Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule.

Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität

Dissertation

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Leander Kempen

an der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der Universität Paderborn

2017

für meine Eltern

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die forschungsbasierte (Weiter-) Entwicklung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" beschrieben, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und hierbei in einem besonderen Maße das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' unter dem Aspekt der doppelten Diskontinuität fokussiert. Im Sinne der Forschungsmethode des Design-Based Research wurden vier Durchführungen der Lehrveranstaltung in dem Zeitraum von 2010 bis 2015 begleitend beforscht, retrospektiv analysiert und prospektiv ausgewertet. Die Forschung wurde dabei durch die Verwendung der Theorien des „Diagrammatischen Schließens" nach Peirce und der „Sozio-mathematischen" Normen nach Yackel und Cobb geleitet. Als Ergebnisse dieser Forschungsarbeit ergeben sich der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen', die Entwicklung verschiedener Testinstrumente, welche die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden ermöglichen, empirische Ergebnisse bzgl. der Beweiskompetenzen von Lehramtsstudierenden (Haupt-, Real und Gesamtschule) zu Beginn ihres Studiums und verschiedene Beiträge zur Theoriebildung und Theorieentwicklung in Bezug auf die Didaktik des Beweises; darunter: die Diskussion um generische Beweise als vollgültige mathematische Beweise, die Darstellung der Enkulturationsfunktion von Beweisen, die Betonung des Konstrukts der Beweisakzeptanz für das Erlernen der Beweisaktivität und eine Diskussion der Erklärungsfunktion von Beweisen.

Abstract

The study at hand investigates the development and the refinement of the university course "Introduction into the culture of mathematics" as a Design-Based Research project. The course was designed as a bridging course at the University of Paderborn with the aim of helping first-year pre-service teachers to accomplish the transition to higher mathematics, especially concerning mathematical proofs. Using the theories of "diagrammatic reasoning" (Peirce) and "socio-mathematical norms" (Yackel and Cobb), four cycles of the course were accompanied by qualitative and quantitative research, evaluating the courses benefits and analyzing students' learning. As output of this research, several findings can be specified. First, a contribution to a local instruction theory concerning the learning of mathematical proof for first-year pre-service teachers is formulated. Second, various test instruments were developed to examine central aspects of the learning of mathematical proof. Third, the previous knowledge concerning proof and proof competencies of first-year university students are described. Finally, several theoretical issues and discussions can enriched by the outcomes of this project: the discussion of generic proofs as valid mathematical proofs, the enculturation function of mathematical proofs, the importance of the concept of 'proof acceptance' in the learning of proof and the benefits and limits of 'proofs that explain'.

Danksagung

Das Abfassen einer Dissertation, in Verbindung mit den damit einhergehenden Studien, erweist sich wohl für jeden Doktoranden als eine ‚besondere' Erfahrung. Ich möchte an dieser Stelle all jenen danken, die mich auf diesen Weg gebracht, mich darauf begleitet und unterstützt und schließlich dazu beigetragen haben, dass dieses Werk gelingen konnte.

Mein großer Dank gilt Prof. Dr. Rolf Biehler für viel mehr als ‚nur' eine Einführung in die wissenschaftliche Disziplin der Didaktik der Mathematik und in die mathematikdidaktische Forschung, die ich durch ihn erfahren durfte. Vielmehr möchte ich mich für die zahlreichen intensiven und konstruktiven Diskussionen bedanken, in denen ich fachmathematisch, fachdidaktisch, forschungsmethodisch und wissenschaftstheoretisch von ihm lernen durfte. Insbesondere möchte ich mich für die Möglichkeiten bedanken, mich an der internationalen Diskussion zu der vorliegenden Thematik im Rahmen von Tagungen und Publikationen zu beteiligen. In diesem Sinne gilt mein Dank auch der Einrichtung „Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik".

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Hans Niels Jahnke für die Übernahme des Zweitgutachtens dieser Dissertation. Es ist mir eine Freude und Ehre.

Die Entstehung dieser Arbeit wurde durch mein berufliches Umfeld an der Universität Paderborn begleitet, das maßgeblich zu deren Gelingen beigetragen hat. Bedanken möchte ich mich bei der Fachgruppe der Didaktik der Mathematik, insbesondere bei der Arbeitsgruppe Biehler, für das sehr produktive und freundschaftliche Umfeld, in dem diese Arbeit wachsen und von dem sie profitieren konnte. In diesem Kontext gilt es auch, universitätsübergreifend verschiedenen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern der Mathematikdidaktischen Community für ihre Unterstützung, Anregungen und schließlich für ihre Freundschaft zu danken. Es sei mir verziehen, dass ich an dieser Stelle auf eine Aufzählung einzelner Namen verzichte.

Dieses Forschungsprojekt wäre nicht möglich gewesen ohne die vielen Studierenden, die sich immer wieder bereitwillig dazu erklärt haben, an den verschiedenen Untersuchungen teilzunehmen. Ihnen gilt genauso mein Dank wie auch den studentischen Hilfskräften, die in den Durchführungen 2011/12, 2012/13 und 2013/14 in der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" mitgearbeitet und sich in diesem Kontext auf immer neue Anforderungen eingelassen haben. Insbesondere gilt mein Dank Sara Naseem Malik für ihre Unterstützung in der empirischen Forschung; ohne ihre Vorarbeit in Bezug auf die Auswertung von hunderten von Fragebögen und ihre Zweitkategorisierung von ca. 1.240 studentischen Beweiskonstruktionen wäre diese Dissertation nicht möglich gewesen.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Andreas Seifert für die Hilfe im Umgang mit der Datenanalysesoftware „SPSS" und Joachim Martensmeier für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Schließlich gilt mein großer Dank meiner Familie für die Unterstützung während dieser arbeitsintensiven Lebensphase und ihre charakteristische Art und Weise, immer wieder Ablenkung in meinen Alltag zu bringen.

Mein unermesslicher Dank gilt meiner Freundin Lea, für gleichsam Halt und Antrieb. Dafür und noch für viel mehr liebe ich dich.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung: Problemstellung, Forschungsanliegen und Zielsetzung

In der vorliegenden Arbeit wird die (Weiter-) Entwicklung einer universitären Lehrveranstaltung beschrieben, theoretisch begründet und im Kontext von Evaluationsstudien kritisch reflektiert, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und hierbei in einem besonderen Maße das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' unter dem Aspekt der doppelten Diskontinuität fokussiert. Im Zuge dieser Forschungsarbeit wird ein Beitrag für die Konstruktion einer adressatenspezifischen lokalen Instruktionstheorie für die Domäne ‚Begründen und Beweisen' geleistet. Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" wurde von Rolf Biehler für Lehramtsstudierende für Haupt-, Real- und Gesamtschule konzipiert und im Wintersemester 2011/12 zum ersten Mal an der Universität Paderborn durchgeführt. Dieser Durchlauf, wie auch die folgenden drei, wurde von empirischen Studien gerahmt, wodurch eine konzeptuelle Weiterentwicklung der Veranstaltung sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht im Sinne des Design-Based Research möglich wurde. Grundlegend für die Forschungsarbeit ist hierbei die Fragestellung, wie im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung der Themenbereich ‚Begründen und Beweisen' vor dem Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität adäquat vermittelt werden kann.

Für zukünftige Lehrer gilt es, sowohl den Übergang von der Schule zur Hochschule zu meistern, wie auch später den Wechsel von der Hochschule in die berufliche Praxis. Die unterschiedlichen Probleme und Herausforderungen der Transition kulminieren dabei in dem Themenbereich des Beweisens:

> The nature of proofs and proving at tertiary level, with its increased demand for rigour, constitutes a major hurdle for many beginning university students. At this level, constructing proofs involves understanding and using both formal definitions and previously established theorems, as well as considerable creativity and insight. Understanding and constructing such proofs entails a major transition for students but one that is often supported by relatively little explicit instruction. (Selden 2012, S. 392)

Hier wird eine Entwicklungs- und Forschungsnotwendigkeit deutlich, welche auch Jahnke und Ufer (2015) als ein zentrales Forschungsdesiderat formulieren:

> Besonders die Studienanfangsphase in Studiengängen mit Schwerpunkt Mathematik stellt Studierende vor die Herausforderung, Verständnis für die Beweis- und Argumentationskultur der wissenschaftlichen Mathematik zu erwerben. Theoretisch fundierte und empirisch evaluierte Ansätze sind hier derzeit kaum verfügbar, haben jedoch das Potential für eine nachhaltige Unterstützungsmaßnahme zu Beginn des Studiums. (Jahnke & Ufer 2015, S. 350)

Im Folgenden werden zunächst die Übergangsproblematiken in der Mathematikausbildung dargestellt (1.1), da diese Problembereiche grundlegend für die weiteren Betrachtungen sind und das Spannungsfeld kennzeichnen, in der sich die vorliegende konstruktive Forschung bewegt. Anschließend werden verschiedene internationale Kurskonzepte für das Erlernen der Beweisaktivität herausgestellt und kritisch gewürdigt, wodurch bereits erste grundlegende Leitprinzipien für die Konzipierung und Weiterentwicklung der hier fokussierten Lehrveranstaltung abstrahiert werden können (1.2.1 und 1.2.2). In diesem Kontext ist auch das Leitbild der „Elementarmathematik als Prozess" zu sehen (1.2.3), welches die Inhalte und Methoden der Lehrveranstaltung maßgeblich beeinflusst hat. Die erhaltenen Ergebnisse bezüglich des skizzierten Spannungsfeldes der Forschung und der abstrahierten Leitideen für die Konstruktion der hier fokussierten Lehrveranstaltung werden in einem Zwischenfazit zusammengefasst (1.3). Zum Abschluss des Kapitels (1.4) werden das Forschungsanliegen und die Forschungsziele benannt, die Forschungsfrage formuliert und der Aufbau der vorliegenden Arbeit begründet dargestellt.

1.1 Die Übergangsproblematik in der Mathematik und die doppelte Diskontinuität

Die Mathematik, wie sie an der Hochschule unterrichtet und praktiziert wird, unterscheidet sich fundamental von der sogenannten Schulmathematik. Die Veränderungen, mit denen sich Studienanfängerinnen und Studienanfänger in einem mathematikhaltigen Studiengang bei Eintritt in die Universität auseinandersetzen müssen, umfassen u.a. die neuen Inhalte, verbunden mit einem neuen theoretischen Anspruch, die zu erreichenden Ziele, neue Darstellungsmittel (veränderte Sprech- und Schreibweisen) und neue Argumentationsweisen (Bauer & Partheil 2009; Biehler et al. 2014; Hefendehl-Hebeker 2016; ein guter, die Literatur zusammenfassender Überblick über verschiedene Aspekte des Übergangs wird in Gueudet (2008) gegeben). Zu dieser ersten Übergangsproblematik tritt bei Lehramtsstudierenden eine zweite hinzu: der Übergang von der Universität in die spätere berufliche Praxis. Wenn Studierende die verschiedenen ‚Mathematiken' der Schule und der Hochschule als voneinander getrennte Welten wahrnehmen, kann dies dazu führen, dass sie später in ihrem eigenen Unterricht denjenigen reproduzieren, den sie selbst als Schüler erlebt haben. Felix Klein (1908) prägte für diese Gesamtproblematik den Begriff der „doppelten Diskontinuität" (ebd., S. 1). Vom hochschuldidaktischen Standpunkt aus gilt es somit zwei Brückenschläge zu schaffen: einmal von der Schule zur Universität und weiter von der Universität zurück in die Schule.

Diese doppelte Diskontinuität lässt sich im Besonderen im Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' ausmachen: Das Beweisen spielt in der Schule eher eine untergeordnete Rolle, die hier geforderten prozessbezogenen Kompetenzen sind: Argumentieren und Kommunizieren (KMK 2012). Die Schulabgänger bringen aber dennoch bereits bestimmte Vorstellungen davon mit, wie ein Beweis ‚funktioniert', was als ein solcher zu gelten hat und welche Funktionen er erfüllt. An der Hochschule lernen sie dann die ‚beweisende' Mathematik kennen und müssen sogenannte formale Beweise konstruieren. Doch diese Art des Beweisens kann schon allein aufgrund der abstrakten Darstellungen und formalen Ansprüche nicht ohne weiteres in den Schulunterricht übertragen werden. Somit sind die abgehenden Studierenden vor allem wieder an die typischen Begründungs- und Argumentationsformen der Schulmathematik gebunden, die sie selbst als Schüler erfahren haben.

Eine weitere Problemlage, die durch die vermeintliche institutionelle und ausbildungsspezifische Sozialisation erzeugt wird, ist das unterschiedliche Verständnis der Wissenschaft bzw. des Fachs ‚Mathematik', welches Lernende und Lehrende an den Bildungsinstitutionen haben. Wie Dörfler (2003, S. 154) betont, entstammen die meisten Konzepte der heutigen Schulmathematik ursprünglich den physischen Aktivitäten der uns umgebenden Realität. Somit gilt es, Hefendehl-Hebeker (2014) zuzustimmen, wenn sie feststellt:

> This may happen in an intellectually demanding way, even with local deductions and rigorous reasoning, but on the whole the ontological connection to reality persists. Thus school mathematics in most cases does not exceed the conceptual level and the stage of knowledge of the 19th century. (Ebd., S. 26)

Im Gegensatz dazu ist die Wissenschaft Mathematik eine kreative und auf neue Erkenntnisse ausgelegte Geisteswissenschaft (etwa Heinz 2000). Doch Studierenden der Mathematik bleibt dieser Aspekt der Mathematik häufig verborgen: In den universitären Lehrveranstaltungen bewirkt die traditionelle Darstellungsfolge von Definition – Satz – Beweise im axiomatisch-deduktiven System eine Enthistorisierung des Wissens, wenn nicht gar eine Negierung des Entstehungsprozesses (Neubrand 1997). Die späteren Lehrer, die die Mathematik als axiomatisch-durchorganisierten und vorgefertigten Lerninhalt erfahren haben, werden vermutlich auch in ihrer Berufspraxis weniger die kreativen Momente der Wissenschaft beleuchten können (etwa Bender et al. 1999, S. 303f.; Beutelspacher et al. 2011, S. 11f.; Grieser 2015, S. 88ff.). Der kreative, forschende Aspekt der Mathematik ist dabei fundamental für ein sachgerechtes Verständnis der Wissenschaft, insbesondere des mathematischen Beweises, der zunächst aus Erkundungen und Vermutungen entsteht und als fertiges Produkt einen Forschungsprozess beendet und schließlich zur Systematisierung des Wissens beiträgt.

Um diesen Übergangsproblematiken zu begegnen, werden in der Literatur verschiedene Maßnahmen für die universitäre Lehre empfohlen. Diese werden im Folgenden (nach Beutelspacher et al. 2011, S. 10ff.; Hefendehl-Hebeker 2013, S. 9ff.; Neubrand 2015, S. 146) paraphrasierend zusammengefasst:

(1) <u>Anknüpfen an schulische Vorerfahrungen</u>[1]
Durch das Anknüpfen an schulmathematische Vorerfahrungen kann die Hochschulmathematik sinnstiftend als Weiterführung und Vertiefung von Vorwissen erlebt werden.

(2) <u>Akzeptanz und produktive Nutzung von schulischem Vorwissen</u>
Damit eine Verbindung zwischen den ‚Mathematiken' der Schule und der Hochschule erlebt werden kann, darf nicht der Eindruck entstehen, dass mit dem Beginn der universitären Ausbildung alles vorhandene Schulwissen vergessen werden muss. Selbst bei einer deduktiv-axiomatischen Neukonstruktion von mathematischen Inhalten kann Vorwissen weder negiert noch ‚abgeschaltet' werden. Schulisches Vorwissen muss akzeptiert und gleichsam produktiv genutzt werden, damit ein Anknüpfen an Vorerfahrungen (s.o.) überhaupt möglich werden kann.

(3) <u>Eventuelle systematische Aufarbeitung des notwendigen Vorwissens</u>
Wird an Vorwissen angeknüpft, so wird das Vorhandensein dieses Wissens zu einer Lernvoraussetzung. Entsprechendes Wissen muss daher systematisch aufgearbeitet werden.

(4) <u>Explizit-Machen der Unterschiede</u>
Studienanfängerinnen und Studienanfänger sind fachlich von der Schulmathematik sozialisiert worden, wodurch ihr Bild von Mathematik geprägt wurde. Die an der Universität auftretenden Unterschiede bzgl. der Wissenschaft Mathematik (s.o.), ihren Arbeitsweisen, Elaborationen etc. müssen expliziert werden, damit Lernende sich auf diese einstellen und nachvollziehen können.

---

[1] Innerhalb des ersten Kapitels werden verschiedene Leitprinzipien für die Gestaltung der hier fokussierten Lehrveranstaltung herausgearbeitet. Diese Leitprinzipien werden dabei durch Unterstreichung hervorgehoben und am Ende des Kapitels nochmal zusammengetragen.

(5) Einführen in die Arbeitsweisen der Hochschule
Auf der methodischen Ebene müssen den Studierenden die veränderten Arbeitsweisen, Zielsetzungen (etwa der Inhalte und Aufgaben) und Ansprüche explizit verdeutlicht werden. Nur so können sie ihre Handlungs- und Arbeitsweisen an die neuen Anforderungen und Rahmenbedingungen anpassen und diesen genügen.

(6) Vorbereitung auf Erfordernisse im Lehrberuf
Studierende müssen in der universitären Ausbildung auf ihren späteren Lehrberuf vorbereitet werden. Dabei muss ein fachlicher „höherer Standpunkt" (Klein 1908) als hilfreich und notwendig erlebt werden, „um schulmathematisches Wissen besser zu strukturieren, neu und vertieft zu verstehen und flexibel zu handhaben" (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 9).

(7) Schulbezug herstellen
Übergeordnet gilt es, die Studierenden als ‚Lehrämtler' ernst zu nehmen und sie in diesem Selbstverständnis zu stärken. Gerade im Hinblick auf die zweite Diskontinuität darf eine Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende nicht als einfache verkürzte Fachveranstaltung auftreten. Durch die Beachtung der Adressatengruppe und ihrer berechtigten (fachlichen) Bedürfnisse werden spezielle Fokusse deutlich, denen es Rechnung zu tragen gilt. Natürlich liegt der Schwerpunkt einer universitären Fachveranstaltung im Lehramtsstudiengang nicht primär auf den konkreten, später in der Schule zu vermittelnden Inhalten. Trotzdem sollte ein Bezug zu der späteren beruflichen Tätigkeit deutlich werden.

Um u.a. diese Maßnahmen in der Hochschullehre umzusetzen und auch um speziell die mathematischen Argumentationsformen der Hochschule zu vermitteln, wurden international von verschiedenen Fachmathematikern und Fachdidaktikern verschiedene Kurskonzeptionen entwickelt und durchgeführt. Auch im Zuge des Bologna-Prozesses und der damit verbundenen Bachelorisierung der Studiengänge entstanden neue Lehrveranstaltungen, die im Besonderen den Übergang zur Hochschulmathematik fokussieren und explorative und forschende Anteile enthalten. Entsprechende Kurskonzepte und Leitideen werden im folgenden Abschnitt dargestellt und reflektiert, um bereits erste Leitideen für die Ausgestaltung der hier thematisierten Lehrveranstaltung zu erhalten.

1.2 Konzeptionen von Lehrveranstaltungen zur Einführung in die höhere Mathematik und der Fokus des Beweisens

Aufbauend auf der erörterten Problemsituation der doppelten Diskontinuität werden in diesem Abschnitt verschiedene Ansätze vergleichend dargestellt und diskutiert, die den Übergang zur universitären (höheren) Mathematik fokussieren und die Lernenden in ‚das Beweisen' einführen sollen. Ein guter Überblick über verschiedene internationale Maßnahmen und Konzepte wird in Selden (2012) gegeben. Auf der Basis der zu erstellenden Synopse der Konzepte können erste globale Implikationen für die Konzeption der Lehrveranstaltung abstrahiert werden, welche das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' vor dem Hintergrund der doppelten Diskontinuität adäquat vermitteln soll. In diesem Rahmen von Spannungsfeld und Leitideen kann schließlich das hier verfolgte Forschungsanliegen benannt und verortet werden.

Im Folgenden wird zunächst das Konzept der traditionellen amerikanischen ‚transition-to-proof'-Kurse beschrieben, welche explizit das Beweisen thematisieren (1.2.1). Alternative problemorientierte Konzeptionen (Moore Method und sogenannte ‚inquiry-based approaches‘) betrachten dagegen das Beweisen in einem größeren Zusammenhang als nützliches Erkenntnismittel innerhalb explorativer Forschungsprozesse und verfolgen nicht nur das Lernziel, einen Beweis korrekt aufzuschreiben, sondern thematisieren den gesamten Entstehungsprozess von Beweisen (1.2.2). In diesem Kontext sind auch die problemzentrierten Ausführungen von Pólya zu sehen, welche in neuerer Zeit durch D. Grieser in seinem Kurskonzept „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ (Grieser 2013) aufgegriffen wurden. Bedeutende Reformimpulse für die universitäre Lehrerausbildung in Deutschland, zunächst für das Lehramt an Grundschulen, wurden durch das ‚elementarmathematische Forschungsprogramm‘ (Wittmann und Müller 1988) gegeben (1.2.3). Die damit verbundene Leitidee der Elementarmathematik als Prozess, in der das Beweisen sinnstiftend und verständig thematisiert werden kann, bildet eine grundlegende Rahmenidee für die Gestaltung der in dieser Arbeit fokussierten Lehrveranstaltung. Nach der Darstellung dieser Grundkonzeption werden mit den verschriftlichten Kurskonzepten „Einführung in die Arithmetik“ von M. Neubrand und M. Möller (1990) sowie „Erlebnis Arithmetik“ von T. Leuders (2010) zwei exemplarische Konzepte besprochen, in denen fachliche Inhalte im Sinne des Leitbildes ‚Elementarmathematik als Prozess‘ dargeboten werden.

1.2.1 Transition-to-proof-Kurse

In den USA besuchen Studierende von mathematikhaltigen Studiengängen in den ersten beiden Semestern zunächst Veranstaltungen (etwa wie ‚Calculus‘), in denen nicht wie in deutschen Erstsemesterveranstaltungen eine axiomatische Theorie beweisend konstruiert wird, sondern in denen der Schwerpunkt eher auf Rechenverfahren (Ableiten, Integrieren etc.) gelegt wird. Um den Studierenden in den späteren Semestern den Einstieg in die höhere Mathematik zu erleichtern, werden in den USA so genannte **transition-to-proof-Kurse** angeboten, deren Teilnehmerzahlen meist zwischen 15 und 40 Studierenden liegen. Diese Kurse werden in der Regel nach Lehrbüchern gestaltet (etwa Dumas und McCarthy 2007, Fendel und Resek 1990 und Solow 1982), welche häufig einen ähnlichen Aufbau haben: Nach Behandlungen von Grundlagen der Mengenlehre und Funktionen folgen meist abstrakte Logik, Wahrheitswertetafeln und verschiedene Beweismethoden. Im Anschluss daran werden diverse, meist unzusammenhängende mathematische Sachverhalte bewiesen.

Im Gegensatz zu der großen Verbreitung entsprechender Kurse in den USA existiert international nur wenig Forschung zu diesem Ansatz (Alcock & Weber 2010, Selden 2012 und Selden et al. 2015). Während Marty (1991) von dem Erfolg derjenigen Studierenden berichtet, die an seinem Kurs teilgenommen haben, zeugen andere Studien von Schwächen dieser Konzepte. Moore (1994) untersucht die Beweisproduktionen von sieben Teilnehmenden eines transition-to-proof-Kurses und subsumiert ihre grundlegenden Hürden unter drei Problembereiche: Mangelndes Konzeptverständnis der mathematischen Inhalte, Mängel in der Nutzung der fachmathematischen Sprache und Notation und Probleme dabei, einen Beweisanfang zu finden. Baker und Campbell (2004) berichten von den Problemen der Studierenden ihres Kurses, die zuvor erarbeiteten Grundlagen der Logik und erlernte Beweismethoden auf konkrete Problemstellungen zu übertragen. Vor diesem Hintergrund resümieren die Autoren: „While a solid understanding of logical arguments and their application to proof writing is imperative, it appears that too much emphasis on logic can perpetuate a problem/solution mentality.“ (Ebd., S. 351).

Übergreifend wird kritisiert, dass mit dieser traditionellen Lehrkonzeption häufig nicht der gewünschte verständige Umgang mit Beweisen auf Seiten der Studierenden erreicht wird (Baker &

Campbell 2004, Alcock & Weber 2010, Moore 1994, Selden & Selden 2003). Aus der genannten Literatur können allgemeine *Problembereiche dieser Kurskonzepte* abstrahiert werden:

(1) Die primäre Fokussierung auf Wahrheitswertetafeln, Aussagenlogik und Aussagenverknüpfungen negiert den Entstehungsprozess von Beweisen und begünstigt eine mechanische (syntaktische) Sicht auf das Beweisen.
(2) Diese eingeschränkte Sichtweise auf das Beweisen geht damit einher, dass sich die Lernenden nicht ausreichend mit dem zu beweisenden Sachverhalt vertraut machen; es werden keine Beispiele betrachtet oder untersucht, um die Behauptung besser zu verstehen oder um eine Beweisidee ausmachen zu können. Dass aber gerade die vorgeschaltete Explorationsphase zum Verstehen einer Behauptung, für eine eventuelle Herausbildung eines Beweisbedürfnisses und zum Ausmachen einer Beweisidee unverzichtbar ist, wird in der fachdidaktischen Literatur vielfach betont (Boero 1999, Hsieh et al. 2012, Sandefur et al. 2012).
(3) Das Erlernen der Beweisaktivität an neuen Inhalten der Hochschulmathematik bedingt Lernanforderungen auf zwei Stufen. Die Lernenden müssen sich neben dem Lerninhalt ‚Beweis' gleichzeitig mit neuen Konzepten und Inhalten der Hochschulmathematik (etwa Mengenlehre) auseinandersetzen. Die notwendige Konzentration auf die neuen Inhalte der Hochschulmathematik verstellt dabei die Sicht auf den Lerngegenstand ‚Beweis'.
(4) Ein mangelndes Verständnis der fachmathematischen Sprache verhindert das Operationalisieren und Nutzen von Definitionen und Sätzen und erschwert eine korrekte Notation der Beweise. Maier (1999, S. 25f.) weist darauf hin, dass die Verwendung der mathematischen Fachsprache – neben dem Erlernen der Beweisaktivität - als ein eigener Lerngegenstand begriffen werden muss, da sich sonst entsprechende Probleme überlagern und häufig gegenseitig bedingen.
(5) Die zu erarbeitenden Beweisaufgaben in meist unzusammenhängenden mathematischen Inhaltsbereichen begünstigen ein Verständnis von ‚Beweis' als künstliche Aufgabenform zur nachträglichen Verifikation für bereits als korrekt geltende Sachverhalte. Ein weiter gefasstes Verständnis von Beweis als Erkenntnis- und Verständnismittel im Rahmen mathematischer Theorien wird somit verhindert.

Schließlich muss auch angemerkt werden, dass das amerikanische Vorbild der transition-to-proof-Kurse so in Deutschland nicht umzusetzen wäre, da sich in den universitären Lehrveranstaltungen hierzulande (gerade zu Beginn eines Studiums) in der Regel weit über 40 Studierende befinden und somit diese Kurs- und Vermittlungsform so nicht ohne weiteres übernommen werden könnte.

Positiv muss an dieser Art von Kursen zunächst gewürdigt werden, dass die Konstruktion von Beweisen mathematisch fundiert vermittelt wird; es werden die notwendigen Grundlagen (Aussagenlogik, Mengenlehre etc.) gelegt, um die verschiedenen Beweistypen (direkter Beweis, Beweis durch Kontraposition, …) fachlich fundiert verstehen zu können. In der deutschen Mathematikdidaktik hat sich für ein solches Vorgehen, in dem mathematische Sachverhalte Lernenden auf verschiedenen Stufen zugänglich gemacht werden, ohne diese dabei zu verfälschen, nach A. Kirsch der Begriff der „intellektuellen Ehrlichkeit" (Kirsch 1976) in Anlehnung an Bruner 1973, S. 26f.; vgl. hierzu auch die Ausführungen in Kirsch (1977)) etabliert. Dieses Grundanliegen soll bzw. muss als Leitidee einer universitären Fachveranstaltung gelten. Weiter geschieht in diesen Kursen meist die Vermittlung neuer Inhalte, die den Studierenden das Zurechtkommen in den folgenden Lehrveranstaltungen erleichtern sollen.

1.2.2 Problemzentrierte Kurskonzepte

Aufgrund der oben erörterten Probleme der traditionellen transtition-to-proof-Kurse wurde nach Alternativen für die Vermittlung der Beweisaktivität gesucht. Einen deutlich kontrastierenden Ansatz stellt die sogenannte Moore Method dar, die später als Modified Moore Method (MMM) zu allgemeineren problemzentrierten Kurskonzepten führte. Die Problemzentrierung mathematischer Aufgabenstellungen wurde stark von G. Pólya (1979) herausgestellt, dessen Herangehensweise an das mathematische Arbeiten und Problemlösen in neuerer Zeit durch D. Grieser (2013) für die Hochschulausbildung (gymnasiales Lehramt) adaptiert wurde.

Ansätze aus den USA: Die „Moore Method" und problemzentrierte Ansätze

Eine alternative Unterrichtsmethode, um u.a. das Beweisen zu erlernen und als sinnvolle mathematische Tätigkeit zu erfahren, stellt die nach dem Mathematiker Robert Lee Moore benannte **Moore Method** dar (etwa Parker 2005, Coppin et al. 2009). In entsprechenden Kursen werden den Teilnehmenden nur die relevanten Definitionen und Sätze zur Verfügung gestellt, die Beweise müssen von den Studierenden - meist ohne weitere Hilfsmittel - selbst entwickelt werden. Die Moore Method war zunächst als eine generelle Kursform für das Mathematikstudium entwickelt worden. Dieses Unterrichtskonzept wurde als **Modified Moore Method** (MMM) weiterentwickelt und in Folge als ein speziell problemorientiertes Kurzkonzept zum Beweisen adaptiert (Smith 2005; Yoo 2008). In diesen problemzentrierten Kurskonzepten bilden gut ausgewählte Problemstellungen und/oder Explorationsaufträge den Ausgangspunkt für eigene Erkundungen und Lösungsansätze. Dieser Methodik liegt eine konstruktivistische Ansicht auf das Lernen zu Grunde:

> In a problem-based class, students develop their own mathematical knowledge while actively participating in the problem-solving activity. Instead of presenting formal mathematics or finished solutions of the problems, a teacher guides students' learning by posing appropriate questions, initiating and facilitating mathematical discourse on their own solutions, and rephrasing students' explanation in more mathematical terms. (Yoo 2008, S. 35)

Trotz der Vorteile der Moore Method für das Erlernen der formalen Beweisaktivität (etwa Jones 1977 oder Renz 1999) weist Smith (2005) darauf hin, dass diese Methode bisher nur wenig evaluiert und beforscht wurde. In ihrer Fallstudie zeigt Smith (2005) deutliche Unterschiede zwischen Teilnehmenden von traditionellen transition-to-proof-Kursen und Teilnehmenden eines problem-orientierten MMM-Kurses in Bezug auf Beweisverständnis und Beweisproduktion. Die Teilnehmenden des problemzentrierten MMM-Kurses fokussieren bei der Beweiskonstruktion mehr inhaltliche Aspekte und verfolgen stärker das erklärende Moment von Beweisen. Auch nutzen sie – im Gegensatz zu den Studierenden aus dem traditionellen Kurs – deutlich häufiger Beispiele, um die Problemsituation zu verstehen, sich einen Zugang zu einem Beweis zu verschaffen und um Argumente zu überprüfen. Auch Yoo (2008) konnte in ihrer Studie nachweisen, dass die Teilnehmenden ihres problemorientierten Kurses deutlich stärker im Hinblick auf ein gewünschtes Beweisverständnis profitieren als Teilnehmende einer traditionellen Kurskonzeption.

Zu diesen Kurskonzepten muss generell die <u>problemzentrierte Erarbeitung von Inhalten</u> positiv hervorgehoben werden: Durch das Voranstellen von Problemsituationen bzw. Erkundungsaufträgen wird den Lernenden exemplarisches mathematisches Forschen im Kleinen ermöglicht. Gefundene Vermutungen zeichnen sich dann auch durch eine gewisse Unsicherheit bzgl. ihrer (Allgemein-) Gültigkeit aus. Das ermöglicht die Bildung eines weiteren Begriffsverständnisses von Beweisen, deren sinnstiftender Nutzung im mathematischen Arbeitskontext und begünstigt die Herausbildung eines

Beweisbedürfnisses. Dem Produkt ‚Beweis' geht somit explizit der Prozess der Beweisfindung und Beweisentwicklung voraus; anschließende Notation und Bewertungen von Lösungsansätzen können dann von den Teilnehmenden erörtert werden. Verschiedene Fragen sind bei diesen Konzepten allerdings noch offen: Wodurch zeichnen sich ‚gute' Ausgangsfragestellungen aus und welche mathematischen Gebiete eignen sich für ein sinnstiftendes Erlernen der Beweisaktivität? Auch muss die Bedeutung der fachmathematischen Symbolsprache geklärt werden: Welche Normen gelten für die finale Notation von Beweisen? Wie kann bzw. soll in der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten der Gebrauch der fachmathematischen Symbolsprache erlernt werden und welcher Stellenwert soll diesem zukommen?

Beweisen bei Pólya und das Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen" von D. Grieser

In seinem Buch „Vom Lösen mathematischer Aufgaben" thematisiert G. Pólya (1979) die Lösungsprozesse bei sogenannten Problemaufgaben, also Aufgaben, für deren Lösung i.A. keine Lösungsroutine zur Verfügung steht. Im Zentrum der Ausführungen stehen Mittel und Methoden des Problemlösens, bezeichnet als „Heuristiken" (ebd., S. 10). Neben seinen Ausführungen zu verschiedenen Heuristiken, wie etwa dem Rekursionsverfahren, sind vor allem seine Problemstellungen bemerkenswert, aus denen sich anschließende Erkundungen und Erkenntnisse ergeben. So wird z.B. das Rekursionsverfahren über die Geschichte des ‚kleinen Gauss' eingeführt, indem die Summe der ersten 20 natürlichen Zahlen über Paarbildung ermittelt wird. Diese Technik der Paarbildung wird dann verallgemeinert auf die Summe der ersten n natürlichen Zahlen übertragen und darüber hinaus auf die Summe der ersten n natürlichen Quadratzahlen und Kubikzahlen. Als allgemeines Rekursionsverfahren wird diese Technik dann im Kontext weiterer Fragestellungen verwendet. Es ist diese Betrachtung konkreter Fragestellungen und die daraus resultierenden übertragbaren allgemeinen Erkenntnisse und Heuristiken, die die Herangehensweise Pólyas kennzeichnet. In diesem Kontext muss auch die von Pólya (1969, S. 9f.) vorgenommene Unterscheidung von Formen des plausiblen Schließens und Formen des demonstrativen Schließens angeführt werden. Während das demonstrative Schließen sicheres Schlussfolgern im Sinne der Mathematik beschreibt, meint das plausible Schließen ein nicht sicheres, induktives Schlussfolgern. Das Beobachten von Eigenschaften und Auswirkungen von Operationen kann als Plausibilitätsbetrachtung die subjektive Überzeugung stärken, dass eine Behauptung gilt. Pólya stellt die Bedeutung des plausiblen Schließens für die mathematische Arbeit heraus und erweitert somit den Beweisprozess um das Verfolgen verschiedener Ideen und vermeintlicher Lösungsansätze und betont somit das kreative Moment des Problemlösens und Beweisens.

Daniel Grieser entwickelte 2011 an der Universität Oldenburg eine Kurskonzeption zu dem Modul ‚Mathematisches Problemlösen und Beweisen' für Lehramtsstudierende des gymnasialen Lehramts, welche sich stark an den Arbeiten von Pólya orientiert. In dieser Lehrveranstaltung wird laut Grieser explizit die Übergangsproblematik berücksichtigt: Elementare und intuitiv leicht zugängliche Inhalte sollen direkt an die Schulmathematik anschließen, bei neuen Inhalten soll zunächst auf Abstraktion verzichtet werden. Die verwendete Sprache knüpft an die Alltagssprache an, welche dann präzisiert und zur fachmathematischen Symbolsprache weitergeführt wird. Übergeordnet sollen die Studierenden durch eigene Erkundungen zur beweisenden Mathematik geführt werden und diese als lebendige Wissenschaft erfahren (vgl. Grieser 2015, S. 89ff.).

Entsprechend der Arbeit von Pólya sind auch bei Grieser übergreifende mathematische Ideen (Rekursion, Vollständige Induktion, Graphen etc.) strukturgebend. Der Nutzen dieser Konzepte wird anhand verschiedener Inhalte aufgezeigt. Die Erörterung von Aussagen, Quantoren, Implikation, Äquivalenzen und Negationen bereitet die Grundlage der Thematisierung von Beweisen als „logisch vollständige Begründung einer Aussage“ (Grieser 2013, S. 135ff.). Neben den allgemeinen Beweisformen direkter und indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Beweis durch Gegenbeispiel und vollständige Induktion werden noch typische Beweismuster unterschieden: Beweise von Formeln, Existenzbeweise, Nichtexistenz- und Unmöglichkeitsbeweise. Auffallend ist hierbei, dass Grieser den Entstehungsprozess der Beweise explizit darstellt: Den Denkpausen zur eigenen Erarbeitung der Problemstellung folgen kommentierte Lösungsansätze. Erst am Ende dieses Prozesses wird der erarbeitete Beweis quasi in ‚Reinschrift‘ notiert.

Bei Pólya und Grieser bilden gut gewählte Ausgangsfragestellungen die Startpunkte zu Erkundungen, in denen mathematische Strategien erlernt werden sollen, die anschließend auf weitere Problemstellungen übertragen werden. Ein zentraler Aspekt hierbei ist die Vermittlung von allgemeinen Heuristiken, mit denen allgemein Problemlöseaufgaben oder auch speziell Beweisaufgaben angegangen werden können. Wichtig ist hierbei die explizite Betonung der verschiedenen Phasen des mathematischen Erkenntnisprozesses: Exploration eines Sachverhaltes, Untersuchung von Gegebenheiten, Lösen des Problems und anschließende Rückschau. Während Pólya Lehramtsstudierenden des gymnasialen Lehramts das Problemlösen vermitteln will, steht bei Grieser die Hinführung zu den Beweismethoden der Hochschulmathematik und die Einführung in die Mathematik der Hochschule im Zentrum. Diese Vermittlung neuer Inhalte, die den Studierenden das Zurechtkommen in den folgenden Lehrveranstaltungen erleichtern soll, muss dabei hervorgehoben werden und soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit als eine Richtlinie zur Gestaltung der hier fokussierten Lehrveranstaltung dienen. Offen bleiben jedoch die folgenden Fragen: Wie kann bei der Thematik des Beweisens an das schulische Vorwissen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern angeknüpft werden? Wie wird die Verwendung der fachmathematischen Symbolsprache motiviert und vermittelt? Inwiefern werden Beweisformen vermittelt, die die Studierenden in ihrer späteren Berufspraxis verwenden können? Schließlich muss noch angemerkt werden, dass für die in dieser Arbeit adressierte Zielgruppe der Lehramtsstudierenden für Haupt-, Real- und Gesamtschulen die von Grieser vorgestellten Problemaufgaben schnell zu formal und abstrakt und daher zu schwer erscheinen.

1.2.3 Das Leitbild ‚Elementarmathematik als Prozess‘ in der Lehramtsausbildung

Die Inhalte und Vermittlungsformen der Mathematiklehrerausbildung wurden in der Vergangenheit besonders für das Lehramt an Grundschulen (etwa Bender et al. 1999; Müller et al. 2004; Wittmann & Müller 1988) und für Gymnasien/Gesamtschulen (etwa Ableitinger et al. 2013; Beutelspacher et al. 2011; Kroll 1997) kritisch diskutiert. Die verschiedenen in diesen Kontexten erbrachten Argumentationsstränge lassen sich dabei in gewissem Maße auch auf das Lehramt für Haupt-, Real- und Gesamtschule übertragen. Es ist hierbei gerade die Kritik an der Grundschullehrerausbildung, aus der Implikationen für die Lehramtsausbildung für Haupt-, Real- und Gesamtschule abgeleitet werden können, da die universitäre Ausbildung der Lehrer der Sekundarstufe II heute noch ungleich stärker an der Ausbildung der Fachmathematiker orientiert ist (etwa Führer 1997).

Der fachwissenschaftliche Anteil der Lehrerausbildung kann nicht separat für sich betrachtet werden, sondern muss gerade in Bezug auf seine Beziehung zum späteren Lehrberuf reflektiert werden: „Die Qualität der Ausbildung sollte man daran messen, wie gut sie den Menschen auf seinen Beruf vorbereitet“ (Kroll 1997, S. 87). Wittmann (2007) führt diesen Gedanken weiter aus:

> Das Mathematikstudium und der Mathematikunterricht sind keine getrennten Welten. Im Studium wird nicht einfach Stoff aufgenommen, der gewissermaßen didaktisch neutral für pädagogisch-didaktische Unterrichtsmaßnahmen zur Verfügung steht. Im Studium werden zwangsläufig auch die Lehr-/Lernauffassungen [und das Mathematikbild, L.K.] der Studierenden geprägt, da sie naturgemäß sich selbst als Lernende und die Hochschullehrer als Lehrende erfahren. Reproduktive Lehr-/Lernformen prägen den Studierenden daher Einstellungen und Verhaltensweisen auf, die für den Unterricht hinderlich sind. (Ebd., S. 421)

Zwar bezieht sich Wittmann hier auf die Lehramtsausbildung für die Grundschule, doch können diese Aspekte, wie auch die folgenden, ebenso auf die Lehramtsausbildung für Haupt-, Real und Gesamtschule übertragen werden[2]. Übergeordnet kann festgehalten werden, dass eine Lehrerausbildung die Studierenden dazu befähigen soll, Unterricht im Sinne der Bildungsstandards zu gestalten. Hieraus folgt, dass eine Passung zwischen der Fachausbildung und der heutigen Vorstellung von Lehren und Lernen an der Schule hergestellt werden muss. Diese Passung wird allerdings durch verschiedene Faktoren an der Hochschule behindert. Dazu gehören u.a. die Orientierung an einem statischen Wissenschaftsbild, in der fertige, komprimierte Mathematik dargeboten wird, das Vorherrschen von reproduktiven Lehr- und Lernformen, die Vermittlung von Inhalten der Hochschulmathematik, die zu weit von der Schulmathematik entfernt sind, und die Verwendung und Vermittlung von mathematischen Ausdrucksmitteln, die ungeeignet für die Kommunikation mit Schülern sind (vgl. Kroll 1997, S. 87; Wittmann 2007, S. 421).

Für die Konstruktion einer entsprechenden Lehrerausbildung, die den oben formulierten Ansprüchen genügt, wurden aus fachdidaktischer Perspektive verschiedene Maßnahmen gefordert (vgl. hierzu Bender et al. 1999, S. 304; Müller et al. 2004, S. 11; Wittmann 2007, S. 422). Diese in der aufgeführten Literatur genannten Aspekte werden im Folgenden zusammenfassend paraphrasiert:

1. Die Lehramtsausbildung muss einen entsprechenden Anteil von <u>Elementarmathematik</u> beinhalten. Dies bietet den Studierenden das Feld, sich selbst mathematisch zu betätigen und reichhaltige Erfahrungen zu sammeln. Eventuell vorliegende Lücken im schulmathematischen Wissen erweisen sich (innerhalb eines gewissen Rahmens) bei entsprechenden Betätigungen nicht als hinderlich. Weiter erlangen sie unterrichtsrelevantes Fachwissen und die Relevanz der Inhalte wird leichter deutlich.

2. Die Studierenden müssen zu einem sicheren <u>Umgang mit nichtsymbolischen Darstellungen</u> befähigt werden, der für die Kommunikation mit Schülern unerlässlich ist.

3. Es gilt den <u>Prozesscharakter der Wissenschaft</u> herauszustellen, um eine genetische Sichtweise auf die Wissenschaft ‚Mathematik' zu erlangen. Hierzu formulieren Bender et al. (1999):

   > Lehramtsstudierende müssen die elementare Mathematik nicht als ein Fertigprodukt, sondern als eine Tätigkeit erfahren, die vom experimentierenden Handeln innerhalb sinnvoller mathematischer und realer Problemkontexte bis hin zum lokalen (und später auch globalen) Ordnen der dabei gewonnenen Erkenntnisse fortschreitet. Wichtiger als die Abarbeitung eines möglichst umfangreichen Stoffes ist daher in der Lehramts-Ausbildung die

[2] Vgl. hierzu Bender et al. (1999, S. 302; Hervorhebungen im Original): „Dabei kommt es uns nicht auf einzelne Regelungen an, sondern auf den Geist des Unternehmens. Dieser würde auch Studierenden mit Mathematik als *Schwerpunktfach* bis in die Sekundarstufe II gut anstehen. Deren viel intensivere fachmathematische Ausbildung erschöpft sich nämlich häufig in einem verdünnten Aufguß von sinnferner formalistischer Mathematiker-Mathematik."

> Entwicklung von *Verständnis und Selbständigkeit* im selbsttätigen Umgang mit elementarer Mathematik: Die Studierenden müssen im Studium möglichst viel selber *aktiv* werden und *Mathematik-Lernen an sich selbst als „konstruktiven und zugleich entdeckenden Prozeß“* erleben. (Ebd., S. 304; Hervorhebungen im Original)

4. In diesem Kontext ist schließlich auch die <u>Vermittlung von Meta-Wissen</u> über Mathematik zu nennen (vgl. Kirsch 1980, S. 242; Hefendehl-Hebeker 1999 und 2015).
   Lehrende sollen nicht nur über ein bloßes Fachwissen verfügen, sondern auch über ein Wissen über die Lerninhalte. Was allgemein unter Metawissen verstanden werden kann, wird von der IDM-Arbeitsgruppe Mathematiklehrerbildung (1981) wie folgt formuliert:

   > Unter "Wissen über Wissen" oder "Metawissen" werden dabei jene allgemeinsten erkenntnistheoretischen, wissenschaftsphilosophischen, weltanschaulichen, inhaltslogischen und inhaltspsychologischen Orientierungen verstanden, wie sie in impliziter Weise und nicht als Gegenstand einer ausgearbeiteten Theorie, nicht als Gegenstand der Philosophie als Profession, das Handeln desjenigen, der mit Wissen, in diesem Fall Mathematik, befaßt ist, regulieren. (Ebd., S. 259)

   Damit Lernende erfahren können, wie mathematisches Wissen entsteht, was diese Art der Wissensbildung auszeichnet und wo ihre Chancen und Grenzen sind, müssen Lehrende dazu in der Lage sein, „grundlegende Kategorien mathematischer Wissensbildung in elementarem Kontext zu erkennen, zu würdigen und auszuweisen.“ (Hefendehl-Hebeker 1999, S. 106). Ein Verständnis um die Genese des mathematischen Wissens und ihrer epistemologischen Charakteristika eröffnen die Perspektive einer genetischen Vermittlung von Mathematik. Dabei geht es auch um ein weiter gefasstes Bildungsideal: „Zum Verständnis eines Faches gehört Bewusstheit über dessen spezifische Denkweisen und die damit verbundenen Formen der Wissensbildung und des Zugriffs auf die Realität. Diese Bildungsanteile sollten bleiben, wenn die inhaltlichen Details vergessen werden.“ (Ebd., S. 110).

Die Verbindung der Aspekte „Prozesscharakter“ und „Metawissen“ betont dabei die genetische Sicht auf das Lernen der Mathematik. Hierfür bieten sich elementarmathematische Anteile an, an und mit denen exemplarisch geforscht werden kann. In einem Prozess von Exploration, Hypothesengenerierung und Begründungen wird bereits ein adäquateres Bild von Mathematik angebahnt. Der <u>Einbezug von inhaltlich-anschaulichen Darstellungen und inhaltlich-anschaulicher Beweise</u> trägt zu einem vertieften und vernetzten Wissen bei und trägt zu einem sicheren Umgang mit nichtformalsymbolischen Darstellungen bei. Zu einem weiter gefassten (epistemologischen) Verständnis von Mathematik gehört dabei auch die Darstellung und Erörterung der Mathematik als eine axiomatisch-deduktiv geordnete Theorie.

Bereits 1988 formulieren Wittmann und Müller das ‚elementarmathematische Forschungsprogramm‘, in dem sie einen entsprechenden Neuaufbau der Lehrerbildung fordern (s. auch Wittmann 1989a, S. 298ff.). Dort gehen die Autoren explizit auf die Rolle von Beweisen (im Kontext von Elementarmathematik) ein:

> „(1) Im sozialen Kontext ‚Schule‘ besteht für das Lehren und Lernen von Mathematik eine andere Verstehensgrundlage und ein anderer Kommunikationsrahmen als in der mathematischen Forschung. Eine sinngemäße Übertragung von Beweisaktivitäten in die schulischen Rahmenbedingungen erfordert daher eine Loslösung von formalen, deduktiv durchorganisierten Darstellungen der für die Schule relevanten elementarmathematischen Gebiete zugunsten inhaltlich-anschaulicher Darstellungen. Diese sind gekennzeichnet durch Einbettung in sinnvolle Kontexte, durch Entwicklung von Motivationen, durch ein Vorgehen gemäß heuristischen Strategien, durch die Verwendung

bedeutungshaltiger präformaler Darstellungen und durch entsprechende inhaltlich-anschauliche Beweise. „Rettet die Phänomene!“ muß auch die Parole der Mathematikdidaktik sein.

(2) Inhaltlich-anschauliche Beweise sollen in erster Linie dem Verstehen von Gesetzmäßigkeiten dienen und müssen daher in den Lernprozeß der Schüler und ihre Verständigung untereinander eingebettet werden. Lakatos’ Buch „Beweise und Widerlegungen“ (Lakatos 1979) bietet hierfür ein sehr schönes Vorbild.

(3) Die mathematische Ausbildung von Lehrerstudenten muß einen je nach Schulstufe angemessenen Anteil von Elementarmathematik in inhaltlich-anschaulicher Darstellung enthalten, damit eine brauchbare Grundlage für den Entwurf und die Umsetzung didaktisch begründeter schulmathematischer Konzeptionen geschaffen wird. Zusammenhängende inhaltlich-anschauliche Darstellungen elementarmathematischer Gebiete bieten den Studenten ein einschlägiges Berufswissen, das um Größenordnungen effektiver ist als das aus formalen Darstellungen abzuleitende „Hintergrundwissen“.“ (Wittmann & Müller 1988, S. 254)

Im weiteren Verlauf der Diskussion (seit 1988) wurden verschiedene Versuche unternommen, quasi aus der Didaktik heraus denkend, die Fachmathematikausbildung Lehramtsstudierender neu aufzubauen. In dem Buch „Arithmetik als Prozess“ von Müller et al. (2004) werden verschiedene gute Umsetzungen dieses Ideals beschrieben. Als zwei weitergreifende Beispiele für solch eine didaktisch motivierte Vermittlung fachmathematischer Inhalte für Lehramtsstudierende werden im Folgenden die Konzepte *„Einführung in die Arithmetik“ von M. Neubrand und M. Möller (1990)* und *„Erlebnis Arithmetik“ von T. Leuders (2010)* skizziert. Neben einer Illustration möglicher Umsetzungen der oben aufgeführten Anforderungen an eine sinnstiftende Lehramtsausbildung geht es auch um die Frage, welche Aspekte dieser Konzepte für die hier thematisierte Fachveranstaltung (ggf. modifiziert) übernommen werden können.

Die „Einführung in die Arithmetik“ von M. Neubrand und M. Möller

Das Buch „Einführung in die Arithmetik“ von Neubrand und Möller (1990) ist aus einer Fachveranstaltung der Grundlagen der Arithmetik für Studienanfänger des Studiengangs „Lehramt der Primarstufe“ hervorgegangen. Zu ihrem Ansatz bemerken die Autoren: „Vielmehr dürfte es, gerade im Blick auf das Ziel des kommenden Unterrichts in der Primarstufe, von entscheidender Bedeutung sein, ein facettenreiches, lebendiges, auf Probleme vielfältiger Art bezogenes, offenes Bild mathematischen Arbeitens zu zeigen“ (Neubrand & Möller 1990, S. I).

Bereits bei der Auflistung der behandelten „Themenkreise“ wird eine Abkehr von traditionellen fachlichen Inhalten und einer deduktiv-organisierten Strukturierung der Inhalte deutlich (ebd., S. II):

- Verwendung von Zahlen in verschiedenen Situationen und zu verschiedenen Zwecken, auch einige Bemerkungen zur historischen Entwicklung des Zahlbegriffs
- mathematische Darstellung von Zahlen, ihre Schreibweisen und die Rechenoperationen, die damit durchgeführt werden,
- Kennenlernen von Strukturen, d.h. Regelmäßigkeiten, Ordnungen, internen Beziehungen, Zusammenhängen innerhalb des Bereichs der Zahlen

Im Verlauf der Ausführungen wird in ausgewiesenen Abschnitten das Dargebotene regelmäßig reflektiert und gleichsam das Anschließende motiviert. Begründungen von mathematischen Zusammenhängen werden nicht notwendigerweise ‚formal‘ dargeboten, sondern bewegen sich explizit zwischen den Polen ‚formal‘ und ‚inhaltlich‘. Inhaltliche Begründungen werden dabei vornehmlich an geometrischen Punktmusterdarstellungen gegeben. Dies passt zu der generellen Ausrichtung des Buches, in dem durchgehend mathematische Inhalte auf verschiedene Weise veranschaulicht[3] werden. Hierzu passt auch, dass das gesamte Kapitel 4 („Zahlen und Muster“) dem Zusammenhang zwischen Arithmetik und Punktmusterdarstellungen (sogenannten figurierten Zahlen, etwa: Dreieckszahlen, Quadratzahlen, …) gewidmet ist.

Neubrand und Möller (1990) nutzen elementarmathematische Sachverhalte der Arithmetik, um die u.a. von Wittmann und Müller formulierten Desiderate (s.o.) für eine neugedachte Lehramtsausbildung umzusetzen. Allgemeine Zusammenhänge und Sachverhalte werden an konkreten Problemsituationen bzw. Beispielbetrachtungen motiviert und abstrahiert, wobei die formalen Darstellungen durchgehend mit ikonischen Darstellungen verbunden werden. Retrospektive und prospektive Abschnitte ermöglichen eine Betrachtung der Inhalte auf einer Metaebene, in deren Kontext auch der Schulbezug der Inhalte deutlich gemacht wird. Hervorzuheben ist hierbei auch das Kapitel zum Zusammenhang zwischen Arithmetik und figurierten Zahlen: Durch die Betrachtung von Zusammenhängen zwischen den figurierten Zahlen wird es möglich, Forschung im Kleinen zu betreiben und die Prozesshaftigkeit der Wissenschaft Mathematik zu erfahren.

T. Leuders „Erlebnis Arithmetik“

Leuders (2010) verschriftlicht mit seinem Buch „Erlebnis Arithmetik - zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten“ ebenfalls ein Vorlesungskonzept zu einer Fachveranstaltung der Grundlagen der Arithmetik. Neben den entsprechenden fachmathematischen Inhalten (Arithmetik, Kombinatorik, Beweistechniken etc.) werden auch heuristische Strategien und Metawissen über Mathematik (etwa, wie mathematisches Wissen entsteht) vermittelt. Ausgangspunkt der Ausführungen sind dabei Erkundungsaufträge, aus denen heraus Vermutungen gewonnen werden. Die Vermutungen werden dann als mathematische Behauptungen formuliert und anschließend bewiesen. Diese Erkundungen werden durch strategische Hinweise begleitet, welche starke Parallelen zu den Problemlöseheuristiken von Pólya (1967) aufweisen: (systematische) Betrachtung von Beispielen, Betrachtung von Teilproblemen, Suche nach Analogien etc. Im Kontext der Erkundungen wird das Beweisen als eine mathematikspezifische Arbeitsweise zur Absicherung einer Behauptung motiviert.

Bei der Begründung von mathematischen Sätzen werden durch Leuders verschiedene Beweisformen auf verschiedenen Repräsentationsebenen angeboten; der Leser soll dabei zunächst selbst entscheiden, welche Beweise er als überzeugend, verständlich und korrekt einstufen würde. Das ‚formale Beweisen‘ wird schließlich durch die Anmerkung eingeleitet, dass bei sogenannten anschaulichen Beweisen noch ein restlicher Zweifel an der Allgemeingültigkeit der Argumentation verbleiben könnte.

Mit den formalen Beweisen wird bei Leuders der Abschnitt „Zahlenforschen und Beweisen“ beendet, in dem systematisch und exemplarisch die Wissensgenerierung in der Mathematik aufgezeigt wurde. Diese Erarbeitungsweise von Inhalten über Erkundungen, Vermutungen und Beweisen wird in den folgenden Kapiteln beibehalten und bewirkt eine aktive Auseinandersetzung mit den Themengebieten. Schließlich wird im achten Kapitel „Zahlen verstehen“ die zuvor angesprochene Axiomatik der Mathematik vertieft und die axiomatische Methode und Ordnung mathematischen Wissens thematisiert.

[3] An dieser Stelle wird der Begriff „veranschaulicht“ in einem gewissen Maß ‚naiv‘ verwendet. Eine genauere Erörterung von ‚Anschaulichkeit‘ wird in Abschnitt 8.3.5 erfolgen.

Leuders gelingt mit seinen angeleiteten Erkundungen, verbunden mit Exkursen und Reflexionen, eine Verzahnung von fachmathematischen Inhalten, Problemlösestrategien und Meta-Wissen über Mathematik. Durch die gut gewählten Beweisbeispiele, verbunden mit den Betrachtungsfokussen ‚Überzeugung', ‚Verständlichkeit' und ‚Korrektheit', wird der Leser dazu angehalten, ein Beweisverständnis zu erörtern, in dem zentrale Momente, Funktionen und Fehlvorstellungen von Beweisen berücksichtigt werden. Die Motivation von formalen Beweisen – verbunden mit der angesprochenen Axiomatik der Mathematik - über potentiell, subjektiv verbleibende Zweifel an anschaulichen Begründungen, scheint möglich. Offen bleibt die Frage, inwieweit Studierende zu Beginn ihres Studiums die vielfältigen und komprimierten Aspekte der erörterten Beweis- und Begründungsformen überhaupt interpretieren, verstehen und akzeptieren können.

Vor diesem Hintergrund verschiedener Beweisformen, verbunden mit den Aspekten Überzeugung, Verständlichkeit und Korrektheit, der Bedeutung bzw. Funktionen der Beweise in der Mathematik und der Bedeutung des axiomatisch-deduktiven Aufbaus entzündet sich schließlich die Frage, über welches Wissen im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen' ein Studierender (im vorliegenden Fall des Lehramts Mathematik für Haupt-, Real- und Gesamtschule) überhaupt verfügen soll? Anders formuliert: Was muss in einem entsprechenden Lehr-/Lernszenario unter einem zu erlangenden adäquaten Beweisverständnis gefasst werden?

1.3 Zwischenfazit

Der Übergang von der Schule zur Hochschule stellt für Lernende der Mathematik eine enorme Hürde dar. Probleme können hier auf verschiedenen Ebenen ausgemacht werden: Inhalte, Arbeitsmethoden, Zielsetzungen, Darstellung, Abstraktion, Lehr- und Lernmethoden unterscheiden sich fundamental von denjenigen der Schulmathematik. Der Einbezug der Gesamtproblematik der doppelten Diskontinuität für Lehramtskandidaten öffnet die Aufmerksamkeit für ein weiteres Problemfeld: das nötige Wissen für die spätere Lehrpraxis in der Schule. Die verschiedenen Problematiken bündeln sich in besonderem Maße in der Thematik ‚Begründen und Beweisen': Während in der Schule das explizite ‚Beweisen' stagniert, wird es in den Erstsemester-veranstaltungen an Universitäten prominent behandelt und eine gewisse Vorbildung hierbei (mindestens implizit) vorausgesetzt. Auch können die Begründungsformen der Hochschulmathematik nur sehr begrenzt im Schulunterricht eingesetzt werden.

Um dieser Problematik entgegenzuwirken, wurden international verschiedene Kurskonzepte entwickelt und durchgeführt. Doch dieses Problem lässt sich nicht durch das bloße Unterrichten von Beweistechniken beheben; für ein adäquateres Verständnis der Kulturtechnik ‚Beweis' im Kontext der Wissenschaft Mathematik ist eine Konzeption nötig, die das Beweisen sinnvoll und sinnstiftend in Explorations- und Erkenntnisprozesse integriert und somit gleichzeitig Mathematik als kreative und forschende Wissenschaft darstellt. In diesem Sinne wurde das „Elementarmathematische Forschungsprogramm", formuliert in Wittmann und Müller (1988), herangezogen, um unter dem Leitbild „Elementarmathematik als Prozess" weitere Richtlinien für die hier zu entwickelnde Lehrveranstaltung zu gewinnen.

Die im Kontext der bisherigen Erörterungen herausgestellten ersten Leitprinzipien für die Gestaltung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" für Lehramtsstudierende für Haupt-, Real- und Gesamtschulen werden in der Abbildung 1 zusammenfassend dargestellt.

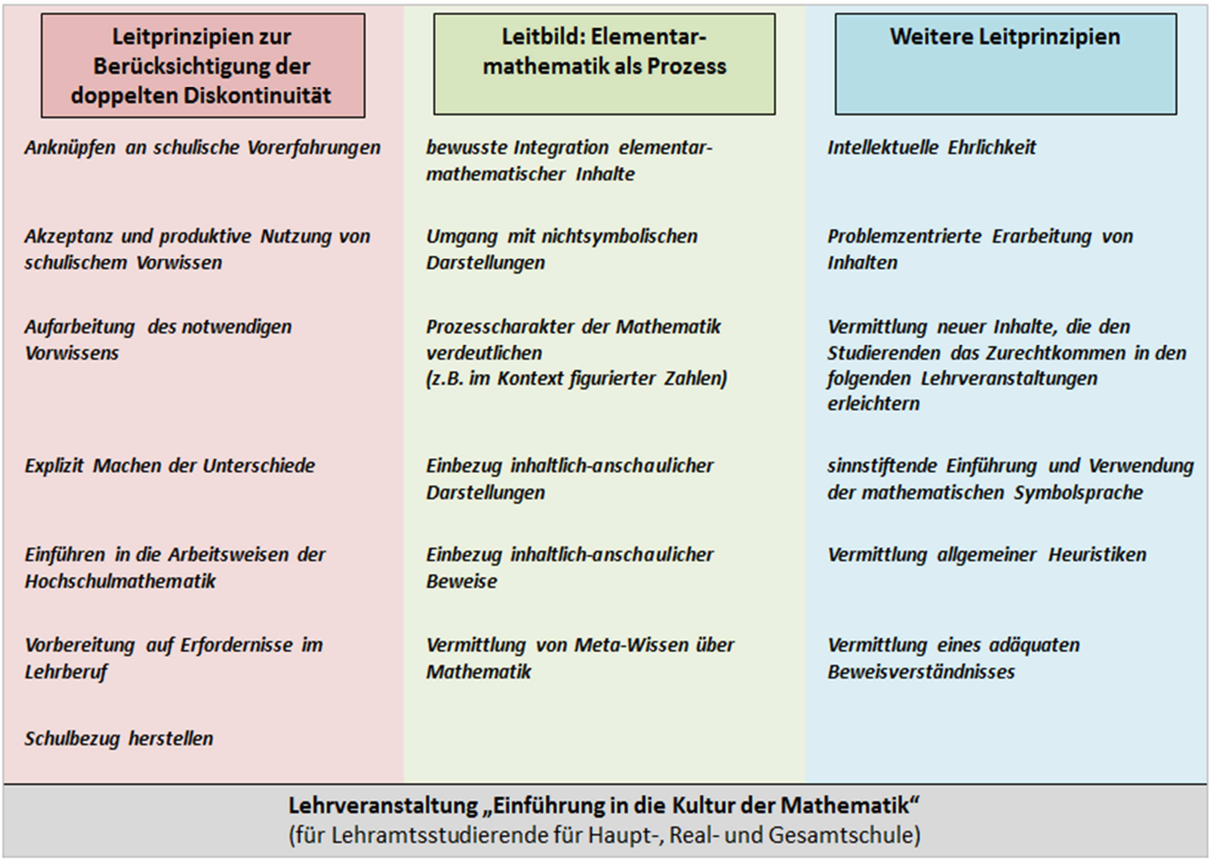


Abbildung 1: Erste Leitprinzipien für die Gestaltung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“

Vor dem Wissenshintergrund der Problematik der doppelten Diskontinuität, kulminiert in dem Bereich des Begründens und Beweisens, und der aus den verschiedenen Sichtweisen auf die universitäre Ausbildung gewonnenen Leitprinzipien für die hier thematisierte Lehrveranstaltung lassen sich nun das Forschungsanliegen und die Zielsetzung dieser Forschungsarbeit konkretisieren.

1.4 Forschungsanliegen, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

In diesem Abschnitt werden zunächst das Forschungsanliegen, die Zielsetzungen dieser Arbeit und die globale Forschungsfrage 1 formuliert (1.4.1). Anschließend wird der Aufbau der vorliegenden Arbeit begründet dargelegt (1.4.2).

1.4.1 Forschungsanliegen, Zielsetzungen und Forschungsfrage

Grundlage der vorliegenden Forschungsarbeit ist die von Rolf Biehler entwickelte und im Wintersemester 2011/12 zum ersten Mal durchgeführte Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“. **Das übergeordnete Forschungsanliegen** dieser Arbeit lässt sich wie folgt formulieren:

> *Die forschungsbasierte (Weiter-) Entwicklung einer Lehrveranstaltung, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und hierbei in einem besonderen Maße das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen‘ unter dem Aspekt der doppelten Diskontinuität fokussiert.*
>
> *Dabei soll ein Beitrag zu einer empirisch begründeten Instruktionstheorie geleistet werden, wie das Lernen in der Domäne „Begründen und Beweisen“ in einer universitären Erstsemesterveranstaltung gelingen kann.*

Hiermit verbunden ist die die Forschungsarbeit leitende **Forschungsfrage [1]**:

> „Wie kann im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende (Haupt-, Real- und Gesamtschule) der Themenbereich ‚Begründen und Beweisen' vor dem Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität adäquat vermittelt werden?"

Um diese Forschungsfrage beantworten zu können, müssen wiederum die folgenden **Forschungsziele** erreicht werden:

i. Die Entwicklung von Testinstrumenten, welche die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden ermöglichen.
ii. Die Erforschung der Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen von Studierenden zu Beginn des Studiums (bzw. zu Beginn der Lehrveranstaltung).
iii. Die Erforschung der Auswirkungen der Lehrveranstaltung auf die Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen der Teilnehmenden.

1.4.2 Aufbau der Arbeit

Ein theoretischer Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf dem Phänomen der doppelten Diskontinuität in der Lehramtsausbildung Mathematik und dabei im Speziellen auf der Thematik ‚Begründen und Beweisen'. In **Kapitel 1** wurde bereits dargestellt, in welchem Spannungsrahmen eine Lehrveranstaltung gedacht werden muss, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und in einem besonderen Maße das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' unter dem Aspekt der doppelten Diskontinuität fokussiert und welche grundlegenden Leitideen für ihre Konstruktion und Weiterentwicklung gelten.

In **Kapitel 2** werden die theoretischen Grundlagen für die Forschungsarbeit gelegt: Zunächst werden die zentralen Begriffe und Aspekte im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen' erörtert und die für diese Arbeit wichtigen empirischen Befunde aufgearbeitet und vergleichend diskutiert. Für die retrospektiven Analysen und die Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung sind zwei Theorien leitend: die Theorie sozio-mathematischer Normen (Yackel & Cobb 1996) und die semiotische Sichtweise auf das Beweisen als diagrammatisches Schließen nach Pierce (etwa Hoffmann 2005, S. 123ff.). Diese Theorien werden am Ende des zweiten Kapitels dargelegt und ihre Verwendung begründet.

Die Forschungsmethode des Design-Based Research wird in **Kapitel 3** beschrieben und als vorliegender Forschungsansatz legitimiert. Die Entwicklung der im Kontext dieser Studie verwendeten Testinstrumente zum Beweisen ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit und wird im Rahmen des dritten Kapitels dargestellt.

Die bereits in Kapitel 2 angesprochenen didaktisch-motivierten Beweisformen (operativer und generischer Beweis) stehen nicht isoliert für sich, sondern müssen im Kontext einer historischen Entwicklung mathematikdidaktischer Ideengeschichte verstanden werden. Für die Verwendung entsprechender Beweisformen in der Hochschullehre scheint es angebracht, genauer zu hinterfragen, in welchem unterrichtlichen Kontext und mit welchen Zielsetzungen diese Beweisformen von ihren ‚Urhebern' entwickelt wurden und welche etwaigen Fallstricke damit verbunden sein könnten. Diesen Fragestellungen wird in **Kapitel 4** in Form einer historischen Aufarbeitung didaktischer Leitideen des Beweisens nachgegangen. Es stellt sich dabei auch die Frage, welche (weiteren) Implikationen für den Einsatz entsprechender Beweisformen in der (Hochschul-) Lehre aus der historischen Betrachtung der Beweiskonzepte gezogen werden können.

Ausgangspunkt der Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ ist die erste Version der Lehrveranstaltung, wie sie von Rolf Biehler entwickelt und im Wintersemester 2011/12 zum ersten Mal an der Universität Paderborn durchgeführt wurde. Im Sinne des Forschungsparadigmas wird beschrieben, wie die Lehrveranstaltung im Wechselspiel von Empirie, Theorie und Praxis in einem zyklischen Prozess über den Zeitraum von 2011 bis 2014 weiterentwickelt wurde (**Kapitel 5**).

Die finale (vierte) Version der Lehrveranstaltung und ihre Durchführung werden schließlich in **Kapitel 6** vorgestellt.

Die Passung und der Nutzen der finalen Version der Lehrveranstaltung wurden im Rahmen einer Effektivitätsstudie untersucht. Die entsprechenden empirischen Studien werden in **Kapitel 7** dargelegt. Mithilfe dieser Ergebnisse wird es abschließend möglich, den letzten hier thematisierten Durchlauf der Lehrveranstaltung retrospektiv zu analysieren.

In **Kapitel 8** werden die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse in drei Bereichen zusammengefasst: Design-Ergebnisse, empirische Ergebnisse und Beiträge der Arbeit, die über die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie hinausgehen. Im Rahmen des ersten Abschnitts wird die globale Forschungsfrage 1 in Form der Formulierung des geleisteten Beitrags zu einer lokalen und adressatenspezifischen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ beantwortet. Im Anschluss daran werden kurz die in dieser Arbeit entwickelten Testinstrumente und die empirischen Ergebnisse aus der Effektivitätsstudie zur letzten in dieser Arbeit betrachteten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 zusammengefasst. Schließlich werden im dritten Abschnitt weitere Beiträge der Arbeit herausgestellt, die über die Instruktionstheorie hinausgehen und als besonders wertvoll für die weitere Diskussion der Thematik erscheinen. Schließlich werden das gesamte Forschungsprojekt und die erzielten Ergebnisse kritisch reflektiert und Perspektiven für die weitere Forschung aufgezeigt.

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für die vorliegende Arbeit gelegt. Zunächst geht es hierbei um die Frage, was überhaupt unter einem Beweis zu verstehen ist (2.1.1) und was das Ideal eines formalen Beweises ausmacht (2.1.2). Diesem Ideal werden dann die in dieser Arbeit verwendeten Beweiskonzepte des operativen Beweises und des generischen Beweises gegenübergestellt (2.1.3). Als weitere wichtige Grundlagen für den Bereich des Beweisens werden das Attribut der Strenge (2.1.4), die Argumentationsgrundlage und das lokale Ordnen (2.1.5), das Konzept des Beweisbedürfnisses (2.1.6) und die verschiedenen Funktionen von Beweisen (2.1.7) erörtert. Schließlich werden die Zusammenhänge zwischen dem Erlernen der Beweisaktivität und dem Konzept der Selbstwirksamkeit (2.2.1) und den sogenannten ‚Einstellungen zur Mathematik‘ bzw. ‚Beliefs‘ zur Mathematik beleuchtet (2.2.2). Anschließend wird begründet dargestellt, was in der vorliegenden Arbeit unter Argumentation verstanden wird (2.3.1) und wie der Beweisbegriff in diesem Kontext eingeordnet wird (2.3.2). Entsprechende Darstellungen folgen zum Begründungsbegriff (2.3.3) und dem Verhältnis der drei Begriffe zueinander (2.3.4).

Es folgt eine Darstellung der empirischen Erkenntnisse aus der Literatur, die für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse sind. Hierbei geht es zunächst um die Beweiskompetenzen von Studienanfängern, ihre Vorerfahrungen mit Beweisen und ihre Ansichten zum Beweisen (2.4.1). Von Bedeutung ist hierbei weiter, was in der Literatur unter dem Komplex der ‚Beweisakzeptanz' betrachtet wird (2.4.2) und inwiefern der Zusammenhang von Einstellungen zur Mathematik und dem Beweisen bisher untersucht wurde.

Der in den folgenden Kapiteln dargestellte Forschungsprozess im Sinne des Design-Based Research wird durch die Anwendung von zwei Theorien geleitet: Die Theorie des Beweisens als diagrammatisches Schließen im Sinne von Charles Sanders Peirce und die Theorie der sozio-mathematischen Normen von Yackel und Cobb (1996). Diese beiden Leittheorien werden am Ende des Kapitels vorgestellt und ihre Passung und Anwendbarkeit für das vorliegende Forschungsprojekt erörtert.

2.1 Der mathematische Beweis

2.1.1 Der Beweisbegriff

Der Beweis ist eines der konstituierenden Momente der Wissenschaft Mathematik und zugleich das Charakteristikum, welches diese von anderen Wissenschaften unterscheidet (etwa Heintz 2000). Was allerdings genau ein ‚Beweis' ist, oder was als solcher zu gelten hat, ist normativ schwer zu fassen. Als Ausgangspunkt für die vorzunehmende Begriffserörterung soll eine Definition von Jahnke und Ufer (2015) dienen, welche die charakteristischen Merkmale des Konstrukts ‚Beweis' umfasst: „Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln" (ebd., S. 331).

Bereits an dieser Stelle wird eine erste Unterscheidung notwendig: Zunächst beinhaltet ‚Beweis' eine prozedurale Komponente; hierunter wird im Allgemeinen der gesamte Prozess der Beweisfindung, die Beweiserarbeitung und die schrittweise Darlegung des deduktiven Arguments verstanden. Als ‚Beweis' wird allerdings außerdem das Produkt beschrieben, welches das finale Ergebnis des Beweisprozesses ist (s.u.). Im Folgenden wird, aufbauend auf dem obigen Zitat, ‚Beweis' als die schrittweise Darlegung eines deduktiven Arguments beleuchtet. Hieran wird sich eine Betrachtung des Phasenmodells des Beweisens von Boero (1999) anschließen, wodurch die Beweisdarlegung in einen größeren Zusammenhang der mathematischen Tätigkeit gestellt wird.

Wie in dem obigen Zitat deutlich wird, wird innerhalb eines Beweises ein mathematischer Satz deduktiv hergeleitet, bzw. dessen Gültigkeit deduktiv nachgewiesen. Deduktive Herleitung meint dabei ‚notwendiges Schließen': der Nachweis, dass die Gültigkeit des mathematischen Satzes aus der Gültigkeit der Prämissen durch die Anwendung von Gesetzen (‚spezifizierte Schlussregeln') mit Notwendigkeit folgt. Als Prämissen dürfen innerhalb eines Beweises nur Sachverhalte verwendet werden, die entweder als Axiome als gültig vorausgesetzt oder bereits bewiesen worden sind.

Einer solchen Darlegung eines (vollständigen) Beweises geht allerdings ein längerer (Beweis-) Prozess voraus. Boero (1999, S. 2) unterteilt diesen Beweisprozess in sechs verschiedene Phasen und legt somit ein idealisiertes Modell zum Beweisen als Grundlage für didaktische Überlegungen vor. Bei der Betrachtung dieses Modells werden die verschiedenen Aspekte deutlich, die den Beweisprozess als mathematische Tätigkeit konstituieren und somit auch Lernenden bewusst gemacht werden sollten. Aus diesem Grund wurden anhand des Phasenmodells von Boero u.a. heuristisch ausgearbeitete

Lösungsbeispiele zum Beweisen entwickelt, an denen Lernende Methoden- und Strategiewissen zum Beweisen erlernen sollten (vgl. Reiss & Renkl 2002; Reiss et al. 2008).

Die von Boero unterteilten Stufen des Beweisprozesses sind (nach Boero 1999, S. 2):

1. **Entwicklung einer Vermutung** aufgrund von Exploration und dem Herausfinden von Regelmäßigkeiten und ihren Entstehungsbedingungen
2. **Formulierung einer Behauptung** („statement“) gemäß geltenden mathematischen Normen
3. **Exploration des spezifischen Gehalts und des Umfelds der These**. In dieser Phase werden Zusammenhänge, Argumente, Heuristiken etc. für die zu zeigende Aussage gesucht.
4. **Auswahl von Argumenten und deren Aneinanderfügen zu einer Argumentationskette**
5. **Aufschreiben des Beweises gemäß mathematischen Standards**
6. **Die Annäherung an einen formalen Beweis** („approaching a formal proof“) – Hiermit ist die (Um-) Gestaltung des Beweises hin zum formalen Ideal eines Beweises gemeint. Es wird allerdings angemerkt, dass diese Phase häufig nicht erreicht wird, da eine vollständige Formalisierung in der forschenden Mathematik keinen Nutzen habe (vgl. Abschnitt 2.1.2).

Diese sechs vorgestellten Phasen laufen nicht notwendig linear ab, da etwa auch bei dem Aneinanderfügen von Argumenten zur einer Argumentationskette neue Einsichten gewonnen werden könnten, die dann zu einer Neukonstruktion des Beweises führen würden. Auch ist eine strikte Trennung der verschiedenen Phasen nicht möglich, da z.B. auch Erkenntnisse aus der Explorationsphase als Argumente in der vierten Phase dienen können.

Bei der Betrachtung des Beweisprozesses wird deutlich, aus welchen verschiedenen Teilaspekten und Teilkompetenzen sich der Akt des Beweisens zusammensetzt. Selbst wenn eine zu beweisende Behauptung bereits gegeben ist, umfasst der vorzunehmende Beweisprozess die Exploration der Behauptung und ihres Umfelds, das Ausmachen von Zusammenhängen, die Auswahl von Argumenten und Heuristiken, die Organisation dieser Aspekte zu einer Argumentationskette und schließlich die Formulierung eines akzeptablen Beweises.

Was allerdings genau unter einem akzeptablen Beweis zu verstehen ist, d.h. an welchen Normen sich eine Beweisende bzw. ein Beweisender zu orientieren hat, ist ein gewichtiges Problem, das auch in der aktuellen mathematikphilosophischen Diskussion weiter erörtert wird (vgl. die Beiträge in Aberdein und Dove 2013). Trotz der charakteristischen Merkmale des Beweisprozesses und der konstituierenden Merkmale der finalen Darlegung des Beweises, gibt es keine allgemein akzeptierten Kriterien dafür, wann ein Beweis ein Beweis ist (vgl. Hanna und Jahnke 1996, S. 878 und 884). Im Allgemeinen ist es der soziale Prozess der Akzeptanz innerhalb der mathematischen Community, die einen Beweis zu einem Beweis macht (Bender & Jahnke 1992, S. 261; Long 1986, S. 616; Manin 1977, S. 48). Vor diesem Hintergrund wird eine Grundproblematik der Beweisdidaktik deutlich, die Hersh prägnant formuliert hat: „We accuse students of the high crime of „not even knowing what a proof is“. Yet we, the math teachers, don’t know it either […]“ (Hersh 1997, S. 49).

Aber wie kann man Lernenden das Beweisen unterrichten, wenn die Normen im engeren Sinne nicht eindeutig sind? In der Fachwissenschaft funktioniert dieser Akzeptanzprozess, weil in den verschiedenen Sparten der Mathematik allgemeiner Konsens über diesen herrscht. Wie kann aber ein Prozess der Beweisakzeptanz im Lernkontext gelingen?

Zunächst ist der Lehrende die Instanz, die als Repräsentant der mathematischen Community (Yackel & Cobb 1996) letztlich über die Akzeptanz eines Beweises entscheidet bzw. entscheiden kann. Doch werden Richtlinien benötigt, an denen Lernende ihre Beweiskonstruktionen ausrichten können. Stylianides (2007a und 2007b) entwickelt in einer Synthese der Sichtweise der Mathematikdidaktik und der Philosophie der Mathematik eine Definition für Beweise, in der verschiedene normative Aspekte in den Schulkontext relativierend übertragen werden (Stylianides 2007a, S. 291; Hervorhebungen im Original):

> *Proof* is a *mathematical argument*, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:
>
> 1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification;
> 2. It employs forms of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
> 3. It is communicated with forms of expression (*modes of argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community.

Die Attribute „true", „valid" und „appropriate" verweisen auf die (implizit) geltenden bzw. etablierten Normen in der entsprechenden mathematischen Community, hier der Klassengemeinschaft. Die Zugänglichkeit der verwendeten Argumente, Begründungsmuster und Darstellungen eröffnet die Möglichkeit einer Diskussion über die (soziale) Akzeptanz der Beweise auch innerhalb einer Lerngruppe. Dabei werden explizit verschiedene Darstellungssysteme zugelassen, in denen die Beweise konstruiert bzw. kommuniziert werden können. Bei dieser Definition bleibt allerdings offen, welche Rolle der Lehrperson als Repräsentant der fachmathematischen Community genau zukommt. Es stellt sich auch die Frage, wie nah die in der Klassengemeinschaft zu setzenden Normen an denen der fachmathematischen Community sein müssen bzw. sollen.

In der Beweisdefinition von Stylianides wird deutlich, dass gerade auch aus didaktischer Perspektive die drei Aspekte: (1) zu verwendende Argumente, (2) Schlussweisen bzw. Beweistypen und (3) Darstellungsmittel, bei der Diskussion um das Beweisen zentral sind. Was die zugelassenen Schlussweisen betrifft, wurde bereits angemerkt, dass in Beweisen ausschließlich deduktive Schlüsse zugelassen sind. Für eine genauere Betrachtung von Schlussweisen innerhalb von Beweisen wird auf Walsch (1975, S. 29ff.) verwiesen. Die Verwendung bzw. Zugänglichkeit verschiedener Beweistypen (etwa Beweis durch Widerspruch oder Beweis durch Kontraposition) ist von dem jeweiligen Lernkontext (Klassen- bzw. Kursstufe, universitärer Studiengang etc.) abhängig. Die Bedeutungen der Aspekte ‚Argument' und ‚Darstellungsmittel' (bzw. Darstellungssysteme) in Zusammenhang mit ihren Tragweiten bedürfen einer theoretischen Betrachtung, da sie, wie sich zeigen wird, von zentraler Bedeutung für die hier erfolgende didaktische Diskussion des Konstrukts ‚Beweis' sind. Diese Aspekte können allerdings nicht in Bezug auf exakt ein theoretisches Konstrukt ‚Beweis' diskutiert werden, sie erlangen ihre Bedeutung erst im Kontext einer spezifischen Beweisform. Im Folgenden werden daher zunächst die Beweisformen formaler Beweis, operativer Beweis und generischer Beweis thematisiert, bevor nach einer Erörterung des Aspekts der Strenge eines Beweises auf die Bedeutung der Argumentationsbasis und des lokalen Ordnens und des Darstellungssystems eingegangen wird.

2.1.2 Formale Beweise

Das Idealbild eines (strengen) mathematischen Beweises ist der formale Beweis. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass er innerhalb eines formalen Systems (i.S. von Tarski 1944) stattfindet, in ihm

Symbole verwendet werden, die keine semantische Bedeutung tragen und als Schlussweisen nur spezielle logische Beziehungen zugelassen sind, welche sich auf Axiomen gründen (Hersh 1993, S. 390; Larvor 2012, S. 717; Reid & Knipping 2012, S. 141f.).

Die für das Konstrukt des formalen Beweises charakteristischen Momente: formales System, Axiom, Schlussweise und Satz, werden im Folgenden an einem Beispiel aus Hofstadter (2008) illustriert. (Die folgende Darstellung entspricht dabei ebd., S. 37ff., ist aber keine wortgetreue Wiedergabe.)

> In dem folgenden formalen System werden nur drei Buchstaben des Alphabets verwendet: „**M**", „**I**" und „**U**". Innerhalb des Systems werden Zeichenketten betrachtet, die aus diesen drei Zeichen gebildet werden können, wobei die Reihenfolge der Zeichen beachtet wird. Beispiele für solche Zeichenketten sind etwa: **MU** oder **UIIM**.
>
> Zu Beginn besitzen wir ausschließlich die Kette **MI**. Wir dürfen die Ketten innerhalb des Systems aber nach gewissen Regeln umformen:
>
> Regel 1: Wenn man eine Kette besitzt, deren letzter Buchstabe **I** ist, kann man am Schluss ein **U** zufügen. Beispiel: Aus **MUUI** kann man **MUUIU** erhalten.
>
> Regel 2: Angenommen man hat **M**x, wobei x als Platzhalter für ein Zeichen oder eine Zeichenkette steht. Dann kann man seiner Sammlung **M**xx zufügen. Beispiel: Aus **MIU** kann man **MIUIU** erhalten.
>
> Regel 3: Wenn in einer der Ketten der Sammlung **III** vorkommt, kann man eine neue Kette mit **U** anstelle von **III** bilden. Beispiel: Aus **MIIII** kann man **MIU** oder auch **MUI** machen.
>
> Regel 4: Wenn **UU** in einer Kette vorkommt, kann man es streichen. Beispiel: Aus **MUUI** kann man **MI** machen.
>
> Diese verschiedenen Regeln können nun nacheinander auf die Ausgangszeichenkette **MI** angewendet werden. Wann man welche Regel anwendet, bleibt dabei der agierenden Person überlassen. Wichtig ist nur, dass die betreffende Regel angewendet werden darf. Als mathematisches Problem könnte die Frage formuliert werden, ob es möglich ist, auf der Basis der formulierten Regeln die Kette **MU** zu erzeugen.
>
> Durch die Anwendung bestimmter Regeln werden neue Zeichenketten gebildet. Solch eine erhaltene Zeichenkette wird im Kontext formaler Systeme als ‚Satz' bezeichnet. Die Aufgabe der Erzeugung der Kette **MU** ist somit die Frage, ob **MU** ein Satz dieses formalen Systems ist. Der Beweis dieses Satzes besteht dann aus der Erzeugung der Zeichenkette nach bestimmten Regeln für das Rangieren von Symbolen, welche auch als ‚Schlussweisen' bezeichnet werden. Eine Zeichenkette, die schon zu Beginn zur Verfügung steht und keiner Herleitung bedarf, wird dabei als Axiom bezeichnet. Anstatt von Beweisen wird in diesem Kontext auch von Ableiten gesprochen. Abschließend wird hier die Ableitung des Satzes **MUIIU** angegeben:
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 1) | **MI** | Axiom |
> | 2) | **MII** | aus 1) durch Regel 2 |
> | 3) | **MIIII** | aus 2) durch Regel 2 |
> | 4) | **MIIIIU** | aus 3) durch Regel 1 |
> | 5) | **MUIU** | aus 4) durch Regel 3 |
> | 6) | **MUIUUIU** | aus 5) durch Regel 2 |
> | 7) | **MUIIU** | aus 6) durch Regel 4 |

Entsprechende Beweisprodukte, die innerhalb eines formalen Systems erfolgen, in denen die verwendeten Symbole rein syntaktisch, also ohne semantische Bedeutung, verwendet und alle Beweisschritte bzw. Schlussweisen expliziert werden, welche wiederum auf Axiomen gründen, werden in der Mathematik als formale Beweise bezeichnet. Dieses Idealbild des formalen Beweises steht in der Tradition der formalen Logik der Philosophie (etwa Boole, Frege, ...) und ist schließlich in der Axiomatisierung der Mathematik begründet, welche von ihren Vertretern zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts vollzogen wurde (etwa Hilbert & Bernays 1986, Whitehead & Russel 1978).

Die mathematische Tätigkeit wird hier als regelgeleitetes, syntaktisches Operieren mit Zeichen vollzogen, ohne dass eine semantische Bedeutung der Zeichen zum Tragen kommt. Allerdings geht mit jeder vollständigen Formalisierung dialektischerweise ein Bedeutungsverlust einher, auch die Verständlichkeit leidet unter der angestrebten ‚allumfassenden Transparenz' der Beweise. Bei der Betrachtung wirklicher formaler Beweise (vgl. etwa die Beweise in den Bänden der Principia Mathematica von Whitehead und Russel) wird schnell deutlich, dass dieses theoretische Idealbild mathematischer Beweise in der Praxis nicht nur nicht gewünscht, sondern, auch aufgrund der benötigten Länge, unerreichbar bzw. nicht möglich ist (Bender & Jahnke 1992, S. 162; Hersh 1993, S. 390; Thurston 1994, S. 8ff.).

Aufgrund dieser Unerreichbarkeit und Impraktikabilität formaler Beweise für die fachmathematische und unterrichtliche Praxis wurden in der Literatur verschiedene Formalitätsstufen von Beweisen unterschieden. Reid (2001) erweitert die von Lakatos (1978, S. 61ff.) herausgestellte Unterscheidung von präformalen, formalen und postformalen Beweisen, indem er die formale Stufe in semi-formal und vollständig formal unterteilt. Unter präformalen Beweisen werden dabei Beweisproduktionen gefasst, die in Notizen oder Konversationen auftreten, in denen implizit Vermutungen verwendet werden, und sich informeller Sprache und Notation bedienen. Die formalen Beweise sind dagegen die publizierfähigen Beweise. Im Gegensatz zu den vollständigen formalen Beweisen, in denen jeder Beweisschritt benannt und begründet wird, werden in semi-formalen Beweisen – wie es in der Praxis üblich ist – kleinere Lücken offen gelassen, deren Schließen dem Leser überlassen wird. Als postformale Beweise werden die Beweise der Metamathematik bezeichnet, wie etwa das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie oder Gödels Beweis über die formale Unentscheidbarkeit mathematischer Sätze.

Vor dieser Unterscheidung wird deutlich, dass ‚formale' Beweise, wie sie etwa in der universitären Ausbildung auftreten, im engeren Sinne nicht als formale Beweise gelten können. So wäre etwa der folgende Beweis der Behauptung, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist, ein semi-formaler Beweis im Sinne von Reid (2001). Innerhalb dieses Beweises werden u.a. nicht alle Schlussweisen expliziert (etwa der Schluss aus einer Existenzaussage bei der Einführung und Verwendung der Buchstabenvariablen n und m oder der finale implizite Schluss auf eine Allaussage), die Zeichen innerhalb des Beweises tragen noch semantische Bedeutung und es werden keine Bezüge zu Axiomen, Definitionen und Sätzen expliziert. Da solche oder ähnlich formulierte Beweise allerdings in der Praxis üblich sind, werden diese im Allgemeinen auch als formale Beweise bezeichnet.

> Beweis:
>
> Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebige aber feste, ungerade Zahlen. Dann ist $a = 2n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $b = 2m - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Weiter gilt:
>
> $(2n-1) + (2m-1) = 2n - 1 + 2m - 1 = 2n + 2m - 1 + (-1) = 2n + 2m - 2$
> $= 2 \cdot (n + m - 1)$, mit $(n + m - 1) \in \mathbb{N}$.
>
> Q.e.d.

Es ist dabei offensichtlich, dass entsprechende Beweise erst ab einer gewissen Ausbildungsstufe im unterrichtlichen Kontext sinnvoll eingebunden werden können. Aus der Bemühung heraus, die mathematische Beweisaktivität Lernenden auf allen Stufen der Mathematikausbildung zugänglich zu machen, wurden in der Mathematikdidaktik verschiedene Vorschläge unterbreitet, wie Lernende die mathematische Beweisaktivität am besten erlernen können bzw. sollen. Die Entwicklungsstränge und Querverbindungen und didaktischen Intentionen der von Biehler und Kempen (2016) so bezeichneten „didaktisch orientierten Beweiskonzepte“ werden in Kapitel 4 skizziert. Zwei dieser Beweiskonzepte sind dabei für die vorliegende Arbeit von besonderer Bedeutung, da die damit verbundenen Beweisformen im Kontext der Lehrveranstaltung explizit verwendet wurden: der operative Beweis und der generische Beweis.

2.1.3 Operative und generische Beweise

Im Kontext der Lehrveranstaltung wurden solche Beweisformen verwendet, die in der Literatur als ‚operativer Beweis‘ und ‚generischer Beweis‘ bezeichnet werden, da diesen gewisse didaktische Vorzüge zugesprochen werden (s.u.). In der Vorlesung zu der Lehrveranstaltung wurde ab dem zweiten Durchgang die Bezeichnung ‚generischer Beweis‘ verwendet (s. Abschnitt 5.3.1). Diese beiden Beweisformen werden im Folgenden näher dargestellt.

Operative Beweise

Wittmann beschreibt 1985 das *operative Prinzip der Mathematikdidaktik*:

> Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, …) ausgeübt werden. Daher muß man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise: (1) untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind, (2) herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden, (3) beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (Was geschieht mit …, wenn …?)“ (Wittmann 1985, S. 8; Hervorhebungen im Original).

Im Kontext entsprechender ‚operativer Unterrichtssettings‘ ergeben sich die sogenannten operativen Beweise als natürliche Form der Verifikation. Diese beschreibt Wittmann wie folgt: „Beweise, bei denen die den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden, nennt man operative Beweise“ (ebd., S. 11; Hervorhebung im Original).

Zur Illustration dieses Prinzips wird ein operativer Beweis zu dem Satz, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist, aus Wittmann (1985, S. 11), in einen entsprechenden Unterrichtszusammenhang gestellt:

Schülerinnen und Schüler können mit Steinen Quadratzahlen als wirkliche geometrische Quadrate legen. Dabei können sie feststellen, dass man zur jeweils nächsten Quadratzahl kommt, indem man oben rechts an ein Quadrat immer einen neuen Rand anlegt. Geht man von der n-ten zur $(n+1)$-ten Quadratzahl, so wird ein Winkel der Form $2n+1$ angelegt (vgl. Abbildung 2).

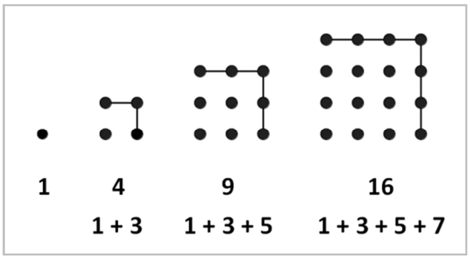


Abbildung 2: Abbildung zu einem operativen Beweis über die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. (Abbildung ähnlich zu Wittmann 1985, S. 11)

Dazu heißt es bei Wittmann (ebd., S. 11):

> Dieser Rand, geometrisch eine Figur, die die Differenz zweier Quadrate … darstellt, heißt griechisch Gnomon. Bei den Quadratzahlen beträgt beim Übergang von n^2 zu $(n+1)^2$ der Gnomon: $n+n+1=2n+1$. Die Reihe der Gnomone … besteht also aus den ungeraden Zahlen.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 … n² (n+1)²
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 2n+1

> Umgekehrt ergibt natürlich die Summierung der ungeraden Zahlen die Quadrate … Geometrisch entspricht dem die Herumlegung der Gnomone um die 1.

Hier wird innerhalb eines ‚operativen Unterrichtssettings' die Auswirkung der Operation ‚Anlegen eines Randes' an eine geometrisch dargestellte Quadratzahl festgestellt, dass die jeweils nächst größere Quadratzahl entsteht. Dabei werden insbesondere die Eigenschaften der Quadratzahlen und ihrer Beziehungen untereinander deutlich. Aus diesen Beobachtungen der Auswirkungen der Operationen folgt dann die Erkenntnis, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

Bei dieser Form der Verifikation stellt sich allerdings die Frage, wie von einem allgemeingültigen Nachweis der Behauptung gesprochen werden kann, wenn nur konkrete einzelne Fälle betrachtet werden. Wittmann und Ziegenbalg (2004) bemerken hierzu:

> Selbstverständlich wäre es kein stichhaltiger mathematischer Beweis, wenn die Richtigkeit der Behauptung nur für einige Fälle verifiziert würde. Dadurch, dass aber nicht auf einzelne Beispiele, sondern *auf allgemein ausführbare Operationen und deren „Wirkungen"* zurückgegriffen wird, ist die Allgemeingültigkeit gesichert. Man nennt Beweise dieser Art deshalb *operative Beweise*. Die speziellen Punktmuster, die bei einem operativen Beweis gezeichnet oder angedeutet werden, haben selbst nur eine indirekte Bedeutung. Sie dienen lediglich zur Demonstration der allgemein ausführbaren Operationen und fungieren als Stellvertreter (Variable) für beliebige Muster. (Ebd., S. 38; Hervorhebungen im Original)

Hierbei gilt es festzustellen, dass nach den Autoren die „allgemein ausführbare[n] Operationen und deren „Wirkungen"" (s.o.) die Allgemeingültigkeit des Beweises sichern. Gleichzeitig wird jedoch angemerkt, dass die konkreten Beispiele (hier Punktmusterdarstellungen) als Variable fungieren. Um die Allgemeingültigkeit dieser Beweise sicherzustellen, wird auch auf die Bedeutung des begleitenden Textes hingewiesen:

> Wir weisen noch einmal darauf hin, dass die Präsentierung eines suggestiven Musters als „Beweis ohne Worte" nicht ausreicht. Es muss schon durch einen *erklärenden Text* sichergestellt werden, dass die zur Begründung von Beziehungen angewandten Operationen wirklich allgemein ausführbar sind. (Ebd., S. 42; Hervorhebungen im Original)

Ein operativer Beweis besteht somit (mindestens) aus den Elementen: (i) allgemein ausführbare Operationen an konkreten ‚Objekten' (etwa Zahlenbeispiele oder Punktmusterdarstellungen), (ii) Feststellen und Nutzen der Auswirkungen dieser Operationen an den Objekten und (iii) Versprachlichung der allgemeingültigen Argumentation, die aus dieser Verbindung entspringt.

Wittmann beschreibt die charakteristischen Merkmale von operativen Beweisen wie folgt (Wittmann 2014, S. 226):

> Operative Beweise:
>
> - ergeben sich aus der Erforschung eines mathematischen Problems, insbesondere im Rahmen eines Übungskontextes, und klären einen Sachverhalt,
> - gründen auf Operationen mit „quasi-realen" mathematischen Objekten,
> - nutzen dazu die Darstellungsmittel, mit denen die Schüler auf der entsprechenden Stufe vertraut sind, und
> - lassen sich in einer schlichten, symbolarmen Sprache führen.

Das operative Prinzip und damit verbunden auch operative Beweise haben in der deutschen Mathematikdidaktik viel Beachtung gefunden (vgl. etwa die Arbeiten von Hering 1980, 1986 und 1988 oder die Beiträge in Müller et al. 2007). Wie Dreyfus et al. (2012, S. 204) ausführen, hat sich diese Begrifflichkeit in der internationalen Literatur allerdings nicht durchgesetzt. Selden (2005, S. 138) weist in Anlehnung an Wittmann (2004) auf den Nutzen von „operative proofs" für die Lehrerausbildung hin, merkt dabei aber eine Ähnlichkeit zum Konzept der generischen Beweise bei Rowland (2002a) an.

Generische Beweise

In der internationalen Diskussion hat sich der Begriff des generischen Beweises (‚generic proof') für die Bezeichnung von Beweisen durchgesetzt, die an konkreten Beispielen vollzogen werden, dabei aber den Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben können (vgl. Dreyfus et al. 2012, S. 204). Grundlegende Beiträge zu der Diskussion um generische Beweise sind u.a. in den folgenden Arbeiten enthalten: Bills und Rowland 1999, Dreyfus et al. 20012, Leron & Zaslavsky 2009 und 2013, Rowland 1998, 2002a und 2002b. Die entsprechenden Grundlagen dieser Beweisform werden im Folgenden zusammenfassend dargestellt.

Die Betrachtung eines (oder mehrerer) konkreter Beispiele kann dazu führen, dass dem Betrachter der Grund für die allgemeine Gültigkeit der Behauptung deutlich wird. Solche Beispiele, an denen eine beispielübergreifende und damit verallgemeinerbare Struktur deutlich wird, werden in der Literatur als „generische Beispiele" bezeichnet (etwa Mason & Pimm 1984), wobei in der internationalen Diskussion bei der Begrifflichkeit nicht deutlich zwischen generischen Beispielen und generischen Beweisen unterschieden wird und auch die Verbindung „generic example proof" verwendet wird (vgl. Karunakaran et al. 2014). Wie bereits bei den operativen Beweisen tritt auch hier die Frage auf, ob ein generisches Beispiel alleine bereits als allgemeiner Beweis ausreichen kann. Dabei wird das Problem deutlich, dass es vom Betrachter eines generischen Beispiels abhängt, ob dieser das generische Moment in diesem Beispiel (an-) erkennt oder nicht.

Um die Unterscheidung von ‚bloßen' Beispielbetrachtungen und generischen Beweisen zu unterstreichen, schlagen Biehler und Kempen (2013) die konzeptuelle Präzisierung vor, dass in generischen Beweisen zusätzlich zu generischen Beispielen die verallgemeinerbare Argumentation, die in den konkreten Beispielen deutlich wird, expliziert werden muss. Erst in dem Zusammenspiel von generischen Beispielen und explizierter Begründung wird dann von einem generischen Beweis gesprochen.

Zur Illustration dieses Konzepts wird ein generischer Beweis zu dem Satz angegeben, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summe $n + n^2$ eine gerade Zahl ist.

Generischer Beweis

$4 + 4^2 = 4 \cdot (1 + 4) = 4 \cdot 5, \quad 7 + 7^2 = 7 \cdot (1 + 7) = 7 \cdot 8, \quad 14 + 14^2 = 14 \cdot (1 + 14) = 14 \cdot 15$

Wie in den Beispielen deutlich wird, lässt sich die Summe aus einer natürlichen Zahl und ihrem Quadrat immer schreiben als Produkt der natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger. Bei zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer genau eine Zahl gerade, somit werden immer eine gerade und eine ungerade Zahl miteinander multipliziert. Da das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl immer gerade ist, muss das Ergebnis immer gerade sein.

Operativen und generischen Beweisen ist somit gemein, dass sie mithilfe konkreter Beispiele geführt werden, bei denen durch Operationen bzw. Transformationen eine verallgemeinerbare Strategie deutlich wird, die begründet für eine allgemeingültige Verifikation der gegebenen Behauptung verwendet werden kann. Aufgrund der zentralen Beschäftigung mit konkreten ‚Objekten' wird meist auf eine symbolische Darstellung verzichtet. Während bei operativen Beweisen aber im eigentlichen Sinne das den operativen Beweis rahmende (operative) Unterrichtssetting von Bedeutung ist (vgl. Wittmann 2014, S. 226), steht das Konzept des generischen Beweises losgelöst für sich. Dreyfus et al. (2012) gehen näher auf die Beziehung zwischen operativen und generischen Beweisen ein:

> A generic proof aims to exhibit a complete chain of reasoning from assumptions to conclusion, just as in a general proof; however, as with operative proofs, a generic proof makes the chain of reasoning accessible to students by reducing its level of abstraction; it achieves this by examining an example that makes it possible to exhibit the complete chain of reasoning without the need to use a symbolism that the student might find incomprehensible. In other words, the generic proof, although using an (numerical) example, must not rely on any properties of this specific example. Consequently, many operative proofs are generic and vice versa. (Ebd., S. 204)

Im Sinne der obigen Ausführungen gilt es Dreyfus zuzustimmen. Der Aspekt der verallgemeinerbaren Operationen in einem operativen Beweis kann als generisches Moment der Beispiele betrachtet werden, wodurch entsprechende operative Beweise auch als generische Beweise bezeichnet werden können. Entstammen andersherum generische Beweise einem operativen Unterrichtssetting und wird das generische Moment durch Operationen konstituiert, so können auch diese generischen Beweise als operative Beweise betrachtet werden. Dagegen lassen sich aber auch generische Beweise ausmachen, deren generisches Moment nicht auf Operationen (i.S. von Wittmann, s.o.) basiert und die daher nicht als operative Beweise bezeichnet werden können. Ein Beispiel hierfür ist der Widerspruchsbeweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ über den Widerspruch zu der Annahme, dass $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzter Bruch dargestellt werden könne. Dieser Beweis kann als generischer Beweis für den Satz betrachtet werden, dass die Quadratwurzel einer Primzahl immer irrational ist (vgl. Tall 1979).

Vom Einsatz generischer Beweise wird vor allem in der Hochschulausbildung berichtet (vgl. Bills & Rowland 1999; Leron & Zaslavsky 2009 und 2013; Malek & Movshovitz-Hadar 2009 und 2011; Rowland 1998, 2002a und 2002b), sie finden aber auch in der Schulmathematik Verwendung (vgl. Karunakaran et al. 2014; Stylianides 2010). In der aufgeführten Literatur werden dieser Beweisform verschiedene Vorteile zugesprochen, die im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden:

1. Generische Beweise ermöglichen die Konstruktion allgemeingültiger Beweise ohne die Verwendung fachmathematischer Symbolsprache.

2. Durch generische Beweise wird die Untersuchung von Beispielen explizit in den Beweisprozess mit einbezogen, was auch zu einem besseren Verständnis des zu beweisenden Sachverhalts führen kann (s. Alcock 2004; Sandefur et al. 2012). Gleichzeitig kann dabei der Unterschied von Beweisen zu bloßen Beispielüberprüfungen herausgestellt werden (s. Leron & Zaslavsky 2013, S. 27).
3. Generische Beweise gelten als besonders gut ‚erklärende' Beweise (s. Hemmi 2006, S. 44).
4. Im Kontrast von generischen Beweisen zu formalen Beweisen können die Vorteile und der Nutzen der fachmathematischen Symbolsprache herausgestellt bzw. erfahren werden.

Gleichzeitig sind mit entsprechenden Beweisen, die an konkreten Beispielen geführt werden, aber auch verschiedene Probleme verbunden:

1. Wie kann sichergestellt werden, dass Lernende wirklich das generische Moment erkennen und den Beweis nicht als bloße empirische Verifikation falsch verstehen?
2. Woher soll ein Betrachter überhaupt wissen, für welchen Aspekt die gegebenen Beispiele überhaupt exemplarisch stehen sollen?
3. Welche Argumente sind innerhalb von generischen Beweisen überhaupt zugelassen? Und damit einhergehend die Frage, wie entsprechende Beweiskonstruktionen überhaupt propädeutisch fungieren können, wenn ein expliziter Bezug auf mathematische Sätze oder Definitionen dabei im Allgemeinen nicht gefordert wird?

Diese Probleme müssen dabei als noch offene Fragen für die mathematikdidaktische Forschung betrachtet werden[4].

Die Frage, welche Argumente innerhalb entsprechender Beweise zugelassen werden, bzw. auf welche Argumentationsbasis sich der Beweiskonstrukteur überhaupt berufen kann, sind dabei Aspekte der häufig geforderten ‚Strenge' von Beweisen. Dieser Aspekt von Beweisen wird im Anschluss erörtert.

2.1.4 Strenge beim Beweisen

‚Strenge' ist ein Attribut, welches als notwendiges Kriterium für die Korrektheit und Gültigkeit mathematischer Beweise gefordert wird. Was allerdings genau ein strenger Beweis ist, verbleibt meist implizit. Freudenthal (1973) umschreibt den Begriff wie folgt:

> Die Mathematik hat vor allen anderen Geistesübungen jedenfalls den Vorzug, daß man da von einer Aussage sagen kann, ob sie richtig oder falsch ist. […] Das alles kommt daher, daß eben keiner Wissenschaft sich eine so stark deduktive Struktur aufprägen läßt wie der Mathematik. Man weiß in der Mathematik nicht nur ob ein Resultat richtig, sondern sogar – oder eigentlich nur – ob es richtig begründet ist. Das nennt man dann Strenge. (Ebd., S. 139)

Dieser ‚strenge' Beurteilungsprozess einer Aussage wird deutlich, wenn man Jahnke (2010) folgt:

> Das bekannteste ist das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, demzufolge ein schneller Läufer einen langsamen Läufer nicht überholen könne. Um ein solches Paradoxon zu verstehen und zu würdigen, ist eine bestimmte geistige Einstellung notwendig […]. Man weiß ja, dass Achilles die Schildkröte überholt. Davon darf

[4] Im Rahmen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" wurde diesen Problemen u.a. durch die Einführung der Norm begegnet, dass in einem generischen Beweis das generische Moment immer expliziert werden muss (s. Abschnitt 5.3.1). Dabei werden alle Argumente zugelassen, die als ‚intuitiv-einsichtig' gelten können. Damit stehen nicht die Argumente selbst, sondern deren Verbindung zu einem generischen Beweis im Vordergrund.

> man sich aber nicht ablenken lassen, sondern muss seinem eigenen Denken vertrauen und den in den Voraussetzungen angelegten Gedankengang bis zu Ende fortführen. In der Mathematik wird diese Einstellung mit dem Begriff ‚Strenge' bezeichnet. (Ebd., S. 55)

Strenge meint das Festhalten am zuvor aufgestellten bzw. konstruierten mathematischen Modell, das im idealen Fall durch ein formalisiertes System konstituiert wird. Innerhalb dieses Modells dürfen nur zugrunde gelegte Axiome und bereits bewiesene Sachverhalte als Argumente und logisch korrekte Schlüsse verwendet werden. Neben diese formalen Aspekte tritt dabei noch eine sozial-kulturelle Dimension: die Entsprechung der aktuell gültigen Normen der jeweiligen fachmathematischen Community.

Die Vorstellung vollkommener mathematischer Strenge ist parallel zu dem Ideal der vollständig formalisierten Theorie zu begreifen: „Thus, the idea of rigour implies both working in the formal mode with uninterpreted concepts and the completeness of deduction" (Bender & Jahnke 1992, S. 261).

Aus der Unangemessenheit vollkommener formaler Beweise für die Forschungs- und Unterrichtspraxis (vgl. Abschnitt 2.1.2) resultiert eine praxisorientierte Adaption von ‚Strenge': Die Möglichkeit, ‚strenge' Beweise im (Schul-)Unterricht auch ohne eine explizit zugrunde gelegte axiomatische Struktur durchzuführen, wird durch das Phänomen der lokalen Ordnung (vgl. Abschnitt 2.1.5) ermöglicht (Freudenthal 1963 und 1973). Vor diesem Hintergrund stellt sich aber die Frage, wie bzw. inwiefern Lernende den Aspekt der Strenge lernen können. Hierfür gibt Freudenthal einen ersten Ansatz:

> Es ist doch kaum zweifelhaft, daß der Schüler mathematische Strenge nicht anders lernen soll als Mathematik überhaupt: durch Nacherfindung. Und auch dies geschehe auf verschiedenen Stufen. (Freudenthal 1973, S. 140).

> Strenge dient dazu, zu überzeugen, und fertige Mathematik überzeugt nicht. Um in der Strenge fortzuschreiten, muß man an der Strenge, die man im Augenblick pflegt, erst einmal zweifeln. Ohne diesen Zweifel hat man wenig daran, sich höhere Maßstäbe von Strenge auferlegen zu lassen. (Ebd., S. 142).

Es folgt aus didaktischer Sicht, dass das ‚strenge' Arbeiten auf einer Stufe nur in Verbindung mit einer Wertschätzung derselben erlernt werden kann: Der Zweifel an der Aussagekraft einer Begründung auf einer Stufe der Strenge eröffnet die Möglichkeit zur Progression. Die Wertschätzung einer ‚strengen' Theorienutzung ist hierbei im Kontext der zu erreichenden Ziele eines Beweises zu betrachten. Wie weiter unten noch ausgeführt werden wird, liegen diese Ziele auch in der (subjektiven) Überzeugung und dem Verständnis eines Sachverhalts. Somit ergibt sich auch eine funktionale Deutung der Strenge, die Hanna (1997) wie folgt auslegt:

> Rigour is a question of degree in any case. In the classroom one need provide not absolute rigour, but enough rigour to achieve understanding and to convince. An argument presented with sufficient rigour will enlighten and convince more students, who in turn may convince their peers. It is the teacher who must judge when it is worthwhile insisting on more careful proving to promote the elusive but most important classroom goal of understanding. (Ebd., S. 183)

Dabei muss angemerkt werden, dass diese Sicht aus propädeutischer Perspektive diskussionswürdig ist. Zum einen erscheint es problematisch, den Grad an Strenge (und damit den Beweisbegriff) an den Aspekten ‚Verständnis' und ‚Überzeugung' auf Schülerseite auszurichten. Im Sinne Freudenthals soll der Grad der Strenge im unterrichtlichen Geschehen so lange aufrechterhalten werden, bis begründeter Zweifel an diesem aufkommt (s.o.). Der in einem entsprechenden Maße objektive

Nachweis der Gültigkeit eines Satzes bildet die Referenz für Strenge und nicht das subjektive Empfinden nach Verständnis und Überzeugung, was u.U. auch durch bloße empirische Argumente erreicht werden kann[5]. Durch die funktionale Ausrichtung an Verständnis und Überzeugung rückt der hier vorliegende Beweisbegriff stark an den allgemeineren Argumentationsbegriff heran, wie er in Abschnitt 2.3.1 dargelegt wurde.

2.1.5 Die Argumentationsgrundlage beim Beweisen und das lokale Ordnen

Die Argumentationsgrundlage mathematischer Beweise wird durch die Axiome und Schlussregeln gebildet, die das jeweilige rahmende mathematische System konstituieren. Des Weiteren können im Rahmen von Beweisen Sätze verwendet werden, die auf Grundlage der Axiome bereits bewiesen worden sind. Wird im unterrichtlichen Geschehen aber kein axiomatischer Aufbau der Mathematik betrieben – wie es in der Schule auch nicht möglich ist –, so stellt sich die Frage, was als gültige Argumentationsgrundlage beim Beweisen gelten kann.

Im schulischen Kontext können Argumente nicht bis auf zu Grunde gelegte Axiome zurückgeführt werden; das Verständnis des Beziehungsgefüges innerhalb des aktuell fokussierten und damit überschaubaren Feldes ist dennoch wünschenswert, wenn nicht aus propädeutischer Sicht notwendig. Freudenthal entwickelte aus dieser Problematik heraus das Konzept des lokalen Ordnens:

> Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des *lokalen Ordnens* genannt. (Freudenthal 1963, S. 6; Hervorhebungen im Original)

Das *lokale Ordnen* (eines Feldes) meint eine Analyse der Begriffe und Beziehungen im spezifischen Umfeld der aktuellen mathematischen Tätigkeit bis zu einer „recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind“ (Freudenthal 1973, S. 142).

Stein (1986) unterscheidet verschiedene ‚Beweiskonzepte‘ (und damit verbundene Niveaustufen) und führt dabei das von ihm so bezeichnete Niveau der lokal geordneten Theorie näher aus: Die verwendete Sprache lehnt sich meist an die Umgangssprache an und orientiert sich an dem betrachteten mathematischen Teilgebiet. Axiome werden nicht explizit angegeben, werden aber implizit als inhaltlich klar übernommen. Es werden nur die unbedingt notwendigen Begriffe definiert, was auch implizit aus der Bedeutung der verwendeten Begriffe heraus geschehen kann, und an die Schlussregeln und Beweise werden meist keine formalen Ansprüche angelegt. Auch können Hilfssätze verwendet werden, die intuitiv als korrekt gelten und nicht explizit vorher bewiesen wurden. Selbst die implizite Verwendung bestimmter Sachverhalte ist hier möglich (vgl. hierzu ebd., S. 12).

Aus didaktischer Perspektive stellt sich allerdings die Frage, wie explizit die Argumentationsgrundlage gemacht bzw. das lokale Ordnen betrieben werden soll. Damit hängt auch unmittelbar die Frage zusammen, ob innerhalb eines Beweises nur Sachverhalte verwendet werden dürfen, die bereits als ‚gültig‘ (bzw. ‚wahr‘) deklariert worden sind, oder ob jegliches intuitiv-korrekte Wissen eingebracht werden darf.

[5] „In class, students are all too easily convinced! Two special cases do it.” (Hersh 1997, S. 59)

2.1.6 Beweisbedürfnis

Unter dem Begriff ‚Beweisbedürfnis' fasst man im Allgemeinen die „Einsicht des Schülers in die Notwendigkeit, daß eine mathematische Aussage […] bewiesen werden muss" (Winter 1983, S. 64). Diese ‚Einsicht' umfasst sowohl objektive als auch subjektive Momente: Das objektive Beweisbedürfnis ist eine kognitive Angelegenheit: Der Lernende versteht, dass ein mathematischer Satz innerhalb eines bestimmten Kontextes eines Beweises bedarf. Dagegen meint das subjektive Beweisbedürfnis das intrinsische Verlangen des Lernenden, den Beweis für eine Aussage erfahren zu wollen (vgl. hierzu ausführlich Winter 1983). Damit das Beweisen nicht auf eine künstliche Aufgabe des Mathematikunterrichts reduziert wird, war und ist es ein Anliegen der Fachdidaktik, ein entsprechendes Verlangen bei Lernenden zu erzeugen.

Folgt man etwa Vollrath (1974, S. 25) oder Walsch (1975, S. 59f.), so sollen optische Täuschungen, wunderliche Situationen oder Widersprüchlichkeiten dazu genutzt werden, bei Schülern das Vertrauen in die Anschauung zu erschüttern und für ein Verlangen nach (Auf-)Klärung durch Beweise zu motivieren. Damit einhergehend soll den Schülern die „Unzulänglichkeit induktiver Methoden oder die von Plausibilitätsbetrachtungen für die Erkenntnissicherung in der Mathematik […]" bewusst gemacht werden (Walsch 1975, S. 60). Hier wird das Beweisen über angebliche Defizite anderer Methoden motiviert und somit gleichfalls aus einem Negativen heraus bestimmt. Durch diesen Ansatz ergeben sich jedoch Probleme auf mehreren Ebenen (vgl. Jahnke 1978, S. 206ff.; Winter 1983, S. 65ff.): Zunächst dient - wie bereits auch Walsch (1975, S. 131) anmerkt - das Messen in den Naturwissenschaften und gerade auch im Physikunterricht der Schule nicht nur der Erkenntnisfindung, sondern auch der Erkenntnissicherung. Es kann deshalb nicht darum gehen, Erkenntniswerkzeuge der Naturwissenschaften und gerade auch der Mathematik als unzulänglich darzustellen, vielmehr gilt es aus fachdidaktischer Perspektive, die Besonderheit mathematischen Wissens über Objekte in den Vordergrund zu stellen, das nicht durch Messen oder singuläre Überprüfungen erfasst werden kann (vgl. Jahnke 1978, S. 206ff.). So ist z.B. das Messen im schulischen Geometrieunterricht ein adäquates Mittel zur Hypothesengewinnung und -überprüfung. Ein mathematisches (allgemeingültiges) Wissen über ‚ideale' Objekte kann im Gegensatz dazu nicht durch Messen gesichert werden. Weiter gilt es, diesem Ansatz, der Motivation des Beweisens über die „Unzugänglichkeit induktiver Methoden" (s.o.), die Ausführungen von Lakatos (1979) entgegenzuhalten, der die Sicht auf Mathematik als quasi-empirische Wissenschaft betont hat. Lakatos verdeutlicht ein Bild mathematischer Praxis, das auf Exploration, Hypothesengenerierung, empirischen Überprüfungen, Beweisen und Widerlegungen beruht. An dieser Stelle wird die Bedeutung empirischer Betrachtungen für die Mathematik evident, was einen Ausschluss derselben aus dem mathematischen Erkenntnisprozess bzw. deren Herabwürdigung ad absurdum führen würde.

Folglich kommt in der Mathematik Tätigkeiten wie Beispielüberprüfungen und Plausibilitätsbetrachtungen eine große Bedeutung zu (vgl. hierzu das plausible Schließen bei Polya 1969, S. 9ff.); erst in der Beschäftigung mit der Empirie kann ein Verständnis von Verallgemeinerung und Allgemeinheit entstehen: Verallgemeinerung ist, so verstanden, kein Prozess, der sich von der Empirie entfernt, sondern sich ihr umgekehrt verstärkt zuwendet (vgl. Jahnke 1978, S. 211). So geht es etwa im Kontext der Arithmetik nicht um die Ungenauigkeit von einzelnen Überprüfungen, denn konkrete Beispiele liefern exakte Ergebnisse. Die Unzulänglichkeit der ‚Mess-Methode', hier der Überprüfung konkreter Fälle, besteht darin, behauptete Aussagen über alle Elemente einer benannten (häufig unendlichen) Menge verifizieren zu müssen. Und dies ist nicht durch

Einzelfallprüfungen zu erreichen. Grundlegend für ein (objektives) Beweisbedürfnis ist es daher, dass der Lernende ein „angemessenes (erkenntnistheoretisches) Verständnis mathematischer Verallgemeinerung“ erhält (Jahnke 1978, S. 207); anders ausdrückt: Das mathematische Konstrukt einer Allaussage verlangt als Gültigkeitsnachweis eine allgemeine Betrachtung, die nicht durch Einzelfallüberprüfungen leistbar ist.

Ein objektives Beweisbedürfnis muss sich folglich auf eine verständige Konzeption von Verallgemeinerung und einem angemessenen Verständnis des Verhältnisses von mathematischer Theorie und ihren Anwendungen stützen: Der Beweis eines Satzes macht diesen erst für spätere Anwendungen nutzbar. In diesem Sinne kann das Beweisen als ‚Beweisen von der Zukunft her‘ verstanden werden; die Zukunft der Theorie liegt in der Menge der intendierten Anwendungen (vgl. Jahnke 1978, S. 255). Denn erst wenn ein Sachverhalt bewiesen worden ist, kann dieser als Argument in anderen Beweisen verwendet werden. Diese Sichtweise betont die Nähe des (objektiven) Beweisbedürfnisses zum konzeptuellen Verständnis des Beweisbegriffs (vgl. Abschnitt 2.1.1): Dürfen innerhalb eines Beweises nur Axiome und bereits bewiesene Sachverhalte verwendet werden, so ergibt sich aus einem entsprechenden Beweisverständnisses die (objektive) Notwendigkeit des Beweisens.

Das subjektive Beweisbedürfnis basiert nach Winter (1983) auf Neugier, Interesse und (intrinsischer) Leistungsmotivation. Die Dimensionen ‚Neugier‘ und ‚Interesse‘ lassen sich hierbei mit einem Verweis auf das Konzept des „intellectual need“ von Harel (2013) auf Seiten der Studierenden genauer fassen. Nach Harel (2013) begünstigt das intrinsische Verlangen nach Gewissheit und Kausalität[6] („certainty“ und „causality“; ebd, S. 123ff.) die Herausbildung eines subjektiven Beweisbedürfnisses (vgl. hierzu auch Zaslavsky et al. 2012, S. 220ff.). Da sich das Bedürfnis nach Gewissheit nur vor dem Hintergrund einer unsicheren Situation ausbilden kann, muss der Unsicherheit im Lernprozess ein entsprechender Raum gegeben werden:

> A large place must be left for uncertainty in the learning process. Uncertainty in relation to mathematical knowledge is institutionalised in the notion of conjecture, the validation of which, and even the production of which, is devolved onto the community of students. The conjectures concern those parts of the mathematics curriculum that students must learn during the year. We believe that the necessity, the functionality of proof can only surface in situations in which the students meet uncertainty about the truth of mathematical propositions. (Alibert 1988, S. 32)

Solch ein Grad an Unsicherheit kann z.B. durch Aufgabenstellungen wie „Beweise oder widerlege” erreicht werden. Stärkere Unsicherheit ist allerdings gegeben, wenn Lernende im eigenen Explorationsprozess Hypothesen selbst bilden und anschließend verifizieren müssen.

Dieses Bedürfnis nach Gewissheit und Kausalität (i.S. von Harel oben) steht dabei in einem engen Zusammenhang mit der Erklärungsfunktion von Beweisen: Beweise können eine Erklärung dafür liefern, warum eine Behauptung wahr ist. Somit scheint es angebracht, die ‚Warum-Frage‘ im Kontext von Beweisen zu betonen, um die Bildung eines subjektiven Beweisbedürfnisses zu begünstigen.

Insgesamt muss zu der didaktischen Grundintention der Herausbildung eines Beweisbedürfnisses angemerkt werden, dass sich generell ein echtes (intrinsisches) Verlangen nur vor der Wertschätzung

---

[6] „Thus, the *need for causality* is one’s desire to *explain*, to determine a cause of a phenomenon.” (Harel 2013, S. 126; Hervorhebungen im Original).

eines erreichbaren Zieles ausbilden kann. Nur wenn der Beweis eine funktionale Deutung innerhalb einer erreichbaren Zielsetzung erfährt, kann sich ein Beweisbedürfnis ausbilden: „Ein Beweisbedürfnis kann nur derjenige entwickeln, der prinzipiell auch weiß, wie er es befriedigen kann.“ (Jahnke 1978, S. 211). Für ein ‚echtes‘ Bedürfnis muss dieses Ziel für den Lernenden positiv konnotiert sein: „[…] daher wird einen Beweis nur schätzen, wer das Positive daran erlebt hat“ (Grieser 2015, S. 89). Die Frage nach der Entwicklung eines Beweisbedürfnisses muss somit vor dem Hintergrund der verschiedenen Funktionen, die ein Beweis erfüllt bzw. erfüllen kann, betrachtet werden.

2.1.7 Funktionen von Beweisen

Dem Werkzeug ‚mathematischer Beweis‘ werden im Kontext der Fachmathematik und der Fachdidaktik diverse Funktionen zugeschrieben, welche kognitive, soziale und epistemologische Aspekte tangieren. Eine Nennung entsprechender Funktionen orientiert sich häufig an der Auflistung von de Villier (1990), welche sich wiederum auf Bell (1976) zurückführen lässt. Weitere Funktionen von Beweisen wurden u.a. durch Auslander (2008), Hanna und Jahnke (1996), Rav (1999) und Weber (2002) in die Diskussion eingebracht. Ein guter Überblick über die verschiedenen Funktionen von Beweisen wird in Reid und Knipping (2010, S. 73ff.) gegeben.

Es herrscht ein allgemeiner Konsens darüber, dass verschiedene Funktionen von Beweisen beim Erlernen der Beweisaktivität berücksichtigt bzw. verdeutlicht werden müssen, damit Lernende ein adäquates Verständnis von Beweisen erlangen können, auf dessen Basis sich dann auch ein Beweisbedürfnis (vgl. Abschnitt 2.1.6) herausbilden kann. Aus diesem Grund werden im Folgenden die verschiedenen Funktionen von Beweisen dargestellt, die in dem vorliegenden Kontext von Interesse zu sein scheinen[7]. Der folgende Abschnitt orientiert sich an den Ausführungen in Reid und Knipping (2010, S. 73ff.), geht in der Auflistung weiterer Beweisfunktionen bzw. in der Ausdifferenzierung verschiedener Funktionen[8] aber über diese hinaus. Im Folgenden werden die verschiedenen Funktionen von Beweisen dargestellt und anschließend aus didaktischer Perspektive reflektiert.

1. Verifikation (Bell 1976, S. 24; Davis 1986, S. 354; de Villiers 1990, S. 18; Hanna 2000, S. 8)

In einem Beweis wird die Gültigkeit einer Aussage nachgewiesen. Dieser Nachweis erfolgt mithilfe logischer Schlussweisen aus als wahr postulierten Grundannahmen (‚Axiomen‘) und/oder aus bereits bewiesenen Sachverhalten. Jeder, der den verwendeten Argumenten und Schlussweisen zustimmt, muss zwangsläufig auch dem erhaltenen Resultat zustimmen. Der Nachweis der Gültigkeit kann dabei als objektiv festgestellte Gewissheit verstanden werden.

2. Überzeugung (de Villiers 1990, S. 18; Duval 1990, S. 198 und 2007, S. 139; Hersh 1993; Weber & Mejia-Ramos 2015)

[7] Nicht expliziert werden im Folgenden die Beweisfunktionen „to guide us along formally correct paths where our intuition may be weak or misleading“ (Renz 1981, S. 87), „to guide computiations” (ebd., S. 88) und das Erlangen von Reputation in Form von „theory credits” (Thurston 1994, S. 174).

[8] Weber und Mejia-Ramos (2015) betonen im Kontext von Beweisen den Unterschied zwischen relativer und absoluter Überzeugung („relative and absolute conviction“): Während relative Überzeugung die subjektive (unsichere) Überzeugung bzgl. der Gültigkeit einer Aussage beschreibt, meint absolute Überzeugung die Gewissheit über deren Gültigkeit. Bei der folgenden Auflistung von Funktionen von Beweisen wird diese Unterscheidung aufgegriffen, was dabei zu einer Unterscheidung der Funktionen Verifikation und Überzeugung führt. Eine ähnliche Unterteilung der Verifikationsfunktion wird auch in Kuntze (2005) vorgeschlagen.

Ein Beweis kann dazu beitragen, dass subjektiv die Überzeugung eines Individuums bzgl. der Gültigkeit einer Behauptung gesteigert wird.[9] Weber und Mejia-Ramos (2015) weisen darauf hin, dass im Kontext von Beweisen zwischen absoluter Gewissheit und relativer (subjektiver) Gewissheit unterschieden werden muss. Diese unterschiedlichen Grade an Gewissheit fasst Duval (1990 und 2007) unter dem Begriff der „epistemic values“ (s.u.) zusammen. Reid und Knipping (2010) bemerken hierzu:

> […] it is important to recognise that while logically a statement can only be true or false, psychologically it can take on one of many values, which Duval (1990, 2007) calls its "epistemic value". Epistemic value is a personal judgement of whether and how the proposition is believed. (Ebd., S. 74)

3. Erklärung (Bell 1976, S. 24; Kidron und Dreyfus 2009; de Villiers 1990, S. 19f. und 2012; Hersh 1993; Hanna 1989 und 2016; Steiner 1978)

Ein Beweis kann dem Betrachter erklären bzw. Einblicke geben, warum ein Sachverhalt gilt. Durch den Beweis wird somit ein neues bzw. erweitertes Verständnis für den betreffenden Sachverhalt erreicht. Diese Funktion wird in der didaktischen Literatur häufig als besonders bedeutsam für den Unterricht hervorgehoben, da hier ein großes Potential für die Entwicklung eines (subjektiven) Beweisbedürfnisses gesehen wird. Was allerdings als ‚erklärend‘ betrachtet wird, gilt es genauer zu diskutieren. Hierzu schreibt Steiner (1978):

> […] an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the results depend on the property. It must be evident, that is, that if we substitute in the proof a different object of the same domain, the theorem collapses; more, we should be able to see as we vary the object how the theorem changes in respond. (Ebd., S. 143)

Steiner geht hierbei von den Beziehungen innerhalb des Beweises aus und betont die syntaktische und semantische Bedeutung der Argumente für den Nachweis der Gültigkeit der Behauptung. Hanna (1989) beschreibt in Anlehnung an Steiner Beweise, die auch erklären, warum ein Sachverhalt gilt als ‚proof that explains‘ im Gegensatz zu Beweisen, die ‚nur‘ zeigen, dass ein Sachverhalt gilt (‚proof that proves‘). Zu dieser Unterscheidung, die in der Fachdidaktik viel Beachtung gefunden hat, bemerkt Hanna (1989):

> Yet surely not all proofs have explanatory power. One can even establish the validity of many mathematical assertions by purely syntactic means; with such a syntactic proof one essentially demonstrates that a statement is true without ever showing what mathematical property makes it true. Thus I prefer to use the term explain only when the proof reveals and makes use of mathematical ideas which motivate it. Following Steiner (1978), I will say that a proof explains when it shows what “characteristic property” entails the theorem it purports to prove. (Ebd., S. 10; Hervorhebung im Original).

Als Beispiel für einen erklärenden Beweis führt Hanna (1990, S. 11) den folgenden Beweis für den Satz an, dass die Summe $S(n)$ der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist:

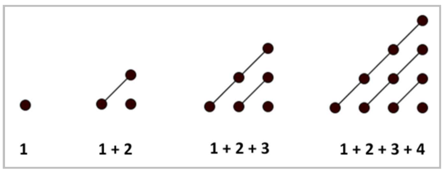


Abbildung 3: Punktmusterdarstellung der sukzessiven Summenbildung der ersten vier natürlichen Zahlen. (Abbildung ähnlich zu Hanna 1990, S. 11)

[9] Im Unterschied zu der Funktion Verifikation wird somit intendiert, dass zwischen der mathematisch-objektiven Feststellung einer Gültigkeit und der subjektiven Überzeugung bzgl. der Gültigkeit einer Behauptung auch nach erfolgtem Beweis noch Unterschiede bestehen können.

The dots form isosceles right triangles containing $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ dots.

Two such sums $S(n) + S(n)$ give a square containing n^2 dots and n additional dots because the diagonal of n dots is counted twice. Therefore:

$$2S(n) = n^2 + n$$

$$S(n) = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der Beweis des Satzes mit vollständiger Induktion wäre im Gegensatz dazu nach Hanna (1990, S. 10) ein ‚proof that proves'.

Müller-Hill (2017, S. 169) weist darauf hin, dass zwei grundlegende Positionen bzgl. des erklärenden Moments von Beweisen in der Literatur ausgemacht werden können. So schreiben etwa Hersh (1993) oder Weber und Verhoeven (2002) Beweisen eine inhärente Erklärungsfunktion zu, woraus ein höchstens gradueller Unterschied in Bezug auf die Erklärungsqualität von Beweisen abzuleiten wäre (vgl. auch Hanna 2016). Dagegen nehmen Steiner (1978) oder auch Celluci (2011) die Position ein, dass auch nicht-erklärende Beweise existieren (vgl. Müller-Hill 2017, S. 169f.).

Der Aspekt des erklärenden Moments von Beweisen wird in Abschnitt 8.3.5 vertiefend diskutiert.

4. Systematisierung (Bell 1976, S. 24; de Villiers 1990, S. 20; Hanna 2000, S. 8)

Innerhalb eines Beweises werden mathematische Sachverhalte als Argumente verwendet, um das Behauptete als Resultat deduktiver Schlüsse zu zeigen. Somit wird mathematisches Wissen in eine Ordnung gebracht, wodurch zunächst eine lokale Ordnung erfolgt (vgl. Abschnitt 2.1.5). Durch einen (formalen) Beweis erfolgt eine explizite Einordnung der Resultate in das axiomatisch-deduktive System der Mathematik. Zusammengefasst bedeutet dies, dass durch einen Beweis mathematisches Wissen systematisiert wird.

Einhergehend mit dieser Systematisierungsfunktion werden in der Literatur weitere (Sub-)Funktionen aufgeführt, die im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden: (i) Ein Beweis kann dabei helfen, Inkonsistenzen, Zirkelschlüsse und verborgene bzw. nicht ausdrücklich erwähnte Annahmen zu identifizieren, (ii) in Beweisen können mathematische Sachverhalte vereinheitlicht und vereinfacht werden, indem nicht-verwandte Aussagen, Theoreme und Konzepte mit einander in Verbindung gesetzt werden, woraus eine ökonomische Präsentation der Ergebnisse resultiert, und (iii) ein Beweis bietet einen Überblick über die Inhalte zu einem Themenbereich, indem etwa die unterliegende (axiomatische) Struktur aufdeckt wird, von der andere Eigenschaften abgeleitet werden (können).

5. Entdeckung (Auslander 2008, S. 66; Davis 1986, S. 354; de Villiers 1990, S. 21; Komatsu et al. 2014)

In einem Beweis(prozess) und bei der Reflektion eines Beweises können neue Entdeckungen gemacht werden. Diese Funktion von Beweisen steht in Wechselwirkung mit der Erklärungs- und Systematisierungsfunktion.
In dem Begründungszusammenhang einer Argumentationskette können neue Erkenntnisse gewonnen werden, die dann u.a. weiter generalisiert werden können. De Villiers (1990, S. 21) weist darauf hin, dass in der Mathematik Beweise nicht nur für die Verifikation einer Behauptung verwendet werden, sondern dass gerade die Aspekte von Exploration, Analyse, Entdeckung und

Erfindung („exploration, analysis, discovery and invention"; ebd., S. 21) innerhalb des Beweisprozesses von großer Bedeutung sind. Nach Komatsu et al. (2014) ist diese Beweisfunktion gerade aus didaktischer Sicht von großer Bedeutung, da durch diese Lernenden das Beweisen als produktive Tätigkeit und nicht als sinnentleertes Ritual vermittelt werden kann. Zur Illustration dieser Funktion soll ein Beispiel aus Reid und Knipping (2010, S. 76) dienen. Im Kontext des Beweises über die Summe zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen wird von Studierenden die Entdeckung gemacht, dass die Summe nicht nur gerade, sondern auch immer ein Vielfaches von vier ist: „The two numbers are $2n-1$ and $2n+1$. $2n-1+2n+1=2(2n)$ which is even. IN FACT it is a multiple of FOUR!" (Reid & Knipping 2010, S. 76).

6. Konstruktion einer empirischen Theorie[10] (Hanna und Jahnke 1996, S. 892ff.)

Betrachtet man die Mathematik als Wissenschaft und Theorie über ideale Objekte, so muss ihr Bezug zu der uns umgebenden realen Welt diskutiert werden. Wenn etwa im schulischen Geometrieunterricht Lernende dazu angehalten werden, die Innenwinkel eines Dreiecks zu messen und diese zu addieren, werden sie Ergebnisse um 180° erhalten. In dem Beweis über den Winkelsummensatz im Dreieck werden dann allerdings theoretische ideale Objekte thematisiert, die sich wiederum von den konkret vorliegenden (empirischen) Dreiecken unterscheiden. Vor dieser Perspektive kann die (euklidische) Geometrie als Wissenschaft, die die räumlichen Beziehungen der uns umgebenden Welt beschreibt, als ‚empirische Theorie' betrachtet werden.

Mathematische Sätze über ideale Objekte sind durch deduktive Beziehungen miteinander verbunden. In der uns umgebenden Welt erscheinen diese mathematischen Sätze als empirische Gesetze. Wird solch ein Gesetz durch einen Beweis zum Teil einer empirischen Theorie, dann wird es durch den Beweis gleichsam mit den anderen Gesetzen der Theorie verbunden. In diesem Sinne bestätigen und testen nicht nur die konkret auf dieses Gesetz bezogenen Messungen dessen Gültigkeit, sondern auch all die Messungen, die Gesetze derselben Theorie bestätigen. Mit Beweisen werden somit empirische Theorien für die uns umgebende ‚Realität' konstruiert.

7. Kommunikation (Bell 1976, S. 24; Davis 1986, S. 352; Knuth 2002, S. 381; de Villiers 1990, S. 22)

In einem Beweis wird Wissen kommuniziert und gleichsam ein Forum für einen kritischen Dialog geschaffen. Die Kommunikationsfunktion bildet die Grundlage für den sozialen Prozess, der konstituierend für die Bewertung und Akzeptanz von Beweisen ist.

8. Erforschung der Güte bzw. Bedeutung einer Definition, eines Satzes oder Sachverhalts und/oder einer axiomatischen Theorie (Auslander 2008, S. 67; Hanna und Jahnke 1996, S. 896 und 902; Renz 1981, S. 86ff.; Weber 2002)

Bei der Konstruktion von Beweisen werden mathematische Definitionen und Sätze im Rahmen von Schlussweisen als Argumente verwendet. Dabei werden Eigenschaften von Definitionen, Sätzen und eventuell axiomatischen Systemen offenkundig und ihre spezifische Güte ergibt sich durch ihre Passung und ihren Nutzen im Beweiskontext. Hierbei kann auch deutlich werden, dass für einen

[10] Die Funktion ‚Konstruktion einer empirischen Theorie' wird in der Literatur nur in Hanna und Jahnke (1996, S. 892ff.) weiter ausgeführt. Der folgende Absatz beinhaltet eine stark zusammengefasste Paraphrase der Ausführungen dieser Autoren.

Beweis etwa eine alternative bzw. ‚passendere' Definition für ein mathematisches Objekt herangezogen werden muss.

Nach Hanna und Jahnke (1996, S. 896) kann das Beweisen von ‚überraschenden' Sachverhalten dazu führen, dass die verwendeten Definitionen und Sätze kritisch rekapituliert werden. Sie geben als Beispiel den Satz über die Gleichmächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der Quadratzahlen an, der Lernende dazu bringen kann, die verwendeten Definitionen und Konzepte zu hinterfragen.

Weber (2002) weist darauf hin, dass Beweise, in denen offensichtliche Sachverhalte nachgewiesen werden, nicht primär der Verifikationsfunktion und auch nicht der Erklärungsfunktion zugewiesen werden können. In solchen Beweisen kann die Verdeutlichung und Anwendung einer axiomatischen Theorie im Vordergrund stehen. Als Beispiel führt Weber (2002, S. 15) die Einführung der Peano Axiome und die darauf basierenden Beweise an. In einem entsprechenden Beweis über den Sachverhalt „$2 + 2 = 4$" wird dann weder das Ziel verfolgt festzustellen, dass die Behauptung wirklich wahr ist, noch zu erklären, warum diese wahr ist. Mit dem Beweis werden vielmehr der Nutzen und die Tragweite des axiomatischen Systems aufgezeigt.

9. Entwicklung von konzeptuellem Verständnis (Pinto & Tall 1999)

Pinto und Tall (1999) erörtern, wie das Verstehen einer Definition mit ihrer Verwendung im Kontext von Deduktionen zusammenhängt. Dabei wird deutlich, dass die Betrachtung von Sachverhalten, Definitionen und logischen Zusammenhängen bei Beweisführenden zu einem konzeptuellen Verstehen beitragen kann (s. Weber 2002, S. 2).

10. Übertragung einer bekannten Tatsache in einen neuen Bereich und damit eine Betrachtung derselben aus einer neuen Perspektive (Hanna und Jahnke 1996, S. 903; Renz 1981, S. 88)

Wird ein mathematischer Sachverhalt innerhalb eines Beweises als Argument verwendet, so erhält dieser eine funktionale Deutung im Gefüge der Schlussweisen und Bezüge zu anderen Sachverhalten können dabei deutlich werden. Als ein Beispiel für diese Funktion führen Reid und Knipping (2010) den Beweis des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung an: „By showing that integrals are anti-derivatives, the proof repositions numerous facts about the derivatives of various functions as facts about functions whose integrals are known" (ebd., S. 78).

Renz (1981) führt diese Funktion von Beweisen am Beispiel der ganzen Zahlen aus:

> The integers may first be regarded very concretely in terms of counting and arithmetic. Next we may look at them in terms of set theory and cardinal and ordinal arithmetic. A change to the axiomatic point of view (Peano) may shed new light. Model theory (the work of Skolem and others on the nonstandard integers) may show limitations of the axiomatic approach. A hypermodern category theory approach (Peano-Lawvere) may shed still further light and offer certain simplifications. (Ebd., S. 88)

11. Intellektuelle Herausforderung/ Selbstrealisierung (de Villiers 1999 S. 8; Renz 1981, S. 87)

Für Mathematiker kann ein Beweis eine intellektuelle Herausforderung darstellen, die nach Beendigung eine gewisse Befriedigung verschafft. In diesem Sinne beinhaltet ein Beweis die Funktion einer individuellen Selbstrealisierung und Selbsterfüllung. Ein Beweis ist somit auch ein ‚Prüfstein' für die geistige Ausdauer und den Einfallsreichtum oder die Kreativität eines Mathematikers.

Zu dieser Funktion bemerkt de Villiers (1999):

> To mathematicians proof is an intellectual challenge that they find as appealing as other people may find puzzles or other creative hobbies or endeavours. Most people have sufficient experience, if only in attempting to solve a crossword or jigzaw puzzle, to enable them to understand the exuberance with which Pythagoras and Archimedes are said to have celebrated the discovery of their proofs. Doing proofs could also be compared to the physical challenge of completing an arduous marathon or triathlon, and the satisfaction that comes afterwards. In this sense, proof serves the function **of self-realization** and **fulfillment**. Proof is therefore a testing ground for the intellectual stamina and ingenuity of the mathematician (compare Davis & Hersh, 1983: 369). (de Villiers 1999, S. 8; Hervorhebungen im Original)

12. Ästhetik (de Villiers 1990, S. 23; Inglis & Aberdein 2015; McAllister 2005; Müller-Hill & Spies 2011)

Das Attribut Schönheit bzw. Ästhetik wird in Zusammenhang mit verschiedenen Aspekten der Mathematik verwendet (s. etwa McAllister 2005 oder Müller-Hill und Spies 2005). Auch Beweise werden in der Mathematik unterschiedlich in Bezug auf ihre Ästhetik beurteilt, wobei einige Beweise als besonders schön und elegant betrachtet werden (siehe etwa die ausgewählten Beweisbeispiele in Aigner und Ziegler 2010 oder in Alsina und Nelsen 2013). Inglis und Aberdein (2015) versuchen im Kontext von Beweisen das Konstrukt der Schönheit („beauty") genauer zu fassen und subsumieren unter diesem Aspekt die Teilbereiche Schlichtheit („simplicity"), epistemische Genugtuung („epistemic satisfaction") und Erleuchtung („enlightenment") (Inglis & Aberdein 2005, S. 89ff.)[11]. Aufgrund der (Teil-)Eigenschaft der Erleuchtung wird diese Beweisfunktion in der Literatur auch mit der Erklärungsfunktion von Beweisen in Verbindung gebracht (vgl. Reid und Knipping 2010, S. 77).

Die mit dieser ästhetischen Bewertung von Beweisen einhergehende Hierarchie kann dazu führen, dass in der Mathematik nach Beweisen gesucht wird, die als besonders ästhetisch bzw. schön gelten.

13. Beweise als Träger mathematischen Wissens (Hanna und Barbeau 2010, Rav 1999)

Rav (1999) bezeichnet Beweise als „bearers of mathematical knowledge" (ebd., S. 20), da in Beweisen mathematisches Wissen (in Form von Methoden, Konzepten, Strategien etc.) und dessen Anwendung offenbar wird. Die damit einhergehende Funktion von Beweisen wird von Rav als epistemische Funktion („epistemic funtion") beschrieben (ebd., S. 19). Hanna und Barbeau (2010) adaptieren diesen Ansatz und führen ihn aus didaktischer Perspektive weiter aus: „proofs could be accorded a major role in the secondary-school classroom precisely because of their potential to convey to students important elements of mathematical elements such as strategies and methods" (ebd., S. 98). Sie illustrieren diesen Ansatz u.a. an der Erarbeitung der folgenden Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Als Ausgangspunkt kann die Betrachtung verschiedener quadratischer Gleichungen dienen und die Frage, welche dieser Gleichungen sich wie lösen lassen. Untersuchungen von Gleichungen der Form $0 = x^2 - k$ (mit $k \epsilon \mathbb{R}$) führen zu der Methode des Faktorisierens bzw. zur Anwendung der dritten

---

[11] Vergleiche hierzu die Kriterien für mathematische Schönheit in Müller-Hill und Spies (2005, S. 263ff.): Ökonomie, Klarheit, Tragweite und subjektive Wirksamkeit.

binomischen Formel. Bei der Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \ \epsilon \ \mathbb{R}$ und $a \ \neq 0$ wird dann z.B. noch die Methode der quadratischen Ergänzung angewendet.

14. Rekapitulation von wichtigen Ergebnisses (Renz 1981, S. 87)

Renz (1981) führt „to help us remember important or useful results“ (ebd., S. 87) als eine weitere Funktion von Beweisen auf. Er illustriert diese Funktion von Beweisen an dem Additionstheorem des Tangens: Wer den Beweis des Additionstheorems kennt, kann sich leicht das Ergebnis bzw. das Theorem herleiten.

Kommentierung der betrachteten Beweisfunktionen unter einer didaktischen Perspektive

Die *Verifikation* einer Behauptung ist ein zentrales konstituierendes Moment der Beweisaktivität und durchzieht als funktionaler Aspekt alle Stadien der Mathematikausbildung. Vor allem aus didaktischer Perspektive wird jedoch betont, dass (objektive) Verifikation eines Sachverhalts nicht mit der *(subjektiven) Überzeugung* von dessen Gültigkeit gleichgesetzt werden darf (de Villiers 1990, S. 18; Weber und Mejia-Ramos 2015). Während Verifikation als Nachweis von Gültigkeit nur im Rahmen der oben diskutierten ‚Strenge' im Kontext einer zugrunde gelegten Theorie erfolgen kann, benötigt man für die subjektive Überzeugung i.A. nicht einen vollständigen und gültigen Beweis. Weber und Mejia-Ramos (2015) zeigen darüber hinaus Beispiele auf, in denen die Gleichsetzung der objektiven und subjektiven Momente zu Verständnisproblemen bei Lernenden und zu missverständlichen Forschungsergebnissen führen können. Beide Funktionen von Beweisen erscheinen grundlegend für einen verständigen Umgang mit Beweisen. Hieraus folgt, dass diesen beiden Aspekten im unterrichtlichen Geschehen ein entsprechender Raum gegeben werden muss: dem Beweisen als objektives Nachweisen der Gültigkeit eines Sachverhalts im Rahmen eines Theoriegerüsts und dem Beweisen für die subjektiven Überzeugung bzgl. der Gültigkeit eines Sachverhalts.

In der Literatur wird prominent darauf hingewiesen, dass im Unterrichtsgeschehen das *erklärende Moment von Beweisen* besonders in den Vordergrund gestellt werden sollte (etwa Hersh 1993 und 1997 oder Hanna 2000). Diese Überzeugung spiegelt sich in der Unterscheidung von „proofs that prove and proofs that explain“ (Hanna 1989). Was allerdings einen Beweis zu einem ‚erklärenden' Beweis macht, wird in der Literatur zwar theoretisch erörtert (vgl. etwa Hanna 1989 in Anlehnung an Steiner 1978), empirische Untersuchungen stehen hierzu allerdings noch aus.

Das Strukturieren von Argumenten zu einer Argumentationskette bedeutet bereits eine erste *Systematisierung von Wissen* im Sinne einer lokalen Theorie. Deren Einordnung in eine axiomatische Theorie kann offensichtlich nur erfolgen, wenn ein entsprechendes Theoriegerüst explizit zur Verfügung steht. Diesen epistemologischen Funktionen kann somit nur nachgekommen werden, wenn sich der Beweisbegriff der Idee des formalen Beweises annähert. Diese Beweisfunktion betont somit die Notwendigkeit der Explizierung einer lokalen und in gewisser Weise auch aufzubauenden globalen Theorie und eines entsprechenden Konzepts ‚formaler' Beweise.

Die Funktion der *Entdeckung* im Kontext mathematischer Beweise betont ein aktives und produktives Moment von Beweisen und verdeutlicht seine Stellung in Prozessen mathematischer Wissensgewinnung. Wie Komatsu et al. (2014) darlegen, scheint u.a. gerade in dieser Funktion das

Potential zu liegen, das Beweisen als sinnstiftende Tätigkeit zu erfahren. Hier wird die Notwendigkeit deutlich, Beweise nicht als eine Standardaufgabe der Mathematik zu verwenden, sondern im Kontext von Erkenntnisprozessen einzugliedern.

Die Beweisfunktion *Konstruktion einer empirischen Theorie* tangiert epistemologische und philosophische Aspekte der Mathematik. Inwieweit diese Aspekte im unterrichtlichen Geschehen thematisiert werden sollen, gilt es vor dem Hintergrund des jeweiligen Lehr-/Lernszenarios und des entsprechenden Adressatenkreises zu diskutieren.

Die *Kommunikation* mathematischer Sachverhalte, gebündelt in Beweisen, muss einerseits als Phänomen der fachmathematischen Praxis betrachtet werden und birgt andererseits didaktische Implikationen. Als Phänomen der fachmathematischen Praxis wird in dieser Beweisfunktion eine Enkulturationsfunktion (vgl. Abschnitt 8.3.3) von Beweisen evident, da diese Kommunikation entsprechend gültiger Normen der jeweiligen fachmathematischen Kommunität erfolgen muss. Aus didaktischer Perspektive motiviert diese Funktion die Frage nach Ausführlichkeit von Beweisen und der Darstellung von Beweisen, damit diese von anderen Personen gelesen und verstanden werden können.

Die Funktionen *Erforschung der Güte bzw. Bedeutung einer Definition, eines Satzes oder Sachverhalts und/oder einer axiomatischen Theorie*, *Entwicklung von konzeptuellem Verständnis* und auch *die Übertragung einer bekannten Tatsache in einen neuen Bereich und damit eine Betrachtung derselben aus einer neuen Perspektive* wenden den Blick von dem Beweisprodukt auf die verwendeten mathematischen Sachverhalte und Methoden und scheinen dabei das Potential zu bieten, den Sinn und Nutzen präzise formulierter fachmathematischer Definitionen und Sätzen im Rahmen mathematischer Theorien zu verdeutlichen und gleichsam zu motivieren.

Ästhetik und *intellektuelle Herausforderungen* erscheinen in erster Linie als subjektive Momente im Umgang mit Beweisen. Entsprechende Erfahrungen können von Lernenden gemacht werden, damit einhergehende Wertschätzungen von Beweisen scheinen dabei nicht durch Lehrende (von ‚außen') herbeigeführt werden zu können.

Die Sichtweise auf Beweise als *Träger mathematischen Wissens* und auf Beweise zur *Rekapitulation von wichtigen Ergebnissen* scheint vor allem nach erfolgter Beweiskonstruktion in einer Rückschau den Nutzen von Beweisen zu betonen. Die Rückschau bzgl. Reflexion eines Beweis- oder Problemlöseprozesses gilt als wichtiges Lernmoment entsprechender Lernprozesse (Polya 1967). Diese Funktion von Beweisen scheint auch einen Fokus für die Reflexion von Beweisprozessen bereitzustellen.

Als Grundfrage bleibt allerdings, wie man ‚Funktionen von Beweisen' unterrichten kann. Da es hier mehr um ein Bewusstsein als um rein deklaratives Wissen geht, wird in der vorliegenden Arbeit die These vertreten, dass es daher zentral ist, Lernanlässe zu bieten, in denen Studierende die verschiedenen Funktionen von Beweisen wiederholt erfahren können. Die Bewusstmachung, Diskussion und Reflexion entsprechender Lernhandlungen wird in diesem Kontext als zentral erachtet.

2.2 Ausgewählte Aspekte zum Erlernen der Beweisaktivität: Das Konzept der Selbstwirksamkeit und Einstellungen zur Mathematik und zum Beweisen

In diesem Abschnitt werden zwei ausgewählte Aspekte thematisiert, denen potentielle Einflüsse auf das Erlernen der Beweisaktivität zugesprochen werden: das Konzept der Selbstwirksamkeit und die Einstellungen zur Mathematik. Es folgt eine Darstellung der theoretischen Grundlagen dieser Konzepte, verbunden mit einer Erörterung, inwiefern diese Aspekte auf das Erlernen der Beweisaktivität Einfluss nehmen könnten. Es werden diese Aspekte thematisiert, da diese auch bei der späteren empirischen Beforschung der hier thematisierten Lehrveranstaltung eine Rolle spielen werden.

2.2.1 Selbstwirksamkeit und Beweisen

Das Konzept der Selbstwirksamkeit bzw. Selbstwirksamkeitserwartung wurde von Albert Bandura entwickelt und beschreibt „Beliefs in one's capabilities to organize and execute the courses of action required to manage prospective situations“ (Bandura 1995, S. 2). Aus didaktischer Perspektive ist dieses Konzept von großer Bedeutung, da es u.a. einen Erklärungsansatz für motivationale Aspekte bietet:

> Efficacy expectations determine how much effort people will expend and how long they will persist in the face of obstacles and aversive experiences. The stronger the perceived self-efficacy, the more active the efforts. Those who persist in subjectively threatening activities that are in fact relatively safe will gain corrective experiences that reinforce their sense of efficacy, thereby eventually eliminating their defensive behavior. Those who cease their coping efforts prematurely will retain their self-debilitating expectations and fears for a long time. (Bandura 1977, S. 194)

Nach Bandura (1977, S. 195ff.) können verschiedene Aspekte die Selbstwirksamkeit einer Person beeinflussen. Eigene Erfolgserlebnisse haben, gerade in schwierigen Situationen, einen großen Einfluss auf die eigene Selbstwirksamkeitserwartung. Selbst Erfolgserlebnisse anderer, denen man ähnliche Fähigkeiten zuschreibt, stärken die eigene Selbstwirksamkeit, was unter dem Begriff der stellvertretenden Erfahrung subsumiert wird. Auch verbale Ermutigungen können den Glauben einer Person in die eigenen Fähigkeiten stärken. Schließlich hat auch die emotionale Erregung einer Person Auswirkungen auf die Selbstwirksamkeit: Stress und ein Gefühl der Überforderung schwächen das Vertrauen in die eigene Person und begünstigen Selbstzweifel.

Die Thematik der Selbstwirksamkeit wird aktuell in der Mathematikdidaktik in verschiedenen Bereichen umfassend diskutiert. Im Folgenden soll nur der Teilbereich dargestellt werden, der sich auf das Beweisen bezieht.

Vor allem Selden und Selden (2012 und 2013) betonen die Bedeutung der Selbstwirksamkeitserwartung für das Erlernen der Beweisaktivität. Zentral ist hierbei der Aspekt, dass das Beweisen als ein Problemlöseprozess verstanden werden kann, da für die Konstruktion des Beweises keine Lösungsroutine zur Verfügung steht und die Beweisschritte als mehrschrittige Lösungswege selbst entwickelt werden müssen. Beim Erlernen der Beweisaktivität ist somit, wie auch beim Problemlösen, ein gewisses Maß an Durchhaltevermögen unerlässlich, was durch eine hohe Selbstwirksamkeitserwartung unterstützt wird. Auf diese Bedeutung der Selbstwirksamkeitserwartung beim Problemlösen weist auch Krantz (2012) hin:

> You must have adequate faith in yourself to know that you can battle your way through the problems. … Not

> unrelated to the idea of tenacity is the property of being comfortable with delayed gratification. … Once you are challenged to generate your own proofs and counterexamples, you are frequently at odds, and often frustrated. … The unifying theme for dealing with the need for tenacity and the need to deal with delayed gratification is self-confidence. You need to believe in your own abilities, and you need to believe that *you can actually do this work*. (Krantz 2012, S. 97 - 99; zitiert aus Selden & Selden 2012, o. S.; Hervorhebung im Original)

Für die Beweisdidaktik bedeutet dies, dass Lernende überhaupt die Möglichkeit erhalten müssen, eine (hohe) Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen überhaupt aufbauen zu können. Folglich sollten Lernende früh mit eigenen Beweiskonstruktionen beginnen und entsprechende Beweisaufgaben sollten zunächst so gestellt sein, dass Lernende auch Erfolgserlebnisse haben können, um ihre eigene Selbstwirksamkeitserwartung und die ihrer Mitlernenden steigern zu können. Schließlich müssen sie an gut gewählten Problemstellungen die Erfahrung machen, dass sich Durchhalten auszahlen kann (vgl. Selden & Selden 2013, S. 254).

In der Literatur wird von positiven Auswirkungen der Selbstwirksamkeit auf mathematische Leistungen im Allgemeinen (etwa Hackett und Betz 1989) und auch speziell auf die Problemlösefähigkeiten hingewiesen (etwa Pajares und Graham 1999, Pajares und Kranzler 1995, Pajares und Miller 1994). Entsprechende Befunde bzgl. des Beweisens stehen dabei noch aus.

2.2.2 Einstellungen zur Mathematik und das Beweisen

In der mathematikdidaktischen Forschung gerieten in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts „subjektive Theorie“ bzw. „Einstellungen“ (Grigutsch et al. 1998, S. 3) von Lernenden und Lehrenden zur Mathematik in den Fokus des Interesses. Hierbei wird davon ausgegangen, dass solche Einstellungen zur Mathematik das Lernen und Lehren von Mathematik beeinflussen und über erworbene Einstellungen zur Mathematik der real vorherrschende Mathematikunterricht reflektiert werden kann (ebd., S. 3f.; eine umfassende Darstellung der Bedeutung von Einstellungen zur Mathematik erfolgt in Leder et al. (2006) und in Schlöglmann und Maaß (2009)).

Ein Problem bei der Diskussion um Einstellungen (bzw. ‚Beliefs‘) zur Mathematik sind dabei die Verwendung verschiedener Begrifflichkeiten und die teilweise unterschiedlichen Bedeutungen, die den Begriffen in verschiedenen Sprachen zugewiesen werden. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden mit ‚Einstellungen zur Mathematik‘ häufig die von Grigutsch et al. (1998) herausgearbeiteten vier verschiedene Facetten von Einstellungen zur Mathematik thematisiert (s.u.), welche auch als „Beziehungen zur Mathematik“ (etwa Fischer 2014, elektronischer Anhang, S. 12), „epistemologische Überzeugungen zur Natur der Mathematik“ (etwa Laschke und Blömeke 2014, S. 109) oder als „mathematische Weltbilder“ (Weygandt & Oldenburg 2014, S. 1307) bezeichnet werden. Im internationalen Kontext werden unter dem Begriff ‚Beliefs’ auch die von Ernest (1989) herausgestellten drei Aspekte zum Wesen der Mathematik verstanden.

Übergeordnet wird in der vorliegenden Arbeit unter „Einstellungen“ (bzw. „Beliefs“) nach Philipp (2007) das Folgende verstanden:

> Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes. Beliefs might be thought of as lenses that affect one’s view of some aspect of the world or as dispositions toward action. Beliefs, unlike knowledge, may be held with varying degrees of conviction and are not consensual. Beliefs are more cognitive than emotions and attitudes. (Ebd., S. 259)

Da ein Verständnis des mathematischen Werkzeuges ‚Beweis' (die Konstruktion von Beweisen, ihre Bedeutungen und Funktionen etc.) eng mit dem individuellen vorliegenden Verständnis von Mathematik (bzw. mit der jeweiligen Einstellung zur Mathematik) verbunden zu sein scheint (vgl. etwa Conner et al. 2011, S. 488; Furinghetti & Morselli 2009, S. 60f.; Solomon 2006, S. 377ff.), fanden die Einstellungen zur Mathematik auch in verschiedenen Studien zur Beweisdidaktik Beachtung (s. Abschnitt 2.4.3). Dabei kann vermutet werden, dass bei einer statischen, sehr formal geprägten Sichtweise auf die Mathematik die formalen Aspekte beim Beweisen (entsprechende Darstellung und Herausstellung der Schlussweisen) und die Funktion der Verifikation betont werden, während bei einer eher dynamischen, prozessorientierten Sicht der Beweisprozess als solcher, verbunden mit den Beweisfunktionen Überzeugung und Erklärung, in den Vordergrund rückt.

