

# **Sensitivitätssteigerung durch Elektrodenmodifikation für die Materialparameterbestimmung von Piezokeramiken**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik  
der Universität Paderborn

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Carsten Unverzagt

Erster Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Sybille Hellebrand
Tag der mündlichen Prüfung:	03.05.2018

Paderborn 2018

Diss. EIM-E/339



# Vorwort

Diese Dissertation entstand während und nach meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Elektrische Messtechnik des Instituts Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Paderborn.

Besonders bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning für die Bereitschaft der Betreuung dieser Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen. Die zahlreichen fachlichen Ratschläge und Diskussionen haben sehr zum Gelingen beigetragen. Das bereitgestellte hervorragende Arbeitsumfeld bildete zudem die Grundlage für die Erstellung dieser Arbeit.

Weiterhin danke ich Prof. Dr. rer. nat. Sybille Hellebrand für die freundliche Übernahme des Korreferates und die Anfertigung des Zweitgutachtens.

Auch bedanken möchte ich mich beim gesamten Team der Elektrischen Messtechnik. Besonders in der Schlussphase haben mir alle Kollegen selbstlos den Rücken freigehalten und auf die Aufrechterhaltung der freundschaftlichen Arbeitsatmosphäre geachtet. Exemplarisch möchte ich an dieser Stelle besonders Herrn Dr.-Ing. Jens Rautenberg erwähnen, der mit seinem unerschöpflichen Ideenreichtum immer wieder wichtige Denkanstöße geliefert und Diskussionen angeregt hat. Zudem möchte ich mich auch ausdrücklich bei Herrn Dr.-Ing. Dietmar Wetzlar bedanken, ohne dessen akribische und unermüdliche Monierung der stilistischen und inhaltlichen Feinheiten diese Arbeit sicher nicht dieselbe wäre. Zum Team gehören auch die Studierenden, die mich direkt oder indirekt bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Namentlich erwähnen möchte ich an dieser Stelle Michael Karzellek und Manuel Webersen.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank meiner Familie, die mir im privaten Umfeld bedingungslos zur Seite gestanden und alle Einschränkungen tapfer hingenommen hat. Ohne diese enorme Unterstützung gäbe es diese Arbeit nicht.

Paderborn, im September 2017

*Carsten Unverzagt*





## Kurzfassung

Simulationen mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) sind heute ein fester Bestandteil im Entwicklungsprozess von Ultraschallsystemen. Durch die simulative Ermittlung der transienten Schwingungsvorgänge können Optimierungen bezüglich gewünschter Zielkriterien vorgenommen werden, und die aufwendige Prototypenfertigung lässt sich reduzieren.

In vielen Ultraschallwandlern bildet eine Piezokeramik das aktive Element. Für eine realitätsnahe Simulation ist es notwendig, dass die Materialparameter dieser Piezokeramik zur Beschreibung des Materialverhaltens präzise bekannt sind. Zur Bestimmung werden verschiedene Verfahren eingesetzt, die sich in analytische und numerische Verfahren unterteilen lassen. Bei den analytischen Verfahren werden durch Vorgabe geometrischer Randbedingungen bestimmte Schwingungsformen separiert, für die sich analytische Lösungen angeben lassen und so jeweils einige Materialparameter bestimmt werden können. Für eine vollständige Ermittlung sind deshalb verschiedene Probekörper mit unterschiedlichen Geometrien nötig. Da sich die jeweils relevanten Frequenzbereiche hierbei unterscheiden und auch eine unterschiedliche Prozessierung der verschiedenen Probekörper nicht vermeidbar ist, ist die Ermittlung eines konsistenten Materialparametersatzes auf diese Weise schwierig.

Zur Bestimmung von Materialparametern für die FEM-Simulation werden deshalb heute vermehrt numerische Verfahren in Form eines inversen Ansatzes eingesetzt. Hierbei wird ein simulierter an einen gemessenen Impedanzverlauf durch Variationen der Materialparameter im Rahmen einer Optimierung angeglichen. Um eine für die Optimierung der Materialparameter erforderliche hohe Anzahl an Simulationen zu ermöglichen, ist die Verwendung eines vereinfachten rotationssymmetrischen 2D-Modells der Piezokeramik sinnvoll. Die hohe Symmetrie dieser Piezokeramik führt jedoch dazu, dass einige der zu bestimmenden Materialparameter nur einen sehr geringen Einfluss auf den simulierten Impedanzverlauf haben und deshalb nach Abschluss der Optimierung eine vergleichsweise hohe Unsicherheit aufweisen. Bei der späteren Simulation von Wandlersystemen gewinnen diese Materialparameter aufgrund der dann erhöhten Zahl an Freiheitsgraden wieder an Relevanz.

