden die zwei Eingangssignale der Ladungspumpe in der Art vorgegeben, dass der entladene Schleifenfilter durch die Ladungspumpe bis auf die Versorgungsspannung aufgeladen wird. Wird der Strom über die Spannung der zweiten Kapazität  $C_2$  und somit der Steuerspannung aufgetragen, resultiert der Zusammenhang in Abb. 5.25(b). Es ist zu erkennen, dass der Abfall der Amplitude bis zur Zielspannung (Ruhelage des Phasenregelkreises) näherungsweise linear ist. Oberhalb der Zielspannung wird der Abfall größer und die Amplitude des Stroms läuft gegen Null für Kapazitätsspannungen nahe der Versorgungsspannung. Im späteren Verlauf dieses Kapitels wird sich zeigen, dass der Überschwinger des implementierten Phasenregelkreises nicht deutlich größer als die Zielspannung ist und somit eine lineare Approximation der Stromamplitude für ein akkurates ereignisgesteuertes Modell ausreicht. Generell ist das ereignisgesteuerte Modell in der Lage, einen beliebigen Zusammenhang zu berücksichtigen, wobei dieser für jede Referenzperiode als stückweise konstant angenommen wird.

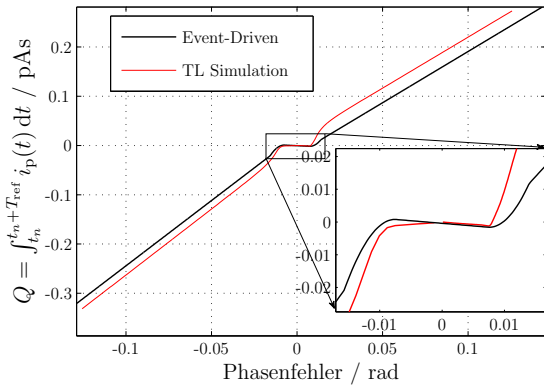
Zur Aufnahme der Ladungskennlinie des PFD & CP Blocks wird die Kombination des PFD, der Ladungspumpe und des Schleifenfilters als elektrische Last betrachtet. Die Eingangssignale des Phasen- und Frequenzdetektors werden durch zwei periodische Signale mit leicht unterschiedlichen Frequenzen vorgegeben, sodass der Phasenfehler zwischen beiden Signalen stetig größer oder kleiner wird. Wird der Ladungspumpenstrom aufgenommen und die resultierende Ladung einer Referenzperiode über den Phasenfehler aufgetragen, ergibt sich die Kennlinie in Abb. 5.25(c). Da hier lediglich die Totzone, der Leckstrom und die Einflüsse der endlichen Flankensteilheit des Stroms und der Stromüberschwinger interessant sind, ist es ausreichend, lediglich kleine Phasenfehler zu untersuchen und die Spannungsabhängigkeit des Stroms auf Grund der nur kleinen Änderungen der Filterspannungen bei dieser Betrachtung zu vernachlässigen. Werden die makroskopischen Parameter im ereignisgesteuerten Modell eingebracht, ergibt sich der Strompuls aus Abb. 5.25(d), der zu der PFD & CP Kennlinie in Abb. 5.25(c) führt. Die kleinen Unterschiede nahe des Effektes der Totzone entstehen durch weitere parasitäre Effekte in der Transistor-Level Simulation und sind nur bei starker Vergrößerung erkennbar. Es wird sich zeigen, dass die kleinen Differenzen zwischen der Kennlinie des ereignisgesteuerten Modells und der Transistor-Level Simulation nur geringe Auswirkungen auf das Verhalten des Phasenregelkreises aufweisen.



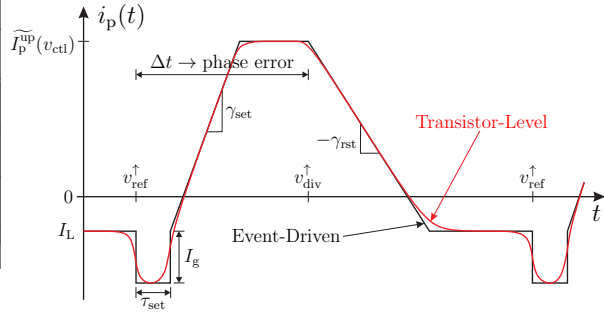
(a) Kennlinie des verwendeten Ringoszillators



(b) Spannungsabhängigkeit der Amplitude des Stroms



(c) Ladungskennlinie des PFD &amp; CP Blocks



(d) Darstellung des resultierenden Strompulses

**Abb. 5.25.:** Charakterisierung der Transistor-Level-basierten PLL Komponenten und deren Modellierung im ereignisgesteuerten Modell

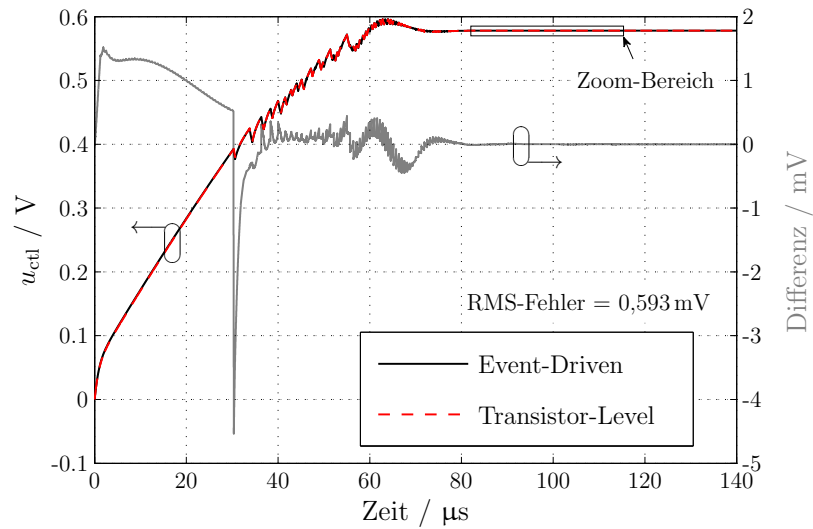
Unter Berücksichtigung dieser Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte lassen sich das ereignisgesteuerte Modell und die Transistor-Level Simulation miteinander vergleichen. Für die komfortable Bedienung des ereignisgesteuerten Modells lässt sich die implementierte grafische Benutzeroberfläche aus Anhang D verwenden. Die makroskopischen Parameter des getesteten Phasenregelkreises sind in Tab. 5.2 zusammengefasst. Des Weiteren wird das ereignisgesteuerte Modell mit je 10 zusätzlichen Punkten pro Ereignis simuliert, die lediglich für eine optisch ansprechendere und feinere Darstellung verwendet werden. Die Steuerspannung beider Simulationen ist in Abb. 5.26 dargestellt. Beim Vergleich des ereignisgesteuerten Modells mit der Transistor-Level Simulation als Referenz ist zu erkennen, dass die Übereinstimmung beider Ergebnisse sehr gut ist. In Abb. 5.26(a) sind der gesamte Ziehbereich, der eingeregelter Fall und der ausgeglichene Zustand anhand der Steuerspannung innerhalb

**Tab. 5.2.:** Parameter für den Vergleich des ereignisgesteuerten Modells und der Transistor-Level Simulation

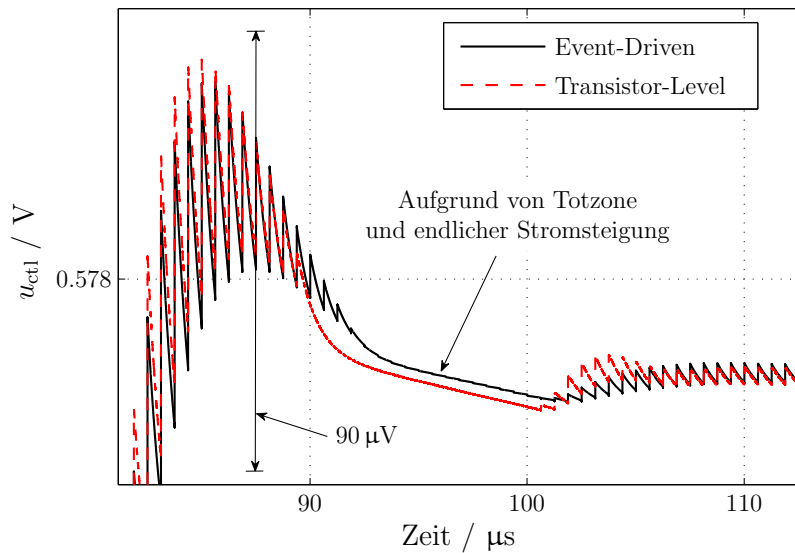
Parameter	Wert	Einheit
$f_{\text{ref}}$	1,6	MHz
$N$	512	
$\tau_{\text{set}}$	60	ps
$\tau_{\text{rst}}$	0	ps
$I_{\text{p}}^{\text{up}}$	$\widetilde{I}_{\text{p}}^{\text{up}}(u_{\text{ctl}})$	$\mu\text{A}$
$I_{\text{p}}^{\text{dn}}$	-333	$\mu\text{A}$
$I_{\text{L}}$	-24	nA
$I_{\text{g}}$	0,2	$\mu\text{A}$
$\gamma_{\text{set}}$	5,1	MA/s
$\gamma_{\text{rst}}$	$\gamma_{\text{set}}$	MA/s
$K_{\text{v}}$	stückweise definiert (Abb. 5.25(a))	Hz/V
$R_1$	224,3	$\Omega$
$C_1$	22,8	nF
$C_2$	4,7	nF

der PLL zu sehen. Darüber hinaus ist die Differenz zwischen der Steuerspannung vom ED-Modell und der TL Simulation abgebildet. Der RMS-Fehler über die gesamte Regelzeit beträgt nur 0,593 mV und entspricht lediglich 0,1% der Zielspannung. Wird ein Zoom-Bereich der Steuerspannung dargestellt, ergibt sich der Verlauf in Abb. 5.26(b). Erst im sehr kleinen Bereich von 90  $\mu\text{V}$  um die Zielspannung wird ein kleiner Unterschied zwischen den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells und denen der TL Simulation erkennbar. Nichtsdestotrotz ist der Einfluss der nicht-idealen Effekte (Totzone, endliche Steigung der Stromflanken, Leckstrom und Stromüberschwinger) auf das dynamische Verhalten des Phasenregelkreises in beiden Steuerspannungen sichtbar, wobei beide Modelle vergleichbare Tendenzen liefern.

Neben der Genauigkeit des ereignisgesteuerten Modells beträgt die Simulationszeit lediglich 0,48 s inkl. der erwähnten 10 zusätzlichen Punkte je Ereignis, die ausschließlich für die feinere grafische Darstellung verwendet werden. Diese Simulationszeit lässt sich mit der C++ Implementierung des ereignisgesteuerten Modells aus Anhang E erreichen.



(a) Zeitlicher Verlauf der Steuerspannungen und deren Differenz im Ziehbereich, im eingerasteten Fall und im ausgeglichenen Zustand



(b) Detaildarstellung mit sichtbarem Effekt der Totzone, der endlichen Stromsteigung und des Leckstroms

**Abb. 5.26.:** Verifikation des verallgemeinerten und erweiterten ereignisgesteuerten Modells durch eine Transistor-Level-Simulation

Die Transistor-Level Simulation benötigt hingegen 4919s. Das hoch effiziente und akkurate ereignisgesteuerte Modell ist somit in der Lage, ca. 10.000 Simulationen in der gleichen Zeit einer einzigen Transistor-Level Simulation durchzuführen<sup>2</sup>. Dies

<sup>2</sup>Verwendeter PC: Intel Core i7-3770 @ 3,4GHz // 12GB RAM // 64Bit Windows 7 Pro // NVIDIA NVS 310 mit 512MB



**Tab. 5.3.:** Vergleich des ereignisgesteuerten Modells und der Transistor-Level Simulation hinsichtlich Genauigkeit und Geschwindigkeit

	Transistor-Level	Event-Driven
Simulationszeit	4919 s	0,48 s
relativer RMS-Fehler	—	0,1 %
Geschwindigkeitsgewinn	—	$\approx 10250$

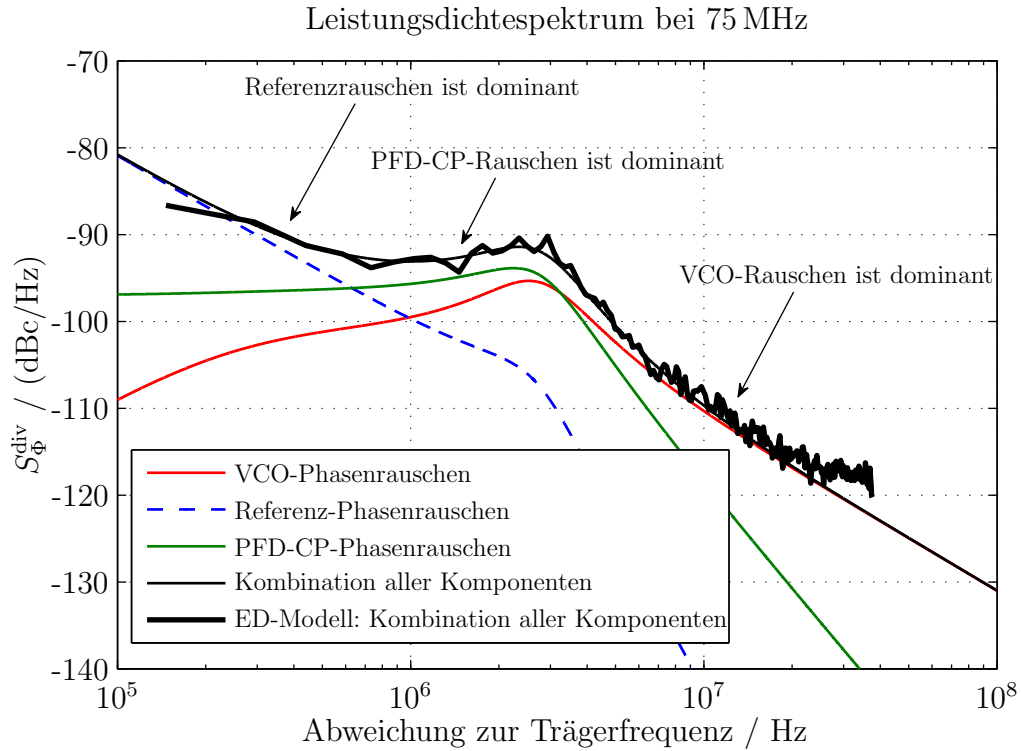
ermöglicht eine effiziente und umfassende Charakterisierung des gemischt digital analogen Phasenregelkreises sowohl für den Bereich nahe der Ruhelage als auch für beliebige Anfangsbedingungen. Die Genauigkeit und die Geschwindigkeiten der Simulationen sind in Tab. 5.3 zusammengefasst.

Für den Vergleich des Phasenrauschverhaltens des geschlossenen Phasenregelkreises innerhalb des ereignisgesteuerten Modells und der linearen Beschreibung wird ein exemplarischer Phasenregelkreis sowohl mit Referenz-, VCO- als auch PFD & CP Phasenrauschen betrachtet. Die verwendeten Rauschgrößen der freilaufenden PLL-Komponenten sind in Tab. 5.4 zu finden.

**Tab. 5.4.:** Rauschgrößen der freilaufenden PLL-Komponenten für den Vergleich des ereignisgesteuerten Modells und der linearen Beschreibung

Parameter	Wert	Einheit
$S_{\Phi}^{\text{ref}}$	−100	dBc/Hz @ 1 MHz
$S_{\Phi}^{\text{pfd}}$	−97	dBc/Hz
$S_{\Phi}^{\text{div}}$	−110	dBc/Hz @ 10 MHz

Das resultierende Phasenrauschverhalten innerhalb der geschlossenen Regelschleife ist in Abb. 5.27 dargestellt. Für dieses Beispiel dominiert das Phasenrauschen des Referenzsignals nahe der Trägerfrequenz, wobei für große Abweichungen zur Trägerfrequenz das Phasenrauschen des spannungsgesteuerten Oszillators dominiert. Im Übergang zwischen diesen beiden Rauschgrößen trägt das Phasenrauschen des PFD & CP Blocks wesentlich zum gesamten Rauschverhalten bei. Es ist zu erkennen, dass die Ergebnisse des ereignisgesteuerten Modells gut mit der linearen Beschreibung des Phasenrauschens übereinstimmen. Das lineare Modell lässt sich zwar analytisch auswerten und beschreibt das Phasenrauschen anhand einer geschlossenen mathematischen Theorie, das ereignisgesteuerte Modell ermöglicht jedoch die Kombination von Phasenrauscheffekten und Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekten. Darüber hinaus ist das ereignisgesteuerte Modell effizienter als verhaltensbasierte Modellierungen (siehe Kapitel 3) und stellt somit einen wirkungsvollen und vielsei-



**Abb. 5.27.:** Vergleich des Phasenrauschverhaltens des geschlossenen Regelkreises innerhalb des ereignisgesteuerten Modells (dicke schwarze Kurve) und des linearen Modells (dünne Kurven)

tigen Modellierungsansatz zur Charakterisierung und Analyse von gemischt digital analogen Phasenregelkreisen dar.

---

# Validierung mittels Hardware-Realisierung

---

Ein wichtiger Bestandteil der Validierung von Modellierungsansätzen ist die Messung der realen Schaltungen, die das Modell abbildet. Zu diesem Zweck wird das ereignisgesteuerte Modell mit den enthaltenen Nichtlinearitäten und nicht-idealen Effekten anhand einer Testschaltung auf seine Genauigkeit überprüft. Hier werden die einzelnen Hardware-Komponenten der Schaltung messtechnisch charakterisiert und in den eingeführten ereignisgesteuerten Modellierungsansatz überführt. Der Vergleich der Messung des Gesamtsystems mit den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells wird sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich durchgeführt.

### 6.1. Aufbau der Testschaltung

Für die Validierung des ereignisgesteuerten Modells und speziell der Modellierung der nichtlinearen und nicht-idealen Effekte ist eine Schaltung notwendig, die verschiedene Arbeitspunkte des Phasenregelkreises mit unterschiedlich ausgeprägten nicht-idealen Effekte ermöglicht.

In vielen Hardware-Realisierungen von Phasenregelkreisen wird eine Verzögerung innerhalb des Reset-Pfads des Phasendetektors dazu verwendet, die Totzone zu reduzieren oder komplett zu kompensieren. Diese Verzögerung beeinflusst die Kennlinie des Phasendetektors für kleine Phasenfehler und reduziert den Einfluss der Totzone. Der Nachteil dieses Pulses liegt in der Beeinflussung der Kennlinie für Phasenfehler nahe  $\pm 2\pi$ . Für die Validierung des ereignisgesteuerten Modells ist es daher sinnvoll, die Breite des Anti-Backlash Pulses variieren zu können.

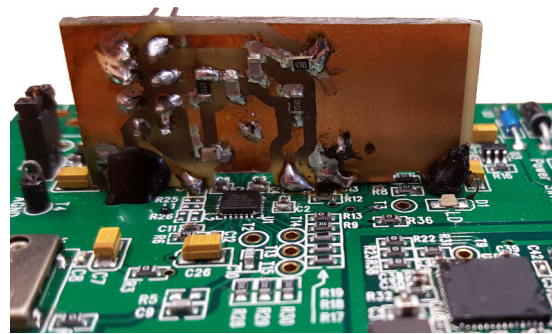
Neben der einstellbaren Verzögerung im Phasendetektor sind Einstellmöglichkei-

ten bezüglich der Schleifendynamik notwendig. Die Kombination von verschiedenen Schleifenverstärkungen und Schleifenfiltern ermöglicht beispielsweise die Charakterisierung einzelner Bauteile der Schaltung als auch die Abdeckung eines breiten Spektrums des Arbeitsbereiches des Phasenregelkreises.

Die Testschaltung *EVAL-ADF4360-xEBZ1 (Rev. E)* von Analog Devices bietet diese Möglichkeiten und ist in Abb. 6.1(a) dargestellt.



(a) Draufsicht



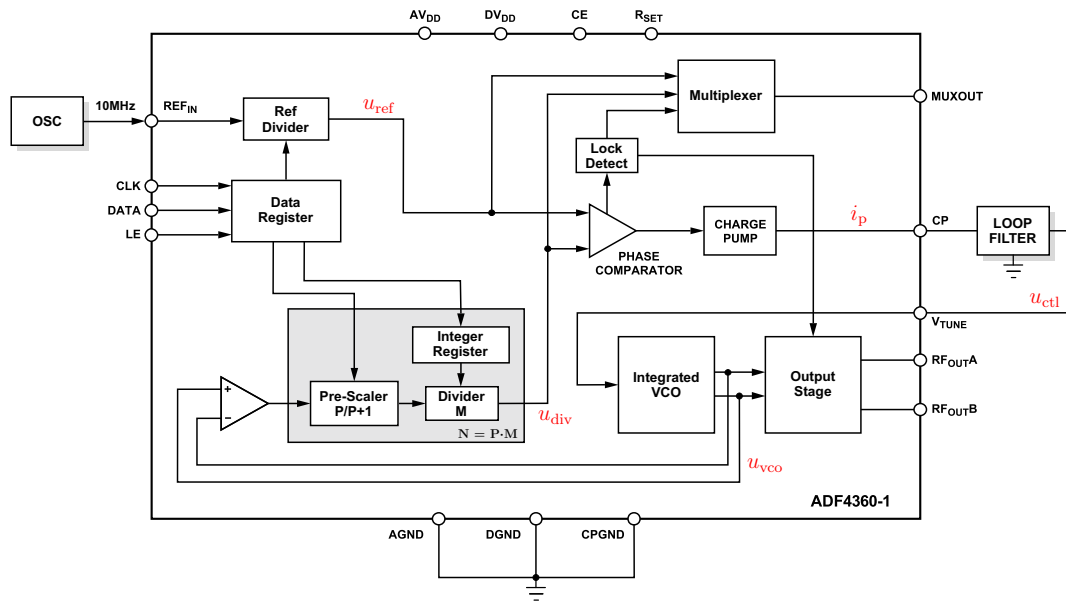
(b) Detaildarstellung des zu Testzwecken entworfenen Schleifenfilters

**Abb. 6.1.:** Darstellung der Testschaltung von Analog Devices inkl. des zu Testzwecken entworfenen Schleifenfilters

Diese Schaltung enthält neben dem eigentlichen Phasenregelkreis eine USB-Schnittstelle für die Kommunikation mit einem PC, zwei verschiedene Spannungsversorgungen, einen Referenzoszillator und einen Eingang für ein externes Referenzsignal.

Der verwendete Phasenregelkreis *ADF4360* stellt eine Integer-N PLL mit integriertem VCO dar, der für den Frequenzbereich um 2,4 GHz ausgelegt ist. Die verschiedenen Massepotentiale der analogen und digitalen Baugruppen sowie der Ladungspumpe sind in dieser Schaltung auf ein gemeinsames Potential gelegt. Die Kennlinie des VCO ist in acht verschiedene Frequenzbänder aufgeteilt, um über den gesamten Frequenzbereich eine möglichst geringe Steigung der Kennlinie zu gewährleisten. Dies hat den Vorteil, dass der VCO weniger anfällig für Störungen der Steuerspannung ist und somit das Phasenrauschen am Ausgang des VCO möglichst wenig durch diese Störungen beeinflusst wird. Sowohl der Strom als auch die Breite des

Anti-Backlash Pulses und das Teilverhältnis des Frequenzteilers lassen sich über interne Register einstellen, die mit Hilfe der Benutzeroberfläche von Analog Devices beschrieben werden. Das elektrische Schaltbild des Phasenregelkreises ist in Abb. 6.2 abgebildet, wobei als Grundlage das Schaltbild des Datenblattes [103] von Analog Devices<sup>1</sup> dient. Teile der externen Beschaltung wurden für die Darstellung der Regelschleife in dieser Arbeit hinzugefügt.



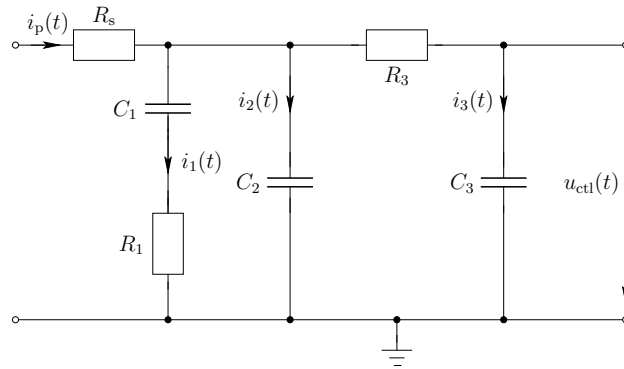
**Abb. 6.2.:** Elektrisches Schaltbild des Phasenregelkreises der Testschaltung EVAL-ADF4360-xEBZ1 Rev. E (Quelle: Basierend auf dem Datenblatt von Analog Devices)

Zur Realisierung verschiedener Schleifenfilter wird aus Platzgründen eine zusätzliche Platine verwendet, die vertikal auf der Testschaltung fixiert und kontaktiert wird (Abb. 6.1(b)). Diese Platine ersetzt den bereits vorhandenen Schleifenfilter und ermöglicht einen schnellen Austausch der Filterkomponenten. So lassen sich beispielsweise der Einfluss einer potentiellen Totzone auf den ungedämpften Regelkreis und verschiedene Ordnungen und Auslegungen des Phasenregelkreises untersuchen. Das Schaltbild des verwendeten Schleifenfilters ist in Abb. 6.3 dargestellt.

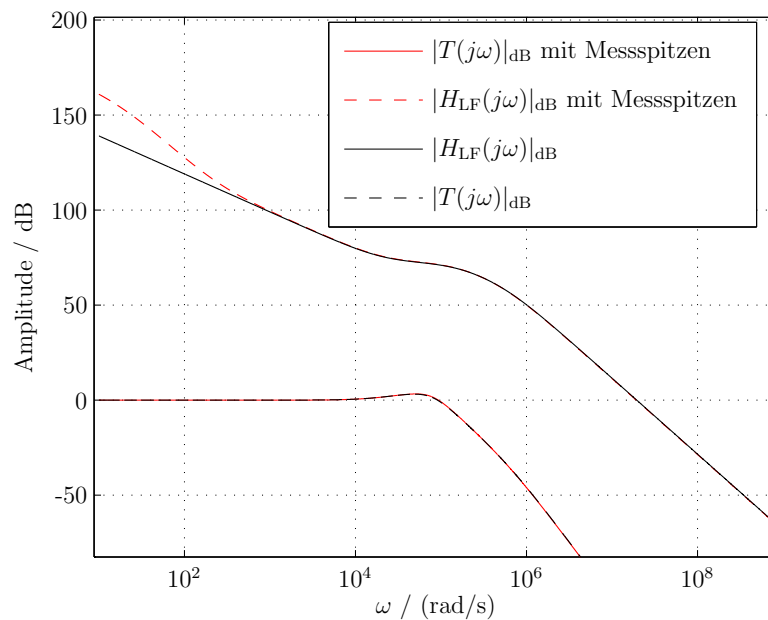
Hierbei stellt  $R_s$  einen Messwiderstand dar, wobei sich der Strom der Ladungspumpe durch den Spannungsabfall messen lässt.

Die verwendeten passiven Messspitzen zur Messung von  $u_{R1}$ ,  $u_{c2}$  und  $u_{ct1}$  weisen eine Eingangsimpedanz von 10 M $\Omega$  und 9,5 pF auf und beeinflussen den Schleifenfilter nur für niedrige Frequenzen. Der Einfluss auf das lineare Modell des geschlossenen Regelkreises ist nur marginal (siehe Abb. 6.4).

<sup>1</sup>www.analog.com



**Abb. 6.3.:** Elektrisches Schaltbild des für die Messung verwendeten Schleifenfilters



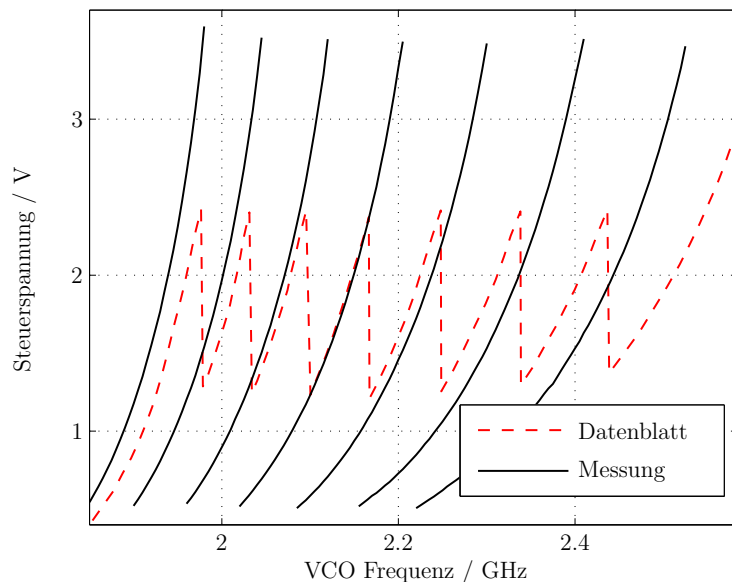
**Abb. 6.4.:** Darstellung des Einflusses der Messspitzen auf das Frequenzverhalten des Schleifenfilters und des linearen Modells der geschlossenen Regelschleife

## 6.2. Charakterisierung der einzelnen Bauelemente

Basierend auf den Einstellmöglichkeiten der verwendeten Schaltung lassen sich die einzelnen Eigenschaften der Phasenregelkreiskomponenten charakterisieren. Die Charakterisierung der einzelnen Bauteile erfolgt für die präzise Berücksichtigung der nichtlinearen und nicht-idealen Effekte und die Validierung des Modells. Für die spätere Verwendung des ereignisgesteuerten Modells lassen sich die signifikanten makroskopischen Parameter der PLL dem Datenblatt entnehmen. Die hier gemessenen

Ergebnisse werden später ins ereignisgesteuerte Modell eingebracht. Anschließend erfolgt ein Vergleich der Messung des Gesamtsystems mit den Ergebnissen der ereignisgesteuerten Simulation.

Zur Aufnahme der VCO-Kennlinie wird der Regelkreis zwischen dem Schleifenfilter und dem spannungsgesteuerten Oszillator aufgetrennt und die Steuerspannung des VCO durch eine externe Spannungsquelle vorgegeben. Die Kennlinie des VCO ist in acht verschiedene Frequenzbänder aufgeteilt, wobei die Auswahl des entsprechenden Bandes bei Veränderung des Teilverhältnisses im Referenz- bzw. Rückkopplungspfad durch die Schaltung selbst vorgenommen wird. Eine Umschaltung während der Regelung ist nicht vorgesehen. Deshalb wird bei der Charakterisierung der VCO-Kennlinie zunächst das entsprechende Frequenzband mit Hilfe der Teilverhältnisse gewählt und anschließend die Steuerspannung variiert. Wird die mit einem Spektrumanalysator gemessene Ausgangsfrequenz des VCO über diese Spannung aufgetragen, ergeben sich die Kennlinien-Bänder aus Abb. 6.5. Es ist zu



**Abb. 6.5.:** Vergleich der VCO-Kennlinien des Datenblattes und der Messung der Testplatine

erkennen, dass sich die gemessenen Bänder zwar von den Daten des Datenblattes unterscheiden, diese Differenz aber lediglich eine Verschiebung in  $\pm x$ -Richtung darstellt. Eine weitere Deformation ist nicht zu erkennen. Beide Kennlinien-Bänder verlaufen weitestgehend „parallel“ zueinander. Der spätere Vergleich der Messung des Gesamtsystems und der Ergebnisse der ereignisgesteuerten Simulation, die die gemessenen Kennlinien des VCO verwendet, legt nahe, dass die durchgeführte messtechnische Charakterisierung das tatsächliche Verhalten des VCO abbildet und das Datenblatt die erwähnte Verschiebung in  $\pm x$ -Richtung aufweist. Die unterschiedli-

chen Geltungsbereiche in  $y$ -Richtung sind auf die integrierte Schaltung zur Auswahl des VCO-Bands zurückzuführen, da während der Regelung der Schaltung die Steuerspannung auf den Bereich um 2 V beschränkt bleibt.

Für die Verwendung dieser Charakteristik im ereignisgesteuerten Modell wird die Kennlinie des relevanten Bandes aus Abb. 6.5 mit 16 Stützstellen stückweise linear approximiert und bei der numerischen Auswertung der VCO-Phase berücksichtigt. Eine weitere relevante Eigenschaft des VCO ist dessen Phasenrauschverhalten. Das Phasenrauschen ist äquivalent zum Jitter und beschreibt die Schwankungen der steigenden beziehungsweise der fallenden Flanken des periodischen Signals um den theoretisch erwarteten Zeitpunkt dieser Flanke. Im Frequenzbereich bewirkt der Jitter eine Aufweitung des Spektrums um die Trägerfrequenz. Der VCO des *ADF4360* weist ein Phasenrauschen von  $-90 \text{ dBc/Hz}$  bei einem Abstand von 100 kHz zur Trägerfrequenz auf. Bezogen auf das Dividierersignal bedeutet das ein Phasenrauschen von ca.  $-170 \text{ dBc/Hz}$  bei 100 kHz Abstand zum Träger. Für das Referenzsignal lässt sich das Phasenrauschen zu  $-120 \text{ dBc/Hz}$  bei 100 kHz Abstand zum Träger bestimmen. Dieses Rauschen resultiert sowohl aus dem verwendeten Referenzoszillator als auch aus dem Referenz-Frequenzteiler.

Zur Charakterisierung des Schleifenfilters werden die Bauteile mit einem Impedanzanalysator außerhalb der Schaltung vermessen. Die resultierenden Bauteilparameter sind in Tab. 6.1 aufgeführt. Die gemessenen Abweichungen genügen den im Daten-

**Tab. 6.1.:** Abweichung der Schleifenfilterparameter bei einer Frequenz von 200 kHz

Bauteil	Nennwert	gemessener Wert	Abweichung
$R_1$	4,7 k $\Omega$	4,705 k $\Omega$	+0,11 %
$C_1$	10 nF	9,94 nF	-0,6 %
$C_2$	820 pF	824,9 pF	+0,6 %
$R_3$	8,2 k $\Omega$	8,184 k $\Omega$	-0,2 %
$C_3$	390 pF	389,2 pF	-0,21 %

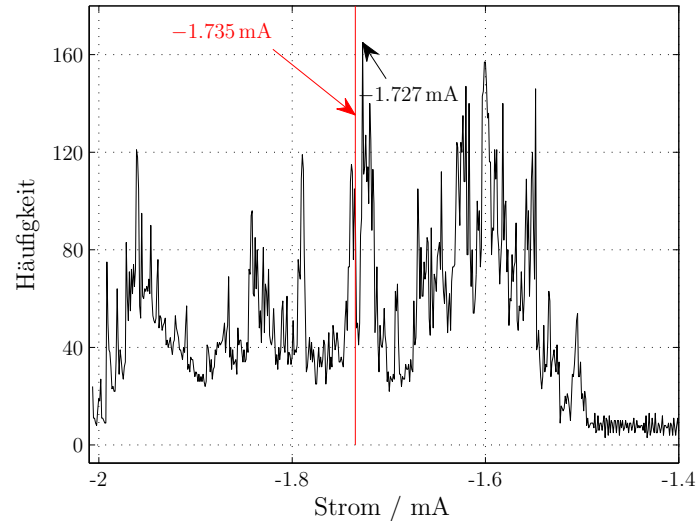
blatt genannten maximalen Bauteiltoleranzen. Es hat sich gezeigt, dass diese Abweichungen keinen signifikanten Einfluss auf die Eigenschaften des Regelkreises haben.

Die Kombination aus Phasendetektor und Ladungspumpe lässt sich auf zwei verschiedene Weisen charakterisieren. Die erste Variante beurteilt den gemessenen Strom innerhalb einer Regelung. Die zweite Methode charakterisiert die Kombination aus Phasendetektor und Ladungspumpe außerhalb der Schleife und nimmt die Kennlinie, wie in Kapitel 5.4 erläutert wurde, auf. Bei der zweiten Variante hat sich gezeigt, dass interne Schaltungen des PLL-Chips ein unvorhergesehenes und undokumentiertes Verhalten hervorrufen und die Aufnahme der Kennlinie deutlich erschweren. Diese Ergebnisse sind im Anhang A erläutert.

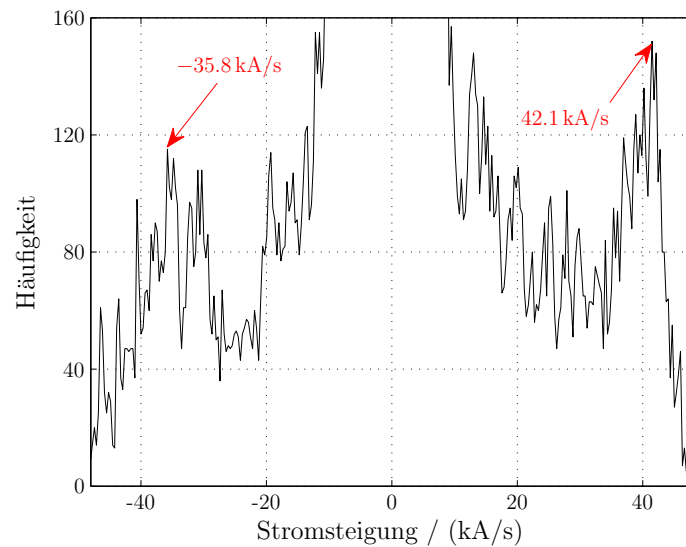
Bei der Methode innerhalb der Regelung lässt sich ein Histogramm des Stromsignals



aufnehmen und die Häufigkeit der vorkommenden Amplituden analysieren. Im Histogramm lassen sich zwei prägnante Regionen identifizieren, wobei die Erste um  $-0.5\mu\text{A}$  und die Zweite um  $-1,7\text{mA}$  liegt. Der erste Bereich gibt den Leckstrom der Schaltung an und der zweite definiert die maximale Amplitude des Stroms. Der Ausschnitt des Histogramms um  $-1,7\text{mA}$  ist in Abb. 6.6(a) abgebildet.



(a) Ausschnitt des Histogramms des Stromsignals innerhalb der Regelung (Der Bereich um  $0\text{ A}$  wurde zur besseren Interpretation ausgespart)



(b) Histogramm der Stromsteigungen innerhalb der Regelung

**Abb. 6.6.:** Charakterisierung des gemessenen Stromsignals innerhalb der Regelung

Trotz eines eingestellten Stroms von  $\pm 2,5\text{ mA}$  ist die mittlere Amplitude des Stroms

lediglich  $-1,735\text{ mA}$  und die häufigste Amplitude  $-1,727\text{ mA}$ . Bei der Analyse des Histogramms der Stromsteigungen (siehe Abb. 6.6(b)) sind die häufigsten Werte der negativen und der positiven Steigung zu erkennen.

Eine potenzielle Totzone der Kombination aus Phasendetektor und Ladungspumpe lässt sich über die Untersuchung des ungedämpften Regelkreises extrahieren. Sind die Widerstände des Schleifenfilters entfernt worden, stellt sich eine Schwingung des Systems ein. Im Falle einer Totzone divergiert sowohl die Einhüllende der Steuerspannung als auch die des Phasenfehlers, wobei beide Einhüllenden sprunghaft kleiner werden, sobald der Phasenfehler  $\pm 2\pi$  erreicht (vgl. Kapitel 7.3). Bei der Charakterisierung des *ADF4360* stellt sich eine Schwingung mit konstanter Amplitude ein. Somit weist der Regelkreis keine Totzone auf, was begründet durch den Anti-Backlash Puls auch zu erwarten war.

Das Phasenrauschverhalten des Phasendetektors lässt sich mit  $-163\text{ dBc/Hz}$  bei einer Eingangsfrequenz des PFD von  $200\text{ kHz}$  angeben. Verglichen mit dem Phasenrauschen des VCO und des Referenzoszillators ist dieser Anteil sehr gering und in den Mess- und Simulationsergebnissen nicht zu erkennen, wie im Folgenden gezeigt wird.

### 6.3. Validierung der ereignisgesteuerten Modellierung

Nach der messtechnischen Charakterisierung der einzelnen Baugruppen des Phasenregelkreises lassen sich die Ergebnisse mittels makroskopischer Parameter ins ereignisgesteuerte Modell einbringen. Die verwendeten Parameter der ereignisgesteuerten Simulation sind in Tab. 6.1 und 6.2 aufgeführt. Für den Vergleich der Messung und der ereignisgesteuerten Simulation im Zeitbereich lassen sich die Spannungen des Schleifenfilters untersuchen. Sie sind in Abb. 6.7 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das ereignisgesteuerte Modell in der Lage ist, die Messung des Entwicklerkits sehr gut abzubilden. Der RMS-Fehler der Spannungen liegt lediglich zwischen  $10\text{ mV}$  und  $20\text{ mV}$  bei einer Zielspannung von etwa  $1,54\text{ V}$ . Diese Zielspannung bestätigt die aufgenommene VCO-Kennlinie in Abb. 6.5, da der Arbeitspunkt genau auf der gemessenen Kennlinie liegt. Wird der RMS-Fehler auf die Zielspannung bezogen, ergeben sich relative Fehler von  $1\%$ . Die kleinen Unterschiede resultieren aus den Approximationen der nicht-idealen und nichtlinearen Effekte. Parasitäre Effekte der Leitungen und Eingangsimpedanzen der Bauteile sind in der Modellierung nicht berücksichtigt worden. Trotz dieser kleinen Abweichungen ist das dynamische Verhalten der Ergebnisse der Simulation identisch mit denen der Hardware und bestätigt die Ansätze der Modellierung der nicht-idealen und nichtlinearen Effekte.