In der Forschung zu dieser Thematik lassen sich zwei verschiedene Hauptbetrachtungsweisen ausmachen, die sich auf unterschiedliche Grundlagenarbeiten stützen: die „Einstellungen zur Mathematik" nach Grigutsch et al. (1998) und die „Beliefs" nach Ernest (1989). Um die Ausrichtungen dieser beiden Betrachtungsweisen deutlich zu machen, werden im Folgenden die entsprechenden Grundlagenarbeiten skizziert.

„Einstellungen zur Mathematik" nach Grigutsch et al. (1998)

Grigutsch et al. (1998) arbeiten bei Mathematiklehrerinnen und -lehrern empirisch verschiedene Einstellungen gegenüber der Mathematik heraus. Die Autoren gehen dabei von der folgenden Grundunterscheidung von Sichtweisen auf Mathematik aus: In der statischen Sicht auf Mathematik steht das (fertige) Theoriegebäude der Mathematik im Vordergrund; hierbei geht es um angesammeltes Wissen in Form von Definitionen, Sätzen, Beweisen etc. Demgegenüber wird bei der dynamischen Sicht der Prozesscharakter der Mathematik betont: In der Beschäftigung mit Mathematik können Erfahrungen gemacht, Zusammenhänge entdeckt und kann somit neues Wissen gewonnen werden. Ausgehend von diesen beiden Polen arbeiten die Autoren die folgenden vier verschiedenen Einstellungen gegenüber der Mathematik heraus:

1. *Der Formalismus-Aspekt*
   Bei dieser Einstellung zur Mathematik wird der Formalismus besonders betont: „Mathematik ist gekennzeichnet durch eine Strenge, Exaktheit und Präzision auf der Ebene der Begriffe und der Sprache, im Denken (‚logischen', ‚objektiven' und fehlerlosen Denken), in den Argumentationen, Begründungen und Beweisen von Aussagen sowie in der Systematik der Theorie (Axiomatik und strenge deduktive Methode)" (ebd., S. 17).

2. *Der Anwendungsaspekt*
   Bei einer vorliegenden Betonung dieses Aspekts wird ein direkter Anwendungsbezug oder ein praktischer Nutzen in der Mathematik gesehen: „Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler wichtig: Entweder hilft Mathematik, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen, oder sie ist nützlich im Beruf. Daneben hat Mathematik noch einen allgemeinen, grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft" (ebd., S. 18).

3. *Der Prozess-Aspekt*
   Im Prozess-Aspekt wird eine dynamische Sicht auf Mathematik ausgedrückt, im Zentrum steht der Problemlöseaspekt der Mathematik mit dem Ziel der Erkenntnisgewinnung:

> Es geht dabei einerseits um das Erschaffen, Erfinden bzw. Nach-Erfinden (Wiederentdecken) von Mathematik. Andererseits bedeutet dieser Erkenntnisprozeß auch gleichzeitig das Verstehen von Sachverhalten und das Einsehen von Zusammenhängen. Zu diesem problembezogenen Erkenntnis- und Verstehensprozeß gehören maßgeblich ein inhaltsbezogenes Denken und Argumentieren sowie Einfälle, neue Ideen, Intuition und das Ausprobieren. Der Prozeß-Aspekt drückt die dynamische Sicht von Mathematik aus. (Ebd., S. 18f.)

4. *Der Schema-Aspekt*
   Bei dieser Einstellung zur Mathematik steht der Werkzeugcharakter der Mathematik, begründet auf Algorithmen und Schemata, im Vordergrund:

> Mathematik wird gekennzeichnet als Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst. Die Konsequenz für den Umgang mit Mathematik ist: Mathematik-Betreiben besteht darin, Definitionen, Regeln, Formeln, Fakten und Verfahren zu behalten und anzuwenden. Mathematik besteht aus Lernen (und Lehren!), Üben, Erinnern und Anwenden von Routinen. (Ebd., S. 19)

Diese Einstellungen zur Mathematik und die durch Grigutsch et al. konstruierten Skalen wurden in verschiedenen Studien verwendet (etwa in dem Projekt LIMA [Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik“ im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation] (vgl. Biehler et al. 2013, S. 40), der PISA Studie 2003 (vgl. Pisa-Konsortium 2006, S. 247) und in dem Projekt TEDS-M [Teacher Education and Development Study—Learning to Teach Mathematics] (vgl. Laschke & Blömeke 2014, S. 109ff.).

Die „Beliefs“ nach Ernest (1989)

Nach Ernest (1989) beeinflussen vor allem drei Bereiche von „Beliefs“ das Lehren von Mathematik: das Wesen der Mathematik („the nature of mathematics“), das Wesen des Mathematikunterrichts („the nature of mathematical teaching“) und der Prozess des Mathematiklernens („the process of learning mathematics“). Da im Kontext der vorliegenden Arbeit nur der erste Aspekt berücksichtigt wird, wird nur dieser im Folgenden weiter ausgeführt.

Das so bezeichnete ‚Wesen der Mathematik‘[12] wird von Ernest (1989) in Anlehnung an Thompson (1984) in die drei folgenden philosophischen Sichtweisen auf Mathematik unterteilt:

1. *die problemzentrierte Sicht auf die Mathematik*
   „[…] mathematics as a dynamic, continually expanding field of human creation and invention, a cultural product. Mathematics is a process of enquiry and coming to know, not a finished product, for its results remain open to revision.” (Ernest 1989, o. S.)

2. *die platonistische Sicht auf Mathematik*
   „mathematics as a static but unified body of certain knowledge. Mathematics is discovered, not created.“ (Ebd., o. S.)

[12] „The teacher’s conception of the nature of mathematics, is his or her belief system concerning the nature of mathematics as a whole” (Ernest 1989, o. S.).

3. *die instrumentelle Sicht*
   „mathematics is an accumulation of facts, rules and skills to be used in the pursuance of some external end. Thus mathematics is a set of unrelated but utilitarian rules and facts.“ (Ebd., o. S.)

Diese Konzeptualisierung wurde international auch im Kontext verschiedener Studien zur Beweisdidaktik verwendet (etwa Conner 2011; Furinghetti & Moreselli 2009 und 2011; Yoo 2008).

Forschungsergebnisse zu dem Zusammenhang von Einstellungen zur Mathematik und dem Beweisen werden in dem Abschnitt 2.4.3 zusammengetragen.

2.3 Argumentieren, Begründen und Beweisen

Drei zentrale Begriffe des theoretischen Umfelds dieser Arbeit sind Argumentieren, Begründen und Beweisen. Nachdem bisher die Bedeutung des Beweisbegriffs erörtert wurde, werden im Folgenden die Begriffe Argumentieren und Begründen und ihre Beziehungen zum Beweisen genauer betrachtet.

2.3.1 Argumentieren

In der Mathematikdidaktik gibt es keine geteilte Definition dessen, was unter ‚Argumentation‘ verstanden wird (vgl. Pedemonte 2007, S. 26), weshalb der Begriff in der Literatur mit unterschiedlichen Akzentuierungen verwendet wird. Entsprechende Begriffserörterungen sind u.a. in folgenden Arbeiten enthalten: Brunner (2014, S. 27ff.), Schwarzkopf (2000, S. 79ff.) und Reid und Knipping (2003, S. 153). Als Ausgangspunkt der Begriffserörterung soll im Folgenden der Argumentationsbegriff von Habermas dienen, der sich in verschiedenen Arbeiten für die Mathematikdidaktik als fruchtbar erwiesen hat (etwa Knipping 2003, S. 34ff.; Brunner 2013, S. 99f.). Auf diesem aufbauend werden konstituierende Momente von Argumentationen herausgearbeitet. Diese Merkmalsanalyse wird durch die Strukturbeschreibung im Sinne des pragmatischen Argumentationsbegriffs von Toulmin (1958) ergänzt. Hierbei wird ein Möglichkeitsspektrum aufgezeigt, welches schließlich eine Erörterung des Verhältnisses von Argumentation und Beweis ermöglicht. Die Argumentationsbegriffe von Habermas und Toulmin bilden dann den Rahmen, in dem anschließend das mathematische Argumentieren betrachtet werden kann. Es sei hierbei angemerkt, dass durch die Anlehnung an Habermas und Toulmin zwei verschiedene Sichtweisen auf Argumentation miteinander verbunden werden: Argumentieren als diskursive Tätigkeit (nach Habermas, vgl. auch Perelman 1970) und Argumentieren als „Generierung, Untersuchung und Absicherung von Vermutungen und Hypothesen in Bezug auf deren (objektiven oder individuell eingeschätzten) Wahrheitsgehalt“ (Reiss und Ufer 2009, S. 157 in Anlehnung an Balacheff 1999).

Habermas (1999) schreibt:

> *Argumentation* nennen wir den Typus von Rede, in dem die Teilnehmer strittige Geltungsansprüche thematisieren und versuchen, diese mit Argumenten einzulösen oder zu kritisieren. Ein *Argument* enthält Gründe, die in systematischer Weise mit dem *Geltungsanspruch* einer problematischen Äußerung verknüpft sind. Die „Stärke“ eines Arguments bemißt sich, in einem gegebenen Kontext, an der Triftigkeit der Gründe; diese zeigt sich u.a. daran, ob ein Argument die Teilnehmer eines Diskurses überzeugen […] kann. (Ebd., S. 38; Hervorhebungen im Original)

Argumentieren findet als ein <u>Typus von Rede</u>, nicht notwendigerweise mündlich, innerhalb einer <u>sozialen Interaktion</u>, eines Diskurses statt, in welchem eine <u>strittige Position</u> vorliegt. <u>Argumente</u> werden in <u>systematischer Weise</u> vorgebracht, <u>miteinander verknüpft</u> und <u>stützen bzw. kritisieren</u> einen <u>problematischen Geltungsanspruch</u>. Ein Argument hat dabei <u>keine in sich fest stehende</u>

‚Stärke', diese ergibt sich in dem jeweiligen Kontext. Die funktionale Ausrichtung einer Argumentation ist die Überzeugung des Gegenübers für die Annahme des strittigen Geltungsanspruchs (vgl. hierzu auch die Darstellungen in Brunner 2013, S. 99f.).

Es sind dies die konstituierenden Elemente und auch charakteristischen Merkmale, die eine Argumentation ausmachen. In welchem Ausmaß diese Elemente allerdings verlangt bzw. betont werden, bestimmt das vorherrschende Verständnis von Argumentation. Eine Exaktifizierung dieser Elemente wird im Folgenden nur bei den Aspekten vorgenommen, die dabei helfen, das Verhältnis von Argumentation und Beweis besser charakterisieren zu können. Die Offenheit der anderen Aspekte ermöglicht die Verwendung eines weiter gefassten Argumentationsbegriffs.

Im Weiteren wird die Darstellung der Argumentationsstruktur von Toulmin (1958, S. 94ff.) verwendet, um genauer beschreiben zu können, wie die Stützung des (problematischen) Geltungsanspruchs geschieht; für eine ausführlichere Darstellung desselben verweise ich auf Meyer (2007, S. 84ff.), dessen Übersetzungen der englischen Begriffe auch hier verwendet werden.

In der Begrifflichkeit Toulmins wird von dem *Datum*, welches als wahr angesehene Aussagen beinhaltet, auf die behauptete *Konklusion* geschlossen. Als Verbindung zwischen Datum und Konklusion wird eine *Regel* eingesetzt, durch die der Schluss auf die Konklusion legitimiert wird. Diese Regel wird in dem konkreten Fall wiederum durch eine *Stützung* abgesichert. Entsprechend dem jeweiligen Datum und der angewandten Schlussregel muss die Konklusion allerdings nicht mit ‚Sicherheit' folgen, dies ist z.B. gerade bei Alltagsargumentationen der Fall, wenn eine unzulässige Verallgemeinerung vorgenommen wird. Die Konklusion gilt dann eher ‚vermutlich' oder ‚wahrscheinlich'. Diese Begrifflichkeiten, die angeben, mit welchem Grad an Sicherheit die Konklusion gefolgert werden kann, wird als *modaler Operator* bezeichnet. Schließlich können für das Eintreten der Konklusion noch *Ausnahmebedingungen* angegeben werden. Das vollständige Toulmin-Schema wird in Abbildung 4 wiedergegeben, ein entsprechendes Beispiel (nach Toulmin 1958, S. 105) wird in Abbildung 5 dargestellt.

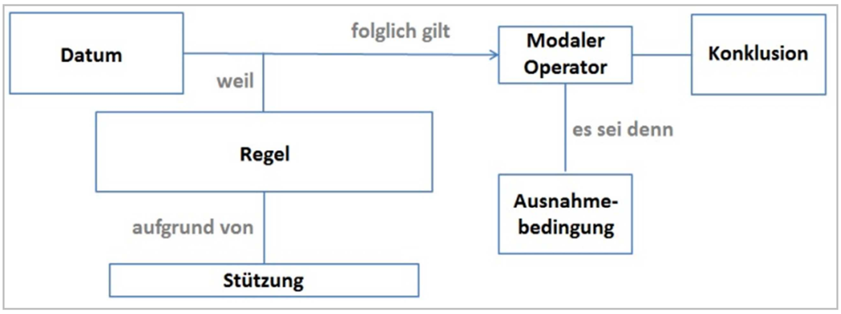


Abbildung 4: Das allgemeine Toulmin-Schema

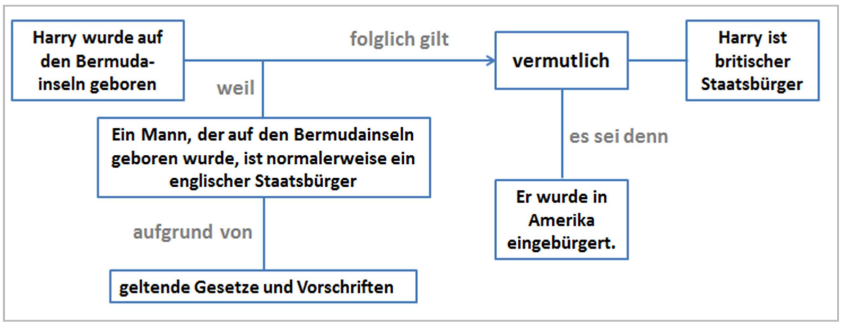


Abbildung 5: Beispiel eines angewendeten Toulmin-Schemas (nach Toulmin 1958, S. 105)

Es ist, wie oben angemerkt, bei Argumentationen zulässig, dass die Konklusion nicht notwendigerweise, also mit Sicherheit aus der Verbindung von Datum und Regel folgt, da z.B. Stützungen einer Regel, die auf visuellen Eindrücken oder empirischer Evidenz basieren, hier nicht ausgeschlossen sind. Das bedeutet, dass modale Operatoren wie z.B. ‚vermutlich' oder ‚wahrscheinlich' durch die Anwendung nicht-deduktiver Schlüsse entstehen können und durchaus zulässig sind (vgl. hierzu auch das plausible Schließen bei Polya 1969, S. 9ff.). Und wie Pedemonte (2007, S. 31ff.) mithilfe des Toulmin-Schemas oder auch Boero (1999, S. 4) herausarbeiten, werden auch bei mathematischen Argumentationen Schlussweisen verwendet (wie etwa Abduktion oder (unvollständige) Induktion), die zu ‚nicht sicheren' Folgerungen führen. Weiter ist es an dieser Stelle offen, mit welchen sprachlichen Mitteln eine Argumentation stattfindet, wobei diese sowohl mündlich als auch schriftlich erfolgen kann.

Somit eröffnet sich ein Möglichkeitsspektrum bzgl. des Argumentationsbegriffs, durch das verschiedene Formen des Argumentierens zuzulassen sind: Schlüsse auf die Konklusion müssen nicht mit Notwendigkeit erfolgen, durch entsprechende Verbindung von Regel und Stützung sind auch nicht-sichere Schlüsse in Argumentationen zugelassen. Die Ausnahmebedingung kann dabei als Ausnahmeregelung eines sonst notwendigen Schlusses oder eines nicht sicheren Schlusses auftreten. Auch werden keine expliziten Ansprüche an die Darstellungs- bzw. Kommunikationsmittel erhoben.

2.3.1.1 Mathematisches Argumentieren

Da im Kontext der Mathematik spezifische Ansprüche an Argumentationen erhoben werden bzw. ein bestimmtes Tätigkeitsbild damit verbunden wird, wird häufig speziell von ‚mathematischem Argumentieren' gesprochen. Im Folgenden wird zunächst dargestellt, was im Sinne der Bildungsstandards (KMK 2012) unter dem Begriff „mathematisch Argumentieren" verstanden werden kann, bevor Diskrepanzen des schulmathematischen Argumentierens zum oben erörterten Argumentationsbegriff im Sinn von Habermas aufgezeigt werden.

Vor dem Hintergrund der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012) kann ‚mathematisch Argumentieren' als Kompetenzbereich aufgefasst werden, unter den verschiedene Facetten subsumiert werden (ebd., S. 14; Hervorhebungen im Original):

> Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!", „Widerlegen Sie!", „Gibt es?" oder „Gilt das immer?".
>
> Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:
>
> **Anforderungsbereich I**: Die Schülerinnen und Schüler können
> - Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen usw.) wiedergeben und anwenden
> - einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen
> - Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen
>
> **Anforderungsbereich II**: Die Schülerinnen und Schüler können
> - überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können

- Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln
- verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten

Es wird hierbei deutlich, welche verschiedenen Aktivitäten und Verifikationsmuster unter der Kompetenz „mathematisch Argumentieren" gefasst werden, wobei hier auch explizit das Beweisen eingeordnet wird.

Reiss und Ufer (2009) betonen dabei den zusammenhängenden Tätigkeitsprozess, in den mathematisches Argumentieren einzuordnen ist:

> Mathematisches Argumentieren ist dabei weit gefasst als eine Tätigkeit, die auf die Untersuchung und Absicherung von Hypothesen und offenen Fragen ausgerichtet ist. Insbesondere sind durchaus auch nicht-deduktive Formen der Argumentation mit eingeschlossen wie Schlüsse durch Analogie, Metaphern, durch Abduktion oder durch Induktion. In dieser Form kann mathematisches Argumentieren ergebnisoffen sein in dem Sinne, dass in einer bestimmten mathematischen Situation eine als (plausible) Vermutung zu formulierende Regelmäßigkeit gesucht oder eine vorgegebene Vermutung auf ihre Plausibilität hin geprüft und gegebenenfalls angepasst bzw. korrigiert wird. (Ebd., S. 157)

Betrachtet man die hierbei skizzierte Aktivität mathematischen Argumentierens in der Unterrichtspraxis, so werden verschiedene Diskrepanzen zum oben erörterten Argumentations-begriff im Sinne von Habermas deutlich (vgl. hierzu die Ausführungen in Brunner 2014, S. 28; Cramer 2014, S. 293; Knipping 2003, S. 34ff.). Zunächst ist der Ausgangspunkt einer Argumentation im Unterricht nur selten durch eine unklare oder strittige Situation gegeben. Somit sind Argumentationen im Mathematikunterricht nicht auf Klärung einer strittigen Position ausgelegt, Schwarz et al. (2010, S. 119ff.) sprechen daher vom dialektischen Charakter (schulmathematischer) Argumentationen. Unterschiedliche Geltungsansprüche entstehen nicht oder eher selten im sozialen Miteinander, sondern werden vom Lehrer bzw. durch Aufgabenstellungen initiiert. Die diskursbedingte Argumentation lässt sich im Unterricht daher häufig als gemeinsames Problemlösen interpretieren: „Schüler (werden) in der Klasse in der Regel in Interaktionsprozesse eingebunden, die in der Gesamtheit ihrer Handlungen eine Argumentation erzeugen" (Krummheuer & Brandt 2001, S. 18, zitiert nach Knipping 2003, S. 35). Darüber hinaus sind im unterrichtlichen Diskurs weitere Prämissen nicht gewährleistet, die Habermas (1983, S. 97ff.) als notwendige Entstehungsbedingungen für eine gelingende Argumentation herausgestellt hat, wie etwa die Gleichberechtigung aller Beteiligten, die Freiheit von Zwängen und die gemeinsame Festlegung der Inhalte (vgl. hierzu Cramer 2014, S. 293f. und 2015, S. 348f.; Habermas 1983, S. 97ff.).

Insgesamt kann somit festgehalten werden, dass mathematisches Argumentieren allgemein als „Untersuchung und Absicherung von Hypothesen und offenen Fragen" (s.o.) verstanden werden kann. Diese Gegenstände der Untersuchung müssen dabei nicht notwendig ‚strittige Geltungsansprüche' in einem sozialen Miteinander von gleichberechtigten Beteiligten im Sinne von Habermas sein, sie können auch durch Dritte (Lehrer, Schulbuch etc.) an einzelne Personen herangetragen werden. Die Aktivität des mathematischen Argumentierens kann dabei verschiedene Formen von Argumentationen umfassen, welche bereits oben im Kontext der Erörterung des Toulmin-Schemas aufgezeigt wurde. Hierunter fallen im Sinne der Bildungsstandards u.a.: einfache Plausibilitätsargumente, Schlüsse durch Analogie, durch Abduktion oder durch Induktion, Metaphern, inhaltlich-anschauliche Begründungen und auch formale Beweise.

2.3.2 Das Verhältnis zwischen Argumentation und Beweis

Wie oben gezeigt wurde, herrscht über die Bedeutung der Begriffe Argumentation und Beweis kein allgemeiner Konsens. Es überrascht daher nicht, dass über das Verhältnis dieser Begriffe zueinander in der Literatur keine Einigkeit besteht. Zusammenfassende Beiträge zu dieser Diskussion werden u.a. in Brunner (2014, S. 29ff.), Durand-Guerrier et al. (2012, S. 353) und Knipping (2003, S. 34ff.) gegeben. Auf der einen Seite werden Argumentieren und Beweisen als zwei unterschiedliche Tätigkeiten betrachtet. Diese Sichtweise wird prominent von Balacheff (1991), Duval (1991, 1995 und 1999), Perelman (1970) und Perelman und Olbrechts-Tyteca (1969) vertreten. Dem gegenüber betonen vor allem Douek (2000) und Pedemonte (2007) die Parallelen der Begrifflichkeiten und betrachten Beweise als eine spezielle Form der Argumentation. Zunächst wird im Folgenden die erste Perspektive skizziert, bevor ausgeführt wird, warum in der vorliegenden Arbeit der zweite Standpunkt eingenommen wird.

Balacheff (1991) begründet den Unterschied zwischen Argumentieren und Beweisen aus einer sozialen und epistemologischen Perspektive:

> But we do consider that argumentation and mathematical proof are not of the same nature: The aim of argumentation is to obtain the agreement of the partner in the interaction, but not in the first place to establish the truth of some statement. As a social behavior it is an open process, in other words it allows the use of any kind of means; whereas, for mathematical proofs, we have to fit the requirement for the use of some knowledge taken from a common body of knowledge on which people (mathematicians) agree. As outcomes of argumentation, problems' solutions are proposed but nothing is ever definitive. (Ebd., S. 188f.)

Als charakteristischer Unterschied wird hier zunächst die funktionale Ausrichtung von Argumentieren und Beweisen angeführt. Der Hauptgedanke liegt allerdings in dem sozial-entwickelten Verständnis von Argumentation begründet: Im Gegensatz zum Beweis ist der Argumentationsbegriff offen für verschiedene Bedeutungen.

Diese Sichtweise auf den Unterschied zwischen Argumentieren und Beweisen durch Betonung der unterschiedlichen Funktionen und des sozial-entwickelten Verständnisses von Argumentieren lässt sich durch die epistemologischen und kognitiven Perspektiven in Duval (1995 und 1999) ergänzen. Die Ausführungen von Knipping (2003, S. 36f.) zu dieser Thematik werden im Folgenden zusammenfassend wiedergegeben und durch die Perspektive in Duval (1991) ergänzt.

Argumentationen finden in einem sozialen Kontext statt und haben die Überzeugung eines Gegenübers zum Ziel. Der (epistemische) Wert der vorgebrachten Argumente hängt dabei auch von den subjektiven Vorstellungen und Überzeugungen der Beteiligten ab; hier steht der semantische Gehalt der Argumente im Vordergrund. Im Gegensatz dazu, so Duval (1995, S. 223ff.), steht beim Beweisen nicht eine Überzeugung im sozialen Diskurs, sondern der Nachweis einer Gültigkeit innerhalb eines Sachkontextes im Zentrum. Ausschließlich die mit dem gestellten Problem sachlich zusammenhängenden Aspekte sind hier von Bedeutung. Innerhalb der Mathematik wird den verschiedenen Aussagen ein theoretischer Status (Axiom, Definition, Satz etc.) zugeordnet, der zugleich seinen epistemischen Wert konstituiert: Innerhalb von Beweisen bestimmt der theoretische epistemische Wert den Status eines Arguments, wodurch der semantische epistemische Wert verdrängt wird (vgl. Knipping 2003, S. 36 nach Duval 1995, S. 225).

Auch Perelman (1970) nutzt die funktionale Ausrichtung von Argumentationen auf die Überzeugung, um den Begriff gegen das Beweisen abzugrenzen, und betont die Unsicherheit von Argumentationen:

> Whereas mathematical proof in its most perfect form is a series of structures and of forms whose progression cannot be challenged, argumentation has a non-constraining character. It leaves to the author hesitation, doubt, freedom of choice; even when it proposes rational solutions, non is guaranteed to carry the day. (Ebd., S. 41, zitiert nach Balacheff 1999, S. 1)

Perelman und Olbrechts-Tyteca (1969, S. 13f.) kontrastieren Argumentation mit dem formalen Beweis der mathematischen Logik[13]. Gerade in der Darstellung des formalen Beweises als (individuelles) Zeichenspiel, mit von semantischer Bedeutung befreiten Zeichenketten und festgelegten Transformationsregeln in prinzipiell frei wählbaren formalen Systemen, wird der Unterschied zum sozial eingebundenen Konstrukt Argumentation deutlich. Auch können im Gegensatz zum formalen Beweis in einer Argumentation die psychologischen und sozialen Bedingungen des Diskurses nicht ignoriert werden: „For *all argumentation aims at gaining the adherence of minds, and, by this very fact, assumes the existence of an intellectual contact*" (ebd., S. 14; Hervorhebungen im Original).

Im Gegensatz zu den bisherigen Ansätzen arbeitet Pedemonte (2007) Gemeinsamkeiten von (mathematischen) Argumentationen und Beweisen heraus, woraus die Betrachtung von Beweis als ein Spezialfall von Argumentation resultiert. An gemeinsamen Charakteristika werden dabei die folgenden Aspekte betrachtet (ebd., S. 26f.): Mathematische Argumentationen und Beweise (1) sind rationale Begründungen („rational justifications"), (2) sollen überzeugen, (3) adressieren eine universelle Zuhörerschaft („universal audience") und (4) finden innerhalb entsprechender Bezugssysteme (Algebra, Geometrie, etc.) statt, in denen die verwendeten Begriffe und Aussagen ihre Bedeutung erlangen. Auf kognitiver Ebene können sowohl mathematische Argumentationen wie auch Beweise mithilfe des Toulmin-Schemas (s.o.) strukturiert und nachvollzogen werden, was eine strukturelle Gemeinsamkeit impliziert.

Weitere Bezugspunkte zwischen Argumentationen und Beweisen werden von Douek (1998) erörtert. Für eine vergleichende Darstellung wird der Begriff Referenzkorpus eingeführt: „The expression "reference corpus" will include not only reference statements but also visual and, more generally, experimental evidence, physical constraints, etc. assumed to be unquestionable […]" (ebd., S. 130). Wie herausgestellt wird, kann der Referenzkorpus auch beim Beweisen als teilweise implizit und vor allem als sozial und historisch determiniert angesehen werden. Ein weiterer Punkt betrifft den inneren semantischen Zusammenhang des finalen Beweisprodukts. Mit Bezug auf Thurston (1994) wird dargestellt, dass in einem fertigen Beweis nicht ausschließlich die formalen Schlussweisen von Bedeutung sind: „the model of formal proof as described by Duval and based on the "operational status" of propositions rather than on their "semantic content" does not seem to fit the description of the activities performed by many working mathematicians when they check the validity of a statement or a proof" (Douek 1998, S. 134). Die Konzentration auf die formale Prozession in einem (formalen) Beweis kann somit nicht als Unterscheidungsmerkmal der Konzepte aufgefasst werden.

[13] „In modern logic, the product of reflection on mathematical reasoning, the formal systems are no longer related to any rational evidence whatever. The logician is free to elaborate as he pleases the artificial language of the system he is building, free to fix the symbols and combinations of symbols that may be used. […] It must be possible, without hesitation, even mechanically, to establish whether a sequence of symbols is admitted in the system, whether it is of the same form as another sequence of symbols, whether it is considered valid, because it is an axiom or an expression deducible from the axioms, in a manner consistent with the rules of deduction." (Perelman & Olbrechts-Tyteca 1969, S. 13)

Es erscheint offensichtlich, dass eine gegenüberstellende Bewertung der Begriffe Argumentation und Beweis stark von dem vorliegenden Verständnis der jeweiligen Begrifflichkeiten abhängt. Wie oben dargestellt wurde, ist der Argumentationsbegriff offen für verschiedene Ausprägungen und Interpretationen. Dies trifft in gewisser Weise aber auch für den Beweisbegriff zu, wie in Abschnitt 2.1.1 bereits gezeigt wurde. Somit muss die Frage erörtert werden, ob es sich bei den epistemologischen, sozialen und kognitiven Unterschieden zwischen den Konzepten um unüberbrückbare Unterschiede handelt, oder ob diese als charakteristische Ausprägungen interpretiert werden können.

Was die funktionale Ausrichtung betrifft, so kann der dem Beweis obliegende Nachweis der Gültigkeit einer Behauptung als strittige Position interpretiert werden. Darüber hinaus beinhaltet jeder Beweis die Funktion der Überzeugung, die er in unterschiedlichem Maß erfüllen kann (vgl. Abschnitt 2.1.7). Auch der Diskurs-Charakter kann beim Beweisen nicht negiert werden, vor allem, wenn man die kommunikative Funktion berücksichtigt und bedenkt, dass die Akzeptanz von Beweisen als sozialer Akt betrachtet wird. Der sichere deduktive Schluss kann auch innerhalb von Argumentationen auftreten und ist damit kein Alleinstellungsmerkmal von Beweisen. Schließlich stellt sich noch die Frage nach dem epistemisch-theoretischen Status der Argumente innerhalb eines Beweises. In der Sprache Toulmins entstammen die Stützungen einer Regel innerhalb eines Beweises einer mathematischen Theorie (vgl. Durand-Guerrier et al. 2012, S. 356), aus der ihr epistemisch-theoretischer Wert resultiert (s.o.). Dies ist zwar für den formalen mathematischen Beweis korrekt, muss aber vor dem Hintergrund des oben erörterten Beweisbegriffs relativiert werden. Offensichtlich kann allen wahren mathematischen Sachverhalten, die als Argumente verwendet werden, ein theoretischer Status innerhalb eines mathematischen Systems zugeordnet werden. Es ist aber eine Frage der jeweiligen Beweisform (formaler Beweis, generischer Beweis etc.), ob der semantische Gehalt der Argumente explizit im Vordergrund steht oder nicht. Somit konstituiert die Bedeutung des theoretischen Status eines Arguments nur ein Charakteristikum von verschiedenen Argumentationen und kein Alleinstellungsmerkmal.

Aufgrund der bisherigen Erörterungen wird daher in der vorliegenden Arbeit der Standpunkt vertreten, dass Beweise als eine spezielle Form von Argumentation zu sehen sind. In diesem Sinne werden spezielle Argumentationen in mathematischen Kontexten mit sicheren Schlüssen auf die Konklusion, die gewisse Normen erfüllen (vgl. Abschnitt 2.1.1), als mathematische Beweise betrachtet. Diese Sichtweise auf das Beweisen ermöglicht die ‚Akzeptanz' sowohl formaler als auch didaktisch motivierter Beweisformen (etwa operativer oder generischer Beweise) und die Bewertung und Betonung des epistemisch-semantischen Werts von Argumenten in verschiedenen Beweisprodukten. Mit diesem Standpunkt ist weiter die Sicht auf das Beweisen als diagrammatisches Schließen in verschiedenen Diagrammsystemen (Abschnitt 2.5) vereinbar.

2.3.3 Begründen

Der Begriff ‚Begründen' wird in der mathematikdidaktischen Literatur meist nicht explizit erläutert, seine Bedeutung wird allgemein als intuitiv klar angenommen (Brunner 2015, S. 29). Im Folgenden werden aufbauend auf dem Begründungsbegriff der Philosophie verschiedene Sichtweisen der Mathematikdidaktik einander gegenübergestellt, um schließlich eine Eingrenzung der Bedeutung des Begriffs vornehmen zu können.

Begründen kann allgemein als „Darlegen von Gründen für etwas“ verstanden werden (Lumer 1999, S. 149). Die Begründungsgegenstände können dabei vielfältig sein, als Hauptgruppen lassen sich (epistemische) Begründungen von Thesen und (praktische) Begründungen von Handlungen bzw. Absichten unterscheiden. Die epistemische Begründung einer These soll beim Gegenüber die Annahme eines Urteils auf kognitive Weise bewirken (vgl. ebd., S. 149). Dabei können die folgenden drei erkenntnis- und wissenschaftstheoretisch relevanten Dimensionen unterschieden werden (vgl. Apel 1989, S. 15): (1) Die Begründung des Führwahrhaltens von Aussagen [*Überzeugung*], (2) die Begründung der Möglichkeit objektiv gültiger Erkenntnis [*Verifikation*] und (3) Begründung im Sinne von Erklärung [*Erklärung*].

Die Mathematikdidaktiker Fischer und Malle (1985, S. 178f.) führen verschiedene Arten an, wie das Begründen einer Aussage erfolgen kann: Berufung auf eine Autorität, deduktives Schließen, reduktives bzw. induktives Schließen und Analogieschlüsse bzw. Wahrscheinlichkeitsaussagen. Beweise wollen die Autoren in diesem Sinne als besondere Form des Begründens verstanden wissen und schreiben hierzu: „Eine Begründung auf Grund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als ein <u>Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis</u> bezeichnet werden.“ (ebd., S. 180; Hervorhebungen im Original). Brunner (2013) hält dieser Definition allerdings entgegen, dass der Begriff des Begründens im Gegensatz zu Beweisen einen stärkeren Einbezug von alltagsnaher und vorwissenschaftlicher Sprache intendieren würde (ebd., S. 109).

Bereits bei der Betrachtung dieser unterschiedlichen Sichtweisen auf das Begründen wird die Offenheit des Begriffs deutlich. In der Sicht der Philosophie (in Anlehnung an Lumer 1999 und Apel 1989) rückt der Begründungsbegriff einerseits als diskursive Tätigkeit an den Argumentationsbegriff von Habermas heran (vgl. Abschnitt 2.3.1), die verschiedenen Dimensionen der Überzeugung, Verifikation und Erklärung verweisen dabei gleichzeitig auf den Beweisbegriff. Der Einbezug von Schlussweisen (vgl. Fischer und Malle 1985) zeigt eine strukturelle Ähnlichkeit zu Argumentationen auf (vgl. der Argumentationsbegriff bei Toulmin, Abschnitt 2.3.1). Beweise werden dabei als besondere Formen von Begründungen verstanden.

Insgesamt scheint die Position von Brunner vertretbar, dass der Begründungsbegriff stärker dem alltäglichen Diskurs zugeordnet wird als die Begriffe Argumentieren und Beweisen und somit durch eine stärkere Offenheit als diese beiden Begriffe geprägt ist. In diesem Sinne wäre Begründen dann mit weniger Ansprüchen verbunden als das Argumentieren und Beweisen und somit offener für alltagsnahe und vorwissenschaftliche Sprache (s.o.). Diese alltagsnahe Auffassung von ‚Begründen‘ wird sich auch in den Formulierungen der Bildungsstandards wiederfinden lassen (s.u.). Es verbleibt weiter die Frage nach der Beziehung der Begriffe Argumentieren, Begründen und Beweisen untereinander.

2.3.4 Argumentieren, Begründen und Beweisen

Da über die Begrifflichkeiten Argumentieren, Begründen und Beweisen in der Literatur keine Einigkeit herrscht, wird auch das Verhältnis der Begriffe untereinander unterschiedlich gewertet. Ein guter Überblick über verschiedene Positionen wird in Brunner (2013, S. 29ff.) gegeben. Im Folgenden werden die bisherigen theoretischen Erörterungen mit den normativen Beschreibungen der nationalen Bildungsstandards und Anmerkungen zu diesen abgeglichen, um sich dem Verhältnis der drei Begriffe zueinander begründet nähern zu können.

Im deutschen Mathematikunterricht werden die Begriffe Argumentieren und Begründen dem des Beweisens vorgezogen. Linneweber-Lammerskitten (2014, S. 86) weist allerdings darauf hin, dass das Beweisen jedoch der eigentliche Grund dafür ist, dass diese Begrifflichkeiten in den Bildungsstandards erwähnt werden. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife wird „mathematisch argumentieren“ als allgemeine mathematische Kompetenz aufgeführt. Der Kompetenz mathematisch Argumentieren werden dabei einfache Plausibilitätsargumente, inhaltlich-anschauliche Begründungen und (formale) Beweise zugeordnet, wodurch das Argumentieren zu einem Oberbegriff erhoben wird. Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2003) merken zu dem Verhältnis der Begriffe zueinander in Anlehnung an Mittelstrass (1995/96) an: „Eine schlüssige Argumentation für eine Aussage bzw. Norm heißt eine Begründung derselben, im Falle einer Aussage auch ein *Beweis* […]“ (Hefendehl-Hebeker & Hußmann, S. 95; Hervorhebungen im Original). Folglich wird hier eine Begründung als eine bestimmte, nämlich schlüssige, Art von Argumentation betrachtet, die in einem besonderen Fall als Beweis bezeichnet wird. In den Ausführungen der Bildungsstandards bilden (inhaltlich-anschauliche) Begründungen dagegen eine Zwischenstufe zwischen Plausibilitätsargumenten und (formalen) Beweisen. Die Betrachtung einer Begründung als schlüssige Argumentation widerspricht dabei den Ausführungen in Fischer und Malle (1985), wie sie oben ausgeführt wurden, die unter Begründungen auch nicht-sichere Schlussweisen zulassen.

In den Formulierungen der Bildungsstandards ist weiter auffällig, dass von „inhaltlich-anschaulichen Begründungen“ gesprochen wird, obwohl diese Sprachverbindung vermutlich auf die „inhaltlich-anschaulichen Beweise“ von Wittmann (vgl. Abschnitt 4.2.5) zurückzuführen ist. Hier wird der Beweisbegriff vermieden und im Kontext von ‚Inhaltlichkeit‘ und ‚Anschaulichkeit‘ der Begründungsbegriff vorgezogen. Diese Zuordnung und ein damit verbundener gewisser Ausdruck von Wertigkeit können auch in den drei Anforderungsbereichen ausgemacht werden. Dort heißt es unter Anforderungsbereich 1: „einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen“ und „Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen“, unter Anforderungsbereich 2: überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen […] und schließlich unter Anforderungsbereich 3: „Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln“ (KMK 2012, S. 14; vgl. Abschnitt 2.3.1). Im Kontext der Bildungsstandards scheint implizit eine Sichtweise vorzuliegen, in der mit Begründung eine eher kurze Bestätigung oder Problematisierung von Rechenschritten, Aufgabenlösungen und Lösungswegen auf einer eher weniger formalen Ebene verbunden ist (vgl. die Ausführungen von Ufer und Kramer (2015)), wohingegen Argumentationen explizit mehrschrittig sein können und in Verbindung mit logischen Schlüssen zu sehen sind und Beweise und „anspruchsvolle Argumentationen“ (s.o.) dem höchsten Anforderungsbereich zugeordnet werden müssen.

Durch die obigen Erörterungen ist deutlich geworden, wie unterschiedlich die Begrifflichkeiten Argumentieren, Begründen und Beweisen verwendet werden, woraus unterschiedliche Betrachtungsweisen der Begriffe untereinander resultieren. Für die vorzunehmenden empirischen Untersuchungen bleibt darauf hinzuweisen, dass sich die Bedeutungen der Begriffe im unterrichtlichen Geschehen im Zuge sogenannter sozio-mathematischer Normen (vgl. Abschnitt 2.6.2) herausbilden und jeder Studierende somit über ein implizites Wissen verfügt, was er bzw. sie unter einer Begründung, einer Argumentation und einem Beweis versteht.

2.4 Ausgewählte empirische Befunde zum Themenkomplex Beweisen

In diesem Abschnitt werden die für diese Arbeit relevanten empirischen Befunde aus der Literatur aufgearbeitet und erörtert. Gleichsam wird somit das Feld empirischer Forschung aufgezeigt, in dem sich die vorliegende Arbeit bewegt. Von Interesse sind hierbei die Thematik des Beweisens bei Studienanfängerinnen und -anfängern (2.4.1), verschiedene Akzeptanzaspekte im Kontext des Beweisens (2.4.2) und die Auswirkung von Selbstwirksamkeitserwartung und Einstellungen zur Mathematik auf das Erlernen der Beweisaktivität (2.4.3 und 2.4.4).

2.4.1 Beweisen bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern

Die mathematischen Fähigkeiten von Studienanfängerinnen und Studienanfängern geraten aktuell durch ein starkes Aufkommen hochschuldidaktischer Forschungsarbeiten in den Blickpunkt des Interesses. Gute Zusammenfassungen aktueller Diskussionen werden u.a. in Bausch et al. (2014) und Hoppenbrock et al. (2016) gegeben und auch verschiedene Dissertationen beschäftigten sich mit dieser Thematik (etwa Rach 2014, Reichersdorfer 2013 und Riedl 2015). Auch wenn in der Literatur an verschiedenen Stellen betont wird, dass Studienanfängerinnen und -anfänger besonders mit dem Beweisen Probleme haben (etwa Selden 2012 und Guedeut 2008), wurden die Beweiskompetenzen von Studienanfängern bisher nur wenig eingehend untersucht. Im Folgenden werden zunächst die Problembereiche dargestellt, die sowohl national wie auch international bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern im Kontext des Beweisens auftreten. Anschließend wird die Dissertationsstudie von Hemmi (2006) herangezogen, um erste Erkenntnisse darüber zu erlangen, mit welchen Vorerfahrungen Studienanfängerinnen und -anfänger mit Beweisen an die Universität kommen und welche generellen Einstellungen sie zum Erlernen der Beweisaktivität und dem Beweisen haben.

In Deutschland wird in verschiedenen Studien bereits von einer eher schlechten Argumentations- bzw. Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern berichtet. Die Probleme betreffen dabei neben der Beweiskonstruktion auch die Bewertung und das Verstehen von vorgelegten Beweisen. Ein guter Überblick über entsprechende Studien und Ergebnisse wird u.a. in Brunner (2014, S. 82ff.) gegeben. Reiss und Heinze (2000) und Reiss et al. (2000) konnten entsprechende Probleme auch bei Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe aufzeigen. Die eher schlechten Argumentations- bzw. Beweiskompetenzen der deutschen Schülerinnen und Schüler wurden auch im Spiegel der großen Leistungsmessungsstudien PISA (vgl. PISA-Konsortium 2012) und TIMSS (vgl. Baumert, Lehmann et al., 1997; Baumert, Bos & Lehmann, 2000) deutlich. Es überrascht daher nur wenig, dass in verschiedenen Studien auch von mangelnden Beweiskompetenzen von Studierenden in Deutschland berichtet wird (etwa Frischemeier et al. 2016; Ostsieker und Biehler 2012; Sommerhoff et al. 2016).

Entsprechende problematische Ergebnisse bzgl. des Argumentierens und Beweisens lassen sich dabei auch international feststellen. So resümiert Gueudet (2008) ihre Literaturrecherche: „Studies considering proof in many different countries have shown that only a minority of students are able to build consistent proofs at the end of high school.“ (ebd., S. 243; vgl. hierzu auch Reid und Knipping 2010, S. 68). Selden (2012, S. 398ff.) gibt einen Überblick über internationale Studien zu den Problemen von Studienanfängern zum Beweisen und stellt schließlich die folgenden übergreifenden Problembereiche heraus: die korrekte Verwendung der fachmathematischen Sprache und Quantoren, ein Umgang mit logischen Schlüssen und im Speziellen dem Beweis durch Widerspruch, Heuristiken bei der Beweiskonstruktion, ein angemessenes Beweisverständnis, das Verständnis um und Wissen über mathematische Definitionen und Sätze und deren Verwendung in Beweisen, Verständnis der zu beweisenden Behauptung, Auswahl und Verwendung adäquater Repräsentationen, das Lesen und Überprüfen von Beweisen. Güler (2016, S. 146) kommt bei seiner Literaturübersicht zu den Problemen von Lehramtsstudierenden zum Beweisen zu vergleichbaren Ergebnissen.

Hemmi (2006) untersucht in ihrer Dissertation u.a. die Vorerfahrungen von 168 schwedischen Studienanfängerinnen und Studienanfängern der Mathematik mit Beweisen und ihre Ansichten zum Beweisen. Im Folgenden werden die für die vorliegende Arbeit relevanten Ergebnisse der Studie zusammenfassend dargestellt (vgl. hierzu ebd., S. 128ff.).

In Bezug auf die Vorerfahrungen zum Beweisen kommt Hemmi zu dem Ergebnis, dass die Studierenden während ihrer Oberstufenzeit zwar häufig Beweise durch ihre Lehrerinnen und Lehrer gesehen haben, aber kaum Gelegenheit hatten, selbst Beweise zu konstruieren. So gibt etwa die Hälfte der Befragten an, dass ihr Mathematiklehrer in der Oberstufe mindestens einmal in der Woche einen Sachverhalt bewiesen habe und 36% stimmen der Aussage zu bzw. eher zu (Bewertungen „4“ und „5“ auf einer fünfstufigen Likert-Skala), dass ihr Mathematiklehrer in der Oberstufe häufig Sachverhalte bewiesen hat. Bzgl. der Eigenkonstruktion von Beweisen geben allerdings 59% der Befragten an, höchstens ein- oder zweimal im Schulhalbjahr die Gelegenheit gehabt zu haben, Beweise selbst zu konstruieren, und 60% stimmen der Aussage nicht oder eher nicht zu (Bewertungen „1“ und „2“ auf einer fünfer Likert-Skala), dass sie in der Schule die Gelegenheit hatten, das Aufschreiben von Beweisen zu üben („I have had the possibility to practice proving by writing in school“; ebd., S. 133). Bei den Ansichten zum Beweisen wird allerdings deutlich, dass die Studierenden dem Beweisen gegenüber sehr positiv eingestellt sind. So stimmen über 80% der Befragten den Aussagen eher zu oder voll zu, dass sie mehr über mathematische Beweise lernen wollen und dass sie in der Schule gerne mehr über das Beweisen gelernt hätten. Und auch der Aussage: „Ich beweise gerne mathematische Sätze“ („I like to show/demonstrate mathematical statements“; ebd., S. 147) wird von gut 60% der Befragten eher bzw. voll zugestimmt.

Schließlich seien hier noch die Ergebnisse angeführt, die das Phänomen des Beweisbedürfnisses bei Studierenden tangieren. Fast 90% der Befragten stimmen der Aussage überhaupt nicht zu, dass sie Beweisen keine Bedeutung beimessen würden, da die Sätze bereits von berühmten Mathematikern bewiesen worden wären. Auch stimmen etwa 85% der Aussage eher nicht oder überhaupt nicht zu, dass es keinen Sinn machen würde, intuitiv richtig erscheinende Sätze zu beweisen. Schließlich stimmen ca. 90% der Befragten eher zu oder voll zu, dass Beweise ein essentieller Teil der Mathematik seien.

2.4.2 Akzeptanzaspekte beim Beweisen

In verschiedenen empirischen Studien werden unterschiedliche Akzeptanzaspekte im Kontext von Beweisen erörtert. Aufgrund der Beweisaktivitäten, die im Kontext der hier fokussierten Lehrveranstaltung motiviert werden, welche die Exploration von Beispielen und die Beweiskonstruktion anhand konkreter Beispiele (‚generische Beweise‘) umfasst, sind für die vorliegende Arbeit drei spezielle Aspekte von Bedeutung: (1) die Akzeptanz von bloßen Beispielbetrachtungen als Beweis, (2) die Nicht-Akzeptanz von Beweisen als ausreichende Form der Verifikation und (3) die Nicht-Akzeptanz von Beweisen, die an konkreten Beispielen geführt werden, dabei aber Allgemeingültigkeit beanspruchen können. In Reid und Knipping (2010, S. 59ff.) wird ein guter Überblick über die empirischen Ergebnisse zu den Punkten (1) und (2) gegeben; es geht daher im Folgenden nicht darum, entsprechende Befunde der Literatur aufzuarbeiten, sondern gezielt die

Studien und Ergebnisse zu diskutieren, die sich mit der Zielgruppe der Lehramtsstudierenden oder auch mit Lehrerinnen und Lehrern der Mathematik befassen. Am Ende des Abschnitts wird die Frage erörtert, wie sich ein Konstrukt ‚Beweisakzeptanz' konzeptualisieren lässt.

(1) **Die Akzeptanz von bloßen Beispielbetrachtungen als Beweis**

Reid und Knipping (2010) führen verschiedene Studien auf, die sich mit der Akzeptanz von Beispielen als gültige Form der Verifikation befassen, und resümieren ihre Literaturrecherche wie folgt: „These results suggest that somewhere between 20% and 80% of students and teachers (depending on age and mathematical background) consider a set of examples to be sufficient to verify a mathematical statement" (ebd., S. 59). Dabei weisen die Autoren darauf hin, dass verschiedene Studien in dieser Hinsicht kritisch bewertet werden müssten, da verschiedene Ergebnisse vorsichtiger interpretiert bzw. Studien ausführlicher referenziert werden müssten. So ist etwa ein Ergebnis der in diesem Kontext häufig angeführten Studie von Healy und Hoyles (1998 und 2000), dass ca. 25% der 14- und 15-jährigen Schülerinnen und Schüler ein empirisches Argument als den Ansatz auswählen, der ihrem eigenen am nächsten kommt. Die Autoren der Studie merken allerdings hierzu an: „The majority were also aware that empirical arguments were not general – particularly if the statement to be proved was not familiar - but they recognized that examples offered a powerful means of gaining conviction about a statement's truth" (Healy & Hoyles 1998, S. 425). Die Schülerinnen und Schüler dieser Studie wählten folglich das empirische Argument aus, um sich zunächst selbst von der Gültigkeit („conviction") einer Aussage zu vergewissern, nicht, weil sie der Meinung waren, dass dieser Ansatz einen Beweis konstituieren würde. Diese Sichtweise wird allerdings in verschiedenen Referenzen auf diese Studie nicht berücksichtigt. Auch Stylianides und Stylianides (2009) kommen in ihrer Studie mit Lehramtsstudierenden zu dem Ergebnis, dass sich die Probanden, die bloße Beispielbetrachtungen als Argument anführen, durchaus der Unzulänglichkeit dieser Verifikationsmethode bewusst sind. In diese Richtung weisen auch die Ergebnisse von Chazan (1993). Dort konnte durch Interviews mit 17 amerikanischen Schülerinnen und Schülern („secondary school") gezeigt werden, dass die Lernenden, die einzelne Beispiele für die Verifikation einer Aussage verwenden, sich sehr wohl über die Unzulänglichkeit dieser Methode bewusst sind und singuläre Beispielüberprüfungen somit nicht unbedingt als allgemeingültige Form der Verifikation betrachten. Es kann also als Tatsache festgehalten werden, dass, wenn Lernende bloße Beispielüberprüfungen anstellen, dies nicht ohne weiteres so gedeutet werden kann, dass diese Beispielbetrachtungen auch als Beweis akzeptiert werden würden. So weist auch Weber (2010, S. 309) in Anlehnung an Vinner (1997) kritisch darauf hin, dass in verschiedenen Studien von ‚Beweiskonstruktionen' Lernender, die nur aus einzelnen Beispielüberprüfungen bestehen, in unzulässiger Weise darauf geschlossen wird, dass für diese Lernenden Beispiele korrekte Beweise darstellen würden. Denn dass Lernende, wenn sie aufgefordert werden, einen Beweis zu konstruieren, bloße Beispielüberprüfungen anstellen, kann verschiedene Gründe haben. So scheint es vernünftig, dass die Schülerinnen und Schüler ihren Beweisprozess mit Beispielbetrachtungen beginnen, um die Behauptung zu verstehen oder zu explorieren; wissen sie dann nicht weiter, verbleiben nur die bereits notierten konkreten Beispiele. Auch ist es möglich, dass sie von vornherein wissen, dass sie keinen Beweis konstruieren können, aus anderen Gründen (etwa, um Teilpunkt zu erhalten) notieren sie dann lieber einzelne Beispiele als gar nichts. Diese Sichtweise wird ferner durch die Ergebnisse von Knuth et al. (2009) gestützt, dass Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe häufiger empirische Argumente als ‚Beweis' anführen, wenn sie kompliziertere Sachverhalte beweisen sollen. Anscheinend werden Beispiele häufig dann angeführt, wenn die Lernenden keinen (anderen) Zugang zu einer Begründungsaufgabe ausmachen können.

Allerdings lassen sich in der Literatur auch Befunde dafür finden, dass einzelne Beispielbetrachtungen durchaus als korrekte Beweise betrachtet werden. So ergab die Studie von Gholamazad et al. (2004), dass 68% der befragten Lehramtsstudierenden (Grundschule, n=75) die Überprüfung einer Allaussage anhand einzelner Beispiele als Beweis akzeptierten. Was die Probanden der Studie überhaupt unter einem (akzeptablen) Beweis verstehen, wurde dabei leider nicht untersucht.

Diese Diskussion kann dabei durch die Ausführungen von Weber und Mejia-Ramos (2015) um eine Unterscheidung von absoluter und relativer Überzeugung sinnvoll erweitert werden. Während absolute Überzeugung („absolute conviction") die objektive Feststellung der Gültigkeit einer Behauptung im Sinne der Mathematik meint, beschreibt relative Überzeugung („relative conviction") das subjektive Maß an Überzeugung, das eine Person bzgl. der Gültigkeit einer Aussage empfinden kann. Die Autoren führen aus, wie die Berücksichtigung dieser Pole zu einer Neubewertung empirischer Studien führen kann. Denn die Betrachtung von konkreten Beispielen kann durchaus die subjektive Überzeugung bzgl. der Gültigkeit einer Behauptung steigern. Wenn Probanden nun die Überzeugungskraft von Beispielbetrachtungen bewerten sollen und dieses Attribut als subjektiv empfundene Überzeugung („relative conviction") interpretieren, ist es nur folgerichtig, dass sie Beispielbetrachtungen eine hohe Bewertung geben.

Insgesamt lassen sich auf der Basis der erfolgten Erörterung die folgenden Anmerkungen bzgl. der Akzeptanz von Beispielen als allgemeingültige Form der Verifikation (bzw. als ‚Beweis') formulieren:

(i) In verschiedenen Studien lassen sich Befunde dafür ausmachen, dass einige Lernende und Lehrende der Mathematik einzelne Beispielüberprüfungen als wirkliche ‚Beweise' betrachten. Was diese Probanden dabei unter einem Beweis verstehen, wird dabei leider nicht untersucht.

(ii) Die Präferenz Lernender für konkrete Beispielbetrachtungen, um sich subjektiv von der Gültigkeit einer Behauptung zu überzeugen, ist kein Beleg dafür, dass Beispielbetrachtungen von diesen Personen als korrekte mathematische Beweise betrachtet werden.

(iii) Geben Lernende Beispielbetrachtungen an, obwohl sie aufgefordert werden, einen Beweis zu konstruieren, so kann dies ebenfalls nicht ohne weiteres als Beleg dafür gewertet werden, dass für sie Beispielbetrachtungen korrekte mathematische Beweise darstellen würden.

(iv) Die Betrachtung von konkreten Beispielen, um sich (subjektiv) von der Gültigkeit einer Behauptung zu überzeugen, ist eine genuine mathematische Tätigkeit und lässt ebenfalls keine Rückschlüsse auf die Akzeptanz von Beispielen als korrekter mathematischer Beweis zu.

Insgesamt scheint in diesem Kontext die folgende Ausdifferenzierung der Frage nach einer eventuellen Akzeptanz von Beispielbetrachtungen bei Lernenden sinnvoll und notwendig:

- Inwiefern kann die Betrachtung von einzelnen Beispielen bei Lernenden (i) die subjektive Überzeugung und (ii) die objektive Sicherheit bzgl. der Gültigkeit einer Behauptung beeinflussen?

- Betrachten Lernende die Überprüfung einzelner Beispiele als wirklichen ‚Beweis'?

Diese Facetten von Beweisakzeptanz werden am Ende dieses Abschnitts wieder aufgegriffen. Insgesamt ergibt sich an dieser Stelle das Phänomen der Akzeptanz von Beispielen als Verifikationsmittel bzw. als mathematischer Beweis bei der Zielgruppe der Studienanfängerinnen und -anfänger als offene Frage der Forschung. Im Kontext der oben geäußerten Kritik an den angeführten Studien sollen die Ergebnisse dieser Arbeit auch dazu beitragen, die Schwächen vorheriger Studien zu der Thematik der ‚Akzeptanz' zu beheben.

(2) **Die Nicht-Akzeptanz von Beweisen als ausreichende Form der Verifikation**

Wie Reid und Knipping (2010, S. 62f.) darlegen, wird in verschiedenen Studien auf das Phänomen hingewiesen, dass einige Lernende deduktive Beweise nicht als ausreichende Form der Verifikation akzeptieren. Für die vorliegende Arbeit scheinen dabei besonders drei Studien von Interesse zu sein: Martin und Harel (1989) untersuchen das Beweisverständnis von Grundschullehramtsstudierenden, wohingegen Knuth (2002) von Interviews mit 16 Mathematiklehrerinnen und -lehrern („secondary school") berichtet. Schließlich ist hierbei die Studie von Chazan (1993) interessant, deren qualitative Anlage tiefere Einblicke in etwaige Fehlvorstellungen zur Thematik ermöglicht.

Martin und Harel (1989) erheben in ihrer Studie, wie Grundschullehramtsstudierende verschiedene Beweise bewerten, und kommen dabei zu dem Ergebnis, dass 26% bis 38% der Probanden korrekten Beweisen nur eine niedrige Bewertung (Werte von 1 bzw. 2 auf einer Likert-Skala mit vier Stufen) in Bezug auf ihre Verifikationsleistung geben. In der Studie von Knuth (2002) gaben sechs von 16 Lehrerinnen und Lehrern („secondary school") an, dass auch nach einer korrekten Beweiskonstruktion noch Gegenbeispiele zur der bewiesenen Behauptung existieren könnten.

In der Interviewstudie von Chazan (1993) mit 17 Schülerinnen und Schülern („High-School") wird deutlich, welche Fehlvorstellungen zum Beweisen in der Geometrie vorliegen können. Für die Ansicht, dass auch nach einem konstruierten korrekten Beweis noch Gegenbeispiele existieren könnten, konnten die folgenden ‚Gründe' bei den Schülerinnen und Schülern ausgemacht werden (Auflistung orientiert an Reid und Knipping 2010, S. 63; vgl. Chazan 1993, S. 368ff.):

(a) Es könnte immer noch Fälle geben, die durch den Beweis nicht abgedeckt wurden.
(b) Der Beweis bezieht sich nur auf die eine, damit verbundene Beweisfigur und deckt damit nicht alle zu betrachtenden Fälle ab.
(c) Die in dem Beweis verwendeten Argumente könnten falsch sein.
(d) Die Formulierungen innerhalb des Beweises sind in der Einzahl gehalten und beziehen sich damit nicht auf alle möglichen zu betrachtenden Fälle.
(e) Es wird generell nicht verstanden, was zu Beginn des Beweises ‚Gegeben' ist.

Insgesamt lässt sich somit festhalten, dass auch bei Lehramtsstudierenden und selbst bei Lehrkräften die Fehlvorstellung[14] vorliegen kann, dass ein korrekter mathematischer Beweis keine allgemeingültige Verifikation der gegebenen Behauptung leistet. Ursachen für diese Ansicht können dabei auf verschiedenen Ebenen liegen: Probleme mit dem Verständnis des vorgelegten Beweises,

[14] Es bleibt anzumerken, dass an dieser Stelle bei den Probanden keine Fehlvorstellungen vorliegen würden, wenn diese den vorgelegten Beweis als fehlerhaft betrachteten. Eine entsprechende Differenzierung wird in der Studie von Chazan (1993) aber leider nicht vorgenommen

den verwendeten Formulierungen und Argumenten, der Struktur des Beweises und Probleme mit der im Beweis verwendeten Beweisfigur. Das Problem mit der Fehlinterpretation einer Beweisfigur als singulärer Fäll ist dabei für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse, da etwa in generischen Beweisen mit Punktmusterdarstellungen ja tatsächlich konkrete Fälle betrachtet werden, die dabei als generische Beispiele über den konkreten Fall hinausweisen. Hierin scheint, losgelöst von der Studie von Chazan, eine mögliche Verständnishürde der Beweisform, speziell in Verbindung mit Punktmusterdarstellungen, begründet zu sein.

(3) **Die Nicht-Akzeptanz von Beweisen, die an konkreten Beispielen geführt werden, dabei aber Allgemeingültigkeit beanspruchen können**

Einen besonderen Stellenwert nimmt in der vorliegenden Forschungsarbeit die Beweisform des generischen Beweises (vgl. Abschnitt 2.1.3) ein. Es ist deshalb von besonderem Interesse, inwiefern Lernende und Lehrende der Mathematik diese Beweisform verstehen bzw. interpretieren. Da solche Beweise meist narrativ formuliert sind, werden diese an konkreten Beispielen geführten Beweise in der Literatur teilweise auch als ‚narrative Beweise' bezeichnet.

Aufgrund der im Kontext dieser Forschungsarbeit herausgestellten Konzeption von generischen Beweisen, die aus generischen Beispielen und einer narrativen Begründung bestehen (s. Abschnitt 2.1.3), sind an dieser Stelle bzgl. der Akzeptanz von beispielgebundenen Beweisen zwei Aspekte von Interesse: Die Akzeptanz von Beweisen, die mithilfe konkreter Beispiele geführt werden, und die Akzeptanz von Beweisen, die narrativ formuliert werden. Im Folgenden werden die Forschungsergebnisse zu dieser Thematik zusammenfassend dargestellt, die sich mit der Gruppe von Lehrenden der Mathematik oder mit Lehramtsstudierenden befassen.

Tabach et al. (2011) untersuchen in ihrer Studie u. a. die Bewertung von narrativ geführten Beweisen durch 50 Mathematiklehrerinnen und -lehrer. Zur Illustration dieser Beweisform wird ein Beispiel zu der Behauptung zitiert, dass die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch fünf teilbar ist (ebd., S. 472):

> Moshe claimed: I checked the sum of the first five consecutive numbers: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ is divisible by 5. The sum of the next five consecutive numbers is larger by 5 than this sum (each number is bigger by 1 and therefore the sum is bigger by 5), and therefore this sum is also divisible by 5. And so on, each time we add 5 to a sum that is divisible by 5, and therefore we always obtain sums that are divisible by 5. Therefore the statement is true.

Zunächst sollten die Probanden selbst sechs Behauptungen aus der elementaren Zahlentheorie verifizieren bzw. widerlegen; die Behauptungen waren dabei wie folgt (s. ebd., S 469):

(1) „Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch fünf teilbar"
(2) „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar"
(3) „Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch vier teilbar"
(4) „Es gibt eine Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen, die durch fünf teilbar ist"
(5) „Es gibt eine Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen, die durch drei teilbar ist"
(6) „Es gibt eine Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen, die durch vier teilbar ist".

Anschließend wurden ihnen insgesamt 41 verschiedene ‚Beweise' zu diesen sechs Behauptungen zur Bewertung vorgelegt. Diese ‚Beweise' umfassten korrekte und falsche Beweise, die verbal-narrativ oder symbolisch dargestellt wurden. Innerhalb der verbal-narrativen Argumentationen wurden konkrete Zahlenbeispiele als Existenzbeweis, als Gegenbeispiel, als generisches Beispiel und zur (unbegründeten) induktiven Verallgemeinerung verwendet. Zu jedem dieser 41 ‚Beweise' sollte ein Votum abgegeben, ob dieser die gegebene Behauptung korrekt verifiziert (bzw. widerlegt), und dieses Votum erläutert werden. Von Interesse für die vorliegende Forschungsarbeit sind die Bewertungen der korrekten narrativ geführten Beweise durch die Probanden. Neben der bereits oben zitierten korrekten narrativen Begründung („S1-Moshe") zu der Behauptung (1) wurden in der Studie von Tabach et al. (2011) außerdem die folgenden beiden verwendet:

„S1-Mali" – korrekte Verifikation der Allaussage in Behauptung (1) (ebd., S. 472):

> Mali claimed: I first tried the first ten examples of 5 consecutive numbers:
> $1+2+3+4+5=15$ $2+3+4+5+6=20$ $3+4+5+6+7=25$
> $4+5+6+7+8=30$ $5+6+7+8+9=35$ $6+7+8+9+10=40$
> $7+8+9+10+11=45$ $8+9+10+11+12=50$
> $9+10+11+12+13=55$ $10+11+12+13+14=60.$
> I saw that the statement is true for the first ten. All other sums of five consecutive numbers are obtained by adding multiples of 10 to one of the listed sums (for instance, the sum $44+45+46+47+48$ is obtained by adding multiples of 10, 5 times 40, to the sequence: $4+5+6+7+8$ that I checked before). Since multiples of 10 are also divisible by 5, the statement is true.

„S6-Moshe" – korrekte Falsifizierung der Existenzaussage in Behauptung (6) (ebd., S. 472):

> Moshe claimed: I checked the sum of the first four consecutive numbers: $1+2+3+4=10$; 10 is not divisible by 4. The sum of the next four consecutive numbers is obtained by adding 4 to this sum (each of the four numbers in the sum grows by 1, so the sum grows by 4). It is known that adding 4 to a sum that is not divisible by 4 will yield a sum that is not divisible by 4 either. And so on, each time we add 4 to a sum that is not divisible by 4, and therefore we always obtain sums that are not divisible by 4. Therefore the statement is not true.

Wie die Autoren darstellen, werden die Begründungen „S1-Moshe" und „S1-Mali" von 62% der Probanden richtig bewertet, die Begründung „S6-Moshe" von 70%. Als Begründung für die Ablehnung dieser Beweise gaben 16% der Probanden, die diese Beweise abgelehnt hatten, an, dass diese nicht allgemeingültig seien („There is no general justification. We can always ask what will happen for a much larger number; one cannot check all numbers." (ebd., S. 477)). 10% honorierten, dass die Beweise durchaus über bloße Beispieluntersuchungen hinausgingen, kritisierten aber, dass innerhalb dieser Beweise trotzdem nicht alle möglichen Fälle abgedeckt wären („Moshe relied on specific examples, $1+2+3+4+5=10, 6+7+8+9+10=40$, but he did not relate to the numbers in between, like $3+4+5+6+7$. He needs to prove it for any number.'' (ebd., S. 477)). 6% der Ablehnungen erfolgten aufgrund der narrativ-verbalen Darstellung der Beweise („[This is a] verbal justification which is not written in an acceptable mathematical way." (ebd., S, 477)). Die Autoren kommen zu dem Schluss, dass symbolisch dargestellten Beweisen eher Allgemeingültigkeit zugesprochen wird, als narrativ formulierten. Tatsächlich scheint es so zu sein, dass die Darbietung eines konkreten Beispiels zu Beginn eines Beweises bei einigen Probanden den Eindruck entstehen ließe, dass es sich bei der Begründung nicht um einen allgemeingültigen Beweis handeln würde.

Auch Dreyfus (2000) und Knut (2002b) kommen zu dem Ergebnis, dass korrekte Beweise, die narrativ formuliert und mithilfe konkreter Beispiele geführt werden, von einigen Lehrerinnen und Lehrern als defizitär bewertet werden. Martin und Harel (1989) untersuchen u.a. die Akzeptanz von Beweisen, die mithilfe konkreter Beispiele geführt werden, bei 101 Lehramtsstudierenden (Grundschule). In ihrer Studie erhalten valide Beweise, die narrativ mithilfe konkreter Beispiele geführt werden

(„particular proofs“; ebd., S. 45), von 42% der Probanden innerhalb eines bekannten Sachverhalts und von 46% innerhalb eines unbekannten Zusammenhangs geringe Bewertungen bzgl. ihrer Verifikationsleistung (Werte „1“ oder „2“ auf einer vierer Likert-Skala). Auch in diesem Fall scheint die Verwendung konkreter Beispiele innerhalb eines Beweises negative Auswirkungen auf seine Bewertung zu haben.

Studienübergreifend kann festgestellt werden, dass narrative Beweise, die mithilfe von konkreten Beispielen geführt werden, sowohl von einigen Lehrerinnen und Lehrern als auch von einigen Lehramtsstudierenden (hier: Grundschule) als Beweis abgelehnt werden. Als Begründung wird dabei u.a. angeführt, dass diese Beweise nicht allgemeingültig seien, da nur einzelne Fälle betrachtet würden bzw. nicht alle möglichen Fälle durch diese Beweise abgedeckt seien. Dreyfus (2000) weist darauf hin, dass auch der Verzicht auf formale Elemente innerhalb der Beweise zu solchen Fehleinschätzungen führen kann.

Herausstellung der theoretischen Grundlagen für ein Konstrukt ‚Beweisakzeptanz‘

Wie aufgezeigt wurde, wird in der Literatur von verschiedenen Faktoren auf eine ‚Beweisakzeptanz‘ bei Probanden geschlossen. Hierzu zählen vor allem die Einschätzung von Beweisprodukten als ‚mathematischer Beweis‘ (etwa Barkai et al. 2002; Gholamazad et al. 2004; Tabach et al. 2010b) oder die Bewertung von Beweisprodukten in Bezug auf verschiedene Aspekte, wie Verifikation oder Erklärungsqualität (etwa Healy and Hoyles 1989 und 2000; Martin und Harel 1989). Aufbauend auf diesen Betrachtungen wird in dem folgenden Abschnitt eine grundlegende Konzeptionierung von ‚Beweisakzeptanz‘ vorgestellt.

Insgesamt erscheint es sinnvoll, diese zwei Facetten von Beweisakzeptanz bei der Betrachtung eines entsprechenden Konstrukts zu berücksichtigen: die Passung eines vorgelegten Beweisprodukts mit dem jeweiligen subjektiven Verständnis von ‚Beweis‘ und das Ausmaß, inwieweit verschiedene Funktionen von Beweisen (etwa subjektive Überzeugung, Sicherung der Gültigkeit, Erklärung) durch den Betrachter empfunden werden.

Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich diese Sicht auf das Konstrukt auch als Ergebnis der Instrumententwicklung zur Erfassung von „Beweisakzeptanz“ widerspiegeln wird (vgl. Abschnitt 8.3.4). Beweisakzeptanz wird in dieser Arbeit konzeptualisiert und gleichsam operationalisiert, als das Ausmaß, inwieweit bei einem vorgelegten Beweis vom Betrachter die Funktionen Verifikation, Überzeugung[15] und Erklärung empfunden werden und inwieweit der Beweis durch den Betrachter als „korrekter und gültiger Beweis“ bewertet wird[16].

2.4.3 Einstellungen zur Mathematik und das Beweisen

In der Mathematikdidaktik liegen zahlreiche Arbeiten vor, die sich mit Einstellungen zur Mathematik bzw. Beliefs beschäftigen. Eine Aufarbeitung der bisher erzielten Ergebnisse würde an dieser Stelle zu weit führen und erscheint derweil für die vorliegende Arbeit auch nicht nötig. Für einen guten Überblick über entsprechende Forschungsrichtungen und Forschungsergebnisse wird an dieser Stelle auf Leder et al. (2006) und Schlöglmann und Maaß (2009) verwiesen. Für die vorliegende Arbeit sind empirische Ergebnisse auf zwei Ebenen von Interesse: Auswirkungen von Lehrveranstaltungen auf

[15] Mit dieser separaten Betrachtung von objektiver Verifikation und subjektiver Überzeugung wird die in Abschnitt 2.1.7 begründete und motivierte Aufspaltung der Funktion „Verifikation/Überzeugung“ aufgegriffen.
[16] Diese Begriffsdefinition wird auch in Kempen (2016, S. 1112) verwendet.

die Einstellungen von Studierenden zur Mathematik und Zusammenhänge zwischen Einstellungen zur Mathematik und Einstellungen zum Beweisen im speziellen.

Auswirkungen von Lehrveranstaltungen auf die Einstellungen von Studierenden zur Mathematik

In diesem Abschnitt werden Studien dargestellt, in denen die Auswirkungen von Lehrveranstaltungen im Übergang Schule/Hochschule (Weygandt & Oldenburg 2014 und 2015) oder von Lehrveranstaltungen zum Erlernen der Beweisaktivität (Yoo 2008 und Conner 2011) auf die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik untersucht wurden. Übergeordnet kann festgehalten werden, dass in diesen Studien Auswirkungen der jeweiligen Lehrveranstaltung auf die Einstellungen der Lernenden nachgewiesen werden konnten. Bei den Studien werden sowohl methodische als auch konzeptuelle Unterschiede deutlich.

Weygandt und Oldenburg (2014 und 2015) untersuchen die Auswirkungen ihrer neu konzipierten Lehrveranstaltung „Entstehungsprozesse von Mathematik“ auf verschiedene Einstellungen von Lehramtsstudierenden (Gymnasium/Gesamtschule) zur Mathematik. Sie verwenden hierzu 37 Items aus den Skalen von Grigutsch et al. (1998) zu den Aspekten Formalismus, Anwendung, Prozess und Schemaorientierung (vgl. Abschnitt 2.4.3) und erweitern den Fragebogen um 60 Items, mit deren Hilfe sie fünf weitere Skalen bilden (Weygandt & Oldenburg 2014, S. 1308). Alle Items werden von den Probanden auf einer fünfer Likert-Skala bewertet. Aufgrund von 15 gepaarten Testheften (Pre-/Posttest-Design über den Zeitraum eines Semesters) können die Autoren eine statistisch signifikante Abnahme des Mittelwerts bei der Skala Schema-Orientierung und einen statistisch signifikanten Anstieg des Mittelwerts der Skala Universalität[17] nachweisen. Beide Veränderungen werden von den Autoren positiv im Hinblick auf die Ziele ihrer Lehrveranstaltung bewertet. Für die vorliegende Arbeit ist hierbei relevant, dass durch diese Studie gezeigt werden konnte, dass im Verlauf einer Lehrveranstaltung durchaus statistisch signifikante Veränderungen bzgl. Einstellungen zur Mathematik nachgewiesen werden können. Es bleibt allerdings kritisch anzumerken, dass eine Stichprobe von 15 Probanden eher als gering zu bezeichnen ist.

Yoo (2008) untersucht qualitativ und quantitativ die Einstellungen zur Mathematik, zum Lehren von Mathematik und zum Beweisen bei Teilnehmenden eines traditionellen amerikanischen transition-to-proof Kurses [n=28] im Vergleich zu Teilnehmenden eines problemzentrierten Modified-Moore-Method Kurses (MMM) [n=33] (für eine Beschreibung entsprechender Kursvariante siehe Abschnitt 1.2.1). Hierfür wird u.a. ein Fragebogen verwendet, in dem die Lehramtsstudierenden („secondary school“) jeweils ihre Zustimmung zu zwei entgegengesetzten Aussagen auf einer Skala markieren sollen. Zur Illustration dieses Fragenformats soll das folgende Item dienen (Yoo 2008, S. 93):

> Proof is (a) a tool for doing and understanding mathematics or (b) a tool for demonstrating the correctness of mathematical statements.

mostly a			*mostly a and b equally*			*mostly b*	*Neither*
1	2	3	4	5	6	7	8

[17] Weygandt und Oldenburg (2014) illustrieren ihre Skala ‚Universalität‘ mithilfe der beiden folgenden Items: „Die Definitionen der Mathematik verhalten sich wie Naturgesetze, d.h. sie können von Menschen entdeckt werden, sind aber nicht veränderbar“ und „Falls es Marsbewohner gäbe, so hätten sie auf jeden Fall dieselbe Mathematik mit denselben Erkenntnissen“ (ebd., S. 1308).

Aufgrund der vorherigen Bewertungen von 30 Fachmathematikerinnen und Fachmathematikern werden dabei bestimmte Positionen als ‚ideal' betrachtet (Yoo 2008, S. 91). Schließlich wird ausgewertet, inwiefern sich die Sichtweisen der Studierenden nach Besuch der Kurse denen der Mathematiker annähern. (Im obigen Beispielitem würde eine Bewertung von „1" bis „4" einer idealen Antwort entsprechen und mit 2 Punkten codiert werden, die Bewertung „5" mit einem Punkt und Bewertungen „6" und „7" mit null Punkten. Insgesamt wäre somit bei den 15 zu bewertenden Items das Erreichen von bis zu 30 Punkten möglich.) Yoo kommt zu dem Ergebnis, dass sich die erreichten Punktzahlen in dem Eingangstest in den beiden Vergleichsgruppen nicht unterscheiden. Bei der Wiederholung des Fragebogens nach den beiden Kursen steigt die Punktzahl des MMM Kurses um 2,15 Punkte, die des traditionellen Kurses nur um 0,5 Punkte. Die Autorin resümiert das Ergebnis wie folgt: „Over the treatment period, the MMM students showed a higher gain from the pretest to posttest than did students in the traditional sections" (Yoo 2008, S. 94f.). Dieses Ergebnis wird durch weitere statistische Tests untermauert. In der Studie von Yoo zeigt sich somit, dass auch eine Kurskonzeption, die besonders den Prozessaspekt der Mathematik in den Vordergrund stellt, statistisch nachweisbare Auswirkungen auf die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik haben kann.

Conner et al. (2011) verwenden eine modifizierte Version des Fragebogens von Yoo (2008), um die Veränderungen der Einstellungen zur Mathematik, zum Mathematikunterricht und zum Beweisen bei sechs Lehramtsstudierenden („secondary school") durch den Besuch zweier Lehrveranstaltungen zu untersuchen. Auch in ihrer Studie werden Daten in einem Pre- und Posttestdesign erhoben. Die Autoren gelangen zu den Ergebnissen, dass die Einstellungen der Probanden zur Mathematik und zum Beweisen stabil sind und sich nur ihre Einstellungen zum Lernen von Mathematik von einer lehrerzentrierten Sicht zu einer lernerzentrierten Sicht ändern. Während in den obigen Studien bei den Studierenden durch den Besuch entsprechender Lehrveranstaltungen Auswirkungen auf die Einstellungen zur Mathematik nachgewiesen werden konnten, zeigt sich in der Studie von Conner et al. (2011), dass sich die Einstellungen zur Mathematik und zum Beweisen als sehr stabil erwiesen haben. Dagegen konnten Veränderungen im Kontext der Ansichten bzgl. Lehrer- bzw. Lernerzentriertheit ausgemacht werden.

Übergeordnet konnte somit in verschiedenen Studien nachgewiesen werden, dass Lehrveranstaltungen Auswirkungen auf die Einstellungen zur Mathematik von Lernenden haben können. Als Problem erweist sich dabei allerdings das Phänomen, dass Einstellungen zur Mathematik und zum Beweisen bei Lernenden als relativ stabil zu betrachten und Veränderungen somit nur bedingt herbeizuführen sind. Welche Veränderungen dabei allerdings gewünscht sind und wie sie am besten methodisch erfasst werden können, erscheint hierbei als offene Frage.

Zusammenhänge zwischen Einstellungen zur Mathematik und Einstellungen zum Beweisen

Unter dem Leitthema „Einstellungen zum Beweisen" („Beliefs about proof") werden in der mathematikdidaktischen Literatur verschiedene Aspekte zum Beweisen thematisiert. So untersucht etwa Mingus (1999) die Vorerfahrungen von Studierenden mit Beweisen, ihre Ansichten über die Angemessenheit von Beweisen für den Mathematikunterricht verschiedener Schulstufen und was einen Beweis überhaupt ausmacht. Dagegen thematisieren z.B. Conner et al. (2011, S. 488) unter diesem Aspekt auch Beweisakzeptanz, das Verständnis um Funktionen von Beweisen und die Bedeutung des Beweisens für den schulischen Mathematikunterricht. Es kann daher auch aus

Forschungsperspektive als offene Frage betrachtet werden, was unter dem Begriff „Einstellungen zum Beweisen“ überhaupt gefasst werden kann bzw. soll.
Der Zusammenhang zwischen Einstellungen zur Mathematik und dem Beweisen wurde bisher vor allem durch Furinghetti und Morselli (2009 und 2011) empirisch untersucht. Sie gehen dabei auch der Frage nach, welche Einstellungen Lehrende zur Mathematik haben und wie sich diese Einstellungen auf ihren Umgang mit Beweisen im Mathematikunterricht auswirken.

Furinghetti und Morselli (2009 und 2011) arbeiten in Anlehnung an die von Ernest (1989) formulierten Beliefs zur Mathematik und zum Lehren von Mathematik anhand von Fallstudien unterschiedliche Umgangsweisen von Lehrenden mit Beweisen im Schulunterricht heraus. Die dabei anhand von Interviews erhaltenen Charakteristika bzgl. des Umgangs mit Beweisen im Unterricht werden dabei aber nicht vor dem Theoriehintergrund der Beliefs von Ernest reflektiert. Die Autoren merken hierzu an: „This intertwining of elements makes it rather difficult to apply the categorisations found in the literature.“ (Furinghetti & Morselli 2011). Als Ergebnis kann aus diesen Studien entnommen werden, dass sich die Sichtweise eines Lehrenden auf Mathematik, auf den Mathematikunterricht und sein Eingehen auf die Bedürfnisse und Wünsche der Schülerinnen und Schüler in seinem Umgang mit Beweisen im Mathematikunterricht widerspiegeln. Weitergehende (empirisch nachgewiesene) Bezüge zwischen den Beliefs zur Mathematik und Einstellungen zum Beweisen können dabei nicht ausgemacht werden.

Die Frage, wie sich Einstellungen zur Mathematik bei Lernenden auf ihre Einstellungen zum Beweisen auswirken, bzw. wie diese Aspekte miteinander in Wechselwirkung stehen, ergibt sich somit als offene Forschungsfrage. Die Ergebnisse von Furinghetti und Morselli (s.o.) geben dabei einen Hinweis darauf, dass sich entsprechende Aspekte gegenseitig beeinflussen können.

2.5 Beweisen als diagrammatisches Schließen

In dem folgenden Abschnitt wird der Akt des Beweisens aus einer semiotischen Perspektive betrachtet. Diese Sichtweise wird als eine Leittheorie bei der Beforschung der Lehrveranstaltung (im Besonderen der Interpretation von Forschungsergebnissen und der Begründung von vorzunehmenden Modifikationen) dienen. Die Theorie des diagrammatischen Schließens nach Peirce erweist sich als gewinnbringend für die vorliegende Arbeit und weist gegenüber anderen semiotischen Theorien für die vorliegende Forschung verschiedene Vorzüge auf. Während andere semiotische Theorien die Beziehungen zwischen verschiedenen Aspekten bzw. Ebenen von Zeichen im Kontext von Wissenskonstruktion beschreiben (vgl. etwa die Zeichentheorie von Ferdinand de Saussure (etwa Presmeg et al. 2016, S. 5f.) oder das epistemologische Dreieck von Steinbring (1989)), rückt bei Peirce die Tätigkeit mit den Zeichen mit der Ausrichtung auf Erkenntnisentwicklung (i.S. der Generierung von neuem Wissen) in den Fokus. Mithilfe der Perspektive des diagrammatischen Schließens im Sinne der semiotisch-pragmatischen Erkenntnistheorie von Peirce wird es möglich:

1. die Zeichenaktivität beim Beweisen in verschiedene Phasen zu untergliedern, zu beschreiben und zu deuten, was weiter für die Beschreibung und Analyse von Beweisproduktionen genutzt werden kann,
2. verschiedene Notationssysteme (etwa Punktmusterdarstellungen) für die Konstruktion von Beweisen zu legitimieren und ihre Vor- und Nachteile vergleichend zu erörtern,

3. das Attribut der Allgemeingültigkeit von Beweisen zu erörtern und auf den (diagrammatischen) Umgang mit den Zeichen zurückzuführen, und
4. die Diskussion um die Akzeptanz von Beweisen um eine semiotische Perspektive sinnstiftend zu bereichern.

Der Ansatz des diagrammatischen Schließens erscheint daher prädestiniert für diese Arbeit, da die Aktivität mit den Zeichen („Diagrammen“), die Bedeutung des diese rahmenden Notationssystems („Diagrammsystem“) und das dafür notwendige Wissen („kollaterales Wissen“) in den Fokus des Interesses gestellt werden. Zwar ist die Theorie von Peirce auf den mathematischen Erkenntnisprozess ausgerichtet, doch erscheint eine Übertragung auf den Prozess der Wissenssicherung in Form von Verifikation innerhalb von Beweisen möglich. Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 dargelegt wurde, zeichnen sich gerade formale Beweise dadurch aus, dass in ihnen die verwendeten Zeichen syntaktisch verwendet werden. Die entsprechende Syntax wird nun aus semiotischer Perspektive durch das Diagrammsystem vorgegeben. Schlussweisen, Axiome und Sätze erweisen sich dann als (Transformations-) Regeln im jeweiligen Diagrammsystem.

Die folgenden Ausführungen basieren auf der semiotisch-pragmatischen Erkenntnistheorie von Charles Sanders Peirce. Es ist im Kontext dieser Arbeit nicht möglich, den semiotisch-pragmatischen Ansatz von Peirce und dessen Zeichentheorie in Gänze zu beschreiben. Im Folgenden werden daher nur die Aspekte beschrieben, die für das Verständnis dieser Forschungsarbeit notwendig sind. Für eine vertiefende Lektüre wird auf Hoffmann (2005) und Stjernfelt (2000) verwiesen.

Grundlegend für die folgenden Betrachtungen ist der weite Diagrammbegriff, den Peirce verwendet. So schreibt Hoffmann (2005, S. 127):

> Diagramme sind nun nach Peirce eine bestimmte Gruppe ikonischer Zeichen, die er dadurch von anderen abgrenzt, dass sie „gemäß einem vollständig konsistenten Darstellungssystem, das auf einer einfachen und leicht verständlichen Grundidee aufbaut, ausgeführt werden“ (Pierce, 1903b, SEM II 98).

Bei Diagrammen handelt es sich um gewisse Zeichen innerhalb eines sogenannten Diagrammsystems, von denen man zum Zeitpunkt der Konstruktion annimmt, dass sie in einem vermutlich widerspruchsfreien Zusammenhang stehen. Durch das rahmende Diagrammsystem werden (im Sinne einer ‚Gebrauchsanweisung‘) die Regeln für den Umgang mit den Diagrammen (Konstruktion, Verwendung, Lesart etc.) festgelegt (vgl. Dörfler 2006, S. 210ff.). Beispielsweise werden Diagramme der Form „$2n - 1$“ im Diagrammsystem der Algebra verwendet, in dessen Kontext sie gelesen werden können und gewisse Operationen mit ihnen zulässig sind. Das Diagrammsystem gibt somit die Regeln vor, wie Ergebnisse gelesen bzw. interpretiert werden müssen.

Aus semiotischer Sicht erscheint mathematisches Tun als eine Zeichentätigkeit, als ein regelgeleitetes Agieren mit Zeichen in Diagrammsystemen; der Umgang mit und die Erforschung von Diagrammen stehen somit im Fokus. Mathematisches Schließen kann unter dieser Perspektive als diagrammatisches Schließen betrachtet werden. Hoffmann (2005, S. 129) zitiert Pierce dazu wie folgt:

> Mit diagrammatischem Schließen meine ich Schließen, welches gemäß einer in allgemeinen Begriffen formulierten Vorschrift ein Diagramm konstruiert, Experimente an diesem Diagramm durchführt, deren Resultate notiert, sich Gewissheit verschafft, dass ähnliche Experimente, die an irgendeinem gemäß der Vorschrift

konstruierten Diagramm durchgeführt werden, die selben Resultate haben würden, und dieses in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringt. (Peirce 1902a, NEM IV 47 f.)

Diagrammatisches Schließen umfasst folglich (i) die Konstruktion von Diagrammen, (ii) das Ausführen von Experimenten an bzw. mit diesen Diagrammen, (iii) das Beobachten und Festhalten der Resultate des Experimentierens und (iv) die Vergewisserung der allgemeinen Gültigkeit der Ergebnisse (vgl. Dörfler 2006, S. 211). Für die Konstruktion eines Diagramms und den Umgang mit ihm ist ein Wissen um das entsprechende Regelsystem des Diagrammsystems notwendig. Peirce prägt hierfür den Begriff des kollateralen Wissens, mit dem er alles Wissen bezeichnet, welches bereits gewusst werden muss, um anderes Wissen verstehen oder ermöglichen zu können (Hoffmann 2005, S. 38ff.).

Diesem Vorgang des diagrammatischen Schließens soll nun weiter nachgegangen werden.

2.5.1 Der Vorgang des diagrammatischen Schließens

Wie bereits oben beschrieben, beinhaltet das diagrammatische Schließen die Aspekte (i) Konstruktion von Diagrammen, (ii) Ausführen von Experimenten an bzw. mit diesen Diagrammen, (iii) Beobachten und Festhalten der Resultate des Experimentierens und (iv) Vergewisserung der allgemeinen Gültigkeit der Ergebnisse. Diese Aspekte werden im Folgenden näher beschrieben und anhand eines Beweises zu der Behauptung illustriert, dass die Summe von zwei ungeraden natürlichen Zahlen immer gerade ist.

Die Konstruktion von Diagrammen

Sucht man nach einer Lösung für ein mathematisches Problem (etwa einen Beweis zu einer mathematischen Behauptung), so bietet eine diagrammatische Darstellung (etwa in der Symbolsprache der Algebra oder mithilfe von Punktmustern) Transformationsmöglichkeiten, die das Problem zunehmend handhabbar machen können. Es muss hier angemerkt werden, dass die Wahl des Diagrammsystems, innerhalb dessen die Konstruktion des Diagrammes geschieht, weitreichenden Einfluss auf die jeweiligen Möglichkeiten hat: Die Regeln für den Umgang mit den Diagrammen innerhalb des Diagrammsystems determinieren mögliche Erkenntnisse. Damit entspricht der Vorgang der Diagrammatisierung keiner bloßen Übersetzung mathematischer Sachverhalte, sondern muss als das Aufprägen einer mathematischen Struktur verstanden werden. Denn durch jedes Diagrammsystem werden bestimmte Eigenschaften der mathematischen ‚Objekte' und gewisse Möglichkeiten zur Transformation in den Vordergrund gerückt. Folglich ist bereits bei der Konstruktion von Diagrammen ein entsprechendes kollaterales Wissen notwendig; bei der Konstruktion von Diagrammen wird jedoch nicht bloß kollaterales Wissen explizit gemacht, bereits hier setzt der eigentliche Erkenntnisprozess an.

> Für den Beweis der Behauptung, dass die Summe von zwei ungeraden natürlichen Zahlen immer gerade ist, können die Diagramme „$2n-1$" und „$2m-1$" (mit $n, m \in \mathbb{N}$) im Diagrammsystem der Algebra konstruiert werden, um das Problem handhabbar zu machen. Die Auswahl und Zusammensetzung der Zeichen (etwa in Referenz auf eine mathematische Definition oder einen Satz) sind hierbei dem kollateralen Wissen zuzuordnen. Alternativ könnten auch entsprechende Punktmusterdarstellungen im Diagrammsystem der Punktmuster konstruiert werden. Somit gehört zu dieser Phase auch die Auswahl eines Diagrammsystems.

Das Ausführen von Experimenten bzw. Transformationen mit den Diagrammen

Bei der Ausführung von Experimenten mit den Diagrammen werden diese nicht nur Mittel, sondern auch Gegenstand der Erkenntnis: „Wir untersuchen nicht mit Hilfe von Diagrammen von diesen wesentlich verschiedene Objekte, sondern die Diagramme selbst sind die Gegenstände der Untersuchungen und Beobachtungen“ (Dörfler 2010., S. 26). Mathematische Sätze erscheinen hierbei als Aussagen über das regelhafte Agieren mit Zeichen. Es ist die geeignete Auswahl der Operationen bzw. Transformationen, die innerhalb des Diagrammsystems zu Ergebnissen führen, die dann wieder als Aussagen über Objekte interpretiert werden können. Ein Wissen um das entsprechende Regelwerk des Diagrammsystems ist für die Ausführung der Transformationen und die Interpretation der so erhaltenen Diagramme im Sinne kollateralen Wissens grundlegend.

> An den oben konstruierten Diagrammen („$2n-1$“ und „$2m-1$“) können nach den Regeln der Algebra Transformationen vorgenommen werden:
>
> $$\begin{aligned}(2n-1)+(2m-1) &= 2n-1+2m-1 = 2n+2m-1+(-1) = 2n+2m-2\\ &= 2\cdot(n+m-1)\end{aligned}$$

In dem Beispiel wird deutlich, dass die geeignete Auswahl der (erlaubten) Operationen den Erkenntnisgewinn ermöglicht, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist. Bei diesen Operationen werden die Diagramme verändert und ihre Eigenschaften untersucht. Schließlich kann das resultierende Diagramm „$2\cdot(n+m-1)$“ wiederum nach den Regeln des Diagrammsystems gelesen werden.

Das Beobachten und Festhalten der Resultate des Experimentierens

Die durch Transformation erhaltenen Diagramme können vom Betrachter als Aussagen über mathematische Objekte verstanden werden. Für den Erkenntnisgewinn muss das durch Transformation erhaltene Diagramm schließlich in der Lesart des Diagrammsystems interpretiert werden. Kollaterales Wissen wird hier eine notwendige Bedingung für das Verstehen des Ergebnisses bzw. für die „Möglichkeit identifizierender Wahrnehmung“ (Hoffmann 2005, S. 44).

> Das erhaltene Diagramm $2\cdot(n+m-1)$ kann im Diagrammsystem der Algebra (vor dem Hintergrund mathematischer Regeln und Sätze) interpretiert werden: Da der zweite Faktor ein Element der natürlichen Zahlen ist, liegt hier als Ergebnis eine ‚gerade Zahl‘ vor.

Die Verbindung von Diagramm (hier: $2\cdot(n+m-1)$) und Objekt (hier: gerade Zahl) wird somit durch das Diagrammsystem gestiftet.

Die Vergewisserung der allgemeinen Gültigkeit der Ergebnisse

Schließlich stellt sich die Frage nach der Sicherheit bzw. der allgemeinen Gültigkeit der Resultate des diagrammatischen Schließens. Die Regeln des Diagrammsystems (bzw. ihre Konsistenz) manifestieren die Unausweichlichkeit mathematischen Schließens: „Da beim mathematischen Schließen keine weiteren empirischen Bedingungen zu berücksichtigen sind, garantieren allein die Regeln des gewählten Diagrammsystems, dass die Konklusionen des Schließens so allgemein sind wie ihre Prämissen.“ (Hoffmann 2005, S. 135). Oder anders formuliert: Es sind die allgemeingültigen Regeln und Operationen, aus denen die Sicherheit der Ergebnisse resultiert, und nicht die Diagramme selbst.

Aus den oben angewendeten zugelassenen allgemeingültigen Transformationen der Diagramme, gemäß den Regeln des Diagrammsystems der Algebra, resultiert die allgemeine Gültigkeit der Erkenntnis, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist.

Diese Sicht auf den Beweisprozess als diagrammatisches Schließen ermöglicht dabei, eine vergleichende Sicht auf verschiedene Beweisprodukte einzunehmen, die für die vorliegende Arbeit von großer Bedeutung ist. Diese Sicht auf Beweisprodukte wird im folgenden Abschnitt in Form eines Exkurses an verschiedenen Beweisprodukten exemplarisch aufgezeigt.

2.5.2 Exkurs: Eine semiotische Diskussion verschiedener Beweisprodukte

Die bisher erfolgte Erörterung semiotischer Aspekte beim Beweisen soll im Folgenden anhand verschiedener Beweisbeispiele konkretisiert werden. Die zu beweisende Behauptung ist hierbei: *Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade*. Nach der Darstellung von sechs verschiedenen ‚Beweisen' werden diese aus semiotischer Perspektive vergleichend diskutiert, wobei die Aspekte ‚kollaterales Wissen' und ‚Diagrammsystem' im Zentrum stehen werden. Ferner wird es darum gehen, die Verwendung von konkreten Zahlen- und Punktmusterbeispielen innerhalb allgemeingültiger Beweise aus semiotischer Perspektive zu legitimieren.

Beweis (1):

$5 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15, \quad 13 + 2 \cdot 13 = 3 \cdot 13 = 39$

Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer gleich dem Dreifachen der Ausgangszahl. Da diese als ungerade vorausgesetzt wurde, erhält man immer das Produkt zweier ungerader Zahlen. Da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Beweis (2):

Sei a eine beliebige aber feste ungerade natürliche Zahl. Dann gilt: $a + 2 \cdot a = 3 \cdot a$. Da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Beweis (3):

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Dann gilt:

$$(2a-1) + 2 \cdot (2a-1) = 3 \cdot (2a-1) = 6a - 3 = 2\,(3a-1) - 1$$

$$= 2q - 1, mit\ q = (3a-1) \in \mathbb{N}.$$

Q.e.d.

Beweis (4):

Abbildung 6: Die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten dargestellt im Diagrammsystem der Punktmuster (Variante 1)

Addiert man zu einer ungeraden natürlichen Zahl ihr Doppeltes, so ergibt sich durch Aneinanderlegen der Punktreihen geometrisch ein Rechteck, wobei eine Seitenlänge gleich drei und die andere gleich der Ausgangszahl ist. Da somit beide Seitenlängen des Rechtecks ungerade sind, kann man das Rechteck weder horizontal noch vertikal durch zwei teilen. Somit ist die Gesamtzahl nicht durch zwei teilbar, also ungerade.

Beweis (5):

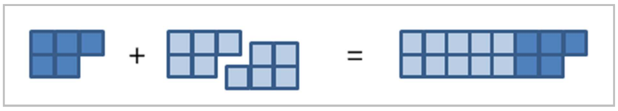


Abbildung 7: Die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten dargestellt im Diagrammsystem der Punktmuster (Variante 2)

Beweis (6):

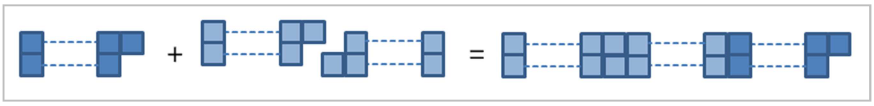


Abbildung 8: Die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten dargestellt im Diagrammsystem der Punktmuster mit „geometrischen Variablen“ [18]

Diskussion der Beweisprodukte unter der eingenommenen semiotischen Perspektive

In Beweis (1) wird narrativ eine allgemeingültige Argumentation beschrieben, welche anhand zweier konkreter Zahlenbeispiele (Arithmetik) verdeutlich wird. Die Schlussfolgerung, dass das Ergebnis immer ungerade sein muss, wird schließlich mithilfe des Satzes erreicht, dass das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist.

Zu den Zahlenbeispielen ist zunächst aus erkenntnistheoretischer Perspektive zu bemerken, dass durch den narrativen Beweis, mithilfe der Wortvariablen, eine allgemeingültige Verifikation der Behauptung vollzogen wird. Aus semiotischer Perspektive wurden ganz bestimmte Transformationen aus dem Diagrammsystem der Arithmetik ausgewählt, um den Sachverhalt darzustellen bzw. zu untersuchen. Die Erkenntnis über die Gültigkeit der Behauptung kann hierbei der Transformation der Diagramme zugeschrieben werden: Die Transformationen wurden gezielt so gewählt, dass diese mit allen ungeraden Zahlen genauso durchführbar sind und zu einem entsprechenden Ergebnis führen würden. Zentral ist, dass nicht mithilfe der konkreten Zahl „3“ die Allgemeingültigkeit der Behauptung nachgewiesen wird, denn es wird ja nur ein konkretes Zahlenbeispiel betrachtet; die Sicherheit und Allgemeingültigkeit der beschriebenen Erkenntnis resultiert aus den Umformungen und der Interpretation der Diagramme, die genauso für alle möglichen ungeraden natürlichen Zahlen durchzuführen wären. Hier wird deutlich, dass die Verwendung von konkreten Beispielen (etwa innerhalb generischer Beweise) kein Widerspruch zu der Allgemeingültigkeit der Verifikation darstellt, da diese durch die Transformationen konstituiert wird.

Beweis (2) unterscheidet sich von Beweis (1) durch die Nutzung der als ungerade natürliche Zahl definierten Buchstabenvariable a. Aus der beschriebenen semiotischen Perspektive gibt es hier für den Erkenntnisprozess keinen qualitativen Unterschied zum ersten Beispiel, da das Zeichen a entsprechend dem Zahlzeichen 3 verwendet wird. Es sind die gezielt ausgewählten Transformationen, die mit allen Zahlen bzw. Buchstabenvariablen so durchgeführt werden können,

[18] Die Darstellung und Verwendung der von Biehler und Kempen (2014, S. 132) so genannten „geometrischen Variablen“ wird in Abschnitt 6.2 genauer erörtert.

die die Allgemeingültigkeit belegen; die Gesetzmäßigkeiten der Arithmetik bzw. der Algebra sichern die Gültigkeit der Beweisführung.

In dem Beweis (3) wird eine algebraische Repräsentation einer ungeraden Zahl als Formalisierung gewählt. Innerhalb des für die Konstruktion dieses Diagramms verwendeten Diagrammsytems der Algebra sind weitere Transformationsmöglichkeiten gegeben. Im Kontext des Diagrammsystems der Algebra wird die Bedeutung notwendigen kollateralen Wissens evident: das Wissen um die Repräsentation einer ungeraden Zahl, etwa als $(2a-1)$ mit $a \epsilon \mathbb{N}$, das Wissen um die (Transformations-) Regeln der Algebra und das notwendige Erreichen eines Diagramms (hier der Form $2q-1$ mit $q \epsilon \mathbb{N}$), welches schließlich wieder als Aussage über das mathematische Objekt interpretiert werden kann.

In den Beweisen (4), (5) und (6) wird ein Diagrammsystem mit Punktmustern verwendet. Die Regeln dieses Diagrammsystems werden bei Fischer (2010) wie folgt beschrieben:

> Zahlen werden hier als Anzahlen von Punkten repräsentiert, Addition als Zusammenfügen von zwei Punktmengen, Multiplikation als Vervielfachen einer Punktmenge. Subtrahieren geschieht durch Wegnehmen (z.B. durch Durchstreichen, Markieren, Ausradieren). Dividieren ist Teilen einer Punktmenge in gleich große Untermengen, wobei der Divisor sowohl als Anzahl als auch als Größe der einzelnen Untermengen aufgefasst werden kann. Ein Größenvergleich von zwei Punktmustern geschieht durch geeignetes Strukturieren oder Umsortieren der Punkte. Die Punktmuster bieten aber noch mehr: Die Rechengesetze der natürlichen Zahlen spiegeln sich in den Operationen an Punktmengen wider. Daher sind die Punktmuster Diagramme im Sinne von Pierce. (Ebd., S. 86)

In Beweis (4) wird durch das Zusammenfügen der ungeraden Zahl mit ihrem Doppelten ein Rechteck gebildet. Dieses erhaltene Diagramm muss im Diagrammsystem der Punktmuster interpretiert werden: Die Seitenlängen des so entstandenen Rechtecks werden immer ungerade sein, da eine Seitenlänge gleich drei und die andere gleich der ungeraden Ausgangszahl ist. Somit kann das Rechteck nicht in zwei gleichgroße Untermengen aufgeteilt werden. Daher ist die zu betrachtende Summe ungerade. Neben der Darstellung einer konkreten ungeraden Zahl (vgl. Beweis (1)) wird auch in diesem Beispiel die Bedeutung des kollateralen Wissens deutlich: Neben dem Bewusstsein, dass ein solches Agieren mit Punktmustern überhaupt zulässig ist, sind das Wissen um die Darstellung als Punktreihe, das Zusammenfügen der Punktreihen zu einem Rechteck, das Argumentieren über die Seitenlängen und der Nachweis des Attributs ‚ungerade' als ‚nicht durch zwei teilbar' wesentliche Aspekte desselben.

Das in dem Beweis (4) verwendete Diagramm eines ‚Rechtecks mit ungeraden Seitenlängen' für die Darstellung einer ungeraden Zahl unterscheidet sich von denen in den Beweisen (5) und (6) vor allem dadurch, dass dort eine strukturelle Eigenschaft der ungeraden Zahlen betont wird: In den Beweisen (5) und (6) wird die ungerade Zahl im Diagrammsystem der Punktmuster mithilfe zweier Punktreihen dargestellt, wobei eine Reihe um eins länger (bzw. kürzer) als die andere ist. Hier wird deutlich, dass ungerade Zahlen immer um eins größer (bzw. kleiner) als gerade Zahlen sind. Während in Beweis (5) die konkrete Zahl 5 betrachtet wird, wird in (6) eine Pünktchen-Notation verwendet, um gleichsam als „geometrische Variable" eine beliebige Anzahl zu repräsentieren (vgl. Biehler und Kempen 2014, S. 131). Aus semiotischer Perspektive kann jedoch bereits in (5) die Allgemeingültigkeit der Verifikation erkannt werden, da diese aus den Operationen und nicht aus den verwendeten Symbolen resultiert (s.o.).

Insgesamt werden bei obiger Betrachtung verschiedene Aspekte deutlich, die für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind:

1. Die Wahl eines Diagrammsystems hat weitreichende Auswirkungen auf die möglichen Transformationen und die potentiell zu erreichenden Diagramme, welche schließlich wieder interpretiert werden müssen.
2. Bei jeder Nutzung eines Diagrammsystems und in jedem Schritt des diagrammatischen Schließens ist kollaterales Wissen notwendig.
3. Aus semiotischer Perspektive erweist sich ‚Variable' als ein bestimmter Gebrauch von Zeichen. Eine konkrete ungerade Zahl kann (als paradigmatische ungerade Zahl) als ‚Variable' fungieren. Allein der Verweis auf die (mathematischen) Objekte geschieht unterschiedlich; bei Buchstabenvariablen der Algebra als ‚Variable mit Wertebereich' und bei Punktmustern ggf. mit Bezug auf die Struktur der mathematischen Objekte als strukturelle Repräsentation.
4. Die Allgemeingültigkeit einer Verifikation gründet sich nicht auf den verwendeten Zeichen, sondern auf den Umgang mit diesen: Die allgemeingültigen Transformationen der Diagramme gemäß bestimmter Regeln eines konkreten Diagrammsystem konstituieren die Allgemeingültigkeit der Verifikation.

Durch obige Betrachtungen werden die Bedeutung des Diagrammsystems und das Vorhandensein von kollateralem Wissen für das diagrammatische Schließen und somit für den Beweisprozess deutlich. Dabei tauchte auch das Phänomen auf, dass zusätzlich zu dem diagrammatischen Schließen (Umgangs-) Sprache genutzt wurde, um auf verwendete Transformationen, die Lesart der Diagramme und die Allgemeingültigkeit der Beweise gesondert hinzuweisen. Der Sprache kommt dabei zunächst keine gesonderte Rolle im Erkenntnisprozess zu, ihr obliegt es, besondere Aspekte für den Lesenden zu betonen. Dies mag für den Lesenden eines Beweises, abhängig von dem verwendeten Diagramm und den jeweiligen Vorerfahrungen, angebracht oder auch notwendig zu sein. Dabei stellt sich jedoch die Frage, welches Diagrammsystem für die Tätigkeit des diagrammatischen Schließens am besten geeignet ist.

2.5.4 Die Güte eines Diagrammsystems

Die Güte eines Diagrammsystems misst sich nach seinem Nutzen im (Sach-)Kontext, seinem Potential für das Gelingen des Erkenntnisprozesses und seiner Les- und Nutzbarkeit für den Handelnden (etwa Stjernfelt 2000, S. 360). Es lässt sich somit festhalten, dass die Güte eines Diagrammsystems nicht ausschließlich objektiv zu bewerten ist, sondern auch oder vor allem dabei subjektive Aspekte berücksichtigt werden müssen. Entscheidend erscheint der Grad kollateralen Wissens, über den Handelnde im Umgang mit einem Diagrammsystem zum entsprechenden Zeitpunkt verfügen. Folglich ist es von grundlegender Bedeutung, dass Lernende den Umgang mit einem Diagrammsystem, und dies schließt auch die Algebra oder Punktmusterdarstellungen mit ein, verständig üben und eine entsprechende Praxis aufbauen können. Wie Dörfler (2006) darlegt, ist das Erlernen einer diagrammatischen Praxis für den Mathematikunterricht von zentraler Bedeutung und umfasst dabei verschiedene Aspekte, wie den elementaren Umgang mit Diagrammen nach den Regeln des jeweiligen Systems, das Experimentieren mit Diagrammen und die Erforschung ihrer Eigenschaften, die Untersuchung der Beziehungen zwischen verschiedenen Typen von Diagrammen, das Erfinden und Entwerfen von Diagrammen und das Anwenden von fertigen Diagrammen zur Modellierung (ebd., S. 213f.). Denn wer die (Schluss-) Regeln der Algebra nicht kennt bzw. versteht, wird auch die Allgemeingültigkeit entsprechend geführter algebraischer Beweise nicht verstehen können. Entsprechend müssen Lernende mit dem Diagrammsystem der Punktmuster vertraut sein, um mit diesen arbeiten zu können. Auch die Frage nach der Lesart konkreter (paradigmatischer) Beispielbetrachtungen erscheint nun als eine Frage nach der Interpretation von Diagrammen: In welchen Transformationen und Diagrammen ein Betrachter eine Allgemeingültigkeit des diagrammatischen Schließens erkennt, hängt grundlegend vom vorliegenden kollateralen Wissen ab.

Dennoch hat natürlich die fachmathematische Symbolsprache für die mathematische Tätigkeit verschiedene Vorteile, die Lernenden bewusst gemacht werden sollten. Diese werden im folgenden Absatz dargestellt und didaktisch motiviert.

2.5.5 Die Rolle der fachmathematischen Sprache

Neben der allgemeinen Betrachtung des Nutzens eines Diagrammsystems für die mathematische Erkenntnisentwicklung muss auch die Bedeutung der fachmathematischen Symbolsprache in diesem Kontext gesondert betrachtet werden. Ohne Zweifel ist das Lesenkönnen von und der Umgang mit der fachmathematischen Symbolsprache ein Lernziel jedes mathematikhaltigen Studiengangs.

Auf die Vorteile der fachmathematischen Sprache wird u.a. in Whitehead und Russel (1978, S. 1ff.) und in Maier (1999) eingegangen. Dazu gehören die folgenden Aspekte:

- Durch die fachlichen Bezeichnungen werden Informationen gebündelt, was eine verdichtete und in gewisser Weise auch vereinfachte Sprache zur Folge hat.
- Die Fachsprache ermöglicht erst eine Formalisierung, an der Transformationen vollzogen und Resultate hervorgebracht werden können.
- Das Bestreben, neue Begriffe bei ihrer ersten Verwendung genau zu definieren, konstituiert eine begriffsklärende Funktion und Begriffshierarchien und andere Begriffsbeziehungen bewirken logisch ordnende Funktion der Sprache.
- Schließlich ist sie das Kommunikationsmedium der mathematischen Community.

Vorteile können somit übergeordnet auf der Ebene der Begriffsbildung bzw. Begriffspräzisierung und auf der Ebene einer ‚Formalisierung' ausgemacht werden, welche auch der Kommunikation dienlich sind. Betrachtet man ‚Formalisierung' aufgrund des in dieser Arbeit interessierenden Kontextes als ‚Übersetzung' in die algebraische Symbolsprache unter Verwendung von Buchstabenvariablen etc., so können verschiedene Vorteile dieses speziellen Diagrammsystems herausgearbeitet werden (vgl. Mall 1993 und Mason et al. 2005, S. 1ff.):

Die Symbolsprache der Algebra …

- übernimmt eine Kontrollfunktion bzgl. der Gültigkeit von (rechnerischen) Argumentationen
- vermag bei Argumentationen restlos zu überzeugen, wo andere Darstellungen einen Zweifel an der Gültigkeit hinterlassen können
- ermöglicht die Formulierung allgemeingültiger Zusammenhänge („expressing generality"; Mason et al. 2005, S. 2ff.)
- ist das Kommunikationsmittel der mathematischen Community.

Gerade der Aspekt der Formulierung allgemeingültiger Zusammenhänge ermöglicht im Vergleich generischer und formaler Beweise die Herausstellung des Nutzens der mathematischen Symbolsprache. Während bei dem hier vertretenen Konzept von generischen Beweisen die Allgemeingültigkeit narrativ dargestellt bzw. expliziert werden muss, wird der Symbolsprache der Algebra innerhalb formaler Beweise dieses Attribut gleichsam zugesprochen. Denn die oben angeführte Kontrollfunktion der Algebra sichert die Allgemeingültigkeit der verwendeten Transformationen bzw. Operationen und damit die Allgemeingültigkeit entsprechender Beweise.

Aus didaktischer Perspektive ist dabei grundlegend, dass auch die Verwendung der fachmathematischen Symbolsprache als Lerngegenstand aufgefasst werden muss. Daher kann die Verwendung dieser Fachsprache zunächst ein Verstehenshindernis für das Erlernen der Beweisaktivität darstellen. Hierzu schreibt Maier (1999, S. 25):

> Angesichts der oben erwähnten Schwierigkeiten erscheint es nun fragwürdig, die Schüler bei […] Beweisen von vorne herein und ausschließlich auf einen extensiven Symbolgebrauch festzulegen und den Übergang von einer betont umgangssprachlichen zu einer betont formalen Darstellung zu früh oder zu rasch zu erzwingen. Mit einer solchen Festlegung ist die Gefahr verbunden, dass mindestens ein Teil der Schüler mit der Aufgabe des Beweisens einfach deshalb Schwierigkeiten bekommt, weil ihm diese Idealform der Kodierung von Beweisgedanken nicht gelingt und er umgekehrt weitgehend mit Symbolen dargestellte Beweise nicht zu dekodieren und damit nicht zu verstehen vermag.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts angemerkt wurde, bezieht sich diese semiotische Theorie von Peirce ursprünglich auf den Prozess mathematischer Erkenntnisgewinnung und nicht auf den Prozess der Wissenssicherung. Der Vorgang des diagrammatischen Schließens vermag es alleine noch nicht, das Phänomen ‚mathematischer Beweis' vollständig zu erfassen. Hinzu kommen die Fragen nach der Verwendung von mathematischen Argumenten, der Explizierung von Argumenten und Schlussweisen, generell aller Normen, die an Beweise gestellt werden, damit sie als wirkliche Beweise gelten können (vgl. Abschnitt 2.1.1). Diese Fragen lassen sich für den Kontext der Mathematikausbildung mit der Theorie sozio-mathematischer Normen fassen, welche als zweite Leittheorie für die vorliegende Forschung gewählt wurde. Diese Theorie wird im nächsten Abschnitt dargestellt und begründet.

2.6 Die Theorie sozio-mathematischer Normen

In diesem Abschnitt wird die Theorie sozio-mathematischer Normen dargestellt, die in der vorliegenden Arbeit, neben der Theorie des diagrammatischen Schließens nach Pierce, als zweite Leittheorie bei der Beforschung der Lehrveranstaltung verwendet wird. Mithilfe dieser Theorie wird es möglich, den Prozess zu beschreiben, zu analysieren und zu evaluieren, wie Lernende normative Aspekte beim Beweisen erlernen. Diese normativen Aspekte tangieren dabei die folgenden Fragen:

1. Was wird im Kontext der Lehrveranstaltung unter einem (generischen, operativen, formalen) Beweis verstanden?
2. Welche Aspekte müssen bei der Konstruktion eines (generischen, operativen, formalen) Beweises expliziert werden?
3. Inwiefern werden diese Aspekte sozio-mathematischer Normen in den Beweisproduktionen der Lernenden deutlich?

Die Theorie sozio-mathematischer Normen eignet sich in einem besonderen Maße für die vorliegende Forschung, da sie einen Erklärungsansatz für die Herausbildung normativer Aspekte zum Beweisen innerhalb einer Lerngruppe zur Verfügung stellt, die im Kontext der Lehrveranstaltung expliziert werden oder auch nur implizit verbleiben. Gerade für die Domäne des Beweisens ist dieses Zusammenspiel von zu explizierenden und impliziten Normen von großer Bedeutung, da eine ‚absolute' Definition dessen, was ein Beweis ist, bzw. was innerhalb einer Lerngruppe unter einem Beweis verstanden wird, so nicht möglich ist (vgl. Abschnitt). Entsprechende Begriffs- und Bedeutungskonstruktionen können dann sinnstiftend als Ergebnisse eines Aushandlungsprozesses im Sinne sozio-mathematischer Normen begriffen werden. Darüber hinaus wird es mit dieser Theorie möglich, die Auswirkung der hier thematisierten Lehrveranstaltung theoretisch fassbar zu machen.

Im Fokus dieser Theorie steht dabei nicht das Hineinwachsen in eine weitergefasste Kommunität, wie etwa in der sozio-kulturellen Theorie von Wenger (1998), sondern die konkrete Lehrsituation bzw. Lehrveranstaltung, in deren Kontext sich normative Aspekte herausbilden.

2.6.1 Theoretische Grundlagen sozio-mathematischer Normen

Yackel und Cobb (1996) prägten den Begriff „sozio-mathematische Normen“ für normative fachliche Aspekte im Mathematikunterricht, die sich in einem Aushandlungsprozess zwischen Lehrenden und Lernenden im Unterrichtsgeschehen herausbilden. Die Autoren zeigen am Beispiel eines Unterrichtsgesprächs in der Grundschule, wie sich die Bedeutung dessen herausbildet, was als unterschiedliche Lösung („different solution“; ebd., S. 462) im Unterricht verstanden wird. Diese Perspektive verbindet somit eine konstruktivistische Sichtweise auf den Lernprozess mit der Sicht auf das Lernen als sozialen Interaktionsprozess (vgl. Stephan 2014, S. 564). Die Aushandlung normativer Aspekte ist dabei im Kontext von Beweisen von besonderer Bedeutung.

2.6.2 Sozio-mathematische Normen und Beweise

Eine Grundfrage innerhalb einer Lerngemeinschaft ist, was überhaupt unter einer gültigen Argumentation bzw. unter einem korrekten mathematischen Beweis verstanden werden darf bzw. werden soll. Yackel und Cobb (1994) weisen hierbei auf die Bedeutung des Aushandlungsprozesses zwischen Lehrenden und Lernenden hin:

> When students give explanations and arguments in the mathematics classroom their purpose is to describe and clarify their thinking for others, to convince others of the appropriateness of their solution methods, but not to establish the veracity of a new mathematical 'truth'... The meaning of what counts as an acceptable mathematical explanation is interactively constituted by the teacher and the children […]. (Ebd., S. 3; zitiert nach Hanna und Jahnke 1996, S. 887)

Doch nicht nur die Bedeutung entsprechender Begriffe können beim Beweisen als Aspekte sozio-mathematischer Normen betrachtet werden, in diesem Kontext gilt es im unterrichtlichen Geschehen weitere Aspekte zu erörtern. Dreyfus (1999) weist darauf hin, dass gerade im Erlernen der Beweisaktivität sozio-mathematische Normen eine zentrale Rolle spielen. So werden im unterrichtlichen Geschehen die Normen nicht nur dafür ausgebildet, was als eine gültige Argumentation akzeptiert wird, sondern auch welche Art von Antwort von einem Lernenden erwartet wird, welche Zwischenschritte in einem Beweis offengelassen werden können bzw. welche Argumente expliziert werden müssen (vgl. auch Blanton & Stylianou 2002; Forman et al. 1998; McClain 2009, Weber 2002). Dies tangiert auch die Frage, wie Lernende verschiedene Operatoren zum Beweisen (Zeigen Sie, dass…; Beweisen Sie, dass; …) in Aufgabenstellungen überhaupt verstehen, bzw. zu verstehen lernen, ob dabei verschiedene Begründungsmuster implizit eingefordert (Dreyfus 1999) oder unterschiedliche semiotische Ressourcen aktiviert werden (Herbst & Dimmel 2014)[19]. So betrachtet, kann das Erlernen der Beweisaktivität über die Aushandlung und Übernahme von sozio-mathematischen Normen als Enkulturationsprozess in die mathematische Community verstanden werden (Nickerson & Rasmussen 2009). Durch diese Sichtweise auf den Lernprozess rückt auch die Bedeutung der beteiligten Lehrpersonen in den Vordergrund. Entsprechende Normen werden durch alle am Lernprozess beteiligten Personen beeinflusst bzw. ausgehandelt und gleichsam konstituiert.

---

[19] Neuere Ergebnisse von Kempen et al. (2016) weisen darauf hin, dass Beweisoperatoren verschiedene Auswirkungen auf die Beweisbearbeitungen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern haben können.

Vor diesem Hintergrund wird auch die Frage nach Beweisakzeptanz bzw. nach Akzeptanzkriterien zu einem Aspekt sozio-mathematischer Normen (etwa Ufer et al. 2009, S. 33). Heinze und Reiss (2003) stellen hierzu Methodenwissen zum Beweisen auf drei Ebenen vor, die als Normen im Kontext von Beweiskonstruktion und Beweisevaluation von Lernenden berücksichtigt werden müssen (vgl. hierzu Ufer et al. 2009, S. 35). Das ‚Beweisschema' betrifft die Verwendung deduktiver Schlüsse innerhalb der einzelnen Beweisschritte. Bei der ‚Beweisstruktur' geht es um die Gesamtkonzeption eines Beweises: Das Behauptete wird ausgehend von gegebenen Voraussetzungen gezeigt. Der Fokus auf die ‚Beweiskette' sichert schließlich das logische Voranschreiten innerhalb der Beweisstruktur. Was in Bezug auf diese drei Facetten von Methodenwissen nun gefordert bzw. erlaubt ist, kann dabei als Frage sozio-mathematischer Normen aufgefasst werden.

3. Forschungsmethode

In diesem Kapitel wird zunächst das Konzept des Design-Based Research vorgestellt (Abschnitt 3.1) und anschließend als die hier verwendete Forschungsmethode legitimiert und begründet (Abschnitt 3.2). Im letzten Abschnitt des Kapitels wird schließlich die Genese der innerhalb der Effektivitätsstudie der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung (WS 2014/15) verwendeten Testinstrumente beschrieben (Abschnitt 3.3). Hierdurch wird bereits ein Beitrag für das in Abschnitt 1.4.1 formulierte Ziel geleistet, Testinstrumente für die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden zu entwickeln.

3.1 Design-Based Research

Die Forschungsmethode des Design-Based Research (DBR) wird häufig auf die Arbeiten von Brown (1992) und Collins (1992) zurückgeführt, die sich mit der Entwicklung von Designexperimenten und den damit verbundenen theoretischen und methodischen Belangen auseinandersetzten. Seit den 1980-er Jahren wurden in der Entwicklung dieser Forschungsrichtung immer wieder verschiedene Begrifflichkeiten geprägt, innerhalb derer verschiedene Aspekte in den Vordergrund gerückt werden oder welche sich auch aufgrund ihrer historischen Entwicklung erklären lassen (s. hierzu Bakker & van Eerde 2015, S. 436). Übergreifend kann Design-Based Research als eine Forschungsmethode beschrieben werden, in der verschiedene (Forschungs-) Ansätze kombiniert werden, um im Kontext der Beforschung einer Lehrinnovation diese zu verbessern, Gelingensbedingungen für diese zu beschreiben und zu testen und zu einer entsprechenden Theoriebildung beizutragen (vgl. Barab & Squire 2004, S. 2; Bakker & van Eerde 2015, S. 431). Plomb (2010) beschreibt diese Forschungsrichtung wie folgt:

> the systematic study of designing, developing and evaluating educational interventions (such as programs, teaching-learning strategies and materials, products and systems) as solutions for complex problems in educational practice, which also aims at advancing our knowledge about the characteristics of these interventions and the processes of designing and developing them. (Ebd., S. 9)

Der Ausgangspunkt entsprechender Forschungen sind komplexe Problemstellungen der pädagogischen Praxis, für die es bisher keine Lösungen gibt (Barab & Squire 2004, S. 4; Bakker & van Eerde 2015, S. 430). Hierfür wird ein (innovatives) Lehr-/Lernszenario konstruiert, durchgeführt, evaluiert und modifiziert. Im Mittelpunkt steht dabei nicht eine bloße Evaluation der Lehrinnovation; das Erkenntnisinteresse liegt in dem Verstehen der Gelingensbedingungen des Lehr-/Lernszenarios, der (Weiter-) Entwicklung theoretischer Aspekte und dem Herausarbeiten der auf andere

Lernsituationen übertragbaren Erkenntnisse (siehe etwa Barab & Squire 2004, S. 11 oder Plomp 2010, S. 18). Diese gleichzeitige Entwicklung praktischer und theoretischer Aspekte erfolgt dabei innerhalb eines (mehrphasigen) zyklischen Prozesses (vgl. Abbildung 9). Ausgangspunkt stellt die Vorbereitung und Planung des Lehr-/Lernszenarios dar, welche auf verschiedenen theoretischen Grundlagen und Hypothesen basiert. Im Kontext der Durchführung werden diese Hypothesen durch begleitende Forschung und Lehrerfahrung mit neuen Erkenntnissen konfrontiert. In einer retrospektiven Analyse werden die erhaltenen Erkenntnisse schließlich ausgewertet, was in der Vorbereitung der nächsten Durchführung zu verschiedenen Modifikationen führt. Innerhalb dieses zyklischen Prozesses werden somit konsequent theoretische und praktische Aspekte berücksichtigt und weiterentwickelt.

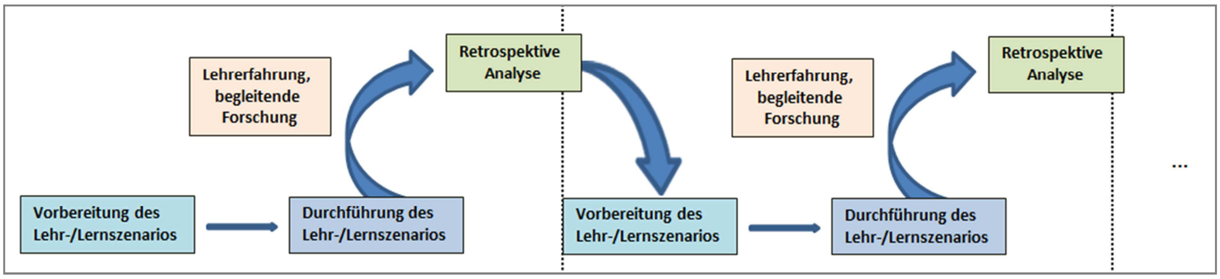


Abbildung 9: Zyklischer Forschungsprozess im Design-Based Research

Der Ausgangspunkt eines DBR-Projekts lässt sich als eine Art Gedankenexperiment verstehen: Ein Lehr-/Lernszenario wird auf der Basis von verschiedenen (didaktischen, fachlichen, pädagogischen etc.) Annahmen und Intentionen geplant. Im Kontext der Durchführung des Szenarios werden diese Hypothesen mit der konkreten Unterrichtspraxis konfrontiert, wobei aus der begleitenden Forschung Ergebnisse hervorgehen, auf deren Grundlage die verschiedenen Hypothesen überprüft und ggf. verworfen, bestätigt oder modifiziert werden. Ein Charakteristikum dieser Forschungsmethode ist dabei, dass das Lehrszenario zwar vor dessen Durchführung formuliert wird, dieses aber bereits während des laufenden Prozesses modifiziert werden kann: Bereits im Rahmen der Durchführung können Änderungen vorgenommen werden, die zu dessen Gelingen beitragen sollen. Der Forschende kann dabei direkt in das Experiment involviert sein, um entsprechende Änderungen vornehmen zu können. Daher erweist sich diese Forschungsmethode als besonders praxisorientiert und adaptiv. Alle im Kontext der Durchführung erhaltenen Erkenntnisse werden schließlich im Rahmen der retrospektiven Analyse ausgewertet und mit den Ausgangsintentionen abgeglichen. Die daraus resultierenden Theorien, die Erklärungsansätze dafür liefern, wie und warum ein entsprechendes Szenario gelingen kann und wie diese Aspekte in andere Bereiche übertragen werden können, zeichnen sich dabei durch eine gewisse Bescheidenheit aus („are humble“; Cobb et al. 2003, S. 9), da sich diese lokalen Theorien auf entsprechende domänenspezifische Lernprozesse beziehen (vgl. Cobb et al. 2003, S. 9; Plomp 2010, S. 19).

Cobb et al. (2003) führen fünf charakteristische Merkmale des DBR an, welche diese Forschungsmethode von anderen abgrenzt. Diese Merkmale werden im Folgenden paraphrasiert:

(1) **Theorieentwicklung**
Das Ziel entsprechender Forschungsarbeiten ist die Entwicklung von Theorien, wie das Lernen in einer bestimmten Domäne gelingen kann und welche Mittel zu dessen Unterstützung beitragen können.

(2) **Der interventionistische Charakter**

Gegenstand der Forschung ist die Durchführung einer Lehrinnovation, deren Erfolg und Nutzen als Intervention in einem realen Kontext beforscht werden soll. Aus der Fülle verschiedener Aspekte müssen dann diejenigen ausgewählt werden, die im Rahmen der Forschung unter dem Blickwinkel bestimmter Theorien genauer untersucht werden sollen.

(3) **Die Verzahnung von prospektiven und retrospektiven Elementen**
Prospektive und retrospektive Momente werden in DBR-Studien in besonderer Weise im Forschungsprozess berücksichtigt. Das Designexperiment wird auf der Basis verschiedener Theorien und Hypothesen geplant und durchgeführt. Hieraus resultieren gleichsam Annahmen über dessen Auswirkungen. Diese vermuteten bzw. vorhergesagten Ergebnisse werden immer wieder mit aktuell erhaltenen Befunden konfrontiert, was zu einer retrospektiven (Neu-) Bewertung der zu Grunde gelegten Hypothesen führt. DBR hat somit auch eine erklärende und eine beratende Funktion: Sie liefert theoretische Einsichten, wie bestimmte Formen des Lehrens und Lernens verbessert werden können. Dieser Forschungsprozess mit einer übergreifenden vorhersagenden bzw. beratenden Ausrichtung beinhaltet dabei verschiedene Stufen des Forschungsprozesses, welche verschiedene Ausrichtungen (deskriptiv, vergleichend, evaluierend) haben können.

(4) **Das iterative Design**
Die prospektiven und retrospektiven Momente des DBR konstituieren das charakteristische iterative Design in der Abfolge von (Re-) Design, Durchführung und Analyse. Die ständige Neubewertung von bestehenden Annahmen führt zu deren iterativen Ausschärfung bzw. Verbesserung. Es ergibt sich somit ein iterativer Designprozess, der aus mehreren Forschungszyklen besteht.

(5) **Die pragmatische Ausrichtung der erarbeiteten theoretischen Aspekte**
Die in einem DBR-Kontext erarbeiteten Theorien haben eine pragmatische Ausrichtung: Sie sind domänspezifisch und resultieren aus einem realen Szenario, in dem sie sich bereits bewährt haben.

Im Rahmen dieses Forschungsansatzes gilt es allerdings verschiedene Grundprobleme zu berücksichtigen (vgl. hierzu Barab & Squire 2004, S. 2; Plomp 2010, S. 30ff.; McKenney et al. 2006, S. 83f.), welche nun dargestellt werden.

Die Involviertheit des Forschers

Durch die aktive Rolle des Forschers bei der Entwicklung der Lehrinnovation, ggf. deren Durchführung, Evaluation und Modifizierung wird die Objektivität der Forschung in Frage gestellt. Plomp (2010, S. 30ff.) führt verschiedene Maßnahmen an, um die Qualität entsprechender Forschungen zu erhöhen. Diese werden im Folgenden paraphrasiert:

a) Die Rolle und der Einfluss des Forschers auf das Projekt müssen offengelegt werden.
b) Die erhaltenen Forschungsergebnisse müssen durch weitere Forschung bestätigt werden.
c) Die Interpretation der Forschungsergebnisse sowie die auf deren Basis vorgenommenen Modifikationen müssen stetig kritisch reflektiert und mit außenstehenden Personen diskutiert werden.
d) Die verschiedenen im Kontext des Gesamtprojekts unternommenen Forschungsprojekte müssen allgemeinen Gütekriterien genügen und, wenn möglich, verschiedene Forschungsmethoden umfassen.

e) Alle zum Verständnis des Forschungsprojekts wichtigen Aspekte müssen systematisch dokumentiert, nachvollziehbar dargestellt und reflektiert werden.
f) Der Nutzen und die Effektivität der Lehrinnovation müssen empirisch getestet werden.

Der reale Kontext der Forschung

Durch die Durchführung der Lehrinnovation in einem realen Kontext haben viele verschiedene Faktoren Einfluss auf deren Auswirkungen und Gelingen. Wie oben beschrieben wurde, müssen die verschiedenen Aspekte herausgestellt werden, welche im Fokus der Forschungsarbeit stehen.

Anpassungsfähigkeit

Die Weiterentwicklung eines Lehr-/Lernszenarios im Kontext des DBR erfolgt immer in dem Spannungsfeld von Veränderung und Konstanz. Hierbei werden gezielt bestimmte Aspekte modifiziert, während andere beibehalten werden. Anpassungsfähigkeit ergibt sich hierbei zunächst durch die Akzeptanz von notwendigen Abweichungen vom Ausgangsplan. Die Anpassungsfähigkeit betrifft aber auch den Forscher, da er seine Intentionen mit den Meinungen und Interpretationen anderer Beteiligter oder Außenstehender in Einklang bringen bzw. offen für eventuell konträre Meinungen sein muss.

Nachdem der Forschungsansatz des DBR, seine Ausrichtung, Charakteristika und Problemfelder beschrieben wurden, wird in dem nächsten Abschnitt dessen Anwendung auf das vorliegende Forschungsprojekt beschrieben und gleichsam legitimiert.

3.2 Design-Based Research als der vorliegende Forschungsansatz

Die übergeordneten Ziele der vorliegenden Forschungsarbeit wurden bereits in Abschnitt 1.4 formuliert:

(1) die forschungsbasierte (Weiter-) Entwicklung einer Lehrveranstaltung, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und hierbei in einem besonderen Maße das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen‘ unter dem Aspekt der doppelten Diskontinuität fokussiert, und
(2) einen Beitrag zu einer empirisch begründeten Instruktionstheorie für das Lernen in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ an der Universität zu leisten.

Wie in Abschnitt 1.1 dargestellt wurde, erweist sich das Thema ‚Begründen und Beweisen‘ im Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität als ein komplexes und mehrdimensionales Problemfeld, in dem verschiedene Aspekte berücksichtigt werden müssen. Hierzu gehören u.a. das Einleben in eine neue Fachkultur der Mathematik, das Erlernen neuer (strenger) Argumentationsweisen und Beweistechniken, der korrekte Umgang mit der fachmathematischen Symbolsprache und das Erlernen schuladäquater Begründungs- und Beweisformen. Folglich wird in dieser Arbeit eine komplexe Problemstellung der Praxis fokussiert, für die es bisher keine Lösung gibt.

Neben der durch Forschungsergebnisse und Lehrerfahrung geleiteten (Weiter-) Entwicklung dieser Lehrveranstaltung stehen ferner die theoretische Analyse und Beschreibung des Wirkprozesses im Fokus: Welche Faktoren wirken sich wie und warum für das ‚Gelingen‘ des Lehr-/Lernszenarios aus?

Diese Entwicklungsarbeit an der Lehrveranstaltung umfasst dabei konzeptionelle Arbeit, die Bereitstellung von entsprechenden Lehr-/Lernmaterialien und Testinstrumenten und die (Weiter-) Entwicklung von theoretischen Aspekten. Der Forschungsansatz des Design-Based Research erweist sich hier als adäquater Rahmen, da mithilfe dieser Forschungsrichtung komplexe pädagogische Problemstellungen in einem weiteren, ganzheitlichen Sinn in Angriff genommen werden können und gleichzeitig ein Beitrag zur Theorieentwicklung geleistet wird: „The main objective of design research ist to develop theories together with instructional materials“ (Bakker 2004, S. 38).

Die Gestaltung der Lehrveranstaltung orientiert sich an der Grundidee der „Elementarmathematik als Prozess“, wie es in Abschnitt 1.2.3 dargestellt wurde. Weitere Leitprinzipien für die Gestaltung konnten innerhalb des ersten Kapitels durch die Betrachtung des Phänomens der doppelten Diskontinuität im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen‘ und durch die Erörterung verschiedener Konzeptionen von Lehrveranstaltungen zur Einführung in die höhere Mathematik mit dem Fokus des Beweisens gewonnen werden.

Diese Forschungsarbeit wird dabei von der Verwendung zweier Theorien geleitet: Die Betrachtung des Beweisens als ‚diagrammatisches Schließen‘ im Sinne von Ch. S. Peirce und die Theorie der sozio-mathematischen Normen. Diese Theorien wurden bereits in den Abschnitten 2.5 und 2.6 dargestellt. Entsprechende theoriegeleitete Analysen und die entsprechende Ableitung geeigneter Maßnahmen betreffen insgesamt die Weiterentwicklung des Lehr-/Lernszenarios und insbesondere die Entwicklung und Bereitstellung von Lernmaterialien, die Interpretation von Forschungsergebnissen und die retrospektiven Analysen der verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung.

Neben der Beschreibung und Analyse des komplexen Problemfeldes ‚Beweisen und Begründen‘ in Bezug auf die Doppelte Diskontinuität (Abschnitt 1.1) und der Herausstellung von Leitprinzipien für die Gestaltung der Lehrveranstaltung (Abschnitt 1.2 und 1.3) steht als Ausgangspunkt der Arbeit die von Rolf Biehler entwickelte erste Version der Lehrveranstaltung. Es sei hier darauf hingewiesen, dass der Autor dieser Arbeit an der ersten Konzeption der Lehrveranstaltung nicht beteiligt war, sondern erst im Rahmen von deren Beforschung mit dem Forschungsprojekt begann. Diese Beforschung und Weiterentwicklung eines bereits bestehenden Konzepts ist dabei eine legitime Variante des DBR (siehe Plomp 2010, S. 15). Bei den folgenden Durchgängen arbeitete der Autor als Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Lehrveranstaltung mit und war somit direkt in das Geschehen involviert. Hierbei ist nicht ungewöhnlich, dass der Forscher selbst aktiv an dem Lehr-/Lernszenario involviert ist; dieser Aspekt erweist sich als Stärke der Forschungsmethode, da mit entsprechenden Justierungen und Optimierungen der Materialien nicht gewartet werden muss, bis ein Forschungszyklus durchlaufen ist, sondern zu jedem Zeitpunkt des Projekts effizient vorgenommen werden kann (vgl. Abschnitt 3.1).

Ein Forschungszyklus umfasst in dem vorliegenden Projekt die Länge eines Jahres, da die Lehrveranstaltung immer im Wintersemester angeboten wurde. Betrachtet werden in dieser Arbeit die vier Forschungszyklen von 2011 bis 2015 (vgl. Abb. 10). Die verschiedenen Abschnitte der Forschungszyklen (Vorbereitung der Lehrveranstaltung, ihre Durchführung, die im Kontext der Durchführung erfolgten Studien und die schließlich retrospektive Analyse eines jeden Durchgangs) werden in Kapitel 5 beschrieben, die letzte hier beschriebene Version der Lehrveranstaltung in Kapitel 6 dargestellt. Der Nutzen und die Effektivität dieser finalen Durchführung wurden im Rahmen einer Effektivitätsstudie umfassend empirisch untersucht und evaluiert. Diese Studie ist Gegenstand des achten Kapitels.

Zu den Gütekriterien Validität und Reliabilität im Design-Based Research

Die **interne Validität** misst sich an der Qualität der Daten und der Schlüssigkeit der daraus abgeleiteten Folgerungen. In Bezug auf die **externe Validität** gilt es, die Verallgemeinerbarkeit der Theorie und die Übertragbarkeit und den Nutzen der Ergebnisse zu diskutieren. Das innerhalb des Projekts erarbeitete Lehr-/Lernszenario, die in diesem Kontext entwickelten Materialien und die herausgearbeiteten Gelingensbedingungen müssen im Hinblick auf ihre Übertragbarkeit befragt werden. Durch die Verwendung der theoretischen Aspekte der Semiotik und der sozio-mathematischen Normen werden die hier erzielten (theoretischen) Ergebnisse bereits in einen weiteren Rahmen gestellt und somit für eine weiter gefasste Adaption geöffnet.

In Bezug auf die durchgeführten Studien gilt es, die **interne Reliabilität,** also die Unabhängigkeit der Datenerhebung und Auswertung von der Person des Forschers zu betrachten. Für die **externe Reliabilität** der Forschung gilt es, die Replizierbarkeit der Ergebnisse unabhängig von der Person des Forschers zu diskutieren. In Rahmen des DBR wurde hierfür der Begriff der „trackability“ geprägt, um die Nachvollziehbarkeit des Erkenntnisverlaufs des Forschers zu beschreiben (Bakker 2004, S. 46). Freudenthal (1991) beschreibt dies wie folgt: „Developmental research means: experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience.” (Freudenthal 1991, S. 161 zitiert aus Bakker 2004, S. 46).

Aus diesem Grund wird auf eine nachvollziehbare Darstellung der Forschung und der daraus gefolgerten Maßnahmen und erhaltenen Erkenntnissen ein entsprechender Wert gelegt. Durch die Ausführungen zu den erfolgten Forschungsprojekten, deren Auswertungen im Rahmen der retrospektiven Analysen und der Beschreibung und Begründung der ergriffenen Maßnahmen in der Lehre soll es dem Leser möglich werden, den Erfahrungsprozess des Autors nachvollziehen zu können.

Die Einhaltung dieser Gütekriterien wird im Rahmen des Kapitels 8 erörtert.

Dass neben den hier aufgeführten Gütekriterien aber ein weiterer Aspekt von zentraler Bedeutung für die Bewertung des Forschungsprojekts ist, soll an dieser Stelle betont werden: „The products of DBR are judged on innovativeness and usefulness, not just on the rigor of the research process […]” (Bakker & van Eerde 2015, S. 432).

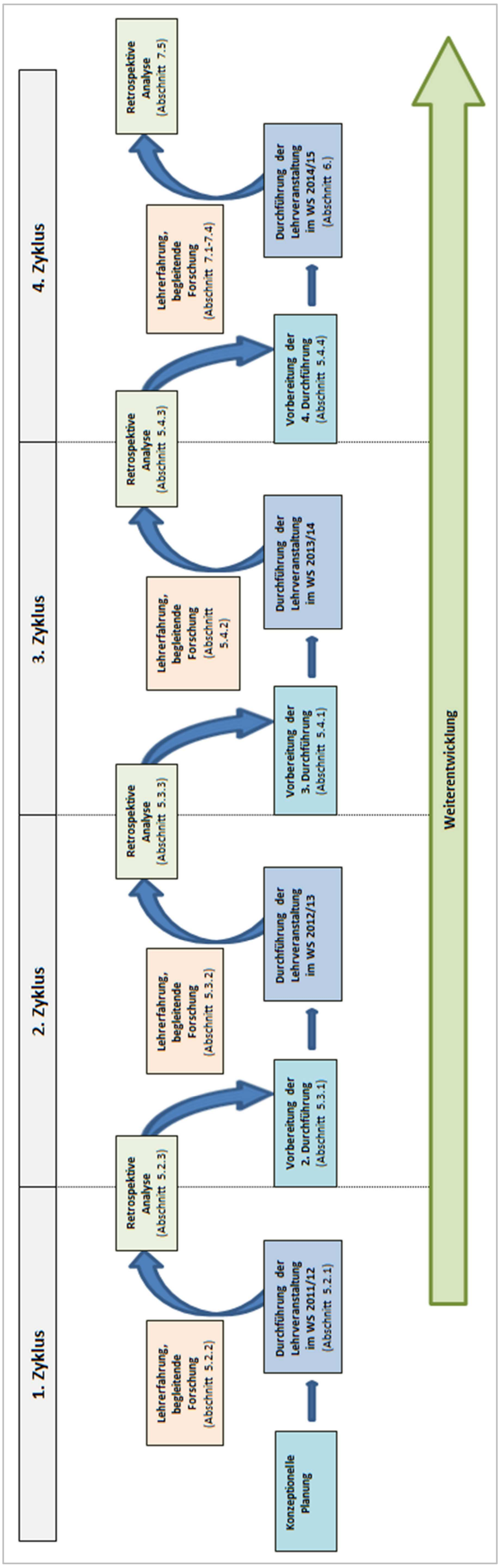


Abbildung 10: Schematische Darstellung des vorliegenden Forschungsprojekts im Sinne des Design-Based Research

3.3 Instrumententwicklung

In diesem Abschnitt wird die Genese der Testinstrumente beschrieben, die im Rahmen der Effektivitätsstudie in der letzten hier thematisierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 eingesetzt wurden. Die Testinstrumente lassen sich hierbei den folgenden Bereichen zuordnen: Erfassung von Begründungskompetenz (3.3.1.), Beweisbewertung als ‚richtiger Beweis' (3.3.2), Beweisakzeptanz (3.3.3), Erfassung schulischer Vorerfahrungen zum Beweisen (3.3.4), Beweispräferenz (3.3.5), Einstellungen zum Beweisen in der Schule, zum Beweisen allgemein und zur Mathematik (Abschnitte 3.3.6–3.3.8), Funktionen von Beweisen (3.3.9), Motivation zum Erlernen von Beweisen und die Selbsteinschätzung des Lernzuwachses in Bezug auf das Beweisen (3.3.10), der Nutzen von Beispielen für den Beweisprozess (3.3.11) und Selbstwirksamkeitserwartung und der empfundene Kompetenzzuwachs (3.3.12).

Bereits die dritte Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 wurde von einer Ein- und Ausgangsbefragung gerahmt, welche als Pilotierung der Testinstrumente für die Effektivitätsstudie im darauf folgenden Jahr fungierte. Die Ergebnisse aus der Pilotierung der Testinstrumente im Wintersemester 2013/14 werden im Folgenden nur soweit dargestellt, wie es zum Nachvollziehen der Entwicklung der Testinstrumente notwendig ist. Die Ergebnisse der Effektivitätsstudie der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 werden in Kapitel 7 dargestellt.

3.3.1 Erfassung von Begründungskompetenz zu Beginn des Studiums

Ausgangspunkt für die Erfassung der Eingangsvoraussetzungen der Studierenden zu der Thematik ‚Begründen und Beweisen' war die Frage danach, ‚wie' Studierende überhaupt begründen und wie ‚gut' sie dies tun. Diese Aspekte werden unter dem Aspekte ‚Begründungskompetenz' zusammengefasst, welcher durch die folgende Aufgabenstellung erfasst wurde:

> Die Summe 11 + 17 ist eine gerade Zahl.
> Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen?
> - Begründen Sie überzeugend!

Diese Aufgabe scheint aus verschiedenen Gründen für die Erfassung einer Begründungskompetenz angebracht: (i) Die Beantwortung der Aufgabe ist mit Grundlagenwissen der Arithmetik bzw. der Algebra möglich, (ii) die Aufgabe ermöglicht unterschiedliche Herangehensweisen und damit verbunden verschiedene Lösungswege unter Nutzung verschiedener Repräsentationsmittel, und (iii) die Behauptung ist leicht verständlich, dabei aber nicht so trivial, dass bei Probanden keine Einsicht in eine zu leistende Verifikation entstehen würde.

Die Aufgabenstellung ist hierbei explizit so gewählt, dass auf formale Darstellungen verzichtet wurde, um nicht den Eindruck entstehen zu lassen, dass hier ein ‚Beweis' unter Nutzung von Buchstabenvariablen gefordert sei. Die Aufgabenformulierung ist an Brunner (2014, S. 193) angelehnt, wobei hier der Zusatz „Begründen Sie überzeugend!" ergänzt wurde. Diese Formulierung über die Angabe eines Beispiels verdeutlicht die zu zeigende Behauptung und öffnet gleichsam den Weg zu weiteren Beispielüberprüfungen und Explorationen, wie dies auch durch die folgende Frage („Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen?") impliziert wird. Dabei wird die der Behauptung immanente Allaussage durch „jede Summe" explizit gemacht. Schließlich wurde der Operator „Begründen Sie überzeugend!" gewählt, um Konnotation mit den Begrifflichkeiten von Argumentation und Beweisen zu umgehen und mit der Aufforderung ‚zu begründen' die Art der

Aufgabenbearbeitung möglichst offen zu lassen[20] (vgl. Abschnitt 2.3). Der Zusatz „überzeugend“ soll dabei implizieren, dass alle notwendigen Teilargumente expliziert werden müssen.

<u>Pilotierung und Auswertung</u>

Die oben beschriebene Aufgabe wurde im Rahmen der Eingangsbefragung zur Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/2014 pilotiert. Ein Teil der Ergebnisse dieser Pilotierung wurde in Kempen und Biehler (2014) veröffentlicht. Die Bearbeitungen wurden dabei nach den folgenden zwei Dimensionen untersucht: (1) Die Qualität der Begründung und (2) die Art der Begründung und charakteristische Fehler.

(1) Das Kategoriensystem zur Erfassung der „Qualität der Begründung“

Die Erarbeitung des Kategoriensystems zur Erfassung der „Qualität der Begründung“ erfolgte im Rahmen einer deduktiv-induktiven Kategorienbildung im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Kuckartz 2012, S. 69). Den Ausgangspunkt bildeten die Kategoriensysteme von Bell (1976) und Recio und Godino (2001). Deren Kategoriensysteme wurden kombiniert und anschließend direkt anhand der vorliegenden Aufgabenbearbeitungen kombiniert, modifiziert, präzisiert und erweitert. Somit wurde im Rahmen der Pilotierung der Aufgabe ein differenziertes Kategoriensystem entwickelt (s. die Spalte Kempen & Biehler (2014) in der Tabelle 1). Für die Auswertung im Rahmen der Untersuchung im Wintersemester 2015/16 wurde dieses Kategorienschema wieder vereinfacht, um die Vergleichbarkeit mit anderen Aufgabenanalysen zu ermöglichen. In der Tabelle 1 wird ein Überblick über die Zusammenhänge der verschiedenen Kategoriensysteme gegeben.

Eine ausführlichere Darstellung des in dieser Arbeit verwendeten Kategoriensystems, in Verbindung mit exemplarischen Ankerbeispielen zu jeder Kategorie, erfolgt im Rahmen der Aufgabenauswertung in Abschnitt 7.2.4.

<table>
<tr><th>Bell (1976, S. 28f.; Hervorhebungen im Original)</th><th>Recio & Godino (2001, S. 86)</th><th>Kempen & Biehler (2014, S. 427ff.)</th><th>in dieser Arbeit</th></tr>
<tr><td colspan="4">Diverses</td></tr>
<tr><td></td><td>The answer is very deficient (confused, incoherent).</td><td>K0: Es wird keine Begründung angegeben</td><td>K0: Es wird keine Begründung angegeben</td></tr>
<tr><td colspan="4">Empirische Begründungen</td></tr>
<tr><td></td><td>The student checks the proposition with examples, without serious mistakes.</td><td>K1: Illustration
Die Gültigkeit der Behauptung wird an verschiedenen Beispielen illustriert.</td><td rowspan="2">K1: „Empirisch“
Beispiele werden – ohne weitere (deduktive) Begründung - als Beleg für die allgemeine Gültigkeit der Behauptung angeführt.</td></tr>
<tr><td>Extrapolation: Truth of general statement inferred from a subset of the relevant cases […]. The basis of the inference is clearly empirical.</td><td>The student checks the proposition with examples, and asserts its general validity.</td><td>K2: Empirische Verifikation
Die Gültigkeit der Behauptung wird aus der Überprüfung von Beispielen abgeleitet.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Deduktive Begründungen</td></tr>
<tr><td>Dependence: Attempts to make a deductive link between data and conclusion, but fails to achieve any higher category.</td><td></td><td></td><td rowspan="2">K2: „Pseudo“
Die genannten Begründungen bestehen aus Zirkelschlüssen, sind redundant, unpassend oder sachlich falsch.</td></tr>
<tr><td>Relevant, general restatement: […] represents the situation as a whole, in general terms, as if aware that a deductive connection exists but unable to expose it.</td><td></td><td>K3: Die Begründung wird durch Nennung des Satzes vollzogen, dass die Summe zweier ungeraden Zahlen immer gerade ist.</td></tr>
</table>

[20] Neue Ergebnisse von Kempen et al. (2016) belegen, dass die Wahl von Operatoren in Beweisaufgaben („Zeigen Sie“, „Beweisen Sie“, „Begründen Sie“ etc.) Auswirkungen auf die Bearbeitungen von Studierenden haben kann.

		K4: Die Begründung wird durch die Paraphrasierung des Satzes vollzogen, dass die Summe zweier ungeraden Zahlen immer gerade ist.	
		K5: Die genannten Argumente sind entweder sachlich falsch oder irrelevant	
Relevant, collateral details: […] mentions relevant aspects which could form part of a proof […] but fails to build them into a connected argument; is fragmentary.		K6: Es werden relevante Aspekte genannt, die für eine Begründung genutzt werden könnten, ohne dabei eine Argumentationskette aufzubauen.	K3: „fragmentarisch" Es werden relevante Aspekte genannt, die für eine Begründung genutzt werden könnten, ohne dabei eine Argumentationskette aufzubauen.
Connected, incomplete: Has a connected argument with explanatory quality, but is incomplete. *Connected*, *S*: failing only because it appeals to facts or principles which are no more generally agreed than the proposition itself […]	The student justifies the validity of the proposition, by using other well-known theorems or propositions, by means of partially correct procedures.	K7: Unvollständige Begründung mit sachlichem Fehler K8: Unvollständige Begründung mit sachlicher Lücke	K4: „Argumentation mit Lücke" Es wird eine korrekte mathematische Argumentation gegeben, welche allerdings eine Lücke enthält, so dass die Ausgangsbehauptung nicht allgemeingültig verifiziert wird.
Complete Explanation: Derives the conclusion by a connected argument from the data and from generally agreed facts or principles.	The student gives a substantially correct proof, which includes an appropriate symbolisation.	K9: Vollständige Begründung mit kleinen formalen Mängeln K10: Vollständige Begründung	K5: „Vollst. Argumentation" Die Gültigkeit der Behauptung wird deduktiv mithilfe valider mathematischer Argumente hergeleitet.

Tabelle 1: Übersicht über die Entwicklung des Kategoriensystems zur Analyse von gegebenen Begründungen

(2) Art der Begründung und charakteristische Fehler

Bei dem Aspekt ‚Art der Begründung' geht es um die Frage, mithilfe welcher Argumente die gegebene Behauptung begründet wird und welche etwaigen Fehler mit diesen verschiedenen Begründungsarten verbunden sind. Bei der Betrachtung aller Bearbeitungen konnten verschiedene Arten von Begründungen ausgemacht und zu unterschiedlichen Kategorien zusammengefasst werden. Die in der Pilotierung im Wintersemester 2013/14 herausgearbeiteten ‚Arten von Begründen' und damit verbundenen ‚charakteristischen Fehler' konnten auch bei der Auswertung der Aufgabe im Wintersemester 2014/15 verwendet werden. Die verschiedenen Arten von Begründungen und die damit verbundenen charakteristischen Fehler werden im Rahmen der Auswertung der Aufgabe in Abschnitt 7.2.4 dargestellt.

Die hier beschriebene Aufgabe zur Erfassung von Begründungskompetenz wurde in der Eingangsbefragung und in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2014/15 eingesetzt.

3.3.2 Beweisbewertung als „richtiger Beweis"

Im Kontext des „KLIMAGS"-Projekts (s. Blum et al. 2014) wurden vier Begründungsformen aus der Studie von Healy und Hoyles (2000, S. 401) übersetzt und als single-Choice Items mit den Antwortmöglichkeiten „Beweis"/„kein Beweis" innerhalb eines Tests verwendet. In der KLIMAGS Version wurde die Bearbeitung „Leon" (einzelne Beispielüberprüfungen) durch weitere Berechnungen und die Schlussfolgerung „Es stimmt offensichtlich immer!" ergänzt und die Bearbeitung „Nisha" (korrekte Argumentation mit Buchstabenvariablen) wurde nicht verwendet. Für die vorliegende Studie wurde die Aufgabe aus dem KLIMAGS-Test übernommen, wobei die folgenden Änderungen vorgenommen wurden:

1. Die Bearbeitung „Nisha“ (Healy & Hoyles 2000, S. 401) wurde aus dem Original übernommen und so modifiziert, dass sie stark der korrekten narrativen Begründung („Kate“) ähnelte.
2. Die empirisch induktive Begründung („Leon“) wurde aus der Studie von Healy und Hoyles (2000, S. 401) übernommen, da die weiteren Berechnungen aus der KLIMAGS-Version auch als unzureichender generischer Beweis hätten interpretiert werden können.
3. Die Bewertungskategorien für die ‚Beweise‘ wurden wie folgt formuliert „richtiger Beweis“/„kein richtiger Beweis“. Diese Formulierung sollte Missverständnissen entgegenwirken, die durch die Kategorienbezeichnungen im KLIMAGS-Projekt möglicherweise entstehen könnten. Eine mögliche (falsche) Deutung dieser Kategorien im Kontext der Aufgabenstellung wäre etwa die Frage, ob die Begründung dem Beweisbild des Probanden entspricht, ohne dabei etwaige Fehler in der Bearbeitung zu berücksichtigen.
4. Für alle Bearbeitungstitel wurden deutsche Namen eingesetzt.
5. Schließlich wurde auch die Frage nach der Bearbeitung, die dem eigenen Ansatz am nächsten käme und im schulischen Mathematikunterricht (in der Oberstufe) die beste Note bekommen hätte, aus der Originalstudie (Healy & Hoyles 2000, S. 401) übernommen.

Im Folgenden wird die schließlich verwendete Aufgabe dargestellt.

In der Oberstufe gab der Mathematiklehrer Katja, Leon, Maria und Nina die Aufgabe, die folgende Behauptung zu beweisen:

Wenn man drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen miteinander multipliziert, ist das Ergebnis immer ein Vielfaches von 6.

Es folgen die Antworten der 4 Schüler(innen):

	richtiger Beweis	kein richtiger Beweis
Katjas Antwort Ein Vielfaches von 6 muss die Teiler 3 und 2 besitzen. Wenn man 3 aufeinanderfolgende Zahlen hat, dann ist eine davon ein Vielfaches von 3, denn jede dritte Zahl ist durch 3 teilbar. Außerdem ist mindestens eine Zahl gerade, also ein Vielfaches von 2 (da jede zweite Zahl gerade ist). Wenn man die drei aufeinanderfolgenden Zahlen multipliziert, besitzt das Ergebnis also sowohl den Teiler 3 als auch den Teiler 2.	☐	☐
Leons Antwort $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$	☐	☐
Marias Antwort x ist eine beliebige natürliche Zahl $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) = (x^2+x) \cdot (x+2) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x$ Kürzen der x's ergibt $1 + 1 + 2 + 2 = 6$	☐	☐
Ninas Antwort Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lässt sich darstellen als: $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$, wobei	☐	☐

n eine beliebige natürliche Zahl ist. Das Produkt ist durch 2 teilbar, denn: 1. Fall: n ist eine gerade Zahl: Dann ist n durch 2 teilbar und somit ist das Produkt auch durch 2 teilbar. 2. Fall: n ist eine ungerade Zahl: Dann ist aber (n+1) eine gerade Zahl, also durch 2 teilbar, und somit ist auch das Produkt durch 2 teilbar. Das Produkt ist auch durch 3 teilbar, denn bei drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer genau eine Zahl durch 3 teilbar. Da das Produkt $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist es auch durch 6 teilbar und somit ein Vielfaches von 6.		

Welcher der obigen Beweise käme Ihrer Beweisführung am nächsten? ☐

Für welchen Beweis hätte Ihr Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note gegeben? ☐

Diese Aufgabe wurde in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14 erfolgreich pilotiert und unverändert in die Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 übernommen.

3.3.3 Beweisakzeptanz

Die Ausgangslage für die Erfassung von Beweisakzeptanz war das Interesse daran, inwiefern generische Beweise überhaupt von den Studierenden akzeptiert werden. Hierfür war die Neuentwicklung von entsprechenden Items erforderlich. Im Rahmen der Eingangsbefragung im Wintersemester 2013/14 sollte ein korrekter generischer Beweis anhand der folgenden Merkmale bewertet werden:

a) Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

Die Begründung …								
… beantwortet die Frage allgemein (generalisiert) und schlüssig.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
… zeigt die Behauptung lediglich für einzelne Beispiele, aber nicht allgemein.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
… setzt voraus, was man zeigen soll.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig

Tabelle 2: Items zur Erfassung der Beweisakzeptanz im Wintersemester 2013/14

b) Die obige Argumentation ist ein Beweis: ☐ Ja ☐ Nein

weil:

Bei der Auswertung der Daten wurde allerdings deutlich, dass die verwendeten Aussagen und das Bewertungsschema als Beweis („ja“/“nein“) für eine wirkliche Erfassung einer Beweisakzeptanz nicht differenziert genug erschienen. Bei den Bewertungen der ersten beiden Aussagen durch die Studierenden wurden teilweise Inkonsistenzen deutlich, die sich durch dieses relativ schlichte

Fragenformat nicht erklären ließen. So stimmten einige Studierenden beiden Aussagen zu, dass die gegebene Begründung sowohl die Frage (hier: eine Allaussage) allgemein und schlüssig beantwortet und dass diese die Behauptung lediglich für einzelne Beispiele, aber nicht allgemein zeigt. Auch ließen sich keine Zusammenhänge zwischen den Bewertungen der drei Items zur Bewertung auf den Likert-Skalen und der Frage, ob die obige Argumentation ein Beweis ist („ja"/"nein") ausmachen. In den wenigen Freitextantworten, die überhaupt gegeben wurden, wurden zu oberflächliche Antworten gegeben, als dass man sie hätte systematisch auswerten können.