Im Rahmen dieser Arbeit wird durch eine Modifikation der Elektroden zusammen mit einem angepassten elektrischen Vernetzwerk das elektrische Feld innerhalb der Piezokeramik verändert. Auf diese Weise wird die Sensitivität des Impedanzverlaufes für die üblicherweise schwierig zu bestimmenden Materialparameter erhöht und die Ermittlung eines konsistenten Materialparametersatzes an einer einzelnen Probe ermöglicht. Zur Beurteilung der Sensitivität des simulierten Impedanzverlaufes auf die verschiedenen Materialparameter kommt ein neues Sensitivitätsmaß zum Einsatz, mit dessen Hilfe die Materialparameterbestimmung durchgeführt wird.



# Abstract

Simulations using the finite element method (FEM) are an integral part of the development process of ultrasound systems today. By the simulative calculation of the transient oscillation processes optimization with regard to desired target criteria can be made and the costly prototype manufacturing can be reduced.

In many ultrasonic transducers, a piezoceramic forms the active element. For a realistic simulation, it is necessary that the material parameters of this piezoceramic to describe the material behavior are precisely known. Different methods are used for the determination, which can be divided into analytical and numerical methods.

Specific waveforms are separated in the analytical method by specifying geometric constraints. Analytical solutions can be specified for these waveforms and some material parameters can be determined in each case. To determine a complete set of material parameters, various specimens with different geometries are required. The respective relevant frequency ranges are different and a varying processing of the various specimens is unavoidable. Therefore, the determination of a consistent material parameter set is difficult in this way.

For the determination of material parameters for the FEM simulation numerical methods are used increasingly. They are based on an inverse approach. For this purpose, a simulated impedance curve is matched to a measured one by varying the material parameters in the context of an optimization. To allow the large number of simulations required for the optimization, the use of a simplified rotationally symmetrical 2D model of the piezoceramic is necessary. The high symmetry of these piezoceramics, however, means that some of the material parameters to be determined only have a very small impact on the simulated impedance curve. Therefore, these material parameters show a relatively high uncertainty after completion of the optimization. In the later simulation of transducer systems, these material parameters play a role again due to the lower symmetry of the setup.

In this work a reduction of the symmetry is achieved by a modification of the electrodes in conjunction with an adapted electrical network. In this way, the sensitivity of the impedance curve to the difficult to determine material parameters is increased. The determination of a consistent set of material parameters based on a single specimen is made possible. To evaluate the sensitivity of the simulated impedance curve on the various material parameters, a new degree of sensitivity is evaluated.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Zielstellung . . . . .	1
1.2 Verbale Gliederung und Aufbau dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2 Entwicklung und Stand der Technik</b>	<b>7</b>
2.1 Analytische Verfahren . . . . .	7
2.2 Inverse Verfahren und Sensitivitätsbetrachtungen . . . . .	15
2.3 Einordnung und Abgrenzung dieser Arbeit . . . . .	25
<b>3 Piezomaterialdaten und Materialparameter</b>	<b>29</b>
3.1 Begriffsdefinitionen . . . . .	29
3.2 Tensor- und Matrixnotation . . . . .	30
3.3 Piezoelektrische Keramiken und piezoelektrischer Effekt . . . . .	32
3.4 Lineare Zustandsgleichungen piezoelektrischer Kristalle . . . . .	37
3.5 Berücksichtigung der Dämpfung . . . . .	46
3.5.1 Rayleigh-Dämpfungsmodell . . . . .	47
3.5.2 Komplexwertige Piezomaterialdaten . . . . .	52
<b>4 Simulationsmodell</b>	<b>55</b>
4.1 Parametrisierbares Simulationsmodell zur Impedanzermittlung . . . . .	55
4.2 Impedanzverlauf durch harmonische Analyse . . . . .	59
4.3 Transiente Bestimmung mittels Impulsanregung . . . . .	60
<b>5 Möglichkeiten zur Sensitivitätssteigerung</b>	<b>65</b>
5.1 Sensitivitätsanalyse für vollflächige Elektroden . . . . .	65
5.2 Sensitivitätssteigerung durch Anpassung der Elektrodentopologie . . . . .	69
5.3 Erweiterung um ein Vornetzwerk . . . . .	75
5.4 Geeignetes quantitatives Sensitivitätsmaß . . . . .	79
5.5 Elektrodenoptimierung für eine erhöhte Sensitivität . . . . .	82
<b>6 Mess- und Versuchsaufbauten</b>	<b>87</b>
6.1 Impedanzmessplatz . . . . .	87
6.1.1 Grundlagen Impedanzmessverfahren . . . . .	87
6.1.2 Modifikation des Impedanzmessplatzes . . . . .	92