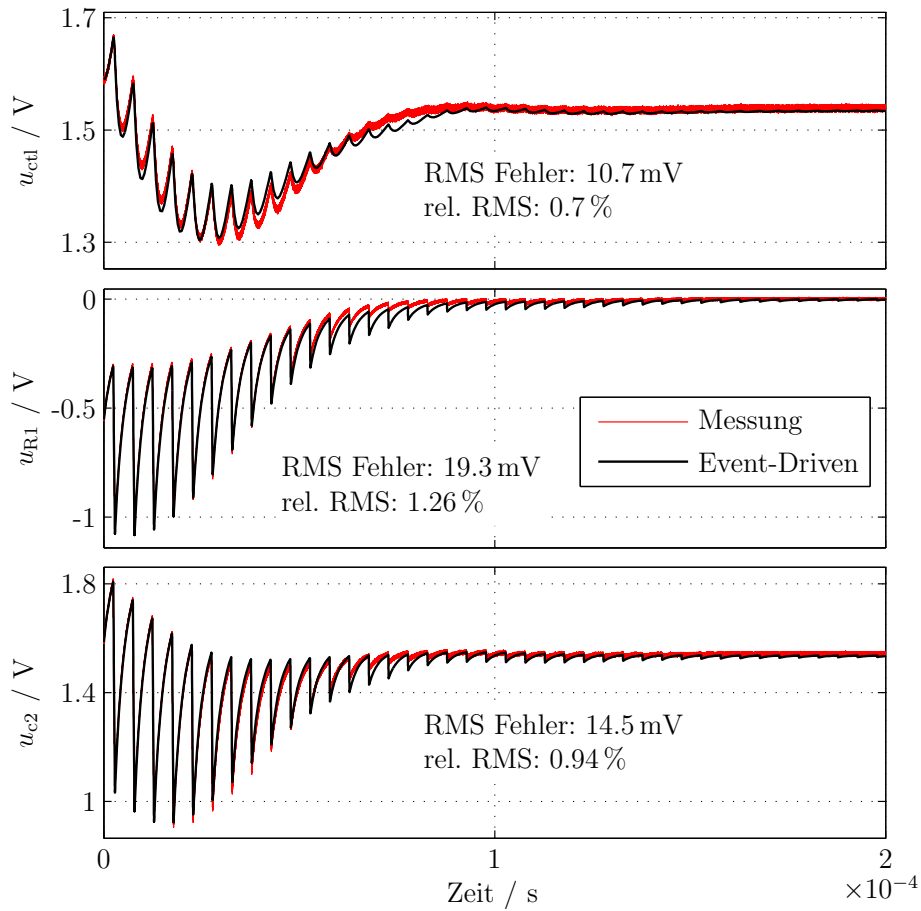
Für den Vergleich der Ergebnisse des ereignisgesteuerten Modells und der Messung im Frequenzbereich wird das Phasenrauschverhalten des Regelkreises genauer betrachtet. Für die Vergleichbarkeit des Rauschens des Entwicklerkits und der Simu-

**Tab. 6.2.:** Parameter für den Vergleich des ereignisgesteuerten Modells und der Messung des Entwicklerkits

Parameter	Wert	Einheit
$f_{\text{osc}}$	10	MHz
$R$	50	
$f_{\text{ref}}$	200	kHz
$S_{\Phi}^{\text{ref}}$	-120	dBc/Hz @ 100 kHz
$N$	12000	
$S_{\Phi}^{\text{div}}$	-170	dBc/Hz @ 100 kHz
$S_{\Phi}^{\text{pfd}}$	-163	dBc/Hz
$I_{\text{p}}^{\text{up}}$	1,727	mA
$I_{\text{p}}^{\text{dn}}$	-1,727	mA
$I_{\text{L}}$	-0,5	$\mu\text{A}$
$\gamma_{\text{set}}$	42,1	kA/s
$\gamma_{\text{rst}}$	-35,8	kA/s
$K_{\text{v}}$	Band 7 (Abb. 6.5)	Hz/V

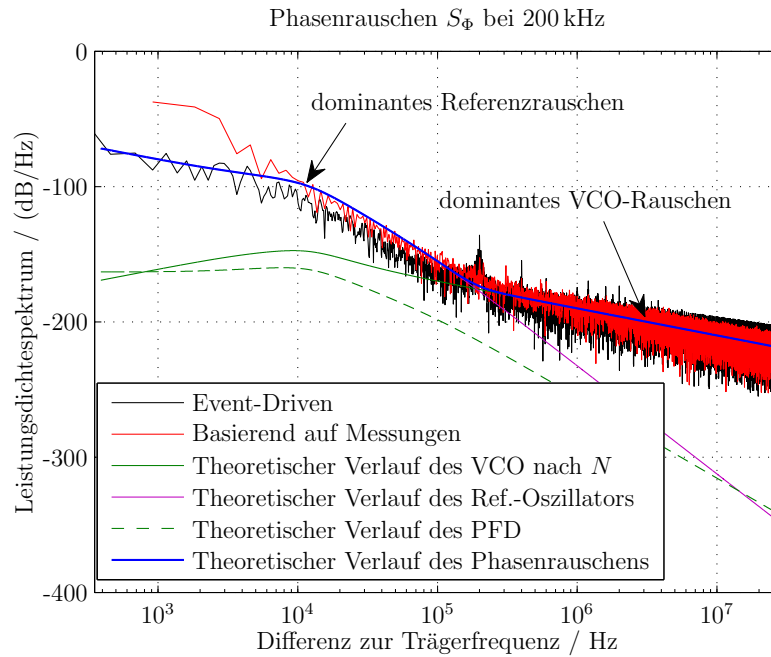
lation wird die gemessene Steuerspannung für die Berechnung der Dividiererphase herangezogen und anschließend ein sinusförmiges Signal generiert. Der Vergleich des Phasenrauschens für den geschlossenen Phasenregelkreis wird in Abb. 6.8 gezeigt, wobei sowohl die Ergebnisse der Messung und der Simulation als auch die theoretischen Verläufe des Phasenrauschens dargestellt sind. Für geringe Frequenzdifferenzen zum Trägersignal dominiert das Rauschen des Referenzsignals, wobei das Rauschen des VCO bei höheren Differenzen maßgeblich das gesamte Rauschen bestimmt. Das Rauschverhalten des ereignisgesteuerten Modells ist vergleichbar mit dem Verhalten der Hardware. Der kleine Unterschied für niedrige Frequenzen lässt sich durch die Breite des Peaks bei der Trägerfrequenz im Spektrum begründen. Da die Amplitude bei der Trägerfrequenz in der Messung etwas geringer ist, wird die entsprechende Energie um die Trägerfrequenz verteilt und führt im Phasenrauschen zu einer Erhöhung nahe der Trägerfrequenz. Da die theoretischen Verläufe des Phasenrauschens auf dem linearen Modell basieren, ergeben sich hier kleine Unterschiede zur Simulation und Messung. Für die Abschätzung des Beitrages der einzelnen Bauteile zum gesamten Phasenrauschen lässt sich das lineare Modell gut verwenden. Hierbei wird deutlich, dass das Phasenrauschen des Phasendetektors im Entwicklerkit eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Übereinstimmung des Phasenrauschens lässt sich auch im Leistungsdichtespektrum des Dividierersignals erkennen. In Abb. 6.9 sind das Leistungsdichtespektrum der Messung und des ereignisgesteuerten Modells dargestellt. Beide Verläufe sind

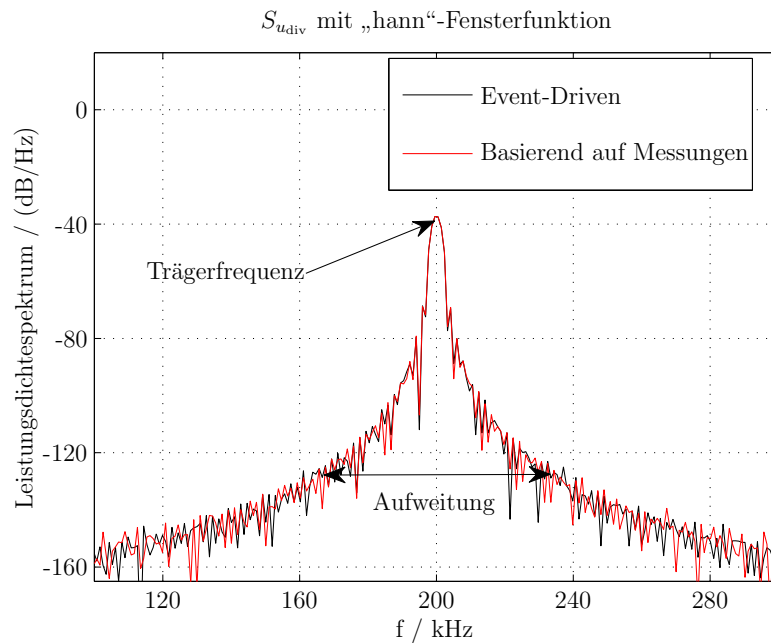


**Abb. 6.7.:** Vergleich der gemessenen Spannungen mit den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells (der relative RMS-Fehler ist auf die Zielspannung (1,536 V) der Regelung bezogen)

deckungsgleich. Das ereignisgesteuerte Modell ist in der Lage die durch das Phasenrauschen verursachte Aufweitung des Leistungsdichtespektrums abzubilden und somit das Verhalten der Messung vorherzusagen. Die Betrachtung im Zeit- und Frequenzbereich zeigt die Güte des ereignisgesteuerten Modells und der Modellierung der nicht-idealen und nichtlinearen Effekte. Das realitätsnahe Modell lässt sich somit für die Charakterisierung von Regelkreisen und deren Abhängigkeiten von den nicht-idealen Effekten verwenden, um den Entwurf von Mixed-Signal Systemen zu optimieren.



**Abb. 6.8.:** Vergleich des Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens basierend auf der gemessenen Steuerspannung, den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells und des linearen Modells



**Abb. 6.9.:** Vergleich des Leistungsdichtespektrums basierend auf der gemessenen Steuerspannung und den Ergebnissen der ereignisgesteuerten Simulation



---

# Charakterisierung und Analyse der CP-PLL inkl. nicht-idealer Effekte

---

Die betrachteten nichtlinearen und nicht-idealen Effekte des Phasenregelkreises beeinflussen zum einen die Kennlinie des Phasen- und Frequenzdetektors und somit die Konvergenzeigenschaften der Regelschleife und zum anderen die bleibende Regelabweichung. Darüber hinaus treten diese nicht-idealen Effekte in Kombination mit Phasenrauschquellen auf, wodurch sich eine gegenseitige Beeinflussung ergibt. Für einen robusten Systementwurf ist es daher von großer Bedeutung, diese Wechselwirkungen zu charakterisieren und in den Systementwurf mit einfließen zu lassen. Da die Transistor-Level Simulationen sehr zeitaufwändig sind und das bekannte lineare Modell der PLL lediglich das Phasenrauschen berücksichtigt, wird hier das eingeführte hocheffiziente ereignisgesteuerte Modell zur Charakterisierung und Analyse des dynamischen Verhaltens des Phasenregelkreises verwendet. Die gewonnenen Erkenntnisse werden in Kapitel 7.6 für einen optimierten und robusteren Systementwurf verwendet. Somit lässt sich ein Entwurf des Phasenregelkreises erzielen, der vergleichsweise stabil gegenüber verschiedener nicht-idealer Effekte und deren Wechselwirkungen ist.

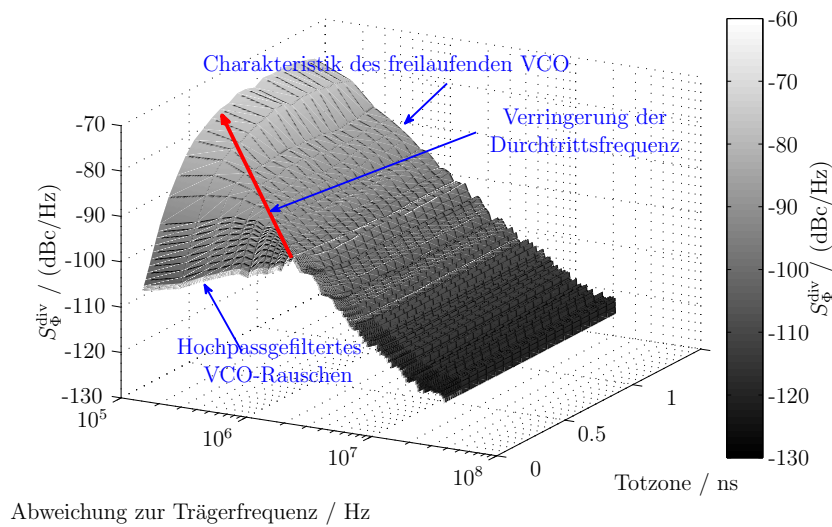
## 7.1. Phasenrauschverhalten

Da das Phasenrauschverhalten ein wichtiger Aspekt bei der Auslegung von Phasenregelkreisen ist, ist es sinnvoll, dieses Verhalten unter Berücksichtigung Transistor-Level-basierter nicht-idealer Effekte zu betrachten. Für diese Untersuchung lässt sich das eingeführte ereignisgesteuerte Modell inklusive der nicht-idealen Effekte verwenden. Anhand einer Vielzahl von Simulationen wird das Phasenrauschen des

## 7. CHARAKTERISIERUNG UND ANALYSE DER CP-PLL INKL. NICHT-IDEALER EFFEKTE

Regelkreises für verschieden stark ausgeprägte nicht-ideale Effekte aufgenommen. Ein Teil dieser Ergebnisse wurde auch in [98, 99] veröffentlicht.

Zunächst wird ein Phasenregelkreis mit Phasenrauschen des spannungsgesteuerten Oszillators und einer Totzone des Phasen- und Frequenzdetektors untersucht. Innerhalb des ereignisgesteuerten Modells wird die Standardabweichung des zeitlichen Phasenrauschens des VCO vorgegeben und die Breite der Totzone variiert. Wird für jede einzelne Breite das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens des Dividierersignals bestimmt und über die entsprechende Totzone aufgetragen, so ergibt sich die dreidimensionale Darstellung des Leistungsdichtespektrums über die Frequenz und die Breite der Totzone in Abb. 7.1. Es ist ersichtlich, dass für sehr klei-



**Abb. 7.1.:** Ereignisgesteuerte Simulationsergebnisse zur Verdeutlichung des Einflusses der Totzone auf das Phasenrauschen bei verrauschtem VCO

ne Breiten der Totzone das Phasenrauschverhalten des geschlossenen Regelkreises dem des idealen Phasenregelkreises entspricht und eine deutliche Hochpasscharakteristik aufweist. Für Frequenzen oberhalb der natürlichen Eigenfrequenz weist das Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens eine Steigung von  $-20$  dB/Dekade auf. Da die sehr kleine Totzone den Phasenregelkreis kaum beeinflusst, war dieses Ergebnis zu erwarten. Für steigende Breiten der Totzonen zeigt sich, dass das Leistungsdichtespektrum nahe der Trägerfrequenz (unterhalb der natürlichen Eigenfrequenz) ansteigt und sich der Steigung von  $-20$  dB/Dekade annähert bis schließlich keine Hochpasscharakteristik mehr zu erkennen ist. Zudem ist die Verringerung der Durchtrittsfrequenz der Regelschleife durch die zunehmende Totzone ersichtlich. Die Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$  beschreibt die Kreisfrequenz, bei der der Betrag der Übertragungsfunktion von der Verstärkung ( $|T(j\omega)|_{\omega < \omega_D} > 1$ ) in die Dämpfung ( $|T(j\omega)|_{\omega > \omega_D} < 1$ ) übergeht; sie ist ein wichtiger Parameter für die Auslegung eines Regelkreises. Die Variation der Durchtrittsfrequenz ist auch in Abb. 7.3 zu sehen.



Dieses Verhalten ist zu erwarten, da der Phasenregelkreis mit zunehmender Breite der Totzone nicht mehr in der Lage ist das Phasenrauschen des VCO zu detektieren und auszuregeln. Im extremen Fall ist die Totzone so breit, dass sich bezüglich des Phasenrauschens des VCO ein quasi offener Regelkreis ergibt und sich der VCO als freilaufend bezeichnen lässt. Dieser Fall tritt in der Praxis bei entsprechender Auslegung der Komponenten jedoch nicht auf.

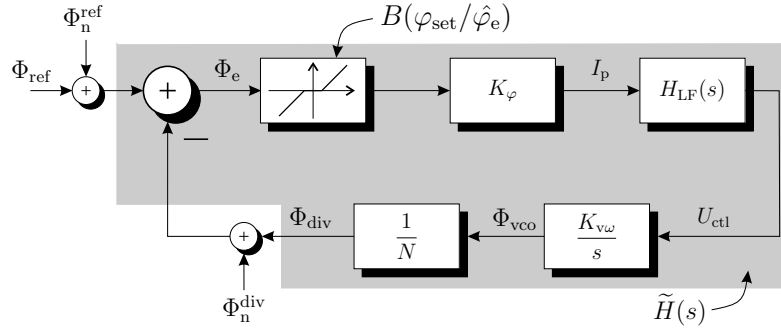
Da sich die Betrachtung des Phasenrauschens auf einen Bereich sehr nahe der Ruhelage bezieht, liegt es nahe die analytische Beschreibung des Zusammenhangs von Phasenrauschen und Totzone mit Hilfe eines linearen Modells herzuleiten. Hierzu wird das lineare Modell hinsichtlich einer Totzone erweitert. Angelehnt an die Harmonische Balance und die Betrachtung des Frequenzganges eines Systems lässt sich die Kennlinie des PFD mit nichtlinearen und nicht-idealen Effekten durch eine statische nichtlineare Beschreibungsfunktion berücksichtigen [77], wie im Folgenden erläutert wird. Das sich so ergebende Modell des Phasenregelkreises mit Totzone und Phasenrauschen ist in Abb. 7.2(a) dargestellt. Hier sind die einzelnen Komponenten des Phasenrauschens bereits in die Referenz- und die Dividiererphase überführt (vgl. Kap. 5.3.3). Da sich das Phasenrauschen mit der Referenz- und der Dividiererphase additiv überlagert, lässt sich die Ruhelage dieses Modells in den Nullpunkt verschieben. Dies hat den Vorteil, dass lediglich das Phasenrauschen als Eingangsgröße des Modells zu betrachten ist. Wird darüber hinaus das Abtastverhalten des nichtlinearen Phasenregelkreises berücksichtigt, ist eine weitere Vereinfachung möglich. Das Phasenrauschen beeinflusst die Regelung aufgrund der Abtastung ausschließlich zu diesen Abtastzeitpunkten und stellt somit selbst ein abgetastetes Signal dar, zum Beispiel mittels des Abtast-Halte-Glieds. Demnach ist es möglich das Rauschsignal in endlich viele Intervalle, in denen die Funktion stetig und monoton ist, zu zerlegen. Existieren an jeder Unstetigkeitsstelle die beidseitigen Grenzwerte, ist die Dirichlet-Bedingung erfüllt und das Phasenrauschen lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln [76]. Somit ist eine Betrachtung des Phasenrauschens im Frequenzbereich möglich und das Modell mit der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion (siehe Abb. 7.2(a)) ist zielführend.

Mit dieser Betrachtung wird die nichtlineare Kennlinie des PFD mit Totzone durch die nichtlineare statische Beschreibungsfunktion  $B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)$  beschrieben. Es ergibt sich ein lineares Modell in Abhängigkeit von der zu erwartenden Amplitude des Phasenfehlers  $\hat{\varphi}_e$  und der Breite der Totzone

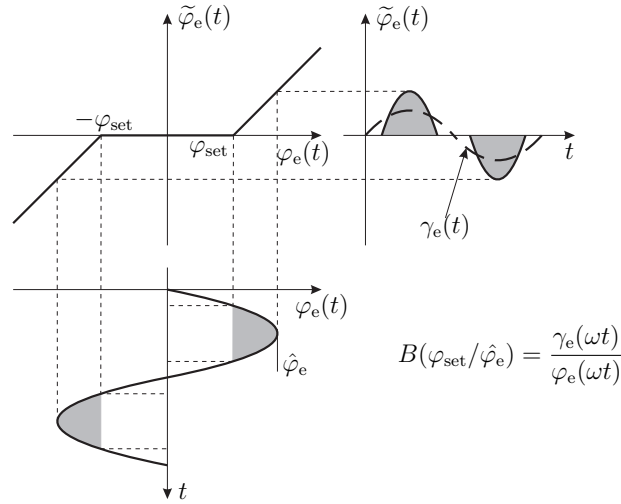
$$\varphi_{\text{set}} = 2\pi f_{\text{ref}} \cdot \tau_{\text{set}}. \quad (7.1)$$

Obwohl die Totzone  $\tau_{\text{set}}$  hier in die äquivalente Breite bezüglich der Phase  $\varphi_{\text{set}}$  überführt wurde, wird weiterhin der Name Totzone verwendet. Die Beschreibungsfunktion resultiert aus der Fourierreihe erster Ordnung  $\varphi_e(\omega t)$  des Eingangs und der Fourierreihe erster Ordnung  $\gamma_e(\omega t)$  des Ausgangs der nichtlinearen Kennlinie (siehe

## 7. CHARAKTERISIERUNG UND ANALYSE DER CP-PLL INKL. NICHT-IDEALER EFFEKTE



(a) Modell der CP-PLL mit äquivalenten Phasenrauschquellen und statischer Beschreibungsfunktion der Totzone



(b) Herleitung der statischen Beschreibungsfunktion der Dead-Zone

**Abb. 7.2.:** Statische Beschreibungsfunktion der Totzone für die Betrachtung bzgl. des Phasenrauschens

Abb. 7.2(b)) und lässt sich für die Totzone mit

$$B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e) = \frac{\gamma_e(\omega t)}{\varphi_e(\omega t)} = 1 - \frac{2}{\pi} (x + \sin(x) \cos(x)) \quad (7.2)$$

angeben [77]. Hierbei gilt

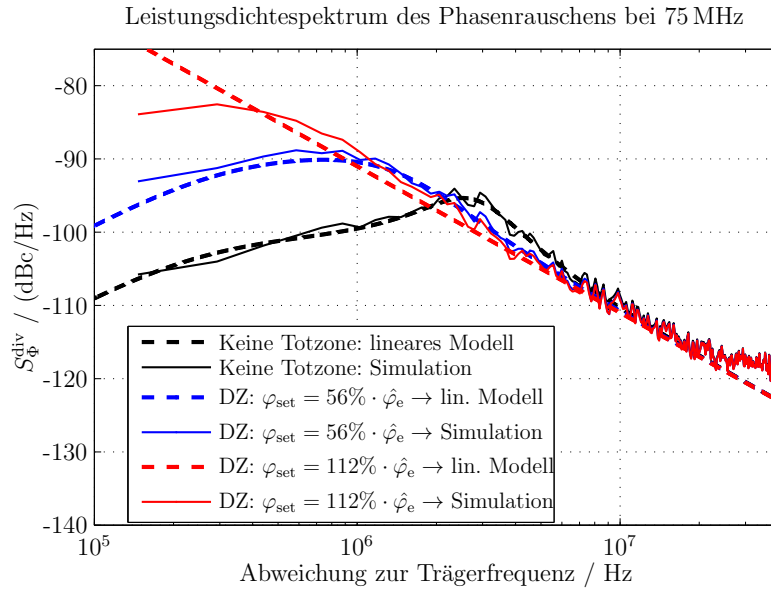
$$x = \arcsin\left(\frac{\varphi_{\text{set}}}{\hat{\varphi}_e}\right). \quad (7.3)$$

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises unter Berücksichtigung der Totzone ergibt sich schließlich zu

$$\tilde{H}(s) = \frac{B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)K_\varphi K_{v\omega}H_{\text{LF}}(s)}{sN + B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)K_\varphi K_{v\omega}H_{\text{LF}}(s)}. \quad (7.4)$$

Die Amplitude des Phasenrauschens des spannungsgesteuerten Oszillators und somit die Amplitude des Phasenfehlers lassen sich dabei mit dem mittleren quadratischen Phasenrauschen im Zeitbereich ( $\hat{\varphi}_e = \varphi_{\text{vco}}^{\text{rms}}$ ) annehmen, das sich aus Gleichung (5.32) und dem Leistungsdichtespektrum des freilaufenden VCOs ergibt. Für den speziellen Fall, dass die Breite der Totzone größer ist als die Amplitude des Phasenrauschens, ergibt sich eine rein imaginäre Beschreibungsfunktion, die keine Relevanz für die Untersuchung der PLL aufweist. Aus diesem Grund wird lediglich der Realteil der statischen nichtlinearen Beschreibungsfunktion verwendet. In der Praxis stellt dies jedoch keine Einschränkung dar, da in der Regel die Totzone im Vergleich zum Phasenrauschen gering ist und somit die Betrachtung der imaginären Beschreibungsfunktion vernachlässigbar ist.

Wird das Phasenrauschverhalten des durch die Totzone angereicherten linearen Modells für verschiedene Breiten der Totzone ausgewertet, ergeben sich die Verläufe in Abb. 7.3. Es ist ersichtlich, dass das angereicherte lineare Modell und die ereignisge-



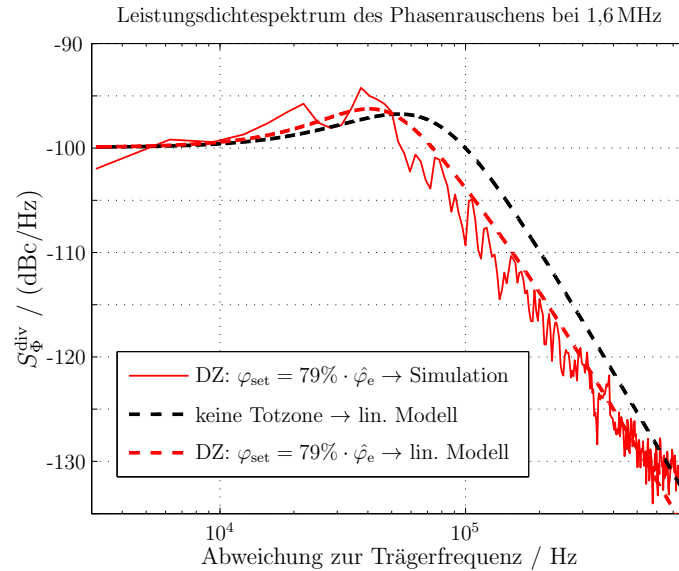
**Abb. 7.3.:** Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion für unterschiedliche Weiten der Totzone und Phasenrauschen des VCOs ( $\hat{\varphi}_e = \varphi_{\text{vco}}^{\text{rms}} = 1,8\% \cdot 2\pi$ )

steuerten Simulationen vergleichbare Ergebnisse liefern und somit das angereicherte lineare Modell in der Lage ist, das Phasenrauschverhalten der Regelschleife unter

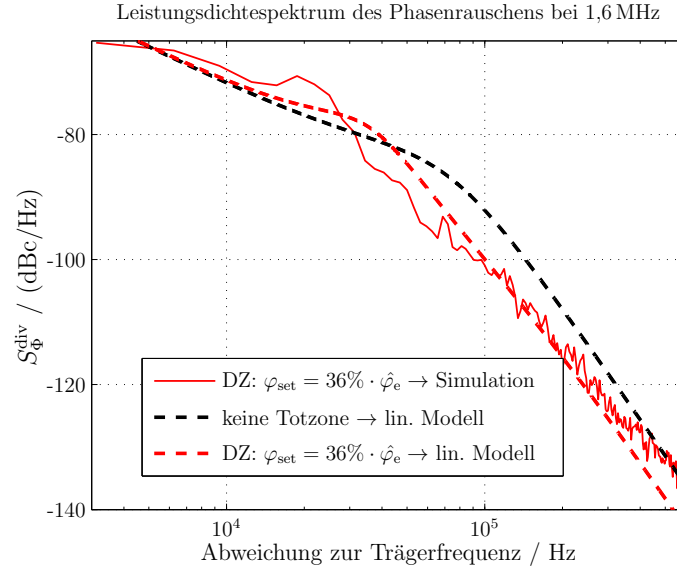
Berücksichtigung der Totzone und des rauschenden VCOs abzubilden.

Die vorgestellte Betrachtung der statischen nichtlinearen Beschreibungsfunktion lässt sich analog auf das Phasenrauschverhalten der PLL unter Berücksichtigung eines rauschenden Referenzoszillators anwenden. Da sich hier die Amplitude des Phasenfehlers jedoch durch das Phasenrauschen des Referenzoszillators und der rückgekoppelten Rauschgröße ergibt, stellt die Abschätzung von  $\hat{\varphi}_e$  zunächst eine Herausforderung dar. Eine vergleichbare Herausforderung stellt die Näherung der Amplitude des Phasenfehlers bei rauschender Ladungspumpe dar, da diese Rauschgröße in die Phase des Referenzsignals der Regelschleife überführt wird. Auf Basis der ereignisgesteuerten Modellierung der PLL lässt sich beispielsweise eine Simulation dazu verwenden, die Amplitude des Phasenfehlers unter Berücksichtigung eines rauschenden Referenzoszillators oder einer rauschenden Ladungspumpe zu approximieren. Eine sehr konservative Abschätzung (*Worst-Case*) ergibt sich jedoch auch aus den freilaufenden Rauschgrößen.

Wird die erste Approximationsmöglichkeit von  $\hat{\varphi}_e$  angewendet, lässt sich das Phasenrauschverhalten der geschlossenen Regelschleife mittels des angereicherten linearen Modells für einen rauschenden Referenzoszillator und eine rauschende Ladungspumpe beschreiben. Trotz der Näherung der Amplitude des Phasenfehlers basierend auf einer Simulation sind die Ergebnisse des angereicherten linearen Modells vergleichbar mit den Resultaten der ereignisgesteuerten Modellierung. Dieser Vergleich ist in Abb. 7.4 und 7.5 zu sehen.



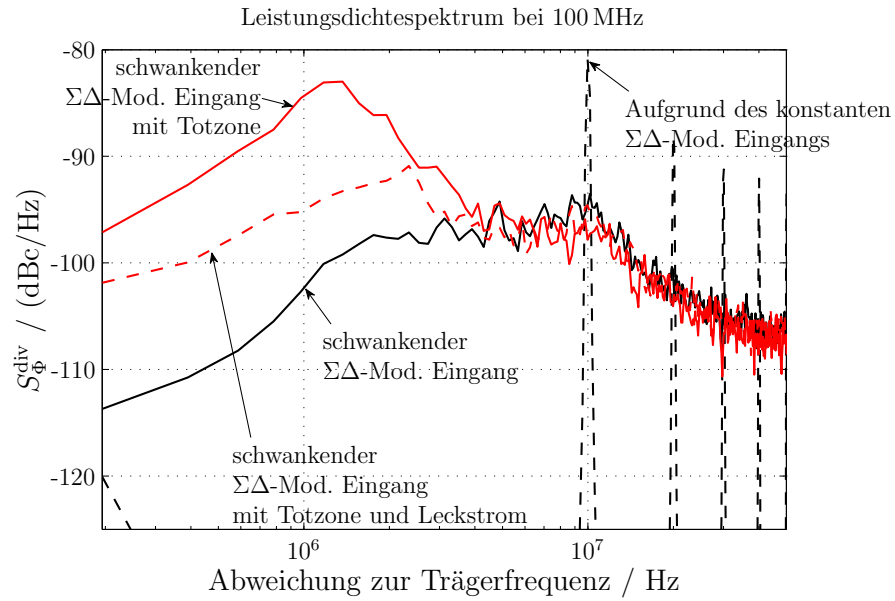
**Abb. 7.4.:** Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion der Totzone und Phasenrauschen des PFD & CP Blocks ( $\hat{\varphi}_e = \max(\varphi_e(t)) = 0,64\% \cdot 2\pi$ )



**Abb. 7.5.:** Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion der Totzone und Phasenrauschen des Referenzoszillators ( $\hat{\varphi}_e = \max(\varphi_e(t)) = 1,76\% \cdot 2\pi$ )

Darüber hinaus stellt das angereicherte lineare Modell eine Vereinfachung der Charakterisierung des Einflusses der Totzone auf das Phasenrauschverhalten der PLL dar und ermöglicht somit einen robusten und analytischen Systementwurf unter Berücksichtigung von Phasenrauschen und der Totzone des Phasen- und Frequenzdetektors. Dieser robustere Entwurf wird in Kapitel 7.6 genauer diskutiert.

Die vorangegangene Untersuchung zeigt, dass das ereignisgesteuerte Modell in der Lage ist, die Kombination aus nicht-idealen Effekten und deren Einfluss auf das Phasenrauschverhalten des Phasenregelkreises zu charakterisieren. Neben dem Einfluss der nicht-idealen Effekte auf das Phasenrauschverhalten ist es zudem notwendig, die Wechselwirkungen der verschiedenen nicht-idealen Effekte zu charakterisieren. Wird beispielsweise eine Fractional-N CP-PLL mit einem  $\Sigma\Delta$ -Modulator betrachtet, ergeben sich für ein konstantes Eingangssignal des  $\Sigma\Delta$ -Modulators Nebentöne im Spektrum. Da diese periodischen Störungen im Spektrum unerwünscht sind, wird in der Praxis meist die niedrigstwertige Bitposition des Eingangssignals des  $\Sigma\Delta$ -Modulators verrauscht. Ist dieses Eingangssignal etwas verrauscht, bleibt durch das Hochpassverhalten die Reinheit der Trägerfrequenz nahezu erhalten und die Nebentöne werden reduziert (vgl. Kapitel 2.2.2). Im Fall einer Totzone innerhalb der Fractional-N CP-PLL wird das Phasenrauschen, resultierend aus dem  $\Sigma\Delta$ -Modulator und dessen Eingangssignal, nahe der Trägerfrequenz jedoch angehoben. In Abb. 7.6 sind diese Fälle dargestellt, wobei zu bemerken ist, dass dieses Verhalten vergleichbar mit dem Phasenrauschverhalten der PLL mit rauschendem VCO und Totzone ist. Neben dem Einfluss der Totzone auf das Phasenrauschverhalten lässt



**Abb. 7.6.:** Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation für die Fractional-N CP-PLL mit Totzone, Leckstrom und schwankendem und konstantem Eingangssignal des  $\Sigma\Delta$ -Modulators

sich mittels des ereignisgesteuerten Modells zeigen, dass ein Leckstrom die negativen Einflüsse der Totzone auf das Phasenrauschverhalten kompensiert (siehe Abb. 7.6). Dieses Verhalten ist auf die Verschiebung der PFD & CP Kennlinie in negative  $y$ -Richtung und den Typ-II Regelkreis zurückzuführen. Weist der Typ-II Phasenregelkreis einen Leckstrom auf, wird dieser durch einen im Mittel statischen Phasenfehler ausgeregelt (siehe auch Kapitel 7.2). Somit liegt die Ruhelage der Regelschleife außerhalb der Totzone und der Einfluss der Totzone auf das Phasenrauschverhalten wird reduziert. Dieser Zusammenhang lässt sich beispielsweise durch eine weitere statische nichtlineare Beschreibungsfunktion modellieren und für einen robusteren Systementwurf verwenden.

Mit Hilfe der bekannten Wechselwirkung der Totzone und des Leckstroms und deren Einfluss auf das Phasenrauschverhalten lässt sich, bei gegebener Ladungspumpe mit inhärentem Leckstrom, der schaltungstechnische Aufwand der Totzonen-Reduzierung zur Optimierung des Phasenrauschverhaltens verringern.

## 7.2. Statischer Phasenfehler

Ein wichtiger Aspekt der Phasengenauigkeit ist neben dem Phasenrauschen der statische Phasenfehler, der die bleibende Regelabweichung des Phasenregelkreises darstellt. Die vorgestellte CP-PLL stellt einen Regelkreis des Typ-II dar und weist somit einen integrierenden Charakter auf, sodass die Fehlergröße zu Null gesteuert

wird [77]. Im Fall der CP-PLL bedeutet das, dass der Strom der Ladungspumpe und somit die Änderung der elektrischen Ladung des Schleifenfilters zu Null geregelt wird. Basierend auf den Kennlinien des PFD & CP Blocks aus Kapitel 5 und der CP-PLL als Typ-II Regelkreis ist ersichtlich, dass sich beispielsweise für einen Leckstrom ein mittlerer statischer Phasenfehler einstellt. Dieser gewährleistet die Kompensation des Leckstroms und realisiert im Mittel eine Ladungsänderung des Schleifenfilters von null. Die sich somit ergebende bleibende Regelabweichung ist bezüglich des Leckstroms in [57, 104, 105] beschrieben. Der mittlere statische Phasenfehler lässt sich für den Leckstrom durch

$$\varphi_{e,s} = 2\pi \frac{I_L}{I_p^{\text{sum}}} \quad (7.5)$$

berechnen. In dieser Darstellung wird der Ladungspumpenstrom als eine additive Überlagerung des gewünschten Stroms und des konstanten Leckstroms  $I_p^{\text{sum}} = I_p - I_L$  aufgefasst. Dieser Zusammenhang bedeutet, dass für wachsende Leckströme die bleibende Regelabweichung zunimmt. Ist der Leckstrom gleich dem gewünschten Strom  $I_p$ , lässt sich die bleibende Regelabweichung mittels dieser additiven Modellierung nicht mehr bestimmen, da der Phasenregelkreis für  $I_p^{\text{sum}} = 0$  quasi offen ist und keine Regelung stattfindet.

Weist der Phasen- und Frequenzdetektor innerhalb seines Rückkopplungspfads zum Zurücksetzen der D-Flip-Flops eine Verzögerungszeit auf, sind im Falle einer fehlenden Unterdrückung dieses Zustandes beide Ausgangssignale  $u_{\text{up}}$  und  $u_{\text{dn}}$  für diese Zeitspanne  $t_{\text{on}}$  gemeinsam eingeschaltet und aktivieren sowohl den Aufladestrom  $I_p^{\text{up}}$  als auch den Entladestrom  $I_p^{\text{dn}}$ . Ist die Ladungspumpe nicht symmetrisch ausgelegt, sodass sich Auflade- und Entladestrom unterscheiden, ergibt sich die bleibende Regelabweichung aus [57, 105]

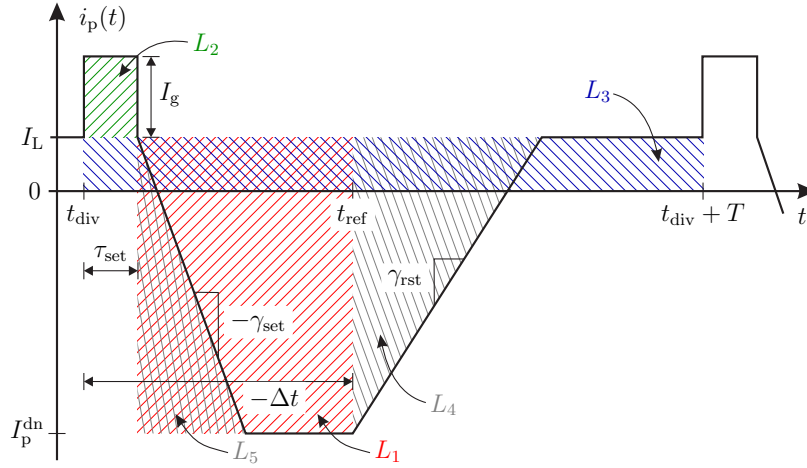
$$\varphi_{e,s} = 2\pi \frac{t_{\text{on}}}{T_{\text{ref}}} \frac{I_p^{\text{up}} - I_p^{\text{dn}}}{I_p}. \quad (7.6)$$

$I_p$  definiert hier den mittleren Strom, der während einer gesamten Referenzperiode in den Schleifenfilter eingespeist wird und  $t_{\text{on}}$  wird als positiv definiert. Auch hier ist zu erkennen, dass für eine unzureichende Auslegung der Ladungspumpe die bleibende Regelabweichung des Phasenregelkreises zunimmt.

Die bisher betrachteten mittleren statischen Phasenfehler beziehen sich lediglich auf jeweils einen nicht-idealen Effekt innerhalb der Regelschleife. Da die Phasenregelschleife eine Vielzahl von nicht-idealen Effekten aufweist, ist es notwendig, die Betrachtung der bleibenden Regelabweichung auf die bereits vorgestellten Effekte zu erweitern. Hierzu bietet sich die Beschreibung des Strompulses des ereignisgesteuerten Modells an (siehe Abb. 5.22). Zur Berechnung des statischen Phasenfehlers werden vier Fälle unterschieden. Die ersten beiden Fälle werden durch einen statischen Phasenfehler definiert, der zu einem positiven oder einem negativen tra-





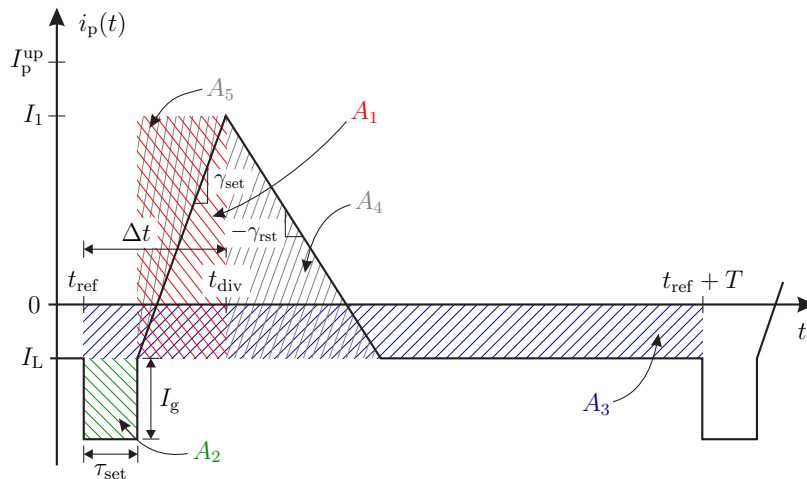


**Abb. 7.8.:** Negativer trapezförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte

beschreiben. Die entsprechende statische Zeitdifferenz resultiert zu

$$\Delta t_{\text{trapez},s}^{\text{dn}} = \frac{I_L T + I_g \tau_{\text{set}}}{I_p^{\text{dn}} - I_L} - \left( \frac{1}{2\gamma_{\text{rst}}} - \frac{1}{2\gamma_{\text{set}}} \right) (I_p^{\text{dn}} - I_L) - \tau_{\text{set}}. \quad (7.10)$$

Wird die statische Phasendifferenz bzw. Zeitdifferenz kleiner als die Addition aus der Totzone und der Anstiegszeit des Strompulses, wird der Strompuls dreieckförmig. In Abb. 7.9 ist dieser Puls dargestellt. Die Ladung, die auf den Schleifenfilter geladen



**Abb. 7.9.:** Positiver dreieckförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte



und mit Hilfe der Stromgeraden

$$I_2 = -\gamma_{\text{set}}(-\Delta t - \tau_{\text{set}}) + I_L \quad (7.16)$$

schließlich zu

$$Q_{\text{tria}}^{\text{dn}}(\Delta t) = -(-\Delta t - \tau_{\text{set}})^2 \gamma_{\text{set}} \left( \frac{\gamma_{\text{set}}}{2\gamma_{\text{rst}}} + \frac{1}{2} \right) + I_g \tau_{\text{set}} + I_L T. \quad (7.17)$$

Die statische Zeitdifferenz lässt sich wie folgt berechnen:

$$\Delta t_{\text{tria,s}}^{\text{dn}} = -\sqrt{\frac{I_L T + I_g \tau_{\text{set}}}{\gamma_{\text{set}} \left( \frac{\gamma_{\text{set}}}{2\gamma_{\text{rst}}} + \frac{1}{2} \right)}} - \tau_{\text{set}}. \quad (7.18)$$

Der Übergang zwischen dem trapezförmigen und dem dreieckförmigen Strompuls wird mit der Gleichung (7.12) berechnet. Gilt  $I_1 \geq I_p^{\text{up}}$  für  $\Delta t = \Delta t_{\text{trapz,s}}^{\text{up}}$ , ist der positive Strompuls trapezförmig. Die sich ergebende Grenze ist

$$\frac{1}{\gamma_{\text{rst}}} + \frac{1}{\gamma_{\text{set}}} \leq 2 \frac{-I_L T + I_g \tau_{\text{set}}}{(I_p^{\text{up}} - I_L)^2} \rightarrow \text{pos. trapezförmig.} \quad (7.19)$$

Für den Entladestrompuls ergibt sich analog die Grenze zu

$$\frac{1}{\gamma_{\text{rst}}} + \frac{1}{\gamma_{\text{set}}} \leq 2 \frac{+I_L T + I_g \tau_{\text{set}}}{(I_p^{\text{dn}} - I_L)^2} \rightarrow \text{neg. trapezförmig.} \quad (7.20)$$

Bei dieser Betrachtung wird deutlich, dass der Stromüberschwinger sowohl in positive als auch in negative Richtung erfolgen kann. Falls die Ladung, die der Stromüberschwinger erzeugt ( $A_2, B_2, M_2, L_2$ ), größer ist als die Ladung, die der Leckstrom generiert ( $A_3, B_3, M_3, L_3$ ), lässt sich die Ladungsdifferenz aus beiden sowohl durch einen Auflade- (positiver Strompuls, daher kurz: Up) als auch durch einen Entlade- (negativer Strompuls, daher kurz: Dn) -Impuls kompensieren. Anschaulich lässt sich dieser Effekt mit der Kennlinie des PFD & CP-Blockes erläutern. Wenn  $I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T$  gilt, weist die Kennlinie drei Nullstellen auf. Zwischen den beiden äußeren Nullstellen ist die Schleifenverstärkung des Phasenregelkreises negativ und die PLL operiert in einer Mitkopplung, wodurch dieser Bereich instabil ist und die mittlere Nullstelle keine stabile Ruhelage darstellt. Daher ergeben sich lediglich zwei mögliche mittlere statische Phasenfehler.