Bei der Weiterentwicklung dieser Items wurden die theoretischen Betrachtungen einbezogen, die in Abschnitt 2.4.2 dargestellt wurden. Beweisakzeptanz scheint übergeordnet durch das Zusammentreffen zweier Aspekte konzeptualisierbar zu sein: Das Ausmaß, inwieweit durch einen Betrachter verschiedene Funktionen von Beweisen innerhalb eines Beweises wahrgenommen werden, und inwiefern das vorliegende Beweisprodukt dem subjektiven Bild von ‚Beweis' entspricht. Die (Weiter-) Entwicklung der Testinstrumente für die Erfassung von Beweisakzeptanz orientierte sich zunächst an der Studie von Healy und Hoyles (2000). Dort sollten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Begründungen u. a. anhand der folgenden Aussagen beurteilen (ebd., S. 403; Hervorhebungen im Original):

2. Shows that the statement is **always true**
3. **Only** shows that the statement is true for some […] numbers
4. Shows you **why** the statement is true

Diese drei Aussagen bildeten die Basis für die Neukonstruktion der Items, die in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14 pilotiert wurden. Dort sollten vier Beweise anhand der folgenden Aussagen auf einer sechsstufigen Likert-Skala (s.o.) bewertet werden:

(1) Der *[Name der Beweisform]* reicht mir aus, um mich völlig von der Gültigkeit der Behauptung zu überzeugen.
(2) Die Argumentation im *[Name der Beweisform]* erklärt mir, warum die Behauptung gilt.
(3) Der *[Name der Beweisform]* sichert die Gültigkeit der Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten.
(4) Ich betrachte den Einsatz dieser Beweisform im schulischen Unterricht als sinnvoll.

Die vorgelegten Beweise waren hierbei die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung (Generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der formale Beweis), konstruiert zu der Behauptung, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist. Die Reihenfolge dieser vier zu bewertenden Beweise wurde dabei systematisch permutiert. Durch die Aussagen (1) und (3) wird dabei die in Abschnitt 2.1.7 und 2.4.2 herausgearbeitete Unterscheidung von subjektiver und objektiver Überzeugung aufgegriffen.

Bei der Berechnung der Reliabilitätswerte der durch die vier Items gebildeten Skalen wurde deutlich, dass das vierte Item nicht zu dem durch die ersten drei Items gebildeten Konstrukt der Beweisakzeptanz beiträgt. Dies scheint auch inhaltlich nachvollziehbar, da die persönliche Akzeptanz einer Beweisform nicht mit subjektiven Einstellungen zum Mathematikunterricht in Beziehung stehen muss. Die Reliabilitätswerte der durch die Items ein bis drei gebildeten Skalen zur Beweisakzeptanz werden in der Tabelle 3 dargestellt.

Skala	Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen	Akzeptanz des formalen Beweises	Akzeptanz des generischen Beweises mit Punktmustern	Akzeptanz des Beweises mit geometrischen Variablen
Cronbachs Alpha	0,699	0,767	0,849	0,831

Tabelle 3: Reliabilitätswerte der Skalen zur Beweisakzeptanz in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14

Schließlich wurden Items formuliert, um auch die funktionalen Aspekte Validität, Verifikationsleistung und Passung mit einem vorliegenden Beweisbild abzubilden, und weitere, um die Fehlinterpretation der Beweise als bloße Beispielbetrachtungen herauszufordern. Insgesamt wurden zehn Aussagen zur Bewertung auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimme überhaupt nicht zu … [6] stimme voll zu) formuliert, mit denen die Beweisakzeptanz der Studierenden erfasst werden sollte:

Die Begründung …

1. … zeigt, dass die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr ist.
2. … zeigt die Behauptung lediglich für einzelne Beispiele, aber nicht allgemein.
3. … ist nicht allgemeingültig, da es immer noch Gegenbeispiele geben könnte.
4. … überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist.
5. … ist ohne die Verwendung von Buchstabenvariablen nicht allgemeingültig.
6. … zeigt, dass die Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten wahr ist.
7. … erklärt mir, warum die Behauptung korrekt ist.
8. ... müsste formaler dargestellt sein, um mich voll zu überzeugen.
9. … besteht nur aus der Überprüfung einzelner Fälle, ist aber keine allgemeine Begründung.
10. … ist ein korrekter und gültiger Beweis.

Im Rahmen einer erneuten Pilotierung des Aufgabenformats (innerhalb der Lehrveranstaltung „Modellieren, Größen, Daten, Zufall 1“ für Grundschullehramtsstudierende im Sommersemester 2014; n=73) wurden auch verschiedene Beweise verwendet, um deren Eignung als Bewertungsgegenstände zu evaluieren. Es wurden jeweils die drei verschiedenen Beweisformen (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern und Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen) zu den zwei folgenden Behauptungen verwendet: „Die Summe aus einer geraden natürlichen Zahl und ihrem Dreifachen ist immer durch 8 teilbar“ und „die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 5 teilbar“.

Die Ergebnisse der Pilotierung zeigten, dass die Items 1-10 (s.o.) differenzierte Betrachtungen für eine Beweisbewertung ermöglichen. Aufgrund einer durchgeführten explorativen Faktoranalyse wurden die Skalen zur Beweisakzeptanz aus den Items 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 und 10 gebildet[21]. Die daraus resultierenden Skalen zur Beweisakzeptanz wiesen hohe Reliabilitätswerte auf (s. Tabelle 4). Im Rahmen dieser Faktoranalyse wurde auch deutlich, dass durch eben diese Items genau eine Skala gebildet wird.

[21] Die Items zwei, drei und neun wurden bei der Berechnung der entsprechenden Skalenwerte jeweils umgepolt. Das Auslassen der Items fünf und acht bei der Konstruktion der Skalen zur Akzeptanz ist auch inhaltlich schlüssig, da die Aussagen „ist ohne die Verwendung von Buchstabenvariablen nicht allgemeingültig“ (Nummer fünf) und „müsste formaler dargestellt sein, um mich voll zu überzeugen“ (Nummer acht) eher als subjektive Momente bei einer Beweisbetrachtung zu bezeichnen sind und nicht als Charakteristika einer speziellen Beweisform.

Skala	Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen	Akzeptanz des generischen Beweises mit Punktmustern	Akzeptanz des Beweises mit geometrischen Variablen
Cronbachs Alpha	0,893	0,825	0,875

Tabelle 4: Reliabilitätswerte der Skalen zur Beweisakzeptanz aus der Pilotierung im Sommersemester 2014

Auch in dieser Studie wurden eine Freitextfrage für die Nennungen ‚Sonstiger Anmerkungen' gestellt. Nachdem auch hierbei die Studierenden in den meisten Fällen nur ihre Bewertungen der gegebenen Aussagen paraphrasierten, wurden Freitextaufgaben im Kontext dieser Aufgabenstellung nicht mehr verwendet.

Schließlich stellte sich die Frage, ob vier verschiedene Beweisformen zu der gleichen Behauptung oder zu unterschiedlichen Behauptungen zur Bewertung ausgegeben werden sollten. Die erste Variante scheint dabei den Vorteil zu bieten, dass die Beweisbewertungen nicht durch unterschiedliche Sachverhalte beeinflusst werden. Als großer Nachteil erschien dabei aber die Möglichkeit, dass sich bei den Probanden durch das Lesen von vier Beweisen zu nur einer Behauptung automatisch ein gesteigertes Empfinden bzgl. der Gültigkeit der Behauptung einstellen könnte und sich somit die Akzeptanten der Beweise gegenseitig beeinflussen würden. Diesem Aspekte hätte man durch Permutation der Beweise in verschiedenen Testheften entgegenwirken können, was dabei aber die jeweilige Stichprobengröße ungünstig dezimiert hätte. Die zweite Variante, die vier verschiedenen Beweisformen zu unterschiedlichen Behauptungen anzugeben, erschien dabei insgesamt als ‚kleineres Übel'. Nun konnte nicht mehr von einer Akzeptanzbeeinflussung der Beweise untereinander ausgegangen werden; die getätigten Akzeptanzbewertungen können dabei aber nicht ausschließlich auf die gegebene Beweisform zurückgeführt, sondern müssen vor dem Hintergrund verschiedener Sachverhalte vorsichtig interpretiert werden.

Schließlich wurden die folgenden vier verschiedenen Beweise für die Bewertungen ausgewählt und mithilfe von drei Mitarbeitern der Mathematikdidaktik an der Universität Paderborn erneut pilotiert:

1. Ein generischer Beweis mit Zahlen zu der Behauptung: „Addiert man zu einer ungeraden natürlichen Zahl ihr Doppeltes, so ist die Summe immer ungerade." (s. Abb. 11 oben links)
2. Ein generischer Beweis mit Punktmustern zu der Behauptung: „Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 5 teilbar." (s. Abb. 11 unten links)
3. Ein formaler Beweis zu der Behauptung: „Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: „Wenn b ein Vielfaches von a ist und c ein Vielfaches von a ist, dann ist auch (b+c) ein Vielfaches von a." (s. Abb. 11 oben rechts)
4. Ein Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen zu der Behauptung: „Quadriert man eine gerade Zahl, so ist das Ergebnis immer durch 4 teilbar." (s. Abb. 11 unten rechts)

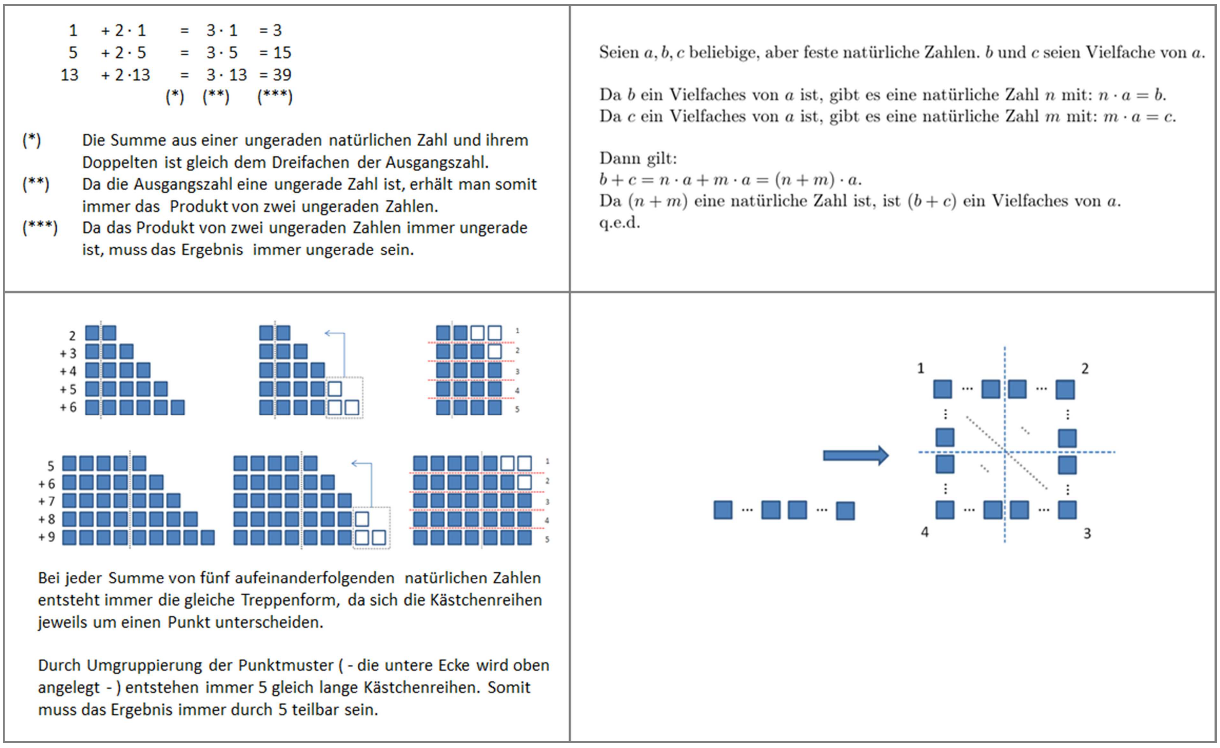


Abbildung 11: Die für die Beweisbewertungen verwendeten Beweise: oben links: ein generischer Beweis mit Zahlen, unten links: ein generischer Beweis mit Punktmustern, oben rechts: ein formaler Beweis, unten rechts: ein Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen

Schließlich wurden diese vier verschiedenen Beweise zur Bewertung anhand der zehn oben aufgeführten Aussagen in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 eingesetzt.

3.3.4 Erfassung der schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen

Der Frage nach schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen wird auch in der Studie von Mingus und Grassl (1999) und Hemmi (2006) nachgegangen (s. Abschnitt 2.4.1). Während Mingus und Grassl (1999) erheben, in welchen Kontexten Lehramtsstudierende Beweise in ihrer Schulzeit kennengelernt haben und für welche Schulstufen Beweise geeignet seien, sollen in der Studie von Hemmi (2006) Studienanfänger Aussagen zu schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen auf einer fünfstufigen Likert-Skala bewerten (vgl. Abschnitt 2.4.1). Im Unterschied dazu sollte in der vorliegenden Untersuchung thematisiert werden, wie viele Beweise die Studierenden nach eigenen Angaben in ihrer Schulzeit gesehen und ggf. auch selbst entwickelt haben. Für die Erfassung der schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen wurden daher in der Pilotierung der Eingangsbefragung (WS 13/14) die folgenden Fragen gestellt:

(1) Wie viele Beweise haben Sie in der Schule in der Sekundarstufe 1 (Klasse 5 - 9 bzw. Klasse 5 – 10) kennengelernt?

☐ 0 ☐ 1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-20 ☐ mehr als 20

(2) Wie viele Beweise haben Sie in der Schule in der Sekundarstufe 2 (Klassen 10 - 12 bzw. EF, Q1 und Q2) kennengelernt?

☐ 0 ☐ 1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-20 ☐ mehr als 20

(3) Wie viele Beweise haben Sie in Ihrer Schulzeit selbst entwickelt (gefunden und aufgeschrieben)?

☐ 0 ☐ 1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-20 ☐ mehr als 20

(4) Nennen Sie mathematische Aussagen/ Sachverhalte, die bei Ihnen in der Schule bewiesen wurden: *[Freitext]*

In der Tabelle 5 werden die relativen Häufigkeiten der Antworten zu den Items (1) bis (3) dargestellt.

	0	1 - 5	6 - 10	11 - 20	mehr als 20
Beweise in Sek. 1 (n=167)	26,35	47,90	19,76	4,19	1,8
Beweise in Sek. 2 (n=169)	8,88	44,38	30,77	10,65	5,33
Beweise selbst entwickelt (n=169)	46,15	39,05	10,65	2,37	1,78

Tabelle 5: Relative Häufigkeiten in Prozent der Angaben zu Beweisen in der Schulzeit

Da der Großteil der Angaben der Studierenden zu den Fragen (1), (2) und (3) bei den Antwortmöglichkeiten „0“ und „1-5“ lag, wurde für die Studie im Wintersemester 2014/15 die folgende Skala zu den Items (1), (2) und (3) verwendet:

☐ 0 ☐ 1-2 ☐ 3-5 ☐ 6-11 ☐ 11- 20 ☐ mehr als 20.

Die Freitextantworten zu dem Item vier wurden nach mathematischen Sachgebieten gruppiert und wiederholte Nennungen gezählt. An dieser Stelle sei genannt, dass in der Pilotierung die folgenden Nennungen die häufigsten waren: (1) Satz des Pythagoras (40 Nennungen), (2) die pq-Formel (18 Nennungen), (3) die Binomischen Formeln (12 Nennungen) und (4) der Satz des Thales (7 Nennungen). Dieses Freitextitem wurde unverändert in die Eingangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 übernommen.

Zu den schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen gehört hierbei auch die Frage, ob die vier im Rahmen der Lehrveranstaltung verwendeten Beweisformen (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der formale Beweis) den Studierenden bereits aus ihrer Schulzeit bekannt sind. Für die Erfassung dieses Aspekts wurde zu den im Kontext der Beweisakzeptanz angeführten Beweisen (vgl. Abbildung 11) gefragt, ob diese Art der Begründung den Studierenden aus der Schule bekannt sei („Ja“/„Nein“). Dieses Frageformat wurde in der Eingangsbefragung WS 2013/14 erfolgreich pilotiert und unverändert in die Eingangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 übernommen.

3.3.5 Beweispräferenz

Ein weiteres (Forschungs-) Interesse galt der Frage, welche der vier behandelten Beweisformen der Lehrveranstaltung von den Studierenden bevorzugt wird und warum. Hierbei sollte unterschieden werden, welchen Beweis sie bevorzugen würden, wenn sie (a) einen Beweis selbst konstruieren müssen, und (b) wenn sie einen vorgelegten Beweis verstehen wollen. Aus diesem Grund wurden in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14 die folgenden Fragen pilotiert:

Wenn Sie selbst einen Beweis konstruieren müssen, welche Beweisform verwenden Sie dann am liebsten? (Einfachnennung)

☐ den generischen Beweis an konkreten Zahlenbeispielen
☐ den formalen Beweis mit Mitteln der Algebra
☐ den generischen Beweis an konkreten Punktmustern
☐ den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen

Weil: *[Freitext]*

Wenn Sie selbst den Inhalt eines vorliegenden Beweises verstehen wollen, welche Beweisform würden Sie bevorzugen? (Einfachnennung)

☐ den generischen Beweis an konkreten Zahlenbeispielen
☐ den formalen Beweis mit Mitteln der Algebra

☐ den generischen Beweis an konkreten Punktmustern
☐ den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen

Weil: *[Freitext]*

Während die Single-Choice Fragen erfolgreich pilotiert wurden, brachten die Auswertungen der Freitextantworten zur Begründung der jeweiligen Beweisauswahl keine neuen Erkenntnisse. In den Antworten wurden ausschließlich Charakteristika der verschiedenen Beweisformen paraphrasiert, wobei es offensichtlich ist, dass die Auswahl eines Beweises aufgrund der subjektiven Bewertung seiner Spezifika erfolgt. Diese Freitextfragen entfielen daher bei der folgenden Untersuchung.

3.3.6 Einstellungen zum Beweisen in der Schule

Im Kontext der Beforschung der Lehrveranstaltung ist von Interesse, wie Studierende zu Beginn ihres Studiums den Lerngegenstand ‚Beweis' und seine Relevanz für den schulischen Mathematikunterricht einschätzen und inwiefern der Besuch der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" ihre Einschätzungen beeinflusst.

In dieser Arbeit werden unter dem Komplex „Einstellungen zum Beweisen in der Schule" die folgenden drei Teilbereiche zusammengefasst: (1) Die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis" für die Schulmathematik, (2) die Bewertung ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten und (3) die Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik.

Teilaspekt (1): Die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis" für die Schulmathematik

Mit dem folgenden Aufgabenformat sollte der Komplex „Einstellungen zum Beweisen in der Schule" im Wintersemester 2013/14 erfasst werden. Für die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis" sollten die Studierenden diese auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) bzgl. der verschiedenen Schulformen und Schulstufen einschätzen:

1. In der Grundschule sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.
2. In der Sekundarstufe 1 sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.
3. In der Sekundarstufe 2 sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.
4. Beweise sollen im Mathematikunterricht der Hauptschule behandelt werden.
5. Beweise sollen im Mathematikunterricht der Realschule behandelt werden.
6. Beweise sollen im Mathematikunterricht auf dem Gymnasium behandelt werden.

Diese Items sind Eigenkonstruktionen und wurden im Rahmen der Ein- und Ausgangsbefragung im Wintersemester 2013/14 erfolgreich pilotiert und unverändert übernommen.

Die Teilaspekte (2) und (3)

Da die im Wintersemester 2013/14 durch obige Items erhaltenen Erkenntnisse als relativ ‚grob' zu bezeichnen waren, sollte der Themenkomplex „Einstellungen zum Beweisen" präzisiert werden, um sich dem angestrebten Konstrukt besser nähern zu können. Es interessierten hierbei insbesondere auch die Einstellungen zu den vermeintlichen Gründen, warum Beweise in der Schule eine eher untergeordnete Rolle spielen, und ob bzw. wie Beweise im Schulunterricht thematisiert werden sollten.

Für die Konstruktion entsprechender Items wurde an die Teilnehmenden eines Workshops auf der Fachtagung „Abiturstandards Mathematik: Bildungspläne und Implementation“ (30.09.2014–01.10.2014) ein Fragebogen mit den folgenden zwei Fragen mit Freitextantworten ausgeteilt.

Beweise spielen im derzeitigen Mathematikunterricht der Schule eine untergeordnete Rolle.

(a) Welche Gründe sehen Sie hierfür? *[Freitextantwort]*
(b) An der Hochschule gibt es die Position, dass die Rolle des Beweisens in dem Mathematikunterricht an der Schule wieder verstärkt werden sollte. Nehmen Sie bitte dazu Stellung, ob Sie diese Forderung für sinnvoll und realisierbar halten.

Aus den 25 Antworten wurden die Aspekte und Gründe ausgewählt, die am häufigsten genannt wurden, einer ‚gängigen‘ Meinung zu entsprechen schienen und die für Erstsemesterstudierende in ihrem Umfang und ihrer Elaboriertheit angemessen erschienen. Diese Facetten wurden wiederum so in Aussagen umformuliert, dass sie als Items eingesetzt werden konnten.

Insgesamt wurde aufgrund dieser Erhebung der Themenkomplex „Einstellungen zum Beweisen in der Schule“ um den folgenden Aspekt (2) ergänzt: „Die Bewertung ‚gängiger‘ Gründe, warum das Beweisen in der Schule eine eher untergeordnete Rolle spielen sollte“. Die entsprechenden Aussagen sollten auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) bewertet werden. Die folgenden Items wurden ohne Pilotierung in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 eingesetzt:

Bitte bewerten Sie die folgenden Aussagen:

In der Schule sollten Beweise eher eine untergeordnete Rolle spielen, …

1. …, da es wichtiger ist, dass die fachlichen Inhalte (Funktionen, Differentialrechnung, Integralrechnung, …) vermittelt und verstanden werden.
2. ..., da das Beweisen im späteren Leben der Schüler/innen keine Anwendung findet (im Gegensatz etwa zur Prozentrechnung).
3. …, da es wichtiger ist, dass die Schüler/innen Rechenaufgaben richtig lösen können.
4. …, da Beweise in der Lebenswelt der Schüler/innen keine Bedeutung haben.
5. …, da Beweise für die Schüler/innen zu schwer nachzuvollziehen sind.
6. …, da es die meisten Schüler/innen überfordern würde, selbstständig Beweise zu finden und aufzuschreiben.
7. …, da die Schüler/innen sowieso wissen, dass die mathematischen Regeln und Sätze richtig sind und sie daher nicht zum Beweisen zu motivieren sind.
8. …, da man im Mathematikunterricht lieber Anwendungen im Alltag behandeln sollte.

Teilaspekt (3): die Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik

Bei der Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung waren verschiedene fachdidaktische Aspekte leitend; hierzu gehörten u.a. die Vermittlung von schuladäquaten Begründungsformen. Für die Evaluation dieses Aspekts wurden die folgenden Items für die Bewertung auf einer sechsstufigen Likert-Skala neu konstruiert und ohne Pilotierung in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 eingesetzt:

1. Generische Beweise sind eine gute Möglichkeit, um Schülern das Argumentieren beizubringen.
2. Der generische Beweis ist eine Beweisform, die es ermöglicht, mathematische Beweise auch in der Haupt- und Realschule zu thematisieren.

3.3.7 Einstellungen zum Beweisen

Wie in Abschnitt 2.4.3 dargelegt wurde, herrscht in der Literatur kein Konsens darüber, was unter ‚Einstellungen zum Beweisen' gefasst werden kann bzw. soll. Unter dem Komplex „Einstellungen zum Beweisen" werden im Kontext dieser Arbeit zwei Teilaspekte betrachtet: (1) das Konstrukt „Beweisaffinität" (Items 1-9, s.u.) und „Einstellungen zum Erlernen der Beweisaktivität".

Im Rahmen der Pilotierung der Items des Bereichs „Einstellungen zum Beweisen", welche die unten aufgeführten Items 1-11 umfasste, wurde deutlich, dass die Items 10 und 11 einen anderen Aspekt als die ersten neun Items zu beschreiben schienen. Aus diesem Grund wurde die oben genannte Zweiteilung des Komplexes „Einstellungen zum Beweisen" vorgenommen und der zweite Teilaspekt für die Erhebung im Wintersemester 2014/15 (ohne weitere Pilotierung) um die Items 12-16 ergänzt. Zu den Teilaspekten im Einzelnen:

(1) Beweisaffinität

Unter dem Teilaspekt „Beweisaffinität" wird hier die subjektive Zuneigung einer Person zum Konstrukt ‚Beweis' gefasst. So untersucht auch Almeida (2000) die Auffassungen („perceptions") von Mathematikstudierenden zum Beweisen. Die unten aufgeführten Items 2, 3 und 5 sind aus dieser Studie entnommen (Almeida 2000, S. 827; dort: Items 7, 10 und 11). Die Items 7 und 8 entstammen Yoo (2008, S. 332), die restlichen Items dieses Teilabschnitts sind Eigenkonstruktionen. Alle Aussagen sollten auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) bewertet werden.

Teilaspekt (1): Beweisaffinität

1. Ich sehe das Beweisen als eine intellektuelle Herausforderung, der ich mich gerne stelle.
2. Ich mag Beweise.
3. Ich sehe keinen Sinn darin, etwas beweisen zu müssen, was sowieso richtig ist.
4. Ich versuche Beweise zu verstehen.
5. Ich weiß, wie man einen Beweis führt.
6. Ich habe Beweise in der Schule vermisst.
7. Beweise werden von Experten konstruiert. Es genügt, wenn man sie nachvollziehen und verstehen kann.
8. Beweise sind etwas, was man selbst auf Grundlage des eigenen Wissens konstruiert.
9. Das Führen von Beweisen ist eine Aufgabe für fortgeschrittene Mathematiker.

Die durch die neun Items gebildete Skala zur Messung „Beweisaffinität" wies einen ausreichend hohen Reliabilitätswert auf (Cronbachs Alpha = 0,781), weshalb die aufgeführten Items unverändert in die Studien des Wintersemesters 2014/15 übernommen wurden.

(2) Einstellungen zum Erlernen der Beweisaktivität

Im Rahmen der Dissertation von Yoo (2008) wurden Lehramtsstudierenden der Mathematik verschiedene Aussagen zum Beweisen vorgelegt, wobei die Studierenden jeweils ihre eigene Position auf einer Skala zwischen zwei entgegengesetzten Positionen einschätzen sollten (vgl. Abschnitt 2.4.3).

Zur Veranschaulichung dieses Frageformats wird ein Item aus der Studie angegeben (Yoo 2008, S. 333):

> To prove the truth of a mathematical statement, (a) there is one accepted best way to do it or (b) there could be several different ways as long as the proof is valid and convincing to your intended audience.

Mostly a			*Both a and b equally*			*Mostly b*	*Neither*
1	2	3	4	5	6	7	8

Aus diesen paarweise entgegengesetzten Aussagen (dort den Items 4, 5, 10 und 12) wurden durch Übersetzung und Anpassung der Formulierungen die folgenden Items 10-16 konstruiert:

Teilaspekt (2): Einstellungen zum Erlernen der Beweisaktivität

10. Beim Beweisen geht es darum, genau den einen richtigen Weg zu finden, um eine Behauptung zu beweisen.
11. Um einen Beweis zu führen, gibt es viele verschiedene Möglichkeiten.
12. Das Vergleichen von verschiedenen Beweisen zu einer Behauptung verwirrt mich mehr, als dass es zusätzliches Verständnis hervorruft.
13. Durch das Nachvollziehen von vorgegebenen Beweisen kann man am besten das Beweisen lernen.
14. Wenn ich Beweise lese, achte ich besonders auf die Inhalte.
15. Verschiedene Beweise zu vergleichen und zu diskutieren, hilft dabei, besser zu verstehen, warum ein Sachverhalt gilt.
16. Um das Beweisen zu erlernen, sollte man Vermutungen aufstellen, diese erforschen und beweisen.

Die sieben Items wurden in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14 pilotiert. Hierbei ging es nicht um die Konstruktion von reliablen Skalen, sondern um die studentischen Bewertungen der verschiedenen konkreten Aussagen. Die Items wurden in die Studien des Wintersemesters 2014/15 übernommen.

3.3.8 Einstellungen zur Mathematik

Das Konzept und die (didaktische) Bedeutung der ‚Einstellungen zur Mathematik‘ wurde bereits in Abschnitt 2.2.2 erörtert. Bei der vorliegenden Arbeit ist von Interesse, inwieweit zwischen den ‚Einstellungen zur Mathematik‘ und verschiedenen Aspekten zum Beweisen (Beweisaffinität, Selbstwirksamkeitserwartung, Beweisakzeptanz etc.) ein Zusammenhang ausgemacht werden kann. Eine Hypothese ist hierbei, dass Lernende mit einer ausgeprägten formalen Sichtweise von Mathematik formale Beweise bevorzugen und Lernende mit einer dynamischen Sichtweise auf Mathematik gerade generische Beweise schätzen.

Ausgangspunkt der Testkonstruktion für die Erhebung der Einstellungen zur Mathematik waren die Arbeiten von Grigutsch et al. (1998) (s. Abschnitt 2.2.2). Aufgrund der nötigen Bearbeitungszeit der hier thematisierten Fragebögen war die Verwendung aller 77 von Grigutsch et al. veröffentlichten Items zur Erfassung der Einstellungen zur Mathematik nicht möglich. Für die Erfassung der Einstellungen zur Mathematik wurde daher in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 die Auswahl an Items eingesetzt, die auch im Rahmen des LIMA-Projekts (Biehler et al. 2012, S. 26ff.) verwendet wurde. Für die Verbesserung der zu erwartenden Reliabilitätswerte wurde der Abschnitt „Mathematik als Toolbox“ um das Item (13) und der Abschnitt „Praktische Relevanz von Mathematik“ um die Items (21) und (23) erweitert (s.u.), da diese Items in der Studie von Grigutsch et al. die nächst höchsten Faktorladungen aufwiesen. Insgesamt wurden die folgenden vier Einstellungen zur Mathematik erhoben: **Mathematik als System** (sieben Items), **Mathematik als Toolbox** (sechs Items), **Mathematik als Prozess** (vier Items) und **Praktische Relevanz von**

Mathematik (sechs Items). Alle Aussagen sollten auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) bewertet werden. Die folgenden Items wurden ohne Pilotierung in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 eingesetzt.

Items zum Aspekt „Mathematik als System"

(1) Ganz wesentlich für die Mathematik sind ihre logische Strenge und Präzision, das heißt das ‚objektive' Denken.
(2) Mathematik ist gekennzeichnet durch Strenge, nämlich eine definitorische Strenge und eine formale Strenge der mathematischen Argumentation.
(3) Kennzeichen von Mathematik sind Klarheit, Exaktheit und Eindeutigkeit.
(4) Unabdingbar für die Mathematik ist ihre begriffliche Strenge, das heißt eine exakte und präzise mathematische Fachsprache.
(5) Mathematik ist ein logisch widerspruchsfreies Denkgebäude mit klaren, exakt definierten Begriffen und eindeutig beweisbaren Aussagen.
(6) Mathematisches Denken wird durch Abstraktion und Logik bestimmt.
(7) Mathematik hat die Ästhetik des Formalen.

Items zum Aspekt „Mathematik als Toolbox"

(8) Mathematik besteht aus Lernen, Erinnern und Anwenden.
(9) Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden.
(10) Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.
(11) Mathematik ist das Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.
(12) Wenn man eine Mathematikaufgabe lösen soll, muss man das richtige Verfahren kennen, sonst ist man verloren.
(13) Mathematik-Betreiben verlangt viel Übung im Befolgen und Anwenden von Rechenroutinen und –schemata.

Items zum Aspekt „Mathematik als Prozess"

(14) In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.
(15) Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.
(16) Wenn man sich mit mathematischen Problemen auseinandersetzt, kann man oft Neues (Zusammenhänge, Regeln, Begriffe) entdecken.
(17) Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden.

Items zum Aspekt „Praktische Relevanz von Mathematik"

(18) Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler/innen wichtig.
(19) Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.
(20) Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.
(21) Mit ihrer Anwendbarkeit und Problemlösekapazität besitzt die Mathematik eine hohe gesellschaftliche Relevanz.
(22) Mathematik hat einen allgemeinen, grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft.
(23) Nur einige wenige Dinge, die man im Mathematikunterricht lernt, kann man später verwenden.

3.3.9 Funktionen von Beweisen

Die verschiedenen Funktionen von Beweisen wurden bereits in Abschnitt 2.1.7 erörtert. Im Kontext der Begleitforschung der Lehrveranstaltung sollte der Frage nachgegangen werden, welche Funktionen von Beweisen Studienanfängerinnen und Studienanfängern bewusst sind und welche Funktionen durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" (besonders) in den Vordergrund gerückt werden.

Für die quantitative Erfassung dieser Bewusstheit von Funktionen von Beweisen war die Erarbeitung von geeigneten Testinstrumenten erforderlich. Die verschiedenen Funktionen von Beweisen, die im

Rahmen dieser Studie untersucht werden sollten, wurden als Aussagen zur Bewertung auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) formuliert.

Im Rahmen der Eingangsbefragung (WS 2013/14) sollte untersucht werden, welche Funktionen von Beweisen den Studierenden bewusst sind. Aufgrund des (vermuteten) erweiterten Erfahrungshorizontes der Studierenden in einem höheren Semester wurde der Fragebogenabschnitt zu „Funktionen von Beweisen“ zweigeteilt: ein erster Abschnitt mit den Aussagen 1-8 (s.u.) und dem Einleitungssatz: „Bei den Beweisen, die ich in der Schule kennengelernt habe, habe ich wahrgenommen, dass Beweis folgende Funktionen haben:“, und ein zweiter Abschnitt mit den Items 1-11 (s.u.) und der Einleitung: „In meinem bisherigen Studium habe ich wahrgenommen, dass Beweise folgende Funktionen haben:“. Die elf verwendeten Aussagen waren hierbei wie folgt:

1. Beweise zeigen, dass bestimmte Sachverhalte und Zusammenhänge sicher gelten.
2. Beweise zeigen, warum etwas gilt.
3. Beweise verdeutlichen die Bedeutungen von mathematischen Begriffen.
4. Beweisen ist eine Standardaufgabe in der Mathematik. Beweise haben sonst keine weitere Bedeutung.
5. Beweise helfen dabei, sich Zusammenhänge und Tatsachen einprägen zu können.
6. Beweise beenden einen laufenden (Forschungs-) Prozess.
7. Beweise sollen bei den Studierenden ein Verständnis erreichen, warum etwas wahr ist.
8. Beweise erzeugen mathematisches Verständnis.
9. In Beweisen wird mathematisches Wissen systematisiert.
10. In Beweisen wird neues Wissen entdeckt.
11. In Beweisen wird mathematisches Wissen kommuniziert.

In der folgenden Ausgangsbefragung (WS 2013/14) wurde der vollständige Abschnitt mit elf Items allen Studierenden zur Bewertung vorgelegt. Bei der Auswertung der Daten traten die folgenden Phänomene auf:

1. Bei den Bewertungen der verschiedenen Funktionen von Beweisen lagen Deckeneffekte vor; die Studierenden stimmten fast ausschließlich mit einer Bewertung von „5“ oder „6“ den Aussagen zu, dass Beweise die verschiedenen Funktionen haben können.
2. Von der Ein- zur Ausgangsbefragung zeigten sich insgesamt nur minimale Veränderungen der einzelnen Bewertungen, was z.T. auf das Phänomen der Deckeneffekte der Bewertungen zurückgeführt werden kann. Auch bei der Betrachtung der gepaarten Daten von der Ein- zur Ausgangsbefragung wurden keine bzw. nur minimale (systematische) Veränderungen deutlich. Dies könnte bedeuten, dass durch die Lehrveranstaltung bei den Studierenden keine Veränderungen bzgl. der wahrgenommenen Funktionen von Beweisen eingetreten sind. Naheliegender erschien allerdings die Vermutung, dass die Studierenden am Ende der Lehrveranstaltung ihre Einschätzungen auf einer anderen Wissensgrundlage vornehmen und die Bewertungen von Ein- und Ausgangsbefragung somit nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden können.

Um diesen Effekten entgegenzuwirken, wurden für die Untersuchungen in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 die folgenden Änderungen vorgenommen:

1. Die gesamte Aufgabe wurde umformuliert, um mithilfe der Einleitung „Ich kann mindestens je einen Beweis angeben, an dem ich deutlich machen kann, …“ differenziertere Bewertungen zu erhalten. Insgesamt sah die Aufgabe nun wie folgt aus:

Bitte bewerten Sie die folgenden Aussagen:

Ich kann mindestens je einen Beweis angeben, an dem ich deutlich machen kann, …

1. …, dass Beweise zeigen können, dass bestimmte Sachverhalte und Zusammenhänge sicher gelten.
2. …, dass Beweise zeigen können, warum etwas gilt.
3. …, dass Beweise die Bedeutungen von mathematischen Begriffen verdeutlichen können.
4. …, dass Beweise mathematisches Verständnis erzeugen können.
5. …, dass Beweise dabei helfen können, sich Zusammenhänge und Tatsachen einprägen zu können.
6. …, dass in Beweisen mathematisches Wissen systematisiert werden kann.
7. …, dass Beweise einen laufenden (Forschungs-) Prozess beenden können.
8. …, dass man durch Beweise verstehen kann, warum etwas wahr ist.
9. …, dass in Beweisen neues Wissen entdeckt werden kann.
10. …, dass in Beweisen mathematisches Wissen kommuniziert werden kann.

2. In der Ausgangsbefragung im Wintersemester 2014/15 wurde zu allen Aussagen neben einer aktuellen Einschätzung auch eine retrospektive Bewertung verlangt. Somit sollten die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs implizit selbst einschätzen. Für die Illustration dieses Fragenformats wird exemplarisch das erste Item dieses Komplexes angegeben:

Inwieweit treffen die folgenden Aussagen – aus heutiger Sicht – auf Sie vor der Lehrveranstaltung zu und inwieweit treffen diese Aussagen heute zu?

Ich kann mindestens einen Beweis angeben, an dem ich deutlich machen kann, …

…, dass Beweise zeigen können, dass bestimmte Sachverhalte und Zusammenhänge sicher gelten:

vor der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
nach der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig

Die angewandte Methode entspricht der Herangehensweise einer ‚retrospektiven Kompetenzzuwachsmessung'. Wie in verschiedenen Studien nachgewiesen werden konnte, ist diese Methode sehr gut dafür geeignet, Veränderungen bzw. Lernzuwächse valide dokumentieren zu können (etwa Coulter 2012; Lam und Bengo 2003; Pratt et al. 2000). Im vorliegenden Fall wurde die Variante gewählt, dass beide Einschätzungen (aktuell und retrospektiv) zum gleichen Zeitpunkt abgefragt wurden, um eine Einschätzung über den gesamten Zeitraum der Vorlesung zu erhalten. Außerdem wurden die Items derart formuliert, dass die Studierenden nicht direkt ihren eigenen Lernzuwachs einschätzen bzw. angeben sollten. Gefragt wurde ‚nur' nach der Selbsteinschätzung der jeweiligen Kompetenzen zu den beiden Zeitpunkten. Nach Lam und Bengo (2013) führt diese Fragetechnik zu valideren Ergebnissen. Die mit dieser Methode ggf. verbundenen Probleme der Validität der Selbsteinschätzungen werden in Abschnitt 7.3.4 im Kontext der Beantwortung der Forschungsfrage [7] erörtert.

3. Auch den Erstsemesterstudierenden wurden alle Aussagen bereits in der Eingangsbefragung zur Bewertung vorgelegt.

3.3.10 Motivation zum Erlernen von Beweisen und Selbsteinschätzung des Lernzuwachses

In diesem Abschnitt sollte zunächst im Rahmen der Eingangsbefragung ermittelt werden, welche Aspekte zum Beweisen die Studierenden, im Sinne einer generellen Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität, überhaupt lernen wollen. Ferner war eine Intention hierbei auch, über die Bewertungen einschätzen zu können, welche Aspekte die Studierenden beim Beweisen für wichtig bzw. für lernenswert erachten. Die folgenden Items sind Eigenkonstruktionen und tangieren verschiedene Aspekte, die es beim ‚Beweisen' zu erlernen gilt:

Ich möchte im Studium über das Beweisen lernen …

1. … wie man einen Beweis findet.
2. … wie man einen Beweis aufschreibt.
3. … wie man einen Beweis liest.
4. … wie man einen Beweis versteht.
5. … wie das Beweisen funktioniert.
6. … warum man Beweise führt.
7. … welche Arten von Beweisen es gibt.
8. Ich möchte nichts über das Beweisen lernen.
9. … wie man Beweise im Schulunterricht einsetzt.
10. … wie man Schüler zum Beweisen motivieren kann.
11. … wie man Schülern „das Beweisen" unterrichten kann.

Als Abgleich zu der Motivation der Studierenden zum Erlernen der Beweisaktivität sollte in der Ausgangsbefragung bewertet werden, inwiefern die Studierenden meinten, dass die verschiedenen Aspekte zum Beweisen im Rahmen der Lehrveranstaltung vermittelt wurden. Dieser Abschnitt bildet somit auch eine Evaluation bzgl. der vermittelten Inhalte. Für diesen Zweck wurden in der Ausgangsbefragung die oben aufgeführten Aussagen den Studierenden wieder zur Bewertung auf einer sechsstufigen Likert-Skala vorgelegt, wobei die Aufgabeneinleitung nun wie folgt formuliert wurde:

> Ich habe das Gefühl, in der Veranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" gelernt zu haben, …

Alle Items wurden in der Ein- und Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2013/14 erfolgreich pilotiert und unverändert in die Studie des Wintersemesters 2014/15 übernommen.

3.3.11 Nutzen von Beispielen für den Beweisprozess

Innerhalb der Lehrveranstaltung spielt das dialektische Verhältnis von konkreten Beispielen (bzw. Beispielüberprüfungen) und Beweisen eine wichtige Rolle (vgl. Abschnitt 6.2). Es stellte sich somit die Frage, welchen Nutzen Beispiele in den Augen der Studierenden im Beweisprozess haben. Im Forschungsinteresse stand auch hier, welche Sicht die Studierenden zu Beginn und zum Ende der Lehrveranstaltung vertreten und wie sie selbst ihren Erkenntnisgewinn einschätzen. Die folgenden Items wurden im Rahmen der Ausgangsbefragung im Wintersemester 2013/14 pilotiert. (Alle Aussagen sollten auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimmt gar nicht … [6] stimmt völlig) bewertet werden.)

Bitte bewerten Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Betrachtung von konkreten Beispielen kann dabei helfen, eine Beweisidee zu finden.
2. Die Betrachtung von konkreten Beispielen hilft dabei, eine Behauptung besser zu verstehen.
3. Die Betrachtung von konkreten Beispielen hat beim Beweisen keinen Nutzen.

4. Beispiele können dabei helfen, eine Argumentation zu überprüfen.
5. Auch nach einem erfolgten Beweis überprüfe ich die Behauptung zur Sicherheit noch an Beispielen.
6. Die Überprüfung von einigen Beispielen reicht als vollständiger Beweis aus.
7. Beispiele können mich in meiner Vermutung bestärken, ob eine Behauptung wahr ist.

Die Ergebnisse der Pilotierung legten die Frage nahe, wie entsprechende Bewertungen zu Beginn der Lehrveranstaltung ausfallen würden. Aus diesem Grund wurde dieser Abschnitt in die Eingangsbefragung des folgenden Wintersemesters übernommen. Für aussagekräftigere Einschätzungen des eigenen Lernzuwachses wurde in der Ausgangsbefragung zu jeder Aussage neben einer aktuellen Bewertung auch eine retrospektive Einschätzung verlangt. Zur Illustration wird das erste Item des Bereichs angegeben:

Inwieweit treffen die folgenden Aussagen – aus heutiger Sicht – auf Sie vor der Lehrveranstaltung zu und inwieweit treffen diese Aussagen heute zu?

Die Betrachtung von konkreten Beispielen kann dabei helfen, eine Beweisidee zu finden:

vor der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
nach der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig

3.3.12 Selbstwirksamkeitserwartung und der empfundene Kompetenzzuwachs beim Beweisen

Die Bedeutung von Selbstwirksamkeitserwartung für das Erlernen der Beweisaktivität wurde bereits in Abschnitt 2.2.1 erörtert. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, inwiefern durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ eine positive Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf das Beweisen bei den Studierenden aufgebaut wird und inwiefern sich Zusammenhänge zwischen den erhobenen Werten von Selbstwirksamkeitserwartung und entsprechenden ‚Leistungen‘ nachweisen lassen.

Ein Ergebnis der vorherigen Studien darin bestand, dass Studienanfänger nur sehr wenig (Vor-) Erfahrungen mit dem Beweisen haben und somit über keine ‚Beweispraxis‘ verfügen. Aus diesem Grund wurden die Items zur Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf das Beweisen erst in der Ausgangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 eingesetzt. Da in der Literatur keine passenden Items für eine beweisbezogene Selbstwirksamkeitserwartung angeführt werden, die allgemein genug gehalten sind, um die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung mitabzudecken, mussten entsprechende Items neu konstruiert werden. Diese beweisspezifische Selbstwirksamkeitserwartung wurde dabei durch die folgenden Teilkompetenzen zum Beweisen modelliert: die Konstruktion von Beweisen, das Wissen um die konstituierenden Elemente eines Beweises, das Wissen um die Stellung des Beweises in der Mathematik, Beweisverständnis und Beweisbeurteilung. Hieraus ergab sich die Formulierung der folgenden Aussagen:

1. Ich kann eine gegebene Behauptung beweisen.
2. Ich weiß, was einen Beweis ausmacht.
3. Ich weiß, warum in der Mathematik bewiesen wird.
4. Ich verstehe Beweise, wenn ich sie lese.
5. Ich weiß, wie man einen Beweis führt.
6. Ich kann beurteilen, ob ein Beweis richtig oder falsch ist.

Neben der Bewertung der aktuellen Fähigkeiten zum Beweisen sollte gleichsam der eigene Lernfortschritt eingeschätzt werden. Aus diesem Grund sollten wiederum die sechs Aussagen aus aktueller Perspektive und retrospektiv bewertet werden. Zur Illustration des Frageformats wird das erste Item des Abschnitts angegeben:

Inwieweit treffen die folgenden Aussagen – aus heutiger Sicht – auf Sie vor der Lehrveranstaltung zu und inwieweit treffen diese Aussagen heute zu?

Ich kann eine gegebene Behauptung beweisen:

vor der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
nach der Lehrveranstaltung	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig

4. Betrachtungen zu der historischen Entwicklung didaktisch orientierter Beweiskonzepte und der mit ihnen verbundenen Intentionen

Ein zentraler Bestandteil der in dieser Arbeit thematisierten Lehrveranstaltung sind die sogenannten operativen und generischen Beweise, in denen allgemeingültige Verifikationen mit Bezug auf konkrete Beispiele vollzogen werden. Diese Beweisformen müssen dabei im Rahmen eines Entwicklungsstranges des zwanzigsten Jahrhunderts gesehen werden, in dessen Kontext der Versuch unternommen wurde, die mathematische Beweisaktivität Lernenden auf allen Stufen der Ausbildung zugänglich zu machen. Die Entwicklung entsprechender Beweiskonzepte ist dabei immer in den Kontext eines gewissen Lehr-/Lernszenarios eingebettet und gleichsam mit bestimmten didaktischen Intentionen verbunden. Biehler und Kempen (2016) prägen für diese spezifischen, didaktisch motivierten Beweisformen im Kontext gewisser Lehr-/Lernszenarios den Begriff der „didaktisch orientierten Beweiskonzepte“.

In diesem Kapitel werden die historischen Entwicklungsstränge verschiedener didaktisch orientierter Beweiskonzepte dahingehend befragt, welche Intentionen die entsprechenden Autoren im Kontext ihrer Beweiskonzepte verfolgen, mit welchen Aktivitäten diese verbunden sind und welche Vorbehalte gegebenenfalls formuliert werden (4.2). Schließlich geht es dabei um die Frage, welche Gründe für den Einsatz entsprechender Beweisformen in der Lehrerausbildung herausgearbeitet werden können, welche Aktivitäten für das Erlernen der Beweisaktivität in Verbindung mit den didaktisch motivierten Beweisformen als besonders gewinnbringend erscheinen und welche Probleme damit gegebenenfalls verbunden sein können (4.3).

4.1 Anliegen, Forschungsfragen und Methode

Ein Teil der unternommenen Forschungsarbeit bestand in der Aufarbeitung der Entwicklung der didaktisch orientierten Beweiskonzepte, der Herausarbeitung ihrer Charakteristika und Bezüge untereinander. Entsprechende Ergebnisse wurden in Biehler und Kempen (2016) veröffentlicht. Dort wird auch der Frage nach der Gültigkeit der verschiedenen Beweisformen als wirkliche Beweise im Sinne der Mathematik nachgegangen, welche im Folgenden nicht thematisiert wird.

Für die Konstruktion der in dieser Arbeit thematisierten Lehrveranstaltung sind im Kontext der didaktisch motivierten Beweiskonzepte die drei folgenden Aspekte von besonderer Bedeutung: Wie lässt sich der Einsatz didaktisch motivierter Beweisformen in der Lehrerausbildung begründen bzw. motivieren? Wie sollen diese Beweisformen in das Unterrichtsgeschehen eingebunden werden und welche Aktivitäten werden dabei empfohlen, damit Lernende die mathematische Beweisaktivität am besten erlernen können? Welche Probleme könnten bei entsprechenden Unterrichtsszenarien gegebenenfalls auftreten? Aus diesem Grund werden in dem vorliegenden Kapitel die folgenden Leitfragen zur Auswertung herangezogen:

Leitfrage zur Auswertung [1]:

Welche Aktivitäten führen die Urheber der didaktisch orientierten Beweiskonzepte auf, um Lernende im ‚Beweisen‘ sinnstiftend zu unterrichten, und welche Implikationen für das unterrichtliche Geschehen werden in diesem Kontext herausgestellt?

Leitfrage zur Auswertung [2]:

Welche Argumente werden durch die Urheber der didaktisch orientierten Beweiskonzepte angeführt, entsprechende Beweisformen in die Lehramtsausbildung zu integrieren?

Leitfrage zur Auswertung [3]:

Welche offenen Fragen bzw. Probleme werden bei den Autoren für den Umgang mit entsprechenden Beweisformen thematisiert?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfragen werden zunächst die didaktisch orientierten Beweiskonzepte herausgegriffen, die in einem besonderen Maße zu der Entwicklung des Konzepts des operativen Beweises und somit auch zu dem Konzept des generischen Beweises beigetragen haben, welches von Biehler und Kempen (2014) herausgearbeitet wurde und in der vorliegenden Arbeit vertreten wird. Anhand der Primärliteratur wird dabei untersucht, welche Aspekte zu den oben formulierten Fragen bei den Urhebern dieser ausgewählten Beweiskonzepte deutlich werden.

4.2 Kurzdarstellung ausgewählter didaktisch orientierter Beweiskonzepte

Im Folgenden werden die didaktisch orientierten Beweiskonzepte thematisiert, deren Konzeptionen maßgeblich zu dem Konzept operativer Beweise bei Wittmann und dem hier vertretenen Konzept generischer Beweise (Abschnitt 2.1.3) beigetragen haben. Diese ausgewählten Konzepte werden kurz beschrieben, anhand eines Beispiels illustriert und dann in Bezug auf die in Abschnitt 4.1 formulierten Forschungsfragen ausgewertet.

In der Entwicklung der verschiedenen Beweiskonzepte bildet die intuitive Beweisstufe bei Branford eine Grundlage, auf die Wittmann und Müller (1988) später explizit starken Bezug nehmen. Für ihre inhaltlich-anschaulichen Beweise, die zu dem Konzept des operativen Beweises beigetragen haben, sind weiter die Arbeiten von Freudenthal („paradigmatische Beweise“) und Semadeni („prämathematische Beweise“ bzw. „action proofs“) von großer Bedeutung (Wittmann & Müller 1988, S. 249). In dem Kontext um prämathematische Beweise müssen die Ausführungen von Kirsch (1979) berücksichtigt werden, die später in den Arbeiten von Blum und Kirsch (1989 und 1991), auch unter Rückgriff auf Semadeni, zu dem Konzept präformaler Beweise führten. Auf die Entwicklung und die Konzeption operativer Beweise und generischer Beweise wird in dem vorliegenden Kapitel nicht eingegangen, da entsprechende Ausführungen bereits in Abschnitt 3.3 erfolgt sind. Allerdings wird in der Zusammenfassung der Ergebnisse für die Beantwortung der eingangs formulierten Forschungsfragen auch auf dortige Ergebnisse zurückgegriffen.

Die folgenden Darstellungen sind stark gekürzte Versionen der Ausführungen in Biehler und Kempen (2016), wobei auf eine wortgetreue Darstellung verzichtet wird. Für eine bessere Lesbarkeit des folgenden Abschnitts werden inhaltliche Bezüge zu dem genannten Artikel nicht extra ausgewiesen.

4.2.1 Die intuitive Beweisstufe bei Benchara Branford

Das Grundanliegen Branfords (1913) besteht darin, eine Beweisstufe in das unterrichtliche Geschehen zu integrieren, die zwischen bloßen empirischen Untersuchungen und strengen formalen Beweisen vermitteln soll (ebd., S. 99). Hierzu beschreibt der Autor (1913, S. 99ff.) die Beweisstufe der *intuitiven Ableitung*. Auf dieser Beweisstufe wird der Frage nachgegangen, ob eine bereits an Einzelfällen überprüfte Vermutung in allen möglichen Fällen richtig sei. Auf der Stufe der intuitiven Ableitung sollen allgemeingültige Betrachtungen erfolgen, die weiter als Anregungen für den wissenschaftlichen Beweis dienen können. Hierzu schreibt Branford (1913): „Diese Beweisstufe stellt allgemeine und streng gültige Wahrheiten auf, beruft sich aber dabei, wenn es nötig wird, auf Postulate der sinnlichen Erfahrung. Sie stellt die Wahrheit auf eine unabhängige eigene Basis durch unmittelbare Berufung auf erste Prinzipien“ (ebd., S. 103). Der Nachweis der (Allgemein-) Gültigkeit einer Behauptung erfolgt hierbei also nicht durch den expliziten Bezug auf Axiome und bereits bewiesene Sachverhalte. Vielmehr geht es um die „unmittelbare Berufung auf erste Prinzipien“ (s.o.) als unmittelbar einsichtige Argumente, die auch „Postulate der sinnlichen Erfahrung“ (s.o.) mit einschließen kann. Branford (1913, S. 103) illustrierte diese Stufenfolge einer Beweisaktivität anhand des Scheitelwinkelsatzes der Geometrie. Dieses Beispiel wird im Folgenden zusammengefasst wiedergegeben.

Zunächst sollen Lernende auf der ersten Stufe (der ‚experimentellen Ableitung‘) mit dem Wissensmaterial vertraut gemacht werden. Bei der Betrachtung und Untersuchung von Scheitelwinkeln können Lernende zu der Vermutung gelangen, dass diese immer gleich groß sind. Konkrete Messungen können diese Vermutung bestärken. Branford (1913, S. 102) betont dabei die Bedeutung eines präzisen Sprachgebrauchs zur korrekten Formulierung des aktuellen Stands des Erkenntnisprozesses. Exemplarisch formuliert er: „In all den untersuchten Fällen sind, soweit wir messen können, zwei Scheitelwinkel einander gleich“ (Branford 1913, S. 102). Wichtig ist dabei die Vermittlung einer Einsicht, dass der allgemeine Satz, der für alle Scheitelwinkel gelten soll, nicht durch singuläre Überprüfungen gesichert werden kann. Das Verlangen nach einer allgemeingültigen Wahrheit soll dann zu der nächsten Stufe führen.
Auf der zweiten Stufe (der ‚intuitiven Ableitung‘) sollen „allgemeine und streng gültige Wahrheiten“ (s.o.) aufgestellt werden. In diesem Fall kann dies dadurch erfolgen, dass zwei sich kreuzende Stäbe an ihrem Schnittpunkt zusammengeheftet werden (s. Abbildung 12). Bei der Drehung der Stäbe um ihren Schnittpunkt kann die folgende Erkenntnis gewonnen werden: Bei der Drehung von AB um B wird gleichzeitig BC um B in entgegengesetzte Richtung gedreht. Und das Ausmaß der Drehung von AB über den Winkel ABE ist das gleiche, wie das der Drehung von BC über den Winkel CBD. Folglich müssen, so Branford, die beiden Winkel gleich groß sein. Nachdem dieser Versuch auch mit den Winkeln ABD und CBE durchgeführt wurde, sollen die Schülerinnen und Schüler diesen noch einmal in Gedanken ausführen und dann mit ihren eigenen Worten beschreiben: „Das Endziel ist, schrittweise Vernunft und Einbildungskraft an die Stelle der sinnlichen Wahrnehmung zu setzen“ (Branford 1913, S. 105).

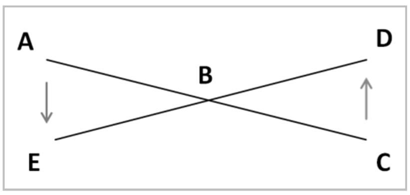


Abbildung 12: Beweisfigur der intuitiven Beweisstufe (Abbildung ähnlich zu Branford 1913, S. 103)

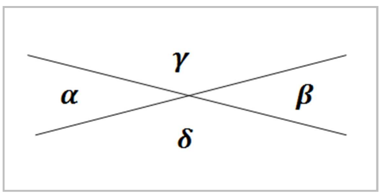


Abbildung 13: Beweisfigur zum wissenschaftlichen Beweis (Abbildung ähnlich zu Branford 1913, S. 101)

Auf der dritten Stufe wird der strenge wissenschaftliche Beweis formuliert. Dieser allgemeine Beweis soll durch die Betrachtung einer speziellen Beweisfigur angeregt werden (s. Abbildung 13).

Ausgangspunkt sind dabei konkrete Werte, mit denen gerechnet wird: Bei einem gemessenen Wert von α, etwa $\alpha = 30°$, gilt: $\gamma = 180° - 30° = 150°$, da $\alpha + \gamma = 180°$. Weiter ist $\beta = 180° - \gamma = 180° - 150° = 30°$, und somit: $\alpha = 30° = \beta$.
Entsprechende Berechnungen anhand konkreter Werte sollen nötigenfalls wiederholt werden, bis die Lernenden eine Einsicht darin erlangen, dass dieses Ergebnis ($\alpha = \beta$) für alle möglichen Scheitelwinkel gilt. Erst darauf erfolgt die Formulierung des allgemeinen wissenschaftlichen Beweises, bei dem der Lehrer die Abhängigkeit der Argumente zu früheren Beweisen betonen soll (ebd., S. 106):

> $\alpha + \gamma = 180°$ (früher gefundene Wahrheit)
> $\gamma + \beta = 180°$ (ebenfalls),
> folglich $\alpha + \gamma = \gamma + \beta$,
> also $\alpha = \beta$

Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler den symbolischen Beweis mit ihren eigenen Worten erläutern, da dies eine „ausgezeichnete, lehrreiche Übung“ darstellt (ebd., S. 106).

Rückblickend können die folgenden markanten Aspekte des Beweiskonzepts von Branford herausgehoben werden:

(B1) Der Erkenntnisprozess soll mit einer explorativen Phase beginnen, in dem sich die Lernenden mit dem Wissensmaterial vertraut machen können. In dieser Explorationsphase soll eine Vermutung ausgemacht werden, die dann anhand konkreter Beispiele überprüft werden soll.

(B2) Die ausgemachte Vermutung wird derart formuliert, dass auf die Unzulänglichkeit einzelner Beispielüberprüfungen zur Verifikation der Vermutung, aufgrund ihres Allgemeingültigkeitsanspruchs, hingewiesen wird.

(B3) Bei der Konstruktion von intuitiven Beweisen werden Argumente zugelassen, die bei den Lernenden als intuitiv richtig akzeptiert sein sollen.

(B4) Die für den Beweis zu verwendenden Argumente sollen an konkreten ‚Objekten‘ ausgemacht und anhand weiterer konkreter Fälle getestet werden. Schließlich soll diese Strategie in Gedanken ausgeführt und gleichsam verinnerlicht werden.

(B5) Der gefundene intuitive Beweis soll von den Lernenden in ihren eigenen Worten formuliert werden.

(B6) Der wissenschaftliche Beweis soll erst dann symbolisch dargestellt werden, wenn die Lernenden anhand konkreter Rechnungen deren Allgemeingültigkeit eingesehen haben: Das Ergebnis erweist sich als unabhängig von den konkreten Zahlenwerten. Erst danach erfolgt eine Formulierung unter Verwendung von Variablen.

(B7) Bei der Formulierung des formalen Beweises soll die Anhängigkeit der verwendeten Argumente zu vorherigen Beweisen betont werden.

(B8) Nach der finalen Beweiskonstruktion auf der letzten Stufe sollen die Lernenden wiederum das Bewiesene in ihrer eigenen Sprache formulieren.

4.2.2 Paradigmatische Beispiele bei Hans Freudenthal

In der Literatur um die didaktisch orientierten Beweiskonzepte beziehen sich verschiedene Mathematikdidaktiker auf die paradigmatischen Beispiele bei Freudenthal (etwa Kirsch 1979, S. 262; Semadeni 1984, S. 32). Und auch in der aktuellen Diskussion um schuladäquate Beweisformen werden entsprechende Begriffsbildungen verwendet (siehe der „paradigmatische Ansatz“ bei Leiß und Blum (2006, S. 37) oder „paradigmatische Beweise“ bei Wittmann (2014, S. 50) in Anlehnung an Fischer und Malle 1985).

In seiner didaktischen Reflexion über den Mathematikunterricht an der Schule betont Freudenthal (1978, S. 194f.), dass eine bloße technische Übung an einer Vielzahl ähnlicher Beispielaufgaben wenig Lernerfolge mit sich bringt. Vielmehr sollen Lernende an gut gewählten Beispielen eine Einsicht in Zusammenhänge erlangen, die nicht notwendigerweise explizit gemacht werden müssen, sich aber auf isomorphe Probleme übertragen lassen. Als Beispiel führt Freudenthal die folgende Aufgabe an: „Ich zeichne ein Kärtchen mit drei Orten A, B, C, wo A und B durch drei Wege verbunden sind und B, C durch zwei. Auf wieviel Arten kann ich von A über B nach C kommen? - lautet die Frage“ (ebd., S. 196, vgl. Abbildung 14).

Lernende können hierbei das systematische Zählen erlernen „oder vielmehr die Gewohnheit, das Bedürfnis und die Gewandtheit, beim Zählen systematisch vorzugehen“ (ebd., S. 200).

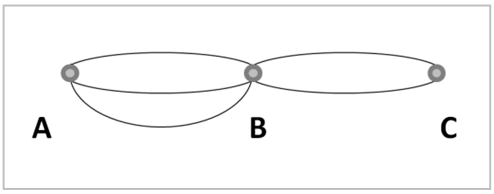


Abbildung 14: Illustration eines paradigmatischen Beispiels (Abbildung ähnlich zu Freudenthal 1978, S. 196)

Isomorphe Problemstellungen ergeben sich z.B. dann, wenn in der ersten Stufe andere als drei und in der zweiten Stufe andere als zwei Möglichkeiten gegeben sind. Eine explizite Formulierung des allgemeinen Produktsatzes der Kombinatorik ist für ein (erstes) Verständnis hier nicht nötig, die intuitive Einsicht in den allgemeinen Zusammenhang kann am konkreten Beispiel gewonnen und abstrahiert werden.

Der Fokus des paradigmatischen Beispiels liegt somit ursprünglich nicht auf dem Begründen von Sachzusammenhängen, sondern auf dem Erlernen allgemeiner Regeln. Die funktionale Ausrichtung auf die Übertragbarkeit von an konkreten Beispielen gewonnen Einsichten auf isomorphe Problemstellungen bildet aber eine wichtige theoretische Grundlage für spätere (beispielgebundene) Beweiskonzepte.

Von zentraler Bedeutung bei diesem Konzept paradigmatischer Beispiele erscheinen dabei die folgenden Aspekte:

(F1) Lernende sollen an konkreten Beispielen Einsichten in Zusammenhänge gewinnen, die sich auf andere (isomorphe) Sachverhalte übertragen lassen und somit über den konkreten Fall hinausweisen.

(F2) Bei der Betrachtung konkreter Beispiele geht es daher nicht nur um das bloße Finden einer Lösung, sondern übergeordnet um das Ausmachen beispielübergreifender Aspekte.

Freudenthal (ebd., S. 200 und 204ff.) wirft dabei die folgende Frage auf:

(F3) Wie findet man ‚gute‘ paradigmatische Beispiele?

(Freudenthal weist darauf hin, dass paradigmatische Beispiele nicht zu leicht oder zu stark vorstrukturiert sein dürfen, damit Lernende das ‚Paradigmatische' an ihnen erkennen können. Damit antizipiert er bereits die Anforderungen, die von verschiedenen Autoren an ‚generische' Beispiele gestellt werden (s. Abschnitt 2.1.3).)

Im Kontext der paradigmatischen Beispiele geht Freudenthal (1978) nicht explizit auf die Lehrerausbildung ein.

4.2.3 Der prämathematische Beweis bzw. der action proof bei Zbigniew Semadeni

Semadeni beschreibt 1976 das Konzept der Prämathematik für den Mathematikunterricht der Grundschule als einen didaktischen Gegenentwurf zu der abstrakten formalen Mathematik. Im Sinne Piagets sollen, entsprechend der Entwicklungsstufe der konkreten Operationen, physische Handlungen mit konkreten Materialien einen bedeutungsstiftenden semantischen Zugang zu mathematischen Konzepten ermöglichen. Die diesen Lernkontexten entsprechende Beweisform bezeichnet Semadeni zunächst als „prämathematischen Beweis" (Semadeni 1976, S. 16), später auch als „action proof" (1981 und 1984). Diese Beweisform beschreibt Semadeni anhand eines Satzes S wie folgt (Semadeni 1984, S. 32, S. 16):

> 1) Choose a special case of S. The case should be generic (that is without special features), not too complicated, and not too simple [...]. Choose an enactive and/or iconic representation of this case or a paradigmatic example (in the sense of Freudenthal [1980][22]). Perform certain concrete, physical actions (manipulating objects, drawing pictures, moving body etc.) so as to verify the statement in the given case.
>
> 2) Choose other examples, keeping the general schema permanent but varying the constants involved. In each case verify the statement, trying to use the same method as in 1).
>
> 3) When you no longer need physical actions, continue performing them mentally until you are convinced that you know how to do the same for many other examples.

Als Beispiel führt Semadeni den folgenden Beweis für die Kommutativität der Multiplikation in den natürlichen Zahlen an (vgl. Abbildung 15):

> We first choose a pair of numbers, e.g. 3 and 5. We are to show that 3 x 5 = 5 x 3. As the concretization of n x m we choose n rows with m counters in each. Thus, we begin the action by arranging the counters as in Figure 1a. We separate them horizontally (Figure 1b) and infer that the number of counters is 3 x 5. Then we separate them vertically (Figure 1c) and get 5 x 3. The number of counters in Figure 1a must be independent of the way of counting. Hence 3 x 5 = 5 x 3. (Semadeni 1984, S. 33)

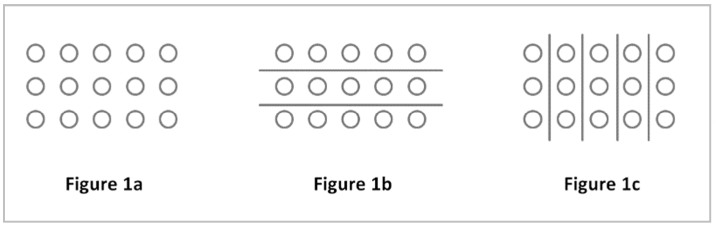


Abbildung 15: Darstellung eines Rechtecks für einen „action proof" der Kommutativität der Multiplikation (Abbildung ähnlich zu Semadeni 1984, S. 33)

Dabei wird hervorgehoben, dass sich die verwendeten logischen Argumente auf die konkreten Objekte beziehen sollen und nicht losgelöst von semantischen Beziehungen rein formal erfolgen dürfen. Grundlegend für den Vollzug dieser Beweise ist dabei der folgende Dreischritt: (i) Ausführung

[22] Freudenthal (1980) ist die englische Ausgabe von Freudenthal (1978).

von (physischen) Handlungen, (ii) Verinnerlichung der Handlung und (iii) deren Verallgemeinerung. Die Korrektheit und Gültigkeit der Beweise soll durch die Anforderungen an die physischen und mentalen Handlungen (s.o.) sichergestellt werden.

Zusammenfassend können für die vorliegende Arbeit folgende markante Aspekte des Beweiskonzepts von Semadeni herausgehoben werden:

(S1) Lernende sollen zunächst konkrete Beispiele betrachten, die ikonisch oder enaktiv dargestellt werden. Diese Beispiele sollen dabei als paradigmatische Beispiele im Sinne Freudenthals (Abschnitt 4.2.2) fungieren. Anhand dieser „generischen" („generic", s.o.) Beispiele soll die gegebene Behauptung zunächst im konkreten Fall verifiziert werden.

(S2) Die bei den konkreten Beispielen verwendete Methode zur Verifikation soll darauf unverändert auf weitere konkrete Fälle übertragen werden.

(S3) Nach der Übertragung dieser Strategie auf weitere Fälle und einem dadurch erhaltenen Verständnis für dessen Durchführung sollen die Lernenden diese Strategie in Gedanken ausführen, um sich von ihrer Übertragbarkeit auf entsprechende Fälle zu überzeugen.

Neben dem Unterricht an der Grundschule thematisiert Semadeni auch die Lehrerausbildung an der Universität. Nach Semadeni (1981, S. 2) wird u.a. durch die folgenden Aspekte die Einbindung entsprechender Beweisformen in die Lehramtsausbildung legitimiert:

(S4) Der ausschließliche Umgang mit formalen Beweisen in der Lehramtsausbildung muss als problematisch angesehen werden: Selbst wenn Studierende diese verstünden, erschiene ihnen die Mathematik als etwas Aufgedrängtes und nicht als etwas aktiv Gelerntes.

(S5) Formale Beweise würden den Lehramtsstudierenden einen falschen Eindruck vermitteln, wie man Kindern die Mathematik unterrichten sollte.

(S6) Der Einbezug von prämathematischen Beweisen ermöglicht erst die Diskussion um die Aspekte von Anschaulichkeit und Strenge.

Schließlich wird auch auf verschiedene didaktische bzw. konzeptuelle Probleme dieser Beweisformen hingewiesen:

(S7) Wie kann sichergestellt werden, dass Lernende durch entsprechende Betrachtungen wirklich eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit des Beweises und des Satzes erlangen? Dazu bemerkt Semadeni: „Without dismissing this criticism we note that it applies to any proof in a textbook: if the author finds his proof correct and complete, this does not automatically imply that students understand it" (Semadeni 1984, S. 34).

(S8) Lernende können nur begrenzt die Korrektheit entsprechender Beweise beurteilen, „it requires a competent mathematician to judge whether a given action proof is acceptable" (ebd., S. 33).

(S9) Semadeni formuliert die Aufgabe an die Mathematikdidaktik, geeignete Unterrichtsszenarien für den Mathematikunterricht zu entwickeln, in denen entsprechende Beweisformen und die mit ihnen verbundenen Aktivitäten sinnstiftend integriert werden können (Semadeni 1981, S. 12).

(S10) Eine offene, noch empirisch zu erforschende Frage ist dabei, welche Rolle entsprechenden Beweisen im Unterricht wirklich zukommt (Semadeni 1984, S. 34f.).

4.2.4 Prämathematische Beweise bei Arnold Kirsch

Für die mathematikdidaktische Arbeit von Kirsch ist die Grundposition des Zugänglichmachens von mathematischen Inhalten und Verfahren für den Schulunterricht auf „intellektuell ehrliche" Weise zentral (Kirsch 1976 und 1977, in Anlehnung an Bruner 1973, S. 26f.). Eine ebensolche Möglichkeit, Beweise bereits im Schulunterricht zu thematisieren sieht Kirsch in den prämathematischen Beweisen Semadenis, welche er wie folgt beschreibt:

> Sie bestehen „grob gesagt aus gewissen <u>konkreten Handlungen</u> (Operationen im Sinne von J. Piaget […]). Diese Handlungen werden zuerst wirklich ausgeführt, dann nur vorgestellt (verinnerlicht). Sie müssen <u>korrekten mathematischen Argumenten entsprechen</u>, die in ihrer psychologisch natürlichen Ordnung aufeinander folgen […]. Die Argumente sollen weiter direkt verallgemeinerbar sein […]. (Kirsch 1979, S. 261; Hervorhebungen im Original)

Als ein Beispiel Kirsch'scher prämathematischer Beweise wird der Beweis zu dem folgenden Satz wiedergegeben: Der Umfang u eines (konvexen) Vierecks ist größer als die Summe s der beiden Diagonalenlängen.

> Zum *Beweis* realisieren wir das Viereck mittels vier Nägeln. Nun spannen wir längs jeder Diagonalen einen Gummiring […] so daß das „Diagonalenkreuz" doppelt durch Gummifäden bedeckt ist. Sodann dehnen wir beide Bänder so, daß sie außen um alle vier Nägel herumlaufen […]. Danach ist der Rand des Vierecks doppelt bedeckt. Beim zweiten Schritt mußten wir die Bänder dehnen (viermalige Anwendung der Dreiecksungleichung!); also ist der Rand länger als das Diagonalenkreuz; es gilt: $u > s$. (Kirsch 1979, S. 269f.; Hervorhebungen im Original)

Auch Kirsch betont die Bedeutung konkreter Handlungen und ihre anschließende Verinnerlichung, wie bereits Semadeni vor ihm (Abschnitt 4.2.3). Zentral ist hierbei die Forderung, dass alle Operationen korrekten mathematischen Argumenten entsprechen sollen. Kirsch ist darum bemüht, diese Beweise als eine intellektuell-ehrliche Übertragung der mathematischen Beweisaktivität für Lernende zu legitimieren: „Prämathematische Beweise sind <u>Beweise</u>, aber in besonderer Art dargestellt" (Kirsch 1979, S. 262; Hervorhebung im Original). In diesem Sinne sind auch die obigen fachmathematischen Einschübe in dem Zitat zu verstehen: Durch diese wird deutlich, dass sich der Beweis in einem fachmathematischen Sinn exaktifizieren ließe.

Kirsch (1979) geht in seinen Ausführungen zu prämathematischen Beweisen nicht auf Aktivitäten ein, die Lernende im Rahmen eines Erkenntnisprozesses vollziehen sollen. Im Zentrum seiner Ausführungen steht die Illustration des Beweiskonzeptes anhand vielfältiger Beispiele. Mit explizitem Bezug auf Semadeni fordert der Autor den Einbezug entsprechender Beweisformen in die Lehramtsausbildung, formuliert dieses Anliegen jedoch nicht nur für die Grundschullehrerausbildung. Kirsch nennt dafür die folgenden Gründe (ebd., S. 273):

(K1) Lehramtsstudierende müssen in die Lage versetzt werden, entsprechende Schülerprodukte zum Beweisen richtig einschätzen zu können

(K2) Durch prämathematische Beweise würde vielen Studierenden erst „„echte" Mathematik […] zugänglich" (ebd., S. 273).

In diesem Kontext wird auch auf die folgenden Probleme hingewiesen:

(K3) Es besteht die Gefahr, dass Studierende entsprechende Beweise als bloße empirische Verifikationen missverstehen könnten.

(K4) Prämathematische Beweise sind nicht per se für den Mathematikunterricht geeignet. Es ist daher eine Aufgabe der Mathematikdidaktik, entsprechende geeignete Beweise für den Unterricht bereitzustellen.

4.2.5 Inhaltlich-anschauliche Beweise nach Erich Wittmann und Gerhard Müller

In expliziter Anlehnung an die intuitive Beweisstufe bei Branford (Abschnitt 4.2.1) entwickeln Wittmann und Müller (1988) das Konzept der *inhaltlich-anschaulichen Beweise* (ebd., S. 248ff.). Diese Beweise gelten als „anschaulich", da bei der Beweisführung auf eine formal-symbolische Darstellung verzichtet wird; häufig wird dabei von geometrischen Visualisierungen Gebrauch gemacht. Innerhalb der Begründungen dürfen intuitiv einsichtige Sachverhalte als Argumente verwendete werden, die nicht notwendigerweise vorher bewiesen worden sein müssen. Somit wird gleichsam ‚inhaltlich' auf einer semantischen Ebene argumentiert. Diese Beweisform ist im Kontext des in Abschnitt 1.2.3 dargestellten ‚elementarmathematischen Forschungsprogramms' zu sehen, in welchem Wittmann und Müller (1988) einen Neuaufbau der Lehramtsausbildung fordern und Desiderate dafür formulieren (Wittmann 1989, S. 298ff.; Wittmann & Müller 1988, S. 254).

Wittmann und Müller führen als Beispiel (und gleichsam als ‚Existenzbeweis' solcher inhaltlich-anschaulicher Beweisproduktionen von Lernenden) die Lösung eines Schülers aus einem dritten Schuljahr für die folgende Aufgabe an: „Finde Zahlen, die den Rest 1 ergeben, wenn man sie durch 2 teilt, und den Rest 2, wenn man sie durch 3 teilt" (ebd., S. 241). Der Schüler gibt die folgende Antwort:

> Wenn ich nur auf den Rest 1 achte, muß ich immer 2 weitergehen und treffe dann nur ungerade Zahlen. Wenn ich nur auf den Dreierrest achte, muß ich immer 3 weitergehen. Zusammentreffen kann ich nur nach 3 Zweiersprüngen und nach 2 Dreiersprüngen. (Wittmann & Müller 1988, S. 241)

Die Autoren weisen schließlich auf die Vollgültigkeit entsprechender Beweise hin, indem sie die Übertragbarkeit der an konkreten Fällen vollzogenen Begründung herausstellen: „Inhaltlich-anschauliche, operative Beweise stützen sich […] auf Konstruktionen und Operationen, von denen erkennbar ist, daß sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen" (ebd., S. 247).

Im Sinne ihres elementarmathematischen Forschungsprogramms fordern die Autoren die Einbindung inhaltlich-anschaulicher Beweise in die Lehramtsausbildung. Sie verbinden damit die folgenden Ziele (s. hierzu das angeführte Zitat aus Wittmann und Müller (1988) in Abschnitt 1.2.3):

(MW1) Lehramtsstudierenden wird durch den Einbezug entsprechender Beweise ermöglicht, ein produktives Verhältnis zur Schulmathematik aufzubauen.

(MW2) Lehramtsstudierenden kann durch entsprechende Beweise eine vertiefte Einsicht in mathematische Zusammenhänge ermöglicht werden.

(MW2) Lehramtsstudierende müssen entsprechende Beweisformen kennen, damit sie die mathematische Beweisaktivität in den schulischen Mathematikunterricht übertragen können.

(MW3) Im Kontext entsprechender Beweisformen üben sich die Lehramtsstudierenden in der Verwendung anschaulicher Darstellungsmittel und somit in der Kommunikation von mathematischen Sachverhalten in einer den Schülerinnen und Schülern angemessenen Sprache.

Auf bestimmte Aktivitäten der Lernenden oder auf mögliche Probleme im Umgang mit inhaltlich-anschaulichen Beweisen gehen die Autoren nicht explizit ein.

4.2.6 Präformale Beweise bei Arnold Kirsch und Werner Blum

Blum und Kirsch problematisieren 1989 (bzw. 1991) ein zu einfaches Konzept von inhaltlich-anschaulichen Beweisen und fordern die prinzipielle Formalisierbarkeit der Beweisschritte als ein notwendiges Gütekriterium. Hieraus resultiert der Ausdruck *präformaler Beweis*, welchen die Autoren wie folgt definieren:

> a chain of correct but *not formally represented conclusions* which refer to valid, *non-formal premises*. Particular examples of such premises include concretely given real objects, geometric-intuitive facts, reality-oriented basic ideas, or intuitively evident, “commonly intelligible”, “psychologically obvious” statements […]. The conclusions should succeed one another in their “psychologically natural” order. (Blum & Kirsch 1991, S. 187; Hervorhebungen im Original)

Als ein Beispiel für die Verwendung geometrischer, intuitiv einsichtiger Sachverhalte für die Konstruktion eines präformalen Beweises wird der folgende Beweis für die Monotonie der Integralfunktion bei nicht-negativen Integranden aus Kirsch und Blum (1991) zitiert: „If definite integrals are interpreted as areas, then the monotonicity of the integral function of a non-negative integrand can – as is well-known – be proved by immediately obvious geometric arguments […]: For functions $f \geq 0$ we have: $(a \leq)\ x \leq y \Rightarrow \int_a^x f \leq \int_a^y f$“(ebd., S. 188; vgl. Abbildung 16).

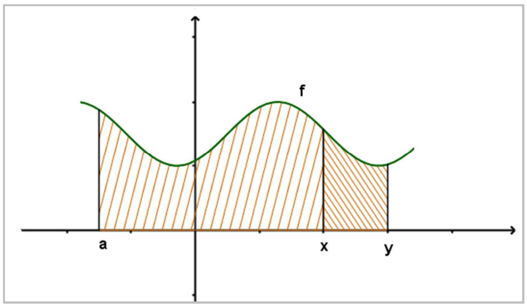


Abbildung 16: Graphik zu einem präformalen Beweis der Monotonie des Integrals bei nicht-negativen Integranden (Abbildung ähnlich zu Kirsch und Blum 1991, S. 188)

Die Autoren nehmen somit eine konzeptuelle Weiterentwicklung inhaltlich-anschaulicher Beweise vor, um diese Beweisformen fachmathematisch abzusichern und gleichsam zu legitimieren. In diesem Zusammenhang werden allerdings zwei gewichtige Fragen aufgeworfen (Blum & Kirsch 1989, S. 207[23] und 1991, S. 199): Inwiefern können Lernende die Stichhaltigkeit von selbst gefundenen oder vorgelegten präformalen Beweisen beurteilen? Und wie können Lernende in die Lage versetzt werden, entsprechende Beweise selbst zu finden?

[23] In der deutschen Version ihres Artikel (Blum & Kirsch 1989) verwenden die Autoren die Bezeichnung „präformaler Beweis“ als Obergriff für die Beweiskonzepte „Handlungsbezogener Beweis“ („action proof“) und „inhaltlich-anschaulicher Beweis“ (ebd., S. 203).

Durch die Erörterung der ersten Frage machen die Autoren ein didaktisches Problem entsprechender Beweisformen deutlich, welches hier herausgehoben werden soll:

(KB1) Die Korrektheit mathematischer Schlüsse und Argumente kann nur von jemandem beurteilt werden, „der über „höhere“ Kenntnisse verfügt; diese haben Lernende aber gerade nicht“ (Blum & Kirsch 1989, S. 208). Somit ergibt sich hier eine Grundproblematik, die „den didaktischen Stellenwert von nicht-formalen Beweisen notwendig relativiert“ (ebd., S. 208), was nach den Autoren von vielen Befürwortern entsprechender Beweise nicht gesehen wird.

Um Lernende in die Lage zu versetzen, selbst präformale Beweise finden zu können, führen die Autoren die folgenden Vorschläge an, welche im Folgenden paraphrasierend zusammengefasst werden (nach ebd., S. 208):

(KB2) im unterrichtlichen Geschehen sollen inhaltliche Grundideen unter Verwendung vielfältiger Darstellungsweisen betont und anschauliche Grundvorstellungen vermittelt werden

(KB3) entsprechende Beweise müssen in das Unterrichtsgeschehen integriert werden

(KB4) anschauliche Argumente sollen im Unterricht formalisiert werden

(KB5) es sollen auch exemplarische formale Beweise geführt werden

(KB6) die Lernenden sollen über das Beweisen und über das unterrichtliche Geschehen im Allgemeinen reflektieren

In Bezug auf die gesamte Lehramtsausbildung betonen die Autoren schließlich (Kirsch & Blum 1989, S. 209):

(KB7) Lehramtsstudierende müssen selbst Beweise auf verschiedenen Ebenen kennenlernen und lernen, entsprechende Beweise selbst zu führen und darüber zu reflektieren, damit ein entsprechender schulischer Mathematikunterricht verwirklicht werden kann.

4.3 Zusammenfassung der in der historischen Betrachtung herausgearbeiteten Aspekte zum Umgang mit didaktisch orientierten Beweiskonzepten

Im Folgenden werden die im Kontext der historischen Betrachtungen herausgearbeiteten Empfehlungen und Vorbehalte für den Umgang mit den didaktisch orientierten Beweiskonzepten zusammenfassend dargestellt. Hierbei geht es um die drei Themenbereiche: „Empfohlene Aktivitäten für Lernende und Implikationen für den Unterricht“ (4.3.1), „Argumente für die Einbindung didaktisch orientierter Beweiskonzepte in die Lehrerausbildung“ (4.3.2) und „Probleme und offene Fragen bzgl. der didaktisch orientierten Beweiskonzepte“ (4.3.3). Hinzugenommen werden dabei die im Rahmen des zweiten Kapitels erörterten Aspekte zu operativen und generischen Beweisen. Hinter den in den einzelnen Abschnitten aufgeführten Aspekten wird angegeben, aus welchen Kontexten die jeweiligen Nennungen resultieren[24]. Eine Referenz auf einen der oben thematisierten Autoren

[24] (B#) steht dabei für die Aspekte, die bei der Thematisierung der Ausführungen von Branford herausgearbeitet wurden (Abschnitt 4.2.1), (F#) entstammt den Darstellungen zu Freudenthal (Abschnitt 4.2.2), (S#) referenziert auf Semadeni (Abschnitt 4.2.3), (K#) auf Kirsch (Abschnitt 4.2.4), (WM#) auf Wittmann und Müller (Abschnitt 4.2.5) und (KB#) auf Kirsch und Blum (Abschnitt 4.2.6). Mit Referenz auf das zweite Kapitel

bedeutet dabei nicht, dass eine entsprechende Nennung in dessen Konzeption von Beweisen keine Rolle spielen würde. Um sich bei der Beantwortung der eingangs formulierten Forschungsfragen aber nur an den ‚harten' Fakten der Primärliteratur zu orientieren, wird nur auf die Autoren Bezug genommen, bei denen die jeweiligen Aspekte explizit thematisiert werden.

4.3.1 Empfohlene Aktivitäten für Lernende und Implikationen für den Unterricht

Die Leitfrage zur Auswertung [1] wurde oben wie folgt formuliert:

> *Welche Aktivitäten führen die Urheber der didaktisch orientierten Beweiskonzepte auf, um Lernende im ‚Beweisen' sinnstiftend zu unterrichten, und welche Implikationen für das unterrichtliche Geschehen werden in diesem Kontext herausgestellt?*

Diese Frage wird im Folgenden auf Grundlage der in Abschnitt 4.3.2 erfolgten Arbeit an der Primärliteratur beantwortet. Insgesamt konnten bei der Betrachtung der historischen Genese der didaktisch orientierten Beweiskonzepte die folgenden Empfehlungen für die Vermittlung der Beweisaktivität im Mathematikunterricht herausgearbeitet werden:

(1) Der Beweisprozess sollte mit einer Explorationsphase des Sachverhalts beginnen, in deren Rahmen sich die Lernenden mit dem Wissensmaterial vertraut machen und selbst eine bzw. die zu beweisende Vermutung ausmachen können. Diese Vermutung kann dann durch weitere konkrete Beispielbetrachtungen überprüft werden. [(B1)]

(2) Bei der Formulierung der Vermutung (bzw. der zu beweisenden Behauptung) ist darauf zu achten, dass ihr Allgemeingültigkeitscharakter herausgestellt wird, wodurch gleichsam auf die Unzulänglichkeit empirischer Verifikationen hingewiesen werden kann. [(B2)]

(3) Für die Konstruktion von schüleradäquaten Beweisen erscheint die Argumentation an konkreten (generischen bzw. paradigmatischen) Beispielen angemessen. Hierzu gehören insbesondere die folgenden Aspekte.

    I. Anhand konkreter Beispiele soll die gegebene Behauptung verifiziert und dabei eine beispielübergreifende Methode bzw. Strategie ausgemacht werden. [(B4), (F1), (F2), (S1)]
    II. Diese ausgemachte Strategie soll dann auf weitere konkrete Beispiele unverändert übertragen und schließlich derart verinnerlicht bzw. mental vollzogen werden, dass sich die Lernenden über die beispielübergreifende Tragweite dieser Methode bewusst werden. [(B4), (S2), (S3)]
    III. Der gefundene allgemeingültige Beweis soll dann von den Lernenden in eigenen Worten formuliert werden. [(B5)]
    IV. Das Zulassen von Argumenten, die von den Lernenden als intuitiv richtig akzeptiert werden und dabei nicht notwendigerweise vorher bewiesen worden sein müssen [(B3)]

(4) Der formale Beweis soll nach Möglichkeit erst dann formuliert werden, wenn die Lernenden eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit der Rechnung erlangt haben, da sich das Resultat als unabhängig von der Verwendung von konkreten Zahlenwerten erweist. [(B6)]

(5) Bei der Formulierung des formalen Beweises soll die Abhängigkeit der verwendeten Argumente zu vorherigen Beweisen betont werden. [(B7)]

---

bezieht sich (G#) auf den Abschnitt zu generischen Beweisen und (O#) auf den Abschnitt zu operativen Beweisen (Abschnitt 2.1.3).

(6) Am Ende des Prozesses sollen die Lernenden das Bewiesene in ihrer eigenen Sprache formulieren. [(B8)]

Damit Lernende dazu befähigt werden, entsprechende Beweise selbst zu führen, sind folgende Aspekte zu beachten:

(7) Im Unterricht sollen verschiedene Darstellungsweisen verwendet werden, um inhaltliche Grundideen herauszustellen und anschauliche Grundvorstellungen zu vermitteln. [(KB2)]
(8) Entsprechende Beweise müssen in das Unterrichtsgeschehen einbezogen werden. [(KB3)]
(9) Anschauliche Argumente sollen formalisiert werden. [(KB4)]
(10) Im Unterricht sollen auch formale Beweise geführt werden. [(KB5)]
(11) Im Unterricht soll über das Beweisen (in seinen verschiedenen Ausprägungen) reflektiert werden. [(KB6)]

4.3.2 Argumente für die Einbindung didaktisch orientierter Beweiskonzepte in die Lehrerausbildung

Die in diesem Abschnitt thematisierte Leitfrage zur Auswertung [2] lautet:

> *Welche Argumente werden durch die Urheber der didaktisch orientierten Beweiskonzepte angeführt, entsprechende Beweisformen in die Lehramtsausbildung zu integrieren?*

Bei den in Abschnitt 4.3.1 thematisierten Autoren wurden insgesamt die folgenden Argumente für die Einbindung didaktisch orientierter Beweiskonzepte in die Lehrerausbildung angeführt:

(1) Lehramtsstudierende müssen lernen, entsprechende Beweisproduktionen von Lernenden richtig einschätzen zu können. [(K1)]
(2) Lehramtsstudierende müssen entsprechende Beweisformen kennen, um die mathematische Beweisaktivität und damit einhergehende Aktivitäten in die schulmathematischen Rahmenbedingungen übertragen zu können. [(MW2), (KB7)]
(3) Lehramtsstudierenden wird durch den Einbezug entsprechender Beweisformen ein Einblick in die echte Mathematik bzw. eine vertiefte Einsicht in mathematische Zusammenhänge ermöglicht, wodurch sie insbesondere ein produktives Verhältnis zur Schulmathematik aufbauen können. [(K2), (MW1), (MW2)]
(4) Lehramtsstudierende üben bei der Konstruktion entsprechender Beweisformen die Verwendung anschaulicher Darstellungsmittel und somit die Kommunikation von mathematischen Sachverhalten in einer den Schülerinnen und Schülern angemessenen Sprache. [(MW3)]
(5) Der Einbezug von prämathematischen Beweisen ermöglicht erst die Diskussion um die Aspekte von Anschaulichkeit und Strenge. [(S6)]
(6) Der ausschließliche Umgang mit formalen Beweisen muss aus verschiedenen Gründen als problematisch angesehen werden:
    I. Viele Studierende haben Probleme, formale Beweise zu verstehen, und sie erleben durch diese die Mathematik als etwas Aufgedrängtes und nicht als etwas aktiv Gelerntes. [(S4)]
    II. Formale Beweise können bei Lehramtsstudierenden einen falschen Eindruck erwecken, wie man Mathematik unterrichten sollte. [(S5)]

4.3.3 Probleme und offene Fragen bzgl. der didaktisch orientierten Beweiskonzepte

Um mögliche Probleme und offene Fragen im Umgang mit den didaktisch orientierten Beweiskonzepten zu identifizieren, wurde eingangs die Leitfrage zur Auswertung [3] formuliert:

> *Welche offenen Fragen bzw. Probleme werden bei den Autoren für den Umgang mit entsprechenden Beweisformen thematisiert?*

Insgesamt können aus der in diesem Kapitel und der in Abschnitt 2.1.3 thematisierten Literatur die folgenden Problembereiche im Umgang mit didaktisch orientierten Beweiskonzepten zusammengetragen werden:

(1) Zunächst stellt sich die Frage, was überhaupt ein gutes generisches Beispiel ausmacht? [(F1)]
(2) Es ist eine offene (auch konzeptionelle) Frage, woher der Betrachter von Beweisen, die anhand konkreter Beispiele geführt werden, wissen soll, für welchen (generischen) Aspekt die angegebenen Beispiele exemplarisch stehen? [(G1)]
(3) Auch ist es unklar, wie sichergestellt werden kann, dass Lernende bei der Betrachtung entsprechender Beweisformen eine wirkliche Einsicht in die Allgemeingültigkeit der Verifikation erlangen. [(S7)]
(4) Es besteht die Gefahr, dass Lernende entsprechende Beweise als empirische Verifikationen fehlinterpretieren können. [(G2), (K3)]
(5) Lernende können selbst nur begrenzt über die Korrektheit entsprechender Beweisformen urteilen, da hierfür teilweise höhere mathematische Kenntnisse notwendig sind. [(KB1), (S8)]
(6) Es gilt, einen gewissen Bestand an entsprechenden geeigneten Beweisen für den Unterricht aufzubauen und Lehrkräften zur Verfügung zu stellen. [(K4)]
(7) Es müssen geeignete Unterrichtsszenarien entwickelte werden, in denen entsprechende Beweisformen sinnstiftend integriert werden können. [(S9)]
(8) Schließlich wird es als offene Forschungsfrage betrachtet, welche Rolle entsprechenden Beweisformen im unterrichtlichen Kontext tatsächlich zukommt. [(S10)]

5. Die verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" und die erfolgten Studien

In dem fünften Kapitel werden die verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" und die im Kontext dieser Durchführungen erfolgten Studien beschrieben. Die verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung, in Verbindung mit den verschiedenen Untersuchungen bilden die verschiedenen Zyklen des globalen Design-Based-Research-Projektes. Die hier betrachteten Durchgänge der Lehrveranstaltung sind die Zyklen eins bis drei in den Wintersemestern 2011/12 bis 2013/14. Die Version der Lehrveranstaltung, wie sie nach drei Forschungszyklen durchgeführt wurde, wird im Anschluss in Kapitel 6 dargestellt. Die Forschung, die im Kontext dieser vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 als Effektivitätsstudie durchgeführt wurde, ist Gegenstand des siebten Kapitels.

Zunächst werden im Folgenden die Entstehung der Lehrveranstaltung, ihre Einbettung in den Studienverlauf und die entsprechenden Rahmenbedingungen dargelegt, die zu der Konstruktion der Lehrveranstaltung führten (Abschnitt 5.1). Anschließend werden in chronologischer Reihenfolge die verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung (WS 2011/12, WS 2012/13 und WS 2013/14) und die im Kontext dieser Durchführungen erfolgten Studien beschrieben (vgl. Abbildung 17). Jede Darstellung eines Forschungszyklus (Intention, Durchführung und erfolgte Studien) wird mit einer retrospektiven Analyse beendet. Im Kontext dieser retrospektiven Analyse werden die Aspekte benannt, die wiederum zu einer Modifikation der Lehrveranstaltung geführt haben.

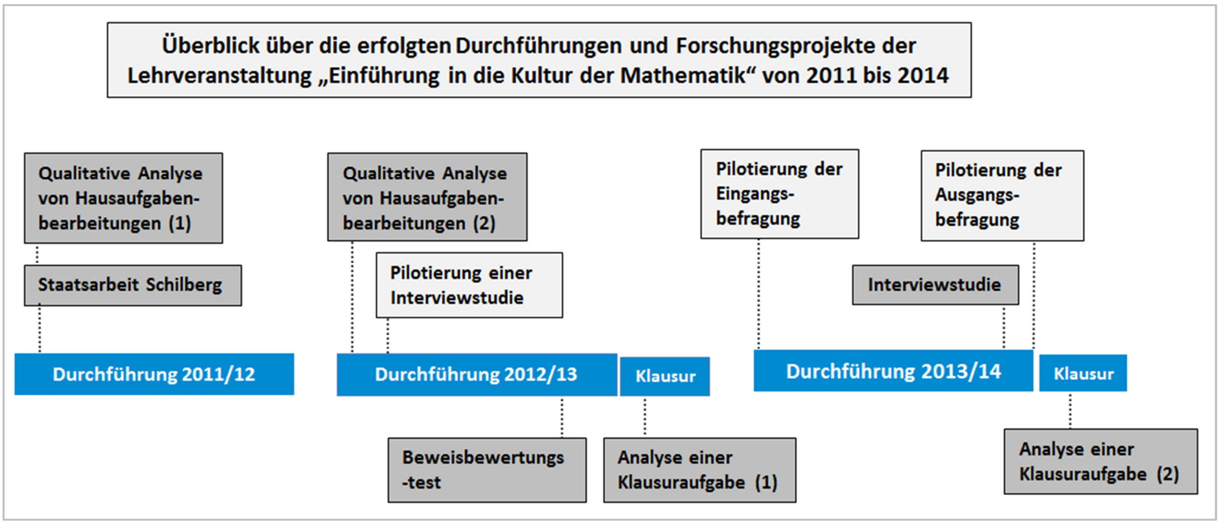


Abbildung 17: Überblick über die erfolgten Durchführungen und Forschungsprojekte der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" von 2011 bis 2014

5.1 Die Entstehung der Lehrveranstaltung, deren Einbettung in den Studienverlauf und die Rahmenbedingungen

In der seit dem Wintersemester 2011/12 gültigen neuen Studienordnung für das Bachelorstudium für Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen an der Universität Paderborn wird eine neue Lehrveranstaltung (Vorlesung mit Übung; 2 + 2 Semesterwochenstunden) mit dem Titel „Einführung in die Kultur der Mathematik" vorgesehen, welche sich an die Erstsemesterstudierenden richtet. Konzeptionell handelt es sich hierbei um eine Brückenkursveranstaltung, die den Studierenden den Übergang in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll. In der Studienordnung[25] steht bzgl. der zu erwerbenden fachlichen Kompetenzen (ebd., S. 10):

> Die Studierenden
>
> - verstehen Mathematik in ihren historischen und kulturellen Bezügen,
> - erläutern und reflektieren bei mathematischen Begriffsbildungen und Begründungen an ausgewählten Beispielen die Rolle von Alltagssprache, anschaulichen Darstellungsformen, Fachsprache und Formelsprache und stellen mathematische Sachverhalte in adäquater mündlicher und schriftlicher Form dar,
> - verstehen die Idee des Beweisens, insbesondere Prinzipien mathematischen Beweisens (z.B. Beweis durch Konstruktion, durch Widerspruch, durch vollständige Induktion) und ordnen das mathematische Beweisen in den Kontext anderer Begründungsformen (z.B. in Alltag, Natur- oder Kulturwissenschaften) ein,
> - überprüfen beim Vermuten und Beweisen mathematischer Aussagen fremde Argumente und bauen eigene Argumentationsketten auf,
> - erläutern das Prinzip des lokalen Ordnens und die Prinzipien des Aufbaus mathematischer Theorien (Axiome, Definitionen, Sätze) als Grundlagen mathematischen Tuns,
> - nehmen verschiedene Sichtweisen auf mathematisches Modellieren als Prozess zwischen realer Situation und mathematischem Modell ein,
> - modellieren inner- und außermathematische Situationen.

Als übergeordnete Leitidee der Lehrveranstaltung steht die Einführung in die Kultur der Mathematik. Bei der Konstruktion der Lehrveranstaltung stellt sich jedoch die Frage, wie diese fachlichen und ‚kulturellen' Aspekte der Mathematik für die Adressatengruppe der Lehramtsstudierenden für Haupt-, Real- und Gesamtschule zu interpretieren sind. Ein Grundanliegen besteht darin, neben der ‚fertigen' Mathematik auch der Prozesshaftigkeit der Wissenschaft gerecht zu werden. Als adäquater Inhaltsbereich wurde die Elementarmathematik der elementaren Zahlentheorie ausgewählt, in deren Kontext mathematische ‚Forschung' im Kleinen betrieben werden kann (vgl. Abschnitt 1.2.3): In exemplarischen ‚Forschungsprojekten' sollen die Studierenden Entdeckungen machen, Vermutungen und Hypothesen formulieren, diese widerlegen bzw. beweisen. Am Ende solcher Arbeitsprozesse steht schließlich ‚sicheres' Wissen in Form von Sätzen (vgl. Biehler und Kempen 2014, S. 122f.). Das Bestehen der Lehrveranstaltung (und damit des entsprechenden Moduls) wird in der Regel durch das Bestehen einer 120-minütigen Klausur erreicht.

Die Lehrveranstaltung umfasst pro Woche eine Vorlesungssitzung (1,5 Stunden) und eine Kleingruppenübung mit ca. 30 Personen (1,5 Stunden). Zusätzlich wird einmal pro Woche eine Zentralübung (1,5 Stunden) angeboten, in der die wöchentlichen Hausaufgaben besprochen werden. Die Teilnahme an der Zentralübung ist dabei freiwillig.

[25] http://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/Didaktik_der_Mathematik/Studienordnungen/BA_MathematiK_HRGe_20110928.pdf

Die im Folgenden beschriebenen Veränderungen der Lehrveranstaltung wurden in gemeinsamer Diskussion des Autors mit Rolf Biehler entwickelt und basieren auf den bis dato gemachten Lehrerfahrungen und erhaltenen Forschungsergebnissen. Im Rahmen dieser Forschungsarbeit wurden zu allen Vorlesungssitzungen Mitschriften angefertigt und in allen Durchgängen ausgewählte Hausaufgabenbearbeitungen der Studierenden eingescannt. Auf der Grundlage der Mitschriften der Vorlesungen wurde nach jeder Durchführung der Lehrveranstaltung ein Skript verfasst. Dieses Skript diente dann, in Verbindung mit den gemachten Lehrerfahrungen und gewonnenen Forschungserkenntnissen, als Grundlage für die Gestaltung der nächsten Durchführung der Veranstaltung.

5.2 Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

In dem vorliegenden Abschnitt wird die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ beschrieben, wie sie im Wintersemester 2011/12 durch Rolf Biehler entwickelt und zusammen mit zwei wissenschaftlichen Mitarbeitern zum ersten Mal durchgeführt wurde. Diese erste Durchführung der Lehrveranstaltung stellt gleichermaßen den Ausgangspunkt der vorliegenden Forschungsarbeit dar, an der der Autor dieser Arbeit nicht beteiligt war. Im Folgenden werden zunächst die Inhalte der ersten beiden Kapitel der Vorlesung („Beweisen und Entdecken in der Arithmetik“ und „Figurierte Zahlen“)[26] skizziert. Da der Fokus dieser Forschungsarbeit auf den Methoden und Inhalten dieser beiden Kapitel liegt, werden die anderen Kapitel der Lehrveranstaltung nicht besprochen. Betrachtungsgegenstände sind weiter die den Studierenden gestellten Haus- und Präsenzaufgaben. Im Anschluss an diese Darstellungen wird neben der explorativen Analyse von Beweisproduktionen der Studierenden noch auf eine darauf aufbauende Studie zum operativen und formalen Beweis eingegangen. Beide Studien hatten, neben der gemachten Lehrerfahrung, Auswirkungen auf die weitere Gestaltung der Lehrveranstaltung. Der Abschnitt endet mit einer retrospektiven Analyse dieses ersten Durchgangs der Lehrveranstaltung.

5.2.1 Die erste Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12

Für die Beschreibung der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung wird im Sinne der Forschungsmethode des Design-Based Research zunächst die intentionale Dimension der Lehrveranstaltung in Verbindung mit ihren Inhalten aufgezeigt.

5.2.1.1 Die intentionale Dimension der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung

Die intentionale Dimension der von Rolf Biehler konzipierten Lehrveranstaltung wird anhand der in Abschnitt 1.3 herausgearbeiteten Leitprinzipien dargestellt. Für den Kontext dieser Arbeit sind dabei die Inhalte der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung von Relevanz.

Durch den Einstieg in die Vorlesung mit Teilbarkeitsfragen in den natürlichen Zahlen (s.u.) soll direkt an schulische Vorerfahrungen angeknüpft werden. Dabei wird zunächst auf die Vorgabe exakter Definitionen und Sätze verzichtet, da das angenommene Vorwissen der Lernenden aus ihrer Schulzeit akzeptiert und produktiv genutzt werden soll. In Anlehnung an Begründungsformen der Schulmathematik werden operative Beweise dazu verwendet, den Studierenden schuladäquate und

[26] Die Inhalte der Lehrveranstaltung waren im Wintersemester 2011/12 in die folgenden fünf Kapitel gegliedert: (1) „Beweisen und Entdecken in der Arithmetik“, (2) „Figurierte Zahlen“, (3) „Zahlenfolgen und vollständige Induktion“, (4) „Beweistypen und logisches Schließen“ und (5) „Modellieren mit Zahlenfolgen“.

nicht-symbolisch dargestellte Begründungsformen für ihre spätere Lehrpraxis zu vermitteln und sie dann zu den formalen Beweisen der Hochschulmathematik zu führen. Der Inhaltsbereich der Elementarmathematik (hier: Teilbarkeit in den natürlichen Zahlen) soll den Studierenden mathematisches Arbeiten (‚Forschen') im Kleinen ermöglichen, wobei der Prozesscharakter der Mathematik verdeutlicht werden soll. Der Einbezug von Punktmusterdarstellungen ist dabei zunächst als weiteres Betätigungsfeld des mathematischen Tuns zu verstehen. Hierzu kommt, dass diese ‚inhaltlich-anschaulichen' Darstellungen einerseits den Studierenden selbst bei ihrem Lernfortschritt helfen, ihnen andererseits als eine schuladäquate Kommunikationsform der Mathematik nähergebracht werden sollen. Durch die Themenorientierung an der Teilbarkeit, das Aufgreifen und Vermitteln von Begründungsformen der Schulmathematik und den Einbezug von inhaltlich-anschaulichen Darstellungsmitteln kann ein stetiger Schulbezug hergestellt werden.

Das erste Kapitel „Beweisen und Entdecken in der Arithmetik" beginnt mit einer expliziten problemzentrierten Erarbeitung der Thematik. Über die Frage nach der Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen wird der erste ‚Forschungsprozess' initiiert. Die Frage nach der Teilbarkeit von $k \in \mathbb{N}$ aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch k überspannt dabei das gesamte erste Kapitel. Im Rahmen der Behandlung dieser Frage sollen den Studierenden u.a. verschiedene Heuristiken des mathematischen Arbeitens vermittelt werden. Über die Methode der ‚Algebraisierung' von Sachverhalten soll dann, auch über das Medium des operativen Beweises, die mathematische Symbolsprache sinnstiftend eingeführt und vermittelt werden. Im Kontext dieser mathematischen Tätigkeit, dem Beweisen von Behauptungen und der Formulierung von Definitionen und Sätzen, kann in besonderer Weise Meta-Wissen über Mathematik thematisiert und vermittelt werden. Das Leitprinzip ‚intellektueller Ehrlichkeit' wird im ersten Kapitel besonders dadurch berücksichtigt, dass bei dem Themengebiet der Teilbarkeit zunächst auf fachmathematische Definitionen und Sätze verzichtet wird, dabei aber zu dem exakten Teilbarkeitsbegriff der Hochschulmathematik hingeführt wird. Auch soll hier betont werden, dass ‚operative Beweise' in dieser Arbeit als intellektuell-ehrliche Übertragung der Beweisaktivität betrachtet werden (vgl. Abschnitt 8.3.2), wie auch mathematische Tätigkeit im Diagrammsystem der Punktmuster. Die innerhalb des ersten Kapitels erlernten Arbeitsweisen der Mathematik (Explorieren, Vermutungen aufstellen, Behauptungen formulieren und beweisen) sollen im zweiten Kapitel im Kontext der figurierten Zahlen geübt und vertieft werden.

5.2.1.2 Kapitel 1 „Beweisen und Entdecken in der Arithmetik"

In diesem Abschnitt wird ein Einblick darin gegeben, welche Inhalte wie in dem ersten Kapitel der Lehrveranstaltung bei ihrer ersten Durchführung vermittelt wurden und wie diese Inhalte in einen Prozess mathematischer Wissensgewinnung eingebettet waren. Die Inhalte des ersten Kapitels der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12 werden im Folgenden anhand von Studierendenmitschriften ‚rekonstruiert'. Die durch den Dozenten Rolf Biehler gegebenen mündlichen Erläuterungen zu diesem Tafelanschrieb können dabei nicht wiedergegeben werden. Bei den zitierten Auszügen des Anschriebs wird deutlich werden, dass in diesen Vorlesungen bereits mehr Aspekte, als in ‚normalen' Fachveranstaltungen üblich, in den Tafelanschrieb übernommen wurden (etwa reflektierende Elemente oder Meta-Aspekte zum Vorgehen). Für eine bessere Lesbarkeit und Verständlichkeit der Darstellung der Inhalte werden die Elemente des Tafelanschriebs in einer kleineren Schriftgröße und eingerückt niedergeschrieben, begleitende Kommentare des Autors sind in der ‚normalen' Schriftgröße gesetzt.

Kapitel 1 „Beweisen und Entdecken in der Arithmetik“

Die folgende Behauptung bildet den Ausgangspunkt des ersten Kapitels:

„Jemand behauptet: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch drei teilbar.“

Für die Untersuchung einer Behauptung werden drei verschiedene Strategien unterschieden:

1. Die Überprüfung einer Behauptung an einigen Zahlenbeispielen
2. Operative Beweise
3. Beweise mit Variablen

Diese Strategien werden anschließend exemplarisch vorgeführt:

Strategie 1: Überprüfung der Behauptung an konkreten Zahlenbeispielen

$1+2+3=6, \quad 2+3+4=9, \quad 3+4+5=12$

$10+11+12=33$, wobei $33:3=11$,

$500+501+502=1503$, wobei $1503:3=501$

Dabei wird die Entdeckung gemacht, dass in den Beispielen nach der Division durch 3 immer die mittlere Zahl als Ergebnis herauskommt, was zu einer neuen Behauptung führt:

Behauptung (*):
Die Summe von drei aufeinanderfolgenden (natürlichen) Zahlen ist immer durch drei teilbar und der Quotient ist die mittlere Zahl.

Zur Verifikation dieser Behauptung wird die folgende mögliche Lösung eines Schülers Martin präsentiert und im Plenum diskutiert.

$$1+2+3=(2-1)+2+(2+1)=2+2+2=3\cdot 2$$
$$50+51+52=(51-1)+51+(51+1)=51+51+51=3\cdot 51$$

Das geht genauso mit allen Zahlen.

Als Ergebnis der Diskussion wird diese Begründung des Schülers Martin wie folgt gewertet:

Martin stellt Operationen mit Zahlen an, die genauso mit allen anderen Zahlen machbar wären. Damit ist es etwas anderes als die vorherigen Überlegungen zu unserem Ausgangsproblem. Es ist ein „operativer Beweis“ und ist als allgemeingültig zu bewerten. Weiter liefert er auch eine Erklärung, warum die mittlere Zahl als Quotient auftaucht.

Im Kontrast zum Vorgehen im operativen Beweis werden anschließend Variablen eingeführt, um die Allgemeingültigkeit der Umformungen auszudrücken. Auch werden die ‚Leistungen‘ dieses Beweises vermerkt:

mittlere Zahl: n, Startzahl: $n-1$, Summe S_n

Behauptung: $S_n=3n$ für alle $n\geq 2$.

Beweis
Für alle $n\geq 2$ gilt: $S_n = (n-1)+n+(n+1)=3n$.

Satz 1
Für alle $n\geq 2$ gilt: $(n-1)+n+(n+1)=3n$.

Leistung des Beweises:

(1) Verifikation für alle $n \geq 2$
(2) Die Umformung erklärt, warum die mittlere Zahl als Quotient auftaucht.
(3) Die Benutzung von Variablen stellt sicher, dass nur Operationen verwendet werden, die für alle Zahlen möglich sind.

Die Frage nach einer möglichen Verallgemeinerung der gemachten Entdeckung eröffnet den Weg für das weitere Forschungsvorhaben: Wie sieht es mit der Teilbarkeit bei $4, 5, 6, \ldots$ aufeinanderfolgenden Zahlen aus? Diese verschiedenen Fälle werden nun sukzessiv untersucht:

$n = 4$:

$5 + 6 + 7 + 8 = 26$ ist nicht durch 4 teilbar.

$6 + 7 + 8 + 9 = 30$ ist nicht durch 4 teilbar.

Vermutung: Diese Summen sind nie durch 4 teilbar.

$n = 5$:

$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ und $25 : 5 = 5$, $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ und $20 : 5 = 5$

Vermutung: Diese Summen sind immer durch 5 teilbar.

$n = 6$: $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$ ist nicht durch 6 teilbar

$n = 7$: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 91$ ist durch 7 teilbar

$n = 8$: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 91$ ist nicht durch 8 teilbar

$n = 9$: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 91$ ist durch 9 teilbar

$n = 2$: $gerade\ +\ ungerade = ungerade, n + (n + 1) = 2n + 1$

Diese Untersuchungen führen schließlich zu den folgenden Vermutungen, die anschließend, nach Einführung einer neuen Notation, als Satz formuliert werden:

Vermutung (**)

(1) Wenn k ungerade ist, dann ist die Summe von k aufeinanderfolgenden Zahlen durch k teilbar.
(2) Wenn k gerade ist, dann ist die Summe von k aufeinanderfolgenden Zahlen nicht durch k teilbar.

$S_{n,k}$: $=$ *Summe von k aufeinanderfolgenden Zahlen mit der Startzahl n.*

Satz:
Für alle $k \geq 2$ und jede natürliche Startzahl n gilt: $S_{n,k}$ ist genau dann durch k teilbar, wenn k ungerade ist.

Um die Vermutung (**) bestätigen zu können, wird mithilfe algebraischer Terme weitergerechnet, um Strukturen zu erkennen:

$k = 2$: $S_{n,2} = n + (n + 1) = 2n + 1$
$k = 3$: $S_{n,3} = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$
$k = 4$: $S_{n,4} = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4\left(n + \frac{3}{2}\right)$
$k = 5$: $S_{n,5} = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$
$k = 6$: $S_{n,6} = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 6n + 15 = 6(n + \frac{15}{2})$

k		Teilbarkeit durch k
7:	$7n + 21$	+
8:	$8n + 28$	-
9:	$9n + (28 + 8)$	+
10:	$10n + (36 + 9)$	-
11:	$11n + (45 + 10)$	+

Man kann verallgemeinern, es gilt: $S_{n,k} = k \cdot n + (1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1))$

Die Frage nach der Teilbarkeit von $S_{n,k}$ durch k lenkt den Fokus auf die folgende Summe:

$(1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1))$

Somit gelangt man zu einem Teilproblem, das es zunächst zu lösen gilt.

Typisch für das Beweisen: Man kommt auf ein Teilproblem. Wäre das gelöst, käme man weiter.

Teilproblem: $D_{k-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)$ für $k \geq 2$.
Wir suchen eine Formel für D_{k-1}, um die Teilbarkeit durch k zu untersuchen.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
D_{k-1} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & k-1 \\
+ & & + & & + & & + & & + & & + \\
D_{k-1} & = & k-1 & + & k-2 & + & k-3 & + & \ldots & + & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{k-1} + D_{k-1} &= k \cdot (k-1) \\
2 \cdot D_{k-1} &= k \cdot (k-1) \\
D_{k-1} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-1)
\end{aligned}
$$

Es gilt: $D_{k-1} = \frac{k(k-1)}{2}$

Nach der Lösung des Teilproblems kann nun die Ausgangsfrage weiter untersucht werden:

Zwischenstand: $S_{n,k} = k \cdot n + \frac{k(k-1)}{2}$

Wann ist diese Zahl durch k teilbar? Beweisstrategie: Man versuche k auszuklammern:

$S_{n,k} = k \cdot [\, n + \frac{(k-1)}{2} \,]$, also: $\frac{S_{n,k}}{k} = \; n + \frac{(k-1)}{2}$

<u>Fall 1:</u> Für gerade k ist $k-1$ ungerade und $\frac{(k-1)}{2}$ ist keine natürliche Zahl.

<u>Fall 2:</u> Für ungerade k ist $k-1$ gerade und $\frac{(k-1)}{2}$ ist keine natürliche Zahl.

Fazit:

(1) Falls k ungerade $\Rightarrow S_{n,k}$ ist durch k teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Falls k gerade $\Rightarrow S_{n,k}$ ist nicht durch k teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

In einer Aussage formuliert: $S_{n,k}$ ist durch k teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn k ungerade ist.

Noch anders formuliert:

(1) k ungerade $\Rightarrow S_{n,k}$ für alle natürlichen Zahlen n durch k teilbar.
(2) $S_{n,k}$ für alle natürlichen Zahlen n durch k teilbar $\Rightarrow k$ ungerade.

Begründung für (2):

Voraussetzung: $S_{n,k}$ ist durch k teilbar für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow k \cdot n + \frac{k(k-1)}{2}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch k teilbar
$\Rightarrow (k-1)$ ist gerade $\Rightarrow k$ ist ungerade

Somit ist der Satz bewiesen und der Forschungsprozess abgeschlossen. Dieser Prozess wird daraufhin reflektiert. Weiter wird dargestellt, wie in der ‚Fachliteratur' entsprechende Ergebnisse notiert werden.

Reflexion:

Nach Aufstellen der Behauptung wurde entdeckt und begründet: „Mathematik als Prozess". Üblicherweise werden solche Ergebnisse beim Aufschreiben des Beweises noch einmal neu geordnet. Und teilweise wird der Entdeckungsprozess hierbei kaschiert. Das könnte in etwa so aussehen:

Definition:
Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sei: $S_{n,k} := n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n + (k-1))$.

Satz:
Mit obiger Definition gilt: $S_{n,k}$ ist genau dann durch k teilbar, wenn k ungerade ist.

Beweis:
Es gilt:
Hilfssatz: $1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ für alle $k \geq 2$.

„$\Rightarrow$": Sei k ungerade: Dann folgt: $S_{n,k} = k \cdot n + \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow \frac{S_{n,k}}{k} = n + \frac{(k-1)}{2}$ ist eine natürliche Zahl, also ein Vielfaches von k.

„$\Leftarrow$": Sei $S_{n,k}$ durch k teilbar, dann gilt: $\frac{S_{n,k}}{k} = n + \frac{(k-1)}{2}$ ist eine natürliche Zahl. $\Rightarrow k$ ist ungerade.

q.e.d.

Schließlich soll den Studierenden verdeutlich werden, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, eine Behauptung zu beweisen.

Oft gibt es nicht nur einen Beweis: Wir hatten bereits die folgende Entdeckung gemacht (jeweils mit der Startzahl 1):

$$\begin{aligned} k = 2: &\quad 1 + 2 = 3 \\ k = 3: &\quad 1 + 2 + 3 = 6 \\ k = 4: &\quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ k = 5: &\quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \end{aligned}$$

Wie entstehen daraus Aussagen über andere Startzahlen? Für $k = 2$ haben wir:

	Startzahl				Summe
$n = 1$	1	$+$	2	$=$	3
	$\downarrow +1$		$\downarrow +1$		$\downarrow +2$
$n = 2$	2	$+$	3	$=$	5
	$\downarrow +1$		$\downarrow +1$		$\downarrow +2$
$n = 3$	3	$+$	4	$=$	7
	$\downarrow +1$		$\downarrow +1$		$\downarrow +2$
…					
n	n	$+$	$(n+1)$	$=$	$2n+1$
	$\downarrow +1$		$\downarrow +1$		$\downarrow +2$
$n+1$	$(n+1)$	$+$	$(n+2)$	$=$	$2n+3$

Für die Startzahl $n = 1$ ist die Summe ungerade. Bei jedem Schritt zur nächst höheren Startzahl erhöht sich die Summe um zwei. Die Summen bleiben somit immer ungerade (und damit nicht durch $k = 2$ teilbar.)

Diese Betrachtung wird auf die Summen von k aufeinanderfolgenden Zahlen mit Startzahl n ($S_{n,k}$) übertragen.

Sei k eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$n = 1$	$S_{1,k} =$	1	$+$	2	$+$	…	$+$	k
	$\downarrow +k$	$\downarrow +1$		$\downarrow +1$				$\downarrow +1$
$n = 2$	$S_{2,k} =$	2	$+$	3	$+$	…	$+$	$(k+1)$
…								
n	$S_{n,k} =$	n	$+$	$(n+1)$	$+$	…	$+$	$(n+(k-1))$

Aus diesen Überlegungen folgt:

Ist $S_{1,k}$ durch k teilbar, dann ist es auch $S_{2,k} = S_{1,k} + k$.

Ist $S_{1,k}$ nicht durch k teilbar, dann kann es $S_{2,k} = S_{1,k} + k$ auch nicht sein.

Für die Startzahl n gilt dann:

Ist $S_{1,k}$ durch k teilbar, dann ist es klar, dass $S_{n,k} = S_{1,k} + k \cdot (n-1)$ auch durch k teilbar ist.

Ist $S_{1,k}$ nicht durch k teilbar, dann ist es $S_{n,k} = S_{1,k} + k \cdot (n-1)$ auch nicht.

Um den Satz zu beweisen, reicht es also, die Summen mit Startzahl 1 zu betrachten:

$$S_{1,k} = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(das wurde bereits oben gezeigt)}$$

$\frac{S_{n,k}}{k} = n + \frac{(k+1)}{2}$ und $\frac{(k+1)}{2}$ ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn k ungerade ist.

q.e.d.

5.2.1.3 Kapitel 2 „Figurierte Zahlen"

Im Gegensatz zu der Darstellung des ersten Kapitels (s.o.) werden die Inhalte des zweiten Kapitels für eine bessere Nachvollziehbarkeit paraphrasierend zusammengefasst. Im Folgenden wird daher nicht zwischen gegebenem Tafelanschrieb durch den Dozenten und begleitenden, strukturgebenden Kommentaren des Autors unterschieden.

Kapitel 2 „Figurierte Zahlen"

Die Dreieckszahlen

Zu Beginn des zweiten Kapitels werden die Dreieckszahlen eingeführt. Neben der Darstellung der konkreten Dreieckszahlen D_1, D_2, D_3 und D_4 werden auch das ‚allgemeine' Punktmuster zu D_k ($k \in \mathbb{N}$) mit geometrischen Variablen und die explizite Formel $D_k = \frac{k(k+1)}{2}$ zur Berechnung angegeben (vgl. Abbildung 18). Diese Formel wird anschließend auch geometrisch hergeleitet.

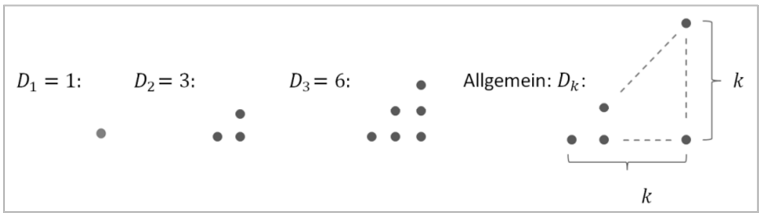


Abbildung 18: Die ersten drei Dreieckszahlen (D_1, D_2 und D_3) und das ‚allgemeine' Punktmuster zu D_k

Nachdem zunächst das Zusammenlegen der zwei Dreieckszahlen D_4 betrachtet wird, wird anschließend eine ‚allgemeine' Begründung („operativ-graphisch") der expliziten Formel für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben (s. Abb. 19).

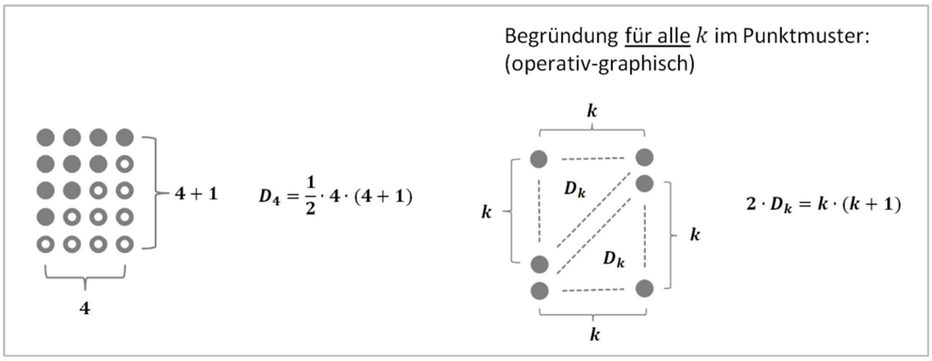


Abbildung 19: Herleitung der Summenformel für Dreieckszahlen; links über das Zusammenlegen zweier konkreter Dreieckszahlen, rechts über das Zusammenlegen zweier allgemeiner Dreieckszahlen D_k als „operativ-graphischer Beweis".

Die Quadratzahlen

Nach der Einführung der Quadratzahlen ($Q_k = k^2, k \in \mathbb{N}$) wird deren Bezug zu den Dreieckszahlen verdeutlicht. Dies geschieht durch die Unterteilung des konkreten Punktmusters Q_5 in D_4 und

D_5 (Abb. 20). Auch dieser Zusammenhang wird durch einen „operativ-graphischen Beweis“ verifiziert. Schließlich wird der Zusammenhang auch algebraisch nachgewiesen.

$Q_5 = D_4 + D_5, D_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10, D_5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

$D_4 + D_5 = 10 + 15 = 25$

Für die allgemeine Darstellung gilt:

$D_k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$, $D_{k-1} = \frac{(k-1) \cdot k}{2}$

$D_k + D_{k-1} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k+1)+k(k-1)}{2} = \frac{k((k+1)+(k-1))}{2} = \frac{2k^2}{2}$
$= k^2 = Q_k$

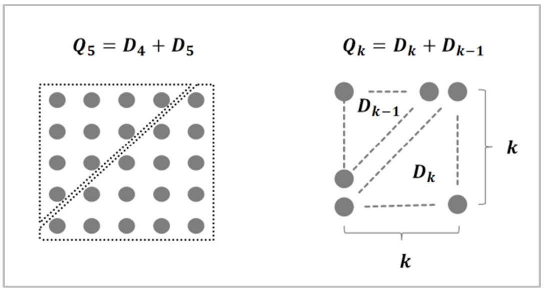


Abbildung 20: Unterteilung einer Quadratzahl in zwei Dreieckszahlen; links: Unterteilung einer konkreten Quadratzahl in zwei konkrete Dreieckszahlen, rechts: ‚Allgemeine‘ Darstellung

Bei der Betrachtung der Differenzenfolge $d_k := Q_k - Q_{k-1}$ für $k \geq 2$ wird die Entdeckung gemacht, dass die Differenzen in den betrachteten Fällen immer ungerade Zahlen sind:

Q_k	1		4		9		16		25		36		49
d_k		3		5		7		9		11		13	

Diese Entdeckung wird algebraisch verifiziert:
$Q_k - Q_{k-1} = k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1.$

Es folgt hieraus, dass die Summe der ersten $k \epsilon \mathbb{N}$ ungeraden Zahlen genau gleich k^2 ist.

Die Sechseckzahlen

Bei den Sechseckzahlen werden zunächst konkrete Folgenwerte $(1, 7, 19, 37, 61)$ betrachtet. Bei der Betrachtung der Differenzen $(6, 12, 18, 24, 30)$ wird die Vermutung aufgestellt, dass diese immer um 6 größer werden. Die Gültigkeit der entsprechenden Rekursionsformel $H_k = H_{k-1} + 6(k-1)$ wird an einem „allgemeinen Diagramm für einen operativen Beweis“ (Abb. 21) nachgewiesen.

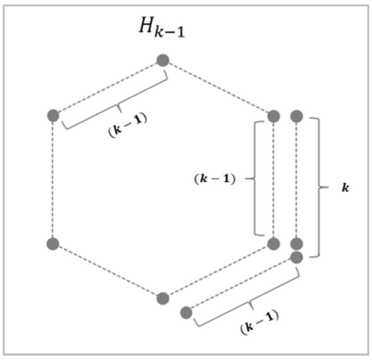


Abbildung 21: Graphische Darstellung des Übergangs einer Sechseckzahl zur nächst größeren

Zum Abschluss der Sechseckzahlen wird mithilfe der Rekursionsformel noch die explizite Formel für die Sechseckzahlen hergeleitet: $H_k = 3k^2 - 3k + 1$.

Die Kubikzahlen

Bei der Betrachtung der Kubikzahlen ($C_k = k^3, k \epsilon \mathbb{N}$) werden mithilfe einer Tabelle die Differenzen $C_k - C_{k-1}$ untersucht und die Entdeckung gemacht, dass diese ‚anscheinend‘ immer die Sechseckzahlen sind. Diese Frage wird algebraisch beantwortet.

$$C_k - C_{k-1} = k^3 - (k-1)^3 = k^3 - (k-1)(k-1)^2$$
$$= k^3 - (k-1)(k^2 - 2k + 1)$$

$$= k^3 - [k^3 - 2k^2 + k - k^2 + 2k - 1]$$
$$= k^3 - k^3 + 2k^2 - k + k^2 - 2k + 1$$
$$= 3k^2 - 3k + 1$$

Abschließend wird anhand einer Grafik besprochen, wie dieses Phänomen anhand der Formel („$3k^2 - 3k + 1$“) geometrisch interpretiert werden kann.

5.2.1.4 Die verwendeten Übungsaufgaben

In dem folgenden Abschnitt wird der Frage nachgegangen, inwieweit sich die Anliegen der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung (hierzu zählen u.a.: Exploration von Sachverhalten, Entdecken von Regelmäßigkeiten in der Arithmetik und im Kontext der figurierten Zahlen) in den verwendeten Übungsaufgaben widerspiegeln[27]. Dabei geht es auch um die Frage, inwieweit innerhalb der Präsenz- und Hausaufgaben Aufgabenstellungen auftraten, in denen sich die Studierenden mit dem Konzept des operativen Beweises vertraut machen und diese Beweisform einüben konnten. Diese Fragen bilden den Fokus, unter deren Perspektive die verwendeten Übungsaufgaben im Folgenden betrachtet werden.

Präsenzaufgaben im Wintersemester 2011/12

In den Präsenzaufgaben zu der Lehrveranstaltung wurden im Wintersemester 2011/12 ausschließlich formale Beweise verlangt (Präsenzübung 1, 2 und 5), wobei zu dem Themenbereich „Figurierte Zahlen“ keine Aufgaben gestellt wurden. Während in den Präsenzübungen Nummer 3 und 4 die vollständige Induktion thematisiert wurde, fokussierten die Aufgaben der Präsenzübungen sechs bis zehn Zahlenfolgen und das Modellieren mit diesen.

Im Rahmen der Thematik der Teilbarkeit wurde eine Aufgabe gestellt, die explorative Elemente enthält. Diese ist der Aufgabenteil (b) der ersten Aufgabe des ersten Präsenzübungszettels:

Präsenzübung 1, Aufgabe 1:

Man nehme eine natürliche Zahl $p \geq 2$ und multipliziere den Vorgänger $(p-1)$ und den Nachfolger $(p+1)$, so dass man eine Zahl $z = (p-1) \cdot (p+1)$ erhält.

(a) Beweisen Sie formal:
   1. Wenn p eine ungerade Zahl ist, dann ist z gerade.
   2. Wenn z gerade ist, dann ist p ungerade.

(b) Schauen Sie sich die Tabelle auf der Rückseite an. Hier werden die Teilbarkeit von z durch 3, 8 und 24 überprüft. Leiten Sie aus der Tabelle weitere Aussagen über Teilbarkeit von $(p-1) \cdot (p+1)$ durch 3, 8 und 24 her. Formulieren Sie zunächst Vermutungen. Anschließend überprüfen Sie die Vermutung an neuen Beispielen von p bzw. z, die noch nicht in der Tabelle enthalten sind. […] Beweisen Sie anschließend ihre Aussagen.

				Bei Teilen von (p-1)(p+1) ergibt sich folgendes Ergebnis:		
p	p-1	p+1	(p-1)(p+1)	3	8	24
1						
2	1	3	3	1		
3	2	4	8		1	
4	3	5	15	5		
5	4	6	24	8	3	1
6	5	7	35			
7	6	8	48	16	6	2
8	7	9	63	21		
9	8	10	80		10	
10	9	11	99	33		
11	10	12	120	40	15	5
12	11	13	143			
13	12	14	168	56	21	7
14	13	15	195	65		
15	14	16	224		28	
16	15	17	255	85		
17	16	18	288	96	36	12
18	17	19	323			
19	18	20	360	120	45	15
20	19	21	399	133		
21	20	22	440		55	
22	21	23	483	161		
23	22	24	528	176	66	22
24	23	25	575			

[27] Für die wöchentlich stattfindenden Präsenzübungen in Kleingruppen wurden Aufgabenzettel mit Präsenzaufgaben erstellt. Darüber hinaus mussten die Studierenden pro Woche einen Hausaufgabenzettel mit umfangreicheren Aufgaben für das Erhalten der ‚Studienleistung‘ bearbeiten.

Abbildung 22: Tabelle bzgl. der Teilbarkeit des Produkts $(p+1)(p-1)$ durch 3, 8 und 24, wobei $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

Als Lösung der Teilaufgabe (b) kann dabei z.B. festgestellt werden, dass die folgenden Beziehungen für die Zahlen aus der Tabelle ($p = 1, 2, \ldots, 24$) gelten (i) p ungerade $\Rightarrow 8 \mid (p-1)(p+1)$, (ii) $24 \mid (p-1)(p+1) \Rightarrow$ p ungerade , (iii) p ungerade und $3 \nmid p$ $\Rightarrow$ $24 \mid (p-1)(p+1)$. Es wurde anschließend die Frage aufgeworfen, ob man diese Aussagen auf alle natürlichen Zahlen verallgemeinern kann und zu Beweisversuchen motiviert.

Zu den im Wintersemester 2011/12 verwendeten Präsenzaufgaben kann bereits hier angemerkt werden, dass innerhalb der Aufgaben vor allem formale Beweise thematisiert wurden. Dies ist wohl darauf zurückzuführen, dass der operative Beweis zentraler Bestandteil der ersten Vorlesungssitzungen gewesen und man der Ansicht war, dass dieses Konzept damit ausreichend behandelt worden sei.

Die Hausaufgaben im Wintersemester 2011/12

Auch in den Hausaufgaben zu der Lehrveranstaltung wurden im Wintersemester 2011/12 fast ausschließlich formale Beweise verlangt, wobei hier von ‚symbolischen' Beweisen gesprochen wurde. Im Rahmen der insgesamt 12 Hausaufgabenzettel wurden nur zwei operative Beweise verlangt, beide auf dem ersten Hausaufgabenzettel:

Hausaufgabenblatt 1, Aufgabe 2

Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen jeweils operativ und symbolisch. Formulieren Sie vor dem symbolischen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen.

a) Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.
b) Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist gleich dem Produkt aus dem Vorgänger und Nachfolger plus eins.

Zu der Thematik ‚Figurierte Zahlen' wurde eine Aufgabe gestellt, in deren Rahmen eine Behauptung an einem „allgemeinen Punktmuster" (s.u.) begründet werden sollte. In einer anderen Aufgabe wurde die Struktur von einem Zahlenmuster thematisiert (s.u.).

Hausaufgabenblatt 2, Aufgabe 2

Es gibt verschiedene sogenannte figurierte Zahlen. Dazu gehören neben den Dreieckszahlen D_k auch die Quadratzahlen $Q_k := k^2$ für $k \in \mathbb{N}$ (siehe Vorlesung). Die Dreieckszahlen lassen sich mittels dreieckiger regelmäßiger Punktmuster veranschaulichen, die Quadratzahlen durch quadratische regelmäßige Punktmuster - dabei entspricht der Zahlenwert D_k bzw. Q_k jeweils der in der Figur dargestellten Anzahl der Punkte. Für Quadratzahlen gilt der folgende mathematische Satz:

(*) Wenn man die ersten n ungeraden Zahlen addiert, erhält man die n-te Quadratzahl Q_n.

a) Begründen Sie anhand der jeweiligen quadratischen Punktmuster, dass die Aussage aus (*) für die Fälle $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ richtig ist. (Hinweis: Schauen Sie sich dazu, bevor Sie Ihre Begründung aufschreiben, zunächst die vier zugehörigen Punktmuster in der obigen Reihenfolge gut an, und vergleichen Sie sie miteinander.)
b) Begründen Sie nun für den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ anhand einer geeigneten graphischen Skizze des zugehörigen allgemeinen Punktmusters die Richtigkeit der Aussage (*).

c) Beweisen Sie den Satz (*) formal. (Hinweis: Es sind verschiedene Beweise möglich. Sie können z.B. einen „Beweistrick“, den Sie aus der Vorlesung kennen, auf diesen Fall übertragen.)

Hausaufgabenblatt 2, Aufgabe 3

Es seien die folgenden vier regelmäßigen Punktmuster gegeben:

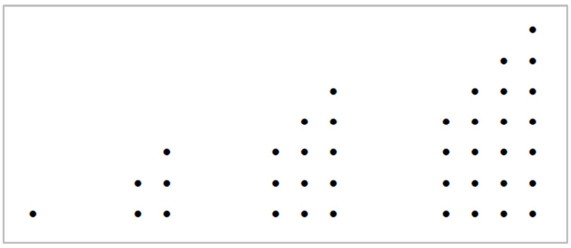


Abbildung 23: Punktmusterdarstellungen mit figurierten Zahlen

Das erste Punktmuster (ganz links) gehöre zum Fall $n = 1$, das zweite (also der rechte Nachbar) zum Fall $n = 2$, das dritte zum Fall $n = 3$ und das vierte zum Fall $n = 4$ (ganz rechts). Die Anzahl der Punkte des n-ten Musters bezeichnen wir mit S_n.

a) Bestimmen Sie S_1, S_2, S_3, S_4. Geben Sie zum Fall $n = 5$ ein Punktmuster an, das zum Konstruktionsschema der gegebenen vier Figuren passt, und bestimmen Sie S_5.
b) Analysieren Sie das Konstruktionsprinzip im Übergang von der n-ten zur $(n+1)$-ten Figur, und geben Sie eine Formel an, mit der man S_{n+1} aus S_n errechnen kann, also eine Formel vom Typ: $S_{n+1} = S_n + a_n$. Dabei müssen Sie einen geeigneten von n abhängigen Term für a_n finden.
c) Zerlegen Sie die fertige Figur für S_n so geschickt in Teilfiguren, dass Sie daraus für S_n eine Formel in Abhängigkeit von n angeben können.

Fazit bzgl. der Präsenz- und Hausaufgaben im Wintersemester 2011/12

Insgesamt betrachtet, waren alle Beweisaufgaben im Wintersemester 2011/12 sehr formal geprägt, nur innerhalb der Hausaufgaben wurden überhaupt operative Beweise thematisiert. Weiter wurde von den Studierenden nur zweimal verlangt, mit Punktmustern selbstständig zu agieren: Einmal galt es zu begründen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen immer die n-te Quadratzahl Q_n ist. Bei einer anderen Aufgabe sollte zu einer gegebenen Punktmusterfolge die ‚allgemeine‘ Figur zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ skizziert und entsprechend der expliziten Formel unterteilt werden. Explorative Aufgabenabschnitte waren weiter nur sehr sporadisch vorhanden, und wenn, dann eher formal geprägt

5.2.2 Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

Im Kontext der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung sind zwei Studien zum Beweisen zu nennen (vgl. Abbildung 24). Zunächst wurden im Rahmen einer Staatsarbeit Beweisproduktionen von Studierenden in ihrer ersten abgegebenen Hausaufgabe explorativ untersucht (Schilberg 2012). Darauf aufbauend wurden in einem weiteren Projekt diese Beweisproduktionen der Studierenden qualitativ analysiert und kategorisiert (siehe hierzu Biehler & Kempen 2013; Kempen 2014).

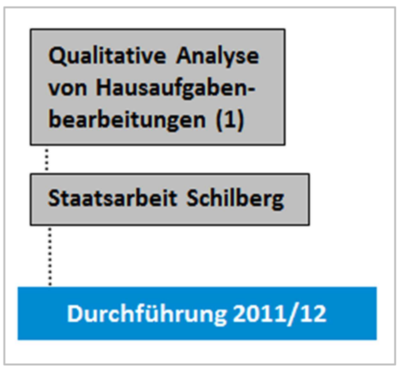


Abbildung 24: Überblick über die im Wintersemester 2011/12 erfolgten Studien

5.2.2.1 Explorative Analyse von Beweisbearbeitungen von Studierenden

Im Rahmen einer Staatsarbeit (Schilberg 2012), welche von Rolf Biehler betreut und durch den Autor dieser Arbeit mitbetreut wurde, wurden studentische Bearbeitungen zu zwei verschiedenen Hausaufgaben explorativ untersucht. Innerhalb dieser Aufgaben (s.u.) sollten die Studierenden Behauptungen mithilfe von Variablen formulieren, diese widerlegen oder mithilfe eines formalen bzw. operativen Beweises verifizieren. Die genauen Aufgabenstellungen waren hierbei:

Hausaufgabenblatt 1, Aufgaben 1 und 2[28]

Aufgabe 1
Formulieren Sie zunächst die nachfolgenden Behauptungen formal mit Variablen, beweisen Sie dann die Behauptungen oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel!

a) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gerade.
b) Die Differenz einer geraden natürlichen Zahl und ihrer Hälfte ist gerade.
c) Das Produkt zweier gerader Zahlen ist das Vierfache des Produktes der Hälften der beiden Zahlen.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen jeweils operativ und symbolisch. Formulieren Sie vor dem symbolischen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen.

a) Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.
b) Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist gleich dem Produkt aus dem Vorgänger und Nachfolger plus eins.

Für die Analyse der Studierendenbearbeitungen (n=64) wurden diese eingescannt und zunächst explorativ untersucht. Als Betrachtungsgegenstände wurden dabei die folgenden drei Aspekte ausgewählt: (1) der Umgang mit Variablen, (2) Argumentieren und Begründen und (3) die Bearbeitungen zum operativen Beweis. Schilberg (2012) arbeitet dabei die folgenden Aspekte heraus[29], die für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind:

Zu (1): Die Studierenden haben verschiedene Probleme im richtigen Umgang mit Variablen. Dies betrifft vor allem die Definition der verwendeten Buchstabenvariablen und die Verwendung von mehreren Buchstabenvariablen.

Zu (2): Viele Studierende geben mehr als ein Gegenbeispiel an, um eine Allaussage zu widerlegen. Auch kommt es häufiger vor, dass Studierende nach einem erfolgten korrekten Beweis noch weitere konkrete Beispiele für die bewiesene Behauptung anführen.

Zu (3): Viele Studierende geben ausschließlich konkrete Beispielüberprüfungen als operative Beweise an, wobei diese Aufgabe zudem noch häufig von den Studierenden ausgelassen wird.

[28] An dieser Stelle wird auf eine Aufgabenanalyse mit der Darstellung exemplarischer Lösungswege verzichtet, da dies für das Nachvollziehen der entsprechenden Forschungsergebnisse nicht notwendig erscheint. Eine Aufgabenanalyse der Aufgabe 2 a) wird in Abschnitt 5.2.2.2 gegeben.
[29] Es sei hier angemerkt, dass eine quantitative Auswertung der formulierten Problembereiche im Rahmen der Staatsarbeit nicht erfolgt ist. Die im Folgenden angeführten Adjektive zur ungefähren Quantifizierung der Phänomene orientieren sich an den Darstellungen in Schilberg (2012).

Diskussion der Ergebnisse und Motivation für eine Re-Analyse der Beweiskonstruktionen

Durch die explorative Analyse der Studierendenbearbeitungen im Rahmen der Staatsarbeit von Schilberg (2012) konnten bereits verschiedene Probleme der Studierenden anhand von Beweisbearbeitungen aufgezeigt werden. Diese Probleme betreffen dabei (u.a.) den Umgang mit Variablen, die Nutzung von Beispielen und Gegenbeispielen im mathematischen Erkenntnisprozess und die Konstruktion von operativen Beweisen. Diese Ergebnisse spiegelten dabei die von den Lehrenden gemachten Erfahrungen aus der Lehrpraxis und damit verbundene Vermutungen bzgl. der ‚Beweiskompetenzen' der Studierenden wider. Besonders beachtenswert erschienen die Probleme der Studierenden mit dem Konzept des operativen Beweises: Nicht nur, dass viele Studierende die entsprechende Beweiskonstruktion gar nicht erst versuchten; nach den Angaben von Schilberg bestanden die meisten Beweiskonstruktionen ausschließlich aus bloßen Beispielüberprüfungen. Bei der in Kapitel 4 vorgenommenen Literaturarbeit konnte zwar herausgearbeitet werden, dass in der Literatur darauf hingewiesen wird, dass Lernende entsprechende Beweise als bloße empirische Verifikation fehlinterpretieren könnten (Abschnitt 4.3.3), doch war die Problematik in diesem Ausmaß für die Lehrenden der Veranstaltung überraschend. Daher wurde beschlossen, die Beweisbearbeitungen der Studierenden zum operativen und zum formalen Beweis in einer Folgestudie tiefergehend qualitativ zu analysieren. Dieses Forschungsprojekt wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

5.2.2.2 Qualitative Analyse von Hausaufgabenbearbeitungen zum operativen und zum formalen Beweis

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

In der explorativen Analyse der Hausaufgabenbearbeitungen (Abschnitt 5.2.2.1) wurden bereits einige Probleme der Studierenden mit dem Konzept des operativen Beweises und dem Umgang mit Variablen bei der Formulierung von Behauptungen und bei der Konstruktion von formalen Beweisen benannt. Die Arbeit von Schilberg (2012) bot somit erste Anhaltspunkte für die Untersuchung der Beweisproduktionen der Studierenden und ihres Umgangs mit mathematischen Behauptungen und kann somit als Startpunkt der folgenden Untersuchungen betrachtet werden. Die bei dieser explorativen Analyse offen gebliebenen Fragen sollten durch die Beantwortung der folgenden Leitfragen zur Auswertung beantwortet werden:

- Leitfragen zur Auswertung [1]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen operativen Beweis zu führen?
- Leitfragen zur Auswertung [2]: Benutzen die Studierenden das Argument, welches sie im operativen Beweis verwendet haben, auch in dem darauf folgenden formalen Beweis?
- Leitfragen zur Auswertung [3]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen formalen Beweis zu führen?
- Leitfragen zur Auswertung [4]: Welche Probleme werden bei den Studierenden im Umgang mit Variablen deutlich, wenn sie eine Behauptung formulieren und diese formal beweisen? Und in welcher Quantität treten diese auf?

Darstellungen des Forschungsprojekts wurden in Biehler und Kempen (2013) und Kempen (2014) veröffentlicht.

Aufgabenanalyse und Forschungsmethode

Der Analysegegenstand dieser Untersuchung waren die 64 eingescannten studentischen Bearbeitungen der folgenden Hausaufgabe:

Hausaufgabenblatt 1 - Aufgabe 2

Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen jeweils operativ und symbolisch. Formulieren Sie vor dem symbolischen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen.

a) Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.

Im Folgenden werden exemplarisch zwei Lösungsmöglichkeiten für die Konstruktion des operativen Beweises angegeben:

<u>Operativer Beweis (1):</u>

$$1 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3, \qquad 3 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9, \qquad 5 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

In den Beispielen wird deutlich, dass die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten immer gleich dem Dreifachen der (ungeraden) Ausgangszahl ist. Da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

<u>Operativer Beweis (2):</u>

$$1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3, \qquad 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9, \qquad 5 + 2 \cdot 5 = 5 + 10 = 15$$

In den Beispielen wird deutlich, dass die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten immer geschrieben werden kann als Summe aus einer ungeraden und einer geraden Zahl, weil das Doppelte einer Zahl immer gerade ist. Da die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Für die Formulierung der Behauptung mithilfe von Buchstabenvariablen ergeben sich etwa die folgenden Möglichkeiten:

<u>Formulierung der Behauptung (1)</u>: *Sei $a \in \mathbb{N}$ eine beliebige ungerade Zahl. Dann gilt: $a + 2a$ ist eine ungerade Zahl.*

<u>Formulierung der Behauptung (2)</u>: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit: $(2n-1) + 2 \cdot (2n-1) = 2m - 1$.*

Während in der Formulierung (1) die Buchstabenvariable bereits als ungerade natürliche Zahl definiert wird, wird in der Formulierung (2) deren Repräsentation als „$(2n-1)$“ verwendet, wodurch die Nutzung einer zweiten Buchstabenvariable nötig wird. In der ersten Formulierung, die durchaus mit den sozio-mathematischen Normen der Veranstaltung vereinbar ist, wird die implizit vorhandene Existenzbehauptung nicht ausgeführt.

Entsprechend der Formulierung der Behauptung ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für die Konstruktion des formalen Beweises:

<u>Formaler Beweis (1)</u>, der auf der Formulierung (1) aufbaut und der Argumentation im operativen Beweis (1) entspricht:

Sei $a \in \mathbb{N}$ eine beliebige ungerade Zahl. Dann gilt: $a + 2a = 3a$.
Da das Dreifache einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

<u>Formaler Beweis (2)</u>, der auf der Formulierung (2) aufbaut:

Sei $n \in \mathbb{N}$ *beliebig, aber fest. Dann gilt:* $(2n-1)+2\cdot(2n-1)=6n-3=2(3n-1)-1=2m-1$*,*
wobei $m := (3n-1) \in \mathbb{N}$*. Q.e.d.*

Die Kategoriensysteme

Für die Analyse der Studierendenbearbeitungen war die Konstruktion eines neuen Kategorienschemas erforderlich, da Bearbeitungen zu operativen Beweisen bislang in der Literatur nicht eingehend untersucht wurden und entsprechende Kategoriensysteme hier nicht zur Verfügung standen. Mit der Forschungsmethode der qualitativen Inhaltsanalyse wurde daher eine induktive Kategorienbildung (Mayring 2010, S. 83ff.) vorgenommen. Auch wurden für die Analyse der Bearbeitungen zum formalen Beweis entsprechende Kategorien formuliert, was einen Vergleich der Bearbeitungen zu den beiden Beweisformen ermöglichte. Die Kategorienbildung geschah durch den Autor und wurde in mehreren Besprechungen mit dem Betreuer der Dissertation Rolf Biehler diskutiert. Nach der Festlegung des Kategoriensystems wurden die Bearbeitungen, die Grenzfälle darstellten, gemeinsam diskutiert, um eine entsprechende Reliabilität der Ergebnisse zu gewährleisten. Das hierbei entwickelte Kategoriensystem wird im Folgenden dargestellt und mit Ankerbeispielen illustriert. Eine entsprechende Darstellung wird auch in Kempen (2013, S. 467) gegeben.

Als Kategoriensystem für den operativen Beweis wurde das folgende verwendet:

Name	**Beschreibung**	**Ankerbeispiel** (entnommen aus den Studierendenbearbeitungen)
E0	Der „operative Beweis" beinhaltet Beispiele, die nicht zu der Behauptung passen.	$n=2$: $(3\cdot 2)-3=3$ $n=4$: $(3\cdot 4)-3=9$ $n=6$: $(3\cdot 6)-3=15$
E1	Der „operative Beweis" besteht nur aus einer Verifikation durch verschiedene Beispiele, ohne dass allgemeingültige Prinzipien benannt werden.	$q=7$: $7+(2\cdot 7)=21$ $q=11$: $11+(2\cdot 11)=33$ $q=3$: $3+(2\cdot 3)=9$
P1	In den Beispielen innerhalb des „operativen Beweises" werden allgemeingültige Operationen und Umformungen deutlich, welche allerdings nicht expliziert werden.	1.) $7+14=21\ (w)$ $7+(2\cdot 7)=7+7+7=3\cdot 7=21$ 2.) $3+6=9\ (w)$ $3+(2\cdot 3)=3+3+3=3\cdot 3=9$
P2	In den operativen Beweisen werden allgemeingültige Prinzipien deutlich, die benannt und in der folgenden Argumentation zum Beweisen der Behauptung genutzt werden.	$a)\ 3+(3\cdot 2)=9$ ✓ $b)\ 9+(9\cdot 2)=27$ ✓ $c)\ 7+(7\cdot 2)=21$ ✓ *Die Behauptung stimmt, weil die Verdoppelung einer ungeraden Zahl zu einer geraden Zahl führt. Die Addition einer geraden und einer ungeraden Zahl ergibt eine ungerade Summe.*

Tabelle 6: Kategorienschema zur Analyse der Studierendenbearbeitungen zum operativen Beweis im Wintersemester 2011/12

Das Kategoriensystem für den formalen Beweis war dabei wie folgt:

Name	**Beschreibung**	**Ankerbeispiel** (entnommen aus den Studierendenbearbeitungen)
P1	Diverses (unverständlich, falsch, ziellos, ...)	*[Ein Studierender versuchte eine andere Behauptung zu beweisen. Seine Bearbeitung wurde in diese Kategorie eingeteilt.]*
P2	Die Beweisführung beinhaltet keine Argumentation.	Formaler Beweis: $2n - 1 + 2(2n - 1) = 2m - 1$
P3	Die Argumentation im Beweis enthält Lücken und/oder es werden Argumente genutzt, die nicht allgemeingültig sind.	Beweis: $2n + 1 + 2(2n + 1) = 6n + 3$ $6n$ ist ein Vielfaches von 2, aber 3 lässt sich nicht durch 3 teilen.
P4	Die Argumentation im Beweis ist logisch und korrekt.	Beweis: $r \in N$: $2r + 1 + 2(2r + 1) = 3(2r + 1)$ ist ungerade, denn $2r + 1$ ist ungerade, 3 ist ungerade. Also ist das Produkt $3(2r + 1)$ ungerade[30].

Tabelle 7: Kategorienschema zur Analyse der Studierendenbearbeitungen zum formalen Beweis im Wintersemester 2011/12

Ergebnisse[31]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [1]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen operativen Beweis zu führen?

Die Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden zum operativen Beweis werden in der Tabelle 8 dargestellt. Auffällig ist hierbei, dass von den insgesamt 53 Bearbeitungen zum operativen Beweis 67,9% aus bloßen Beispielüberprüfungen (E1) bestehen. Nur in 14 Bearbeitungen (P1 + P2) wurden überhaupt weiterführende Operationen vorgenommen, wobei nur sechs Bearbeitungen als vollständige operative Beweise bewertet werden konnten (P2), da in acht Fällen die Argumentation nicht expliziert worden war (P1).

[30] Die implizite Verwendung des Satzes, dass das Produkt von zwei ungeraden natürlichen Zahlen immer ungerade ist, wird dabei nicht als Lücke gewertet.

[31] Die folgenden Ergebnisse wurden auch in Biehler und Kempen (2013, S. 91ff.) veröffentlicht. Sprachliche Anlehnungen an diese englischsprachige Publikation werden für eine bessere Lesbarkeit der Darstellungen nicht angemerkt.

Kategorie	Häufigkeit
E0	3 (5,7%)
E1	36 (67,9%)
P1	8 (15,1%)
P2	6 (11,3%)
Summe	53 (100%)

Tabelle 8: Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum operativen Beweis (WS 2011/12)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [2]: Benutzen die Studierenden das Argument, welches sie im operativen Beweis verwendet haben, auch in dem darauf folgenden formalen Beweis?

Von den 14 Studierenden, deren Bearbeitungen zum operativen Beweis weiterführende Operationen aufwiesen (P1+P2), bearbeiteten elf die Aufgabe zum formalen Beweis. Bei acht dieser formalen Beweise konnten parallele algebraische Umformungen zum vorher erfolgten operativen Beweis ausgemacht werden.

Beantwortung der Leitfragen zur Auswertung [3] und [4]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen formalen Beweis zu führen? Welche Probleme werden bei den Studierenden im Umgang mit Variablen deutlich, wenn sie eine Behauptung formulieren und diese formal beweisen?

Von den 64 Studierenden, deren Bearbeitungen zur Analyse vorlagen, versuchten nur 34 die Formulierung der Behauptung. Hierbei formulierten 21 Studierende die Behauptung in der oben angegebenen Variante (1) und sechs entsprechend der Variante (2). Sieben Bearbeitungen müssen als Mischform der beiden Varianten betrachtet werden. Bei der Formulierung der Behauptung entsprechend der zweiten Variante wurde nur in einem Fall die Für-Alle-Aussage expliziert, eine Existenzbehauptung wurde von keinem Studierenden formuliert. Darüber hinaus wiesen alle Formulierungen formale Fehler im Umgang mit bzw. in der Definition der Variablen auf.

Neben der Einordnung der Studierendenbearbeitungen zum formalen Beweis in das oben genannte Kategoriensystem wurde hier weiter kategorisiert, ob in den Bearbeitungen auch formale Fehler im Umgang mit den Variablen vorzufinden sind. Die entsprechenden Ergebnisse werden in der Tabelle 9 dargestellt. Bemerkenswert erscheint hierbei besonders, dass selbst bei dieser grundlegenden Beweisaufgabe nur 51,8% der Bearbeitungen als vollständig und korrekte Beweise bewerten werden konnten (P4). Bei der Betrachtung der formalen Fehler ist darüber hinaus auffällig, dass insgesamt nur neun Bearbeitungen (16,1%) als formal korrekt betrachtet werden konnten. Es lässt sich hier festhalten, dass nur in 22 Fällen (39,9%) ein vollständiger und korrekter Beweis ohne formale Fehler vorlag.

Kategorie	Häufigkeit	formal korrekt	mit formalen Fehlern
P1	1 (1,8%)	0	1 (1,8%)
P2	8 (14,3%)	1 (1,8%)	7 (12,5%)
P3	18 (32,1%)	1 (1,8%)	17 (30,4%)
P4	29 (51,8%)	7 (12,5%)	22 (39,3%)
Summe	56 (100%)	9 (16,1%)	47 (83,9%)

Tabelle 9: Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum formalen Beweis (WS 2011/12)

Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Ein Großteil der Studierenden scheint zu dem Zeitpunkt der ersten Hausaufgabenabgabe das Konzept des operativen Beweises als eine Form allgemeingültiger Verifikation noch nicht verstanden zu haben. Da diese Beweisform im weiteren Verlauf der Veranstaltung auch nicht weiter thematisiert wurde, kann vermutet werden, dass den Studierenden diese Konzeption auch im weiteren Semester nicht deutlich wurde. Außerdem lässt die (überraschend) geringe Anzahl gelungener operativer Beweise darauf schließen, dass die Konstruktion entsprechender Beweise nicht als triviale Tätigkeit verstanden werden darf, sondern als wirklicher Lerngegenstand begriffen werden muss.

Bei dieser Analyse der Teilaufgabe zur Formulierung der Behauptung wurde deutlich, welche Aspekte Studierende berücksichtigen müssen, um eine mathematische Behauptung korrekt zu formulieren. Neben der Formalisierung der Behauptung mithilfe von Buchstabenvariablen, der korrekten Definition und Nutzung der Variablen ist auch das Verstehen um die (implizite) All- und Existenzaussage von Bedeutung. Die überhaupt geringe Anzahl von Bearbeitungen dieser Teilaufgabe in Verbindung mit den schlechten Resultaten macht deutlich, dass auch diese Aufgabe für Studienanfänger eine Herausforderung darstellt und entsprechende Anforderungen im Rahmen der Lehrveranstaltung deutlicher vorbereitet werden müssen.

Die Ergebnisse bzgl. der Konstruktion der formalen Beweise lassen darauf schließen, dass auch diese Tätigkeit für die Studienanfänger keine triviale Tätigkeit ist; nur gut der Hälfte der Studierenden gelingt eine entsprechende Argumentation. Dass insgesamt in 83,9% der Bearbeitungen formale Fehler auftreten, deutet darauf hin, dass die Studienanfänger wenig Erfahrung im richtigen Umgang mit Variablen zur Verifikation einer Behauptung zu haben scheinen.

Bei der Durchführung der Untersuchung wurde auf eine Zweitcodierung der Beweisbearbeitungen verzichtet. Da das Projekt darauf ausgelegt war, erste Erkenntnisse über die Beweiskonstruktionen der Studienanfängerinnen und -anfänger und ihr Verständnis zum operativen Beweis zu erhalten, auf Grund derer die Lehrveranstaltung begründet weiterentwickelt werden konnte, wurde der vorliegende Grad an Reliabilität (und auch an Objektivität) für ausreichend befunden.