6.2	Verfahren zur Modifikation der Elektrodentopologie . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Materialparameterbestimmung für Piezokeramiken</b>	<b>99</b>
7.1	Optimierung mittels inversem Verfahren . . . . .	99
7.2	Startwerte der Materialparameter für die Optimierung . . . . .	103
7.3	Anwendung des Verfahrens auf eine PIC255-Piezokeramik . . . . .	107
7.4	Verfahren der Konsistenzprüfung . . . . .	112
7.5	Plausibilitätsbetrachtung für die ermittelten Materialparameter . . .	113
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	117
8.2	Ausblick . . . . .	119
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>123</b>
A.1	Charakteristische Frequenzen im Impedanzverlauf . . . . .	123
A.2	Achsenbezeichnungen . . . . .	127
A.3	Probekörpergeometrien und Grundswingungsformen . . . . .	127
A.4	Formelsammlung Startwertermittlung . . . . .	129
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>137</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>141</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>

# Symbolverzeichnis

## Verwendete Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
2D, 3D	Zwei-, dreidimensional
BVD	Butterworth Van-Dyke
DFT	Diskrete Fouriertransformation
DGL	Differentialgleichung
DIN	Deutsches Institut für Normung e. V.
dt.	Deutsch
EN	Europäische Norm
engl.	Englisch
el.	Elektrisch
FEM	Finite-Elemente-Methode
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers ( <a href="http://www.ieee.org">http://www.ieee.org</a> )
LiNbO <sub>3</sub>	Lithiumniobat (kristallin)
mech.	Mechanisch
PZT	Blei-Zirkonat-Titanat (Pb(Ti,Zr)O <sub>3</sub> )
PLZT	PZT-Piezokeramik mit Zusatz von Lanthan (La)
Pznn	PZT-Piezokeramiken von Ferroperm [Fer16] ( <a href="http://www.ferroperm-piezo.com">http://www.ferroperm-piezo.com</a> )
RB	Randbedingung (engl. BC: <i>boundary condition</i> )
sym.	Symmetrisch
V.N.	Voigtsche Notation

## Mathematische Symbole und Konventionen

Symbol	Bedeutung
$j$	Imaginäre Einheit ( $j^2 = -1$ )
$\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$	Erste, zweite bzw. dritte zeitliche Ableitung
$\mathbf{x}$	Matrix
$\mathbf{x}^{-1}$	Inverse Matrix
$x_{pq}$	Element einer Matrix (vgl. Voigtsche Notation)

Symbol	Bedeutung
$[x]$	Tensor
$x_{ijkl}$	Element eines Tensors (4. Stufe)
$\vec{x}$	Vektor (falls Unterscheidung zur Matrix sinnvoll)
$\underline{x}$	Komplexwertige Variable
$\underline{x}^*$	Konjugierte komplexwertige Variable
$x^t$	Transponierte
$\bar{x}$	Mittelwert einer Variablen
$x^D$	Größe bei konstanter elektrischer Flussdichte
$x^E$	Größe bei konstanter elektrischer Feldstärke
$x^S$	Größe bei konstanter mechanischer Dehnung
$x^T$	Größe bei konstanter mechanischer Spannung
$x_{\text{eff}}$	Effektive Größe
$x_{\text{iso}}$	Isotrop
$x_L$	Longitudinal
$x_T$	Transversal
$f_{\dots}^{(n)}$	Frequenz an der $n$ -ten Resonanzstelle
$\det(x)$	Determinante einer Matrix
$\text{diag}(a)$	Diagonalmatrix mit $a$ auf der Hauptdiagonalen
$\lg(\dots)$	Dekadischer Logarithmus ( $\log_{10}(\dots)$ )
$\nabla$	Nabla-Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$
$\nabla(\dots), \text{grad}(\dots)$	Gradient eines ortsabhängigen skalaren Feldes
$\nabla \cdot (\dots), \text{div}(\dots)$	Divergenz eines Vektorfeldes
$\nabla \times (\dots), \text{rot}(\dots)$	Rotation eines Vektorfeldes
$\min(x), \max(x)$	Kleinster bzw. größter Wert in $x$
$\text{Im}\{\underline{x}\}, \Im\{\underline{x}\}, x''$	Imaginärteil der komplexwertigen Größe $\underline{x}$
$\text{Re}\{\underline{x}\}, \Re\{\underline{x}\}, x'$	Realteil der komplexwertigen Größe $\underline{x}$
$\mathcal{F}(\dots)$	Fouriertransformierte
$\mathcal{J}(x)$	Quotient $\frac{x J_0(x)}{J_1(x)}$ , wobei $J_0$ und $J_1$ Besselfunktionen erster Art der Ordnungen 0 und 1 sind ( <i>Onoes Funktion</i> , [Ono56])