Die bleibende Regelabweichung der PLL ist somit unter Berücksichtigung der vor-

gestellten nicht-idealen Effekten wie folgt definiert

$$\Delta t_s = \begin{cases} \Delta t_{\text{trapz},s}^{\text{up}} & \forall \{ (I_L < 0) \vee I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T \} \wedge \text{Gl. (7.19) wahr} \\ \Delta t_{\text{trapz},s}^{\text{dn}} & \forall \{ (I_L > 0) \vee I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T \} \wedge \text{Gl. (7.20) wahr} \\ \Delta t_{\text{tria},s}^{\text{up}} & \forall \{ (I_L < 0) \vee I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T \} \wedge \text{Gl. (7.19) falsch} \\ \Delta t_{\text{tria},s}^{\text{dn}} & \forall \{ (I_L > 0) \vee I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T \} \wedge \text{Gl. (7.20) falsch} \end{cases} . \quad (7.21)$$

Es ergeben sich zwei mögliche bleibende Regelabweichungen falls

$$I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T \quad (7.22)$$

gilt. Für die Berechnung des statischen Phasenfehlers wird die statische Zeitdifferenz mit der Signalperiode in Relation gebracht:

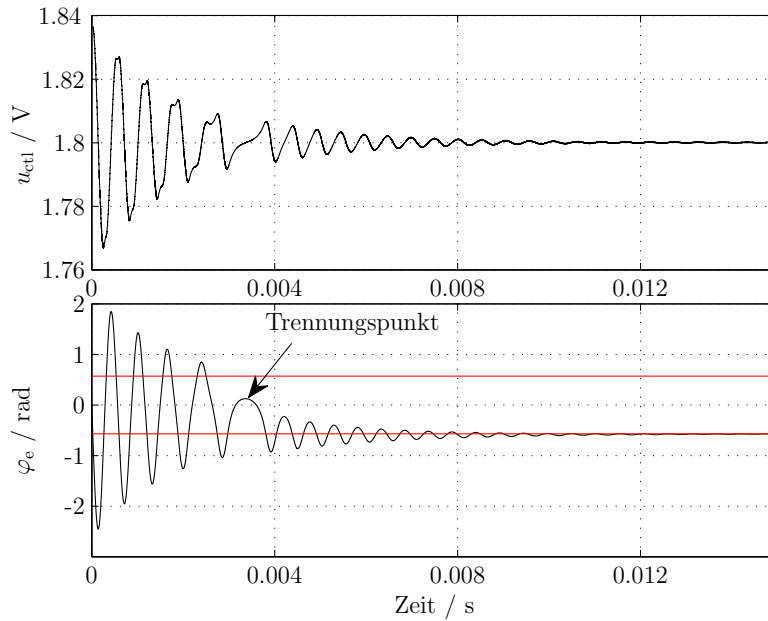
$$\varphi_{e,s} = 2\pi \frac{\Delta t_s}{T}. \quad (7.23)$$

Exemplarisch ist in Abb. 7.11 eine Simulation eines Phasenregelkreises mit zwei möglichen statischen Phasenfehlern zu erkennen. Hierbei werden zur Veranschaulichung die Parameter der PLL so gewählt, dass sich ein relativ großer mittlerer statischer Phasenfehler ergibt. Diese Darstellungen zeigen sowohl im Zeitbereich als auch in der Phaseebene des Phasenregelkreises, wie der Regelkreis zunächst gegen beide Fixpunkte konvergiert und schließlich den Trennungspunkt erreicht. Ab diesem Trennungspunkt konvergiert die Regelschleife gegen einen der beiden Fixpunkte. Die Attraktivität beider Fixpunkte ist vergleichbar, wobei der Fixpunkt, der schlussendlich erreicht wird, sowohl von den Anfangsbedingungen des Phasenregelkreises und der Distanz zwischen den Ruhelagen als auch vom Dämpfungsbeiwert des Regelkreises abhängt. Liegen beide Fixpunkte sehr eng zusammen und die Größenordnung des Phasenrauschens der PLL ist vergleichbar mit der Distanz beider Ruhelagen, besteht zudem die Möglichkeit, dass der Regelkreis zwischen beiden Fixpunkten wechselt.

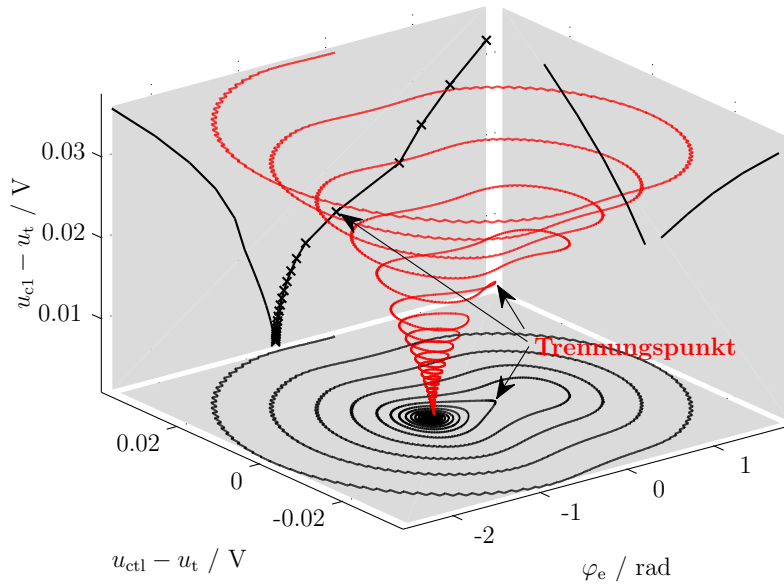
Werden die hergeleiteten analytischen Beziehungen des mittleren statische Phasenfehlers für die Spezialfälle der eingangs genannten Definitionen aus Gleichung (7.5) und (7.6) ausgewertet, ist ersichtlich, dass die Ergebnisse vergleichbar sind. Wird beispielsweise lediglich ein negativer Leckstrom berücksichtigt, ergibt sich aus Gleichung (7.8) und mit  $\tau_{\text{set}} = 0$  und  $\gamma_{\text{set}} = \gamma_{\text{rst}} \rightarrow \infty$  die Beziehung

$$\varphi_{e,s} = \frac{2\pi}{T} \frac{-I_L T}{I_p^{\text{up}} - I_L}. \quad (7.24)$$

Da in diesem Fall  $I_p^{\text{up}} = I_p$  gilt, sind die hier vorgestellte allgemeine Betrachtung und die Darstellung von Gardner [104] identisch.



(a) Zeitlicher Verlauf der Steuerspannung und des Phasenfehlers


 (b) 3D-Phasenebene mit zusätzlichen Projektionskurven für die Punkte  $\varphi_e = 0$  (rechts) und  $u_{\text{ctl}} - u_t = 0$  (links) sowie für  $u_{\text{ctl}} - u_t$  vs.  $\varphi_e$  (unten)

**Abb. 7.11.:** Darstellung der Phasenebene sowie der Steuerspannung und des Phasenfehlers zur Verdeutlichung des Trennungspunktes zwischen zwei stabilen Zuständen

Der statische Phasenfehler aus der Überlagerung von  $I_p^{\text{up}}$  und  $I_p^{\text{dn}}$  aus Gleichung (7.6) resultiert in einem Effekt, der analog zu dem des Stromüberschwin-

gers des ereignisgesteuerten Modells ist. Hierbei entspricht der Stromüberschwinger der Stromungleichheit ( $I_g \leftrightarrow I_{\text{up}} - I_{\text{dn}}$ ) und die betrachtete Zeitspanne  $\tau_{\text{set}}$  ist vergleichbar mit  $t_{\text{on}}$ . Für ein positives  $I_{\text{up}} - I_{\text{dn}}$  sind die Gleichungen (7.10) und (7.6) vergleichbar, da  $T$  für kleine Phasenfehler der Referenzperiode  $T_{\text{ref}}$  entspricht.

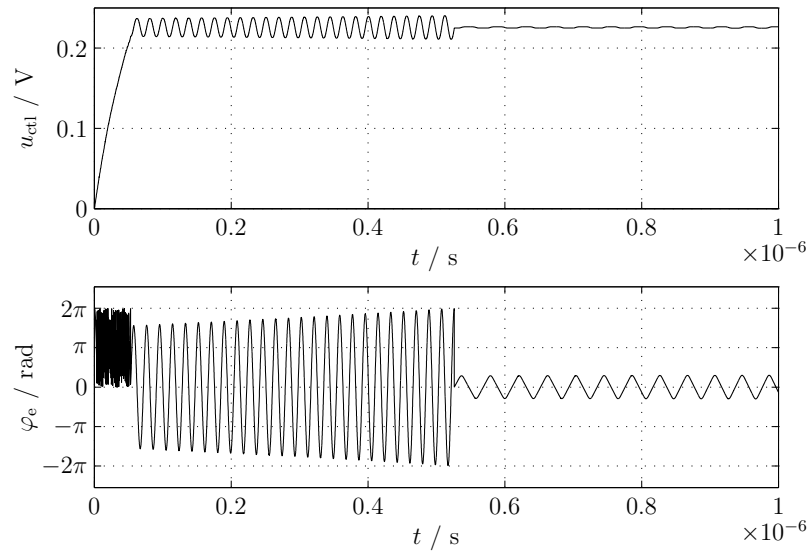
Die allgemeine Beschreibung des mittleren statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung der Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte ermöglicht die Abschätzung der bleibenden Regelabweichung und somit eine Optimierung des Systementwurfs. Speziell für Anwendungen mit hohen Anforderungen an die Phasengenauigkeit ist diese Abschätzung essentiell.

### 7.3. Dynamisches Verhalten

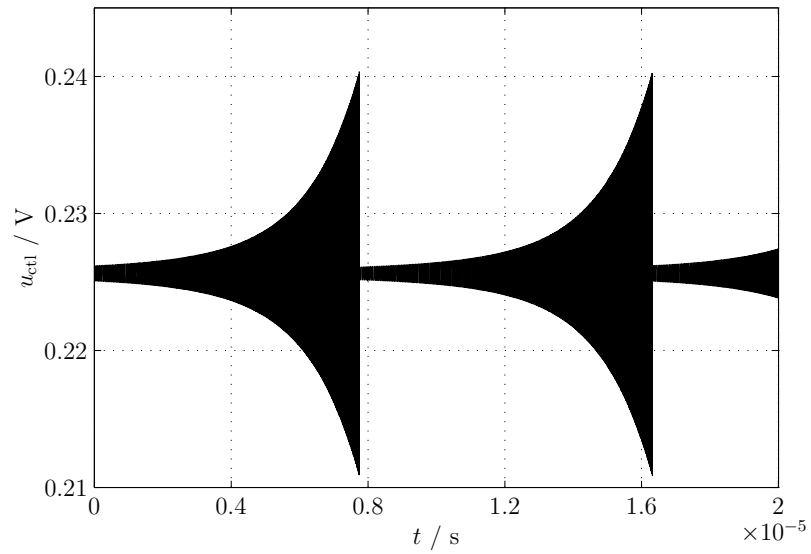
Neben den Variationen der Phasen nahe der Ruhelage und der bleibenden Regelabweichung resultieren die nicht-idealen Effekte gerade bei Frequenzwechseln während der Frequenzsynthese in einer Veränderung des dynamischen Verhaltens des Phasenregelkreises. Für die präzise Vorhersage des Verhaltens zwischen den Ruhelagen ist es sinnvoll, diese dynamischen Eigenschaften des Regelkreises unter Berücksichtigung der nichtlinearen und nicht-idealen Effekten zu charakterisieren. Mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse lässt sich der Systementwurf optimieren. Wie im späteren Verlauf gezeigt wird, ist die Berücksichtigung dieser Effekte für den robusteren Systementwurf von großer Bedeutung.

#### 7.3.1. Totzone

Neben dem Phasenrauschen beeinflusst die Totzone des Phasen- und Frequenzdetektors auch das Konvergenzverhalten des Phasenregelkreises nahe der Ruhelage. Speziell bei einem ungedämpften Phasenregelkreis lässt sich dieser Effekt deutlich beobachten (siehe Abb. 7.12). Es ist zu erkennen, dass sich die PLL im ausgetasteten Bereich nahezu unverändert verhält und im Bereich kleiner Phasenfehler ein abschnittsweise divergierendes Verhalten aufzeigt. Die Steuerspannung der Regelung divergiert bis zu einem Phasenfehler von  $|\varphi_e| = 2\pi$ . Zu diesem Zeitpunkt rastet der Phasenregelkreis aus und rastet direkt wieder ein, wobei die Amplitude der schwingenden Steuerspannung sprunghaft kleiner wird. Nach dem Einrasten beginnt die Steuerspannung erneut zu divergieren. Wird dieses Verhalten nahe der Ruhelage betrachtet, ergibt sich die Steuerspannung aus Abb. 7.13. Die abschnittsweise Divergenz ist hier deutlich erkennbar. Während die Amplitude der Steuerspannung  $u_{\text{ctl,max}}$  divergiert, wird die Periodendauer  $T_n$  der Schwingung geringer und konvergiert gegen den Wert  $T_{n,0}$ .  $T_{n,0}$  beschreibt dabei die Periodendauer des idealen Phasenregelkreises mit einem Dämpfungsbeiwert von Null ( $\zeta = 0$ ) und korrespondiert zu der natürlichen Eigenkreisfrequenz  $\omega_n = 2\pi/T_{n,0}$  des Phasenregelkreises. Wird die momentane Amplitude über die momentane Periodendauer aufgetragen, ist ein hyperbolischer Zusammenhang beider Größen zu erkennen (siehe Abb. 7.14).



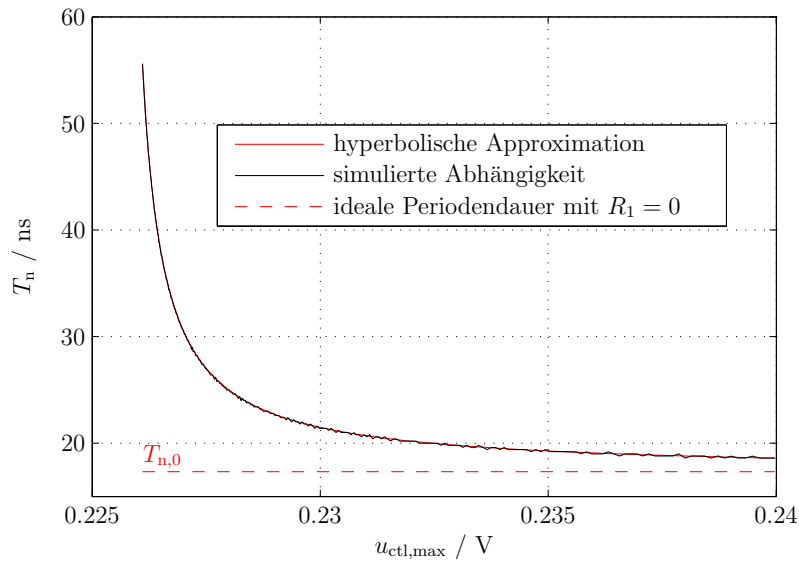
**Abb. 7.12.:** Verlauf der Steuerspannung unter Berücksichtigung der Totzone und einer Dämpfung nahe null



**Abb. 7.13.:** Verlauf der Steuerspannung unter Berücksichtigung der Totzone und einer Dämpfung nahe null (Startbedingungen liegen nahe dem Fixpunkt)

Dieser Zusammenhang lässt sich mit der hyperbolischen Funktion

$$T_n = T_{n,0} + \frac{a}{u_{\text{ctl,max}} - x_0} \quad (7.25)$$



**Abb. 7.14.:** Darstellung der momentanen Periodendauer aufgetragen über die momentane Amplitude der Steuerspannung

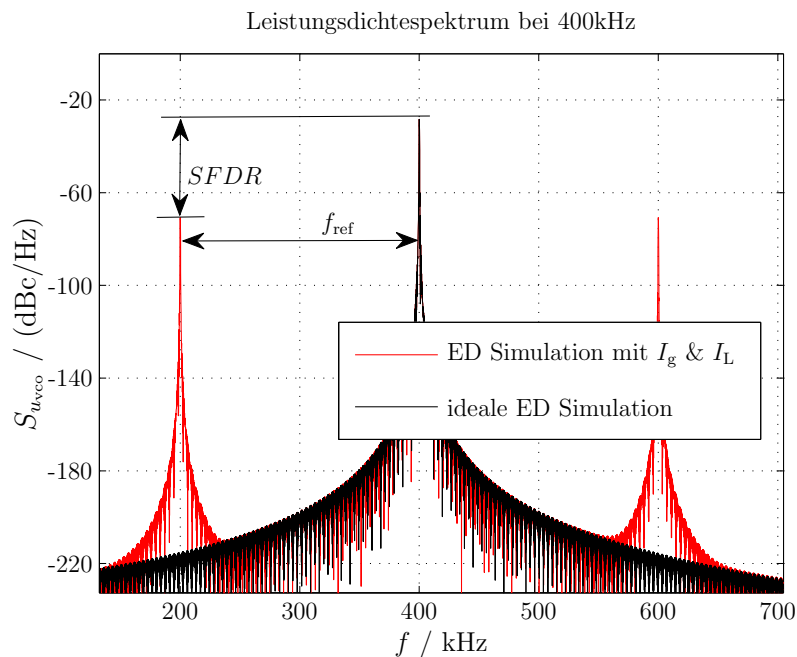
approximieren. Bei der Berechnung der Variablen  $a$  und  $x_0$  zeigt sich, dass die Verschiebung in  $x$ -Richtung durch die Zielspannung  $u_t$  der Steuerspannung gegeben ist ( $x_0 = u_t$ ) und  $a$  einen Gewichtungsfaktor darstellt. Diese Beobachtung lässt sich durch einen harmonischen Oszillator erklären. Da sich der ungedämpfte Phasenregelkreis analog zu diesem verhält, korrelieren die Maxima der Steuerspannungen mit den Minima des Phasenfehlers ( $\varphi_e = 0$ ). Streben die Maxima der Steuerspannung gegen die Zielspannung, konvergiert der Frequenzfehler gegen Null. Da für die Maxima der Steuerspannung der Phasenfehler ebenfalls Null ist ( $\Rightarrow f_e \approx 0, \varphi_e \approx 0$ ), existiert keine Schwingung in der Steuerspannung des Phasenregelkreises und die Periodendauer  $T_n$  strebt gegen unendlich. Wird die Amplitude der Steuerspannung hingegen größer, divergiert auch der Frequenzfehler. In diesem Fall ist die Periodendauer der Schwingung nahe der des idealen und ungedämpften Phasenregelkreises. Diese Divergenz der Schwingung lässt sich dabei durch die Totzone begründen. Da die Totzone bei jedem Regelungsimpuls einen kleinen Teil der Information des Phasenfehlers unterdrückt, fällt der Regelungsimpuls immer ein wenig zu gering aus. Somit wird der Frequenzfehler bei jeder Schwingung ein wenig größer und resultiert in der Divergenz.

Da sich eine Totzone einer PLL nur mit hohem messtechnischem Aufwand nachweisen lässt, eignet sich dieses Experiment zum Nachweis einer Totzone innerhalb einer Hardware-Realisierung. Diese Untersuchung wurde in Kapitel 6 angewendet.



### 7.3.2. Leckstrom und Stromüberschwinger

Neben der Totzone weisen auch der Leckstrom und der Stromüberschwinger einen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Phasenregelkreises auf, wie in Abb. 5.26 zu erkennen ist. Im Gegensatz zur Totzone resultieren der Leckstrom und der Stromüberschwinger in periodischen Störungen der Steuerspannung und somit des VCO- und Dividierersignals, da die Korrektur dieser Störungen jeweils mit einem Strompuls realisiert wird. Die Auswirkung dieser nicht-idealen Effekte lässt sich auch im Leistungsdichtespektrum des VCO- und Dividierersignals beobachten. In Abb. 7.15 ist ein solches Leistungsdichtespektrum des VCO-Signals exemplarisch dargestellt. Teile dieser Ergebnisse sind auch in [40] veröffentlicht. Es wird deut-

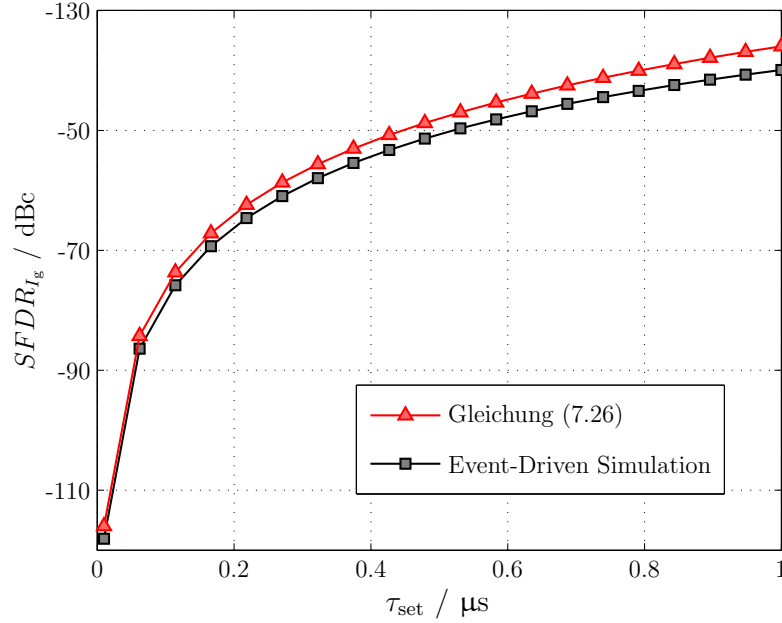


**Abb. 7.15.:** Darstellung des Leistungsdichtespektrums des VCO-Signals einer idealen PLL und einer PLL mit Leckstrom und Stromüberschwinger zur Veranschaulichung der SFDR

lich, dass die periodischen Korrekturen dieser nicht-idealen Effekte zu Nebentönen im Leistungsdichtespektrum führen. Deren Abstand zur Trägerfrequenz ist für den Leckstrom und den Stromüberschwinger durch die Frequenz des Referenzsignals gegeben. Die Höhe der Nebentöne ist von den Amplituden des Leckstroms und des Stromüberschwingers abhängig, wobei die Differenz der Höhen bei der Trägerfrequenz und der Frequenz des Nebentons als nebentonfreier Dynamikbereich (engl. *Spur Free Dynamic Range*, kurz: SFDR) bezeichnet wird. Für einen Phasenregelkreis mit lediglich einem Stromüberschwinger lässt sich dieser Dynamikbereich mit

$$SFDR_{I_g} = 20 \log_{10} \left( \frac{K_v I_g \tau_{\text{set}}^2}{C_2 N} \right) \quad (7.26)$$

approximieren [7]. Wird  $SFDR_{I_g}$  über die Pulsbreite des Stromüberschwingers  $\tau_{\text{set}}$  aufgetragen, ergibt sich Abb. 7.16. Es ist zu erkennen, dass die Eigenschaften des



**Abb. 7.16.:** Darstellung des nebenfreien Dynamikbereichs zur Verdeutlichung des Einflusses der Stromüberschwinger

Stromüberschwingers der Approximation mit der ereignisgesteuerten Modellierung übereinstimmen. Die kleine Abweichung beider Darstellungen ist durch die Approximation der oben angegebenen Gleichungen begründet, wobei der tendenzielle Verlauf genau abgebildet wird.

Für einen Phasenregelkreis mit lediglich einem Leckstrom ist der nebenfreie Dynamikbereich mit

$$SFDR_{I_L} = 20 \log_{10} \left( \frac{K_v I_L T_{\text{ref}}^2}{2\pi C_2 N} \right) \quad (7.27)$$

definiert [7]. Da der Leckstrom über die gesamte Periodendauer des Referenz- bzw. Dividierersignals auftritt, ist  $SFDR_{I_L}$  direkt von der Referenzfrequenz abhängig. Treten beide nicht-idealen Effekte auf, werden beide Gleichungen in der linearen Darstellung addiert. Somit ergibt sich

$$SFDR = 20 \log_{10} \left( \frac{K_v}{C_2 N} \left( I_g \tau_{\text{set}}^2 + \frac{I_L T_{\text{ref}}^2}{2\pi} \right) \right). \quad (7.28)$$

Für ein reines Ausgangsspektrum des Phasenregelkreises liegt es daher nahe, eine Regelschleife sowohl mit einem geringen Leckstrom als auch einem kleinen Stromüberschwinger zu realisieren.

Die endlichen Steigungen des Ladungspumpenstroms sind an dieser Stelle zu vernachlässigen, da der Einfluss der entstehenden Ladungsunterschiede für  $\gamma_{\text{set}} \neq \gamma_{\text{rst}}$  im Vergleich zum Leckstrom und den Stromüberschwingern gering ist. Generell lassen sich jedoch auch ungleiche endliche Steigungen im Ladungspumpenstrom mit Hilfe dieser Betrachtung berücksichtigen. Dabei lässt sich beispielsweise der Ladungsunterschied, resultierend aus den ungleichen Steigungen, durch eine Stromdifferenz mitteln und sich ein ähnlicher Zusammenhang wie in Gleichung (7.26) herleiten. Ein idealer Regelkreisentwurf bezüglich des *SFDR* ergibt sich somit für identische Steigungen der fallenden und steigenden Flanken des Ladungspumpenstroms.

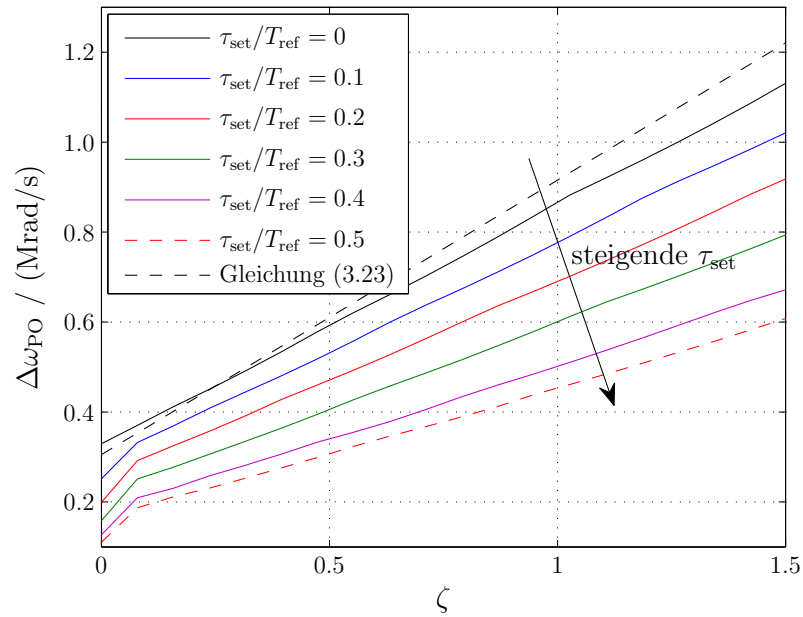
### 7.3.3. Ausrastbereich

Die nicht-idealen Effekte beeinflussen den eingerasteten Bereich der PLL, wie in den vorherigen Kapiteln beschrieben wird, und den Ausrastbereich  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  des Phasenregelkreises und somit den Geltungsbereich des linearen Modells. Für die Untersuchung des Ausrastverhaltens wird der Kreisfrequenzsprung  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  charakterisiert, bei dem die PLL gerade ausrastet (siehe Gleichung (3.22) und (3.23)).

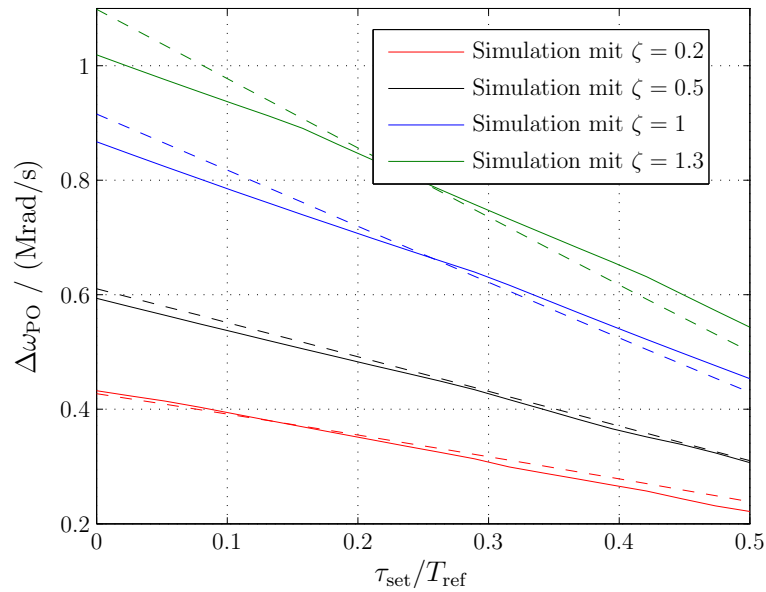
Wird ein Phasenregelkreis unter Berücksichtigung einer Totzone mit Hilfe des ereignisgesteuerten Modells simuliert, lässt sich der initiale Frequenzfehler so variieren, dass sich die Ausrastgrenze bestimmen lässt. Für verschiedene Breiten der Totzone und unterschiedliche Dämpfungsbeiwerte des Phasenregelkreises ergeben sich schließlich die entsprechenden Ausrastbereiche  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  in Abb. 7.17(a). Offensichtlich wird der Ausrastbereich des Regelkreises mit zunehmender Breite der Totzone kleiner und die PLL rastet somit bei Frequenzsprüngen am Eingang schneller aus. Für  $\zeta > 1$  ergibt sich beispielsweise eine signifikante Änderung des Ausrastbereiches  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  von etwa 10%, falls die Variation der Totzone von Null auf  $\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}} = 0,1$  betrachtet wird.

Da der Ausrastbereich eine wichtige Kenngröße der PLL ist, ist es sinnvoll, diesen Zusammenhang genauer zu betrachten. Abb. 7.17(b) zeigt den Ausrastbereich  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  über die Breite der Totzone aufgetragen. In dieser Darstellung ist zu erkennen, dass der Ausrastbereich mit steigender Breite der Totzone geringer wird. Dieser Zusammenhang lässt sich durch die nicht-ideale Kennlinie des PFD & CP Blocks begründen. Für kleine Phasenfehler arbeitet der Regelkreis innerhalb der Totzone, womit die Änderung der elektrischen Ladung des Schleifenfilters nahezu Null ist. Außerhalb der Totzone verläuft die Kennlinie des PFD & CP Blocks parallel zur idealen Kennlinie. Die Totzone führt somit zu einer geringeren maximalen elektrischen Ladungsänderung für den Fall eines Phasenfehlers von  $2\pi$ . Wird diese Reduzierung bei der Herleitung des linearen Modells der Ladungspumpe berücksichtigt, wird deutlich, dass die Übertragungsfunktion des linearen Modells der Ladungspumpe mit

## 7. CHARAKTERISIERUNG UND ANALYSE DER CP-PLL INKL. NICHT-IDEALER EFFEKTE



(a) Simulative Charakterisierung von  $\Delta\omega_{PO}$  in Abhängigkeit des Dämpfungsbeiwertes anhand des ereignisgesteuerten Modells



(b)  $\Delta\omega_{PO}$  in Abhängigkeit von der Breite der Totzone (Simulation → durchgezogene Kurven // Gleichung (7.29) → gestrichelte Kurven)

**Abb. 7.17.:** Darstellung des Ausrastbereichs des Phasenregelkreises zweiter Ordnung für verschiedene Breiten der Totzone und Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der nicht-idealen PLL und der eingeführten Approximation

der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion  $B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)$  aus Gleichung (7.2) gewichtet wird. Da der Phasenregelkreis für einen Phasenfehler  $\varphi_e = \pm 2\pi$  ausrastet, wird dabei die Amplitude  $\hat{\varphi}_e$  des Eingangs der Beschreibungsfunktion mit  $2\pi$  approximiert. Mit Hilfe der natürlichen Kreisfrequenz  $\omega_n$  des ungedämpften linearen Modells zweiter Ordnung, der Approximation von  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  aus Gleichung (3.23) und dem Zusammenhang  $\varphi_{\text{set}}/2\pi = \tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}$  ergibt sich der Ausrastbereich der PLL zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Totzone zu

$$\Delta\omega_{\text{PO}}(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}) \approx 11,55 \omega_n(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}) \cdot (0,5 + \zeta(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}})), \quad (7.29)$$

wobei

$$\omega_n(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}) \approx \sqrt{\frac{K_{v,\omega} K_\varphi \cdot B(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}})}{NC_1}} \quad (7.30)$$

und

$$\zeta(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}) \approx \frac{1}{2} \tau_1 \omega_n(\tau_{\text{set}}/T_{\text{ref}}) \quad (7.31)$$

gilt. Die Differenz dieser Beziehung zu den Ergebnissen der ereignisgesteuerten Simulation der nichtlinearen und nicht-idealen PLL ist in Abb. 7.17(b) zu erkennen. Die eingeführte Approximation bildet die Simulationsergebnisse des ereignisgesteuerten Modells anhand der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion gut ab und lässt sich somit für die Auslegung des Phasenregelkreises hinsichtlich des Ausrastbereichs und unter Berücksichtigung einer Totzone verwenden.

### 7.3.4. Durchtrittsfrequenz

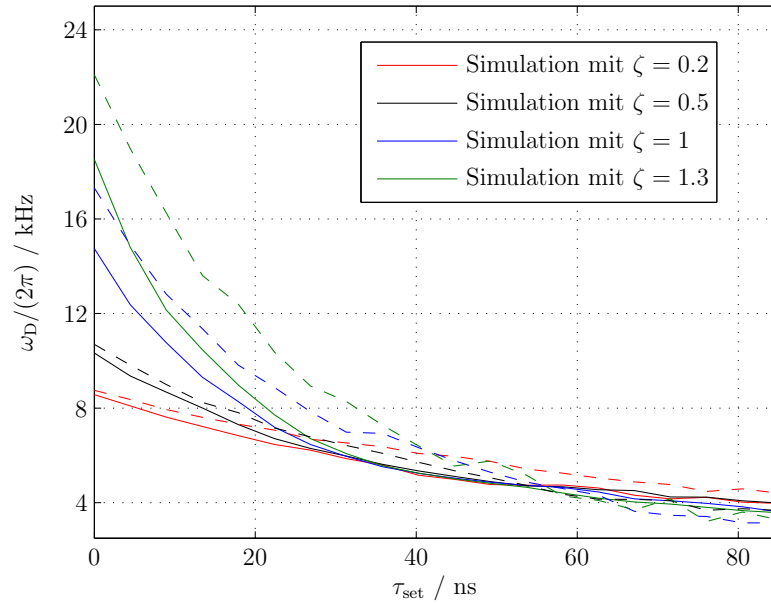
Wie in Kapitel 4.1 dargelegt, stellen die Phasenreserve und die entsprechende Durchtrittsfrequenz einen zusätzlichen wichtigen Bestandteil des Systementwurfs dar. Da schon bei der Betrachtung des Phasenrauschens deutlich wird, dass sich die Durchtrittsfrequenz in Abhängigkeit von der Totzone ändert, wird dieser Zusammenhang genauer untersucht.

Wird der Phasenregelkreis zweiter Ordnung betrachtet, lässt sich die Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$  mit Hilfe der Normalform der Übertragungsfunktion definieren (siehe Kapitel 4.1). Durch die Erweiterung des linearen Modells mittels der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion lässt sich die Durchtrittskreisfrequenz unter Berücksichtigung der Totzone herleiten (vgl. Kapitel 7.3.3) und es ergibt sich

$$\omega_D(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e) \approx \sqrt{2(\zeta(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e))^2 + \sqrt{4(\zeta(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e))^4 + 1}} \cdot \omega_n(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e). \quad (7.32)$$

Die natürliche Eigenkreisfrequenz und der Dämpfungsbeiwert werden dabei analog zur vorherigen Betrachtung definiert, wobei die Abhängigkeit an dieser Stelle durch das Verhältnis der Breite der Totzone  $\varphi_{\text{set}}$  zur Amplitude des Phasenfehlers  $\hat{\varphi}_e$  gegeben ist. Die Amplitude des rauschenden Phasenfehlers lässt sich dabei durch eine statistische Charakterisierung des Phasenfehlers bestimmen. Hierzu wird die kumulative Verteilungsfunktion des simulierten Phasenfehlers ausgewertet und die Amplitude durch den Bereich, in dem beispielsweise 95% der Phasenfehlerwerte auftreten, definiert. Der Gleichung (7.32) ist zu entnehmen, dass für steigende Breiten der Totzone die Durchtrittskreisfrequenz sinkt und gegen Null tendiert (siehe Abb. 7.18).

Für die simulative Bestimmung der Durchtrittsfrequenz des nicht-idealen und nichtlinearen Phasenregelkreises lässt sich das ereignisgesteuerte Modell verwenden. Hierzu wird für unterschiedliche Breiten der Totzone jeweils eine Simulation mit rauschendem Referenzoszillator und eine Simulation mit rauschendem VCO durchgeführt. Das Hochpass-gefilterte Phasenrauschen des VCO, das zur Fehlerübertragungsfunktion  $T_e(s) = 1 - T(s)$  korrespondiert, und das Tiefpass-gefilterte Phasenrauschen des Referenzoszillators, das analog zur Übertragungsfunktion  $T(s)$  ist, dienen als Werkzeuge zur Bestimmung des Frequenzverhaltens der PLL. Die Durchtrittsfrequenz lässt sich dabei durch den Schnittpunkt der Beträge der Übertragungsfunktion  $T(s)$  und der Fehlerübertragungsfunktion  $T_e(s)$  bestimmen, da das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  des offenen Regelkreises an dieser Stelle gleich eins ist (vgl. Kapitel 4.1). Für diese Untersuchung, die mittels Rauschgrößen durchgeführt wird, wird die gleiche Phasenrauschgröße für den Referenzoszillator und den VCO verwendet und separat simuliert. Wird der Einfluss der freilaufenden Phasenrauscheinflüsse im Leistungsdichtespektrum des Dividierersignals kompensiert, ergeben sich die Betragsverläufe der Übertragungsfunktion und der Fehlerübertragungsfunktion. Der Schnittpunkt beider Verläufe definiert die Durchtrittsfrequenz des nichtlinearen und nicht-idealen Modells.



**Abb. 7.18.:** Darstellung der Durchtrittskreisfrequenz des Phasenregelkreises zweiter Ordnung für verschiedene Breiten der Totzone und Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der nicht-idealen PLL (durchgezogene Kurven) und der Approximation aus Gleichung (7.32) (gestrichelte Kurven)

In Abb. 7.18 ist die resultierende Durchtrittskreisfrequenz für verschiedene Breiten der Totzone und Dämpfungsbeiwerte des Phasenregelkreises zweiter Ordnung dargestellt. Es ist ersichtlich, dass sich das Verhalten des nichtlinearen und nicht-idealen Modells mit der Approximation aus Gleichung (7.32) nachbilden lässt. Da die simulativ charakterisierte Durchtrittsfrequenz auf Basis von Rauschgrößen bestimmt wurde, ergeben sich naturgemäß Ungenauigkeiten. Diese resultieren in einer Differenz zwischen der Approximation und den Simulationsergebnissen auch für den idealen Phasenregelkreis. Da für jede Rauschuntersuchung der gleiche Phasenrauschvektor verwendet wurde, weist die Differenz zwischen den Simulationen und der analytischen Approximation für jeden Dämpfungsbeiwert und jede Breite der Totzone die gleiche Tendenz auf. Trotz dieser Abweichungen stellt die Approximation eine gute Näherung des simulierten Verhaltens dar und lässt sich somit für den Systementwurf verwenden.

## 7.4. Stabilität des Phasenregelkreises mit Totzone

Da die Stabilität eine wichtige Eigenschaft von Regelkreisen ist, ist eine Analyse der Stabilität des Phasenregelkreises unter Berücksichtigung von nicht-idealen Effekten von großer Bedeutung. Da gerade die Totzone das dynamische Verhalten der Schleife nahe der Ruhelage beeinflusst, wird der Einfluss der Totzone auf eine PLL zweiter Ordnung in [39] untersucht. Dabei wird anhand des ereignisgesteuerten Modells eine Beschreibung des Regelkreises mit Totzone abgeleitet und mit Hilfe der Lyapunov-Theorie auf die Stabilität geprüft.