5.2.3 Retrospektive Analyse der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung

Aufgrund der im Rahmen der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung erfolgten Forschung konnten oben bereits drei zentrale Problemfelder herausgearbeitet werden, die für die vorliegende Arbeit von Interesse sind: Die Studierenden haben Probleme (1) mit der Formulierung und mit dem Verständnis von mathematischen Behauptungen, (2) mit der Verwendung von Buchstabenvariablen bei der Konstruktion von formalen Beweisen und (3) mit dem Konzept des operativen Beweises, gerade in Abgrenzung zu bloßen Beispielbetrachtungen. Durch die gemachten Lehrerfahrungen des Dozenten und der Wissenschaftlichen Mitarbeiter konnten weitere Aspekte ausgemacht werden, die sich wiederum mit den Rückmeldungen der studentischen Hilfskräfte und der Studierenden deckten. Hierzu zählen: (4) Es müssen vermehrt passgenaue Aufgaben in den Übungsbetrieb eingebunden werden, die stärker die grundlegenden Aspekte im Kontext von Behauptungen und (operativen und formalen) Beweisen fokussieren, (5) selbst die studentischen Hilfskräfte haben Probleme mit dem Konzept des operativen Beweises und (6) im Rahmen der Lehrveranstaltung werden eine Vielzahl unterschiedlicher (Meta-) Begriffe im Kontext des Beweisens („Überprüfung“, „Verifikation“,

„Beweis“, „operativer Beweis“, „symbolischer Beweis“ „Begründung“, „operativ-graphischer Beweis“, „allgemeine Darstellung“, …) verwendet.

Diese verschiedenen Punkte werden im Folgenden kurz ausgeführt. Am Ende des Abschnitts erfolgen eine Bewertung derselben unter den Perspektiven „Beweisen als diagrammatisches Schließen“ und „sozio-mathematische Normen“ und ein Abgleich mit der vor der Durchführung der Lehrveranstaltung aufgezeigten intentionalen Dimension. Die herausgearbeiteten Problemfelder und daraus abgeleiteten Implikationen bilden den Rahmen für die Überarbeitung und Durchführung der Lehrveranstaltung, wie sie im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

(1) zum Verständnis mathematischer Behauptungen

Ein adäquates Verständnis mathematischer Behauptungen ist eine zentrale Voraussetzung für die Konstruktion und das Verständnis von Beweisen. Wie bereits in Abschnitt 2.1.6 dargelegt wurde, bildet gerade das Verständnis einer Für-Alle-Aussage eine notwendige Voraussetzung für die Herausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses und die Grundlage für die Wahrnehmung verschiedener Funktionen von Beweisen. Zwar wurde in der Vorlesung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2011/12 auf die Inhalte und Formulierung von mathematischen Behauptungen eingegangen; der Umfang dieser Bemühungen scheint dabei nicht ausgereicht zu haben, um bei den Studierenden ein entsprechendes Verständnis herauszubilden.

(2) zum Umgang mit Buchstabenvariablen und der Konstruktion von formalen Beweisen

Der Umgang mit Variablen war bereits expliziter Gegenstand der Lehrveranstaltung. Auch wurden Aufgabenformate eingebunden, die sich speziell mit dieser Thematik beschäftigten; so sollten die Studierenden Behauptungen zunächst verbal und dann mithilfe von Buchstabenvariablen formulieren, bevor sie diese beweisen sollten. Diese Maßnahmen scheinen noch nicht ausgereicht zu haben, um das gewünschte Ergebnis zu erzielen. Insgesamt musste auch festgestellt werden, dass die Beweiskonstruktionen der Studierenden allgemein nicht den Ansprüchen der Lehrenden genügten. Viele ‚formale Beweise‘ erschienen eher als ungeordnete Entdeckungsnotizen und nicht als ‚saubere‘ Reinschrift.

(3) zum Konzept des operativen Beweises

Insgesamt betrachtet, scheint das Konzept des operativen Beweises den Studierenden nicht ausreichend deutlich geworden zu sein. Die Thematisierung des Konzepts in den ersten beiden Vorlesungssitzungen und im Rahmen der ersten Hausaufgabe scheint nicht genügt zu haben, um den Studierenden diese Beweisform zu vermitteln. Die Probleme, die die Studierenden mit dem Lerngegenstand „operativer Beweis“ haben, wurden insgesamt unterschätzt.

(4) zu den verwendeten Übungsaufgaben

Bereits in der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung wurden explizit verschiedene Aufgabenformate verwendet, die die Verwendung von Variablen bei der Formulierung von Behauptungen und der Konstruktion von formalen Beweisen thematisierten. Auch wurden Aufgaben zu der Konstruktion von operativen Beweisen gestellt. Es scheint allerdings notwendig zu sein, Aufgabenformate in den Übungsprozess zu integrieren, die spezifischer elementare Aspekte der Thematik fokussieren. Wenn die Lehrveranstaltung außerdem den Anspruch verfolgt, dass die Studierenden in eine prozesshafte Mathematik eingeführt werden, dann müssen vermehrt Übungsaufgaben eingebunden werden, die entsprechenden Raum für Exploration und eigenständiges ‚mathematisches Tun‘ schaffen.

(5) zu den Problemen der studentischen Hilfskräfte mit dem Konzept des operativen Beweises

Bei der Durchsicht der wöchentlichen Hausaufgabenkorrekturen der studierenden Hilfskräfte wurde ein weiteres Problem deutlich: Da diese Studierenden selbst nie in ihrem Studium mit operativen Beweisen in Kontakt gekommen waren, schienen auch sie grundlegende Verständnisschwierigkeiten mit dieser Beweisform zu haben. Es ist offensichtlich, dass die Korrekturen entsprechender Beweisversuche in den Hausaufgaben zu wünschen übrig ließen. Über entsprechende Probleme bei den Erörterungen verschiedener Beweisformen in den Kleingruppenübungen kann nur spekuliert werden.

(6) zu den verwendeten Begrifflichkeiten im Kontext von Beweisen

Bei der Betrachtung der gesamten Lehr- und Lernmaterialien der Lehrveranstaltung wurde die Verwendung einer Vielzahl unterschiedlicher Begriffe (und Aufgabenoperatoren) deutlich, mit denen die Studierenden konfrontiert wurden. Hierzu gehören: Operativer Beweis, Beweis mit Variablen, symbolischer Beweis, formaler Beweis, mathematische Begründung, operativ-graphische Begründung, operativ-graphischer Beweis, allgemeines Diagramm für einen operativen Beweis, Begründung anhand eines Punktmusters und Begründung an einer geeigneten Skizze. Es lässt sich hier vermuten, dass die Vielzahl der unterschiedlichen Begriffe nicht zu einer konzeptuellen Sicherheit auf Seiten der Studierenden beigetragen hat, auch, da sprachliche Unterschiede nicht thematisiert oder geklärt wurden. So weist auch Dreyfus (1999, S. 103) darauf hin, dass die Verwendung von vielen unterschiedlichen Begriffen und Operatoren im Kontext von Beweisen zu Verwirrung führen kann.

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive des „diagrammatischen Schließens“

Der Umgang mit Variablen in Beweisen umfasst unter dieser semiotischen Perspektive die Konstruktion von Diagrammen, das Vornehmen von Transformationen an diesen und das ‚Interpretieren‘ der erhaltenen Resultate (vgl. Abschnitt 2.5). Für den Bereich der formalen Beweise kann dabei festgehalten werden, dass bereits die erste Phase des diagrammatischen Schließens (die Konstruktion der Diagramme) bei den Studierenden fehlerbehaftet ist, denn Buchstabenvariable erhalten erst durch eine korrekte Definition ihre ‚Bedeutung‘ als Diagramme, mit denen agiert werden kann. Die Definition der Buchstabenvariablen bestimmt dabei auch die Lesart, mit der das schließlich erhaltene Diagramm gelesen werden muss. Während die Anwendung von Transformationen auf die jeweiligen Diagramme (‚Termumformungen‘) eher kein Problem darzustellen scheint, müssen die Konstruktion und das Lesen der Diagramme als besonderer Problembereich eingestuft werden. Ein mangelhafter Umgang mit Variablen erweist sich dabei als ein unzureichendes kollaterales Wissen in Bezug auf das entsprechende Diagrammsystem und eine unzureichend ausgebildete Praxis im Umgang damit. Folglich sind dies die Lerngegenstände, die es in dieser Hinsicht in der Lehrveranstaltung deutlicher zu fokussieren gilt und zu denen entsprechende Übungsaufgaben konstruiert werden müssen.

Durch die Analyse der Bearbeitungen zum operativen Beweis (Abschnitt 5.2.2) wurde deutlich, dass bei den Studierenden konzeptionelle Probleme mit dieser Beweisform den Akt eines allgemeingültigen diagrammatischen Schließens im Kontext der Arithmetik verhindern. Somit gilt es, zunächst das Konzept operativer Beweise genauer zu erörtern, damit der Akt des allgemeingültigen diagrammatischen Schließens aufgrund der verwendeten Operationen thematisiert und verdeutlicht werden kann.

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive „sozio-mathematischer Normen"

Die konzeptuellen Probleme der Studierenden mit den operativen Beweisen machen deutlich, dass ihnen explizit Normen an die Hand gegeben werden müssen, an Hand deren sie ihre Beweiskonstruktionen ausrichten können. Dies gilt entsprechend für die Konstruktion von formalen Beweisen. Auch gilt es, entsprechende Normen für den Umgang mit Buchstabenvariablen zu kommunizieren; dies betrifft sowohl die Formulierung von Behauptungen als auch die Konstruktion formaler Beweise. Somit kann unter der Perspektive sozio-mathematischer Normen festgehalten werden, dass neben der Etablierung von Normen für die Konstruktion von Beweisen auch der Umgang mit Variablen expliziter Gegenstand der Lehrveranstaltung werden muss[32].

Ein weiteres Thema „sozio-mathematischer Normen" ist dabei das Problem einer geteilten ‚Meta-Sprache' zum Beweisen. Hier muss eine Vereinheitlichung und Normierung vorgenommen werden, welche Begriffe mit welcher Bedeutung verwendet werden.

Abgleich mit der intentionalen Dimension der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung

Der Einstieg in die Vorlesung mit Teilbarkeitsfragen in den natürlichen Zahlen, zur Anknüpfung an schulische Vorerfahrungen und zur Akzeptanz und produktiven Nutzung von schulischem Vorwissen erscheint insgesamt sinnvoll und gewinnbringend. Die Vermittlung des Konzepts des operativen Beweises, gerade als schuladäquate Begründungsform, hat dabei nicht in dem Umfang funktioniert, wie es vor der Lehrveranstaltung durch die Lehrenden intendiert gewesen war. Auch die Ergebnisse zum formalen Beweis waren insgesamt als noch unbefriedigend zu bezeichnen, was auch auf einen fehlerhaften Umgang der Studierenden mit Buchstabenvariablen zurückzuführen ist. Die Inhaltsbereiche der Elementarmathematik und die Thematik der figurierten Zahlen scheinen sich als gewinnbringend erwiesen zu haben, um den Studierenden mathematisches Arbeiten zu ermöglichen und um den Prozesscharakter der Mathematik herauszustellen. Dabei wurde allerdings nicht eingehend untersucht, inwieweit die Studierenden nun in der Lage sind, mit ‚inhaltlich-anschaulichen' Darstellungen umzugehen. Insgesamt konnte durch die Themenorientierung an der Teilbarkeit, das Aufgreifen und Vermitteln von Begründungsformen der Schulmathematik und den Einbezug von inhaltlich-anschaulichen Darstellungsmitteln ein stetiger Schulbezug hergestellt werden. Als Heuristiken des mathematischen Arbeitens im Rahmen von Exploration und Verifikationsprozessen wurden den Studierenden drei verschiedene Strategien an die Hand gegeben: die Überprüfung einer Behauptung mit Zahlenbeispielen, operative Beweise und Beweise mit Variablen. Auch diese Unterscheidung erscheint insgesamt sinnvoll, um den Studierenden mathematisches Tun näherzubringen, ihnen den Prozesscharakter der Mathematik zu verdeutlichen und die verschiedenen Verifikationsmethoden sinnvoll in den Erkenntnisprozess zu integrieren. Inwieweit dabei ein adäquates Beweisverständnis auf Seiten der Studierenden erreicht werden konnte, muss an dieser Stelle noch offen gelassen werden.

5.3. Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

In diesem Abschnitt werden zunächst die Änderungen der Lehrveranstaltung beschrieben und begründet, wie sie im Wintersemester 2012/13 aufgrund der Erfahrungen aus dem vorherigen

[32] Diese Kommunikation von Normen wird daher als Aspekt „sozio-mathematischer" Normen aufgefasst, da ihre genaue Bedeutung und Reichweite durch ihre Umsetzung aller am Lernprozess Beteiligten konstituiert wird.

Durchgang vorgenommen wurden. Anschließend werden die Untersuchungen beschrieben, welche im Rahmen dieser Durchführung erfolgt sind. Hierzu gehören eine qualitative Analyse der Beweisproduktionen der Studierenden in ihrer ersten Hausaufgabe (Abschnitt 5.3.2.1), ein Bewertungstest zu verschiedenen Beweisproduktionen (Abschnitt 5.3.2.2), die Pilotierung einer Videostudie zum generischen und zum formalen Beweis (Abschnitt 5.3.2.3) und eine Analyse der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Abschlussklausur der Lehrveranstaltung (Abschnitt 5.3.2.4).

5.3.1 Veränderungen bei der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13

In der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung wurden im Wintersemester 2012/13 aufgrund der bisherigen Forschungsergebnisse und Lehrerfahrungen die folgenden Änderungen vorgenommen: (1) Die Struktur des ersten Kapitels wurde modifiziert, (2) es wurde eine explizite ‚Analyse' einer mathematischen Behauptung vorgeführt, in deren Kontext auch der Variablenbegriff thematisiert wurde, (3) es erfolgte eine Umbenennung des ‚operativen Beweises' zum ‚generischen Beweis', (4) die drei mathematischen Strategien zum Überprüfen einer Behauptung wurden umbenannt, (5) es wurde explizit zwischen logischen und psychologischen Aspekten beim Umgang mit Beispielbetrachtungen und Beweisen unterschieden, (6) es wurden sozio-mathematische Normen für die Konstruktion von generischen Beweisen kommuniziert, (7) bei der Konstruktion ‚formaler Beweise' wurde explizit zwischen der ‚Erarbeitung' und der abschließenden ‚Reinschrift' unterschieden, (8) die Rolle von Gegenbeispielen wurde deutlicher herausgestellt, (9) es wurde ein erster Versuch unternommen, die verschiedenen Begrifflichkeiten zum Beweisen anzugleichen und (10) die Verbindungen des zweiten Kapitels („figurierte Zahlen") zum ersten Kapitel wurden deutlicher herausgestellt. Neben den Modifikationen, die sich auf die konkrete Durchführung der Vorlesung beziehen, wurden auch Änderungen im Kontext der Präsenzübungen vorgenommen. Grundlegend für das Gelingen des Übungskonzepts erschien hierbei zunächst (9) die Schulung der Tutoren zu sein. Einhergehend damit wurden auch (10) das Halten der Übungsgruppen durch Tutorentandems in die Lehrveranstaltung eingeführt und (11) neue Aufgaben und Aufgabenformate in die Präsenzübungen integriert. Diese Aspekte werden im Folgenden einzeln dargestellt.

Veränderungen im Kontext der Vorlesung

(1) Modifizierung der Struktur des ersten Kapitels der Lehrveranstaltung

Im Wintersemester 2011/12 war das erste Kapitel der Lehrveranstaltung in drei Abschnitte gegliedert: (i) Die Überprüfung der Teilbarkeit durch k der Summen von $k \epsilon \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden Zahlen, (ii) die Niederschrift des gesamten erlangten Wissens gemäß fachmathematischer Literatur (Definition, Satz, Beweis) und (iii) eine alternative Erarbeitung eines Beweises für den gefundenen Satz, dass die Summe von $k \epsilon \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden Zahlen genau dann durch k teilbar ist, wenn k ungerade ist. Diese Dreiteilung wurde im Wintersemester 2012/13 aufgehoben: Die Frage nach der Teilbarkeit der Summen aufeinanderfolgender Zahlen bildete nun den durchgehenden roten Faden für das gesamte erste Kapitel. Im Rahmen dieses ‚Forschungsprojekts' konnten dabei verschiedene Aspekte thematisiert werden: Bei der Diskussion der Ausgangsfrage (über die Teilbarkeit der Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen) erfolgte eine Thematisierung des Variablenbegriffs und eine logische Analyse der Behauptung (s. (2) unten). Anschließend wurden den Studierenden drei verschiedene Strategien für die Überprüfung von Behauptungen an die Hand gegeben (s. (4) unten), in welchem Kontext auch der generische und der formale Beweis eingeführt wurden. Bei der

Konstruktion der Beweise wurde dabei immer zwischen der Erarbeitung und der anschließenden ‚Reinschrift' des Beweises unterschieden (s. (6) unten). Im Rahmen der Überprüfungen verschiedener Summen wurde weiter die Rolle von Gegenbeispielen explizit thematisiert und deren Bedeutung für den mathematischen Erkenntnisprozess herausgestellt (s. (7) unten).

(2) Exemplarische Analyse einer mathematischen Behauptung und die explizite Thematisierung des Variablenbegriffs

Ein Ergebnis der bisherigen Forschung war, dass die korrekte Verwendung und Definition von Buchstabenvariablen den Studierenden Probleme bereitete und dass es notwendig erschien, die ‚Eigenarten' mathematischer Behauptungen deutlicher herauszustellen (siehe Abschnitt 5.2.2). Da die Verwendung von Variablen immer in gewisse mathematische Kontexte eingebunden ist, wurde die Analyse der Eingangsbehauptung auch dazu genutzt, den Variablenbegriff zu thematisieren. Aus diesem Grund wurde im ersten Kapitel der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13 nach der Eingangsfrage (über die Teilbarkeit durch 3 der Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen) eine „Analyse der Behauptung" eingeschoben, in deren Kontext auch explizit der Gebrauch von Variablen und den hierzu benötigten Symbolen thematisiert wurde. Der folgende Abschnitt ist ein Zitat aus der Vorlesungsmitschrift aus dem Wintersemester 2012/13:

> Beispiel 1:
> Jemand behauptet, die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 3 teilbar.
>
> Analyse der Behauptung:
>
> 1. Egal mit welcher „Startzahl" man beginnt, die Summe aus dieser und der beiden folgenden Zahlen ist durch 3 teilbar.
> 2. Für alle Startzahlen gilt:
>   Die Summe $Startzahl\ +\ (Startzahl\ +\ 1)\ +\ (Startzahl\ +\ 2)$ ist durch 3 teilbar.
>   [Hier wird $Startzahl$ als eine sogenannte „Wortvariable" verwendet.]
> 3. Für alle Startzahlen n gilt: $n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 teilbar.
>   Bei allen Variablen muss die zulässige Menge angegeben werden, aus der Werte für die Variable genommen werden können.
>   Sprechweisen:
> $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
> $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
>   Man schreibt $n \in \mathbb{N}$, wenn n ein Element aus der Menge $\mathbb{N}$ ist.
> 4. Für alle Startzahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Summe $n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 teilbar.

Gegenstand dieser Analyse ist zunächst die Bedeutung und die Verwendung von Wortvariablen. Diese Wortvariablen werden herausgearbeitet und schrittweise durch Buchstabenvariable ersetzt. Gleichzeitig wird die Norm eingeführt, dass bei der Verwendung von Buchstabenvariablen auch immer deren Grundmenge anzugeben ist, aus der Werte für diese entnommen werden dürfen. In diesem Kontext wird auch die Verwendung der Symbole „$\mathbb{N}$", „{…}", „$\mathbb{N}_0$" und „$\in$" thematisiert. Ein weiterer zentraler Aspekt dieses Abschnitts ist das Herausstellen der Für-Alle-Aussage. Wie bereits in Abschnitt 2.1.6 dargelegt wurde, ist das Verständnis dieser Aussage eine notwendige Grundlage für die Konstruktion eines entsprechenden Beweises und die Herausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses.

(3) Umbenennung der Beweisform „operativer Beweis“ zu „generischer Beweis“

Ein Problem der Studierenden mit dem Konzept des operativen Beweises schien darin zu bestehen, dass ihnen nicht deutlich geworden war, was bei der Konstruktion dieser Beweisform zu geschehen hatte, das über bloße Beispielüberprüfungen hinausging (vgl. Abschnitt 5.2.2). Dieses Forschungsergebnis deckte sich mit den Eindrücken der Übungsgruppenleiter, Korrektoren der Hausaufgaben und Lehrenden der Veranstaltung. Der Begriff „operativer“ Beweis erwies sich hierbei in gewisser Weise als irreführend: Wurden bei der Überprüfung einer Behauptung an einem konkreten Beispiel die notwendigen Rechenoperationen vorgenommen, so verwiesen die Studierenden auf diese Umformungen und behaupteten ohne weitere Begründung, dass diese auch allgemeingültig und mit jeder beliebigen Zahl genauso durchführbar seien. Die Notwendigkeit, weiterführende Argumente zu präsentieren, die überdies eine beispielübergreifende Struktur deutlich werden ließen, um eine allgemeingültige Begründung für die Behauptung auszumachen, war ihnen nur schwer einsichtig zu machen. Ein Grund für die Umbenennung zum ‚generischen Beweis‘ war somit, den Fokus der Betrachtungen auf das generische Moment zu legen, das beispielübergreifend bei der Untersuchung verschiedener Beispiele ausgemacht und anschließend auch expliziert werden muss (vgl. Punkt (5) unten). Somit standen nicht mehr die Operationen, sondern der generische Aspekt im Vordergrund. Ein weiterer Grund war die internationale Anbindung an die aktuelle Forschungs- und Diskussionslage. Im internationalen Kontext ist der Begriff des ‚generic proofs‘ weit verbreitet, wogegen der Begriff ‚operative proof‘ fast ausschließlich in den Veröffentlichungen deutscher Mathematikdidaktiker Verwendung findet (vgl. Abschnitt 2.1.3).

(4) Explizite Unterscheidung von bloßen Beispielbetrachtungen, generischen Beweisen und formalen Beweisen

Im zweiten Durchgang der Lehrveranstaltung wurden die den Studierenden vorgestellten „drei Strategien zum Überprüfen einer Aussage“ umbenannt. Wurden die drei Strategien im vorherigen Durchgang noch als (1) „Die Überprüfung einer Behauptung an einigen Zahlenbeispielen“, (2) „Operative Beweise“ und (3) „Beweise mit Variablen“ bezeichnet, wurden diese im Wintersemester 2012/13 wie folgt benannt: (1) „Testen der Aussage an Zahlenbeispielen“, (2) „Testen an Zahlenbeispielen mit dem Erkennen, was an diesen Beispielen verallgemeinerungsfähig (generisch) ist“ und (3) „Algebraische Umformungen“. Das Anliegen bestand hierbei darin, den Unterschied zwischen den ersten beiden Strategien deutlicher herauszustellen und die dritte Strategie (das Vornehmen algebraischer Umformungen) nicht, im Gegensatz zu den ersten beiden Strategien, mit einem ‚Beweis‘ gleichzustellen.

(5) Die Unterscheidung zwischen logischen und psychologischen Aspekten bei Beispielbetrachtungen und Beweisen

Im Kontext der drei Strategien zum Überprüfen einer Aussage (s.o.) wurde zwischen logischen und psychologischen Aspekten dieser Strategien unterschieden. Damit kann das bloße Testen einer Behauptung an konkreten Beispielen psychologisch positiv gewertet werden, um Klarheit darüber zu erlangen, was die genaue Bedeutung und Tragweite einer Aussage ist, und um vielleicht eine Einsicht darein zu erhalten, warum diese wahr ist (vgl. hierzu die Phase der Exploration im Beweisprozess, dargestellt in Abschnitt 2.1.1). Vom logischen Standpunkt muss dabei betont werden, dass die Überprüfung konkreter Fälle nie ausreichen kann, um eine Allaussage allgemeingültig zu beweisen.

Allerdings kann durch weitere Beispielüberprüfungen die subjektive (psychologische) Überzeugung gestärkt werden, dass eine Vermutung bzw. Behauptung wahr ist.

(6) Kommunikation (sozio-mathematischer) Normen für die Konstruktion eines generischen Beweises

Durch die bisherigen (negativen) Ergebnisse und Erfahrungen aus der Verwendung der (ehemals so genannten) ‚operativen' Beweise wurde deutlich, dass den Studierenden sozio-mathematische Normen vermittelt werden müssen, an denen sie ihre Beweiskonstruktionen normativ ausrichten können. Eine solche Explizierung der Normen wurde im Wintersemester 2012/13 gegeben. (Vergleiche hierzu die Erörterung dieser Beweiskonzeption in Abschnitt 2.1.3). Die aufgestellten Normen spiegeln dabei die Aktivitäten wider, die in Abschnitt 4.3.1 anhand der Literaturarbeit als konstituierende Elemente beispielgebundenen Beweisens herausgearbeitet wurden.

Ein generischer Beweis besteht aus:

(1) Allgemeingültigen Umformungen an Zahlenbeispielen
(2) Einer Begründung, warum die Behauptung in den Zahlenbeispielen wahr ist
(3) Einer Begründung, warum diese Argumentation mit allen Zahlenbeispielen so prinzipiell möglich ist.

Die Forderung nach der narrativen Begründung in (3) erwies sich auch daher als notwendig, damit der Leser (und ggf. der Korrektor) generischer Beweise sicherstellen kann, dass der Beweiskonstrukteur in seinen Beweisen wirklich ein generisches Moment erkannt hat.

(7) Die Unterscheidung zwischen ‚Erarbeitung' und ‚Reinschrift' bei der Konstruktion ‚formaler Beweise'

Nach der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung waren sich die Lehrenden darüber einig, dass die ‚formalen Beweise' der Studierenden noch einen zu starken explorativen Charakter aufwiesen. Im Gegensatz dazu sollte der Explorationsprozess vor der finalen Niederschrift des Beweisproduktes eigentlich abgeschlossen sein, damit der Beweis höheren Ansprüchen in Bezug auf Logik und formale und sprachliche Darstellungen genügen kann. Um diesen Anspruch zu kommunizieren, ohne dabei die explizit gewünschte Explorationsphase der Beweisbearbeitung zu negieren, wurde im Rahmen der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2012/13 zwischen der Erarbeitung eines Beweises und dessen Reinschrift unterschieden. Bei der Konstruktion von Beweisen wurde auch in der Vorlesung der Explorationsprozess dargestellt, dabei explizit „Vorüberlegungen zu einem Beweis" notiert und abschließend der Beweis in „Reinschrift" notiert.

(8) Die erweiterte Thematisierung von Gegenbeispielen für den mathematischen Erkenntnisprozess

Im Rahmen der Untersuchung der Teilbarkeit der Summen aufeinanderfolgender Zahlen wurde in der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung die Rolle von Gegenbeispielen deutlicher hervorgehoben. Bei der Widerlegung der Vermutung (2) (s.u.) wurden der Nutzen und die Bedeutung von Gegenbeispielen thematisiert, im Zuge der Vermutung (4) (s.u.) deren Tragweite weiter ausgeführt.

Vermutung (2): Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch zwei teilbar.

$1 + 2 = 3$ und 3 ist eine ungerade Zahl, also nicht durch 2 teilbar. Dies ist ein Gegenbeispiel. Ein Gegenbeispiel reicht aus, um die Allaussage (2) zu widerlegen.

Vermutung (4): Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch vier teilbar.

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ und 10 ist nicht durch 4 teilbar. Die Allaussage (4) ist durch dieses Gegenbeispiel widerlegt.

Eine offene Frage ist aber die Vermutung (4'): Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist nie durch vier teilbar. (Oder gibt es Startzahlen, bei denen die Summe dann durch 4 teilbar ist?)

Beweis (Reinschrift)
Sei $n \epsilon \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann gilt: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$.
$4n$ ist durch 4 teilbar ist, 6 ist aber nicht durch 4 teilbar ist, ist die Summe $4n + 6$ nicht durch 4 teilbar.
q.e.d.

(9) Angleichen der Begrifflichkeiten zum Beweisen

Da im Wintersemester 2011/2012 eine Vielzahl verschiedener Begrifflichkeiten zum Beweisen verwendet wurde (Abschnitt 5.2.3), sollte im darauffolgenden Jahr ein erster Versuch unternommen werden, die verschiedenen Begrifflichkeiten zu ordnen. Daher wurde im Kontext des ersten Kapitels ausschließlich von generischen und formalen Beweisen gesprochen. Als generische Beweise wurden nun auch die Beweise bezeichnet, die mithilfe konkreter Punktmusterdarstellungen erfolgt sind. Wurden Punktmusterbeweise unter Benutzung geometrischer Variablen (s.u.) verwendet, so wurden diese in Anlehnung an die formalen Beweise der Algebra als „formal-geometrische Beweise" bezeichnet.

(10) Herausstellen der Bezüge des zweiten Kapitels zum ersten

In diesem Durchgang wurde gleich zu Beginn des zweiten Kapitels auf den Nutzen von (konkreten) Punktmusterdarstellungen für die Konstruktion generischer Beweise hingewiesen und ‚allgemeine' Punktmusterdarstellungen zur Repräsentation einer beliebigen Anzahl von Punkten in Anlehnung an die Buchstabenvariablen der Algebra als „geometrische Variablen" bezeichnet (s. Abbildung 25). Des Weiteren wurden die in Kapitel 1 unterschiedenen Strategien für die Überprüfung einer Aussage (s.o.) im zweiten Kapitel explizit aufgegriffen.

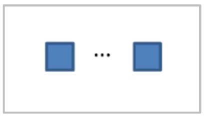


Abbildung 25: Eine geometrische Variable zur Repräsentation einer beliebigen Anzahl von Punkten

Änderungen im Kontext des Übungsbetriebs[33]

(11) Schulung der Tutoren

Bei der Durchsicht der wöchentlichen Hausaufgabenkorrekturen war bereits in der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung (im Wintersemester 2011/12) auffällig gewesen, dass viele Korrekturen von (operativen) Beweisen durch studentische Hilfskräfte nicht den Ansprüchen der Mitarbeitenden entsprachen. Vielmehr zeugten die Korrekturen häufig von konzeptionellen Fehlverständnissen der Korrektoren. Dies kann dadurch erklärt werden, dass diese Studierenden selbst nie in ihrem Studium mit beispielgebundenen Beweisen in Berührung gekommen waren und dementsprechend die gleichen Verständnisprobleme aufwiesen wie die Studierenden der

[33] Die Ausgestaltung der Hausaufgaben oblag in diesem Durchgang einem anderen Wissenschaftlichen Mitarbeiter. Der Autor dieser Arbeit hatte aus diesem Grund keinen Einfluss auf diesen Teil der Lehrveranstaltung.

Lehrveranstaltung. Um eine optimale Korrekturarbeit und Durchführung der Präsenzübungen durch studentische Hilfskräfte zu ermöglichen, wurden die Tutoren der Lehrveranstaltung vor Beginn des Semesters einer Tutorenschulung unterzogen. Die Konzeption und Durchführung der Schulung geschah hierbei nach dem Vorbild des in dem Projekt LIMA erarbeiteten Konzepts (siehe Biehler et al. 2013, S. 23ff.).

Die Tutorenschulung wurde ganztägig, über die Dauer von acht Stunden durchgeführt und beinhaltete einen fachlichen, einen didaktischen und einen methodischen Anteil. Neben der Erarbeitung der fachlichen Elemente standen hierbei auch die mit den Inhalten verbundenen didaktischen Ziele, das Vorrechnen vor der Gruppe und das Korrigieren von Hausaufgaben (inkl. Feedbackgeben) im Zentrum der Schulung.
Im fachlichen Teil der Schulung wurde den Teilnehmenden zunächst eine Einweisung in die Themen ‚beispielgebundenes Beweisen', ‚Aussagenlogik' und ‚Beweistypen' gegeben. Hier wurden auch die didaktischen Intentionen der beispielgebundenen Beweise, die entsprechenden sozio-mathematischen Normen und deren fachmathematischer Wert erörtert. Nach der anschließenden individuellen Bearbeitung von Beweisaufgaben und deren Besprechung im Plenum galt es für die Teilnehmenden, konkrete studentische Aufgabenbearbeitungen zu analysieren, zu diskutieren und mögliche Implikationen für die Lehre abzuleiten. Auch sollten hier gemeinsam Korrekturen erarbeitet werden, die den Studierenden bestmögliche Hilfestellungen geben sollten. Schließlich sollte jeder Teilnehmende eine Einführung in ein bestimmtes Thema der Schulung geben, welche jeweils videographiert wurde. Eindrücke, Probleme, Fragen und Feedback wurden dann im Plenum besprochen.

Exkurs: Zu der Bedeutung von Tutorentandems

Eine weitere Veränderung im Kontext der Präsenzübungen der Lehrveranstaltung war deren Durchführung unter der Leitung von sogenannten Tutorentandems. Im fraglichen Semester leiteten immer zwei studierende Hilfskräfte zusammen eine Übungsgruppe. Vorteile dieser Maßnahme können dabei auf verschiedenen Ebenen ausgemacht werden:

Bei der Vorbereitung einer Präsenzübung können die studentischen Hilfskräfte ihre Ideen bezüglich der methodischen Vorgehensweise austauschen. Die zu besprechenden Aufgaben können aufgeteilt werden, wodurch sich jede Person auf einen Aufgabenteil konzentrieren kann. Während der Durchführung der Übung können sich die Übungsgruppenleiter gegenseitig Sicherheit geben. Bei Rückfragen können beide Tutoren antworten, wobei auch die Übungsgruppenteilnehmer von verschiedenen Antwortmöglichkeiten profitieren. Gerade in der Betreuung der Studierenden in der Arbeitsphase der Übung kommt der bessere Betreuungsschlüssel zum Tragen. Bei der nachträglichen Reflexion der Übung können sich die Übungsgruppenleiter gegenseitig ein Feedback geben und sich dabei überlegen, auf welche Aspekte in den folgenden Übungen noch einmal eingegangen werden soll. Diese Informationen wurden dann in der wöchentlichen Tutorenbesprechung mit allen Tutoren und den Mitarbeitern der Lehrveranstaltung besprochen. Diese gemeinsame Reflektion der Übung und der Aufgabenbearbeitungen begünstigt auch eine einheitliche Korrektur der Hausaufgaben.

(12) Neue Aufgabenformate in den Präsenzübungen

Da der Autor dieser Arbeit in dem fraglichen Durchgang ausschließlich für die Durchführung der Präsenzübungen zuständig war, wurde zunächst versucht, neue Aufgaben und Aufgabenformate verstärkt in die Präsenzübungen zu integrieren. Eine Herausforderung bestand hierbei besonders darin, geeignete Behauptungen für die Konstruktion generischer Beweise auszumachen. Bei der Formulierung der Übungsaufgaben wurde im Kontext der Präsenzaufgaben immer darauf geachtet, dass explizit angemerkt wurde, welche Beweisform (generisch oder formal) von den Studierenden konstruiert werden sollte. Darüber hinaus wurden auch Aufgaben gestellt, bei denen Behauptungen mit beiden Beweisformen bewiesen werden sollten oder sich die Studierenden für die Konstruktion einer der beiden Beweisformen und somit für die Verwendung eines der beiden Diagrammsysteme (Arithmetik/Algebra) entscheiden sollten.

5.3.1.1 Die intentionale Dimension der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung

Für die Darstellung der intentionalen Dimension der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung lassen sich zunächst auf der ‚globalen' Ebene alle Punkte anführen, die bereits an entsprechender Stelle für die erste Durchführung formuliert wurden (s. Abschnitt 5.2.1.1). Aufgrund der bei dieser Durchführung vorgenommenen Modifikationen lassen sich spezielle ‚lokale' Intentionen ausmachen, die in der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung den Fokus der vorgenommenen empirischen Forschung gesetzt haben. Im Zentrum dieser lokalen Intentionen standen das Verständnis von mathematischen Behauptungen, die Bedeutung von (Gegen-) Beispielen für den mathematischen Erkenntnisprozess und die Beweiskonstruktionen der Studierenden zum formalen und zum generischen Beweis. Die vorgenommenen Modifikationen sollten dazu beitragen, dass den Studierenden deutlicher wird, was man von ihnen erwartet, wenn die Konstruktion eines formalen bzw. generischen Beweises gefordert wird. Hierzu wurden konkrete Normen kommuniziert, die Verwendung von Wort- und Buchstabenvariablen erörtert, explizit zwischen Beweiserarbeitung und Reinschrift unterschieden, der Unterschied zwischen generischen Beweisen und bloßen Beispielbetrachtungen und die Bedeutung mathematischer Allaussagen herausgestellt. Die Schulung der Tutoren sollte sicherstellen, dass die studentischen Hilfskräfte selbst über das notwendige fachmathematische Wissen verfügen und konform der Normen agieren, die im Rahmen der Vorlesung kommuniziert wurden. Für die Beforschung des zweiten Durchgangs der Lehrveranstaltung musste allerding der Beobachtungfokus eingegrenzt werden, da die Summe aller dieser Intentionen für eine eingehende Beforschung zu weitreichend erschien. Als übergeordnete Fragestellungen wurden für die Beforschung der Lehrveranstaltung die folgenden Aspekte ausgewählt:

- Die vorgenommenen Modifizierungen des ersten Kapitels der Lehrveranstaltung sollten dazu beitragen, dass den Studierenden die verschiedenen Beweiskonstruktionen besser gelingen.
- Darüber hinaus war es ein Anliegen, den Studierenden das Konzept, die (epistemologische) Bedeutung und damit verbunden die Vor- und Nachteile der verschiedenen Beweisformen zu verdeutlichen und diese gleichsam von bloßen Beispielüberprüfungen abzugrenzen.

5.3.2 Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

Im Kontext des zweiten Durchgangs der Lehrveranstaltung wurden im Wintersemester 2012/13 vier Forschungsprojekte durchgeführt (vgl. Abbildung 26). Um direkt überprüfen zu können, ob die oben beschriebenen Änderungen im ersten Kapitel der Lehrveranstaltung zum generischen Beweis in die richtige Richtung wiesen, wurde das bereits im Wintersemester 2011/12 durchgeführte Forschungsprojekt der qualitativen Analyse der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der ersten Hausaufgabe wiederholt (s. Abschnitt 5.3.2.1). In der dritten Vorlesungswoche wurde eine Interviewstudie pilotiert, deren Ziel es war, den Prozess der Beweiskonstruktionen der Studierenden genauer analysieren zu können. Inhalt des Interviews waren die Konstruktion eines formalen und eines generischen Beweises und die anschließende Diskussion der konkreten Beweisproduktionen (s.

Abschnitt 5.3.2.2). Um überprüfen zu können, welche Probleme die Studierenden genau mit dem Konzept des generischen Beweises haben bzw. welche Fehlvorstellungen in Bezug auf den Nutzen von Beispielen im Beweisprozess vorliegen, wurde in der vorletzten Vorlesungssitzung im Wintersemester 2012/13 ein Bewertungstest durchgeführt, in deren Kontext die Studierenden verschiedene, auch fehlerhafte generische Beweise bewerten sollten (s. Abschnitt 5.3.2.3). Schließlich stellte sich auch die Frage, inwiefern die Studierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung in der Lage waren, generische und formale Beweise zu konstruieren. Aus diesem Grund wurden die Bearbeitungen einer Aufgabe aus der Modulabschlussklausur analysiert (s. Abschnitt 5.3.2.4).

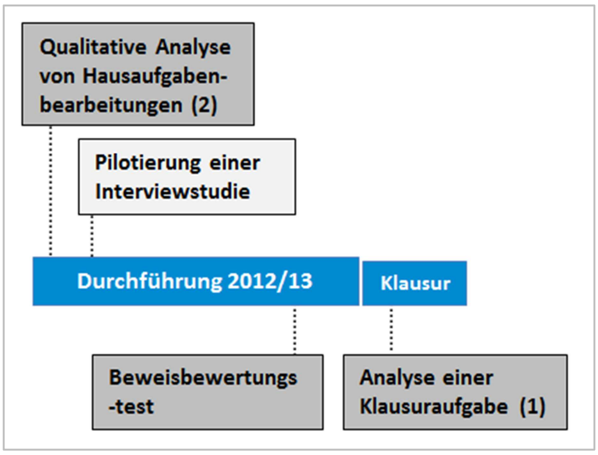


Abbildung 26: Überblick über die im Wintersemester 2012/13 erfolgten Studien

5.3.2.1 Qualitative Analyse von Hausaufgabenbearbeitungen zum generischen und zum formalen Beweis

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Nach den ersten beiden Wochen des Wintersemesters 2012/13 wurde die bereits im Wintersemester 2011/12 durchgeführte Studie über die qualitative Analyse von Hausaufgabenbearbeitungen (vgl. Abschnitt 5.2.2.2) wiederholt, auch, um überprüfen zu können, ob die vorgenommenen Modifikationen der Lehrveranstaltung in die richtige Richtung wiesen. Der einzige Unterschied bestand in dieser Durchführung darin, dass entsprechend den Veränderungen der Lehrveranstaltung in der Aufgabenstellung anstatt von ‚operativen Beweisen' nun von ‚generischen Beweisen' gesprochen wurde. Die Leitfragen zur Auswertung der Studie waren wie folgt:

- Leitfrage zur Auswertung [5]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen generischen Beweis zu führen? Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Beweisbearbeitungen der Studierenden im Wintersemester 2011/12 und 2012/13 ausmachen?
- Leitfrage zur Auswertung [6]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen formalen Beweis zu führen? Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Beweisbearbeitungen der Studierenden im Wintersemester 2011/12 und 2012/13 ausmachen?

Methode

Den Studierenden wurde in der ersten Hausaufgabe die gleiche Aufgabe (über die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten) wie im vorherigen Durchgang gestellt, nachdem sie zwei Vorlesungssitzungen und eine Kleingruppenübung besucht hatten. Die Aufgabenbearbeitungen wurden eingescannt und in das in Abschnitt 5.2.2.2 vorgestellte Kategorienschema eingeordnet. Da der Aufgabenteil der Formulierung der Behauptung mit Buchstabenvariablen (vgl. Aufgabenstellung in Abschnitt 5.2.2.2) aufgrund der vorgenommenen Eingrenzung (s.o.) nicht weiter im Forschungsinteresse stand, wurde diese Teilaufgabe in dieser Studie nicht untersucht.

Entsprechendes gilt auch für die Auswertung der formalen Fehler im Umgang mit Variablen in den Bearbeitungen zum formalen Beweis.

Ergebnisse[34]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [5]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen generischen Beweis zu führen? Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Beweisbearbeitungen der Studierenden im Wintersemester 2011/12 und 2012/13 ausmachen?

Im Wintersemester 2012/13 bestanden 28,1% der Bearbeitungen zum generischen Beweis aus reinen Beispielbetrachtungen (E1); im vorherigen Durchgang lag der entsprechende Anteil noch bei 67,9% (siehe Tabelle 10). Dementsprechend hat der Anteil mit Bearbeitungen, in denen insgesamt Argumente deutlich werden (P1 + P2 = 68,4%) im Wintersemester 2012/13 stark zugenommen. Insgesamt konnten dabei 42,1% Bearbeitungen als vollständige generische Beweise gewertet werden, im Wintersemester 2011/12 lag der Anteil dagegen nur bei 11,3 %.

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12	WS 12/13
E0	3 (5,7 %)	4 (3,5 %)
E1	36 (67,9 %)	32 (28,1 %)
P1	8 (15,1 %)	30 (26,3 %)
P2	6 (11,3 %)	48 (42,1 %)
Summe	53 (100 %)	114 (100 %)

Tabelle 10: Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum generischen (bzw. operativen) Beweis (WS 2011/12 und WS 2012/13)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [6]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende an, wenn sie aufgefordert werden, einen formalen Beweis zu führen? Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Beweisbearbeitungen der Studierenden im Wintersemester 2011/12 und 2012/13 ausmachen?

Vergleicht man die Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum formalen Beweis, so fällt zunächst auf, dass der Anteil der Bearbeitungen ohne erkennbare Argumentation (P2) von 14,3 % (Wintersemester 2011/12) auf 32,2% (Wintersemester 2012/13) angestiegen ist (vgl. Tabelle 11). Dementsprechend liegt der Anteil der Bearbeitungen, die eine Argumentation beinhalten (P3 + P4), im Wintersemester 2012/13 bei 85,5% und 40,7 % der Beweiskonstruktionen konnten als korrekte formale Beweise gewertet werden.

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12	WS 12/13
P1	1 (1,8 %)	11 (9,3 %)
P2	8 (14,3 %)	38 (32,2 %)
P3	18 (32,1 %)	21 (17,8 %)
P4	29 (51,8 %)	48 (40,7 %)
Summe	56 (100 %)	118 (100 %)

Tabelle 11: Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum formalen Beweis (WS 2011/12 und WS 2012/13)

[34] Die folgenden Ergebnisse wurden auch in Kempen (2013) veröffentlicht.

Diskussion der Ergebnisse

Vergleicht man die Ergebnisse der Beweisbearbeitungen aus den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13, so fallen zunächst die großen Unterschiede bzgl. der Anzahl der kategorisierten Bearbeitungen auf (WS 2011/12: n=53 bzw. n=56, WS 2012/13: n=114 bzw. n=118). Der Unterschied ist dabei nicht einer unterschiedlichen Teilnehmerzahl der Lehrveranstaltung geschuldet, sondern darin begründet, dass im ersten Durchgang der Lehrveranstaltung, als der Verfasser dieser Arbeit noch nicht in der Veranstaltung mitgearbeitet hat, nicht alle Hausaufgabenbearbeitungen eingescannt wurden und somit später nicht für die Kategorisierung zur Verfügung standen. Aufgrund dieser großen Unterschiede bzgl. der zu betrachtenden Grundgesamtheit erscheint ein Vergleich der erhaltenen absoluten und relativen Häufigkeiten fragwürdig. Auch sind in der Zahl der Studierenden des Wintersemesters 2012/13 diejenigen enthalten, die durch die Modulprüfung im vorherigen Jahr durchgefallen waren und nun die Veranstaltung zum zweiten Mal besuchten. Solche Begebenheiten verfälschen offensichtlich die Ergebnisse, wodurch eine entsprechende Interpretation nur mit großer Vorsicht erfolgen kann. Als solch eine vorsichtige Interpretation sei hier aber angemerkt, dass die Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum generischen Beweis dahingehend gedeutet werden können, dass die in der Lehrveranstaltung vorgenommenen Maßnahmen (explizite Kommunikation von Normen, Diskussion typischer Fehlvorstellungen und Integration entsprechender Aufgaben) in die richtige Richtung zu deuten scheinen.

Besonders problematisch erscheinen dagegen in diesem Durchgang die Ergebnisse bzgl. der Konstruktion des formalen Beweises. Dieses Resultat mag der Tatsache geschuldet sein, dass die Betonung des Konzepts der generischen Beweise zu Beginn der Lehrveranstaltung in gewisser Weise zu einer Vernachlässigung der Thematik des formalen Beweises geführt hat.

5.3.2.2 Pilotierung einer Interviewstudie zum Beweisen

Forschungsanliegen

Bei der bisherigen Forschung zu den generischen und formalen Beweisen waren die Fragen offen geblieben, welche Aspekte den Studierenden bei den Beweiskonstruktionen genau Probleme bereiten und inwiefern sie die verschiedenen Beweiskonzepte überhaupt verstehen und für sich akzeptieren. Aus diesem Grund wurde im Wintersemester 2012/13 eine Videostudie zum Beweisen pilotiert. Die Hauptdurchführung dieser Studie erfolgte im Wintersemester 2013/14 (vgl. Abschnitt 5.4.2.2). Aus diesem Grund wird bei der folgenden Beschreibung der Pilotierung auf eine detaillierte Darstellung der erhaltenen Ergebnisse verzichtet. Das Interesse der Ausführungen liegt auf den Erkenntnissen, die für die Hauptdurchführung dieser Studie gezogen werden konnten. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auch auf die explizite Formulierung von Forschungsfragen verzichtet. Im Fokus des Interesses standen die Beweisansätze und -Konstruktionen der Studierenden bei formalen und generischen Beweisen.

Durchführung der Pilotierung

Aus jeder Kleingruppenübung der Lehrveranstaltung wurden unter den Freiwilligen jeweils zwei Studierende ausgewählt. Diese sollten zeitgleich zu ihrer Kleingruppenübung dieselbe Aufgabe bearbeiten wie ihre Kommilitonen. Somit ergab sich für die Probanden der Studie kein Mehraufwand. Die zu bearbeitende Aufgabe war hierbei:

Aufgabe
Beweisen Sie die nachfolgende Behauptung mit einem generischen und einem formalen Beweis. Formulieren Sie vor dem formalen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen.

Eine ungerade Quadratzahl ist immer um 1 größer als ein Vielfaches von 4.

Diese Aufgabe entstammt Leuders (2010, S. 45). Sie wurde für die vorliegende Studie ausgewählt, da hier eine Vielzahl verschiedener Beweiskonstruktionen möglich ist (vgl. hierzu die Beweisbeispiele in ebd., S. 45ff.). Für die Erarbeitung der Aufgabe wurde den Studierenden Papier ausgehändigt, das als „Konzeptpapier" gekennzeichnet war. Für die anschließende Niederschrift ihrer Ergebnisse erhielten sie Papierbögen mit der Aufschrift „Reinschrift"[35]. Den Studierenden war es hierbei freigestellt, inwieweit sie die Aufgabe gemeinsam oder alleine bearbeiten wollten; allerdings sollten sie sich vor der finalen Reinschrift auf eine gemeinsame Lösung einigen.

Während des Ablaufs der 90-minütigen Studie wurden alle Beteiligten durch zwei Videokameras gefilmt. Eine Kamera wurde zwischen den Probanden positioniert, um alles aufzuzeichnen, was von ihnen geschrieben wurde. Die andere Kamera filmte die Gesamtansicht. Alles Gesprochene wurde zusätzlich durch ein Mikrophon aufgezeichnet und anschließend transkribiert.

Aus der Pilotierung der Studie gewonnene Erkenntnisse

Von den fünf Studierendenpaaren, die an dieser Studie teilnahmen, scheiterten vier an der Konstruktion des generischen und des formalen Beweises. Bei der Erarbeitung des generischen Beweises schien den Studierenden nicht klar zu sein, was sie bei dieser Behauptung innerhalb der Zahlenbeispiele untersuchen sollten, um eine beispielübergreifende Struktur ausmachen zu können. Im formalen Beweis kamen die Studierenden dieser vier Gruppen nicht über eine algebraische Darstellung des Quadrats einer ungeraden Zahl („$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$") hinaus. Der fünften Gruppe gelang dagegen sowohl die Konstruktion des generischen als auch des formalen Beweises. Innerhalb der Untersuchung konkreter Beispiele entdeckten sie den Zusammenhang, dass bei der Quadrierung einer ungeraden Zahl, dargestellt etwa als $(2 \cdot 3 + 1)$, aufgrund der ersten binomischen Formel immer der Faktor 4 entsteht und am Ende die Zahl 1 addiert wird[36]. Diese Erkenntnis übertrugen sie auf den formalen Beweis und verifizierten hier die Behauptung, dass für alle $n \epsilon \mathbb{N}_0$: $(2n+1)^2 = 4 \cdot b + 1$ gilt, wenn $b \coloneqq n^2 + n$ gesetzt wird.

Die anschließende Besprechung der Beweiskonstruktionen der Studierenden erwies sich als nur wenig ergiebig. Es fiel den Studierenden offensichtlich schwer, ihre Beweiskonstruktionen eingehend zu beschreiben und zu reflektieren. Dies kann dem Umstand geschuldet sein, dass sie bereits mehr als 60 Minuten mit der Bearbeitung der Aufgabe beschäftigt waren.

Aus der Pilotierung der Studie ließen sich die folgenden Erkenntnisse ableiten:

(1) Die Unterscheidung der Papierbögen in „Konzeptpapier" und „Reinschrift" erwies sich als sinnvoll und gewinnbringend für die Unterscheidung der Beweiserarbeitung und der finalen Niederschrift.

[35] Diese Unterscheidung von „Konzeptpapier" und „Reinschrift" entstammt Ostsieker und Biehler (2012) und ermöglicht bei der nachträglichen Analyse eine genaue Betrachtung der Phase der Beweisbearbeitung und derjenigen Aspekte, die die Probanden für ihre finale Reinschrift des Beweises auswählen.
[36] $(2 \cdot 3 + 1)^2 = (2 \cdot 3)^2 + 2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 1 + 1^2 = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = \mathbf{4} \cdot (9 + 3) + \mathbf{1}$

(2) Die Verwendung von zwei Videokameras (lokale und globale Sicht) und eines Mikrophons erwies sich als sinnvoll.
(3) Die vorliegende Aufgabe erwies sich als schwer für die Studierenden. Viele hatten bereits mit dem Quadrieren der algebraischen Darstellung einer ungeraden Zahl Probleme. Auch bietet die Betrachtung konkreter Beispiele hier nur bedingt Ansatzpunkte für die Konstruktion eines generischen Beweises.
(4) Die Diskussion der Beweisproduktionen der Studierenden am Ende der Studie muss durch gezielte Impulse angeleitet und strukturiert werden, damit sich diese als gewinnbringend erweisen kann.

Anmerkung

Da die aus der Pilotierung gewonnenen Erkenntnisse deren methodische Durchführung betreffen und nicht die erhaltenen Resultate im Fokus stehen, wird an dieser Stelle auf eine Diskussion entsprechender Gütekriterien der Forschung verzichtet werden.

5.3.2.3 Beweisbewertungstest

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Ein Ergebnis der bis dato erfolgten Forschung im Kontext der Lehrveranstaltung waren die überraschend großen Verständnisschwierigkeiten, die die Studierenden mit dem Konzept des generischen Beweises hatten. Welche Aspekte des generischen Beweises hier aber genau als problematisch anzusehen waren, blieb nach wie vor unklar. Neben den diese Beweiskonzeption konstituierenden Elementen (generische Beispiele, generisches Argument und narrative Begründung (vgl. Abschnitt 2.1.3)), müssen dabei auch die in der Literatur angeführten Fehlvorstellungen zum epistemologischen Gehalt von bloßen Beispielbetrachtungen berücksichtigt werden. Auf der Grundlage dieser Problemsituation wurde ein Fragebogen konstruiert, mit dessen Hilfe die folgende Leitfrage zur Auswertung beantwortet werden sollte:

- Leitfrage zur Auswertung [7]: Wie bewerten die Studierenden verschiedene Begründungstypen (unzulässige Verallgemeinerungen, unvollständige generische Beweise, falsche und korrekte deduktive Schlussfolgerungen) in einem bekannten und einem unbekannten Sachverhalt?

Theoretischer Hintergrund

In der Literatur werden verschiedene Untersuchungen dargestellt, in denen Lernende und Lehrende beispielgebundene Beweise bewerten sollen (s. Abschnitt 2.4.2). Hierbei steht meist eine übergeordnete ‚Akzeptanz als Beweis' im Vordergrund. Die Bewertung verschiedener und damit auch explizit falscher beispielgebundener Beweisproduktionen wurde bislang nicht eingehend untersucht.

Fehlvorstellungen bzgl. der Akzeptanz von bloßen Beispielbetrachtungen als korrekter Beweis wurden prominent von Martin und Harel (1989) näher untersucht. In ihrer Studie bewerteten 101 Lehramtsstudierende (Grundschule) Beweisbearbeitungen zu einer bekannten Behauptung („Wenn die Quersumme einer ganzen Zahl durch drei teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar") und einer unbekannten Behauptung („Wenn a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist, dann ist auch a ein Teiler von c"). Im Folgenden werden die Auflistung verschiedener Arten von induktiven und deduktiven Begründungen aus Martin und Harel (1989, S. 43f.) wiedergegeben und deren Charakteristika paraphrasiert. Aufbauend auf diesen verschiedenen Begründungsformen wurde der Beweisbewertungstest für die vorliegende Studie konstruiert.

In Anlehnung an Anderson (1985) thematisieren die Autoren fünf unzureichende induktive Begründungen: (1) „Examples" (Die Gültigkeit der Behauptung wird an einem konkreten Beispiel verdeutlicht), (2) „Pattern" (Durch eine geordnete Auflistung von Beispielüberprüfungen wird suggeriert, dass die Behauptung auch in allen weiteren (möglichen) Fällen korrekt sein muss), (3) „Big Number" (Das Testen eines ‚beliebigen' Zahlenbeispiels mit großen Zahlen soll den Eindruck erwecken, dass die Behauptung somit für alle Zahlen gilt) und (4) „Example and nonexample" (Zusätzlich zu konkreten Beispielen, die die Behauptung stützen, werden Beispiele angegeben, die nicht die in der Behauptung angegebenen Voraussetzungen erfüllen und in denen die Behauptung entsprechend nicht wahr ist). Darüber hinaus nutzen die Autoren der Studie auch drei Bearbeitungsvarianten, die auf deduktiven Argumenten beruhen (vgl. ebd., S. 44f.): (5) ein korrekter Beweis, (6) ein fehlerhafter Beweis und (7) ein beispielgebundener Beweis („particular proof"), in dem die Variablen durch konkrete Zahlen ersetzt wurden.

In der Studie von Martin und Harel (1989) sollten die Studierenden entsprechende Beweisbearbeitungen für den bekannten und den unbekannten Sachverhalt bewerten; allerdings wurde für den unbekannten Sachverhalt keine Bearbeitung entsprechend der Form „Pattern" (s.o.) angegeben. Die Bewertungen der Beweise wurden auf einer vierstufigen Likert-Skala vollzogen ([1] „ist kein mathematischer Beweis", …, [4] „ist ein mathematischer Beweis"). Für die Interpretation der Ergebnisse wurden die Beweisbewertungen nach ‚geringer Akzeptanz' ([1]+[2]) und ‚hoher Akzeptanz' ([3]+[4]) zusammenfasst.

Bezüglich der induktiven Argumentationen stellen die Autoren fest, dass jede dieser Begründungsformen von mindestens 50% der Studierenden als korrekter Beweis bewertet wurde ([3]+[4]). Signifikante Bewertungsunterschiede zwischen den verschiedenen induktiven Begründungsformen konnten dabei nur im bekannten Sachverhalt nachgewiesen werden. Die korrekten deduktiven Argumente wurden von mehr als 60% der Studierenden mit hoher Akzeptanz bewertet ([3]+[4]). Die inkorrekten deduktiven Argumentationen wurden dagegen nur von 38% im bekannten Sachverhalt bzw. von 52% im unbekannten Sachverhalt akzeptiert. Die Autoren der Studie gelangen schließlich zu dem Ergebnis, dass Studierende sowohl von induktiven als auch von deduktiven Begründungsformen überzeugt sein können und dass die Akzeptanz einer dieser Begründungsformen die andere nicht ausschließt. Diese Akzeptanz ist dabei unabhängig davon, ob sich die Begründung auf einen bekannten oder unbekannten Sachverhalt bezieht.

Die Konstruktion des Fragebogens

Für die vorliegende Untersuchung wurden die induktiven und deduktiven Begründungen aus der Studie von Martin und Harel (1989) (s.o.) übernommen und durch weitere ergänzt. Diese Ergänzungen betreffen fehlerhafte Bearbeitungen zum generischen Beweise, bei denen jeweils ein geforderter Teilaspekt (generische Beispiele, generisches Argument, narrative Begründung) nicht erfüllt wird. Zu allen diesen verschiedenen Begründungsformen wurde je ein Beispiel zu einem bekannten und einem unbekannten Sachverhalt angegeben, die die Studierenden auf einer fünfstufigen Likert-Skala bewerten sollten ([1] unzureichend, …, [5] sehr gut). Bezüglich der deduktiven formalen Begründungen wurden ein falscher und zwei korrekte Beweise angegeben, die sich jeweils im Grad ihrer formalen Darstellung unterscheiden.

Im Folgenden werden zu den verschiedenen Begründungsarten jeweils die Beispiele angegeben, die den Studierenden für den bekannten Sachverhalt („Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade“) zur Bewertung gegeben wurden. (Für die Konstruktion entsprechender ‚Begründungen‘ in dem unbekannten Sachverhalt wurde die entsprechende Behauptung aus der Studie von Martin und Harel (1989) übernommen [(„Wenn a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist, dann ist auch a ein Teiler von c“]), wobei die jeweiligen zu bewertenden Begründungen leicht modifiziert wurden.

Die zu bewertenden ‚Begründungen‘ im bekannten Sachverhalt zu der Behauptung: „Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade“.

I Induktive Begründungsformen mit unzulässiger Verallgemeinerung

1. Bloße Beispiele mit unzulässiger Verallgemeinerung („Beispiele“)

$3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$ ist ungerade
$5 + 2 \cdot 5 = 5 + 10 = 15$ ist ungerade

Also stimmt die Behauptung.

2. Beispielkonstruktion gemäß der Fehlvorstellung „Big Number“

Wir überprüfen die Aussage an einer beliebigen, sehr großen ungeraden Zahl:

$537696125 + 2 \cdot 537696125 = 537696125 + 1075392250 = 1613088375$ (wahr).

Also gilt die Behauptung auch für eine beliebig große Zahl. Somit wurde die Behauptung bewiesen.

3. Beispielkonstruktion gemäß der Fehlvorstellung „Pattern“

$1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$ ist ungerade
$3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$ ist ungerade
$5 + 2 \cdot 5 = 5 + 10 = 15$ ist ungerade
$7 + 2 \cdot 7 = 7 + 14 = 21$ ist ungerade
$9 + 2 \cdot 9 = 9 + 18 = 27$ ist ungerade
$11 + 2 \cdot 11 = 11 + 22 = 33$ ist ungerade
$13 + 2 \cdot 13 = 13 + 26 = 39$ ist ungerade
$15 + 2 \cdot 15 = 15 + 30 = 45$ ist ungerade
$17 + 2 \cdot 17 = 17 + 34 = 51$ ist ungerade
$19 + 2 \cdot 19 = 19 + 38 = 57$ ist ungerade
…
Also stimmt die Behauptung.

4. Beispielkonstruktion gemäß der Fehlvorstellung „Non example“

$1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$ ist ungerade
$4 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$ ist gerade

An den Beispielen erkennt man das folgende Prinzip: Addiert man zu einer ungeraden Zahl ihr Doppeltes, so ergibt sich immer eine ungerade Zahl. Addiert man aber zu einer geraden Zahl ihr Doppeltes, so ergibt sich immer eine gerade Zahl. Also ist die Behauptung für alle ungeraden Zahlen wahr und sie wurde bewiesen.

II Bearbeitungen zum generischen Beweis

5. **Paraphrase ohne Begründung**
(In der ‚narrativen Begründung' des generischen Beweises werden lediglich die in den getesteten Beispielen ausgeführten Operationen paraphrasiert, ohne dass weiterführende Argumente tangiert werden.)

$9 + 2 \cdot 9 = 9 + 18 = 27$
$13 + 2 \cdot 13 = 13 + 26 = 39$
$17 + 2 \cdot 17 = 17 + 34 = 51$

An den Beispielen erkennt man das folgende Prinzip: Addiert man zu einer ungeraden Zahl ihr Doppeltes, so ergibt sich immer eine ungerade Zahl. Dies gilt für alle natürlichen Zahlen. Also ist die Behauptung für alle ungeraden Zahlen wahr und somit wurde die Behauptung bewiesen.

6. **Unvollständiger generischer Beweis**
(In der den generischen Beispielen folgenden narrativen Begründung fehlt ein Argument, um die Behauptung vollständig und allgemeingültig zu verifizieren.)

$11 + 2 \cdot 11 = 11 + 22 = 3 \cdot 11$
$3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 3 \cdot 3$
$7 + 2 \cdot 7 = 7 + 14 = 3 \cdot 7$

Vergleicht man die Beispiele miteinander, so erkennt man, dass das Ergebnis immer ungerade ist und auch immer gleich dem Dreifachen der Ausgangszahl. Da dies für alle natürlichen Zahlen gilt, ist somit die Behauptung bewiesen.

7. **Korrekter und vollständiger generischer Beweis**

$11 + 2 \cdot 11 = 11 + 22 = 33$
$3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$
$7 + 2 \cdot 7 = 7 + 14 = 21$

Vergleicht man die Beispiele miteinander, so erkennt man, dass die Summe immer aus einem ungeraden und einem geraden Summanden besteht, da das Doppelte einer ungeraden Zahl immer gerade ist. Da die Summe aus einer ungeraden und einer geraden natürlichen Zahl immer ungerade ist, ist somit das Ergebnis dieser Rechnung für alle ungeraden Zahlen eine ungerade Zahl.

III Bearbeitungen zum formalen Beweis

8. **Falscher formaler Beweis**

Sei $a \epsilon N$ eine ungerade Zahl, beliebig aber fest. Dann ist $a = (2k - 1)$ für ein $k \epsilon \mathbb{N}$. Also gilt:

$$\begin{array}{cccc} \Leftrightarrow & (2k-1) + 2 \cdot (2k-1) & = & 3 \cdot (2k-1) \\ \Leftrightarrow & 2k - 1 + 4k - 2 & = & 6k - 3 \\ \Leftrightarrow & 6k - 3 & = & 6k - 3 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 0 \end{array}$$

9. **Korrekter ‚formaler' Beweis mit größerem narrativen Anteil**

Sei $a \epsilon \mathbb{N}$ eine beliebige, aber feste ungerade Zahl. Dann gilt: $a + 2 \cdot a = 3 \cdot a$.
Da das Dreifache einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

10. Korrekter formaler Beweis mit größerem Anteil algebraischer Umformungen

Sei $a \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, beliebig, aber fest. Dann ist $a = (2k - 1)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Also gilt: $a + 2a = (2k - 1) + 2 \cdot (2k - 1) = 2k - 1 + 2k - 2 = 6k - 3 = 2 \cdot (3k - 1) - 1$, also eine ungerade Zahl, da um 1 kleiner als eine gerade Zahl.
q.e.d.

Datenerhebung

Die Durchführung der Befragung fand in der vorletzten Vorlesungssitzung des Wintersemesters 2012/13 statt. Die Studierenden hatten für das Ausfüllen des Fragebogens 45 Minuten Zeit. Insgesamt nahmen 94 Studierende an dieser Umfrage teil.

Ergebnisse

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [7]: Wie bewerten die Studierenden verschiedene Begründungstypen (unzulässige Verallgemeinerungen, unvollständige generische Beweise, falsche und korrekte deduktive Schlussfolgerungen) in einem bekannten und einem unbekannten Sachverhalt?

Die Bewertungen der Studierenden wurden für die Auswertung der Daten wie folgt zusammengefasst: Die Bewertungen der Begründungen mit „1“ und „2“ auf der Likert-Skala wurden als *negative* Bewertung als Beweis, die Bewertung „3“ als *neutral* und die Bewertungen „4“ und „5“ als *positive* Bewertung als Beweis zusammengefasst. Die Ergebnisse bzgl. der verschiedenen Begründungsformen für den bekannten und unbekannten Sachverhalt werden in der Tabelle 12 und der Abbildung 27 dargestellt.

	Bekannter Sachverhalt (n=94)			unbekannter Sachverhalt (n=94)		
	negativ	neutral	positiv	negativ	neutral	positiv
Induktive Begründungsformen						
Beispiele	90,3	6,5	3,2	78,3	18,5	3,3
Big Number	89,4	8,5	2,1	90,2	7,6	2,2
Pattern	74,2	15,1	10,8	75,3	18,3	6,5
Non example	66,3	22,5	11,2	83,5	14,3	2,2
Bearbeitungen zum generischen Beweis						
Paraphrase	62,8	20,2	17	35,2	37,5	27,3
unvollst. Gen. Bew.	20,2	39,3	40,4	20,7	31,5	47,8
Gen. Bew.	18,3	20,4	61,3	6,5	25	68,5
Bearbeitungen zum formalen Beweis						
formal & falsch	63	15,2	21,7	50	20,2	29,8
formal & narrativ	39,1	18,5	42,4	15,4	22	62,6
formal	4,4	16,7	78,9	8,7	15,2	76,1

Tabelle 12: Ergebnisse bzgl. der studentischen Bewertungen der Begründungsformen im bekannten und unbekannten Sachverhalt; Angaben in Prozent, zusammengefasst nach den Kategorien „negativ“ (Bewertungen [1] und [2]), „neutral“ (Bewertung [3]) und „positiv“ (Bewertungen [4] und [5])

Betrachtet man die Ergebnisse bzgl. der induktiven Begründungsformen („Beispiele“, „Big Number“, „Pattern“ und „Non example“, vgl. Tabelle 12), so wird deutlich, dass diese Begründungen sowohl im bekannten als auch im unbekannten Kontext von der großen Mehrheit der Studierenden negativ bewertet wurden. In den Bearbeitungen, die hier dem generischen Beweis zugeordnet werden, wurde die paraphrasierende Begründung („Paraphrase“) im bekannten Sachverhalt von 62,8%, allerdings nur von 35,2% im unbekannten Sachverhalt negativ bewertet. Im unbekannten Sachverhalt scheint diese (bloße) Paraphrasierung der Rechnung die Bearbeitung in den Augen der Studierenden aufzuwerten. Dies scheint folgerichtig im Sinne der Normen der Lehrveranstaltung, die für einen generischen Beweis neben bloßen Beispielbetrachtungen eine narrative Argumentation vorsehen. In diesem Sinne sind die Begründungsformen „Paraphrase" tatsächlich besser als die vorherigen „induktiven Begründungsformen" zu beurteilen. Der unvollständige generische Beweis wurde mit 40,4% im bekannten und mit 47,8% im unbekannten Sachverhalt deutlich besser bewertet als die paraphrasierende Argumentation (17% im bekannten bzw. 27,3% im unbekannten Sachverhalt). Die beste Bewertung erhielt der vollständige generische Beweis mit 61,3% positiver Zustimmung im bekannten und mit 68,5% im unbekannten Sachverhalt. Bemerkenswert ist hierbei allerdings, dass die positiven Bewertungen relativ gering ausfallen, obwohl diese Bearbeitungen als vollständige generische Beweise konstruiert wurden.

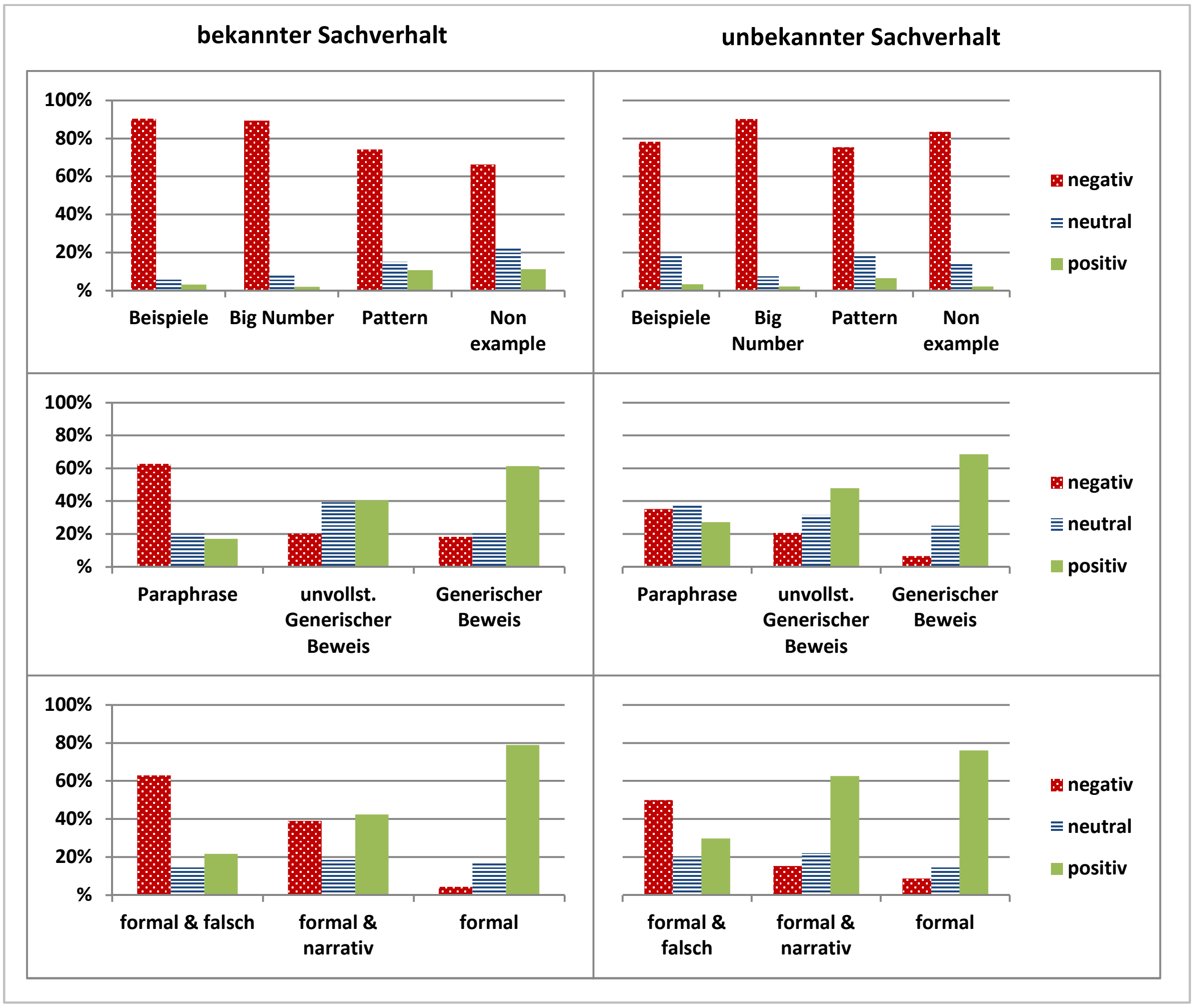


Abbildung 27: Ergebnisse bzgl. der studentischen Bewertungen der Begründungsformen im bekannten und unbekannten Sachverhalt (n=94); Angaben in Prozent, zusammengefasst nach den Kategorien „negativ" (Bewertungen [1] und [2]), „neutral" (Bewertung [3]) und „positiv" (Bewertungen [4] und [5])

Bei den Bearbeitungen zum formalen Beweis wurde der falsche formale Beweis von 63% im bekannten und von 50% im unbekannten Sachverhalt als negativ bewertet. Die korrekten formalen Beweise mit höheren algebraischen Anteilen wurden in beiden Sachverhalten positiver bewertet als die formalen Beweise mit narrativen Anteilen.

Diskussion der Ergebnisse

Zunächst muss bei dieser Studie bzgl. der verwendeten Items angemerkt werden, dass nicht sicher gesagt werden kann, wie diese von den Probanden gelesen bzw. verstanden wurden. So kann der Betrachter eines Items der Kategorie „Pattern“ bei einer vergleichenden Durchsicht der gegebenen Beispiele durchaus ein beispielübergreifendes Muster abstrahieren und dementsprechend die Bearbeitung für sich als korrekten (unvollständigen) generischen Beweis akzeptieren. Die erhaltenen (eher ablehnenden) Ergebnisse sprechen allerdings nicht dafür, dass von den Studierenden Erkenntnisse in die Items hereingelesen wurden, die so nicht intendiert waren. Auch muss an dieser Stelle offen gelassen werden, aufgrund welcher Aspekte die Studierenden ihre jeweiligen Bewertungen vorgenommen haben. Aus diesen Gründen müssen entsprechende Ergebnisse mit Vorsicht betrachtet werden. Die folgende, entsprechend vorsichtige Interpretation der Ergebnisse erscheint dabei zulässig.

Betrachtet man die Ergebnisse, so kann festgehalten werden, dass die bloßen Beispielbetrachtungen von der großen Mehrheit der Studierenden eher nicht als ‚akzeptabler Beweis‘ betrachtet werden. Die Probleme der Studierenden mit dem Konzept des generischen Beweises scheinen somit nicht in möglichen Fehlvorstellungen zu bloßen empirisch-induktiven Verifikationen begründet zu sein. Die verschiedenen Bearbeitungen, die im Kontext generischer Beweise zu sehen sind, werden mit steigender Qualität (von „Paraphrase“ über „unvollständiger generischer Beweis“ zu „vollständiger generischer Beweis“) auch besser von den Studierenden bewertet. Es ist allerdings auffällig, dass die vollständigen generischen Beweise nur von etwa Zweidritteln der Studierenden als positiv bewertet werden. Hier stellt sich die Frage, wie innerhalb der Lehrveranstaltung eine Begründungsform vermittelt werden kann (bzw. soll), die von den Studierenden nicht als valide Verifikation akzeptiert wird? Bzgl. der Bewertungen der formalen Beweise lässt sich festhalten, dass die falschen Beweise von der Mehrheit der Studierenden negativ bewertet werden. Die bloße Verwendung von algebraischen Symbolen scheint somit nicht allein die Korrektheit mathematischer Beweise für die Studierenden zu konstituieren. Die korrekten formalen Beweise werden insgesamt von der Mehrheit der Studierenden positiv bewertet, bzw. sogar am positivsten von allen Bearbeitungen.

Für die Lehrveranstaltung folgte hieraus, dass der Sinn und Gehalt generischer Beweise thematisiert werden musste. Dabei durfte es nicht um ein ‚Überreden‘ gehen, vielmehr sollten der Mehrwert und die Grenzen dieser Beweisform erörtert werden. Mit diesen Resultaten war gleichzeitig auch ein Gegenstand für die weitere Forschung gegeben: Inwiefern (bzw. bzgl. welcher Aspekte) werden generische Beweise von Studierenden ‚akzeptiert‘?

5.3.2.4 Analyse der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2012/13

Forschungsanliegen und Forschungsfrage

Waren in der Analyse der ersten Hausaufgabe der Studierenden schon einige Erkenntnisse über deren Beweiskonstruktionen gewonnen worden, so wurden in der qualitativen Interviewstudie weitere Probleme der Studierenden bei der Konstruktion von formalen und generischen Beweisen deutlich. Eine offene Frage blieb aber weiterhin, inwiefern die Studierenden nach der Lehrveranstaltung in der Lage waren, formale und generische Beweise zu konstruieren.

- Leitfrage zur Auswertung [8]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende nach der Lehrveranstaltung an, wenn sie aufgefordert werden, einen generischen bzw. einen formalen Beweis zu führen?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfrage wurde in die Modulabschlussklausur im Wintersemester 2012/13 eine Aufgabe eingefügt, in der es galt, eine Behauptung mit einem generischen und einem formalen Beweis zu verifizieren.

Aufgabe und Aufgabenanalyse

Die hier thematisierte, zu bearbeitende Aufgabe in der Modulabschlussklausur war die folgende:

> **Aufgabe 4: Generischer und formaler Beweis**
> [Hinweis: Für eine natürliche Zahl $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ heißt eine Zahl $\mathrm{t} \in \mathbb{N}$ Teiler von n, wenn ein $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = t \cdot a$.]
>
> Wir betrachten die folgende Behauptung:
> Für $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn a ein Teiler von b ist und a auch ein Teiler von c ist, dann ist a ein Teiler von $(b + c)$.
>
> (a) Beweisen Sie die Behauptung mit einem generischen Beweis.
> (b) Beweisen Sie die Behauptung mit einem formalen Beweis.

Diese Aufgabe entstammt Padberg (1997, S. 58) und wurde deshalb ausgewählt, weil die Beweisidee (Anwendung der Teilerrelation und des Distributivgesetztes, s.u.) bei der Betrachtung von konkreten Beispielen ‚gut' auszumachen ist (vgl. Padberg 1997, S. 58ff.). Diese für den generischen Beweis nutzbare Strategie entspricht auch dem Vorgehen in dem entsprechenden ‚gängigen' formalen Beweis (s.u.).

<u>Konstruktion des generischen Beweises</u>

Im Sinne der in der Lehrveranstaltung aufgestellten Normen beginnt ein generischer Beweis mit der Betrachtung konkreter Beispiele. Bei dieser ersten Überprüfung der Gültigkeit der Behauptung soll weiter nach einem beispielübergreifenden Schema (i.e. einem generischen Argument) gesucht werden, durch dessen Anwendung erklärt werden kann, warum die Behauptung in allen möglichen Fällen korrekt ist. Diese Argumentation, welche auf dem generischen Moment aufbaut, muss schließlich expliziert werden.

Das generische Argument ergibt sich bei der vorliegenden Behauptung zunächst aus dem Einsetzen der Teilerrelationen in die zu betrachtende Summe. Als mathematische Argumente werden hierbei das Distributivgesetz und die Eigenschaft genutzt, dass die Summe zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist. Diese Argumente müssen hier allerdings nicht expliziert werden, da deren Anwendung im Kontext der Lehrveranstaltung nicht problematisiert worden ist.

Ein korrekter generischer Beweis im Sinne der Lehrveranstaltung ist dann:

> Beispiel (1):
> 10 und 12 sind durch 2 teilbar. $10 = 2 \cdot 5$ und $12 = 2 \cdot 6$. Für die Summe gilt dann:
> $22 = 10 + 12 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 2 \cdot (5 + 6)$.
>
> Beispiel (2):
> 10 und 40 sind durch 5 teilbar. $10 = 5 \cdot 2$ und $40 = 5 \cdot 8$. Für die Summe gilt dann:
> $50 = 10 + 40 = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 5 \cdot (2 + 8)$.

In den Beispielen wird die Summe zweier Zahlen betrachtet, die beide durch eine *dritte Zahl* teilbar sind. Die Summanden lassen sich entsprechend immer als Vielfache dieser *dritten Zahl* schreiben. Durch obige Umformungen erhält man somit immer die Darstellung der Summe als Produkt dieser *dritten Zahlen* und einer natürlichen Zahl. Also ist auch die Summe der beiden Zahlen durch die *dritte Zahl* teilbar.

Konstruktion des formalen Beweises

Für den algebraischen Nachweis, dass unter den gegebenen Voraussetzungen a ein Teiler von $(b + c)$ ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die über der konkreten Aufgabe gegebene Definition von Teilbarkeit macht deutlich, dass eine Lösungsmöglichkeit durch die Anwendung der (aus der Vorlesung bekannten) Faktorschreibweise der Teilerrelation besteht. Diese gilt es sowohl für b als auch für c zu benutzen. Anschließend müssen die entsprechenden Gleichungen in die Summe $(b + c)$ eingesetzt werden, wodurch schließlich wieder mithilfe der obigen Definition nachgewiesen werden kann, dass diese Summe ein Vielfaches von a ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass a ein Teiler von $(b + c)$ ist.

Ein korrekter formaler Beweis im Sinne der Lehrveranstaltung ist dann:

Beweis
Seien $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
Zu $\mathrm{b} \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathrm{t}_1 \in \mathbb{N}$ mit: $b = a \cdot \mathrm{t}_1$.
Zu $\mathrm{c} \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathrm{t}_2 \in \mathbb{N}$ mit: $c = a \cdot \mathrm{t}_2$.

Dann gilt: $b + c = a \cdot \mathrm{t}_1 + a \cdot \mathrm{t}_2 = a \cdot (\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2)$ mit $(\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2) \in \mathbb{N}$. Somit ist a ein Teiler von $(b + c)$.

Analyse der Bearbeitungen und Neuauswertung für die vorliegende Arbeit

Während der Klausurkorrektur wurden die Bearbeitungen zu der Beweisaufgabe anonymisiert und eingescannt. Die Ergebnisse bzgl. der Kategorisierung wurden in eine Tabelle eingetragen, so dass keine personenbezogenen Daten mehr nachvollzogen werden konnten. Für die Kategorisierung der Daten wurde bei Durchführung der Studie zunächst das Kategorienschema verwendet, das in Abschnitt 5.2.2.2 dargestellt und bereits in vorherigen Studien eingesetzt wurde (s. Abschnitt 5.2.2.2 und Abschnitt 5.3.2.1). Für die Abfassung dieser Dissertation wurden die Aufgabenbearbeitungen (Scans) erneut ausgewertet und in ein später entwickeltes Kategorienschema eingeordnet, um innerhalb dieser Arbeit eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen. Das im Folgenden verwendete Kategoriensystem zur Erfassung der Qualität der Begründungen (bzw. Beweise) und dessen Entwicklung wurde in Abschnitt 3.3.1 erläutert; für eine bessere Lesbarkeit der Darstellungen und die Vermeidung von Redundanzen wird an dieser Stelle auf eine genauere Darstellung des Kategorienschemas verzichtet. Das Kategorienschema zur Erfassung der „Qualität der Begründungen“ wird in Tabelle 13 erläutert, Ankerbeispiele zu den verschiedenen Kategorien werden in Abschnitt 7.2.4.1 gegeben.

Bezeichnung	**Erläuterung**
n.b.	Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet.
Empirisch	In der Bearbeitung findet ausschließlich eine induktive Prüfung der Behauptung statt.
Pseudo	In der Bearbeitung wird die Behauptung paraphrasiert oder es werden falsche bzw. irrelevante Fakten genannt.
Fragmentarisch	Es werden korrekte und relevante fachliche Aspekte genannt, ohne dass eine Argumentationskette aufgebaut wird.
Argumentation mit Lücke	Es wird eine Argumentationskette mit korrekten und relevanten fachlichen Aspekten aufgebaut, die allerdings eine Lücke enthält.
Vollständige Argumentation	Die Behauptung wird mithilfe korrekter Argumente vollständig verifiziert.

Tabelle 13: Kategorienschema zur Erfassung der „Qualität der Begründungen", verwendet bei der Analyse der Beweiskonstruktion der Studierenden in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2012/13

Bei der Durchsicht der (anonymisierten) Scans für die Neukategorisierung der Beweisbearbeitungen war auffällig, dass die Studierenden ‚Teilbarkeit' unterschiedlich operationalisierten, um ihre Beweise zu konstruieren. Bei der Beobachtung dieses Phänomens ergab sich die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen der verwendeten Operationalisierung von ‚Teilbarkeit' und der erreichten ‚Qualität der Begründung' ausgemacht werden kann. Um dieser Frage (quasi explorativ) nachgehen zu können, wurde neben der Qualität der Bearbeitungen außerdem codiert, mit welcher Operationalisierung von ‚Teilbarkeit' die Studierenden innerhalb ihrer Beweiskonstruktionen arbeiteten. Für diese Analyse wurden drei verschiedene Kategorien verwendet: (i) Verwendung der Faktorschreibweise, (ii) Verwendung der Quotientenschreibweise und (iii) Verwendung beider Schreibweisen. Die Kategorien werden in der Tabelle 14 erläutert.

Kategorienbezeichnung	**Erläuterung**	**Ankerbeispiel** (entnommen aus Studierendenbearbeitungen)
Verwendung der Faktorschreibweise („Faktor")	Für die Bearbeitung der Beweisaufgabe wird die Teilerrelation in eine Faktorschreibweise übersetzt.	Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $b = a \cdot m$ und $c = a \cdot n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. […]
Verwendung der Quotientenschreibweise („Quotient")	Für die Bearbeitung der Beweisaufgabe wird die Teilerrelation in eine Quotientenschreibweise übersetzt.	Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. So gilt: $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{(b+c)}{a}$ […][37]
Verwendung beider Schreibweisen („beide")	Für die Bearbeitung der Beweisaufgabe werden die Faktor- und die Quotientenschreibweise verwendet.	$b = a \cdot t, c = a \cdot k, (b+c) = a \cdot i,$ $\frac{(a \cdot t)+(a \cdot k)}{a} = i$ […]

Tabelle 14: Kategorienschema zur Erfassung der verwendeten Operationalisierung der Teilbarkeitsrelation

[37] Der Nachweis der Teilbarkeit mithilfe der Bruchdarstellung ist in der Zahlentheorie eher unüblich. An dieser Stelle müsste gezeigt werden, dass der Quotient $\frac{(b+c)}{a}$ eine natürliche Zahl ist, um nachzuweisen, dass a ein Teiler von $(b+c)$ ist. Im Sinne der Normen der Lehrveranstaltung (etwa „Akzeptanz von Vorwissen", vgl. Abschnitt 1.1) erscheint es angebracht, diese Herangehensweise der Studierenden an Fragen der Teilbarkeit zuzulassen.

Ergebnisse

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [8]: Welche Begründungen führen Erstsemesterstudierende nach der Lehrveranstaltung an, wenn sie aufgefordert werden, einen generischen bzw. einen formalen Beweis zu führen?

Die Ergebnisse zu den Bearbeitungen zum generischen und zum formalen Beweis werden in der Tabelle 15 dargestellt.

	Generischer Beweis (n = 98)	Formaler Beweis (n = 98)
nicht bearbeitet („n.b.“)	6 (6,1%)	14 (14,3%)
empirisch („emp.“)	13 (13,3%)	0 (0,0%)
Pseudo	37 (37,8%)	38 (38,8%)
fragmentarisch („frag.“)	11 (11,2%)	12 (12,2%)
Argumentation mit Lücke („Arg. mit Lücke“)	14 (14,3%)	23 (23,5%)
vollständige Argumentation („vollst. Arg.“)	17 (17,3%)	11 (11,2%)
Summe	98 (100%)	98 (100%)

Tabelle 15: Ergebnisse der Bearbeitungen zum generischen und zum formalen Beweis (absolute und relative Häufigkeiten [%]) in der Modulabschussklausur im Wintersemester 2012/13

Bei den Ergebnissen ist auffällig, dass bei der Konstruktion des generischen Beweises nur von 13,3% der Studierenden bloße Beispielbetrachtungen („emp“) angegeben wurden und korrekte Argumente dagegen insgesamt bei 42,9% der Bearbeitungen ausgemacht werden konnten („frag.“ + „Arg. mit Lücke“ + „vollst. Arg.“), wobei nur 17,3% aller Bearbeitungen als vollständige Argumentation gewertet werden konnten. Bemerkenswert ist hierbei der hohe Anteil von Pseudoantworten von 37,8%, also Antworten, in denen nur irrelevante Aspekte zur Verifikation der Behauptung angeführt wurden. Auch bei den Bearbeitungen zum formalen Beweis ist der Anteil von Pseudoantworten mit 38,8% auffällig. Insgesamt wurden in 46,9% der Bearbeitungen korrekte Argumente benannt („frag.“ + „Arg. mit Lücke“ + „vollst. Arg.“), aber nur 11,2% der Bearbeitungen konnten als vollständige Argumentationen gewertet werden.

Die Unterteilung der Ergebnisse nach der jeweilig angewendeten Operationalisierung von Teilbarkeit ermöglicht dabei weitere Einsichten (siehe Tabelle 16). Im Vergleich der Ergebnisse in Unterscheidung der Operationalisierungen von Teilbarkeit wird deutlich, dass die Bearbeitungen, in denen die Faktorschreibweise verwendet wird, deutlich besser ausfallen als diejenigen, in denen mithilfe der Quotientenschreibweise argumentiert wird. Dies betrifft sowohl die Ergebnisse zum generischen Beweis wie auch die zum formalen Beweis.

	Generischer Beweis [%]			Formaler Beweis [%]		
	Faktor (n = 48)	Quotient (n = 36)	beide (n = 8)	Faktor (n = 54)	Quotient (n = 27)	beide (n = 3)
emp.	8,3	22,2	12,5	0,0	0,0	0,0
pseudo	25,0	52,8	75,0	38,8	59,3	33,3
frag.	16,7	8,3	0,0	5,6	29,6	33,3
Arg. mit Lücke	18,7	13,9	0,0	35,2	11,1	33,3
vollst. Arg.	31,3	2,8	12,5	20,4	0,0	0,0
Summe	100	100	100	100	100	100

Tabelle 16: Relative Häufigkeiten [%] bzgl. der Bearbeitungen zum generischen Beweis (links) und zum formalen Beweis (rechts), aufgeteilt nach der verwendeten Operationalisierung des Teilbarkeitsbegriffs

Dieses Resultat ist vor allem dadurch zu erklären, dass bei der Verwendung der Quotientenschreibweise in den entsprechenden (generischen und formalen) Beweisführungen begründet werden muss, warum der Quotient $\frac{(b+c)}{a}$ eine natürliche Zahl ist, was von keinem Studierenden getan wurde. Im Gegenteil führte diese Operationalisierung häufig zu Pseudoantworten, wenn in der Betrachtung der Quotienten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ und $\frac{(b+c)}{a}$ nicht angemerkt wurde, dass Teilbarkeit hier bedeutet, dass diese Bruchzahlen Elemente der natürlichen Zahlen sind bzw. sein müssen.[38]

Die Beweisbearbeitungen, in denen beide Schreibweisen verwendet werden („beides"), werden an dieser Stelle aufgrund der geringen Anzahl der entsprechenden Bearbeitungen (n=8 beim generischen Beweis und n=3 beim formalen Beweis) nicht weiter betrachtet.

Diskussion der Ergebnisse und Implikationen für die Lehrveranstaltung

Die Ergebnisse bzgl. der Bearbeitungen zum generischen Beweis ließen darauf schließen, dass das Konzept dieser Beweisform vielen Studierenden auch nach dem Semester noch Probleme bereitete; nur in 42,9% der Bearbeitungen zum generischen Beweis wurden überhaupt valide Argumente zur Verifikation der Behauptung angeführt, in 13,3% der Bearbeitungen wurden bloße Beispiele als generische Beweise angegeben. Bei den Ergebnissen zum formalen Beweis fiel dagegen auf, dass 14,3% der Studierenden diese Aufgabe überhaupt nicht versucht haben, obwohl es sich um eine Klausuraufgabe handelte. Der Anteil der Pseudoantwort von 38,8% ließ dagegen vermuten, dass diesen Studierenden das Ziel der hier verlangten Nutzung der algebraischen Symbolsprache nicht deutlich war, welches darin bestand, einen Term bzw. eine Gleichung zu erhalten, mit dessen bzw. deren Hilfe die Teilbarkeit der Summe $(b + c)$ durch die natürliche Zahl a gezeigt werden konnte. Weiter musste beachtet werden, dass nur 11,2% der Studierenden bei der Konstruktion des formalen Beweises eine vollständige Argumentation gelang.

[38] Vgl. hierzu die Thematisierung des Teilbarkeitsbegriffs in der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 (Abschnitt 5.4.1).

Diese erhaltenen Ergebnisse ließen sich besser verstehen, wenn man die verwendete Operationalisierung des Teilbarkeitsbegriffs in die Analyse mit einbezog. Wurde bei der Konstruktion der generischen und formalen Beweise die Quotientenschreibweise verwendet, so waren diese Bearbeitungen insgesamt als weniger erfolgreich einzustufen.

Die Beweisbearbeitungen der Studierenden wurden in dieser Studie nicht zweitcodiert, wodurch die Reliabilität dieser Studie nicht gesondert überprüft wurde. Wie bereits bei den entsprechenden Untersuchungen der Hausaufgabenbearbeitungen der Studierenden (Abschnitt 5.2.2.2 und 5.3.2.1) ist dies damit begründet, dass die Intention dieses Forschungsprojekts darin lag, überhaupt eine Idee davon zu bekommen, wie die Beweisbearbeitungen der Studierenden nach der Lehrveranstaltung ausfallen, und u.a. auf der Grundlage dieser Ergebnisse die Konzeption der Lehrveranstaltung zu reflektieren. Aus diesem Grund wurde an dieser Stelle der vorliegende Grad an Reliabilität (und auch an Objektivität) für ausreichend befunden.

5.3.3 Retrospektive Analyse der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung

Bei der retrospektiven Betrachtung der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung und der damit einhergehenden Forschung wurden die folgenden Aspekte deutlich:

(1) Die vorgenommenen Änderungen im ersten Kapitel der Lehrveranstaltung schienen insgesamt in die richtige Richtung zu weisen: Die Ergebnisse der erneuten Analyse der Hausaufgabenbearbeitungen (Abschnitt 5.3.2.1) konnten in dieser Weise interpretiert werden.

(2) Die Konstruktion von generischen und formalen Beweisen stellte für die Studierenden weiterhin ein Problem dar (vgl. Abschnitt 5.3.2.2 und 5.3.2.4). Neben konzeptuellen Schwierigkeiten mit diesen Beweisformen müssen dabei auch Probleme mit Fachinhalten (Termumformungen und Teilbarkeit) berücksichtigt werden.

(3) Die Ergebnisse des Beweisbewertungstests (Abschnitt 5.3.2.3) wiesen darauf hin, dass die Probleme der Studierenden mit generischen Beweisen eher nicht auf Fehlvorstellungen bzgl. der Bedeutung von bloßen empirischen Verifikationen im Beweisprozess zurückzuführen waren. Es schien aber, dass viele Studierende generische Beweise subjektiv nicht als valides Mittel zur Verifikation einer Behauptung akzeptieren würden.

(4) Bei der rückblickenden Betrachtung der Vorlesungen wurde deutlich, dass im Rahmen des ersten Kapitels mit einer Ausnahme alle Beweise in der Vorlesung formal geführt wurden. Nur für die Eingangsbehauptung wurde ein generischer Beweis konstruiert, der anschließend auch formal geführt wurde. Dies schien den impliziten Zielen der Lehrveranstaltung entgegen zu laufen, generische Beweise als ‚gleichberechtigt' neben formale Beweise zu stellen.

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive des „diagrammatischen Schließens"

Für den fehlerbehafteten Umgang mit generischen Beweisen schienen nach wie vor konzeptuelle Probleme der Studierende ausschlaggebend zu sein; betrachtet unter dieser semiotischen Perspektive schien ihnen die Allgemeingültigkeit nicht deutlich zu werden, die aus den vorgenommenen Transformationen mit konkreten Zahlzeichen resultiert. Sowohl bei den generischen, wie auch bei den formalen Beweisen wurde im Rahmen des Inhaltsbereichs ‚Teilbarkeit' die Bedeutung fachlicher Aspekte immanent: Der Teilbarkeitsbegriff ermöglicht den Studierenden verschiedene Operationalisierungen der Teilbarkeitsrelation, welche jeweils unterschiedliche Arten von diagrammatischem Schließen erfordern. Während die Quotientenschreibweise den Nachweis erfordert, dass der erhaltene Quotient ein Element der natürlichen Zahlen ist, wird bei der Faktorschreibweise die Darstellung eines Produkts gefordert, in der die Faktoren Element der natürlichen Zahlen sein müssen. Folglich hat das Verständnis der Studierenden von Teilbarkeit Auswirkungen auf ihr diagrammatisches Schließen.

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive „sozio-mathematischer Normen"

Bei den in den verschiedenen Forschungsprojekten erhaltenen Ergebnissen bzgl. des generischen Beweises wurde deutlich, dass nur noch wenige Studierende bloße Beispielbetrachtungen als ‚generische Beweise' anstellten. Insofern schien die Kommunikation der Normen für die Konstruktion generischer Beweise erfolgreich gewesen zu sein. Problematisch erschien allerdings der Aspekt der zu formulierenden narrativen Begründung innerhalb dieser Beweise. Den Studierenden schien nicht bewusst zu sein, welche Aspekte bzw. Argumente hier expliziert werden müssen, was auch durch den hohen Anteil von Pseudoantworten in ihren Beweiskonstruktionen deutlich wurde (s. Abschnitt 5.3.2.4).

Der fachliche Aspekt der Operationalisierung von Teilbarkeit in Beweisen kann auch als Aspekt sozio-mathematischer Normen interpretiert werden. Zwar sind beide Operationalisierungen (Quotienten- und Faktorschreibweise) mathematisch korrekt und legitim, doch lassen sich an dieser Stelle zwei Aspekte für eine vornehmliche Verwendung der Faktorschreibweise anführen. Zum einen wurde bei der Analyse der Klausuraufgabe deutlich, dass Bearbeitungen, in denen von der Faktorschreibweise Gebrauch gemacht wurde, in der Regel besser gelangen. Zum anderen herrscht in der Zahlentheorie die (implizite) Norm, dass Teilbarkeit über die Faktorrelation operationalisiert wird. Somit erweist sich die Vermittlung dieser Operationalisierung auch als ein Aspekt der Enkulturation. Nichtsdestotrotz darf die Verwendung der Quotientenschreibweise nicht verboten werden; bietet sie doch die Möglichkeit der Anknüpfung an schulische Vorerfahrungen bzw. an intuitives Vorwissen. Bei der Verwendung der Quotientenschreibweise muss den Studierenden allerdings die ‚Norm' vermittelt werden, dass hier der Nachweise erfolgen muss, dass der erhaltene Quotient ein Element der natürlichen Zahlen ist, auch wenn dies als ‚intuitiv klar' erscheinen mag.

Innerhalb dieser zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung wurde bereits ein erster Versuch zur Angleichung der verschiedenen Begrifflichkeiten zum Beweisen unternommen. Doch herrschte in einem gewissen Maße immer noch Unklarheit über die Bezeichnung der Beweise, auch weil in der Literatur zu der Thematik keine Einigkeit besteht (vgl. Biehler & Kempen 2016, S. 168ff.). Darüber hinaus war es eine offene Frage, was genau den Studierenden unter dem Begriff ‚formaler Beweis' vermittelt werden sollte, weshalb an einigen Stellen auf Bezeichnungen wie ‚symbolischer Beweis' oder ‚algebraischer Beweis' ausgewichen wurde.

Abgleich mit der intentionalen Dimension der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung

Bei der bisher erfolgten retrospektiven Analyse der zweiten Durchführung der Lehrveranstaltung ist deutlich geworden, dass die Studierendenbearbeitungen zum generischen und zum formalen Beweis nun ‚besser' als im ersten Durchgang ausfielen. Die Kommunikation konkreter Normen für die Konstruktion dieser Beweisformen schien somit erfolgreich gewesen zu sein und auch die Unterscheidung von expliziter ‚Beweisbearbeitung' und ‚Reinschrift' schien dazu beigetragen zu haben, dass die finalen Beweisprodukte ordentlicher bzw. strukturierter notiert wurden. Es konnte festgestellt werden, dass die Probleme der Studierenden bei der Konstruktion der generischen

Beweise eher nicht auf Fehlvorstellungen bzgl. der Bedeutung von bloßen Beispielbetrachtungen zurückzuführen waren, ihre Probleme schienen vielmehr in dem Ausmachen der beispielübergreifenden, generischen Struktur und in der geforderten Verbalisierung zu liegen.

Über den Zeitraum dieses Wintersemesters wurde weiter deutlich, dass die studentischen Hilfskräfte selbst sicherer im Umgang und bei der Korrektur der verschiedenen Beweisformen waren. Dies konnte zum einen auf die durchgeführte Tutorenschulung zurückgeführt werden. Zum anderen muss erwähnt werden, dass nun auch gute Studierende aus der ersten Durchführung der Lehrveranstaltung als Hilfskräfte mitarbeiteten und die Studierenden die Übungsgruppen gemeinsam in Tandems abhielten. Insgesamt waren diese Maßnahmen als erfolgreich zu bewerten.

Aufgrund der vorgenommenen Forschungsfokusse auf die Konstrukte generischer Beweis und formaler Beweis konnten die Maßnahmen, die sich auf das Verständnis mathematischer Behauptungen und Gegenbeispiele konzentrierten, nicht anhand von Forschungsergebnissen evaluiert und reflektiert werden. Die beteiligten Lehrenden (der Dozent und zwei wissenschaftliche Mitarbeiter) waren sich jedoch darüber einig, dass die vorgenommenen Maßnahmen in die richtige Richtung zu weisen schienen.

5.4 Die Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 und die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

Im Folgenden werden zunächst die Änderungen beschrieben und begründet, wie sie im Wintersemester 2013/14 aufgrund bisheriger Forschungsergebnisse und Lehrerfahrungen vorgenommen wurden. Anschließend werden die Untersuchungen thematisiert, welche in diesem Kontext zu nennen sind. Hierzu gehören: die Pilotierung eines Vor- und Nachtests (Abschnitt 5.4.2.1), ein Videostudie zu Beweiskonstruktionen und Beweisverständnis (Abschnitt 5.4.2.2) und eine Analyse der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Abschlussklausur (Abschnitt 5.4.2.3).

5.4.1 Veränderungen bei der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14

Aufgrund der bis dato erfolgten Forschung und gemachten Lehrerfahrungen wurden im Wintersemester 2013/14 die folgenden Modifikationen im Kontext der Vorlesung vorgenommen: (1) der Teilbarkeitsbegriff wurde vertieft thematisiert, (2) Punktmusterdarstellungen wurden auch in das erste Kapitel der Lehrveranstaltung verstärkt aufgenommen und Punktmusterbeweise explizit in das Spektrum der Beweisformen der Lehrveranstaltung eingebunden, (3) Vor- und Nachteile von formalen Beweisen wurden erörtert, (4) generische Beweise wurden stärker in den Fortgang der Vorlesung miteingebunden und alle vier Beweisformen wurden im Rahmen des zweiten Kapitels explizit aufgegriffen. Durch die Übernahme der Erstellung der Hausaufgaben durch den Autor der vorliegenden Arbeit wurde es im Wintersemester 2013/14 auch möglich, (5) neue Aufgabenformate sowohl in die Präsenzübungen als auch in die Hausaufgaben zu integrieren. Es galt hierbei, solche Aufgaben zu entwickeln, die den herausgefundenen Studierendenproblemen zum generischen Beweis gezielt entgegenwirken. Zentrale Aspekte der Aufgabenformate waren somit: (i) Die Beurteilung fehlerhafter generischer Beweise, (ii) die Vervollständigung lückenhafter generischer Beweise, (iii) die eigene Konstruktion generischer Beweise (auch in Verbindung mit Punktmusterdarstellungen) und (iv) die Formalisierung generischer Beweise; darüber hinaus (v) Aufgaben an konkreten Punktmustern, an denen allgemeine Beziehungen abstrahiert, formalisiert und bewiesen werden sollen, und (vi) explizite Integration von Punktmusterbeweisen und deren

Formalisierung. (6) Schließlich wurde im Rahmen dieser dritten Durchführung der Lehrveranstaltung eine Neukonzipierung der Zentralübung in Angriff genommen wurde.

Veränderungen im Kontext der Vorlesung

(1) **Thematisierung des Teilbarkeitsbegriffs**

Bei der Analyse der Klausurbearbeitungen aus dem vorherigen Semester war deutlich geworden, dass verschiedene Probleme der Studierenden bei der Konstruktion von Beweisen auf ein unzureichendes Verständnis der Teilbarkeitsrelation zurückzuführen sind (vgl. Abschnitt 5.3.2.4). Daher wurde zu Beginn des ersten Kapitels, im Kontext der Analyse der Ausgangsbehauptung, eine „prozedurale Sicht“ auf die Teilbarkeit einer Zahl $a \in \mathbb{N}$ durch eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ eingeführt: Die Teilbarkeit ist gegeben, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ eine natürliche Zahl ist. Somit konnte die Quotientenschreibweise aufgegriffen werden, die zunächst besser an das Schulwissen anknüpft, in dem ja auch Brüche ‚existierten'. Im Kontext der folgenden ‚formalen Beweise' wurde dann als äquivalente Aussage für die Teilbarkeit die Aussage „Es existiert ein $n \in N$, so dass $a = b \cdot n$ („Faktorschreibweise“) als eine für das Beweisen hilfreiche Umformulierung eingeführt.

(2) **Die verstärkte Integration von Punktmusterdarstellungen und Punktmusterbeweisen in das erste Kapitel der Vorlesung**

Bei der retrospektiven Analyse des vorherigen Durchgangs der Lehrveranstaltung war das Problem offen geblieben, wie Studierenden das Konzept von generischen Beweisen (besser) vermittelt werden könnte. Als besonders problematisch wurde hierbei die Verwendung von konkreten Zahlen als „paradigmatische“ Zahlen (i.S. von Freudenthal) betrachtet: Wie kann man Lernende das Allgemeine im Konkreten vermitteln? (Vgl. hierzu Abschnitt 4.3.3.)

Eine Idee zur Behebung dieses Problems bestand darin, die ‚Anschauung' stärker in diesen Prozess der Verallgemeinerung miteinzubeziehen. Als anschauliche Beweise werden im Allgemeinen solche verstanden, die „[…] auch schematisch aufzufassende Zeichnungen enthalten“ (Kautschitsch 2015, S. 144). Als ‚Veranschaulichung' der Sachverhalte der Arithmetik wurde das Diagrammsystem der Punktmuster gewählt. Dies schien vor aus verschiedenen Gründen nachvollziehbar: Zunächst wurden Punktmusterdarstellungen sowieso im zweiten Kapitel der Lehrveranstaltung thematisiert. Darüber hinaus ist die Verwendung von Punktmusterdarstellungen im schulischen Mathematikunterricht durchaus üblich (siehe für die Primarstufe etwa Kaput et al. 2008, Steinweg 2013, Wittmann & Müller 1990 und für die Sekundarstufe z.B. Blum & Leiß 2006 oder Meyer und Prediger 2009), eine entsprechende Verwendung von Punktmusterdarstellungen konnte somit als vermutlich bekannt vorausgesetzt werden. Entsprechenden geometrischen Darstellungen wird auch das Potential zugesprochen, den Übergang von der Arithmetik zur Algebra zu erleichtern (etwa Flores 2002).

Aus diesen Gründen wurden Punktmusterdarstellungen und Punktmusterbeweise bereits in das erste Kapitel integriert. Dem generischen Beweis über die Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wurden Punktmusterdarstellungen beigestellt (vgl. Abbildung 28).

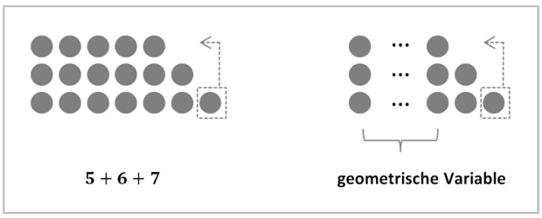


Abbildung 28: Punktmusterdarstellungen der Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen; links im konkreten Fall als Andeutung eines generischen Beweises; rechts ‚allgemein' mit geometrischen Variablen

Durch die Umgruppierung der Punkte im konkreten Punktmuster sollte das generische Moment der Argumentation hervorgehoben werden: Bei jeder Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen können durch Umgruppierung der Punkte drei gleich lange Reihen gebildet werden. Mithilfe dieser Erkenntnis wurde anhand des konkreten Punktmusters ein generischer Beweis ausformuliert. Für die geometrische Darstellung einer beliebigen Anzahl wurde die Idee der „geometrischen Variable" verwendet.

Insgesamt wurden nun vier verschiedenen Beweisformen im Kontext der Lehrveranstaltung verwendet: der generische Beweis mit Zahlen, der generische Beweis mit Punktmustern, der Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der sogenannte formale Beweis.

(3) **Die Erörterung der Vor- und Nachteile von formalen Beweisen**

Neben der Vermittlung des Konzepts eines generischen Beweises sollte im Kontext der Lehrveranstaltung erneut auch eine Hinführung zum formalen Beweis erfolgen. Einhergehend hiermit sollte die algebraische Symbolsprache als sinnvolles ‚Werkzeug' der Wissenschaft Mathematik verdeutlicht und vermittelt werden. Es galt somit, neben Vermittlung des generischen Beweises, auch für die formale Fachsprache und den formalen Beweis zu werben. Aus diesem Grund wurde in dem dritten Durchlauf der Lehrveranstaltung mit dem Plenum eine Erörterung der Vor- und Nachteile von formalen Beweisen vorgenommen. Zentral erschienen dabei, gerade im Kontrast zum generischen Beweis, die folgenden Aspekte: (i) Wenn man die Algebra korrekt beherrscht, werden in formalen Beweisen nur solche Umformungen vorgenommen, die für alle (natürlichen) Zahlen gelten, weswegen der Algebra eine Kontrollfunktion zukommt, (ii) bei algebraischen Termumformungen braucht der Beweisende u.U. keine ‚Idee' wie bei generischen Beweisen, da bloße Termumformungen bereits zum Ziel führen können, (iii) bei der korrekten Verwendung der Algebra muss der Aspekt der Allgemeingültigkeit der Begründung nicht expliziert werden.

(4) **Die stärkere Integration von generischen Beweisen in den Fortgang der Vorlesung**

Bei der retrospektiven Analyse des vorherigen Durchgangs war aufgefallen, dass im Verlauf des ersten Kapitels ausschließlich der ‚formale' Beweis als mathematisches Erkenntnismittel im Forschungsprozess um die Frage der Teilbarkeit der Summen aufeinanderfolgender Zahlen eingesetzt wurde. Dies widerspricht dabei der (impliziten) Werbung für alternative Beweismethoden. Aus diesem Grunde wurde nun der Beweis des finalen Satzes des ersten Kapitels (über die Teilbarkeit der Summe von $k \in \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden Zahlen durch k) anhand der generischen Idee der ‚mittleren Zahl' der Vorbetrachtungen entwickelt:

Für ungerade *k* ist die Summe

$$\left(\mathrm{n}-\frac{\mathrm{k}-1}{2}\right)+\cdots+(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)+\cdots+\left(\mathrm{n}+\frac{\mathrm{k}-1}{2}\right)=\mathrm{kn}$$

immer durch *k* teilbar.

Für gerade *k* ist die Summe

$$\left(\mathrm{n}-(\frac{\mathrm{k}}{2}-1)\right)+\cdots+(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)+\cdots+(\mathrm{n}+(\frac{k}{2}-1))+\left(\mathrm{n}+\frac{\mathrm{k}}{2}\right)=\mathrm{kn}+\frac{\mathrm{k}}{2}$$

nie durch k teilbar.

Eine andere (generische) Beweisidee wurde anschließend anhand von zwei konkreten Punktmustern erarbeitet (vgl. Abb. 29).

Diese Heuristik der Untersuchung konkreter Beispiele wurde auch im Rahmen des zweiten Kapitels verstärkt aufgegriffen. So wurde an konkreten Dreieckszahlen ein generischer Beweis für die explizite Formel der Dreieckszahlen entwickelt.

Dieses Wiederaufgreifen vorheriger (generischer) Ideen aus dem Verlauf der Vorlesung verstärkt dabei den ‚roten Faden' des Erkenntnisprozesses und die Bedeutung der Erkenntnisse, die an Beispielen gewonnen werden können.

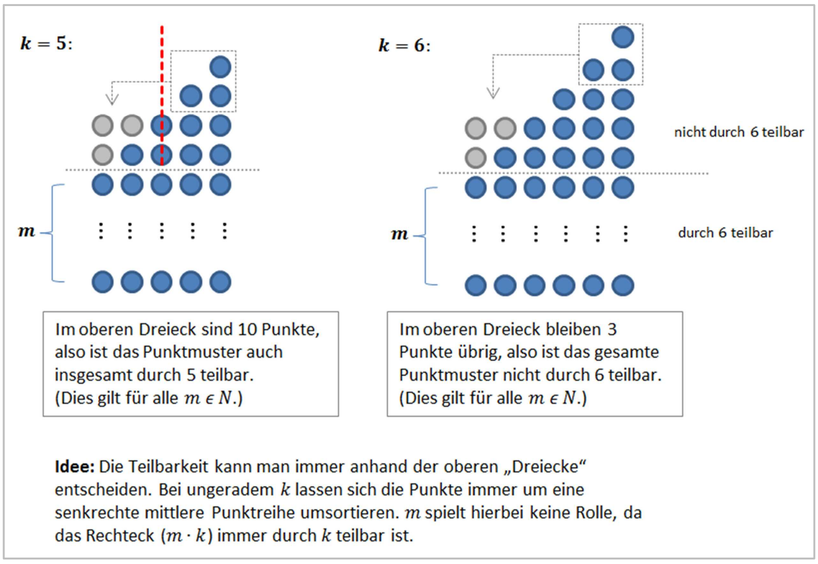


Abbildung 29: Entwicklung einer Beweisidee über die Teilbarkeit von $k \in \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden Zahlen am Punktmuster

Änderungen im Kontext der Präsenzübungen und Hausaufgaben

(5) **Die Entwicklung neuer Aufgabenformate**

(i) **Die Beurteilung fehlerhafter generischer Beweise** (Präsenzübung 1, Aufgabe 1)

Studierenden wurde die Aufgabe gegeben, die folgende Behauptung mit einem generischen Beweis zu beweisen: Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.
Im Folgenden sind vier verschiedene Lösungen dargestellt:

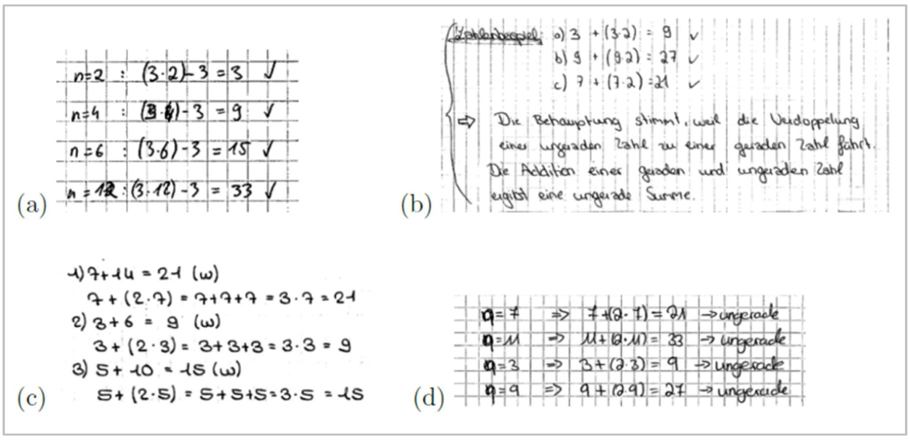


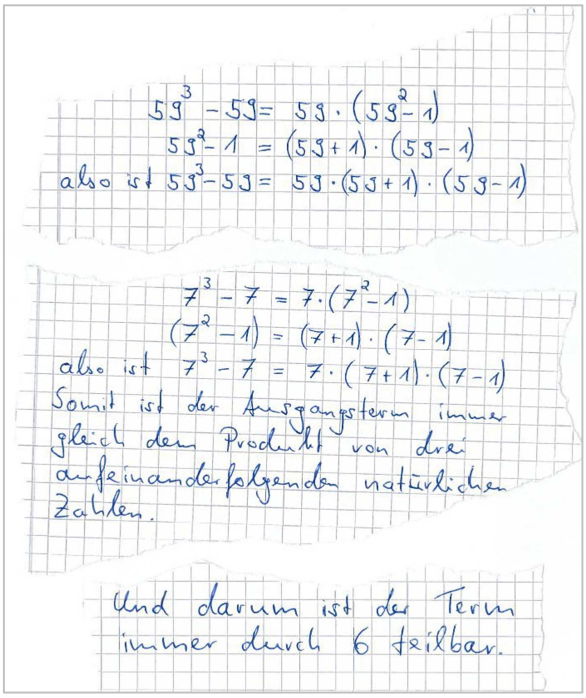
Abbildung 30: Vier studentische Bearbeitungen zum „generischen Beweis".

Bewerten Sie die vier dargestellten „generischen Beweise" im Hinblick auf
- (i) die getesteten Beispiele,
- (ii) ihre dargestellten Argumentationen und
- (iii) ihre Allgemeingültigkeit.

(ii) **Die Vervollständigung eines lückenhaften generischen Beweises** (Hausaufgabenblatt 1, Aufgabe 1)

Betrachten Sie die folgende (unvollständige) Schülerlösung zu einem generischen Beweis:

a) Formulieren Sie die Behauptung, die der Schüler hier zu beweisen versucht.
b) Vervollständigen Sie den obigen generischen Beweis und schreiben Sie ihn auf.
c) Übernehmen Sie Ihre Argumentation aus (b) und führen Sie einen Beweis mit Variablen und algebraischen Umformungen.


$59^3 - 59 = 59 \cdot (59^2 - 1)$
$59^2 - 1 = (59+1) \cdot (59-1)$
also ist $59^3 - 59 = 59 \cdot (59+1) \cdot (59-1)$

$7^3 - 7 = 7 \cdot (7^2 - 1)$
$(7^2 - 1) = (7+1) \cdot (7-1)$
also ist $7^3 - 7 = 7 \cdot (7+1) \cdot (7-1)$
Somit ist der Ausgangsterm immer gleich dem Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Und darum ist der Term immer durch 6 teilbar.

Abbildung 31: Eine unvollständige Schülerlösung zu einem generischen Beweis

(iii) **Die eigene Konstruktion generischer Beweise** (Hausaufgabenblatt 1, Aufgabe 3)

Wir betrachten die folgende Behauptung: *Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade.*

(a) Beweisen Sie die Behauptung durch algebraische Umformungen und mit Verwendung von Variablen.
(b) Die folgende Abbildung strukturiert das Quadrat zu der Zahl 5 in einer Art und Weise, wie es für eine generische Argumentation genutzt werden kann. Verbalisieren Sie diese generische Argumentation, die aus der Strukturierung hervorgeht.

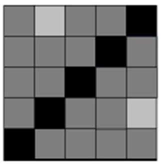


Abbildung 32: Generische Strukturierung einer ungeraden Quadratzahl (Abbildung ähnlich zu Rinvold und Lorange 2013, S. 218)

(iv) **Die Formalisierung generischer Beweise** (Präsenzübung 1, Aufgabe 1)

Sie kennen die Teilbarkeitsregel für die Zahl 3:

Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 *teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch* 3 *teilbar*.

Im Folgenden ist ein generischer Beweis für die Teilbarkeit durch 3 bei dreistelligen Zahlen gegeben:

Wir betrachten die Zahl 756. Diese Zahl kann wie folgt dargestellt werden: $756 = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$. Dies kann man dann umformen und erhält: 756 = (7 · 99 + 7) + (5 · 9 + 5) + 6. Mit dem Kommutativgesetz und dem Assoziativgesetz erhalten wir dann: 756 = (7 · 99 + 5 · 9) + (7 + 5 + 6). Da der Term in der ersten Klammer durch 9 teilbar ist, ist er auch durch 3 teilbar. Also ist die gegebene Zahl dann durch 3 teilbar, wenn der Ausdruck in der zweiten Klammer (und das ist genau die Quersumme der Ausgangszahl) durch 3 teilbar ist.

Übernehmen Sie die gegebene Argumentation und formulieren Sie einen Beweis mit algebraischen Umformungen und Variablen.

(v) **Aufgaben an konkreten Punktmustern, bei denen allgemeine Beziehungen abstrahiert, formalisiert und bewiesen werden sollen** (Präsenzübung 2, Aufgabe 2)

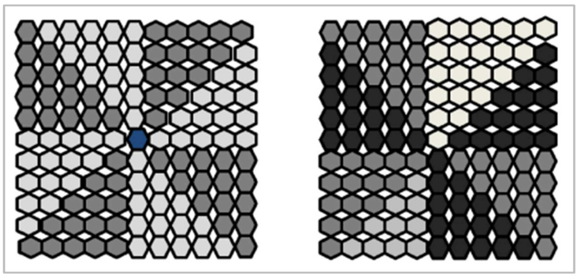


Abbildung 33: Darstellungen zweier konkreter Zusammenhänge zwischen Dreiecks- und Quadratzahlen (Abbildung ähnlich zu Conway und Guy 1997, S. 47)

Die beiden Abbildungen verdeutlichen zwei weitere Zusammenhänge zwischen Dreieckszahlen und Quadratzahlen.

a) Betrachten Sie die konkreten „Punktmuster" und schreiben Sie die jeweils dargestellten konkreten Zusammenhänge zwischen den Dreieckszahlen und den Quadratzahlen auf.

b) Rechnen Sie Ihre unter (a) aufgestellten Zusammenhänge nach.

c) Wird Ihnen in den beiden konkreten Abbildungen auch der allgemeine Zusammenhang zwischen beliebigen Dreieckszahlen D_n und Quadratzahlen Q_n deutlich? Formulieren Sie die Zusammenhänge für allgemeine Dreicks- und Quadratzahlen für $n \in \mathbb{N}$.

d) Rechnen Sie Ihre unter (c) aufgestellten Zusammenhänge nach.

(vi) **Integration von Punktmusterbeweisen und deren Formalisierung** (Hausaufgabenblatt 1, Aufgabe 2)

Wir betrachten die folgenden drei Behauptungen:
(1) Für alle geraden Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass die Summe $n + m$ eine gerade Zahl ist.
(2) Für alle ungeraden Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass die Summe $n + m$ eine gerade Zahl ist.
(3) Die Summe aus einer geraden Zahl $g \in \mathbb{N}$ und einer ungeraden Zahl $u \in \mathbb{N}$ ist eine ungerade Zahl.

Die folgenden drei Abbildungen ‚visualisieren' Beweise zu den obigen Behauptungen.

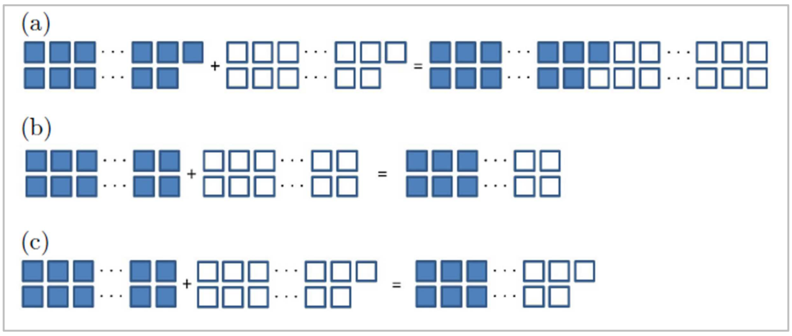


Abbildung 34: Drei Punktmusterbeweise mit geometrischen Variablen über die Summe gerader und ungerader Zahlen

(i) Ordnen Sie die Abbildungen (a), (b) und (c) den entsprechenden Behauptungen (1), (2) und (3) zu.

(ii) Abstrahieren Sie aus den Abbildungen die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen und formulieren Sie diese Eigenschaften unter dem Gebrauch von Variablen.

(iii) Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse aus (ii) und formulieren Sie die Beweise mit algebraischen Umformungen zu den Behauptungen (1), (2) und (3).

(6) **Die Neukonzipierung der Zentralübung**

In den bisherigen Durchgängen der Lehrveranstaltung wurden bereits wöchentliche Zentralübungen abgehalten, in denen den Studierenden die Lösungen der wöchentlichen Hausaufgaben präsentiert wurden. Ein Anliegen der Neustrukturierung der Zentralübung bestand darin, Musterlösungen stärker prozessorientiert als eine gemeinsame mathematische Tätigkeit im Plenum zu entwickeln. Theoretische Grundlagen für diese Umstellung der Zentralübungen bildeten die Arbeiten von Ableitinger und Herrmann (2011) und Reiss und Renkl (2002), welche auf das Prozessmodell von Boero (1999) zum Beweisen übertragen wurde. Ein weiteres Anliegen der Zentralübung bestand darin, den Studierenden mehr Raum dafür zu geben, die Unterschiede bzw. die Vor- und Nachteile der verschiedenen Beweisformen und Diagrammsysteme diskutieren zu können. Das finale Konzept der Zentralübung wird in Abschnitt 6.3.3 dargestellt.

5.4.1.1 Die intentionale Dimension der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung

Zusätzlich zu den allgemeinen Zielen der Lehrveranstaltung, die bereits in dem Abschnitt 5.2.1.1 benannt wurden, lassen sich als spezifische Zielsetzungen der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung die folgenden Aspekte benennen:

- Der verstärkte Einbezug von Punktmusterdarstellungen sollte den Studierenden als ‚Veranschaulichung‘ den Umgang mit den elementaren mathematischen Sachverhalten und den Übergang zur Algebra erleichtern. Darüber hinaus sollten die Punktmusterdarstellungen als ein alternatives Diagrammsystem für die Konstruktion generischer Beweise dienen.
- Den Studierenden sollten die Vor- und Nachteile formaler und generischer Beweise verdeutlich werden, um einen verständigen Umgang mit den Beweisformen und den entsprechenden Diagrammsystemen anzubahnen. Diese Erörterung wurde dabei auch als ein Werben für die mathematische Symbolsprache verstanden.
- Durch die stärkere Integration von generischen Beweisen in die Vorlesung sollte u.a. deren ‚Stellung‘ und Ansehen bei den Studierenden gestärkt werden.
- Die verschiedenen neuen Aufgabenformate sollten den Studierenden dabei helfen, das Konzept generischer Beweise besser zu durchdringen, und damit ihre Beweiskonstruktionen verbessern.

5.4.2 Die im Kontext dieser Durchführung erfolgten Studien

Im Wintersemester 2013/14 wurden im Rahmen der Lehrveranstaltung die folgenden Studien durchgeführt (vgl. Abbildung 35): die Pilotierung einer Ein- und Ausgangsbefragung zu den Beweiskompetenzen und Einstellungen zum Beweisen der Studierenden (Abschnitt 5.4.2.1), eine Interviewstudie zum Beweisverständnis der Studierenden (Abschnitt 5.4.2.2) und schließlich die Analyse der Bearbeitungen einer Klausuraufgabe, in der die Studierenden die vier verschiedenen Beweise der Lehrveranstaltung zu einer Behauptung konstruieren sollten (Abschnitt 5.4.2.3).

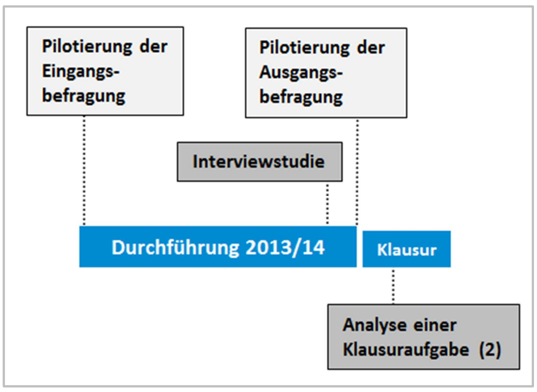


Abbildung 35: Überblick über die im Wintersemester 2013/14 erfolgten Studien

5.4.2.1 Pilotierung einer Ein- und Ausgangsbefragung zu den Beweiskompetenzen der Studierenden und ihren Einstellungen zum Beweisen

Die dritte Durchführung der Lehrveranstaltung wurde im Wintersemester 2013/14 durch eine Ein- und Ausgangsbefragung gerahmt, die die Studierenden in der ersten und vorletzten Vorlesungssitzung bearbeiteten. Diese Untersuchung diente zur Pilotierung der Messinstrumente für die ‚Effektivitätsstudie' im Wintersemester 2014/15, welche Gegenstand des siebten Kapitels ist. Da diese Studien im Wintersemester 2013/14 an dieser Stelle als Pilotierung aufgefasst werden und keine direkten Auswirkungen auf die Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung hatten, werden die entsprechenden Ergebnisse im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter besprochen. Resultate, die im Kontext der Entwicklung der entsprechenden Messinstrumente verwendet wurden, wurden bereits in Abschnitt 3.3 dargestellt

5.4.2.2 Eine Interviewstudie zum Beweisverständnis

Aufbauend auf den Erkenntnissen der Pilotierung der Interviewstudie im Wintersemester 2012/13 (Abschnitt 5.3.2.2) wurde im Wintersemester 2013/14 erneut eine Interviewstudie zum Beweisverständnis der Studierenden durchgeführt. Diese Studie wird im Folgenden dargestellt.

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Im bisherigen Lehr- und Forschungsprozess war die Frage offen geblieben, welche Wahrnehmung die Studierenden von den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (dem generischen Beweis mit Zahlen, dem generischen Beweis mit Punktmustern, dem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und dem sogenannten formalen Beweis) haben. Im Fokus dieser Untersuchung standen somit nicht die Beweiskonstruktionen der Studierenden, sondern ihre Wahrnehmungen von diesen. Unter Wahrnehmung wird an dieser Stelle zunächst das Spannungsfeld von logischer Akzeptanz eines Beweises („Sicherung der Gültigkeit") und (empfundener) subjektiver Überzeugung bzgl. der Gültigkeit einer Behauptung („Überzeugungskraft") betrachtet. Hinzu kommen die Aspekte „Erklärungspotential" und „Eignung für den schulischen Mathematikunterricht". Diese Betrachtungsfokusse begründeten sich zunächst auf der in der Lehrveranstaltung vertretenen Unterscheidung vom psychologischen und logischen Nutzen von Beispielbetrachtungen und Beweisen, welche auf die Beweisfunktionen (objektiver) Nachweis von Gültigkeit und (subjektive) Überzeugung verweisen (s. Abschnitt 2.1.7). Die Betrachtung des Erklärungspotentials der Beweise ergab sich aus der in der Didaktik vielfach herausgestellten Erklärungsqualität von verschiedenen Beweisformen, die als besonders wertvoll für das Erlernen der Beweisaktivität angesehen werden. In diesem Zusammenhang wird in der Literatur gerade generischen Beweisen und Punktmusterdarstellungen ein besonderes Erklärungspotential zugeschrieben (s. Abschnitt 2.1.3 und 2.1.7). Die Untersuchung der Einschätzung einer Eignung für den schulischen Mathematikunterricht ergab sich aus dem Ziel der Lehrveranstaltung, Begründungsformen zu vermitteln, die die Studierenden in ihrer späteren Lehrpraxis an der Schule verwenden können. Auch sei an dieser Stelle erwähnt, dass entsprechende Beweisformen in der Literatur als schuladäquate Begründungsformen für die Schulmathematik angeführt werden (etwa in Leiß und Blum (2006, S. 33ff.) oder Leuders (2010, S. 53)). Somit sollte auch erforscht werden, wie die Studierenden selbst die Eignung der verschiedenen Beweisformen für den schulischen Mathematikunterricht einschätzten. Diese Wahrnehmungen der Studierenden sollten zunächst mithilfe eines Fragebogens (s.u.) erfasst werden. Neben dieser basalen Einschätzung der verschiedenen Beweisformen bestand ein Forschungsanliegen darin, eben diese angekreuzten Antworten besser verstehen zu wollen. Aus diesem Grund wurde an die Phase der Fragebogenbearbeitung eine dezidierte Interviewphase mit den Studierenden angeschlossen, bei der deren Antworten auf dem Fragebogen als Gesprächsanlässe verwendet wurden. Im Kontext dieser Studie war auch von Interesse, welche Beweisform die Studierenden zunächst verwenden, wenn sie eine Behauptung beweisen sollen. Denn ein Anliegen der Lehrveranstaltung bestand darin, die Bedeutung von Exploration und der Untersuchung von konkreten Beispielbetrachtungen für den mathematischen Erkenntnisprozess hervorzuheben, welche dann ‚in natürlicher Weise' zu der Konstruktion von generischen Beweisen führen sollten (vgl. hierzu den Aspekt des „genetischen Beweisens" in Brunner (2014, S. 20)). Auch scheint die intuitive (Aus-) Wahl einer Beweisform für eine bestimmte Wahrnehmung derselben zu sprechen.

Die Leitfragen zur Auswertung der Studie waren[39]:

- Leitfrage zur Auswertung [9]: Welche Beweisform nutzen die Studierenden spontan, um eine gegebene Behauptung zu beweisen? Welche Gründe können für die entsprechende Beweiswahl ausgemacht werden?
- Leitfrage zur Auswertung [10]: Wie bewerten die Studierenden die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung im Hinblick auf die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit", „Überzeugungskraft", „Erklärungspotential" und „Eignung für den schulischen Mathematikunterricht"?
- Leitfrage zur Auswertung [11]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. des generischen Beweises mit Zahlen im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?
- Leitfrage zur Auswertung [12]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. des formalen Beweises im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?
- Leitfrage zur Auswertung [13]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. der Punktmusterbeweise im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?

Durchführung der Studie

Die Interviewstudie wurde in der vorletzten Vorlesungswoche durchgeführt. Aus jeder Übungsgruppe wurden unter den Freiwilligen zwei Studierende ausgelost, die zeitgleich zu ihrer eigentlichen Kleingruppenübung an der Interviewstudie teilnahmen. In der entsprechenden Übungsgruppe wurde dieselbe Aufgabe behandelt, so dass für den Teilnehmenden der Studie kein Nachteil und auch kein Mehraufwand entstand. Auch die Interviews dauerten, genau wie die Kleingruppenübung, 90 Minuten.

Die Teilnehmenden der Studie wurden über Eck an einem Tisch platziert (vgl. die Position von „S1" und „S2" in Abbildung 36). So konnte eine Videokamera hinter ihnen positioniert werden, damit sämtliche Notizen videographiert werden konnten. Durch ein Mikrophon, das in der Mitte des Tisches angebracht war, konnten alle Äußerungen der Studierenden aufgenommen werden. Eine zweite Kamera, etwas abseits aufgestellt, ermöglichte die Aufnahme der Studierenden aus der Vorderansicht, so dass auch Gesten und Bewegungen aufgezeichnet werden konnten. Der Interviewer saß etwas abseits an einem Nebentisch, so dass er das Geschehen beobachten konnte,

[39] Der Aspekt der individuellen Beweisbearbeitungsprozesse und der dabei auftauchenden Hürden ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit; entsprechende Ergebnisse werden an anderer Stelle veröffentlicht.

ohne die Studierenden (nach Möglichkeit) zu irritieren. Die Beobachtung des Bearbeitungsprozesses war hierbei notwendig, damit in dem anschließenden Interview auf konkrete Momente daraus Bezug genommen werden konnte. Der hier beschriebene Aufbau wird in Abbildung 39 dargestellt. Jeder Studierende erhielt einen Stift mit einer anderen Farbe, so dass nachträglich unterschieden werden konnte, welcher Proband was niedergeschrieben hatte.

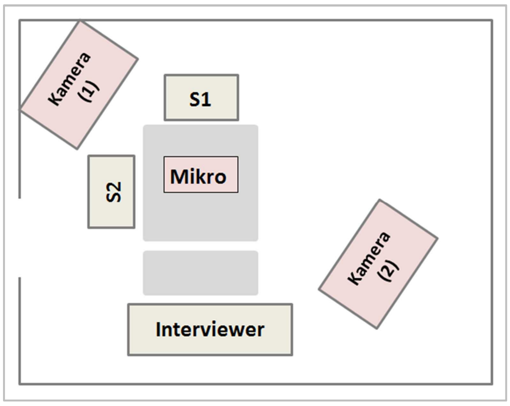


Abbildung 36: Position der Teilnehmenden, der Kameras und des Mikrofons bei der Interviewstudie im WS 2013/14

Der Ablauf des Interviews war hierbei wie folgt: Nach der Information der Studierenden über den Ablauf des Interviews und die anonyme Verwendung der Daten wurde ihnen ein Fragebogen für die Erhebung der personenbezogenen Daten ausgehändigt. Der folgende Hauptteil der Studie gliederte sich in zwei Abschnitte: (1) die Beweiskonstruktionen der Studierenden mit anschließender Besprechung der Ergebnisse und (2) eine Diskussion der verschiedenen Beweisformen im Hinblick auf deren Überzeugungskraft, Erklärungspotential, Eignung für den schulischen Mathematikunterricht und den Aspekt der Sicherung der Gültigkeit. Zu den Phasen im Einzelnen:

(1) Die Phase der Beweiskonstruktionen

Den Studierenden wurde eine Behauptung mit dem Arbeitsauftrag ausgegeben, diese zu beweisen oder zu widerlegen (s. Aufgabenanalyse unten). Für die Bearbeitung der Aufgabe wurde ihnen gekennzeichnetes „Konzeptpapier“ ausgegeben und für die anschließende Niederschrift ihrer Ergebnisse Papierbögen, die als „Reinschrift“ gekennzeichnet waren. Den Studierenden war es hierbei freigestellt, inwieweit sie die Aufgabe gemeinsam oder alleine bearbeiten würden; allerdings sollten sie sich vor der finalen Reinschrift der Ergebnisse auf eine gemeinsame Lösung einigen. Nach der Abfassung der (ersten) Reinschrift eines Beweises wurden die Studierenden darum gebeten, auch die drei anderen Beweisformen zu konstruieren, die sie noch nicht notiert hatten. Somit konnte untersucht werden, mit welcher Beweisform sie ‚spontan‘ die gestellte Behauptung verifizierten. Nach der erfolgten Konstruktion der vier verschiedenen Beweisformen und deren Niederschrift als „Reinschrift“ wurde zunächst gefragt, warum die Studierenden als erstes die jeweilige Beweisform (formaler Beweis, generischer Beweis mit Zahlen, …) spontan konstruiert hatten. Anschließend wurden alle vier Beweiskonstruktionen vom Interviewer zusammen mit den Studierenden besprochen, um herauszufinden, wie sehr die Studierenden mit ihren Beweiskonstruktionen zufrieden waren, bzw. ob sie sich ggf. über eventuelle Lücken in ihren Beweisproduktionen bewusst waren. Innerhalb dieses Gesprächs wurden alle Beweiskonstruktionen so verbessert, dass den Studierenden vier korrekte und gültige Beweise vorlagen, auf die sie sich im zweiten Teil der Studie beziehen konnten. (Für das vorliegende Forschungsinteresse erschien es notwendig, dass die Studierenden zunächst alle vier Beweisformen selbst konstruieren, damit sie die damit verbundenen Arbeitsprozesse durchlaufen. Somit konnten sie bei der anschließenden Bewertung der verschiedenen Beweisformen auf ihre eigenen Erfahrungen und ihre eigenen Beweisprodukte zurückgreifen und mussten sich nicht in ‚fremde‘ Beweisprodukte hineindenken.)

(2) Die Phase der Bewertung der verschiedenen Beweisformen.

Zu Beginn der zweiten Phase des Interviews wurden die Studierenden darum gebeten, einen Fragebogen (s.u.) auszufüllen. Auf diesem wurden zu jeder der vier Beweisformen die gleichen vier Aussagen formuliert, die auf einer Sechser-Likert-Skala bewertet werden sollten. Die Fragen fokussierten die Aspekte ‚Überzeugung', ‚Erklärungsqualität', ‚Sicherung der Gültigkeit' und ‚Adäquatheit für den schulischen Mathematikunterricht'. Der Einbezug der Aspekte ‚Überzeugung' und ‚Sicherung der Gültigkeit' entspricht der in der Vorlesung vorgenommenen Unterscheidung vom logischen und psychologischen Nutzen von Beispielen und Beweisen. Mit der Abfrage dieser beiden Aspekte sollte auch überprüft werden, ob sich in den Bewertungen der Studierenden eine entsprechende Unterscheidung wiederfinden lässt.

In der Tabelle 17 werden die vier Items exemplarisch für den generischen Beweis mit Zahlen aufgeführt.

Bitte bewerten Sie die folgenden Aussagen zu dem generischen Beweis mit Zahlen:								
Der *generische Beweis mit Zahlen* reicht mir aus, um mich völlig von der Gültigkeit der Behauptung zu überzeugen.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
Die Argumentation im *generischen Beweis mit Zahlen* erklärt mir, warum die Behauptung gilt.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
Der *generische Beweis mit Zahlen* sichert die Gültigkeit der Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig
Ich betrachte den Einsatz dieser Beweisform im schulischen Mathematikunterricht als sinnvoll.	stimmt gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	☐	stimmt völlig

Tabelle 17: Bewertungsschema für die Beweisform *generischer Beweis mit Zahlen* aus der Interviewstudie im Wintersemester 2013/14

Die Bewertungen der Studierenden dienten anschließend als Gesprächsanlässe für die Diskussion der vier verschiedenen Beweisformen.

Datensammlung und Methode der Auswertung

Die schriftlichen Dokumente der Studierenden (Aufgabenbearbeitungen auf Konzeptpapier und Reinschrift sowie die ausgefüllten Fragebögen) wurden nach der Studie einbehalten, wobei den Studierenden Kopien ihrer Bearbeitungszettel ausgehändigt wurden. Die Gespräche aller Beteiligten wurden transkribiert.

Für die Untersuchung der Leitfrage zur Auswertung [9] („Spontane Wahl der Beweisform und Gründe für deren Auswahl") wurde geschaut, mit welcher Beweisform die Studierenden zunächst versuchten, die gegebene Behauptung zu beweisen. Anschließend wurden aus den Transkripten die von den Studierenden angegebenen Gründe für ihre spontan gewählte Beweisform zusammengetragen.

Für die Untersuchung der Leitfrage zur Auswertung [10] („Bewertungen der Beweisformen im Hinblick auf die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit", „Überzeugungskraft", „Erklärungspotential" und „Eignung für den schulischen Mathematikunterricht"") wurden die Beweisbewertungen der

Studierenden, die sie im Rahmen des Fragebogens (vgl. Tabelle 17) getätigt hatten, statistisch ausgewertet.

Um durch die Untersuchung der Leitfragen zur Auswertung [11], [12] und [13] („Wahrnehmung der Beweisformen und Unterscheidung eines logischen und psychologischen Aspekts“) die Antworten der Studierenden auf dem Fragebogen (s.o.) besser verstehen zu können, wurden zunächst Apriori-Kategorien gebildet, um eine grobe Vorsortierung der Äußerungen der Studierenden vornehmen zu können. Im Sinne der Forschungsmethode der „quasi-judicial method“ für Fallstudien (Bromley 1986, S. 24ff.) wurde dazu der möglichst einfache Zusammenhang der beiden Aspekte ‚logische Akzeptanz‘ und ‚psychologische Überzeugung‘ angenommen. In der Kombination dieser Aspekte ergeben sich, im Sinne einer Vier-Felder-Tafel, vier mögliche Wahrnehmungen:

		Psychologische Überzeugung	
		liegt vor	***liegt nicht vor***
Logische Akzeptanz	***liegt vor***	*(1) Logische Akzeptanz und psychologische Überzeugung*	*(2) Logische Akzeptanz ohne psychologische Überzeugung*
	liegt nicht vor	*(3) Keine logische Akzeptanz, aber psychologische Überzeugung*	*(4) Weder logische Akzeptanz noch psychologische Überzeugung*

Tabelle 18: Apriori-Kategorisierung zur Grobbestimmung der Wahrnehmung der Studierenden in Bezug auf die Aspekte „logische Akzeptanz" und „psychologische Überzeugung"

Zu den Kategorien im Einzelnen:

(1) Logische Akzeptanz und psychologische Überzeugung:

Ein Studierender mit dieser Wahrnehmung akzeptiert das Konzept des Beweises und erkennt die logische Konsequenz an, dass aufgrund des Beweises die Gültigkeit der Behauptung mit Sicherheit folgt. Auf der psychologischen Ebene ist der Studierende überzeugt, dass nach dem erfolgten Beweis die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr sein muss und ein Gegenbeispiel nicht existieren kann.

(2) Logische Akzeptanz ohne psychologische Überzeugung:

Ein Studierender mit dieser Wahrnehmung versteht das Konzept der Beweisform und akzeptiert die damit verbundene Verifikation der Behauptung. Es verbleibt jedoch ein subjektiver, intuitiver Zweifel, eine psychologische Unsicherheit an der wirklichen Allgemeingültigkeit der Argumentation, auch wenn diese rational als eigentlich unnötig bewertet wird.

(3) Keine logische Akzeptanz, aber psychologische Überzeugung:

Ein Studierender mit dieser Wahrnehmung erfasst nicht die logische (korrekte) Verifikation, die durch den Beweis geleistet wird. Somit erweist sich für den Studierenden die Gültigkeit der Behauptung nicht als logisch-notwendige Konsequenz aus dem Beweis. In Gegensatz dazu wird durch den Beweis allerdings die psychologische Überzeugung erhöht, dass die gegebene Behauptung wahr ist.

(4) Weder logische Akzeptanz noch psychologische Überzeugung:

Bei dieser Wahrnehmung eines Beweises wird der erfolgte Beweis bzw. das verwendete Beweiskonzept augenscheinlich nicht (vollständig) verstanden. Weder erfolgt eine logische

Akzeptanz, dass aufgrund des erfolgten Beweises die Gültigkeit der Behauptung mit Sicherheit folgen muss, noch ist durch den Beweis eine subjektive Überzeugung bzgl. der Gültigkeit der Behauptung gegeben.

Anhand dieser vier Kategorien wurde eine erste grobe Vorkategorisierung der Wahrnehmungen der Studierenden vorgenommen. Dazu wurde in den Transkripten nach Äußerungen gesucht, die die Existenz bzw. die Abwesenheit von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung belegen. Auf diese Weise konnten die Studierenden jeweils einer dieser vier Kategorien zugeordnet werden. Aufbauend auf dieser groben Vorkategorisierung wurden im Kontext der vier Kategorien die konkreten Äußerungen der Studierenden herausgearbeitet, die die entsprechende Zuordnung ermöglichten. In der Betrachtung dieser Äußerungen wurde es schließlich möglich, genauer zu beschreiben, wie die Studierenden ihre Wahrnehmung in Bezug auf die verschiedenen Beweisformen umschreiben bzw. begründen.

Aufgabenanalyse

Für die Durchführung dieser Studie musste eine Behauptung gefunden werden, die sich mithilfe aller vier Beweisformen der Lehrveranstaltung beweisen lässt und im Rahmen von Beispieluntersuchungen Möglichkeiten bietet, verschiedene Erkenntnisse für die Konstruktion von (generischen) Beweisen zu verwenden. Aus diesen Gründen wurde die folgende Aufgabe ausgewählt:

> **Aufgabe**
> Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:
>
> *Nimmt man eine beliebige natürliche Zahl und addiert dazu ihr Quadrat, dann ist diese Summe immer durch 2 teilbar.*

Im Folgenden werden verschiedene Lösungsmöglichkeiten für die Konstruktion der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung aufgezeigt.

Generischer Beweis mit Zahlen, Variante (1):

$2+4=6$ und $3+9=12$

Da das Quadrat einer geraden Zahl auch gerade und das einer ungeraden Zahl ungerade ist, werden in den obigen Rechnungen immer entweder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen miteinander addiert. Da die Summe von zwei geraden Zahlen immer gerade ist und auch die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist, wird das Ergebnis immer gerade sein.

Generischer Beweis mit Zahlen, Variante (2):

$2+4=2\cdot(1+2)=2\cdot 3$ und $5+25=5\cdot(1+5)=5\cdot 6$

Die Summe aus einer natürlichen Zahl und ihrem Quadrat ist immer gleich dem Produkt von der Ausgangszahl und ihrem Nachfolger. Da bei zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer eine Zahl gerade ist, muss das Produkt den Faktor 2 enthalten, wodurch das Ergebnis immer gerade sein muss.

Formaler Beweis:

1. Fall: Sei $\mathrm{n} \epsilon \mathbb{N}$ eine beliebige, aber feste gerade Zahl. Dann ist $\mathrm{n}=2\mathrm{a}$ für ein $\mathrm{a} \epsilon \mathbb{N}$. Weiter gilt: $n+n^2=(2a)+(2a)^2=2a+4a^2=2(a+2a^2)$. Diese Summe ist durch 2 teilbar, da $(a+2a^2)\ \epsilon\ \mathbb{N}$.

2. Fall: Sei $\mathrm{n} \epsilon \mathbb{N}$ eine beliebige, aber feste ungerade Zahl. Dann ist $\mathrm{n}=2\mathrm{a}-1$ für ein $\mathrm{a} \epsilon \mathbb{N}$. Weiter gilt: $n+n^2=(2a-1)+(2a-1)^2=(2a-1)+4a^2-4a+1=2(2a^2-a)$. Diese Summe ist durch 2 teilbar, da $(2a^2-a) \epsilon\ \mathbb{N}$.

Damit ist alles gezeigt. Q.e.d.

Generischer Punktmusterbeweis:

1. Fall: n ist eine gerade Zahl:

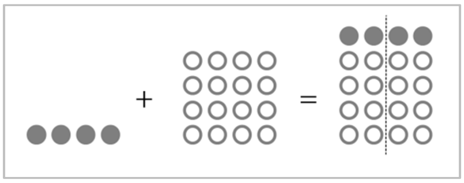


Abbildung 37: Generisches Punktmusterbeispiel für die Summe „$n + n^2$“ bei gerader Ausgangszahl

Wenn man eine gerade Zahl quadriert, dann sind die Seiten des entstehenden Quadrats auch „gerade“. Addiert man darauf an einer Seite die Ausgangszahl, dann bleibt eine Seitenlänge unverändert gerade. Somit kann man die so entstandene Figur in zwei gleiche Hälften teilen, weswegen die Summe gerade ist.

2. Fall: n ist eine ungerade Zahl:

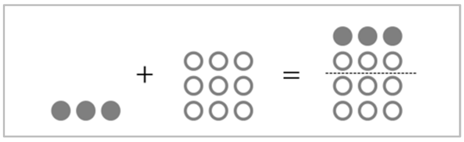


Abbildung 38: Generisches Punktmusterbeispiel für die Summe „$n + n^2$“ bei ungerader Ausgangszahl

Wenn man eine ungerade Zahl quadriert, dann sind die Seiten des entstehenden Quadrats „ungerade“. Addiert man darauf an einer Seite die Ausgangszahl, dann wird eine Seitenlänge um 1 größer und somit gerade. Also kann man die so entstandene Figur in zwei gleiche Hälften teilen, weswegen die Summe gerade ist.

Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen:

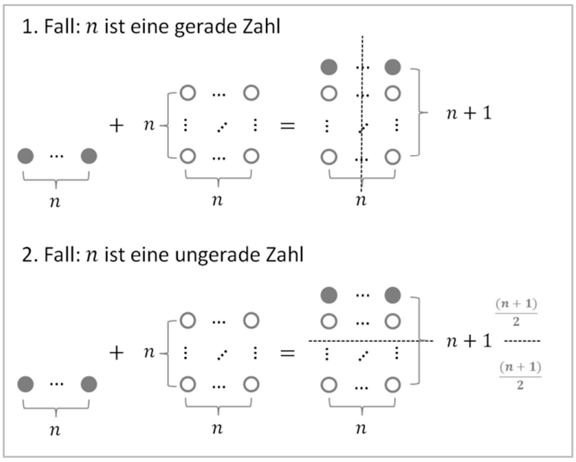


Abbildung 39: Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen für die Behauptung, dass die Summe „$n + n^2$“ immer gerade ist

Ergebnisse

Die Ergebnisse bzgl. der primären Beweiskonstruktion der Studierenden und ihrer Wahrnehmungen vom generischen Beweis mit Zahlen wurden in Kempen und Biehler (2016) veröffentlicht. Die folgenden Darstellungen orientieren sich an der genannten englischsprachigen Publikation, sprachliche Anlehnungen werden dabei zur besseren Übersichtlichkeit nicht angemerkt.

Die verschiedenen Ergebnisse werden im Folgenden mithilfe von wörtlichen Zitaten belegt, die in kleinerer Schriftgröße und eingerückt angegeben werden. Insgesamt nahmen sechs Studierendenpaare an der Untersuchung teil, davon waren sieben Studierende weiblich und fünf männlich. Ein Studierender („S7“) besuchte die Lehrveranstaltung zum zweiten Mal.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [9]: Welche Beweisform nutzen die Studierenden spontan, um eine gegebene Behauptung zu beweisen? Welche Gründe können für die entsprechende Beweiswahl ausgemacht werden?

Neun der zwölf Teilnehmenden der Studie begannen die Bearbeitung der Aufgabe unmittelbar mit der Formalisierung der Aussage und der Konstruktion eines formalen Beweises. Nur in einer Gruppe überprüften die Studierenden die Behauptung zunächst an konkreten Zahlenbeispielen. Einer dieser Studierenden erläuterte anhand seiner Beispiele, dass solche Summen immer gerade sein müssen, denn bei ungeraden Zahlen sei das Quadrat auch ungerade und die Summe von zwei ungeraden Zahlen sei immer gerade. Dieses Teilargument wurde von der Gruppe allerdings für die Konstruktion eines generischen Beweises (mit Zahlen) nicht weiterverfolgt, auch sie versuchte anschließend die Konstruktion eines formalen Beweises mithilfe von Buchstabenvariablen.

Bei der anschließenden Befragung der Studierenden nach ihren Motiven für die unmittelbare Konstruktion des formalen Beweises wurden die folgenden Gründe angeführt: ihre Sozialisation in Schule und Universität, dass der formale Beweis leichter zu konstruieren sei, weil man dafür keine Idee haben müsse, und weil sie dachten, dass die Konstruktion eines formalen Beweises von ihnen gefordert sei. Nur ein Studierender begann die Aufgabenbearbeitung mit der Niederschrift „generischer Beweis“ und der Untersuchung von konkreten Zahlenbeispielen. Als Gründe führte der Studierende die folgende Erklärung an:

> Ja, also für mich ist das einfach eine Stütze. Ich sehe das so, wenn ich mir das aufschreibe, das ist ja dass ich das einfach sehe, wie das funktioniert, und dann fange ich erst an, dafür Variablen einzusetzen. Also dann den formalen Beweis. Ich gucke vielleicht, ob ich da eine Regelmäßigkeit finde, weiß ich nicht. Für mich ist das immer einleuchtender, wenn ich zuerst mit dem generischen Beweis beginne und dann eben mit den Variablen. (Studierender 12)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [10]: Wie bewerten die Studierenden die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung im Hinblick auf die Aspekte und „Sicherung der Gültigkeit“, „Überzeugungskraft“, „Erklärungspotential“ und „Eignung für den schulischen Mathematikunterricht“?

Die Bewertungen der Studierenden für die vier verschiedenen Beweisformen werden in der Abbildung 40 dargestellt. Es zeigte sich, dass die Mehrheit der Probanden den formalen Beweis bzgl. der Aspekte „Überzeugungskraft“, „Erklärungsqualität“ und „Sicherung der Gültigkeit“ insgesamt am höchsten bewertete. Nur in Bezug auf die Eignung für den schulischen Mathematikunterricht fielen die Bewertungen zum formalen Beweis meist niedriger aus als die Bewertungen zu den anderen Beweisformen.

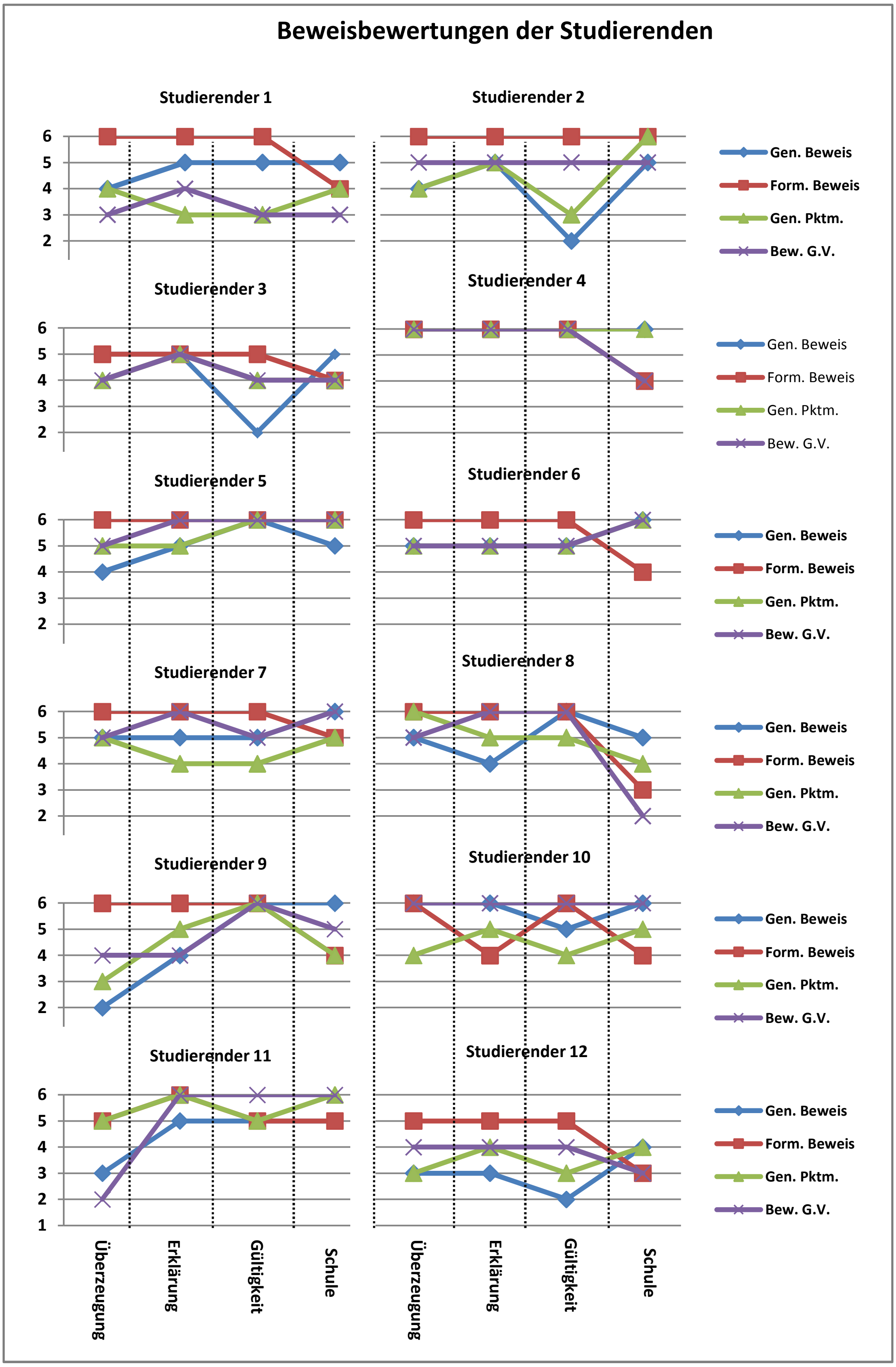


Abbildung 40: Die Beweisbewertungen der Studierenden bzgl. der Aspekte „Überzeugungskraft", „Erklärungsqualität", „Sicherung der Gültigkeit" und „Eignung für die Schule" ([1] „stimmt gar nicht" … [6] stimmt „völlig")

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [11]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. des generischen Beweises mit Zahlen im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?

Für drei von den oben angegebenen vier Apriori-Kategorien konnten in den Transkripten Äußerungen ausgemacht werden, die die Existenz dieser Wahrnehmungen belegen. Nur für die Existenz der Wahrnehmung (3) „Keine logische Akzeptanz, aber psychologische Überzeugung“ konnte kein Beleg gefunden werden. Bezüglich des generischen Beweises mit Zahlen konnten somit drei verschiedene Wahrnehmungen ausgemacht werden: (a) „Logische Akzeptanz und psychologische Überzeugung“, (b) „Logische Akzeptanz ohne psychologische Überzeugung“ und (c) „Weder logische Akzeptanz noch psychologische Überzeugung“. Diese drei verschiedenen Wahrnehmungen werden im Folgenden kurz beschrieben und deren Existenz mithilfe von Transkriptauszügen belegt. Außerdem wird herausgearbeitet, wie die Studierenden ihre Wahrnehmungen beschreiben und ggf. begründen.

(a) <u>Logische Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen und psychologische Überzeugung</u>

In Bezug auf den generischen Beweis mit Zahlen bedeutet diese Wahrnehmung das Folgende:

Ein Studierender mit dieser Wahrnehmung akzeptiert das Konzept des generischen Beweises und erkennt die logische Konsequenz, dass aufgrund des Beweises die Gültigkeit der Behauptung folgt. Auf der psychologischen Ebene ist der Studierende überzeugt, dass nach dem erfolgten generischen Beweis die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr sein muss und ein Gegenbeispiel nicht existieren kann.