## Verwendete Formelzeichen

### Lateinische Buchstaben

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$a$		Laufindex
$A$	$\text{m}^2$	Fläche
$b$		Laufindex
$B_Y$	S	Suszeptanz (auch: Blindleitwert)
$c$	$\text{m/s}$	Schallgeschwindigkeit



Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$c_{gr}$	m/s	Gruppengeschwindigkeit
$c_{ph}$	m/s	Phasengeschwindigkeit
$c_{ij}$	N/m <sup>2</sup> = Pa	Elemente der Steifigkeitsmatrix (auch: Steifigkeitskonstanten, Elastizitätsmoduln)
$c_{ijkl}$	N/m <sup>2</sup>	Elemente des Steifigkeitstensors
$\mathbf{c}$	N/m <sup>2</sup>	Steifigkeitsmatrix (Voigtsche Notation)
$[\mathbf{c}]$	N/m <sup>2</sup>	Steifigkeitstensor
$C_0^T$	F = C/V	Freie elektrische Kapazität (bei $f = 1$ kHz)
$\mathbf{C}$	N s/m	Dämpfungsmatrix (für die FEM)
$d_{ij}$	C/N	Piezoelektrischer Koeffizient (bzgl. Dehnung) (auch: piezol. Ladungskonstante, V.N.)
$\mathbf{d}$	C/N	Matrix piezoelektrischer Konstanten (V.N.)
$[\mathbf{d}]$	C/N	Tensor piezoelektrischer Konstanten
$D_p$	m	Durchmesser einer Piezokeramik
$\vec{D}$	A s/m <sup>2</sup>	Elektrische Flussdichte (auch Verschiebungsdichte, dielektrische Verschiebung)
$\mathbf{D}$	A s/m <sup>2</sup>	Matrix der elektrischen Flussdichte
$D$		Logarithmisches Dekrement
$e_{ij}$	C/m <sup>2</sup> = N/(V m)	Piezoelektrischer Modul (bzgl. mech. Spannung, V.N.)
$\mathbf{e}$	C/m <sup>2</sup>	Matrix piezoelektrischer Moduln (V.N.)
$[\mathbf{e}]$	C/m <sup>2</sup>	Tensor piezoelektrischer Moduln
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$		Einheitsvektoren (kartesische Koordinaten)
$E$	Pa = kg/(m s <sup>2</sup> )	Elastizitätsmodul (auch: Youngscher Modul)
$\vec{E}$	V/m	Elektrische Feldstärke
$\mathbf{E}$	V/m	Matrix der elektrischen Feldstärke
$f_0$	Hz	Mittenfrequenz
$f_a$	Hz	Antiresonanzfrequenz (vgl. Anhang A.1)
$f_{abt}$	Hz	Abtastfrequenz
$f_m$	Hz	Minimalimpedanzfrequenz
$f_n$	Hz	Maximalimpedanzfrequenz
$f_p$	Hz	Parallelresonanzfrequenz (max. Resistanz)
$f_r$	Hz	Resonanzfrequenz
$f_s$	Hz	Serienresonanzfrequenz (max. Konduktanz)
$\Delta f$	Hz	Abstand Serien- zu Parallelresonanz ( $f_p - f_s$ )
$F$		Zielfunktion bei der Elektrodenoptimierung
$\vec{F}$	N = kg m/s <sup>2</sup>	Kraftvektor
$g_{ij}$	V m/N = m <sup>2</sup> /C	Piezoelektrischer Koeffizient (bzgl. Dehnung, V.N.)
$\mathbf{g}$	V m/N = m <sup>2</sup> /C	Matrix piezoelektrischer Konstanten (V.N.)
$[\mathbf{g}]$	V m/N = m <sup>2</sup> /C	Tensor piezoelektrischer Konstanten
$G$	Pa = N/m <sup>2</sup>	Schubmodul (Angabe üblich in: GPa)
$G_Y$	S	Konduktanz (auch: Wirkleitwert)
$h_{ij}$	V/m = N/C	Piezoelektrischer Modul (bzgl. mech. Spannung, V.N.)