Für den Phasenregelkreis dritter Ordnung stellt dieses Vorgehen eine Herausforderung dar, da sich die Beschreibungsfunktionen nicht effizient auswerten lassen. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle das ereignisgesteuerte Modell dazu verwendet, die Konvergenzeigenschaften eines exemplarischen Phasenregelkreises dritter Ordnung unter Berücksichtigung einer Totzone simulativ zu charakterisieren. Der hier untersuchte Phasenregelkreis weist die Schleifenparameter

$$\begin{array}{ll} R_1 = 1,4 \text{ k}\Omega & N = 12000 \\ C_1 = 51 \text{ nF} & C_2 = 2,6 \text{ nF} \\ K_v = 1,8 \text{ GHz/V} & \tau_{\text{set}} = 50 \text{ ns} \end{array}$$

auf. Für die Analyse wird der Ladungspumpenstrom von  $0,1 \mu\text{A}$  bis  $10 \text{ mA}$  variiert, wobei die größere Stromamplitude zu einem Phasenregelkreis rechtsseitig der Stabilitätsbedingung und nahe der Überlastgrenze korrespondiert. Für die automatisierte Beurteilung der Konvergenz des Regelkreises werden, analog zu Kapitel 4.5, die folgenden Kriterien verwendet:

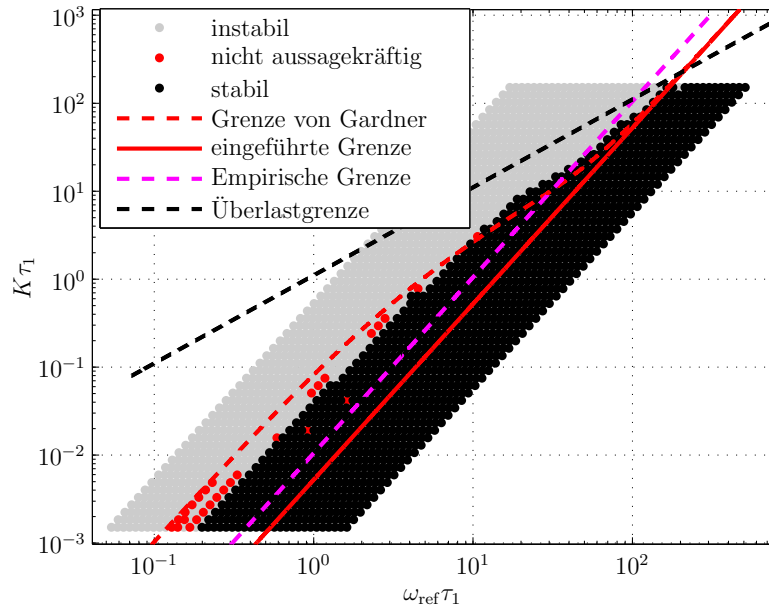
**Stabil:** Die Dynamik der PLL wird als stabil bezeichnet, wenn die Steuerspannung zu 20 aufeinander folgenden Zeitpunkten der Phasenfehlernulldurchgänge (Dynamikwechsel) streng monoton fallend ist, 40 Dynamikwechsel in Folge in einem definiert kleinen Schlauch ( $\pm 0,01\%$ ) um die Zielspannung verbleiben oder wenn 200 Steuerspannungswerte in Folge in diesem kleinen Schlauch liegen (vgl. Abb. 4.13(a)).  $\Rightarrow$  **Konvergenz in die Ruhelage (asymptotisch stabile Ruhelage)**

**Instabil:** Falls 20 Dynamikwechsel der Steuerspannung in Folge streng monoton wachsend sind, wird die Dynamik als instabil gewertet, auch wenn sich vielleicht ein Grenzyklus außerhalb des Schlauches  $\pm 0,01\%$  um die Zielspannung einstellt (vgl. Abb. 4.13(b)).  $\Rightarrow$  **instabile Ruhelage und/oder Grenzyklus außerhalb des  $\pm 0,01\%$  Schlauches**

**Nicht aussagekräftig:** Wird keine der oben genannten Konditionen erfüllt und das Ende der Simulation erreicht, wird keine Aussage über die Konvergenz getroffen.



Als Anfangsbedingungen werden der Phasenfehler  $\varphi_{e0} = 0$  und der initiale Frequenzfehler  $f_{e0} = 0,999 f_t$  angenommen, d.h. dass die initiale Abweichung der VCO-Frequenz von der Zielfrequenz knapp 100% beträgt. Diese Untersuchung lässt sich zwar für beliebige Anfangsbedingungen auch nahe der Ruhelage durchführen, jedoch weist der Totzonen-behaftete Phasenregelkreis nahe der Ruhelage (die PLL befindet sich überwiegend innerhalb der Totzone) nur geringe dynamische Eigenschaften auf, sodass eine aussagekräftige automatisierte Konvergenzbeurteilung anhand der Simulationsergebnisse nur mit hohem Aufwand möglich ist. Des Weiteren müssen für die automatisierte Analyse des Totzonen-behafteten Phasenregelkreises nahe der Ruhelage neue Auswertekriterien definiert werden, da in diesem Bereich nur wenig Dynamikwechsel auftreten und der Regelkreis lediglich bedingt geschlossen ist. Das Ergebnis der Konvergenzanalyse entfernt der Ruhelage ( $\varphi_{e0} = 0$  und  $f_{e0} = 0,999 f_t$ ) ist in Abb. 7.19 dargestellt. Es wird deutlich, dass eine größere Anzahl von



**Abb. 7.19.:** Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen unter Berücksichtigung eines Phasenregelkreises mit Totzone und einer Anfangsbedingung entfernt der Ruhelage

Simulationen zu keiner aussagekräftigen Beurteilung der Konvergenz führt. Wie oben beschrieben, ist dies auf die reduzierte Dynamik des Regelkreises, die geringere Anzahl der Dynamikwechsel und die oben definierten Auswertekriterien zurückzuführen. Nichtsdestotrotz zeigt Abb. 7.19, dass ein robuster Systementwurf des Totzonen-behafteten Phasenregelkreises mit der auf dem ereignisgesteuerten Modell basierenden Stabilitätsbedingung (4.113) zielführend ist. Rechtsseitig der in dieser Arbeit eingeführten Stabilitätsgrenze weist die PLL lediglich in die Ruhelage konvergierendes Verhalten auf. Die Grenze aus [3] ist jedoch für Anfangsbedingungen

entfernt der Ruhelage nicht konservativ genug, da sich die Anfangsbedingungen außerhalb des Einzugsgebietes befinden und der Phasenregelkreis mit einem Entwurf zwischen der Gardner-Grenze und der Bedingung (4.113) nicht in die Ruhelage konvergiert.

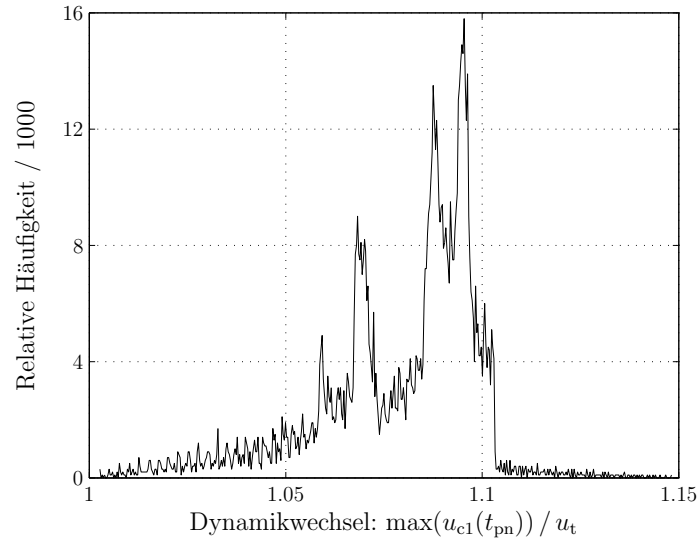
Die auf dem ereignisgesteuerten Modell basierende Stabilitätsbedingung lässt sich somit im ersten Schritt für den Entwurf von Phasenregelkreisen verwenden, auch wenn diese mit einer Totzone behaftet sind.

### 7.5. Statistische Betrachtung der CP-PLL

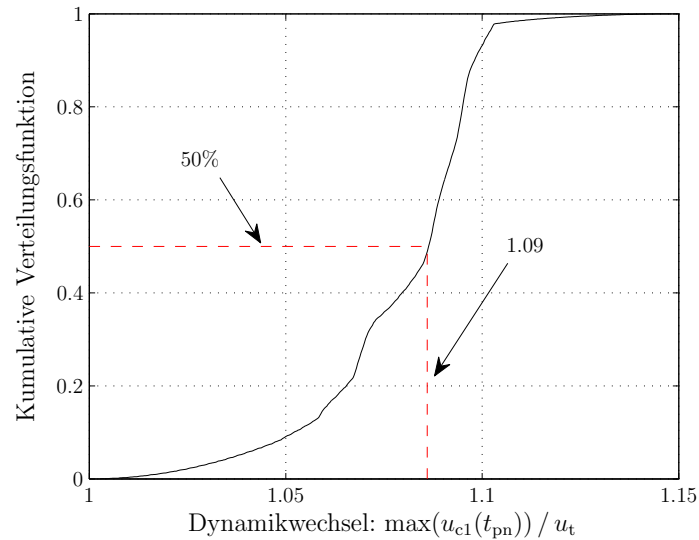
Die CP-PLL ist ein hochgradig nichtlineares, nicht-ideales und teils chaotisches System, das stark von dessen Anfangsbedingungen und Schleifenparametern abhängig ist [19, 106] (siehe auch Abb. 1.1). Da sowohl Temperaturschwankungen während des Betriebs als auch Prozessvariationen bei der Herstellung der Schaltungen auftreten, stellt es eine Herausforderung dar, die Eigenschaften des Phasenregelkreises für alle Betriebszustände analytisch zu beschreiben. Für die Charakterisierung und Analyse der Regelschleife lassen sich daher statistische Untersuchungen durchführen, die die Parameter-, Temperatur- und Prozessvariationen und verschiedene Anfangsbedingungen berücksichtigen. Das ereignisgesteuerte Modell eignet sich besonders für eine hocheffiziente statistische Analyse der PLL. Ein Beispiel ist die PVT-Charakterisierung (Prozess-Spannung-Temperatur-Charakterisierung, engl. *Process-Voltage-Temperature-Characterization*) der PLL, die für die spannungsgesteuerte CP-PLL in [107] veröffentlicht ist. In diesem Kapitel seien exemplarisch die Dynamikwechsel (Phasenfehlernulldurchgänge), die Überschwinger und die Attraktivität zweier statischer Phasenfehler für die stromgesteuerte CP-PLL betrachtet, da die Dynamikwechsel und die Überschwinger eine Aussage über die maximale Steuerspannung und somit die maximale VCO-Frequenz ermöglichen und die Attraktivität der Ruhelage eine wichtige Kenngröße eines Regelkreises darstellt.

#### 7.5.1. Dynamikwechsel in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Der Dynamikwechsel des Phasenregelkreises entspricht dem Phasenfehlernulldurchgang und somit dem Wechsel des Stromvorzeichens. Für den schaltenden nichtlinearen Phasenregelkreis zweiter Ordnung beschreiben die Dynamikwechsel die lokalen Extrema der Kapazitätsspannung des Schleifenfilters  $u_{c1}$  und lassen sich somit als Überschwinger des Regelkreises zweiter Ordnung verstehen. Die Betrachtung der Kapazitätsspannung ermöglicht die Beurteilung der Überschwinger ohne eine Fehlinterpretation der Spannungssprünge in der Steuerspannung  $u_{ctl}$ , die durch die



(a) Relative Häufigkeit



(b) Kumulative Verteilungsfunktion

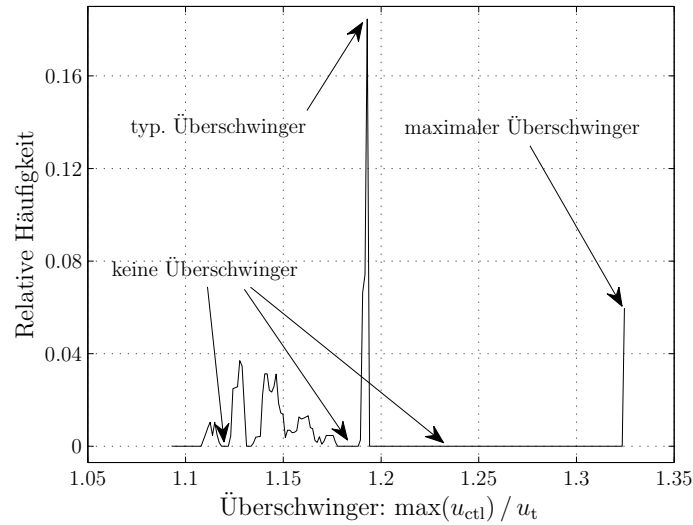
**Abb. 7.20.:** Relative Häufigkeit und kumulative Verteilungsfunktion der Höhe der Dynamikwechsel des ereignisgesteuerten Modells bei Variation der Anfangsbedingungen  $\varphi_e = 0 \dots 2\pi$  und  $f_e = 0 \dots 0,99f_t$  des Phasenregelkreises zweiter Ordnung

Spannung  $u_{R1} = R_1 i_p$  hervorgerufen werden. Die Phasenfehlernulldurchgänge des Phasenregelkreises dritter Ordnung korrespondieren in etwa mit den lokalen Extrema der Spannung über der Kapazität  $C_1$ . Werden diese Überschwinger für den Bereich der Anfangsbedingungen  $\varphi_e = 0 \dots 2\pi$  und  $f_e = 0 \dots 0,99f_t$  charakterisiert, ergibt sich das Histogramm in Abb. 7.20(a). Die Größe der Stichprobe beträgt ins-

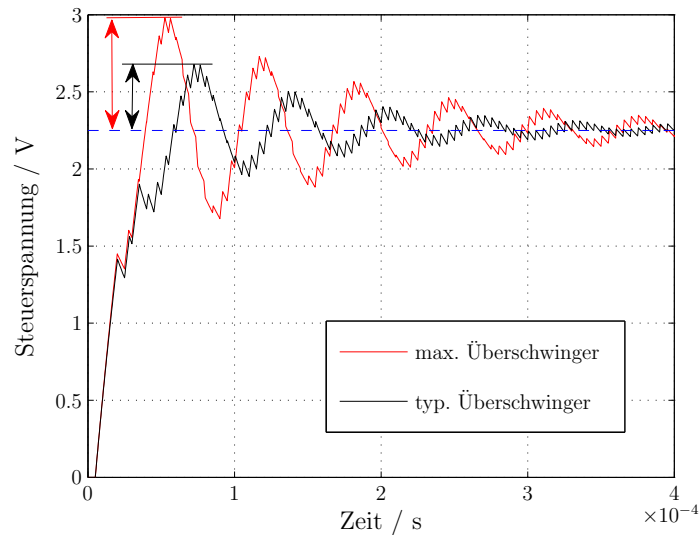
gesamt 10.000 Simulationen. Es ist erkennbar, dass Spannungswerte zum Zeitpunkt des Phasenfehlernulldurchgangs  $t_{pn}$  im Bereich von 100% bis 115% der Zielspannung  $u_t$  auftreten, wobei eine Häufung von Überschwängern in vier lokalen Maxima des Histogramms zwischen 105% und 110% zu beobachten ist. Die Häufigkeit dieser vier Dynamikwechsel ergibt sich aus dem Einrastpunkt des Phasenregelkreises, der wiederum durch die Anfangsbedingungen definiert wird. Hier wird klar, dass die Vorhersage von Überschwängern anhand des linearen Modells nicht zielführend ist, da die verschiedenen Anfangsbedingungen, die beispielsweise zu einem initial ausgerasteten System führen, im linearen Modell nicht berücksichtigt werden können. Die kumulative Verteilungsdichte der analysierten Überschwänger ist in Abb. 7.20(b) dargestellt. Diese Charakterisierung zeigt, dass die auftretenden Überschwänger bei Variation der Anfangsbedingungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% unterhalb von 109% der Zielspannung liegen. Diese Art der effizienten Charakterisierung anhand des ereignisgesteuerten Modells bietet dem Entwickler die Möglichkeit, den Entwurf der gemischt digital analogen Schaltung für eine Vielzahl von Anfangsbedingungen zu testen und gegebenenfalls die Auslegung der Regelschleife zu optimieren.

### 7.5.2. Überschwänger in Abhängigkeit vom Schleifenfilterwiderstand

Neben den Anfangsbedingungen weisen unter anderem auch die Schleifenparameter einen Einfluss auf den maximalen Überschwänger auf. Wird beispielsweise eine Variation des Widerstandes  $R_1$  des Schleifenfilters betrachtet, zeigt sich ebenfalls eine Abhängigkeit der maximalen Steuerspannung von der Parametervariation. Wird exemplarisch der Phasenregelkreis dritter Ordnung betrachtet, lassen sich die Überschwänger der Steuerspannung analysieren, da für diesen keine Sprünge in der Steuerspannung auftreten. Wird der Widerstand  $R_1$  des Schleifenfilters einer PLL dritter Ordnung mit 10.000 Schritten im Bereich von 10% bis 1000% des ursprünglichen Entwurfs variiert, ergibt sich die relative Häufigkeit der Überschwänger von  $u_{ctl}$  in Abb. 7.21(a). Für die variierenden Widerstandswerte ergeben sich Bereiche, in denen keine Überschwänger auftreten und Bereiche, in denen nur sehr wenige vorkommen. Die in dieser Untersuchung identifizierten Überschwänger konzentrieren sich auf vier Bereiche, wobei die häufigsten Überschwänger nahe  $1,2 u_t$  auftreten (typischer Überschwänger). Der maximale Überschwänger der Steuerspannung ist jedoch über 32% größer als die Zielspannung. Exemplarisch sind die Steuerspannungen für den maximalen und den typischen Überschwänger in Abb. 7.21(b) zu sehen. Zwischen diesem typischen und diesem maximalen Überschwänger sind kaum weitere Überschwänger des Systems möglich. Diese Charakterisierung verdeutlicht, dass die Vorhersage der Überschwänger eine große Herausforderung darstellt und hocheffiziente Simulationen notwendig sind, um den Phasenregelkreis zu charakterisieren. Speziell für eine nachfolgende Schaltung ist die Kenntnis der maximalen



(a) Relative Häufigkeit der Höhe der Überschwinger



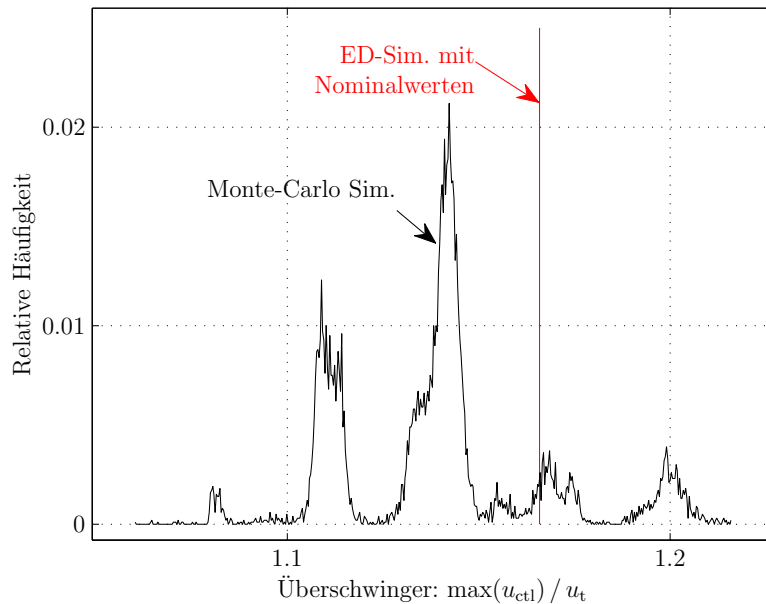
(b) Steuerspannung für den maximalen und den typischen Überschwinger

**Abb. 7.21.:** Darstellung der Häufigkeit und der Höhe der Überschwinger des ereignisgesteuerten Modells für einen variierenden Schleifenfilterwiderstand  $\tilde{R}_1 = 0,1R_1 \dots 10R_1$  des Phasenregelkreises dritter Ordnung

Überschwinger von Bedeutung. Da die Überschwinger der Steuerspannung mit einer Überhöhung der VCO-Frequenz korrespondieren und diese zu hohen Frequenzen eine nachfolgende Schaltung wie zum Beispiel einen Speicherchip überlasten können, ist es sinnvoll, den maximalen und den typischen Überschwinger des Phasenregelkreises in Abhängigkeit von den Schleifenparametern zu bestimmen.

### 7.5.3. PVT-Charakterisierung

Die physikalische Umsetzung des Phasenregelkreises unterliegt Prozessschwankungen und Spannungs- und Temperaturvariationen (engl. *Process, Voltage and Temperature*, kurz: PVT) während des Betriebs. Mit Hilfe der sogenannten PVT-Charakterisierungen lässt sich das Verhalten der Schaltung in verschiedenen Betriebszuständen analysieren. Das ereignisgesteuerte Modell ist in der Lage, die Variationen aller berücksichtigten Bauteilgrößen und nicht-idealer Effekte zu simulieren. Typische Abweichungen diskreter Bauelemente liegen im Bereich von wenigen Prozent des Nennwertes, wobei eine Kombination aus verschiedenen Schwankungen einen großen Einfluss auf die hochgradig nichtlineare und schaltende Phasenregelschleife aufweisen kann. Zur Analyse dieses Verhaltens lassen sich Monte-Carlo Simulationen durchführen. Diese Zufallsexperimente erlauben einen Rückschluss auf



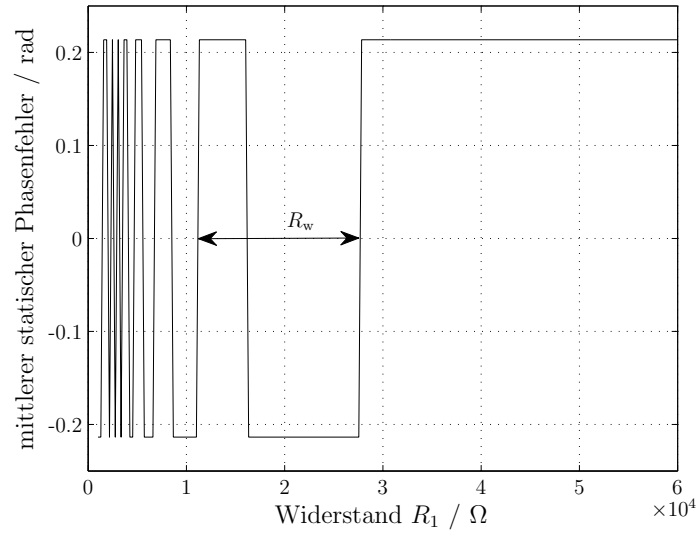
**Abb. 7.22.:** Relative Häufigkeit der Höhe der Überschwinger des ereignisgesteuerten Modells der PLL dritter Ordnung für eine Monte-Carlo-Simulation der Parameter  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $I_p$  und  $K_v$  mit einer Standardabweichung von 10% des Nominalwerts

das Systemverhalten und ermöglichen somit eine Beurteilung der Güte des Systementwurfs. Bei der hier durchgeführten Charakterisierung werden die Prozess- und Temperaturvariationen der Schleifenfilterparameter  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , die Spannungsabhängigkeit des Ladungspumpenstroms  $I_p$  und die Steigung des spannungsgesteuerten Oszillators  $K_v$  berücksichtigt. Generell ist das ereignisgesteuerte Modell dazu geeignet, diese Untersuchung mit einer beliebigen Verteilung und unterschiedlichen Varianzen durchzuführen. Exemplarisch seien die Schwankungen dieser Parameter jedoch mit einem normalverteilten Zufallsprozess und mit einer Standardabweichung

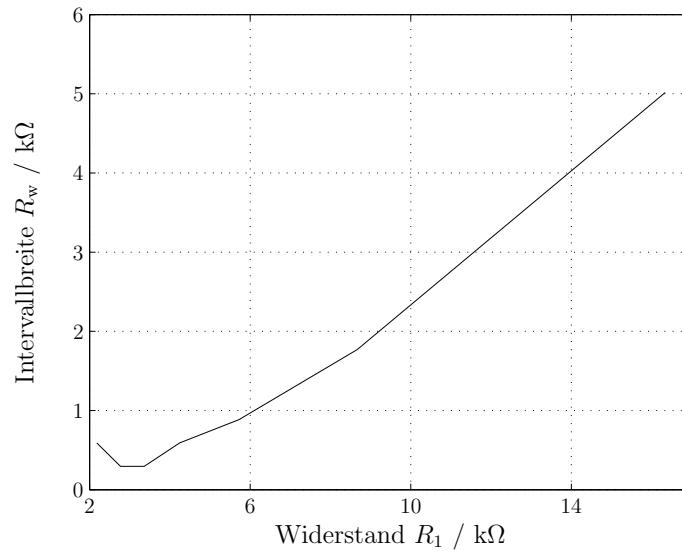
von 10% um den Nennwert der Bauteile angenommen. Werden 10.000 Simulationen bei gleichzeitiger Berücksichtigung aller normalverteilten und unabhängigen Streuungen der Parameter durchgeführt, ergibt sich die relative Häufigkeit der Überschwinger dieser Monte-Carlo Simulation in Abb. 7.22. In dieser Abbildung ist zusätzlich der Überschwinger einer einzelnen Simulation ohne Parameterstreuungen des ereignisgesteuerten Modells, die zum ursprünglichen nominalen Entwurf korrespondiert, dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Überschwinger in fünf Bereichen konzentriert auftreten, wobei die größte relative Häufigkeit unterhalb des Überschwingers des ursprünglichen Entwurfs auftritt. Zwischen diesen fünf Bereichen treten verhältnismäßig wenige Überschwinger auf. Ein Teil der durchgeführten Monte-Carlo-Simulationen weist sogar, ähnlich wie bei der Untersuchung der Überschwinger bezüglich des Widerstandes  $R_1$ , Bereiche auf, in denen keine Überschwinger auftreten. Anhand der gezeigten Ergebnisse für endlich große Stichproben lässt sich der Phasenregelkreis charakterisieren und der Systementwurf hinsichtlich der Güte und Zuverlässigkeit bezüglich des Überschwingers untersuchen.

#### 7.5.4. Attraktivität zweier möglicher Ruhelagen

Da der Phasenregelkreis unter anderem für die Frequenzsynthese verwendet wird, ist die bleibende Regelabweichung ein wichtiges Merkmal für die Güte der Regelschleife. Wie in Kapitel 7.2 gezeigt, wird der statische Phasenfehler durch die nicht-idealen Effekte der PLL beeinflusst. Gilt  $I_g \tau_{\text{set}} > |I_L| T$ , ergeben sich zwei mögliche mittlere statische Phasenfehler und dementsprechend zwei Attraktoren des dynamischen Systems. Zur Charakterisierung der Attraktivität dieser Ruhelagen lassen sich mittels des ereignisgesteuerten Modells eine Vielzahl von Simulationen durchführen. Es lässt sich zeigen, dass bei Variation der Anfangsbedingungen im Bereich von  $\varphi_e = -2\pi \dots 2\pi$  und  $f_e = -f_t \dots f_t$  beide Ruhelagen vergleichbar attraktiv sind. Wird jedoch eine konstante Anfangsbedingung angenommen und ein Parameter des Phasenregelkreises verändert, ist die Attraktivität der beiden Ruhelagen verschieden. Exemplarisch sei ein initialer Phasenfehler von null und eine Dividiererefrequenz unterhalb der Referenzfrequenz angenommen. Die Dividiererefrequenz wird folglich erhöht und sowohl die Steuerspannung als auch der Phasenfehler weisen zunächst eine positive Steigung auf. Für diese Startbedingungen ergeben sich die mittleren statischen Phasenfehler der Regelung für eine Variation des Widerstandes  $R_1$  und somit des Dämpfungsbeiwertes gemäß Abb. 7.23(a). Es ist ersichtlich, dass der mittlere statische Phasenfehler zwischen den zwei Ruhelagen springt, wobei die Intervalle  $R_w$  mit steigendem Widerstand  $R_1$  breiter werden. Wird die Breite dieser Intervalle über den Widerstand aufgetragen, ergibt sich Abb. 7.23(b). Mit zunehmendem Widerstand  $R_1$  und somit steigendem Dämpfungsbeiwert ist der positive mittlere statische Phasenfehler attraktiver, da die Steigung der Steuerspannung und des Phasenfehlers zunächst positiv ist und die Regelung des stark gedämpften Phasenregelkreises nicht in der Lage ist, die negative Steigung der PFD & CP Kennlinie nahe  $\varphi_e = 0$  zu überwinden (siehe Abb. 5.22(b)). Ist die initiale Dividiererefrequenz



(a) Mittlerer statischer Phasenfehler in Abhängigkeit von  $R_1$



(b) Breite der Intervalle des Abhängigkeit des mittleren statischen Phasenfehlers von  $R_1$

**Abb. 7.23.:** Attraktivität der Ruhelagen des Phasenregelkreises mit zwei möglichen mittleren statischen Phasenfehlern für eine Variation des Widerstandes  $R_1$

größer als die Referenzfrequenz, ist der negative mittlere statische Phasenfehler für große Dämpfungsbeiwerte der Schleife attraktiver.

Eine vergleichbare Untersuchung lässt sich für den Strom der Ladungspumpe durchführen. Der mittlere statische Phasenfehler springt ebenfalls zwischen den verschiedenen Ruhelagen. Da sich der mittlere statische Phasenfehler mit der Stromstärke der Ladungspumpe ändert, variieren auch die zwei möglichen stabilen



Ruhelagen. Mit zunehmendem Strom nimmt jedoch die Schwingungstendenz der Regelung ab und der positive mittlere statische Phasenfehler ist analog zur vorangegangenen Charakterisierung attraktiver. Die Attraktivität des mittleren statischen Phasenfehlers lässt sich somit anhand der Anfangsbedingungen und der Tendenz der Regelung zu schwingen anhand von Simulationen abschätzen.

## 7.6. Robuster Systementwurf basierend auf den Charakterisierungen

Der Systementwurf von Regelkreisen basiert meist auf der Stabilität, der Durchtrittsfrequenz des offenen Regelkreises (korrespondiert mit der Anstiegszeit des Regelkreises) und dem Frequenzverhalten des linearen Modells. In Kapitel 4 konnten einige Methoden für die Beurteilung und den Entwurf des Phasenregelkreises bezüglich der Stabilität gezeigt werden. Die ereignisgesteuerte Betrachtung stellt dabei einen effizienten und robusten Ansatz für die Beurteilung der Konvergenzeigenschaften der schaltenden CP-PLL und somit dessen Entwurf dar.

Das vorangegangene Kapitel zeigt darüber hinaus, dass die chaotischen, nichtlinearen und nicht-idealen Eigenschaften einen wesentlichen Einfluss auf das Systemverhalten aufweisen. Da die bekannten Entwurfsmethoden oft auf einem idealen Phasenregelkreis beruhen und den Einfluss der nicht-idealen Effekte nicht berücksichtigen, ist es notwendig, den Systementwurf hinsichtlich dieser Effekte zu erweitern. In diesem Kapitel werden die Erkenntnisse über die Einflüsse der nicht-idealen Effekte auf das Systemverhalten beim Entwurf bezüglich der Durchtrittsfrequenz, der natürlichen Eigenfrequenz, des Phasenrauschens, des Dämpfungsbeiwertes und der Ausregelzeit berücksichtigt. Anhand eines Beispielentwurfs für eine Bluetooth-Anwendung wird deutlich, dass die Berücksichtigung der nicht-idealen Effekte essentiell für einen robusteren Systementwurf ist.

### 7.6.1. Entwurf anhand der Durchtrittsfrequenz und der Phasenreserve

Der Entwurf des Schleifenfilters aus Abb. 2.8 lässt sich mit Hilfe der Durchtrittsfrequenz und der Phasenreserve der Übertragungsfunktion des offenen Phasenregelkreises durchführen. Dieses Verfahren wird für den Phasenregelkreis bis zur vierten Ordnung in [108] vorgestellt. Das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $|G_0(j\omega_D)|^2$  wird gleich eins gesetzt und für eine gewünschte Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$  nach den Schleifenfilterparametern umgestellt. Die zweite Gleichung zur Bestimmung der Filterparameter resultiert aus der Phasenlage der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises bei  $\omega_D$  und dessen Reserve zu  $-180^\circ$ . Wird die gewünschte Phasenreserve  $\varphi_{PM}$  bei  $\omega_D$  vorgegeben, lässt sich der Schleifenfilter entsprechend auslegen. In [108] bleiben nicht-ideale Effekte jedoch

unberücksichtigt.

In Kapitel 7.3.4 konnte gezeigt werden, dass beispielsweise die Totzone die Durchtrittsfrequenz der Regelschleife beeinflusst. Wie in den vorangegangenen Kapiteln lässt sich der Ladungspumpenstrom mit einer nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion gewichten, um den Einfluss der Totzone zu berücksichtigen und zu approximieren. Ist die Amplitude des Phasenfehlers  $\hat{\varphi}_e$  am Eingang der Beschreibungsfunktion bekannt oder abschätzbar, ergeben sich die Entwurfskriterien für den Schleifenfilter erster Ordnung (Phasenregelkreis zweiter Ordnung)

$$H_{\text{LF1}}(s) = \frac{s R_1 C_1 + 1}{s C_1} \quad (7.33)$$

zu

$$\xi_1 = \frac{1}{\widetilde{\omega}_D} \tan(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) \quad (7.34a)$$

$$C_1 = K_{v,\omega} K_\varphi B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e) \sqrt{\frac{1 + \xi_1^2 \widetilde{\omega}_D^2}{N^2 \widetilde{\omega}_D^4}} \quad (7.34b)$$

$$R_1 = \frac{\xi_1}{C_1}, \quad (7.34c)$$

wobei die Übertragungsfunktion aus Gleichung (7.4) verwendet wird.  $\widetilde{\omega}_D$  und  $\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}$  bezeichnen die vorgegebenen Größen an die Durchtrittskreisfrequenz und die Phasenreserve. Bei diesem Entwurf des Schleifenfilters zeigt sich, dass die Zeitkonstante des Filters  $\xi_1 = R_1 C_1$  lediglich durch die gewünschte Durchtrittsfrequenz und die korrespondierende Phasenreserve definiert wird und unabhängig von der Totzone ist. Die Kapazität  $C_1$  und der Widerstand  $R_1$  hängen jedoch von der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion ab. Die Abhängigkeit der Bauteilparameter von der Amplitude des Phasenfehlers stellt an dieser Stelle keine Einschränkung dar, da in realen Systemen immer Phasenrauschen auftritt und sich somit die Amplitude  $\hat{\varphi}_e$  bestimmen lässt.

Für den Schleifenfilter zweiter Ordnung (korrespondiert zu einer PLL dritter Ordnung)

$$H_{\text{LF2}}(s) = \frac{s R_1 C_1 + 1}{s^2 R_1 C_1 C_2 + s(C_1 + C_2)} \quad (7.35)$$

resultieren die folgenden Entwurfskriterien unter Berücksichtigung der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion:

$$\xi_2 = \frac{K_{v,\omega} K_\varphi B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)}{N\widetilde{\omega}_D^2} \left( \tan(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) + \frac{1}{\cos(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}})} \right) \quad (7.36a)$$

$$\xi_3 = \frac{\tan(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) \cos(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) + 1}{\cos(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) \widetilde{\omega}_D} \quad (7.36b)$$

$$\xi_4 = \frac{\cos(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}})}{\widetilde{\omega}_D (\tan(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) \cos(\widetilde{\varphi}_{\text{PM}}) + 1)} \quad (7.36c)$$

und schließlich

$$C_2 = \frac{\xi_4}{\xi_3} \xi_2 \quad (7.37a)$$

$$C_1 = \xi_2 - C_2 \quad (7.37b)$$

$$R_1 = \frac{\xi_3}{C_1}. \quad (7.37c)$$

Da dieser Entwurf auf der Approximation des nicht-idealen Verhaltens mittels der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion basiert, lassen sich mit dieser Methode weitere nicht-ideale Effekte wie beispielsweise der Leckstrom und die endlichen Steigungen der Stromflanken für den Entwurf berücksichtigen.

### 7.6.2. Entwurf anhand der natürlichen Eigenfrequenz

Analog zum Entwurf basierend auf der Durchtrittsfrequenz lässt sich die natürliche Eigenfrequenz des Systems für die Auslegung des Phasenregelkreises verwenden. Die empirische Stabilitätsbedingung

$$\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n} > \alpha \quad (7.38)$$

aus Kapitel 4.3, die ein Abtastverhältnis darstellt, wird in der Praxis oft für den Entwurf des Systems herangezogen. Ein typischer Wert für den konstanten Wert  $\alpha$  ist zehn. Da die natürlich Eigenkreisfrequenz durch den nicht-idealen Effekt der Totzone beeinflusst wird, ergibt sich die angereicherte Bedingung unter Berücksichtigung

der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion zu

$$\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)} > \alpha. \quad (7.39)$$

Für den Phasenregelkreis zweiter Ordnung ergibt sich daraus eine Bedingung an die Schleifenfilterkapazität:

$$C_1 > \frac{\alpha^2 K_{v,\omega} K_\varphi B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)}{\omega_{\text{ref}}^2 N}. \quad (7.40)$$

Der Widerstand  $R_1$  lässt sich anhand des vorgegebenen Dämpfungsbeiwertes  $\tilde{\zeta}$  durch

$$R_1 = \frac{2\tilde{\zeta}}{C_1 \omega_n(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)} \quad (7.41)$$

definieren, wobei  $\omega_n(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)$  durch Gleichung (4.20) und der Gewichtung von  $K_\varphi$  mit  $B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)$  gegeben ist.

Für den Phasenregelkreis dritter Ordnung konnte mit Hilfe des ereignisgesteuerten Modells eine robustere Stabilitätsbedingung basierend auf dem Abtastverhältnis hergeleitet werden (siehe Kapitel 4.4.2). Unter Berücksichtigung der Totzone lässt sich entsprechend

$$\frac{\omega_{\text{ref}}}{\omega_n(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)} > \pi\sqrt{b} \quad (7.42)$$

herleiten. Mit der Approximation aus Gleichung (4.22) und der statischen nichtlinearen Beschreibungsfunktion ergibt sich das Kriterium

$$C_2 > \frac{\pi^2 K_{v,\omega} K_\varphi B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)}{\omega_{\text{ref}}^2 N}. \quad (7.43)$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Filterkapazitäten ist durch  $b = 1 + C_1/C_2$  gegeben und wird in der Praxis oft als elf definiert. Somit ist die weitere Kapazität durch

$$C_1 = (b - 1) C_2 \quad (7.44)$$

gegeben und der Widerstand ist durch Gleichung (7.41) bestimmt.

Auch bei diesem Entwurfsverfahren ist festzustellen, dass die Kapazitäten des Schleifenfilters proportional zur nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion sind, wobei der Widerstand einen antiproportionalen Zusammenhang mit der Beschreibungsfunktion aufweist.

### 7.6.3. Entwurf anhand des Phasenrauschens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes

In Kapitel 7.6.1 und 7.6.2 wird der Entwurf bezüglich der Durchtritts- und der natürlichen Eigenfrequenz vorgestellt. Da diese Methoden das Phasenrauschverhalten des Regelkreises nicht betrachten, werden oft Simulationen für die iterative Anpassung der Parameter verwendet, um das gewünschte Phasenrauschverhalten zu erzielen [109]. Trotz der hocheffizienten Simulationen des ereignisgesteuerten Modells ist es sinnvoll, analytische Kriterien für den effizienten Entwurf zu nutzen. In [109] wird ein entsprechender analytischer Entwurf unter Berücksichtigung der Ausregelzeit, des Dämpfungsbeiwertes und des Phasenrauschverhaltens vorgestellt, der hier kurz gezeigt wird. Dieses Verfahren lässt sich für den Entwurf des Phasenregelkreises zweiter und dritter Ordnung heranziehen, wobei für die PLL dritter Ordnung  $C_1 = 10 C_2$  angenommen und der Schleifenfilter zweiter Ordnung durch einen Filter erster Ordnung angenähert wird. Somit ergibt sich die Normalform der Übertragungsfunktion aus Gleichung (3.9):

$$T(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (7.45)$$

Damit lassen sich die Größen der Ausregelzeit, des Dämpfungsbeiwertes und die natürliche Eigenkreisfrequenz ableiten (siehe Kapitel 3.1). Für die Ausregelzeit wird meist ein Schlauch von 2% um die Zielspannung definiert (vgl. Gleichung (3.17)), sodass sich die Anforderung

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq \tilde{t}_s \quad (7.46)$$

an die Ausregelzeit des eingerasteten Systems bzw. linearen Modells ergibt, wobei  $\tilde{t}_s$  die gewünschte Größe der Ausregelzeit darstellt. Der Bereich des Dämpfungsbeiwertes der Regelschleife ergibt sich aus einem Kompromiss zwischen einem adäquaten Rauschverhalten, einem geringen Überschwinger und der Ausregelzeit zu  $0,45 \leq \zeta \leq 1,5$ . Aus diesen beiden Bedingungen lassen sich

$$R_1 \geq \frac{8 N}{I_p K_v \tilde{t}_s} \quad (7.47)$$

und

$$0,9 \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{I_p K_v}} \leq R_1 \sqrt{C_1} \leq 3 \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{I_p K_v}} \quad (7.48)$$

ableiten.