Diese Wahrnehmung konnte nur bei einem Studierenden anhand seiner Äußerungen nachgewiesen werden.

> Transkriptauszug [a1]; Studierender 10:
>
> Also, ich habe jetzt angekreuzt: stimmt völlig [bei „Sicherung der Gültigkeit“, L. K.], weil … wieder Schritt für Schritt, man kann dann mitdenken, z.B. das wird addiert und dann kommt das dazu und man kann immer darauf aufbauen, jetzt nicht so wie bei dem formalen Beweis. Das steht dann einfach im Raum und das muss man dann beweisen und das ist dann so. Das [der generische Beweis, L. K.] ist zwar nicht so anschaulich mit den Bildern, aber man sieht hier genau, was passiert. […] Das finde ich gerade gut beim generischen. Man kann, wenn man den sieht, kann man sich sofort denken „Ah“, das wurde sich dabei gedacht. Weil es werden ja immer ein paar Beispiele gemacht und an denen wird argumentiert und das kann man gut mit einer Argumentation, wenn diese nicht zu fachlich geschrieben ist, nachvollziehen.

Dieser Studierende stellt als Basis für seine Wahrnehmung die Schritthaftigkeit der Beweisführung heraus, die anhand eines konkreten Beispiels entwickelt wird und somit besonders gut nachvollzogen werden kann. Auch wird positiv angemerkt, dass die die konkreten Beispiele begleitende narrative Begründung bzw. Erläuterung besonders gut verständlich sei, wenn diese „nicht zu fachlich geschrieben ist“. Innerhalb dieses Transkripts werden somit die Vorzüge generischer Beweise genannt, die bereits auf theoretischer Ebene in Abschnitt 2.1.3 herausgearbeitet wurden: der mögliche Verzicht auf die fachmathematische Symbolsprache, der Einbezug konkreter Beispiele, was zu einem besseren Verständnis des zu beweisenden Sachverhalts führen kann, und damit verbunden eine besondere ‚Erklärungsqualität‘ der Beweisführung.

(b) Logische Akzeptanz des generischen Beweises ohne psychologische Überzeugung

Ein Studierender mit dieser Wahrnehmung des generischen Beweises mit Zahlen versteht das Konzept der Beweisform und akzeptiert die damit verbundene Verifikation der Behauptung. Es verbleibt jedoch ein subjektiver, intuitiver Zweifel, eine psychologische Unsicherheit an der wirklichen Allgemeingültigkeit der Argumentation, auch wenn diese rational als eigentlich unnötig bewertet wird.

Die folgenden Transkriptauszüge belegen die Existenz dieser Wahrnehmung, die bei vier Studierenden ausgemacht werden konnte[40]:

> Transkriptauszug [b1]; Studierender 2 (begründet seine Bewertung [„4"] des generischen Beweises mit Zahlen bzgl. der ‚Überzeugung' auf der Sechser-Likert Skala):
>
> S2: Ja, wir haben da ja jetzt nur diese Zahlenbeispiele und wenn's jetzt … weiß nicht. Also vom Gefühl her würde ich dann sagen, vielleicht im Tausenderbereich oder so stimmt das dann schon nicht mehr. Also vom Gefühl jetzt her.
>
> Interviewer: Also kann da doch im Tausenderbereich ein Beispiel kommen, dass es nicht funktioniert.
>
> S2: Eigentlich nicht, aber so vom Gefühl her finde ich, dass der formale Beweis besser ist. Würd ich jetzt [unverständlich]

Im Transkriptauszug [b1] wird deutlich, dass nach der Betrachtung des generischen Beweises mit Zahlen ein subjektiver Zweifel an der Allgemeingültigkeit der Behauptung verbleibt, der allerdings aus logischer Perspektive als unnötig bewertet wird („eigentlich nicht, aber vom Gefühl her"). Dieser subjektive Zweifel wird in Bezug auf Beispiele im „Tausenderbereich" ausgedrückt, die für den Studierenden mit einer Unsicherheit behaftet sind. An dieser Stelle kann eine gewisse Verbindung zu der Fehlvorstellung „big number" ausgemacht werden: Beispiele mit großen Zahlen werden psychologisch anders bewertet als solche mit kleinen Zahlen (vgl. Abschnitt 5.3.2.3).

> Transkriptauszug [b2]; Studierender 8:
>
> Aber - das hier [zeigt auf den formalen Beweis] ist für mich irgendwie allgemeingültiger und ein schlüssigerer Beweis. Ich finde, man müsste es mit allen „n" ausprobieren [zeigt auf den generischen Beweis] – auch wenn's Quatsch ist, man sieht ja immer die Form – aber… […] Das hier ist vollständiger für mich, wenn man immer „für alle n Element n", auch wenn man's hiermit ja auch – die Allgemeingültigkeit zeigt. Irgendwie – fehlt noch so'n Gefühl.

Auch im Transkriptauszug b2 wird der verbleibende subjektive Zweifel („irgendwie – fehlt noch so'n Gefühl") aus logischer Perspektive als unnötig bewertet („auch wenn's Quatsch ist"). Die logische Akzeptanz resultiert aus der „Form", die für alle Beispiele genau so gilt; für ein sicheres Gefühl würde der Studierende diese Form aber am liebsten „mit allen n ausprobieren". In diesem Fall scheint die verbleibende Unsicherheit dadurch begründet zu sein, dass die Argumentation noch zu sehr an dem betrachteten konkreten Beispiel verhaftet bleibt, eine vollständige Ablösung vom konkreten Fall i.S. einer Allgemeingültigkeit scheint auf der psychologischen Ebene nicht stattzufinden.

---

[40] Der vierte Studierende mit dieser Wahrnehmung ist Studierender 1. Zu diesem Studierenden wird allerdings kein Transkriptauszug angegeben, da dieser lediglich die Aussagen von dem Studierenden 2 bejaht bzw. wiederholt hat.

Transkriptauszug [b3]; Studierender 9:

Ich weiß nicht. Ich kann's nicht mal genau erklären, warum das so für mich ist. Ich verstehe auch, dass die allgemeingültig sind, und den Sinn hinter der ganzen Sache. Nur von der Überzeugungskraft her, wenn mir jemand so einen Beweis vorlegen würde, würde ich wahrscheinlich sagen, kann ich den nochmal formal haben. Irgendwie überzeugt mich das mehr.

Bei den Äußerungen vom Studierenden 9 wird die logische Akzeptanz („ich verstehe auch, dass die allgemeingültig sind") deutlich von einer subjektiven Überzeugung abgegrenzt. Dabei wird lediglich angemerkt, dass der Studierende für eine gesteigerte Überzeugungskraft einen formalen Beweis bevorzugen würde.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass in Bezug auf den generischen Beweis mit Zahlen in dieser Studie bei vier von zwölf Studierenden diese Wahrnehmung (b) ausgemacht werden konnte. Der verbleibende subjektive Zweifel auf der psychologischen Ebene resultiert dabei nach Angaben der Studierenden aus einer gewissen Unsicherheit („so ein Gefühl"), ob nicht doch ‚irgendwo' ein Beispiel existieren könnte, bei dem das ausgemachte generische Argument nicht funktionieren würde. Diese Unsicherheit wurde einmal in Bezug auf große Zahlenbeispiele („im Tausenderbereich") formuliert, ein anderes Mal dadurch, dass man eigentlich alle Zahlenbeispiele einmal ausprobieren möchte. Dieser verbleibende subjektive Zweifel wird allerdings in all diesen Fällen aus logischer Perspektive als unnötig bewertet.

(c) Weder logische Akzeptanz des generischen Beweises noch psychologische Überzeugung

Bei dieser Wahrnehmung des generischen Beweises mit Zahlen wird das Beweiskonzept nicht (vollständig) verstanden. Bei der Beweisbetrachtung stehen die konkreten Beispiele im Vordergrund, ohne dass das beispielübergreifende generische Moment erkannt bzw. gewürdigt wird. Somit wird der generische Beweis als bloße empirische Überprüfung fehlinterpretiert.

Aufgrund ihrer Äußerungen wurde fünf Studierenden diese Wahrnehmung zugeordnet.

Transkriptauszug [c1]; Studierender 3:

Bei generischen Beweisen ist es ja einfach so, dass man manchmal auch – man hat ja auch in den Hausaufgaben manchmal gemerkt, dass wir dann Beispiele geben sollen zur Behauptung, dann haben wir ganz viele Beispiele dazu gefunden, aber es war trotzdem falsch. Also es hat nicht - es gilt nicht für alle. Deswegen kann man sich ja nicht immer sicher sein, dass das auch wirklich stimmt, nur weil man Zahlenbeispiele beacht … sich angeschaut hat.

Der Studierende 3 nimmt keine Trennung zwischen der Überprüfung einzelner Beispiele und der Betrachtung einer beispielübergreifenden, generischen Argumentation vor. An dieser Stelle wird deutlich, dass dieser Studierende das Konzept generischer Beweise in Abgrenzung zu unvollständigen induktiven Verallgemeinerungen nicht (vollständig) verstanden hat. Positiv könnte allerdings angemerkt werden, dass ihm bewusst ist, dass die Gültigkeit eines generischen Beweises von der (allgemeingültigen) Übertragbarkeit des generischen Arguments abhängt.

Transkriptauszug [c2]; Studierender 7:

Da hat man – also ich selber seh' darin nur Zahlenbeispiele. Ernsthaft, ich seh' da nur … Jetzt von der Vorlesung und so, hätt' ich jetzt kein Abitur, hätt ich gesagt, ja locker weg so, wird ausreichen, ne? Aber jetzt, weil wir wissen, dass man da irgendwie zeigen muss mit Variablen und so, ohne dass man Zahlenbeispiele nimmt, das ist dann ... schwach ausgedrückt ist, wenn wir das so machen.

Der Studierende 7 gibt an, dass er in generischen Beweisen nur die Überprüfung einzelner Zahlenbeispiele sieht. Mit Bezug auf sein Abitur spricht er weiter davon, dass mit diesem Bildungsgrad auch die Erkenntnis verbunden sei, dass man richtige Beweise mit Variablen führen müsse.

> Transkriptauszug [c3]; Studierender 11:
>
> Ja, richtiger in dem Sinne, dass [der formale Beweis, L. K.] zeigt halt die Richtigkeit, also die Gültigkeit, genau. Und dass die Behauptung dann halt gilt. Zeigen wir auch zwar im generischen Beweis, aber das ist ja dann nur für die paar Zahlen, die wir eingesetzt haben.
>
> Transkriptauszug [c4]; Studierender 12:
>
> Ja. Ich würd sagen, dass das – also ob's [der generische Beweis mit Zahlen, L. K.] mir ausreicht weiß ich nicht. Also ich würd hier – ob's jetzt die Gültigkeit 100% [unverständlich] würd ich nicht sagen. Weil wir hatten auch mal ich glaub irgendwie 'ne Hausaufgabe oder sowas gehabt, wo man das widerlegen musste und beweisen, irgendwie so was war das. Und dann konnte das auch, musste man Beispiele dazu bringen. Und ich hatte da zwei Beispiele erwischt, die passen, und vielleicht gibt es noch ein drittes, was nicht passt. Dann reicht mir das nicht aus, also dann hab ich's ja im Grunde nicht bewiesen. Dann beweis ich's nur für die zwei Zahlenbeispiele und nicht für's Ganze. Ist nicht die Gültigkeit da.

Auch die Studierenden 11 und 12 sprechen sich dafür aus, dass in generischen Beispielen lediglich einzelne konkrete Beispiele überprüft würden. Ein Bezug auf das beispielübergreifende, generische Argument wird nicht vorgenommen. Die Beweisform wird auch in diesen Äußerungen mit unzureichender induktiver Verallgemeinerung gleichgesetzt.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [12]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. des formalen Beweises im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?

Im Fall des formalen Beweises konnten anhand der Transkriptauszüge keine Evidenzen für die Existenz der Apriori-Kategorien (2), (3) und (4) ausgemacht werden. Die einzige Wahrnehmung, für deren Existenz in den Transkripten Belege gefunden werden konnte, entspricht der Kategorie (1) „Logische Akzeptanz und psychologische Überzeugung". Der formale Beweis wird von fast allen Studierenden als der „beste" bzw. „sicherste" Beweis beschrieben. Diese empfundene Sicherheit wird dabei vor allem im Kontrast zum generischen Beweis ausgedrückt. Begriffe, mit denen die Studierenden in der Diskussion um die Gültigkeit der Beweisformen diese Vorrangstellung des formalen Beweises ausdrücken, sind: „besser", „am besten", „konkreter", „allgemeingültiger", „vollständiger", „stärker", „richtiger" und „am sichersten". Als Grund werden von den Studierenden die Verwendung der fachmathematischen Symbolsprache und die damit verbundene ‚Sicherheit' angeführt.

Im Folgenden werden verschiede Transkriptauszüge angegeben, die die Existenz der Wahrnehmung „logische Akzeptanz und psychologische Überzeugung" zu belegen scheinen:

> Transkriptauszug [a2]; Studierender 2:
>
> Also ich finde den generischen Beweis zum Verständnis her, also am Anfang, dass man so ein Schema erkennt, gut, aber dann den formalen Beweis, um das wirklich zu beweisen. Also, dass es wirklich sicher ist, dass es auch so stimmt.

Für den Studierenden 2 ist es die Beweisform des formalen Beweises, die „wirklich" etwas beweist. Nur durch diese Beweisform wird wirkliche ‚Sicherheit' hergestellt.

> Transkriptauszug [a3]; Studierender 4:
>
> Also ich finde den formalen am besten. Ja, irgendwie ist der vielleicht am sichersten? Also wenn ich nachher irgendwie rausbekomme „2 mal irgendwas – in der Klammer", dann ist es völlig egal, was in der Klammer steht, ich weiß, es ist durch 2 teilbar. So, dann brauche ich nicht noch irgendwie Ausführungen, gucken oder so. Dann ist das völlig klar.

Der Studierende 4 beschreibt den formalen Beweis als „am besten" und als „am sichersten". Das nach der Anwendung von Termumformungen schließlich erhaltene Resultat („2 mal irgendwas – in der Klammer") stellt für ihn die Gültigkeit der Aussage sicher.

> Transkriptauszug [a4]; Studierender 7:
>
> Aber ich find das auch konkreter [zeigt auf den formalen Beweis, L. K.] eben, wenn man mit dem formalen Algebra-Beweis, also – ja – find ich allgemeingültiger. Aber vom Gefühl her irgendwie find ich das hier [zeigt auf den formalen Beweis, L. K.] noch vollständiger.
>
> Transkriptauszug [a5]; Studierender 9:
>
> Ich finde irgendwie, die Variablen sind irgendwie, die sind allgemeingültiger. Das andere ist dann wohl hin und her erklärt. Das ist so ein bisschen Gerederei, sage ich mal. Je nachdem, wie man es formuliert, könnte man es verstehen oder nicht. Aber mit Variablen, wenn die richtig definiert sind, zack so sind die und da gibt es kein Wenn und Aber.

In den Transkriptauszügen zu den Studierenden 7 und 9 wird der formale Beweis als „allgemeingültiger" bzw. „vollständiger" bezeichnet. Interessant erscheint hierbei die sprachliche Wendung der Steigerung der Absolutadjektive ‚allgemeingültig' und ‚vollständig'. Hierin kann ein Ausdruck psychologischer Überzeugung gesehen werden, da vom logischen Standpunkt her beide Beweisformen (generischer Beweis und formaler Beweis) als allgemeingültig und vollständig bewertet werden. Schließlich hebt der Studierende 9 die Präzision der fachmathematischen Symbolsprache heraus („Aber mit Variablen…").

> Transkriptauszug [a6]; Studierender 12:
>
> Ja, für mich hat der formale Beweis trotzdem noch mehr Gültigkeit. Also er sichert die Gültigkeit für alle Zeiten, noch besser ab. Ich seh' das zwar so, aber ich brauch noch dazu den Beweis selbst, den formalen Beweis, damit das für mich hundertprozentig eindeutig ist. Also ich kann sowas meistens auch nur konstruieren, wenn ich den formalen Beweis habe. So Hundertprozent überzeugt mich die Gültigkeit erst, wenn ich den formalen Beweis sehe, alleine jetzt nicht so.

Wie in den obigen Transkriptauszügen, verwendet auch der Studierende 12 eine besondere Steigerungsform: Der formale Beweise habe „noch mehr Gültigkeit" und „sichert die Gültigkeit für alle Zeiten noch besser ab".

Nur ein Studierender äußert sich negativer gegenüber dem formalen Beweis. Es ist der Studierende 10, der als einziger den generischen Beweis mit Zahlen für sich vollständig logisch und psychologisch akzeptiert zu haben schien (vgl. hierzu die Wahrnehmung (a) des generischen Beweises oben).

> Ja, weil beim formalen Beweis steigt man nicht sofort durch. Weil, man bekommt entweder einen Sachverhalt oder das Bewiesene und wenn man jetzt sieht, warum hat er da die Termumformung gemacht und was möchte er

mir jetzt damit sagen. Was möchte er erreichen? Bei manchen formalen Beweisen reicht es ja, wenn man einfach nur die Äquivalenzumformungen da stehen hat und noch nicht mal groß einen Text dazu schreibt, und manchmal blickt man da nicht sofort durch.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [13]: Wie beschreiben die Studierenden ihre Wahrnehmung bzgl. der Punktmusterbeweise im Spannungsfeld von logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung und womit begründen sie diese?

Da nicht in allen Gruppen die Zeit ausreichte, um alle Beweisformen zu erörtern, können die in dieser Studie erhaltenen Informationen zu den Punktmusterbeweisen nicht als ausreichend betrachtet werden, um Wahrnehmungen von generischen Punktmusterbeweisen und Beweisen mit geometrischen Variablen abstrahieren und beschreiben zu können. Entsprechend wird an dieser Stelle auch auf die Unterscheidung bzgl. logischer und psychologischer Aspekte verzichtet. Dennoch erscheint es wertvoll, verschiedene Auffassungen der Studierenden zumindest zu dokumentieren. Daher sollen an dieser Stelle Thesen bzgl. verschiedener Wahrnehmungen formuliert werden, die in Äußerungen der Studierenden deutlich zu werden schienen. Mit der Formulierung dieser Thesen wird dabei kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Verallgemeinerbarkeit erhoben, sie sollen zur Skizzierung verschiedener Aspekte von Punktmusterbeweisen und als Diskussionsgrundlage und Anhaltspunkte für weitere Forschungen dienen.

<u>These (1) Punktmuster sind schwieriger zu konstruieren, weil man immer erst eine ‚Idee' braucht</u>

Verschiedene Studierende äußerten den Einwand, dass Punktmusterbeweise schwerer zu konstruieren seien als andere Beweise, da man bei dem Umgang mit Punktmustern immer zunächst eine Idee für deren Anordnung und Umstrukturierung haben müsse. Diese These wird durch zwei Zitate verdeutlicht:

> Ja, also weil, ja, der generische, also jetzt im Vergleich zu Punktmuster, aber da [beim Punktmusterbeweis; L. K.] brauch man dann immer ne Idee erstmal, ne? Deswegen finde ich den, im Vergleich zum formalen Beweis, auf jeden Fall schlechter, weil man da immer erst irgend ne Idee braucht. (Studierender 4)

> Wir wissen ja seit der ersten Klasse, nein Quatsch, wir wissen mit frühem Alter wenn wir eine Zahl mit zwei multiplizieren, dass es dann logischerweise auch dann durch 2 teilbar ist. Hier [beim Punktmusterbeweis; L. K.] müsste man erstmal überlegen waagerecht/senkrecht, gerade Zahl oben/gerade Zahl unten. Das Feeling dabei, das anzugucken und nachzuvollziehen ist hierbei [beim formalen Beweis; L. K.] einfacher als da. Hierbei zeigt man, egal welche der natürlichen Zahlen man mit zwei multipliziert und ist logischerweise durch 2 teilbar. (Studierender 8)

<u>These (2) Durch die Verwendung von Punktmustern und der damit verbundenen ‚visuellen' Darstellung des Sachverhalts wird der Beweis leichter zu verstehen</u>

Ein Studierender in der Untersuchung merkt an, dass durch die „visuelle" Darstellung des Sachverhalts die Punktmusterbeweise leichter zu verstehen sind:

> Das hat mich so einfach, also klar ich hab jetzt hier [beim generischen Punktmusterbeweis; L. K.], also die Gültigkeit hab ich jetzt hier ein bisschen besser angekreuzt, sagen wir mal so. Also man sieht es ja, also es ist noch mal, also es ist ja ne Kombination aus diesem Punktmusterbeweis und diesem generischen Beweis. Und da es noch so visuell darstellbar ist, ist die Gültigkeit, find ich, eher da. Also, weil man das ja für mehrere Beispiele und man sieht, dass es eben ja immer gilt sozusagen. Man erkennt da ja irgendwo, dass es zum Beispiel jetzt für gerade und ungerade Zahlen oder sowas und dadurch das noch visuell sozusagen begründet wird. Also es ist einfach durch die visuelle Begründung find ich, ist das nochmal eindeutiger. (Studierender 12)

These (3): Punktmusterbeweise sind für die Schule geeignet, weil sie ‚anschaulicher' sind.

Verschiedene Studierende haben angemerkt, dass sie Punktmusterbeweise deshalb für die Schule für geeignet halten, weil sie „anschaulicher" seien. Die folgenden Zitate sollen diese Ansicht verdeutlichen:

> Ich glaube, dass den Schülern das leichter fallen würde, weil's anschaulicher ist. Man sieht, dass man's halt durchteilen kann. Und da [beim formalen Beweis; L. K.] kann man's halt nicht so sehen. Obwohl man auch hier die „2" da stehen hat und man weiß, es ist dann durch 2 teilbar. (Studierender 2)

> Ich finde die Punktmusterbeweise auch nicht so toll, obwohl wahrscheinlich können die sich das dann schon besser vorstellen. Also wenn man einfach mal so'n Beispiel gibt, wobei ich das zum Beispiel schon zu schwierig eigentlich finde. Wenn man sowas erklären würde, finde ich das zu schwierig, aber an leichteren Beispielen, wie z.B. mit der geraden, wenn's einfach ne gerade Zahl ist, plus ne gerade Zahl – das ist ja leicht, das ist ja leicht vorzustellen. Oder ne ungerade plus ungerade – das, sowas ist gut. Dann können die erkennen, ok dann wird's, dann bleibt ein Punkt übrig und die ergänzen sich, das ist gut. Das ist, glaub ich, kann man ganz gut anwenden. (Studierender 3)

> Ja, Punktmuster ist anschaulicher für die Schule. (Studierender 7)

These (4) Punktmusterbeweise sind schwerer zu verstehen als formale Beweise

> Ich finde, dass [der formale Beweis; L. K.] ist am ehesten nachvollziehbar wirklich für alle anderen, wenn sich das jemand anderes angucken würde, wird der das am ehesten nachvollziehen, anstatt so'n Punktmusterbeweis, wo man erst nochmal überlegen müsste oder hier [beim generischen Beweis; L. K.], hier müsste man jetzt noch nen Satz hinterher schreiben. (Studierender 6)

Diskussion der Ergebnisse

Alle Studierenden, mit einer Ausnahme, beginnen die vorgelegte Beweisaufgabe mit der Konstruktion eines formalen Beweises. Es zeigt sich hier, dass der Begriff des Beweisens für diese Studierenden noch stark mit dem Konstrukt des ‚formalen Beweises' verbunden zu sein scheint. Dies wird auch daran deutlich, dass in der Gruppe, in der zunächst konkrete Beispiele untersucht werden, das ausgemachte Argument über das Quadrat ungerader Zahlen nicht weiterverfolgt wird, um einen generischen Beweis zu konstruieren. Auch in dieser Gruppe wird die Heuristik der algebraischen Umformungen für die Konstruktion des Beweises gewählt. Nur einer der zwölf Studierenden beginnt explizit mit der Konstruktion eines generischen Beweises, da er diese Beweisform als „Stütze" (s. Zitat oben) betrachtet. Diese Verbindung (bzw. Gleichsetzung) der Begrifflichkeiten ‚Beweis' und ‚formaler Beweis' kann dabei als Aspekt sozio-mathematischer Normen im Sinne einer Sozialisation durch Schule und Universität begriffen werden, wie es in den Antworten der Studierenden auf die Frage nach ihren Motiven für die Wahl der Beweisform deutlich wird. Dimmel und Hersh (2014, S. 393) benutzen den Begriff der semiotischen Norm, der einen ergänzenden Erklärungsansatz für dieses Phänomen bietet: Es ist möglich, dass der Aufgabenoperator „Beweisen Sie" für die Studierenden die Verwendung der algebraischen Sprache impliziert und sich somit eine semiotische Norm herausgebildet hat[41]. Wie sich später im Laufe des Interviews herausstellte, war diese Beweisform für die Mehrheit der Studierenden am einfachsten zu konstruieren. Dies mag dabei zunächst der vorliegenden Aufgabe geschuldet sein: Nach Einsetzen der algebraischen Repräsentation einer geraden oder ungeraden Zahl in den Term „$n + n^2$" ergibt sich die Lösung durch einfache algebraische Umformungen (vgl. die Aufgabenlösung zum formalen Beweis oben). Es ist allerdings

[41] Neuere Ergebnisse von Kempen et al. (2016) vermögen die These zu stützen, dass der Aufgabenoperator „Beweisen Sie …" die Verwendung von Variablen begünstigt.

auch generell eine offene Frage, ob sich bei entsprechenden Behauptungen in der elementaren Zahlentheorie die Konstruktion formaler Beweise nicht generell als leichter erweist als die Konstruktion generischer Beweise bzw. als Beweise mit Punktmustern.

Die Beweisbewertungen der Studierenden in dem Fragebogen scheinen zunächst in der Hinsicht überraschend, dass der formale Beweis auch in Bezug auf die Erklärungsqualität häufig die beste Bewertung erhält. In der didaktischen Literatur wird dagegen im Allgemeinen generischen Beweisen oder auch allgemein Beweisen mit Punktmusterdarstellungen ein höheres Erklärungspotential zugesprochen (vgl. hierzu die Erörterungen in Abschnitt 8.3.5). Bei den Ergebnissen bzgl. der Eignung der Beweisformen für den schulischen Mathematikunterricht stellt sich die Frage, vor welchem Hintergrund die Studierenden ihre Beweisbewertungen vornehmen. Denn es erscheint fragwürdig, dass sie den formalen Beweis für die Schule schlechter bewerten als die anderen Beweisformen, obwohl sie selbst mit dieser Beweisform am besten zu Recht kommen (s.o.). Die Zuschreibung einer Eignung für den Schulunterricht könnte somit etwa der Tatsache geschuldet sein, dass die Probanden der Ansicht sind, dass konkrete Zahlenbeispiele oder Punktmusterdarstellungen per se als ‚Veranschaulichungen' gut geeignet für die Schule, bzw. dass die Verwendung von Variablen für Schülerinnen und Schüler zu schwer seien. In dem Interview konnte diesen Fragen aus Zeitgründen leider nicht weiter nachgegangen werden. Diese Ergebnisse dürfen dabei aufgrund der niedrigen Stichprobenzahl von 12 Probanden nicht überbewertet werden. Diese Resultate bieten jedoch eine erste Einsicht in die Beweisbewertungen von Studierenden. Auch gaben diese Befunde den Anlass für die weitere Erforschung des Konstrukts der ‚Beweisakzeptanz', welche in dem folgenden Durchgang der Lehrveranstaltung vorgenommen wurde (vgl. Abschnitt 7.2.4).

Die herausgearbeiteten Wahrnehmungen zum generischen Beweis mit Zahlen und zum formalen Beweis geben Anlass zu der Diskussion dieser Beweisformen als Verifikationsmittel in der Hochschullehre bzw. im schulischen Mathematikunterricht und als didaktisches Instrument zum Erlernen der fachmathematischen Beweisaktivität. Wenn die Lernenden selbst nicht die (Allgemein-) Gültigkeit generischer Beweise einsehen, wie sollen sie dann diese selbst konstruieren können und mithilfe dieser Beweise ein adäquates Verständnis von der mathematischen Beweisaktivität erlangen? Die hier erhaltenen qualitativen Ergebnisse geben dabei nur einen Anhaltspunkt für die vorzunehmende quantitative Erforschung dieses Phänomens. Bedeutsam erscheint hierbei weiter, dass bei der Wahrnehmung des generischen Beweises mit Zahlen zwischen logischer Akzeptanz und psychologischer Überzeugung unterschieden werden konnte. Diese Aspekte bilden einen Rahmen, in dem Beweisakzeptanz geschieht, und sollten somit in entsprechenden Erörterungen von Beweiskonzepten mitgedacht werden.

Die formulierten Thesen bzgl. der Punktmusterbeweise geben Anhaltspunkte für weitere Forschungsfragen und Studien. Bei der Konstruktion von Punktmusterbeweisen braucht der Beweisende wirklich eine ‚Idee', wie er im Darstellungssystem der Punktmuster das Behauptete nachweisen kann. Die geometrische Interpretation von arithmetischen Sachverhalten (und umgekehrt) ist dabei nicht als ein trivialer Akt anzusehen; auch muss hier das Problem der Explizierung der Allgemeingültigkeit (im Falle der generischen Punktmusterbeweise) mitbedacht werden, denn diese Explizierung muss in gewisser Weise in einer „Sprache der Punktmuster" erfolgen, in der von Punktreihen, Ecken, Einteilungen etc. die Rede ist, und dies setzt dabei wiederum eine gewisse Art von Sprachschulung voraus. Die Verwendung von Punktmusterdarstellungen in Beweisen kann diese für den Leser verständlicher oder auch unverständlicher machen. Hier ist der (semiotische) Aspekt des kollateralen Wissens (s. Abschnitt 2.5) anzuführen, das Wissen, das benötigt wird, um im Rahmen eines Darstellungssystems mit den Diagrammen agieren und die Resultate interpretieren zu können. Auch das Darstellungssystem der Punktmuster ist nicht aus sich heraus „anschaulich“ oder „verständlich“, das Umgehen damit muss geübt werden (vgl. hierzu Abschnitt 8.3.5).

Schließlich sei bereits an dieser Stelle auf den Aspekt der Anschaulichkeit und der angeblich daraus vermuteten Eignung für die Schulmathematik eingegangen. Der Aspekt der Anschaulichkeit wird in Abschnitt 8.3.5 erörtert. Ein Ergebnis wird dabei sein, dass Anschauungsmittel weder selbstevident noch selbsterklärend sind, sondern zunächst erworben werden müssen (vgl. Jahnke 1984). Es scheint dabei aber ein natürlicher ‚Reflex‘ der Studierenden zu sein, etwas ‚Anschauliches‘ als positiv für den schulischen Mathematikunterricht zu bewerten. Kritisch muss natürlich angemerkt werden, wie die Studierenden diese Beweisformen als geeignet für die Schulmathematik bewerten können, wenn sie selbst verschiedene Probleme mit dieser Beweisform haben (vgl. hierzu auch die Ergebnisse der Analyse der Klausurbearbeitungen in Abschnitt 5.4.2.3).

Bezüglich der Gütekriterien dieser Teilstudie muss in Bezug auf die Validität der Beweisbewertungen anhand der Aspekte ‚Überzeugung‘, ‚Erklärungsqualität‘, ‚Sicherung der Gültigkeit‘ und ‚Adäquatheit für den schulischen Mathematikunterricht‘ angemerkt werden, dass es dem individuellen Verständnis der Probanden geschuldet ist, wie sie diese Kategorien (etwa „erklären“, „überzeugen“, …) verstehen. Eine (theoretische) Elaboration dieser Konzepte für die Studierenden war im Rahmen dieser Studie nicht möglich. Um eine möglichst große Objektivität zu gewährleisten, wurden an den entsprechenden Stellen der Auswertung und Ergebnisdarstellung die Originalzitate der Studierenden angebracht.

Da es sich bei diesem Forschungsprojekt um eine Fallstudie handelt, geht es bei diesen Ergebnissen nicht um eine zu erzielende Verallgemeinerbarkeit der Resultate. Vielmehr standen die Darstellung möglicher Wahrnehmungen verschiedener Beweisformen und das Herausarbeiten von Belegen und Begründungen für die Existenz dieser Wahrnehmungen im Forschungsinteresse. Vor dieser Zielsetzung lässt sich dieses Projekt als explorative Forschung verstehen, die neben den erzielten Ergebnissen auch Anhaltspunkte für die weitere Erforschung der Thematik ‚Beweisakzeptanz‘ bietet.

5.4.2.3 Analyse der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14

Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Die Beweisproduktionen der Studierenden zum generischen Beweis mit Zahlen und zum formalen Beweis in der Modulabschlussklausur wurden bereits im Wintersemester 2012/13 ausgewertet. Mit der Analyse der Klausurbearbeitungen im Wintersemester 2013/14 sollte wiederum überprüft werden, ob die vorgenommenen Modifikationen der Lehrveranstaltung in die gewünschte Richtung wiesen. Auch stellte sich durch die Hinzunahme der Punktmusterbeweise die Frage, wie die Beweiskonstruktionen der Studierenden im Diagrammsystem der Punktmuster ausfallen würden. Dabei ist allerdings ein Vergleich der Ergebnisse der Beweisaufgaben in der Modulabschlussklausur der Jahrgänge 2012/13 und 2013/14 nur bedingt möglich; durch die Hinzunahme der Punktmusterbeweise musste in diesem Jahrgang eine (neue) Behauptung ausgewählt werden, die mithilfe aller vier Beweisformen der Lehrveranstaltung ‚gut‘ bewiesen werden konnte.

Die Leitfragen zur Auswertung der Studie lauteten somit:

- Leitfrage zur Auswertung [14]: Wie gut gelingen den Studierenden die Beweiskonstruktionen in der Modulabschlussklausur, wenn sie aufgefordert werden, (a) einen generischen Beweis mit Zahlen, (b) einen formalen Beweis (mit Mitteln der Algebra), (c) einen generischen Beweis mit Punktmustern und (d) einen Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen zu konstruieren.
- Leitfrage zur Auswertung [15]: Welche Unterschiede können bei den Ergebnissen aus dem Wintersemester 2013/14 zu denjenigen aus dem Vorjahr festgestellt werden?

Für die Beantwortung dieser Fragen wurde eine Aufgabe in der Modulabschlussklausur gestellt, in der eine Behauptung mit den vier verschiedenen Beweisformen der Vorlesung bewiesen werden sollte. Die Aufgabe, verbunden mit ihren Anforderungen, wird im folgenden Abschnitt näher dargestellt.

Dabei muss angemerkt werden, dass sich die Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden in den Modulabschlussklausuren der Wintersemester 2012/13 und 2013/14 auf Grund verschiedener Faktoren nur bedingt miteinander vergleichen lassen, zumal in den jeweiligen Aufgaben auch unterschiedliche Behauptungen bewiesen werden sollten (s.o.); auch wurde für die Ergebnisse aus dem Wintersemester 2012/13 auf die Bedeutung der jeweiligen Operationalisierung von Teilbarkeit hingewiesen. Allerdings können die Ergebnisse einen vorsichtigen Aufschluss darüber zulassen, ob die Veränderungen der Lehrveranstaltung in eine ‚richtige' Richtung zu weisen scheinen.

Aufgabe und Aufgabenanalyse

Die in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14 gestellte Aufgabe 2 lautet:

> Wir betrachten die folgende Behauptung:
> *Die Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.*
>
> Beweisen Sie die Behauptung mit:
> (a) einem generischen Beweis mit Zahlen
> (b) einem formalen Beweis mit Mitteln der Algebra
> (c) einem generischen Punktmusterbeweis
> (d) einem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen.

Es ist hierbei anzumerken, dass Interaktionseffekte zwischen den verschiedenen Beweisen für die gleiche Behauptung nicht auszuschließen sind, die im Rahmen dieser Studie auch nicht kontrolliert werden können. Trotz möglicher Interaktionseffekte scheint aber eine Vergleichbarkeit der verschiedenen Beweiskonstruktionen der Studierenden bei einer Behauptung eher angebracht zu sein, als wenn die vier Beweisformen jeweils zu unterschiedlichen Behauptungen hätten konstruiert werden sollen. Insofern lässt sich dieses Untersuchungsdesign wohl als ‚kleineres Übel' legitimieren.

Innerhalb des ersten Kapitels der Lehrveranstaltung wurden Teilbarkeitsfragen bzgl. der Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen betrachtet. Die Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch drei wurde in der Vorlesung mit allen der vier genannten Beweismöglichkeiten nachgewiesen. Diese galt es nun auf die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen zu übertragen, wobei nun nicht die Teilbarkeit durch 6 gezeigt werden sollte, sondern dass diese Summe ungerade ist, i.e., dass sie nicht (ohne Rest) durch zwei teilbar ist.

Im Folgenden werden verschiedene **Lösungsmöglichkeiten für die vier Beweisarten** dargestellt, die auf dem in der Lehrveranstaltung vermittelten Wissen basieren:

Generischer Beweis mit Zahlen, Variante (1)

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ist ungerade.
$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ ist ungerade.

In jeder Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind immer (genau) drei ungerade Zahlen, deren Summe ungerade ist. Addiert man dazu die drei geraden Zahlen so bleibt das Ergebnis immer ungerade.

Generischer Beweis mit Zahlen, Variante (2)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 1 + (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) + (1 + 4) + (1 + 5) = 6 \cdot 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 4 + (4 + 1) + (4 + 2) + (4 + 3) + (4 + 4) + (4 + 5) = 6 \cdot 4 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

In den Beispielen wird deutlich, dass man jede Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer schreiben kann als „$6 \cdot \mathit{Ausgangszahl} + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$“. Der erste Summand ist dabei immer eine gerade Zahl und der zweite immer die ungerade Zahl 15. Da die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, wird das Ergebnis immer eine ungerade Zahl sein.

Generischer Beweis mit Zahlen, Variante (3)

Wir betrachten die folgenden Beispiele:

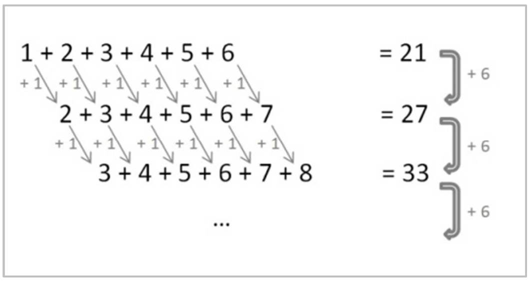


Abbildung 41: Generische Zahlenbeispiele zu der Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen

Die erste Summe ist ungerade. Man sieht in den Beispielen, dass, wenn man den Startwert um 1 erhöht, sich die Summe um 6 (gerade Zahl) vergrößert. Also werden zu der ungeraden Ausgangssumme immer Vielfache von 6, also gerade Zahlen, addiert, um weitere Summen von anderen 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu erhalten. Auf diese Art können alle möglichen Summen von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen erzeugt werden. Da die Summe aus einer ungeraden Zahl und einer geraden Zahl immer ungerade ist, wird das Ergebnis - und damit das Ergebnis dieser Summen - immer ungerade sein.

Formaler Beweis:

Sei $n \epsilon N$ beliebig aber fest. (Auch zugelassen: Für alle $n \epsilon \mathbb{N}$ gilt:)
Dann gilt: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 6n + 15$

Variante 1: ... $6n$ ist eine gerade Zahl. Da die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist (Satz der Vorlesung), ist das Ergebnis immer ungerade.

Variante 2: ... $= 2(3n + 7) + 1 = 2q + 1$ mit $q := 3n + 7 \epsilon \mathbb{N}$. Also ist das Ergebnis nach Satz 1.3 ungerade.

Variante 3: ... $= 2(3n + 7) + 1$. Da $(3n + 7) \epsilon \mathbb{N}$ ist die Summe nach Def. 1.1 nicht durch 2 teilbar, also ungerade.

Variante 4: ... $= 2(3n) + 15$. Da $(3n) \epsilon \mathbb{N}$ ist $2(3n)$ nach Satz 1.3 gerade (bzw. nach Def. 1.1’ durch 2 teilbar und somit gerade). Da 15 eine ungerade Zahl ist und diese zu der geraden Zahl addiert wird, ist die Summe insgesamt ungerade.

Bei den Punktmusterbeweisen kann die Eigenschaft „ungerade“ durch Aufteilungen der Punktmuster im Sinne der Grundvorstellungen „Aufteilen“ und „Verteilen“ nachgewiesen werden. Eine Lösungsmöglichkeit für den generischen Punktmusterbeweis wäre:

Generischer Beweis am Punktmuster:

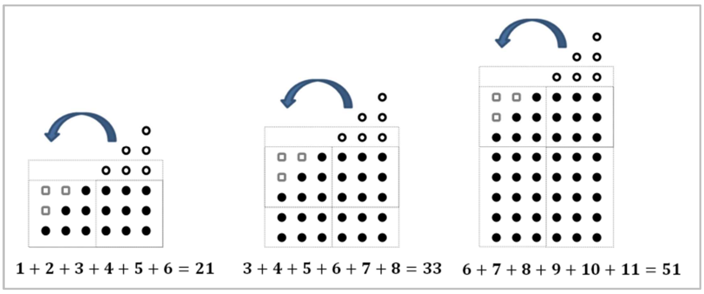


Abbildung 42: Generische Punktmusterbeispiele zu der Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen

Man sieht in den Beispielen, dass - unabhängig von der Startzahl - bei der Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen „oben“ immer ein Dreieck entsteht; im unteren Bereich entstehen immer sechs gleich lange Säulen, die man in zwei gleich große Bereiche einteilen kann. Das obere Dreieck kann man immer so umstrukturieren, dass zwei gleich große Bereiche entstehen, wobei aber immer drei Punkte übrigbleiben. Somit ist die Gesamtsumme nie durch 2 teilbar.

Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen:

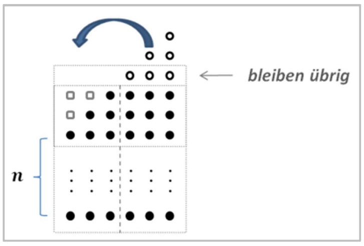


Abbildung 43: Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen zu der Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen

Datenauswertung

Im Rahmen der Pilotierung der Eingangsbefragung im Wintersemester 2013/14 wurde ein Kategoriensystem für die Erfassung von Begründungskompetenz entwickelt (Abschnitt 3.3.1). Dieses Kategoriensystem wurde auch für die Analyse der Beweisproduktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur verwendet. Durch den Einbezug der Punktmusterbeweise musste dieses Kategoriensystem um weitere Erläuterungen (bzw. Spezifizierungen) ergänzt werden. Das Kategoriensystem und die Spezifizierungen hinsichtlich der Punktmusterbeweise werden in der Tabelle 19 dargestellt.

Alle Beweisproduktionen der Studierenden wurden doppelt kodiert. Bei einer anschließenden Kodierkonferenz (im Sinne von Mayring 2010, S. 604) wurde bei Nichtübereinstimmung der Bewertungen das jeweilige Beweisprodukt noch einmal gemeinsam von beiden Bewertenden betrachtet. Im Falle einer offensichtlichen Fehlkodierung wurde diese korrigiert, ansonsten blieben die unterschiedlichen Bewertungen bestehen. Die Interrater-Reliabilitäten bzgl. der Kategorien sind bei allen Beweisformen in einem guten bis sehr guten Bereich. Die exakten Werte werden in der Tabelle 20 angegeben.

Bezeichnung	Erläuterung	Ergänzungen für den Kontext der Punktmusterbeweise
n.b.	Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet	--- *keine Ergänzungen* ---
Empirisch	In der Bearbeitung findet ausschließlich eine induktive Prüfung der Behauptung statt.	--- *keine Ergänzungen* ---
Pseudo	In der Bearbeitung wird die Behauptung paraphrasiert oder es werden falsche bzw. irrelevante Fakten genannt.	Hierzu gehören weiter alle Bearbeitungen in denen die Punktmuster so dargestellt werden, dass keine nutzbare geometrische Struktur erkennbar ist.
Fragmentarisch	Es werden korrekte und relevante fachliche Aspekte genannt, ohne dass eine Argumentationskette aufgebaut wird.	Hierzu gehören weiter alle Bearbeitungen, in denen die Punktmuster willkürlich so zusammengestellt werden, dass eine sinnvolle und nutzbare Anordnung entsteht.
Argumentation mit Lücke	Es wird eine Argumentationskette mit korrekten und relevanten fachlichen Aspekten aufgebaut, die allerdings eine Lücke enthält.	Hierzu gehören weiter alle Bearbeitungen, in denen die Punktmuster nachvollziehbar zusammengefügt werden, sodass eine sinnvolle und nutzbare Anordnung entsteht.
Vollständige Argumentation	Die Behauptung wird mithilfe korrekter Argumente vollständig verifiziert.	--- *keine Ergänzungen* ---

Tabelle 19: Kategorienschema für die vergleichende Analyse der Beweiskonstruktion der Studierenden zu den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14)

Kategorienschema zu der Beweisform…	Interrater-Reliabilität Cohens Kappa
generischer Beweis mit Zahlen	0,804
algebraischer Beweis	0,823
generischer Punktmusterbeweis	0,783
Punktmusterbeweis mit geometr. Variablen	0,756

Tabelle 20: Interrater-Reliabilitäten (Cohens Kappa) bzgl. Kategorisierungen der vier Beweisformen in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2013/14

Für die Auswertung der Daten wird eine ordinale Skala zugrunde gelegt, damit ein Vergleich der Ergebnisse der Jahrgänge 2012/13 und 2013/14 möglich wird und eventuelle Verteilungsverschiebungen interpretiert werden können.

Ergebnisse:

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [14]: Wie gut gelingen den Studierenden die Beweiskonstruktionen in der Modulabschlussklausur, wenn sie aufgefordert werden, (a) einen generischen Beweis mit Zahlen, (b) einen formalen Beweis (mit Mitteln der Algebra), (c) einen generischen Beweis mit Punktmustern und (d) einen Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen zu konstruieren.

Die Ergebnisse bzgl. der Kategorisierungen der Beweiskonstruktionen der Studierenden werden in der Abbildung 44 dargestellt.

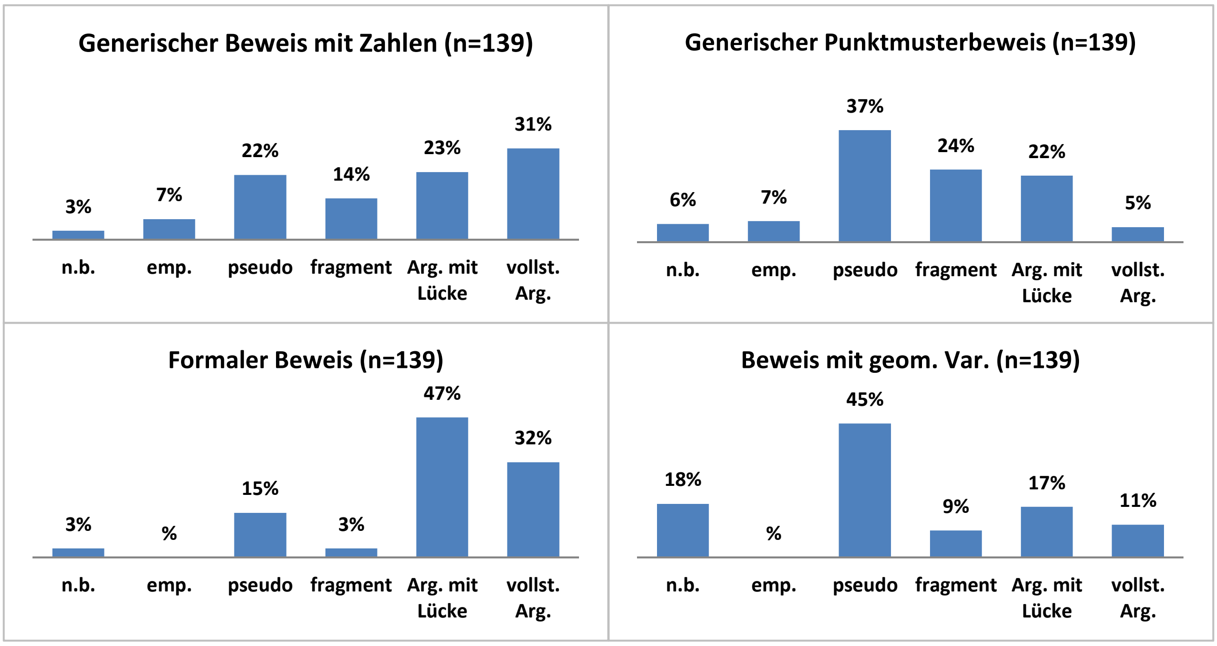


Abbildung 44: Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14

Bei der Konstruktion des generischen Beweises wurden in 54% aller Bearbeitungen korrekte Argumentationsketten aufgebaut („Arg. mit Lücke“ + „vollst. Argumentation“) und insgesamt konnten 31% aller generischen Beweise mit Zahlen als vollständige Argumentation gewertet werden. Gut der Hälfte der Studierenden gelingt somit eine Argumentation im Kontext dieser Beweisform. Dagegen ist auffällig, dass der Anteil von Pseudoantworten mit 22% noch relativ hoch ausfällt.

Deutlich besser gelingt den Studierenden dagegen die Konstruktion des formalen Beweises (mit Mitteln der Algebra): Insgesamt wurden in 79% der Bearbeitungen korrekte Argumente benannt und 32% wurden als vollständige Argumentationen bewertet.

Problematisch erscheinen dagegen die Ergebnisse bzgl. der Punktmusterbeweise. Davon abgesehen, dass hier der Anteil der Studierenden am höchsten ist, die diese Beweiskonstruktion überhaupt nicht versuchen, erreichen nur 5% im Fall des generischen Beweises und 11% bei dem Beweis mit geometrischen Variablen eine vollständige Argumentation. Es lässt sich festhalten, dass den Studierenden eine Argumentation im Diagrammsystem der Punktmuster nur bedingt gelingt. Dabei fallen in diesen Beweisen die hohen Anteile der Bearbeitungen mit Pseudo-Antworten besonders auf: 37% der Bearbeitungen beim generischen Punktmusterbeweis und 45% (!) bei dem Beweis mit geometrischen Variablen.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [15]: Welche Unterschiede können bei den Ergebnissen aus dem Wintersemester 2013/14 zu denjenigen aus dem Vorjahr festgestellt werden?

In der Abbildung 45 werden diese Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen zum formalen Beweis und zum generischen Beweis mit Zahlen der Jahrgänge 2012/13 und 2013/14 vergleichend dargestellt. Hierbei zeigt sich bei beiden Beweisformen eine deutliche Verschiebung hin zu höheren Kategorien: Während in beiden Beweisen die Anteile der Pseudoantworten zurückgehen, nehmen die Anteile der Bearbeitungen mit „Argumentation mit Lücke“ und „vollständige Argumentationen“ deutlich zu.

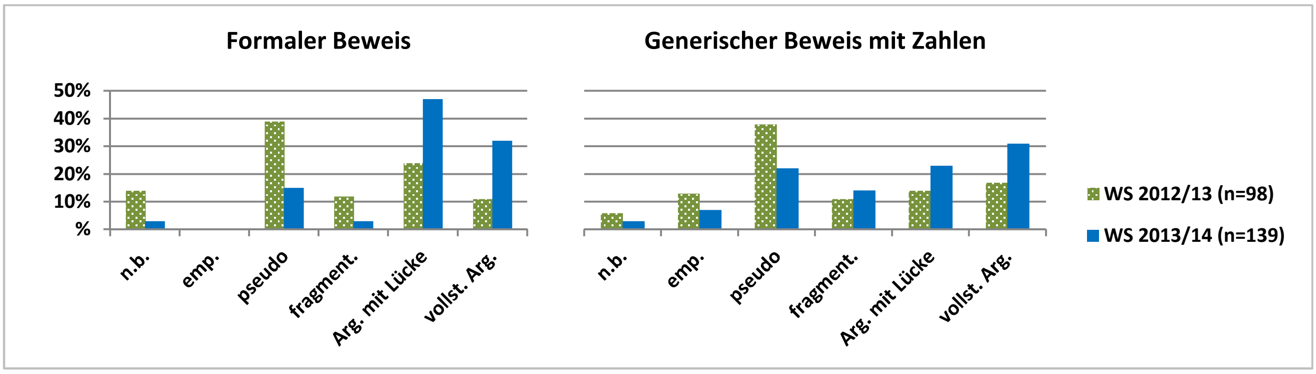


Abbildung 45: Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden zum formalen Beweis (links) und zum generischen Beweis mit Zahlen (rechts) in den Wintersemestern 2012/13 und 2013/14

Diskussion der Ergebnisse

Das Ergebnis, dass es bei der Konstruktion des generischen Beweises mit Zahlen nur ca. der Hälfte der Studierenden gelang, eine Argumentationskette aufzubauen („Arg. mit Lücke“ + „vollst. Argumentation“), zeugte von den immer noch existierenden Problemen der Studierenden mit dem Konzept des generischen Beweises. Nur insgesamt 31% der Studierenden erreichten eine „vollständige Argumentation“ mit ihrem generischen Beweis mit Zahlen. Dies ließ sich dahin gehend deuten, dass die geforderte Explizierung der Argumentation und ihrer Allgemeingültigkeit für die Studierenden noch immer eine Hürde darstellt.

Am besten fielen in dieser Untersuchung die Ergebnisse zum formalen Beweis aus: 79% der Bearbeitungen beinhalteten korrekte Argumentationen, wobei nur 32% als „vollständige Argumentationen“ bewertet werden. Der hohe Anteil der Bearbeitungen „Argumentation mit Lücke“ resultiert hierbei zum einen aus Fehlern bei der Definition der Variablen und zum anderen aus einer lückenhaften Begründung am finalen algebraischen Term, warum dieser ungerade ist.

Bei den Punktmusterbeweisen ließ der erhöhte Anteil der Nicht-Bearbeitungen auf ein grundlegendes Verständnisproblem der Studierenden im Umgang mit dem Punktmuster schließen. Hiervon zeugte auch der hohe Anteil der Pseudoargumentationen. Der geringe Anteil von „vollständigen Argumentationen“ bei dem generischen Punktmusterbeweis ließ deutlich werden, wie schwer es den Studierenden anscheinend fiel, in dem Diagrammsystem der Punktmuster zu arbeiten und schließlich ihre Argumentation in einer ‚Sprache der Punktmuster‘ zu explizieren. Der Anteil der vollständigen Argumentationen beim Beweis mit geometrischen Variablen fiel dementsprechend etwas besser aus, da hier keine narrative Begründung erforderlich war.

Bei dem Vergleich der Ergebnisse aus den Wintersemestern 2012/13 und 2013/14 wurden bereits oben einige relativierende Anmerkungen gemacht. Insgesamt kann aber festgehalten werden, dass die Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2013/14 ‚besser‘ ausfallen als in dem vorherigen Durchgang. Dieses Resultat soll an dieser Stelle als ein vorsichtiger Beleg dafür gewertet werden, dass die vorgenommenen Modifikationen der Lehrveranstaltung positive Auswirkungen auf die Beweiskonstruktionen der Studierenden haben.

5.4.3 Retrospektive Analyse der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung

Für die retrospektive Analyse der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung wurden vier zentrale Bereiche ausgemacht: (1) die anscheinend anhaltende Gleichsetzung des Beweisbegriffs mit der Beweisform des formalen Beweises auf Seiten der Studierenden, (2) die Verständnisschwierigkeiten, die die Studierenden mit dem Konzept generischer Beweise zu haben scheinen, und (3) der defizitäre Umgang der Studierenden mit dem Diagrammsystem der Punktmuster. (4) Darüber hinaus erschien es noch als offene Frage, welches Konzept ‚formaler Beweise' den Studierenden vermittelt werden, und worin sich dieses explizit von den anderen Beweisformen unterscheiden sollte.

(1) Zur anscheinend anhaltenden Gleichsetzung des Beweisbegriffs mit der Beweisform des formalen Beweises

Im Rahmen der durchgeführten Interviewstudie (Abschnitt 5.4.2.2) wurde deutlich, dass die Studierenden mit der Formulierung „Beweisen Sie…" noch immer ein formales Vorgehen zu verbinden schienen. Dieses Ergebnis war in gewisser Weise konträr zu dem Ziel der Lehrveranstaltung, die dort verwendeten vier Beweisformen den Studierenden als prinzipiell gleichwertige Instrumente der Verifikation zu vermitteln, auch wenn der Nutzen und der Mehrwert der algebraischen Symbolsprache gleichzeitig herausgestellt werden sollte.

(2) Zu den Verständnisschwierigkeiten, die die Studierenden mit dem Konzept eines generischen Beweises zu haben scheinen

Ein weiteres Ergebnis der durchgeführten Interviewstudie war die Erkenntnis, dass zumindest einige Studierende das Konzept des generischen Beweises nicht vollständig verstanden zu haben schienen, und auch nach der Konstruktion korrekter generischer Beweise noch Zweifel auf einer logischen und einer psychologischen Ebene auszumachen waren (Abschnitt 5.4.2.2). Entsprechend sollten die Maßnahmen weiterhin verstärkt werden, generische Beweise prominent in der Lehrveranstaltung zu platzieren und zu erörtern. Darüber hinaus sollte das Konzept einer ‚Beweisakzeptanz' auch quantitativ erforscht und theoretisch fundiert werden.

(3) Zu dem defizitären Umgang der Studierenden mit dem Diagrammsystem der Punktmuster

Die Analyse der Beweiskonstruktionen in der Modulabschlussklausur (Abschnitt 5.4.2.3) belegte die Probleme, die die Studierenden bei der Arbeit mit dem Diagrammsystem der Punktmuster hatten. Der relativ hohe Anteil von Studierenden, der die entsprechenden Beweiskonstruktionen der Klausur gar nicht erst versuchte, und der sehr hohe Anteil von Pseudobegründungen ließen deutlich werden, dass einem Großteil der Studierenden der Umgang mit den Punktmusterdarstellungen nicht deutlich geworden war. Dieses Ergebnis war durchaus überraschend, da die Punktmusterdarstellungen als ‚Hilfe' für die Studierenden gedacht waren. Dieses Phänomen galt es sowohl empirisch wie auch theoretisch weiter zu beforschen.

(4) Zu dem Konzept ‚formaler Beweise' in der Lehrveranstaltung

Als offene Frage blieb zu dem Zeitpunkt der retrospektiven Analyse der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung, was genau den Studierenden unter dem Konzept ‚formaler Beweise' vermittelt werden soll. Diese Frage wurde in Vorbereitung der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung beantwortet (siehe Abschnitt 5.4.4).

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive des „diagrammatischen Schließens“

Der Aspekt der Gleichsetzung des Beweisbegriffs mit der Beweisform des formalen Beweises kann unter dieser semiotischen Perspektive auf ein Verständnis zurückgeführt werden, dass der Akt des Beweisens im Diagrammsystem der Algebra vollführt werden müsse, da nur hier ‚gültige‘ Beweise konstruiert werden könnten. Entsprechend würde es entsprechend gelten, diese Fehlvorstellung zu thematisieren und klarzustellen, dass zunächst prinzipiell für den Akt der Verifikation die in der Lehrveranstaltung verwendeten Diagrammsysteme als gleichwertig zu beachten sind (vgl. Abschnitt 2.5.4).

Die (psychologische und logische) Akzeptanz generischer Beweise resultiert unter der Perspektive des diagrammatischen Schließens aus der Erkenntnis, dass die vorgenommenen allgemeingültigen Transformationen die Gültigkeit der Verifikation sichern und nicht die dabei verwendeten Zeichen. Bei den generischen Beweisen wird in der Lehrveranstaltung bereits (als Norm) gefordert, dass diese allgemeingültigen Transformationen expliziert werden müssen. Wie aber bereits bei der Beforschung dieser Thematik deutlich geworden ist, scheint gerade in der Explizierung dieser Transformationen und ihrer Allgemeingültigkeit ein Problem für die Studierenden zu liegen. Dabei scheinen sich sprachliche Probleme und ein Verständnis um die Benennung und Bewertung entsprechender Transformationen gegenseitig zu bedingen.

Auch für den Umgang mit Punktmusterdarstellungen ist das Vorhandensein eines entsprechenden kollateralen Wissens eine notwendige Voraussetzung. Der Agierende muss wissen, wie mathematische Sachverhalte in das Diagrammsystem der Punktmuster übersetzt werden können, wie mit diesen konstruierten Diagrammen umzugehen ist (i.e., welche Transformationen an diesem durchzuführen sind) und wie schließlich das Nachzuweisende in der Punktmusterdarstellung zu erreichen ist. Somit galt es, gezielt kollaterales Wissen für das Diagrammsystem der Punktmuster zu vermitteln und, damit verbunden, stärker eine Praxis des Umgangs mit Punktmusterdarstellungen zu etablieren.

Erörterung der Ergebnisse unter der Perspektive „sozio-mathematischer Normen“

Für die Gleichsetzung des Beweisbegriffs mit der Beweisform des formalen Beweises stellt sich die Frage, wie dieser (implizit) vorliegenden Norm entgegengewirkt werden kann. Nach der Konzeption der Lehrveranstaltung soll der Beweisbegriff offen für alternative Beweisformen sein, wie etwa für generische Beweise. Diese sozio-mathematische Norm muss folglich im Rahmen der Lehrveranstaltung deutlicher vertreten werden. Auch stellt sich die Frage, in welchen Kontexten diese (implizite) Norm der Konstruktion formaler Beweise und der Verwendung von Buchstabenvariablen, wenn nach Beweisen gefragt ist, herausgebildet wurde.

Die persönliche Akzeptanz der generischen Beweise auf Seiten der Studierenden und der Umgang mit dem Diagrammsystem der Punktmuster erscheinen nicht als Aspekte sozio-mathematischer Normen. Dagegen ist die Frage danach, welches Konzept des Studierenden für die Beweisform des ‚formalen Beweises‘ vermittelt werden sollte, auch aus dieser Perspektive bedeutsam. Dabei stellt sich die Frage, welche Normen Studierenden bei der Konstruktion von formalen Beweisen etwa im Hinblick auf ‚Vollständigkeit‘ und ‚Formalität‘ einhalten sollen. Diese normativen Aspekte tangieren dabei Charakteristika wie Strenge, Argumentationsbasis und Darstellung, was dabei auch ein gewisses Maß an Axiomatik innerhalb der Lehrveranstaltung implizieren würde.

Abgleich mit der intentionalen Dimension der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung

Insgesamt betrachtet, hat der stärkere Einbezug von Punktmusterdarstellungen noch nicht zu den intendierten Ergebnissen geführt. Die Punktmusterdarstellungen scheinen zu diesem Zeitpunkt den Studierenden noch mehr als Lerngegenstand denn als Hilfe zu begegnen.

Die Vorteile, die die Studierenden dem formalen Beweis in Bezug auf eine höhere Allgemeingültigkeit, Richtigkeit und Vollständigkeit zusprechen (Abschnitt 5.4.2.1), könnten einem defizitären Verständnis von generischen Beweisen geschuldet sein. Es ist daher eine offene Frage, inwiefern die Studierenden die Verwendung der fachmathematischen Symbolsprache als sinnvoll und nützlich bewerten und worin sie konkret die verschiedenen Vor- und Nachteile der verschiedenen Beweisformen sehen. Auch wenn in der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung generische Beweise stärker als bisher in den Fortgang der Vorlesung und in die Übungsaufgaben integriert wurden, scheint sich ihre Akzeptanz bei den Studierenden im Vergleich zum formalen Beweis nicht sonderlich gesteigert zu haben.

Schließlich konnte mithilfe des Vergleichs der Beweiskonstruktionen der Studierenden in den Modulabschlussklausuren der Wintersemester 2012/13 und 2013/14 die Vermutung gestützt werden, dass die vorgenommenen Modifikationen der Lehrveranstaltung in die richtige Richtung wiesen. Somit kann festgehalten werden, dass das vor der Durchführung der Lehrveranstaltung formulierte Ziel, dass die Studierenden das Konzept generischer Beweise besser durchdringen und sich damit ihre Beweiskonstruktionen verbessern sollen, in Bezug auf den generischen Beweis mit Zahlen erreicht wurde.

5.4.4 Veränderungen bei der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Die vierte Durchführung der Lehrveranstaltung wird im sechsten Kapitel der vorliegenden Arbeit gesondert dargestellt. In dem vorliegenden Abschnitt werden die Modifikationen beschrieben, wie sie im Übergang von der dritten zur vierten Durchführung vorgenommen wurden und somit schließlich zu der in dieser Arbeit betrachteten ‚finalen' Version der Lehrveranstaltung führten. Da die vorgenommenen Modifikationen aus den Erkenntnissen resultieren, die im Rahmen des fünften Kapitels dargelegt wurden, wird mit diesem Abschnitt das Kapitel 5 abgeschlossen.

Die in der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung vorgenommenen Veränderungen lassen sich auf der Vorlesungsebene in vier Aspekten zusammenfassen: (1) die Konkretisierung des Konstrukts „formaler Beweis", welche zu einer neuen Strukturierung (Definitionen und Sätze) der fachlichen Inhalte und der Thematisierung und Exaktifizierung der Inhalte „Nicht-Teilbarkeit" „gerade und ungerade Zahlen" führte; (2) die sprachliche Angleichung der Begrifflichkeiten zu den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung; (3) die verstärkte Integration von explorativen Anteilen in die Vorlesung und (4) die konsequente Verwendung aller vier Beweisformen in der Vorlesung. Die Veränderungen im Kontext der Übungsaufgaben betreffen weiter (5) die stärkere Integration von explorativen Übungsanteilen, (6) die Verwendung von neuen Aufgabenformaten, sogenannter „multiple proof tasks" und (7) Beweisaufgaben, in denen den Studierenden die Wahl der Beweisform freigestellt wurde. Diese Aspekte werden im Folgenden kurz ausgeführt; deren konkrete Umsetzung wird im Rahmen der Darstellung der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung in Kapitel 6 beschrieben.

Modifikationen im Kontext der Vorlesung

(1) Die Konkretisierung des Konstrukts „formaler Beweis" und die daraus resultierenden Änderungen in der Vorlesung

Für das Konzept des „formalen Beweises" wurde entschieden, dass neben der Verwendung der fachmathematischen Symbolsprache der explizite Bezug auf eine ‚sichere' Argumentationsbasis (hier in Form von Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen) und damit verbunden das Einhalten geforderter ‚Strenge beim Beweisen' deutlicher herausgestellt werden müsse. Somit sollte einmal der Aspekt der „Sicherung der Gültigkeit" in (formalen) Beweisen betont werden. Außerdem wurde so die in Abschnitt 4.3.1 herausgearbeitete didaktische Forderung umgesetzt, dass bei der Konstruktion formaler Beweise stets die Abhängigkeit der verwendeten Argumente zu vorherigen Beweisen betont werden soll. Diese Betrachtungsweise führte dazu, dass alle notwendigen Definitionen und Sätze im Kontext der Lehrveranstaltung explizit formuliert und für die entsprechende Referenz in Beweisen nummeriert werden mussten. Für die Beweise entsprechender Teilbarkeitsaussagen wurde es notwendig, auch ‚Nicht-Teilbarkeit' und die Eigenschaften ‚gerade' und ‚ungerade' genauer zu thematisieren und nun auch explizit in Form von Definitionen und Sätzen bereitzustellen. Auch mussten diese Inhalte für das Diagrammsystem der Punktmuster aufbereitet werden.

(2) Die sprachliche Angleichung der Begrifflichkeiten zu den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung

In Anlehnung an die formalen Beweise der Algebra wurde im Diagrammsystem der Punktmuster in den Wintersemestern 2012/13 und 2013/14 von formal-geometrischen Beweisen gesprochen, wenn in Punktmusterbeweisen geometrische Variablen verwendet wurden. Durch die Konkretisierung des Konzepts formaler Beweise (s.o.) wurden allerdings die Unterschiede dieser Beweisform zu den sogenannten formal-geometrischen Beweisen deutlich, wodurch eine sprachliche Anlehnung in gewisser Weise hinfällig wurde. Durch die Umbenennung dieser Beweisform zu „Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen" waren nun die vier Bezeichnungen geprägt, die im Kontext der gesamten Lehrveranstaltung des Wintersemesters 2014/15 durchgehalten wurden: „generischer Beweis mit Zahlen", „generischer Beweis mit Punktmustern", „formaler Beweis" und „Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen".

(3) Die verstärkte Integration von Abschnitten zur Explorationen in die Vorlesung

Offensichtlich stellt es ein didaktisches Problem dar, freie und individuelle Exploration im Kontext einer Lehrveranstaltung zu initiieren, gerade dann, wenn der fachliche Fortgang einer Vorlesung auf bestimmte Ergebnisse aus diesem Prozess angewiesen ist. Dennoch war es ein grundlegendes Anliegen, den Prozesscharakter der Mathematik und damit einhergehend die Phase der Exploration und die Bildung und Überprüfung von Hypothesen noch stärker in den Gang der Vorlesung zu integrieren. Schließlich wird somit dem Leitprinzip Rechnung getragen, die Prozesshaftigkeit der Mathematik herauszustellen (vgl. Abschnitt 1.2.3). Aus diesem Grund wurde im ersten Kapitel ein neuer Abschnitt zur Exploration eingefügt, in dem die Studierenden selbst wahre und falsche Aussagen über gerade und ungerade Zahlen finden und formulieren sollten. Auch in das zweite Kapitel wurde ein Abschnitt eingefügt, in dem die Studierenden selbst die figurierten Zahlen der „Treppenzahlen" erforschen sollten (vgl. Abschnitt 6.2).

(4) Die konsequente Verwendung aller vier Beweisformen in der Vorlesung

Im Wintersemester 2013/14 war die Tatsache, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen immer durch 3 teilbar ist, mit einem generischen Beweis mit Zahlen, mit einem formalen Beweis und auch durch die beiden Punktmusterbeweise bewiesen worden. Im weiteren ‚Forschungsprozess' über die Teilbarkeitsfrage der Summe aufeinanderfolgender Zahlen wurden allerdings für die Verifikation einer Behauptung nur algebraische Mittel verwendet. Ausschließlich der Beweis des finalen Satzes wurde anhand einer generischen Idee entwickelt und diese Idee auch an Punktmustern verdeutlicht. Im Wintersemester 2014/15 wurden nun alle vier Beweisformen gleichberechtigt im Laufe des ersten und des zweiten Kapitels verwendet. Auf diese Weise sollten die Gültigkeit der verschiedenen Beweisformen betont und ihre Charakteristika und Vor- und Nachteile verdeutlicht werden.

Modifikationen im Kontext der Übungsaufgaben

(5) Die Integration von explorativen Anteilen in Übungsaufgaben

Der Aspekt von Exploration und dem Aufstellen von Vermutungen (bzw. Behauptungen) sollte auch im Kontext der Übungsaufgaben stärker betont werden. Aus diesem Grund wurde eine gesamte Präsenzübung der Erforschung der Quadratzahlen gewidmet (s. hierzu Abschnitt 6.3.1). Explorative Anteile wurden auch dadurch in Übungsaufgaben integriert, dass die zu beweisende Behauptung erst von den Studierenden anhand konkreter Beispiele selbst herausgefunden und formuliert werden musste (vgl. Abschnitt 6.3.2).

(6) Die Verwendung von neuen Aufgabenformaten, sogenannter „multiple proof tasks"

Für einen vergleichenden Umgang mit den vier Beweisformen der Veranstaltung und den verschiedenen Diagrammsystemen wurden den Studierenden Behauptungen gegeben, die sie mit allen vier Beweisformen beweisen sollten. Mit diesen so genannten „multiple proof tasks" sollten die Studierenden die Vor- und Nachteile der verschiedenen Beweisformen und der verschiedenen Diagrammsysteme und auch den Nutzen und die ‚Macht' des algebraischen Kalküls und somit der fachmathematischen Symbolsprache erfahren (vgl. Abschnitt 6.3.2). Auch ging es darum, zu allen in der Lehrveranstaltung verwendeten Diagrammsystemen eine Praxis des Umgangs damit zu erarbeiten.

(7) Beweisaufgaben, in denen den Studierenden die Wahl der Beweisform freigestellt ist

Schließlich wurden den Studierenden Behauptungen gegeben, zu deren Verifikation sie die Beweisform frei wählen konnten. Natürlich bieten sich je nach Behauptung unterschiedliche Beweisformen an, aber diese Entscheidung für eine Beweisform in einem bestimmten Diagrammsystem sollte von den Studierenden selbst getroffen werden. Auch galt es mit diesem Aufgabenformat, die Vor- und Nachteile der verschiedenen Beweisformen und Diagrammsysteme weiter herauszustellen (vgl. Abschnitt 6.3.2).

6. Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/2015

In diesem Kapitel wird das Konzept der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ beschrieben, wie sie nach drei Forschungszyklen im Wintersemester 2014/15 durchgeführt wurde. Ausgangspunkt der Beschreibungen ist die intentionale Dimension dieser letzten hier thematisierten Durchführung der Lehrveranstaltung, die sich als Summe der in Abschnitt 1.3 herausgestellten Leitprinzipien für die Gestaltung der Lehrveranstaltungen und der im Rahmen des fünften Kapitels entwickelten ‚lokalen' Intentionen für bestimmte Facetten der Lehrveranstaltung ergeben haben (6.1)[42]. Anschließend wird die Umsetzung dieser Intentionen im Rahmen der ersten beiden Kapitel der Vorlesung (6.2), des Übungsbetriebs (6.3) und speziell in der Zentralübung (6.4) beschrieben. Die Beforschung dieser Durchführung der Lehrveranstaltung wird als ‚Effektivitätsstudie' im Rahmen des siebten Kapitels dargestellt, in dessen Anschluss die retrospektive Analyse der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung erfolgt.

Im Wintersemester 2014/15 bestand die Lehrveranstaltung wöchentlich, wie auch in den vorherigen Durchgängen, aus einer Vorlesung (1,5 h), einer Präsenzübung (eine anderthalbstündige Kleingruppenübung mit ca. 30 Studierenden, in der Präsenzaufgaben bearbeitet wurden) und einer nicht verpflichtenden Zentralübung, in der die wöchentlichen Hausaufgaben besprochen wurden.

6.1 Die intentionale Dimension der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Das Grundanliegen der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ besteht darin, Erstsemesterstudierende des Lehramts Mathematik für Haupt-, Real- und Gesamtschulen in die Mathematik der Hochschule bzw. in die dortige ‚Kultur der Mathematik' einzuführen. In diesem Sinne wird diese Veranstaltung als Brückenkursveranstaltung verstanden, die den Studierenden den Übergang von der Schule zur Hochschule erleichtern soll. Ein inhaltlicher Schwerpunkt wird dabei auf die Domäne ‚Begründen und Beweisen' unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität gelegt (vgl. Kapitel 1).

Im Rahmen des ersten Kapitels dieser Arbeit wurden verschiedene ‚globale' Leitprinzipien für die Konstruktion der Lehrveranstaltung herausgearbeitet, die hier gleichsam als Intentionen betrachtet werden können (vgl. Abschnitt 1.3):

Leitprinzipien aus dem Phänomen der doppelten Diskontinuität

(1) Anknüpfen an schulische Vorerfahrungen
(2) Akzeptanz und produktive Nutzung von schulischem Vorwissen
(3) Aufarbeitung des notwendigen Vorwissens
(4) Explizit-Machen der Unterschiede
(5) Einführen in die Arbeitsweisen der Hochschulmathematik
(6) Vorbereitung auf Erfordernisse im Lehrberuf
(7) Herstellen eines Schulbezugs

Leitprinzipien aus dem Ansatz ‚Elementarmathematik als Prozess'

(8) Einbezug von Elementarmathematik

[42] Um für die Leserin bzw. den Leser ein eigenständiges Lesen dieses Kapitels zu ermöglichen, seien an dieser Stelle gewisse Redundanzen zu den Betrachtungen in Kapitel 1 und Kapitel 5 erlaubt.

(9) Umgang mit nichtsymbolischen Darstellungen
(10) Verdeutlichen des Prozesscharakters der Mathematik
(11) Einbezug inhaltlich-anschaulicher Darstellungen
(12) Einbezug inhaltlich-anschaulicher Beweise
(13) Vermittlung von Meta-Wissen über Mathematik

Weitere Leitprinzipien

(14) Intellektuelle Ehrlichkeit
(15) Problemzentrierte Erarbeitung von Inhalten
(16) Vermittlung von Inhalten, die den Studierenden das Zurechtkommen in den folgenden Lehrveranstaltungen an der Universität erleichtern sollen
(17) Sinnstiftende Einführung und Verwendung der mathematischen Symbolsprache
(18) Vermittlung allgemeiner Heuristiken
(19) Vermittlung eines adäquaten Beweisverständnisses

Im Rahmen der Beforschung der ersten drei Durchführungen der Lehrveranstaltung (Kapitel 5) konnten verschiedene ‚lokale' Intentionen für die Lehrveranstaltung herausgearbeitet werden. Die folgenden Zielsetzungen gelten dabei auch für diese vierte Durchführung der Lehrveranstaltung:

(20) Den Studierenden soll der Unterschied zwischen bloßen Beispielbetrachtungen und generischen Beweisen deutlich werden.
(21) Die Studierenden sollen ein Verständnis für die Reichweite generischer Beweise entwickeln.
(22) Die Studierenden sollen dazu befähigt werden, die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung (formaler Beweis, generische Beweise (mit Zahlen und mit Punktmustern) und Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen) zu konstruieren.

Schließlich sei an dieser Stelle auf die in Abschnitt 4.3.1 herausgearbeiteten, in der Literatur ‚empfohlenen Aktivitäten' für das Erlernen der Beweisaktivität verwiesen.

6.2 Die Gestaltung der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Im Folgenden wird die Umsetzung der in Abschnitt 6.1 herausgestellten Intentionen im Rahmen der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung beschrieben, da nur diese, aufgrund des vorgenommenen Forschungsfokus', in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Auch wird angedeutet, an welchen Stellen die in Abschnitt 4.3.1 herausgearbeiteten ‚empfohlenen Aktivitäten' für das Erlernen der Beweisaktivität umgesetzt wurden. Dazu werden die Teile aus dem Skript von Rolf Biehler (2015) zitiert und zusammengefasst, die für das Nachvollziehen dieser Umsetzung nötig erscheinen. Für eine bessere Lesbarkeit und Verständlichkeit der Darstellung der Inhalte werden die Zitate aus dem Skript zu der Lehrveranstaltung in einer kleineren Schriftgröße und eingerückt niedergeschrieben, erläuternde Kommentare des Autors sind in der ‚normalen' Schriftgröße gesetzt. Das vollständige Skript zu den ersten beiden Kapiteln der Lehrveranstaltung befindet sich im Anhang.

Im ersten Kapitel wird ausgehend von der Eingangsfrage über die Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die Frage nach der Teilbarkeit von $k \epsilon \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch k ‚erforscht'. Im Folgenden wird mithilfe von erläuterten Skriptauszügen dargestellt, wie im Rahmen dieses ‚Forschungsprozesses' die in Abschnitt 6.1 formulierten Intentionen umgesetzt werden.

Kapitel 1 „Entdecken und Beweisen in der Arithmetik“

Innerhalb des ersten Kapitels wird durch den Fachinhalt der Teilbarkeit bewusst ‚Elementarmathematik‘ in den Vordergrund gestellt, wodurch direkt an schulische Vorerfahrungen angeknüpft werden kann. Das Kapitel wird durch die folgende Frage eingeleitet:

> Jemand behauptet: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 3 teilbar.
>
> – Stimmt das? Wenn ja, warum?

Im Kontext einer Begriffsklärung wird der Teilbarkeitsbegriff aufgearbeitet. Als intuitiv klar kann hier angesehen werden, dass etwa die Zahl 6 durch 3 teilbar ist, da $6 : 3 = 2$. Dieser (prozedurale) Teilbarkeitsbegriff wird an dem Beispiel $11 : 3 = \frac{11}{3}$ problematisiert. Denn einhergehend mit der Bruchdarstellung kann auch der Standpunkt vertreten werden, dass 11 durch 3 ‚teilbar‘ sei. Es wird herausgestellt, dass hier zwei verschiedene Teilbarkeitsbegriffe zugrunde liegen: einmal ‚Teilbarkeit in den natürlichen Zahlen‘ und einmal ‚Teilbarkeit in den rationalen Zahlen‘. Diese Diskrepanz liefert die Möglichkeit für eine erste Präzisierung des schulischen Vorwissens[43]: Unter Teilbarkeit soll in der Lehrveranstaltung ‚Teilbarkeit innerhalb der natürlichen Zahlen‘ verstanden werden. Mit diesem Aufgreifen einer ‚prozeduralen Sicht‘ auf Teilbarkeit wird schulisches Vorwissen akzeptiert und produktiv genutzt, denn aus dieser Diskussion erwächst die erste Definition, mit der gleichsam das notwendige Vorwissen aufgearbeitet wird, um den Ausführungen im ersten Kapitel folgen zu können.

> **Definition 1.1 (Teilbarkeit):**
> Eine natürliche Zahl a ist genau dann[44] durch eine natürliche Zahl b teilbar, wenn $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \in \mathbb{N}$ ist.[45]

Im Rahmen einer logischen Analyse der Eingangsbehauptung werden zunächst die Aspekte der Wortvariablen und die Nutzung von Buchstabenvariablen thematisiert. Ein Schwerpunkt dieser Analyse liegt auf dem Herausarbeiten der Allaussage. Diese Betonung folgt der didaktischen Maßnahme, dass bei der Formulierung einer Vermutung bzw. Behauptung darauf zu achten ist, dass ihr Allgemeingültigkeitscharakter herausgestellt wird, wodurch gleichsam auf die Unzulänglichkeit empirischer Verifikationen hingewiesen wird (Abschnitt 4.3.1). Auch wird mit der Betrachtung der Allaussage die Besonderheit des mathematischen Erkenntnisprozesses herausgestellt, auf dessen Grundlage sich ein objektives Beweisbedürfnis herausbilden kann (vgl. Abschnitt 2.1.6).

Anschließend werden den Studierenden drei verschiedene Strategien an die Hand gegeben, mit denen sie Aussagen überprüfen können:

---

[43] Der Fachinhalt der Teilbarkeit ist dem schulmathematischen Vorwissen der Studierenden zuzuordnen. Allerdings wurde in diesem Kontext nicht erforscht, welches Vorwissen bzw. welches Verständnis die Studierenden von Teilbarkeit genau mit sich bringen. Wohl konnte im Kontext der Analyse der Beweiskonstruktion der Studierenden im Wintersemester 2012/13 herausgearbeitet werden, dass die Studierenden für die Darstellung von Teilbarkeit häufig von einer Quotientenschreibweise Gebrauch machen (Abschnitt 5.3.2.4), was auf eine prozedurale Sicht auf Teilbarkeit hindeutet.

[44] Die Bedeutung der *genau-dann-wenn Konstruktion* wird an dieser Stelle noch nicht mithilfe der Aussagenlogik konkretisiert.

[45] Bei dieser Definition wird die Existenz bzw. die Verwendung der rationalen Zahlen implizit vorausgesetzt. Die in der Zahlentheorie ‚übliche‘ Teilbarkeitsrelation wird später eingeführt.

Drei Strategien zum Testen einer Aussage:

(1) Testen der Aussage an Zahlenbeispielen
(Ziel: Prüfen, ob es stimmt.)
(2) Testen der Aussage an Zahlenbeispielen mit dem Ziel zu erkennen, was an diesen Beispielen verallgemeinerungsfähig (generisch) ist
(Ziel: Kann man an den Beispielen verstehen, warum die Aussage allgemein gilt?)
(3) Formalisierung der Aussage und algebraische Umformungen
(Ziel: Einsatz der Algebra, um Richtigkeit der Aussage zu begründen.)

Diese Strategien sollen den Studierenden im weiteren Verlauf als Heuristiken dienen. Mit der ersten Strategie wird dabei die in Abschnitt 4.3.1 herausgearbeitete Aktivität umgesetzt, dass der Beweisprozess mit einer Explorationsphase des Sachverhalts beginnen sollte, in deren Rahmen sich die Lehrenden mit dem Wissensmaterial vertraut machen (vgl. hierzu auch den Beweisprozess nach Boero (1999), dargestellt in Abschnitt 2.1.1). Mit der Unterscheidung der Strategien (1) und (2) wird bereits an dieser Stelle der Unterschied zwischen bloßen Beispielüberprüfungen und allgemeingültigen generischen Beweisen angedeutet.

Die Umsetzung und Aussagekraft dieser drei Strategien werden an der Ausgangsfrage exemplarisch durchgeführt und reflektiert. Im Kontext dieser Strategien wird die Rolle von Beispielen für den Erkenntnisprozess erörtert, wobei zwischen psychologischen und logischen Aspekten unterschieden wird. Aus psychologischer Sicht kann das Testen von konkreten Beispielen positiv gewertet werden, um ein Verständnis für die Behauptung zu entwickeln und eine Vorstellung davon zu bekommen, ob diese wahr sein könnte. Neben dem fachlichen Verständnis einer Aussage wird hier bereits der psychologische Aspekt der (subjektiven) Überzeugung für das Gelten der Behauptung tangiert. Logisch betrachtet, muss betont werden, dass noch so viele Beispielüberprüfungen nicht ausreichen, um eine mathematische Allaussage über unendlich viele Fälle verifizieren zu können. Ebenso ist es logisch betrachtet überflüssig, eine bewiesene Behauptung an konkreten Beispielen zu verifizieren. Allerdings können nachträgliche Beispielüberprüfungen wiederum als Kontrolle für die algebraischen Umformungen fungieren, die den Beweis konstituieren.

Im Zuge des Testens der Aussage an Zahlenbeispielen wird eine Entdeckung gemacht:

Als Summe der drei Zahlen kommt immer ein Vielfaches von 3 heraus:

$$1+2+3=6=3\cdot 2,\quad 2+3+4=9=3\cdot 3,\quad 500+501+502=1503=3\cdot 501$$

Das Ausmachen einer (beispielübergreifenden) Erklärung für dieses Phänomen eröffnet die Möglichkeit der Konstruktion eines generischen Beweises für die Eingangsbehauptung:

Generischer Beweis

$$1+2+3=(2-1)+2+(2+1)=3\cdot 2$$

$$500+501+502=(501-1)+501+(501+1)=3\cdot 501$$

In den Beispielen wird deutlich, dass man die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer schreiben kann als: $(\text{„mittlere Zahl"}-1)+(\text{„mittlere Zahl"})+(\text{„mittlere Zahl"}+1)$.
Diese Summe lässt sich dann umschreiben als dreimal die „mittlere Zahl". Folglich ist die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer gleich dem Dreifachen der mittleren Zahl und somit durch 3 teilbar.

Nach dieser Ausarbeitung des generischen Beweises (unter der Nutzung von Wortvariablen) werden die entsprechenden Normen für generische Beweise innerhalb der Lehrveranstaltung explizit gesetzt, durch die gleichsam die in Abschnitt 4.3.1 herausgearbeiteten empfohlenen Aktivitäten für die Konstruktion generischer Beweise umgesetzt werden.

> **Ein gültiger generischer Beweis soll die folgenden Aspekte umfassen:**
>
> 1. Mit allgemeingültigen Umformungen wird an konkreten Zahlenbeispielen untersucht, was diese gemeinsam haben. Diese beispielübergreifende Idee muss dann in einen Zusammenhang mit der aufgestellten Behauptung gebracht werden.
> 2. Es folgt eine Begründung, warum die Behauptung in den betrachteten Zahlenbeispielen wahr ist.
> 3. Schließlich muss begründet werden, warum diese Argumentation auch für alle möglichen (zu betrachtenden) Fälle korrekt ist.

Durch die Verwendung generischer Beweise soll eine den Studierenden bekannte Begründungsform der Schulmathematik[46] aufgegriffen und ihnen gleichsam eine schuladäquate Begründungsform vermittelt werden. Somit wird ein expliziter Schulbezug hergestellt und den Studierenden wird relevantes Wissen für ihre spätere Schulpraxis vermittelt[47].

Bei der Durchführung der Strategie (3) („Formalisierung der Aussage und algebraische Umformungen“) kann durch die Einführung von (Buchstaben-) Variablen der generische Beweis direkt formalisiert werden[48]:

> Wir ersetzen die Zahlen und Wortvariablen durch Buchstabenvariablen: Wir bezeichnen die „mittlere Zahl“ als m. m soll dann eine beliebige natürliche Zahl sein. Sie darf aber nicht die „1“ sein, denn dann wäre der Vorgänger keine natürliche Zahl.
>
> Sei $m \epsilon \mathbb{N}\backslash\{1\}$ beliebig, aber fest. Dann gilt: $(m-1)+m+(m+1)=3m$. Diese Zahl ist durch 3 teilbar, da $m \epsilon \mathbb{N}$.
>
> q.e.d.

Als Vorteil dieser Herangehensweise kann verdeutlich werden, dass bei Umformungen mit Variablen nur solche Operationen angewendet werden, die genauso auch für alle entsprechenden Zahlen

[46] Die Vermutung, dass entsprechende Begründungsformen im schulischen Mathematikunterricht Verwendung finden, wird durch verschiedene Darstellungen in der Literatur gestützt (etwa Leiß und Blum (2006, S. 37f.) oder Meyer und Prediger (2009)). Ob die Studierenden allerdings selbst angeben, solche oder ähnliche Begründungsformen bereits aus ihrem Mathematikunterricht an der Schule zu kennen, ist an dieser Stelle noch offen. Empirische Ergebnisse zu dieser Thematik werden in Abschnitt 7.2.3 thematisiert.

[47] Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ ist explizit als eine mathematische Fachveranstaltung in den Studienverlaufsplan integriert. Hieraus folgt, dass im Kontext dieser Lehrveranstaltung vor allem fachlich relevantes Wissen für den Lehrberuf vermittelt werden soll. Es ist dabei auch die Überzeugung des Autors, dass die Fachinhalte generischer und formaler Beweise schulrelevantes Wissen für die Lehrpraxis an Schulen darstellen, wie auch der Umgang mit Punktmusterdarstellungen. Das Verfügen über diese fachlichen Inhalte ermöglicht es überhaupt erst, die in den Bildungsstandards geforderten Aspekte der Prozesskompetenz „Mathematisch Argumentieren“ im schulischen Mathematikunterricht umzusetzen (vgl. Abschnitt 2.3.1.1).

[48] Diese ‚genetische‘ Erarbeitung der verschiedenen Beweise (vgl. Brunner 2014, S. 20ff.) entspricht dabei der in Abschnitt 4.3.1 empfohlenen Aktivität, dass der formale Beweis erst dann formuliert werden soll, wenn die Lernenden eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit der Rechnung erlangt haben, da sich das Resultat als unabhängig von der Verwendung von konkreten Zahlenwerten erweist.

durchführbar sind, wobei diese Sicherheit auf einer fehlerfreien Anwendung des algebraischen Kalküls basiert. Gleichsam wird die Norm eingeführt, dass bei der Nutzung einer Buchstabenvariablen immer ihre Grundmenge anzugeben ist.

Im Anschluss wird der erfolgte Prozess reflektiert, in dem u.a. ausgehend von der Eingangsbehauptung und einer Begriffsklärung der Teilbarkeit eine Definition erarbeitet wurde. Beispielüberprüfungen führten dann zu einer beispielübergreifenden („generischen“) Idee, die für den Beweis der Behauptung verwendet werden konnte. Diese Beweisidee aus dem generischen Beweis wurde anschließend auch für die Konstruktion des formalen Beweises genutzt, welcher hier noch nicht als solcher benannt wurde. Bei der Besprechung der drei Strategien wurden Normen für entsprechende Beweiskonstruktionen kommuniziert, wobei durch den erhöhten Anspruch an Darstellung, Vollständigkeit etc. Unterschiede zwischen der Schul- und der Hochschulmathematik thematisiert wurden.

Als eine alternative Strategie wird das direkte, gleichsam ‚experimentelle‘ Umformen der formalen Darstellung vorgestellt. Das Ziel ist dann (eventuell ohne vorherige Beispielbetrachtungen), die Summe so umzuformen, dass man am Term die Teilbarkeit durch 3 erkennen kann. Somit erhält man die folgende Variante der Begründung:

> Bezeichnet man die Startzahl als m, wobei m eine natürliche Zahl ist, so erhält man als Summe: $m + (m + 1) + (m + 2) = 3m + 3 = 3(m + 1)$. Diese Summe ist durch 3 teilbar, da $(m + 1)$ eine natürliche Zahl ist[49].

Diese Herangehensweise der (sofortigen) Umformung einer formalen Darstellung wird als eine mögliche Strategie für die Konstruktion eines formalen Beweises herausgestellt, dessen Konzept später konkretisiert wird.

Anhand obiger Rechnung wird noch einmal der Teilbarkeitsbegriff aufgegriffen, denn die Tatsache, dass das Ergebnis $3(m + 1)$ ein Vielfaches von 3 ist, entspricht nicht unmittelbar der vorgenommenen Definition 1.1. (s.o.). Allerdings kann die Definition 1.1 für ein ‚erweitertes Verständnis‘ der Teilbarkeit genutzt werden:

> Definition 1.1 besagt, dass eine natürliche Zahl a etwa durch 3 teilbar ist, wenn $\frac{a}{3} \epsilon \mathbb{N}$ ist, z.B. $\frac{a}{3} = q \epsilon \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{a}{3} = q \iff a = 3 \cdot q$.

Hieraus resultiert eine ‚neue‘ Definition für Teilbarkeit, die ohne Division auskommt:

> **Definition 1.1' (Teilbarkeit):**
> Eine natürliche Zahl a ist genau dann durch eine natürliche Zahl b teilbar, wenn eine natürliche Zahl q existiert mit: $\mathrm{a} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{q}$.

Die Definition 1.1' wird an dieser Stelle aus verschiedenen Gründen thematisiert (und auch explizit im Plenum reflektiert): Im Sinne einer Akzeptanz von Vorwissen wurde für die Teilbarkeit zunächst die Definition 1.1 erarbeitet (s.o.). Innerhalb der elementaren Zahlentheorie wird die Teilbarkeit zweier Zahlen allerdings entsprechend der Definition 1.1' definiert. Diese relationale Charakterisierung ist

[49] Dies ist eine exemplarische Stelle, an der ein intuitiv einsichtiger Sachverhalt (wenn $m \epsilon \mathbb{N}$ dann ist auch $(m + 1) \epsilon \mathbb{N}$) nicht weiter thematisiert bzw. problematisiert wird.

für Studienanfängerinnen und -anfänger neu, die Teilbarkeit von a durch b ($a, b \in \mathbb{N}$) wird von ihnen eher prozedural betrachtet, etwa als das ‚Aufgehen' ohne Rest bei wiederholter Subtraktion von b ausgehend von a. Auf der Basis der bekannten Division mit rationalen Zahlen wurde eingangs formuliert, dass b die Zahl a teilt, wenn die Operation $\frac{a}{b}$ eine natürliche Zahl liefert. Dagegen ist die Definition 1.1' in den meisten Sachverhalten, in denen nach Teilbarkeit gefragt wird, leichter anzuwenden, da keine explizite Division stattfindet. Die Anwendung dieser Teilbarkeitsdefinition erweist sich auch als weniger fehleranfällig, da bei Termumformungen keine Bruchrechnung benötigt wird. Diese damit einhergehende Definition wird dabei als ‚sinnvolle Charakterisierung' von Teilbarkeit aus der vorherigen Sichtweise auf Teilbarkeit entwickelt, wodurch diese an der Hochschule ‚gebräuchliche' Sicht auf Teilbarkeit gleichsam motiviert und legitimiert wird. Der fachmathematische Status der Definition wird erst später im Kontext formaler Beweise aufgegriffen.

Nach der Klärung der Ausgangsfrage über die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen in der Symbolsprache der Algebra wird der Sachverhalt im Diagrammsystem der Punktmuster aufgegriffen. Auch hier kann die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt und ‚umgeformt' werden (vgl. Abbildung 46).

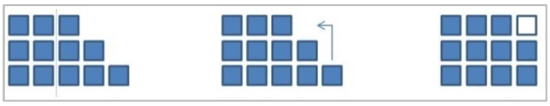


Abbildung 46: Darstellung der Summe 3+4+5 im Diagrammsystem der Punktmuster

Es stellt sich allerdings die Frage, wie Teilbarkeit im Darstellungssystem der Punktmuster verstanden bzw. (nach erfolgter Transformation) nachgewiesen werden soll, was anhand der Grundvorstellungen ‚Aufteilen' und ‚Verteilen' beantwortet wird:

Teilbarkeit im Darstellungssystem der Punktmuster

(1) *Verteilen*:
Wir teilen das Punktmuster in drei gleichgroße Teile (hier: Zeilen) ein. Wenn dies ‚ohne Rest' möglich ist, dann ist die Summe durch 3 teilbar (vgl. Abbildung 47 links).

(2) *Aufteilen*:
Wir teilen das Punktmuster in Dreiergruppen (hier: Spalten) ein. Wenn dies ‚ohne Rest' möglich ist, dann ist die Summe durch 3 teilbar (vgl. Abbildung 47 rechts).

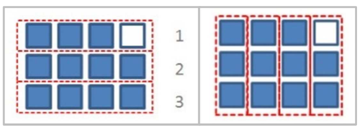


Abbildung 47: Darstellung der Teilbarkeit durch 3 in der Punktmusterdarstellung; links: gemäß der Grundvorstellung „verteilen", rechts: gemäß der Grundvorstellung „aufteilen"

Der Frage nach der Übertragbarkeit der obigen Strategie (Transformation der Punkte und Teilung durch 3) wird anhand weiterer konkreter Beispiele nachgegangen. Die Einsicht, dass unabhängig von der Startzahl an der rechten Seite immer die gleiche Treppenform entsteht, ermöglicht die Konstruktion eines generischen Punktmusterbeweises:

Generischer Punktmusterbeweis

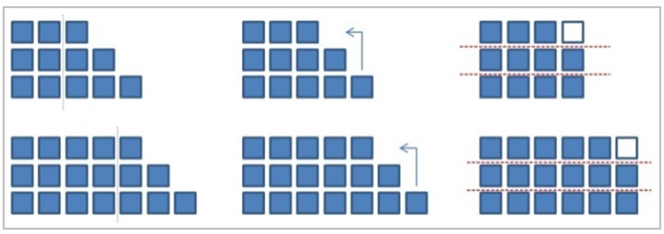


Abbildung 48: Generische Punktmusterbeispiele für die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen

Bei jeder Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entsteht immer die gleiche Treppenform, da sich die Punktlinien jeweils um einen Punkt unterscheiden. Durch Umgruppierung der Punkte (s. Beispiele) entstehen immer drei gleich lange Punktereihen. Also ist die Summe immer durch 3 teilbar.

Während bei der Formalisierung des generischen Beweises mit Zahlen Buchstabenvariablen verwendet wurden, um eine beliebige Startzahl (oder mittlere Zahl) zu repräsentieren, wird in dem Darstellungssystem der Punktmuster entsprechend eine geometrische Variable verwendet (s. Abbildung 49). Eine geometrische Variable muss dabei nicht notwendigerweise mit einem Buchstaben versehen werden, dies kann allerdings innerhalb mancher Beweisführungen nützlich sein.

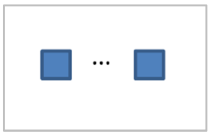


Abbildung 49: Eine „geometrische Variable" zur Repräsentation einer beliebigen Anzahl von Punkten

Somit kann auch im Punktmustersystem ein Beweis mit (geometrischen) Variablen konstruiert werden:

Beweis mit geometrischen Variablen:

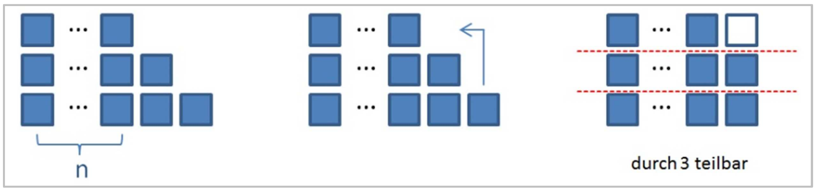


Abbildung 50: Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen für die Behauptung, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen immer durch 3 teilbar ist

Die Nutzung des Diagrammsystems der Punktmuster versteht sich dabei als Einbezug einer inhaltlich-anschaulichen Darstellung, die Konstruktion entsprechender Beweise als Einbezug inhaltlich-anschaulicher Beweise. Hierdurch sollen die Studierenden auch dazu befähigt werden, in einer weiteren, ‚schuladäquaten Sprache' Mathematik kommunizieren zu können.

Anhand der bisherigen Formen der Verifikation lassen sich verschiedene Aspekte von Beweisen unterscheiden und diskutieren. So werden die verschiedenen Beweisfunktionen Verifikation (als objektive Sicherung der Gültigkeit), (subjektive) Überzeugung und Erklärung im Plenum in Bezug auf die verschiedenen Beweisformen erörtert. Als zentrale Aspekte für die Bewertung von Beweisen werden aber die mathematische Korrektheit und die soziale Akzeptanz herausgestellt.

Schließlich wird das Konzept des formalen Beweises genauer betrachtet. Neben der Nutzung der fachmathematischen Symbolsprache und dem ‚sicheren' Schließen ist es vor allem der explizite Bezug auf die verwendeten mathematischen Argumente (Definitionen und Sätze) der Argumentationsbasis, die diesen konstituieren. Bei der Konstruktion formaler Beweise wird zwischen deren ‚Erarbeitung' und der finalen ‚Reinschrift' unterschieden, wodurch zunächst der Prozess des Beweisens in den Vordergrund gerückt werden soll. Mit der expliziten Forderung einer ‚Reinschrift' wird außerdem betont, dass bei der finalen Niederschrift des Beweisprodukts gewissen Ansprüchen (in Bezug auf Logik und formale und sprachliche Darstellungen) Genüge getan werden muss. Im Übergang zu den formalen Beweisen wird es dabei möglich, die fachmathematische Symbolsprache sinnstiftend einzuführen, um damit die folgenden Aktivitäten auszuführen, wie es von Malle (1993, S. 6ff.) und Mason et al. (2005, S. 1ff.) empfohlen wird: (i) um Allgemeingültigkeit auszudrücken, (ii) um allgemeine Zusammenhänge zur kommunizieren, (iii) um Zusammenhänge weiter zu erforschen und (iv) um Beweise zu konstruieren zu können. Ein aus obiger Formalisierung konstruierter formaler Beweis ist dann:

Formaler Beweis (Reinschrift):
Sei $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann gilt: $\mathrm{n} + (\mathrm{n} + 1) + (\mathrm{n} + 2) = 3\mathrm{n} + 1 + 2 = 3\mathrm{n} + 3 = 3(\mathrm{n} + 1)$.
Da $(\mathrm{n} + 1) \in \mathbb{N}$ ist, ist das Ergebnis nach Definition (1.1') durch 3 teilbar.
q.e.d.

Im Rahmen einer ‚Anmerkung' werden dabei die folgenden Aspekte thematisiert: Zu Beginn des formalen Beweises wird die verwendete Variable definiert und entsprechend für die Verifikation einer Für-Alle-Aussage als „beliebig, aber fest" gesetzt. Der durch Formalisierung entstandene Term wird dann mithilfe zulässiger Operationen umgeformt, bis man einen Term erhält, an dem man mithilfe einer Definition oder eines Satzes den Nachweis der geforderten Eigenschaft vollziehen kann. An dieser Stelle wird auch das Konstrukt der Argumentationsbasis erörtert. Als Norm wird dazu festgehalten, dass die in einem formalen Beweis (neben den Umformungen) verwendeten Argumente (Sätze, Definition) immer angegeben werden sollen. Allerdings müssen die Regeln für die verwendeten Termumformungen, wie etwa das Kommutativgesetz, nicht extra angemerkt werden. In diesem Kontext werden auch die Vor- und Nachteile von formalen Beweisen erörtert.

Die Konvention, dass innerhalb eines formalen Beweises der Nachweis der zu zeigenden Eigenschaft durch den expliziten Verweis auf eine Definition oder einen Satz geschehen muss, macht es für spätere Beweisaufgaben notwendig, dass auch ‚Nicht-Teilbarkeit' thematisiert werden muss. Dieser Inhalt mag ‚intuitiv klar' sein, wenn bereits definiert wurde, was unter Teilbarkeit zu verstehen ist. Jedoch wird bei der Erarbeitung eines entsprechenden Satzes deutlich, welcher ‚Mehraufwand' für eine Konzeption von Nicht-Teilbarkeit betrieben werden muss:

Eine natürliche Zahl a ist nicht durch eine natürliche Zahl b teilbar, wenn es keine natürliche Zahl q mit $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{q}$ gibt.
Der Bruch $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ hat dann einen ganzzahligen Anteil $q \in \mathbb{N}_0$ und einen Rest R zwischen 0 und 1, den man als $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}$ mit einer Zahl $0 < r < b$ schreiben kann.
$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{q} + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}$ ist äquivalent zu $\mathrm{a} = \mathrm{q} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{r}$.

Satz 1.2 (Nicht-Teilbarkeit):
Eine Zahl $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$ ist genau dann nicht durch eine Zahl $\mathrm{b} \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn es Zahlen $\mathrm{q} \in \mathbb{N}_0$ und $\mathrm{r} \in \mathbb{N}, 0 < \mathrm{r} < \mathrm{b}$, gibt mit $\mathrm{a} = \mathrm{q} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{r}$.

Bemerkung:
Wenn $a < b$ ist, dann gilt $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = 0 \cdot \mathrm{b} + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}$, wobei $\mathrm{r} = \mathrm{a}$ ist.

In dem folgenden Abschnitt werden die Inhalte ‚gerade und ungerade Zahlen' thematisiert und gleichsam für eine Verwendung in formalen Beweisen aufbereitet. Dazu wird eine Definition erarbeitet und der folgende Satz formuliert und bewiesen:

Satz 1.5 (gerade und ungerade Zahlen)
(a) $g \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $g = 2n$.
(b) $u \in \mathbb{N}$ ist genau dann ungerade, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $u = 2m + 1$.

Als Abschluss dieses Exkurses zur Thematik ‚gerade und ungerade Zahlen' wird eine Explorationsphase in die Vorlesung integriert. Die Studierenden sollen selbst wahre und falsche Aussagen über gerade und ungerade Zahlen formulieren. Anschließend werden die verschiedenen Aussagen gesammelt und im Plenum widerlegt bzw. verifiziert.

Aufbauend auf der Erkenntnis über die Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen wird im weiteren Verlauf des Kapitels ‚mathematische Forschung' im Kleinen betrieben. Untersucht werden dabei die folgenden Behauptungen:

(B2) Die Summe von 2 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 2 teilbar.
(B4) Die Summe von 4 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 4 teilbar.
(B5) Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 5 teilbar.
(B6) Die Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.
…
(Bk) Die Summe von $k \in \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch k teilbar.

Im Rahmen der Überprüfung der Behauptungen (B2) und (B4) wird die Bedeutung und Tragweite von Gegenbeispielen für den mathematischen Erkenntnisprozess thematisiert. Als Weiterführung dieser Widerlegungen wird gezeigt, dass die Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nie durch 2 teilbar und die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nie durch 4 teilbar ist.

Bei der Untersuchung der verschiedenen Behauptungen wird zum einen darauf geachtet, dass zwischen einer explorativen Untersuchungsphase und einer Reinschrift der Beweise unterschieden wird. Zum anderen werden die vier verschiedenen Beweisformen (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der formale Beweis) der Vorlesung ‚gleichberechtigt' dazu verwendet, die wahren Behauptungen zu beweisen. Gerade in dieser vergleichenden Nutzung der vier verschiedenen Beweisformen können deren Vor- und Nachteile erfahren werden. Für das Widerlegen von Teilbarkeitsaussagen mithilfe von Punktmusterdarstellungen muss dabei auch die Nicht-Teilbarkeit in diesem Diagrammsystem betrachtet werden. Am Ende dieses Prozesses steht die folgende Behauptung als Verallgemeinerung der erhaltenen Ergebnisse:

Die Summe von $k \in \mathbb{N}$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau dann durch k teilbar, wenn k ungerade ist.

Diese Behauptung wird zum Abschluss des ersten Kapitels mithilfe verschiedener Beweise verifiziert. In diesem Rahmen findet auch ein kurzer Exkurs über die ‚Geschichte des kleinen Gauß' statt, in dessen Kontext die generische Idee der Paarbildung von Summanden um eine ‚mittlere Zahl' herum vertieft und die folgende Formel für die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen erarbeitet und bewiesen wird:

Hilfssatz ($*$)
Für die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gilt:
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Durch diese forschungsgeleitete bzw. problemzentrierte Erarbeitung der fachlichen Inhalte kann der Entstehungsprozess der Mathematik verdeutlicht und somit Meta-Wissen vermittelt werden[50]. Des Weiteren werden mit der Formulierung von Definitionen, Behauptungen und Sätzen und der Konstruktion von Beweisen zentrale Arbeitsweisen der Hochschulmathematik eingeführt.

In dem zweiten Kapitel der Lehrveranstaltung werden geometrische Veranschaulichungen von bestimmten Punktmustern, sogenannte ‚figurierte Zahlen', als weiterer Aspekt einer Elementarmathematik betrachtet. Bei der Beschreibung der Strukturen und Bildungsvorschriften der verschiedenen figurierten Zahlen wird der Begriff der Zahlenfolge eingeführt und zu deren Beschreibung zwischen expliziten und rekursiven Bildungsvorschriften unterschieden. Bei der Untersuchung der verschiedenen figurierten Zahlen („Dreieckszahlen", „Quadratzahlen", „Sechseckzahlen" etc.) können Vermutungen über die Bildungsgesetze der einzelnen Muster aufgestellt und Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Mustern entdeckt werden. Die in Kapitel 1 erarbeiteten Strategien für die Überprüfung von Aussagen werden dabei weitergeführt und die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung konsequent als Erkenntnismittel verwendet. Während im ersten Kapitel Fragestellungen aus der Arithmetik und Algebra im Vordergrund standen, die auch mithilfe von Punktmustern begründet wurden, wird nun im zweiten Kapitel innerhalb des Darstellungssystems der Punktmuster ‚Forschung' betrieben, wobei die Bereiche der Arithmetik und Algebra als alternative Darstellungssysteme herangezogen werden können.
Als ein Betätigungsfeld zur Exploration werden den Studierenden zusätzlich die figurierten Zahlen der „U-Treppenzahlen" (vgl. die Darstellungen im Anhang) an die Hand gegeben. Hier sollen die Studierenden in einer freien Explorationsphase selbst Bildungsvorschriften finden und Bezüge zu anderen figurierten Zahlen herausarbeiten.

Neben dieser ‚aktiven Betätigung' im Gebiet der figurierten Zahlen soll dieses Kapitel auch dazu dienen, die Studierenden zum Umgang mit entsprechenden Punktmusterdarstellungen zu befähigen. Aus der in dieser Arbeit vorgenommenen semiotischen Perspektive wird an dieser Stelle kollaterales Wissen für das Diagrammsystem der Punktmuster aufgebaut und eine Praxis des Agierens in diesem Diagrammsystem eingeübt. Bei der vergleichenden Nutzung der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung können die Vor- und Nachteile der Beweisformen und der verschiedenen Diagrammsysteme erfahren werden. Damit ist auch die Intention verbunden, dass die Studierenden die Vorteile der mathematischen Symbolsprache wiederholt wahrnehmen. Durch diese vergleichende Nutzung der verschiedenen Begründungsformen werden gleichsam die folgenden didaktischen Maßnahmen umgesetzt, die im Rahmen von Abschnitt 4.3.1 herausgearbeitet wurden: Es werden verschiedene Darstellungsweisen verwendet werden, um inhaltliche Grundideen herauszustellen und anschauliche Grundvorstellungen zu vermitteln, die verschiedenen Beweisformen werden in das Unterrichtsgeschehen einbezogen, anschauliche Argumente werden

[50] Das hier ausgewählte Konzept einer ‚Kultur der Mathematik' determiniert die Art von Meta-Wissen, welche im Rahmen der Lehrveranstaltung vermittelt werden kann. Im vorliegenden Fall konnte Meta-Wissen in dem Sinne thematisiert werden, wie es in Abschnitt 1.2.3 vor allem in Anlehnung an Hefendehl-Hebeker (1999) und (2015) konzeptualisiert wurde, als ein Verständnis von der Genese mathematischen Wissens, ihrer epistemologischen Charakteristika und als ein Bewusstsein über mathematikspezifische Denk- und Arbeitsweisen. Dabei wäre prinzipiell auch die Thematisierung anderer Aspekte von Meta-Wissen denkbar gewesen, wie etwa weltanschauliche bzw. ideologische Aspekte (etwa Ullmann 2008) oder etwa die Erörterung bildungstheoretischer Aspekte von Mathematik (etwa Heymann 2013).

formalisiert, es werden auch explizit formale Beweise geführt und es wird über das Beweisen (in seinen verschiedenen Ausprägungen) reflektiert.

Im Kontext verschiedener Beweiskonstruktionen wird innerhalb des zweiten Kapitels die Erfahrung gemacht, dass sich die „… - Darstellung“ (als abkürzende Schreibweise für Summen) als sehr mühsam erweist. Als eine vereinfachte Darstellung entsprechender Schreibweisen wird die Notation mit dem Summenzeichen eingeführt, entsprechende Rechengesetze bewiesen und der Umgang mit diesem geübt. Im Kontext der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung werden den Studierenden somit verschiedene Inhalte vermittelt, die ihnen das Zurechtkommen in den folgenden Lehrveranstaltungen an der Universität erleichtern sollen, hierzu zählen vor allem: formale Beweise, Zahlenfolgen und das Summenzeichen. (Weitere entsprechende Inhalte der Veranstaltung lassen sich bereits an den Kapitelüberschriften ablesen: „Vollständige Induktion“, „Aussagenlogik, Logisches Schließen und Beweistypen“, „Mengen und Aussageformen“ und „Funktionen und Abbildungen“.) Somit wurde auch dieser Leitgedanke einer Brückenkursveranstaltung eingelöst.

Die Umsetzung dieser verschiedenen Leitprinzipien (vgl. Abschnitt 6.1) wurde auch durch die Gestaltung des Übungsbetriebs umgesetzt. Im Fokus der Bemühungen stehen dabei das Herausstellen des Prozesscharakters der Mathematik, die Konstruktion der vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung und ein verständiger Umgang mit den Diagrammsystemen der Arithmetik, Algebra und der Punktmuster. Die Frage, inwieweit durch die Lehrveranstaltung ein ‚adäquates Beweisverständnis‘ auf Seiten der Studierenden erzielt werden konnte, ist (u.a.) Gegenstand des siebten Kapitels.

6.3 Der Übungsbetrieb

Als wichtige Bestandteile des Übungsbetriebs der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 werden im Folgenden die Präsenzübungen (6.3.1), spezifische Aufgabenformate (6.3.2) und die Konzeption der Zentralübung (6.3.3) dargestellt.

6.3.1 Die Präsenzübungen

Die wöchentlichen Präsenzübungen zur Lehrveranstaltung (Kleingruppenübungen mit ca. 30 Studierenden) wurden durch sogenannte Tutorentandems (vgl. Abschnitt 5.3.1) von studentischen Hilfskräften geleitet[51]. Nachdem im Wintersemester 2012/13 eine Schulung der Tutoren stattgefunden hatte, um die Hilfskräfte mit dem Konzept beispielgebundener Beweise vertraut zu machen, erschien dies in den folgenden Durchgängen nicht mehr nötig, da man für Tutoren auf fachlich gute bis sehr gute Studierende aus vorherigen Durchläufen der Lehrveranstaltung zurückgreifen konnte, die dementsprechend mit den Inhalten der Lehrveranstaltung, insbesondere mit dem Konzept generischer Beweise sehr gut vertraut waren und entsprechend der Normen der Lehrveranstaltung agieren konnten. Im Rahmen dieser Tutorien wurden ausschließlich sogenannte Präsenzaufgaben zur Lehrveranstaltung bearbeitet und besprochen, da die Besprechung der Hausaufgaben[52] in die wöchentlich stattfindende Zentralübung (Abschnitt 6.3.3) ausgelagert wurde.

[51] Nur die Tutorien, die durch Wissenschaftliche Mitarbeiter betreut wurden, wurden ohne ‚Tandempartner‘ abgehalten.

[52] Die Studierenden mussten im Rahmen der Lehrveranstaltung wöchentlich Hausaufgaben abgeben, um die ‚Studienleistung‘ und damit die Zulassung für die Klausurteilnahme zu erhalten.

6.3.2 Spezifische Übungsaufgaben

Für das Erreichen der formulierten Ziele der Lehrveranstaltung kommt den verwendeten Übungsaufgaben eine besondere Rolle zu. Wie im Rahmen des fünften Kapitels herausgearbeitet wurde, mussten gezielt solche Übungsformate entwickelt werden, die den Studierenden dabei helfen, ein konzeptuelles Verständnis zu den verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung aufzubauen und einen Umgang mit den verschiedenen Diagrammsystemen zu entwickeln. Ebenfalls sollte gezielt der Herausbildung von Fehlvorstellungen entgegengewirkt werden. In Abschnitt 5.4.1 wurden dazu bereits entsprechende Aufgabenformate vorgestellt, die die folgenden Aspekte thematisierten:

(i) Die Beurteilung fehlerhafter generischer Beweise (mit Zahlen)
(ii) Die Vervollständigung lückenhafter generischer Beweise (mit Zahlen)
(iii) Die Konstruktion generischer Beweise
(iv) Die Formalisierung generischer Beweise
(v) Aufgaben an konkreten Punktmustern, bei denen allgemeine Beziehungen abstrahiert, formalisiert und bewiesen werden mussten
(vi) Integration von Punktmusterbeweisen und deren Formalisierung

Im Folgenden sollen die entwickelten Aufgabenformate dargestellt werden, die auf der Basis der retrospektiven Analyse der dritten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 entwickelt wurden. Diese umfassen verschiedene Aufgaben mit verstärkt explorativen Anteilen und sogenannte „multiple proof tasks“ (Abschnitt 6.3.2).

6.3.2.1 Aufgaben mit explorativen Anteilen

Um den Studierenden einen Einblick in die ‚forschende Mathematik‘ zu ermöglichen, sollten Aufgaben mit verstärkten explorativen Anteilen in den Übungsbetrieb eingebunden werden. Neben der Verdeutlichung der Prozesshaftigkeit der Wissenschaft Mathematik sollte damit die Phase der Exploration im Beweis- bzw. Erkenntnisprozess deutlicher herausgestellt werden. Das eigene Herausarbeiten von Hypothesen, verbunden mit der Formulierung von Behauptungen, ist dabei auch mit dem Ziel verbunden, ein Beweisbedürfnis bei den Studierenden zu entwickeln. Wie bereits in Abschnitt 2.1.6 dargelegt, muss der Unsicherheit in der Mathematikausbildung ein entsprechender Raum eingerichtet werden, damit Beweise überhaupt ihre Funktion von Erkenntnissicherung und Überzeugung erlangen können. Der explorative Anteil kann dabei in Aufgaben durchaus variieren, wie mit der folgenden Unterscheidung in „Aufgaben zur ‚freien‘ Exploration“ und „Aufgaben zum Herauslesen einer Behauptung“ verdeutlicht werden soll.

Aufgaben zur ‚freien‘ Exploration

Ein Inhaltsgebiet, das sich sehr gut für eine ‚freie‘ Exploration zu eignen scheint, sind die Quadratzahlen. Diese Thematik ist den Studierenden bekannt, bei deren Untersuchung können aber durchaus neue Erkenntnisse gewonnen werden, deren Verifikation dem Niveau von Studienanfängerinnen und -anfängern zu entsprechen scheint. Die folgende Aufgabe für eine ‚freie‘ Exploration entstammt Leuders (2010, S. 41) und wurde für die Gestaltung der zweiten Präsenzübung verwendet:

Präsenzübung 2

Wir gut kennen Sie eigentlich die Quadratzahlen?

Sicher, die Folge der Quadratzahlen ist Ihnen hinlänglich vertraut:

1, 4, 9, 16, 25, …

Aber steckt in dieser Zahlenliste noch mehr als die Tatsache, dass es Quadrate sind? Gibt es noch mehr Strukturen, Muster und Zusammenhänge? Untersuchen Sie die Quadratzahlen daraufhin und schreiben Sie möglichst viele verschiedene Vermutungen auf. Falls Sie nicht wissen, wo Sie anfangen sollen - hier einige Aspekte, die Sie betrachten können: Summen, Differenzen, bestimmte Ziffern, Teilbarkeiten durch 2, 3, 4 usw.

Solche Aufgaben verlangen eine sehr gute Vorbereitung auf Seiten der Übungsgruppenleiter. Den studentischen Hilfskräften wurde eine Liste mit verschiedenen Vermutungen ausgehändigt, an denen mögliche Begründungsformen diskutiert wurden. Aus erkenntnistheoretischer Perspektive gilt es bei der Diskussion der gefundenen Behauptungen, den entsprechenden Status von verschiedenen Argumenten (Beispielüberprüfungen, Plausibilitätsbetrachtungen, Beweise etc.) herauszuarbeiten.

Aufgaben zum ‚Herauslesen von Behauptungen'

Explorative Anteile können in Aufgaben auch damit erreicht werden, dass Lernende dazu angehalten werden, Gemeinsamkeiten in Strukturen selbst ausfindig zu machen, diese als Behauptung zu formulieren und anschließend zu widerlegen oder ggf. zu beweisen. Diese Idee ist nicht neu, entsprechende Formate finden sich etwa bei Wittmann (2009, S. 252), Flores (2002) oder prominent auch bei Polya (1979, S. 100ff.). Innovativ ist bei der vorliegenden Adaption die Übertragung in die Hochschullehre mit dem Ziel, vergleichende Erfahrungen mit Beweisformen und Diagrammsystemen zu ermöglichen. Dieses Aufgabenformat wird im Folgenden an zwei Aufgaben illustriert, die beide auf den Ausführungen von Flores (2002) basieren.

Hausaufgabenblatt 3, Aufgabe 3

Wir betrachten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3^2 - 1 &= 8 = 8 \cdot 1 \\ 5^2 - 1 &= 24 = 8 \cdot 3 \\ 7^2 - 1 &= 48 = 8 \cdot 6 \end{aligned}$$

Verallgemeinern Sie das Prinzip, das in den Beispielen deutlich wird.

a) Formulieren Sie dieses Prinzip als Behauptung über alle natürlichen Zahlen mithilfe von Wortvariablen.
b) Beweisen Sie die Behauptung mit einer Beweismethode Ihrer Wahl.

Hausaufgabenblatt 4, Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 = 3 \cdot D_1 \\ 4 + 5 + 6 &= 15 = 5 \cdot D_2 \\ 9 + 10 + 11 + 12 &= 42 = 7 \cdot D_3 \\ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 &= 90 = 9 \cdot D_4 \end{aligned}$$

Verallgemeinern Sie das Prinzip, das in den Beispielen deutlich wird.

a) Formulieren Sie dieses Prinzip als Behauptung über alle natürlichen Zahlen mithilfe von Wortvariablen.
b) Beweisen Sie die Behauptung mit einer Beweismethode Ihrer Wahl.

Mit der Maßnahme, den Studierenden die Wahl der Beweismethode freizustellen, sind dabei verschiedene Zielsetzungen verbunden. Zunächst wird damit die Intention verfolgt, den Studierenden deutlich zu machen, dass die verschiedenen Beweismethoden der Lehrveranstaltung, wie auch die damit verbundenen Diagrammsysteme, gleichberechtigt für die Verifikation einer Behauptung nebeneinanderstehen. Durch das bewusste Entscheiden für eine Beweismethode und ein Diagrammsystem können die Studierenden eigenen Präferenzen folgen bzw. solche entwickeln.

6.3.2.2 Multiple-proof tasks

Als multiple-proof tasks werden in der Mathematikdidaktik Beweisaufgaben verstanden, in denen explizit nach verschiedenen Beweisen für eine Behauptung gefragt wird (etwa Leikin 2009, S. 31). Sun (2009, S. 178ff.) spricht auch von „one problem multiple solution“. Die geforderten Beweise können sich hierbei bzgl. verschiedener Aspekte unterscheiden (ebd., S. 31): in Bezug auf die gewählte Repräsentation, die zu nutzenden Eigenschaften der zu betrachtenden Objekte oder die verwendeten Argumente (Definitionen, Sätze etc.), seien sie mathematischer oder nicht-mathematischer Natur. Bei der vorliegenden Adaption dieses Aufgabenformats geht es darum, eine Behauptung mit den verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung zu verifizieren.

Der Nutzen von multiple-proof tasks ist hierbei vielfältig: Zunächst wird durch die Frage nach verschiedenen Beweisen eine gewisse Explorationsphase in den Beweisprozess integriert, da nach weiteren Beweismöglichkeiten gesucht werden muss (Sun 2009, S. 179). Es ist hier auch der kreative Aspekt des Suchens nach alternativen Lösungswegen, der eine prozesshafte Sicht auf die Mathematik begünstigt (Leikin 2009, S. 31). Durch das Wissen um verschiedene Beweise für einen Sachverhalt wird ein sogenannter „example space“ (im Sinne von Mason und Watson 2004, S. 59) aufgebaut, vor dessen Hintergrund etwa Lehrende fachdidaktische Entscheidungen treffen können (Leikin 2009, S. 33; Leikin & Levav-Waynberg 2009, S. 218f.).

Der Begriff „multiple“ wird an dieser Stelle auch als Ausdruck für das Agieren in verschiedenen Diagrammsystem gedeutet. Aus semiotischer Sicht gilt es hier zu betonen, dass durch die Nutzung verschiedener Diagrammsysteme jeweils unterschiedliche Aspekte der Objekte und des gesamten Sachverhalts hervorgehoben werden; die unterschiedlichen Betrachtungsweisen begünstigen somit ein erweitertes Verständnis des Sachverhalts (Lenhard 2003). Durch das Arbeiten in verschiedenen Diagrammsystemen werden auch deren Vor- und Nachteile deutlich. Hierbei können Lernende u.a. die Vorteile der fachmathematischen Symbolsprache unmittelbar erfahren: deren universelle Anwendbarkeit, die ‚Macht‘ des algebraischen Kalküls, die Sicherung der Allgemeingültigkeit der Argumentation durch die Nutzung entsprechender Variablen, die Kompaktheit der Argumentation und die leichte Kommunizierbarkeit der Ergebnisse. Schließlich geht es auch um die Einübung in das Arbeiten mit den verschiedenen Diagrammsystemen. Das Aufgabenformat „multiple-proof task“ wird im Folgenden anhand von zwei Aufgaben aus der Lehrveranstaltung illustriert.

Hausaufgabenblatt 1, Aufgabe 2

Wir betrachten die folgende Behauptung:

Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 2 teilbar.

Beweisen Sie die Behauptung:

(a) mit einem generischen Beweis mit Zahlen.
(b) mit einem formalen Beweis mit Buchstabenvariablen. (Nennen Sie die Argumente, die Sie verwenden.)
(c) mit einem generischen Beweis mit Punktmustern.
(d) mit einem Beweis mit geometrischen Variablen.

Präsenzübung 1, Aufgabe 2:

Wir betrachten die folgenden Gleichungen:

$$1^2 + 1 + 2 = 2^2$$
$$2^2 + 2 + 3 = 3^2$$
$$3^2 + 3 + 4 = 4^2$$

Verallgemeinern Sie das Prinzip, das in den Beispielen deutlich wird.

(a) Formulieren Sie dieses Prinzip als Behauptung über alle natürlichen Zahlen mithilfe von Wortvariablen.
(b) Beweisen Sie die Behauptung mit einem generischen Beweis mit Punktmustern.
(c) Beweisen Sie die Behauptung mit einem Beweis mit geometrischen Variablen.
(d) Beweisen Sie die Behauptung mit einem formalen Beweis mithilfe von Buchstabenvariablen.

6.3.3 Die Zentralübung

In diesem Abschnitt wird das Konzept der Zentralübung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ beschrieben, wie es durch den Autor dieser Arbeit in dem Zeitraum vom Wintersemester 2013/14 bis zum Wintersemester 2014/15 entwickelt wurde. Dieses Konzept der Erarbeitung von Musterlösungen basiert auf dem Modell von Musterlösungen von Ableitinger und Herrmann (2011) und der Adaption des von Boero (1999) herausgearbeiteten Prozessmodells zum Beweisen zur Konstruktion von ausgearbeiteten Lösungsbeispielen, wie es in Reiss und Renkl (2002) und Reiss et al. (2008) beschrieben wird. Die Darstellung des Lösungsprozesses und die Diskussion der verschiedenen Beweisformen und Diagrammsysteme stellen dabei zentrale Momente dieses Konzepts für die Umsetzung der intentionalen Dimension der Lehrveranstaltung dar.

Das didaktische Modell von Musterlösungen nach Ableitinger und Herrmann (2011) und dessen Übertragung auf die Beweisaktitivät

Ableitinger und Herrmann (2011) gehen in ihrem Buch „Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra“ auf die Problematik von Studienanfängerinnen und -anfängern mathematikhaltiger Studiengänge beim Bearbeiten der häufig sehr anspruchsvollen Hausaufgaben ein. Sie beschreiben ein Modell von Musterlösungen, in denen der gesamte Bearbeitungsprozess von Aufgaben in den Blick genommen und den Lernenden explizit gemacht wird. Ableitinger und Herrmann (2011, S. 13ff.) unterteilen diesen Bearbeitungsprozess von Musterlösungen in sieben Phasen, die im Folgenden paraphrasierend zusammengefasst werden:

(1) **Ein Problembewusstsein schaffen**
(u.a.: Verstehen der Aufgabe; Zuordnung in ein Themenfeld; Erkennen der Fragestellung; Ausmachen eines Zieles)
(2) **Klärung der Handlungsoptionen**
(u.a.: Klärung der Handlungsoptionen bzw. Ausmachen von Definitionen oder Sätzen, die angewendet werden können; Ausmachen von Strategien;)

(3) **Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen**
(u.a.: Ausgangspunkt erkennen; Wahl einer Repräsentation bzw. Vollziehen eines Repräsentationswechsels)

(4) **Anpassen oder Prüfen der Passung**
(u.a.: Überprüfen von notwendigen Voraussetzungen für die zulässige Anwendung eines Werkzeugs (Satz, Methode, Kalkül etc.) und ggf. Vornehmen entsprechender Modifikationen der Problemstellung)

(5) **Handwerk**
(Ausführen von ‚Handwerk', etwa das Manipulieren von Termen)

(6) **Tricks**
(explizite Klärung von Tricks, die quasi vom Himmel fallen; Erklärung deren Zustandekommens und deren Reichweite)

(7) **Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen**
(u.a.: Aufschreiben und Reflektieren einzelner Abschnitte der Aufgaben; Einfügen von strukturverdeutlichenden Kommentaren und Erläuterungen)

Dieses Modell des Explizit-Machens der verschiedenen Aspekte des Bearbeitungsprozesses, einer Art schriftlichen ‚Lauten-Denkens' des Bearbeiters im Sinne des „cognitive apprenticeship" (s. ebd., S. 9ff.) und die ausführliche Reflexion über das Getane wurde für das Konzept der Zentralübung übernommen und entsprechend an das Themenfeld des Beweisens und die Inhalte angepasst. Das Konzept des Sieben-Phasenmodells lässt sich (modifiziert) auf die Aufgabensituation in der hier beschriebenen Lehrveranstaltung übertragen, wodurch eine Parallele zur bereits behandelten mathematischen Tätigkeit des „diagrammatischen Schließens" (vgl. Abschnitt 2.5) deutlich wird. Die jeweiligen Phasen spiegeln sich im Kontext der hier behandelten Beweisaufgaben wie folgt wider:

(1) **Ein Problembewusstsein schaffen**
Am Anfang steht das Verstehen der Aufgabe bzw. der Problemstellung. Es muss verstanden werden, was überhaupt ‚zu zeigen' ist. Da in den gestellten Beweisaufgaben häufig die zu beweisende Behauptung erst von den Lernenden herausgearbeitet werden muss (vgl. Abschnitt 6.3.2), gewinnt die Phase hier deutlich an Gewicht. Das Ausmachen des Zieles muss im Kontext des zu nutzenden Diagrammsystems (vgl. Abschnitt 2.5) und der geforderten Beweisform betrachtet werden. Der Nachweis, etwa von Teilbarkeit, gestaltet sich in jedem Diagrammsystem und im Kontext der verschiedenen Beweisformen der Veranstaltung (generischer Beweis etc.) jeweils unterschiedlich. Aus semiotischer Sicht (vgl. Abschnitt 2.5.) geht es um das zu erreichende Diagramm, an dem die nachzuweisende Eigenschaft ‚abgelesen' werden kann. Die Sätze und Definitionen der Vorlesung stecken hierbei den Rahmen für die möglichen Zielsetzungen ab. Die Klärung des Ziels muss als zentrales Element der zu erfolgenden Beweiskonstruktion verstanden werden.

(2) **Klärung der Handlungsoptionen**
Die Handlungsoptionen ergeben sich aus dem ausgemachten Ziel, also aus dem zu erreichenden Diagramm und den zugelassenen Transformationsregeln des jeweiligen Diagrammsystems. Hier wird wiederum die Bedeutung kollateralen Wissens (vgl. Abschnitt 2.5) evident: Erst das Wissen um die Handhabung eines Diagrammsystems ermöglicht ein konformes Agieren. Darüber hinaus geht es in dieser Phase um die Auswahl geeigneter Heuristiken (i.S. von Polya 1967).

(3) **Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen**
Für die Beweiskonstruktion gilt es, dasjenige Diagrammsystem zu wählen, innerhalb dessen der Beweis konstruiert werden soll. (Wenn dies bereits durch die Aufgabenstellungen vorgegeben ist, entfällt dieser Aspekt). Wurde dieser Ausgangspunkt der Aufgabenbearbeitung ausgemacht, so muss die vorliegende bzw. gegebene Situation in das entsprechende Diagrammsystem übertragen werden; hier erfolgt die Konstruktion der Diagramme.

(4) **Anpassen oder Prüfen der Passung:**
Die Form der konstruierten Diagramme hat weitreichende Auswirkungen auf die möglichen erreichbaren Ziele. Soll z.B. eine beliebige gerade Zahl im Diagrammsystem der Punktmuster mithilfe geometrischer Variablen dargestellt werden, so ergeben sich hier (mindestens) zwei verschiedene Möglichkeiten (vgl. Abbildung 51).

Abbildung 51: Zwei verschiedene Möglichkeiten für die Darstellung einer beliebigen geraden Zahl mithilfe geometrischer Variablen

In dieser Phase gilt es somit, die konstruierten Diagramme auf ihren aktuellen Nutzen für das Erreichen des Ziels zu hinterfragen.

(5) **Handwerk**
Hier geht es um das Ausführen von zulässigen Transformationen an bzw. mit den Diagrammen nach den Regeln des jeweiligen Diagrammsystems. Dabei müssen erhaltene Zwischenresultate ausgewertet und weiter genutzt werden.

(6) **Tricks**
Innerhalb vieler (auch basaler) Beweise werden ‚Ideen' verwendet, die zunächst nicht offensichtlich erscheinen. Diese ‚Tricks' gilt es als solche herauszustellen.

(7) **Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen**
Gerade bei der Konstruktion von generischen Beweisen kommt der Versprachlichung von Argumenten eine große Bedeutung zu. Aber auch bei formalen Beweisen werden Kommentierungen und Erläuterungen häufig ausgelassen. Diese Aspekte gilt es zu betonen, bzw. das Verbalisieren entsprechender Momente einzuüben.

Heuristische Lösungsbeispiele in der Beweisdidaktik
Reiss und Renkl (2002) übertragen das Konzept des Lernens aus Musterlösungen („learning from worked-out examples") in die Beweisdidaktik. Die Autoren legitimieren diesen Ansatz durch einen Bezug auf die ‚cognitive load theory' und die Besonderheit des Problemlöseprozesses beim Beweisen:

> The superiority of example-based learning is explained by the argument that problem solving requires such a large amount of working memory capacity when the learning contents are new to the students that it interferes with learning in the sense of schema acquisition. More specifically, it is argued, that in order to solve problems, novices

(i.e., learners) employ means-ends-analyses. This implies that the learner has to simultaneously focus on the following aspects: actual problem state, desired problem state, difference between actual and desired problem states, relevant operators, and sub-goals. Given this load, there are few resources left for the processes of understanding and for inducing abstract and generalizable problem solving schemata […]. (Reiss & Renkl 2002, S. 31)

Für die Konstruktion ihrer „worked-examples“ nutzen Reiss und Renkl (2002) das Prozessmodell des Beweisens nach Beoro (1999) (s. Abschnitt 2.1.1). Dieses Modell wird als Rahmen für die Gliederung der Problemlöseprozesse genutzt, die die Lernenden durchlaufen sollen.

Das Konzept didaktisch aufbereiteter ‚Musterlösungen‘ in der Zentralübung

Die bisher dargestellten theoretischen fachdidaktischen Betrachtungen zu Musterlösungen wurden durch den Autor dieser Arbeit für die Durchführung der Zentralübung adaptiert und zum Erstellen von Musterlösungsprozessen genutzt, die in der Zentralübung (zusammen mit den Teilnehmenden) erarbeitet und reflektiert wurden. Hierbei bieten die Phasen von Musterlösungen (Ableitinger und Herrmann 2011) und die Adaption der Phasen des Beweisprozesses von Boero durch Reiss und Renkl (2002) einen Orientierungsrahmen für die Erarbeitung einer Musterlösung, in der neben der Darstellung der Lösung auch die entsprechenden herausgearbeiteten fachdidaktischen Aspekte des Lösungsprozesses berücksichtigt werden.

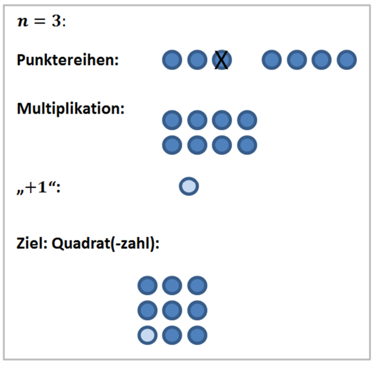
An der folgenden Aufgabe soll exemplarisch die Konstruktion einer didaktisch-orientierten Musterlösung dargestellt werden. Dafür wird die Umsetzung der Aufgabenlösung tabellarisch in Bezug zu den Bearbeitungsphasen von Ableitinger und Hermann (2011) und den Phasen des Beweisprozesses von Boero (1999) gesetzt. Durch diese Analyse wird illustriert, welche Aspekte bei der Erarbeitung einer Musterlösung in der Zentralübung berücksichtigt und in welcher Weise die verschiedenen Phasen von Lösungsprozessen bzw. Beweiskonstruktionen und notwendige Aspekte des jeweiligen kollateralen Wissens in Bezug auf ein Diagrammsystem herausgestellt wurden. Die Phasen von Boero („Entwicklung einer Vermutung“, „Formulierung einer Behauptung“, …)waren dabei in der Zentralübung für den Rahmen strukturgebend, in dem die Musterlösungen gemeinsam mit den Studierenden erarbeitet wurden. Die Studierenden wurden dabei konsequent in die Erarbeitung der Musterlösung eingebunden, Fragen konnten zu jeder Zeit gestellt werden.

Hausaufgabenblatt 2, Aufgabe 1

Aus einem Schulbuch:

Denk dir eine natürliche Zahl, multipliziere ihren Vorgänger mit ihrem Nachfolger und zähle 1 dazu. Probiere dies auch mit anderen Ausgangszahlen und vergleiche die Ergebnisse miteinander. Was fällt dir auf?

a) Was fällt Ihnen auf? - Was haben die Ergebnisse gemeinsam?
b) Beweisen Sie dieses Phänomen mithilfe eines generischen Beweises mit Zahlen.
c) Beweisen Sie dieses Phänomen mithilfe eines generischen Beweises mit Punktmustern.
d) Beweisen Sie dieses Phänomen mithilfe eines Beweises mit geometrischen Variablen.
e) Beweisen Sie dieses Phänomen mithilfe eines formalen Beweises mit Buchstabenvariablen.

Bearbeitungsphase bei Ableitinger und Herrmann (2011)	**Umsetzung in der Zentralübung anhand der konkreten Aufgabe**	**Phase des Beweis-prozesses bei Boero (1999)**
Ein Problembewusst-sein schaffen	Innerhalb der Aufgabenstellung ist eine Handlungsanleitung mithilfe von Wortvariablen gegeben. Deren Umsetzung in konkrete Zahlenbeispiele führt etwa zu den folgenden Gleichungen: $2: (2-1)\cdot(2+1)+1 = 1\cdot 3+1 = 4$ $3: (3-1)\cdot(3+1)+1 = 2\cdot 4+1 = 9$ $7: (7-1)\cdot(7+1)+1 = 6\cdot 8+1 = 49$ Laut Aufgabenstellung sollen nun die Ergebnisse der Gleichungen miteinander verglichen und eine Gemeinsamkeit erkannt werden. Im Vergleich der Zahlen 1, 9 und 49 kann vermutet werden, dass es sich bei den Ergebnissen immer um Quadratzahlen handelt. Diese Vermutung kann anhand weiterer Beispiele überprüft und gestützt werden.	Entwicklung einer Vermutung
	Anschließend soll die ‚Auffälligkeit' benannt werden, was schließlich als Vermutung zu einer Behauptung führt: „Die Ergebnisse solcher Rechnungen sind immer Quadratzahlen".	Formulierung einer Behauptung
Klärung der Handlungsoptionen Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen	[Je nach Aufgabenabschnitt wird nun die Situation in einem bestimmten Darstellungssystem betrachtet. Exemplarisch wird an dieser Stelle Aufgabenteil (c) betrachtet:] Eine Ausgangszahl ist gegeben. Von dieser wird eins subtrahiert bzw. eins addiert und diese beiden erhaltenen Zahlen werden miteinander multipliziert. Als Repräsentation dienen dabei Punktereihen, die um einen Punkt verlängert bzw. verkürzt werden. Die Multiplikation zweier Zahlen wird im Punktmustersystem durch die Konstruktion eines Rechtecks verdeutlicht. Nach Hinzufügen eines Punktes soll als Summe eine Quadratzahl entstehen; im Diagrammsystem der Punktmuster soll also die Form eines Quadrats erreicht werden. Die Handlungsoptionen sind dabei durch die Transformationsregeln des Diagrammsystems der Punktmuster gegeben.	Exploration des spezifischen Gehalts und des Umfelds der These
Anpassen oder Prüfen der Passung	Die Ausgangssituation ist durch zwei Punktereihen gegeben. Durch die ‚Multiplikation' entsteht ein Rechteck, bei der ‚Addition' wird ein weiterer Punkt hinzugefügt. Schließlich soll ein Quadrat entstehen (Abbildung 52):  Abbildung 52: Bearbeitungsschritte der Beweisaufgabe mit Punktmustern im Fall $n = 3$	

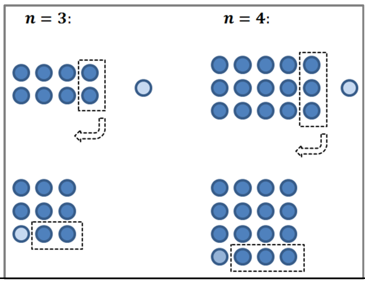
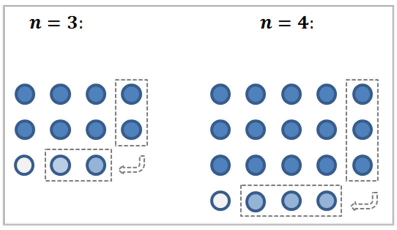
Handwerk	Dabei ist die Frage nach dem Zustandekommen des Quadrats noch ungeklärt. Zwar reicht die Punkteanzahl genau aus, um ein Quadrat zu konstruieren, aber eine beispielübergreifende Bildungs- bzw. Transformationsvorschrift muss noch gefunden werden. Das Quadrat erhält man durch das Umlegen einer Reihe des Rechtecks an die anliegende Seite, wobei der ‚freie' Punkt („$+1$") in die leere Ecke platziert wird (Abbildung 53).  **Abbildung 53: Umstrukturierung der Punktmuster für die Konstruktion eines Quadrats**	
	Die einzelnen Transformationen gilt es nun als Argumente zu bewerten und zu einer Argumentationskette zusammenzufügen.	Auswahl von Argumenten und deren Aneinanderfügen zu einer Argumentationskette
Tricks	Was hier Studierenden zunächst als Tricks erscheinen mag, sind die zulässigen Operationen und Darstellungsmöglichkeiten bei den Punktmustern: das Aneinanderfügen und Wegstreichen von Punkten, die Ausführung der Multiplikation als Konstruktion eines Rechtecks und die regelgeleitete Umstrukturierung zur Bildung eines Quadrats als Repräsentation einer Quadratzahl. Es muss aber deutlich werden, dass dies die (Rechen-) Operationen sind, die im Diagrammsystem der Punktmuster vorgenommen werden.	
Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen	Das Aufschreiben der Beweise ist dabei an den Normen der Lehrveranstaltung ausgerichtet. Das bedeutet für die Konstruktion eines generischen Punktmusterbeweises, dass an konkreten Punktmustern deutlich gemacht werden muss, warum die Behauptung in den konkreten Fällen wahr ist und warum diese Argumentation für alle zu betrachtenden Fälle wahr ist. Somit werden die begleitenden Kommentare und Erläuterungen in diesem Fall im Zuge der aufgestellten Beweisnormen gefordert.  **Abbildung 54: Generische Punktmusterbeispiele für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$** *Multipliziert man den Vorgänger und den Nachfolger einer natürlichen Zahl, so lässt sich dies durch ein Rechteck darstellen, wobei sich die Seitenlängen immer um zwei Punkte unterscheiden. Legt man nun eine Reihe der langen Seite an die kurze an, so wird die lange Seite um 1 verkürzt, die kurze Seite um 1 vergrößert. Schließlich fehlt somit immer genau ein Punkt, um das Quadrat zur Ausgangszahl zu bilden.*	Aufschreiben des Beweises gemäß mathematischer Standards
	- Diese Phase entfällt. -	Annäherung an einen formalen Beweis

Tabelle 21: Exemplarische Darstellung einer didaktisch-orientierten Musterlösung

7. Die empirischen Studien zur Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Die empirischen Studien im Kontext der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/15 lassen sich als eine Evaluation der Lehrveranstaltung und gleichsam als eine Effektivitätsmessung derselben verstehen. Im Folgenden wird ein formaler Überblick über die Messzeitpunkte, die angesprochenen Themenkomplexe und verwendeten Messinstrumente gegeben. Eine Einordnung der entsprechenden Forschungsfragen erfolgt im Kontext der gesondert aufgeführten Teilstudien.

Die erfolgten Studien umfassen insgesamt drei Messzeitpunkte:

Messzeitpunkt 1: Eingangsbefragung zu Beginn der Lehrveranstaltung
Messzeitpunkt 2: Ausgangsbefragung zum Ende der Lehrveranstaltung
Messzeitpunkt 3: Die Modulklausur einen Monat nach Ende der Lehrveranstaltung

Im Fokus der Studien stehen dabei die folgenden Themenkomplexe:

(1) **Vorerfahrungen der Studierenden mit dem Beweisen aus ihrer Schulzeit**
(2) **Kompetenzaspekte zum Beweisen (Qualität der Begründung, Beweisbewertung, Beweiskonstruktion, Akzeptanz verschiedener Beweisformen und wahrgenommene Funktionen von Beweisen)**
(3) **Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik**

Während die Vorerfahrungen zum Beweisen in der Schulzeit in der Eingangsbefragung untersucht werden, zielen die Aspekte (2) und (3) neben der Erfassung der Eingangsvoraussetzung auch auf mögliche Veränderungen durch die Lehrveranstaltung und wurden dementsprechend zu verschiedenen Messzeitpunkten erhoben. Bei der Auflistung der verschiedenen Messzeitpunkte und der dort thematisierten Themenkomplexe in Abbildung 55 wird deutlich, dass zu den verschiedenen Messzeitpunkten bestimme Themenkomplexe wiederholt abgefragt wurden. An diesen Stellen wurden bewusst Items eingesetzt, die im Sinne einer Vorher-Nachher-Erhebung ‚Effekte‘ der Lehrveranstaltung messen sollten.[53]

7.1. Datenerhebung und Messzeitpunkte

Innerhalb der oben aufgeführten drei verschiedenen Messzeitpunkte wurden unterschiedliche Daten erhoben. Die Datenerhebung der Messzeitpunkte 1 und 2 geschah mithilfe eines Fragebogens innerhalb der Vorlesungszeit der Lehrveranstaltung. Die Studierenden hatten für die Bearbeitung der Fragebögen jeweils 45 Minuten Zeit. In beiden Fragebögen wurde ein personenbezogener vierstelliger Code abgefragt, so dass es möglich wurde, die jeweiligen Ergebnisse anonym zu verbinden. Ein zusätzliches Deckblatt der Modulklausur (Messzeitpunkt 3) beinhaltete ebenfalls die freiwillige Angabe dieses personenbezogenen Codes. Auf diesem zusätzlichen Deckblatt wurden nach der Bearbeitung der Klausur auch die Ergebnisse notiert, die im Kontext dieser Studie für die

[53] Themenkomplexe i.S. einer Vorher-Nachher-Erhebung zwischen der Eingangsbefragung und der Ausgangsbefragung: Kompetenzaspekte zum Beweisen: (a) Beweisbewertung und (c) Beweisakzeptanz, Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik: (a)Einstellungen zum Beweisen in der Schule, (b) Einstellungen zum Beweisen, (c) Nutzen von Beispielen beim Beweisen, (d) Funktionen von Beweisen und (e) Einstellungen zur Mathematik; Themenkomplexe i.S. einer Vorher-Nachher-Erhebung zwischen der Eingangsbefragung und der Modulabschlussklausur: Kompetenzaspekte zum Beweisen: (a) Qualität der Begründung

Beantwortung der Forschungsfragen benötigt wurden. Nach dem Eintragen der Ergebnisse wurde das Deckblatt von der Klausur entfernt, so dass eine personenbezogene und doch anonyme Verwendung der Daten aller drei Messzeitpunkte möglich wurde.

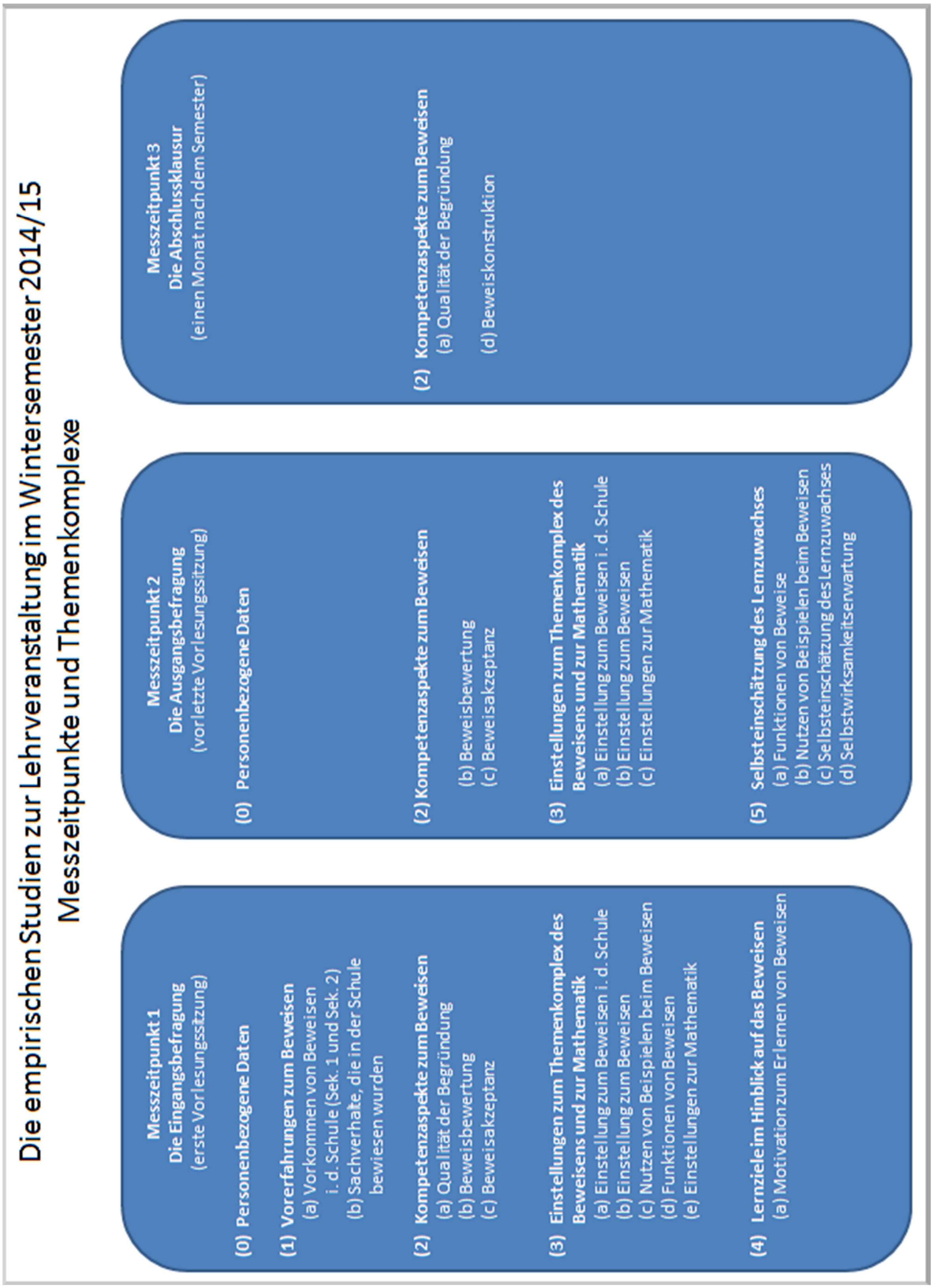


Abbildung 55: Die empirischen Studien zur Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15: Messzeitpunkte und Themenkomplexe

7.1.2 Messzeitpunkt 1: Die Eingangsbefragung zu Beginn der Lehrveranstaltung

Die Eingangsbefragung umfasste die folgenden Bereiche:

(0) Erhebung personenbezogener Daten[54]

(1) Die Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit

a. Vorkommen von Beweisen in der Schule (Sek. 1 und Sek. 2)

b. Sachverhalte, die in der Schule bewiesen wurden

(2) Kompetenzaspekte zum Beweisen

a. Qualität der Begründung

b. Beweisbewertung

c. Beweisakzeptanz

(3) Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik

a. Einstellungen zum Beweisen in der Schule

b. Einstellungen zum Beweisen

c. Nutzen von Beispielen

d. Funktionen von Beweisen

e. Einstellungen zur Mathematik

(4) Lernziele in Bezug auf das Beweisen in der Lehrveranstaltung

a. Motivation zum Erlernen von Beweisen

Die Eingangsbefragung fand in der ersten Sitzung der Lehrveranstaltung statt, die Teilnehmenden hatten für die Bearbeitung 45 Minuten Zeit. Die Instrumente zur Erfassung der oben aufgeführten Aspekte (1)-(4) und ihre Genese wurden bereits in Abschnitt 3.3 dargestellt.

7.1.3 Messzeitpunkt 2: Die Ausgangsbefragung zum Ende der Lehrveranstaltung

In der Ausgangsbefragung wurden fast alle Themenbereiche abgefragt, die bereits in der Eingangsbefragung thematisiert wurden. Als neuer Komplex wurde der Bereich **Selbstwirksamkeit in Bezug auf das Beweisen** aufgenommen; der Abschnitt „Lernziele in Bezug auf die Lehrveranstaltung“ wurde durch den Bereich **Selbsteinschätzung des Lernzuwachses** ersetzt. Nur der Bereich „Qualität der Begründung“ in dem Abschnitt „Kompetenzaspekte zum Beweisen“ wurde in dem dritten Messzeitpunkt erhoben. Somit ergeben sich in der Ausgangsbefragung die folgenden Bereiche:

(0) Erhebung personenbezogener Daten

(1) Kompetenzaspekte zum Beweisen

a. Beweisbewertung

[54] Die **Erhebung der personenbezogenen Daten** umfasst zwei Abschnitte: (i) allgemeine Angaben zur Person und (ii) Angaben zum Studium. Die Eingangsbefragung beinhaltet unter dem Komplex „Allgemeine Angaben zur Person“ neun Items: die Abfrage eines personenbezogenen Codes, Geschlecht, Alter, Art und Jahr der Hochschulreife, Note im Abitur, letzter schulischer Mathematikkurs, Abschlussnote in Mathematik und Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb. Diese Items entstammen den Vorkursbefragungen, die im Rahmen des VEMINT Projekts (www.vemint.de) verwendet werden. Die Angaben zum Studium umfassen sieben Items: vorheriges Studium, vorherige Berufsausbildung, Anzahl Fachsemester, Anzahl Hochschulsemester, Teilnahme an einem Mathematikvorkurs, Variante des Vorkurses (nur bei Teilnahme an Vorkurs in Paderborn) und erfolgte Teilnahme an der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“.

b. Beweisakzeptanz

(2) Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik

a. Einstellungen zum Beweisen in der Schule
b. Einstellungen zum Beweisen
c. Einstellungen zur Mathematik
d. Selbstwirksamkeit in Bezug auf das Beweisen

(3) Selbsteinschätzung des Lernzuwachses

a. Funktionen von Beweisen
b. Nutzen von Beispielbetrachtungen für das Beweisen
c. die Konstruktion und den Umgang mit Beweisen
d. Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen

Im Vergleich zu der Eingangsbefragung wurden dabei die folgenden Änderungen vorgenommen:

Die **Erhebung der personenbezogenen Daten** wurde stark gekürzt; neben der Abfrage des personenbezogenen Codes wurden nur weitere sieben Items aus dem Bereich „Allgemeine Angaben zur Person“ abgefragt, um nachträglich eine richtige Zuordnung der Testhefte gewährleisten zu können. In dem Komplex **Beweiskompetenzen** fehlt die Aufgabe „Summer zweier ungerader Zahlen“ bzgl. der Qualität der Begründung, da diese, zugunsten höherer Verbindlichkeit, in der Modulabschlussklausur (Messzeitpunkt 3) gestellt wurde. In dem Komplex **Beweiskompetenzen** wurde der Abschnitt zur Beweisakzeptanz in der Ausgangsbefragung um zwei Items ergänzt: Die Studierenden sollten angeben, für welche Beweisform (Generischer Beweis mit Zahlen, Generischer Beweis am Punktmuster, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen oder formaler Beweis) Sie sich entscheiden würden, wenn sie selbst einen Beweis konstruieren müssten, und welche Beweisform sie wählen würden, wenn sie den Inhalt eines vorliegenden Beweisen verstehen wollen würden. Die **Vorerfahrungen zum Beweisen in der Schule** entfielen in der Ausgangsbefragung. Die **Einstellungen zum Beweisen in der Schule**, die **Einstellungen zum Beweisen** und die **Einstellungen zur Mathematik** wurden parallel zu der Eingangsbefragung abgefragt. Statt des Fragenkomplexes zu Lernzielen in Bezug auf das Beweisen in der Lehrveranstaltung wurde die Thematik **Selbsteinschätzung des Lernzuwachses** in der Ausgangsbefragung angesprochen. Dazu wurden die Items aus den Abschnitten zu **Nutzen von Beispielen** und **Funktionen von Beweisen** aus der Eingangsbefragung übernommen, allerding wurde in der Ausgangsbefragung neben einer aktuellen Bewertung der Items zusätzlich nach einer retrospektiven Einschätzung („zu Beginn der Lehrveranstaltung“) gefragt. Die in der Eingangsbefragung eingesetzten Items bzgl. der Lernziele zum Beweisen wurden für die Ausgangsbefragung als **Einschätzung des Lernzuwachses** umformuliert. Schließlich sollten die Studierenden in dem Bereich der **Selbstwirksamkeit in Bezug auf das Beweisen** ihre eigenen Kompetenzen aus heutiger Sicht vor und nach der Lehrveranstaltung einschätzen.

In dem Bereich **Selbstwirksamkeit in Bezug auf das Beweisen** sollten die Studierenden ihre eigenen Kompetenzen in Bezug auf das Beweisen aus heutiger Sicht vor und nach der Lehrveranstaltung einschätzen. Die zehn Items des Abschnittes zu den Lernzielen wurden entsprechend umformuliert.

7.1.4. Messzeitpunkt 3: Die Modulklausur einen Monat nach Ende der Lehrveranstaltung

Der Messzeitpunkt 3 besteht aus der Modulabschlussklausur der Lehrveranstaltung. Im Kontext dieser Studie sind dabei die folgenden zwei Punkte zentral:

(1) Die Qualität der Begründung

(2) Die Kompetenz der Studierenden in Bezug auf die Konstruktion der vier verschiedenen Beweisformen der Vorlesung

Die Modulabschlussklausur der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 umfasste sechs Aufgaben. Als erste Aufgabe wurde die Aufgabe „Summer zweier ungerader Zahlen“ aus der Eingangsbefragung gestellt, um wiederum die Qualität der gegebenen Begründungen erfassen und vergleichen zu können. In der zweiten Aufgabe sollten die Studierenden die vier verschiedenen Beweisformen der Vorlesung (Generischer Beweis mit Zahlen, Generischer Beweis am Punktmuster, Beweis am Punktmuster mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) zu der Behauptung konstruieren, dass die Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer ungerade ist. Somit konnte die Kompetenz der Studierenden in Bezug auf die Konstruktion der jeweiligen Beweisformen erfasst werden. In den weiteren Aufgaben wurden die Bereiche „Figurierte Zahlen“, „vollständige Induktion“, „Nutzung des Summenzeichens“, „Beweismethoden“ (Kontraposition bzw. Widerspruchsbeweis) und „Aussagenlogik“ thematisiert.