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$h$	$V/m = N/C$	Matrix piezoelektrischer Moduln (V.N.)
$[h]$	$V/m = N/C$	Tensor piezoelektrischer Moduln
$H$	$J/m^3$	Elektrische Enthalpiedichte
$h_e$	m	Höhe (Dicke) einer Elektrode einer Piezokeramik
$h_{ges}$	m	Gesamthöhe einer Piezokeramik mit Elektroden
$h_p$	m	Höhe einer Piezokeramik
$I$		Einheitsmatrix
$k_{eff}$		Effektiver elektromech. Kopplungsfaktor
$k_p$		Mechanischer Kopplungsfaktor ( <b>p</b> lanar)
$k^p$		Planarer radialer Kopplungsfaktor
$k_t$		Mechanischer Kopplungsfaktor ( <b>t</b> hickness)
$k_{ij}$		Kopplungsfaktor (El. Feld: $i$ , Schwingung: $j$ )
$k$		Wellenzahl
$\vec{k}$	$1/m$	Wellenvektor (vektorielle Wellenzahl)
$K$	$Pa = N/m^2$	Kompressionsmodul
$K$	$N/m$	Steifigkeitsmatrix (für die FEM)
$l$	m	Länge
$L_{i,j}$		Matrixrepräsentation der Impedanz $Z_j$ für die Korrelation an der Stützstelle $f_i$
$m$	kg	Masse
$M$	kg	Massenmatrix (für die FEM)
$M$		Gütezahl, Kennzahl (engl.: <i>figure of merit</i> )
$N$		Anzahl
$N_i$	Hz m	Frequenzkonstante
$n$		Laufindex, z. B. Simulationsschritt
$p$	$N/m^2 = Pa$	Schallwechseldruck
$\vec{P}$	$C/m^2$	Dielektrische Polarisierung
$Q_d$		Piezoelektrische Güte
$Q_e$		Dielektrische Güte
$Q_m$		Mechanische Güte
$r$	m	Radius
$r_z$	m	Radiale Ortskoordinate in Zylinderkoordinaten
$r_e$	m	Vektor mit Elektrodenradien
$\vec{r}$	m	Ortsvektor
$R$	$\Omega = V/A$	Resistanz (auch: Wirkwiderstand)
$s_{ij}$	$m^2/N$	Elastische Konstanten (V.N., auch: Nachgiebigkeitskonstanten)
$s_{ijkl}$	$m^2/N$	Element des Elastizitätstensors
$s$	$m^2/N$	Elastizitätsmatrix
$[s]$	$m^2/N$	Elastizitätstensor
$S_q$		Element des Nachgiebigkeitsvektors (V.N.)
$S_{kl}$		Element des Nachgiebigkeitstensors

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$S$		Vektor der elastischen Nachgiebigkeit (V.N.; auch: mech. Dehnung, Deformation)
$[S]$		Tensor der elastischen Nachgiebigkeit
$t$	s	Zeit
$T_p$	N/m <sup>2</sup>	Element des Spannungsvektors (V.N.)
$T_{ij}$	N/m <sup>2</sup>	Element des Spannungstensors
$T$	N/m <sup>2</sup>	Vektor mechanischer Spannungen (V.N.)
$[T]$	N/m <sup>2</sup>	Tensor der mechanischen Spannungen (Cau-chyscher Spannungstensor)
$T$	K	Temperatur
$T_p$	s	Periodendauer
$T_{abt}$	s	Abtastperiodendauer
$u$	m	Auslenkung
$U$	V	Elektrische Spannung
$U^{(i)}$	J/m <sup>3</sup>	(Volumenbezogene) Dichte der inneren Ener-gie
$\vec{v}$	m/s	Geschwindigkeitsvektor
$w$	m	Breite
$x_{1,2,3}$	m	Kartesische Ortskoordinaten
$X$	$\Omega$	Reaktanz (auch: Blindwiderstand)
$Y$	S	Admittanz (auch: komplexer Leitwert)
$Y_{11}, Y_{22}$	S	Eingangs- und Ausgangskurzschlussadmit-tanz (Zweiter)
$z$	m	Axiale Ortskoordinate in Zylinderkoordinaten
$Z$	N s/m <sup>3</sup>	Schallkennimpedanz
$Z_{21}, Z_{12}$	$\Omega$	Leerlauf-Kernimpedanz Zweitor (rückwärts, vorwärts)