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises weist für die natürliche Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  eine Überhöhung des Betragsverlaufs auf. Aus diesem Grund

wird das Entwurfskriterium bezüglich des Phasenrauschens sowohl für die natürliche Eigenfrequenz  $f_n = \omega_n/(2\pi)$  als auch für einen zusätzlichen exemplarischen Frequenzpunkt  $f_M$  definiert. Dieser lässt sich beispielsweise mit  $f_M = 1$  MHz annehmen. Das Phasenrauschen des Dividierersignals wird schließlich für die zwei Frequenzen  $f_M$  und  $f_n$  durch die Grenzen

$$S_{\Phi}^{\text{div}}(f_n) \leq S_{f_n} \quad (7.49a)$$

$$S_{\Phi}^{\text{div}}(f_M) \leq S_{f_M} \quad (7.49b)$$

vorgegeben.  $S_{f_n}$  und  $S_{f_M}$  beschreiben die gewünschten Vorgaben an das Phasenrauschverhalten. Anhand von Gleichung (5.2) und (5.3) ergibt sich das Leistungsdichtespektrum des Dividiererphasenrauschens zu

$$\begin{aligned} S_{\Phi}^{\text{div}}(\Delta f) = & (S_{\Phi}^{n2}(\Delta f) + S_{\Phi}^{n3}) |T(j2\pi\Delta f)|^2 \\ & + S_{\Phi}^{n4}(\Delta f) \frac{1}{N^2} |1 - T(j2\pi\Delta f)|^2. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Hierbei sind die Phasenrauschgrößen für  $i = 2$  und  $i = 4$  durch

$$S_{\Phi}^{ni}(f) = \frac{a_i}{f^2} \quad (7.51)$$

gegeben, da dieser Verlauf maßgeblich aus dem Phasenrauschen resultiert. Aus dieser Beziehung und den Entwurfskriterien des Phasenrauschens ergeben sich die Bedingungen

$$R_1 \geq \pm \text{Re} \left\{ \sqrt{N} \frac{\sqrt{-(g - S_{f_n} I_p K_v)(g + 4\pi^2 a_4 N C_1)}}{\sqrt{C_1 I_p K_v (g - S_{f_n} I_p K_v)}} \right\} \quad (7.52a)$$

$$g = 4\pi^2 a_2 N C_1 + S_{\Phi}^{n3} I_p K_v \quad (7.52b)$$

und

$$R_1 \leq \pm \text{Re} \left\{ - \frac{\sqrt{-p [I_p^2 K_v^2 r + C_1^2 \omega_M^4 N^2 (S_{f_M} \omega_M^2 - 4\pi^2 a_4)]}}{p \omega_M I_p K_v C_1} \right\} \quad (7.53a)$$

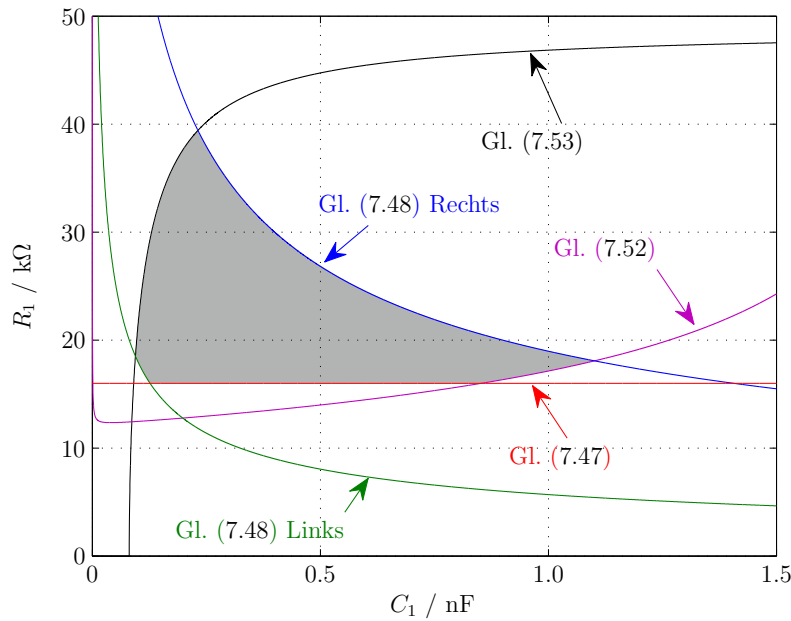
$$p = -4\pi^2 a_2 - S_{\Phi}^{n3} \omega_M^2 + S_{f_M} \omega_M^2 \quad (7.53b)$$

$$r = -4\pi^2 a_2 - S_{\Phi}^{n3} \omega_M^2 + S_{f_M} \omega_M^2 - 2S_{f_M} \omega_M^4 N C_1 \frac{1}{I_p K_v}, \quad (7.53c)$$

wobei  $\omega_M = 2\pi f_M$  gilt. Diese fünf Entwurfskriterien definieren einen Bereich des Widerstandes  $R_1$  in Abhängigkeit der Kapazität  $C_1$ , in dem die Vorgaben an das

Phasenrauschverhalten, die Ausregelzeit und den Dämpfungsbeiwert erfüllt werden. Hier wird der Realteiloperator verwendet, da der Widerstand  $R_1$  des Schleifenfilters als Wirkwiderstand und somit als rein reell angenommen wird.

Da diese Bedingungen stark von den gewählten Schleifenparametern abhängen, wird die Auswertung dieser Kriterien anhand eines Anwendungsbeispiels durchgeführt. Ein Phasenregelkreis zur Frequenzsynthese im Bluetooth-Anwendungsbereich weist die Frequenzen  $f_{\text{ref}} = 1 \text{ MHz}$  und  $f_{\text{vco}} = 2,4 \text{ GHz}$  auf. Wird darüber hinaus der Strom und die Steigung des VCO mit  $I_p = 30 \mu\text{A}$  und  $K_v = 2 \text{ GHz/V}$  vorgegeben, lässt sich mittels des vorgestellten Verfahrens der Schleifenfilter bestimmen. Exemplarisch sei an dieser Stelle das Phasenrauschen der PLL-Komponenten mit  $S_{\Phi}^{\text{ref}} = -120 \text{ dBc/Hz}$  bei  $\Delta f = 1 \text{ MHz}$ ,  $S_{\Phi}^{\text{div}} = -112 \text{ dBc/Hz}$  bei  $\Delta f = 1 \text{ MHz}$  und  $S_{\Phi}^{\text{pdf}} = -110 \text{ dBc/Hz}$  angenommen. Die Entwurfsziele lassen sich mit  $S_{f_M} = -111 \text{ dBc/Hz}$  bei  $f_M = 0,9 \text{ MHz}$ ,  $S_{f_n} = -85 \text{ dBc/Hz}$  bei  $f_n$  und  $\tilde{t}_s = 20 \mu\text{s}$  vorgeben. Der resultierende zulässige Bereich der Schleifenfilterparameter ist in Abb. 7.24 dargestellt. Die grau hinterlegte Fläche beschreibt den Bereich der Parameter  $R_1$  und



**Abb. 7.24.:** Exemplarische Darstellung des Schleifenfilterentwurfs anhand des Phasenrauschverhaltens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes der PLL

$C_1$ , in dem die Vorgaben erfüllt werden. Für den Entwurf der Filterparameter lässt sich beispielsweise der geometrische Schwerpunkt bestimmen, um den Widerstand und die Kapazität entsprechend zu wählen. Ein robuster Systementwurf ergibt sich jedoch auch, indem die Parameter so gewählt werden, dass die Bauteiltoleranzen von  $R_1$  und  $C_1$  nicht zu einer Verletzung der Entwurfsrichtlinien führen. Werden die Parameter  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  und  $C_1 = 0,5 \text{ nF}$  gewählt, entspricht der Phasenregelkreis den

Anforderungen und etwaige Bauteiltoleranzen im Bereich von  $\pm 10\%$  verursachen kein Verlassen der grau hinterlegten Fläche. Das bedeutet, dass die Entwurfskriterien des Phasenregelkreises auch unter Berücksichtigung von Toleranzen erfüllt werden.

Da bei diesem Verfahren keine Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekte berücksichtigt werden, diese jedoch speziell die natürliche Eigenkreisfrequenz und die Durchtrittsfrequenz des Systems beeinflussen, ist es sinnvoll, diese Einflüsse mit in den Entwurf einfließen zu lassen. Diese Erweiterung wird im Folgenden eingeführt. Wird die vorgestellte Entwurfsmethode mit den Definitionen der Durchtrittsfrequenz und der natürlichen Eigenkreisfrequenz aus Kapitel 7.3, die durch die statische nichtlineare Beschreibungsfunktion angereichert wurden, erweitert, ergeben sich die Entwurfsbedingungen in Abhängigkeit der nichtlinearen statischen Beschreibungsfunktion. Für die Ausregelzeit resultiert

$$R_1 \geq \frac{8N}{B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_{e,2\pi})I_p K_v \tilde{t}_s}. \quad (7.54)$$

Da die Ausregelzeit des Phasenregelkreises von den Anfangsbedingungen  $\varphi_{e,0}$  und  $f_{e,0}$  abhängt, ist für den Entwurf der ungünstigste Fall der Anfangsbedingungen zu betrachten. Die vorgestellte analytische Ausregelzeit bezieht sich auf das lineare Modell, wodurch sich die ungünstigsten Anfangsbedingungen zu  $\varphi_{e,0} = 0$  und  $f_{e,0} = \Delta\omega_{\text{PO}}/(2\pi)$  ergeben. Diese Konditionen beschreiben genau die Ausrastgrenze des Phasenregelkreises und somit die Gültigkeitsgrenze des linearen Modells der PLL. Aus diesem Grund ergibt sich die Amplitude des Phasenfehlers  $\hat{\varphi}_{e,2\pi} = 2\pi$  am Eingang der statischen nichtlinearen Beschreibungsfunktion. Für kleine Totzonen, verglichen mit der Periodendauer des Referenzsignals, ist die Beschreibungsfunktion näherungsweise eins, womit kleine Totzonen die Ausregelzeit nur minimal beeinflussen.

Der Dämpfungsbeiwert der Regelschleife ist unabhängig von den Anfangsbedingungen und es resultiert

$$0,9 \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v}} \leq R_1 \sqrt{C_1} \leq 3 \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v}}. \quad (7.55)$$

Speziell die Phasenrauschbetrachtung bezieht sich auf einen Arbeitspunkt sehr nahe der Ruhelage, sodass sich die Bedingungen

$$R_1 \geq \pm \text{Re} \left\{ \sqrt{N} \frac{\sqrt{-(g - S_{f_n} B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v)(g + 4\pi^2 a_4 N C_1)}}{\sqrt{C_1 B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v}(g - S_{f_n} B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v)} \right\} \quad (7.56a)$$

$$g = 4\pi^2 a_2 N C_1 + S_{\Phi}^3 B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p K_v \quad (7.56b)$$



und

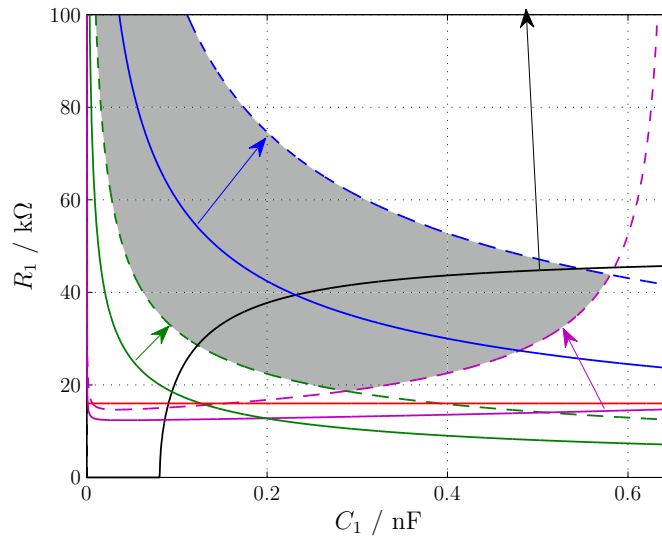
$$R_1 \leq \pm \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\sqrt{-p[(B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e)I_p)^2 K_v^2 r + C_1^2 \omega_M^4 N^2 (S_{fM} \omega_M^2 - 4\pi^2 a_4)]}}{p \omega_M B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e) I_p K_v C_1} \right\} \quad (7.57a)$$

$$p = -4\pi^2 a_2 - S_{\Phi}^3 \omega_M^2 + S_{fM} \omega_M^2 \quad (7.57b)$$

$$r = -4\pi^2 a_2 - S_{\Phi}^3 \omega_M^2 + S_{fM} \omega_M^2 - 2S_{fM} \omega_M^4 N C_1 \frac{1}{B(\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e) I_p K_v} \quad (7.57c)$$

ergeben, die unabhängig von den Anfangsbedingungen sind.

Werden diese Kriterien für den vorausgesetzten Phasenregelkreis mit einer Totzone, dessen Breite 0,4% der Referenzperiode beträgt, ausgewertet, ergibt sich ein Verhältnis der Breite der Totzone zur Amplitude des Phasenfehlers an der statischen nichtlinearen Beschreibungsfunktion von  $\varphi_{\text{set}}/\hat{\varphi}_e = 0,028$ . In Abb. 7.25 ist zu sehen, dass sich die Entwurfskriterien bedingt durch die Totzone verschieben.

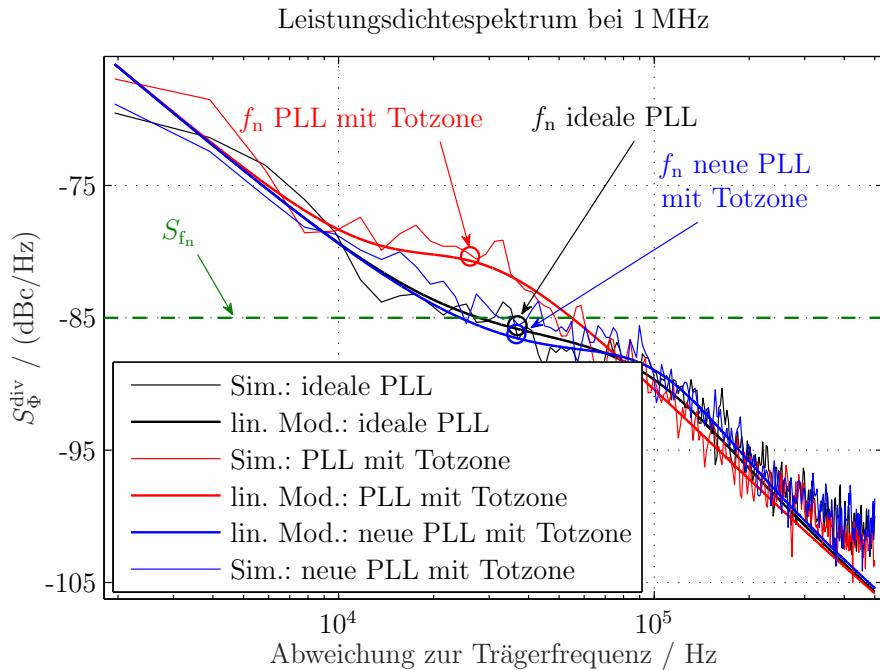


**Abb. 7.25.:** Exemplarische Darstellung des Schleifenfilterentwurfs anhand des Phasenrauschverhaltens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes der PLL mit und ohne Totzone – Blau: Gl. (7.48) rechts // Grün: Gl. (7.48) links // Lila: Gl. (7.52) // Rot: Gl. (7.47) // Schwarz: Gl. (7.53) – Gestrichelt: mit Totzone // Durchgezogen: ohne Totzone

Wird das Phasenrauschverhalten des Phasenregelkreises mit den Schleifenfilterparametern  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  und  $C_1 = 0,5 \text{ nF}$  betrachtet, wird deutlich, dass der ideale Phasenregelkreis die Entwurfskriterien erfüllt (siehe schwarze Kurven in Abb. 7.26). Unter Berücksichtigung der Totzone verschiebt sich jedoch die natürliche Eigenfre-

## 7. CHARAKTERISIERUNG UND ANALYSE DER CP-PLL INKL. NICHT-IDEALER EFFEKTE

quenz des Regelkreises und die Vorgabe von  $-85\text{ dBc/Hz}$  bei  $f_n$  wird nicht erfüllt (siehe rote Kurven in Abb. 7.26). Werden die hergeleiteten Entwurfskriterien unter Berücksichtigung der Totzone verwendet, ergeben sich die Schleifenfilterparameter beispielsweise zu  $R_1 = 60\text{ k}\Omega$  und  $C_1 = 0,2\text{ nF}$ . Der Phasenregelkreis mit diesen Parametern liegt innerhalb des gewünschten Phasenrauschverhaltens, wie in Abb. 7.26 zu erkennen ist (blaue Kurven in Abb. 7.26). In diesem Entwurfsbeispiel liegt die



**Abb. 7.26.:** Vergleich des Phasenrauschverhaltens der idealen PLL, der PLL mit Totzone und der neu entworfenen PLL unter Berücksichtigung der Totzone

gewählte Auslegung der Regelschleife auch für Parametertoleranzen von  $\pm 10\%$  innerhalb der Entwurfsrichtlinien.

Die Ausregelzeit beider Entwürfe ändert sich nur marginal, da die Totzone lediglich nahe der Ruhelage einen wesentlichen Einfluss auf das dynamische Verhalten aufweist und in diesem Beispiel der Bereich der Totzone deutlich geringer als der 2%-Schlauch um die Zielspannung ist.

Dieser Ansatz eignet sich nicht nur für einen robusteren Systementwurf, sondern ebenfalls für die Bewertung des Entwurfs unter Berücksichtigung von Bauteilabweichungen, wie in Kapitel 7.5 beschrieben. Sind die Bauteiltoleranzen beispielsweise im Bereich von 10% um den Nominalwert  $R_1 = 60\text{ k}\Omega$  und  $C_1 = 0,2\text{ nF}$ , lässt sich aus Abb. 7.25 schließen, dass die Bauteiltoleranzen keinen signifikanten Einfluss auf die Güte des Entwurfs aufweisen.

---

# Zusammenfassung und Ausblick

---

## Zusammenfassung

Aufgrund der Herausforderungen beim Entwurf von gemischt digital analogen Schaltungen beschäftigt sich diese Arbeit mit effizienten Modellierungs-, Simulations- und Charakterisierungsansätzen, die als Ziel eine schnelle und vollständige Beschreibung dieser Mixed-Signal Systeme haben. Der Fokus dieser Dissertation liegt dabei auf dem gemischt digital analogen Phasenregelkreis mit Ladungspumpe (engl. *Charge-Pump PLL*, kurz: CP-PLL) zur Frequenzsynthese, wobei die Ergebnisse auch für weitere Anwendungsgebiete der PLL, zum Beispiel die Takt- und Datenrückgewinnung, und andere Mixed-Signal Systeme verwendet werden können.

Zunächst werden der generelle Aufbau und das Prinzip allgemeiner Phasenregelkreise (PLL) vorgestellt, um im weiteren Verlauf die einzelnen Komponenten und die Funktionsweise der Integer-N PLL für die ganzzahlige Vervielfachung der Referenzfrequenz und der Fractional-N PLL für rationale Vielfache der Referenzfrequenz, zu beleuchten. Besonderes Augenmerk wird zunächst auf die ideale Regelschleife gelegt. Es wird gezeigt, dass der Phasenregelkreis trotz der Annahme idealer Komponenten hochgradig nichtlineare Eigenschaften aufweist und die schaltenden Effekte der digitalen Bauteile das Regelverhalten beeinflussen.

Neben der Frequenzsynthese wird der Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung vorgestellt, der sich von der Frequenzsynthese lediglich durch den Phasendetektor unterscheidet. Die Ergebnisse lassen sich auch auf weitere Mixed-Signal Systeme übertragen, sodass der Fokus dieser Arbeit keine wesentliche Einschränkung darstellt.

Da der gemischt digital analoge (engl. *Mixed-Signal*, kurz: MS) Phasenregelkreis

ein hochgradig nichtlineares, schaltendes und teils chaotisches Verhalten aufweist, ist eine umfassende Charakterisierung und Beschreibung der PLL notwendig. Diese ist jedoch durch eine einzige Simulation nur schwer möglich. Für die effiziente Beschreibung der MS PLL werden daher im Anschluss verschiedene Modellierungen hinsichtlich ihrer Genauigkeit und ihrer Effizienz analysiert. Im ersten Schritt wird das oft verwendete lineare Modell der CP-PLL vorgestellt. Mit Hilfe dieses Modells werden typische dynamische Kenngrößen der idealen PLL definiert.

Da das lineare Modell auf einer a priori Linearisierung beruht, weist dieser Ansatz einen kleinen Geltungsbereich nahe der Ruhelage auf. Somit lässt sich das schaltende und nichtlineare Verhalten der PLL nicht ohne Weiteres abbilden. Daher werden im Anschluss verschiedene Methoden der Verhaltensbeschreibung diskutiert. Hier werden exemplarisch Simulink, Verilog-AMS und SystemC-AMS betrachtet, die sich durch ein Abtastzeit-basiertes Lösungsverfahren auszeichnen. Es wird gezeigt, dass dieses Verfahren zu langen Simulationszeiten führen kann und somit eine effiziente Charakterisierung von MS Systemen nur bedingt möglich ist.

Das völlig ereignisgesteuerte (engl. *Event-Driven*, kurz: ED) Modell nach Hedayat wird im Anschluss genauer betrachtet, da diese Methode die Problematik der Abtastzeit-basierten Lösungsverfahren nicht aufweist. Das ED Modell beruht dabei auf den Flanken des Referenz- beziehungsweise Rückkopplungssignals und wertet den Phasenregelkreis lediglich zu diesen Zeitpunkten/Ereignissen aus. Die damit einhergehende Reduzierung der Berechnungsschritte resultiert in einer deutlichen Beschleunigung der Simulation und somit in einer hocheffizienten Modellierung des MS Phasenregelkreises. Zudem bildet diese Beschreibungsform das dynamische Verhalten der PLL exakt ab und verwendet keine Approximationen.

Der Vergleich der verschiedenen Modellierungen zeigt, dass die Ergebnisse des ereignisgesteuerten Modells und die der Verhaltensbeschreibung äquivalent sind. Die Differenz beider Ergebnisse beträgt für das gezeigte Beispiel der Integer-N PLL lediglich  $\pm 0,04\%$  der Zielspannung, wobei die Berechnung des ED Modells über 100-mal schneller als die der Verhaltensbeschreibung ist. Für eine exemplarische Fractional-N PLL beträgt die Simulationsbeschleunigung des ED Modells bereits über 200.

Da das lineare Modell analytischer Natur ist, ist die Berechnung des dynamischen Verhaltens zwar deutlich schneller, jedoch wird lediglich das mittlere Verhalten des bereits eingerasteten Regelkreises repräsentiert und sowohl das schaltende und nichtlineare Verhalten als auch die ausgerastete PLL bleiben unberücksichtigt.

Für die Stabilitätsbetrachtung wird in der Praxis meist das lineare Modell verwendet. Diese Betrachtung wird anhand des zeitkontinuierlichen Modells genauer beschrieben. Dabei werden sowohl die Durchtrittsfrequenz und die Phasenreserve als auch die Analyse von Hurwitz diskutiert. Es wird jedoch gezeigt, dass das lineare Modell für eine CP-PLL mit passivem Schleifenfilter und positiver Schleifenverstärkung bis zur dritten Ordnung immer stabiles Verhalten vorhersagt und sich das zeitkontinuierliche Modell daher nur bedingt für die Stabilitätsuntersuchung eignet.

---

Bei der Betrachtung des zeitdiskreten linearen Modells wird ersichtlich, dass das schaltende Verhalten der PLL deren Stabilität beeinträchtigt. Es ergeben sich Stabilitätsbedingungen für den Phasenregelkreis zweiter und dritter Ordnung, die sich auf eine Regelschleife sehr nahe der Ruhelage beziehen.

Da speziell die Bedingung für den Phasenregelkreis dritter Ordnung eine komplexe Ungleichung darstellt, wird in der Praxis meist eine empirische Stabilitätsgrenze verwendet. Diese Bedingung basiert auf dem zeitkontinuierlichen linearen Modell und dem Verhältnis der Referenzfrequenz und der Eigenfrequenz des Phasenregelkreises und lässt sich für die PLL zweiter und dritter Ordnung gleichermaßen effizient auswerten.

Für die Konvergenzbetrachtung entfernt der Ruhelage wird das ED Modell in ein autonomes Differenzengleichungssystem überführt und im Anschluss mit der indirekten Lyapunov-Methode die Stabilität der Ruhelage des Phasenregelkreises dritter Ordnung analysiert. Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit, die Konvergenzeigenschaften für verschiedene Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage zu beleuchten, da keine a priori Linearisierung verwendet wird. Die hergeleiteten Bedingungen stellen eine konservativere Stabilitätsabschätzung dar und sind trotz der späteren Linearisierung weniger komplex als die Grenze des zeitdiskreten linearen Modells. Darüber hinaus erweitert dieses Kriterium des ED Modells die empirische Grenze um die Berücksichtigung der Kapazitätsverhältnisse des Schleifenfilters.

Beim Vergleich der Stabilitätsbedingungen wird deutlich, dass die Stabilitätsbedingung des zeitdiskreten linearen Modells für Anfangsbedingungen sehr nahe der Ruhelage zutreffend ist, obgleich die Auswertung der Grenze für die PLL dritter Ordnung aufwändig ist. Für Anfangsbedingungen entfernt der Ruhelage und außerhalb deren Einzugsgebietes sind die Stabilitätskriterien sowohl des zeitdiskreten Modells als auch der empirischen Betrachtung nicht konservativ genug und sagen eine Konvergenz in die Ruhelage voraus, obwohl der Phasenregelkreis einen Grenzyklus entfernt der Ruhelage aufweist. Die hergeleitete und auf dem ED Modell basierende Stabilitätsbedingung berücksichtigt Initialwerte des Phasenregelkreises entfernt des Fixpunktes und ermöglicht eine robustere Abschätzung der Konvergenz in die Ruhelage. Diese Betrachtung zeigt deutlich, dass das Einzugsgebiet der Ruhelage des hochgradig nichtlinearen und schaltenden Phasenregelkreises gerade für die Frequenzsynthese berücksichtigt werden sollte und eine ausführliche Charakterisierung der MS PLL von großer Bedeutung ist. Das eingeführte ED Modell und die hergeleiteten Stabilitätsbedingungen ermöglichen diese Analyse.

Zusätzlich zum nichtlinearen, schaltenden und teils chaotischen Verhalten des idealen Phasenregelkreises weist die PLL in der Realität nicht-ideale und weitere nichtlineare Effekte auf. Zunächst werden die Transistor-Level-basierten nicht-idealen und nichtlinearen Effekte erläutert. Die erste Charakterisierung dieser Effekte wird an dieser Stelle mittels Transistor-Level (TL) Simulationen durchgeführt. Im Anschluss wird der endliche Zustandsautomat des Phasen- und Frequenzdetektors im ED Modell in der Art modifiziert, dass nicht-ideale Effekte separat und in Kombination

modular und intuitiv berücksichtigt werden können.

Des Weiteren wird das Phasenrauschen innerhalb der PLL zunächst mittels des zeitkontinuierlichen linearen Modells beschrieben, da dieses eine schnelle Abschätzung des Rauschverhaltens ermöglicht. Da sich in diesem Modell die nicht-idealen und nichtlinearen Effekte nicht ohne Weiteres berücksichtigen lassen, wird das erweiterte ED Modell mit der Modellierung des Phasenrauschens angereichert. Somit lässt sich der Einfluss der nicht-idealen Effekte auf das Phasenrauschverhalten charakterisieren.

Für die Validierung des erweiterten ED Modells werden dessen Simulationsergebnisse mit einer TL Simulation verglichen. Für eine exemplarische Integer-N PLL wird gezeigt, dass sich die mittlere quadratische Differenz beider Simulationsergebnisse im Bereich von 0,1% der Zielspannung bewegt. Bei einer Zielspannung von knapp 0,6 V wird die Differenz erst in einem Bereich von  $\pm 45 \mu\text{V}$  um die Zielspannung erkennbar. Trotz dieser hohen Genauigkeit des ED Modells ist dessen Simulationszeit deutlich geringer verglichen mit der TL Simulation. Während die TL Simulation knapp 5.000 Sekunden benötigt, ist die erweiterte ED Simulation nach 0,48 Sekunden abgeschlossen. Das entspricht einem Beschleunigungsfaktor von mehr als 10.000. Mittels des linearen Modells wird im Anschluss die ED Modellierung des Phasenrauschens validiert. Es wird gezeigt, dass die ED Modellierung die Phasenrauschbeschreibung des linearen Modells akkurat abbildet und somit mit der Theorie der Literatur übereinstimmt.

Zusätzlich wird die erweiterte ED Modellierung mit realen Messungen validiert. Hierzu wird die Evaluierungsschaltung von Analog Devices verwendet, die eine Integer-N PLL beinhaltet. Für den Vergleich mit dem ED Modell werden die Komponenten der Schaltung zunächst messtechnisch charakterisiert und anschließend das erweiterte ED Modell entsprechend konfiguriert. Der Vergleich der Messergebnisse mit den Simulationsergebnissen des ED Modells zeigt eine gute Übereinstimmung sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich. Die mittlere quadratische Differenz der Filterspannungen im Zeitbereich beträgt lediglich 1% der Ruhelage der Steuerspannung. Dabei werden die dynamischen Effekte durch das erweiterte ED Modell akkurat abgebildet. Im Frequenzbereich ist ebenfalls eine gute Entsprechung zu erkennen, wobei sowohl die Eigenschaften des Phasenrauschens als auch die der nicht-idealen Effekte zu erkennen sind.

Anschließend wird das hocheffiziente erweiterte ED Modell zur umfassenden Charakterisierung der nichtlinearen und nicht-idealen MS PLL verwendet.

Bei der Kombination einer Totzone und des Phasenrauschens wird deutlich, dass die Totzone das Phasenrauschverhalten deutlich beeinflusst. Eine Vielzahl effizienter Simulationen wird zur Charakterisierung dieses Zusammenhangs verwendet und die Ergebnisse für die Einführung einer analytischen Beschreibung herangezogen. Es wird gezeigt, dass die hier verwendete nichtlineare statische Beschreibungsfunktion der Totzone eine gute Abschätzung des Phasenrauschens unter Berücksichtigung einer Totzone erlaubt.

---

Des Weiteren wird erläutert, dass die nicht-idealen Effekte zu einer bleibenden Regelabweichung führen können. Da dieser statische Fehler das Regelungsergebnis beeinflusst, wird der im erweiterten ED Modell modulierte Strompuls für die Vorhersage des mittleren statischen Phasenfehlers zugrunde gelegt. Es wird gezeigt, dass sich bei der Kombination der nicht-idealen Effekte zwei unterschiedliche stabile Ruhelagen ergeben können, die sich mittels der analytischen Beschreibung des Strompulses bestimmen lassen.

Im Anschluss wird das ED Modell dazu verwendet, die Einflüsse der Totzone, des Leckstroms und der Stromüberschwinger auf das dynamische Verhalten zu analysieren. Hierbei liegt der Fokus auf den dynamischen Kenngrößen des Ausrastbereichs, der Durchtrittsfrequenz und der spektralen Reinheit. Es wird ersichtlich, dass die nicht-idealen Effekte das Regelverhalten beeinflussen und daher dessen Berücksichtigung für einen robusteren Systementwurf essentiell ist.

Zusätzlich zu diesen Effekten sind Variationen der Schleifenparameter zu betrachten, die sich durch Prozess- und Temperaturschwankungen ergeben. Hier wird das erweiterte ED Modell dazu verwendet, eine Vielzahl von Parametervariationen durchzuführen und deren Einfluss auf das Regelverhalten zu untersuchen. Neben sukzessiven Durchläufen wird eine Monte-Carlo-Simulation zur Charakterisierung der Überschwinger vorgestellt. Es wird deutlich, dass eine rigorose Charakterisierung der MS PLL unter Berücksichtigung verschiedener Anfangsbedingungen, Bauteiltoleranzen und Prozessvariationen unabdingbar für einen robusten Systementwurf ist. Basierend auf den Ergebnissen dieser Charakterisierungen und den daraus folgenden analytischen Beschreibungen mittels statischer nichtlinearer Beschreibungsfunktion wird anschließend ein robusterer und analytischer Systementwurf unter Berücksichtigung der Totzone eingeführt. Dabei wird der Entwurf sowohl mittels Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve als auch mit Hilfe der Erweiterung der empirischen Stabilitätsbedingung untersucht. Darüber hinaus wird ein weiterer analytischer Systementwurf unter Berücksichtigung der Totzone und den Entwurfskriterien der Ausregelzeit, des Dämpfungsbeiwertes der PLL und des Phasenrauschens hergeleitet. An einem Beispiel für Bluetooth-Spezifikationen wird deutlich, dass die Berücksichtigung der Totzone für den robusteren Systementwurf der PLL notwendig ist.

Diese Arbeit zeigt, dass die ereignisgesteuerte Modellierung zu einem besseren Verständnis des dynamischen Verhaltens von Mixed-Signal Systemen beiträgt und eine rigorose Charakterisierung deren komplexer Eigenschaften ermöglicht. Darüber hinaus zeigen die durchgeführten Analysen die wesentlichen Effekte auf, die die Leistungsfähigkeit von Phasenregelkreisen als ein exemplarisches Mixed-Signal System beeinflussen. Mit Hilfe dieses intuitiven und benutzerfreundlichen Ansatzes wird ein robusterer Systementwurf des Phasenregelkreises realisiert.

## Ausblick

In dieser Arbeit werden die Phasenrauschgrößen des Referenz- und spannungsgesteuerten Oszillators sowie des Phasen- und Frequenzdetektors (PFD) betrachtet. Weitere Arbeiten können das Rauschverhalten der Versorgungsspannung, der Schleifenfilterspannungen und des Frequenzteilers untersuchen. Das Phasenrauschen des Frequenzteilers lässt sich dabei analog zum Phasenrauschen des PFD als synchrone Rauschgröße verstehen und direkt mit im Phasensignal des Dividierers berücksichtigen. Das Amplitudenrauschen der Versorgungsspannung beeinflusst hingegen das Verhalten aller Komponenten der PLL. Speziell die Kennlinie des spannungsgesteuerten Oszillators (VCO) wird über das Rauschen des Versorgungssignals variiert und resultiert in einer weiteren Phasenrauschgröße im VCO-Signal. Die logischen Gatter der digitalen Bauteile weisen je nach Versorgungsspannung unterschiedliche Flankensteilheiten auf und beeinflussen somit die Regelschleife mit zusätzlichen Verzögerungszeiten. Mit Hilfe entsprechender Modellierungsansätze lassen sich die Wechselwirkungen dieser Rauschgrößen mit den nicht-idealen Effekten charakterisieren und in den Entwurf einbeziehen.

Des Weiteren ist es sinnvoll, weitere analytische Beschreibungen der Zusammenhänge zwischen nicht-idealen Effekten und Phasenrauschen abzuleiten. Beispielsweise lassen sich für die vorgestellten nicht-idealen Effekte zusätzliche statische nichtlineare Beschreibungsfunktionen angeben. Diese Ansätze lassen sich im Anschluss hinsichtlich ihrer Vorhersagegüte des Phasenrauschverhaltens und der dynamische Kenngrößen der PLL untersuchen und gegebenenfalls mit in den robusten Systementwurf integrieren. Zudem ist es denkbar, neue analytische Ansätze zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den nicht-idealen Effekten und dem Phasenrauschen herzuleiten.

Die analytische Stabilitätsanalyse in dieser Arbeit bezieht sich auf die ideale PLL dritter Ordnung. Neben der durchgeführten simulativen Untersuchung der Konvergenzeigenschaften unter Berücksichtigung der Totzone ist es sinnvoll, die analytische Betrachtung mit der Totzone der PLL zu erweitern. Hierzu müssten die Differenzengleichungen der PLL dritter Ordnung durch die Verzögerungszeit der Totzone angereichert und anschließend in ein autonomes Differenzengleichungssystem überführt werden. Dieses Gleichungssystem lässt sich mit der indirekten Lyapunov Methode hinsichtlich der Stabilität der Ruhelage der PLL auswerten. Ein weiterer Ansatz ist die Anwendung der allgemeinen Lyapunov Theorie zur generellen Beurteilung der Stabilität. Die Berücksichtigung weiterer nicht-idealer Effekte ist ebenfalls denkbar. Darüber hinaus lässt sich die Stabilität der Ruhelage des Phasenregelkreises für höhere Ordnungen und unter Berücksichtigung der nicht-idealen Effekte untersuchen. Analog zur vorherigen Betrachtung lassen sich diese Eigenschaften in die Differenzengleichungen überführen und die Konvergenz analysieren. Eine weitere Möglichkeit ist die Erweiterung der Ladungsapproximation zur Stabilitätscharakterisierung von Daniels [87] durch die Beschreibung der nicht-idealen Effekte.



---

Die eingeführten Entwurfsverfahren berücksichtigen zwar die Totzone und das Phasenrauschen der PLL, beschränken sich jedoch auf den Phasenregelkreis mit Ladungspumpe und passivem Schleifenfilter für die Frequenzsynthese. Weiterführende Betrachtungen des Entwurfs können daher einen aktiven Schleifenfilter berücksichtigen oder auf eine andere Architektur des Phasenregelkreises abzielen. Auf Grund des modularen ereignisgesteuerten Modells lässt sich dieses für die Beschreibung weiterer Anwendungen und der Charakterisierung der entsprechenden nicht-idealen Effekte verwenden. Anhand der Ergebnisse lässt sich, analog zum Vorgehen in dieser Arbeit, ein robusterer Systementwurf ableiten.

Das hier eingeführte erweiterte ereignisgesteuerte Modell ist zwar modular aufgebaut, ist jedoch nicht direkt auf beliebige gemischt digital analoge Systeme anwendbar. Hierfür ist es notwendig die Idee der ereignisgesteuerten Auswertung des dynamischen Verhaltens in eine generische Modellierungsarchitektur zu überführen. Dieses wäre in der Lage, beliebige gemischt digital analoge Systeme zu repräsentieren und eine effiziente Simulation und Charakterisierung zu gewährleisten. Hierzu bietet sich zudem eine Schnittstelle zwischen mehreren Simulationsplattformen an, um beispielsweise die nicht-idealen Effekte automatisiert auf Transistorebene zu charakterisieren und als makroskopische Parameter in das generische ereignisgesteuerte Modell überführen zu lassen. Dies würde dem Systementwickler ein noch leistungsfähigeres Werkzeug für den Entwurf zur Verfügung stellen.

Für die weitere Betrachtung des chaotischen Verhaltens des Phasenregelkreises unter Berücksichtigung der nichtlinearen und nicht-idealen Eigenschaften lässt sich das ereignisgesteuerte Modell verwenden, um die Bifurkationsrouten (vgl. auch [110–113]) in Abhängigkeit dieser Effekte aufzuzeigen und zu analysieren.



---

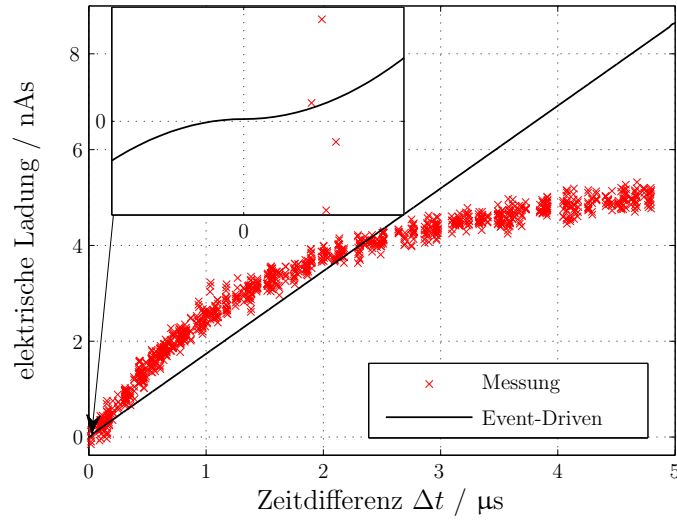
# Messtechnische Aufnahme der PFD-Kennlinie

---

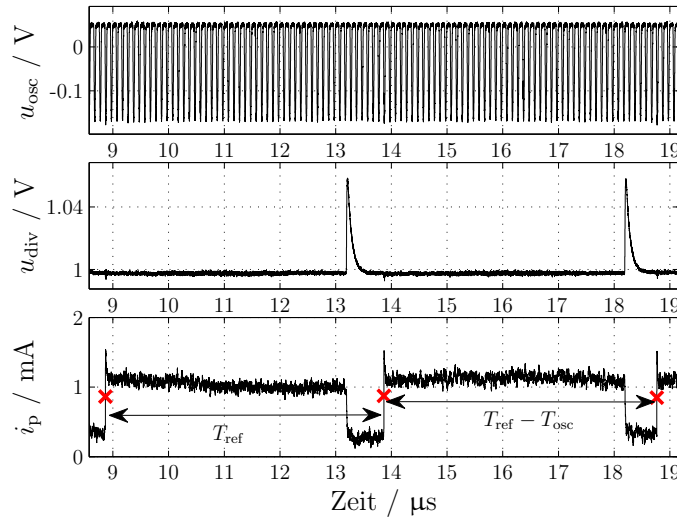
*„Experience is what you get when you  
didn't get what you wanted.“  
Randy Pausch*

Bei der messtechnischen Aufnahme der PFD-Kennlinie wird der Regelkreis zwischen dem Schleifenfilter und dem VCO aufgetrennt und eine externe Spannungsquelle zur Steuerung des VCO verwendet. Diese ist so eingestellt, dass sich ein kleiner Frequenzfehler zwischen dem Referenzsignal und dem Ausgangssignal des Dividierers ergibt und der Phasenfehler kontinuierlich steigt oder sinkt. Damit der Ausgangsstrom der Ladungspumpe nicht von der elektrischen Ladung auf den Schleifenfilterkapazitäten abhängt, sind die Kapazitäten entfernt worden. Der resultierende Strom der Ladungspumpe lässt sich anschließend jeweils über eine Periode des Referenzsignals integrieren und über die Zeitdifferenz zwischen den Flanken des Referenzsignals und des Dividierersignals auftragen. In Abb. A.1(a) ist das Ergebnis dieser Variante dargestellt. Für größere Zeitdifferenzen flacht die Kurve der elektrischen Ladung deutlich ab. Diese Eigenschaft ist auch in den zeitlichen Verläufen des Stroms ersichtlich (siehe Abb. A.1(b)). Trotz eines gewählten Stroms von 2,5 mA beträgt der Ist-Strom lediglich 1 mA. Des Weiteren lässt sich ein Frequenzwechsel im Stromsignal erkennen. Die steigenden Flanken des Stroms werden durch das Referenzsignal ausgelöst. In der zweiten Stromperiode ist die Periodenzeit jedoch um die Periode des Oszillatorsignals reduziert. Es liegt die Vermutung nahe, dass die interne Logikschaltung des *ADF4360* eine zusätzliche Regelung des Ladungspumpenstroms vornimmt, obwohl diese nicht dokumentiert ist.

Wird diese messtechnische Methode mit der Kennlinie des ereignisgesteuerten Mo-



(a) Vergleich der PFD-Kennlinien



(b) Darstellung eines kritischen zeitlichen Stromverlaufs bei der Messung der PFD-Kennlinie

**Abb. A.1.:** Messung der PFD-Kennlinie und Vergleich mit der verwendeten Kennlinie im ereignisgesteuerten Modell

dells verglichen, die auf der Auswertung der Histogramme des Ladungspumpenstroms und dessen Steigungen basiert, ergeben sich die Verläufe in Abb. A.1(a). Der Zoom-Bereich zeigt die Kennlinie für sehr kleine Phasenfehler und veranschaulicht den Einfluss der endlichen Steigung des Stroms. Offensichtlich spiegelt die messtechnische Aufnahme der PFD-Kennlinie nicht das Verhalten des Phasen- und Frequenzdetektors im geschlossenen Regelkreis wider, da die modellierte PFD-Charakteristik

---

in der geschlossenen Phasenregelschleife zu einer sehr guten Übereinstimmung des dynamischen Verhaltens der ereignisgesteuerten Simulation und der Messung führt. Aus diesem Grund wird bei der Validierung des ereignisgesteuerten Modells mittels Messungen die Kennlinie des PFD mit Hilfe der Auswertung der Histogramme bestimmt.



---

# Ereignisgesteuerte Modellierungen weiterer Phasenregelkreise

---

Die in dieser Arbeit vorgestellte ereignisgesteuerte Modellierung stellt einen modularen und effizienten Ansatz zur Beschreibung von gemischt digital-analogen Systemen dar. Speziell für den Phasenregelkreis der Frequenzsynthese sind Beschleunigungsfaktoren von 100.000 möglich.