7.2. Teilstudie 1: Vorerfahrungen und Kompetenzen der Studierenden zum Beweisen und deren Einstellungen zum Beweisen und zur Mathematik zu Beginn der Lehrveranstaltung (bzw. zu Beginn des Studiums)

Zu Beginn des Wintersemesters 2014/15 wurde in der ersten Sitzung der Lehrveranstaltung eine Eingangsbefragung mithilfe eines Fragebogens durchgeführt; die Teilnehmenden hatten für die Bearbeitung 45 Minuten Zeit. Ziel war es zunächst, die Eingangsvoraussetzungen und Einstellungen der Teilnehmenden zu Beginn der Lehrveranstaltung (bzw. bei den Erstsemesterstudierenden zu Beginn ihres Studiums) genauer zu erfassen. Darüber hinaus konnten durch die Erfassung der Daten zu Beginn der Lehrveranstaltung spätere Veränderungen und Zusammenhänge identifiziert werden. Somit ergibt sich übergeordnet ein Pre-/Posttestdesign, dessen Ergebnisse in Abschnitt 7.2 erörtert werden.

Nachdem in Abschnitt 3.3 die im Zuge der Effektivitätsstudie verwendeten Testinstrumente beschrieben worden sind, werden im Folgenden die Forschungsfragen der vorliegenden Untersuchung motiviert und formuliert.

7.2.1 Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Um zunächst die Passung der Lehrveranstaltung für die Zielgruppe der (Erstsemester-) Studierenden bewerten zu können, stellt sich die Frage, welche Vorerfahrungen zur Thematik ‚Begründen und Beweisen‘ die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung mit sich bringen.[55] Diese Eingangsvoraussetzungen der Studierenden müssen dabei einmal für die Gesamtgruppe der Studierenden als Eingangsvoraussetzungen für die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ verstanden werden. Für die Erstsemesterstudierenden erweisen sich die Eingangsvoraussetzungen zur Lehrveranstaltung gleichsam als Eingangsvoraussetzungen für ihr Studium und ergeben sich aus ihrem schulischen Mathematikunterricht. Aus diesem Grund werden bei der Betrachtung der Eingangsvoraussetzungen der Studierenden die Ergebnisse auch getrennt

[55] Um auf eine größere Stichprobe zurückgreifen zu können, werden diese Vorerfahrungen auf der Datengrundlage aller an der Eingangsbefragung teilgenommenen Studierenden herausgearbeitet. Demgegenüber werden bei der Betrachtung der Veränderungen von der Ein- zur Ausgangsbefragung (Abschnitt 7.3) nur die Studierenden betrachtet, die nachverfolgbar an beiden Messzeitpunkten teilgenommen haben.

nach den Subgruppen „Erstsemester“ und „Höhere Semester“ unterschieden. Zunächst geht es bei diesen Eingangsvoraussetzungen um die Vorerfahrungen mit dem Beweisen, die die Studierenden aus ihrer Schulzeit mitbringen. Wie in Abschnitt 2.4.1 herausgearbeitet wurde, liegen für Finnland Befunde aus der Studie von Hemmi (2006) vor, dass Beweise im Mathematikunterricht der Oberstufe zwar häufig vorkommen, die Schülerinnen und Schüler selbst aber nur sehr wenig Gelegenheit dazu haben, Beweise selbst zu konstruieren. Entsprechende (quantitative) Untersuchungen fehlen bislang für den Mathematikunterricht in Deutschland.

- Forschungsfrage[56] [2]: Wie lassen sich die Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit beschreiben?

Neben dieser quantitativen Betrachtung gilt es auch die Eingangsvoraussetzungen der Studierenden zum ‚Begründen und Beweisen‘ qualitativ zu erfassen. Es wurde bereits dargestellt, dass in verschiedenen Studien von den eher als schlecht zu bezeichnenden Argumentations- bzw. Beweiskompetenzen deutscher Schülerinnen und Schüler berichtet wird (s. Abschnitt 2.4.1). Entsprechende empirische Untersuchungen fehlen bislang für die Beweiskompetenzen von Studienanfängerinnen und -anfängern. In Anlehnung an Mejia-Ramos und Inglis (2009) und Selden und Selden (2017) wird dabei ‚Beweiskompetenz‘ als Summe der Teilbereiche „Konstruieren von Beweisen“ und „Lesen/Verstehen von Beweisen“ konzeptualisiert. Selden und Selden (2017, S. 340ff.) fassen unter Beweiskompetenz die Facetten „Beweiskonstruktion“ („proof construction“), Beweisvalidierung („proof validation“), „Beweisevaluation“ („proof evaluation“) und „Beweisverständnis“ („proof comprehension“). Im Folgenden werden diese Facetten von Beweiskompetenz aufgegriffen und es wird kurz erläutert, warum an dieser Stelle von Begründungskonstruktion, Beweisbewertung und Beweisakzeptanz gesprochen wird.

Unter Beweiskonstruktion wird allgemein die Konstruktion eines korrekten Beweises entsprechend den an einer Universität gültigen (fachmathematischen) Normen verstanden (etwa ebd., S. 339). Da eine entsprechende Beweiskonstruktion von Studienanfängerinnen und –anfängern nicht erwartet werden kann, wird stattdessen die Kompetenz *Begründungskonstruktion* betrachtet, die mit weniger formalen Ansprüchen verbunden ist (s. Abschnitt 2.3.4). Im Gegensatz zur Kompetenz der Beweisvalidierung, die die Bewertung der Korrektheit mathematischer Beweise beschreibt (etwa Inglis & Alcock, 2012), umfasst Beweisevaluation nach Pfeiffer (2011, S. 5) neben der Korrektheit von Beweisen auch die Betrachtung weiterer Aspekte, wie Überzeugungskraft oder Erklärungspotential (Selden & Selden 2017, S. 340ff.). An dieser Stelle wird die Bewertung der Korrektheit von Beweisen als *Beweisbewertung* separiert. Die Betrachtung spezieller Aspekte in Beweisen (wie Überzeugungskraft, Erklärungspotential und Sicherung der Gültigkeit) wird zusammen mit dem Verständnis der durch einen Beweis gesicherten Allgemeingültigkeit einer Argumentation (im Sinne eines Beweisverständnisses) als *Beweisakzeptanz* betrachtet.

Für die Erfassung der Kompetenz der Begründungskonstruktion stellt sich zunächst die Frage, wie ‚gut‘ und ‚auf welche Weise‘ die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung begründen und welche Rolle dabei die fachmathematische Symbolsprache spielt. Für die Beweisbewertung wird

[56] In dieser Arbeit werden die größeren bzw. übergeordneten Forschungsfragen durchnummeriert. Die Forschungsfrage [1] war die in Abschnitt 1.4.1 formulierte, rahmengebende Forschungsfrage des hier thematisierten Design-Based Research Projekts. Kleinere ‚Forschungsfragen‘, die im Kontext der Teilstudien formuliert werden, werden als „Leitfragen zur Auswertung“ bezeichnet und gesondert durch die gesamte Arbeit hindurch durchnummeriert.

betrachtet, wie die Studierenden verschiedene Begründungsformen („narrativ und korrekt", „empirisch-induktiv", „formal und falsch", „korrekt mit Variablen") bewerten bzw. welche dieser Begründungsformen von den Studierenden als ‚richtiger Beweis' bewertet wird. Um darüber hinaus die Vorprägung der Studierenden in Bezug auf die Thematik zu ergründen, soll betrachtet werden, von welcher Begründungsform die Studierenden angeben, dass sie ihrem eigenen Ansatz am nächsten komme. So kann auch ermittelt werden, ob die Studierenden für ihren eigenen Ansatz die Verwendung der mathematischen Symbolsprache präferieren. Außerdem wird in diesem Kontext die Frage gestellt, für welche der Begründungsformen der Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note gegeben hätte[57], um sich weiter der schulmathematischen Sozialisation in Bezug auf das Beweisen anzunähern. Schließlich wird die Beweisakzeptanz der Studierenden in Bezug auf die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) betrachtet. Zentral ist hierbei die Frage, inwieweit die Studierenden in der Lage sind, das allgemeingültige Moment in diesen Beweisformen zu erkennen[58]. Um ein ‚ganzheitliches' Bild des Verständnisses dieser Beweisformen bei den Studierenden abstrahieren zu können, werden auch die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit", „subjektive Überzeugung" und „Erklärungspotential" betrachtet. Zusammengefasst wird durch diese Aspekte das Konstrukt der ‚Beweisakzeptanz' erfasst. In Bezug auf die zu erfassende Beweiskompetenz der Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung ergibt sich die folgende Forschungsfrage:

- Forschungsfrage [3]: Wie lassen sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik des ‚Begründens und Beweisens' zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?
    a) Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [3] sollen die folgenden Leitfragen zur Auswertung als Richtlinien dienen:

- Leitfrage zur Auswertung [16]: Wie begründen die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung, wenn sie einen Sachverhalt der elementaren Arithmetik verifizieren sollen, und welche charakteristischen Fehler im Umgang mit Variablen lassen sich dabei feststellen?
    a) Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
- Leitfrage zur Auswertung [17]: Welche Begründungsformen („narrativ und korrekt", „empirisch-induktiv", „formal und falsch", „korrekt mit Variablen") werden von den Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung als „richtiger Beweis" bewertet?
    a) Welche dieser Begründungsformen kommt nach Angabe der Studierenden ihrem potentiellen eigenen Ansatz am nächsten?
    b) Welche Begründungsform hätte nach Angabe der Studierenden durch ihren Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note erhalten?

[57] Somit werden an dieser Stelle die Begründungsformen und Fragen aus der Studie von Healy und Hoyles (1998) aufgegriffen (s. Abschnitt 3.3.2).

[58] Aus diesem Grund wird der Aspekt der „Beweisakzeptanz" auch unter die Kompetenzaspekte gefasst. Die Akzeptanz der Allgemeingültigkeit korrekter beispielgebundener Beweise (hier generischer Beweise) wird hier als Kompetenz betrachtet, die die Studierenden herausbilden sollen.

c) Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

- o Leitfrage zur Auswertung [18]: Wie bewerten die Studierenden die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu Beginn der Lehrveranstaltung in Bezug auf die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit", „subjektive Überzeugung", „Erklärungspotential" und „Allgemeingültigkeit"?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

- o Leitfrage zur Auswertung [19]: Wie lässt sich die Beweisakzeptanz der Studierenden zu den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu Beginn der Lehrveranstaltung (bzw. zu Beginn ihres Studiums) beschreiben?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Neben den Vorerfahrungen der Studierenden und den aufgeführten Beweiskompetenzen ist es auch entscheidend, welche Einstellungen die Studierenden zur Thematik ‚Begründen und Beweisen' und zur Mathematik allgemein zu Beginn der Lehrveranstaltung aufweisen. Unter dieser Perspektive von ‚Einstellungen' sind die folgenden Facetten von Interesse: die Einstellungen der Studierenden zur Bedeutung des Lerngegenstandes ‚Beweisen' für die Schulmathematik, die Einstellung der Studierenden zum Beweisen an sich und die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik. Somit ergibt sich die folgende Forschungsfrage:

- Forschungsfrage [4]: Wie lassen sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?
  a) Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [4] sollen die folgenden Leitfragen zur Auswertung als Richtlinien dienen:

- o Leitfrage zur Auswertung [20]: Wie bewerten die Studierenden die Relevanz des Unterrichtsgegenstandes „Beweis" für verschiedene Schultypen und Schulstufen zu Beginn der Lehrveranstaltung?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
- o Leitfrage zur Auswertung [21]: Wie bewerten die Studierenden ‚gängige' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, zu Beginn der Lehrveranstaltung?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
- o Leitfrage zur Auswertung [22]: Wie bewerten die Studierenden Aussagen zu motivationalen Aspekten zum Beweisen zu Beginn der Lehrveranstaltung?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

- Leitfrage zur Auswertung [23]: Wie lässt sich die Beweisaffinität der Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
- Leitfrage zur Auswertung [24]: Wie schätzen die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung ihre eigene Motivation zum Erlernen verschiedener Aspekte der mathematischen Beweisaktivität ein?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
- Leitfrage zur Auswertung [25]: Welche Einstellungen zur Mathematik können bei den Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung in welchem Maß ausgemacht werden?
  a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Bevor die einzelnen Forschungsfragen beantwortet werden, gilt es zunächst, die hier betrachteten Studierenden näher zu beschreiben. Neben der Gesamtgruppe werden im Folgenden auch die Subgruppen *Studierende in ihrem ersten Hochschulsemester* („Erstsemester“) und *Studierende in einem höheren Semester* („Höhere Semester“) betrachtet. Dazu ist es nötig, die Subgruppen auf ihre Zusammensetzung und mögliche charakteristische Unterschiede hin zu untersuchen, um spätere Ergebnisse besser einordnen und speziell die Wirkung der Vorlesung differenziert nach den Subgruppen erörtern zu können.

7.2.2 Ergebnisse bzgl. der Zusammensetzungen der Studierenden

Die folgenden Auswertungen beziehen sich auf alle Studierenden, die an der Eingangsbefragung teilgenommen haben (N = 149). Darüber hinaus werden auch die Subgruppen *Studierende in ihrem ersten Hochschulsemester* („Erstsemester“) [n = 71] und *Studierende in einem höheren Semester* („Höhere Semester“) [n = 78][59] betrachtet.

Alter und Jahr der Hochschulzugangsberechtigung

Bei der Gesamtstichprobe der Eingangsbefragung liegt das mittlere Alter bei 21,14 Jahren (SD = 2,938; Median = 20), der Median bei dem Jahr der Hochschulzugangsberechtigung bei 2013 (SD = 2,575). In der Abbildung 56 werden die Verteilungen der beiden Merkmale dargestellt.

[59] In dieser Gruppe befinden sich 27 Studierende, die die Lehrveranstaltung bereits einmal besucht haben, und 51 weitere Studierende, die sich wie folgt zusammensetzen: Drei Personen mit einem abgeschlossenen Studium (Bachelor of Commerce, Diplomfinanzwirt und Wirtschaftsinformatik), 26 Personen, die den Studiengang gewechselt haben (Lehramt Mathematik für Gymnasium und Gesamtschule [14], Wirtschaftsingenieurwesen [2], Wirtschaftswissenschaften [4], Mathematik Bachelor [2], Physik Bachelor [1], Rechtswissenschaften [1], Lehramt Primarstufe [1] und Lehramt Mathematik für Berufskolleg [1]), 11 Studierende, die die Lehrveranstaltung erst in einem späteren Semester besuchen, und 11 Studierende, die zu ihrem höheren Hochschulsemester keine Angaben machen.

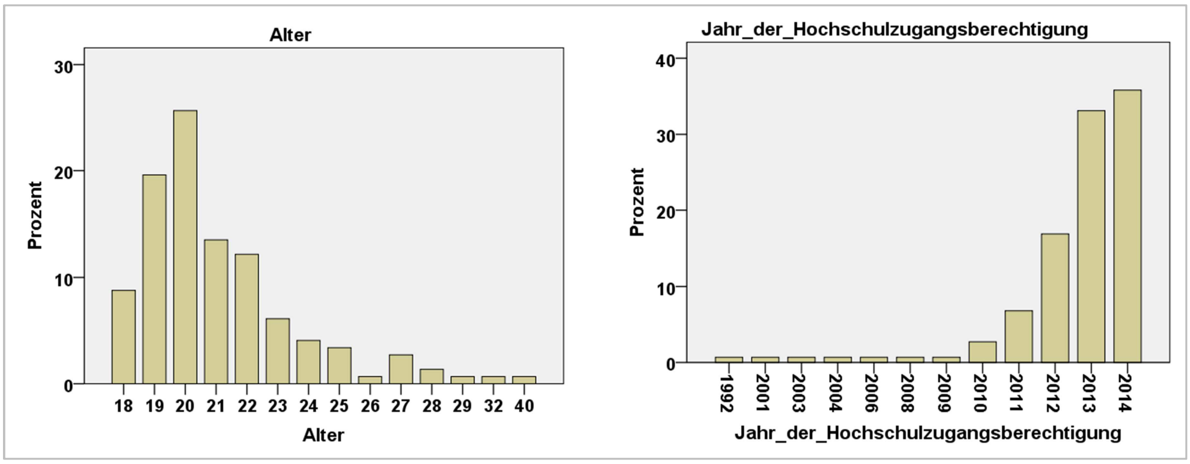


Abbildung 56: Verteilungsdiagramme für die Merkmale „Alter“ und „Jahr der Hochschulzugangsberechtigung“

Bezüglich der Subgruppen erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

	N	M	Median	SD
Erstsemester	70	19,73	19	1,693
Höhere Semester	78	22,40	22	3,241
Gesamt	148	21,14	20	2,938

Tabelle 22: Ergebnisse bzgl. des Merkmals „Alter“ (Alle und Subgruppen)

	N	Median
Erstsemester	71	2014
Höhere Semester	77	2012
Gesamt	148	2013

Tabelle 23: Ergebnisse bzgl. des Merkmals „Jahr der Hochschulzugangsberechtigung“ (Alle und Subgruppen)

Entsprechend der Semesteranzahl sind die Erstsemesterstudierenden im Durchschnitt jünger. Mit dem Median 2014 für das Jahr der Hochschulzugangsberechtigung liegt deren Schulabschluss auch weniger weit zurück als bei den anderen Studierenden. Die größeren Standardabweichungen in der Gruppe der „höheren Semester“ bezüglich des Alters verdeutlichen die Heterogenität dieser Subgruppe.

Geschlecht

Von den Teilnehmern der Eingangsbefragung sind 37% männlich und 63% weiblich. In der Tabelle 24 werden die prozentualen Verteilungen des Merkmals „Geschlecht“ wiedergegeben. Dabei lassen sich keine statistisch signifikanten Unterschiede des Merkmals „Geschlecht“ in Bezug auf die betrachteten Subgruppen ausmachen (Chi²-Test).

	N	männlich [%]	weiblich [%]
Erstsemester	71	39	61
Höhere Semester	78	35	65
Gesamt	**149**	**37**	**63**

Tabelle 24: Prozentuale Verteilung des Merkmals „Geschlecht“ (Alle und Subgruppen)

Im Geschlechtervergleich können keine nennenswerten Unterschiede bzgl. der Merkmale „Alter“ und „Jahr der Hochschulzugangsberechtigung“ ausgemacht werden (vgl. Tabelle 25).

	Geschlecht							
	männlich				weiblich			
	N	M	Median	SD	N	M	Median	SD
Alter	55	21,33	20	3,031	93	21,02	20	2,893
Jahr der HZB	55	2012,49	2013	2,387	93	2012,53	2013	2,693

Tabelle 25: Vergleich der Merkmale „Alter“ und „Jahr der Hochschulzugangsberechtigung“ mit dem Merkmal „Geschlecht“

Art der Hochschulzugangsberechtigung

98,7% der Teilnehmenden haben die allgemeine Hochschulreife. An sonstigen Nennungen wurden einmal die Fachoberschulreife und einmal Matric, ein Abschluss der südafrikanischen Highschool, genannt.

Letzter schulischer Mathematikkurs

Die Betrachtung des letzten schulischen Mathematikkurses ist für die Beschreibung der Teilnehmenden daher von Bedeutung, als die mathematische Vorbildung und fachspezifische Sozialisation hierdurch beeinflusst werden. Auch wird durch entsprechende Kenntnisse die Bedeutung der letzten Mathematiknote (s.u.) relativiert.

Betrachtet man alle Teilnehmenden, so haben 52,7% einen Leistungskurs und 46,6% einen Grundkurs besucht (s. Tabelle 26). Die Nennung unter „Sonstige" ist „mathematics SG", eine südafrikanische Kursbezeichnung. Zwischen den Subgruppen lassen sich keine signifikanten Unterschiede ausmachen (Chi²-Test).

	N	Leistungskurs [%]	Grundkurs [%]	Sonstige [%]
Erstsemester	70	50	50	---
Höhere Semester	78	55,1	43,6	1,3
Gesamt	**148**	**52,7**	**46,6**	**0,7**

Tabelle 26: Prozentuale Verteilung des letzten schulischen Mathematikkurses (Alle und Subgruppen)

In der Tabelle 27 wird die Verteilung der Geschlechter unterteilt nach Subgruppen auf die schulischen Mathematikkurse (Leistungskurs/Grundkurs) dargestellt. Auch hier lassen sich keine signifikanten Unterschiede in Bezug auf den letzten schulischen Mathematikkurs ausmachen (Chi²-Test). Im Vergleich der Subgruppen ist dabei auffällig, dass bei den weiblichen Studierenden im ersten Semester 45,2% einen Leistungskurs und 54,8% einen Grundkurs besucht haben, bei den weiblichen Studierenden in einem höheren Semester die Anteile dagegen bei 58% und 42% liegen. Eine Erklärung für dieses Phänomen kann an dieser Stelle allerdings nicht ausgemacht werden.

		N	Leistungskurs [%]	Grundkurs [%]
Erstsemester	**weiblich**	42	45,2	54,8
	männlich	28	57,1	42,9
Höhere Semester	**weiblich**	50	58	42
	männlich	27	51,9	48,1
Gesamt	**weiblich**	**92**	**52**	**48**
	männlich	**55**	**55**	**45**

Tabelle 27: Prozentuale Verteilung der Geschlechter auf die schulischen Mathematikkurse (Alle und Subgruppen)

Leistungsbezogene Daten: Abiturnote und Note aus dem letzten schulischen Mathematikkurs in Punkten

Betrachtet man die Gesamtgruppe, so liegt der Mittelwert der *Abiturnote* bei 2,86 (Median: 3, SD = 0,47). In Abbildung 57 wird die entsprechende Verteilung dargestellt.

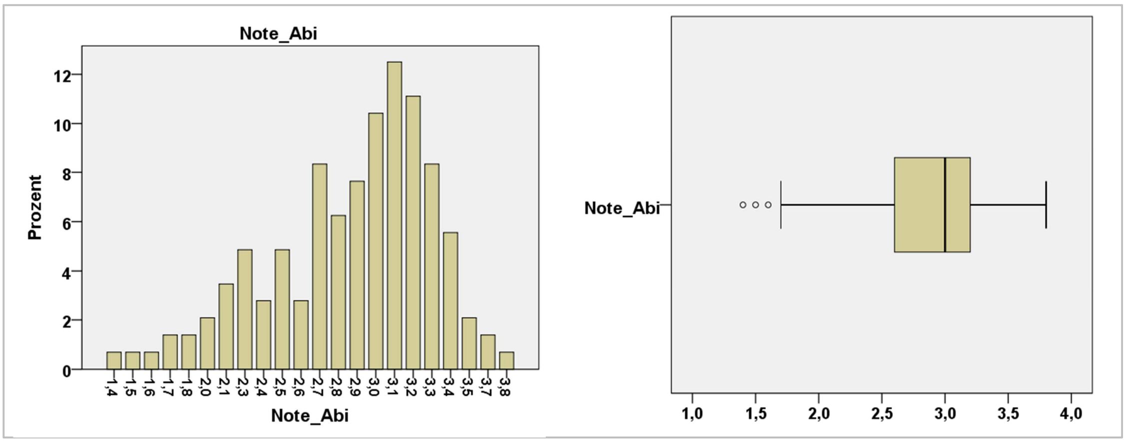


Abbildung 57: Verteilung des Merkmals „Abiturnote“ in der Gesamtstichprobe

Bezüglich des Merkmals „Abiturnote“ ist in den Subgruppen die Homogenität der Varianzen gegeben (Levene-Test nicht signifikant), der Mittelwert der Abiturnote der Erstsemester liegt mit 2,97 statistisch hoch signifikant über dem der restlichen Studierenden mit 2,764 (t-Test; p=0,01 bei einer kleinen bis mittleren Effektstärke von Cohens d=0,44).

	N	M	Median	SD
Erstsemester	67	2,97	3,1	0,4223
Höhere Semester	77	2,77	2,9	0,4912
Gesamt	144	2,86	3,0	0,4697

Tabelle 28: Ergebnisse des Merkmals „Abiturnote“ (Alle und Subgruppen)

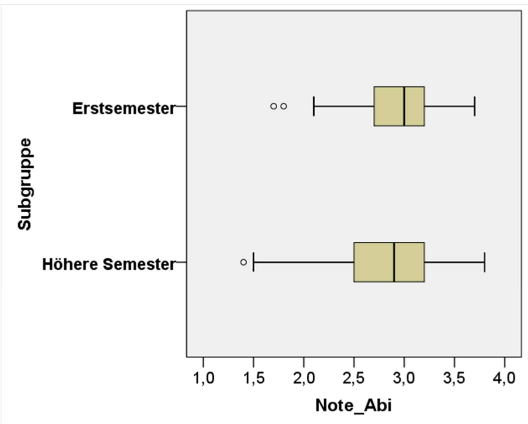


Abbildung 58: Boxplot zur Verteilung des Merkmals „Abiturnote“ (Subgruppen)

Betrachtet man in der Gesamtstichprobe die *letzte schulische Mathematiknote* auf der Punkteskala „0“ (mangelhaft) bis „15“ (sehr gut), so liegt der Mittelwert bei 9,19 Punkten (Median: 9, SD = 2,621). Dieses Ergebnis ist daher erstaunlich, da sich diese Studierenden für das Fachstudium Mathematik für Lehramt an Haupt-, Real und Gesamtschulen entschieden haben.

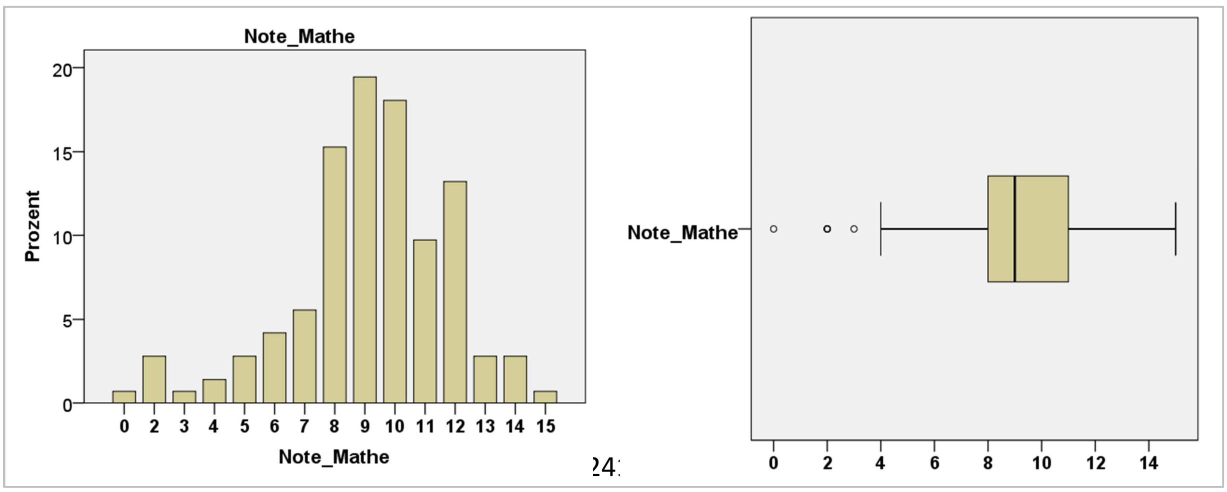


Abbildung 59:Verteilung des Merkmals „Letzte schulische Mathematiknote“ bzgl. der Gesamtstichprobe

Die Ergebnisse der Subgruppen werden in Tabelle 29 dargestellt. Bezüglich der letzten schulischen Mathematiknote ist bei den Subgruppen die Homogenität der Varianzen gegeben (Levene-Test nicht signifikant), der Mittelwert der schulischen Mathematiknote der Erstsemester liegt mit 8,54 hoch signifikant unter dem der restlichen Studierenden mit 9,80 (t-Test; p=0,004 mit einer mittleren Effektstärte von Cohens d=0,5).

	N	M	Median	SD
Erstsemester	69	8,54	9	2,368
Höhere	75	9,80	10	2,711
Insgesamt	144	9,19	9	2,621

Tabelle 29: Ergebnisse des Merkmals „Letzte schulische Mathematiknote“ (Alle und Subgruppen)

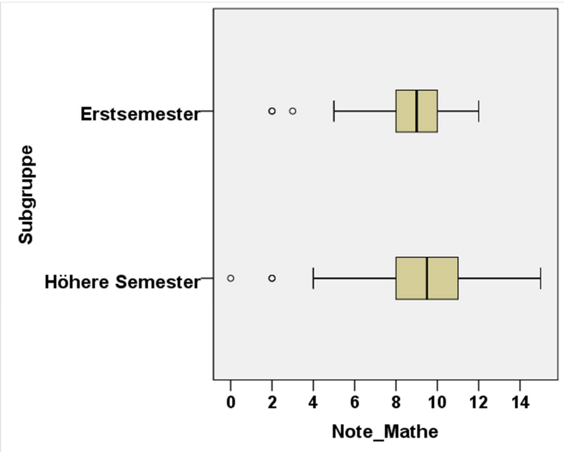


Abbildung 60: Boxplots zur Verteilung des Merkmals „Letzte schulische Mathematiknote“ bezüglich der Subgruppen

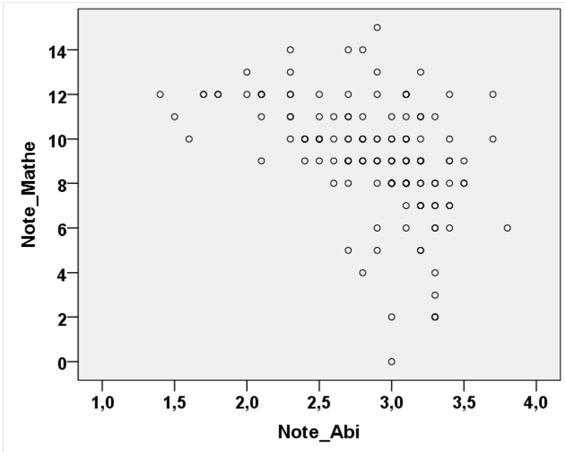


Abbildung 61: Scatterplot zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen den Merkmalen „Letzte schulische Mathematiknote“ und „Note im Abitur“ (Alle).

Die schlechteren Ergebnisse in der Subgruppe der Erstsemester bezüglich der Note im Abitur und der letzten schulischen Mathematiknote lassen sich dahingehend deuten, dass bei den Studierenden in einem höheren Semester vermutlich bereits ein Selektionsprozess innerhalb des Studiums stattgefunden hat. Dieser steht den Studierenden im ersten Semester erst noch bevor. Dieses Ergebnis kann dahingehend gedeutet werden, dass die Abiturnote für den Erfolg im Studium (bzw. im ersten Semester) eine gewisse Rolle spielen könnte.

Schließlich soll hier noch betrachtet werden, ob ein Zusammenhang zwischen der letzten schulischen Mathematiknote und der Abiturnote nachvollzogen werden kann. Die Korrelation ist hierbei mit r=-0,462 nur mittelmäßig hoch, wenn auch mit p<0,001 statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau (vgl. hierzu den Scatterplot in Abbildung 60).

Weiter stellt sich die Frage, ob in Bezug auf die leistungsbezogenen Daten charakteristische Unterschiede zwischen den Geschlechtern auszumachen sind (vgl. Tabelle 30). Im Geschlechtervergleich ist bei dem Merkmal „Abiturnote“ die Homogenität der Varianzen gegeben (Levene-Test nicht signifikant). Der Mittelwert der Abiturnote liegt bei den Männern statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau über dem der Frauen (t-Test; p=0,003 bei einer mittleren Effektstärke von Cohens d=0,52). Der Unterschied der Mittelwerte bezüglich der letzten schulischen Mathematiknote ist nicht signifikant (t-Test), weist aber in dieselbe Richtung, dass die weiblichen Studierenden die besseren Noten hatten.

	Geschlecht							
	männlich				weiblich			
	N	M	Median	SD	N	M	Median	SD
Note Abi	55	3,005*	3,1	0,3739	89	2,767*	2,9	0,5009
Note Mathe	55	8,82	9	2,763	89	9,43	9	2,518

Tabelle 30: Vergleich der Merkmale „Alter“ und „Jahr der Hochschulzugangsberechtigung“ mit dem Merkmal „Geschlecht“ (Alle)

Teilnahme an einem Vorkurs

Bei der Durchführung eines Eingangstests zu Beginn des Studiums ist es wichtig, ob die Teilnehmenden zuvor einen Mathematikvorkurs besucht haben; neben der Schulbildung kann auch ein Vorkurs entscheidenden Einfluss auf das Vorwissen der Studierenden haben.

Insgesamt haben 40,1% der Studierenden an einem Mathematikvorkurs teilgenommen. In der Tabelle 31 werden die Ergebnisse bzgl. der Subgruppen dargestellt.

		Teilnahme an einem Vorkurs	
	N	Nein [%]	Ja [%]
Erstsemester	69	59,4	40,6
Höhere Semester	78	60,3	39,7
Gesamt	**147**	**59,9**	**40,1**

Tabelle 31: Prozentuale Verteilung des Merkmals „Teilnahme an einem Vorkurs“ (Alle und Subgruppen)

Hierbei muss auch betrachtet werden, an welcher Universität und an welcher Art von Vorkurs teilgenommen wurde[60]. In den Paderborner Vorkursen wurde für das Lehramt Haupt-, Real- und Gesamtschule in den hier in Frage kommenden Durchgängen das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen‘ nicht von den Dozenten behandelt. Den Teilnehmenden stand es allerdings frei, sich selbstständig online mit entsprechenden Inhalten aus den verwendeten VEMINT-Lernmaterialien vertraut zu machen. Während in dem Präsenzkurs die Inhalte durch den Dozenten ausgewählt wurden, stand es den Teilnehmenden des E-Kurses frei, sich ihre Lerninhalte selbst auszuwählen. Allerdings wurden die entsprechenden Lernmodule zu der Thematik des Beweisens in den Lernempfehlungen nicht explizit empfohlen.

Alle 28 Erstsemesterstudierenden, die an einem Vorkurs teilgenommen haben, taten dies an der Universität Paderborn, wobei der Präsenzkurs von 46,4% und der E-Learningkurs von 53,6% besucht wurde. Bei den 30 Studierenden in einem höheren Semester, die einen Vorkurs besucht haben, taten dies 29 in Paderborn (P-Kurs: 76,7% und E-Kurs 20%), nur ein Student besuchte einen Vorkurs an einer anderen Universität. Es ist in dieser Gruppe möglich, dass einzelne Studierende an dem Vorkurs für gymnasiales Lehramt teilgenommen haben und sich dadurch ihr Vorwissen zum Begründen und Beweisen erweitert hat. Allerdings trägt dieses Phänomen nur weiter zu der auch oben aufgezeigten sehr heterogenen Zusammensetzung dieser Subgruppe bei, sie wird nicht hierdurch konstituiert.

	N	P-Kurs [%]	E-Kurs [%]	Vorkurs nicht in Paderborn [%]
Erstsemester	28	46,4	53,6	0
Höhere Semester	30	76,7	20	3,3
Gesamt	58	62,1	36,2	1,7

Tabelle 32: Prozentuale Verteilung der Teilnahme an den Vorkursvarianten (Alle und Subgruppen)

[60] An der Universität Paderborn werden die Mathematikvorkurse im Rahmen des VEMINT-Projekts (www.vemint.de) durchgeführt. Die Teilnehmenden können sich hierbei zwischen einer E-Learning-Variante („E-Kurs“) und einer Präsenzvariante („P-Kurs“) entscheiden. Beide Kursvarianten sind Blended-Learning-Szenarien und unterscheiden sich hinsichtlich der Gewichtung der Präsenz- und E-Learning-Anteile.

Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb

Da in Mathematikwettbewerben vor allem Problemlöse- und Beweisaufgaben gegeben werden, gilt es zu untersuchen, ob Studierende an entsprechenden Wettbewerben teilgenommen haben. Dies würde ein besonderes Training im Problemlösen und Beweisen implizieren.

Insgesamt haben 29,5% der Studierenden bereits an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen. In der Tabelle 33 werden die Verteilungen nach Subgruppen angegeben.

	N	Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb	
		Nein [%]	Ja [%]
Erstsemester	70	70	30
Höhere Semester	76	71,1	28,9
Gesamt	**146**	**70,5**	**29,5**

Tabelle 33: Prozentuale Verteilung des Merkmals „Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb" (Alle und Subgruppen)

Bezüglich der Teilnahme an Mathematikwettbewerben lassen sich keine signifikanten Unterschiede zwischen den Subgruppen ausmachen (Chi^2-Test).

Zusammenfassend lässt sich an dieser Stelle festhalten, dass 98,7% der betrachteten Studierenden die allgemeine Hochschulreife besitzen. Die eher als moderat zu bezeichnenden Ergebnisse bzgl. der Abiturnote (arithmetisches Mittel: 2,86 und Median: 3) und der letzten schulischen Mathematiknote in Punkten (arithmetisches Mittel: 9,19 und Median: 9) sind hierbei bemerkenswert.

Bei der Betrachtung der Subgruppen konnte gezeigt werden, dass die Erstsemesterstudierenden im Durchschnitt (statistisch signifikant) schlechtere Ergebnisse in der Abiturnote und in der letzten schulischen Mathematiknote aufweisen, was vermutlich auf eine erfolgte Selektion bei den Studierenden in einem höheren Semester zurückzuführen ist. Keine (statistisch) signifikanten Unterschiede konnten an dieser Stelle bzgl. der Merkmale „Geschlecht", „Schulischer Mathematikkurs", „Vorkursteilnahme" und „Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb" nachgewiesen werden. Somit können die Unterschiede der Leistungsmerkmale in den Subgruppen nicht durch unterschiedliche Verteilungen dieser Merkmale relativiert werden.

Schließlich kann vermutet werden, dass die Beweisvorstellungen und die Kompetenzaspekte zur Thematik des Beweisens mindestens bei den Studienanfängern nicht in einem beachtenswerten Maße durch die Teilnahmen an Vorkurs oder Mathematikwettbewerben beeinflusst wurden.

7.2.3 Ergebnisse bzgl. der Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit

Bzgl. der Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit wurden die folgenden Aspekte untersucht: (i) die Anzahl kennengelernter und selbst entwickelter Beweise in ihrer Schulzeit, (ii) Sachverhalte, die nach Angaben der Studierenden in ihrer Schulzeit bewiesen worden sind, und (iii) ob den Studierenden die vier in der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" verwendeten Beweisformen (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der formale Beweis) bereits aus der Schule bekannt sind. Im Folgenden werden zunächst die Ergebnisse bzgl. dieser drei Aspekte separat aufgeführt, bevor im Anschluss anhand der erhaltenen Ergebnisse die oben formulierte Forschungsfrage [5] beantwortet wird. Bei den Ergebnissen wird dabei nicht zwischen den Subgruppen „Erstsemester" und „Höhere Semester" unterschieden, da dies bei der Thematik nicht sinnvoll erscheint.

(i) Anzahl kennengelernter und selbst entwickelter Beweise in der Schulzeit

Die Ergebnisse bzgl. der Angaben der Studierenden zu Beweisen in ihrer Schulzeit werden in der Abbildung 62 dargestellt.

Für die *Sekundarstufe 1* fällt auf, dass 29% der Befragten angeben, keinen Beweis kennengelernt zu haben. Mehr als die Hälfte (62%) der Studierenden sind insgesamt der Ansicht, höchstens zwei Beweise in der Sekundarstufe 1 gesehen zu haben. Für die *Sekundarstufe 2* zeigt sich, dass insgesamt 31% der Studierenden der Auffassung sind, höchstens zwei Beweise kennengelernt zu haben; immerhin 35% meinen drei bis fünf und noch 22% sprechen von vier bis zehn Beweisen. Die Unterschiede der beiden Verteilungen sind statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau (Chi²-Test: $p<0{,}001$), wie auch der Unterschied der Mediane (Beweise in der Sek. 1: Median: „1–2 Beweise“, SD=1,121; Beweise in der Sek. 2: Median: „3-5 Beweise“, SD=1,236; Wilcoxon-Test: $p<0{,}001$). Somit meinen die Studierenden, signifikant mehr Beweise in der Sekundarstufe 2 als in der Sekundarstufe 1 kennengelernt zu haben.

Bezüglich der *Eigenentwicklung von Beweisen* lässt sich festhalten, dass 39% der Teilnehmenden angeben, in ihrer Schulzeit nie einen Beweis selbst entwickelt (gefunden und aufgeschrieben) zu haben. Insgesamt sind 74% der Befragten der Ansicht, in ihrer gesamten Schulzeit höchstens zwei Beweise selbst entwickelt haben.

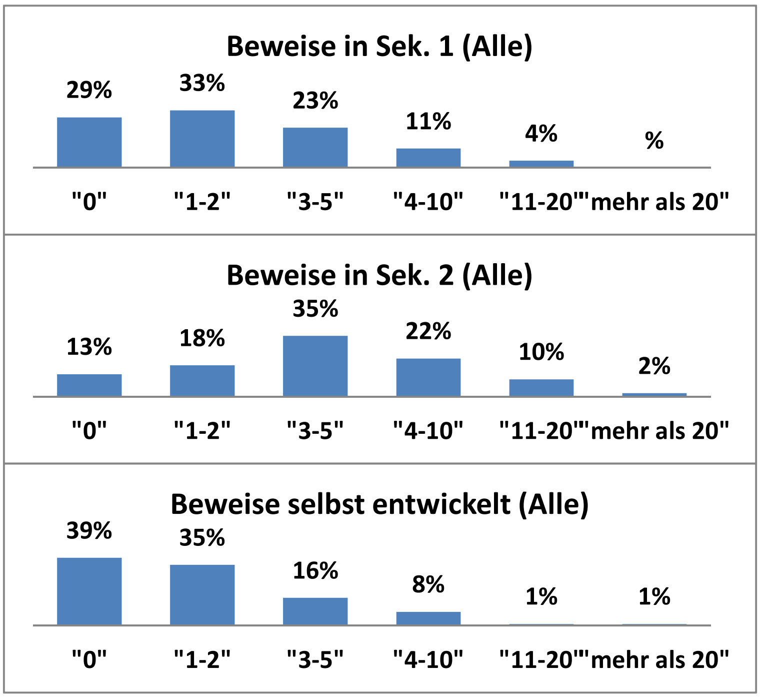


Abbildung 62: Angaben der Studierenden zum Vorkommen von Beweisen in ihrer Schulzeit (Alle, n=149)

(ii) Sachverhalte, die nach Angaben der Studierenden in der Schule bewiesen worden sind

Auf die Frage, welche mathematischen Sachverhalte in der Schule bewiesen wurden, waren die folgenden Nennungen die häufigsten: Satz des Pythagoras (37x), PQ-Formel (14x), Ableitungsregeln[61] (13x), Satz des Thales (8x) und die binomischen Formeln (6x). Insgesamt konnten 48 Nennungen dem

[61] Unter dem Begriff „Ableitungsregeln“ wurden auch all diejenigen Antworten zusammengefasst, in denen konkrete Ableitungsregeln genannt wurden.

Bereich der Geometrie, 19 dem Bereich der Analysis, 12 dem Bereich der Arithmetik und jeweils zwei der Nennungen der Linearen Algebra und der Stochastik bzw. Statistik zugeordnet werden.

(iii) Kenntnis der vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung aus der Schulzeit

In der Eingangsbefragung wurden den Studierenden vier verschiedene konkrete Beweise vorgelegt (ein generischer Beweis mit Zahlen, ein generischer Beweis mit Punktmustern, ein Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und ein formaler Beweis), die sie für die Erfassung von ‚Beweisakzeptanz' anhand verschiedener Items bewerten sollten. Dabei sollten die Studierenden auch angeben, ob ihnen diese Begründungsform aus ihrer Schulzeit bekannt ist. Die konkreten Beweisprodukte, bzgl. derer die Studierenden die Bewertungen vornehmen sollten, wurden in Abschnitt 3.3.3 angegeben.

Die Ergebnisse bzgl. der Angaben der Studierenden, ob ihnen diese Begründungsformen aus ihrer Schulzeit bekannt sind, werden in der Tabelle 34 angegeben. Beachtenswert erscheinen dabei insgesamt die niedrigen Werte der Zustimmungen.

	GenZ	**GenP**	**GV**	**FB**
Alle				
n	121	127	122	126
Anteil "ja" [%]	20,7	14,2	5,7	51,6[62]

Tabelle 34: Prozentuale Anteile der Antworten „ja" bzgl. der Frage, ob die jeweilige Begründungsform den Studierenden bereits aus der Schule bekannt ist (Alle) [„GenZ": generischer Beweis mit Zahlen, „GenP": generischer Beweis mit Punktmustern, „GV": Beweis mit geometrischen Variablen, „FB": formaler Beweis]

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [2] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.2.3. zusammenfassend ausgewertet.

Beantwortung der Forschungsfrage [2]: Wie lassen sich die Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit beschreiben?

Die Studierenden hatten nach eigenen Angaben in ihrer Schulzeit insgesamt nur wenig Kontakt mit Beweisen. Für den Zeitraum der Sekundarstufe 1 sind 62% der Studierenden der Ansicht, höchstens zwei Beweise kennengelernt zu haben. Für den Zeitraum der Sekundarstufe 2 geben 31% der Studierenden an, höchstens zwei Beweise kennengelernt zu haben, 35% meinen drei bis fünf, 22% vier bis zehn Beweise. Es zeigt sich, dass die Studierenden hier angeben, (statistisch signifikant) mehr Beweise in der Sekundarstufe 2 als in der Sekundarstufe 1 kennengelernt zu haben.

39% der Studierenden haben nach eigenen Angaben in ihrer Schulzeit nie einen Beweis selbst entwickelt (gefunden und aufgeschrieben), von höchstens zwei Beweisen sprechen insgesamt 74%.

Dabei muss kritisch angemerkt werden, dass die von den Studierenden angegebenen Anzahlen nicht mit der tatsächlichen Anzahl von vorgekommenen Beweisen im Schulunterricht gleichgesetzt werden können. Auch müssen die Ergebnisse vor dem Hintergrund relativiert werden, dass nicht mit

[62] Bei der Zustimmung bzgl. des formalen Beweises (insgesamt 51,6%) ist der Unterschied in den Subgruppen (Erstsemester: 67,8% und Höhere Semester: 37,3%) statistisch hoch signifikant (Chi²-Test, $p<0{,}001$). Dieser Unterschied kann dahingehend interpretiert werden, dass sich bei den „Höheren Semestern" ein Verständnis von formalen Beweisen herausgebildet hat, welches sich von den in der Schule kennengelernten formalen Beweisen unterscheidet.

Sicherheit gesagt werden kann, was von den Studierenden unter einem ‚Beweis' verstanden wird. Bei den Ergebnissen bzgl. der Akzeptanz der verschiedenen Beweisformen (vgl. Abschnitt 7.2.4) wird deutlich werden, dass Begründungsformen ohne formale Darstellungen von den Studierenden eher nicht als (korrekte und richtige) Beweise betrachtet werden. Die erhaltenen Ergebnisse lassen allerdings einen Aufschluss darüber zu, welche Rolle das Beweisen in der Schule nach den Erinnerungen der Studierenden gespielt hat.

Diese Ergebnisse entsprechen den Ergebnissen von Hemmi (2006), in deren Studie 59% (n=168) der finnischen Studienanfängerinnen und -anfänger angaben, in der Oberstufe („upper secondary school") höchstens ein- oder zweimal in einem Schulhalbjahr („term") Beweise selbst konstruiert zu haben (ebd., S. 132f.). Allerdings meinte in der Studie von Hemmi gut die Hälfte der Studierenden, dass ihr Mathematiklehrer in der Oberstufe mindestens einmal in der Woche einen Sachverhalt bewiesen habe (ebd., S. 128f.). Diese Diskrepanz könnte dabei mit dem Fragenformat zusammenhängen, da in der Studie von Hemmi (2006) kürzere Zeitintervalle besprochen wurden („jede Stunde", „einmal die Woche", …), in der vorliegenden Studie aber die gesamte Sekundarstufenzeit in den Blick genommen wurde.

Bei den Nennungen von Sachverhalten, die in der Schule bewiesen wurden, wurde deutlich, dass der Bereich der Geometrie am stärksten mit dem Beweisen verbunden zu sein scheint: Der Satz des Pythagoras wird mit 39 Nennungen deutlich am häufigsten genannt, der Satz des Thales noch achtmal. Dieses Resultat entspricht den Ergebnissen von Mingus (1999, S. 439). Die nächst häufigeren Nennungen waren hierbei die PQ-Formel (14x), Ableitungsregeln (13x) und die binomischen Formeln (6x). Interessant erscheint dabei der Gegensatz zum obigen Ergebnis, dass nach Angaben der Studierenden in der Sekundarstufe 2 (signifikant) mehr Beweise thematisiert wurden als in der Sekundarstufe 1. Die am häufigsten genannten Sachverhalte sind allerdings fast ausschließlich der Sekundarstufe 1 zuzuordnen. Hierfür lassen sich zwei mögliche Erklärungen anführen: Zunächst kann mit dem Prädikat „Beweis" ein höherer mathematischer Anspruch verbunden sein, wodurch diese Begrifflichkeit intuitiv eher den höheren Schulstufen zugewiesen wird. Zudem könnten Sachverhalte wie der Satz des Pythagoras oder die PQ-Formel als schulische Prototypen für das Beweisen gesehen werden, welche den Studierenden zunächst im Kontext des Beweisens in den Sinn kommen. Interessanterweise fehlen bei den Nennungen zentrale Sätze der Oberstufenmathematik, wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Es muss dabei angemerkt werden, dass die Nichtnennung von Inhalten natürlich nicht bedeutet, dass diese in der Schulzeit wirklich nicht bewiesen wurden.

Geht man von den aufgeführten häufigsten Nennungen bzgl. bewiesener Sachverhalte aus, so lässt sich auch in einem gewissen Maße abstrahieren, welche Aktivitäten die Studierenden mit dem Begriff ‚Beweisen' assoziieren. In der Schulgeometrie sind Beweise auf verschiedenen Niveaustufen bzw. auf verschiedenen Stufen der Strenge führbar (vgl. etwa Holland 1996, S. 51ff. oder Hefendehl-Hebeker und Hußmann 2003, S. 99ff.), die Argumentationen verlaufen hierbei häufig im Wechselspiel mit einer ‚Beweisfigur'. Beinhalten die Beweise zu den aufgeführten geometrischen Sätzen deduktives Schließen, so werden die Beweise der genannten algebraischen Zusammenhänge durch Termumformungen konstituiert. Der Beweis von algebraischen Zusammenhängen, wie etwa den binomischen Formeln, besteht nicht aus explizit deduktiven Schlüssen, sondern aus sinnvoll angewendeten Termumformungen (vgl. den Begriff des „manipulative proof" in Tall 1995, S. 34). Dabei werden keine innermathematischen Argumente (Sätze o. ä.) benutzt, die über zulässige algebraische Operationen hinausgehen. Die am häufigsten genannten Sachverhalte, die nach

Auskunft der Studierenden in der Schule bewiesen worden sind, verlangen folglich Beweisaktivitäten wie (schlichte) Termumformungen und die Nutzung mathematischer Sätze bzgl. ‚konkreter geometrischer Objekte' (Gerade, Winkel, …) in Verbindung mit einer Beweisfigur. Wie und auf welchem fachmathematischen Niveau die verschiedenen Ableitungsregeln in der Sekundarstufe 2 bewiesen wurden, muss hier offen gelassen werden. Beweise in traditionellen Erstsemesterveranstaltungen der Mathematik basieren dagegen auf anderen Aktivitäten, wie der Operationalisierung von Definition, der Nutzung mathematischer Sätze bzgl. abstrakter Objekte und deduktives Schließen (etwa Selden & Selden 2015).

Bei den Angaben der Studierenden, welche Begründungsformen ihnen aus ihrer Schulzeit bekannt sind, zeigt sich, dass nur etwa die Hälfte der Studierenden im Fall des formalen Beweises zustimmen. Die Zustimmungen zu den anderen Begründungsformen fallen noch deutlich niedriger aus (s.o.). Interessanterweise geben die Studierenden an, dass ihnen die Begründungsformen, die in der Literatur gerade als schuladäquate Begründungsformen aufgeführt werden (etwa Leiß & Blum 2006, S. 33ff.; Leuders 2010, S. 53; Meyer & Prediger 2009; Ufer & Kramer 2015, S. 86ff.), noch deutlich weniger bekannt sind als der formale Beweis. An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass die Bewertungen auch mit den konkret angegebenen Beweisen zusammenhängen und die Angaben der Studierenden folglich nicht direkt auf die generelle Begründungsform zurückgespiegelt werden können; die generelle (starke) Tendenz der Ergebnisse verbleibt aber.

Insgesamt werden somit große Diskrepanzen zwischen der Mathematik der Schule und der Hochschule deutlich: Spielten Beweise in der Schule eine eher untergeordnete Rolle, werden sie in der Hochschulmathematik zu einem zentralen mathematischen Werkzeug; auch verändern sich die Aktivitäten, die die Beweise konstituieren. Es muss festgehalten werden, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger in ihrem schulischen Mathematikunterricht anscheinend keine Möglichkeiten hatten, ein Verständnis von ‚Beweisen' aufzubauen, das dem an einer Universität entspricht.

7.2.4 Ergebnisse bzgl. der Kompetenzaspekte zum Beweisen

Die in diesem Abschnitt thematisierten Kompetenzaspekte zum Beweisen betreffen die Bereiche „Begründungskonstruktion", „Beweisbewertung" und „Beweisakzeptanz".

7.2.4.1 Qualität der Begründung

In der Eingangsbefragung sollten die Studierenden die folgende Aufgabenstellung bearbeiten:

> Die Summe 11 + 17 ist eine gerade Zahl.
> Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen?
> - Begründen Sie überzeugend.

Im Kontext dieser Aufgabe wurden die Bearbeitungen der Studierenden im Hinblick auf die *Qualität der Begründung* untersucht („Wie ‚gut' wird begründet?") und die verschiedenen *Begründungsarten* („Wie wird begründet?") und charakteristischen Fehler im Umgang mit Variablen herausgearbeitet. Die Entwicklung des für die Bewertung verwendeten Kategoriensystems wurde bereits in Abschnitt 3.3.1 dargestellt. Im Folgenden werden die verwendeten Kategorien benannt, erläutert und mit entsprechenden Ankerbeispielen illustriert.

Name	Beschreibung	Ankerbeispiel (Wörtliche Zitate aus Bearbeitungen der Studierenden)
K0: Keine Begründung	Die Aufgabe wird bearbeitet, ohne dass ein Beleg oder ein Grund für die Gültigkeit angegeben wird.	*Ja.*
K1: Empirisch	Beispiele werden - ohne weitere (deduktive) Begründung - als Beleg für die allgemeine Gültigkeit der Behauptung angeführt.	*Ich habe die Aussage mit anderen Zahlen ausprobiert:* $3 + 3 = 6$ *gerade* $7 + 5 = 12$ *gerade* $13 + 7 = 20$ *gerade* *Die Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen ist immer gerade.*
K2: Pseudo	Die genannten Begründungen bestehen aus Zirkelschlüssen, sind redundant, unpassend oder sachlich falsch.	*Ja, es gilt für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen, weil sie immer durch 2 teilbar ist.*
K3: Fragmentarisch	Es werden relevante Aspekte benannt, die allerdings nicht für eine Begründung genutzt werden.	*Eine ungerade Zahl kann als* $2n + 1$ *dargestellt werden.*
K4: Argumentation mit Lücke	Es wird eine korrekte mathematische Argumentation gegeben, welche allerdings eine Lücke enthält, so dass die Ausgangsbehauptung nicht allgemeingültig verifiziert wird.	*Ja, weil eine ungerade Zahl durch* $2n + 1$ *dargestellt wird und* $(2n + 1) + (2n + 1) = 2 \cdot (2n + 1)$ *gerade ist.*
K5: Vollständige Argumentation	Die Gültigkeit der Behauptung wird deduktiv mithilfe valider mathematischer Argumente hergeleitet.	*Eine ungerade Zahl lässt sich darstellen als* $2n + 1$ *mit* $n \epsilon \mathbb{N}_0$. $(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2$ $= 2(n + m + 1)$ *Also ist das Ergebnis eine gerade Zahl.*

Tabelle 35: Das Kategoriensystem zur Erfassung der „Qualität der Begründung“ mit Erläuterungen und Ankerbeispielen

Ergebnisse

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [16]: Wie begründen die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung, wenn sie einen Sachverhalt der elementaren Arithmetik verifizieren sollen, und welche charakteristischen Fehler im Umgang mit Variablen lassen sich dabei feststellen? Und:

a) Inwiefern lassen sich dabei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Ergebnisse bzgl. der Qualität der Begründungen zu Beginn der Lehrveranstaltung („Wie ‚gut' wird begründet?")

Die Ergebnisse bzgl. der „Qualität der Begründungen" werden in der Abbildung 63 dargestellt. Beachtenswert erscheint dabei besonders, dass insgesamt nur 19,5% der Bearbeitungen als vollständige Argumentationen gewertet werden konnten, wobei immerhin noch 22,8% lückenhafte Argumentationen sind. Auffallend ist weiter der große Anteil von Pseudoantworten mit 25,5%. Dieses Phänomen wird bei der Betrachtung der verschiedenen Begründungsarten (s.u.) näher betrachtet. Bei den Erstsemesterstudierenden fallen die Anteile der rein empirischen Begründungen (14,1%) und der Pseudoantworten (32,4%) deutlich höher als in der Subgruppe der Höheren Semester aus. In der Subgruppe der Erstsemester werden nur in insgesamt 19,7% der Bearbeitungen überhaupt korrekte Aspekte angeführt [„frag." + „Arg. mit Lücke" + „vollst. Arg."], bei den Höheren Semestern liegt dieser Anteil dagegen bei 67,9%. Bemerkenswert erscheinen die niedrigen Anteile der vollständigen Argumentationen in den Subgruppen.

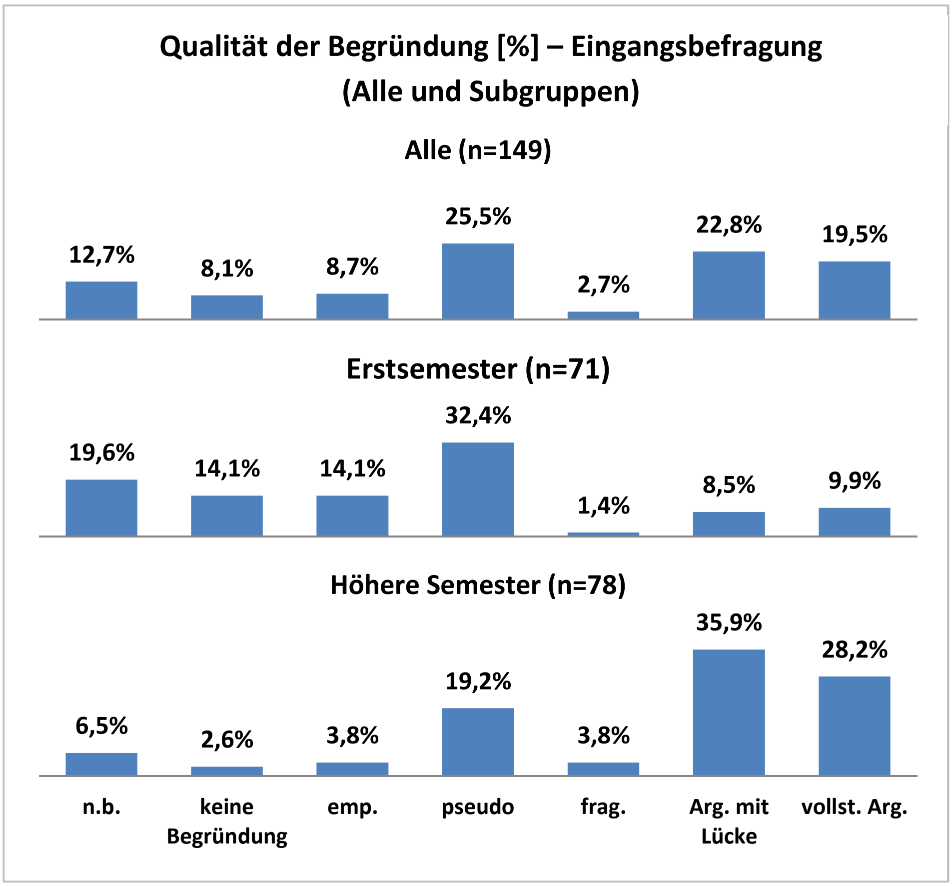


Abbildung 63: Prozentuale Verteilung der Ergebnisse der „Qualität der Begründung" in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen)

Vergleicht man die Ergebnisse der Subgruppen miteinander, so ist der Anteil der vollständigen Argumentationen bei den Studierenden in einem höheren Semester statistisch signifikant auf dem 1%-Niveau höher als bei den Erstsemesterstudierenden bei schwacher Effektstärke (Chi²-Test, p=0,005; Cramers V[63]=0,231). Betrachtet man die Bewertungen der Qualität der Begründungen auf

[63] Innerhalb dieser Arbeit wird als Maß der Effektstärke bei einem Chi²-Test der Zusammenhangskoeffizient „Cramers V" verwendet. Für die Werte von Cramers V gelten die folgenden Einteilungen:
$0 \leq$ Cramers V $< 0{,}1$: kein Zusammenhang, $0{,}1 \leq$ Cramers V $< 0{,}3$: geringer Zusammenhang,

einer ordinalen Skala (mit den entsprechenden Werten 0 bis 5), so zeigt sich, dass in der Gruppe der ‚Höheren Semester' der Median von 4 statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau über dem Median von 2 der Erstsemesterstudierenden liegt (Mann-Whitney-U-Test, p=0,006; hohe Effektstärke: Cohens d[64]=0,98; vgl. Abbildung 64). Die Qualität der Begründung korreliert in der Gesamtstichprobe leicht mit der letzten schulischen Mathematiknote (Spearman-Rho=0,278 mit p=0,002). Die Studierenden, die schon einmal an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen haben, sind mit einem Median von 4 statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau besser als die Studierenden ohne eine Teilnahme mit einem Median 2 (Mann-Whitney-U-Test, p=0,046; schwache Effektstärke: Cohens d=0,43). Bezüglich der Merkmale „Geschlecht", „Schulischer Mathematikkurs" und „Teilnahme am Vorkurs" lassen sich keine signifikanten Unterschiede bzgl. der Mediane der „Qualität der Begründungen" ausmachen.

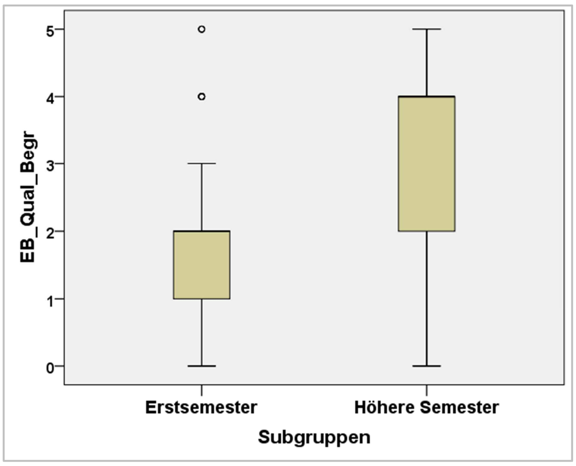


Abbildung 64: Boxplots zu den Verteilungen der Ergebnisse zur „Qualität der Begründung" in der Eingangsbefragung [„EB_Qual_Begr"] (Subgruppen)

Die verwendeten Begründungsarten („Wie wird begründet?")

In der Betrachtung aller Bearbeitungen konnten insgesamt neun verschiedene Begründungsarten ausgemacht werden (A1–A9, vgl. Tabelle 36)[65]. Diese Begründungsarten, die teilweise korrekt und teilweise falsch sind, werden im Folgenden kurz erläutert, worauf die entsprechenden Verteilungen auf die Studierendengruppen angegeben werden.

$0{,}3 \leq$ Cramers V $< 0{,}5$: mittlerer Zusammenhang, $0{,}5 \leq$ Cramers V $< 0{,}7$: hoher Zusammenhang und $0{,}7 \leq$ Cramers V < 1: sehr hoher Zusammenhang (vgl. Kuckartz et al. 2013, S. 98). Innerhalb der Auswertungen des Kapitels 7 werden die Effektstärken der durchgeführten statistischen Tests nur dann angegeben, wenn dies im Rahmen der jeweiligen Forschungsperspektive sinnvoll erscheint.

[64] Im Rahmen der Auswertung der Eingangsbefragung wird als Maß für die Effektstärke beim Mann-Whitney-U-Test auf Grund des Größenunterschieds der Subgruppen „Cohens d" verwendet. Für die Werte von Cohens d gelten die folgenden Einteilungen: $0{,}2 \leq d < 0{,}5$: „kleine Effektstärke", $0{,}5 \leq d < 0{,}8$: „mittlere Effektstärke" und $0{,}8 < d$: „starke Effektstärke" (vgl. Cohen 1992, S. 157).

[65] Die Kategorie „induktiv" entspricht dabei der Kategorie „empirisch" aus dem Kategoriensystem zur Erfassung der Qualität der Begründung. Diese Kategorie sowie die Kategorien „Nicht bearbeitet" und „Keine Begründung" wurden in das vorliegende Kategoriensystem übernommen, damit sich die entsprechenden Prozentwerte auf die gleiche Grundgesamtheit beziehen. Die Kategorie der „Pseudobegründungen" aus dem Kategorienschema der Qualität der Begründungen wurde hierbei in die Kategorien „Nennung des Satzes" und „redundant, irrelevant, falsch" aufgeteilt.

	Bezeichnung	Kategorienname	Beschreibung
	n. b.	**Nicht bearbeitet**	Die Aufgabe wurde nicht bearbeitet.
	A0	**Keine Begründung**	Es wird keine Begründung angegeben
	A1	**induktiv**	Aus der Gültigkeit einzelner konkreter Beispiele wird ohne weitere (deduktive) Begründung auf die Gültigkeit der Behauptung geschlossen.
Pseudo-Argumente	**A2**	**Nennung des Satzes**	Als Argument wird der Satz genannt oder paraphrasiert, dass die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade ist.
	A3	**Redundant, irrelevant, falsch**	Die Argumentation erfolgt mithilfe von Argumenten, die entweder redundant, irrelevant oder mathematisch falsch sind
Argumentationen ohne Formalisierung	**A4**	**„Abstände heben sich auf"**	In der Argumentation wird der folgende Sachverhalt umschrieben: *Jede ungerade Zahl hat den „Abstand" eins zur vorherigen geraden Zahl. Addiert man zwei ungerade Zahlen, so werden auch die Abstände addiert. Somit erhält man immer eine gerade Summe als Ergebnis dreier gerader Summanden.*
	A5	**Betrachtung der Endziffern**	In der Argumentation wird der folgende Sachverhalt umschrieben: *Bei der Addition von ungeraden Zahlen reicht es, die letzte Ziffer der Summe zu betrachten. Diese ergibt sich in diesem Fall aus der Summe zweier ungerader Zahlen zwischen 1 und 9 und ist daher immer gerade.*
	A6	**Gerade und ungerade Zahlen (g & u) wechseln sich ab**	In der Argumentation wird der folgende Sachverhalt umschrieben: *In den natürlichen Zahlen wechseln sich die geraden und die ungeraden Zahlen immer ab. Die Addition von zwei ungeraden Zahlen kann man nun so interpretieren, dass ich auf dem Zahlenstrahl bei einer ungeraden Zahl starte und eine ungerade Anzahl an Schritten nach rechts gehe. Somit lande ich immer auf einer geraden Zahl.*
Argumentationen mit Formalisierung	**A7**	**Formalisierung der Form „$2n+1$"**	Die ungeraden Zahlen werden in der Form „$2n+1$"dargestellt und die Addition dann als Termumformung ausgeführt.
	A8	**Formalisierung der Form „$n+1$"**	Die ungeraden Zahlen werden in der Form „$n+1$", wobei n eine gerade Zahl ist, dargestellt und die Addition dann als Termumformung ausgeführt.
	A9	**Formalisierung der Form „$n+n=2n$"**	Die ungeraden Zahlen werden in der Form „n" dargestellt und die Addition dann als Termumformung ausgeführt.

Tabelle 36: Vorgekommene Begründungsarten bei der Argumentationsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen"

Die Ergebnisse bzgl. der verschiedenen Begründungsarten werden in der Tabelle 37 und der Abbildung 65 dargestellt.

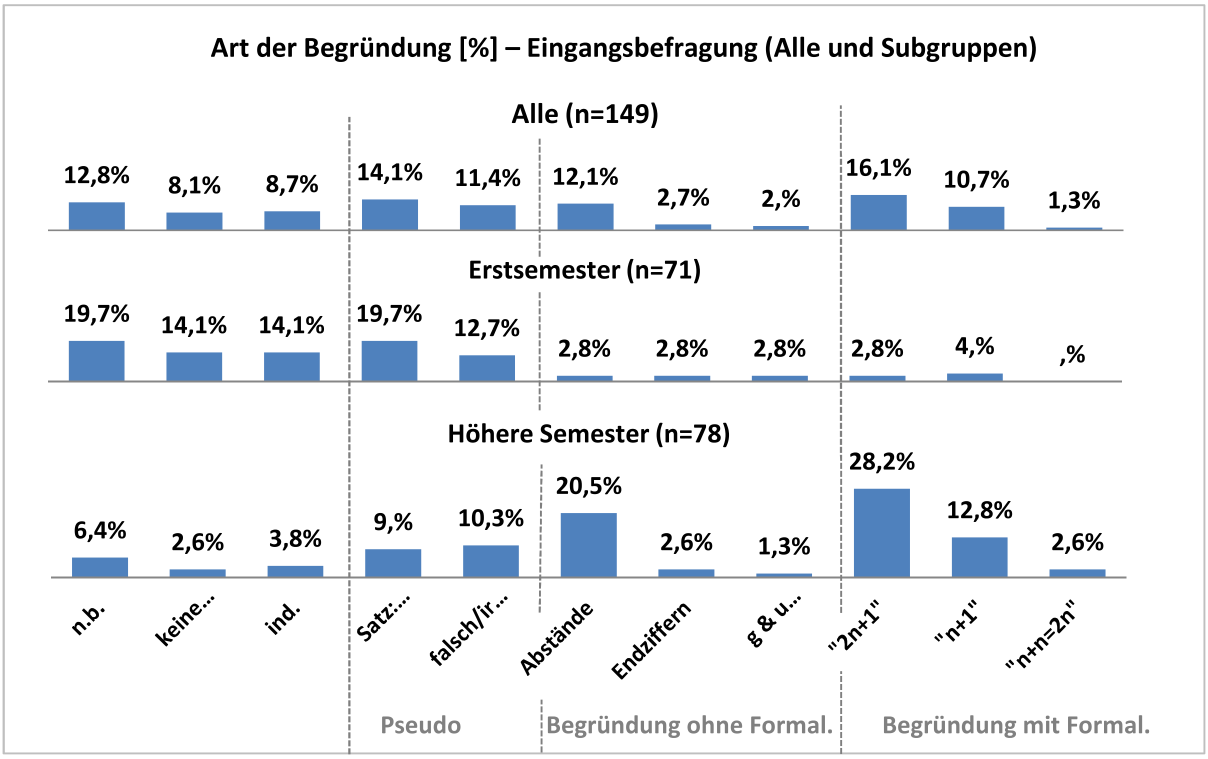


Abbildung 65: Prozentuale Verteilung der Begründungsarten in Aufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" (Alle und Subgruppen)

			Alle (n=149) [%]	Erstsemester (n=71) [%]	Höhere Sem. (n=78) [%]
	n. b.	nicht bearbeitet	12,8	19,7	6,4
	A0	keine Begründung	8,1	14,1	2,6
	A1	induktiv	8,7	14,1	3,8
Pseudo	A2	Satz: Summe ungerade	14,1	19,7	9,0
	A3	falsch/irrelevant	11,4	12,7	10,3
Begründungen ohne Formalisierung	A4	Abstände	12,1	2,8	20,5
	A5	Endziffern	2,7	2,8	2,6
	A6	g & u wechseln ab	2,0	2,8	1,3
Begründungen mit Formalisierung	A7	"2n+1"	16,1	2,8	28,2
	A8	"n+1"	10,7	4,0	12,8
	A9	"n+n=2n"	1,3	0,0	2,6
Summe			**100**	**100**	**100**
Summe Begr. „ohne Form." [A4+A5+A6]			16,8	8,5	24,4
Summe Begr. „mit Form." [A7+A8+A9]			28,1	6,8	43,6

Tabelle 37: Prozentuale Verteilung der Begründungsarten in der Aufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" (Alle und Subgruppen)

In der Gesamtgruppe wird am häufigsten eine Begründung mithilfe einer Darstellung der Art „2n+1" versucht ([A7]: 16,1%), der Anteil der Begründungen mit Formalisierung liegt insgesamt bei 28,1%. In der Subgruppe der Erstsemester ist auffällig, dass 19,7% der Studierenden die Begründungsaufgabe durch Nennung oder Paraphrase des Satzes beantworten, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist [A2]. Nur in 6,8% der Bearbeitungen dieser Subgruppe wird eine Formalisierung vorgenommen, dabei am häufigsten in der Gestalt „n+1" ([A8]: 4,0%). Betrachtet man die Studierenden in einem höheren Semester, so bearbeiten dagegen insgesamt 43,6% die Aufgabe mithilfe einer Formalisierung; die Repräsentation geschieht hierbei am häufigsten mithilfe einer Darstellung der Art „2n+1" (28,2%). Valide Begründungen ohne Formalisierung werden vor allem bei den höheren Semestern verwendet; dabei ist am häufigsten die Begründung über die Abstände zu den geraden Zahlen ([A4]: 20,5%).

Die Erstsemesterstudierenden arbeiten statistisch signifikant weniger mithilfe einer Formalisierung als die restlichen Studierenden (Chi²-Test; $p<0{,}001$; mittlere Effektstärke: Cramers V=0,377). In der Subgruppe der Höheren Semester verwenden die männlichen Studierenden statistisch signifikant häufiger eine Formalisierung als die weiblichen (Chi²-Test, $p=0{,}044$; geringe Effektstärke: Cramers V=0,236).

Bezüglich der Merkmale „Schulischer Mathematikkurs“, „Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb“ und „Teilnahme an einem Vorkurs“ lassen sich keine statistisch signifikanten Zusammenhänge zu der Nutzung der Formalisierung nachweisen (Chi²-Test). Für die Gruppe der Erstsemester sind entsprechende Untersuchungen aufgrund des geringen Anteils von Bearbeitungen mit Formalisierungen zu vernachlässigen.

Charakteristische Fehler im Umgang mit Variablen

Nach der Beschreibung der verschiedenen Arten, wie die Studierenden begründet haben, wird im folgenden Abschnitt der Frage nachgegangen, welche charakteristischen Fehler im Umgang mit Variablen dabei auftauchen und wie häufig diese Fehler aufgetreten sind. Insgesamt konnten drei verschiedene charakteristische Fehlertypen ausgemacht werden.

Fehlertyp (1): *Bei der Formalisierung der Art „$2n+1$“ wird nur eine Buchstabenvariable verwendet, um zwei beliebige ungerade Zahlen darzustellen.*

Von den 24 Studierenden, die diesen Zugang wählen, verwenden 14 (58,3%) nur eine Buchstabenvariable, um zwei beliebige ungerade Zahlen darzustellen. In der Tabelle 38 werden die Ergebnisse bzgl. der Gesamtgruppe und der Subgruppen dargestellt. Dieser Fehler wurde von beiden Erstsemesterstudierenden begangen, die diese Repräsentation gewählt haben; bei den „Höheren Semestern“ von 12 der 22 Studierenden.

„$\mathbf{2n+1}$“	Alle	Erstsemester	Höhere Sem.
Häufigkeit der Begründung (abs.)	24	2	22
Häufigkeit des Fehlertyps (abs.)	14	2	12
Häufigkeit des Fehlertyps [%]	**58,3**	**100,00**	**54,5**

Tabelle 38: Ergebnisse bzgl. des Fehlertyps (1) (Alle und Subgruppen)

Fehlertyp (2): *Bei der Formalisierung der Art „n+1“ wird nur eine Buchstabenvariable verwendet, um zwei beliebige ungerade Zahlen darzustellen.*

Von den 17 Studierenden, die die Repräsentation „$n+1$“ für eine ungerade Zahl gewählt haben, verwenden 75,6% nur eine Buchstabenvariable; bei den Erstsemesterstudierenden liegt der Anteil bei 57,1%, bei den Höheren Semestern bei 80,0% (vgl. Tabelle 39).

„$\mathbf{n+1}$"	Alle	Erstsemester	Höhere Sem.
Häufigkeit der Begründung (abs.)	17	7	10
Häufigkeit des Fehlertyp (2) (abs.)	12	4	8
Häufigkeit des Fehlertyp (2) [%]	**75,6**	**57,1**	**80,0**
Häufigkeit des Fehlertyp (3) (abs.)	1	0	1
Häufigkeit des Fehlertyp (3) [%]	**5,9**	**0**	**10,0**

Tabelle 39: Ergebnisse bzgl. der Fehlertypen (2) (3) (Alle und Subgruppen)

Fehlertyp (3): *Bei der Formalisierung der Art „$n+1$“ wird die Buchstabenvariable nicht als gerade Zahl definiert.*

Dieser Fehler wird nur von einem Studierenden begangen, welcher in einem höheren Semester ist (vgl. Tabelle 39). Alle anderen Studierenden mit diesem Zugang merken explizit an, dass die verwendete Buchstabenvariable eine gerade Zahl repräsentieren soll.

7.2.4.2 Beweisbewertung zu Beginn der Lehrveranstaltung

In der Eingangsbefragung sollten die Studierenden bei vier konkreten ‚Beweisen‘ angeben, ob es sich hierbei um „richtige Beweise“ handelt oder nicht. Die verwendeten Beweisbeispiele stammen aus Healy und Hoyles (2000) und umfassen eine korrekte narrative Argumentation [„narrativ“], eine induktive Begründung (bloße Betrachtung einzelner Beispiele) [„Beispiele“], eine formal dargestellte falsche Begründung [„formal & falsch“] und schließlich die oben erwähnte narrative Begründung, dargestellt mithilfe von Buchstabenvariablen [„korrekt mit Variablen“]. Die Beweisbeispiele wurden übersetzt und mit entsprechenden Multiple-Choice-Antworten versehen (vgl. Abschnitt 3.3.2). Anschließend sollten die Studierenden aus den vier ‚Beweisen‘ je einen aussuchen, der dem eigenen Ansatz am nächsten kommt und der bei dem eigenen Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note bekommen hätte.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [17]: Welche Begründungsformen („narrativ und korrekt“, „empirisch-induktiv“, „formal und falsch“, „korrekt mit Variablen“) werden von den Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung als „richtiger Beweis“ bewertet? Und:

- *a) Welche dieser Begründungsformen kommt nach Angabe der Studierenden ihrem potentiellen eigenen Ansatz am nächsten?*
- *b) Welche Begründungsform hätte nach Angabe der Studierenden durch ihren Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note erhalten?*
- *c) Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?*

Die relativen Häufigkeiten der Bewertungen als „richtiger Beweis“ werden in der Tabelle 40 dargestellt.

	Alle (n=149) [%]	Erstsemester (n=71) [%]	Höhere Semester (n=78) [%]	Signifikanzen der Unterschiede in den Subgruppen (Chi²-Test)	Effektstärke (Cramers V)
narrativ	73,8	77,5	70,5	---	---
Beispiele	18,8	33,8	5,1	< 0,001	0,377
formal & falsch	29,5	32,4	26,9	---	---
korrekt mit Var.	89,3	80,3	97,4	0,002	0,256

Tabelle 40: Relative Häufigkeiten der Beweisbewertungen als „richtiger Beweis“ (Alle und Subgruppen) und Signifikanzen der Unterschiede in den Subgruppen mit Effektstärke

Es zeigte sich, dass die Mehrheit der Studierenden korrekte Beweise als solche erkennt, wobei ein narrativ geführter Beweis statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau weniger als „richtiger Beweis“ bewertet wird (73,8%) als die gleiche Argumentation mithilfe von Buchstabenvariablen

(89,3%) (McNemar-Test, p<0,001; odds ratio[66]=0,65). Bloße Beispielbetrachtungen werden zu Beginn der Lehrveranstaltung von 18,8% der Studierenden als „richtiger Beweis“ bewertet, wobei der Bewertungsunterschied zwischen den Erstsemestern (33,8%) und den ‚Höheren Semestern‘ (5,1%) statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau ist (Chi²-Test; p<0,001; mittlere Effektstärke: Cramers V=0,377).

Im Eingangstest zeigt sich hier, dass die Erstsemesterstudierenden mit einer Vorprägung an die Universität kommen, mit der gut ein Drittel bloße Beispielüberprüfungen als richtigen Beweis bewertet[67]. Es lässt sich allerdings vermuten, dass durch die Ausbildung und Sozialisation an der Universität diese Fehlvorstellung abnimmt (siehe die Ergebnisse der „Höheren Semester“). Beachtenswert ist schließlich die durchaus hohe Akzeptanzrate der formal-dargestellten und falschen Begründung („formal & falsch“), diese wird von beiden Subgruppen von ca. 30% der Studierenden als richtiger Beweis gewertet. Die Akzeptanz der falschen und formal dargestellten Argumentation als richtiger Beweis von knapp einem Drittel der Studierenden kann dahin interpretiert werden, dass hier ein Beweisverständnis vorliegt, welches durch Oberflächenmerkmale geprägt sein könnte. Auch kann ein Grund für die Bewertungen als „richtiger Beweis“ darin liegen, dass die hier vorkommenden algebraischen Regeln und Potenzgesetze von den Studierenden nicht ausreichend beherrscht werden, um die fehlerhaften Umformungen überhaupt zu bemerken. Dass sich die Werte bezüglich der Akzeptanz dieser Argumentation in den Subgruppen nicht unterscheiden, spricht dafür, dass entsprechend Probleme und/oder Fehlvorstellung persistent sind.

Die Nähe zum eigenen Ansatz und beste Note durch den Mathematiklehrer

Die relativen Häufigkeiten der Beweiswahl für die größte Nähe zum eigenen Ansatz und für die beste Note durch den Mathematiklehrer in der Oberstufe werden in der Tabelle 41 dargestellt.

	Nähe zum eigenen Ansatz			beste Note durch Mathematiklehrer		
	alle (n=139)	Erstsemester (n=64)	Höhere Sem. (n=75)	alle (n=149)	Erstsemester (n=65)	Höhere Sem. (n=74)
narrativ	33,8	32,8	34,7	7,9	9,2	6,8
Beispiele	10,1	15,6	5,3	0,7	0,0	1,4
formal & falsch	11,5	15,6	8,0	7,9	7,7	8,1
korrekt mit Var.	44,6	35,9	52	83,5	83,1	83,8

Tabelle 41: Prozentuale Verteilungen der Beweiswahl für die größte Nähe zum eigenen Ansatz und für die beste Note durch den Mathematiklehrer in der Oberstufe (Alle und Subgruppen)

[66] Im Rahmen dieser Arbeit wird als Maß für die Effektstärke bei einem McNemar-Test das Quotenverhältnis „odds Ratio“ verwendet. Das Quotenverhältnis „odds ratio“ nimmt Werte zwischen 0 und ∞ an und beschreibt das Verhältnis der Veränderungen bzw. Gegensätze („odds“) (vgl. O’Brian 2002). Der hier vorliegende Wert von 0,65 bedeutet etwa, dass 0,65-mal so viele Studierende einen narrativen Beweis als „richtigen Beweis“ bewerten und den korrekten Beweis mit Variablen als „keinen richtigen Beweis“, als umgekehrt.

[67] Durch einen Abgleich der Daten mit der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ lassen sich weitere Erkenntnisse gewinnen: Von den 13 Studierenden, die in ihrer Begründung bloße Beispielüberprüfungen angaben (Abschnitt 7.2.4.1), werteten vier Erstsemesterstudierende in der Bewertungsaufgabe die bloßen Beispiele als „richtigen Beweis“. Es kann vermutet werden, dass bei diesen vier Studierenden eine Fehlvorstellung bzgl. der Akzeptanz von bloßen empirischen Überprüfungen als korrekter Beweis vorliegt. Interessanterweise wählte von diesen vier Studierenden aber niemand den empirischen Ansatz als denjenigen aus, der der eigenen Herangehensweise am nächsten kommt.

Als Begründungsform mit der größten Nähe zum eigenen Ansatz wird am häufigsten die korrekte Begründung mit Variablen gewählt. Interessant erscheint dabei der Unterschied in den Subgruppen: Während in den höheren Semestern die korrekte Begründung mit Variablen mit 52% deutlich der narrativen Begründung (34,7%) vorgezogen wird, liegt bei den Erstsemesterstudierenden kein nennenswerter Unterscheid vor. Insgesamt werden die bloßen Beispielbetrachtungen und die formale und falsche Begründung bzgl. der Nähe zum eigenen Ansatz nur von wenigen Studierenden ausgewählt.

Als ‚Beweis' für die vermeintlich beste Note durch den Mathematiklehrer wird am häufigsten die korrekte Argumentation mit Variablen (83,5%) gewählt. An dieser Stelle sei betont, dass sich diese Begründung von der narrativen (hier nur von 7,9% gewählt) nicht inhaltlich, sondern nur in der Art ihrer Darstellung unterscheidet. Es scheint hierbei also die Darstellung des Beweises (unter Einbezug von Buchstabenvariablen) für die Auswahl der Studierenden ausschlaggebend zu sein. Der geringe Anteil an bloßen Beispielbetrachtungen bei der Auswahl der Argumentation für die beste Note kann dahin gedeutet werden, dass den Studierenden bewusst ist, dass in der Schule bloße empirische Überprüfungen nicht als gültiger Beweis gegolten haben.

Im Vergleich der Begründungsbewertungen der Studierenden bzgl. der Nähe zum eigenen Ansatz und der besten Note durch den Mathematiklehrer der Oberstufe wird deutlich, dass hier ein Unterschied zwischen der eigenen Herangehensweise und vermuteten externen Ansprüchen zu bestehen scheint. Während die Studierenden etwa zu einem Drittel angeben, dass die narrative Begründung ihrem eigenen Ansatz am nächsten komme, liegt der Prozentsatz der Auswahl dieser Beweisform für die vermeintlich beste Note bei unter 10%. Der Unterschied der Anteile der Begründungswahl für den eigenen Ansatz und für die beste Note durch den Mathematiklehrer ist im Fall der narrativen Begründung (33,8% und 7,9%; McNemar-Test, $p<0{,}001$ mit odds ratio=5,876) und der korrekten Begründung mit Variablen (44,6% und 83,5%; McNemar-Test, $p<0{,}001$ mit odds ratio=0,150) statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau.

Der Großteil der Studierenden scheint sich darin einig zu sein, dass die korrekte Begründung mit Variablen durch ihren Mathematiklehrer in der Oberstufe die beste Note erhalten hätte.

7.2.4.3 Beweisbewertung und Beweisakzeptanz zu Beginn der Lehrveranstaltung

Für die Erfassung der Beweisakzeptanz sollten die Studierenden vier vorgelegte Beweise (einen generischen Beweis mit Zahlen, einen generischen Beweis mit Punktmustern, einen Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und einen formalen Beweis) anhand der unten aufgeführten Aussagen auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] stimme überhaupt nicht zu … [6] stimme voll zu) bewerten (s. Tabelle 42). Die zu bewertenden konkreten Beweisprodukte wurden in Abschnitt 3.3.3 vorgestellt; dort wurde auch das Problem erörtert, dass die unterschiedlichen Behauptungen zu den jeweiligen Beweisen die Akzeptanzurteile der Studierenden beeinflusst haben könnten.

Formulierung	Abkürzung
… zeigt, dass die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr ist.	„wahr“
… überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist.	„überz“
… zeigt, dass die Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten wahr ist.	„100proz“
… erklärt mir, warum die Behauptung korrekt ist.	„erklär“
… ist ein korrekter und gültiger Beweis.	„korr_Beweis“
… zeigt die Behauptung lediglich für einzelne Beispiele, aber nicht allgemein.	„Bsp“
… ist nicht allgemeingültig, da es immer noch Gegenbeispiele geben könnte.	„Gegenbsp“
… besteht nur aus der Überprüfung einzelner Fälle, ist aber keine allgemeine Begründung.	„einz_Fälle“
… ist ohne die Verwendung von Buchstabenvariablen nicht allgemeingültig.	„Buchstabenvar“
... müsste formaler dargestellt sein, um mich voll zu überzeugen.	„formaler“

Tabelle 42: Die zur Erfassung der Beweisakzeptanz zu bewertenden Aussagen

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [18]: Wie bewerten die Studierenden die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu Beginn der Lehrveranstaltung in Bezug auf die Aspekte Sicherung der Gültigkeit, subjektive Überzeugung, Erklärungspotential und Allgemeingültigkeit? Und:

a) *Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?*

Bewertung des generischen Beweises mit Zahlen

Die statistischen Daten bzgl. der Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Zahlen werden in der Tabelle 43 für die Gesamtgruppe und die Subgruppen angegeben. Die Mediane zu den einzelnen Items werden für die Subgruppen zusätzlich in der Abbildung 66 dargestellt.

Insgesamt betrachtet, bewerten die Studierenden den generischen Beweis mit Zahlen eher als eine Überprüfung einzelner Beispiele und nicht als eine allgemeingültige Begründung. Die Sicherung der Gültigkeit der Behauptung („GenZ_100proz“) wird mit einem Median von 1 stark abgelehnt, wobei die Überzeugungskraft und die Erklärungsqualität mit einem Median von 4 eher zustimmend bewertet werden. Trotz der Zustimmung bzgl. dieser Aspekte wird der generische Beweis mit Zahlen nicht als korrekter und gültiger Beweis betrachtet („GenZ_korr_Beweis“, Median: 2). Diese Beweisform wird von den Studierenden eher als Überprüfung einzelner konkreter Beispiele interpretiert („GenZ_Bsp“ und „GenZ_einz_Fälle“: Median 5), weswegen die Möglichkeit der Existenz eines Gegenbeispiels noch gesehen wird („GenZ_Gegenbeisp“: Median 5). Auch wird den Aspekten zugestimmt, dass der Gebrauch von Buchstabenvariablen bzw. eine formalere Darstellung die Allgemeingültigkeit bzw. die Überzeugungskraft des Beweises verbessern würden („GenZ_Buchstabenvar“ und „GenZ_formaler“, Median: 5).

GenZ_	Akzeptanz als Beweis					Interpretation als singuläre Beispielprüfung				
	wahr	überz	100proz	erklär	korr_Bew	Bsp	Gegen-bsp	einz_Fälle	Buchstaben-var	formaler
Alle										
n	145	145	147	147	147	148	147	147	146	147
M	3,08	3,41	2,01	3,74	2,66	4,51	4,22	4,86	4,32	4,59
Median	3,00	4,00	1,00	4,00	2,00	5,00	4,00	5,00	5,00	5,00
SD	1,797	1,656	1,397	1,508	1,585	1,744	1,690	1,448	1,733	1,583
Erstsemester										
n	68	68	70	70	70	71	70	70	70	70
M	3,10	3,49	1,97	3,74	2,81	4,39	4,10	4,91	4,47	4,69
Median	2,00	4,00	1,00	4,00	3,00	5,00	4,00	5,00	5,00	5,00
SD	1,694	1,634	1,262	1,431	1,427	1,719	1,625	1,294	1,481	1,450
Höhere Semester										
n	77	77	77	77	77	77	77	77	76	77
M	3,06	3,34	2,04	3,74	2,52	4,62	4,32	4,81	4,17	4,49
Median	3,00	3,50	1,00	4,00	2,00	5,00	5,00	6,00	5,00	5,00
SD	1,894	1,683	1,517	1,584	1,714	1,770	1,751	1,581	1,935	1,698

Tabelle 43: Statistische Daten zu den Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Zahlen (Alle und Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

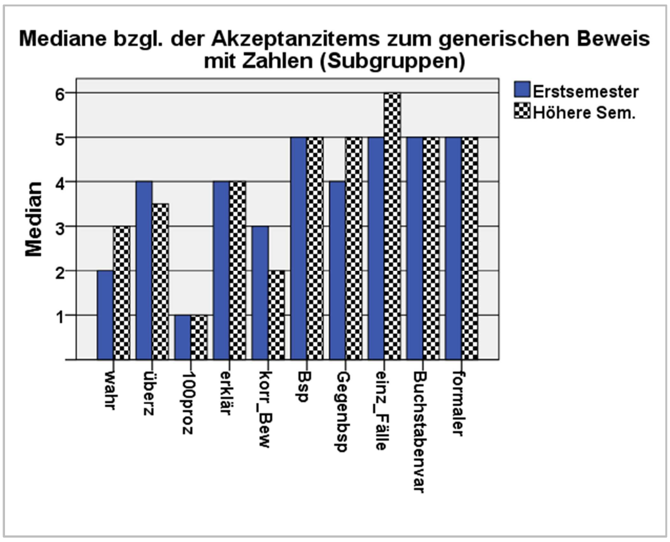


Abbildung 66: Mediane bzgl. der Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Zahlen (Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

Bei der Betrachtung der Subgruppen sind insgesamt keine großen Unterschiede auszumachen und auch die Medianunterschiede zwischen diesen Gruppen sind nicht statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test[68]).

Bewertung des generischen Beweises mit Punktmustern

Im Gegensatz zum generischen Beweis mit Zahlen wird beim generischen Beweis mit Punktmuster eher zugestimmt, dass aufgrund dieses Beweises die Behauptung wahr sein muss („GenP_wahr“, Median: 4; vgl. Tabelle 44 und Abbildung 67). Mit einem Median von 5 wird auch einer geleisteten Überzeugung („GenP_überz“) und Erklärung („GenP_erklär“) zugestimmt, die Verifikation aber eher abgelehnt („GenP_100pro“, Median: 2). Insgesamt wird diese Beweisform mit einem Median von 5 als korrekter und gültiger Beweis bewertet („GenP_korr_Beweis“). Doch auch bei diesem generischen Beweis wird die Begründung eher als singuläre Überprüfung einzelner Beispiele gesehen

[68] Im Rahmen des siebten Kapitels werden im Zuge der durchgeführten statistischen Tests alle P-Werte angegeben, die kleiner-gleich als 0,1 sind. Sollten P-Werte nicht angegeben werden, so bedeutet dies folglich, dass der entsprechende Wert über 0,1 liegt.

(„GenP_Bsp“, „GenP_einz_Fälle“), wodurch die Existenz eines Gegenbeispiels nicht ausgeschlossen werden kann („GenP_Gegenbsp“, Median: 4). Die Bewertungen bzgl. des Wunsches nach Buchstabenvariablen für eine Verbesserung der Allgemeingültigkeit und einer insgesamt formaleren Darstellung lassen mit den Medianen von 3 und 4 keine klare Tendenz erkennen.

Der generische Beweis mit Punktmustern wird bzgl. der positiven Akzeptanzaspekte („zeigt, dass die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr ist“, „überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist“, „zeigt, dass die Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten wahr ist“, „erklärt mir, warum die Behauptung korrekt ist, ist ein korrekter und gültiger Beweis“) statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau besser bewertet als der generische Beweis mit Zahlen (Wilcoxon-Test, p<0,001).

GenP_	Akzeptanz als Beweis					Interpretation als singuläre Beispielprüfung				
	wahr	überz	100proz	erklär	korr_Bew	Bsp	Gegen-bsp	einz_Fälle	Buchstaben-var	formaler
Alle										
n	146	146	146	145	146	147	146	146	146	145
M	4,01	4,25	2,79	4,39	3,42	3,68	3,57	4,09	3,54	4,00
Median	4,00	5,00	2,00	5,00	3,00	4,00	4,00	4,00	3,50	4,00
SD	1,700	1,503	1,631	1,356	1,548	1,771	1,714	1,588	1,702	1,646
Erstsemester										
n	68	68	68	68	68	69	68	68	68	67
M	4,26	4,38	2,91	4,40	3,44	3,77	3,54	4,07	3,43	3,81
Median	5,00	5,00	3,00	5,00	3,00	4,00	4,00	4,00	3,00	4,00
SD	1,482	1,425	1,590	1,317	1,429	1,783	1,670	1,605	1,548	1,617
Höhere Semester										
n	78	78	78	77	78	78	78	78	78	78
M	3,78	4,14	2,69	4,39	3,40	3,60	3,59	4,10	3,64	4,17
Median	4,00	4,00	2,00	5,00	3,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
SD	1,849	1,569	1,669	1,397	1,654	1,768	1,761	1,584	1,830	1,663

Tabelle 44: Statistische Daten zu den Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Punktmustern (Alle und Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

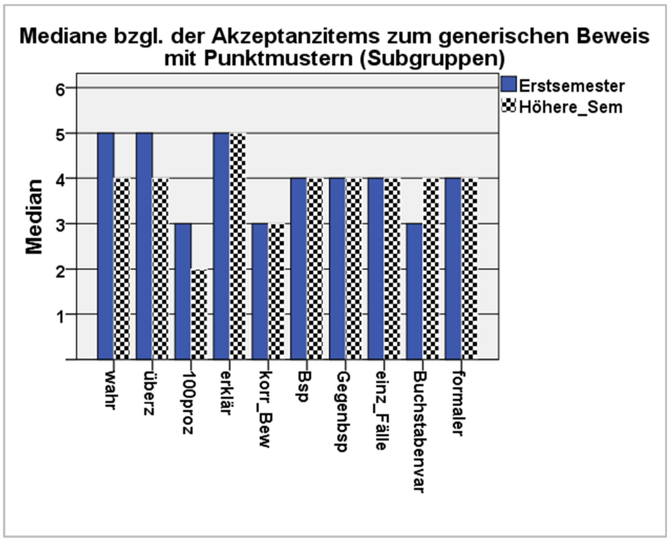


Abbildung 67: Mediane bzgl. der Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Punktmuster (Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

In den Subgruppen sind die Medianunterschiede in den einzelnen Items nicht statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test).

Bewertung des Beweises mit geometrischen Variablen

Die statistischen Daten bzgl. der Akzeptanzitems zum Beweis mit geometrischen Variablen werden in der Tabelle 45 für die Gesamtgruppe und die Subgruppen angegeben. Die Mediane zu den einzelnen Items werden für die Subgruppen zusätzlich in der Abbildung 68 dargestellt.

Für die Studierenden wird durch den Beweis mit geometrischen Variablen eher nicht gezeigt, dass aufgrund dieses Beweises die Behauptung wahr sein muss („GV_wahr“, Median: 4). Auch die Aspekte Überzeugung („GV_überz“: Median: 3), Verifikation (GV_100proz: Median: 2), Erklärung und Betrachtung als korrekter und gültiger Beweis (Mediane: 2) werden eher abgelehnt. Diese Beweisform wird von den Studierenden eher als singuläre Überprüfung einzelner Beispiele gesehen („GV_Bsp“, „GV_einz_Fälle“, Median: 4) wodurch die Existenz eines Gegenbeispiels nicht ausgeschlossen werden kann („GV_Gegenbsp“, Median: 4). Eine formalere Darstellung des Beweises wird von der Mehrheit der Studierenden gefordert („GV_formaler“, Median: 5).

GV_	Akzeptanz als Beweis					Interpretation als singuläre Beispielprüfung				
	wahr	überz	100proz	erklär	korr_Bew	Bsp	Gegen-bsp	einz_Fälle	Buchstaben-var	formaler
Alle										
n	137	138	137	138	137	135	137	135	137	136
M	3,08	3,02	2,48	2,96	2,82	3,74	3,88	3,97	3,83	4,56
Median	3,00	3,00	2,00	3,00	3,00	4,00	4,00	4,00	4,00	5,00
SD	1,815	1,672	1,558	1,736	1,554	1,723	1,667	1,607	1,692	1,504
Erstsemester										
n	64	65	64	65	64	62	64	63	64	63
M	2,97	2,78	2,47	2,72	2,73	3,87	3,98	4,16	4,08	4,78
Median	2,00	3,00	2,00	3,00	3,00	4,00	4,00	4,00	4,00	5,00
SD	1,773	1,474	1,490	1,556	1,394	1,563	1,558	1,450	1,567	1,288
Höhere Semester										
n	73	73	73	73	73	73	73	72	73	73
M	3,18	3,23	2,49	3,18	2,89	3,63	3,79	3,81	3,62	4,37
Median	3,00	3,00	2,00	3,00	3,00	4,00	4,00	4,00	3,00	5,00
SD	1,858	1,814	1,626	1,866	1,688	1,852	1,764	1,725	1,777	1,654

Tabelle 45: Statistische Daten zu den Akzeptanzitems zum Beweis mit geometrischen Variablen (Alle und Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

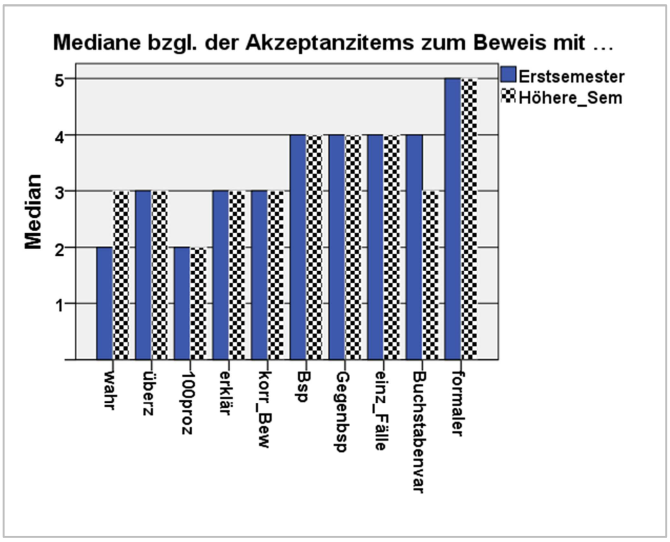


Abbildung 68: Mediane bzgl. der Akzeptanzitems zum Beweis mit geometrischen Variablen (Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu“ ... [6] „stimme voll zu“)

In den Subgruppen sind die Medianunterschiede in den einzelnen Items nicht statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test).

Bewertung des formalen Beweises

Zu Beginn der Lehrveranstaltung wird beim formalen Beweis von der großen Mehrheit der Studierenden bzgl. der Aspekte „zeigt, dass die Behauptung wahr ist", „Überzeugung", „Verifikation" und „korrekter und gültiger Beweis" zugestimmt (vgl. Tabelle 46 und Abbildung 69). Entsprechend diesen Zustimmungen, wird die Beweisform nicht als Überprüfung einzelner Beispiele fehlinterpretiert („FB_Bsp" und „FB_einz_Fälle", Median: 1) und auch die Existenz möglicher Gegenbeispiele wird ausgeschlossen („FB_Gegenbeisp", Median: 1).

Alle positiven Akzeptanzaspekte werden beim formalen Beweis im Mittel statistisch hoch signifikant höher bewertet als bei den anderen drei Beweisformen (Wilcoxon-Test, p<0,001).

FB_	Akzeptanz als Beweis					Interpretation als singuläre Beispielprüfung		
	wahr	überz	100proz	erklär	korr_Bew	Bsp	Gegen-bsp	einz_Fälle
Alle								
n	145	145	145	145	145	145	145	145
M	5,46	5,48	4,88	5,34	5,39	1,57	1,72	1,76
Median	6,00	6,00	5,00	6,00	6,00	1,00	1,00	1,00
SD	0,93	0,92	1,34	1,09	1,06	1,05	1,08	1,23
Erstsemester								
n	67	67	67	67	67	67	67	67
M	5,19	5,24	4,54	5,16	5,18	1,85	2,04	1,94
Median	6,00	6,00	5,00	6,00	6,00	1,00	2,00	2,00
SD	1,15	1,09	1,32	1,20	1,18	1,21	1,17	1,22
Höhere Semester								
n	78	78	78	78	78	78	78	78
M	5,69	5,68	5,18	5,49	5,58	1,32	1,45	1,60
Median	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	1,00	1,00	1,00
SD	0,61	0,69	1,29	0,96	0,91	0,83	0,91	1,22

Tabelle 46: Statistische Daten zu den Akzeptanzitems beim formalen Beweis (Alle und Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu" ... [6] „stimme voll zu")

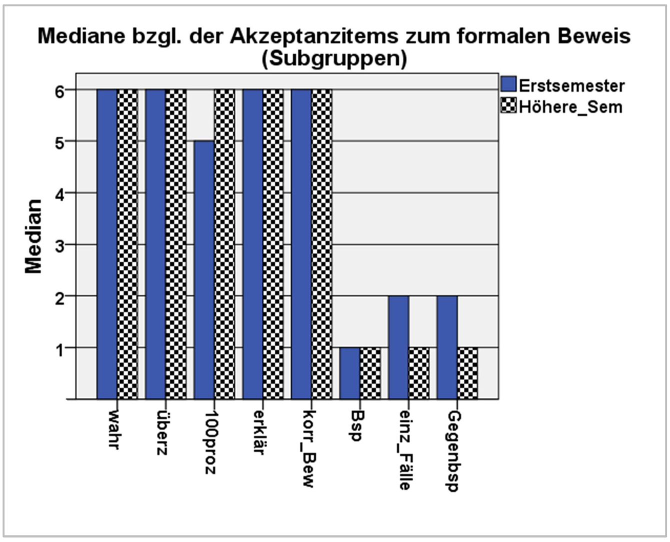


Abbildung 69: Mediane bzgl. der Akzeptanzitems zum formalen Beweis (Subgruppen) ([1] „stimme überhaupt nicht zu" ... [6] „stimme voll zu")

Bei der Betrachtung der Ergebnisse der Subgruppen ist auffällig, dass bei den Erstsemesterstudierenden die Standardabweichungen bzgl. der verschiedenen Items höher ausfallen, diese Studierenden also weniger häufig den Aussagen vollständig zustimmen bzw. sie nicht in dem

Maße ablehnen wie die höheren Semester. Bei den Studierenden in einem höheren Semester zeigen sich hier somit deutlichere Positionen.

Ergebnisse zur ‚Beweisakzeptanz'

Für die Erfassung der ‚Beweisakzeptanz' wurde zu jeder der vier Beweisarten durch Mittelwertbildung der Werte der oben aufgeführten Items (1)–(8) (bei entsprechender Umpolung der negativ formulierten Items (6)–(8)) eine Skala zur Beweisakzeptanz konstruiert. Die Kennwerte der konstruierten Skalen zur Beweisakzeptanz werden in der Tabelle 47 dargestellt. Bei den vier Skalen sind in der Gesamtgruppe und den Subgruppen die Reliabilitätswerte durchgehend sehr hoch (Cronbachs Alpha>0,835) und die korrigierten Trennschärfen der Items sind mit einer Ausnahme in einem guten bis sehr guten Bereich (Spannweite r_{it} > 0,536).

Kennwerte	Akz_GenZ	Akz_GenP	Akz_GV	Akz_FB
		Alle		
n	146	147	138	145
M	2,77	3,53	2,98	5,31
SD	1,22	1,30	1,29	0,88
Cronbachs Alpha	0,891	0,906	0,896	0,922
Spannweite r_{IT}	0,536 - 0,781	0,660 - 0,766	0,574 - 0,758	0,679 - 0,804
		Erstsemester		
n	69	69	65	67
M	2,80	3,55	2,86	5,04
SD	1,13	1,33	1,12	0,95
Cronbachs Alpha	0,868	0,917	0,835	0,912
Spannweite r_{IT}	0,496 - 0,769	0,602 - 0,777	0,253 – 0,670	0,613 - 0,810
		Höhere Semester		
n	77	78	73	78
M	2,74	3,51	3,09	5,53
SD	1,31	1,29	1,425	0,77
Cronbachs Alpha	0,905	0,899	0,922	0,922
Spannweite r_{IT}	0,524 - 0,800	0,575 - 0,773	0,676 - 0,816	0,596 - 0,864

Tabelle 47: Kennwerte der Skalen zur Beweisakzeptanz in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen) [„Akz_GenZ": Akzeptanzskala zum generischen Beweise mit Zahlen, „Akz_GenP": Akzeptanzskala zum generischen Beweise mit Punktmustern, „Akz_GV": Akzeptanzskala zum Beweise mit geometrischen Variablen, „Akz_FB": Akzeptanzskala zum formalen Beweis]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [19]: Wie lässt sich die Beweisakzeptanz der Studierenden zu den vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu Beginn der Lehrveranstaltung (bzw. zu Beginn ihres Studiums) beschreiben? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Durch Mittelwertbildung der verwendeten Items für die Bewertung der Aspekte ‚Sicherung der Gültigkeit', ‚Überzeugung', ‚Erklärungsqualität' und ‚Allgemeingültig' konnten für die vier verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung reliable Skalen konstruiert werden (s. o.).

Die Ergebnisse bzgl. der Beweisakzeptanz der Studierenden in Bezug auf die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung werden in der Tabelle 47 angegeben. Betrachtet man die Verteilungen der einzelnen Skalenwerte, so ist zunächst der Unterschied der Mittelwerte zwischen dem formalen Beweis und den anderen drei Beweisformen auffällig (s. Tabelle 47 und Abbildung 70). Während der formale Beweis von der Gesamtgruppe sehr hohe Akzeptanzwerte erhält (M: 5,31 mit einer Standardabweichung von 0,88), erreichen die restlichen Beweisformen statistisch signifikant

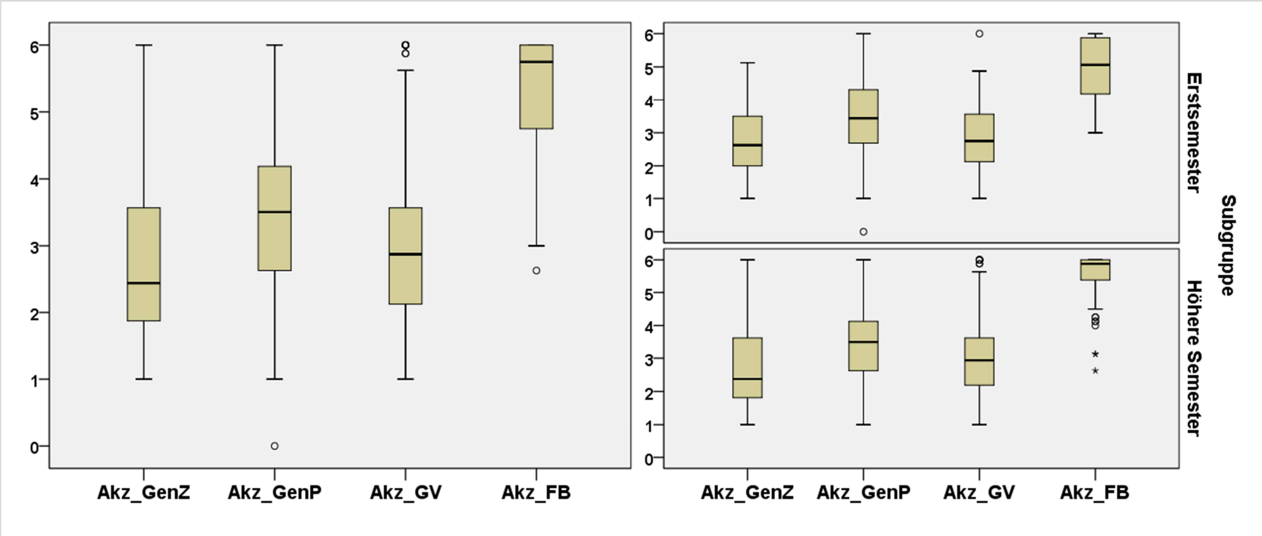


Abbildung 70: Boxplots zu den Akzeptanzskalen in der Eingangsbefragung (links: Alle, rechts: Subgruppen)

niedrigere Werte. Alle Mittelwertunterschiede zwischen den vier Akzeptanzskalen sind in der Gesamtgruppe paarweise statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau (t-Test, $p<0{,}001$) mit Ausnahme des Mittelwertunterschieds zwischen der Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen und dem Beweis mit geometrischen Variablen. In der Tabelle 48 werden die Signifikanzwerte und Effektstärken der paarweisen Mittelwertunterschiede der Akzeptanzskalen für die Gesamtgruppe angegeben (t-Test).

	Akz_GenZ (M=2,77)	**Akz_GenP (M=3,53)**	**Akz_GV (M=2,98)**	**Akz_FB (M=5,31)**
Akz_GenZ (M=2,77)		p<0,001 Cohens d=0,62	p=0,123	p<0,001 Cohens d=2,48
Akz_GenP (M=3,53)	p<0,001 Cohens d=0,62		p<0,001 Cohens d=0,41	p<0,001 Cohens d=1,58
Akz_GV (M=2,98)	p=0,123	p<0,001 Cohens d=0,41		p<0,001 Cohens d=2,1
Akz_FB (M=5,31)	p<0,001 Cohens d=2,48	p<0,001 Cohens d=1,58	p<0,001 Cohens d=2,1	

Tabelle 48: Signifikanzwerte und Effektstärke der Mittelwertunterschiede bzgl. der Akzeptanzskalen in der Gesamtgruppe in der Eingangsbefragung (t-Test; Effektstärke: Cohens d[69])

In der Gesamtgruppe liegt zwischen den Akzeptanzskalen zu den beiden generischen Beweisen eine statistisch signifikante Korrelation auf dem 1%-Niveau vor ($p=0{,}005$), welche allerdings mit $r=0{,}180$ sehr gering ausfällt. Dieses Ergebnis könnte dahingehend interpretiert werden, dass eine übergreifende Beweisakzeptanz zu generischen Beweisen ausgemacht werden könnte.

Bei der Betrachtung der Subgruppen erscheinen die ähnlichen Ergebnisse aufgrund der bis dato stattgefundenen unterschiedlichen mathematischen Sozialisation bemerkenswert (vgl. Tabelle 47 und Abbildung 70). Nur der Mittelwertunterschied der Akzeptanzskala zum formalen Beweis zwischen den Erstsemesterstudierenden (5,05) und den ‚Höheren Semestern' (5,53) ist bei mittlerer Effektstärke statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau (t-Test, $p<0{,}001$ mit Cohens $d=0{,}56$).

[69] Für Cohens d gelten die folgenden Bewertungen: $0{,}2 \leq d < 0{,}5$: „kleine Effektstärke", $0{,}5 \leq d < 0{,}8$: „mittlere Effektstärke" und $0{,}8 < d$: „starke Effektstärke" (vgl. Cohen 1992, S. 157).

Bei den ‚Höheren Semestern' liegt folglich eine signifikant höhere Akzeptanz bzgl. des formalen Beweises vor.

In der Subgruppe der Erstsemesterstudierenden korreliert die Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen schwach negativ mit der Akzeptanz des formalen Beweises (r_p=-0,273, $p<0,005$). Hier scheint die Akzeptanz der einen Beweisform (i. S. einer Beweispräferenz) der Akzeptanz der anderen entgegenzuwirken.

In der Gesamtgruppe wie auch innerhalb der Subgruppen (‚Erstsemester' und ‚Höhere Semester') lassen sich unter der Berücksichtigung der Merkmale „Geschlecht", „Schulischer Mathematikkurs", „Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb" und „Teilnahme an einem Mathematikvorkurs" keine statistisch signifikanten Unterschiede bzgl. der Mittelwerte der Akzeptanzskalen der vier Beweisformen ausmachen (t-Test). Auch zwischen den Merkmalen „Abiturnote" und „Schulische Mathematiknote" und den vier Akzeptanzskalen werden keine statistisch signifikanten Zusammenhänge deutlich.

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [3] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.2.4. unter Berücksichtigung der Leitfragen zur Auswertung 16-19 zusammenfassend ausgewertet.

Beantwortung der Forschungsfrage [3]: Wie lassen sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik des ‚Begründens und Beweisens' zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?

Bzgl. der **Begründungskompetenz** wurde im Kontext der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" deutlich, dass nur 19,5% der Studierenden eine Begründung formulierten, die als vollständig gewertet werden konnte. Während 22,8% als „Argumentationen mit Lücke" kategorisiert wurden, galten 25,5% der Bearbeitungen als Pseudobegründungen (falsche Argumente oder Nennung/Paraphrase des Satzes über die Summe zweier ungerader Zahlen). Rein empirisch-induktive Begründungen wurden dabei nur von 8,7% der Studierenden gegeben.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe verwenden nur 28,1% der Studierenden eine Formalisierung des Sachverhalts mit Buchstabenvariablen, wobei in etwa der Hälfte der Fälle der Fehler gemacht wird, dass nur eine Buchstabenvariable verwendet wird, um zwei beliebige ungerade Zahlen zu repräsentieren.

Diese eher schwachen Ergebnisse der Studierenden in Bezug auf die Konstruktion einer Begründung entsprechen den Berichten über die schlechten Argumentations- bzw. Beweiskompetenzen deutscher Schülerinnen und Schüler. Mit dem vorliegenden Ergebnis konnte aufgezeigt werden, dass auch die Begründungskompetenz von Studienanfängerinnen und -anfängern als eher basal betrachtet werden muss. Auch die Ergebnisse bzgl. des mangelhaften Umgangs von Studienanfängerinnen und -anfängern mit Buchstabenvariablen entsprechen den Berichten in der Literatur (etwa Ostsieker und Biehler 2012 und Trigueros & Ursini 2003).

Der hohe Anteil von Begründungen ohne Nennung korrekter Argumente lässt sich dahingehend deuten, dass die (Erstsemester-) Studierenden mit dieser Art von Aufgaben nicht vertraut sind. Diese Befunde bestätigen die Ergebnisse von Edwards (1998), der zehn Schülerinnen und Schülern einer amerikanischen High School entsprechende Begründungsaufgaben vorlegte. Nachdem zunächst alle

Probanden empirisch-induktive Begründungen anführten, konnten auch auf Nachfrage nur drei von ihnen valide Argumente anführen. Keiner der Probanden verwendete in seiner Begründung eine algebraische Notation. Auch scheint ihnen die fachmathematische Symbolsprache nicht als heuristisches Mittel zur Verfügung zu stehen. Bei der (seltenen) Verwendung von Buchstabenvariablen wurde dagegen ein mangelhafter Umgang mit diesen auf Seiten der Erstsemesterstudierenden deutlich, was den Berichten in der Literatur (etwa Ostsieker und Biehler 2012; Mingus 1999, S. 438; Trigueros & Ursini 2003) entspricht.

Im Kontext der **Bewertung von Beweisen** konnte gezeigt werden, dass die Mehrheit der Studierenden korrekte Beweise als solche erkennt. Dabei wurde die korrekte Begründung mithilfe von Buchstabenvariablen von der Gesamtgruppe mit 89,3% statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau häufiger als richtiger Beweis bewertet als die gleiche Begründung in einer narrativen Formulierung mit 73,8% (McNemar-Test; $p<0{,}001$). Hier scheint somit die Darstellung einer Begründung Auswirkungen auf die Beweisbewertung der Studierenden zu haben. Knapp ein Drittel der Gesamtgruppe (29,5%) bewertet die formal dargestellte und falsche Begründung als richtigen Beweis, im Falle der rein empirisch-induktive Begründung liegt die Quote noch bei 18,8%.

Während bzgl. des eigenen Begründungsansatzes die korrekte Begründung mit Variablen von 44,6% und die entsprechende narrative Begründung von 33,8% der Studierenden ausgewählt wird, meinen 83,5%, dass die Begründung mit Variablen die beste Note durch ihren Mathematiklehrer in der Oberstufe erhalten hätte. Somit wird auch hier deutlich, dass die Studierenden, aufgrund ihrer schulmathematischen Sozialisation, das Beweisen mit der Nutzung von Buchstabenvariablen zu verbinden scheinen.

Das Phänomen, dass formal dargestellte Begründungen in einem höheren Maß als korrekte Beweise betrachtet werden, wurde von Reiss und Heinze (2000, S. 251f.) an deutschen Abiturientinnen und Abiturienten aufgezeigt und konnte in dieser Studie für Erstsemesterstudierende bestätigt werden. Healy und Hoyles (2000, S. 407) berichten in ihrer Studie von den großen Diskrepanzen zwischen den Begründungen, die Schülerinnen und Schüler für ihren eigenen Ansatz auswählen, im Gegensatz zu der Wahl für die vermeintlich beste Note. Die Autoren stellen folglich den Unterschied zwischen eigenem Vorgehen der Lernenden und (vermuteten) externen Ansprüchen heraus. In abgeschwächter Form kann dieses Resultat hier für Studierende bestätigt werden: Während die korrekte narrative Begründung mit 33,8% bzgl. der Nähe zum eigenen Ansatz ausgewählt wird, fällt der Anteil von 7,9% als Auswahl für die beste Note statistisch hoch signifikant auf 0,1%-Niveau geringer aus (McNemar-Test, $p<0{,}001$). Genau anderes herum verhält es sich für die korrekte Begründung mit Variablen: Während 44,6% diese für die Nähe zum eigenen Ansatz auswählen, geben 83,5% an, dass diese Begründung die beste Note durch den Lehrer erhalten hätte (McNemar-Test, $p<0{,}001$).

In Bezug auf die **Beweisakzeptanz** konnte gezeigt werden, dass die Studierenden den generischen Beweis mit Zahlen und den generischen Beweis mit Punktmustern eher als singuläre Beispielüberprüfung betrachten als eine allgemeingültige Begründung. Während die Studierenden bei beiden generischen Beweisen der Überzeugungskraft der Begründung mit einem Median von 4 bzw. 5 (eher) zustimmen, werden auch die Aussagen hoch bewertet, die die Begründung als Überprüfung einzelner Beispiele darstellen, weswegen auch weiterhin Gegenbeispiele zu der (verifizierten) Behauptung existieren könnten. Auch stimmen die Studierenden den Aussagen (eher) zu, dass die Begründung mit Buchstabenvariablen bzw. formaler dargestellt werden müsste, um voll zu überzeugen. Insgesamt betrachtet, erkennen bzw. akzeptieren die Studierenden somit eher nicht das allgemeine generische Moment, dass in den konkreten Beispielbetrachtungen zum Ausdruck kommt und zusätzlich verbalisiert wird, sondern missinterpretieren diese Beweisformen zu Beginn der Lehrveranstaltung als singuläre Beispielüberprüfungen. Die Aussage, dass es sich hierbei um einen korrekten und gültigen Beweis handelt, wird von den Studierenden mit einem Median von 2 bzw. 3 abgelehnt. In Bezug auf den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen werden bei den Studierenden keine klaren Positionen deutlich, die Mediane der einzelnen Items bewegen sich fast ausschließlich in der Mitte der Skala. Während die positiven Akzeptanzitems mit einem Median von 3 und 2 eher abgelehnt werden, wird den Aussagen bzgl. der konkreten Einzelüberprüfungen mit einem Median von 4 eher zugestimmt. Diese unklare Position der studentischen Bewertungen kann dahingehend interpretiert werden, dass ihnen die Form der Darstellung mit ‚geometrischen Variablen' bzw. diese Beweisform bisher nicht bekannt ist und sie Probleme damit haben, diese Darstellung zu lesen bzw. zu interpretieren. Diese Interpretation wird durch das in Abschnitt 7.2.2 erhaltene Ergebnis gestützt, dass nur 5,7% der Studierenden angeben, dass ihnen diese Begründungsform bereits aus der Schule bekannt sei. Der formale Beweis wird von den Studierenden bzgl. der Aspekte ‚Sicherung der Gültigkeit', ‚Überzeugung', ‚Erklärungsqualität' und ‚Allgemeingültigkeit' mit einem Median von 5 bzw. 6 deutlich am höchsten bewertet. Folglich stimmen die Studierenden der Aussage mit einem Median von 6 zu, dass dies ein korrekter und gültiger Beweis sei.

Durch die Konstruktionen der Skalen zur ‚Beweisakzeptanz' wurde es auch möglich, die studentischen Beweisakzeptanzen der vier Beweisformen direkt miteinander in Beziehung zu setzen. Während der generische Beweis mit Zahlen mit einem Mittelwert von 2,77 und der Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen mit 2,98 eher niedrige Akzeptanzwerte erhalten, wird der generische Beweis mit Punktmustern mit einem Mittelwert von 3,53 statistisch hoch signifikant besser bewertet. Die höchste Akzeptanz erhält der formale Beweis mit einem Mittelwert von 5,31, der statistisch hoch signifikant über dem der anderen Beweisformen liegt.

Zusammenfassend kann für den Bereich der Beweisakzeptanz formuliert werden, dass die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung die generischen Beweise eher nicht als allgemeingültige Begründung verstanden, sondern als singuläre Beispielüberprüfung interpretierten. Dementsprechend werden diese Beweisformen von den Studierenden auch eher nicht als (korrekte und gültige) Beweise betrachtet. In Bezug auf den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen kann vermutet werden, dass die Studierenden nicht mit dieser Art der Darstellung vertraut sind und dementsprechend bzgl. der Beweisakzeptanz dieser Beweisform keine Interpretation der empirischen Ergebnisse zulässig erscheint. Dagegen scheint der formale Beweis für die Studierenden als ‚Prototyp' eines korrekten und gültigen mathematischen Beweises zu gelten, der in der Lage ist, die Gültigkeit der Behauptung sicher nachzuweisen und die Studierenden auch vollständig zu überzeugen. Diese Ergebnisse gelten sowohl für die Erstsemesterstudierenden wie auch für die Höheren Semester.

Bzgl. der Akzeptanz generischer Beweise konnten somit insgesamt die Berichte aus der Literatur bestätigt werden, dass narrativ geführte Beweise mithilfe konkreter Beispiele von Studierenden häufig nicht als allgemeingültig betrachtet werden (vgl. 2.4.2). Dabei scheint die Hypothese von Dreyfus (2000) zuzutreffen, dass der Verzicht auf formale Elemente entsprechende Fehleinschätzungen begünstigen kann. In Bezug auf den schulischen Mathematikunterricht muss somit die kritische Frage formuliert werden, inwiefern entsprechende Beweisprodukte bei den

Schülerinnen und Schülern zu der Ausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses beitragen können, wenn diese von den Studierenden nicht als allgemeingültige Begründungen verstanden werden?

a) *Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?*

Bzgl. der **Begründungskompetenz** wurde im Rahmen der Aufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" deutlich, dass die Begründungen der Erstsemesterstudierenden statistisch signifikant schlechter ausfallen als die der Studierenden in einem höheren Semester: Der Unterschied bzgl. der Anteile vollständiger Argumentationen ist auf dem 1%-Niveau statistisch hoch signifikant bei schwacher Effektstärke (Chi^2-Test, $p=0{,}005$; Cramers $V=0{,}231$). Nur 9,9% der Erstsemester gelingt eine ‚vollständige Argumentation' und 32,4% der Bearbeitungen mussten als ‚Pseudoantworten' gewertet werden. Dagegen gelten 28,2% der Bearbeitungen der ‚Höheren Semester' als vollständig und nur 19,2% als ‚Pseudoantworten'. Bei der Betrachtung der Bewertungen der Qualität der Begründungen als ordinalskalierte Daten zeigte sich, dass die Subgruppe der ‚Höheren Semester' statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau bessere Ergebnisse erzielt als die Erstsemester (Mann-Whitney-U-Test, $p=0{,}006$; starke Effektstärke: Cohens $d=0{,}98$).

Dabei verwenden die Erstsemesterstudierenden seltener Buchstabenvariable in ihren Begründungen (6,8%) als die Höheren Semester (43,6%); dieser Unterschied ist bei mittlerer Effektstärke statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau (Chi^2-Test; $p<0{,}001$; Cramers $V=0{,}377$). Von diesen neun Studierenden im ersten Semester, die eine Formalisierung wählen, nutzen nur zwei die Repräsentation einer ungeraden Zahl der Form „2n+1", sieben dagegen die Form „n+1". In sechs dieser neun Fälle wird nur eine Buchstabenvariable für die Repräsentation der beiden beliebigen ungeraden Zahlen verwendet.

Bei der **Bewertung von Beweisen** konnte gezeigt werden, dass die ‚Höheren Semester' mit 97,4% häufiger die korrekte Begründung mit Variablen als „richtigen Beweis" bewerten als die Erstsemester mit 80,3%; dieser Unterschied ist bei schwacher Effektstärke statistisch signifikant auf dem 1%-Niveau (Chi^2-Test; $p=0{,}002$; Cramers $V=0{,}256$). Leider kann an dieser Stelle nicht geklärt werden, warum dieser Unterschied bei der Eingangsbefragung auftritt. Interessant ist weiter, dass der Anteil der Bewertung der rein empirisch-induktiven Begründung als „richtiger Beweis" bei den Erstsemestern mit 33,8% statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei mittlerer Effektstärke höher ausfällt, als bei den ‚Höheren Semestern' mit 5,1% (Chi^2-Test; $p<0{,}001$; Cramers $V=0{,}377$). Etwa ein Drittel der Studienanfängerinnen und -anfänger betrachtet somit einzelne Beispielüberprüfungen zu Beginn der Lehrveranstaltung als richtige Beweise.

Bei der Auswahl einer Begründungsform mit der größten Nähe zum eigenen Ansatz zeigte sich ein weiterer Unterschied zwischen den Subgruppen: Während in den höheren Semestern die korrekte Begründung mit Variablen mit 52% deutlich der narrativen Begründung (34,7%) vorgezogen wird, fällt dieser Unterschied bei den Erstsemesterstudierenden deutlich geringer aus: korrekte Begründung mit Variablen: 35,9% und narrative Begründung: 32,8%. Folglich hat sich bei den Höheren Semestern bereits eine Hinwendung zur Verwendung von Buchstabenvariablen eingestellt.

Im Rahmen der erhobenen **Beweisakzeptanzen** konnte festgestellt werden, dass der Mittelwertunterschied bzgl. der Akzeptanzskala zum formalen Beweis zwischen den Höheren Semestern mit 5,53 und den Erstsemestern mit 5,05 bei mittlerer Effektstärke statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau ist (t-Test, $p<0{,}001$; Cohens $d=0{,}56$). In Bezug auf die anderen Akzeptanzskalen und auch bei der Betrachtung der einzelnen Items konnten dagegen keine (statistisch) signifikanten Subgruppenunterschiede ausgemacht werden.

7.2.5 Ergebnisse bzgl. der Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik

7.2.5.1 Einstellungen zum Beweisen in der Schule

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zu den folgenden Themenbereichen aus der Eingangsbefragung des Wintersemesters 2014/15 dargestellt: (i) die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis“ für verschiedene Schultypen und Schulstufen und (ii) die Bewertung ‚gängiger‘ Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten.

(i) Die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis“ für verschiedene Schultypen und Schulstufen

Die folgenden Aussagen sollten von den Studierenden auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“) bewertet werden:

Formulierung	Abkürzung
In der Sekundarstufe 1 sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.	„Bew_Sek1“
In der Sekundarstufe 2 sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.	„Bew_Sek2“
In der Grundschule sollen Beweise im Mathematikunterricht behandelt werden.	„Bew_GS“
Beweise sollen im Mathematikunterricht der Hauptschule behandelt werden.	„Bew_HS“
Beweise sollen im Mathematikunterricht der Realschule behandelt werden.	„Bew_RS“
Beweise sollen im Mathematikunterricht auf dem Gymnasium behandelt werden.	„Bew_GY“

Tabelle 49: Items zur Erfassung der Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis“ für verschiedene Schultypen und Schulstufen

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [20]: Wie bewerten die Studierenden die Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis“ für verschiedene Schultypen und Schulstufen zu Beginn der Lehrveranstaltung? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Die statistischen Daten bzgl. der verwendeten Items werden für die Gesamtgruppe und die Subgruppen in Tabelle 50 angegeben. Zusätzlich werden die Boxplots zu den Items für die Gesamtgruppe in Abbildung 72 und die Mediane bzgl. der Items für die Subgruppen in der Abbildung 73 dargestellt.

Nach Ansicht der Studierenden sollten Beweise eher in der Sekundarstufe 2 (Median: 6) als in der Sekundarstufe 1 (Median: 4) eine Rolle spielen; hier ist der Medianunterschied statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei starker Effektstärke (Wilcoxon-Test, $p<0{,}001$; r[70]=0,78). Eine

[70] Innerhalb der vorliegenden Arbeit wird als Maß für die Effektstärke beim Wilcoxon-Test der Korrelationskoeffizient (r) von Pearson verwendet. Für die Beurteilung der Größe der Effektstärken dient dabei

Behandlung von Beweisen in der Grundschule wird von den Studierenden insgesamt abgelehnt (Median von 1), hingegen bei den weiterführenden Schulformen befürwortet. Bzgl. der verschiedenen Schulformen sind die Medianunterschiede paarweise statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei starker Effektstärke (Wilcoxon-Test, $p<0{,}001$; $r>0{,}68$). Zwischen den Subgruppen sind die einzelnen Medianunterschiede nicht statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test; s. Abbildung 73).

Kennwerte	Sekundarst. 1	Sekundarst. 2	Grundschule	Hauptschule	Realschule	Gymnasium
Alle						
n	147	148	148	148	148	148
M	3,93	5,34	2,01	3,60	4,48	5,59
Median	4	6	1	4	5	6
SD	1,39	0,956	1,44	1,53	1,11	0,71
Erstsemester						
n	69	70	70	70	70	70
M	4,01	5,31	2,01	3,71	4,56	5,63
Median	4	6	1	4	5	6
SD	1,23	0,99	1,37	1,39	1,07	0,66
Höhere Semester						
n	78	78	78	78	78	78
M	3,86	5,36	2,00	3,50	4,41	5,56
Median	4	6	1	3	4	6
SD	1,45	0,94	1,51	1,66	1,15	0,75

Tabelle 50: Ergebnisse der Items zur Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis“ für verschiedene Schultypen und Schulstufen in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

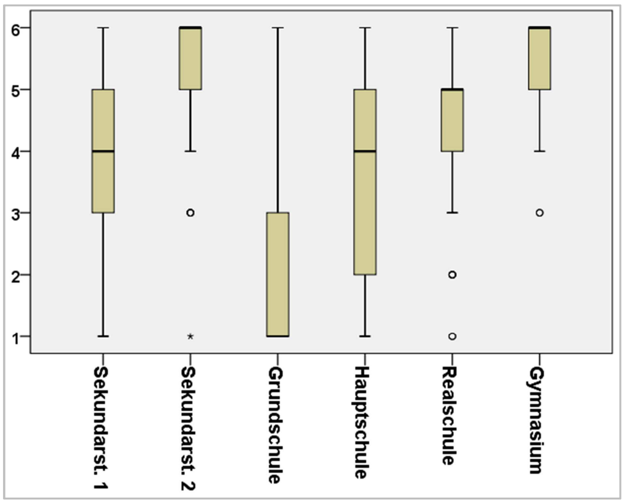


Abbildung 72: Boxplots zu den Verteilungen der Items zu der Relevanz des Beweisens in verschiedenen Schulstufen und Schulformen (Alle) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

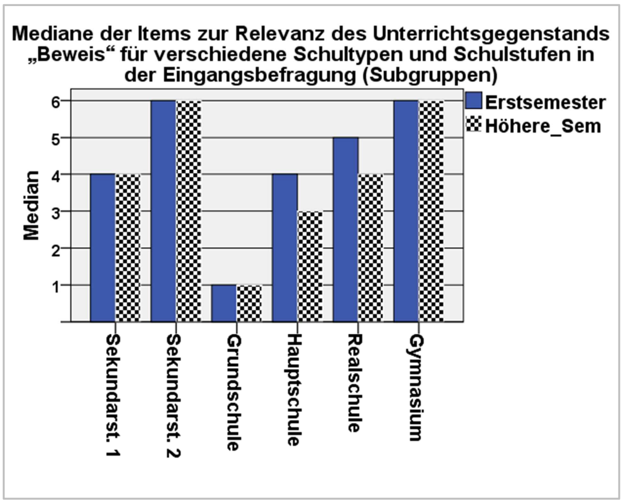


Abbildung 73: Mediane der Items zu der Relevanz des Beweisens in verschiedenen Schulstufen und Schulformen (Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

Bei der Betrachtung der Boxplots in Abbildung 72 ist die große Streuung der Daten beachtenswert, wodurch deutlich wird, dass auf Seiten der Studierenden durchaus unterschiedliche Ansichten bzgl. der Relevanz von Beweisen für die Schulmathematik vorliegen. Auffallend ist darüber hinaus der große Interquartilsabstand im Falle des Boxplots zu dem Item „Beweisen in der Hauptschule“ [Q1: 2 und Q3: 5]; bzgl. dieser Schulform scheint keine Einigkeit der Studierenden in Bezug auf die Relevanz von Beweisen zu herrschen. Im Gegensatz dazu bezeugen die kleinen Interquartilsabstände der

die Einteilung von Cohen (1992, S. 157): Werte ab r=0,1 entsprechen einem schwachen Effekt, Werte ab r=0,25 einem mittleren Effekt und Werte r=0,4 entsprechen einem starken Effekt.

Boxplots zu den Items „Beweisen in der Sekundarstufe 2“, „Beweisen in der Realschule“ und „Beweisen im Gymnasium“ und deren Lage in dem oberen Bereich der Skala die allgemeine Befürwortung des Beweisens für diese Schulstufe und Schulformen.

(ii) Die Bewertung ‚gängiger‘ Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten

Die zu bewertenden Aussagen dieses Fragebogenabschnitts werden in der Tabelle 51 angegeben.

Formulierung	Abkürzung
In der Schule sollten Beweise eher eine untergeordnete Rolle spielen, …	
…, da es wichtiger ist, dass die fachlichen Inhalte (Funktionen, Differentialrechnung, Integralrechnung, …) vermittelt und verstanden werden.	„fachl. Inhalte“
…, da es wichtiger ist, dass die Schüler/innen Rechenaufgaben richtig lösen können.	„Rechenaufgaben“
…, da man im Mathematikunterricht lieber Anwendungen im Alltag behandeln sollte.	„lieber Anwendungen“
…, da Beweise für die Schüler/innen zu schwer nachzuvollziehen sind.	„zu schwer“
…, da es die meisten Schüler/innen überfordern würde, selbstständig Beweise zu finden und aufzuschreiben.	„überfordern“
…, da die Schüler/innen sowieso wissen, dass die mathematischen Regeln und Sätze richtig sind und sie daher nicht zum Beweisen zu motivieren sind.	„Sätze sowieso richtig“
…, da das Beweisen im späteren Leben der Schüler/innen keine Anwendung findet (im Gegensatz etwa zur Prozentrechnung).	„keine Anwendung im Leben“
…, da Beweise in der Lebenswelt der Schüler/innen keine Bedeutung haben.	„keine Bedeutung für Lebenswelt“

Tabelle 51: Items zur Erfassung der Einschätzung ‚gängiger‘ Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [21]: Wie bewerten die Studierenden ‚gängige‘ Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, zu Beginn der Lehrveranstaltung? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

In diesem Abschnitt wird bei der Angabe der Ergebnisse auf eine tabellarische Übersicht verzichtet, da hier die Darstellung in Boxplots (Abbildung 74) ausreichend erscheint.

Es zeigt sich, dass die Studierenden allen aufgeführten Gründen mit einem Median von 4 eher zustimmen, mit Ausnahme der Gründe „Sätze sowieso richtig“ und „keine Bedeutung für Lebenswelt“, die mit einem Median von 3 im Vergleich zu allen höher bewerteten Gründen statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau geringer bewertet werden (Wilcoxon-Test, $p<0{,}001$; mittlere bis starke Effektstärke: $0{,}3<r<0{,}5$). Es deutet sich hier an, dass eine Ablehnung des Unterrichtsinhalts „Beweisen“ anscheinend nicht auf ein mangelndes Beweisbedürfnis auf Seiten der Studierenden oder auf das Argument eines fehlenden Lebensweltbezugs zurückgeführt werden kann.

In Subgruppen lassen sich keine signifikanten Unterschiede bzgl. der Items ausmachen (Mann-Whitney-U-Test).

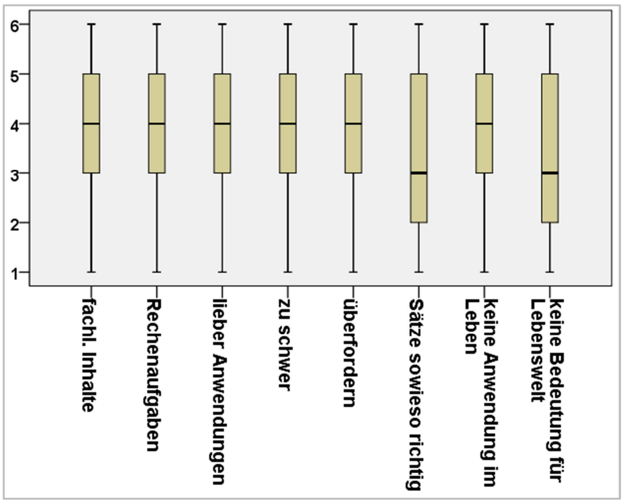


Abbildung 72: Boxplots zu den Items des Komplexes „Einschätzung ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten" (Alle, n=143) ([1] „stimmt gar nicht" … [6] „stimmt völlig")

7.2.5.2 Einstellungen zum Beweisen

In diesem Abschnitt zu „Einstellungen zum Beweisen" werden die Aspekte (i) „Einschätzung motivationaler Aspekte zum Beweisen", (ii) „Beweisaffinität" und (iii) „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität" betrachtet. Bei der Darstellung der Ergebnisse bzgl. der konstruierten Skala der „Beweisaffinität" werden auch Zusammenhänge zu personenbezogenen Merkmalen und den bisher erhoben Skalen der Beweisakzeptanz thematisiert, um das Konstrukt der „Beweisaffinität" besser einordnen zu können.

(i) Einschätzung motivationaler Aspekte zum Beweisen

Die zu bewertenden Aussagen für die Erfassung der „Einschätzung motivationaler Aspekte zum Beweisen" werden in der Tabelle 52 aufgelistet.

#	Formulierung	Abkürzung
1	Ich sehe das Beweisen als eine intellektuelle Herausforderung, der ich mich gerne stelle.	„Herausforderung"
2	Ich mag Beweise.	„mag Beweise"
3	Ich sehe keinen Sinn darin, etwas beweisen zu müssen, was sowieso richtig ist.	„keinen Sinn"
4	Ich versuche, Beweise zu verstehen.	„verstehen"
5	Ich weiß, wie man einen Beweis führt.	„wie führt"
6	Beweise werden von Experten konstruiert. Es genügt, wenn man sie nachvollziehen und verstehen kann.	„Experten"

Tabelle 52: Items zu motivationalen Aspekten zum Beweisen

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [22]: Wie bewerten die Studierenden Aussagen zu motivationalen Aspekten zum Beweisen zu Beginn der Lehrveranstaltung? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Die Ergebnisse bzgl. der Items zu motivationalen Aspekten zum Beweisen (Alle und Subgruppen) werden in der Tabelle 53 angegeben, die Mediane der Items zu den Subgruppen zusätzlich in der Abbildung 73 dargestellt. Bei den Ergebnissen der Einzelitems wird deutlich, dass die Studierenden dem Beweisen gegenüber insgesamt eher neutral bis positiv gegenüber stehen. Die Mediane der Items „Herausforderung“ und „mag Beweise“ liegen mit einem Wert von 4 und 3 in einem mittleren Bereich der Likert-Skala, die negativ formulierte Aussage „keinen Sinn“ wird von den Studierenden mit einem Median von 2 abgelehnt. In der Gesamtgruppe erfährt die größte Zustimmung die Aussage „Ich versuche, Beweise zu verstehen“ [„verstehen“] mit einem Median von 6.

In den Subgruppen unterscheidet sich die Bewertung der Aussage „Ich weiß, wie man einen Beweis führt“ der Erstsemester mit einem Median von 3 statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau von der der ‚Höheren Semester‘ mit einem Median von 4 (Mann-Whitney-U-Test, $p<0{,}001$; mittlere Effektstärke des Subgruppenunterschieds: Cohens $d=0{,}68$). Dagegen ist der Medianunterschied bzgl. des Items „Ich versuche, Beweise zu verstehen“ mit $p=0{,}105$ nicht statistisch signifikant (Mann-Whitney-U-Test). Die Erstsemester scheinen sich insgesamt jedoch weniger kompetent bzgl. der Konstruktion von Beweisen zu fühlen als die ‚Höheren Semester‘.

	Herausforderung #1	mag Beweise #2	keinen Sinn #3	verstehen #4	wie führt #5	Experten #6
Alle						
n	149	148	149	149	147	148
M	4,03	3,16	2,48	5,34	3,61	3,16
Median	4,00	3,00	2,00	6,00	4,00	3,00
SD	1,46	1,51	1,45	0,80	1,30	1,40
Erstsemester						
n	71	70	71	71	69	70
M	4,01	3,19	2,52	5,23	3,17	3,39
Median	4,00	3,00	2,00	5,00	3,00	3,00
SD	1,41	1,47	1,45	0,87	1,16	1,28
Höhere Semester						
n	78	78	78	78	78	78
M	4,05	3,14	2,45	5,45	4,00	2,95
Median	4,00	3,00	2,00	6,00	4,00	3,00
SD	1,51	1,56	1,46	0,71	1,29	1,49

Tabelle 53: Kennwerte der Items zu motivationalen Aspekten zum Beweisen (Alle und Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

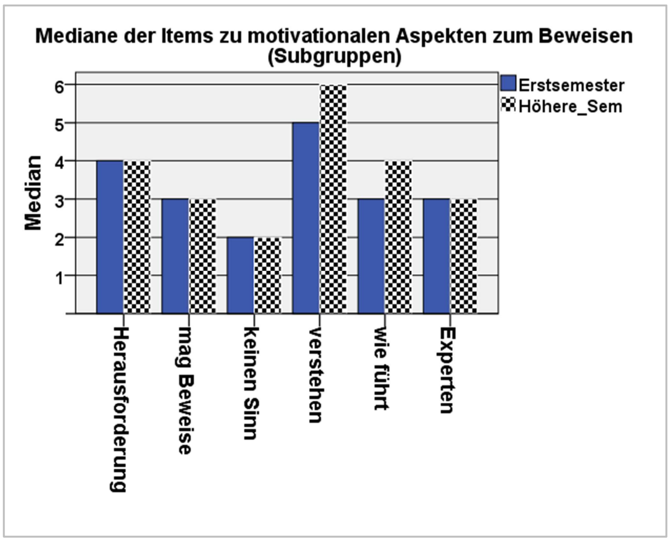


Abbildung 73: Mediane der Items zu motivationalen Aspekten zum Beweisen in der Eingangsbefragung (Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

(ii) „Beweisaffinität“

Die Skala „Beweisaffinität“ wurde durch Mittelwertbildung der in der Tabelle 52 aufgelisteten sechs Items zur Erfassung der „Einschätzung motivationaler Aspekte zum Beweisen“ gebildet, wobei die Werte der Items Nummer 3 und 6 umgepolt wurden.

In der Tabelle 54 werden die statistischen Kennwerte der Skala zur Beweisaktivität angegeben. Die Reliabilität der Skala zur Beweisaffinität ist dabei insgesamt in einem ausreichenden Bereich, allerdings wird bei der Betrachtung der korrigierten Trennschärfen der Items deutlich, dass hier gewisse Schwächen der Skala auf der Itemebene vorliegen. Es erscheint daher angebracht, diese Ergebnisse vorsichtig zu betrachten und entsprechend zu interpretieren.

Kennwerte Skala Beweisaffinität in der Eingangsbefragung („EB_Aff_Bew“)			
	Alle	**Erstsemester**	**Höhere Semester**
n	149	71	78
M	4,09	3,96	4,21
Median	4,00	4,00	4,17
SD	0,84	0,84	0,84
Cronbachs Alpha	0,703	0,742	0,666
Spannweite r_{IT}	0,339 - 0,577	0,373 - 0,584	0,212 - 0,614

Tabelle 54: Kennwerte der Skalen zur Beweisaffinität (Alle und Subgruppen)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [23]: Wie lässt sich die Beweisaffinität der Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Mit einem arithmetischen Mittel von 4 liegen die Skalenwerte im Durchschnitt in einem leicht positiven Bereich. Der Mittelwertunterschied zwischen den Erstsemestern (M=3,96) und den Höheren Semestern (M=4,21) ist statistisch schwach signifikant auf dem 7%-Niveau bei kleiner Effektstärke (t-Test, p=0,069; Cohens d=0,3).

Von Interesse erscheint an dieser Stelle auch die Frage, inwiefern Zusammenhänge zwischen der Skala zur Beweisaffinität, den personenbezogenen Daten und den erhobenen Skalen zur Beweisakzeptanz ausgemacht werden können.

In der Subgruppe der Erstsemester korreliert die Skala zur Beweisaffinität schwach mit der schulischen Mathematiknote (Spearmans-Rho=0,270), wobei dieser Zusammenhang statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau ist (p=0,025). Dieses Ergebnis wird durch die entsprechende Darstellung im Scatterplot (Abbildung 74) verdeutlicht. Es erscheint plausibel, dass Schüler/innen mit einer besseren Note in Mathematik einen höheren Wert in Beweisaffinität erreichen, i. e., positiver gegenüber dem Beweisen eingestellt sind. Zwischen der Skala „Beweisaffinität“ und den erhobenen Skalen zur Beweisakzeptanz konnten dagegen keine statistisch signifikanten Zusammenhänge ausgemacht werden, weder in der Gesamtgruppe, noch in den Subgruppen.

Unter Berücksichtigung der personenbezogenen Merkmale „Geschlecht“, „Schulischer Mathematikkurs“, „Teilnahme an einem Vorkurs“ und „Teilnahme an einem Mathematikwettbewerb“ lassen sich keine signifikanten Mittelwertunterschiede bzgl. der Skala „Beweisaffinität“ ausmachen (t-Test).

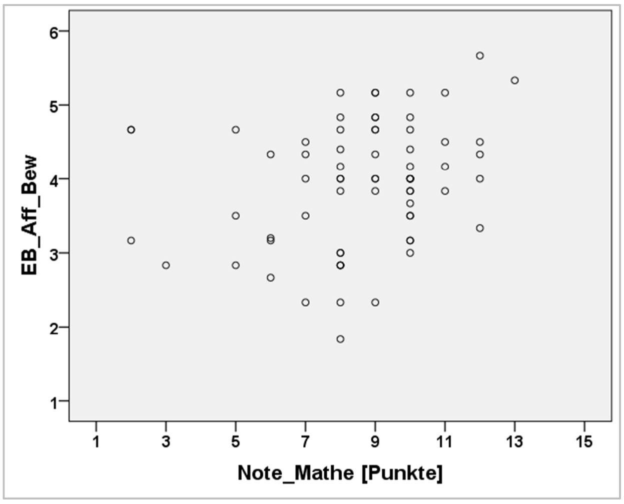


Abbildung 74: Scatterplot zu den Skalen „Beweisaffinität“ [EB_Aff_Bew] und „Letzte schulische Mathematiknote“ [Note_Mathe] (Eingangsbefragung, Erstsemester [n=71])

(iii) Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität

In dem Fragebogenabschnitt „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität“ sollten die Studierenden die folgenden Aussagen auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“) bewerten:

Formulierung	Abkürzung
Ich möchte im Studium über das Beweisen lernen…	
…wie man einen Beweis findet.	„finden“
…wie man einen Beweis aufschreibt.	„aufschreiben“
…wie man einen Beweis liest.	„lesen“
…wie man einen Beweis versteht.	„verstehen“
…wie das Beweisen funktioniert.	„funktioniert“
… warum man Beweise führt.	„warum“
… welche Arten von Beweisen es gibt.	„Arten“
… wie man Beweise im Schulunterricht einsetzt.	„wie_in_Schule“
… wie man Schüler zum Beweisen motivieren kann.	„SuS_motiv“
… wie man Schülern „das Beweisen“ unterrichten kann.	„wie_unterr“
Ich möchte nichts über das Beweisen lernen.	„nichts“

Tabelle 55: Items zu dem Komplex „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität“

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [24]: Wie schätzen die Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung ihre eigene Motivation zum Erlernen verschiedener Aspekte der mathematischen Beweisaktivität ein? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Die statistischen Kennwerte der Items zum Komplex „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität“ werden in der Tabelle 56 angegeben (Alle und Subgruppen), die Mediane der Items werden für die Subgruppen zusätzlich in der Abbildung 75 dargestellt.

Bei der Betrachtung der Ergebnisse ist zunächst auffällig, dass alle Aspekte in beiden Subgruppen generell sehr hoch bewertet werden. Die niedrigen Bewertungen des Kontrollitems „Ich möchte nichts über das Beweisen lernen“ [„nichts“] zeigt, dass die Items nicht einfach nur pauschal hoch bewertet wurden.

	finden	aufschr.	lesen	verste-hen	funktio-niert	warum	Arten	wie_in_Schule	SuS_mo-tiv.	wie_un-terr.	nichts
Alle											
n	136	136	136	135	135	135	136	136	136	136	133
M	5,10	5,28	5,04	5,39	5,42	4,91	5,10	5,43	5,43	5,40	1,79
Median	5,00	5,00	5,00	6,00	6,00	5,00	5,50	6,00	6,00	6,00	1,00
SD	1,19	0,92	1,02	0,85	1,02	1,26	1,16	0,88	0,90	0,84	1,53
Erstsemester											
n	60	60	60	59	59	60	60	60	60	60	58
M	5,02	5,07	4,87	5,24	5,31	4,75	5,08	5,40	5,33	5,33	1,64
Median	5,00	5,00	5,00	5,00	6,00	5,00	5,00	6,00	6,00	6,00	1,00
SD	1,16	0,99	0,93	0,88	1,15	1,20	1,18	0,96	1,00	0,91	1,27
Höhere Semester											
n	76	76	76	76	76	75	76	76	76	76	75
M	5,17	5,45	5,18	5,50	5,51	5,04	5,12	5,45	5,51	5,46	1,91
Median	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	1,00
SD	1,23	0,84	1,07	0,81	0,90	1,30	1,15	0,82	0,81	0,77	1,70

Tabelle 56: Statistische Kennwerte der Items zum Komplex „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität“ in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

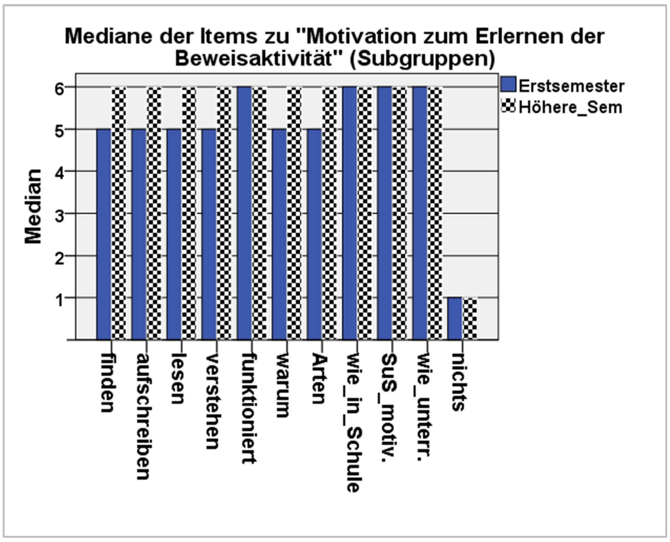


Abbildung 75: Mediane der Items zu "Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität" in der Eingangsbefragung (Subgruppen) ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“)

In der Subgruppe der Erstsemesterstudierenden ist interessant, dass gerade die Aussagen zum Vermitteln von Beweisen in der Schule [„wie_in_Schule“, „SuS_motiv.“ und „wie_unterr.“] mit einem Median von 6 höher als die rein fachlichen Aspekte bewertet werden (mit Ausnahme des Items „funktioniert“). Für die statistische Signifikanz dieses Medianunterschieds seien exemplarisch die entsprechenden Werte für den Medianunterschied dieser drei Items zum Item „… wie man einen Beweis findet“ (Median: 5) aufgeführt (Wilcoxon-Test): „finden“ vs. „wie_in_Schule“: $p=0{,}006$ bei mittlerer Effektstärke ($r=0{,}46$), „finden“ vs. „SuS_motiv“: $p=0{,}091$ bei schwacher Effektstärke ($r=0{,}22$) und „finden“ vs. „wie_unterr“: $p=0{,}059$ bei schwacher Effektstärke ($r=0{,}24$).

Es zeigt sich somit, dass die Motivation der Erstsemesterstudierenden zum Erlernen verschiedener Aspekte der Beweisaktivität generell sehr hoch ist, die größte Motivation aber bei den Aspekten vorliegt, die ihre spätere Lehrtätigkeit tangiert. Bei den Höheren Semestern kann an dieser Stelle kein statistisch signifikanter Unterschied ausgemacht werden.

Zwischen den Subgruppen sind die Medianunterschiede bzgl. der Items „aufschreiben“, „lesen“ und „verstehen“ bei kleiner Effektstärke statistisch signifikant (s. Tabelle 57). Die Höheren Semester geben bzgl. dieser Aspekte signifikant höhere Bewertungen bzgl. ihrer Motivation an. Auch wenn an dieser Stelle ein gewisser Grad an ‚sozialer Erwünschtheit' nicht ausgeschlossen werden kann, lassen sich die Ergebnisse doch als Beleg für eine grundlegende Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität deuten. Diese große Motivation auf Seiten der Studierenden bzgl. von Beweisen entspricht den Ergebnissen von Hemmi (2006, S. 141ff.).

	„finden"	**„aufschreib."**	**„lesen"**	**„verstehen"**	**„warum"**	**„Arten"**
Median Erstsemester	5	5	5	5	5	5
Median Höhere Sem.	6	6	6	6	6	6
Signifikanz	p=0,204	p=0,007	p=0,012	p=0,030	p=0,064	p=0,827
Effektstärke	---	d=0,42	d=0,31	d=0,31	d=0,23	---

Tabelle 57: Signifikanzen und Effektstärken (Cohens d) der Medianunterschiede in den Subgruppen bzgl. der Items zur „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität" in der Eingangsbefragung (Mann-Whitney-U-Test)

7.2.5.3 Einstellungen zur Mathematik

Bzgl. der Einstellungen zur Mathematik wurden in der Eingangsbefragung die vier folgenden Skalen erhoben: „Mathematik als System", „Mathematik als Toolbox", „Mathematik als Prozess" und „Praktische Relevanz von Mathematik". Im Fokus stehen mögliche Unterschiede zwischen den Subgruppen und Zusammenhänge zwischen diesen Skalen und den oben beschriebenen Skalen zur Beweisakzeptanz und zur Beweisaffinität.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [25]: Welche Einstellungen zur Mathematik können bei den Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung in welchem Maß ausgemacht werden? Und:

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

In der Tabelle 58 werden die statistischen Kennwerte der erhobenen Skalen angegeben[71]. In der Abbildung 76 werden zusätzlich die arithmetischen Mittel der Skalen für die Gesamtgruppe und die Subgruppen dargestellt.

In der Gesamtgruppe liegen die Mittelwerte der vier Skalen zu den verschiedenen Einstellungen zur Mathematik sehr nah beieinander, so dass nicht von einer Vorrangstellung bestimmter Einstellungen gesprochen werden kann (s. Abbildung 76). Innerhalb der Gruppe der Erstsemesterstudierenden liegt dagegen der Mittelwert der Skala „Mathematik als Toolbox" mit 4,66 statistisch (hoch) signifikant über dem der anderen Skalen, im Falle der ‚Höheren Semester' liegt der Mittelwert dieser Skala unter den anderen (s. Tabelle 59 und Abbildung 76.

[71] In Bezug auf die Reliabilitätswerte von Skalen („Cronbachs Alpha") werden bei Lienert und Raatz (1994) Werte größer-gleich 0,5 als „vertretbar" angegeben (vgl. Riedl 2015, S. 45), bei Schnell et al. (2013, S. 413) liegt die Grenze allerdings bei 0,8, wobei die Autoren anmerken, dass in der Praxis meist auch niedrigere Werte akzeptiert werden. Bei den vorliegenden Skalen sind auch die Werte der korrigierten Trennschärfen der Items in einem eher unteren Bereich. Es wird deutlich, dass die Ergebnisse dieses Abschnittes vorsichtig betrachtet und interpretiert werden müssen.

	Mathematik als System [MaSy]	Mathematik als Toolbox [MaTo]	Mathematik als Prozess [MaPro]	Praktische Relevanz von Mathematik [PraRel]
Alle				
n	146	146	146	146
M	4,37	4,45	4,41	4,46
SD	0,66	0,76	0,80	0,89
Cronbachs Alpha	0,643	0,660	0,608	0,790
Spannweite r_{IT}	0,298 - 0,431	0,302 - 0,513	0,350 - 0,447	0,532 - 0,614
Erstsemester				
n	68	68	68	68
M	4,34	4,66	4,32	4,37
SD	0,68	0,72	0,86	0,92
Cronbachs Alpha	0,634	0,692	0,665	0,828
Spannweite r_{IT}	0,301 - 0,394	0,359 - 0,540	0,439 - 0,485	0,475 - 0,719
Höhere Semester				
n	78	78	78	78
M	4,40	4,27	4,49	4,53
SD	0,65	0,76	0,74	0,86
Cronbachs Alpha	0,650	0,608	0,546	0,748
Spannweite r_{IT}	0,277 - 0,401	0,186 - 0,484	0,223 - 0,447	0,457 - 0,591

Tabelle 58: Statistische Kennwerte der Skalen zu „Einstellungen zur Mathematik“ in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen)

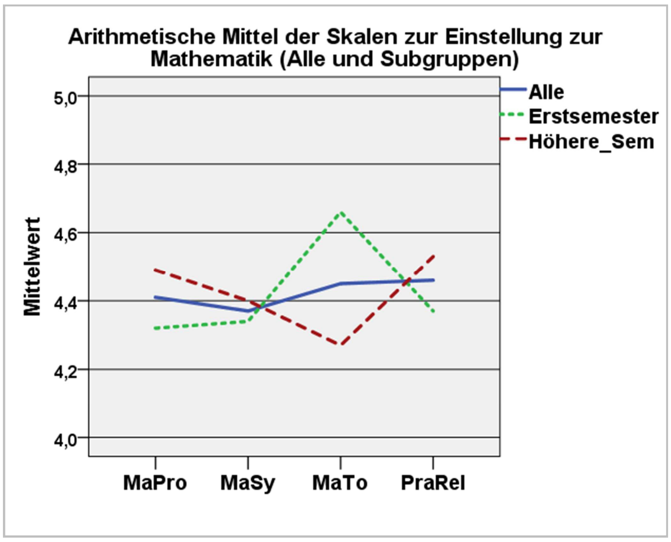


Abbildung 76: Arithmetische Mittel der Skalen zur Einstellung zur Mathematik in der Eingangsbefragung (Alle und Subgruppen)

Erstsemester (n=68)			
	„MaSy“	„MaPro“	„PraRel“
M	4,34	4,32	4,37
Signifikanz des Mittelwertunterschieds zur Skala „MaTo“ (M=4,66)	p=0,001	p=0,01	p=0,046
Effektstärke (Cohens d)	0,45	0,43	0,35
Höhere Semester (n=78)			
	„MaSy“	„MaPro“	„PraRel“
M	4,40	4,49	4,53
Signifikanz des Mittelwertunterschieds zur Skala „MaTo“ (M=4,27)	n. s.	p=0,056	p=0,022
Effektstärke (Cohens d)	---	0,29	0,32

Tabelle 59: Signifikanzen und Effektstärken Mittelwertunterschiede der drei Skalen zur Mathematik „MaSy“, „MaPro“ und „PraRel“ im Vergleich zu der Skala „Mathematik als Toolbox" ["MaTo"] in der Eingangsbefragung (t-Test) (Subgruppen)

Innerhalb der Subgruppen ist der Mittelwertunterschied der Skala „Mathematik als Toolbox“ zwischen den Erstsemestern (4,66) und den Höheren Semestern 4,27 bei mittlerer Effektstärke statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau (t-Test, p=0,002 mit Cohens d=0,53). Hier zeigt sich, dass die Erstsemesterstudierenden ein Bild von Mathematik zu haben scheinen, dass mehr als bei den ‚Höheren Semestern‘ durch Auswendiglernen und direktes Anwenden von Verfahren und Regeln geprägt ist. Andere signifikante Mittelwertunterschiede liegen zwischen den Subgruppen nicht vor (t-Test).