## Griechische Buchstaben

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$\alpha_K$	s	Rayleigh-Dämpfungsparameter ( $\sim$ Steifigkeit)
$\alpha_M$	1/s	Rayleigh-Dämpfungsparameter ( $\sim$ Masse)
$\beta_{ij}$	m/F = V m/(A s)	Inverse Permittivität (V.N.)
$\beta$	m/F = V m/(A s)	Inverser Permittivitätsvektor (V.N.)
$[\beta]$	m/F = V m/(A s)	Inverser Permittivitätstensor (auch: Impermit-tivität)
$\delta$	1/s	Abklingkonstante
$\delta(t)$		Delta-Funktion (Dirac-Impuls)
$\delta_d$		Piezoelektrischer Verlustwinkel
$\tan \delta_d$		Piezoelektrischer Verlustfaktor
$\delta_e$		Dielektrischer Verlustwinkel
$\tan \delta_e$		Dielektrischer Verlustfaktor
$\eta_1$	m/s	Kleinste Nullstelle der <i>Onoe Funktion</i>

Formelzeichen	Einheit	Bedeutung
$\kappa$		2D-Korrelation zweier Matrizen
$\Delta\kappa_x$		Lage des Maximums einer Korrelation in $x$ -Richtung
$\delta_m$		Mechanischer Verlustwinkel
$\tan \delta_m$		Mechanischer Verlustfaktor
$\varepsilon_{ij}$	F/m = A s/(V m)	Permittivität (auch: dielektrische Leitfähigkeit)
$\varepsilon$	F/m = C/(V m)	Permittivitätsvektor (V.N.)
$[\varepsilon]$	F/m	Permittivitätstensor
$\zeta$		Laufindex
$\eta$	Pa s = kg/(m s)	Dynamische Viskosität (oft auch in N s/m <sup>2</sup> )
$\vartheta$	°C	Temperatur
$\vartheta_c$	°C	Curie-Temperatur
$\tau_x$		Korrelationslänge in $x$ -Richtung
$\Delta\vartheta$	K	Temperaturdifferenz
$\Delta t$	s	Simulationszeitschritt
$\lambda$	m	Wellenlänge
$\nu$		Poissonzahl (auch: Querkontraktionszahl)
$\nu^P$		Planare Poissonzahl
$\vec{v}$	m/s	Schallschnelle
$\xi$		Modaler Dämpfungsfaktor (auch: Dämpfungsgrad, Lehrsches Dämpfungsmaß)
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte der reinen Piezokeramik
$\rho_e$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte des Elektrodenmaterials
$\rho_{\text{ges}}$	kg/m <sup>3</sup>	Mittlere Dichte (Piezokeramik mit Elektrode)
$\sigma$	J/K	Entropie
$\varphi$	°	Phasenwinkel
$\varphi_z$	°	Azimutale Ortskoordinate (Zylinderkoord.)
$\chi$		Laufindex
$\Phi$		Modalmatrix
$\phi_E$	V	El. Potential
$\phi_0$	rad	Nullphasenwinkel
$\omega$	1/s	Kreisfrequenz
$\omega_0$	1/s	Resonanzkreisfrequenz
$\omega_e$	1/s	Eigenkreisfrequenz
$\Psi_Z$		Sensitivitätsmaß für Impedanzverlauf

## Mathematik- und Naturkonstanten

Konstante	Wert und Einheit	Bedeutung
e	2,718281828...	Eulersche Zahl
$\varepsilon_0$	$8,854187 \dots \cdot 10^{-12}$ A s/(V m)	Elektrische Feldkonstante
$\pi$	3,14159265...	Kreiszahl Pi
$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A <sup>2</sup>	Magnetische Feldkonstante