In diesem Kapitel wird dieses ereignisgesteuerte Modell auf zwei weitere Phasenregelkreise angewendet. Im ersten Schritt wird die spannungsgesteuerte CP-PLL betrachtet. Hier wird die stromgesteuerte Ladungspumpe durch die spannungsgesteuerte ersetzt und für die Modellierung des hochohmigen Zustandes dieser Ladungspumpe zwischen zwei mathematischen Filtern hin und her geschaltet. Im zweiten Schritt wird der Phasenregelkreis zur Daten- und Taktrückgewinnung betrachtet. Da der Unterschied zur CP-PLL lediglich im Phasendetektor liegt, wird der Hogge-Phasendetektor für das ereignisgesteuerte Modell beschrieben.

## B.1. Spannungsgesteuerte CP-PLL

Die spannungsgesteuerte CP-PLL weist eine Ladungspumpe mit konstanten Spannungsquellen auf, die entsprechend des Phasenfehlers auf den folgenden Schleifenfilter geschaltet werden [56]. Für die Trennung dieser Quellen vom spannungsgesteuerten Oszillator wird im Schleifenfilter ein weiterer Widerstand verwendet (siehe Kapitel 2.3.1).

Als Schaltzustände der spannungsgesteuerten Ladungspumpe sind  $U_{dd}$  als Versorgungsspannung im Beschleunigungsfall des VCO, GND als Masse für die Reduzierung der VCO-Frequenz und ein hochohmiger Zustand für das Halten der VCO-

Frequenz möglich. Innerhalb des ereignisgesteuerten Modells wird der Schleifenfilter aus Abb. 2.16 mit der Zustandsraumbeschreibung

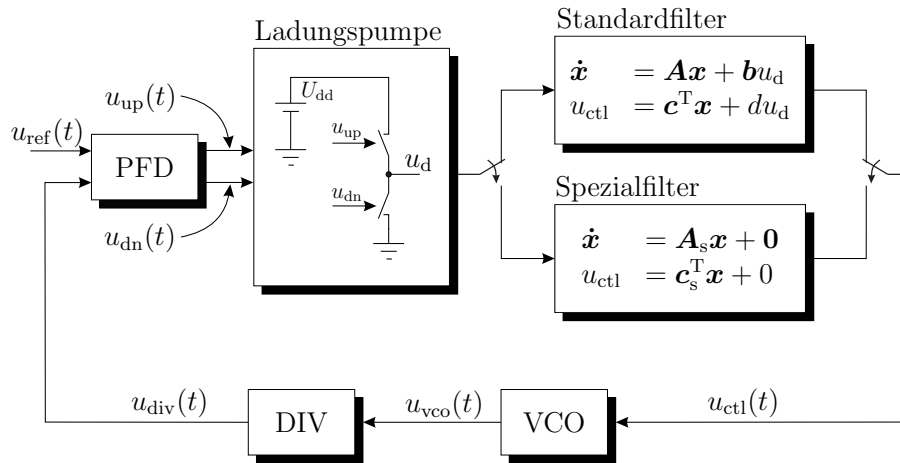
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_0}{R_1 R_0 C_2} & -\frac{1}{R_0 C_2} \\ -\frac{1}{R_0 C_1} & -\frac{1}{R_0 C_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_2} \\ \frac{1}{R_0 C_1} \end{bmatrix} u_d \quad (\text{B.1a})$$

$$u_{\text{ctl}} = [1 \ 1] \mathbf{x} + 0 \quad (\text{B.1b})$$

verwendet. Da die Eingangsgröße  $u_d$  der mathematischen Zustandsraumbeschreibungen für den hochohmigen Zustand der Ladungspumpe nicht definiert ist, wird im ereignisgesteuerten Modell ein zusätzlicher „Spezialfilter“ eingeführt. Dieser stellt das Verhalten des eigentlichen Filters im hochohmigen Zustand mittels eines Filters mit einem Eingangssignal von Null dar. Für den hochohmigen Zustand der Ladungspumpe ergibt sich ein Strom mit  $i_p = 0$ . Daraus folgt, dass die Eingangsspannung der Zustandsraumbeschreibung gleich der Steuerspannung ist. Wird dies bei der Herleitung der Zustandsraumbeschreibung berücksichtigt, ergibt sich die Zustandsraumbeschreibung des Spezialfilters zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{0} \quad (\text{B.2a})$$

$$u_{\text{ctl}} = [1 \ 1] \mathbf{x} + 0. \quad (\text{B.2b})$$



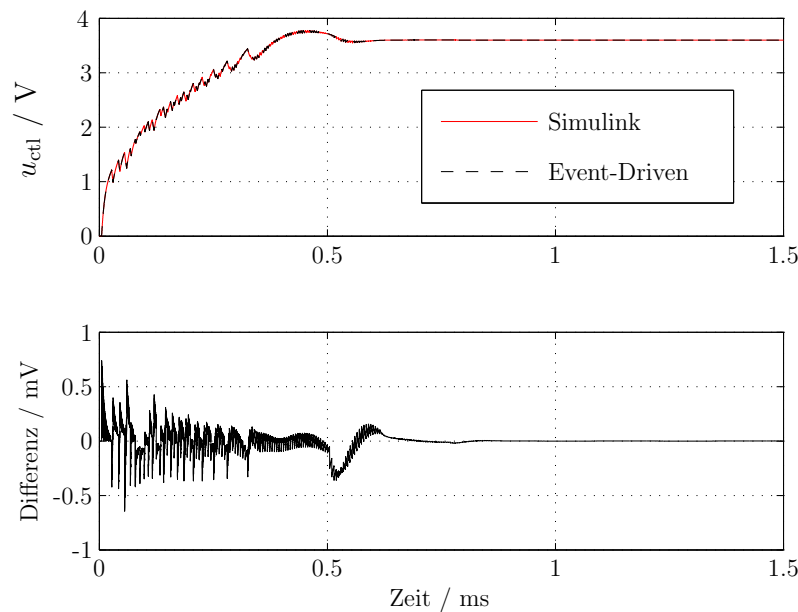
**Abb. B.1.:** Darstellung der ereignisgesteuerten Modellierung der spannungsgesteuerten CP-PLL

Hier ist ersichtlich, dass das Eingangssignal des Spezialfilters für den hochohmigen



Zustand der Ladungspumpe mit Null definiert ist und die Umladeprozesse zwischen den Filterkapazitäten beschreibt.

Im ereignisgesteuerten Modell werden die Spannungsquellen der Ladungspumpe mittels des Phasen- und Frequenzdetektors geschaltet. Basierend auf dem Zustand der Ladungspumpe (Beschleunigung, Reduzierung oder hochohmig) wird zwischen der Modellierung des eigentlichen Filters und des Spezialfilters gewechselt, wobei die Eingangsgröße des Spezialfilters mit Null definiert wird. Das entsprechende Blockschaltbild ist in Abb. B.1 dargestellt. Diese Modellierung beinhaltet keine Approximation und stellt somit ein exaktes Modell dar. Wird dieses ereignisgesteuerte Modell mit der Verhaltensbeschreibung der spannungsgesteuerten CP-PLL verglichen, zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung beider Beschreibungsformen (siehe Abb. B.2). Der hochohmige Zustand der Ladungspumpe wurde in der Verhaltens-



**Abb. B.2.:** Validierung des ereignisgesteuerten Modells der spannungsgesteuerten CP-PLL mittels Simulink Simulation

beschreibung mittels einer direkten Rückkopplung der Steuerspannung auf den Eingang des Schleifenfilters realisiert. Der Geschwindigkeitsgewinn der ereignisgesteuerten Modellierung dieses Phasenregelkreises liegt in der gleichen Größenordnung wie bei der stromgesteuerten CP-PLL.

Die Charakterisierungen und Analysen der spannungsgesteuerten CP-PLL sind in [56, 64, 65, 107, 114–117] veröffentlicht. Diese Veröffentlichungen schließen die Regelschleife zweiter und dritter Ordnung, den Vergleich mit der stromgesteuerten CP-PLL, die Stabilitätsbetrachtung des schaltenden nichtlinearen Systems und Prozessvariationen mit ein.

Da sich die ereignisgesteuerte Modellierung der spannungsgesteuerten CP-PLL von der der stromgesteuerten CP-PLL lediglich in der Ladungspumpe und der Realisierung des Schleifenfilters unterscheidet, lassen sich die bereits eingeführten nicht-idealen Effekte des Phasenregelkreises ohne Weiteres berücksichtigen. Lediglich für den Leckstrom ist eine gesonderte Beschreibung notwendig. Diese lässt sich beispielsweise bei der Herleitung des Spezialfilters umsetzen.

## B.2. Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung

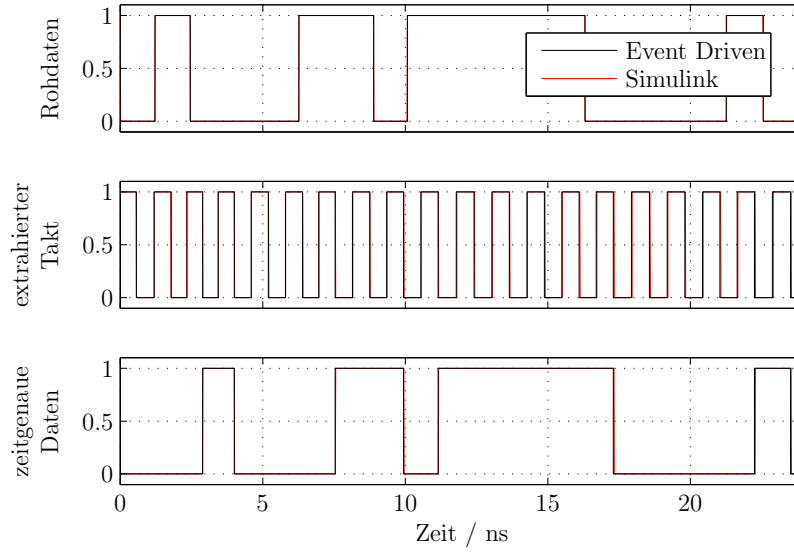
Der Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung (engl. *Clock and Data Recovery*, kurz: CDR) aus Kapitel 2.3.2 extrahiert die Daten und den entsprechenden Takt aus beispielsweise verdrahteten Empfangsdaten. Die Architektur dieser PLL unterscheidet sich lediglich im verwendeten Phasendetektor und dem fehlenden Frequenzteiler von der CP-PLL zur Frequenzsynthese [55]. Für den Phasendetektor der CDR-PLL werden der Alexander- oder der Hogge-Phasendetektor verwendet. An dieser Stelle wird exemplarisch die ereignisgesteuerte Modellierung des Hogge-PD vorgestellt (vgl. Abb. 2.19). Der gezeigte Ansatz lässt sich jedoch auch auf andere Phasendetektoren anwenden.

Da der Hogge-PD analog zum Phasen- und Frequenzdetektor flankengesteuert ist, lässt sich für die Modellierung ebenfalls ein endlicher Zustandsautomat verwenden. Da die internen Zustände  $Q_1$  und  $Q_2$  nicht direkt den Ausgangssignalen entsprechen, müssen diese im endlichen Zustandsautomat separat berücksichtigt werden. Der resultierende Automat ist in Abb. B.3 dargestellt. Die Zustandswechsel werden durch die steigenden und fallenden Flanken der Eingangssignale  $u_{\text{clk}}$  und  $\tilde{u}_{\text{data}}$  des Hogge-PD ausgelöst. Die Zustände  $\mathcal{S}_{-1}$ ,  $\mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_{+1}$  und  $\mathcal{S}_{11}$  repräsentieren die Up- und Dn-Signale  $u_{\text{up}}$  bzw.  $u_{\text{dn}}$  und entsprechen einer Beschleunigung bzw. einer Reduzierung der VCO-Frequenz:

$$\psi = \begin{cases} u_{\text{up}}(t) = 0 \text{ V}, u_{\text{dn}}(t) = 1 \text{ V} & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \\ u_{\text{up}}(t) = 0 \text{ V}, u_{\text{dn}}(t) = 0 \text{ V} & \text{falls } \mathcal{S}_0 \\ u_{\text{up}}(t) = 1 \text{ V}, u_{\text{dn}}(t) = 0 \text{ V} & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \\ u_{\text{up}}(t) = 1 \text{ V}, u_{\text{dn}}(t) = 1 \text{ V} & \text{falls } \mathcal{S}_{11} \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Die Änderung der internen Zustände  $Q_1$  und  $Q_2$  des Hogge-PD sind bei dieser Darstellung direkt an den Zustandsübergängen vermerkt, wobei  $Q_2$  den neu abgetasteten Daten  $u_{\text{data}}$  entspricht. Hier wird deutlich, dass sich einige Zustandswechsel sowohl durch steigende als auch durch fallende Flanken in  $u_{\text{clk}}$  und  $\tilde{u}_{\text{data}}$  ergeben. Die Änderung der internen Zustände ist jedoch von der Art der Flanke abhängig. Für die Validierung dieser Modellierung wird der Phasenregelkreis zur Takt- und



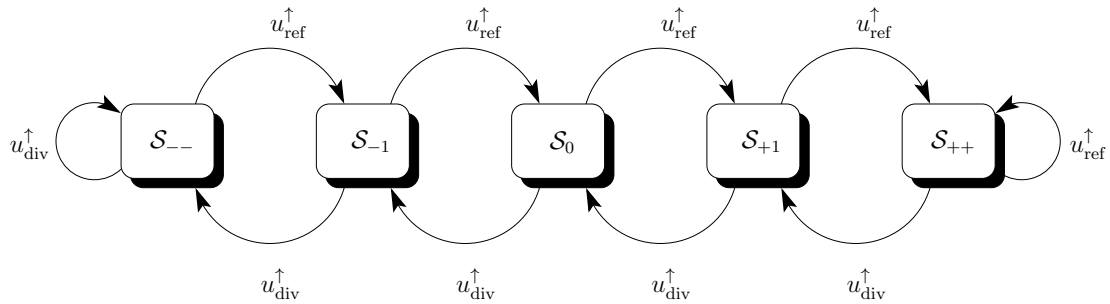


**Abb. B.4.:** Validierung des ereignisgesteuerten Modells der CDR-PLL mittels Simulink Simulation

Zustandsautomat entsprechend anzupassen.

### B.3. CP-PLL mit 5-State PFD

Für ein beschleunigtes Anstiegsverhalten des Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese lässt sich der Standard Tri-State PFD durch einen 5-State PFD ersetzen. Dieser Phasen- und Frequenzdetektor weist fünf Zustände auf und ist in Abb. B.5 zu sehen [118].



**Abb. B.5.:** Darstellung des 5-State-PFD als endlicher Zustandsautomat für ein beschleunigtes Anstiegsverhalten des Phasenregelkreises

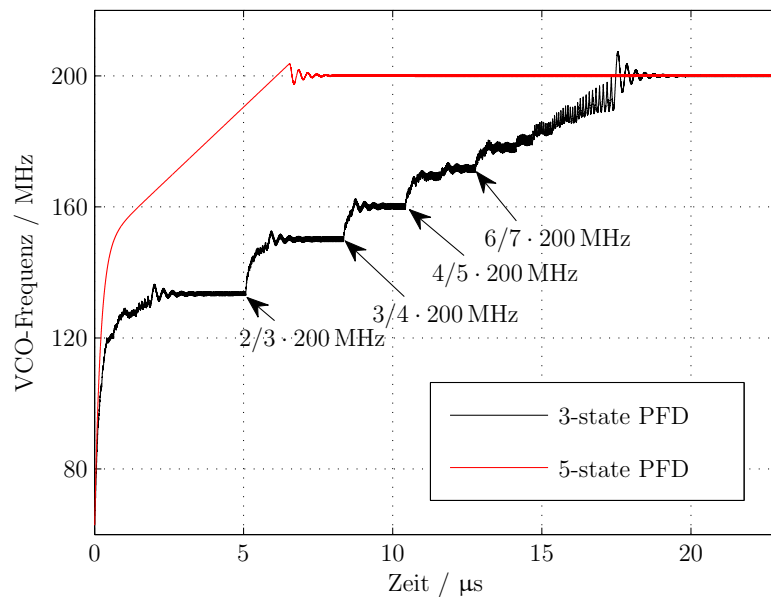
Die drei Zustände  $S_{-1}$ ,  $S_0$  und  $S_{+1}$  unterscheiden sich dabei nicht vom Tri-State PFD. Lediglich in  $S_{--}$  und  $S_{++}$  lassen sich beispielsweise die Ladungspumpenströme gewichten, um ein beschleunigtes Anstiegsverhalten des Phasenregelkreises

zu ermöglichen:

$$i_p(t) = \begin{cases} -I_p \cdot \beta & \text{falls } \mathcal{S}_{--} \\ -I_p & \text{falls } \mathcal{S}_{-1} \\ 0 & \text{falls } \mathcal{S}_0 \\ +I_p & \text{falls } \mathcal{S}_{+1} \\ +I_p \cdot \beta & \text{falls } \mathcal{S}_{++} \end{cases} . \quad (\text{B.4})$$

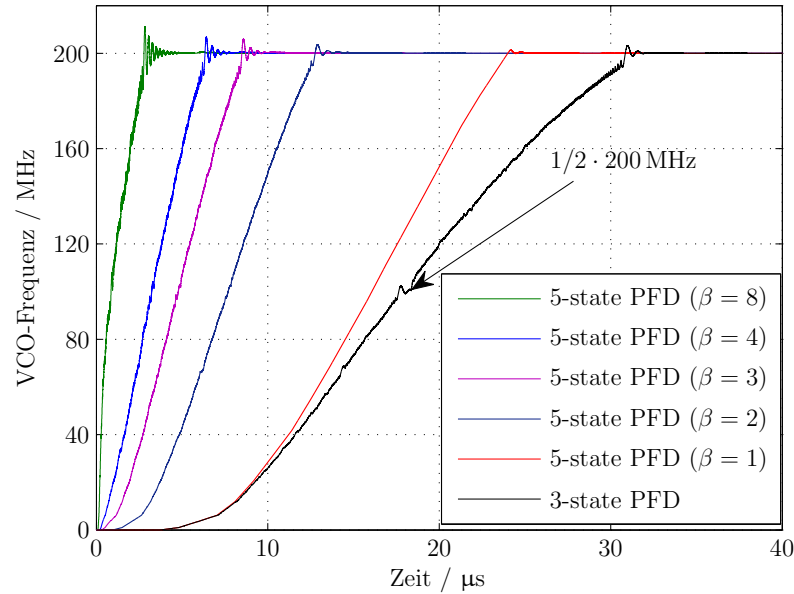
$\beta$  stellt eine Gewichtung des Stroms in den zusätzlichen zwei Zuständen des PFD dar.

Ein weiterer Vorteil des 5-State PFD stellt das Einrastverhalten bei unzureichenden Auslegungen des Phasenregelkreises dar. Während der Phasenregelkreis mit Tri-State PFD bei unzureichender Auslegung Sub-Harmonische der Zielfrequenz detektiert, ist die Regelschleife mit 5-State PFD in der Lage, die Zielfrequenz ohne Fehldetektion zu synthetisieren. Dieses Verhalten ist in Abb. B.6 zu erkennen, wobei der 5-State PFD mit  $\beta = 1$  angenommen wurde.



**Abb. B.6.:** Vergleich des Phasenregelkreises mit Tri-State PFD und mit 5-State PFD ( $\beta = 1$ ) zur Veranschaulichung des Einrastverhaltens bei unzureichender Auslegung der Regelschleife

Wird der Phasenregelkreis für verschiedene Gewichtungen  $\beta$  des Stroms untersucht, ergeben sich die Anstiegszeiten der Regelschleife aus Abb. B.7. Hier wird deutlich, dass sich die Anstiegszeit mit  $\beta > 1$  verkürzen lässt. Da der 5-State PFD jedoch bei einfach auftretender Flanke im VCO-Signal die VCO-Frequenz weiter anhebt, ist



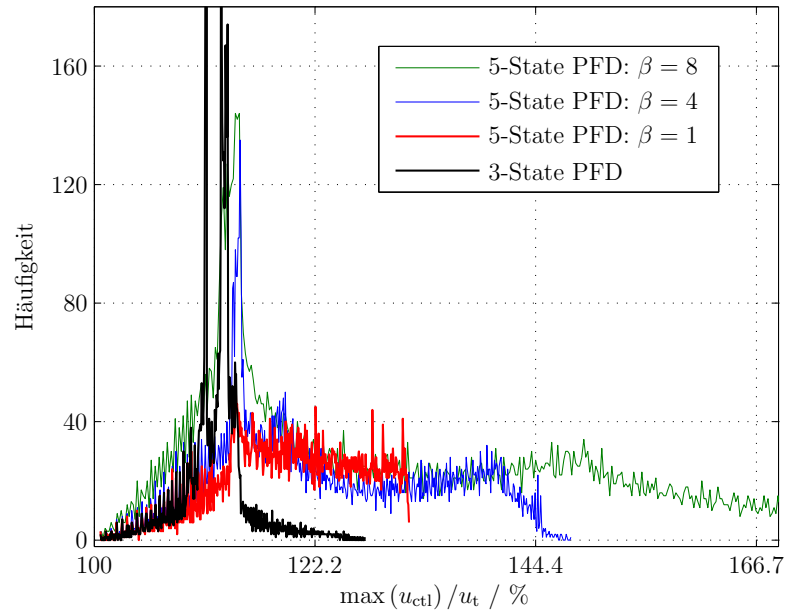
**Abb. B.7.:** Vergleich des Phasenregelkreises mit 5-State PFD und verschiedenen Gewichtungen des Ladungspumpenstroms

der Überschwinger mit diesem Phasen- und Frequenzdetektor größer als beim Tri-State PFD. Zwar hängt die Höhe des Überschwingers vom Zeitpunkt des Einrastens ab, jedoch nimmt die Wahrscheinlichkeit für höhere Überschwinger mit dem 5-State PFD zu, wie in Abb. B.8 zu sehen ist.

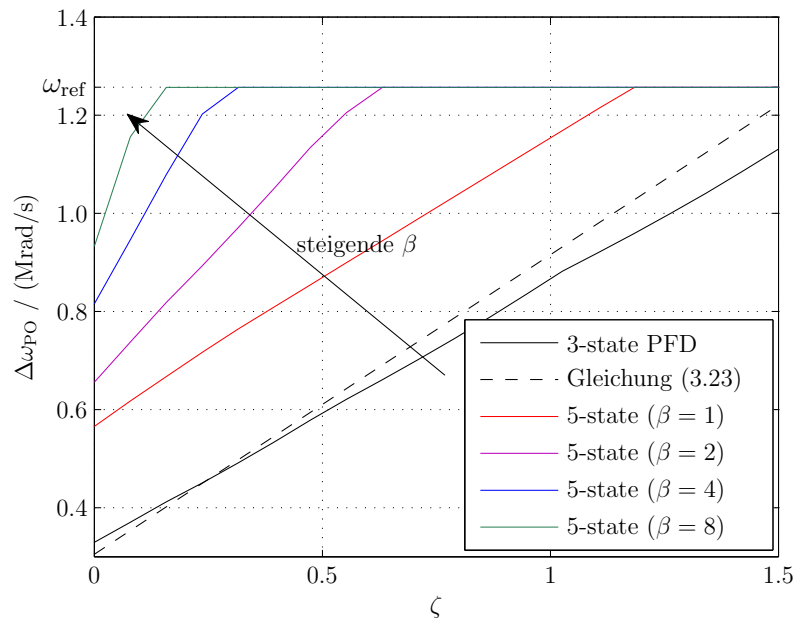
Selbst für  $\beta = 1$  ist die Wahrscheinlichkeit höherer Überschwinger größer als beim Standard Tri-State PFD. Somit ist ein Kompromiss zwischen der Anstiegszeit und dem maximal tolerierbaren Überschwinger zu finden.

Ein Vorteil des 5-State PFD ist der größer werdende Ausrastbereich der Regelschleife. Zur Charakterisierung des Ausrastbereichs des Phasenregelkreises mit 5-State PFD wird eine konstante Referenzkreisfrequenz  $\omega_{\text{ref}}$  definiert und mittels der Ruhekreisfrequenz des VCO der Frequenzsprung bestimmt, der die PLL gerade zum ausrasten bringt. Als ausgerastet gilt die PLL mit 5-State PFD, falls eine Referenzflanke im PFD Zustand  $\mathcal{S}_{++}$  oder eine Dividiererflanke in  $\mathcal{S}_{--}$  detektiert wird. In Abb. B.9 ist dieser Ausrastbereich für verschiedene Dämpfungsbeiwerte der PLL und verschiedene  $\beta$  aufgetragen.

Offensichtlich wird der Ausrastbereich der Regelung mit steigenden  $\beta$  größer und die PLL rastet erst für größere Frequenzsprünge aus. Der maximale Wert des Ausrastbereichs wird in dieser Untersuchung durch die Referenzkreisfrequenz  $\omega_{\text{ref}}$  bestimmt, da diese Frequenz als konstant definiert wurde und die Ruhfrequenz des VCO für Werte kleiner Null nicht definiert ist. D.h., der Frequenzsprung beträgt hier maximal den Wert der Referenzfrequenz.



**Abb. B.8.:** Histogramm des maximalen Überschingers des Phasenregelkreises mit Tri-State und 5-State PFD für die Variation des initialen Phasenfehlers und der Frequenzdifferenz von Referenz- und Dividierersignal



**Abb. B.9.:** Darstellung des Ausrastbereichs für verschiedene Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der PLL zweiter Ordnung mit Tri-State PFD und 5-State PFD und der eingeführten Approximation

Des Weiteren ist die wachsende Steigung des Zusammenhangs von  $\Delta\omega_{\text{PO}}$  und  $\zeta$  deutlich zu erkennen. Dies ist auf die Gewichtung des Ladungspumpenstroms mit dem Faktor  $\beta$  zurückzuführen, da dieser die natürliche Eigenkreisfrequenz der PLL beeinflusst (siehe Gleichung (3.23)).



---

## Digitale Schaltung zur Einrastdetektion

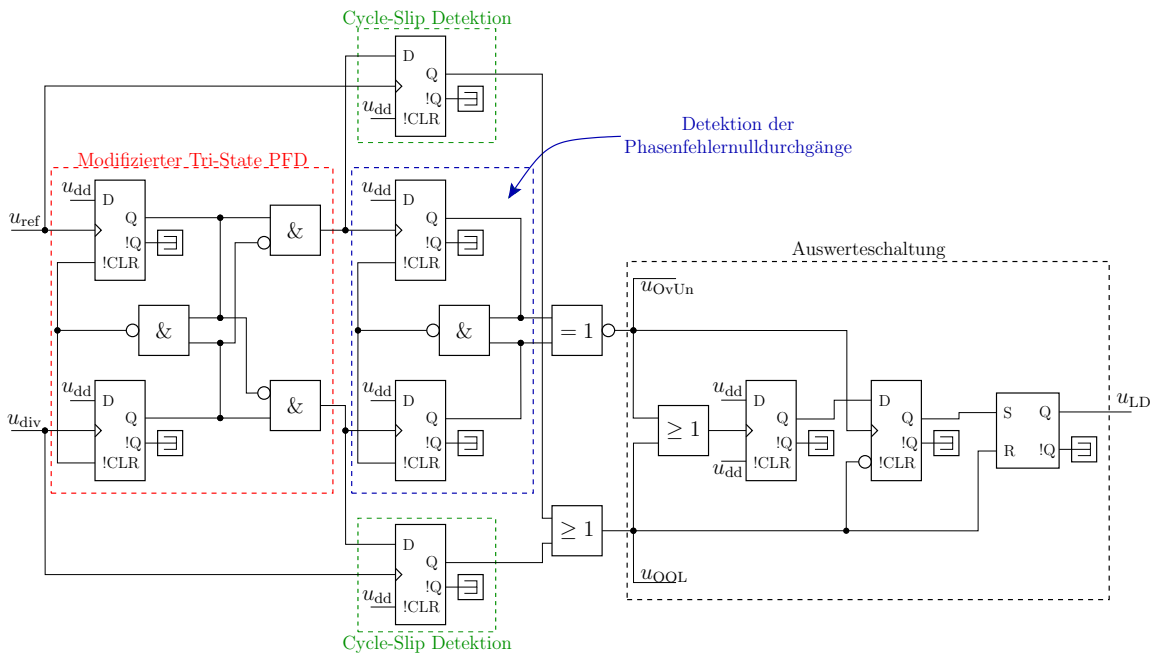
---

Für die Weiterverarbeitung der Ausgangssignale der Phasenregelkreise ist es oft sinnvoll, den Zeitpunkt des Einrastens zu detektieren und für die folgende Schaltung die Ausgangssignale als valide zu deklarieren. Speziell für die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 4.5 ist es notwendig, sowohl den Einrastzeitpunkt als auch die Phasenfehlernulldurchgänge zu detektieren, um die Simulationsdauer der zahlreichen Simulationen durch zusätzliche Informationen automatisiert verkürzen zu können. Für die Einrastdetektion werden eine Vielzahl von Methoden vorgestellt, die jedoch meist den ausgeregelten Zustand der Regelschleife detektierten [119]. Der Einrastzeitpunkt (der Phasenfehler verbleibt im Bereich  $\pm 2\pi$ ) und die Phasenfehlernulldurchgänge werden nicht identifiziert [39]. Für den Fall, dass die Einrastdetektion zur Modifikation eines Schleifenparameters der PLL verwendet wird, ist die Identifizierung des ausgeregelten Bereichs oft zu spät. Beispielsweise lässt sich der Ladungspumpenstrom des Phasenregelkreises für den ausgerasteten Bereich erhöhen, um ein schnelles Einrasten zu gewährleisten. Nachdem der Regelkreis eingerastet ist, wird der Strom reduziert, um ein besseres Rauschverhalten zu ermöglichen. In diesem Kapitel wird die digitale Schaltung zur Einrastdetektion von C. Wiegand [39, 120] vorgestellt, um im weiteren Verlauf eine für die Stabilitätsuntersuchungen optimierte Schaltung einzuführen.

### C.1. Einrastdetektion nach Wiegand

Die Schaltung zur Einrastdetektion nach Wiegand verwendet den Phasendetektor der Regelschleife und identifiziert mittels einer Kombination aus zwei D-Flip-Flops die Zeitpunkte eines Ausrastens. Diese Zeitpunkte sind durch das Auftreten einer

Referenzflanke im Zustand  $\mathcal{S}_{+1}$  des PFD oder einer Dividiererflanke im Zustand  $\mathcal{S}_{-1}$  des PFD definiert (im engl. *Cycle-Slip* genannt). Der zweite Teil der Schaltung verwendet einen zusätzlichen PFD zur Detektion der Phasenfehlernulldurchgänge anhand der Ausgangssignale des PFDs innerhalb des Phasenregelkreises. Die Phasenfehlernulldurchgänge zeichnen sich durch den Zustandswechsel  $\mathcal{S}_{-1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{+1}$  oder  $\mathcal{S}_{+1} \rightarrow \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_{-1}$  des PFD aus. Der dritte Teil der Schaltung wertet die beiden vorangegangenen Stufen aus. Wird ein Phasenfehlernulldurchgang identifiziert und es liegt kein Cycle-Slip vor, wird der Phasenregelkreis als eingerastet betrachtet. Diese Schaltung ist in Abb. C.1 zu sehen und wurde auch in [2, 38, 39, 120] veröffentlicht.



**Abb. C.1.:** Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes (basierend auf C. Wiegand)

Da diese Schaltung auf der Detektion der Phasenfehlernulldurchgänge beruht, ist die Identifizierung eines eingerasteten Phasenregelkreises mit einem hohen Dämpfungsbeiwert  $\zeta$  (siehe Kapitel 3.1) problematisch. In diesem Fall treten keine Phasenfehlernulldurchgänge auf und somit lässt sich der Einrastzeitpunkt dieser Regelschleife nicht detektieren. Ein Ansatz zur Verwendung dieser Schaltung auch bei Phasenregelkreisen mit großen Dämpfungsbeiwerten wäre das Schalten zwischen zwei Dämpfungsbeiwerten. So könnte der Dämpfungsbeiwert des Phasenregelkreises zu Beginn der Regelung nahe Null sein und nach dem ersten Phasenfehlernulldurchgang auf den gewünschten Wert umgeschaltet werden. Dieses Verfahren resultierte jedoch in größeren Überschwüngen, die für die nachfolgenden Schaltungen des Regelkreises kritisch sein können.

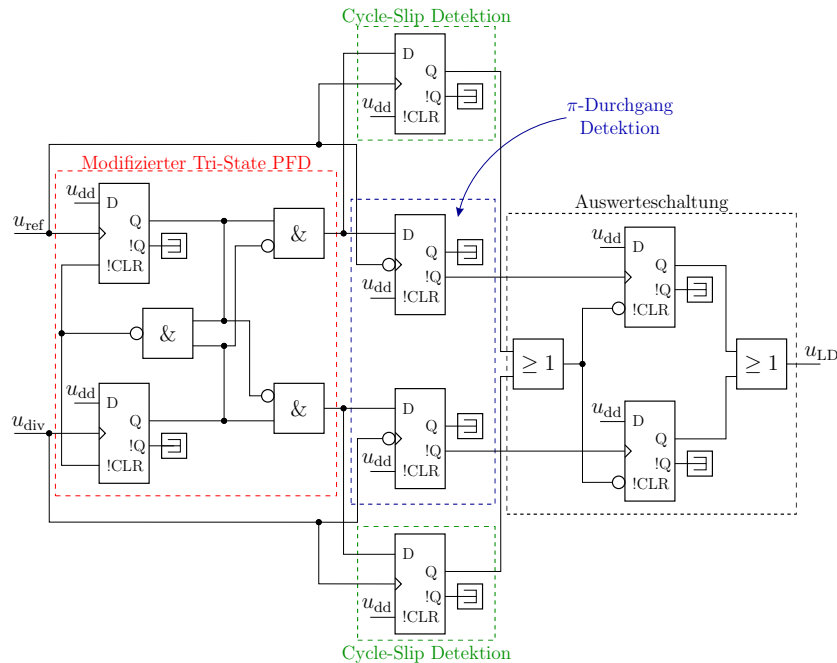
## C.2. Neue Ansätze zur Einrastdetektion

Aus den genannten Gründen ist es sinnvoll, die Einrastdetektion durch weitere Ansätze zu optimieren, da auch der Einrastzeitpunkt von Phasenregelkreisen mit höheren Dämpfungsbeiwerten identifiziert werden sollte, ohne den Überschwinger und die Dynamik des Systems zu beeinflussen.

### C.2.1. $\pi$ -Durchgang des Phasenfehlers

Eine Erweiterung der Detektion des Phasenfehlers nulldurchganges stellt die Identifizierung des  $\pi$ -Durchganges dar. Dies ermöglicht eine frühere Detektion und somit eine schnellere Reaktion auf den eingerasteten Zustand. Wird beispielsweise der Ladungspumpenstrom etwas früher wieder reduziert, ist der Unterschwinger des Systems kleiner und das Ausregelverhalten des Phasenregelkreises entspricht dem Systementwurf. Eine digitale Schaltung zur Detektion des  $\pi$ -Durchganges ist in [39] vorgestellt worden. Da dieser Ansatz lediglich ganzzahlige Vielfache von  $\pi$  detektiert und somit auch positive Durchgänge durch  $+\pi$  identifiziert, ist eine Fehlinterpretation möglich.

Für die Detektion des  $\pi$ -Durchganges des absoluten Phasenfehlers  $|\varphi_e(t)|$  mit negativer Steigung, das heißt für einen Phasenfehler der in den  $\pm\pi$ -Schlauch um 0 Radiant läuft, lässt sich die in dieser Arbeit optimierte Schaltung aus Abb. C.2 verwenden. Diese digitale Schaltung ist ähnlich zu der Einrastdetektion nach Wiegand



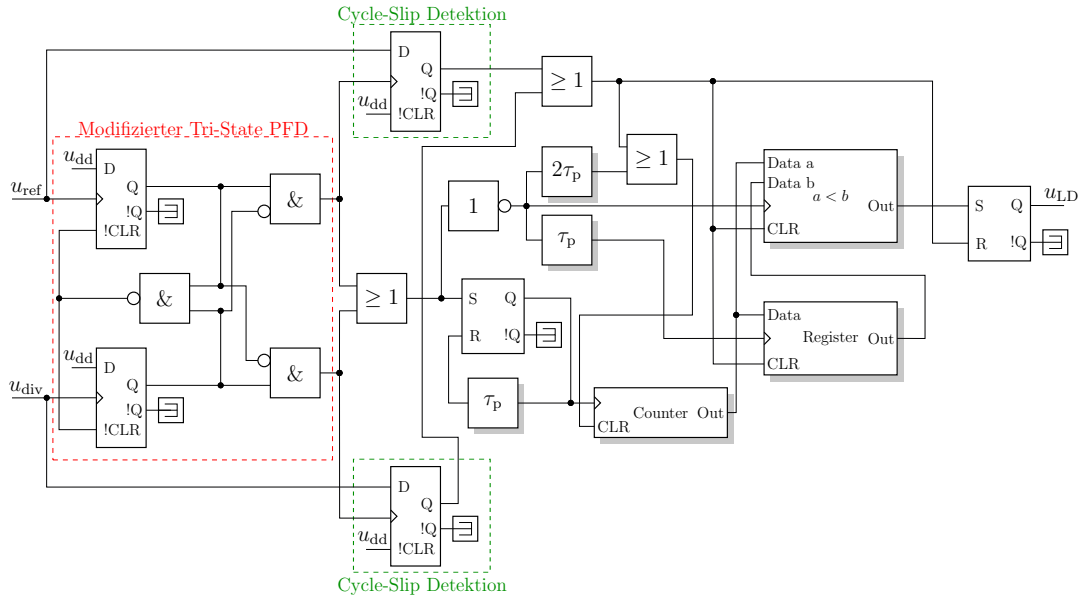
**Abb. C.2.:** Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes anhand des  $\pi$ -Durchganges mit negativer Steigung des absoluten Phasenfehlers

und verwendet den PFD des Phasenregelkreises und die Detektion des Cycle Slips. Darüber hinaus werden zwei D-Flip-Flops für die Identifizierung des  $\pi$ -Durchgangs in Richtung 0 rad eingesetzt. Eine abgewandelte Auswerteschaltung ermöglicht die Detektion des Einrastzeitpunktes des Phasenregelkreises. Der Vorteil dieser Schaltung liegt darin, dass sich ein eingerasteter Regelkreis direkt beim „Eintauchen“ des Phasenfehlers in den  $\pm\pi$ -Schlauch detektieren lässt. Ist der Phasenregelkreis ausgerastet, steigt der Betrag des Phasenfehlers. Erst im eingerasteten Bereich sinkt der Betrag des Phasenfehlers und läuft durch  $\pm\pi$  in Richtung 0 rad.

Ähnlich zur Einrastdetektion nach Wiegand setzt der vorgestellte  $\pi$ -Detektor einen Phasenregelkreis voraus, der zu einem Zeitpunkt der Regelung einen Phasenfehler mit  $|\varphi_e(t)| > \pi$  aufweist. Ist dies nicht gegeben, lässt sich der Einrastzeitpunkt nicht identifizieren.

### C.2.2. Lokales Maximum des Phasenfehlers

Da die eingeführten Schaltungen zur Einrastdetektion jeweils eine Bedingung an den Phasenregelkreis bzw. die Regelung stellen, liegt ein Ansatz zur Identifizierung des lokalen Maximums des Phasenfehlers nahe. Dies ermöglicht eine noch frühere Detektion des eingerasteten Zustandes und stellt keine besondere Bedingungen an den Verlauf des Phasenfehlers. Für die Identifizierung des lokalen Maximums des Phasenfehlers lässt sich die Schaltung aus Abb. C.3 verwenden. Diese digita-



**Abb. C.3.:** Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes anhand des maximalen absoluten Phasenfehlers

le Schaltung verwendet ebenfalls den PFD des Phasenregelkreises und beinhaltet einen rückgekoppelten RS-Flip-Flop mit dem Verzögerungsglied  $\tau_p$  im Rückkopp-

lungszweig. Diese Kombination generiert ein periodisches Signal mit der Frequenz  $1/\tau_p$ . Die Flanken dieses Signals, die innerhalb eines Up- bzw. Dn-Pulses des PFD liegen, werden mittels des Flankenzählers *Counter* gezählt. Über die Vergleichslogik und das Datenregister lassen sich die gezählten Flanken für zwei aufeinander folgende Pulse des Up- bzw. Dn-Signals vergleichen. Sinkt die Anzahl der gezählten Flanken und liegt kein Cycle Slip vor, ist das lokale Maximum des Phasenfehlers erreicht und der Phasenregelkreis kann als eingerastet betrachtet werden.

Diese Schaltung ist in der Lage, den Zeitpunkt des lokalen Maximums des Phasenfehlers zu identifizieren und schließt somit verlässlich auf einen eingerasteten Phasenregelkreis. Die Nachteile dieser Schaltung liegen im höheren schaltungstechnischen Aufwand und im rückgekoppelten RS-Flip-Flop. Für große Referenzfrequenzen des Phasenregelkreises ist es notwendig, die Verzögerungszeit  $\tau_p$  entsprechend klein zu wählen, um mehrere Flanken des generierten periodischen Signals innerhalb der Up- bzw. Dn-Signale zu gewährleisten. Für sehr kleine  $\tau_p$  und somit hohe Frequenzen des generierten periodischen Signals stößt jedoch das RS-Flip-Flop an seine Grenzen. Des Weiteren ist diese Schaltung anfällig für Phasenrauschen, da es durch Phasenrauschen zu Fehlinterpretationen der gezählten Flanken kommen kann.

Aus den genannten Gründen bietet sich eine Kombination aus dem eingeführten  $\pi$ -Detektor und der Detektion des maximalen Phasenfehlers an. Die eingeführten Einrastdetektoren lassen sich im ereignisgesteuerten Modell sowohl separat als auch kombiniert verwenden.



---

### Grafische Benutzeroberfläche

---

Für die einfache und intuitive Benutzung des ereignisgesteuerten Modells ist im Zuge dieser Arbeit eine grafische Benutzeroberfläche erstellt worden. Mit Hilfe dieser Oberfläche ist der Nutzer in der Lage, die Simulation zu konfigurieren, die Ergebnisse zu untersuchen, die verschiedenen Einflüsse der nichtlinearen und nicht-idealen Effekte zu charakterisieren, sowohl die Ergebnisse als auch die Konfiguration zu speichern und zu laden und den Schleifenfilter zu entwerfen. Diese grafische Oberfläche ist in Abb. D.1 dargestellt.