Betrachtet man die Zusammenhänge der Skalen der Einstellungen zur Mathematik zu den bisher erhobenen Skalen („Beweisakzeptanz“ und „Beweisaffinität“), so zeigt sich, dass die Skala der „Praktischen Relevanz von Mathematik“ in beiden Subgruppen statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau mit der Skala zur Beweisaffinität korreliert (Erstsemester: r_P=0,343 mit p=0,004; Höhere Semester: r_P=0,356 und p=0,001). Studierende, die der Mathematik einen höheren praktischen Nutzen für den Alltag zuschreiben, haben demnach eine positivere Einstellung zur Beweisaktivität.

Bzgl. der konstruierten Skalen zur Beweisakzeptanz lässt sich nur in der Subgruppe der Erstsemesterstudierenden ein Zusammenhang zwischen den Skalen „Mathematik als System“ und der Akzeptanzskala zum formalen Beweis ausmachen (r_P=0,315)[72], der statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau ist (p=0,011). In der Gruppe der Erstsemesterstudierenden bewahrheitet sich somit die Hypothese, dass eine stärkere Ausprägung einer Sicht auf Mathematik als formales System mit einer höheren Akzeptanz des formalen Beweises einhergeht. Die aufgezeigten Zusammenhänge werden durch die entsprechende Darstellung im Scatterplot bestätigt (vgl. Abbildung 77).

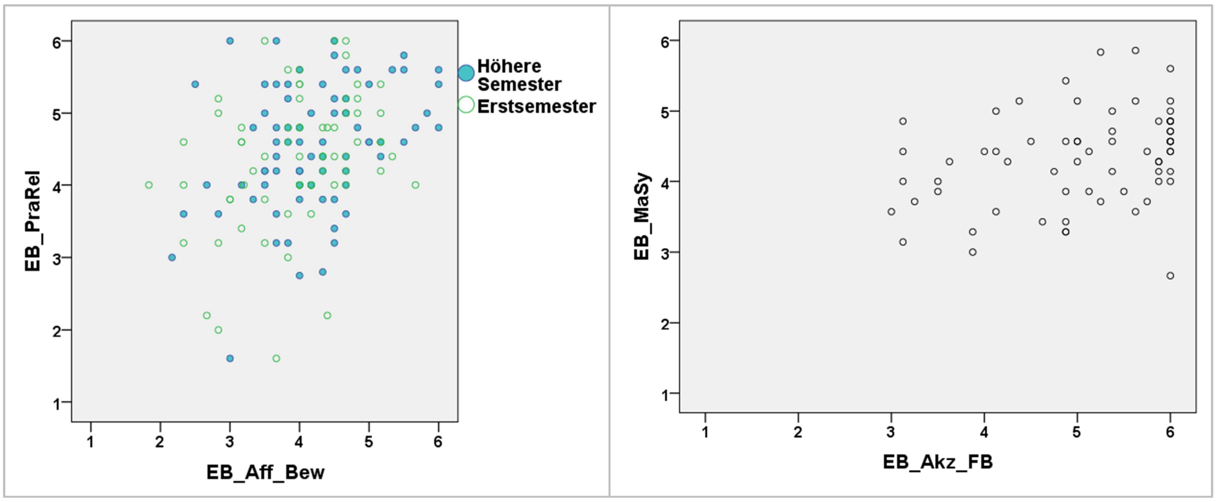


Abbildung 77: Der Zusammenhang der Skalen „Praktische Relevanz von Mathematik“ [„EB_PraRel“] und der Skala zur „Beweisaffinität“ [„EB_Aff_Bew“] in der Eingangsbefragung (Erstsemester und höhere Semester, links) und der Zusammenhang der Skalen „Mathematik als System“ [„EB_MaSy“] und „Akzeptanz des formalen Beweises“ [EB_„Akz_FB“] in der Eingangsbefragung (nur Erstsemester, rechts)

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [4] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.2.5. unter Berücksichtigung der Leitfragen zur Auswertung 20-25 zusammenfassend ausgewertet.

[72] In der Gruppe der Höheren Semester liegt der Korrelationskoeffizient bei r_p=0,145 mit p=0,205. Dieses (statistisch nicht signifikante) Ergebnis könnte einem ‚Deckeneffekt‘ der Akzeptanzwerte zum formalen Beweis geschuldet sein.

Beantwortung der Forschungsfrage [4]: Wie lassen sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben? Und:

a) Inwiefern lassen sich bzgl. dieser Aspekte Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Bzgl. der **Einstellung zum Beweisen in der Schule** wurde deutlich, dass die Studierenden den Lerngegenstand ‚Beweis' eher in der Sekundarstufe 2 als in der Sekundarstufe 1 verorten (Wilcoxon-Test, $p<0{,}001$ bei großer Effektstärke von $r=0{,}78$). Während Beweise als Unterrichtsinhalt für die Grundschule abgelehnt werden, wird deren Verwendung in der Realschule und dem Gymnasium deutlich befürwortet. Dabei stimmen die Studierenden den Begründungen (eher) zu, dass Beweise im Unterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, da es wichtiger sei, fachliche Inhalte zu vermitteln, Rechenaufgaben richtig lösen zu können und Anwendungen der Mathematik im Alltag zu thematisieren. Das Argument, dass Lernende sowieso wüssten, dass die mathematischen Sätze richtig seien, wird dagegen statistisch signifikant weniger bedeutsam eingeschätzt. Ein mangelndes Beweisbedürfnis auf Seiten der Lernenden scheint hierbei nach Ansicht der Studierenden also weniger ausschlaggebend zu sein.

Zwischen den Subgruppen der Erstsemester und der Höheren Semester ließen sich in diesem Bereich keine (statistisch) signifikanten Unterschiede ausmachen.

Bei den **Einstellungen zum Beweisen** konnte gezeigt werden, dass die Studierenden dem Beweisen gegenüber im Allgemeinen neutral bis positiv eingestellt sind. Der Mittelwert der konstruierten Skala zur „Beweisaffinität" liegt mit 4,09 in der oberen Hälfte der Skala und verdeutlicht diese eher positive Einstellung der Studierenden gegenüber dem Beweisen. Schließlich wurde die hohe Motivation der Studierenden in Bezug auf das Erlernen der Beweisaktivität deutlich: Allen formulierten Items bzgl. der verschiedenen Aspekte der Beweisaktivität wird von der Gesamtgruppe deutlich zugestimmt (alle Mediane sind größer-gleich 5). Es wurde somit insgesamt deutlich, dass die Studierenden gegenüber dem Beweisen positiv eingestellt sind und eine hohe Motivation in Bezug auf das Erlernen der Beweisaktivität aufweisen. Dies entspricht den Ergebnissen von Hemmi (2006, S. 140ff.) mit finnischen Studienanfängerinnen und –anfängern der Mathematik.

In Bezug auf die Subgruppen konnten im Rahmen der Einstellungen zum Beweisen zunächst Unterschiede auf der Itemebene herausgearbeitet werden: Bzgl. des Items „Ich weiß, wie man einen Beweis führt" liegt der Median der Erstsemester (3) statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau unter dem der Höheren Semester (4) (Mann-Whitney-U-Test, $p<0{,}001$; mittlere Effektstärke des Subgruppenunterschieds: Cohens $d=0{,}68$). Bei der konstruierten Skala zur „Beweisaffinität" ist der Mittelwertunterschied zwischen den Erstsemestern (3,96) und den Höheren Semester (4,21) statistisch schwach signifikant auf dem 7%-Niveau bei kleiner Effektstärke ist (t-Test, $p=0{,}069$; Cohens $d=0{,}3$). An dieser Stelle kann festgehalten werden, dass sich die Höheren Semester kompetenter bzgl. der Konstruktion von Beweisen fühlen und dem Beweisen auch mehr zugeneigt sind. Im Rahmen der Motivation der Studierenden zum Erlernen der Beweisaktivität wurden weitere Unterschiede zwischen den Subgruppen deutlich. Die Bewertung bzgl. dem Erlernen der fachlichen Aspekte des Beweisens fallen bei den Erstsemestern mit einem Median von 5 statistisch signifikant geringer aus, als bei den höheren Semestern mit einem Median von 6. Außerdem zeigte sich, dass die Erstsemesterstudierenden ihre Motivation zum Erlernen der unterrichtspraktischen Aspekte zum Beweisen höher bewerten, als ihre Motivation bzgl. der fachlichen Aspekte zum Beweisen.

Bei den **Einstellungen zur Mathematik** konnte in der Gesamtgruppe keine Vorrangstellung einer bestimmten „Einstellung zur Mathematik“ ausgemacht werden. In der Gruppe der Erstsemesterstudierenden liegt der Mittelwert der Skala „Mathematik als Toolbox“ (M=4,66) statistisch signifikant über den Mittelwerten der anderen Skalen (Mittelwertunterschiede durch t-test: „Mathematik als System“: M=4,34, p=0,001, schwache Effektstärke: Cohens d=0,45; „Mathematik als Prozess“: M=4,32, p=0,01, schwache Effektstärke: Cohens d=0,43 und „Praktische Relevanz von Mathematik“: M=4,32, p=0,046, schwache Effektstärke: Cohens d=0,35). Bei den Höheren Semestern liegt der Mittelwert der Skala „Mathematik als Toolbox“ mit M=4,27 dagegen statistisch (schwach) signifikant unter dem der Skala „Mathematik als Prozess“ (M=4,49, p=0,056, schwache Effektstärke: Cohens d=0,29) und unter dem der Skala „Praktische Relevanz von Mathematik“ (M=4,53, p=0,022, schwache Effektstärke: Cohens d=0,32). Dies lässt sich dahingehend interpretieren, dass die Studienanfänger noch eher einem Bild von Mathematik verhaftet sind, das durch Auswendiglernen und direktes Anwenden von Verfahren und Regeln geprägt ist. Von einer entsprechenden Betonung des „Toolbox-Aspekts“ bei Studienanfängerinnen und -anfängern sprechen auch Törner und Grigutsch (1994, S. 225): „Beim Umgang mit Mathematik ist der Tool-Aspekt dominanter: der Umgang mit Mathematik besteht für zwei Drittel der Studenten aus Lernen, Erinnern und Anwenden, für ein Fünftel ist er damit sogar vollständig erfaßt“.

Die Skala „Praktische Relevanz von Mathematik“ korreliert in beiden Subgruppen mit der Skala zur „Beweisaffinität“ (Erstsemester: r_P=0,343 mit p=0,004; Höhere Semester: r_P=0,356 und p=0,001), was bedeutet, dass die Studierenden, die eher den Ansichten zustimmen, dass Mathematik im Alltag von Bedeutung ist und einen Nutzen für die Gesellschaft hat, im Allgemeinen auch dem Beweisen gegenüber eher zugeneigt sind.

Im Vergleich der Subgruppen wurde deutlich, dass der Mittelwert der Skala „Mathematik als Toolbox“ bei den Erstsemestern (4,66) statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau bei mittlerer Effektstärke über dem der Höheren Semestern (4,27) liegt (t-Test, p=0,002 mit Cohens d=0,53). Schließlich konnte nur für die Gruppe der Erstsemesterstudierenden eine (schwache) positive Korrelation zwischen der Skala „Mathematik als System“ und der Akzeptanzskala zum formalen Beweis nachgewiesen werden, die statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau ist (r_P=0,315 und p=0,011)[73]. Eine Vorstellung der Mathematik als formales System entspricht somit einer hohen (Akzeptanz-) Bewertung des formalen Beweises.

7.3. Teilstudie 2: Ergebnisse der Ausgangsbefragung: Veränderungen durch die Lehrveranstaltung und wahrgenommener Lernzuwachs bzgl. des Beweisens bei den Studierenden

In der vorletzten Sitzung der Lehrveranstaltung wurde im Wintersemester 2014/15 mithilfe eines Fragebogens eine Ausgangsbefragung durchgeführt; die Teilnehmenden hatten für die Bearbeitung 45 Minuten Zeit. Im Kontext dieser Erhebung sollten im Sinne eines Pre-/Post-Testdesigns Veränderungen in Bezug auf die folgenden in der Eingangsbefragung erfassten Daten untersucht werden: Beweisbewertung, Auswahl und Präferenz einer Begründungsform, Beweisakzeptanz,

[73] Dass in den ‚Höheren Semestern' hier kein signifikanter Zusammenhang vorliegt, könnte durch die Deckeneffekte in der Akzeptanzskala zum formalen Beweis in dieser Subgruppe erklärt werden.

Einstellungen zu Beweisen und Einstellungen zur Mathematik. Beide Befragungen waren mit der Abfrage eines anonymen personalisierten Codes versehen, so dass die Testhefte entsprechend anonym zugeordnet werden konnten. Die in der Ausgangsbefragung erhaltenen Ergebnisse erfüllen damit zwei Zielsetzungen: Einmal werden durch diese Ergebnisse die Kompetenzen und Einstellungen der Studierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung dokumentiert, außerdem wird es mit diesen Ergebnissen möglich, entsprechende Veränderungen zur Eingangsbefragung festzustellen und auch statistisch auszuwerten. Dementsprechend beziehen sich die folgenden Auswertungen auf alle Teilnehmenden, die *nachverfolgbar* an der Eingangs- und Ausgangsbefragung teilgenommen haben (N=74). Im Gegensatz zu den Darstellungen der Ergebnisse der Teilstudie 1 werden im Rahmen der Teilstudie 2 die Ergebnisse nicht mehr nach den Subgruppen ‚Erstsemester' und ‚Höhere Semester' unterschieden, da das Forschungsinteresse hier auf den Veränderungen durch die Lehrveranstaltung von der Ein- zur Ausgangsbefragung liegt und nicht in der Herausarbeitung vermeintlicher Charakteristika der Subgruppen.

In Abschnitt 2.4.3 wurden verschiedene Befunde angeführt, dass problemorientierte Lehrveranstaltungen, bei denen ein Schwerpunkt auf die Prozesshaftigkeit der Mathematik gelegt wird, zu Veränderungen bzgl. der Einstellungen der Studierenden zur Mathematik führen können. Aufbauend auf diesen Ergebnissen kann hier die grundlegende Hypothese formuliert werden, dass auch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik", wie sie im Wintersemester 2014/15 nach drei durchlaufenden Forschungszyklen im Sinne des Design-Based Research durchgeführt wurde (Kapitel 6), zu Veränderungen im Kontext des Beweisens bei den Studierenden führen wird. Da die Lehrveranstaltung auf der Umsetzung verschiedener Leitprinzipien basiert (s. Abschnitt 1.3) und durch mehrere Teilkomponenten konstituiert wird (s. Kapitel 6), können keine singulären Wirkmechanismen in Bezug auf einzelne Maßnahmen erhoben werden. Bedeutsam erscheint dabei aber übergeordnet die Betonung der Prozesshaftigkeit der Mathematik (innerhalb der Vorlesung, der Tutorien, der Zentralübung und der entwickelten Aufgabenformate) und der konsequente Einbezug der verschiedenen Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Beweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) und das parallele Agieren in den verschiedenen Diagrammsystemen.

Es bleibt dabei anzumerken, dass die Lehrveranstaltung auch zu Veränderungen bei den Studierenden geführt haben könnte, die durch die hier verwendeten Testinstrumente nicht erfasst werden. Auch ist es möglich, dass das Ausmaß eventueller Veränderungen bei den Studierenden mit ihrem Engagement im Rahmen der Lehrveranstaltung zusammenhängen könnte. Dieser Frage wurde allerdings nicht nachgegangen, da nicht die Auswirkung der Motivation der Studierenden, sondern die Auswirkungen der Lehrveranstaltung im Fokus des Forschungsinteresses stehen.

7.3.1 Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Im Zentrum des Interesses der Teilstudie 2 stehen zunächst die Veränderungen, die sich in Bezug auf die Teilbereiche (i) Kompetenzaspekte zum Beweisen und (ii) Einstellungen zum Beweisen und zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung ausgemacht werden können. Im Rahmen der Ausgangsbefragung wird es darüber hinaus möglich, neue Aspekte abzufragen, deren Thematisierung aus verschiedenen Gründen in der Eingangsbefragung keinen Sinn ergeben hätte. Zu diesen Aspekten, die neu in der Ausgangsbefragung untersucht werden, gehören: Beweispräferenz (vgl. Leitfrage zur Auswertung 26b) und der neue Fragenkomplex (iii), der selbstwahrgenommene Lernzuwachs der Studierenden in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung. Die Frage der Beweispräferenz der Studierenden fokussiert dabei nicht primär die Auswirkungen der Vorlesung.

Ziel des Themenkomplexes ist die subjektive Bewertung der Studierenden: Welchen Beweisform verwenden die Studierenden am liebsten, wenn sie einen Beweis selbst konstruieren bzw. vorgelegten Beweis verstehen wollen? Aus dieser Perspektive ergeben sich die folgenden Forschungsfragen und damit verbundenen Leitfragen zur Auswertung, die die folgenden Ausführungen leiten:

- Forschungsfrage [5]: Inwiefern verändern sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen' von der Ein- zur Ausgangsbefragung?[74]

    - Leitfrage zur Auswertung [26]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der verschiedenen Begründungsformen („narrativ und korrekt", „empirisch-induktiv", „formal und falsch", „korrekt mit Variablen") als „richtiger Beweis" von der Ein- zur Ausgangsbefragung?
        a) Inwiefern verändert sich die Auswahl der Begründungsform, die ihrem eigenen Ansatz am nächsten käme?
        b) Welche der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung bevorzugen die Studierenden, wenn es darum geht, (i) Beweise selbst zu konstruieren bzw. (ii) einen vorgelegten Beweis verstehen zu wollen?[75]
    - Leitfrage zur Auswertung [27]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung in Bezug auf die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit", „subjektive Überzeugung", „Erklärungspotential" und „Allgemeingültigkeit" von der Ein- zur Ausgangsbefragung?
    - Leitfrage zur Auswertung [28]: Inwiefern verändern sich die Beweisakzeptanzen der Studierenden bzgl. der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

- Forschungsfrage [6]: Inwiefern verändern sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung bzw. welche neuen Ansichten der Studierenden zum (generischen und formalen) Beweisen können in der Ausgangsbefragung herausgearbeitet werden?
    - Leitfrage zur Auswertung [29]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der Relevanz des Unterrichtsgegenstandes „Beweis" für verschiedene Schultypen und Schulstufen von der Ein- zur Ausgangsbefragung?
    - Leitfrage zur Auswertung [30]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, von der Ein- zur Ausgangsbefragung?
    - Leitfrage zur Auswertung [31]: Wie bewerten die Studierenden die Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik?
    - Leitfrage zur Auswertung [32]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen zu motivationalen Aspekten zum Beweisen von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

[74] Die Teilkompetenzen der Konstruktion von Begründungen und Beweisen wird in der Teilstudie 3 (Abschnitt 7.4) aufgegriffen.
[75] Diese Frage dient als Konkretisierung der Frage nach dem eigenen Begründungsansatz. Nach der Lehrveranstaltung geht es nun nicht mehr bloß um die Frage, ob die Studierenden einen empirischen, narrativen oder formalen Ansatz verfolgen (vgl. Abschnitt 7.2.4.2), sondern auch, welche Beweisform in welchem Diagrammsystem die Studierenden präferieren.

- Leitfrage zur Auswertung [33]: Inwiefern verändert sich die „Beweisaffinität" der Studierenden von der Ein- zur Ausgangsbefragung?
- Leitfrage zur Auswertung [34]: Inwiefern verändern sich die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

- Forschungsfrage [7]: Wie schätzen die Studierenden selbst ihren Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung ein?
  - Leitfrage zur Auswertung [35]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf die Funktionen von Beweisen ein?
  - Leitfrage zur Auswertung [36]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess ein?
  - Leitfrage zur Auswertung [37]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung ein?
  - Leitfrage zur Auswertung [38]: Wie lässt sich die Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen auf Seiten der Studierenden beschreiben?

7.3.2 Kompetenzaspekte zum Beweisen: Ergebnisse der Ausgangsbefragung und Veränderungen durch die Lehrveranstaltung

7.3.2.1 Die Beweisbewertungen und Beweispräferenzen der Studierenden

Entsprechend der Aufgabenstellung in der Eingangsbefragung sollten die Studierenden auch in der Ausgangsbefragung bei den vier konkreten ‚Beweisen' angeben, ob es sich hierbei um „richtige Beweise" handelt oder nicht (vgl. Abschnitt 3.3.2 und Abschnitt 7.2.4.2). Die vorgelegten „Beweisprodukte" umfassen eine korrekte narrative Argumentation [„narrativ"], eine induktive Begründung (bloße Betrachtung einzelner Beispiele) [„Beispiele"], eine formal dargestellte falsche Begründung [„formal & falsch"] und schließlich die obige narrative Begründung, dargestellt mithilfe von Buchstabenvariablen [„korrekt mit Variablen"]. Wie bereits in der Eingangsbefragung wurde auch in der Ausgangsbefragung die Frage gestellt, welche der verschiedenen Begründungsformen dem eigenen Ansatz der Studierenden am nächsten komme. Die Frage bzgl. der besten Note durch den Mathematiklehrer der Oberstufe konnte dabei entfallen, da in Bezug auf diese Frage keine nachträgliche Veränderung zu erwarten war.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [26]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der verschiedenen Begründungsformen („narrativ und korrekt", „empirisch-induktiv", „formal und falsch", „korrekt mit Variablen") als „richtiger Beweis" von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Die relativen Häufigkeiten der Bewertungen als „richtiger Beweis" werden in der Tabelle 60 für die Ein- und Ausgangsbefragung dargestellt.

	Alle (n=74)		Signifikanz (McNemar-Test)	Quotenverhältnis
	EB	AB		
narrativ („narrativ und korrekt“)	74,3	73	---	---
Beispiele („empirisch-induktiv“)	17,6	5,4	0,012	0,1
formal & falsch	27	13,5	0,078	---
korrekt mit Var.	89,2	95,9	0,289	---

Tabelle 60: Relative Häufigkeiten der Beweisbewertungen als „richtiger Beweis“ in der Eingangsbefragungen [EB] und der Ausgangsbefragung [AB] und Signifikanzen der Unterschiede von der Ein- zur Ausgangsbefragung (McNemar-Test) mit Effektstärken durch Quotenverhältnis (odds-Ratio) (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

Im Vergleich der Ergebnisse der Ein- und Ausgangsbefragung wird deutlich, dass die Bewertung der bloßen empirisch-induktiven Begründung [„Beispiele“] als „richtiger Beweis“ statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau von 17,6% auf 5,4% zurückgeht (p=0,012). (Das Quotenverhältnis von 0,1 (odds ratio) sagt hierbei aus, dass 10-mal so viele Studierende von der Ein- zur Ausgangsbefragung ihre Bewertung von „richtiger Beweis“ zu „kein richtiger Beweis“ geändert haben, als umgekehrt.) Der Rückgang der Bewertung im Falle der formal dargestellten und falschen Begründung ist dagegen mit p=0,078 nicht mehr statistisch signifikant. Es ist dabei auffällig, dass selbst nach der Lehrveranstaltung die formal dargestellte und falsche Begründung noch von 13,5% der Studierenden als richtiger Beweis bewertet wird. Und wie bereits in der Eingangsbefragung wird auch in der Ausgangsbefragung die korrekte Begründung mit Variablen mit 95,9% statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau häufiger als richtiger Beweis bewertet als die entsprechende narrative Begründung ohne Variablen (73%) (McNemar-Test, p<0,001; odds ratio=9,5).

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [26a]: Inwiefern verändert sich die Auswahl der Begründungsform, die ihrem eigenen Ansatz am nächsten käme?

Die relativen Häufigkeiten der Begründungsauswahl für den eigenen Ansatz werden in der Tabelle 61 angegeben.

	Alle (n=74)		Signifikanz (McNemar-Test)	Quotenverhältnis
	EB	AB		
narrativ	33,7	21,5	0,031	0,37
Beispiele	10,8	1,4	0,041	---[76]
formal & falsch	9,5	6,8	---	---
korrekt mit Var.	36,5	63,5	<0,001	10,5
fehlende Werte	9,5	6,8	---	

Tabelle 61: Prozentuale Verteilung der Beweiswahl für die größte Nähe zum eigenen Ansatz in der Eingangsbefragungen [EB] und der Ausgangsbefragung [AB], Signifikanzen der Unterschiede zwischen den Befragungszeitpunkten und Effektstärken als Quotenverhältnis („odds Ratio“) (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

Die Abnahme der Auswahl der narrativen Begründung von der Eingangsbefragung (33,7%) zur Ausgangsbefragung (21,5%) ist mit p=0,031 statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau, wie auch der Rückgang der Auswahl der empirisch-induktiven Begründungsform [„Beispiele“] von 10,8% auf 1,4% (p=0,041). Der Anteil der Auswahl der korrekten Begründung mit Variablen steigt dagegen statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau von 36,5% auf 63,5% an (p<0,001). Das Quotenverhältnis von 10,5 sagt dabei aus, dass von der Ein- zur Ausgangsbefragung 10,5-mal so viele Studierende ihre Wahl hin zur korrekten Begründung mit Variablen geändert haben, als von dieser weg. Es zeigt sich

[76] An dieser Stelle kann das entsprechende Quotenverhältnis nicht berechnet werden, da es keinen Studierenden gibt, der die empirisch-induktive Begründung nicht in der Eingangsbefragung als „eigenen Ansatz“ gewählt hat, doch aber in der Ausgangsbefragung.

somit, dass sich der Ansatz der Studierenden vermehrt zu einer Verwendung von Variablen hinwendet und eine Abkehr von bloßen empirisch-induktiven Betrachtungen erfolgt.

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [26b]: Welche der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung bevorzugen die Studierenden, wenn es darum geht, (i) Beweise selbst zu konstruieren bzw. (ii) einen vorgelegten Beweis verstehen zu wollen?

In der Ausgangsbefragung sollten die Studierenden angeben, welche der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung sie bevorzugen würden, wenn (a) sie selbst einen Beweis konstruieren müssen und (b) sie einen vorgelegten Beweis verstehen wollten („Single-Choice Item“).

In der Tabelle 62 werden die prozentualen Verteilungen der Ergebnisse dargestellt.

	Beweispräferenz für Eigenkonstruktion	**Beweispräferenz für das Verstehen eines Beweises**
	Alle (n=68)	**Alle (n=66)**
GenZ	25,0	36,4
FB	64,7	50,0
GenP	7,4	10,6
GV	2,9	3,0
Summe	100,0	100,0

Tabelle 62: Prozentuale Verteilung der Beweispräferenzen der Studierenden in der Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

In Bezug auf die *Eigenkonstruktion von Beweisen* und das *Verstehen eines vorgelegten Beweises* werden von der Gesamtgruppe jeweils der formale Beweis mit 64,7% bzw. 50% am häufigsten ausgewählt. Bzgl. beider Aspekte wird der generische Beweis mit Zahlen mit 25% bzw. mit 36,4% noch deutlich häufiger gewählt als die Punktmusterbeweise.

Die Unterschiede zwischen der Auswahl einer Beweisform für die Eigenkonstruktion und für das Verstehen eines Beweises sind jeweils nicht statistisch signifikant (McNemar-Test).

7.3.2.2 Die Beweisakzeptanz der Studierenden

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [27]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung in Bezug auf die Aspekte „Sicherung der Gültigkeit“, „subjektive Überzeugung“, „Erklärungspotential“ und „Allgemeingültigkeit“ von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Die Akzeptanz der generischen Beweise

Bei der Akzeptanz der generischen Beweise zeigt sich insgesamt, dass die Bewertungen der positiven Akzeptanzaspekte [„wahr“, „überz“, „100proz“, „erklär“ und „korr_Beweis“][77] statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau zunehmen, wohingegen die Bewertungen der Interpretation der Beweise als bloße Überprüfung einzelner konkreter Fälle [„Bsp“, „Gegenbsp“ und „einz_Fälle“][78] abnehmen. Auch gehen die Zustimmungen bzgl. des Verlangens nach formaleren Darstellungen für

[77] „wahr“: „… zeigt, dass die Behauptung in allen möglichen Fällen wahr ist.“; „überz“: „… überzeugt mich, dass die Behauptung wahr ist.“; „100proz“: „… zeigt, dass die Behauptung hundertprozentig für alle Zeiten wahr ist.“; „erklär“: „… erklärt mir, warum die Behauptung korrekt ist“ und „korr_Beweis“: „… ist ein korrekter und gültiger Beweis.“

[78] „Bsp“: „… zeigt die Behauptung lediglich für ein paar Beispiele, aber nicht allgemein.“; „Gegenbsp“: „… ist nicht allgemeingültig, da es immer noch Gegenbeispiele geben könnte.“ und „einz_Fälle“: „… besteht nur aus der Überprüfung einzelner Fälle, ist aber keine allgemeine Begründung.“

die Verbesserung der Begründung [„Buchstabenvar“ und „formaler“][79] zurück. Dabei sind alle Medianunterschiede von der Ein- zur Ausgangsbefragung statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei mittlerer bis starker Effektstärke (Wilcoxon-Test; vgl. Tabelle 63 und Abbildung 78).

GenZ_	Alle (n=74)		Effektstärke
	EB	AB	
wahr	3,0	5,0**	0,46
überz	3,0	5,0**	0,51
100proz	2,0	4,0**	0,57
erklär	4,0	5,0**	0,51
korr_Beweis	2,5	5,0**	0,68
Bsp	5,0	2,0**	0,51
Gegenbsp	5,0	2,0**	0,53
einz_Fälle	5,0	3,0**	0,68
Buchstabenvar	5,0	2,0**	0,54
formaler	5,0	4,0**	0,47

GenP_	Alle (n=74)		Effektstärke (r)
	EB	AB	
wahr	4,5	6,0**	0,5
überz	5,0	6,0**	0,46
100proz	2,5	5,0**	0,58
erklär	5,0	6,0**	0,60
korr_Beweis	3,0	6,0**	0,61
Bsp	4,0	2,0**	0,57
Gegenbsp	3,5	2,0**	0,57
einz_Fälle	4,0	2,0**	0,60
Buchstabenv	3,5	2,0**	0,39
formaler	4,0	2,0**	0,49

Tabelle 63: Mediane der Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Zahlen (links) und zum generischen Beweis mit Punktmustern (rechts) in der Eingangsbefragung [EB] und Ausgangsbefragung [AB] mit Effektstärke (r) der Medianunterschiede (Wilcoxon-Test); **: p<0,001 (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

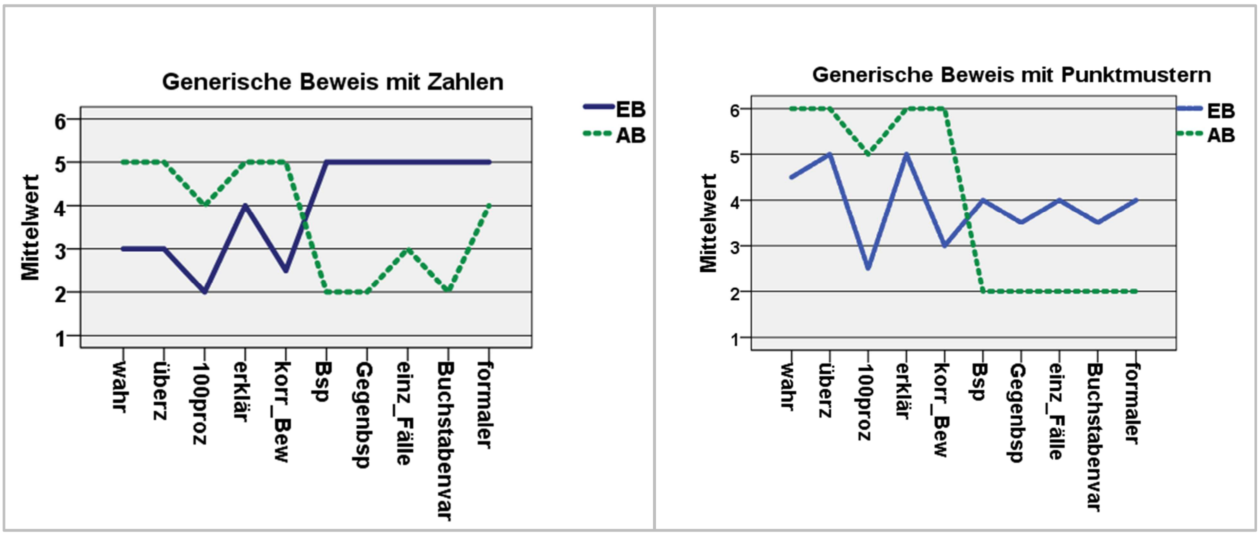


Abbildung 78: Mittelwerte der Akzeptanzitems zum generischen Beweis mit Zahlen (links) und zum generischen Beweis mit Punktmustern (rechts) in der Eingangsbefragung [„EB“] und Ausgansbefragung [„AB“] (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

Die Akzeptanz des Beweises mit geometrischen Variablen und des formalen Beweises

Bei dem Beweis mit geometrischen Variablen steigen die Bewertungen bzgl. der positiven Akzeptanzaspekte [„wahr“, „überz“, „100proz“, „erklär“ und „korr_Beweis“] und die Bewertungen der Aussagen zur Interpretation der Begründung als bloße singuläre Überprüfung konkreter Fälle [„Bsp“, „Gegenbsp“ und „einz_Fälle“] nehmen in der Ausgangsbefragung ab. Auch die Zustimmungen bzgl. des Verlangens nach formaleren Darstellungen für die Verbesserung der Begründung [„Buchstabenvar“ und „formaler“] gehen zurück. Alle Medianunterschiede von der Ein- zur Ausgangsbefragung sind statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei starker Effektstärke mit Ausnahme des Items „Gegenbeispiele“, bei dem der Medianunterschied statistisch signifikant auf dem 1%-Niveau bei schwacher Effektstärke ist (vgl. Tabelle 64 und Abbildung 79).

[79] „Buchstabenvar“: „… ist ohne die Verwendung von Buchstabenvariablen nicht allgemeingültig.“ und „formaler“: „… müsste formaler dargestellt sein, um mich voll zu überzeugen.“

Da die entsprechenden Bewertungen der Akzeptanzitems beim formalen Beweis bereits in der Eingangsbefragung deutliche Positionen erkennen ließen, können bei den Ergebnissen der Ausgangsbefragung keine großen Veränderungen auftreten. Allerdings werden nun bei allen Items die Außenwerte der Skala als Median angenommen (vgl. Tabelle 64) und der Medianansteig bzgl. des Items „100proz“ von 5 auf 6 ist statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau bei mittlerer Effektstärke.

GV	Alle (n=74)		Effektstärke
	EB	AB	
wahr	3,0	5,0**	0,55
überz	3,0	5,0**	0,56
100proz	2,0	4,0**	0,55
erklär	3,0	5,0**	0,49
korr_Beweis	3,0	5,0**	0,55
Bsp	4,0	2,0**	0,52
Gegenbsp	4,0	2,0*	0,38
einz_Fälle	4,0	2,0**	0,58
Buchstabenvar	4,0	2,0**	0,50
formaler	5,0	3,0**	0,53

FB	Alle (n=74)		Effektstärke (r)
	EB	AB	
wahr	6,0	6,0	---
überz	6,0	6,0	---
100proz	5,0	6,0 (*)	0,3
erklär	6,0	6,0	---
korr_Beweis	6,0	6,0	---
Bsp	1,0	1,0	---
Gegenbsp	1,0	1,0	---
einz_Fälle	1,0	1,0	---

Tabelle 64: Mediane der Akzeptanzitems zum Beweis mit geometrischen Variablen (links) und zum formalen Beweis (rechts) in der Eingangsbefragung [EB] und Ausgangsbefragung [AB] mit Effektstärke (r) der Medianunterschiede (Wilcoxon-Test); **: p<0,001; *: p<0,01, (*): p<0,05 (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

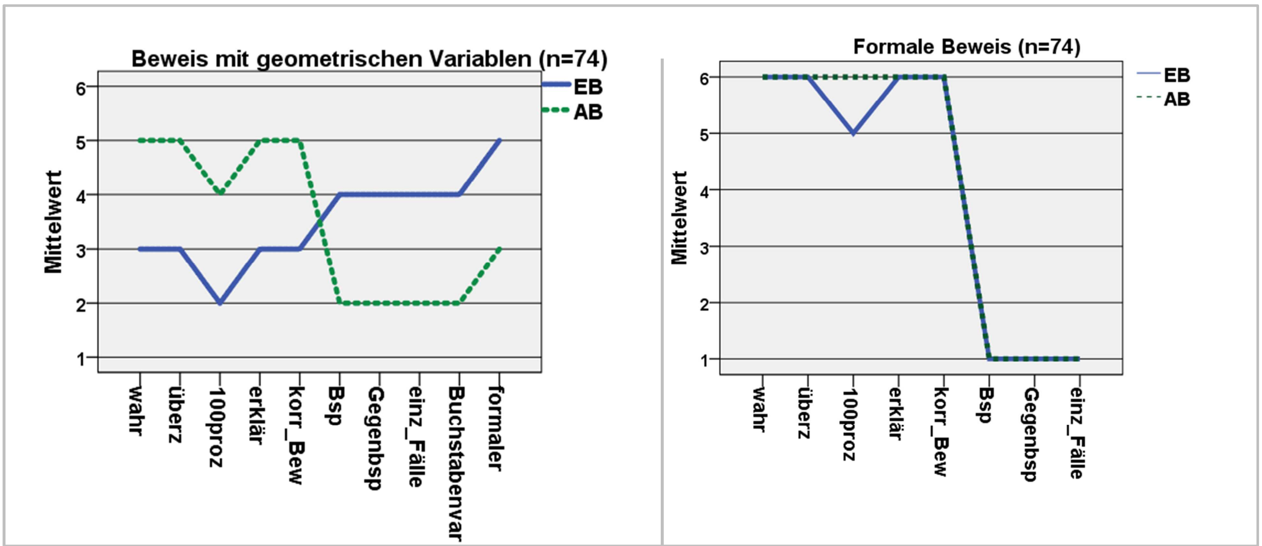


Abbildung 79: Mittelwerte der Akzeptanzitems zum Beweis mit geometrischen Variablen (links) und zum formalen Beweis (rechts) in der Eingangsbefragung [„EB“] und Ausgansbefragung [„AB“] (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

Die Ergebnisse bzgl. der Skalen zur Beweisakzeptanz in der Ein- und Ausgangsbefragung

Die statistischen Kennwerte der Skalen zur Beweisakzeptanz zu den Erhebungszeitpunkten Ein- und Ausgangsbefragung werden für die Gesamtgruppe in der Tabelle 65 angegeben. Dabei wird deutlich, dass alle Reliabilitätswerte in einem sehr guten Bereich liegen (Cronbachs Alpha>0,886) und auch die Werte der korrigierten Trennschärfen der verwendeten Items liegen alle in einem guten bis sehr guten Bereich (r_{it}>0,505).

Kennwerte	Akz_GenZ		Akz_GenP		Akz_GV		Akz_FB	
	EB	AB	EB	AB	EB	AB	EB	AB
n	74	74	74	74	67	67	72	72
M	2,79	4,27	3,67	4,85	2,96	4,34	5,15	5,50
SD	1,18	1,45	1,27	1,27	1,27	1,36	1,02	0,80
Cronbachs Alpha	0,886	0,938	0,912	0,928	0,896	0,930	0,939	0,951
Spannweite r_{IT}	0,622 - 0,784	0,749 - 0,822	0,605 - 0,789	0,603 - 0,851	0,505 - 0,756	0,647 - 0,842	0,727 - 0,873	0,707 - 0,909

Tabelle 65: Kennwerte der Skalen zur Beweisakzeptanz in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [28]: Inwiefern verändern sich die Beweisakzeptanzen der Studierenden bzgl. der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Bei allen Akzeptanzskalen ist ein Anstieg des Mittelwertes von der Ein- zur Ausgangsbefragung zu verzeichnen. Dieser Anstieg ist bei allen Beweisformen statistisch hoch signifikant bei starker Effektstärke, mit Ausnahme des formalen Beweises (s. Tabelle 66).

	n	EB	AB	p-Wert	Cohens d
Akz_GenZ	74	2,79	4,27	<0,001	1,13
Akz_GenP	74	3,67	4,85	<0,001	0,94
Akz_GV	67	2,96	4,34	<0,001	1,06
Akz_FB	72	5,15	5,50	0,003	0,37

Tabelle 66: Arithmetische Mittel der Skalen zur Beweisakzeptanz, p-Werte und Effektstärke der Mittelwertunterschiede (t-Test) in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

In der Tabelle 67 werden die Signifikanzen der Mittelwertunterschiede der Akzeptanzskalen in der Ausgangsbefragung untereinander angegeben. Hier zeigt sich, dass der generische Beweis mit Zahlen mit einem (Mittelwert von 4,27) statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei kleiner Effektstärke weniger Akzeptanz erfährt als der generische Beweis mit Punktmustern (mit 4,85). Während zwischen dem generischen Beweis mit Zahlen und dem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen keine signifikanten Unterschiede auszumachen sind, wird der generische Beweis mit Punktmustern statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau bei kleiner Effektstärke höher bewertet als der Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen. Die Akzeptanzunterschiede des formalen Beweises zu den anderen Beweisformen sind paarweise statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei mittlerer bis starker Effektstärke.

	Akz_GenZ (M=4,27)	Akz_GenP (M=4,85)	Akz_GV (M=4,34)	Akz_FB (M=5,59)
Akz_GenZ (M=4,27)	---	<0,001 d=0,43	0,419	<0,001 d=1,08
Akz_GenP (M=4,85)	<0,001 d=0,43	---	0,025 d=0,35	<0,001 d=0,57
Akz_GV (M=4,34)	0,419	0,025 d=0,35	---	<0,001 d=0,98
Akz_FB (M=5,59)	<0,001 d=1,08	<0,001 d=0,57	<0,001 d=0,98	---

Tabelle 67: Signifikanzen der Mittelwertunterschiede (t-Test) und Effektstärken (Cohens d) der Akzeptanzskalen in der Ausgangsbefragung (Alle)

Um neben den globalen Änderungen der Skalenwerte auch die Veränderungen der Akzeptanzwerte auf der individuellen Personenebene nachvollziehen zu können, wurde über die Subtraktion der Akzeptanzskalenwerte der Eingangsbefragung von dem Akzeptanzskalenwert der Ausgangsbefragung ein *personenbezogener Veränderungswert* bzgl. der Beweisakzeptanz der vier Beweisformen berechnet. Die somit berechneten Differenzen können (theoretisch) Werte zwischen -5 und 5 annehmen, wobei 0 keine Veränderung des Akzeptanzwertes von der Ein- zur Ausgangsbefragung bedeutet und positive Werte einen Zuwachs der Akzeptanz anzeigen. Die Ergebnisse dieser personenbezogenen Veränderungswerte der Beweisakzeptanz werden in der Abbildung 80 dargestellt.

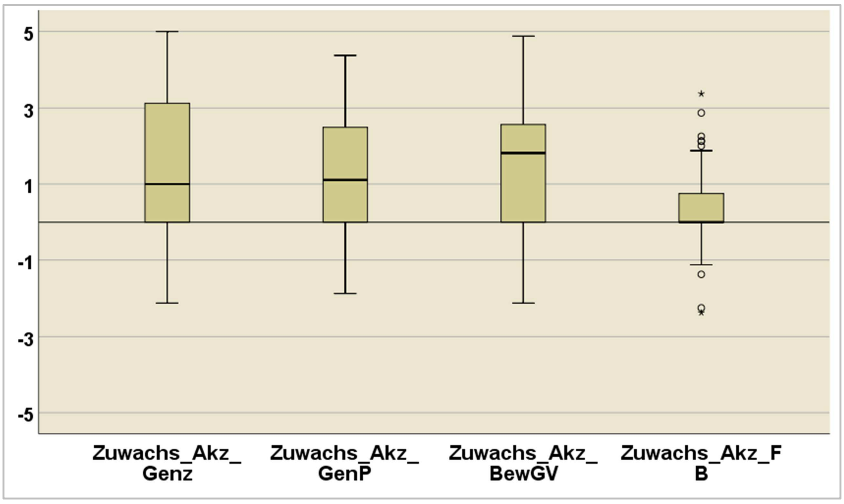


Abbildung 80: Boxplots der personenbezogenen Veränderungswerte der Akzeptanzskalen (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Bei der Betrachtung der Boxplots wird deutlich, dass bei der Mehrheit der Studierenden eine deutliche Zunahme der Beweisakzeptanzen von der Ein- zur Ausgangsbefragung stattfindet, wobei diese Zunahmen bis zu fünf Skalenwerte (das Maximum der Skala) umfassen. Nur im Falle des formalen Beweises liegt der Median bei null, was keine Veränderung der Akzeptanz bedeutet. Dieser große Anteil der gleichbleibenden Akzeptanzwerte beim formalen Beweis ergibt sich durch den häufig erhaltenen maximalen Akzeptanzwert von 6, den Studierende in der Ein- und Ausgangsbefragung erzielten.

Für eine genauere Darstellung der Gewichtung der Zu- und Abnahme der Beweisakzeptanzen werden die Ergebnisse in der Tabelle 68 noch zusammengefasst nach den Bereichen „Abnahme“ [Summe der Anzahl aller negativen Werte], „keine Veränderung“ [Summe der Werte gleich Null] und „Zunahme“ [Summe der Anzahl aller positiven Werte] aufgeführt. Beachtenswert ist, dass die Beweisakzeptanz bei den verschiedenen Beweisen bei knapp einem Viertel der Studierenden abnimmt. Dies könnte so interpretiert werden, dass eine erhöhte Beweisakzeptanz bei einer Beweisform sich in einer niedrigeren Bewertung einer anderen niederschlägt.

	n	Abnahme	keine	Zunahme
		Alle		
Zuw_GenZ	74	23,3	5,5	71,2
Zuw_GenP	74	23,3	4,1	72,6
Zuw_GV	67	25,0	2,9	72,1
Zuw_FB	72	16,4	34,2	49,3

Tabelle 68: Personenbezogene Veränderungswerte der Beweisakzeptanzen, zusammengefasst in den Kategorien „Abnahme“, „keine Veränderung“ und „Zunahme“ (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Als ein kleiner Exkurs sei an dieser Stelle den Fragen nachgegangen, ob sich ein Zusammenhang zwischen den Akzeptanzskalen der beiden generischen Beweise ausmachen lässt, was als eine übergeordnete Akzeptanz generischer Beweise aufgefasst werden könnte, und ob im Vergleich der Akzeptanzskalen zu den Punktmusterbeweisen eine übergeordnete Akzeptanz von Punktmusterbeweisen ausgemacht werden kann.

In der Ausgangsbefragung korrelieren die Akzeptanzskalen zu den generischen Beweisen in der Gesamtgruppe mittelstark (r_p=0,527 mit p<0,001; Erstsemester: r_p=0,542 mit p<0,001 und Höhere Semester: r_p=0,545 mit p=0,001; dieser positive Zusammenhang wird auch bei der Betrachtung des linken Scatterplots in Abbildung 81 deutlich). Diese Ergebnisse können dahingehen interpretiert werden, dass eine übergreifende Akzeptanz von generischen Beweisen vorliegen könnte.

Bei den Zusammenhängen zwischen den Akzeptanzskalen zu den Punktmusterbeweisen werden in den Subgruppen die folgenden Unterschiede deutlich: Während bei den Erstsemestern kein Zusammenhang nachgewiesen werden kann (r_p=-0,006, p=0,973), liegt die Korrelation in den Höheren Semestern bei r_p=0,495 und ist mit p=0,003 statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau (vgl. hierzu den rechten Scatterplot in Abbildung 81). Dieser Unterschied könnte dahingehend gedeutet werden, dass die Erstsemester noch keine ausreichende Zeit hatten, sich in den Umgang mit Punktmustern einzuarbeiten bzw. sich daran zu gewöhnen.

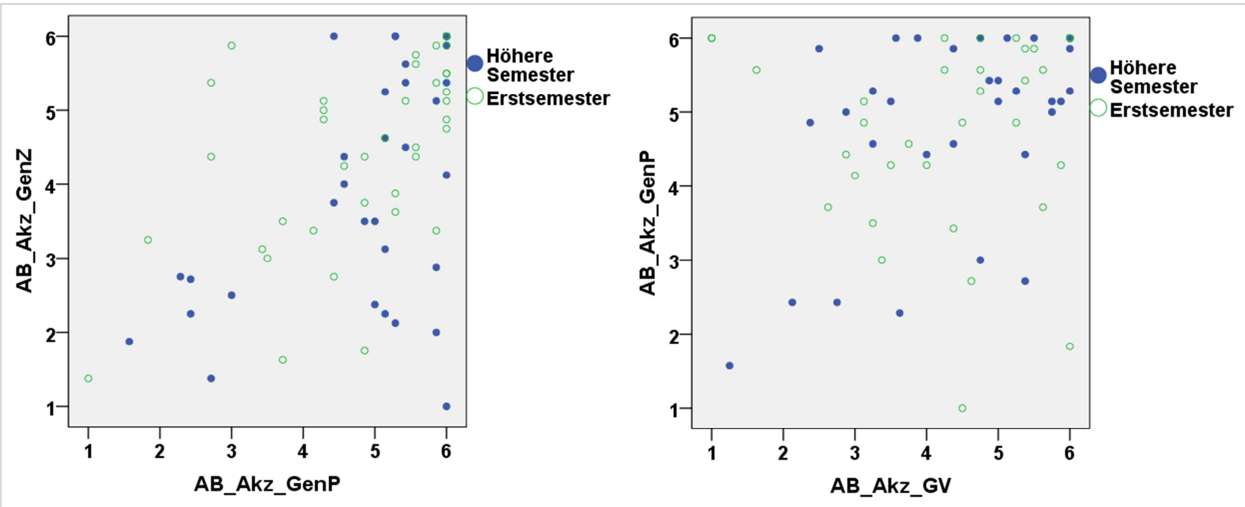


Abbildung 81: Scatterplots zu den Zusammenhängen der Akzeptanzskalen in der Ausgangsbefragung (links: die Akzeptanzskalen zu den generischen Beweisen, rechts: die Akzeptanzskalen zu den Punktmusterbeweisen) (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden mit Hervorhebungen der Subgruppen)

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [5] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.3.2. unter Berücksichtigung der Leitfragen zur Auswertung 26-28 zusammenfassend ausgewertet.

Beantwortung der Forschungsfrage [5]: Inwiefern verändern sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen' von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Bzgl. der Teilkompetenz der **Beweisbewertung** konnte gezeigt werden, dass die Bewertung der Studierenden der bloßen empirisch-induktiven Begründung von der Ein- zur Ausgangsbefragung als „richtiger Beweis" statistisch hoch signifikant von 17,6% auf 5,4% abnimmt (McNemar-Test, p<0,012 mit odds ratio=0,1). Und auch der Anteil der Fehlbewertung der formal-dargestellten und falschen Begründung geht von 27% auf 13,5% zurück (McNemar-Test, p=0,078). Die Studierenden scheinen somit durch die Lehrveranstaltung gelernt zu haben, dass bloße Beispielbetrachtungen keinen Beweis konstituieren, und auch die fehlerhafte Begründung wird in der Ausgangsbefragung von ihnen als solche erkannt.

Bzgl. der Wahl einer Begründungsform als potentieller eigener Ansatz wird die korrekte Begründung mit Buchstabenvariablen in der Ausgangsbefragung mit 63,5% statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau häufiger ausgewählt als in der Eingangsbefragung (McNemar-Test, p<0,001 mit odds ratio=10,5). Demgegenüber nimmt der Anteil der Wahl der empirisch-induktiven Begründung von 10,8% auf 1,4% statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau ab (McNemar-Test, p=0,041). Hier zeigt sich, dass sich die Studierenden bzgl. ihres eigenen Begründungsansatzes von bloßen Beispielbetrachtungen abwenden und nun verstärkt zu einer Verwendung von Buchstabenvariablen tendieren. Bei der Frage nach der Beweispräferenz der Studierenden wird der formale Beweis in Bezug auf die Eigenkonstruktion und das Verstehen eines Beweises am häufigsten gewählt. Auch hier zeigt sich somit die Hinwendung zu einer Nutzung von Buchstabenvariablen. Während bzgl. der Eigenkonstruktion 25% der Studierenden den generischen Beweis mit Zahlen bevorzugen, liegt dieser Anteil für das Verstehen eines Beweises bei 36,4%. Auch wenn dieser Anstieg nicht statistisch signifikant ist (McNemar-Test), so wird doch deutlich, dass die Studierenden den generischen Beweis in Bezug auf die Eigenkonstruktion und das Verständnis unterschiedlich bewerten. Die Punktmusterbeweise werden bzgl. beider Aspekte nur marginal ausgewählt.

In Bezug auf die **Beweisakzeptanz** sind bzgl. der generischen Beweise deutliche Unterschiede von der Ein- zur Ausgangsbefragung zu verzeichnen. In der Ausgangsbefragung stimmen die Studierenden den verschiedenen positiven Akzeptanzaspekten (Sicherung der Gültigkeit, Überzeugung, Erklärungsqualität und Bezeichnung als ‚korrekter und gültiger Beweis') statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau höher zu als in der Eingangsbefragung (Wilcoxon-Test, p<0,001 mit mittleren bis starken Effektstärken: 0,46<Cohens d<0,68). Dementsprechend wird den Items bzgl. der Interpretation der Beweise als bloße Beispielüberprüfungen statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau weniger zugestimmt (Wilcoxon-Test, p<0,001 mit mittleren bis starken Effektstärken: 0,39<Cohens d<0,68). Einen vergleichbaren Akzeptanzzuwachs erfährt auch der Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen. Auch bei dieser Beweisform steigen die Zustimmungen bzgl. der positiven Akzeptanzaspekte statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau an, wohingegen die Fehlinterpretationen als singuläre Beispielüberprüfungen in der Ausgangsbefragung deutlicher abgelehnt werden. Beim formalen Beweis werden in der Ausgangsbefragung die hohen Akzeptanzbewertungen bzgl. der verschiedenen Aspekte aus der Eingangsbefragung reproduziert. Dieser Anstieg der Beweisakzeptanzen zeigt sich auch in den statistisch hoch signifikanten Mittelwertanstiegen (t-Test) der Akzeptanzskalen zu den vier Beweisformen, bei den generischen Beweisen und dem Beweis mit geometrischen Variablen mit hoher Effektstärke (generischer Beweis mit Zahlen: Cohens d=1,13, generischer Beweis mit Punktmustern: Cohens d=0,94 und Beweis mit geometrischen Variablen: Cohens d=1,06). Während die einzelnen Akzeptanzwerte bzgl. der vier Beweisformen steigen, ergibt sich in der Ausgangsbefragung die gleiche Akzeptanzhierarchie wie in der Eingangsbefragung: Während der generische Beweis mit Zahlen und der Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen mit einem Mittelwert von 4,27 bzw. 4,34 am wenigsten Akzeptanz erfahren, erreicht der generische Beweis mit Punktmustern mit einem Mittelwert von 4,85 statistisch signifikant höhere Akzeptanzwerte. Am höchsten wird jedoch der formale Beweis mit einem Mittelwert von 5,50 bewertet.

Die Akzeptanzzunahme in Bezug auf die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung konnten durch die Betrachtung der personenbezogenen Veränderungswerte konkretisiert werden: Bzgl. der beiden generischen Beweise und des Punktmusterbeweises mit geometrischen Variablen ist bei gut 70% der Studierenden ein Akzeptanzzuwachs zu verzeichnen.

Die Veränderungen der Teilkompetenz der Konstruktion von Begründungen (bzw. von Beweisen) werden im Rahmen der Teilstudie 3 untersucht (s. Abschnitt 7.4).

7.3.3 Ergebnisse bzgl. der Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik

7.3.3.1 Einstellungen zum Beweisen in der Schule

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zu den folgenden Themenbereichen dargestellt: (i) die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis" für verschiedene Schultypen und Schulstufen, (ii) die Bewertung ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, (iii) die Einstellungen zur Nutzung von Buchstabenvariablen und zu formalen Beweisen, zur Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik und die Rolle der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik".

(i) Die Einschätzung der Relevanz des Unterrichtsgegenstands „Beweis" für verschiedene Schultypen und Schulstufen

Die Ergebnisse bzgl. der Items zur Relevanz von Beweisen für verschiedene Schultypen und Schulstufen in der Ein- und Ausgangsbefragung werden in der Tabelle 69 angegeben.

	Sek_1		Sek_2		GS		HS		RS		GY	
	EB	AB	EB	AB	EB	AB	EB	AB	EB	AB	EB	AB
Alle (n=74)												
n	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74
M	3,93	3,62	5,32	5,18	2,05	1,72	3,57	3,11	4,41	4,07	5,54	5,20
Median	4,00	4,00	6,00	5,00	1,00	1,00	4,00	3,00*	4,00	4,00	6,00	6,00
SD	1,34	1,36	0,89	1,00	1,49	1,31	1,44	1,48	1,08	1,25	0,76	1,09

Tabelle 69: Ergebnisse der Items zur Relevanz von Beweisen für verschiedene Schultypen und Schulstufen in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden) [Signifikanzen der Medianunterschiede (Wilcoxon-Test): *: p<0,05]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [29]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen der Relevanz des Unterrichtsgegenstandes „Beweis" für verschiedene Schultypen und Schulstufen von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Im Vergleich der Ergebnisse der Ein- und Ausgangsbefragung ist der Medianunterschied bzgl. des Aspekts „Beweise in der Hauptschule" [„HS"] statistisch signifikant, die Befürwortung des Lerninhalts „Beweisen" nimmt somit für die Hauptschule statistisch signifikant ab. Der Medianunterschied bzgl. des Aspekts „Beweisen in der Sekundarstufe 2" [„Sek_2"] ist dagegen mit p=0,710 nicht statistisch signifikant (Wilcoxon-Test).

Wie bereits in der Eingangsbefragung zeigt sich auch in der Ausgangsbefragung, dass nach Ansicht der Studierenden Beweise eher in der Sekundarstufe 2 als in der Sekundarstufe 1 eine Rolle spielen sollten. In Bezug auf die Schulformen ergibt sich, wie bereits in der Eingangsbefragung, die hierarchische Ordnung von Grundschule, Hauptschule, Realschule und Gymnasium, wobei die Medianunterschiede paarweise statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei starker Effektstärke sind (Wilcoxon-Test, $p<0{,}001$ mit $r>0{,}65$).

(ii) Die Bewertung ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten

In der Tabelle 70 werden die Items zur Thematik „motivationale Aspekte zum Beweisen" und die Medianveränderungen der studentischen Bewertungen von der Ein- und zur Ausgangsbefragung mit den dazugehörigen Signifikanzwerten (Wilcoxon-Test) und Effektstärken angegeben.

Formulierung	EB	AB	Signifikanz (Effektstärke)
In der Schule sollten Beweise eher eine untergeordnete Rolle spielen, …			
…, da es wichtiger ist, dass die fachlichen Inhalte (Funktionen, Differentialrechnung, Integralrechnung, …) vermittelt und verstanden werden.	5	5	---
…, da es wichtiger ist, dass die Schüler/innen Rechenaufgaben richtig lösen können.	4	5	p=0,011 (r=0,3)
…, da man im Mathematikunterricht lieber Anwendungen im Alltag behandeln sollte.	4	5	p=0,026 (r=0,26)
…, da Beweise für die Schüler/innen zu schwer nachzuvollziehen sind.	4	4	---
…, da es die meisten Schüler/innen überfordern würde, selbstständig Beweise zu finden und aufzuschreiben.	4	4	---
…, da die Schüler/innen sowieso wissen, dass die mathematischen Regeln und Sätze richtig sind, und sie daher nicht zum Beweisen zu motivieren sind.	3	4	p=0,015 (r=0,29)
…, da das Beweisen im späteren Leben der Schüler/innen keine Anwendung findet (im Gegensatz etwa zur Prozentrechnung).	4	5	n.s.
…, da Beweise in der Lebenswelt der Schüler/innen keine Bedeutung haben.	3	4	n.s.

Tabelle 70: Ergebnisse bzgl. der Items zur Bewertung „gängiger" Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, in der Ein- und Ausgangsbefragung [sechsstufige Likert-Skala: [1] „trifft überhaupt nicht zu" … [6] „trifft voll zu"]; Signifikanzen der Medianunterschiede (Wilcoxon-Test) mit Effektstärken (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [30]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen ‚gängiger' Gründe, warum Beweise im schulischen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Insgesamt betrachtet, wird durch den Besuch der Lehrveranstaltung die Zustimmung gängiger Gründe auf Seiten der Studierenden, warum Beweisen in der Schule eine eher untergeordnete Rolle spielen sollte, nicht abgeschwächt. Im Gegenteil wird den Gründen „Lösen von Rechenaufgaben", „Anwendungen im Alltag" und „das Wissen um die Gültigkeit von mathematischen Sätzen und Regeln" (s.o.) nach der Lehrveranstaltung signifikant höher zugestimmt als vor der Lehrveranstaltung.

(iii) Die Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik

In der Ausgangsbefragung sollten die Studierenden die folgenden Aussagen auf einer Sechser-Likert-Skala ([1] „trifft überhaupt nicht zu" … [6] „trifft voll zu") bewerten:

#	Formulierung	Abkürzung
1	Generische Beweise sind eine gute Möglichkeit, um Schülern das Argumentieren beizubringen.	„GB_gut_SuS“
2	Der generische Beweis ist eine Beweisform, die es ermöglicht, mathematische Beweise auch in der Haupt- und Realschule zu thematisieren.	„GB_HS_RS“

Tabelle 71: Items für die Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik

Ergebnisse

Die Ergebnisse der hier thematisierten Items werden in Tabelle 72 und der Abbildung 82 angegeben.

	Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik	
	GB_gut_SuS	**GB_HS_RS**
n	74	73
M	4,73	4,32
Median	5,00	4,00
SD	1,17	1,28

Tabelle 72: Ergebnisse bzgl. der Items zur Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden) (Bewertung auf einer sechsstufigen Likert-Skala: [1] „trifft überhaupt nicht zu“ … [6] „trifft voll zu“)

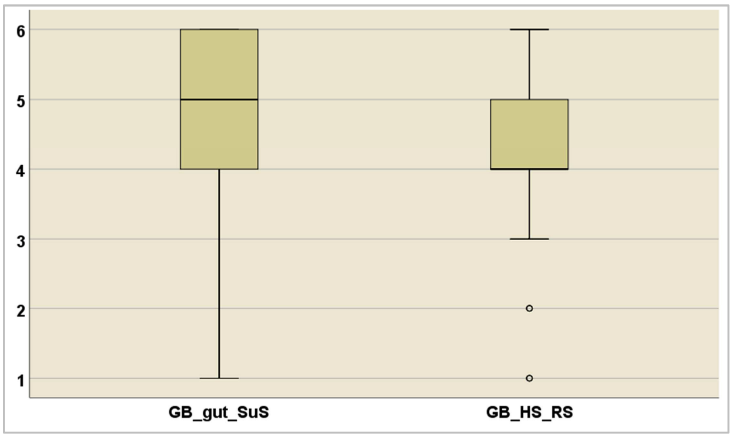


Abbildung 82: Boxplots bzgl. der Items zur Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden) [sechsstufige Likert-Skala: [1] „trifft überhaupt nicht zu“ … [6] „trifft voll zu“]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [31]: Wie bewerten die Studierenden die Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik?

Die große Mehrheit der Studierenden bewertet die Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik insgesamt positiv: Der Aussage „Generische Beweise sind eine gute Möglichkeit, um Schülern das Argumentieren beizubringen“ („Gen_gut_SuS“) wird mit einem Median von 5 deutlich zugestimmt, dem Item „Der generische Beweis ist eine Beweisform, die es ermöglicht, mathematische Beweise auch in der Haupt- und Realschule zu thematisieren“ („Gen_HS_RS“) noch mit einem Median von 4. Bei der Betrachtung der Boxplots (Abbildung 82) zeigt sich, dass zu beiden Items die Boxen innerhalb der oberen Hälfte der Likert-Skala und somit im Bereich der ‚Zustimmung‘ liegen.

Einstellungen zum Beweisen

In diesem Abschnitt werden die Aspekte (i) Einschätzung motivationaler Aspekte zum Beweisen und (ii) „Beweisaffinität“ betrachtet. (Der in der Eingangsbefragung vorhandene Bereich der „Motivation zum Erlernen der Beweisaktivität“ entfiel in der Ausgangsbefragung.)

(i) Motivationale Aspekte zum Beweisen

In der Tabelle 73 werden die Items zur Thematik „motivationale Aspekte zum Beweisen“ und die Mediane der studentischen Bewertungen von der Ein- und Ausgangsbefragung angegeben.

Item	EB	AB	Signifikanz des Medianunterschieds (Effektstärke)
Ich sehe das Beweisen als eine intellektuelle Herausforderung, der ich mich gerne stelle.	4	4	---
Ich mag Beweise.	3	4	$p=0{,}067$ ($r=0{,}22$)
Ich sehe keinen Sinn darin, etwas beweisen zu müssen, was sowieso richtig ist.	2	2	---
Ich versuche, Beweise zu verstehen.	5	6	$p=0{,}003$ ($r=0{,}34$)
Ich weiß, wie man einen Beweis führt.	4	5	$p<0{,}001$ ($r=0{,}67$)
Beweise werden von Experten konstruiert. Es genügt, wenn man sie nachvollziehen und verstehen kann.	3	3	---

Tabelle 73: Items zu motivationalen Aspekten zum Beweisen [Beweisaffinität] und Mediane der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden) mit Signifikanzwerten der Medianunterschiede (Wilcoxon-Test) und Effektstärke [Bewertung der Items auf einer sechsstufigen Likert-Skala: [1] „trifft überhaupt nicht zu" … [6] „trifft voll zu"]

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [32]: Inwiefern verändern sich die studentischen Bewertungen zu motivationalen Aspekten zum Beweisen von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Im Vergleich der Bewertungen der Aussagen von der Ein- zur Ausgangsbefragung zeigen sich bei Betrachtung der Mediane bei den folgenden Items keine Veränderungen: „Ich sehe das Beweisen als eine intellektuelle Herausforderung, der ich mich gerne stelle.", „Ich sehe keinen Sinn darin, etwas beweisen zu müssen, was sowieso richtig ist." und „Beweise werden von Experten konstruiert. Es genügt, wenn man sie nachvollziehen und verstehen kann.". Dagegen steigt die Bewertung der Aussage „Ich mag Beweise" statistisch schwach signifikant auf dem 7% Niveau bei schwacher Effektstärke an. Stärkere Signifikanzen und Effektstärken zeigen sich bzgl. der Medianunterschiede bei der Bewertung der Items „Ich versuche, Beweise zu verstehen" (Mediane 5 und 6; $p=0{,}003$ bei mittlerer Effektstärke) und „Ich weiß, wie man einen Beweis führt" (Mediane 4 und 5; $p<0{,}001$ bei starker Effektstärke).

(ii) Beweisaffinität

In der Tabelle 74 werden die statistischen Kennwerte der Skala zur Beweisaktivität für die Ein- und Ausgangsbefragung angegeben. Die konstruierte Skala hat zu allen Messzeitpunkten ausreichend hohe Reliabilitätswerte ($\alpha>0{,}728$). Bei der Betrachtung der korrigierten Trennschärfe der verwendeten Items wird allerdings deutlich, dass diese Skala noch weiter optimiert werden könnte.

Kennwerte der Skala Beweisaffinität („Aff_Bew")		
	Alle	
	EB	AB
n	74	74
M	4,00	4,27
SD	0,90	0,88
Cronbachs Alpha	0,753	0,728
Spannweite r_{IT}	0,338 - 0,646	0,278 - 0,689

Tabelle 74: Kennwerte der Skala zur Beweisaffinität in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [33]: Inwiefern verändert sich die „Beweisaffinität" der Studierenden von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Im Vergleich der Skalenmittelwerte der Ein- und Ausgangsbefragung zeigt sich in der Gesamtgruppe ein Anstieg des Mittelwertes von 4,0 auf 4,27, der bei kleiner Effektstärke statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau ist (t-Test, p=0,018 mit Cohens d=0,3).

7.3.3.3 Einstellungen zur Mathematik

In der Tabelle 75 werden die statistischen Kennwerte der vier Skalen des Bereichs „Einstellungen zur Mathematik" für die Ein- und die Ausgangsbefragung angegeben. Da alle Reliabilitätswerte echt größer als 0,5 sind, erscheint eine (gegebenenfalls entsprechend vorsichtige) Betrachtung der Ergebnisse zulässig. Durch die teilweise noch sehr niedrigen korrigierten Trennschärfen in den Items wird deutlich, dass diese Skalenkonstruktionen durchaus noch als verbesserungswürdig bezeichnet werden müssen. Die Skalenmittelwerte in der Ein- und Ausgangsbefragung werden zusätzlich in der Abbildung 83 dargestellt.

	Mathematik als System [MaSy]		Mathematik als Toolbox [MaTo]		Mathematik als Prozess [MaPro]		Praktische Relevanz von Mathematik [PraRel]	
	EB	AB	EB	AB	EB	AB	EB	AB
Alle								
n	70	70	70	70	70	70	70	70
M	4,34	4,44	4,48	4,36	4,42	4,70	4,41	4,51
SD	0,74	0,69	0,09	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12
Cronbachs Alpha	0,701	0,698	0,614	0,716	0,555	0,711	0,781	0,783
Spannweite r_{IT}	0,328 - 0,541	0,357 - 0,485	0,272 - 0,484	0,433 - 0,511	0,248 - 0,438	0,399 - 0,585	0,464 - 0,667	0,283 - 0,687

Tabelle 75: Statistische Kennwerte der Skalen zur Einstellungen zur Mathematik in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden und Subgruppen)

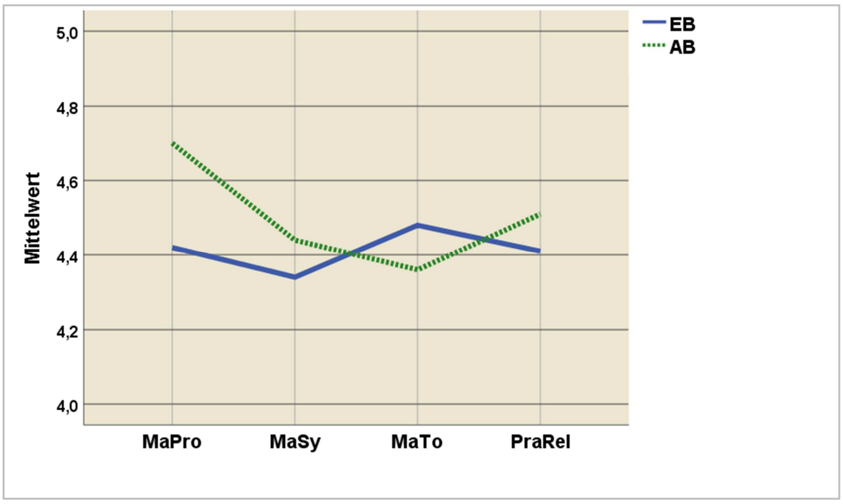


Abbildung 83: Arithmetische Mittel der Skalen zur Einstellung zur Mathematik in der Ein- und Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [34]: Inwiefern verändern sich die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung?

Die Mittelwerte der Skalen zu den Einstellungen „Mathematik als System“[80], „Mathematik als Toolbox“[81] und „Praktische Relevanz von Mathematik“ steigen von der Ein- zur Ausgangsbefragung geringfügig und nicht statistisch signifikant an. Dagegen ist der Mittelwertunterschied bzgl. der Skala „Mathematik als Prozess“ bei kleiner Effektstärke statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau (t-Test, p=0,009 mit Cohens d=0,34).

Als Exkurs sei an dieser Stelle der Frage nachgegangen, inwiefern sich Zusammenhänge zwischen den „Einstellungen zur Mathematik“ und den erhobenen Skalen zur Beweisakzeptanz ausmachen lassen. Dabei scheint die Hypothese angebracht, dass positive Korrelationen zwischen der Einstellung „Mathematik als System“ und der Akzeptanz des formalen Beweises sowie positive Korrelationen zwischen der Einstellung „Mathematik als Prozess“ und der Akzeptanz der generischen Beweise vorliegen könnten.

Zwischen den in der Ausgangsbefragung erhobenen Skalen zu den „Einstellungen zur Mathematik“ und den dort erhobenen Skalen zur Beweisakzeptanz lassen sich jedoch keine statistisch signifikanten Zusammenhänge nachweisen. Dieses rechnerische Ergebnis wird dabei durch die Darstellung der Zusammenhänge im Scatterplot gestützt (s. Abbildung 83).

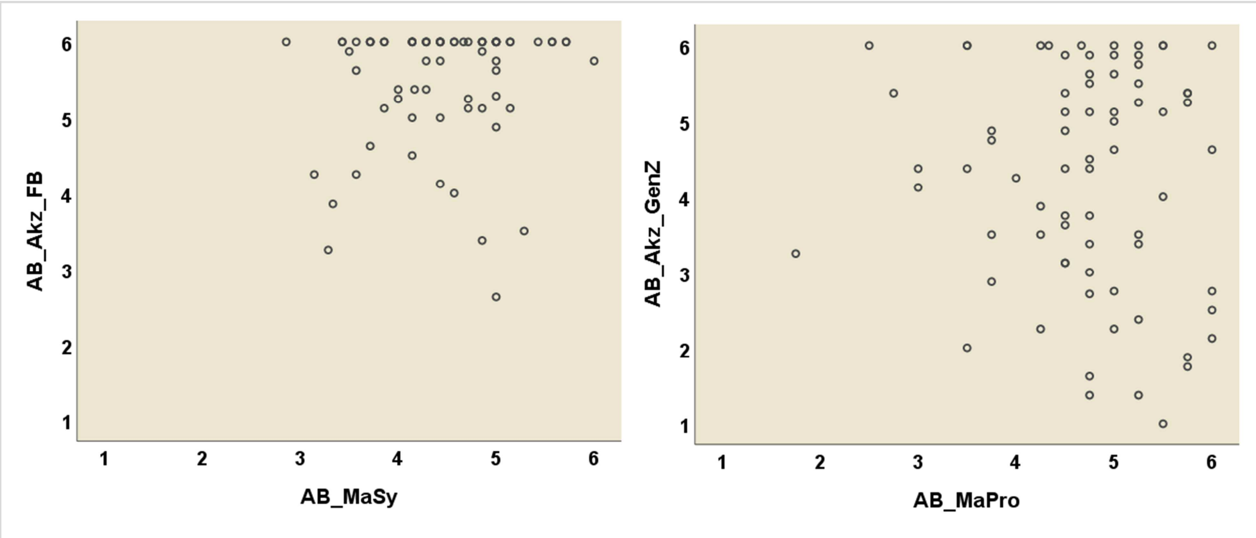


Abbildung 84: Scatterplot zu den in der Ausgangsbefragung erhobenen Skalen „Akzeptanz des formalen Beweises“ [„AB_Akz_FB“] und „Mathematik als System“ [„Ma_Sy“] (links) und Scatterplot zu den in der Ausgangsbefragung erhobenen Skalen „Akzeptanz des generischen Beweises mit Zahlen“ [„AB_Akz_GenZ“] und „Mathematik als Prozess“ [„Ma_Sy“] (rechts) (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

[80] Anmerkung: Bzgl. der Skala „Mathematik als System“ ist der Mittelwertanstieg in der Gruppe der Erstsemester statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau (t-Test, gepaarte Stichprobe (n=35): Mittelwert EB: 4,22 und Mittelwert AB: 4,47; p=0,02 mit Cohens d= 0,35).

[81] Anmerkung: In der Eingangsbefragung konnte gezeigt werden, dass bzgl. der Skala „Mathematik als Toolbox“ der Mittelwert der Erstsemesterstudierenden statistisch signifikant über dem der Höheren Semester liegt. Dieser Subgruppenunterschied lässt sich auch in der Eingangsbefragung ausmachen. Hier liegt der Mittelwert der Erstsemesterstudierenden mit 4,61 statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau über dem der Höheren Semester mit 4,14 (t-Test, p=0,016).

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [6] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.3.3. unter Berücksichtigung der Leitfragen zur Auswertung 29-34 zusammenfassend ausgewertet.

Beantwortung der Forschungsfrage [6]: Inwiefern verändern sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung bzw. welche neuen Ansichten der Studierenden zum (generischen und formalen Beweisen) können in der Ausgangsbefragung herausgearbeitet werden?

Bei dem Teilaspekt der **Einstellungen zum Beweisen in der Schule** zeigte sich, dass die Studierenden in der Ausgangsbefragung die Bedeutung des Beweisens für die Hauptschule (statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau) geringer bewerten als in der Eingangsbefragung. Dieses Ergebnis kann dahingehend interpretiert werden, dass die Studierenden ‚das Beweisen‘ als einen nicht trivialen Lerngegenstand erfahren haben und deswegen in Bezug auf dessen Relevanz für die Hauptschule etwas zurückhaltender agieren. In Bezug auf die anderen Schulformen konnten keine statistisch signifikanten Veränderungen von der Ein- zur Ausgangsbefragung nachgewiesen werden. Wie bereits in der Eingangsbefragung zeigt sich auch in der Ausgangsbefragung, dass nach Ansicht der Studierenden Beweise eher in der Sekundarstufe 2 als in der Sekundarstufe 1 thematisiert werden sollten. Dabei ergibt sich auch zu diesem Messzeitpunkt eine hierarchische Anordnung der Schulformen (Grundschule, Hauptschule, Realschule und Gymnasium), wobei die Medianunterschiede paarweise statistisch hoch signifikant auf dem 0,1%-Niveau bei starker Effektstärke sind (Wilcoxon-Test, $p<0,001$ mit $r>0,65$). Nach der Lehrveranstaltung wird den Aussagen statistisch signifikant höher zugestimmt, dass Beweise im schulischen Mathematikunterricht zu Gunsten des Lösens von Rechenaufgaben (Wilcoxon-Test; $p=0,011$ mit $r=0,3$) und der Behandlung von Anwendungen aus dem Alltag (Wilcoxon-Test; $p=0,026$ mit $r=0,26$) eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten. Auch steigt die Zustimmung bzgl. der Begründung „…, da die Schüler/innen sowieso wissen, dass die mathematischen Regeln und Sätze richtig sind, und sie daher nicht zum Beweisen zu motivieren sind.“ (Wilcoxon-Test; $p=0,015$ mit $r=0,29$). Die Relevanzbewertung des Lerninhalts ‚Beweis‘ für die Schulmathematik scheint sich somit bei den Studierenden nicht gesteigert zu haben.

Dagegen kann bei den **Einstellungen zum Beweisen** auf Seiten der Studierenden eine Hinwendung zum Beweisen ausgemacht werden: Den Aussagen „Ich mag Beweise“ (Wilcoxon-Test; $p=0,067$ mit $r=0,22$), „Ich versuche, Beweise zu verstehen“ (Wilcoxon-Test; $p=0,003$ mit $r=0,34$) und „Ich weiß, wie man einen Beweis führt“ (Wilcoxon-Test; $p<0,001$ mit $r=0,67$) wird nach der Lehrveranstaltung statistisch (schwach) signifikant höher zugestimmt. Dementsprechend steigt der Mittelwert der Skala zur Beweisaffinität von der Ein- zur Ausgangsbefragung statistisch hoch signifikant bei kleiner Effektstärke an (EB: 4,0; AB: 4,27; t-Test, $p=0,018$ mit Cohens $d=0,3$). Im Rahmen dieser Thematik konnte auch herausgestellt werden, dass die Studierenden den Aussagen zustimmen, dass generische Beweise eine gute Möglichkeit sind, um Schülern das Argumentieren beizubringen (Median von 5 auf einer sechsstufigen Likert-Skala), und dass der generische Beweis eine Beweisform ist, die es ermöglicht, mathematische Beweise auch in der Haupt- und Realschule zu thematisieren (Median von 4 auf einer sechststufigen Likert-Skala).

Bzgl. der **Einstellungen zur Mathematik** zeigte sich ein statistisch hoch signifikanter Mittelwertanstieg bei der Skala „Mathematik als Prozess“ (EB: 4,42; AB: 4,70; t-Test, $p=0,009$ mit Cohens $d=0,34$). Das Bewusstsein der Studierenden über die Prozesshaftigkeit hat sich demnach (statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau) gesteigert. (Dabei muss kritisch angemerkt werden, dass die Reliabilität der Skala in der Eingangsbefragung nur Cronbachs Alpha=0,555 beträgt und die Verwendung dieser Skala diskussionswürdig ist. Das errechnete Resultat muss dementsprechend vorsichtig interpretiert werden.)

Übergeordnet lässt sich somit bei den Studierenden allgemein eine Hinwendung zum Fachinhalt ‚Beweis' feststellen, wohingegen die Bewertung der Relevanz als Lerngegenstand für die Schulmathematik stagniert. Von der Ein- zur Ausgangsbefragung konnte außerdem ein Anstieg bzgl. der Bewusstheit des Prozesscharakters der Mathematik nachgewiesen werden, der bei kleiner Effektstärke statistisch signifikant auf dem 1%-Niveau ist (t-Test, p=0,009 mit Cohens d=0,34).

7.3.4 Die Selbsteinschätzung der Studierenden bzgl. ihres Lernzuwachses in Bezug auf die Funktionen von Beweisen, auf den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess, auf die Konstruktion und den Umgang mit Beweisen und der Aspekt der Selbstwirksamkeitserwartung beim Beweisen

In diesem Abschnitt werden die folgenden Aspekte thematisiert: der selbst eingeschätzte Lernzuwachs der Studierenden in Bezug auf (i) Funktionen von Beweisen, (ii) den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess und (iii) die Konstruktion un den Umgang mit allgemein. Schließlich wird die in der Ausgangsbefragung konstruierte Skala der „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" betrachtet (iv). Im Kontext der „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" wird auch überprüft, ob sich ein Zusammenhang zwischen dieser Skala und der Skala der „Beweisaffinität" ausmachen lässt, da diese beiden Konzepte miteinander in Verbindung stehen könnten. Am Ende des Abschnitts wird die Forschungsfrage [7] beantwortet.

(i) Der selbst eingeschätzte Lernzuwachs der Studierenden in Bezug auf die Funktionen von Beweisen

Für die Erfassung des selbst eingeschätzten Lernzuwachses der Studierenden in Bezug auf Funktionen von Beweisen wurden in der Ausgangsbefragung zu jeder der folgenden Aussagen eine aktuelle und eine retrospektive Einschätzung („vor dem Besuch der Lehrveranstaltung") auf einer sechsstufigen Likert-Skala abgefragt (vgl. hierzu die Ausführungen zur retrospektiven Kompetenzzuwachsmessung in Abschnitt 3.3.9):

#	**Formulierung** *Ich kann mindestens je einen Beweis angeben, an dem ich deutlich man kann, …*	**Abkürzung**
1	…, dass Beweise zeigen können, dass bestimmte Sachverhalte und Zusammenhänge sicher	„Gültigkeit"
2	…, dass Beweise zeigen können, warum etwas gilt.	„zeigen_warum"
3	…, dass Beweise die Bedeutungen von mathematischen Begriffen verdeutlichen können.	„Bedeutung"
4	…, dass Beweise mathematisches Verständnis erzeugen können.	„Verständnis"
5	…, dass Beweise dabei helfen können, sich Zusammenhänge und Tatsachen einprägen zu können.	„Zusammenhänge"
6	…, dass in Beweisen mathematisches Wissen systematisiert werden kann.	„Systematisierung"
7	…, dass Beweise einen laufenden (Forschungs-) Prozess beenden können.	„Ende_Prozess"
8	…, dass man durch Beweise verstehen kann, warum etwas wahr ist.	„verstehen_warum"
9	…, dass in Beweisen neues Wissen entdeckt werden kann.	„Entdeckung"
10	…, dass in Beweisen mathematisches Wissen kommuniziert werden kann.	„Kommunikation"

Tabelle 76: Items für die Bewertung des selbst eingeschätzten Lernzuwachses in Bezug auf Funktionen von Beweisen

Durch die Differenzbildung dieser Werte („aktuelle Einschätzung" – „retrospektive Einschätzung") wird der selbst eingeschätzte Lernzuwachs abgebildet. Somit ergeben sich „Veränderungswerte", die Werte zwischen -5 und 5 annehmen können, wobei positive Werte eine Zunahme und negative Werte eine Abnahme implizieren; der Wert Null entspricht hierbei keiner Veränderung.

Die Ergebnisse dieser errechneten personenbezogenen Veränderungswerte bzgl. der Funktionen von Beweisen werden in der Tabelle 77 und der Abbildung 85 dargestellt.

	Veränderung_									
	Gültigkeit	zeigen_ warum	Bedeutung	Verständ-nis	Zusammen -hänge	Systemati-sierung	Ende_ Prozess	verstehen_ warum	Entde-ckung	Kommu-nikation
	Alle									
N	73	73	72	72	73	73	73	73	72	73
M	2,60	2,55	2,19	2,26	2,05	2,03	1,42	2,14	1,93	1,77
Median	3	3	2	2	2	2	1	2	2	2
SD	1,4	1,472	1,57	1,50	1,62	1,55	1,46	1,58	1,51	1,39

Tabelle 77: Statistische Daten zu den errechneten Veränderungswerten bzgl. der Items zu „Funktionen von Beispielen" (alle ‚nachverfolgbaren Studierenden')

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [35]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf die Funktionen von Beweisen ein?

Insgesamt geben die Studierenden mehrheitlich an, bzgl. aller aufgeführten Funktionen von Beweisen durch die Lehrveranstaltung einen Lernzuwachs gehabt zu haben. Die Mediane von 1 bis 3 der Veränderungswerte und die bzgl. aller Funktionen auch erreichten Maximalwerte von 5 (vgl. Abbildung 85) verdeutlichen diese selbst eingeschätzten Lernzuwächse. Dabei fällt jedoch auf, dass mit Ausnahme der Items „Gültigkeit", „zeigen_warum", „Entdeckung" und „Kommunikation" eine besonders breite Streuung der Ergebnisse vorliegt, die auch negative Werte umfasst. Es sei dazu angemerkt, die absolute Häufigkeit der negativen Veränderungswerte bei diesen Items jeweils kleiner gleich 3 beträgt und diese Ergebnisse aus statistischer Sicht wohl vernachlässigt werden können.

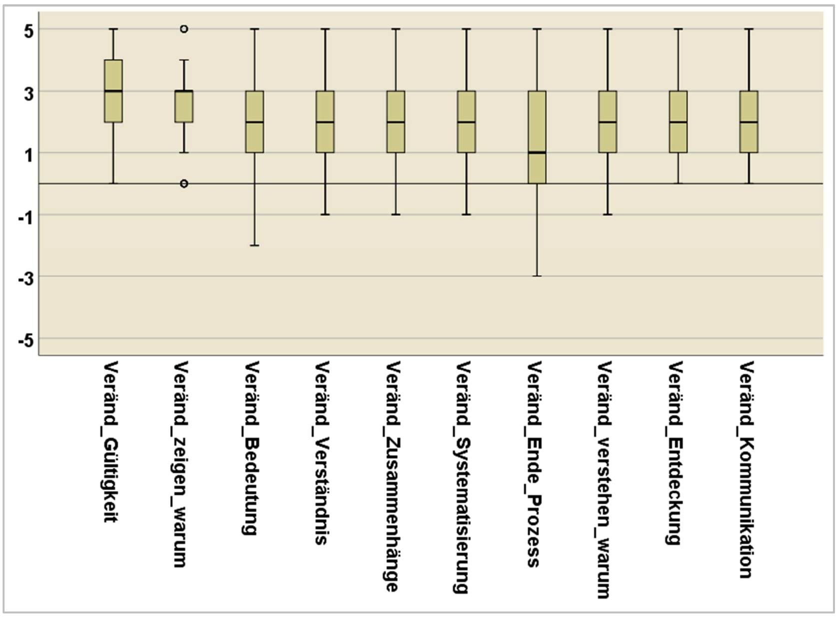


Abbildung 85: Boxplots zu den errechneten Veränderungswerten bzgl. der Items zu den Funktionen von Beweisen (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

(ii) Der selbst eingeschätzte Lernzuwachs der Studierenden in Bezug auf den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess

Wie bereits bei dem Komplex „Funktionen von Beweisen" wurden auch in dem Abschnitt zu „Nutzen von Beispielen" von den Studierenden aktuelle und retrospektive Bewertungen der Aussagen von den Studierenden verlangt („Inwieweit treffen die folgenden Aussagen – aus heutiger Sicht – auf Sie vor der Lehrveranstaltung zu und inwieweit treffen diese Aussagen heute zu?"). Analog zum Vorgehen bei den „Funktionen von Beweisen" wurden auch hier personenbezogene Veränderungswerte berechnet, die Werte zwischen -5 und 5 annehmen können, wobei der Wert Null keine Veränderung bedeutet, positive Werte die Zunahme der Zustimmung bzgl. einer Aussage beschreiben und negative Werte deren Abnahme. Die zu bewertenden Aussagen werden in der Tabelle 78 angegeben.

#	Formulierung	Abkürzung
1	Die Betrachtung von konkreten Beispielen kann dabei helfen, eine Beweisidee zu finden.	„Beweisidee_finden"
2	Die Betrachtung von konkreten Beispielen hilft dabei, eine Behauptung besser zu	„Behauptung_verstehen"
3	Die Betrachtung von konkreten Beispielen hat beim Beweisen keinen Nutzen.	„kein_Nutzen"
4	Beispiele können dabei helfen, eine Argumentation zu überprüfen.	„Arg_überpr"
6	Auch nach einem erfolgten Beweis überprüfe ich die Behauptung zur Sicherheit noch an	„nachträgl"
7	Die Überprüfung von einigen Beispielen reicht als vollständiger Beweis aus.	„vollst_Bew"
8	Beispiele können mich in meiner Vermutung bestärken, ob eine Behauptung wahr ist.	„Vermut_best"

Tabelle 78: Items bzgl. des selbst eingeschätzten Lernzuwachses der Studierenden in Bezug auf den Nutzen von Beispielen für den Beweisprozess

Die Ergebnisse bzgl. der errechneten personenbezogenen Veränderungswerte werden in der Tabelle 79 und der Abbildung 86 dargestellt.

	Veränderungswerte bzgl. des Nutzens von Beispielbetrachtungen						
	Beweisidee_ finden	Behauptung_ verstehen	kein_ Nutzen	Arg_ überpr	nachträgl	vollst_ Bew	Vermut_ best
Alle							
n	72	74	72	73	74	74	74
M	2,10	1,66	0,25	1,34	1,04	-0,16	0,99
Median	2,00	2,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00
SD	1,43	1,39	1,67	1,34	1,72	1,72	1,35

Tabelle 79: Statistische Daten zu den errechneten Veränderungswerten bzgl. der Items zum Nutzen von Beispielen im Beweisprozess (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [36]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess ein?

Es zeigt sich, dass die Studierenden der Ansicht sind, dass sich ihre Bewusstheit über die konstruktiven Aspekte von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess („Beweisidee finden", „Behauptung verstehen", „Argumentation überprüfen" und „Vermutung bestätigen") im Laufe der Lehrveranstaltung gesteigert hat. Bzgl. der Bewertung der Aussage „Die Betrachtung von konkreten Beispielen hat beim Beweisen keinen Nutzen" („kein Nutzen") liegt eine größere Streuung der Ergebnisse vor, wobei die Lage der Box (1. Quartil: 0 und 3. Quartil: 1) einen leichten Lernzuwachs anzeigt. Allerdings wird in der Rücksicht eine Schwäche dieses Items deutlich: Die dort verwendete negative Formulierung („hat keinen Nutzen") erscheint besonders in der Verbindung zu der verlangten aktuellen und retrospektiven Einschätzung problematisch. Bei den Veränderungswerten bzgl. des Items „vollst_Bew" wird durch die Lage der Box (1. Quartil: -1 und 3. Quartil: 0) deutlich, dass die Studierenden nur wenig selbst eingeschätzte Veränderung zum Ausdruck bringen. Doch weisen diese negativen Werte in die richtige Richtung: Ein negativer Wert bedeutet hier, dass dem Studierenden nach Besuch der Lehrveranstaltung bewusster geworden ist, dass die Überprüfung einzelner Beispiele nicht als vollständiger Beweis ausreicht.

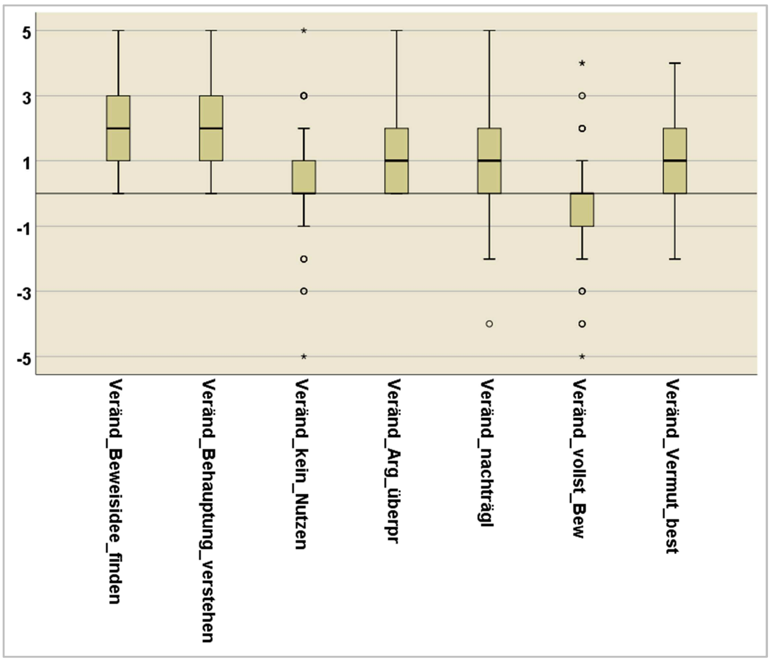


Abbildung 86: Boxplots zu den errechneten Veränderungswerten bzgl. der Items zu den Funktionen von Beweisen (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

(iii) Der selbst empfundene Lernzuwachs der Studierenden in Bezug auf die Konstruktion und den Umgang mit Beweisen

Um den von den Studierenden selbst empfundenen Lernzuwachs bzgl. des Beweisens zu erheben, sollten die Studierenden die folgenden Aussagen auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] „stimmt gar nicht" … [6] „stimmt völlig") bewerten:

Item #	Formulierung	Abkürzung
	Ich habe in der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" gelernt, …	
1	… wie man einen Beweis findet.	„Bew_finden"
2	… wie man einen Beweis aufschreibt	„Bew_aufschreiben"
3	… wie man einen Beweis liest.	„Bew_lesen"
4	… wie man einen Beweis versteht.	„Bew_verstehen"
5	… wie das Beweisen funktioniert.	„Bew_funktioniert"
6	… warum man Beweise führt.	„Bew_führen"
7	… welche Arten von Beweisen es gibt.	„Arten_Bew"
8	… wie man Beweise im Schulunterricht einsetzen kann.	„wie_in_Schule"
9	… wie man Schüler zum Beweisen motivieren kann.	„SuS_motiv"
10	… wie man Schülern „das Beweisen" unterrichten kann.	„Bew_unterrichten"
11	Ich habe in der Lehrveranstaltung gelernt, wie ich den Schülern besser verdeutlichen kann, wie und warum man Variablen in der Mathematik verwendet.	„warum_Var"
12	Durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" hat sich meine Einstellung zur Benutzung von Buchstabenvariablen positiv entwickelt.	„BuVar_pos"
13	Durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" hat sich meine Einstellung zum formalen Beweis positiv entwickelt.	„FB_pos"
14	Durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" hat sich meine Einstellung zum Einsatz von Beweisen in der Schule positiv entwickelt.	„Bew_S_pos"
15	Durch die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" ist mir klar geworden, dass man Beweise besser nicht in der Schule behandeln sollte.	„Bew_nicht_S"

Tabelle 80: Items zur Erfassung des selbst empfundenen Lernzuwachses bzgl. der Beweisaktivität durch die Lehrveranstaltung

Die Ergebnisse bzgl. dieser Items zum selbstempfundenen Lernzuwachs durch die Lehrveranstaltung werden in der Tabelle 81 und der Abbildung 87 dargestellt.

Selbst empfundener Lernzuwachs durch die Lehrveranstaltung															
	#1	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**	**#6**	**#7**	**#8**	**#9**	**#10**	**#11**	**#12**	**#13**	**#14**	**#15**
Alle															
n	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74
M	4,65	5,31	5,09	5,14	5,18	4,92	5,64	3,12	2,64	2,76	4,45	4,36	4,55	3,96	2,97
Med.	5	5	5	5	5	5	6	3	2,5	3	5,00	5,00	5,00	4,00	3,00
SD	1,19	0,76	0,88	0,83	1,01	1,13	0,56	1,55	1,41	1,46	1,26	1,42	1,37	1,45	1,45

Tabelle 81: Statistische Daten zu den errechneten Veränderungswerten bzgl. der Items zum Nutzen von Beispielen im Beweisprozess (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [37]: Wie schätzen die Studierenden ihren eigenen Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung ein?

Die Studierenden bewerten ihren eigenen Lernzuwachs bzgl. der fachlichen Aspekte des Beweisens (Items 1-7, s. Tabelle 80) durch die Lehrveranstaltung mit einem Median von 5 bzw. 6 insgesamt sehr hoch. Dieses Ergebnis wird durch die Betrachtung der Boxplots (vgl. die Lage der Quartile in Abbildung 87) noch untermauert. Die Aussagen bzgl. der in der Lehrveranstaltung weniger explizit thematisierten didaktischen Aspekte zum Beweisen (Items 8 bis 10) werden dagegen von den Studierenden mit einem Median von 3 bzw. 2,5 eher abgelehnt. Anhand der Items 11, 12 und 13 wird deutlich, dass sich die Einstellungen der Studierenden zur Nutzung von Buchstabenvariablen und zum formalen Beweisen nach eigenen Angaben deutlich verbessert haben. Schließlich stimmen die Studierenden mit einem Median von 4 auch der Aussage zu, dass sich durch die Lehrveranstaltung ihre Einstellung zum Einsatz von Beweisen in der Schule positiv entwickelt hat, das negativ formulierte Item wird entsprechend niedrig bewertet.

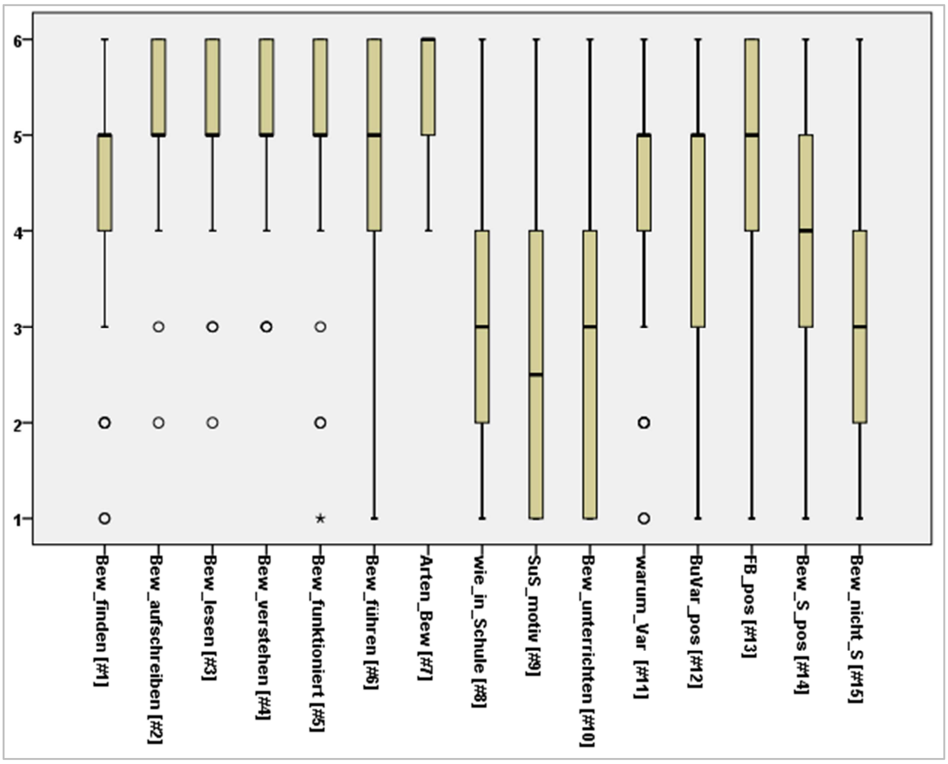


Abbildung 87: Boxplots zu den Items „Selbst empfundener Lernzuwachs bzgl. der Beweisaktivität" (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

(iv) Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen

In dem Fragebogenabschnitt „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ sollten die Studierenden die folgenden Aussagen auf einer sechsstufigen Likert-Skala ([1] „stimmt gar nicht“ … [6] „stimmt völlig“) bewerten:

Formulierung	Abkürzung
Ich kann eine gegebene Behauptung beweisen	„Beh_beweisen“
Ich weiß, was einen Beweis ausmacht.	„was_ausmacht“
Ich weiß, warum in der Mathematik bewiesen wird.	„warum_beweisen“
Ich verstehe Beweise, wenn ich sie lese.	„verstehe_Bew“
Ich weiß, wie man einen Beweis führt.	„wie_führen“
Ich kann beurteilen, ob ein Beweis richtig oder falsch ist.	„Bew_beurteilen“

Tabelle 82: Aussagen zur Erfassung der Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen

Durch Mittelwertbildung der sechs Items wurde die Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ konstruiert. Die statistischen Kennwerte dieser Skala werden in der Tabelle 83 dargestellt. Die Skala genügt sowohl den Ansprüchen an Reliabilität als auch an die korrigierten Trennschärfen der verwendeten Items.

Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen"	
	Alle
N	74
M	5,09
Median	5,17
SD	0,67
Cronbachs Alpha	0,83
Spannweite r_{IT}	0,491 - 0,700

Tabelle 83: Statistische Kennwerte zur Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ in der Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

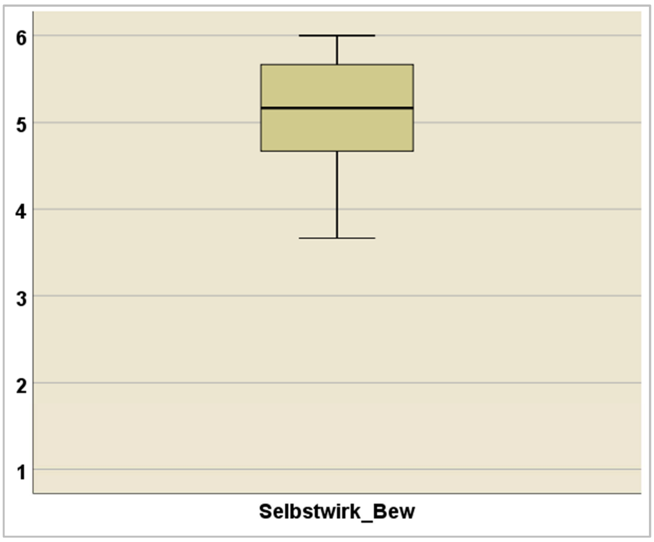


Abbildung 88: Boxplot zur Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ (alle ‚nachverfolgbaren‘ Studierenden)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [38]: Wie lässt sich die Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen auf Seiten der Studierenden beschreiben?

Durch die verwendeten Items konnte eine reliable Skala zur Erfassung der „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ konstruiert werden. Der Skalenmittelwert von 5,09 in der Gesamtgruppe verdeutlicht die allgemein hohe Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden zum Beweisen. Bei der Betrachtung des entsprechenden Boxplots wird deutlich, dass alle Werte in der oberen Hälfte der Skala liegen (s. Abbildung 88). Insgesamt kann somit von einer eher hohen Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen auf Seiten der Studierenden gesprochen werden.

Schließlich sei hier der Frage nachgegangen, ob sich Zusammenhänge zwischen der Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ und „Beweisaffinität“ ausmachen lassen. Die Hypothese bei dieser Fragestellung ist ein vermuteter Zusammenhang zwischen motivationalen

Aspekten und der Selbsteinschätzung der Kompetenz. In der Gesamtgruppe der ‚nachverfolgbaren' Studierenden ergibt sich ein mittelstarker Zusammenhang zwischen den Skalen „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" und „Beweisaffinität", der statistisch hoch signifikant ist (r_P=0,336 und p=0,003; vgl. Abbildung 89)[82].

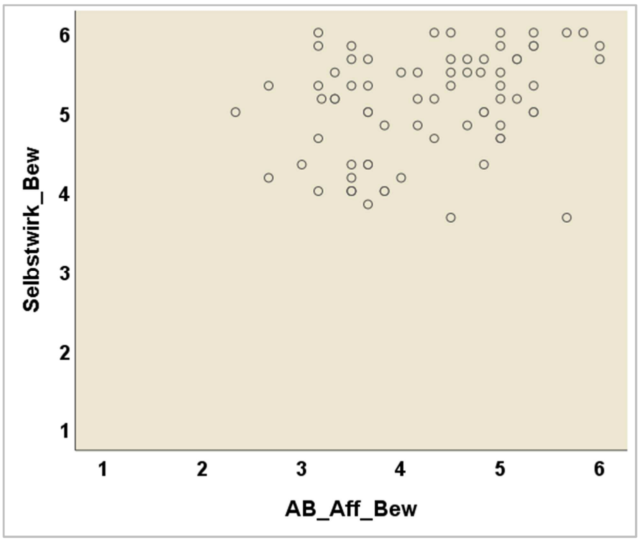


Abbildung 89: Scatterplots bzgl. des Zusammenhangs der Skalen „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" [„Selbstwirk_Bew"] und „Beweisaffinität" [„AB_Aff_Bew"] in der Ausgangsbefragung (alle ‚nachverfolgbaren' Studierenden)

Für die Beantwortung der Forschungsfrage [7] werden im Folgenden die erhaltenen Ergebnisse aus Abschnitt 7.3.4. unter Berücksichtigung der Leitfragen zur Auswertung 35-38 zusammenfassend ausgewertet.

Beantwortung der Forschungsfrage [7]: Wie schätzen die Studierenden selbst ihren Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung ein?

Die Studierenden geben in der Ausgangsbefragung an, in Bezug auf die verschiedenen **Funktionen von Beweisen**[83] durch die Lehrveranstaltung einen Lernzuwachs gehabt zu haben. Dieser Lernzuwachs konnte über die Erfassung der aktuellen und retrospektiven Einschätzung der Studierenden herausgearbeitet werden, die verschiedenen Funktionen von Beweisen anhand konkreter Beweiskonstruktion verdeutlichen zu können. Aus aktueller Perspektive schätzen sich die Studierenden dabei im Mittel um zwei Werte auf einer Sechser-Likert-Skala besser ein als retrospektiv vor dem Besuch der Lehrveranstaltung. Ebenfalls durch die Abfrage einer aktuellen und retrospektiven Einschätzung konnte ein Lernzuwachs in Bezug auf **Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess** erfasst werden. Ein Lernzuwachs von zwei Punkten auf der Likert-Skala ergibt sich bzgl. der Aspekte der Beispielbetrachtung zum Finden einer Beweisidee und zum Verstehen einer Behauptung.

Bei den konkreten Fragen zum **Lernzuwachs bzgl. der fachlichen Aspekte zum Beweisen** (Finden, Aufschreiben, Lesen und Verstehen von Beweisen) bewerten die Studierenden ihren eigenen

[82] Dieser Zusammenhang ist auch in der Subgruppe der ‚Höheren Semester' gegeben (r_P=0,467 und p=0,004 mit n=36), nicht jedoch in der Gruppe der Erstsemester (r_p=0,189, p=0,189 mit n=38).
[83] In diesem Kontext wurden die folgenden Funktionen von Beweisen thematisiert: „Sicherung der Gültigkeit", „Erklärung eines Sachverhalts", „Verdeutlichung der Bedeutung mathematischer Begriffe", „Erzeugung von mathematischem Verständnis", „Hilfe beim Einprägen von Zusammenhängen und Tatsachen", „Systematisierung von Wissen", „Beendigung eines laufenden (Forschungs-) Prozesses", „Entdeckung von neuem Wissen" und „Kommunikation" (vgl. Abschnitt 3.3.9 und 7.3.4).

Lernzuwachs durch die Lehrveranstaltung mit einem Median von 5 sehr hoch. Ein Median von 6 erreicht dabei der Aspekt um das Wissen verschiedener Arten von Beweisen. Die didaktischen Aspekte von Beweisen (Motivieren von Schülerinnen und Schülern und das Unterrichten von Beweisen) werden dagegen eher niedrig bewertet. (Dieses Ergebnis zeugt dabei von ‚ehrlichen' Bewertungen der Studierenden, denn diese didaktischen Aspekte wurden im Rahmen dieser expliziten Fachveranstaltung höchstens implizit tangiert.) Darüber hinaus geben die Studierenden jeweils mit einem Median von 5 an, dass sich ihre **Einstellung zur Nutzung von Buchstabenvariablen und zum formalen Beweisen** positiv entwickelt habe, auch hätten sie durch die Lehrveranstaltung gelernt, wie man Schülerinnen und Schülern besser verdeutlichen kann, wie und warum man Variablen in der Mathematik verwendet. Aus diesem Ergebnis kann geschlossen werden, dass sich auch ihre eigene Bewusstheit über diesen Aspekt gesteigert hat. Schließlich stimmen die Studierenden mit einem Median von 4 der Aussage (eher) zu, dass sich durch die Lehrveranstaltung ihre Einstellung zum Beweisen positiv entwickelt hätte.

An dieser Stelle sollen kurz Probleme der Herangehensweise der retrospektiven Kompetenzzuwachsmessung angebracht werden. Grundlegend für die Diskussion dieser Ergebnisse ist die Frage nach der Validität der Selbsteinschätzung der Studierenden, gerade in der Retrospektive (vgl. Sprangers und Hoogstraten 1989). Wie Pratt et al. (2000, S. 347ff.) betonen, kann gerade die retrospektive Selbsteinschätzung aufgrund der zurückliegenden Zeit und einer möglichen ‚Verklärung' der Vergangenheit zu Fehleinschätzungen führen. Hinzu kommt das Problem einer gewissen personalen Erwünschtheit, dass jede Person das Gefühl haben möchte, etwas gelernt zu haben, was dazu führen kann, dass der Kompetenzzuwachs als zu hoch eingeschätzt wird. Dazu muss zunächst angemerkt werden, dass mit der hier verwendeten Fragemethode nach einer retrospektiven und einer aktuellen Einschätzung gerade nicht direkt nach dem empfundenen Lernzuwachs gefragt wurde, was nach Lam und Bengo (2003) zu den valideren Ergebnissen führt. Weiter belegen die Ergebnisse von Coulter (2012), dass diese Herangehensweise über eine retrospektive Einschätzung besser geeignet ist, um (empfundene) Lernzuwächse valide beschreiben zu können als herkömmliche Pre-Post-Tests. Schließlich konnten Townsend und Wilkon (2003) zeigen, dass Studierende ihre Kompetenzen in einer Eingangsbefragung durchaus in der Retrospektiven korrekt einschätzen können. Allerdings verbleibt das Problem der sozialen Erwünschtheit bei den Antworten der Studierenden, welches an dieser Stelle nicht ausgeschlossen werden kann. Dieses grundlegende Problem, dass in dieser Forschung gerade auch durch die Involviertheit des Forschers bedingt wird, wird in Abschnitt 8.4.1.1 genauer erörtert.

In der Ausgangsbefragung konnte durch Mittelwertbildung von sechs Items die reliable Skala der „**Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen**" (mit Werten zwischen 1 und 6) konstruiert werden. Dabei verdeutlich der Skalenmittelwert von 5,09 die hohe Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden. Die Lehrveranstaltung hat folglich dazu beigetragen, bei den Studierenden eine hohe Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen auszubilden.

7.4 Teilstudie 3: Die Begründungen und Beweisproduktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur

im Rahmen der Effektivitätsstudie zur vierten Durchführung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" stellt die Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2014/15 den dritten

Messzeitpunkt dar. Im Rahmen dieser Klausur wurden zwei Aufgaben gestellt, mit denen die Begründungs- und Beweiskompetenz der Studierenden erfasst werden konnten: eine Begründungsaufgabe über die Summe zweier gerader Zahlen und eine Beweisaufgabe zu der Summe von sechs aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Die anderen Aufgaben in der Klausur umfassten die Themenbereiche: figurierte Zahlen, Beweis durch vollständige Induktion, Beweis durch Kontraposition und Aussagenverknüpfungen. Die Bearbeitungen zu diesen Aufgaben wurden im Rahmen dieses Forschungsprojekts allerdings nicht ausgewertet, da sie außerhalb des speziellen Fokus dieser Arbeit liegen.

7.4.1 Forschungsanliegen und Forschungsfragen

Am Ende der Effektivitätsstudie zur vierten Durchführung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" steht die Frage, inwiefern sich die Begründungskompetenz der Studierenden verändert hat, wie gut es den Studierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung gelingt, die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (den generischen Beweis mit Zahlen, den generischen Beweis mit Punktmustern, den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und den formalen Beweis) selbst zu konstruieren, und welche Unterschiede sich zu den Ergebnissen aus dem vorherigen Durchgang zeigen. Bei der Untersuchung der Begründungskompetenz der Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung wurden neben der Qualität der Begründungen auch die Begründungsarten und dabei auftretende charakteristische Fehler untersucht. Diese Aspekte sollen in der Analyse der Aufgabenbearbeitungen aus der Modulklausur wieder aufgegriffen werden, um die Bearbeitungen besser vergleichen zu können. Bei der Untersuchung der Begründungs- und Beweiskompetenz der Studierenden ist dabei auch von Interesse, inwiefern die Studierenden dabei in der Lage sind, ihre eigenen Fähigkeiten in Bezug auf die Konstruktion von Beweisen richtig einzuschätzen. Aus diesem Grund werden die erhaltenen Ergebnisse zu den Beweiskonstruktionen mit den Ergebnissen der konstruierten Skalen zur „Beweisaffinität" und „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" in Beziehung gesetzt.

Bei der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" (s.u.) können direkt die personenbezogenen Veränderungen von der Ein- zur Ausgangsbefragung betrachtet werden, da es sich hier um die gleiche Kohorte handelt. Bei den Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulklausur müssen die Ergebnisse mit denen aus dem Vorjahr in Beziehung gesetzt werden; an dieser Stelle können also keine personenbezogenen Auswertungen erfolgen. Wohl aber können eventuelle Unterschiede zwischen diesen beiden Jahrgängen genutzt werden, um die Auswirkung der Veränderungen der Lehrveranstaltung bewerten zu können. Die Leitfragen zur Auswertung sind dementsprechend wie folgt:

- Leitfrage zur Auswertung [39]: Inwiefern gelingt den Studierenden die Bearbeitung der bereits in der Eingangsbefragung gestellten Begründungsaufgabe der „Summe zweier ungerader Zahlen" in der Modulklausur nach dem Besuch der Lehrveranstaltung und welche Begründungsart verwenden die Studierenden, um ihre Begründung zu konstruieren?
    a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?
    b) Welche Unterschiede zeigen sich im Vergleich zu den Ergebnissen der Eingangsbefragung?

- Leitfrage zur Auswertung [40]: Inwiefern gelingt den Studierenden die Konstruktion der vier verschiedenen Beweisformen „generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis“ in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2014/15?
  a) Inwiefern unterscheiden sich diese Ergebnisse von denen aus dem Vorjahr?
  b) Inwiefern lassen sich Zusammenhänge zwischen den Beweiskonstruktionen der Studierenden ausmachen?
  c) Inwiefern lassen sich Zusammenhänge zwischen den Beweiskonstruktionen der Studierenden und den in der Ausgangsbefragung erhobenen Skalen zur „Beweisaffinität“ und zur „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ ausmachen?

7.4.2 Methode und verwendete Aufgaben

Um bei den Studierenden eine möglichst hohe Motivation für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben zu erzeugen und somit möglichst aussagekräftige Begründungs- und Beweiskonstruktionen zu erhalten, wurden die zu bearbeitenden Aufgaben (s.u.) in der Modulabschlussklausur, einen Monat nach Semesterende, gestellt. Der Klausur wurde ein Deckblatt angefügt, auf dem auf freiwilliger Basis der bereits in der Ein- und Ausgangsbefragung verwendete personenbezogene Code abgefragt wurde. Ebenfalls waren auf diesem Deckblatt Eintragungen für die für die Forschung relevanten Daten vorgesehen. Nach der Klausurkorrektur wurden die entsprechenden Daten eingetragen und die Deckblätter von den Klausurbögen entfernt, so dass eine anonyme Nutzung der Daten sichergestellt wurde.

Die erste hier betrachtete Aufgabe ist die Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“, die bereits in der Eingangsbefragung eingesetzt wurde (vgl. Abschnitt 7.2.4.1):

<u>Aufgabe 1</u>
Die Summe 11 + 17 ist eine gerade Zahl.
Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen?
- Begründen Sie überzeugend.

Entsprechend der Auswertung der Aufgabe im Rahmen der Eingangsbefragung wurde auch die Auswertung der Bearbeitungen in der Modulklausur mit dem bereits dort angewendeten Kategorienschema vorgenommen (vgl. Abschnitt 7.2.4.1). Ebenso wurden die in Abschnitt 7.2.4.1 herausgearbeiteten Begründungsarten und die damit verbundenen charakteristischen Fehler für die Analyse der Daten herangezogen, um bessere Einblicke in die Bearbeitungen der Studierenden zu ermöglichen.

Für die Konstruktion der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung wurde die folgende Aufgabe verwendet, die bereits in der Modulabschlussklausur des vorherigen Durchgangs eingesetzt wurde (vgl. Abschnitt 5.4.2.3 für eine didaktische Erörterung der Aufgabe und entsprechende Lösungsbeispiele):

<u>Aufgabe 2</u>
Wir betrachten die folgende Behauptung:

Die Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.

Beweisen Sie die Behauptung mit:

a) einem generischen Beweis mit Zahlen.
b) einem formalen Beweis mit Mitteln der Algebra.
c) einem generischen Punktmusterbeweis.
d) einem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen.

Für die Analyse der Begründungen und der Beweiskonstruktionen der Studierenden wurde dabei das gleiche Kategorienschema wie bei der Analyse der Klausuraufgaben im Wintersemester 2013/14 und in der Eingangsbefragung (Wintersemester 2014/15) verwendet. Zur Erinnerung seien hier kurz die entsprechenden Kategorien aufgeführt (eine ausführliche Darstellung des Kategoriensystems mit Ankerbeispielen befindet sich in Abschnitt 7.2.4.1):

Bezeichnung	Erläuterung
n.b.	nicht bearbeitet
Keine Begründung	Antwort ohne Begründung
Empirisch	induktive Prüfung
Pseudo	Paraphrasierung der Behauptung; Nennung falscher oder irrelevanter Fakten
Fragmentarisch	Es werden korrekte und relevante fachliche Aspekte genannt, ohne dass eine Argumentationskette aufgebaut wird.
Argumentation mit Lücke	Es wird eine Argumentationskette mit korrekten und relevanten fachlichen Aspekten aufgebaut, die allerdings eine Lücke enthält.
vollständige Argumentation	Die Behauptung wird mithilfe korrekter Argumente vollständig verifiziert.

Tabelle 84: Kurzdarstellung des Kategoriensystems zur vergleichenden Analyse der Begründungen und Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2014/15

7.4.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Klausuraufgaben „Summe zweier ungerader Zahlen“ und „Summe sechs aufeinanderfolgender Zahlen“ darstellt. Neben den in der Klausur erhaltenen Ergebnissen geht es dabei auch um die Veränderungen, die sich im Vergleich zu den Ergebnissen der Eingangsbefragung (Aufgabe „Summer zweier ungerader Zahlen“) und zu den Ergebnissen aus der Modulklausur des vorherigen Wintersemesters (Aufgabe „Summe sechs aufeinanderfolgender Zahlen“) ergeben. Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf die Daten von 107 Studierenden, die mithilfe der Abfrage eines anonymen Codes von der Eingangsbefragung zur Modulklausur nachverfolgt werden konnte.

7.4.3.1 Ergebnisse bzgl. der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ und der Abgleich mit den Ergebnissen aus der Eingangsbefragung

Für die Auswertung der *Qualität der Begründung* wurde das gleiche Kategoriensystem wie in der Eingangsbefragung verwendet (s.o.). Für die Erfassung der verschiedenen Begründungsarten wurden zunächst diejenigen wieder aufgegriffen, die bei der Analyse der entsprechenden Aufgabe in der Eingangsbefragung herausgearbeitet werden konnten.

Für den Vergleich der Ergebnisse aus der Eingangsbefragung und der Modulabschlussklausur werden im Folgenden nur die Ergebnisse bzgl. der Studierenden verwendet, die nachverfolgbar an beiden Messzeitpunkten teilgenommen haben. Die prozentuale Verteilung der Kategorien der „Qualität der Begründung“ in der Modulklausur [„MK“] werden in der Tabelle 85 und der Abbildung 90 vergleichend mit den Ergebnissen aus der Eingangsbefragung [„EB“] dargestellt.

	Alle (n=107)		Erstsemester (n=51)		Höhere Semester (n=56)	
	EB	MK	EB	MK	EB	MK
n.b.: Nicht bearbeitet	10,3	0	17,2	0	3,5	0
K0: Keine Begründung	14,0	0	21,2	0	7,3	0
K1: Empirisch	3,7	0	5,8	0	1,8	0
K2: Pseudo	26,2	6,5	32,7	7,8	20	5,4
K3: Fragmentarisch	3,7	1,9	1,9	2,0	5,5	1,8
K4: Argumentation mit Lücke	26,2	39,3	15,4	52,9	36,4	26,8
K5: Vollständige Argumentation	15,9	52,3	5,8	37,3	25,5	66,1
Summe:	100	100	100	100	100	100

Tabelle 85: Ergebnisse zur „Qualität der Begründung“ in der Eingangsbefragung [„EB“] und der Modulabschlussklausur [„MK“] in Prozent (Alle und Subgruppen)

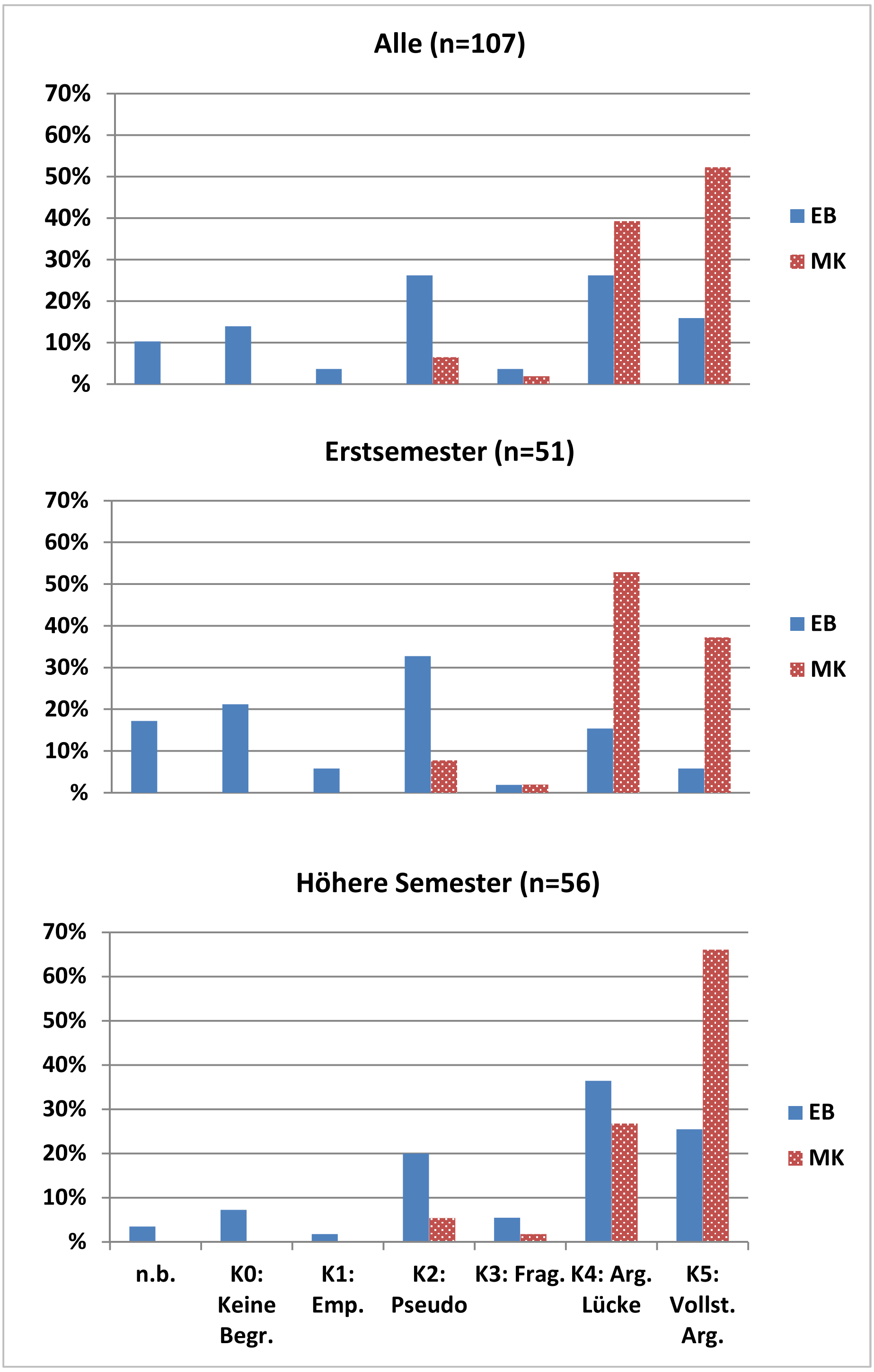


Abbildung 90: Prozentuale Verteilung der Ergebnisse der „Qualität der Begründung“ in der Eingangsbefragung [„EB“] und der Modulabschlussklausur [„MK“] (Alle und Subgruppen)

Beantwortung der Leitfrage zur Auswertung [39]: Inwiefern gelingt den Studierenden die Bearbeitung der bereits in der Eingangsbefragung gestellten Begründungsaufgabe der „Summe zweier ungerader Zahlen“ in der Modulklausur nach dem Besuch der Lehrveranstaltung und welche Begründungsart verwenden die Studierenden, um ihre Begründung zu konstruieren?

Bei der Bearbeitung der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ werden in der Modulabschlussklausur in 91,6% der Bearbeitungen Argumentationen mit korrekten Argumenten konstruiert [K4+K5]. Allerdings konnten nur 52,3% aller Begründungen als vollständig gewertet werden [K5], da in den restlichen Argumentationen diverse Lücken auftraten. Aus normativer Sicht muss hier angemerkt werden, dass der Anteil vollständiger Argumentationen für solch eine basale Begründungsaufgabe doch eher gering ausfällt.

Die Untersuchung der verwendeten Begründungsarten und der damit verbundenen charakteristischen Fehler vermag dieses Phänomen genauer zu erklären.

Insgesamt konnten bei den Bearbeitungen der Begründungsaufgabe in der Modulabschlussklausur die folgenden Begründungsarten ausgemacht werden: (A2) Nennung oder Paraphrase des Satzes, dass die Summe zweier ungerader Zahlen immer ungerade ist, (A3) Nennung falscher bzw. irrelevanter Fakten, (A4) Begründung über die ‚Abstände‘ von geraden zu ungeraden Zahlen, (A7) Repräsentation einer ungeraden Zahl durch „$2n+1$“, (A8) Repräsentation einer ungeraden Zahl durch „$n+1$“ und (A10) Verwendung von geometrischen Variablen.

Die prozentualen Verteilungen dieser Begründungsarten werden in der Tabelle 86 angegeben.

			Alle (n=107)	Erstsemester (n=51)	Höhere Sem. (n=56)
	n. b.	nicht bearbeitet	-	-	-
	A0	keine Begründung	-	-	-
	A1	induktiv	-	-	-
Pseudo	A2	Satz: Summe ungerade	5,6	5,9	5,4
	A3	falsch/irrelevant	0,9	2	-
Argumentationen ohne Formalisierung	A4	Abstände	6,5	5,9	7,1
	A5	Endziffern	-	-	-
	A6	g & u wechseln ab	-	-	-
Argumentationen mit Formalisierung	A7	"2n+1"	85,0	84,3	85,7
	A8	"n+1"	0,9	2	1,8
	A9	"n+n=2n"	-	-	-
	A10	Mithilfe geometrischer Variablen	0,9	-	1,8
		Summe	100	100	100
		Summe „mit Form.“	85,9	86,3	83,6

Tabelle 86: Prozentuale Verteilung der „Begründungsarten“ zur Aufgabe „Summer zweier ungerader Zahlen“ in der Modulabschlussklausur (Alle und Subgruppen)

In der Modulabschlussklausur verwendet die deutliche Mehrheit der Studierenden (85,0%) in ihren Begründungen die Repräsentation einer ungeraden Zahl der Form „$2n$+1“.

In Verbindung mit den herausgearbeiteten Begründungsarten lässt sich nun der Frage nachgehen, warum der Anteil von „vollständigen Argumentationen“ in der Auswertung der studentischen Bearbeitungen relativ gering ausfällt. Um diese Frage zu klären, wurden die Bearbeitungen des Begründungstyps [A7] (Begründungen mithilfe einer Repräsentation der Form „$2n$+1“) im Hinblick auf die begangenen Fehler untersucht. Als charakteristische Fehler konnten hierbei die folgenden ausgemacht werden: (1) für die Repräsentation der beiden ungeraden Zahlen wird nur eine Buchstabenvariable verwendet und (2) bei dem erhaltenen Term der Art „$(2n+1)+(2m+1)=\underline{2\cdot(n+m+1)}$“ wird für den Nachweis des Attributs ‚gerade‘ nicht angemerkt, dass der zweite Faktor („$n+m+1$“) ein Element der natürlichen Zahlen ist. In der Tabelle 87 wird die prozentuale Verteilung dieser charakteristischen Fehlertypen für die Gesamtgruppe und die Subgruppen angegeben.

	Alle	Erstsemester	Höhere Semester
Absolute Anzahl der Bearbeitungen mit Begründungsformen der Art „$2n$+1“	83	40	43
Anteil korrekter Bearbeitungen	53,0%	32,5%	72,1%
Fehlertyp			
(1) Es wird nur eine Buchstabenvariable	31,3%	47,5%	16,3%
(2) Der zweite Faktor wird nicht als Element der natürlichen Zahlen	10,8%	17,5%	4,7%
(3) Sonstige Fehler	4,8%	2,5%	7,0%
Summe	100%	100%	100%

Tabelle 87: Prozentuale Verteilung der Fehlertypen bei Bearbeitungen der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ mithilfe der Repräsentation „2n+1“ in der Modulabschlussklausur (WS 2014/15)

Es zeigt sich hier, dass nur gut der Hälfte der Studierenden, die mithilfe einer Begründungsform der Art „$2n+1$“ agieren, eine vollständig korrekte Bearbeitung gelingt. Die ausgemachten häufigsten Fehlertypen sind somit einmal einem unzureichendem Umgang mit Variablen (31,3%) und einem unvollständigen Nachweis der Teilbarkeit durch 2 zuzuschreiben (10,8%).

a) Inwiefern lassen sich hierbei Unterschiede zwischen den Studierenden in ihrem ersten Hochschulsemester und den Studierenden in einem höheren Semester ausmachen?

Vergleicht man die Ergebnisse aus der Modulklausur in den Subgruppen, so zeigt sich, dass in beiden Subgruppen der Anteil der Bearbeitungen mit korrekten Argumenten bei ca. 91% liegt [K4+K5]. Unterschiede zeigen sich jedoch in den unterschiedlichen Anteilen von Argumentationen mit Lücke [K4] (Erstsemester: 52,9% und Höhere Semester 26,8%) und vollständigen Argumentationen [K5] (Erstsemester: 37,3% und Höhere Semester 66,1%). Dabei liegt ein mittelstarker Zusammenhang vor, der statistisch hoch signifikant auf dem 1%-Niveau ist (Chi²-Test; p=0,003; Cramers V=0,301). Dieses Phänomen ist dabei nicht der Wahl unterschiedlicher Begründungsarten geschuldet (beide Subgruppen formulieren in ca. 85% der Fälle eine Begründung mithilfe einer Repräsentation der Form „$2n+1$“, vgl. Tabelle 87), sondern kann durch das Auftreten von charakteristischen Fehlern in den Subgruppen erklärt werden. Der Fehlertyp (1), dass nur eine Buchstabenvariable verwendet wird, um zwei beliebige ungerade Zahlen zu repräsentieren, tritt bei den Erstsemesterstudierenden in 47,5% der Fälle auf, dagegen liegt der Anteil bei den Höheren Semester nur bei 16,3%. Auch der Anteil der Fehler, dass der zweite Faktor nicht als Element der natürlichen Zahlen ausgewiesen wird, tritt bei den Erstsemestern mit 17,5% häufiger auf, als bei den Höheren Semestern mit nur 4,7%.

b) Welche Unterschiede zeigen sich im Vergleich zu den Ergebnissen der Eingangsbefragung?

Im Vergleich zu den Ergebnissen der Eingangsbefragung wird deutlich, dass der Anteil „vollständiger Argumentationen“ [K5] von 15,9% auf 52,3% gestiegen ist. Darüber hinaus ist der Anteil von Pseudo-

Begründungen [K2] von 26,2% auf 6,5% zurückgegangen und rein empirisch-induktive Begründungen [K1] werden in der Modulabschlussklausur überhaupt nicht mehr gegeben.

Bzgl. der verwendeten Begründungsarten ist eine deutliche Hinwendung zu der Verwendung von Variablen festzustellen: Lag der Anteil von Bearbeitungen, in denen Buchstabenvariablen verwendet wurden, in der Eingangsbefragung bei 28,1%, so verwenden in der Modulabschlussklausur 85,9% der Studierenden Buchstabenvariablen. Waren in der Eingangsbefragung noch verschiedene Repräsentationen für die ungeraden Zahlen verwendet worden („$2n + 1$“ (16,1%), „$n + 1$“ (10,7%) oder „n“ (1,3%)), so wird in der Modulklausur fast ausschließlich die Repräsentation „$2n + 1$“ (85%)gewählt. Entsprechend dem Anstieg der Bearbeitungen mit formalen Repräsentationen ist der Anteil der Begründungen ohne Formalisierungen (Begründungen über die ‚Abstände‘ zu den geraden Zahlen, über die Endziffern oder über die Tatsache, dass gerade und ungerader Zahlen sich abwechseln; vgl. Abschnitt 7.2.4.1) von 16,8% auf 6,5% zurückgegangen, wobei hier nur noch die Begründungsart über die ‚Abstände‘ der ungeraden zu geraden Zahlen auftaucht.

Auch zeigte sich bei der Analyse der Bearbeitungen der Eingangsbefragung, dass 10,7% der Studierenden eine ungerade Zahl in der Form „n+1“ darstellten, wobei a als gerade Zahl definiert werden muss. In den Bearbeitungen in der Modulabschlussklausur liegt dieser Anteil nur noch bei 0,9%.

Es kann somit insgesamt festgestellt werden, dass sich die Begründungen der Studierenden von der Eingangsbefragung zur Modulabschlussklausur verbessert haben und eine klare Hinwendung zu der Verwendung von Buchstabenvariablen erfolgt ist. Der relativ hohe Anteil von Bearbeitungen, in denen nur eine Buchstabenvariable verwendet wird, verdeutlicht allerdings die Probleme der Studierenden und besonders der Studienanfängerinnen und -anfänger, mit mehreren Buchstabenvariablen korrekt umzugehen.

Dabei muss einschränkend angemerkt werden, dass die Studierenden bei der Bearbeitung der Modulabschlussklausur deutlich (extrinsisch) motivierter und an besseren Ergebnissen interessiert waren als bei der Bearbeitung der Eingangsbefragung zu Beginn des Semesters. Allerdings wurde anscheinend auch in der Eingangsbefragung diese Begründungsaufgabe gewissenhaft bearbeitet, wovon die ausführlichen Antworten der Studierenden zeugen.

7.4.3.2 Die Beweiskonstruktionen der Studierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung und der Abgleich mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Durchgang

In der Modulabschlussklausur sollten die Studierenden die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis), wie bereits in der Modulklausur des Wintersemesters 2013/14, zu der folgenden Behauptung konstruieren: „Die Summe von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade“. Für die Auswertung der Studierendenbearbeitungen wurde das gleiche Kategoriensystem verwendet wie bereits bei der Klausuranalyse im Wintersemester 2013/14 (s. Abschnitt 5.4.2.3). Dieses Kategoriensystem ist auch das gleiche, wie es oben für die Analyse der Klausuraufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ verwendet wurde. Die Kategorie „K0: Keine Begründung“ kann dabei entfallen, da in keinem der beiden Durchgänge Beweise formuliert wurden, die überhaupt keinen Begründungsansatz beinhalteten.

Auch in diesem Durchgang wurden alle Beweisproduktionen der Studierenden doppelt kodiert, offensichtliche Fehlkodierungen wurden auch hier im Rahmen einer Kodierkonferenz korrigiert (vgl. Abschnitt 5.4.2.3). Die Interrater-Reliabilitäten bzgl. der Kategorien sind bei allen Beweisformen in einem akzeptablen bis sehr guten Bereich. Die exakten Werte werden in der Tabelle 88 angegeben.

Kategorienschema zu der Beweisform…	**Interrater-Reliabilität Cohens Kappa**
generischer Beweis mit Zahlen	0,640
formaler Beweis	0,661
generischer Punktmusterbeweis	0,803
Punktmusterbeweis mit geometr. Variablen	0,849

Tabelle 88: Interrater-Reliabilitäten (Cohens Kappa) bzgl. Kategorisierungen der vier Beweisformen in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2014/15

In der Tabelle 89 und der Abbildung 91 werden die Ergebnisse der Gesamtgruppe des Wintersemesters 2014/15 vergleichend mit den Ergebnissen aus dem Wintersemester 2013/14 angegeben.

	Wintersemester 2013/14 (n=139)				**Wintersemester 2014/15 (n=107)**			
	GenZ	**FB**	**GenP**	**GV**	**GenZ**	**FB**	**GenP**	**GV**
n.b.	3	3	6	18	0	2	1	4
K1: Empirisch	7	0	7	0	1	0	0	0
K2: Pseudo	22	15	37	45	6	8	14	34
K3: Fragm.	14	3	24	9	11	6	36	10
K4: Arg. Lücke	23	47	22	17	24	40	30	14
K5: Vollst. Arg.	31	32	5	11	58	44	20	38
Summe	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabelle 89: Ergebnisse bzgl. der vier Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14 und 2014/15 in Prozent (Alle)

Bei den Ergebnissen zum generischen Beweis mit Punktmustern zeichnet sich insgesamt ein problematischer Umgang der Studierenden mit dem Diagramm der Punktmuster ab. Auffällig ist zunächst der relativ hohe Anteil von Pseudobearbeitungen [K2] mit 14% und fragmentarischen Argumentationen [K3] mit 36%. In der Hälfte alle Fälle wurde eine sinnvolle Argumentation konstruiert [K4+K5] und insgesamt konnten lediglich 20% der Beweise als vollständige Argumentationen gewertet werden [K5]. Ähnlich verhält es sich bei dem Beweis mit geometrischen Variablen. Hier liegt mit 34% der höchste Anteil von Pseudobearbeitungen vor und noch 10% der Bearbeitungen sind nur als fragmentarisch zu bezeichnen. Auch hier werden nur in gut der Hälfte der Fälle (52%) sinnvolle Argumentationen konstruiert [K4+K5] und nur 38% der Studierenden erreichen eine vollständige Argumentation [K5]. Somit sind die Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen im Diagrammsystem der Punktmuster als insgesamt enttäuschend zu bezeichnen, da es sich hierbei um eine relative leichte Beweisaufgaben handelt, die durch entsprechende Übungsaufgaben über die Betrachtung verschiedener Summen aufeinander folgender Zahlen vorbereitet wurde.

Zu den formalen Beweisen im Wintersemester 2014/15 kann positiv angemerkt werden, dass in 84% aller Bearbeitungen sinnvolle Argumentationen angeführt werden [K4+K5]. Insgesamt gelingt knapp der Hälfte der Studierenden (44%) eine vollständige Argumentation [K5].

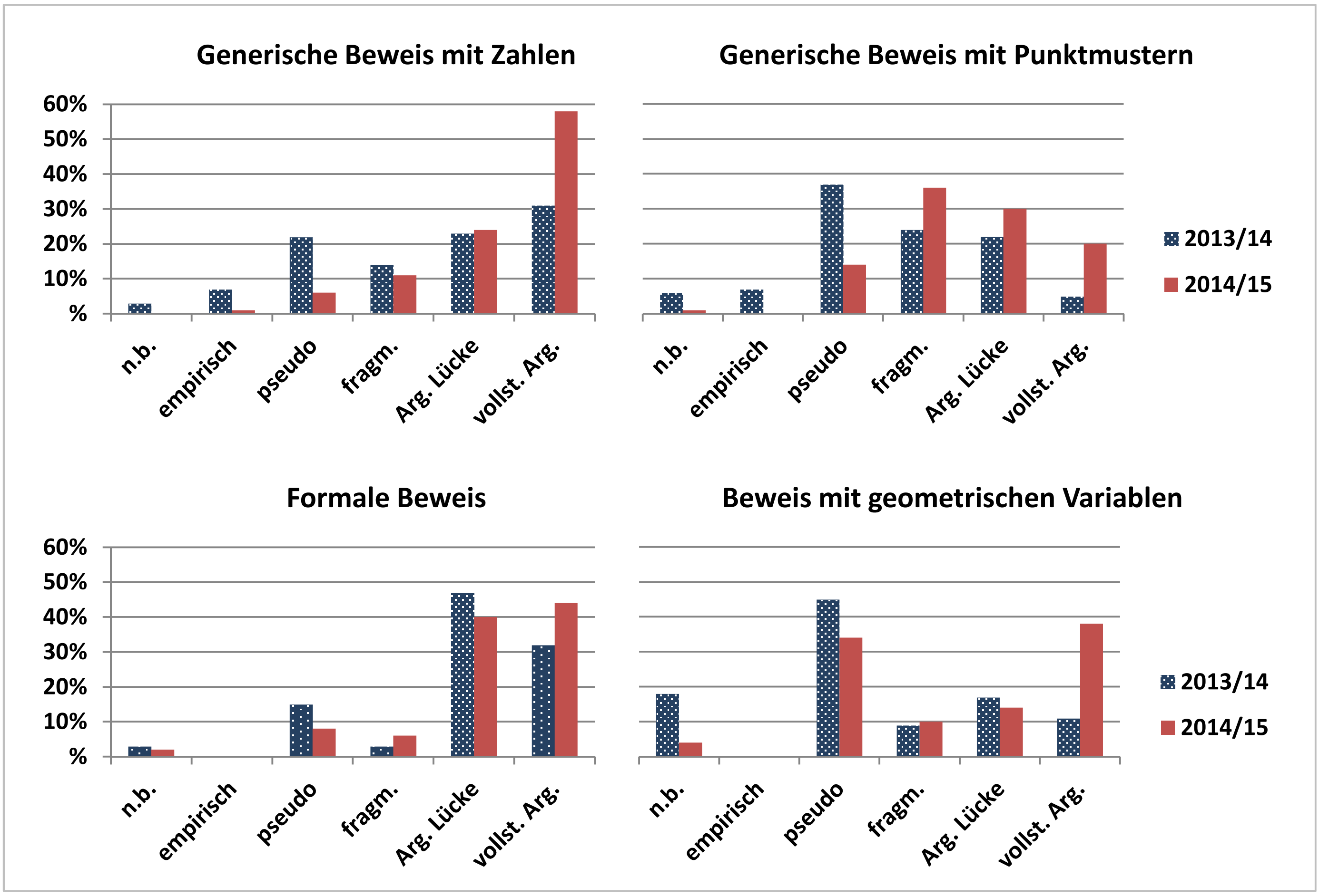


Abbildung 91: Ergebnisse bzgl. der vier Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur im Wintersemester 2013/14 (n=139) und 2014/15 (n=107) in Prozent (Alle)

a) *Inwiefern unterscheiden sich diese Ergebnisse von denen aus dem Vorjahr?*

Im Fall des generischen Beweises mit Zahlen ist ein deutlicher Anstieg des Anteils der vollständigen Argumentationen vom Wintersemester 2013/14 von 31% auf 58% im Wintersemester 2014/15 zu verzeichnen. Dagegen ist der Anteil von rein empirischen Bearbeitungen von 7% auf 1% gesunken, wie auch der Anteil von Pseudobearbeitungen von 22% auf 6%. Insgesamt kann an dieser Stelle also eine deutliche Hinwendung zu sinnvollen Beweiskonstruktionen festgestellt werden (vgl. Abbildung 91). Auch bzgl. des generischen Beweises mit Punktmustern haben sich die Ergebnisse im Vergleich zum Vorjahr verbessert. Während der Anteil von Pseudobearbeitungen von 37% auf 14% gefallen ist, steigt der Anteil der Argumentationen mit Lücke von 22% auf 30% und der vollständiger Argumentationen von 5% auf 20%. Auch hier ist eine deutliche Rechtsverschiebung der Verteilung erkennbar (Abbildung 91). Ein deutlicher Zuwachs der Bearbeitungen mit vollständigen Argumentationen kann auch bzgl. des Beweises mit geometrischen Variablen verzeichnet werden (Wintersemester 2013/14: 11% und Wintersemester 2014/15: 38%). Auffällig sind hierbei der Rückgang der Pseudobearbeitungen von 45% auf 34% und der Anteil der nicht bearbeiteten Aufgaben von 18% auf 4%. Die Studierenden scheinen im Wintersemester 2014/15 deutlich besser mit Punktmustern umgehen zu können, als dies im Vorjahr der Fall war. Wenige Änderungen zeigen sich dagegen bei den Bearbeitungen zum formalen Beweis. Doch ist auch bei dieser Beweisform der Anteil der vollständigen Argumentationen von 32% (Wintersemester 2013/14) auf 44% (Wintersemester 2014/15) leicht gestiegen.

Doch müssen an dieser Stelle einige Relativierungen der erhaltenen Ergebnisse formuliert werden. Zunächst ist die Kohorte im Wintersemester 2014/15 ein andere als im Vorjahr. Über die Vergleichbarkeit dieser zwei Kohorten kann an dieser Stelle keine Aussage getroffen werden. Somit können diese Ergebnisse nicht eins-zu-eins vergleichen werden. Auch muss bei diesen Betrachtungen berücksichtig werden, dass in der Kohorte des Wintersemesters 2014/15 auch 27 Studierende enthalten sind, die die Veranstaltung bereits einmal besucht haben. Doch auch wenn keine strengen Vergleiche angebracht sind, so werden durch die Ergebnisse doch Tendenzen der Entwicklung deutlich.

b) *Inwiefern lassen sich Zusammenhänge zwischen den Beweiskonstruktionen der Studierenden ausmachen?*

Im Folgenden werden die Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden jeweils als ordinalskaliert mit den Ausprägungen 0 bis 5 interpretiert, nicht bearbeitete Aufgaben werden dabei als fehlende Werte betrachtet. Mit dieser Interpretation der Daten können weiterführende Korrelationsberechnungen durchgeführt werden. Dabei interessieren zunächst die *Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen bzgl. der Beweiskonstruktionen untereinander.* In der Tabelle 90 werden die Korrelationen zwischen den Beweiskonstruktionen für die Gesamtgruppe aufgeführt.

			GenZ	FB	GenP	GV	AB_Aff_Bew	Selbstwirk_Bew
Spearman-Rho	GenZ	Korrelationskoeff.	1,000	,190	,419**	,166	,325**	,260*
		Sig. (2-seitig)	.	,053	,000	,095	,006	,030
		N	107	105	106	103	70	70
	FB	Korrelationskoeff.	,190	1,000	,369**	,327**	,120	-,003
		Sig. (2-seitig)	,053	.	,000	,001	,329	,982
		N	105	105	104	101	68	68
	GenP	Korrelationskoeff.	,419**	,369**	1,000	,413**	,358**	,202
		Sig. (2-seitig)	,000	,000	.	,000	,003	,095
		N	106	104	106	103	69	69
	GV	Korrelationskoeff.	,166	,327**	,413**	1,000	,295*	,051
		Sig. (2-seitig)	,095	,001	,000	.	,015	,682
		N	103	101	103	103	67	67
	AB_Aff_Bew	Korrelationskoeff.	,325**	,120	,358**	,295*	1,000	,329**
		Sig. (2-seitig)	,006	,329	,003	,015	.	,004
		N	70	68	69	67	74	74
	Selbstwirk_Bew	Korrelationskoeff.	,260*	-,003	,202	,051	,329**	1,000
		Sig. (2-seitig)	,030	,982	,095	,682	,004	.
		N	70	68	69	67	74	74

Tabelle 90: Korrelationstabelle bzgl. der Zusammenhänge der Beweiskonstruktionen in der Modulklausur [GenZ, FB, GenP und GV] und der Skalen zur Beweisaffinität [AB_Aff_Bew] und zur Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen aus der Ausgangsbefragung [Selbstwirk_Bew] (Alle); „“: Die Korrelation ist auf dem 1%-Niveau statistisch signifikant (zweiseitig), „*“: Die Korrelation ist auf dem 5%-Niveau statistisch signifikant (zweiseitig)**

In der Gesamtgruppe liegt ein mittlerer Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der beiden *generischen Beweise* (r_s=0,419) vor, wie auch zwischen den beiden Punktmusterbeweisen (r_s=0,413), die auf dem 1%-Niveau statistisch signifikant sind. Die Ergebnisse zum *formalen Beweis* korrelieren in der Gesamtgruppe mit denen zum generischen Beweis mit Punktmustern (r_s=0,369) und denen zum Beweis mit geometrischen Variablen (r_s=0,327) statistisch signifikant auf dem 1%-Niveau. Die Korrelation zu den Ergebnissen des generischen Beweises mit Zahlen fällt dagegen deutlich schwächer aus (r_s=0,019) und ist noch schwach signifikant auf dem 7%-Niveau.

Diese Ergebnisse könnten dahingehend interpretiert werden, dass eine übergeordnete Kompetenz für die Konstruktion generischer Beweise und für den Umgang mit dem Diagrammsystem der Punktmuster existieren könnte. Diese Interpretation sei an dieser Stelle aber ausdrücklich als These verstanden, die im Rahmen weiterer Forschungsprojekte überprüft werden müsste.

c) *Inwiefern lassen sich Zusammenhänge zwischen den Beweiskonstruktionen der Studierenden und den in der Ausgangsbefragung erhobenen Skalen zur „Beweisaffinität" und zur „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen" ausmachen?*

Bzgl. der Skala zur Beweisaffinität [AB_Aff_Bew] liegt in der Gesamtgruppe ein mittlerer Zusammenhang zu den Ergebnissen des generischen Beweises mit Zahlen (r_s=0,325) und des generischen Beweises mit Punktmustern (r_s=0,358) vor, die jeweils auf dem 1%-Niveau statistisch signifikant sind. Des Weiteren ergibt sich ein mittlerer Zusammenhang dieser Skala zu den Ergebnissen des Beweises mit geometrischen Variablen (r_s=0,295), der auf dem 5%-Niveau statistisch signifikant ist.

Die Skala zur Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen korreliert ausschließlich mit den Ergebnissen zum generischen Beweis mit Zahlen (r_s=0,295), dieser leichte Zusammenhang ist auf dem 5%-Niveau statistisch signifikant.

Hier zeigt sich, dass die Beweisaffinität der Studierenden in einem größeren Zusammenhang zu ihren Fähigkeiten einen Beweis zu stehen scheint, als in ihrer Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen. Dabei ist doch überraschend, dass fast keine Zusammenhänge zwischen der erhobenen Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden und ihren Beweiskonstruktionen auszumachen sind. Eine Erklärung könnte hierfür sein, dass bei der Konstruktion der Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen ein breiteres Spektrum rund um die Thematik des Beweisens abgefragt wurde (vgl. Abschnitt 3.3.12) und bei diesen Aufgaben nur punktuelle Beweiskonstruktionen gefordert waren. Auch wäre es denkbar, dass eine Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen getrennt nach den vier Beweisformen erhoben werden müsste.

7.5 Retrospektive Analyse der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Die retrospektive Analyse der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" entspricht der retrospektiven Analyse des letzten in dieser Arbeit thematisierten Forschungszyklus' des vorliegenden Design-Based Research Projekts. Die Umsetzung der in Abschnitt 1.3 herausgearbeiteten Leitprinzipien für die Konstruktion der Lehrveranstaltung wurde bereits in Abschnitt 6.2 ausführlich anhand der Inhalte der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung dargestellt. Für die retrospektive Analyse der vierten Durchführung verbleibt somit die Diskussion der ‚Effektivität' der Lehrveranstaltung anhand der bisher in Kapitel 7 dargestellten empirischen

Ergebnisse. Für die Diskussion der ‚Effektivität' sind dabei die Fragen leitend, die sich aus den in Abschnitt 1.3 formulierten Leitprinzipien ergeben, die mithilfe empirischer Ergebnisse beantwortet werden müssen:

1.) Inwiefern wurde die Lehrveranstaltung ihrem Anspruch gerecht, die fachmathematische Symbolsprache sinnstiftend einzuführen und für ihre Verwendung zu werben?
2.) Inwiefern werden die Studierenden dazu befähigt, mit nichtsymbolischen Darstellungen umzugehen?
3.) Inwiefern kann im Rahmen der Lehrveranstaltung den Studierenden der Prozesscharakter der Mathematik verdeutlicht werden?
4.) Inwiefern hat die Lehrveranstaltung dazu beigetragen, bei den Studierenden ein ‚adäquates Beweisverständnis' auszubilden?

Zum Abschluss des Kapitels wird eine kurze Zusammenfassung der retrospektiven Analyse gegeben.

7.5.1 Zu dem Aspekt der sinnstiftenden Vermittlung der fachmathematischen Symbolsprache durch die Lehrveranstaltung

Im Rahmen des in Kapitel 1 der Lehrveranstaltung initiierten ‚Forschungsprozesses' über die Teilbarkeit der Summen aufeinanderfolgender Zahlen wurde es möglich, die fachmathematische Symbolsprache derart einzuführen, dass die verschiedenen Vorteile dieses Mediums in den Vordergrund gerückt werden konnten: (i) Allgemeingültigkeit auszudrücken, (ii) allgemeine Zusammenhänge zu kommunizieren, (iii) Zusammenhänge weiter zu erforschen und (iv) Beweise zu konstruieren (Malle 1993, S. 6ff.; Mason et al. 2005, S. 1ff.). Auch im Kontrast zu der Beweisform des generischen Beweises, bei deren Konstruktion die Explizierung der Allgemeingültigkeit der Begründung verlangt wurde, sollte die Vorteile der Symbolsprache weiter erfahren werden. Schließlich wurden verschiedene Aufgabenformate in die Lehrveranstaltung integriert, in denen die Studierenden allgemeine Zusammenhänge (etwa zwischen verschiedenen figurierten Zahlen) ausfindig machen und mithilfe der Symbolsprache formulieren sollten. Auch hierdurch sollte der Nutzen des Mediums betont werden.

In Abschnitt 7.3.4 (iii) konnte gezeigt werden, dass sich die Einstellungen der Studierenden zur Nutzung von Buchstabenvariablen und zum formalen Beweisen nach eigenen Angaben durch die Lehrveranstaltung deutlich verbessert haben; beiden Aussagen wird in der Ausgangsbefragung mit einem Median von 5 deutlich zugestimmt. Darüber hinaus konnte im Kontext der „Bewertung von Beweisen" in Abschnitt 7.3.2.1 herausgearbeitet werden, dass sich der Begründungsansatz der Studierenden nach eigenen Angaben von der Ein- zur Ausgangsbefraung statistisch hoch signifikant zur Nutzung von Buchstabenvariablen hinwendet. Dieses Ergebnis spiegelt sich auch in den durch die Studierenden angegebenen Beweispräferenzen: Für die Eigenkonstruktion von Beweisen wird der formale Beweis von 64,7% der Studierenden den anderen Beweisformen der Lehrveranstaltung vorgezogen, für das Verstehen eines Beweises von 50% der Studierenden. Diese anhand von Selbstauskünften der Studierenden erhaltenen Resultate konnten durch die vergleichende Analyse der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" aus der Eingangsbefragung und der Modulabschlussklausur gestützt werden. Während in der Eingangsbefragung nur 16,1% der Studierenden Buchstabenvariablen für die Konstruktion ihrer Begründung verwendeten, steigt der Anteil in der Modulabschlussklausur auf 85,9%. Als Ergebnis kann somit formuliert werden, dass den Studierenden die fachmathematische Symbolsprache als ein sinnvolles Arbeits- und

Kommunikationsmedium der Mathematik bewusst geworden ist, womit dieses Ziel der Lehrveranstaltung erreicht worden ist.

7.5.2 Zur Befähigung der Studierenden im Umgang mit nichtsymbolischen Darstellungen

Im Rahmen der Lehrveranstaltung sollten die Studierenden einen verständigen Umgang mit Punktmusterdarstellungen erreichen. Aus semiotischer Perspektive wird dabei das Diagrammsystem der Punktmuster betrachtet, für dessen Nutzung ein Wissen um den Umgang mit diesem Diagrammsystem notwendig ist (vgl. Abschnitt 2.5). Die Studierenden sollten dabei Punktmusterdarstellungen verwenden, um generische Beweise mit Punktmustern und Punktmusterbeweise mit geometrischen Variablen zu konstruieren. Betrachtet man allerdings die Ergebnisse bzgl. der entsprechenden Beweiskonstruktionen in der Modulabschlussklausur zur vierten Durchführung der Lehrveranstaltung, so wird deutlich, dass nur etwa die Hälfte der Studierenden Punkmusterdarstellungen als mathematisches Arbeitsmittel nutzen können. Im Falle des generischen Beweises mit Punktmustern formulieren überhaupt nur 50% der Studierenden Argumentationen [„Argumentationen mit Lücke“ und „vollständige Argumentation“], von denen 20% als vollständig gewertet werde konnten. Bei dem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen liegt der Anteil von Argumentationen insgesamt bei 52%, eine vollständige Argumentation gelingt 38%. Es ist an dieser Stelle nicht möglich aufzuklären, bzgl. welcher Aspekte von Punktmusterdarstellungen bei den Studierenden Probleme vorliegen. Insgesamt scheint die Verwendung von Punktmusterdarstellungen als mathematisches Arbeitsmittel (im Sinne eines Diagrammsystems bei Peirce) den Studierenden doch größere Probleme zu bereiten, als dies vorherzusehen war. Es muss an dieser Stelle festgestellt werden, dass das Ziel der Befähigung der Studierenden im Umgang mit diesen nichtsymbolischen Darstellungen nicht in dem Maße erreicht wurde, wie es durch die Lehrveranstaltung intendiert gewesen war.

7.5.3 Zur Verdeutlichung des Prozesscharakters der Mathematik

Für die Erfassung der Bewusstheit der Studierenden über die Prozesshaftigkeit der Mathematik wurden in der Ein- und Ausgangsbefragung die Einstellungen der Studierenden zur Mathematik erhoben. Von der Ein- zur Ausgangsbefragung zeigte sich dabei ein statistisch hoch signifkanter Anstieg bzgl. der Einstellung zur „Mathematik als Prozess“ bei kleiner Effektstärke (EB: 4,42; AB: 4,70; T-Test, p=0,009 mit Cohens d=0,34). Das Bewusstsein der Studierenden über die Prozesshaftigkeit hat sich demnach statistisch signifikant gesteigert. Da diese Skala in der Eingangsbefragung bei der Gruppe der hier betrachteten nachverfolgbaren Studierenden allerdings nur einen Reliabilitätswert von Cronbachs Alpha=0,555 erreicht, kann dieses Ergebnis in diesem Rahmen nur als Indiz für das Gelingen dieser Zielsetzung der Lehrveranstaltung betrachtet werden. Weitere Untersuchungen wurden in Bezug auf diese Zielsetzung nicht vorgenommen.

7.5.4 Zu der Herausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses durch die Lehrveranstaltung

Unter dem Konstrukt ‚adäquates Beweisverständnis‘ wird zunächst das Vorhandensein der Teilkompetenzen der in Abschnitt 7.2.4 herausgearbeiteten Aspekte von Beweiskompetenz (Beweiskonstruktion, Beweisbewertung und Beweisakzeptanz) verstanden. Dabei muss sich ein entsprechendes Verständnis an einem Wissen um die (epistemologische) Bedeutung von mathematischen Beweisen messen lassen, welches sich im Wissen um die Bedeutung der Besonderheit mathematischen Wissens (im Sinne von Allaussagen) und der Bewusstheit über die verschiedenen Funktionen von Beweisen manifestiert (vgl. Abschnitt 2.1.6 und 2.1.7)[84]. In diesem Kontext sollen schließlich auch die subjektiven motivationalen Einstellungen der Studierenden zum Beweisen betrachtet werden.