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Zielstellung

Während des Entwicklungsprozesses von Ultraschallwandlern ist eine präzise transiente Simulation der Schwingungsvorgänge und der Schallausbreitung nötig, um die gewünschten Eigenschaften beurteilen und verbessern zu können [HRS09; RZG08; SSR07]. Hierdurch lassen sich die meist aufwendigen und kostspieligen Prototypenfertigungen reduzieren und günstigere Entwurfspunkte durch Parametervariationen festlegen. Das zentrale Element in vielen Schallwandlern ist eine Piezokeramik, die durch eine elektrische Spannung zu Schwingungen angeregt wird. Um sowohl die Piezokeramiken als auch daraus aufgebaute komplexe Schallwandler insgesamt möglichst realitätsnah mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) simulieren zu können, müssen die für die Simulation nötigen Eigenschaften der realen Materialien präzise bekannt sein. Diese spielen neben einer guten Modellbildung des physikalischen Systems die wichtigste Rolle für eine realitätsnahe Simulation [AWV98]. Die von den Herstellern zur Verfügung gestellten und in der Literatur vorhandenen Materialkenngrößen reichen hier teilweise nicht aus, da diese oft in quasistatischen Versuchen an verschiedenen Probekörpergeometrien oder in verschiedenen Frequenzbereichen ermittelt werden und teilweise nicht auf den interessierenden Frequenzbereich übertragbar sind (vgl. Kapitel 7.5). Sie können jedoch als Anhaltspunkt für eine Bestimmung von Startwerten im Rahmen einer Optimierung genutzt werden (Kapitel 7.2).

Für sensorische Anwendungen sind bei Luftschallanwendungen Frequenzen im Bereich von zweistelligen Kilohertz bis einigen hundert Kilohertz und für Flüssigkeitsanwendungen im Megahertz-Bereich üblich [KrKr86]. Hierdurch wird der auch im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Frequenzbereich festgelegt. Neben der Verwendung in einer FEM-Simulation kann eine robuste und reproduzierbare Ermittlung von Kenngrößen einer Piezokeramik auch an anderen Stellen von Vorteil sein, beispielsweise für eine Qualitätskontrolle im Herstellungsprozess [Sch10].

Auf eine wichtige Unterscheidung in diesem Zusammenhang sei an dieser Stelle hingewiesen: Es muss deutlich zwischen Piezomaterialdaten und Materialparametern unterschieden werden. Piezomaterialdaten repräsentieren die tatsächlichen physikalischen Eigenschaften eines Materials, wohingegen die Materialparameter darauf hin optimiert sind, das Verhalten der Komponenten möglichst realitätsnah in der transienten FEM-Simulation abbilden zu können. In dieser Arbeit geht es in erster Linie um die Bestimmung der Materialparameter von Piezokeramiken. Details zu dieser Unterscheidung werden im Kapitel 3.1 näher erläutert. Als Oberbegriff für die Piezomaterialdaten und die Materialparameter wird im Rahmen dieser Arbeit der Ausdruck Materialkenngrößen verwendet.

Bei den etablierten Verfahren zur Bestimmung von Materialkenngrößen kann zwischen analytischen und numerischen Verfahren (inverse Verfahren auf Grundlage der FEM) unterschieden werden. Ein Großteil von ihnen basiert auf dem gemessenen Impedanzverlauf der zu untersuchenden Piezokeramik, da dieser eine gut zugängliche Messgröße darstellt. Bei den analytischen Verfahren (vgl. Kapitel 2.1) werden bestimmte geometrische Randbedingungen genutzt (vgl. Anhang A.3), um gezielt Schwingungsformen zu separieren und für einen eingeschränkten Frequenzbereich die Piezomaterialdaten aus dem komplexwertigen Impedanzverlauf zu berechnen. Da diese geometrischen Randbedingungen für viele verwendete Piezokeramiken nicht einzuhalten sind oder keine unterschiedlichen Probekörper zur Verfügung stehen, werden zunehmend Verfahren genutzt, die eine Anpassung eines simulierten an einen gemessenen Impedanzverlauf im Rahmen eines inversen Ansatzes nutzen (vgl. Kapitel 2.2).