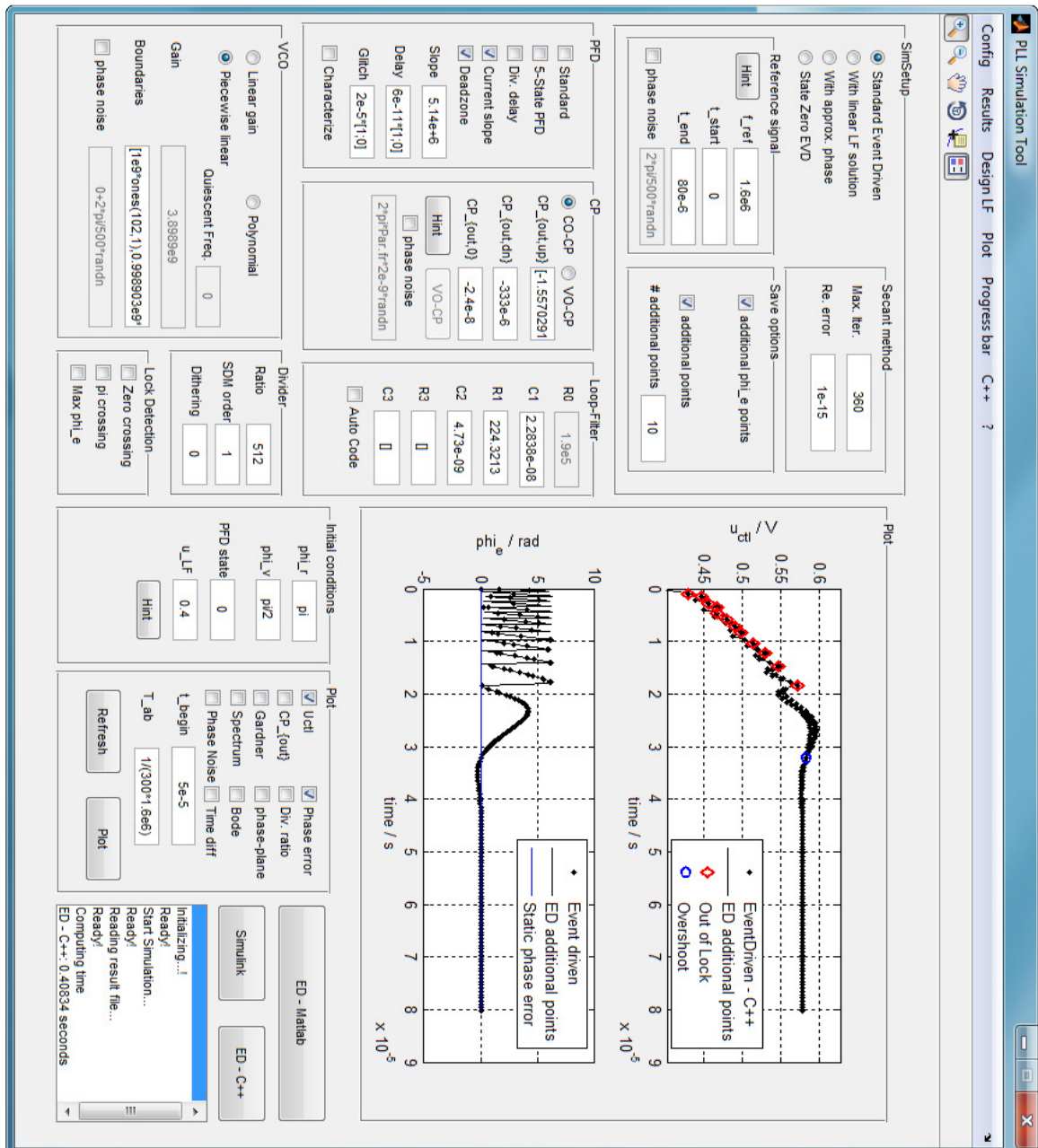


Abb. D.1.: Grafische Benutzeroberfläche des ereignisgesteuerten Modells



---

# Einblick in die C++ Implementierung des ereignisgesteuerten Modells

---

Die Algorithmen des ereignisgesteuerten Modells sind sowohl in Matlab als auch in C++ implementiert. Das ereignisgesteuerte Modell basierend auf Matlab dient zur schnellen Umsetzung und zum Test neuer Methoden und Modellierungen. Zur benutzerfreundlichen Handhabung der Modelle wird die in Matlab umgesetzte grafische Benutzeroberfläche verwendet (siehe Anhang D). Für eine weitere Beschleunigung der Simulation wird eine C++ Implementierung der ereignisgesteuerten Modellierung in dieser grafischen Nutzeroberfläche integriert. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick der C++ Umsetzung des ereignisgesteuerten Modells gegeben.

## E.1. Simulationsaufruf

Die Eingabe der makroskopischen Parameter des Phasenregelkreises erfolgt über die grafische Benutzeroberfläche (engl. *Graphical User Interface*, kurz: GUI). Diese Oberfläche weist eine Schaltfläche zum Aufruf der C++ Simulation auf und startet die folgenden Schritte, die automatisiert ablaufen.

Nach dem Aufruf der Methode zur C++ Simulation werden die eingegebenen Parameter aus der GUI ausgelesen und mittels Matlab eine XML-Datei (*Extensible Markup Language*) mit den entsprechenden Parametern generiert. Beim anschließenden Ausführen der exe-Datei der C++ Implementierung wird diese XML-Datei eingelesen, der Inhalt deserialisiert und ein Objekt der Klasse *Sim* erzeugt. Anschließend wird der ereignisgesteuerte Algorithmus (siehe Kapitel 3.3 und 5) ausgeführt. Die Simulationsergebnisse lassen sich entweder in einer csv-Datei (*Comma separated values*) abspeichern und anschließend mit Matlab wieder einlesen, oder mit Hilfe

des Matlab/C-Interfaces direkt in den Arbeitsbereich (engl. *Workspace*) von Matlab schreiben. Das Interface legt in C++ Matlab-Objekte an, um Variablen direkt in den Arbeitsbereich von Matlab zu speichern. Das hat den Vorteil, dass keine langsamen Dateizugriffe für das Schreiben und Lesen der csv-Datei notwendig sind. Speziell bei langen Simulationen stellt das Matlab-C++ Interface eine deutliche Beschleunigung gegenüber der csv-Datei dar. Lediglich für sehr kurze Simulationen ist das Schreiben und anschließende Lesen der csv-Datei schneller, da das Matlab-C++ Interface immer mindestens 1 Sekunde benötigt.

Stehen die Simulationsergebnisse in Matlab bereit, lassen sich beliebige Methoden zur Aufbereitung, Analyse und Charakterisierung verwenden.

### E.2. Programmablauf in C++

Der Einstiegspunkt des ereignisgesteuerten Algorithmus innerhalb der C++ Implementierung befindet sich in der `Exec_PLL_EventDriven.cpp` Datei. Wird der Methode `int main (int argc, char **argv)` kein Dateipfad zu der generierten XML-Datei übergeben, öffnet sich ein Fenster zur Benutzereingabe des entsprechenden Pfades. Diese Datei wird anschließend eingelesen und deserialisiert. Mit diesen Simulationsdaten wird zunächst eine grobe Abschätzung der zu erwartenden Anzahl der Ereignisse getroffen, um den benötigten Speicher für die Objekte *Out* und *Store* zu reservieren. Stellt sich heraus, dass diese Abschätzung nicht ausreicht, wird der reservierte Speicher entsprechend erweitert. In diesem Fall wird die C++ Simulation etwas langsamer. Die Simulationsergebnisse werden in diese Objekte gespeichert. Im nächsten Schritt wird ein *PLL*-Objekt mit den zugehörigen Komponenten (PFD, CP, LF, VCO, Divider und SystemState) initialisiert. Nach Initialisierung aller notwendigen Objekte wird einer der beiden Simulationsmethoden `PLL::EventDrivenSimLoop(...)` oder `PLL::EventDrivenSimLoop_monitored(...)` aufgerufen und der Phasenregelkreis simuliert. Die erste Methode entspricht der ereignisgesteuerten Simulation. Der zweite Aufruf ist eine überwachte ereignisgesteuerte Simulation, in der sich zum Beispiel die Phasenfehlernulldurchgänge auswerten und die Simulation bei Erreichen eines Kriteriums vor der angegebenen Simulationszeit beenden lassen. Dieser Ansatz wurde bei der Stabilitätsuntersuchung in Kapitel 4.5 verwendet. Die Simulationsergebnisse werden anschließend entweder in eine csv-Datei geschrieben oder mittels der Matlab-C++ Objekte direkt in den Arbeitsbereich von Matlab geschrieben.

### E.3. Konfigurationsdatei

Als Beispiel der XML-Datei zur Konfiguration der C++ Simulation sei an dieser Stelle ein Auszug dieser Datei gezeigt. Diese XML-Datei konfiguriert die ereignisgesteuerte Simulation des Phasenregelkreises mit Transistor-Level-basierten nicht-idealen Effekten (vgl. Abb. 5.26).

```

1 <?xml version="1.0" encoding="utf-8" ?>
2   <!--Simulator-->
3 <Sim.Serialize>
4   <!--Simulator settings-->
5   <!--Reference signal-->
6   <Fref>
7     <value>1.6000000000000000E+06</value>
8   </Fref>
9   <Fref_t>
10    <value>0.0000000000000000E+00</value>
11  </Fref_t>
12  <StartTime>0.0000000000000000E+00</StartTime>
13  <StopTime>1.3999999999999999E-04</StopTime>
14  <Phi_Noise_Ref>0</Phi_Noise_Ref>
15  <Phi_Noise_Ref_Values>
16    <value>0.0000000000000000E+00</value>
17  </Phi_Noise_Ref_Values>

19  <!--Initial conditions-->
20  <Phi_ref>6.1768235463145862E+00</Phi_ref>
21  <Phi_vco>0.0000000000000000E+00</Phi_vco>
22  <PFDState>0</PFDState>
23  <VLF>
24    <value>0.0000000000000000E+00</value>
25    <value>0.0000000000000000E+00</value>
26  </VLF>

28  <!--Secant method-->
29  <MaxIter>360</MaxIter>
30  <EPS>1.0000000000000000E-15</EPS>
31  <Store>1</Store>
32  <NrAddPts>10</NrAddPts>

34  <!--PFD settings-->

36  <!--ABL - Anti-backlash pulse-->
37  <!-- 0 - off-->
38  <!-- 1 - on-->
39  <ABL>0</ABL>
40  <ABL_Delay>0.0000000000000000E+00</ABL_Delay>

42  <!--DZ - Deadzone-->
43  <!-- 0 - off-->
44  <!-- 1 - on-->
45  <DZ>1</DZ>
46  <DZTauSet>6.0000000000000000E-11</DZTauSet>
47  <DZTauRst>0.0000000000000000E+00</DZTauRst>
48  <CurrentGlitchSet>2.0000000000000000E-05</CurrentGlitchSet>
49  <CurrentGlitchRst>0.0000000000000000E+00</CurrentGlitchRst>

51  <!--Charge pump settings-->

```

## E. EINBLICK IN DIE C++ IMPLEMENTIERUNG DES EREIGNISGESTEUERTEN MODELLS

---

```
53      <!--CP-Mode-->
54      <!-- 0 - CO-->
55      <!-- 1 - VO-->
56      <Mode>0</Mode>
57      <I_up>
58          <value>3.500000000000000E-04</value>
59          <value>-1.5570291346358409E-04</value>
60      </I_up>
61      <I_dn>
62          <value>-3.3300000000000002E-04</value>
63      </I_dn>
64      <I_0>-2.400000000000000E-08</I_0>
65      <Phi_Noise_PFD_CP>0</Phi_Noise_PFD_CP>
66      <Phi_Noise_PFD_CP_Values>
67          <value>0.000000000000000E+00</value>
68      </Phi_Noise_PFD_CP_Values>

70      <!--CS - Current Slope-->
71      <!-- 0 - off-->
72      <!-- 1 - on-->
73      <CS>1</CS>
74      <CSlopeSet>5.1317153253621142E+06</CSlopeSet>
75      <CSlopeRst>5.1317153253621142E+06</CSlopeRst>

77      <!--Loop filter settings-->
78      <R0>0</R0>
79      <C1>2.283799999999999E-08</C1>
80      <R1>2.2432130000000001E+02</R1>
81      <C2>4.730000000000000E-09</C2>
82      <R3>0</R3>
83      <C3>0</C3>

85      <!--VCO settings-->
86      <VCO_Mode>1</VCO_Mode>
87      <Gain>0.000000000000000E+00</Gain>
88      <QuiescentFrequency>0.000000000000000E+00</QuiescentFrequency>
89      <BoundariesU>
90          <value>0.000000000000000E+00</value>
91          <value>1.4141000000000001E-01</value>
92          [...]
93          <value>1.000000000000000E+00</value>
94      </BoundariesU>
95      <BoundariesF>
96          <value>0.000000000000000E+00</value>
97          <value>0.000000000000000E+00</value>
98          [...]
99          <value>1.6457401237326219E+09</value>
100      </BoundariesF>
101      <Phi_Noise_VCO>0</Phi_Noise_VCO>
102      <Phi_Noise_VCO_Values>
```

```
103         <value>0.0000000000000000E+00</value>
104     </Phi_Noise_VCO_Values>

106     <!--Divider settings-->
107     <DivRatio>5.1200000000000000E+02</DivRatio>
108     <DivDelay1>0.0000000000000000E+00</DivDelay1>
109     <DivDelay2>0.0000000000000000E+00</DivDelay2>
110     <SDMOrder>1</SDMOrder>
111     <SDMIn>0</SDMIn>
112     <Dithering>0</Dithering>

114     <Monitored>0</Monitored>

116 </Sim_Serialize>
```



---

## Verilog-AMS Verhaltensmodelle der *Fractional-N* PLL

---

Zur Simulation der *Fractional-N* PLL auf Verhaltensebene unter Cadence / Spectre werden die Bauteile mittels Verilog-AMS modelliert. In diesem Kapitel werden die Verilog-AMS-Modelle des Phasendetektors, der Ladungspumpe, des spannungsgesteuerten Oszillators, des Teilers und des  $\Sigma\Delta$ -Modulators kurz gezeigt.

Für den Phasendetektor wird der PFD verwendet. Das Verilog-AMS-Modell sieht dabei wie folgt aus:

```

1  'include "discipline.h"
2  'include "constants.h"
3  module PFD_ideal(Dn, Ref, Up, Div);
4  input  Ref;
5  input  Div;
6  output Up;
7  output Dn;
8  electrical Ref, Div, Up, Dn;
9  parameter real    Udd = 1.0;
10 parameter real    Delay = 0.0;
11 parameter real    TransTime = 0.0;
12 integer state;

14     analog begin

16         @ ( initial_step ) begin
17             state = 0;
18         end

```

```

20      @ ( cross (V(Ref) - 0.5, 1)) begin
21          if (state==1 || state==0)
22              state=1;
23          else state=0;
24      end
25      @ ( cross (V(Div) - 0.5, 1)) begin
26          if (state== -1 || state==0)
27              state=-1;
28          else state=0;
29      end
31      V(Up) <+ (state==1) ? Udd : 0;
32      V(Dn) <+ (state== -1) ? Udd : 0;
34  end
35 endmodule

```

Die Ladungspumpe lässt sich mit dem Verilog-AMS-Modell

```

1  'include "discipline.h"
2  'include "constants.h"
3  module CP_ideal(Up, Dn, Iout);
4  input  Up;
5  input  Dn;
6  output Iout;
7  electrical Up, Dn, Iout;
8  parameter real    Ip = 30.0e-6;
9  parameter real    Delay = 0.0;
10 parameter real    TransTime = 1.0e-14;
11 integer state;
13
14 analog begin
15
16     @ ( initial_step ) begin
17         state = 0;
18     end
19
20     @ ( cross (V(Up) - 0.5, 1)) begin
21         if (state==1 || state==0)
22             state=1;
23         else state=0;
24     end
25
26     @ ( cross (V(Dn) - 0.5, 1)) begin
27         if (state== -1 || state==0)
28             state=-1;
29         else state=0;
30     end
31
32     @ ( cross (V(Up) - 0.5, -1)) begin
33         if (state==1 || state==0)
34             state=0;
35     end
36
37     @ ( cross (V(Dn) - 0.5, -1)) begin
38

```



```

34         if (state==1 || state==0)
35             state=0;
36     end
38     I(Iout) <+ transition(-Ip*state, Delay, TransTime);
40 end
41 endmodule

```

realisieren. Wird für den Oszillator eine lineare Kennlinie angenommen, ergibt sich das folgende Verilog-AMS-Modell:

```

1  'include "discipline.h"
2  'include "constants.h"
3  module vco(v_ctl, v_vco);
4  input  v_ctl;
5  output v_vco;
6  electrical v_ctl, v_vco;
7  parameter real      vco_amp = 1.0;
8  parameter real      phase_init = 0;
9  parameter real      vco_gain = 3.96899e+9 exclude 0.0;
10 parameter integer    vco_ppc = 4.0e1 from [4:inf);

12 integer N;
13 real vco_cf;
14 real wc;           // center freq in rad/s
15 real phase_lin;    // wc*time component of phase
16 real phase_nonlin; // the idt(k*f(t)) of phase
17 integer num_cycles; // number of cycles in linear phase component
18 real inst_freq;    // instantaneous frequency

20 analog begin
21     phase_lin = wc * $abstime;
22     num_cycles = phase_lin / 'M.TWO_PI;
23     phase_lin = phase_lin - num_cycles * 'M.TWO_PI;
24     if (V(v_ctl) < 0) begin
25         phase_nonlin = 'M.TWO_PI*vco_gain*idtmod(0,0,1000.0,0.0);
26     end
27     else begin
28         phase_nonlin = 'M.TWO_PI*vco_gain*idtmod(V(v_ctl),0,1000.0,0.0);
29     end
30     V(v_vco) <+ vco_amp*sin(phase_lin+phase_nonlin+phase_init);
31     inst_freq = vco_cf + vco_gain * V(v_ctl);
32     $bound_step (1/(vco_ppc*inst_freq));
33 end
34 endmodule

```

Da der Dividierer als Flankenzähler implementiert wird, lässt sich das folgende Verilog-AMS-Modell verwenden:

```
1  'include "discipline.h"
2  'include "constants.h"
3  module Divider_ideal(v_vco, v_div, Div_Ratio);
4  input  v_vco;
5  input  Div_Ratio;
6  output v_div;
7  electrical v_vco, v_div, Div_Ratio;
8  parameter real Delay1 = 4.1e-11;
9  parameter real Delay2 = 2.1e-11;
10 parameter real TransTime = 1.0e-014;
11 integer state;
12 integer N;
13 integer M;
14 real Delay;

16  analog begin

18      @ ( initial_step ) begin
19          state = 0;
20          N = 0;
21          M = 0;
22      end

24      @ ( cross(V(v_vco)-0.5,1)) begin
25          N = N + 1;
26          M = M + 1;
27          if (N >= V(Div_Ratio)) begin
28              N = 0;
29              M = 0;
30              state = 1;
31          end
32          else begin
33              if (M >= V(Div_Ratio)/2) begin
34                  M = 0;
35                  state = 0;
36              end
37          end
38      end
39      if (V(Div_Ratio)==24)
40          Delay = Delay1;
41      else begin
42          if (V(Div_Ratio)==25) begin
43              Delay = Delay2;
44          end;
45      end;
46      V(v_div) <+ transition(state, Delay, TransTime);
47  end
48 endmodule
```

---

Für den  $\Sigma\Delta$ -Modulator werden die Differenzengleichungen im Verilog-AMS-Modell umgesetzt

```
1  'include "discipline.h"
2  'include "constants.h"
3  module SDM_FirstOrder(Ref, Out);
4  input  Ref;
5  output Out;
6  electrical Ref, Out;
7  integer y2;
8  parameter integer N=24;
9  real x2;
10 real u1;
11 real u2;
12 real v1;
13 real v2;

15    analog begin

17        @ ( initial_step ) begin
18            x2 = 0.1;
19            u1 = 0;
20            v1 = 0;
21            v2 = u1+v1;
22            y2 = v2;
23        end

25        @ ( cross (V(Ref)-0.5,1)) begin
26            x2 = 0.1;
27            v2 = u1+v1;
28            y2 = v2;
29            u2 = x2-y2;

31            u1 = u2;
32            v1 = v2;

34        end
35        V(Out) <+ y2+N;
36    end
37 endmodule
```



---

## Beziehung der Determinantenmethode und der Tabellenform von Jury

---

Für die Stabilitätsprüfung von linearen zeitdiskreten Regelkreisen lässt sich das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion überprüfen. Liegen alle Nullstellen des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises, ist der Regelkreis asymptotisch stabil [77]. Das JURY-Kriterium beurteilt mittels der Koeffizienten des Polynoms die Lage der Nullstellen, wobei JURY in [82] mehrere Methoden und Vereinfachungen vorstellt. Im Folgenden werden Teile der Herleitung und der Vereinfachungen der Determinantenmethode und der Tabellenform kurz gezeigt.

Gegeben sei das Polynom

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots a_1 z^1 + a_0 \quad (\text{G.1})$$

mit komplexen Koeffizienten. Die ursprünglichen Schur-Cohn Bedingungen [82] für Nullstellen innerhalb des Einheitskreises lauten

$$\begin{aligned} |\Delta_k| &< 0 && \text{für ungerade } k \\ |\Delta_k| &> 0 && \text{für gerade } k, \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

wobei die Matrix

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ a_n^* & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0^* & a_1^* & \dots & a_{k-1}^* \\ a_{n-1}^* & a_n^* & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0^* & \dots & a_{k-2}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-k+1}^* & a_{n-k+2}^* & a_{n-k+3}^* & \dots & a_n^* & 0 & 0 & \dots & a_0^* \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

und  $k = 1 \dots n$  gegeben sind. Darüber hinaus bezeichnet  $a_k^*$  die komplexe Konjugation des Koeffizienten  $a_k$ .

Im Fall des Phasenregelkreises sind die Koeffizienten des Polynoms rein reell, sodass sich die Matrix  $\Delta_k$  mittels der Transformation

$$\Delta_k = |\mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_k| |\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k| \quad (\text{G.4})$$

vereinfachen lässt [121]. Hierbei sind

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.5})$$

und

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} a_{n-k+1} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-k+2} & \dots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.6})$$

definiert. Diese Betrachtung lässt sich weiter vereinfachen:

### 1. Eigenschaft:

Für die Vereinfachung lassen sich die Determinanten  $|\mathbf{X}_k \pm \mathbf{Y}_k|$  wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_k| &= A_k + B_k \\ |\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k| &= A_k - B_k. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

$A_k$  bezeichnet die Summe der Summanden bei denen sich das Vorzeichen nicht ändert, wenn  $\mathbf{Y}_k$  durch  $-\mathbf{Y}_k$  in  $|\mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_k|$  ersetzt wird.  $B_k$  vereint die Summanden, bei denen sich entsprechend das Vorzeichen ändert. Somit ergeben sich auf Basis

---

von den Ungleichungen (G.2) und

$$|\Delta_k| = (A_k + B_k)(A_k - B_k) = A_k^2 - B_k^2 \quad (\text{G.8})$$

die Stabilitätsbedingungen zu

$$\begin{aligned} |A_k| &< |B_k| && \text{für ungerade } k \\ |A_k| &> |B_k| && \text{für gerade } k \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

mit  $k = 1 \dots n$ .

## 2. Eigenschaft:

JURY konnte darüber hinaus zeigen, dass

$$A_n = (a_0 + a_2 + a_4 + \dots)(A_{n-1} - B_{n-1}) \quad (\text{G.10a})$$

$$B_n = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)(A_{n-1} - B_{n-1}) \quad (\text{G.10b})$$

mit  $n \geq 2$  gilt. Somit lässt sich für die letzte Bedingung ( $k = n$ )

$$A_n^2 - B_n^2 = F(1)F(-1)(A_{n-1} - B_{n-1})^2 \quad (\text{G.11})$$

zeigen. Da  $(A_{n-1} - B_{n-1})^2 > 0$  ist, muss

$$\begin{aligned} F(1)F(-1) &< 0 && \text{für ungerade } n \\ F(1)F(-1) &> 0 && \text{für gerade } n \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

gelten. Für  $a_n > 0$  ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} F(1) &> 0 \\ F(-1) &< 0 && \text{für ungerade } n \\ F(-1) &> 0 && \text{für gerade } n. \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

## 3. Eigenschaft:

Der nächste Schritt der Vereinfachung verwendet die Gleichheit

$$A_k^2 - B_k^2 = A_{k-1}A_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \quad (\text{G.14})$$

und leitet die Bedingungen

$$A_k^2 \leq B_k^2 \Leftrightarrow A_{k-1}A_{k+1} \leq B_{k-1}B_{k+1} \quad (\text{G.15})$$

ab, mit  $k = 1 \dots n - 1$ .

Diese Herleitung wird als Determinantenmethode bezeichnet, da die Determinanten von  $\mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_k$  und  $\mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_k$  ausgewertet werden. Für ein Polynom dritter Ordnung ( $n = 3$ ) ergeben sich nach Auswertung von den Beziehungen (G.2), (G.4) und (G.13)

die Bedingungen zu

$$\begin{aligned} F(1) &> 0 \\ F(-1) &< 0 \\ a_3 &> |a_0| \\ a_3^2 - a_0^2 &> a_1a_3 - a_0a_2, \end{aligned} \tag{G.16}$$

wobei rein reelle Koeffizienten und  $a_3 > 0$  angenommen wird.

In [82] leitet JURY ebenfalls eine vereinfachte Methode zur Prüfung auf ein Hurwitzpolynom her. Diese eignet sich speziell für die numerische Auswertung des Polynoms als auch für Entwurfskonzepte. Ein großer Vorteil ist, dass lediglich Determinanten zweiter Ordnung ausgewertet werden müssen. Die Bedingungen dieser Tabellenform sind wie folgt

$$\begin{aligned} F(1) &> 0 \\ F(-1) &< 0 \quad \text{für ungerade } n \\ F(-1) &> 0 \quad \text{für gerade } n \\ a_n &> |a_0| \\ |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \\ |d_0| &> |d_{n-3}| \\ &\vdots \\ |r_0| &> |r_2| \end{aligned} \tag{G.17}$$

mit reellen Koeffizienten und  $a_n > 0$ . Des Weiteren gilt

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \tag{G.18}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \tag{G.19}$$

und

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}. \tag{G.20}$$

Diese Berechnungsvorschrift wird entsprechend weiter geführt. Zusätzlich sind noch

$$r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix} \tag{G.21}$$



---

und

$$r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} \quad (\text{G.22})$$

gegeben.

Für ein Polynom dritter Ordnung ergeben sich die Bedingungen zu

$$\begin{aligned} F(1) &> 0 \\ F(-1) &< 0 \\ a_3 &> |a_0| \\ |a_3^2 - a_0^2| &> |a_1 a_3 - a_0 a_2|. \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass sich die Determinantenmethode und die Tabellenform für  $n = 3$  lediglich durch die Betragsstriche unterscheiden. Das beide Formen ineinander übergehen, zeigt der folgende Versuch mit  $n = 3$ , reellen Koeffizienten und  $a_n > 0$ . Basierend auf der Determinantenmethode ergibt sich

$$|A_1| < |B_1| \vee |a_0| < |a_3| \quad (\text{G.24a})$$

$$|A_2| < |B_2| \vee |a_3^2 - a_0^2| > |a_1 a_3 - a_0 a_2| \quad (\text{G.24b})$$

$$|A_3| < |B_3| \vee F(1) > 0 \wedge F(-1) < 0. \quad (\text{G.24c})$$

Mit der 3. Eigenschaft ergibt sich in diesem Fall

$$A_2^2 > B_2^2 \Leftrightarrow A_1 A_3 > B_1 B_3. \quad (\text{G.25})$$

Da  $B_1 = a_3 > 0$  ist, ergibt sich

$$\frac{A_1}{B_1} A_3 > B_3. \quad (\text{G.26})$$

Mit der Beziehung (G.24a), (G.24c) und (G.26) ergeben sich die neuen Bedingungen zu

$$|a_0| < a_3 \vee a_0 - a_3 < 0 \wedge a_0 + a_3 > 0 \quad (\text{G.27a})$$

$$B_3 < 0 \quad (\text{G.27b})$$

$$F(1) > 0 \wedge F(-1) < 0. \quad (\text{G.27c})$$

Hierbei ist  $B_3 = (a_1 + a_3)(A_2 - B_2)$  durch Gleichung (G.10) gegeben, wobei

$$A_2 = a_0^2 - a_3^2 \quad (\text{G.28a})$$

$$B_2 = a_0 a_2 - a_1 a_3 \quad (\text{G.28b})$$

definiert sind. Da  $a_1 + a_3 = F(1) - F(-1) > 0$  aus den Bedingungen (G.27c) gilt, ist

$B_3$  nur dann negativ wenn  $A_2 - B_2 < 0$  gilt. Die vereinfachten Bedingungen lauten schließlich

$$|a_0| < a_3 \quad (\text{G.29a})$$

$$a_3^2 - a_0^2 > a_1 a_3 - a_0 a_2 \quad (\text{G.29b})$$

$$F(1) > 0 \wedge F(-1) < 0. \quad (\text{G.29c})$$

Somit sind die Determinantenmethode und die Tabellenform für  $n = 3$  vergleichbar. In [82] wird der Zusammenhang für beliebige  $n$  gezeigt.

---

# Abbildungsverzeichnis

---

1.1. Dynamisches Verhalten des Phasenregelkreises bei unterschiedlichen Anfangsfrequenzen zur Verdeutlichung der Bifurkation . . . . .	3
2.1. Allgemeiner Aufbau eines Phasenregelkreises . . . . .	10
2.2. Darstellung der verschiedenen Klassen des Phasenregelkreises . . . .	11
2.3. Schematische Darstellung eines Frequenzsynthesizers als Phasenregelkreis . . . . .	12
2.4. Blockschaltbild einer Integer-N Charge-Pump PLL . . . . .	13
2.5. Kennlinie des idealen Tri-State Phasen- und Frequenzdetektors . . .	14
2.6. Darstellung des Verhaltens des PFD als endlicher Zustandsautomat	14
2.7. Abbildung der Charge-Pump . . . . .	16
2.8. Schaltung des Schleifenfilters . . . . .	17
2.9. BODE-Diagramme der verschiedenen Schleifenfilter . . . . .	18
2.10. Exemplarische lineare und nichtlineare Kennlinien des spannungsgesteuerten Oszillators . . . . .	19
2.11. Exemplarische Signalverläufe des Integer-N Phasenregelkreises . . .	21
2.12. Blockschaltbild einer $\Sigma\Delta$ -Fractional-N Charge-Pump PLL . . . . .	22
2.13. Blockschaltbild des $\Sigma\Delta$ -Modulators mit MASH-1-1-1 Architektur .	23
2.14. Exemplarische Signalverläufe des Fractional-N Phasenregelkreises mit konstantem Eingangswort des $\Sigma\Delta$ -Modulators der MASH-1-1-1 Architektur . . . . .	25
2.15. Exemplarische Darstellung des Leistungsdichtespektrums des Ausgangssignal des Dividierers einer Fractional-N PLL mit sowohl konstantem als auch verrauschtem (Varianz $\sigma = 10^{-6}$ ) Eingangswort des $\Sigma\Delta$ -Modulators der MASH-1-1-1 Architektur . . . . .	26
2.16. Elektrische Ersatzschaltbilder der verwendeten Schleifenfilter für die spannungsgesteuerte CP-PLL . . . . .	27

2.17. Vergleich der Dynamik des strom- und spannungsgesteuerten Phasenregelkreises zur Frequenzsynthese . . . . .	28
2.18. Blockschaltbild eines Phasenregelkreises zur Takt- und Datenrückgewinnung . . . . .	29
2.19. Blockschaltbild des Hogge-Phasendetektors für den Phasenregelkreis zur Takt- und Datenrückgewinnung . . . . .	29
2.20. Exemplarische Darstellung der Signalverläufe der Phasenregelschleife zur Takt- und Datenrückgewinnung . . . . .	30
3.1. Blockschaltbild des linearen Modells des Phasenregelkreises . . . . .	33
3.2. Verlauf der Sprungantworten des linearen Modells des Phasenregelkreises in Abhängigkeit von $\zeta$ . . . . .	34
3.3. Verlauf der Sprungantwort des linearen Modells des Phasenregelkreises für $\zeta = 0$ zur Veranschaulichung der natürlichen Eigenkreisfrequenz des Modells . . . . .	35
3.4. Signalverlauf von $\omega_{\text{div}}(t)$ bei einem Kreisfrequenzsprung zur Definition der charakteristischen Parameter im Zeitbereich des linearen Modells	36
3.5. Prinzipdarstellung der verhaltensbasierten Modellierung . . . . .	40
3.6. Verlauf der Steuerspannung eines Phasenregelkreises dritter Ordnung zur Verdeutlichung des Grundprinzips der ereignisgesteuerten Modellierung . . . . .	43
3.7. Grafische Darstellung des ereignisgesteuerten Algorithmus . . . . .	47
3.8. Vergleich der verhaltensbasierten Beschreibung mittels Simulink und des ereignisgesteuerten Modells anhand einer Integer-N PLL . . . . .	48
3.9. Ausschnitt der Simulationsergebnisse einer Fractional-N PLL basierend auf der Verhaltensbeschreibung und dem ereignisgesteuerten Modell . . . . .	49
3.10. Vergleich des linearen Modells und der ereignisgesteuerten Modellierung anhand einer Integer-N PLL . . . . .	50
4.1. Ortskurve des linearen kontinuierlichen Systems . . . . .	54
4.2. Wurzelortskurve des linearen Abtastsystems zweiter Ordnung [39] . . . . .	57
4.3. Grafische Darstellung der Stabilitätsgrenze nach Gardner für den Phasenregelkreis zweiter und dritter Ordnung mit variierendem $b$ . . . . .	59
4.4. Darstellung der Taylor-Approximation erster Ordnung der Spannungen . . . . .	65
4.5. Verlauf der Steuerspannung einer PLL dritter Ordnung zur Verdeutlichung des Grundprinzips des erweiterten ereignisgesteuerten Modells	69
4.6. Darstellung der Steuerspannung zur Verdeutlichung der Fallunterscheidung für die Herleitung der Differenzgleichungen . . . . .	70
4.7. Aufteilung des Zustandsraums der PLL . . . . .	72
4.8. Graphische Darstellung des ereignisgesteuerten Modells basierend auf den autonomen Differenzgleichungen . . . . .	77

4.9. Vergleich des Modells mit autonomen Differenzengleichungen und des Modells mit linearisierter Lösung des Schleifenfilters . . . . .	78
4.10. Grafische Darstellung der Stabilitätsbedingung (4.109) im Bereich 2 . . . . .	83
4.11. Schematische Mengendarstellung der Stabilität der linearisierten Beschreibung und der Ruhelage des nichtlinearen Modells sowie der zwei Stabilitätsbedingungen basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell . . . . .	83
4.12. Vergleich der Stabilitätsgrenze aus [3] und der Stabilitätsgrenze aus Ungleichung (4.113) . . . . .	87
4.13. Dreidimensionale Darstellung des Phasenplans für Phasenregelkreise mit unterschiedlichen Konvergenzeigenschaften . . . . .	89
4.14. Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen (Konvergenzvorhersagen) für zwei unterschiedliche Anfangsbedingungen . . . . .	90
4.15. Simulation eines Phasenregelkreises mit Grenzzyklus (zwischen den Stabilitätsbedingungen) und eines Regelkreises mit stabiler Ruhelage (auf der hergeleiteten Stabilitätsbedingung) . . . . .	91
4.16. Darstellung der Attraktivität der Ruhelage für verschiedene Anfangsbedingungen des Phasenregelkreises und einen Systementwurf zwischen den Stabilitätsgrenzen von Gardner und Ungleichung (4.113) . . . . .	92
4.17. Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsbedingungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen im Bereich $\varphi_{e0} = -2\pi \dots 2\pi$ und $f_{e0} = -f_t \dots f_t$ . . . . .	93
4.18. Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen für eine Anfangsbedingung entfernt der Ruhelage und $b = 51$ . . . . .	94
4.19. Grafische Darstellung der Überlastgrenze des Phasenregelkreises dritter Ordnung im Vergleich mit den Stabilitätsgrenzen ( $b = 51$ ) . . . . .	95
5.1. Darstellung des PFD mit integrierter Vergleichslogik zur Unterdrückung des Falls $u_{dn} = 1\text{ V}$ & $u_{up} = 1\text{ V}$ . . . . .	98
5.2. Signalverlauf des Transistor-Level Modells des PFD zur Verdeutlichung der Signallaufzeiten und der Totzone . . . . .	99
5.3. Abbildung der in dieser Arbeit verwendeten Ladungspumpe . . . . .	100
5.4. Eigenschaften der Ladungspumpe basierend auf der Transistor-Level Modellierung . . . . .	101
5.5. Schematische Darstellung des Ladungspumpenstroms zur Veranschaulichung der nicht-idealen Effekte des PFD und der Ladungspumpe basierend auf dem Transistor-Level Modell . . . . .	101
5.6. Abbildung eines single-ended current starved Ringoszillators mit Signalauffrischung . . . . .	102
5.7. Eigenschaften des Ringoszillators basierend auf der Transistor-Level Modellierung . . . . .	104

5.8. Schematische Darstellung des Phasenregelkreises mit den wesentlichen Phasenrauschquellen, wobei die hellgrauen Blöcke akkumulierendes und die dunkelgrauen Blöcke synchrones Phasenrauschen aufweisen . . . . .	105
5.9. Verschiedene Darstellungen des Leistungsdichtespektrums freilaufender Oszillatoren zur Verdeutlichung deren Phasenrauschverhaltens .	106
5.10. Darstellung des linearen Modells der CP-PLL im Frequenzbereich mit den wesentlichen Phasenrauschquellen . . . . .	107
5.11. Separate Darstellung des Phasenrauschens der PLL-Komponenten für den offenen (OL) und geschlossenen Regelkreis (CL) . . . . .	108
5.12. Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Totzone . . . . .	109
5.13. Charakteristische Kennlinie des PFD & CP Blocks mit Totzone, wobei $\tau_{rst} = 0$ und $\tau_{set} \neq 0$ gilt . . . . .	111
5.14. Modellierung der endlichen Flankensteilheit des Ladungspumpenstroms mittels Verzögerungszeiten (durchgezogene schwarze Kurve: realer Impuls – gestrichelte Kurve: idealer Impuls) . . . . .	112
5.15. Strompuls der Ladungspumpe mit linearer Näherung der endlichen Flankensteilheit . . . . .	113
5.16. Erweiterung des PFD zur Beschreibung der endlichen Steigung des Stroms . . . . .	113
5.17. Charakteristische Kennlinie des PFD & CP-Blocks mit endlicher Steigung des Stroms ( $ \gamma_{set}  =  \gamma_{rst} $ ) . . . . .	115
5.18. Strompuls der Ladungspumpe mit Totzone und endlicher Steigung (durchgezogene schwarze Kurve: modellierter Impuls – gestrichelte Kurve: realer Impuls) . . . . .	116
5.19. Spezialfall des Ladungspumpenstroms mit Totzone und endlicher Steigung . . . . .	117
5.20. Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Totzone und der endlichen Steigung des Stroms . . . . .	118
5.21. Charakteristische Kennlinie des PFD & CP-Blocks mit Totzone ( $\tau_{rst} = 0$ und $\tau_{set} \neq 0$ ) und endlicher Steigung des Stroms ( $ \gamma_{set}  =  \gamma_{rst} $ )	119
5.22. Charakteristiken des PFD mit Totzone, Leckstrom, endlicher Steigung und Überschwinger des Ladungspumpenstroms . . . . .	120
5.23. Darstellung der wesentlichen Effekte der Dividiererlaufzeiten auf den Phasenregelkreis anhand des Ladungspumpenstroms . . . . .	121
5.24. Erweiterung des PFD zur Beschreibung der Laufzeiten des Dividierers	124
5.25. Charakterisierung der Transistor-Level-basierten PLL Komponenten und deren Modellierung im ereignisgesteuerten Modell . . . . .	128
5.26. Verifikation des verallgemeinerten und erweiterten ereignisgesteuerten Modells durch eine Transistor-Level-Simulation . . . . .	130
5.27. Vergleich des Phasenrauschverhaltens des geschlossenen Regelkreises innerhalb des ereignisgesteuerten Modells (dicke schwarze Kurve) und des linearen Modells (dünne Kurven) . . . . .	132

6.1.	Darstellung der Testschaltung von Analog Devices inkl. des zu Testzwecken entworfenen Schleifenfilters . . . . .	134
6.2.	Elektrisches Schaltbild des Phasenregelkreises der Testschaltung EVAL-ADF4360-xEBZ1 Rev. E (Quelle: Basierend auf dem Datenblatt von Analog Devices) . . . . .	135
6.3.	Elektrisches Schaltbild des für die Messung verwendeten Schleifenfilters	136
6.4.	Darstellung des Einflusses der Messspitzen auf das Frequenzverhalten des Schleifenfilters und des linearen Modells der geschlossenen Regelschleife . . . . .	136
6.5.	Vergleich der VCO-Kennlinien des Datenblattes und der Messung der Testplatine . . . . .	137
6.6.	Charakterisierung des gemessenen Stromsignals innerhalb der Regelung	139
6.7.	Vergleich der gemessenen Spannungen mit den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells (der relative RMS-Fehler ist auf die Zielspannung (1,536 V) der Regelung bezogen) . . . . .	142
6.8.	Vergleich des Leistungsdichtespektrum des Phasenrauschens basierend auf der gemessenen Steuerspannung, den Ergebnissen des ereignisgesteuerten Modells und des linearen Modells . . . . .	143
6.9.	Vergleich des Leistungsdichtespektrums basierend auf der gemessenen Steuerspannung und den Ergebnissen der ereignisgesteuerten Simulation . . . . .	143
7.1.	Ereignisgesteuerte Simulationsergebnisse zur Verdeutlichung des Einflusses der Totzone auf das Phasenrauschen bei verrauschtem VCO	146
7.2.	Statische Beschreibungsfunktion der Totzone für die Betrachtung bzgl. des Phasenrauschens . . . . .	148
7.3.	Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion für unterschiedliche Weiten der Totzone und Phasenrauschen des VCOs ( $\hat{\varphi}_e = \varphi_{\text{vco}}^{\text{rms}} = 1,8\% \cdot 2\pi$ ) . . . . .	149
7.4.	Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion der Totzone und Phasenrauschen des PFD & CP Blocks ( $\hat{\varphi}_e = \max(\varphi_e(t)) = 0,64\% \cdot 2\pi$ ) . . . . .	150
7.5.	Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation und der hergeleiteten Übertragungsfunktion mit statischer Beschreibungsfunktion der Totzone und Phasenrauschen des Referenzoszillators ( $\hat{\varphi}_e = \max(\varphi_e(t)) = 1,76\% \cdot 2\pi$ ) . . . . .	151
7.6.	Vergleich des Phasenrauschens der ereignisgesteuerten Simulation für die Fractional-N CP-PLL mit Totzone, Leckstrom und schwankendem und konstantem Eingangssignal des $\Sigma\Delta$ -Modulators . . . . .	152