Im Rahmen der Teilstudie 3 (Abschnitt 7.4.3) konnte gezeigt werden, dass sich die **Begründungskompetenzen** der Studierenden durch die Lehrveranstaltung deutlich verbesserten: Erreichten in der Eingangsbefragung nur 15,9% der Studierenden eine „vollständige Argumentation" bei der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen", lag dieser Anteil bei der gleichen Aufgabenstellung in der Modulabschlussklusur bei 52,3%. Waren in der Eingangsbefragung in nur 42,1% der Bearbeitungen überhaupt korrekte Argumentationsansätze vorhanden [„Argumentation mit Lücke" und „vollständige Argumentationen"], betraf dies 91,6% in der Klausur (s. Abschnitt 7.4.3.1). In Bezug auf die Konstruktion der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und der formale Beweis) wurde deutlich, dass den Studierenden ein verständiger Umgang mit generischen Beweisen und formalen Beweisen im Allgemeinen gelingt, wobei Probleme im Umgang mit Variablen die Beweiskonstruktionen der Studierenden zum formalen Beweisen schmälern. Auf die Probleme der Studierenden bei der Konstruktion von Beweisen mit Punktmustern wurde bereits oben eingegangen. Allerdings muss erwähnt werden, dass die Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur des Wintersemesters 2014/15 deutlich besser ausfielen als im Vorjahr (s. Abschnitt 7.4.3.2). Insgesamt wurden die Studierenden durch die Lehrveranstaltung dazu befähigt, korrekte Begründungen zu formulieren und verschiedene Beweise bzw. Beweisformen zu konstruieren. Dass dabei bessere Ergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktionen der Studierenden durch die Lehrenden erhofft waren, verbleibt dabei als kleiner Makel der Resultate.

Bei den **Beweisbewertungen** der Studierenden zeigte sich, dass der Anteil der Bewertung bloßer Beispiebetrachtungen als „richtiger Beweis" statistisch hoch signifikant von 17,6% bei der Eingangsbefragung auf 5,4% bei der Ausgangsbefragung zurückging (Abschnitt 7.3.2.1). Den Studierenden ist somit bewusst geworden, dass bloße Beispielüberprüfungen keinen richtigen Beweis konstituieren. Auch wurde der formale dargestellte und falsche Beweis in der Ausgangsbefragung nur noch von 13,5% der Studierenden als richtiger Beweis gewertet, in der Eingangsbefragung lag der Anteil bei 27%. Dieser Unterschied ist dabei mit p=0,078 nicht statistisch signifikant (McNemar-Test).

In Bezug auf die **Beweisakzeptanz** wurde in der Ausgangsbefragung deutlich, dass die Studierenden nach Besuch der Lehrveranstaltung die Allgemeingültigkeit generischer Beweise nun statistisch hoch signifikant besser bewerten als in der Eingangsbefragung. In der Ausgangsbefragung werden diese Beweise nun nicht mehr als singuläre Beispielüberprüfungen fehlinterpretiert, die Mehrheit der Studierenden stimmt dagegen den Aspekten der Sicherung der Gültigkeit, der Verifikation der Behauptung und der Gültigkeit als ‚korrekter Beweis' zu. Diese Entwicklung spiegelt sich auch in den Akzeptanzbewertungen für den Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen wider. Der formale Beweis wurde bereits in der Eingangsbefragung sehr hoch bewertet, weswegen keine wesentlichen Entwicklungen von der Ein- zur Ausgangsbefragung ausgemacht werden konnten.

[84] In diesem Kontext wäre sicherlich auch eine qualitative Studie zur Beschreibung des ‚Beweisbedürfnisses' der Studierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung gewinnbringend gewesen. Eine entsprechende Untersuchung wurde allerdings nicht durchgeführt.

Auf der Basis dieser Ergebnisse kann zusammenfassend festgehalten werden, dass sich bei den Studierenden die verschiedenen hier betrachteten Kompetenzen im Umgang mit Beweisen (Begründungskompetenz, Beweisbewertung und Beweisakzeptanz) verbessert haben.

Insbesondere stellt sich die Frage, ob den Studierenden die Besonderheit mathematischen Wissens als Allaussage über Objekte bewusst geworden ist und sie vor diesem Hintergrund die (epistemologische) Bedeutung mathematischer Beweise überhaupt verstehen können (vgl. Abschnitt 2.1.6). Es war ein zuvor dargestelltes Ergebnis, dass die Studierenden in der Ausgangsbefragung zu 94,6% bloße Beispielbetrachtungen als korrekten Beweis ablehnen. Bei den studentischen Bewertungen der verschiedenen Akzeptanzitems in der Ausgangsbefragung zeigt sich, dass die Studierenden die positiven Akzeptanzaspekte (Sicherung der Gültigkeit etc.) jeweils konträr zu den Items bewerten, die die Fehlinterretation als singuläre Beispielüberprüfungen thematisieren (Abschnitt 7.3.2.2). Vor diesem Hintergrund kann nun begründet die These formuliert werden, dass den Studierenden die Bedeutung mathematischer Allaussagen bewusst geworden ist, die für ihre Verifikation nach einem allgemeingültigen Beweis verlangen, da singuläre Beispielüberprüfungen keine Allaussage zu verifizieren vermögen. In Bezug auf die Funktionen von Beweisen konnte durch die aktuelle und retrospektive Einschätzung der Studierenden über ihre Fähigkeit, verschiedene Funktionen anhand konkreter Beweiskonstruktionen zu verdeutlichen, ein selbst empfundener Lernzuwachs bei den Studierenden herausgearbeitet werden (s. Abschnitt 7.3.4). Es kann somit festgehalten werden, dass die Studierenden der Ansicht sind, durch die Lehrveranstaltung in Bezug auf die verschiedenen Funktionen von Beweisen einen Kompetenzzuwachs erhalten zu haben.

In Bezug auf die subjektiven motivationalen Einstellungen der Studierenden konnte im Vergleich der Ergebnisse der Ein- und Ausgangsbefragung eine Hinwendung zum Beweisen festgestellt werden. Bei der konstruierten Skala zur „Beweisaffinität“ konnte ein statistisch hoch signifikanter Mittelwertanstieg bei kleiner Effektstärke verzeichnet werden (EB: 4,0; AB: 4,27; T-Test, p=0,018 mit Cohens d=0,3; vgl. Abschnitt 7.3.3.2). Diesem Ergebnis entspricht auch der hohe Mittelwert von 5,09, den Studierende auf der Skala „der Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ in der Augsangsbefragung erreichen (vgl. Abschnitt 7.3.4). Allerdings konnte ein statistisch signifikanter Zusammenhang zwischen dieser Selbsteinschätzung der Studierenden und ihren Beweiskonstruktionen, interpretiert als ordinalskalierte Variable, nur für den Fall des generischen Beweises ausgemacht werden (r_s =0,259 mit p=0,032; vgl. Abschnitt 7.5.2). Hier stellt sich die Frage, ob die Studierenden vielleicht nicht in der Lage sind, ihre eigenen Fähigkeiten passend einzuschätzen, oder ob sie ggf. die Ansprüche der Bewertung ihrer Beweiskonstruktionen so nicht teilen. Diese Frage kann an dieser Stelle jedoch nicht beantwortet werden.

In Bezug auf die Herausbildung eines adäquaten Beweisverständnisses kann schließlich formuliert werden, dass dem Großteil der Studierenden (58% bzw. 44%) nach dem Besuch der Lehrveranstaltung die Konstruktion des generischen Beweises mit Zahlen bzw. des formalen Beweises vollständig gelingt. Probleme im Umgang bzw. im Verständnis mit dem Diagrammsystem der Punktmuster scheint ein Gelingen entsprechender Beweiskonstruktionen in diesem Diagrammsystem zu verhindern. Durch die Betrachtung der Ergebnisse der Begründungsaufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ konnte dabei der große Kompetenzzuwachs der Studierenden ausgemacht werden. Bei der Bewertung von Beweisen wurde deutlich, dass den Studierenden durch die Lehrveranstaltung bewusst geworden ist, dass bloße Beispielüberprüfungen keine mathematischen Beweise für Allaussagen konstituieren, und im Rahmen der Untersuchungen zur Beweisakzeptanz konnte festgestellt werden, dass die Mehrheit der Studierenden in der

Ausgangsbefragung in der Lage zu sein scheint, das allgemeingültige Moment in generischen Beweisen zu verstehen und zu würdigen. Nach Angabe der Studierenden empfanden diese einen großen Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen allgemein durch die Lehrveranstaltung und in Bezug auf die verschiedenen Funktionen von Beweisen im Speziellen. Schließlich hat sich im Laufe der Lehrveranstaltung die „Beweisaffinität" der Studierenden gesteigert. Vor diesem Hintergrund kann abschließend die These formuliert werden, dass die Lehrveranstaltung dazu beigetragen hat, ein adäquates Beweisverständnis bei den Studierenden herauszubilden.

7.5.5 Fazit der retrospektiven Analyse

Vor dem Hintergrund der konzeptionellen Umsetzung der in Abschnitt 1.3 herausgearbeiteten Leitprinzipien, wie sie in Abschnitt 6.2 dargestellt wurde, und der in den Abschnitten 7.5.1–7.5.4 dargelegten empirischen Ergebnisse in Bezug auf die Zielsetzungen der Lehrveranstaltung kann nun formuliert werden, dass die vierte Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15 erfolgreich gewesen ist. Allerdings muss kritisch angemerkt werden, dass die Beweiskonstruktionen der Studierenden in der Modulabschlussklausur dieses Wintersemesters nicht den Hoffnungen der Lehrenden gerecht wurden, gerade was die Beweiskonstruktionen der Studierenden mithilfe von Punktmusterdarstellungen betrifft. Aus diesem Grund bleibt zunächst anzumerken, dass die Thematik ‚Begründen und Beweisen' als Herausforderung für den Übergang Schule-Hochschule verbleibt. Die vorliegende Forschungsarbeit versteht sich dabei als ein exemplarischer Lösungsvorschlag für das Angehen dieses Problemfelds für die Adressatengruppe der Lehramtsstudierenden, der theoretisch fundiert und empirisch evaluiert ist.

Es verbleibt, das Forschungsprojekt in Gänze zu reflektieren und die erhaltenen (theoretischen und empirischen) Erkenntnisse in das bestehende Feld der mathematikdidaktischen Forschung einzugliedern. Diese Anliegen werden abschließend im achten Kapitel betrachtet.

8. Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

Das übergeordnete Ziel der vorliegenden Arbeit wurde zu Beginn wie folgt formuliert:

Die forschungsbasierte (Weiter-) Entwicklung einer Lehrveranstaltung, welche den Studierenden den Übergang von der Schulmathematik in die Mathematik der Hochschule erleichtern soll und hierbei in einem besonderen Maße das Themenfeld „Begründen und Beweisen" unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität fokussiert.

Für die Beantwortung der mit der Zielformulierung verbundenen Forschungsfrage [1] („Wie kann im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende (Haupt-, Real- und Gesamtschule) der Themenbereich ‚Begründen und Beweisen' vor dem Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität adäquat vermittelt werden?") wurden drei weitere Forschungsziele angegeben (vgl. Abschnitt 1.4.1):

(i) Die Entwicklung von Testinstrumenten, welche die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden ermöglichen.
(ii) Die Erforschung der Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen von Studierenden zu Beginn des Studiums (bzw. zu Beginn der Lehrveranstaltung).
(iii) Die Erforschung der Auswirkungen der Lehrveranstaltung auf die Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen der Teilnehmenden.

Am Ende dieser Bemühungen soll ein Beitrag für die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie für die Domäne ‚Begründen und Beweisen' für Studienanfängerinnen und -anfänger des Lehramts (für Haupt-, Real- und Gesamtschule) im Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität geleistet werden.

In dem achten Kapitel dieser Arbeit wird das Erreichen der formulierten Zielsetzungen anhand der erzielten Ergebnisse diskutiert. Dabei werden die Resultate in drei Bereiche unterteilt: Ergebnisse der Design-Forschung und der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen' (Abschnitt 8.1), empirische Ergebnisse (Abschnitt 8.2) und Beiträge zur Theoriebildung und Theorieentwicklung (Abschnitt 8.3). Schließlich gilt es, das vorgenommene Forschungsprojekt und die erhaltenen Ergebnisse anhand der in Abschnitt 3.2 herausgearbeiteten Gütekriterien kritisch zu diskutieren (Abschnitt 8.4) und Perspektiven für die weitere Forschung aufzuzeigen (Abschnitt 8.5).

8.1 Ergebnisse der Design-Forschung und der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen'

Die übergeordnete Forschungsfrage [1] dieser Forschungsarbeit ist:

> *„Wie kann im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende (Haupt-, Real- und Gesamtschule) der Themenbereich ‚Begründen und Beweisen' vor dem Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität adäquat vermittelt werden?"*

Diese Forschungsfrage wurde im ersten Kapitel dieser Arbeit motiviert und in die aktuelle hochschuldidaktische Diskussion eingebettet. Aufgrund der verwendeten Forschungsmethode des Design-Based Research (vgl. Kapitel 3) wird diese Frage durch die Darstellung des herausgearbeiteten Beitrags zu der Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie für die Domäne ‚Begründen und

Beweisen‘ für Studienanfänger des Lehramts (für Haupt-, Real- und Gesamtschule) beantwortet. Dieser Beitrag ergibt sich als Summe der im Kontext der retrospektiven Analysen der verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung gewonnenen Erkenntnisse, gleichsam als empfohlene Designprinzipien. Für die retrospektiven Analysen der verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltungen waren dabei die Theorien „Beweisen als diagrammatisches Schließen“ und „Sozio-mathematische Normen“ leitend. Diese beiden theoretischen Ebenen wurden dabei durch die dritte Diskussionsebene der ‚Mathematischen Inhalte‘ ergänzt. Diese drei Betrachtungsebenen werden im Folgenden weitergeführt, weshalb der Beitrag zu der lokalen Instruktionstheorie geteilt in die Bereiche „Mathematische Inhalte“, „Semiotische Aspekte“ und „Aspekte sozio-mathematischer Normen“ dargestellt wird. Das in dieser Arbeit erarbeitete Designprodukt der ersten beiden Kapitel der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ wurde in Abschnitt 6.2 erörtert, eine Verschriftlichung dieser Kapitel befindet sich im Anhang. Zu den erhaltenen Designergebnissen dieser Arbeit zählt darüber hinaus die in der Zielformulierung (i) geforderte Entwicklung von Testinstrumenten, welche die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden ermöglichen. Dieses Designergebnis wird am Ende dieses Abschnitts dargestellt.

8.1.2 Der Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ – die Formulierung von Designprinzipien

In Weiterführung der die retrospektiven Analysen der vier Forschungszyklen leitenden Aspekte „Mathematische Inhalte“, „Semiotische Aspekte: Beweisen als diagrammatisches Schließen“ und „Aspekte sozio-mathematischer Normen“ werden auch die herausgearbeiteten Designprinzipien getrennt nach diesen drei Bereichen dargestellt.

Designprinzipien bzgl. „Mathematischer Inhalte“:

1. *Unter dem Gesichtspunkt der doppelten Diskontinuität gilt es, einerseits schulisches Vorwissen zum Begründen und Beweisen aufzugreifen und weiterzuführen, andererseits Begründungs- und Beweisformen zu vermitteln, mit denen die Studierenden als spätere Lehrkräfte im schulischen Mathematikunterricht agieren können. Innerhalb des Ausbildungsabschnitts an der Universität muss es jedoch auch gelten, das Beweisen den Studierenden als spezifische und charakteristische Arbeitsweise der Mathematik ‚intellektuell-ehrlich‘ zu vermitteln.*

   Diese Forderung ergibt sich zunächst aus der Verbindung der in Abschnitt 1.3 herausgearbeiteten Leitprinzipien aus dem Phänomen der doppelten Diskontinuität und der hier fokussierten Thematik ‚Begründen und Beweisen‘. Die Frage nach dem schulischen Vorwissen der Erstsemesterstudierenden in Bezug auf das Begründen und Beweisen wurde im Rahmen der Effektivitätsstudie der Lehrveranstaltung in Abschnitt 7.2 thematisiert. Dabei konnte herausgestellt werden, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger nur über marginale Vorerfahrungen zu der Thematik ‚Begründen und Beweisen‘ verfügen, die nur bedingt mit den Beweisaktivitäten an einer Hochschule vergleichbar sind (Abschnitt 7.2.3). Der Anschluss an schulisches Vorwissen scheint dabei vor allem in der Weiterführung algebraischer Ansätze zu liegen, da den Studierenden nach eigenen Angaben Beweisformen wie generische Beweise oder Beweise mit Punktmusterdarstellungen nicht aus ihrer Schulzeit bekannt sind (Abschnitt 7.2.3). Bei der Analyse einer Begründungsaufgabe konnte gezeigt werden, dass nur 8,5% der Erstsemesterstudierenden von algebraischen Ansätzen Gebrauch machen, die dabei häufig fehlerhaft sind (Abschnitt 7.2.4). Die Verwendung der

fachmathematischen Symbolsprache steht Erstsemesterstudierenden folglich nur bedingt als heuristisches Mittel der Verifikation zur Verfügung.
Für die Vermittlung schuladäquater Begründungsformen wurde in dieser Arbeit das Konzept der generischen Beweise herausgestellt (Abschnitt 2.1.3) und durch das Aufstellen expliziter Normen für den Unterricht fruchtbar gemacht (Abschnitt 6.2). Der Einbezug generischer Beweise ermöglichte es dabei einerseits, die Phase der Exploration und den Nutzen von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess zu betonen. Darüber hinaus kann gerade in der Thematisierung dieser Beweisform die Unzulänglichkeit singulärer Beispielüberprüfungen herausgestellt und im Vergleich zum formalen Beweis für die fachmathematische Symbolsprache sinnstiftend geworben werden (Abschnitt 6.2). Somit konnte ein Nutzen generischer Beweise für die Hochschullehre aufgezeigt werden, der über eine ‚bloße Hilfestellung' für das Erlernen der Beweisaktivität hinausgeht.

2. *Die Konstruktion von generischen Beweisen ist für Lernende keine triviale Tätigkeit und auch ein Verständnis um die Tragweite dieser Beweisform ist nicht unmittelbar gegeben. Dies bedeutet, dass entsprechende Beweisformen didaktisch gezielt und passend in einen größeren Rahmen mathematischer Arbeitsweisen eingebettet werden müssen, indem ihr Nutzen und eventuelle Vor- und Nachteile zur Geltung kommen und sinnstiftend erörtert werden können.*
   Bei der Beforschung der Lehrveranstaltung wurde zunächst deutlich, dass die Studierenden Probleme mit der Konstruktion generischer Beweise haben (Abschnitt 5.2.2.2, 5.3.2.1 und 5.3.2.4). Im Rahmen der Eingangsbefragung zu der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung konnte gezeigt werden, dass die Studierenden das allgemeine Moment generischer Beweise nicht wahrnehmen, im Gegenteil generische Beweise als singuläre Beispielüberprüfungen fehlinterpretieren (Abschnitt 7.2.4.3). Aus diesem Grund muss der Vermittlung generischer Beweise im unterrichtlichen Geschehen eine besondere Aufmerksamkeit zukommen. Es muss hierbei gelten, generische Beweise derart in mathematische Erkenntnisprozesse einzubinden, dass deren Vor- und Nachteile deutlich werden. In der hier thematisierten Lehrveranstaltung wurde dies dadurch erreicht, dass bei der Untersuchung konkreter Beispiele zunächst eine beispielübergreifende Erklärung für das Phänomen ausgemacht wurde, warum die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer durch drei teilbar ist. Dieses generische Moment wurde dann für die Konstruktion eines generischen Beweises verwendet und auf weitere Summen aufeinanderfolgender Zahlen übertragen (Abschnitt 6.2). Schließlich wurden verschiedene Aufgabenformate entwickelt, in denen bewusst die Vor- und Nachteile generischer Beweise in den Vordergrund gestellt wurden und in denen gezielt entsprechenden Fehlvorstellungen entgegengewirkt wurde (Abschnitt 5.4.1 und 6.3.2).

3. *Für eine sinnstiftende Vermittlung verschiedener Beweisformen und die Herausstellung des Prozesscharakters der Mathematik muss der Prozess der mathematischen Wissensgewinnung (Exploration - Vermutungen ausmachen, formulieren, überprüfen und ggf. verwerfen - Behauptungen aufstellen - Beweisen) im Kontext des Lehr-/Lernszenarios eine prominente Rolle spielen.*
   Mathematische ‚Forschungsprojekte' sollen sowohl in die Vorlesungen, als auch in die Präsenzübungen und Hausaufgaben integriert werden. Dabei geht es auch darum, dass in entsprechenden Einbettungen, vor dem Hintergrund einer gewissen Unsicherheit (Abschnitt

2.1.6), die verschiedenen Funktionen von Beweisen erfahrbar werden, was dabei als eine Voraussetzung für die Herausbildung eines Beweisbedürfnisses angesehen werden muss (Abschnitt 2.1.6 und 2.1.7).
Dieser Aspekt der sinnstiftenden Einbettung in Erkenntnisprozesse soll bei der Konstruktion von Aufgaben und der Besprechung entsprechender Lösungen bedacht werden. In der hier betrachteten Lehrveranstaltung wurden dazu entsprechende Aufgabenformate konstruiert (Abschnitt 5.4.1 und 6.3.2) und ein Konzept für die Besprechung von Musterlösungen im Rahmen einer Zentralübung erarbeitet (Abschnitt 6.3.3).

4. *Der Sinn mathematischer Arbeitsweisen (Verwendung adäquater Fachsprache, Formulierung und Nutzung exakter Definitionen und Sätze) muss im Rahmen der Lehrveranstaltung explizit thematisiert und erörtert werden.*
Die fachmathematische (Symbol-) Sprache ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Mathematik. Ihre Vorteile müssen den Lernenden erlebbar und damit nachvollziehbar gemacht werden: Nur wer die Vorteile dieser Sprache erlebt hat, kann sie auch zu würdigen wissen. Gleiches gilt für den axiomatisch-deduktiven Aufbau der Mathematik. Das mathematische Theoriegebäude erhält seine Legitimation auch durch seine Wechselbeziehung zum ‚formalen' Beweis, denn eine entsprechende Konzeption des formalen Beweises verlangt nach einer zumindest lokalen Ordnung der Inhalte. Es ist dieser in Abschnitt 2.1.6 herausgearbeitete Aspekt des ‚Beweisens von der Zukunft her', der das (formale) Beweisen im Rahmen einer mathematischen Theorie legitimiert und motiviert. Aus dieser engen Verzahnung von mathematischem Theoriegebäude und Konstrukt des formalen Beweises folgt, dass für eine Vermittlung dieser Beweisform auch die Besonderheit mathematischer Theoriebildung im Zusammenspiel von Definitionen, Sätzen und Beweisen verdeutlicht werden muss. Dies wurde in der vierten Durchführung der Lehrveranstaltung dadurch erreicht, dass alle notwendigen Definitionen und Sätze im Kontext der Lehrveranstaltung explizit formuliert und für die entsprechende Referenz in Beweisen strukturiert bzw. nummeriert wurden (Abschnitt 5.4.4). Definitionen wurden dabei als ‚hilfreiche Charakterisierungen' und Sätze als durch Beweise abgesichertes mathematisches Wissen verdeutlicht.

5. *Der Nutzen von Beispielbetrachtungen im mathematischen Erkenntnisprozess und deren potentielle Vor- und Nachteile müssen explizit erörtert werden.*
Es folgt bereits aus den in der Literatur aufgeführten Fehlvorstellungen zu der Bedeutung von Beispielen im Beweisprozess (Abschnitt 2.4.2), dass Beispielbetrachtungen im Kontext von Beweisen differenziert betrachtet werden müssen. Dabei kann die Bedeutung von Beispielbetrachtungen im gesamten mathematischen Erkenntnisprozess zunächst positiv gewürdigt werden, wobei auch auf deren Unzulänglichkeiten hingewiesen werden muss. In der Lehrveranstaltung wurde mit der Unterscheidung von psychologischen und logischen Aspekten ein deutlicher Schritt in diese Richtung gegangen: Beispielbetrachtungen können psychologisch die subjektive Überzeugung stärken, dass eine Behauptung wahr ist, logisch betrachtet ist es aber egal, ob man die Behauptung an weiteren Beispielen verifizieren konnte (Abschnitt 5.3.1). Der Nutzen, Mehrwert und die Grenzen von Beispielbetrachtungen müssen durch die Lernenden erfahren werden. Aus diesem Grund wurden neben der Thematisierung der psychologischen und logischen Bewertung von Beispielbetrachtungen in

der Lehrveranstaltung verschiedene Aufgabenformate entwickelt, durch die die Lernenden die verschiedenen Aspekte von Beispielbetrachtungen erfahren konnten (Abschnitt 5.4.1).

6. *Die verschiedenen Kompetenzaspekte, die Lernende im Kontext der Thematik des Beweisens herausbilden sollen, müssen in konkreten Aufgabenstellungen thematisiert und somit geübt werden.*
   Das Erlernen der Beweisaktivität beinhaltet verschiedene (Kompetenz-) Aspekte. Wie in Abschnitt 7.2.1 begründet dargelegt wurde, werden in dieser Arbeit unter Beweiskompetenz die Teilkompetenzen Beweiskonstruktion, Beweisbewertung und Beweisakzeptanz gefasst. Diesen verschiedenen Facetten von Beweiskompetenz gilt es im unterrichtlichen Geschehen gerecht zu werden und den Studierenden entsprechende Übungsmöglichkeiten bereitzustellen. In der Lehrveranstaltung wurden diese Aspekte im Kontext verschiedener Aufgabenformate aufgegriffen (Abschnitt 5.4.1) und im Rahmen der Vorlesung und der Zentralübung diskutiert.

Designprinzipien bzgl. der Theorie „Beweisen als diagrammatisches Schließen“

7. *Der Umgang mit einem Diagrammsystem muss zunächst als Lerngegenstand aufgefasst werden. Das Arbeiten in Diagrammsystemen muss daher geübt werden, damit sich das notwendige kollaterale Wissen auf Seiten der Lernenden herausbilden kann.*
   Mathematisches Beweisen setzt einen kompetenten Umgang mit entsprechenden Zeichen voraus. Peirce prägte für einen kompetenten Umgang mit Zeigen im Kontext eines bestimmten Zeichensystems (‚Diagrammsystems‘) den Begriff des kollateralen Wissens (s. Abschnitt 2.5). Dieses Wissen zeigt sich u.a. bei der Konstruktion eines Diagramms, dessen Verwendung, dem Vornehmen von Transformation und bei der richtigen Interpretation des schließlich erhaltenen Diagramms. Dieses kollaterale Wissen muss bei Lernenden ausgebildet und geübt werden. Dies betrifft sowohl ‚anschauliche‘ Diagrammsysteme wie Punktmuster wie auch die Symbolsprache der Algebra. Wichtig ist somit, dass Lernende entsprechende Möglichkeiten zur Übung erhalten, um kollaterales Wissen ausbilden und kompetent in den verschiedenen Diagrammen agieren zu können.

8. *Damit Lernende den Sinn und die Vor- und Nachteile verschiedener Beweisformen und verschiedener Diagrammsysteme erleben und somit verstehen können, müssen (Beweis-) Aufgaben gestellt werden, in denen die verschiedenen Beweisformen und Diagrammsysteme vergleichend verwendet werden sollen.*
   Durch einen direkten Vergleich von Diagrammsystem und Beweisformen werden erst die verschiedenen charakteristischen Elemente und auch die (subjektiven) Vor- und Nachteile deutlich. Dieser Vergleich muss dabei durch Aufgabenstellungen direkt angebahnt werden. Dies bedeutet weiter, dass auch Beweisaufgaben gestellt werden, in denen die Verwendung der Beweisformen und des damit verbundenen Diagrammsystems für die Aufgabenbearbeitenden freigestellt ist. Die eigene Entscheidung für die Konstruktion einer Beweisform im Kontext eines bestimmten Diagrammsystems bedingt die begründete Herausbildung entsprechender Ansichten. Exemplarische Aufgabenstellungen wurden in Abschnitt 5.4.1 und 6.3.2 angegeben.

Designprinzipien bzgl. der Theorie „Sozio-mathematischer Normen"

9. *Im Rahmen einer Lehrveranstaltung müssen sich die Lehrenden über die Normen im Klaren sein, die im Kontext bestimmter fachlicher und methodischer Inhalte für die Lernenden im Vordergrund stehen sollen. Diese zu vermittelnden bzw. angesetzten Normen sollten nach Möglichkeit den Lernenden transparent gemacht und expliziert werden.*
   Anzusetzende, gesetzte bzw. zu vermittelnde Normen betreffen u.a. die Darstellung von Inhalten, die Art und Weise und Ausführlichkeit von Aufgabenbearbeitungen, die Bedeutung und Verwendung sprachlicher Mittel und z.B. die Frage, was für die Konstruktion eines Beweises bzw. einer Beweisform gefordert wird. Entsprechende Normen werden zwar in einem Miteinander aller Beteiligten herausgebildet, es muss aber davon ausgegangen werden, dass diese bei den verschiedenen Teilnehmenden unterschiedlich stark ausgeprägt werden. Im Sinne einer Lernzieltransparenz müssen die fokussierten Normen expliziert werden, damit Lernende sich an diesen orientieren und sich bewusst darauf einlassen können. In der hier thematisierten Lehrveranstaltung wurden daher explizit Normen für die Konstruktion der verschiedenen Beweisformen aufgestellt und kommuniziert (s. Abschnitt 5.4.4 und 6.2).

10. *Im Kontext sozio-mathematischer Normen muss auch die Ausbildung einer entsprechenden Meta-Sprache zum jeweiligen Fachinhalt mitbedacht werden. Über die verwendeten Fach- und Metabegriffe muss eine möglichst hohe Einigkeit bei allen am Lernprozess Beteiligten herrschen.*
    Im Kontext des Begründens und Beweisens werden verschiedene Begrifflichkeiten verwendet, über deren genaue Bedeutung in der Theorie teilweise keine Einigkeit besteht (vgl. etwa die Erörterung der Begriffe Argumentieren, Begründen und Beweisen in Abschnitt 2.3). Da solche Begrifflichkeiten aber im unterrichtlichen Kontext als unverzichtbar erscheinen, müssen sie von den Lehrenden entsprechend umsichtig verwendet werden. Dies betrifft auch die Verwendung verschiedener Aufgabenoperatoren (begründen Sie, beweisen Sie, zeigen Sie, …), denen sich Lernende ausgesetzt sehen (vgl. hierzu die Ergebnisse in Kempen et al. 2016). Aus diesem Grund wurde in der Lehrveranstaltung eine Angleichung der Begrifflichkeiten vorgenommen, um eine möglichst hohe Einigkeit und Transparenz zu erzielen (Abschnitt 5.4.4).

11. *Die in der Lehrveranstaltung gesetzten Normen müssen im Rahmen der Lehrveranstaltung durch alle beteiligten Lehrenden vertreten und umgesetzt werden. Wird von diesen Normen abgewichen, etwa bei der Angabe einer bloßen ‚Beweisskizze' anstatt eines vollständigen Beweises, muss dies explizit thematisiert werden.*
    Der Aspekt der Herausbildung von Normen im unterrichtlichen Geschehen, als Resultat eines Aushandlungsprozesses aller Beteiligten, macht deutlich, dass alle Momente des unterrichtlichen Geschehens Auswirkung auf diese Herausbildung von Normen haben. Dies bedeutet, dass die fokussierten Normen von allen beteiligten Lehrenden (Dozenten, Mitarbeitenden, studentischen Hilfskräften) umgesetzt und ‚vorgelebt' werden müssen. Etwaige Abweichungen oder Verstöße sollten explizit thematisiert werden, damit der Herausbildung entsprechender Normen nicht entgegengewirkt wird. Aus diesem Grund wurde auch eine Tutorenschulung der studentischen Hilfskräfte vorgenommen, um sicherzustellen, dass diese konform mit den Normen der Lehrveranstaltung agieren

(Abschnitt 5.3.1). Auch wurde in der Vorlesung explizit unterschieden, ob ein vollständiger Beweis in ‚Reinschrift' notiert oder lediglich eine Beweisidee angegeben wurde (s. Abschnitt 6.2).

12. *Für die Akzeptanz verschiedener Beweisformen und ihr Erlernen ist es notwendig, dass die verschiedenen Beweisformen nach Möglichkeit konsequent und ‚gleichberechtigt' in die Lehrveranstaltung einbezogen werden.*
    In Bezug auf das Beweisen muss auch die Herausbildung subjektiver Momente bei Lernenden, wie Nutzen, Wertschätzung und Akzeptanz von Beweisen als Aspekte Sozio-mathematischer Normen, betrachtet werden. Im Rahmen der retrospektiven Analysen der Durchführungen der Lehrveranstaltung wurde deutlich, dass zunächst im Rahmen der Vorlesung und der Übungsaufgaben fast ausschließlich formale Beweise verwendet wurden (Abschnitt 5.2.1.4 und 5.4.1). Für die Vermittlung alternativer Beweisformen und das Erzielen einer ‚Akzeptanz' dieser Beweisformen auf Seiten der Lernenden erscheint es notwendig, dass diese Beweise ‚gleichberechtig' im Fortgang des Lehr-/Lernszenarios eingebunden werden. Schließlich sollen Vor- und Nachteile erfahrbar werden, die gerade im Kontrast zu anderen Beweisformen deutlich werden.

8.1.3 Die Entwicklung von Testinstrumenten

Für das Erreichen der Zielsetzung dieser Arbeit, wie es auch zu Beginn dieses Kapitels formuliert wurde, war die Entwicklung von Testinstrumenten notwendig, die die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen bei Lernenden ermöglichen. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Testinstrumente stellen ein weiteres Design-Ergebnis der vorliegenden Forschungsarbeit dar und sollen im Folgenden getrennt nach den Bereichen „Erfassung der schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen", „Bewertung von Beweiskonstruktionen", „Beweisbewertung und Beweisakzeptanz", „Beschreibung der Einstellungen zum Beweisen" und „Selbsteinschätzung des Lernzuwachses" zusammengefasst dargestellt werden.

8.1.3.1 Testinstrumente zur Erfassung der schulischen Vorerfahrungen zum Beweisen

Für die Erfassung der quantitativen schulischen Vorerfahrungen der Studierenden zum Beweisen wurden verschiedene Items konstruiert und mithilfe der Erkenntnisse aus der Pilotierung ausgeschärft (Abschnitt 3.3.4). Im Kontext dieser Items wird zwischen dem Kennenlernen von Beweisen in der Schulzeit und der Eigenkonstruktion von Beweisen unterschieden, was sich bei der Betrachtung der Ergebnisse als gewinnbringend herausgestellt hat (Abschnitt 7.2.3). Durch die Abfrage von Sachverhalten, die in der Schule bewiesen worden sind, konnte ein ungefähres Bild dessen abstrahiert werden, was die Erstsemesterstudierenden mit dem Begriff ‚Beweis' zu verbinden scheinen (Abschnitt 7.2.3).

8.1.3.2 Testinstrumente zur Bewertung von Beweiskonstruktionen

Um zunächst die Begründungskonstruktionen der Studierenden analysieren und bewerten zu können, wurde ein differenziertes Kategorienschema entwickelt und angewendet (Abschnitt 3.3.1; Kempen & Biehler 2014). Auch wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das die Bewertung studentischer Beweiskonstruktionen zum generischen Beweis ermöglicht (Abschnitt 5.2.2.2). Schließlich wurde auf der Grundlage dieser beiden Kategoriensysteme ein neues Kategoriensystem entwickelt, das die vergleichende differenzierte Bewertung formulierter Begründungen und konstruierter generischer und formaler Beweise ermöglicht (Abschnitt 3.3.1). Erhobene Interrater-Reliabilitäten bezeugen dabei die Güte dieses Forschungsinstruments (Abschnitt 5.4.2.3). Dieses entwickelte Kategoriensystem wurde schließlich im Rahmen der Effektivitätsstudie der Lehrveranstaltung in Kapitel 7 eingesetzt.

8.1.3.3 Testinstrumente zu dem Bereich der Beweisbewertung und Beweisakzeptanz

Für die Erfassung der Beweisbewertung der Studierenden wurden in Weiterentwicklung der Items aus dem „KLIMAGS"-Projekt (s. Blum et al. 2014) vier Begründungsformen aus der Studie von Healy und Hoyles (2000, S. 401) zu Multiple-Choice-Items mit den Bewertungskategorien „richtiger Beweis"/„kein richtiger Beweis" umformuliert. Damit wurde es zunächst möglich, die studentische Bewertung von bloßen Beispielbetrachtungen und formal dargestellten und falschen Begründungen zu erfassen. Im Vergleich der beiden inhaltlich gleichen Begründungen konnte auch herausgearbeitet werden, dass die Studierenden eine Begründung mit Buchstabenvariablen statistisch signifikant häufiger als richtigen Beweis bewerten als die gleiche Begründung in narrativer Form (Abschnitt 7.2.4.2 und 7.3.2.1). Darüber hinaus wurde der Bereich der Beweisbewertung um den Bereich der „Beweispräferenz" (in Bezug auf die Konstruktion und das Verstehen eines Beweises) erweitert, um die studentischen Präferenzen in Bezug auf die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu erfassen.

Für die Erfassung des Konstrukts der ‚Beweisakzeptanz' wurde aufbauend auf verschiedenen Funktionen von Beweisen eine Skala konstruiert (Abschnitt 3.3.3). Diese Skala erreicht in der Pilotierung wie auch im Rahmen der Effektivitätsstudie der Lehrveranstaltung (Abschnitt 7.2.3 und 7.3.2) hohe Reliabilitätswerte, was die Güte des Forschungsinstruments belegt.

8.1.3.4 Testinstrumente zu dem Bereich Einstellungen zum Beweisen

Im Kontext der Thematik „Einstellungen zum Beweisen" wurden zunächst Instrumente zur Beschreibung der studentischen „Einstellungen zum Beweisen in der Schule" konstruiert. Die Items thematisieren die Relevanz, die die Studierenden dem Inhalt ‚Beweisen' je nach Schulform und Schulstufe beimessen, die Bewertung ‚gängiger' Gründe, warum Beweise in der Schule eher eine untergeordnete Rolle spielen sollten, und die Bewertung der Eignung generischer Beweise für die Schulmathematik.

In Bezug auf die „Einstellungen zum Beweisen" der Studierenden wurden motivationale Aspekte zum Beweisen durch verschiedene Items thematisiert, wodurch es möglich wurde, eine Skala zu dem Konstrukt der „Beweisaffinität" zu konstruieren. Diese Skala erreicht im Rahmen der Effektivitätsstudie der Lehrveranstaltung ausreichend hohe Reliabilitätswerte (Abschnitt 7.3.3), wobei allerdings Optimierungsmöglichkeiten auf Itemebene ausgemacht werden konnten.

8.1.3.5 Testinstrumente zur Erfassung des selbsteingeschätzten Lernzuwachses

Für die Beforschung der Lehrveranstaltung war es von Interesse zu erfahren, wie die Studierenden selbst ihren Lernzuwachs durch die Lehrveranstaltung einschätzen. Im Kontext der Funktionen von Beweisen und des Nutzens von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess wurde ein Frageformat verwendet, in dem die Studierenden die verschiedenen Aussagen aus ihrer aktuellen Perspektive und retrospektiv („vor dem Besuch der Lehrveranstaltung") bewerten sollten. Durch Differenzbildung dieser Werte wurde es möglich, den Lernzuwachs der Studierenden beschreiben zu können

(Abschnitt 7.3.4). (Neben der Beschreibung des Lernzuwachses wird es bei diesem Frageformat außerdem möglich, die retrospektive Einschätzung der eigenen Kompetenz zu erheben. Auf diesen Aspekt wurde allerdings bei der Auswertung der Ergebnisse nicht weiter eingegangen.)

Durch die gezielte Abfrage verschiedener Kompetenzaspekte zur Beweiskonstruktion wurde es schließlich möglich, eine Skala zur „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ zu konstruieren, welche im Rahmen der Effektivitätsstudie statistischen Ansprüchen an Reliabilität und korrigierte Trennschärfen der Items genügte (Abschnitt 7.3.4).

8.2 Empirische Ergebnisse aus der Effektivitätsstudie zur letzten in dieser Arbeit betrachteten Durchführung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15

Mithilfe der im vorherigen Kapitel dargestellten Forschungsinstrumente wurde es im Rahmen dieser Arbeit möglich, die Vorerfahrungen der Studierenden mit dem Beweisen aus ihrer Schulzeit zu beschreiben (Abschnitt 7.2.3), ihre Eingangsvoraussetzungen zur Thematik ‚Begründen und Beweisen‘ zu erheben (Abschnitt 7.2.4 und 7.2.5) und die Änderungen diesbezüglich zu erfassen, die sich von der Ein- zur Ausgangsbefragung (bzw. zur Modulabschlussklausur) ergaben (Abschnitt 7.3 und 7.4). Schließlich wurde die Selbsteinschätzung der Studierenden bzgl. ihres Lernzuwachses durch die Lehrveranstaltung erhoben (Abschnitt 7.3.4). Diese Ergebnisse sollen im Folgenden kurz zusammenfassend dargestellt werden.

In Abschnitt 7.2.3 wurde die Forschungsfrage [2] („Wie lassen sich die **Vorerfahrungen der Studierenden mit Beweisen aus ihrer Schulzeit** beschreiben?“) beantwortet. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Studierenden nach eigenen Angaben quantitativ nur wenig Beweise in ihrer Schulzeit kennengelernt haben: Für den Zeitraum der Sekundarstufe 1 sind 62% der Studierenden der Ansicht, insgesamt höchstens zwei Beweise kennengelernt zu haben, für die Sekundarstufe 2 meinen dies 31%. 35% der Studierenden meinen, in der Sekundarstufe 2 drei bis fünf Beweise, weitere 22% meinen, vier bis zehn Beweise kennengelernt zu haben. Überhaupt nie einen Beweis in ihrer Schulzeit konstruiert zu haben, meinen 39% der Befragten, 74% sprechen von höchstens zwei Beweisen. Bei den Nennungen, welche Sachverhalte in der Schule bewiesen wurden, waren der Satz des Pythagoras mit 37 Nennungen, die PQ-Formel mit 14 Nennungen, Ableitungsregeln mit 13 Nennungen, der Satz des Thales mit acht Nennungen und die binomischen Formeln mit sechs Nennungen die häufigsten Antworten. Dabei zeigt sich, dass das Beweisen in der Erinnerung der Studierenden vor allem mit dem Bereich der Geometrie verbunden zu sein scheint. Auf der Basis dieser Nennungen konnten Unterschiede bzgl. der für die Konstruktion eines Beweises zu vollziehenden Aktivitäten in der Schule und der Hochschule beschrieben werden. Schließlich konnte gezeigt werden, dass nur knapp die Hälfte der Studierenden angab, dass ihnen die Begründungsform des formalen Beweises bereits aus der Schule bekannt war. Weitaus weniger Studierende gaben dies in Bezug auf den generischen Beweis mit Zahlen (20,7%) den generischen Beweis mit Punktmustern (14,2%) und den Beweis mit geometrischen Variablen an (5,7%).

Die **Eingangsvoraussetzungen der Studierenden zum Beweisen** wurden in Abschnitt 7.2.4 und 7.2.5 beschrieben. Dort wurden die folgenden Forschungsfragen [3] („Wie lassen sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik des ‚Begründens und Beweisens‘ zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?“) und [4] („Wie lassen sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik zu Beginn der Lehrveranstaltung beschreiben?“) beantwortet.

Bzgl. der Kompetenzaspekte zum Beweisen konnte gezeigt werden, dass nur 19,5% der Studierenden einen Sachverhalt der elementaren Arithmetik derart zu begründen vermochten, dass dies als ‚vollständig' gewertet werden konnte. Während 8,7% der Studierenden reine empirisch-induktive Argumente formulierten, um die Behauptung zu verifizieren, dass die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade ist, beantworteten 14,1% der Studierenden die Frage durch Nennung oder Paraphrase des Satzes, dass die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade sei. Der geringe Anteil von Begründungen mit fachlich korrekten Argumenten führte dabei zu der Interpretation, dass die Studierenden mit solcherlei Begründungsaufgaben nicht vertraut zu sein scheinen. Auch verdeutlicht der Anteil von 28,1% der Bearbeitungen, in denen Buchstabenvariablen verwendet wurden (bei den Erstsemesterstudierenden 6,8%), dass nur wenige Studierende überhaupt von Buchstabenvariablen Gebrauch machen. Im Kontext der Bewertung von Beweisen konnte gezeigt werden, dass die Studierenden eine korrekte Begründung mithilfe von Buchstabenvariablen mit 89,3% statistisch hoch signifikant häufiger als ‚richtigen Beweis' bewerten als die gleiche Begründung in einer narrativen Formulierung. Darüber hinaus bewerteten 18,8% der Studierenden eine rein empirisch-induktive Begründung als richtigen Beweis, wobei der Anteil der Erstsemesterstudierenden mit 33,8% statistisch hoch signifikant über dem der Höheren Semester mit nur 5,1% liegt. Etwa ein Drittel der Studienanfänger betrachtet somit einzelne Beispielüberprüfungen als korrekte Beweise. Im Rahmen der Erfassung der Beweisakzeptanz wurde deutlich, dass die Mehrheit der Studierenden zu Beginn der Lehrveranstaltung generische Beweise als bloße singuläre Beispielüberprüfungen fehlinterpretiert und nicht den Aspekt der Allgemeingültigkeit der Begründung wahrnimmt. Der formale Beweis wird dagegen bereits zu Beginn der Lehrveranstaltung von den Studierenden (nahezu vollständig) ‚akzeptiert'.

Im Bereich der Einstellungen zum Beweisen in der Schule wurde deutlich, dass die Studierenden die Thematik des Beweisens eher mit dem Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2 als dem in der Sekundarstufe 1 und eher mit dem Gymnasium als mit der Real- oder Hauptschule verbinden. Die Thematisierung von Beweisen in der Grundschule wird insgesamt abgelehnt. Dabei stimmen die Studierenden den Aussagen (eher) zu, dass Beweise im Unterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen sollten, da es wichtiger sei, fachliche Inhalte zu vermitteln, Rechenaufgaben richtig lösen zu können und Anwendungen der Mathematik im Alltag zu thematisieren. In Bezug auf die Einstellungen der Studierenden zum Beweisen wurde deutlich, dass sie diesem Lerninhalt gegenüber nicht negativ eingestellt sind und dass sie generell eine sehr hohe Motivation angeben, die mathematische Beweisaktivität zu erlernen.

Die Veränderungen der Kenntnisse bei den Studierenden durch die Lehrveranstaltung werden in den Abschnitten 7.3.2, 7.3.3 und 7.4.3 durch die Beantwortung der Forschungsfrage [5] („Inwiefern verändern sich die Kompetenzen der Studierenden im Kontext der Thematik ‚Begründen und Beweisen' von der Ein- zur Ausgangsbefragung?“) und der Forschungsfrage [6] („Inwiefern verändern sich die Einstellungen der Studierenden zur Thematik des Beweisens und zur Mathematik von der Ein- zur Ausgangsbefragung bzw. welche neuen Ansichten der Studierenden zum (generischen und formalen Beweisen) können in der Ausgangsbefragung herausgearbeitet werden?“) beschrieben. Dabei zeigte sich, dass sich die verschiedenen Teilkompetenzen der Studierenden zum Beweisen (Beweiskonstruktion, Beweisbewertung und Beweisakzeptanz) durch die Lehrveranstaltung verbessern (vgl. auch Abschnitt 7.5.4). In der Modulabschlussklausur gelingt 52,3% der Studierenden die vollständige Begründung der Behauptung über die Summe zweier ungerader Zahlen und im Bereich der Beweisbewertung geht die Fehlbewertung der empirisch-induktiven Begründung statistisch hoch signifikant von 17,6% auf 5,4% zurück. Bzgl. der Einstellungen der Studierenden ist dabei sogar eine Hinwendung zum Beweisen zu verzeichnen: Der Mittelwert der Skala „Beweisaffinität“ steigt von der Ein- zur Ausgangsbefragung statistisch hoch signifikant bei kleiner Effektstärke an (t-Test, p=0,018 mit Cohens d=0,3). Darüber hinaus ließ sich auch eine Zunahme in Bezug auf die Einstellung zur Mathematik „Mathematik als Prozess“ feststellen: Die Studierenden bewerten in der Ausgangsbefragung den Prozesscharakter der Mathematik statistisch signifikant höher als in der Eingangsbefragung.

Die Selbsteinschätzung des Lernzuwachses der Studierenden durch die Lehrveranstaltung wurde in Abschnitt 7.3.4 anhand der Forschungsfrage [7] („Wie schätzen die Studierenden selbst ihren Lernzuwachs in Bezug auf das Beweisen durch die Lehrveranstaltung ein?“) beantwortet. Hier zeigte sich, dass die Studierenden der Meinung sind, in Bezug auf die verschiedenen Funktionen von Beweisen und bzgl. des Nutzens von Beispielbetrachtungen für den Beweisprozess einen (großen) Lernzuwachs durch die Lehrveranstaltung gehabt zu haben. Diesen Lernzuwachs empfinden die Studierenden besonders im Hinblick auf die verschiedenen fachlichen Aspekte zum Beweisen. Interessant ist dabei auch das Ergebnis, dass sich die Einstellungen der Studierenden zur Nutzung von Buchstabenvariablen und zum formalen Beweis nach eigenen Angaben durch die Lehrveranstaltung positiv entwickelt haben. Schließlich konnte durch die Skala „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ gezeigt werden, dass die Lehrveranstaltung dazu beigetragen hat, dass sich bei den Studierenden eine positive Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen ausgebildet hat.

8.3 Weitere Beiträge der Arbeit über die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie hinaus

Mit den oben formulierten Designprinzipien zur Lehrveranstaltung wurde die die Forschungsarbeit überspannende Forschungsfrage 1 beantwortet und ein Beitrag für die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie für die Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ für Studienanfängerinnen und -anfänger des Lehramts (für Haupt-, Real- und Gesamtschule) im Spannungsfeld der doppelten Diskontinuität geleistet, wodurch bereits der Aspekt der Theoriebildung tangiert wurde. Neben diesem Beitrag für die Entwicklung einer lokalen Instruktionstheorie wurden im Kontext der Arbeit weitere Beiträge für die mathematikdidaktische Forschung zur Thematik des Beweisens geleistet. An dieser Stelle sollen fünf Aspekte herausgestellt werden, die besonders wertvoll für die aktuelle internationale Diskussion zur Thematik erscheinen: die Verbindung der Theorien des diagrammatischen Schließens und der sozio-mathematischen Normen (Abschnitt 8.3.1), die Betrachtung generischer Beweise als vollgültige mathematische Beweise (Abschnitt 8.3.2), die Enkulturationsfunktion von Beweisen (Abschnitt 8.3.3), die Wahrnehmung bzw. Akzeptanz von Beweisen (Abschnitt 8.3.4) und eine Diskussion des Konzepts der proofs that explain (Abschnitt 8.3.5).

8.3.1 Die Verbindung der Theorien „Diagrammatisches Schließen“ und „Sozio-mathematische Normen“

Ein Beitrag dieser Arbeit besteht in der konstruktiven Verbindung der Theorien des „Diagrammatischen Schließens“ und der „Sozio-mathematischen Normen“. Die Verbindung dieser beiden Theorien hat sich u.a. im Rahmen der erfolgten retrospektiven Analysen der verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung aus verschiedenen Gründen als wertvoll erwiesen. Neben den oben beschriebenen Gelingensbedingungen, die mithilfe dieser Perspektiven abstrahiert werden konnten, sollen im Folgenden weitere Aspekte benannt werden, die mithilfe dieser theoretischen Sichtweisen und ihrer Verbindung herausgearbeitet werden konnten.

(1) Die semiotische Perspektive ermöglicht über das Konstrukt der ‚Diagrammsysteme' eine vergleichende Diskussion der in dieser Arbeit thematisierten unterschiedlichen Beweisformen. Die Erörterung der Beweiskonzepte richtete sich dabei nicht nach den Polen formal/anschaulich o.ä., sondern thematisiert die Bedeutung des Diagrammsystems für den Beweis- und damit den Erkenntnisprozess. Die damit einhergehende Fokusverschiebung von den Zeichen auf die Bedeutung der vorgenommenen Transformationen birgt ein mögliches Legitimationsargument für nicht-formal dargestellte und beispielgebundene Beweisformen (Abschnitt 8.3.2).
(2) Die Perspektive des diagrammatischen Schließens auf den Beweisprozess (nach Boero (1999): Entwicklung einer Vermutung, Formulierung einer Behauptung, Exploration des spezifischen Gehalts und des Umfelds der These, Auswahl von Argumenten und deren Aneinanderfügen zu einer Argumentationskette, Aufschreiben des Beweises gemäß mathematischer Standards und die Annäherung an einen formalen Beweis, vgl. Abschnitt 2.1.1) machte diesen über die Aspekte „Diagrammkonstruktion", „Transformation", „Beobachten/Festhalten der Resultate" und „Vergewisserung der allgemeinen Gültigkeit der Ergebnisse" gleichsam handhabbar und operationalisierbar. Diese Sichtweise war grundlegend für die Konstruktion der Kategoriensysteme, die Interpretation der Ergebnisse und somit für die Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung.
(3) Die Tatsache, dass die Akzeptanz von Beweisen innerhalb einer bestimmten Kommunität vor dem Hintergrund gewisser (nicht immer explizierter) Normen stattfindet (Abschnitt 2.1.1), macht das Problem offenkundig, dass mit dem diagrammatischen Schließen zwar ein Teil des (mathematischen) Erkenntnisprozesses beschrieben werden kann, nicht aber der Prozess der Beweiskonstruktion im Spannungsfeld geltender Normen. Diese Lücke in der Theorieanbindung des diagrammatischen Schließens konnte durch den Einbezug der Theorie der sozio-mathematischen Normen geschlossen werden. So betrachtet, sind es jene sozio-mathematischen Normen, die festlegen, wie das diagrammatische Schließen gerahmt sein muss, um als ‚Beweis' in einer Kommunität zu gelten, und wann diagrammatisches Schließen als Beweisen sein ‚Ende' gefunden hat, i.e. welche Endkonstellationen von Diagrammen gefordert werden bzw. durch welche sprachlichen Mittel diese diagrammatischen Resultate weiter erläutert werden müssen. Die Theorien „Diagrammatisches Schließen" und „Sozio-mathematische Normen" bilden somit einen (theoretischen) Gestaltungsrahmen, in dem Beweiskonstruktionen betrachtet, beschrieben und analysiert werden können (vgl. Abbildung 92).

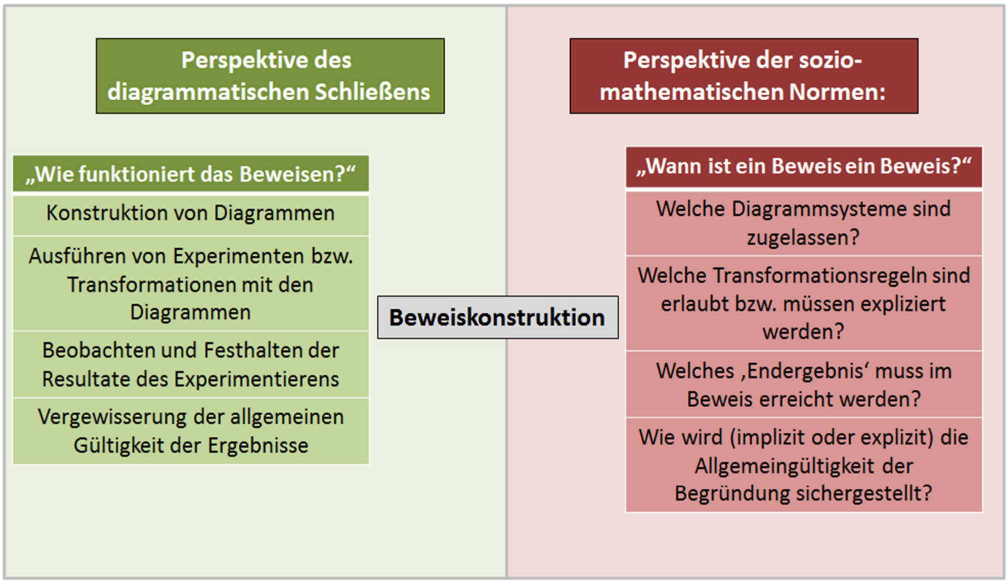


Abbildung 92: Beweiskonstruktionen im Rahmen diagrammatischen Schließens und sozio-mathematischer Normen

8.3.2 Die Betrachtung generischer Beweise als vollgültige mathematische Beweise

Die oben aufgezeigte (semiotische) Sicht auf das Beweisen als regelkonforme und zielgeleitete Transformation von Diagrammen entsprechend gewisser (sozio-mathematischer) Normen vermag die Diskussion um die Gültigkeit generischer Beweise als vollgültige mathematische Beweise zu erweitern. Wie Reid und Vallejo (2016) darlegen, herrscht bis heute keine Einigkeit über die Gültigkeit generischer Beweise als ‚wirkliche mathematische Beweise‘. So formulieren Leron und Zaslavsky (2013, S. 27): „The main weakness of a generic proof is, obviously, that it does not really prove the theorem. The “fussiness” of the full, formal, deductive proof is necessary to ensure that the theorem’s conclusion infallibly follows from its premises“[85]. Im Folgenden wird dargelegt, warum in dieser Arbeit die Ansicht vertreten wird, dass generische Beweise als vollgültige mathematische Beweise betrachtet werden können.

Betrachtet man den Beweisprozess als regelgeleitetes Agieren mit Diagrammen in einem Diagrammsystem, so muss festgestellt werden, dass die Auswahl eines Diagrammsystem zwar Auswirkungen auf die möglichen Transformationen und die potentiell zu erreichenden Diagramme hat, das Diagrammsystem als solches aber nicht über die Güte des Erkenntnisprozesses entscheidet, da die Allgemeingültigkeit der Verifikation durch die allgemeingültigen Transformationen der Diagramme nach den Regeln eines Diagrammsystem konstituiert wird (Abschnitt 2.5.3 und 2.5.4). Aus dieser semiotischen Perspektive gilt es daher festzuhalten, dass der Verzicht auf die fachmathematische Symbolsprache nicht als Argument gelten kann, warum generische Beweise (etwa mit Zahlen oder Punktmusterdarstellungen) nicht als gültige Beweise gelten können.
Vor dem Hintergrund mathematischer Normen stellt sich die Frage, wie in generischen Beweisen ein verlangter Grad an ‚Vollständigkeit‘ der Argumentation erreicht werden kann, wie es auch im Zitat von Leron und Zaslavsky oben gefordert wird. Dazu sei zunächst angemerkt, dass auch in den in der Praxis üblichen ‚strengen Beweisen‘ keine Vollständigkeit erreicht wird (Abschnitt 2.1.2). Akzeptiert man die ‚Unvollständigkeit‘ gültiger mathematischer Beweise, so kann die Sichtweise der parallelen Struktur in mathematischen Begründungen von Aberdein (2013) herangezogen werden, um die

[85] Leider führen die Autoren nicht aus, was sie genau mit „obviously“ meinen, bzw. warum generische Beweise nicht wirklich das jeweilige Theorem beweisen. Mit „fussiness“ beziehen sich die Autoren auf die lückenlose Vollständigkeit der Argumentationsketten in mathematischen Beweisen (vgl. hierzu die Ausführungen in Reid und Vallejo 2016).

Diskussion handhabbar zu machen (vgl. Biehler und Kempen 2016, S. 174ff.; Reid und Vallejo 2016. S. 2). Nach Aberdein (2013, S. 362ff.) kann ein Beweisprodukt als das Zusammenkommen zweier Ebenen betrachtet werden: Hinter dem Beweisprodukt liegt eine inferentielle Struktur verborgen, in der das Behauptete lückenlos und vollständig im Sinne eines formalen Beweises verifiziert wird. Das vorliegende Beweisprodukt zeigt dabei nur eine argumentative Struktur, welche die Leserin bzw. den Leser davon überzeugen soll, dass eine inferentielle Struktur für den Beweis (theoretisch) existiert. Für diese Art von Überzeugung muss der Betrachtende im vorliegenden Beweisprodukt die Momente erkennen, die für ihn die Existenz einer inferentiellen Struktur belegen. Die ‚Unvollständigkeit' von generischen Beweisprodukten stellt sich demnach nicht als Problem für die vorliegende Diskussion dar, da das Auslassen gewisser Argumente nicht die Gewissheit über die theoretische Existenz einer inferentiellen Struktur verhindern muss. Die notwendige Akzeptanz des vorliegenden Beweisprodukts als ausreichende argumentative Struktur betont die Bedeutung des subjektiven Moments des Betrachters: Da auch in sogenannten formalen Beweisen der Mathematik keine Vollständigkeit bzw. Lückenlosigkeit erreicht wird (vgl. Abschnitt 2.1.2), stellt sich für jeden Betrachtenden eines Beweises die Frage, ob ihm das vorliegende Produkt ausreicht, um daraus auf die Existenz einer inferentiellen Struktur schließen können. Welche Art der Verschriftlichung und welchen Grad an Explizierung jemand als ausreichend betrachtet, ist dabei stark von der jeweiligen Person abhängig. Vor diesem Hintergrund müsste die gewichtige Frage „Wann ist ein Beweis ein Beweis?" eigentlich lauten: „Wann ist ein Beweis ein Beweis <u>für den Betrachter</u>?".
Reid und Vallejo (2016, S. 2) betonen, dass bei der Diskussion um generische Beweise die Sichtweise des Beweiskonstrukteurs und die des Beweisbetrachtenden unterschieden werden müssen. Denn wie kann der Betrachtende sich davon überzeugen, welches generische Moment in konkreten Beispielen verdeutlicht werden soll? Dieses Bewusstsein ist dabei für die Entscheidung zentral, ob die Begründung eine bloße Beispielüberprüfung oder eine allgemeingültige Verifikation mithilfe eines beispielübergreifenden generischen Moments darstellt. Um dieser Problematik entgegenzuwirken, wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit das Konzept generischer Beweise entwickelt, in der das generische Moment, das in konkreten Beispielen dargestellt wird, im Hinblick auf seine Übertragbarkeit bzw. Allgemeingültigkeit expliziert werden muss. Mit dieser Konzeption generischer Beweise wird die von Reid und Vallejo (2016) dargestellte mögliche Diskrepanz zwischen Beweiskonstrukteur und Betrachtendem abgeschwächt: Durch die Verbalisierung der beispielübergreifenden Begründung und ihrer Allgemeingültigkeit werden direkt die Argumente benannt, die – im Sinne von Aberdein (2013) – die Existenz der inferentiellen Struktur belegen sollen.

Vor diesem Hintergrund kann bereits festgehalten werden, dass korrekte generische Beweise als intellektuell ehrliche Form der mathematischen Beweisaktivität verstanden werden können, wodurch gezeigt ist, dass mit der Integration dieser Beweisform in die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik" auch das Leitprinzip der ‚intellektuellen Ehrlichkeit' eingehalten worden ist (vgl. Abschnitt 1.3).

Als letztes Argument soll hier auf die Bedeutung der sozialen Akzeptanz von Beweisen eingegangen werden. Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben wurde, ist es der Prozess der sozialen Akzeptanz eines Beweises innerhalb der mathematischen Community, der einen Beweis zu einem Beweis macht. Daher könnte formuliert werden, dass ein generischer Beweis nicht als Beweis akzeptiert wird, da er keine Akzeptanz von der fachmathematischen Community erfährt. Dabei erscheint allerdings bereits die dichotome Unterscheidung ‚Beweis'/‚kein Beweis' problematisch, wenn man bedenkt, dass keine allgemein akzeptierten Kriterien dafür existieren, wann ein Beweis ein Beweis ist (vgl. Abschnitt

2.1.1). Demgegenüber benennt Weber (2014, S. 357ff.) verschiedene Kriterien, die die Akzeptanz von Beweisen als solche begünstigen (also keinesfalls garantieren), wodurch die Bewertung von Beweisakzeptanz zu einem Kontinuum von möglichen Ausprägungen zwischen Ablehnung und Zustimmung wird. Und auch Heinze (2010) stellt heraus, welche unterschiedlichen Kriterien Mathematiker bei der Bewertung von Beweisen anlegen. Aus diesem Grund scheint eine generelle Ablehnung der Gültigkeit generischer Beweise als wirkliche Beweise aus einer rein ‚sozialen Perspektive' als unangebracht. Zwar können in unterschiedlichen mathematischen Kommunitäten unterschiedliche Normen in Bezug auf das Beweisen gelten, die sich wiederum ändern oder auch einem historischen Wandel unterliegen können; dieses Phänomen rechtfertigt allerdings nicht eine generelle Verwerfung des Beweiskonzepts. So betont auch Stylianides (2007, S. 15):

> […] an argument that could count as proof in a classroom community should be accepted as proof by the community – and, thus, it should be convincing to the students – on the basis of socially accepted rules of discourse that are compatible with those of wider society.

Insgesamt betrachtet, erscheint es somit angebracht, dass der mathematische Beweisbegriff auch für generische Beweise geöffnet wird bzw. geöffnet bleibt. Der generische Beweis erhält seine Gültigkeit durch die Allgemeingültigkeit der vorgenommenen Transformationen in einem Diagrammsystem; in ihm werden Argumente verwendet, die dabei den Verweis auf eine inferentielle Beweisstruktur zu stiften vermögen, und durch die Akzeptanz dieses Verweises durch den Betrachter wird schließlich seine Gültigkeit als Beweis konstituiert.

8.3.3 Die Enkulturationsfunktion von Beweisen[86]

Eine theoretische Grundannahme dieser Arbeit bestand darin, dass die Bedeutungskonstruktion zum Beweisbegriff und die Vermittlung damit einhergehender Normen in einem (mindestens impliziten) Aushandlungsprozess aller Beteiligten im Unterrichtsgeschehen erfolgen. Vor diesem theoretischen Hintergrund sozio-mathematischer Normen wurde deutlich, dass das Erlernen der Beweisaktivität selbst als Enkulturationsprozess verstanden werden kann (vgl. Abschnitt 2.6.2). Der namensgebende Leitgedanke der hier thematisierten Lehrveranstaltung ist die „Einführung in die Kultur der Mathematik". Diese Einführung in eine Kultur ist dabei selbst als Enkulturation zu bezeichnen, da das Individuum im Laufe eines Prozesses Teil dieser Kultur wird. Die Übernahme der diese Kultur konstituierenden Normen erfolgte dabei vor allem im Kontext des Erlernen der Beweisaktivität, wodurch eine sozio-mathematische Funktion des Beweisens offenkundig wird: die *Enkulturationsfunktion von Beweisen*.

Das Beweisen findet im Rahmen von (nicht immer explizierten) Normen einer Kommunität statt. Unterschiede bzgl. dieser Normen resultieren dabei daher, dass diese Kommunitäten jeweils verschiedene Kulturen der Mathematik ausprägen. Zwischen Kommunitäten können teilweise unterschiedliche Normen in Bezug auf das Mathematiktreiben herrschen und auf der Grundlage dieser Normen werden u.a. auch die dort konstruierten bzw. publizierten Beweise beurteilt. Wer das Beweisen erlernt, lernt dabei, im Rahmen der an ihn herangetragenen Normen zu agieren, welche wiederum als Ausschnitte aus einer weiter gefassten Kultur der Mathematik verstanden werden müssen. Somit findet durch das Erlernen der Beweisaktivität im Rahmen geltender Normen

[86] Dieser Abschnitt wurde maßgeblich durch die Kommunikation und Diskussion des Autors mit E. Müller-Hill beeinflusst. Die hier aufgezeigte Thematik wird in Müller-Hill und Kempen (in Vorbereitung) ausgeführt und in weitere (theoretische) Zusammenhänge eingeordnet.

gleichsam eine Enkulturation des Lernenden in die ihn umgebende Kultur der Mathematik statt. Das Beweisen erhält somit eine Enkulturationsfunktion. Der Enkulturationsbegriff soll dabei verdeutlichen, dass dieses Hereinwachsen in eine Kultur als Teil eines Sozialisationsprozesses verstanden werden muss und somit Aspekte beinhaltet, die über (intentionale) Erziehung im Sinne einer Akkulturation hinausgeht[87]. Hierbei kommt wiederum der Aspekt der sozio-mathematischen Normen zum Tragen, da Normen nicht bloß vermittelt bzw. übernommen, sondern im Miteinander ausgehandelt werden.

Die hier herausgestellte Enkulturationsfunktion von Beweisen lässt sich auch in weiteren Bereichen der Mathematikdidaktik ausmachen. Im Folgenden sollen zwei solcher Bezüge dargestellt werden, um diese sozio-mathematische Sicht auf das Beweisen auch theoretisch exemplarisch zu vernetzen.

Der Aspekt der Enkulturation durch Beweise, wie er in Bezug auf die Theorie sozio-mathematischer Normen von Yackel und Cobb (1996) oben dargestellt wurde, wird auch in der Arbeit von Hemmi (2006) deutlich. Die Autorin untersucht den Vorgang, wie Lernende durch das kulturelle Artefakt des Beweisens zu einem Teil der mathematischen Community werden. Auch in diesem Entwicklungsprozess der Studierenden wird der mathematische Beweis, verbunden mit den entsprechend geltenden Regeln für seine Konstruktion, Notation etc., zu einem zentralen Medium der Enkulturation. Müller-Hill (2013) überträgt das Konzept der „meta-discursive rules“ von Sfard (2001 und 2002) auf die Thematik des Beweisens. Versteht man das Beweisen als einen Akt der Kommunikation, so verweisen die „meta-discursive rules“ auf die mit dem Beweisen (implizit) verbundenen Normen: „In concert with meta-discursive rules, people undertake actions that count as appropriate in a given context and refrain from behaviours that would look out of place” (Sfard 2002, S. 30). Auch beim Beweisen müssen Aktivitäten vollzogen bzw. Regeln beachtet werden, die in diesem Kontext (bzw. der rahmenden Kultur) von den beteiligten Personen als angemessen betrachtet werden (Müller-Hill 2013, S. 192). Beispiele hierfür sind etwa das Auslassen von ‚einfachen' Rechenschritten bzw. Argumenten oder Standards für die Verschriftlichung von Beweisen. So wird auch unter dieser theoretischen Perspektive das ‚Hereinwachsen' in die entsprechende Kultur der Mathematik durch das Erlernen der dabei geltenden kulturellen Ansprüche bzw. angesetzten Normen an ‚das Beweisen' deutlich; das Erlernen der Beweisaktivität scheint unmittelbar mit dem Prozess der Enkulturation verbunden zu sein.

Schließlich sollen im Folgenden noch drei spezifische Aspekte aufgezeigt werden, um die (didaktische) Bedeutung der Enkulturationsfunktion von Beweisen hervorzuheben: (1) das Erlernen der Beweisaktivität als Akkulturation in eine Kultur der Mathematik, (2) das Erlernen der Beweisaktivität als Konstruktion einer lokalen Kultur der Mathematik im Lehr-/Lernkontext und (3) das Herauslesen einer Kultur an Beweisprodukten.

(1) Beweisen als Akkulturation in eine Kultur der Mathematik

Wer das Beweisen unterrichtet, vermittelt gleichsam Normen für deren Konstruktion und Akzeptanz. Diese Vermittlung hat einen intentionalen Charakter und muss im Sinne einer Erziehung als Akkulturation in eine bestimmte Kultur der Mathematik verstanden werden: Die Lernenden sollen derart ‚erzogen' werden, dass sie zunächst den Ansprüchen im Studium gerecht werden und später

[87] Unter Akkulturation wird an dieser Stelle das bewusste bzw. gesteuerte Hineinwachsen einer Person in eine Kultur durch ‚Erziehung' verstanden. Der Begriff der Enkulturation geht darüber hinaus: hierunter werden die intentionalen Beeinflussungen durch Erziehung und die Summe aller nicht-intentionalen Einflüsse gefasst.

als Mathematiker oder als Repräsentanten der mathematischen Community (im Falle von Lehramtsstudierenden) in der jeweiligen (Fach-) Kultur entsprechend geltenden Normen agieren können. Für eine gelingende Akkulturation ist es entscheidend, dass Lehrenden bewusst ist, in welche Kultur die Lernenden wie eingeführt werden sollen, bzw. welche Normen diese Kultur konstituieren. Hieraus leiten sich in einem gewissen Maß auch die Normen ab, die im Kontext des Erlernens der Beweisaktivität angelegt und somit vermittelt werden müssen.

(2) Beweisen als Konstruktion einer lokalen Kultur der Mathematik

Wie bereits angemerkt, werden Normen weder unmittelbar vermittelt noch unverändert übernommen. Wenn im unterrichtlichen Geschehen entsprechende Normen ausgehandelt werden, dann bedeutet dies weiter, dass durch diese Normen in der jeweiligen Lerngruppe gleichsam individuelle ‚lokale' Kulturen der Mathematik konstruiert werden, innerhalb derer die Lernenden agieren können. (Man bedenke hierbei etwa verschiedene mathematische Lehrveranstaltungen an der Universität für verschiedene Adressatengruppen wie Fachmathematiker, Lehramtsstudierende, Ingenieure, …) Somit bildet sich innerhalb einer Lerngruppe eine eigene lokale Kultur der Mathematik heraus, die in einem gewissen Sinne ein Abbild der ‚globalen' Kultur der Mathematik ist, die durch die Kommunität der Fachmathematik konstituiert wird. Die Konstruktion einer lokalen Kultur ist somit als Voraussetzung für das Vollziehen der mathematischen Beweisaktivität zu betrachten. Es stellt sich jedoch die noch unbeantwortete Frage, wie nah eine im Unterricht ausgebildete Kultur an einer (globalen) mathematischen Kultur der Fachkommunität sein muss bzw. soll.

(3) Das Herauslesen einer Kultur an Beweisprodukten

Das Lesen und Verstehen von Beweisen ist ein in der internationalen mathematikdidaktischen Forschung ein vielbeachteter Forschungsgegenstand (siehe hierzu etwa Hodds et al. 2014; Inglis und Alcock 2012; Mejia-Ramos et al. 2012; Selden und Selden 2017). Im Folgenden soll es um den Teilaspekt beim Lesen von Beweisen gehen, der die Enkulturationsfunktion von Beweisen tangiert.

Beim Lesen eines Beweises macht der Betrachtende bewusst und unbewusst Erfahrungen über „das Beweisen" im Rahmen einer Kultur der Mathematik. Diese Erfahrungen umfassen dabei etwa die Notation von Beweisen, das Explizieren von Teilschritten oder das Verständnis um die Rolle von Beweisen. Führen diese Erfahrungen beim Betrachter zu ausreichend kohärenten Schlussfolgerungen, so findet gleichsam Enkulturation statt. Das Verständnis einer Kultur ergibt sich dabei als Ergebnis kohärenter Erfahrungen mit Beweisprodukten. Gelingt Lernenden diese Konstruktion kohärenter Erfahrungen nicht, so bleibt ihnen die Kultur der Mathematik verschlossen. Das Medium des Beweises wird so betrachtet zu einem zentralen Aspekt des Erlernens der Mathematik und des Eintretens in eine Kultur der Mathematik, die diese Prozesse im Sinne einer Enkulturation ermöglichen wie auch verhindern kann.

Durch diese verschiedenen Facetten einer Enkulturationsfunktion von Beweisen wird deutlich, wie wichtig diese Funktion für das Erlernen der Beweisaktivität ist. Je gezielter bzw. intendierter die Enkulturation durch das Beweisen stattfindet, desto besser kann diese gelingen.

8.3.4 Wahrnehmung bzw. Akzeptanz von Beweisen

Ein zentraler Gegenstand dieser Forschungsarbeit ist die Erörterung, Konzeptualisierung und Operationalisierung von Beweiswahrnehmung und Beweisakzeptanz. In diesem Abschnitt werden die entsprechenden Ergebnisse zusammenfassend dargestellt und deren Bedeutung herausgestellt.

Funktionen von Beweisen und ein damit verbundenes Beweisbedürfnis sind häufiger Gegenstand didaktischer Erörterungen zum Erlernen der Beweisaktivität und werden als wichtige Voraussetzungen für die Herausbildung entsprechender Beweiskompetenzen beschrieben. Offensichtlich muss aber für ein Verständnis entsprechender Aspekte zum Beweis bzw. für deren Herausbildung ein Beweis vom Betrachter ‚verstanden' werden. Im Rahmen der erfolgten Forschung wurde sich diesem ‚Verstehen' von Beweisen zunächst mit der Beschreibung der *Wahrnehmung von Beweisen* genähert (s. Abschnitt 5.4.2.2). Hierbei wurde deutlich, dass bei einer Wahrnehmung von Beweisen zwischen einer psychologischen Ebene und einer logischen Ebene unterschieden werden kann und dass eine vom Beweiskonstrukteur intendierte Wahrnehmung von Beweisprodukten durch den Betrachtenden nicht per se gegeben ist.

Im weiteren Verlauf der Forschungsarbeit wurde der Aspekt der Wahrnehmung von Beweisen weiterentwickelt, woraus eine Erörterung von *Beweisakzeptanz* resultierte. Beweisakzeptanz wurde in der vorliegenden Arbeit konzeptualisiert und operationalisiert als das Ausmaß, inwieweit bei einem vorgelegten Beweis vom Betrachter die Funktionen „Verifikation", „Überzeugung" und „Erklärung" empfunden werden und inwieweit der Beweis durch den Betrachter als „korrekter und gültiger Beweis" bewertet wird. Im Kontext der empirischen Studien zu der Lehrveranstaltung konnte unter Nutzung der explorativen Faktoranalyse ein Konstrukt abstrahiert werden, welches dieser Konzeptualisierung von Beweisakzeptanz entspricht. Die dabei konstruierten Skalen wiesen sehr hohe Reliabilitätswerte auf. Bei der Auswertung der Ergebnisse wurde schließlich deutlich, wie differenziert ‚Beweisakzeptanz' betrachtet werden muss, da verschiedene Teilaspekte einer Beweisakzeptanz (Verifikation, Erklärungsqualität etc.) von Lernenden unterschiedlich wahrgenommen werden.

Diese differenzierte Sichtweise auf das ‚Verständnis' von Beweisen als ‚Beweisakzeptanz', das auf der subjektiven Wahrnehmung verschiedener Aspekte bei Beweisen basiert, sollte in der (didaktischen) Forschung zum Beweisen weiterverfolgt bzw. mitgedacht werden. Denn die Betonung verschiedener Teilaspekte der Beweisaktivität, wie etwa Funktionen von Beweisen oder die Herausbildung eines Beweisbedürfnisses, können nur sinnstiftend und konstruktiv zu der Herausbildung einer Beweiskompetenz beitragen, wenn die entsprechenden Aspekte von den Lernenden auch subjektiv wahrgenommen und schließlich wertgeschätzt werden.

8.3.5 Proofs that explain – eine Diskussion[88]

In der (didaktischen) Literatur wird häufig auf die Erklärungsfunktionen von Beweisen hingewiesen, worauf die Betonung des Konzepts der ‚proofs that explain' basiert. Die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zu der Erklärungsqualität von Beweisen geben dazu Anlass, Aspekte dieses Konzepts kritisch zu hinterfragen. Nach einer theoretischen Exaktifizierung des Erklärungsbegriffs wird das Konzept ‚erklärender Beweise' mit empirischen Ergebnissen aus dieser Arbeit abgeglichen und anhand theoretischer Betrachtungen zu Anschauungsmitteln, zur Semiotik und zur Kognitionspsychologie kritisch diskutiert. Ziel wird es dabei sein, Möglichkeiten und Gelingensbedingungen für erklärende Beweise genauer zu beschreiben.

Neben der Verifikationsfunktion wird in der Literatur die Erklärungsfunktion von Beweisen als zweite Hauptfunktion von Beweisen aufgeführt (Brunner 2013, S. 13 in Anlehnung an Hersh 1993). Diese gründet sich u.a. auf der von Hanna vorgenommenen Unterscheidung von „proofs that prove" und

[88] Für die Anregung zu einer vertieften Diskussion des Konzepts der „proofs that explain" danke ich H. N. Jahnke.

„proofs that explain“ (1989), welche in der didaktischen Literatur große Beachtung gefunden hat. Im Allgemeinen soll im unterrichtlichen Geschehen den „proofs that explain“ der Vorzug gegeben werden, da Lernende meist schon vor der Beweisführung von der Gültigkeit einer Behauptung überzeugt seien (etwa Hanna 2000, S. 8 oder Hersh 1993, S. 396f.). Im Fokus des Beweisprozesses steht dann die Frage nach dem ‚Warum‘. Dieses erklärende Moment von Beweisen beschreibt Hanna (1989, S. 47) wie folgt: „I will say that proof explains when it shows what 'characteristic property' entails the theorem it purports to prove”. Hanna (1995, S. 48) weist darauf hin, dass erklärende Beweise je nach Kontext (Klassenstufe, Vorbildung etc.) andere Gestalt annehmen können.

In den folgenden Ausführungen wird der Erklärungsbegriff in Abgrenzung zum philosophischen Erklärungsbegriff in einer pädagogischen Deutung betrachtet: Erklärung soll zu einem Verstehen führen, warum etwas wahr ist (vgl. Hanna 2016 und Müller-Hill 2016 für eine vertiefte Diskussion des Erklärungsbegriffs).

In der Literatur werden verschiedene Beispiele für erklärende Beweise angegeben, wobei häufig geometrische Repräsentationen mit Punktmusterdarstellungen o.ä. als sogenannte Anschauungsmittel verwendet werden (vgl. die Beispiele in Hanna und Jahnke 1996, S. 904f.; Reiss und Hammer 2013, S. 50). Diese Beweise bzw. Beweisdarstellungen entsprechen Vorschlägen zu schuladäquaten Beweisformen, die in der (didaktischen) Literatur zu finden sind (vgl. Leiß und Blum 2006, S. 37f.; Leuders 2010, S. 53; Meyer und Prediger 2009). Hierbei werden symbolisch-algebraische Darstellungen nicht ausgeschlossen, durch den Gebrauch alternativer Darstellungsmittel soll allerdings häufig durch ein Mehr an ‚Anschaulichkeit‘ die Erklärungsqualität von Beweisen gesteigert werden.

In der in dieser Arbeit dargestellten Forschung sollten Studierende verschiedene Beweisformen (generischer Beweis mit Zahlen, generischer Beweis mit Punktmustern, Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen und formaler Beweis) in Form konkreter Beweisprodukte auch hinsichtlich ihrer Erklärungsqualität auf einer sechsstufigen Likert-Skala bewerten. Zu beiden Messzeitpunkten (Ein- und Ausgangsbefragung der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2014/15) wurde die Erklärungsqualität des formalen Beweises statistisch hoch signifikant am höchsten bewertet (Abschnitt 7.2.4.3 und 7.3.2.2). Diese Ergebnisse zeugen davon, dass das Konzept von erklärenden Beweisen nicht auf die Nutzung sogenannter ‚Anschauungsmittel‘ verkürzt werden darf. Im Gegenteil sollte der Erklärungsqualität der algebraischen Symbolsprache größere Beachtung geschenkt werden. Dieses Zwischenergebnis entspricht dabei auch den Forderungen in Jahnke (1984).

Es gilt somit zu hinterfragen, ob sogenannte ‚erklärende Beweise‘ wirklich ‚erklärend‘ sind, bzw. wann sie als solche wahrgenommen werden? Eine entsprechende (kritische) Sichtweise auf erklärende Beweise soll im Folgenden exemplarisch anhand von drei Perspektiven diskutiert werden: eine mathematikdidaktische Sicht auf den Gebrauch von ‚Anschauungsmitteln‘ in Anlehnung an Krauthausen (1989), Krauthausen und Scherer (2007), Söbbeke (2005) und Wittmann (1993), die semiotische Sicht auf Erkenntnis durch Zeichengebrauch nach Peirce und eine kognitionspsychologische Sicht auf das ‚Verstehen‘ in Anlehnung an Steiner (1996) und Stern (1992). Der Fokus wird bei der kognitionspsychologischen Perspektive von der Erklärung auf das „Verstehen“ verlagert, da Erklären in diesem Kontext nicht als diskursive Praktik verstanden wird: In Beweisen, die erklären, warum etwas gilt, soll vom Betrachter etwas verstanden werden, was dann als ‚Erklärung‘ für ein Phänomen beschrieben werden kann. Diese Fokusverschiebung ermöglicht eine weiter gefasste Erörterung der ‚proofs that explain‘.

Die Diskussion um den Nutzen von Anschauungsmitteln kann dabei durch die Ausführungen von Krauthausen (1989), Krauthausen und Scherer (2007), Söbbeke (2005) und Wittmann (1993) sinnvoll erweitert werden.

Mit dem Begriff der Anschauungsmittel soll an dieser Stelle bereits ein aktivistisches Lernverständnis des Sachverhalts ‚erklärende Beweise' eingenommen werden: Die Anschauungsmittel bzw. „Darstellungen mathematischer Ideen [sind] in der Hand der Lernenden zu sehen, als Werkzeuge ihres eigenen Mathematiktreibens, d.h. zur (Re-) Konstruktion mathematischen Verstehens" (Krauthausen und Scherer 2007, S. 242), sie müssen somit mehr als epistemologische Werkzeuge statt als ‚bloße' didaktische Hilfsmittel betrachtet werden (Wittmann 1993). Wichtig ist hierbei, dass sich aus dieser Perspektive der Wahrnehmende das Objekt in einem aktiven kognitiven Vorgang aneignen muss, die bloße Repräsentation eines Sachverhalts bedingt noch kein ‚Verständnis' desselben. Das Ziel dieses Wahrnehmungsprozesses ist der „Aufbau von Vorstellungs- oder Anschauungsbildern" (ebd., S. 244), auch, um mit den Darstellungen (mental) operieren zu können. Krauthausen (1989) führt verschiedene Kernpunkte für den Umgang mit Anschauungsmitteln auf, von denen vier für die vorliegende Diskussion besonders bedeutsam erscheinen. Diese Aspekte werden im Folgenden nach Krauthausen (1989, S. 40ff.) zusammenfassend paraphrasiert (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Söbbeke 2005, S. 21ff.).

(i) Von vorrangiger Bedeutung sind weniger die konkreten Repräsentanten als vielmehr ihre mentalen (inneren) Vorstellungsbilder

Anschauungsmittel in Form konkreter Repräsentationen führen einen Betrachter nicht unmittelbar zu den angestrebten Vorstellungsbildern und dem damit intendierten ‚Verständnis' des entsprechenden Sachverhalts. Als Zwischenstufe müssen die Ausbildung visueller Vorstellungsbilder und ein mentales visuelles Operieren in der Anschauung mit den verwendeten Mitteln erfolgen (vgl. Lorenz 1992, S. 2). Die Bewältigung dieser Zwischenstufe braucht Zeit, die man Lernenden geben muss. Die dabei auszubildenden Vorstellungsbilder sind nicht deckungsgleich mit dem Wahrgenommenen, da bei jeder Person weitere (individuelle) Informationen in die Vorstellungsbilder miteinfließen. Eine Ähnlichkeit des Vorstellungsbildes mit dem Gegenstand ist dann eine Folge der Repräsentation, die etwa der Lehrende dem Lernenden anbietet. Ein Wissensunterschied zwischen Lehrendem und Lernendem kann dabei dafür ausschlaggebend sein, dass dieser die Ähnlichkeit nicht erkennt (vgl. Igl 1995, S. 10). Hieraus folgert Krauthausen (1998, S. 41), „dass die mentalen Prozesse zur Ausbildung von Vorstellungsbildern ebenso wie die mentalen visuellen Operationen durch (geeignete!) Anschauungsmittel zwar (unterschiedlich gut) unterstützt werden können, sie lassen sich aber keinesfalls zwingend bestimmen oder garantieren".

(ii) Mentale Vorstellungsbilder sind keine bloße Abbildung der Realität; sie entstehen durch aktive Konstruktionsprozesse der Lernenden

Der Betrachter konstruiert selbst den Sinngehalt und damit die Tragweite des von ihm Betrachteten, denn die unspezifischen Wahrnehmungsreize erlangen erst im Gehirn durch einen aktiven Konstruktionsprozess eine Bedeutung. Somit können gleiche Objekte von verschiedenen Betrachtern unterschiedlich ‚verstanden' werden.

(iii) Wahrnehmung ist abhängig vom Individuum (idiosynkratisch) und bestimmt durch sein Wissen von der Wirklichkeit und seinen individuellen Wahrnehmungserfahrungen

Aus dem unter (ii) beschriebenen Aspekt folgt, dass Wahrnehmung immer abhängig vom Individuum und dabei von seinem Wissen und Vorerfahrungen bestimmt ist. Somit können Anschauungsmittel bei verschiedenen Personen zu (mindestens teilweise) unterschiedlichen Vorstellungsbildern führen

(iv) Veranschaulichungsmittel wirken nicht selbsterklärend

Anschauungsmittel sind nicht selbsterklärend bzw. selbstevident, sie müssen im Gegenteil zunächst als Lerngegenstände betrachtet werden:

> „Veranschaulichungshilfen sind für die Mehrzahl der Kinder keine aus sich heraus „sprechenden Bilder" sondern Unterrichtsstoff, wie jeder andere. Damit unterliegen auch diese Darstellungen den Gesetzmäßigkeiten jedes Unterrichtsstoffes: Je besser sie geübt werden, desto häufiger werden sie wieder erkannt, und je länger die Übung zurückliegt, desto eher geraten sie in Vergessenheit." (Schipper 1982, S. 109).

Schließlich muss auch der symbolische Charakter von Anschauungsmitteln mitbedacht werden. Wie Söbbeke (2005, S. 21) in Anlehnung an Jahnke (1984) ausführt, beschränkt sich der Bedeutungsgehalt von Anschauungsmitteln nicht auf ihre direkt ablesbaren Eigenschaften: Da Anschauungsmittel „als Mittel zur Verallgemeinerung dienen, bleibt das, was sie aussagen, implizit" (Jahnke 1984, S. 41). Söbbeke (2005, S. 21) spricht daher von der essentiellen „Symbolfunktion" von Anschauungsmitteln.
Durch diesen Symbolcharakter wird das Verstehen und Anwenden von Anschauungsmitteln zu einem symbolischen Akt. In diesem Sinne sind Anschauungsmittel „ikonisch verschlüsselte Informationen über abstrakte mathematische Begriffe und Operationen" (Schipper 1995, S. 13, zitiert aus Söbbeke 2005, S. 21). Die damit verbundenen mathematischen Sachverhalte müssen von den Lernenden in einem Akt der Interpretation selbst konstruiert werden.

Aus der Erkenntnis, dass Veranschaulichungsmittel zunächst als Unterrichtsgegenstand gelernt werden müssen, folgt, dass im Unterricht nur wenige Mittel eingesetzt und deren Chancen und Möglichkeiten (im Sinne einer Reichhaltigkeit) ausgiebig erkundet und erlernt werden sollten.

Der Aspekt des Aneignens von Veranschaulichungsmitteln weist dabei deutliche Bezüge zu dem Konstrukt des notwendigen kollateralen Wissens für den Umgang mit einem Diagrammsystem von Peirce auf (vgl. Abschnitt 2.5). Folgt man der oben formulierten Ansicht, dass Anschauungsmittel als epistemologische Werkzeuge betrachtet und verwendet werden müssen, so ist dies verbunden mit einer Fokusverschiebung von Veranschaulichungen als bloßen Visualisierungen hin zu Veranschaulichungen als Diagrammen (i.S. von Peirce, vgl. 2.5), mit denen im Kontext eines Diagrammsystems agiert wird. Verschiedenen Diagrammen wird dabei, verstanden als ‚Visualisierung', häufig eine den Lernprozess begünstigende bzw. unterstützende Rolle zugeschrieben (Dörfler 2008, S. 1):

> The term "visualization" generally is used in opposition to algebraic or (so-called) formal ways of notation. Thus, visualization uses a rather geometric and graphic-like mode and it is predominantly two-dimensional (i.e. non-linear and non-sequential). […] Mostly, to visualizations is attributed a supportive role for understanding, for insight and for intuitive thinking but also for invention and detection. This is based on the assumption of a more direct accessibility and intelligibility of those visualizations: formal and algebraic symbolic mathematics can purportedly be explained by visualizing it in a different graphic-geometric mode. The faculties of vision for detecting patterns and regularities will serve this purpose.

Aus der Perspektive der semiotischen Erkenntnistheorie von Peirce muss festgehalten werden, dass uns Diagramme nur dann als Mittel der Erkenntnis zur Verfügung stehen, wenn wir mit ihnen soweit vertraut sind, „dass wir gleichsam durch diese Zeichen hindurch direkt das von ihnen Repräsentierte wahrnehmen“ (Hoffmann 2005, S. 35). Für einen Erkenntnisakt ist dabei immer kollaterales Wissen erforderlich, Wissen, das nicht im Fokus der Aufmerksamkeit steht, aber implizit verwendet wird und somit vorausgesetzt werden muss. Im Kontext von Diagrammsystemen müssen hierunter u.a. das Wissen um die Konstruktion der Diagramme, die zugelassenen Transformationsregeln und die Lesart der erhaltenen Diagramme gefasst werden. Solch ein Wissen um den Umgang mit Diagrammen muss für das gewinnbringende Lesen entsprechender Darstellungen bereits als Vorwissen vorhanden sein. Erst dann können Darstellungen (und damit auch erklärende Beweise) gewinnbringend gelesen werden.

Wie Dörfler (2006, S. 212) ausführt, muss daher im Unterricht durch verschiedene Tätigkeiten eine Praxis des Umgangs mit (den zu verwendenden) Diagrammen ausgebildet werden. Diese Tätigkeiten umfassen u.a. das Einüben eines elementaren Umgangs (‚Rechnungen‘) mit Diagrammen nach den jeweiligen Regeln eines Diagrammsystems, das Experimentieren mit Diagrammen und das Erforschen ihrer Eigenschaften, die Untersuchung der Beziehungen zwischen verschiedenen Typen von Diagrammen, das Erfinden und Entwerfen von Diagrammen und das Anwenden von fertigen Diagrammen zur Modellierung (ebd., S. 213ff.).

Zum Abschluss dieser Diskussion um ‚erklärende Beweise‘ soll das Themenfeld durch einen kurzen Exkurs in die Kognitionspsychologie sinnstiftend erweitert werden. Da beim Lesen ‚erklärender Beweise‘ das Erklären nicht als eine diskursive Tätigkeit stattfindet, scheint der Vorgang des Verstehens adäquat für die Beschreibung des Erkenntnisaktes des Betrachtenden zu sein (vgl. hierzu den pädagogischen Erklärungsbegriff von Hanna 2016 oben). So wird auch in der Kognitionspsychologie die Notwendigkeit des ‚Verstehens‘ für den Wissenserwerb aus einer Darstellung betont (etwa Steiner 1996, S. 195ff.). Verstehen kann dabei als ein Integrieren von neuen Informationen in die Struktur des Vorwissens, als Konstruktion eines sogenannten mentalen Modells, interpretiert werden:

> Lernen […] beginnt mit einem Aktivieren von Vorwissen, in das die neue Textinformation integriert wird, wobei diese Integration zu einer Veränderung des Vorwissens, d.h. zum Aufbau neuer Wissensstrukturen oder Wissensrepräsentationen führt. (Ebd., S. 195)

Ein Lernender benötigt Vorwissen, um Informationen verarbeiten zu können. Zu diesem Vorwissen gehören u.a. sach- bzw. fachbezogene Kenntnisse und Wissen über die Semantik und Syntax der dabei verwendeten Repräsentation der Inhalte. Das Verstehen von neuen Informationen geschieht dabei nicht rein additiv, sondern erfolgt über Integration in das vorhandene Vorwissen. In einem Prozess der Elaboration werden aufgrund des vorhandenen Vorwissens die neuen Informationen so verarbeitet, dass sich diese darin einfügen können, wodurch ein sogenanntes inneres mentales Modell konstruiert wird (ebd. S. 208, nach Collins et al. 1980). Stern (1992) diskutiert das Verstehen als Konstruktion eines mentalen Modells für die Mathematik und betont: „Wie dieses mentale Modell aussieht, hängt vom verfügbaren mathematischen Vorwissen ab“ (ebd., S. 9). Da dieses verfügbare mathematische Vorwissen individuell unterschiedlich ist, wird hierbei die Subjektivität und Relativität des ‚Verstehens‘ deutlich. Vor diesem Hintergrund kann „erklärenden Beweisen“ somit nicht pauschal das Attribut ‚erklärend‘ zugesprochen werden. Das Verstehen bestimmter

Darstellungen bzw. Beweise als Konstruktion mentaler Modelle ist ein individueller Prozess und hängt vom individuellen Vorwissen einer Person ab.

Zusammenfassung: Anschaulichkeit und proofs that explain

In den verschiedenen, oben aufgezeigten Perspektiven werden die Notwendigkeit von entsprechendem Vorwissen und der aktive Prozess der Verarbeitung von Darstellungen betont, um in einem Akt des Verstehens Informationen daraus zu gewinnen. Dadurch wird deutlich, dass die durch Anschauungsmittel intendierte ‚Anschauung' nichts per se Gegebenes bzw. Primitives, sondern etwas Erworbenes ist. Anschauungsmittel müssen in diesem Sinn zunächst als Lerngegenstände aufgefasst werden, sie sind Arbeitsmittel, die erst erworben werden müssen. Entsprechende ‚erklärende' Darstellungen müssen vom Betrachter gelesen und in einem Prozess des Verstehens aktiv verarbeitet werden. Hierzu ist ein gewisses Vorwissen („kollaterales Wissen" im Sinne von Peirce, s.o.) notwendig. Der aktive Konstruktionsprozess eines Sinngehalts auf der Basis eigenen Vorwissens betont die Subjektivität und Relativität des Verstehens entsprechender Darstellungen, welche folglich weder selbstevident noch selbsterklärend sind (vgl. Jahnke 1984, S. 33). Es folgt hieraus, dass Anschauungsmittel als Arbeitsmittel in systematischen Lernumgebungen erarbeitet bzw. gelernt werden müssen (Lorenz 1992, S. 7) und dass nicht zu viele Anschauungsmittel im Unterricht verwendet werden dürfen (etwa Wittmann 1993).

Für das Konzept der erklärenden Beweise bedeutet dies, dass Beweise, in denen ‚anschauliche' Darstellungen verwendet werden, nicht per se als erklärend bezeichnet werden können. Das Verstehen von Darstellungen, was zu einem erklärenden Moment des Beweises führen bzw. beitragen soll, ist ein subjektiver Akt, der vom Individuum auf der Basis seines Vorwissens vollführt werden muss. Beweise können erklärend wirken, sie tun dies nicht per se.

Bei der Diskussion anschaulicher Darstellungsmittel muss dabei das erklärende Potential der Symbolsprache der Algebra mitbedacht werden. Dies scheint auch daher notwendig, da dieses ‚Diagrammsystem' wohl dasjenige ist, welches in den höheren Schulstufen am häufigsten verwendet und somit geübt wird. Andere Darstellungen, wie etwa Punktmuster, werden dagegen weniger verwendet, wodurch das notwendige Wissen für das Verstehen entsprechender Darstellungen schwinden kann und Darstellungen ihr Erklärungspotential einbüßen (vgl. hierzu das Zitat aus Schipper (1982) oben). Wie Hanna (1995) betont, unterscheiden sich erklärende Beweise je nach Kontext der Lernenden und ihrem Vorwissen. Dieser Fakt der Variabilität ‚erklärender Beweise' sollte in der allgemeinen mathematikdidaktischen Literatur mehr Aufmerksamkeit erfahren, in der gewöhnlich Beweise mit ‚anschaulichen' Darstellungen bereits als „proofs that explain" betrachtet werden.

8.4 Diskussion des Forschungsprojekts anhand der aufgezeigten Gütekriterien

In diesem Abschnitt werden die in dieser Arbeit verwendete Forschungsmethode des Design-Based Research (7.3.1) und die damit erzielten Ergebnisse (7.3.2) diskutiert. Grundlage der Diskussion sind die in Abschnitt 3.2 dargelegten Güte- und Qualitätskriterien entsprechender Forschungsprojekte.

8.4.1 Diskussion der Forschungsmethode

In diesem Abschnitt wird die erfolgte Anwendung der Forschungsmethode des Design-Based Research diskutiert. Dazu werden die in Kapitel 4 aufgeworfenen Fragen beantwortet und angeführten Gütekriterien erörtert. Dabei geht es im Besonderen um die Involviertheit des Forschers und die Validität und Reliabilität der erfolgten Forschung.

8.4.1.1 Involviertheit des Forschers

Der Verfasser dieser Arbeit war in den Wintersemestern 2012/13, 2013/14 und 2014/15 bei der Durchführung der Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ als Wissenschaftlicher Mitarbeiter beteiligt. Zu seinen Aufgabenbereichen gehörten die Organisation des Übungsbetriebs, das Abhalten einer Kleingruppenübung und der Zentralübung, woraus auch Kontakt mit den Studierenden resultierte, die gleichsam als Probanden in den verschiedenen Studien fungierten. Somit war der Autor als Vertreter der hochschulmathematischen Kommunität an der Herausbildung entsprechender sozio-mathematischer Normen in verschiedenen Unterrichtssituationen beteiligt. Die stets sehr guten Bewertungen seiner Lehrveranstaltungen im Rahmen der durch die Fachschaft durchgeführten Veranstaltungsevaluation zeugen dabei von einer hohen Akzeptanz bzw. Beliebtheit bei den Studierenden. Insofern muss kritisch diskutiert werden, inwiefern die Ausbildung verschiedener Ansichten zum Beweisen (Wahrnehmung, Akzeptanz etc.) bzw. die Übernahme verschiedener Normen im Kontext des Beweises durch die Studierenden auch durch die Involviertheit des Forschers beeinflusst wurden.

Bei der Erörterung einer möglichen Beeinflussung der Studierenden durch den Forscher ist dabei grundlegend, dass es in der vorliegenden Forschungsarbeit nicht darum ging, bestimmte Ansichten zum Beweisen oder zu Beweisformen den Studierenden aufzuoktroyieren. Im Zentrum des Interesses standen die verschiedenen Wahrnehmungen der Studierenden zum Beweisen und ihre Akzeptanz zu verschiedenen Beweisformen, wie sie zu Beginn und zum Ende der Lehrveranstaltung vorlagen. Vor diesem Hintergrund wurden im Rahmen der Lehrveranstaltung verschiedene Beweisformen und Diagrammsysteme vergleichend diskutiert und somit entsprechende Vor- und Nachteile erörtert. Aufgrund der vorgenommenen Operationalisierung von Beweisakzeptanz und Beweispräferenz sollten diese Forschungsergebnisse höchstens marginal durch die Involviertheit des Forschers beeinflusst worden sein. In Bezug auf die Herausbildung sozio-mathematischer Normen muss angemerkt werden, dass gerade die Aushandlung dieser Normen zwischen Lernenden und Lehrenden ein zentraler Aspekt dieser theoretischen Sichtweise ist. Für die vorliegende Forschung war es daher von grundlegender Bedeutung, dass sich die Lehrenden (Professor, Wissenschaftlicher Mitarbeiter und studentische Hilfskräfte) über die zu vertretenden Normen im Klaren sind und diese gemeinsam in allen Bereichen der Lehrveranstaltung (Vorlesung, Zentralübung und Kleingruppenübungen) gegenüber den Studierenden vertreten. Im Sinne der Theorie der sozio-mathematischen Normen ist diese ‚Beeinflussung durch den Forscher‘ somit intendiert. Generell können Auswirkungen der Involviertheit des Forschers auf die Bewertungen der Studierenden (etwa im Rahmen der Effektivitätsstudie, vgl. Kapitel 7) auch im Sinne sozialer Erwünschtheit aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Neben der Involviertheit des Forschers als beteiligter Lehrender gilt es zudem, seine Involviertheit als tatsächlicher ‚Forscher‘ bei dem Design der Forschungsprojekte, der Datensammlung, Datenauswertung und Interpretation zu betrachten. In Abschnitt 3.1 wurden nach Plomp (2010, S. 30ff.) verschiedene Maßnahmen aufgeführt, um gerade aufgrund der Involviertheit des Forschers die Objektivität der Forschung sicherzustellen. Im Folgenden wird beschrieben, inwiefern diese Maßnahmen bei der vorliegenden Forschung berücksichtigt und umgesetzt wurden:

a) Die Rolle und der Einfluss des Forschers auf das Projekt wurden im vorliegenden Abschnitt offengelegt und diskutiert. Auf mögliche Einschränkungen der Ergebnisse wurde hingewiesen.
b) Die erhaltenen Forschungsergebnisse wurden nicht isoliert betrachtet, sondern im Kontext mehrerer Forschungsergebnisse, auch innerhalb verschiedener Durchführungen der Lehrveranstaltung, diskutiert und neu interpretiert, wodurch Fehlentscheidungen entgegengewirkt werden konnte.
c) Verschiedene Teilforschungen wurden in nachfolgenden Durchläufen der Lehrveranstaltung wiederholt und somit erneut überprüft und reflektiert. Über die verschiedenen Teilergebnisse der Forschung wurde während des gesamten Forschungsprojektes kontinuierlich mit projektunbeteiligten Wissenschaftlern diskutiert (vgl. Abschnitt 8.4.1.3).
d) Bei der durchgeführten Forschung wurden die Gütekriterien der Reliabilität und Validität stets mitbetrachtet und diskutiert. Außerdem umfasste die Forschung sowohl qualitative als auch quantitative Forschungsmethoden, um eine umfassendere Sicht auf das Forschungsprojekt zu ermöglichen.
e) Der Nutzen und die Effektivität der Lehrinnovation wurden im Rahmen einer Effektivitätsstudie zur vierten Durchführung der Lehrveranstaltung empirisch getestet (s. Kapitel 7).

8.4.1.2 Validität der Forschung

Für die Sicherstellung der **internen Validität** wurden im Kontext der Beschreibungen der verschiedenen Durchführungen der Lehrveranstaltung die damit verbundenen Teilstudien gesondert aufgeführt und diskutiert, auch, um die Motive für die theoretischen Ableitungen darzustellen und diese Ableitungen gleichsam aus der Praxis heraus zu begründen (Kapitel 5). Die hierbei erhaltenen Ergebnisse und die daraus skizzierten Problemfelder wurden im Rahmen der jeweiligen retrospektiven Analysen erörtert. Die auf der Basis dieser Analysen erfolgten Maßnahmen zur Verbesserung der Lehre wurden anschließend dargelegt, um eine möglichst große Transparenz zu gewährleisten. In den folgenden Durchgängen wurde nach Evidenzen gesucht, die den Erfolg der vorgenommenen Modifikationen belegten oder ggf. in Frage stellten.

Für das Gütekriterium der **externen Validität** werden in Abschnitt 8.4.2 die Verallgemeinerbarkeit der Theorie und die Übertragbarkeit und der Nutzen der Ergebnisse diskutiert.

8.4.1.3 Reliabilität der Forschung

Für die **interne Reliabilität** der Forschung wurden bei der Darstellung der Teilstudien die Datenerhebungen und Datenauswertungen nachvollziehbar dargelegt. Die Reliabilität der Messinstrumente wurde an den entsprechenden Stellen herausgestellt bzw. diskutiert. Im Prozess der Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung wurden die Interpretationen der Studienergebnisse und die damit begründeten Schlussfolgerungen und Modifikationen im Rahmen der retrospektiven Analysen diskutiert. Diese Interpretationen und Schlussfolgerungen wurden während des gesamten Forschungsprojektes kontinuierlich mit projektunbeteiligten Wissenschaftlern diskutiert, hierzu gehören u.a. zwei anderthalbstündige Sitzungen pro Semester der Paderborner Gruppe des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik, monatliche Dissertationsbesprechungen mit dem Betreuer dieser Arbeit und verschiedene Vorträge auf (inter-) nationalen Tagungen (die

Jahrestagungen der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik in den Jahren 2013 bis einschließlich 2016, die Tagungen der Gruppe der „European Research in Mathematics Education“ (CERME) in den Jahren 2013 und 2015, die Tagung des Vereins „Psychology of Mathematics Education“ 2014 und die hochschuldidaktischen Tagungen in Oberwolfach 2014 und in Hannover-Herrenhausen 2015).

Für die **externe Reliabilität** wurde bereits oben die Involviertheit des Forschers im Gesamtprojekt erörtert. Auch wurde bei der Darstellung des Forschungsprojekts darauf geachtet, dass jeder Forschungszyklus so beschrieben wird, dass jede Designentscheidung nachvollziehbar wird. Im diesem Sinn ist die Nachvollziehbarkeit des Erkenntnisverlaufs im Sinne einer ‚trackability‘ sichergestellt.

8.4.2 Diskussion der Güte der Ergebnisse

Im Zentrum der Diskussion der Güte der erhaltenen Ergebnisse stehen die Aspekte „Verallgemeinerbarkeit der erhaltenen theoretischen Ergebnisse“ (7.3.2.1), „Allgemeingültigkeit und Replizierbarkeit der empirischen Ergebnisse“ (7.3.2.2) und „Übertragbarkeit und Nutzen der erzielten Ergebnisse“ (7.3.2.3).

8.4.2.1 Verallgemeinerbarkeit der erhaltenen theoretischen Ergebnisse

In dem oben dargestellten Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie in der Domäne ‚Begründen und Beweisen‘ wird keine absolute Gültigkeit der formulierten Designprinzipien beansprucht. Vielmehr handelt es sich dabei prospektiv betrachtet um empirisch begründete Empfehlungen und auf das Lernen ausgerichtete antizipierende Behauptungen, die in der weiteren Praxis getestet und modifiziert werden sollen (vgl. Bakker 2004, S. 39ff.). Folglich wird nicht behauptet, dass das Lernen in dieser Domäne unter Anwendung der aufgestellten Designprinzipien im Hinblick auf jede Adressatengruppe genauso verlaufen wird, wie es in diesem Fall geschehen ist, sondern dass deren Anwendung bzw. Berücksichtigung entsprechende Lernprozesse begünstigen wird. Verallgemeinerbarkeit versteht sich somit nicht als unveränderte Übertragung von Empfehlungen, sondern in einer entsprechenden Adaption.

Die durch die Kombination der Theorien des diagrammatischen Schließens und der sozio-mathematischen Normen entstehenden Perspektiven für die Beweisdidaktik sind aus der Praxis der Forschung heraus entstanden und wurden in ihrer allgemeinen Formulierung für die allgemeine Theorie fruchtbar gemacht. Dieses Zusammenspiel von Zeichentätigkeit im Kontext auszuhandelnder Normen muss perspektivisch weiter erörtert werden. Auch die mit diesen im Kontext von Beweisen auszuhandelnden Normen einhergehende Enkulturationsfunktion von Beweisen ist nicht an die vorliegende Situation der Adressaten oder der Bildungseinrichtung gebunden. Diese funktionale Sichtweise auf das Beweisen tangiert alle Bereiche der Mathematikausbildung. Die herausgestellte Bedeutung von einem Konstrukt ‚Beweisakzeptanz‘, exemplarisch vertieft bei der Diskussion des Konzepts der erklärenden Beweise, muss ebenfalls situationsunabhängig betrachtet werden: Ein so betrachtetes ‚Verstehen‘ von Beweisen gilt es in der Beweisdidaktik weiter zu erforschen.

8.4.2.2 Allgemeingültigkeit und Replizierbarkeit der empirischen Ergebnisse

Im Kontext dieser Forschungsarbeit wird zunächst kein Anspruch auf Verallgemeinerbarkeit bzw. auf Replizierbarkeit der Ergebnisse erhoben. Die erhaltenen Ergebnisse beziehen sich auf die spezielle Klientel der Lehramtsstudierenden (Haupt-, Real- und Gesamtschule) an der Universität Paderborn in den Jahren 2011 bis 2015. Allerdings kann vermutet werden, dass entsprechend konzipierte

Lehrveranstaltungen mit Lehramtsstudierenden für Haupt-, Real und Gesamtschule zu ähnlichen Ergebnissen führen werden. Dabei sind die in diesen Teilforschungen betrachteten Probandenzahlen zu gering, um Ergebnisse verallgemeinern zu können. Dem Aspekt der Replizierbarkeit der empirischen Ergebnisse in anderen Kontexten (Bildungsstätten und Klientel), wurde bei der empirischen Forschung durch die Berücksichtigung der Gütekriterien Objektivität (i. S. der Involviertheit des Forschers), Validität und Reliabilität Rechnung getragen. Die Replikation der erhaltenen Ergebnisse und die damit einhergehende Validierung bzw. Erweiterung der gewonnenen Theorie erweist sich hierbei als Perspektive für die weitere Forschung.

8.4.2.3 Übertragbarkeit und Nutzen der Ergebnisse

Der oben formulierte Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie für die Domäne „Begründen und Beweisen“ im Übergang Schule/Hochschule stellt zunächst eine empirisch begründete und theoriebasierte Empfehlung dar, welche sich in der Praxis bereits einmal bewährt hat. Da dieser Beitrag bewusst stark an die Adressaten und ihre Bedürfnisse angepasst wurde, bedürfen verschiedene Aspekte bzw. Schwerpunkte bei ihrer Übertragung in andere Kontexte einer entsprechenden Modifikation. Mit der exemplarischen Bereitstellung von Lehrempfehlungen (vgl. die oben formulierten Designprinzipien), Arbeitsmaterialien (konkreten Aufgaben und exemplarischen Aufgabenformaten) und der Adaption theoretischer Rahmentheorien (diagrammatisches Schließen und sozio-mathematische Normen) wurde die Grundlage dafür geschaffen, die hier erzielten Ergebnisse zu adaptieren und in andere Kontexte (Institutionen, Lerngruppen etc.) zu übertragen.

Der unmittelbare Nutzen der in diesem Forschungsprojekt erarbeiteten Ergebnissen liegt zunächst in der empirisch begründeten (Weiter-) Entwicklung einer neuen und innovativen Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende (Haupt-, Real- und Gesamtschule). Diese begründete Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung, begleitet durch die Theorien des diagrammatischen Schließens und der sozio-mathematischen Normen, kann dabei als exemplarisch für weitere (hochschul-) didaktische Forschungsprojekte im Sinne des Design-Based Research betrachtet werden. Im Rahmen dieses Forschungsprozesses wurden dabei weitere Ziele erreicht, hierzu gehören (u.a.) (i) die Entwicklung von Testinstrumenten für die Erforschung zentraler Aspekte zum Beweisen, (ii) die Erforschung der Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen von Studierenden zu Beginn des Studiums (bzw. zum Beginn der Lehrveranstaltung) und (iii) die Erforschung der Auswirkungen der Lehrveranstaltung auf die Beweisvorstellungen, -kompetenzen und -einstellungen der Teilnehmenden. Weitere erreichte Ziele wurden oben im Abschnitt „Weitere Beiträge zur Theorieentwicklung“ dargestellt. Diese Ziele umfassten (iv) die Verbindung der Theorie des diagrammatischen Schließens und der sozio-mathematischen Normen, (v) die Herausstellung und Formulierung der Enkulturationsfunktion von Beweisen, (vi) die Herausstellung und Konzeptualisierung von Beweiswahrnehmung und Beweisakzeptanz und schließlich (vii) eine Diskussion des Konzepts der ‚erklärenden Beweise‘. An dieser Stelle scheint die Hoffnung angebracht, dass die hier erreichten Ziele auf verschiedenen Ebenen der Didaktik der Mathematik von Nutzen für die weitere Forschung in diesen Gebiet sein werden. Dieser potentielle Nutzen wird im folgenden Abschnitt in Form von Perspektiven für die Forschung weiter beschrieben.

8.5 Perspektiven für die Forschung

Durch diese Arbeit lassen sich übergeordnet auf zwei Ebenen Perspektiven für die weitere Forschung angeben: zum einen bzgl. der adressatenspezifischen Vermittlung von Lerninhalten und zum anderen bzgl. der Domäne der Beweisdidaktik.

8.5.1 Perspektiven für eine adressatenspezifische Vermittlung von Lerninhalten

Im Zentrum dieser Forschungsarbeit stand die (Weiter-) Entwicklung einer Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende für Haupt-, Real- und Gesamtschule, in welcher das Beweisen unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität eine besondere Rolle spielen sollte. Vor diesem Hintergrund wurden in einem ersten Schritt entsprechende adressatengerechte Fachinhalte und Leitprinzipien erörtert, welche für die Lehrveranstaltung konstituierend waren (Abschnitt 1.3). Aufgrund beschriebener normativer Ansprüche konnten verschiedene Aspekte der Lehrveranstaltung evaluiert werden, was im Rahmen retrospektiver Analysen im Sinne des Design-Based Research zu Modifikationen der Lehrveranstaltung führte.

Es stellt sich die Frage, wie eine entsprechende Brückenkursveranstaltung als ‚Einführung in die Kultur der Mathematik' für einen anderen Adressatenkreis aussehen würde: Welche Inhalte im Kontext welcher Normen würden dabei in den Vordergrund bzw. in den Hintergrund rücken? Eine mögliche Antwort auf diese Frage bilden die Konzepte von Grieser (2013) und Hilgert und Hilgert (2012) für die Lehramtsstudierenden des gymnasialen Lehramts. Gerade aus hochschuldidaktischer Perspektive erscheint diese Frage virulent, wo doch das Beweisen oder weitergefasst der Übergang von der Schule zur Hochschule (international) als ein zentrales Problemfeld der Mathematikausbildung betrachtet wird und sich die Zielsetzungen von Lehrveranstaltungen aufgrund der verschiedenen Adressatenkreise (Studierende der Studiengänge Bachelor Mathematik, Lehramt mit verschiedenen Ausprägungen und für verschiedene Schultypen, Ingenieure, Maschinenbauer etc.) doch grundlegend unterscheiden (müssten). Die theoretische Ausarbeitung und praktische Ausgestaltung universitärer Lehrerausbildungen mit entsprechender Begleitforschung stellt einen zentralen Anspruch an die Hochschuldidaktik der Mathematik dar.

Die Frage nach einer adressatenspezifisch ausgerichteten universitären Lehrveranstaltung gilt es dabei auch losgelöst von der Übergangsproblematik und der Thematik des Beweisens zu betrachten. Diesen Leitgedanken der forschungsbasierten Weiterentwicklung universitärer Lehrveranstaltungen unter Beachtung der Vermittlung fachlicher Aspekte im Rahmen sozio-mathematischer Normen gilt es auch auf die höheren Semester der Universitätsausbildung zu übertragen. Dafür muss offensichtlich ein ‚allgemeiner' Konsens über die Zielsetzungen von Lehrveranstaltungen in den verschiedenen Studiengängen herbeigeführt werden. Entsprechende universitätsübergreifende bzw. (inter-) nationale Erörterungen stehen dabei noch aus.

Aus dieser Perspektive heraus lassen sich die folgenden Forschungsdesiderate formulieren:

1. Wie kann bzw. sollte das Themenfeld ‚Begründen und Beweisen' im Übergang von der Schule zur Hochschule für andere Studiengänge adressatenspezifisch handhabbar gemacht werden?
2. Inwiefern können universitäre Lehrveranstaltungen in höheren Semestern zum Gegenstand ähnlicher Forschungsprojekte werden?
3. Welche Aspekte sozio-mathematischer Normen werden im Kontext anderer Fachinhalte virulent?
4. Welchen Zielsetzungen sollen fachliche und fachdidaktische Lehrveranstaltungen an der Universität im Hinblick auf das Attribut ‚adressatengerecht' bzw. ‚adressatenspezifisch' folgen?

Diese weitgreifenden Forschungsanliegen sollen dabei nicht global bearbeitet werden. Vielmehr verlangen die aufgeführten Punkte nach weiteren exemplarischen Forschungsprojekten, die als

Diskussionsgrundlage für weitere Perspektiven fachdidaktischer (Entwicklungs-) Forschung dienen können.

8.5.2 Perspektiven für die Beweisdidaktik

Weitere Perspektiven für die Forschung ergeben sich aus den in dieser Arbeit thematisierten Aspekten einer Didaktik des Beweisens.

Im Kontext der vorliegenden Forschung wurden u.a. die folgenden Aspekte zum ‚Begründen und Beweisen' behandelt: der Beweis-, Argumentations- und Begründungsbegriff, didaktisch-orientierte Beweiskonzepte, die Frage: „Wann ist ein Beweis ein Beweis?“, Beweisbedürfnis, Funktionen von Beweisen, Einstellungen zum Beweisen (Beliefs, Selbstwirksamkeitserwartung und Beweisaffinität) und Beweisakzeptanz. Jeder einzelne dieser Aspekte eröffnet weitreichende Perspektiven für weitere Forschungsprojekte. Im Folgenden werden entsprechende Möglichkeiten in Form von Forschungsdesideraten skizziert. Dabei kann kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden, vielmehr geht es um die Darstellung von Forschungsschwerpunkten, die sich als Fortsetzung der vorliegenden Arbeit herauskristallisieren:

1. Über die genaue Bedeutung der Begriffe „Beweis“, „Argumentation“ und „Begründung“ herrscht in der Mathematikdidaktik national wie international keine Einigung. Reid (2005) betont zu Recht, dass erst durch die Einigkeit über zentrale Begriffe im Kontext des Beweisens die Möglichkeit einer gelingenden Didaktik und Forschung zum Beweisen entsteht. In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Standpunkte über die Bedeutung der Begrifflichkeiten erörtert und schließlich begründet der eigene formuliert (Abschnitt 2.3). Es scheint hierbei zentral, dass die formulierten Ergebnisse nicht als weiterer separater Standpunkt in der Diskussion betrachtet werden sollen. Vielmehr sollen die vertretenen Ansichten zu einer Diskussion beitragen, die schließlich zur Begriffsklärung beiträgt.

2. Einen inhaltlichen Schwerpunkt der hier thematisierten Lehrveranstaltung bildeten die so genannten didaktisch-orientierten Beweiskonzepte (Kapitel 4). Eine Darstellung der historischen Entwicklung der verschiedenen Konzepte, ihrer Charakteristika und didaktischen Einbettungen ist bereits in Biehler und Kempen (2016) erfolgt. Allerdings ist bis heute das Themenfeld um die verschiedenen Beweiskonzepte nur sehr wenig empirisch erforscht worden. Doch gerade im Kontext der verschiedenen Beweiskonzepte werden offene Fragen einer Beweisdidaktik deutlich:

    a. Wie nehmen Lernende die verschiedenen Beweiskonzepte wahr?
    b. Welche Fehlvorstellungen treten in Bezug auf die verschiedenen Konzepte in der Praxis auf?
    c. Inwiefern sind Lernende in der Lage, entsprechende Beweise selbst zu konstruieren? (Auf diese Frage wurde für eine bestimmte Klientel in dieser Arbeit eine Antwort gegeben.)
    d. Wie werden die verschiedenen Beweiskonzepte in der Fachmathematik warum bewertet? Inwiefern muss dabei ein Konsens mit der Perspektive der Fachdidaktik herbeigeführt werden?
    e. Inwiefern sind die verschiedenen Beweiskonzepte wissenschaftspropädeutisch sinnvoll und können als anschlussfähig für spätere universitäre Beweisformen gelten?

3. Die Frage: „Wann ist ein Beweis ein Beweis?“ ist Gegenstand aktueller, auch mathematikphilosophischer Erörterungen. In der vorliegenden Arbeit wurde der Aspekt des diagrammatischen Schließens verwendet, um sich der Frage aus einer semiotischen Perspektive anzunähern. Die damit einhergehende Fokusverschiebung von der Darstellung eines Beweises zu der Bedeutung der verwendeten Schlüsse vermochte dabei die Diskussion um die Frage: „Wann ist ein Beweis ein Beweis?“ sinnstiftend zu erweitern, beantwortet diese aber nicht. Denn auch unter semiotischer Perspektive ist bisher ungeklärt, was den besonderen Schluss ‚Beweis‘ ausmacht[89]. Die Theorie sozio-mathematischer Normen vermag dabei in der Alltagspraxis diese Lücke zu beheben, denn die Frage, was einen Beweis ausmacht, wird im Lehr-/Lernkontext im Rahmen einer angelegter ‚Strenge‘ stetig neu bewertet und ausgehandelt. Für eine Erörterung allgemeiner Charakteristika müssen damit andere Perspektiven ausgemacht werden. Exemplarisch sei hier auf die Sichtweise von Aberdein (2013) auf die parallele Struktur in mathematischen Begründungen hingewiesen, die bereits in Abschnitt 8.3.2 thematisiert wurde. Es ist offensichtlich, dass für eine gelingende Beweisdidaktik ein Konsens über die Bedeutung des Begriffs „Beweis“ herbeigeführt werden muss (vgl. Punkt 5 oben). Dabei sollte auch diskutiert werden, ob überhaupt an einer dichotomen Unterscheidung (Beweis/kein Beweis) festgehalten werden kann.

4. Wie in Abschnitt 2.1.6 dargelegt wurde, ist das Vorhandensein eines (subjektiven oder objektiven) Beweisbedürfnisses eine notwendige Voraussetzung für ein verständiges Lernen der Beweisaktivität. Es sind noch heute von der Didaktik unbeantwortete Fragen, inwiefern Lernende auf verschiedenen Stufen der Ausbildung ein Beweisbedürfnis ausbilden und inwieweit dies Auswirkung auf die Beweiskonstruktion hat.

5. Ein Beweisbedürfnis agiert vor dem Hintergrund der Wertschätzung eines Beweises, welche wiederum auf wahrgenommenen Funktionen von Beweisen basiert (vgl. Abschnitt 2.1.7). Es scheint hierbei notwendig, sich qualitativ der Frage zu widmen, welche Funktionen von Beweisen von Lernenden wie wahrgenommen werden und wie bedeutsam diese aus subjektiver und objektiver Perspektive einzuschätzen sind. In der Literatur wurden bereits viele verschiedene Funktionen von Beweisen mit unterschiedlichen Tragweiten beschrieben (vgl. Abschnitt 2.1.7), eine eingehende empirische Beforschung dieser Funktionen steht allerdings noch aus.

6. Betrachtet man das Beweisen unter dem Aspekt der Enkulturationsfunktion (s. Abschnitt 8.3.3), so wird deutlich, wie sehr die Beweisaktivität mit einer Kultur der Mathematik bzw. des Mathematiktreibens verbunden ist. Es liegt dabei auf der Hand, dass Vorstellungen einer Kultur der Mathematik mit den in der Literatur häufig genannten „Einstellungen zur Mathematik“ (sogenannte Beliefs) verbunden sind. In dieser Arbeit wurde ein erster Versuch unternommen, Wechselwirkungen dieser Einstellungen zur Mathematik und Beweiskonstruktionen von Lernenden und ihren Einstellungen zum Beweisen auszumachen (Abschnitt 7.3.3). Geht man davon aus, dass die Einstellungen Lernender zur Mathematik für das unterrichtliche Geschehen von Bedeutung sind, dann trifft dies ebenso für das Beweisen

[89] Für den Hinweis auf diesen Aspekt danke ich C. Knipping.

zu. Folglich gilt es, theoretisch und empirisch weiter zu beforschen, inwiefern Einstellungen zur Mathematik mit Vorstellungen zum Beweisen zusammenhängen.

7. Mit den konstruierten Skalen „Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen“ und „Beweisaffinität“ wurden in der vorliegenden Arbeit zwei weitere theoretische Aspekte für die empirische Forschung fruchtbar gemacht. Es war dabei ein Ergebnis, dass die (subjektive) Beweisaffinität ein stärkerer Prädiktor für gelingende Beweiskonstruktionen ist als die eigene Selbstwirksamkeitserwartung (Abschnitt 7.4.3.2). Vor diesem Hintergrund sollen zwei Fragen für die weitere Forschung aufgeworfen werden: Welche Bedeutung kommt (auch noch in der universitären Mathematikausbildung) dem subjektiven Empfinden eines Lernenden zum Lerngegenstand zu? Wie ermöglicht man Lernenden die Ausbildung einer adäquaten Selbstwirksamkeitserwartung zum Beweisen, wenn ihre (normativen) Vorstellungen zum Beweisen im Übergang Schule–Hochschule einem gravierenden Wandel unterzogen sind?

8. Die Bedeutung des Aspekts der Beweisakzeptanz wurde bereits oben (Abschnitt 8.3.4) weiter ausgeführt. Es soll an dieser Stelle wiederholt betont werden, wie stark eine Vermittlung der Beweisaktivität mit einer entsprechenden Wahrnehmung bzw. Akzeptanz von Beweisen verbunden zu sein scheint. Entsprechende Zusammenhänge gilt es weiter zu erforschen.

8.5.3 Schlussbemerkung

In dieser Arbeit wurden alle verwendeten Forschungs- bzw. Messinstrumente ausführlich beschrieben und angegeben. Ich möchte damit explizit zu mehr Transparenz und Offenheit in der Forschung beitragen und für diese plädieren. Forschungsarbeit, verstanden als Beitrag zu einem gemeinsamen Anliegen, kann nur dann in größeren Zusammenhängen gewinnbringend wirken, wenn verwendete Messinstrumente offengelegt und die Ergebnisse damit interpretierbar und Gegenstand öffentlicher Diskussion werden können. So verstandene Forschung ist kein Selbstzweck, sondern gewinnt ihre Bedeutung in der kritischen Auseinandersetzung mit ihr.

9. Literaturverzeichnis

Aberdein, A. (2013). The parallel structure of mathematical reasoning. In A. Aberdein & I. J. Dove (Hrsg.), *The Argument of Mathematics* (S. 361-380). Dordrecht: Springer.

Aberdein, A., & Dove, I. J. (Hrsg.). (2013). *The Argument of Mathematics*. Dordrecht: Springer.

Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2011). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra: Ein Arbeits- und Übungsbuch*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2010). *Das Buch der Beweise*. Berlin/Heidelberg: Springer.

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, *8*(2), 31-35, 43.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2013). *Bezaubernde Beweise. Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum.

Anderson, J. R. (1985). *Cognitive psychology and its implications*. New York: W. H. Freeman.

Apel, K.-O. (1989). Artikel „Begründung". In H. Seiffert & G. Radnitzky (Hrsg.), *Handlexikon zur Wissenschaftstheorie* (S. 14-19). München: Ehrenwirth.

Auslander, J. (2008). On the roles of proof in mathematics. In B. Gold & A. Simons (Hrsg.), *Proof and other Dilemmas. Mathematics and Philosophy* (S. 61-77). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Primus*, *14*, 345-353.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (S. 429-466). Dordrecht: Springer.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. Online: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html (Zugriff: 29.09.2016)

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of locial interaction: The case of mathematical proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Hrsg.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*(2), 191-215.

Bandura, A. (1995). Exercise of personal and collective efficacy in changing societies. In A. Bandura (Hrsg.), *Self-efficacy in changing societies* (S. 1-45). Cambridge: Cambridge University Press.

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 57-64). Norwich: University of East Anglia.

Baturo, R., & Williams, A. (1999). Equals, expressions, equations, and the meaning of variable: A teaching experiment. *MERGA, 22*, 177-184.

Bauer, T., & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *56*(1), 85-103.

Baumert, J., Lehmann, R. u.a. (1997). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (2000). *TIMSS/III – Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn*. Opladen: Leske + Budrich.

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., et al. (Hrsg.). (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Bender, P., Beyer, D., Brück-Binninger, U., Kowallek, R., Schmidt, S., & Sorger, P. (1999). Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer. *Journal für Mathematik-Didaktik, 20*(4), 301-310.

Bender, P., & Jahnke, H. N. (1992). Intuition and rigor in mathematics instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 24*(7), 259-264, 303-311.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik neu denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

Biehler, R., Bruder, R., Hochmuth, R., & Koepf, W. (2014). Einleitung. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R. Fischer, R. Hochmuth & W. Koepf (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 1-6). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R., Hänze, M., Hochmuth, R., Becher, S., Fischer, E., Püschl, J. (2013). *Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium" – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation - Gesamtabschlussbericht des BMBF-Projekts LIMA*. Hannover: TIB.

Biehler, R., Hänze, M., Hochmuth, R., Bianchy, K., Fischer, E., Klemm, J., Lange, T., Schreiber, S., & Sonntag, J. (2012). *Lehrinnovation in der Studieneingangsphase ‚Mathematik im Lehramtsstudium' – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation: Skalendokumentation*. Kassel: Institut für Psychologie.

Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte - Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 141-179.

Biehler, R., & Kempen, L. (2015). Using generic proofs as an element for developing proof competencies in the course "Introduction into the culture of mathematics". In R. Biehler, R. Hochmuth, C. Hoyles & P. W. Thompson (Hrsg.), *Mathematics in undergraduate study programs: Challenges for research and for the dialogue between mathematics and didactics of mathematics. Oberwolfach Report No. 56/2014* (S. 44-45). Oberwolfach.

Biehler, R., & Kempen, L. (2014). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 86-95). Ankara: Middle East Technical University.

Bikner-Ahsbahs, A., & Schäfer, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 57-76). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Advances in Mathematics Education, 1*(1), 103-116.

Blanton, M. L., & Stylianou, D. A. (2002). Exploring sociocultural aspects of undergraduate students' transition to mathematical proof. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant & K. Nooney (Hrsg.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 1673-1680). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Blum, W., Biehler, R., & Hochmuth, R. (2014). KLIMAGS: Researching and improving mathematics courses for future primary teachers. In R. Biehler, R. Hochmuth, C. Hoyles & P. W. Thompson (Hrsg.), *Mathematics in undergraduate study programs: Challenges for research and for the dialogue between mathematics and didactics of mathematics. Oberwolfach Report No. 56/2014* (S. 50-51). Oberwolfach: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 183-203.

Blum, W., & Kirsch, A. (1989). Warum haben nichttriviale Lösungen von f'= f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum inhaltlich-anschaulichen Beweisen. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen.* (S. 199-209). Wien/Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, Teubner.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8*.

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Leipzig/Berlin: Teubner.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2*, 141-178.

Bruner, J. S. (1973). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag/Pädagogischer Verlag Schwann.

Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe 1. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Münster: Waxmann.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.

Celluci, C. (2011). Explanatory and non-explanatory demonstrations. In P.-E. Bour and P. Schroeder-Heister (Hrsg.), *Proceedings of the 14th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science.* College Publications, London. Online: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.405.6145&rep=rep1&type=pdf (Zugriff: 29.09.2016)

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, *112*, 155–159.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Hrsg.), *New directions in educational technology* (S. 15-22). New York: Springer.

Collins, A., Brown, J. S., & Larkin, K. M. (1980). Inference in text understanding. In R. J. Spiro, B. C. Bruce & W. F. Brewer (Hrsg.), *Theoretical issues in reading comprehension: Perspectives from cognitive psychology, linguistics, artificial intelligence, and education* (S. 385-407). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Conner, A., Edenfield, K., Gleason, B., & Ersoz, F. (2011). Impact of a content and methods course sequence on prospective secondary mathematics teachers' beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 483-504.

Conway, J. H., & Guy, R. K. (1997). *Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen*. Basel: Birkhäuser.

Coppin, C. A., Mahavier, W. T., May, E. L., & Parker, G. E. (2009). *The Moore Method: A pathway to learner-centered instruction* (MAA notes, Vol. 75). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Coulter, S. E. (2012). Using the retrospective pretest to get usable, indirect evidence of student learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 37(3), 321-334.

Cramer, J. (2014). „In der Mitte sind die Zwei und die Fünf" - Logisches Argumentieren im Kontext von Spielen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 293-296). Münster: WTM-Verlag.

Cramer, J. (2015). Using Habermas to explain why logical games foster argumentation. In C. Nicol, P., Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 345-352). Vancouver: PME.

Davis, P. (1986). The nature of proof. In M. Carss (Hrsg.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (S. 352-358). Adelaide, South Australia: UNESCO.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). *The Mathematical Experience*. Great Britain: Pelican Books.

de Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *pythagoras*, *33*(3).

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Devlin, K. (2002). *The language of mathematics. Making the invisible visible*. New York: MacMillan.

Dörfler, W. (2014). Abstrakte Mathematik und Computer. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 1-14). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Dörfler, W. (2010). Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 25-48). Hildesheim: Franzbecker.

Dörfler, W. (2008). Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In J. Böhm (Hrsg.), *Proceedings Regular Lectures ICME 10, CD-Rom*. Osnabrück: European Society for Research in Mathematics Education.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27*(3-4), 200-219.

Dörfler, W. (2003). Mathematics and mathematics education: Content and people, relation and difference. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(2/3), 147-170.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their education implication. In I. Schwank (Hrsg.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 1, S. 125-139). Osnabrück.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1), 85-109.

Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In A. Gagatsis (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd mediterranean conference on mathematics education* (Vol. 1, S. 11-25). Nikosia: The University of Cyprus.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 191-214). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education, 84*, 287-312.

Dumas, B., & McCarthy, J. (2007). *Transition to higher mathematics: Structure and proof*. Boston: Mc Graw Hill Higher Education.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 349-368). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, 195-221.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Online: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html (Zugriff: 29.09.2016)

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Hrsg.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (S. 137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Edwards, L. D. (1998). Odds and evens: mathematical reasoning and informal proof among high school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 489-504.

Ernest, P. (1989). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Online: http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/impact.htm (Zugriff: 29.09.2016)

Fendel, D., & Resek, D. (1990). *Foundations of higher mathematics. Exploration and proof*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Fischer, A. (2013). Anregung mathematischer Erkenntnisprozesse in Übungen. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 95-116). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Fischer, A. (2010). Schwierigkeiten beim diagrammatischen Schließen - eine Fallstudie. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 83-108). Hildesheim: Franzbecker.

Fischer, P. R. (2014). *Mathematische Vorkurse im Blended Learning Format. Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

Flores, A. (2002). Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra. In F. Hitt (Hrsg.), *Representation and Mathematics Visualization* (S. 9-30). North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Forman, E. A., McCormick, D. E., & Donato, R. (1998). Learning what counts as a mathematical explanation. *Linguistics and Education, 9*(4), 313-339.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: Oldenbourg.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert soll sie haben? *Der Mathematikunterricht, 4*, 5-29.

Frischemeier, D., Panse, A., & Pecher, T. (2016). Schwierigkeiten von Studienanfängern bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 229-241). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Führer, L. (1997). Zur Gymnasiallehrerausbildung in Mathematik. *DMV-Mitteilungen*, *5*(4), 49-51.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Leading beliefs in the teaching of proof. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and attitudes in mathematics education. New research results* (S. 59-74). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM, 43*(4), 587-599.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 1-28.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation on pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Hrsg.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 640-647). Toronto: OISE/UT.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237-254.

Grieser, D. (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv* *gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 87-102). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3-45.

Güler, G. (2016). The difficulties experienced in teaching proof to prospective mathematics teachers: Academician views. *Higher Education Studies*, *6*(1). Online: http://www.ccsenet.org/journal/index.php/hes/article/view/56584/30686 (Zugriff: 01.07.2016)

Habermas, J. (1999). *Theorie des kommunikativen Handelns. Band 1: Handlungsrationalität und gesellschaftliche Rationalisierung*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Habermas, J. (1983). Diskursethik-Notizen zu einem Begründungsprogramm. In *Moralbewusstsein und kommunikatives Handeln* (S. 53-126). Frankfurt: Suhrkamp.

Hanna, G. (2016). Reflections on proof as explanation. *Artikel präsentiert auf der Konferenz International Congress on Mathematical Education* am 26.07.2016 in Hamburg.

Hanna, G. (2005). A brief overview of proof, explanation, exploration and modelling. In H.-W. Henn & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festschrift für Werner Blum* (S. 139-151). Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematik-Didaktik, 18*(2-3), 171-185.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of the Thirteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 45-51). Paris: PME.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of mathematical Knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York, NY: Springer Science + Business Media.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. R. Leatham (Hrsg.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (S. 119-151). New York: Springer Science+Business Media.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, *40*(3), 487-500.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Institute of Education, University of London.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 15-29). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2015). Die fachlich-epistemologische Perspektive auf Mathematik als zentraler Bestandteil der Lehramtsausbildung. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 179-183). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hefendehl-Hebeker, L. (2014). Learning mathematics at school and at university: Common features and fundamental differences. In *Oberwolfach Report No. 56. Mathematics in Undergraduate Study*

Programs: Challenges for Research and for the Dialogue between Mathematics and Didactics of Mathematics (S. 26-27). Oberwolfach: Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 1-15). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
Hefendehl-Hebeker, L. (1999). Erleben, wie mathematisches Wissen entsteht. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 105-111). Leipzig: Klett.
Hefendehl-Hebeker, L., & Hußmann, S. (2003). Beweisen-Argumentieren. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 93-106). Berlin: Cornelsen Scriptor.
Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Wien: Springer.
Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *International Newsletter of Proof Competence* (Vol. 4).
Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice.* Dissertation. Stockholm: Stockholm University. Online: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:189608/FULLTEXT01.pdf (Zugriff: 27.10.2016).
Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: the condition of transparency. *ZDM*, *40*(3), 413-426.
Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* London: Cape.
Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining*. Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.
Hilbert, D., & Bernays, P. (1986). *Grundlagen der Mathematik 1*. Heidelberg: Springer.
Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62-101.
Hoffmann, M. (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Frankfurt am Main: Klostermann.
Hofstadter, D. R. (2008). *Gödel, Escher, Bach: Ein endloses geflochtenes Band*. Stuttgart: Klett-Cotta.
Holland, G. (1996). *Geometrie in der Sekundarstufe: Didaktische und methodische Fragen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
IDM-Arbeitsgruppe Mathematiklehrerbildung (1981). *Perspektiven für die Ausbildung des Mathematiklehrers*. Köln: Aulis.
Igl, J. (1995). Anmerkungen zur Veranschaulichung und Visualisierung im Mathematikunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis, 16*(3), 1-10.
Inglis, M., & Aberdein, A. (2015). Beauty is not simplicity: An analysis of mathematicians' proof appraisals. *Philosophia Mathematica, 23*(1), 87-109.
Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.
Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Berlin/Heidelberg: Springer.
Jahnke, H. N. (2010). Zur Genese des Beweisens. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 51-58). Münster: WTM-Verlag.
Jahnke, H. N. (1984). Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 32-41). Bad Salzdethfurt.
Jahnke, H. N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.
Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 53-60.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008) Algebra in the early grades. New York, NY: Routhledge.

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N., & Arbaugh, F. (2014). Improving preservice secondary mathematics teachers' capability with generic example proofs. *Mathematics Teacher Educator, 2*(2), 158-170.

Kempen, L. (2017). Pre-service teachers' abilities in constructing different kinds of proofs. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings. Khdm-Report 17-05* (S. 387-391). Kassel: Universität Kassel. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121

Kempen, L. (2016). Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 3, S. 1111-1114). Münster: WTM-Verlag.

Kempen, L. (2014a). Der operative Beweis als didaktisches Instrument in der Hochschullehre Mathematik. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 463-470): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kempen, L. (2014b). Sind das jetzt schon "richtige" Beweise? - Ausführungen zu Grundfragen der Beweisdidaktik. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (Vol. 1, S. 607-610). WTM-Verlag: Münster.

Kempen, L. (2013). Generische Beweise in der Hochschullehre. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Band 1* (S. 528-531). Münster: WTM-Verlag.

Kempen, L., & Biehler, R. (2016). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 135-141).

Kempen, L., & Biehler, R. (2014). The quality of argumentations of first-year pre-service teachers. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allen (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 425-432). Vancouver, Canada: PME.

Kempen, L., Krieger, M., & Tebaartz, P. (2016). Über die Auswirkungen von Operatoren in Beweisaufgaben. In Institut für Mathematik und Information der pädagogischen Hochschule Heidelberg *(Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2016 (Bd. 1, S. 521-524)*. Münster: WTM-Verlag.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2009). Justification, enlightenment and the explanatory nature of proof. In G. Hanna & M. De Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 244-249). Heidelberg (u.a.): Springer Science + Business Media.

Kirsch, A. (1980). Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer — im Hinblick auf die Praxis des Geometrieunterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *1*(4), 229-256.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. internationalen Symposiums für "Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt* (S. 261-274). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik*, *5*(2), 87-101.

Kirsch, A. (1976). Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik*, *4*(2), 87-105.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: Teubner.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. Online: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Berlin, Hildesheim: Franzbecker.

Knuth, E. (2002a), Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 2002.

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. In M. Blanton, D. Stylianou & E. Knuth (Hrsg.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (S. 153-212). New York, NY: Routledge.

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A. (2014). Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(7), 1053-1067.

Krantz, S. G. (2012). *A mathematician comes of age*. Washington, DC: MAA.

Krauthausen, G. (1998). *Lernen - Lehren - Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe*. Leipzig: Klett.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kroll, W. (1997). Diskussionsbeitrag. In R. Biehler & H. N. Jahnke (Hrsg.), *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Materialien eines Symposiums am 24. Juni 1996 im ZiF der Universität Bielefeld* (S. 84-88). Bielefeld: Universität Bielefeld.

Krummheuer, G., & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim: Beltz-Deutscher Studienverlag.

Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim/Basel: Beltz Juventa.

Kuckartz, U., Rädiker, S., Ebert, T., & Schehl, J. (2013). *Statistik: Eine verständliche Einführung*. Wiesbaden: Springer.

Kuntze, S. (2005). „Wozu muss man denn das beweisen?" Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. *mathematica didactica, 28*(2), 48-70.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lam, T. C. M., & Bengo, P. (2003). A comparison of three retrospective self-reporting methods of measuring change in instructional practice. *American Journal of Evaluation*, *24*(1), 65-80.

Laschke, C., & Blömeke, S. (Hrsg.). (2014). *Teacher education and development study: Learning to teach mathematics (TEDS-M 2008). Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (2006). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Springer Science & Business Media.

Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. De Villiers (Hrsg.), *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, S. 31-36). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: The meaning and potential of multiple-solution tasks. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 203-223.

Leiß, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 33-80). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lenhard, J. (2003). Verändert ein Beweis, was er beweist, indem er es beweist? Über die Veränderlichkeit mathematischer Objekte. In M. Hoffmann (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven* (S. 242-257). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Leron, U., & Zaslasvsky, O. (2013). Generic Proving: Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics, 33*(3)*,* 24-30.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2009). Generic proving: Reflections on scope and method. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh & G. d. V. Hanna, M (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, S. 53-58). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics: National Taiwan Normal University.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik - zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Lienert, G., & Raatz, U. (1994). *Testaufbau und Testkonstruktion*. Weinheim: Beltz.

Long, R. L. (1986). Remarks on the History and Philosophy of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 93*(8), 609-619.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lumer, C. (1999). Artikel „Begründung". In H. J. Sandkühler (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie* (Bd. 1) (S. 149-159). Hamburg: Felix Meiner.

Maier, H. (1999). Wieviel Fachsprache brauchen die Schüler im Mathematikunterricht *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999* (S. 19-26). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Malek, A., & Movshovitz-Hadar, N. (2009). The art of constructing a transparent p-proof. In F. L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, S. 70 - 75). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Malek, A., & Movshovitz-Hadar, N. (2011). The effect of using transparent pseudo-proofs in linear algebra. *Research in Mathematics Education, 13*(1), 33-57.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn.

Manin, J. I. (1977). *A course in mathematical logic*. New York (u.a.): Springer.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.

Marty, R. H. (1991). Getting to eureka! Higher order reasoning in math. *College Teaching*, *39*(1), 3-6.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in Algebra*. London: The Open University.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 601-613): VS Verlag für Sozialwissenschaften.

McAllister, J. (2005). Mathematical beauty and the evolution of the standards of mathematical proof. In M. Emmer (Hrsg.), *The Visual Mind II* (S. 15-34). Cambridge: MIT Press.

McClain, K. (2009). When is an argument just an argument? The refinement of mathematical argumentation. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. Knuth (Hrsg.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (S. 222-234). New York, NY: Routledge.

McKenney, S., Nieveen, N. & Van den Akker, J. (2006). Design research from a curriculum perspective. In: Van den Akker, J., Gravemeijer, K, McKenney, S. & Nieveen, N. (Hrsg.), *Educational design research* (S. 62-90). London: Routledge.

Mejia-Ramos, J., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18.

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof? *Research in Mathematics Education, 11*(1), 77-78.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meyer, M., & Prediger, S. (2009). Warum? - Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 51*(30), 1-7.

Mingus, T. T. Y., & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, *99*(8), 438-444.

Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (Hrsg.). (2004). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.

Müller-Hill, E. (2017). Eine handlungsorientierte didaktische Konzeption nomischer mathematischer Erklärung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(2), 167-208.

Müller-Hill, E. (2013). The epistemic status of formalizable proof and formalizability as a meta-discursive rule. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 186-195). Ankara: Middle East Technical University.

Müller-Hill, E., & Kempen, L. (eingereicht). *Suggestions on the enculturation function of mathematical proof.*
Müller-Hill, E., & Spies, S. (2011). Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen: Philosophische und Didaktische Perspektiven* (S. 261-281). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Neubrand, M. (2015). Schulmathematik und Universitätsmathematik: Gegensatz oder Fortsetzung? Woran kann man sich orientieren? In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 137-145). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
Neubrand, M. (1997). Definition - Satz - Beweis: Was kann daran allgemeinbildend sein? In R. Biehler & H. N. Jahnke (Hrsg.), *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Materialien eines Symposiums am 24. Juni 1996 im ZiF der Universität Bielefeld* (S. 13-26). Bielefeld: Universität Bielefeld.
Nickerson, S., & Rasmussen, C. (2009). Enculturation to proof: A paradigmatic and theoretical investigation. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
Nimon, K., Zigarmi, D., & Allen, J. (2010). Measures of program effectiveness based on retrospective pretest data: are all created equal? *American Journal of Evaluation*, *32*(1), 8-28.
O'Brian, R. G. (2002). *Sample-size analysis in study planning: Concepts and issues, with examples using Proc Power and Proc Glmpower*. Online: https://pdfs.semanticscholar.org/cd45/14f8bda0351b77b39ffd386096f43d800830.pdf (Zugriff: 08.11.2017)
Ostsieker, L., & Biehler, R. (2012). Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 641-644). Münster: WTM-Verlag.
Otte, M. (2003). Mathematik, Zeichen Tätigkeit. In M. Hoffmann (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven.* (S. 206-241). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
Padberg, F. (1997). *Einführung in die Mathematik 1 - Arithmetik*. Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
Parker, J. (2005). *R. L. Moore: Mathematician and teacher*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.
Perelman, C. (1970). *Le champ de l'argumentation*. Brüssel: Presses Universitaires.
Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1969). *The new rhetoric. A treatise on argumentation.* Notre Dame: University of Notre Dame Press.
Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: Observations from proof validation and evaluation performances*. National University of Ireland: Galway.
Pierce, Ch. S. (1902a). The Carnegie application. Abgedruckt in Eisele, C. (Hrsg.). (1976). *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce* (Bd. 4). The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N.J.: Mouton/Humanities Press.
Pierce, Ch. S. (1903b). Logical Tracts. No. 2. On Existential Graph's, Euler's Diagrams, and Logical Algebra. Abgedruckt in Kloesel, C., & Pape, H. (Hrsg.). (2000). *Charles Sanders Peirce Semiotische Schriften* (Bd. 2). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Pinto, M. M. F., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theories: Giving and extracting meaning. In O. Zaslavski (Hrsg.), *Proceedings of the Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (S. 65-72). Haifa: Israel Institute of Technology.
PISA-Konsortium (2006). *PISA 2003: Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

PISA-Konsortium (2012). *PISA 2012 Ergebnisse: Was Schülerinnen und Schüler wissen und können. Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften (Band 1)*. Bielefeld: Bertelsmann.

Plomp, T. (2010). Educational Design Research: an Introduction. In T. Plomp & N. Nieven (Hrsg.), *An Introduction to Educational Research.* (S. 9-35). Enschede: John Wiley.

Polya, G. (1979). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 1*. Basel: Springer Basel AG.

Polya, G. (1969). *Mathematik und plausibles Schließen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser Verlag Basel.

Polya, G. (1967). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 2*. Basel: Springer Basel AG.

Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(6), 589-598.

Pratt, C. C., Mcguigan, W. M., & Katzev, A. R. (2000). Measuring program outcomes: Using retrospective pretest methodology. *American Journal of Evaluation*, *21*(3), 341-349.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W.-M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Online: http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-31370-2 (Zugriff: 20.11.2017)

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Münster: Waxmann.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(3), 5-41.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99.

Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz*. Online: https://mediatum.ub.tum.de/doc/1137221/1137221.pdf (Zugriff: 20.11.2017)

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publisher.

Reid, D. A., & Vallejo Vargas, E. A. (2016). When is a generic argument a proof? *Artikel präsentiert auf der Konferenz International Congress on Mathematical Education* am 30.07.2016 in Hamburg.

Reid, D. A. (2005). The meaning of proof in mathematics education. *Artikel präsentiert auf der Fourth annual conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain. 17 - 21 February 2005. Online: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG4.pdf

Reid, D. A. (2001). Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof. Short Oral presentation. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, S. 360). Utrecht, Netherlands.

Reid, D. A. (1993). Pre-formal, formal, and formulaic proving. In M. Quigley (Hrsg.), *Proceedings of the 1993 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Toronto, Ontario: York University.

Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung in den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Birkhäuser.

Reiss, K., & Heinze, A. (2000). Begründen und Beweisen im Verständnis von Abiturienten. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000* (S. 520-523). Hildesheim, Berlin: div-Verlag Franzbecker.

Reiss, K., Heinze, A., & Klieme, E. (2000). Argumentation, proof and the understanding of proof. In A. Peter-Koop, K. Reiss, G. Törner & B. Wollring (Hrsg.), *Developments in Mathematic Education in Germany. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam 2000* (S. 109-120). Hildesheim: Franzbecker.

Reiss, K., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 455-467.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to Prove - The Idea of Heuristic Examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 29-35.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Lernen von Argumentationen, Begründungen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 111*, 155-177.

Renz, P. (1999). The Moore method: What discovery learning is and how it works. *Newsletter of the Mathematical Association of America*, *8/9*, 1-2.

Renz, P. (1981). Mathematical Proof - What it is and what it ought to be. *The Two Year College Mathematics Journal*, *12*(2), 83-103.

Riedl, L. (2015). *Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen: eine explorative Quer- und Längsschnittstudie*. Dissertation, LMU München: Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik. Online: https://edoc.ub.uni-muenchen.de/18333/ (Zugriff: 20.11.2017)

Rinvold, R., & Lorange, A. (2013). Multimodal proof in arithmetic. In: B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 86-95). Ankara: Middle East Technical University.

Rowland, T. (2002a). Generic proofs in number theory. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Hrsg.), *Learning and teaching number theory. Research in cognition and instruction* (S. 157- 183). Westport, Conneticut: Ablex.

Rowland, T. (2002b). Proofs in number theory: History and heresy. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, S. 230-238). Norwich: University of East Anglia.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. In A. Olivier & K. Newstead (Hrsg.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 65-72). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Whitehead, A. N., & Russel, B. (1978). *Principia Mathematica* (Bd. 1). Cambridge: Cambridge University Press.

Schilberg, P. (2012). *Wie bearbeiten Erstsemester (HR) Beweisaufgaben? – didaktische Analyse von ausgewählten abgegebenen Hausaufgaben*. (Erstes Staatsexamen [Hausarbeit]), Universität Paderborn.

Schipper, W. (1982). Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*(2), 91-120.

Schlöglmann, W., & Maaß, J. (2009). *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results*. Rotterdam: Sense publishers.

Schnell, R., Hill, P., & Esser, E. (2013). *Methoden der empirischen Sozialforschung*. München: Oldenbourg.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 391-422). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Selden, A. (2005). New developments and trends in tertiary mathematics education: or, more of the same? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 131-147.

Selden, A., & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings. Khdm-Report 17-05* (S. 339-345). Kassel: Universität Kassel. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121 (Zugriff: 20.11.2017)

Selden, A., & Selden, J. (2013). The roles of behavioral schemas, persistence, and self-efficacy in proof construction. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 246-255). Ankara: Middle East Technical University.

Selden, A., & Selden, J. (2012). A belief affecting students' success in problem solving and proving. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).*Online: http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1038.pdf

Selden, A., Selden, J., & Benkhalti, A. (2015). An analysis of transition-to-proof course students' proof constructions with a view towards course redesign. *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Semadeni, Z. (1976). *The concept of premathematics as a theoretical background for primary mathematics teaching*. Warschau: Polnische Akademie der mathematischen Wissenschaften.

Semadeni, Z. (1981). *Action proofs in primary mathematics teaching and in teachers training*. Warschau: Polnische Akademie der mathematischen Wissenschaften.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher teaching. *For the Learning of Mathematics*, *4*(1), 32–34.

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, & C. Walter (Hrsg.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (S. 23-44). Columbus, OH: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Smith, J. C. (2005). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 73-90.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their Interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 373-393.

Sommerhoff, D., Ufer, S., Kollar, I. (2016). Validieren von Beweisen - Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 3, S. 1127-1130). Münster: WTM-Verlag.

Sprangers, M., & Hoogstraten, J. (1989). Pretesting effects in retrospective pretest-posttest designs. *Journal of Applied Psychology*, *74*(2), 265-272.

Stein, M. (1986). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Verlag Barbara Franzbecker.

Steiner, G. (1996). *Lernen. 20 Szenarien aus dem Alltag*. Bern: Hans Huber.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies, 34*(2), 135-151.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, *9*(1),24 - 33.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen - Gleichungen - funktionale Beziehungen*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.

Stephan, M. (2014). Sociomathematical norms in mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 563-566). Dordrecht: Springer Netherlands.

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as centerpiece of a Peircean epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 36*(3), 357-384.

Stylianides, A. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching, 219*, 39-44.

Stylianides, A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Stylianides, A., & Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 237–253.

Sun, X. (2009). Renew the proving experiences: An experiment for enhancement trapezoid area formula proof constructions of student teachers by "one problem multiple solutions". In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, S. 178-183). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., & Levenson, E. (2010a). Verbal justification - Is it a proof? Secondary school teachers' perceptions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(6), 1071-1090.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tirosh, D., Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2010b). Secondary school teachers' awareness of numerical examples as proof. *Research in Mathematics Education, 12*(2), 117-131.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2011). Secondary teachers' knowledge of elementary number theory proofs: the case of general-cover proofs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 465-481.

Tall, D. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. In D. Tall (Hrsg.), *Proceedings of the 3rd International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (S. 203-205). Warwick: The Mathematics Education Research Center.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. Online: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1995f-repns-proof.pdf (Zugriff: 24.08.2016)

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994). „Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern — eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 15*(3-4), 211-251.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Townsend, M., & Wilton, K. (2003). Evaluating change in attitude towards mathematics using the 'then-now' procedure in a cooperative learning programme. *British Journal of Educational Psychology*, *73*, 473-487.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Hrsg.), *Issues in Mathematics Education* (Vol. 12, S. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ullmann, P. (2008). *Mathematik — Moderne — Ideologie. Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik*. Konstanz: UVK.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30-54.

Ufer, S., & Kramer, J. (2015). Die Kompetenz mathematisch Argumentieren. In W. Blum, S. Vogel, Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik für die Sekundarstufe II* (S. 83-94). Braunschweig: Diesterweg.

van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 310-313.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and pseudo-analytic thought processes in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 97–129.

Vollrath, H.-J. (1980). Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1*(1-2), 28-41.

Vollrath, H.-J. (1974). *Didaktik der Algebra*. Stuttgart: Klett.

Walsch, W. (1975). *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), 14-17.

Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In A. Selden & J. Selden (Hrsg.), Research Sampler, 8. Online: http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof (Zugriff: 20.11.2017)

Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 306-336.

Weber, K. (2014). Proof as a cluster concept. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, S. 353-360). Vancouver, Canada: PME.

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2015). On relative and absolute conviction in mathematics. *For the learning of Mathematics, 35*(2), 15-21.

Weber, E. & Verhoeven, L. (2002). Explanatory proofs in mathematics. *Logique & Analyse*, 179-180, 299-307.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weygandt,B., & Oldenburg, R. (2014). Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur generischen Sicht auf Mathematik. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1307-1310). Münster: WTM-Verlag.

Weygandt,B., & Oldenburg, R. (2015). First-year teacher students' mathematical beliefs. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2965-2966). Prag: CERME.

Whitehead, A. N., & Russel, B. (1978). *Principia Mathematica* (Bd. 1). Cambridge: Cambridge University Press.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik* (1), 59-95.

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37, 213-232.

Wittmann, E. C. (2009). Operative proof in elementary mathematics. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, S. 251-256). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Wittmann, E. C. (2007). Die fachwissenschaftliche Basis des Lehrerwissens: Elementarmathematik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 420-423). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (2004). Learning mathematics for teaching mathematics: The notion of operative proof. Artikel präsentiert auf der Konferenz „International Congress on Mathematical Education" (ICME 10) (4. – 11. Juli) in Kopenhagen, Dänemark.

Wittmann, E. C. (1993). "Weniger ist mehr": Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1993* (S. 394-397). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1989). The mathematical training for teachers from the point of view of education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, 291-308.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren*, *3*(11), 7 - 11.

Wittmann, E. C. (1981). Beziehungen zwischen operativen Programmen in Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2, 83-95.

Wittmann, E. C. (1976). Eine Erweiterung des operativen Prinzips. In H. Winter (Hrsg.), *Beiträge zur Mathematikdidaktik. Festschrift für Wilhelm Oehl* (S. 167-177). Hannover: Schroedel.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (2004). Einleitung: Das Konzept von „Elementarmathematik als Prozess". In G. N. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 11-18). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. C., & Ziegenbalg, J. (2007). Sich Zahl um Zahl hochangeln. In G. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35-53). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, G. (2014). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1* (S. 35-54). Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). The development of young childrens' understanding of mathematical argumentation. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (S. 313-330). Dordrecht, Netherland: Kluwer.

Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers*. Austin, Texas: ProQuest LLC.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landmann, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (S. 215-230). Heidelberg u.a.: Springer Science + Business Media.

Internetseite:

Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn vom 28. September 2011. Online: http://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/Didaktik_der_Mathematik/Studienordnungen/BA_MathematiK_HRGe_20110928.pdf (Zugriff: 18.08.2016)

10. Abbildungsverzeichnis