7.7. Positiver trapezförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte . . . . .	154
7.8. Negativer trapezförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte . . . . .	155
7.9. Positiver dreieckförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte . . . . .	155
7.10. Negativer dreieckförmiger Strompuls der Ladungspumpe zur Verdeutlichung der Berechnung des statischen Phasenfehlers unter Berücksichtigung deterministischer nicht-idealer Effekte . . . . .	156
7.11. Darstellung der Phaseebene sowie der Steuerspannung und des Phasenfehlers zur Verdeutlichung des Trennungspunktes zwischen zwei stabilen Zuständen . . . . .	159
7.12. Verlauf der Steuerspannung unter Berücksichtigung der Totzone und einer Dämpfung nahe null . . . . .	161
7.13. Verlauf der Steuerspannung unter Berücksichtigung der Totzone und einer Dämpfung nahe null (Startbedingungen liegen nahe dem Fixpunkt) . . . . .	161
7.14. Darstellung der momentanen Periodendauer aufgetragen über die momentane Amplitude der Steuerspannung . . . . .	162
7.15. Darstellung des Leistungsdichtespektrums des VCO-Signals einer idealen PLL und einer PLL mit Leckstrom und Stromüberschwinger zur Veranschaulichung der <i>SFDR</i> . . . . .	163
7.16. Darstellung des nebetonfreien Dynamikbereichs zur Verdeutlichung des Einflusses der Stromüberschwinger . . . . .	164
7.17. Darstellung des Ausrastbereichs des Phasenregelkreises zweiter Ordnung für verschiedene Breiten der Totzone und Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der nicht-idealen PLL und der eingeführten Approximation . . . . .	166
7.18. Darstellung der Durchtrittskreisfrequenz des Phasenregelkreises zweiter Ordnung für verschiedene Breiten der Totzone und Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der nicht-idealen PLL (durchgezogene Kurven) und der Approximation aus Gleichung (7.32) (gestrichelte Kurven) . . . . .	169
7.19. Simulativer Test der diskutierten Stabilitätsgrenzen unter Berücksichtigung eines Phasenregelkreises mit Totzone und einer Anfangsbedingung entfernt der Ruhelage . . . . .	171
7.20. Relative Häufigkeit und kumulative Verteilungsfunktion der Höhe der Dynamikwechsel des ereignisgesteuerten Modells bei Variation der Anfangsbedingungen $\varphi_e = 0 \dots 2\pi$ und $f_e = 0 \dots 0,99f_t$ des Phasenregelkreises zweiter Ordnung . . . . .	173



7.21. Darstellung der Häufigkeit und der Höhe der Überschwinger des ereignisgesteuerten Modells für einen variierenden Schleifenfilterwiderstand $\widetilde{R}_1 = 0,1R_1 \dots 10R_1$ des Phasenregelkreises dritter Ordnung .	175
7.22. Relative Häufigkeit der Höhe der Überschwinger des ereignisgesteuerten Modells der PLL dritter Ordnung für eine Monte-Carlo-Simulation der Parameter $R_1$ , $C_1$ , $C_2$ , $I_p$ und $K_v$ mit einer Standardabweichung von 10% des Nominalwerts . . . . .	176
7.23. Attraktivität der Ruhelagen des Phasenregelkreises mit zwei möglichen mittleren statischen Phasenfehlern für eine Variation des Widerstandes $R_1$ . . . . .	178
7.24. Exemplarische Darstellung des Schleifenfilterentwurfs anhand des Phasenrauschverhaltens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes der PLL . . . . .	185
7.25. Exemplarische Darstellung des Schleifenfilterentwurfs anhand des Phasenrauschverhaltens, der Ausregelzeit und des Dämpfungsbeiwertes der PLL mit und ohne Totzone – Blau: Gl. (7.48) rechts // Grün: Gl. (7.48) links // Lila: Gl. (7.52) // Rot: Gl. (7.47) // Schwarz: Gl. (7.53) – Gestrichelt: mit Totzone // Durchgezogen: ohne Totzone .	187
7.26. Vergleich des Phasenrauschverhaltens der idealen PLL, der PLL mit Totzone und der neu entworfenen PLL unter Berücksichtigung der Totzone . . . . .	188
A.1. Messung der PFD-Kennlinie und Vergleich mit der verwendeten Kennlinie im ereignisgesteuerten Modell . . . . .	198
B.1. Darstellung der ereignisgesteuerten Modellierung der spannungsgesteuerten CP-PLL . . . . .	202
B.2. Validierung des ereignisgesteuerten Modells der spannungsgesteuerten CP-PLL mittels Simulink Simulation . . . . .	203
B.3. Darstellung des Hogge-Phasendetektors als endlicher Zustandsautomat	205
B.4. Validierung des ereignisgesteuerten Modells der CDR-PLL mittels Simulink Simulation . . . . .	206
B.5. Darstellung des 5-State-PFD als endlicher Zustandsautomat für ein beschleunigtes Anstiegsverhalten des Phasenregelkreises . . . . .	206
B.6. Vergleich des Phasenregelkreises mit Tri-State PFD und mit 5-State PFD ( $\beta = 1$ ) zur Veranschaulichung des Einrastverhaltens bei unzureichender Auslegung der Regelschleife . . . . .	207
B.7. Vergleich des Phasenregelkreises mit 5-State PFD und verschiedenen Gewichtungen des Ladungspumpenstroms . . . . .	208
B.8. Histogramm des maximalen Überschwingers des Phasenregelkreises mit Tri-State und 5-State PFD für die Variation des initialen Phasenfehlers und der Frequenzdifferenz von Referenz- und Dividierersignal	209

B.9. Darstellung des Ausrastbereichs für verschiedene Dämpfungsbeiwerte anhand der ereignisgesteuerten Simulation der PLL zweiter Ordnung mit Tri-State PFD und 5-State PFD und der eingeführten Approximation . . . . .	209
C.1. Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes (basierend auf C. Wiegand) . . . . .	212
C.2. Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes anhand des $\pi$ -Durchganges mit negativer Steigung des absoluten Phasenfehlers .	213
C.3. Digitale Schaltung zur Detektion des Einrastzeitpunktes anhand des maximalen absoluten Phasenfehlers . . . . .	214
D.1. Grafische Benutzeroberfläche des ereignisgesteuerten Modells . . . .	218

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] BANERJEE, D.: *PLL Performance, Simulation and Design*. Third Edition. 2003
- [2] WIEGAND, C. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: A Resonance PLL-based Tracking System for Capacitive Sensors - MEMS/NEMS. In: *Smart systems integration 2010. Como, Italy, 23 - 24 March 2010*, Berlin: VDE-Verlag, 2010
- [3] GARDNER, F.: Charge-Pump Phase-Lock Loops. In: *IEEE Transactions on Communications* 28 (1980), November, Nr. 11, S. 1849 – 1858. – ISSN 0090–6778
- [4] ACCO, P. ; KENNEDY, M.P. ; MIRA, C. ; MORLEY, B. ; FRIGYIK, B.: Behavioral modeling of charge pump phase locked loops. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99* Bd. 1, 1999, S. 375 –378 vol.1
- [5] FAKHFAKH, M. (Hrsg.) ; TLELO-CUAUTLE, E. (Hrsg.) ; CASTRO-LOPEZ, R. (Hrsg.): *Analog/RF and Mixed-Signal Circuit Systematic Design*. Springer Berlin Heidelberg, 2013
- [6] BEST, R. E.: *Phase-Locked Loops*. New York : McGraw-Hill, 1984
- [7] LACAITA, A. ; LEVANTINO, S. ; SAMORI, C.: *Integrated Frequency Synthesizers for Wireless Systems*. Cambridge University Press, 2007
- [8] HUSSEIN, A.: *Design and Analysis of Fractional-N Frequency Synthesizers For Wireless Communications*. Ontario, Canada, University of Waterloo, Diss., 2002

- [9] LEE, Kun-Seok ; PARK, Byeong ha ; LEE, Han il ; YOH, Min J.: Phase frequency detectors for fast frequency acquisition in zero-dead-zone CPPLLs for mobile communication systems. In: *Solid-State Circuits Conference, 2003. ESSCIRC '03. Proceedings of the 29th European*, 2003, S. 525 –528
- [10] CHIEN, Ting-Hsu ; LIN, Chi-Sheng ; WEY, Chin-Long: A Forward Phase Detector for GSamples/s Phase-Locked Loops. In: *Third International Conference on Advances in Circuits, Electronics and Micro-Electronics (CENICS), 2010*, 2010, S. 34 –39
- [11] CHARLES, C.T. ; ALLSTOT, D.J.: A Calibrated Phase/Frequency Detector for Reference Spur Reduction in Charge-Pump PLLs. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 53 (2006), sept., Nr. 9, S. 822 –826. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2006.880030>. – DOI 10.1109/TCSII.2006.880030. – ISSN 1549–7747
- [12] BAKEER, H.G. ; SHAHEEN, O. ; EISSA, H.M. ; DESSOUKY, M.: Analog, Digital and Mixed-Signal Design Flows. In: *Design and Test Workshop, 2007. IDT 2007. 2nd International*, 2007, S. 247–252
- [13] WANG, Y. ; VAN-MEERSBERGEN, C. ; GROH, H.-W. ; HEINEN, S.: Event driven analog modeling for the verification of PLL frequency synthesizers. In: *Behavioral Modeling and Simulation Workshop, 2009. BMAS 2009. IEEE*, 2009, S. 25 –30
- [14] OSMANY, S. A.: *Design and Analysis of Agile Frequency Synthesizer for Software-Defined Radio Applications*, Universität Ulm, Diss., 2011
- [15] ANTAO, B. A. A. ; EL-TURKY, F. M. ; LEONOWICH, R. H.: Behavioral modeling phase-locked loops for mixed-mode simulation. In: *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 10 (1996), S. 45–65. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00713978>. – DOI 10.1007/BF00713978. – ISSN 0925–1030
- [16] WILLIAMS, S. ; CAVIGLIA, T.: Simulating PLL Reference Spurs / [www.rfdesign.com](http://www.rfdesign.com). 2006. – Forschungsbericht
- [17] HUANG, S. ; MA, H. ; WANG, Z.: Modeling and Simulation to the Design of Sigma-Delta Fractional-N Frequency Synthesizer. In: *2007 Design, Automation Test in Europe Conference Exhibition*, 2007. – ISSN 1530–1591, S. 1–6
- [18] MISHRA, B. K. ; SAVE, S. ; PATIL, S.: Design and Analysis of Second and Third Order PLL at 450 MHz. In: *International Journal of VLSI design & Communication Systems* 2 (2011), S. 97–104

- [19] HEDAYAT, C. D. ; HACHEM, A. ; LEDUC, Y. ; BENBASSAT, G.: Modeling and Characterization of the 3rd Order Charge-Pump PLL: a Fully Event-driven Approach. In: *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 19 (1999), Nr. 1, S. 25–45
- [20] HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Stability Analysis of a Charge Pump Phase-Locked Loop Using Autonomous Difference Equations. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 61 (2014), Sept, Nr. 9, S. 2569–2577. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2014.2333331>. – DOI 10.1109/TCSI.2014.2333331. – ISSN 1549–8328
- [21] LI, Yao ; ISKANDER, R. ; JAVID, F. ; LOUERAT, M.-M.: A unified platform for design and verification of mixed-signal systems based on SystemC AMS. In: *Specification and Design Languages (FDL), 2012 Forum on*, 2012. – ISSN 1636–9874, S. 75–82
- [22] PERROTT, M.H.: Fast and accurate behavioral simulation of fractional-N frequency synthesizers and other PLL/DLL circuits. In: *Design Automation Conference, 2002. Proceedings. 39th*, 2002. – ISSN 0738–100X, S. 498–503
- [23] PERROTT, M.H.: *Fractional-N Frequency Synthesizer Design Using The PLL Design Assistant and CppSim Programs*, July 2008. <http://www.cppsim.com>
- [24] HEDAYAT, C. D. ; HACHEM, A. ; LEDUC, Y. ; BENBASSAT, G.: High-level modeling applied to the second-order charge-pump PLL circuit. In: *Texas Instruments Technical Journal* 14 (1997), March-April, S. 99–108
- [25] VAN PAEMEL, M.: Analysis of a charge-pump PLL: a new model. In: *IEEE Transactions on Communications* 42 (1994), Juli, Nr. 7, S. 2490 –2498. <http://dx.doi.org/10.1109/26.297861>. – DOI 10.1109/26.297861. – ISSN 0090–6778
- [26] DEMIR, A. ; LIU, E. ; SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A.L. ; VASSILIOU, I.: Behavioral simulation techniques for phase/delay-locked systems. In: *Custom Integrated Circuits Conference, 1994., Proceedings of the IEEE 1994*, 1994, S. 453 –456
- [27] ARMAROLI, D. ; LIBERALI, V. ; VACCHI, C.: Behavioural analysis of charge-pump PLL's. In: *Circuits and Systems, 1995., Proceedings., Proceedings of the 38th Midwest Symposium on* Bd. 2, 1995, S. 893 –896 vol.2
- [28] DANIELS, B. ; FARRELL, R.: Nonlinear analysis of the 2nd order digital phase locked loop. In: *Signals and Systems Conference, 2008. (ISSC 2008). IET Irish*, 2008. – ISSN 0537–9989, S. 66 –71

- [29] YI, Xu ; HONGBING, Qiu: Modeling and Simulation of the Locking Process of a 4th Order Microwave Frequency-Hopping PLL Synthesizer. In: *Computer Science and Software Engineering, 2008 International Conference on* Bd. 2, 2008, S. 215 –218
- [30] ACCO, P.: *Why do we linearise Charge Pump PLL equations so early?*
- [31] ACCO, P.: *Inverse nonlinear model of the CP-PLL*. 2002
- [32] BARNASCONI, M. ; EINWICH, K. ; GRIMM, C. ; MAEHNE, T. ; VACHOUX, A.: *Advancing the SystemC Analog/Mixed-Signal (AMS) Extensions - Introducing Dynamic Timed Data Flow*. [www.accellera.org/resources/articles/amsdynamictdf](http://www.accellera.org/resources/articles/amsdynamictdf). Version: September 2011
- [33] DANIELS, B.: *Analysis and Design of High Order Digital Phase Locked Loops*, The National University of Ireland, Diss., December 2008
- [34] DANIELS, B. ; FARRELL, R. ; BALDWIN, G.: Arbitrary Order Charge Approximation Event Driven Phase Lock Loop Model. In: *The Irish Signals and Systems Conference 2004: ISSC 2004*, 2004
- [35] DANIELS, B. ; BALDWIN, G. ; FARRELL, R. ; MCLOONE, S.: Modelling and Design of High-Order Phase Locked Loops. In: *Proceedings of the SPIE 5837*, 2005, S. 278–287
- [36] DANIELS, B. ; FARRELL, R.: Design of Fourth Order Digital PLLs Using Filter Prototypes. In: *Norchip Conference, 2006. 24th*, 2006, S. 243 –246
- [37] DANIELS, Brian ; FARRELL, Ronan: Stability Analysis Of High Frequency Digital Phase Locked Loops using Piecewise Linear Model. In: *Irish Signals and Systems Conference, 2006. IET*, 2006, S. 395 –400
- [38] WIEGAND, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Non-linear behaviour of charge-pump phase-locked loops. In: *Advances in Radio Science* 8 (2010), S. 161–166
- [39] WIEGAND, C.: *Beiträge zur Analyse, Modellierung und Simulation digitaler Phasenregelkreise*, Universität Paderborn, Diss., 2012. <http://digital.ub.uni-paderborn.de/hs/content/titleinfo/530189>
- [40] WIEGAND, C. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Modeling and simulation of arbitrary ordered nonlinear charge-pump phase-locked loops. In: *Semiconductor Conference Dresden (SCD), 2011*, 2011, S. 1–4
- [41] PERROTT, M.H. ; TROTT, M.D. ; SODINI, C.G.: A modeling approach for Sigma;- Delta; fractional-N frequency synthesizers allowing straightforward noise analysis. In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 37 (2002), August,

- Nr. 8, S. 1028 – 1038. <http://dx.doi.org/10.1109/JSSC.2002.800925>. – DOI 10.1109/JSSC.2002.800925. – ISSN 0018–9200
- [42] CASSIA, M. ; SHAH, P. ; BRUUN, E.: Analytical model and behavioral simulation approach for a Sigma; Delta; fractional-N synthesizer employing a sample-hold element. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing* 50 (2003), nov., Nr. 11, S. 850 – 859. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2003.819138>. – DOI 10.1109/TCSII.2003.819138. – ISSN 1057–7130
- [43] KOZAK, M. ; FRIEDMAN, E.G.: Design and simulation of Fractional-N PLL frequency synthesizers. In: *Proceedings of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04*. Bd. 4, 2004, S. IV – 780–3 Vol.4
- [44] MENINGER, S.E. ; PERROTT, M.H.: Bandwidth extension of low noise fractional-N synthesizers. In: *Radio Frequency integrated Circuits (RFIC) Symposium, 2005. Digest of Papers. 2005 IEEE*, 2005. – ISSN 1529–2517, S. 211 – 214
- [45] MAFFEZZONI, P. ; LEVANTINO, S.: Analysis of VCO Phase Noise in Charge-Pump Phase-Locked Loops. In: *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on* 59 (2012), Nr. 10, S. 2165–2175. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2012.2185312>. – DOI 10.1109/TCSI.2012.2185312. – ISSN 1549–8328
- [46] MARGARIS, N. ; PETRIDIS, V.: Voltage Pump Phase-Locked Loops. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* IE-32 (1985), feb., Nr. 1, S. 41 –49. <http://dx.doi.org/10.1109/TIE.1985.350140>. – DOI 10.1109/TIE.1985.350140. – ISSN 0278–0046
- [47] KARACA, H. ; KILINC, S. ; YUKSEL, Y.: Modeling of voltage output charge-pump phase frequency detector in tuning loops. In: *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on* 52 (2005), June, Nr. 6, S. 304–307. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2005.848953>. – DOI 10.1109/TCSII.2005.848953. – ISSN 1549–7747
- [48] FEELY, O.: Nonlinear dynamics of first-order DPLL with FM input. In: *Circuits and Systems, 2000. Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on* Bd. 4, 2000, S. 477 –480 vol.4
- [49] DA DALT, N.: Markov Chains-Based Derivation of the Phase Detector Gain in Bang-Bang PLLs. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 53 (2006), nov., Nr. 11, S. 1195 –1199. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2006.883197>. – DOI 10.1109/TCSII.2006.883197. – ISSN 1549–7747

- [50] TEPLINSKY, A. ; FLYNN, R. ; FEELY, O.: Limit cycles in bang-bang phase-locked loops. In: *Proceedings. 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2006. ISCAS 2006*, 2006, S. 4 pp.
- [51] DA DALT, N.: Linearized Analysis of a Digital Bang-Bang PLL and Its Validity Limits Applied to Jitter Transfer and Jitter Generation. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 55 (2008), dec., Nr. 11, S. 3663 –3675. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2008.925948>. – DOI 10.1109/TCSI.2008.925948. – ISSN 1549–8328
- [52] TERTINEK, S. ; GLEESON, J.P. ; FEELY, O.: Binary Phase Detector Gain in Bang-Bang Phase-Locked Loops With DCO Jitter. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 57 (2010), dec., Nr. 12, S. 941 – 945. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2010.2083110>. – DOI 10.1109/TCSII.2010.2083110. – ISSN 1549–7747
- [53] TERTINEK, S. ; GLEESON, J.P. ; FEELY, O.: Statistical Analysis of First-Order Bang-Bang Phase-Locked Loops Using Sign-Dependent Random-Walk Theory. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 57 (2010), sept., Nr. 9, S. 2367 –2380. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2010.2043016>. – DOI 10.1109/TCSI.2010.2043016. – ISSN 1549–8328
- [54] TEPLINSKY, A. ; FLYNN, R. ; FEELY, O.: Dynamical patterns of bang-bang phase-locked loops. In: *Proceedings of the 2005 European Conference on Circuit Theory and Design, 2005* Bd. 3, 2005, S. III/405 – III/408 vol. 3
- [55] RENNIE, D. ; SACHDEV, M.: Comparative Robustness of CML Phase Detectors for Clock and Data Recovery Circuits. In: *Quality Electronic Design, 2007. ISQED '07. 8th International Symposium on*, 2007, S. 305–310
- [56] ALI, E.: *Fast and Efficient Behavioral Modeling and Design Methodology of Mixed-Signal PLLs*, Aix-Marseille University, Diss., 2015
- [57] RHEE, W.: Design of high-performance CMOS charge pumps in phase-locked loops. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99*. Bd. 2, 1999, S. 545 –548 vol.2
- [58] ABDELFAH, O. ; SHIH, I. ; ROBERTS, G.: Analytical comparison between passive loop filter topologies for frequency synthesizer PLLs. In: *New Circuits and Systems Conference (NEWCAS), 2013 IEEE 11th International*, 2013, S. 1–4
- [59] CHRISTOFFERS, N.: *Entwurf Sigma-Delta-PLL-basierter Frequenzgeneratoren höherer Ordnung für drahtlose digitale Kommunikationssysteme*, Universität Duisburg-Essen, Diss., 2004



- [60] SHU, K. ; SANCHEZ-SINENCIO, E.: *CMOS PLL Synthesizers - Analysis and Design*. Springer, 2005
- [61] GU, R. ; RAMASWAMY, S.: Fractional-N Phase locked Loop Design and Applications. In: *ASIC, 2007. ASICON '07. 7th International Conference on*, 2007, S. 327 –332
- [62] FAHIM, A.M. ; ELMASRY, M.I.: A wideband sigma-delta phase-locked-loop modulator for wireless applications. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing* 50 (2003), Februar, Nr. 2, S. 53 – 62. – ISSN 1057–7130
- [63] KOZAK, M. ; KALE, I.: Rigorous analysis of delta-sigma modulators for fractional-N PLL frequency synthesis. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 51 (2004), Nr. 6, S. 1148 – 1162. – ISSN 1549–8328
- [64] ALI, E. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; HADDAD, F. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C.: Simulations of 3rd order voltage switched CP-PLL using a fast event switching macromodeling. In: *57th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2014 IEEE*, 2014. – ISSN 1548–3746, S. 491–494
- [65] ALI, E. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HADDAD, F. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; HILLERINGMANN, U.: Event Driven Modeling and Characterization of the Second Order Voltage Switched Charge Pump PLL. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 63 (2016), March, Nr. 3, S. 347–358. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2015.2512759>. – DOI 10.1109/TCSI.2015.2512759. – ISSN 1549–8328
- [66] HOGGE, Jr. C.R.: A self correcting clock recovery circuit. In: *Lightwave Technology, Journal of* 3 (1985), Nr. 6, S. 1312–1314. <http://dx.doi.org/10.1109/JLT.1985.1074356>. – DOI 10.1109/JLT.1985.1074356. – ISSN 0733–8724
- [67] HINZ, M.: *Neue Methoden zur Verhaltensmodellierung und Charakterisierung eines analog /digital-Systems am Beispiel einer Phasenregelschleife*, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Diss., 2008
- [68] MÄHNE, Torsten: *Efficient Modelling and Simulation Methodology for the Design of Mixed-Signal Systems on Chip*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Diss., 2011. <http://dx.doi.org/10.5075/epfl-thesis-4993>. – DOI 10.5075/epfl-thesis-4993
- [69] LAI, Xiaolue ; WAN, Yayun ; ROYCHOWDHURY, J.: Fast PLL simulation using nonlinear VCO macromodels for accurate prediction of jitter and cycle-slipping due to loop nonidealities and supply noise. In: *Design Automation*

- Conference, 2005. Proceedings of the ASP-DAC 2005. Asia and South Pacific*  
Bd. 1, 2005, S. 459–464 Vol. 1
- [70] PERROTT, M.H.: *CppSim / VppSim Primer*, May 2014. <http://www.cppsim.com>. – Version 5.3
  - [71] JOERES, S. ; GROH, H.-W. ; HEINEN, S.: Event driven analog modeling of RF frontends. In: *Behavioral Modeling and Simulation Workshop, 2007. BMAS 2007. IEEE International*, 2007, S. 46–51
  - [72] BARNASCONI, M.: *SystemC AMS Extensions: Solving the Need for Speed*. DAC.COM KNOWLEDGE CENTER ARTICLE. <http://accellera.org/resources/articles/amsspeed>. Version: May 2010
  - [73] VACHOUX, A. ; GRIMM, C. ; EINWICH, K.: Extending SystemC to support mixed discrete-continuous system modeling and simulation. In: *2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2005. – ISSN 0271–4302, S. 5166–5169 Vol. 5
  - [74] HARTMANN, P. A. ; REINKEMEIER, P. ; RETTBERG, A. ; NEBEL, W.: Modelling control systems in SystemC AMS - Benefits and limitations. In: *2009 IEEE International SOC Conference (SOCC)*, 2009. – ISSN 2164–1676, S. 263–266
  - [75] XU, T. ; ARRIËNS, H. L. ; LEUKEN, R. van ; GRAAF, A. de: A precise SystemC-AMS model for Charge Pump Phase Lock Loop with multiphase outputs. In: *2009 IEEE 8th International Conference on ASIC*, 2009. – ISSN 2162–7541, S. 50–53
  - [76] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Harri Deutsch, 2001. – ISBN 9783817120079
  - [77] ZACHER, S. ; REUTER, M.: *Regelungstechnik für Ingenieure - Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen*. 13. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011
  - [78] LUTZ, H. ; WENDT, W.: *Taschenbuch der Regelungstechnik*. Verlag Harri Deutsch, 2007
  - [79] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I : Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15., überarbeitete und erweiterte Auflage. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008. – ISBN 978–3–8348–0497–6, 978–3–8348–9491–5

- [80] FÖLLINGER, Otto ; DÖRRSCHEIDT, Frank ; KLITTICH, Manfred: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 10., durchges. Aufl. Hüthig Verlag, Heidelberg, 2008. – ISBN 978-3-7785-2970-6
- [81] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [82] JURY, Eliahu I.: *Theory and application of the z-transform method*. Reprint. with corr. Huntington, NY : Krieger, 1973. – ISBN 0-88275-122-0
- [83] SCHÄFER, W.: *Theoretische Grundlagen der Stabilität technische Systeme*. Vieweg Braunschweig, 1976. – ISBN 3528068167
- [84] FÖLLINGER, O.: *Lineare Abtastsysteme*. 3., verb. Aufl. München, Wien, Oldenbourg, 1986 (Methoden der Regelungstechnik). – ISBN 3-486-20265-0
- [85] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II : Zustandsregelungen, digitale und nicht-lineare Regelsysteme*. 9., durchgesehene und korrigierte Auflage. Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2007. – ISBN 978-3-528-83348-0, 978-3-8348-9139-6
- [86] JURY, E. I.: A Simplified Stability Criterion for Linear Discrete Systems. In: *Proceedings of the IRE* 50 (1962), June, Nr. 6, S. 1493–1500. <http://dx.doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288193>. – DOI 10.1109/JRPROC.1962.288193. – ISSN 0096-8390
- [87] DANIELS, B. ; FARRELL, R.: Rigorous Stability Criterion for Digital Phase Locked Loops. In: *ISAST Transactions on Electronics and Signal Processing* 3 (2008), S. 1 – 10
- [88] YOU, Fei ; HE, Songbai: Analysis of third-order charge pump PLL. In: *Communications, Circuits and Systems, 2004. ICCCAS 2004. 2004 International Conference on* Bd. 2, 2004, S. 1372–1376 Vol.2
- [89] XI, X. ; DUNGA, M. ; HE, J. ; LIU, W. ; CAO, K.M. ; JIN, X. ; OU, J.J. ; CHAN, M. ; NIKNEJAD, A.M. ; HU, C.: *BSIM4.3.0 MOSFET Model*. University of California, Berkeley, CA 94720: Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, 2003
- [90] CHEN, W. H. ; INEROWICZ, M. E. ; JUNG, B.: Phase Frequency Detector With Minimal Blind Zone for Fast Frequency Acquisition. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 57 (2010), Dec, Nr. 12, S. 936–940. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSII.2010.2087951>. – DOI 10.1109/TCSII.2010.2087951. – ISSN 1549-7747
- [91] *Kapitel 4*. In: BURBIDGE, Martin J. ; RICHARDSON, Andrew: *Phase Locked Loop Test Methodologies*. Boston, MA : Springer US, 2004. – ISBN 978-0-387-23521-9, 99-136

- [92] KUNDERT, K. S.: *Predicting the Phase Noise and Jitter of PLL-Based Frequency Synthesizers*. Los Altos, CA 94022, USA: Designers Guide Consulting, Inc., 2012. [www.designers-guide.com](http://www.designers-guide.com)
- [93] HAJIMIRI, A.: Noise in phase-locked loops. In: *Mixed-Signal Design, 2001. SSMSD. 2001 Southwest Symposium on*, 2001, S. 1–6
- [94] KROUPA, V. F.: *Phase Lock Loops and Frequency Synthesis*. Wiley, 2003
- [95] OSMANY, S. A. ; HERZEL, F. ; SCHMALZ, K. ; WINKLER, W.: Phase noise and jitter modeling for fractional-N PLLs. In: *Advances in Radio Science* 5 (2007), S. 313–320. <http://dx.doi.org/10.5194/ars-5-313-2007>. – DOI 10.5194/ars-5-313-2007
- [96] MCNEILL, J. A. ; RICKETTS, D. S.: *The Designer's Guide to Jitter in Ring Oscillators*. Springer Verlag, 2009
- [97] HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Enhanced event-driven modeling of a CP-PLL with nonlinearities and nonidealities. In: *56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2013 IEEE*, 2013. – ISSN 1548–3746, S. 309–312
- [98] HANGMANN, C. ; WÜLLNER, I. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Modeling and Characterization of CP-PLL Phase Noise in Presence of Dead Zone. In: *New Circuits and Systems Conference (NEWCAS), 2014 IEEE 12th International*, 2014, S. 349–352
- [99] HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Extended Event-Driven Modeling of a Sigma-Delta-Fractional-N PLL Including Non-Ideal Effects. In: *21st International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, 2014, S. 100–103
- [100] HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Fast and Accurate Event-Driven Simulation of a Mixed-Signal System Using the Example of a PLL. In: *Smart System Integration - International Conference and Exhibition on Integration Issues of Miniaturized Systems*, 2015. – ISBN 978–3–86359–296–7, S. 396–401
- [101] MAFFEZZONI, P. ; BAHR, B. ; ZHANG, Z. ; DANIEL, L.: Reducing Phase Noise in Multi-Phase Oscillators. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 63 (2016), March, Nr. 3, S. 379–388. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2016.2525078>. – DOI 10.1109/TCSI.2016.2525078. – ISSN 1549–8328
- [102] FATAHI, N. ; NABOVATI, H.: Design of low noise fractional-N frequency synthesizer using sigma-delta modulation technique. In: *Microelectronics Proceedings (MIEL), 2010 27th International Conference on*, 2010, S. 369 –372

- [103] ANALOG DEVICES INC.: *Integrated Synthesizer and VCO - ADF4360-1 (Rev. C)*. [www.analog.com/en/products/rf-microwave/pll-synth/plls-w-integrated-vcos/adf4360-1.html](http://www.analog.com/en/products/rf-microwave/pll-synth/plls-w-integrated-vcos/adf4360-1.html). Version: 2012. – Downloaded: 04.03.2015
- [104] GARDNER, F.: Phase Accuracy of Charge Pump PLL's. In: *IEEE Transactions on Communications* 30 (1982), oct, Nr. 10, S. 2362 – 2363. <http://dx.doi.org/10.1109/TCOM.1982.1095413>. – DOI 10.1109/TCOM.1982.1095413. – ISSN 0090-6778
- [105] COLLINS, D. ; KEADY, A. ; SZCZEPKOWSKI, G. ; FARRELL, R.: Fast Digital Calibration of Static Phase Offset in Charge-Pump Phase-Locked Loops. In: *22nd IET Irish Signals and Systems Conference (ISSC)*, 2011
- [106] WANG, Ping-Ying: Chaos In Phase Locked Loop. In: *VLSI Design, Automation and Test, 2006 International Symposium on*, 2006, S. 1–2
- [107] ALI, E. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; TALL, N. ; HADDAD, F. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C.: Modeling and PVT characterization of arbitrary ordered VSCP-PLL using an efficient event-driven approach. In: *IEEE 13th International New Circuits and Systems Conference (NEWCAS)*, 2015, S. 1–4
- [108] THOMPSON, I.V. ; BRENNAN, P.V.: Fourth-order PLL loop filter design technique with invariant natural frequency and phase margin. In: *Circuits, Devices and Systems, IEE Proceedings - 152* (2005), Nr. 2, S. 103 – 108. <http://dx.doi.org/10.1049/ip-cds:20041201>. – DOI 10.1049/ip-cds:20041201. – ISSN 1350-2409
- [109] JIANG, B. ; XIA, T. ; WANG, G.: PLL low pass filter design considering unified specification constraints. In: *Analog Integrated Circuits and Signal Processing* 80 (2014), Nr. 1, S. 113–120. <http://dx.doi.org/10.1007/s10470-014-0312-2>. – DOI 10.1007/s10470-014-0312-2. – ISSN 0925-1030
- [110] MARI, C. ; GARDINI, L. ; BARUGOLA, A. ; CATHALA, J.-C. ; CHUA, L. O. (Hrsg.): *A. Bd. 20: Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*. World Scientific - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. – ISBN 981-02-1647-5
- [111] WATADA, K. ; ENDO, T. ; SEISHI, H.: Shilnikov orbits in an autonomous third-order chaotic phase-locked loop. In: *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on* 45 (1998), sep, Nr. 9, S. 979 – 983. <http://dx.doi.org/10.1109/81.721264>. – DOI 10.1109/81.721264. – ISSN 1057-7122

- [112] KOUSAKA, T. ; UMAKOSHI, Y. ; UETA, T. ; KAWAKAMI, H.: Bifurcation of nonlinear circuits with periodically operating switch. In: *Electronics and Communications in Japan* 84 (2001), May, Nr. 1, S. 75 – 83
- [113] GIAOURIS, D. ; ELBKOSH, A. ; BANERJEE, S. ; ZAHAWI, B. ; PICKERT, V.: Stability of switching circuits using complete-cycle solution matrices. In: *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, 2006, S. 1954 –1959
- [114] ALI, E. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; HADDAD, F. ; TALL, N. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C.: Simulation and validation of arbitrary ordered VSCP-PLLs using event-driven macromodeling. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2015, S. 878–881
- [115] ALI, E. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; HADDAD, F. ; TALL, N. ; HANGMANN, C. ; HEDAYAT, C.: Exact and approximated discrete-time non-linear models of voltage switched CP-PLL. In: *IEEE 58th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2015, S. 1–4
- [116] ALI, E. ; RAHAJANDRAIBE, W. ; HADDAD, F. ; HEDAYAT, C. ; HANGMANN, C.: Simulative characterization of the stability for second order voltage switched CP-PLL. In: *Circuits and Systems (MWSCAS), 2013 IEEE 56th International Midwest Symposium on*, 2013. – ISSN 1548–3746, S. 153–156
- [117] ALI, E. ; HANGMANN, C. ; WIEGAND, C. ; HEDAYAT, C. ; KRAUS, D.: Event-Driven Simulation of the 2nd Order Voltage Operated Charge-Pump PLL. In: *SAME 2012, 15th Edition*, 2012
- [118] HEDAYAT, C. D.: *Modélisation et simulation à haut niveau du fonctionnement et des caractéristiques de la boucle à verrouillage de phase à pompe de charges*, Université de Nice Sophia-Antipolis, Diss., 1998
- [119] DIXIT, A.: *PLL Lock Detector*. [www.google.com.ar/patents/US6744838](http://www.google.com.ar/patents/US6744838). Version: 2004
- [120] WIEGAND, C. ; HEDAYAT, C. ; HILLERINGMANN, U.: Lock detection for charge-pump phase-locked loops. In: *Same 2009 Forum - University Booth* (2009). [http://same-conference.org/same\\_2009/](http://same-conference.org/same_2009/)
- [121] COHN, A.: Über die Anzahl von Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreis. In: *Mathematische Zeitschrift* (1918)

## Eigene themenbezogene Veröffentlichungen

Diese Liste ist nach Datum sortiert und beginnt mit der aktuellsten Veröffentlichung.

- [65] ALI, E.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HADDAD, F.; RAHAJANDRAIBE, W.; HILLERINGMANN, U.: Event Driven Modeling and Characterization of the Second Order Voltage Switched Charge Pump PLL. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 63 (2016), March, Nr. 3, S. 347-358
- [100] HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Fast and Accurate Event-Driven Simulation of a Mixed-Signal System Using the Example of a PLL. In: *Smart System Integration - International Conference and Exhibition on Integration Issues of Miniaturized Systems*, 2015. -ISBN 978-3-86359-296-7, S. 396-401
- [114] ALI, E.; RAHAJANDRAIBE, W.; HADDAD, F.; TALL, N.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.: Simulation and validation of arbitrary ordered VSCP-PLLs using event-driven macromodeling. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2015, S. 878-881
- [115] ALI, E.; RAHAJANDRAIBE, W.; HADDAD, F.; TALL, N.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.: Exact and Approximated Discrete-Time Non-Linear Model of Voltage Switched CP-PLL. In: *IEEE 58th International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2015
- [107] ALI, E.; RAHAJANDRAIBE, W.; HADDAD, F.; TALL, N.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.: Modeling and PVT characterization of arbitrary ordered VSCP-PLL using an efficient event-driven approach. In: *IEEE 13th International New Circuits and Systems Conference (NEWCAS)*, 2015, S. 1-4
- [20] HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Stability Analysis of a Charge Pump Phase-Locked Loop using Autonomous Difference Equations. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 61 (2014), Sept, Nr. 9, S. 2569-2577 – ISSN 1549–8328
- [99] HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Extended Event-Driven Modeling of a Sigma-Delta-Fractional-N PLL Including Non-Ideal Effects. In: *21st International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, 2014
- [98] HANGMANN, C.; WÜLLNER, I.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Modeling and Characterization of CP-PLL Phase Noise in Presence of Dead Zone. In: *New Circuits and Systems Conference (NEWCAS), 2014 IEEE 12th International*, 2014, S. 349-352

- [64] ALI, E.; RAHAJANDRAIBE, W.; HADDAD, F.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.: Simulations of 3rd order voltage switched CP-PLL using a fast event switching macromodeling. In: *57th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2014 IEEE*, 2014. – ISSN 1548–3746, S. 491–494
- [97] HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Enhanced Event-Driven Modeling of a CP-PLL with Nonlinearities and Nonidealities. In: *56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2013 IEEE*, 2013 - ISSN 1548–3746, S. 309–312
- [116] ALI, E.; RAHAJANDRAIBE, W.; HADDAD, F.; HEDAYAT, C.; HANGMANN, C.: Simulative Characterization of the Stability for Second Order Voltage Switched CP-PLL. In: *IEEE 56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2013. – ISSN 1548–3746, S. 153–156
- [117] ALI, E.; HANGMANN, C.; WIEGAND, C.; HEDAYAT, C.; KRAUS, D.: Event-Driven Simulation of the 2nd Order Voltage Operated Charge-Pump PLL. In: *SAME 2012, 15th Edition*, 2012
- [40] WIEGAND, C.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: Modeling and simulation of arbitrary ordered nonlinear charge-pump phase-locked loops. In: *Semiconductor Conference Dresden (SCD), 2011*, 2011, S. 1-4
- [38] WIEGAND, C.; HANGMANN, C.; HEDAYAT, C.; HILLERINGMANN, U.: A Resonance PLL-based Tracking System for Capacitive Sensors - MEMS/NEMS. In: *Smart systems integration 2010. Como, Italy, 23 - 24 March 2010*, Berlin: VDE-Verlag, 2010



---

# Stichwortverzeichnis

---

- Überschwinger, 37, 173, 208
- Abtastverhältnis, 59
- Anstiegszeit, 36
- Ausrastbereich, 38, 165, 186
- Ausregelzeit, 37, 183
- Autonome Differenzgleichungen, 62
- Basin Of Attraction, 91
- Beschreibungsfunktion, 147
- Dämpfungsbeiwert, 34, 167, 183
- Dividierer
  - Aufbau, 103
  - Fractional-N PLL, 22
  - Integer-N PLL, 20
  - lineares Modell, 33
- Dividiererlaufzeit
  - ED-Modell, 121
  - Transistor-Level, 103
- Durchtrittsfrequenz, 54, 168, 180
- Einrastdetektion, 211
- False Locking, 14, 207
- Hurwitz-Stabilitätskriterium, 55
- indirekte Lyapunov-Methode, 61
- Jitter, 105
- Jury-Stabilitätskriterium, 80
- Ladungspumpe
  - Aufbau, 100
  - Verhalten, 16
  - lineares Modell, 32
- Leckstrom
  - ED-Modell, 118
  - ED-Modell der VO-CP-PLL, 204
  - Messung, 139
  - Transistor-Level, 101
  - spektrale Reinheit, 163
  - und Phasenrauschen, 152
- Leistungsdichtespektrum, 24
- Locked, 20
- Monte-Carlo Simulation, 176
- natürliche Eigenkreisfrequenz, 34, 167, 181
- Out Of Lock, 20
- Phasen- und Frequenzdetektor
  - 5-State PFD, 206
  - Aufbau, 98
  - Verhalten, 13
  - lineares Modell, 32

Phasenfehlernulldurchgang, 38

Phasenrauschen, 105, 124, 146, 183

Schleifenfilter

- CO-CP-PLL, 17

- Messung, 135

- VO-CP-PLL, 27

Sekantenverfahren, 45

Settled, 20

Sigma-Delta Modulator, 22

Simulationsdauer, 48, 49, 129

Spur Free Dynamic Range, 163

Stabilitätsbedingung

- 2. Ordnung nach Gardner, 57

- 3. Ordnung basierend auf dem ereignisgesteuerten Modell, 84

- 3. Ordnung nach Gardner, 58

- 3. Ordnung nach der empirischen Grenze, 60

statischer Phasenfehler, 153, 177

Stromsteigung

- ED-Modell, 112

- Messung, 140

- Transistor-Level, 101

- spektrale Reinheit, 165

Totzone

- Event-Driven Modell, 109

- Messung, 140

- Transistor-Level, 99

- und Phasenrauschen, 146

- ungedämpfte PLL, 160

Transistionsmatrix, 63

Trennungspunkt, 3, 158

Typ-II Regelkreis, 152

VCO

- Aufbau, 102

- Verhalten, 19

- lineares Modell, 32

Zustandsraumdarstellung, 17