Des Weiteren ist nicht zu verhindern, dass die tatsächlichen Materialparameter einer Piezokeramik auch von der konkreten Geometrie abhängen, so dass eine Bestimmung an der tatsächlich für den Einsatz geplanten Geometrie der Piezokeramik oft den einzig zielführenden Ansatz darstellt. Gerade auch im Hinblick auf Anwendungen, bei denen eine Miniaturisierung des Wandlerdesigns im Vordergrund steht und die Piezokeramiken die geometrischen Randbedingungen bezüglich der analytischen Lösung nicht mehr erfüllen können, ist die Materialparameterbestimmung mittels inversem Algorithmus vorzuziehen (vgl. Kapitel 7.1). Hinzu kommt, dass die Ermittlung der Parameter mit den analytischen Verfahren jeweils nur eine Teilmenge für eine bestimmte geometrieabhängige Resonanzstelle für einen eingeschränkten Frequenzbereich bestimmt, sich also keine konsistenten Daten für einen interessierenden Frequenzarbeitspunkt ergeben [AWV98]. Eines der größten Probleme bei der FEM-Simulation von piezoelektrischen Systemen stellt die Frequenzabhängigkeit der Materialparameter dar [Lah08]. Auch deshalb ist eine konsistente Bestimmung

für einen, in Hinblick auf die spätere Anwendung, interessierenden Frequenzbereich vorteilhaft.

Allen Verfahren gemeinsam ist die hohe Unsicherheit bei der Bestimmung einzelner Materialparameter. Diese ist zurückzuführen auf die genutzten Symmetrien bei den verwendeten Probekörpern, die sich an den Vorgaben der analytischen Methoden orientieren [IEE87]. Diese führen zu einem gegenüber bestimmten Materialparametern unempfindlichen Impedanzverlauf, so dass diese während der im inversen Verfahren enthaltenen Optimierung nicht genügend berücksichtigt werden können und nach Abschluss der Optimierung eine hohe Unsicherheit aufweisen [Lah08; RRH11].

Ziel dieser wissenschaftlichen Arbeit ist es deshalb, die Sensitivität des Impedanzverlaufes auf gerade diese schwierig zu bestimmenden Parameter zu erhöhen bei gleichzeitiger Beibehaltung der guten Sensitivität auf die übrigen Parameter. Wichtig ist hier insbesondere auch die ausgeglichene Sensitivität um einen Frequenzarbeitspunkt, da nur die gleichzeitige Bestimmung aller Materialparameter in dem interessierenden Frequenzbereich und an einem einzelnen Probekörper zu konsistenten Datensätzen führen kann. Bei der Verwendung unterschiedlicher Probekörper kann aufgrund der individuellen Prozessierung der unterschiedlichen Piezokeramiken kein konsistenter Materialdatensatz bestimmt und auch nicht erwartet werden.

Auf diese Weise werden Materialparameter für die transiente FEM-Simulation mit einer höheren Robustheit und Präzision bestimmbar und die darauf aufbauenden Simulationen können realitätsnähere Ergebnisse liefern. Grundlage hierfür sind die in Kapitel 2.2 vorgestellten inversen Lösungsmethoden basierend auf der FEM. Als Lösungsansatz wird die als problematisch erkannte übliche Symmetrie der Elektroden und die damit verbundenen Homogenität des anregenden elektrischen Feldes reduziert, ohne die für die Modellierung und die Simulation günstige Rotationssymmetrie aufzugeben. Es wird eine zur Bestimmung der Materialparameter günstigere Elektrodenform zusammen mit einer modifizierten elektrischen Anregung ermittelt und für die genannte Beeinflussung der Sensitivität optimiert. Die so verbesserten Materialparameter können dann in Form von reellen Materialkenngrößen in Kombination mit dem für die transienten FEM-Simulationen üblichen Rayleigh-Dämpfungsmodell eingesetzt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass zwar für die hohe Symmetrie der im Rahmen der Materialparameterbestimmung untersuchten Piezokeramiken ein geringer Einfluss einiger Materialparameter zu beobachten ist, jedoch für abweichende Geometrien und in Kombination mit weiteren Elementen des Wandlerbaus auch diese Materialparameter in der FEM aufgrund der dann abnehmenden Symmetrie wieder an Bedeutung gewinnen und somit ebenfalls mit hoher Genauigkeit bestimmt

werden müssen. Aus diesem Ziel ergeben sich folgende Leitfragen, die im Rahmen dieser Arbeit beantwortet werden sollen:

- Welche Materialparameter weisen einen zu geringen Einfluss auf den komplexwertigen Impedanzverlauf auf und können deshalb nur mit hoher Unsicherheit im Rahmen einer Materialparameterbestimmung mittels einer Optimierung bestimmt werden?
- Worin begründet sich die ungenügende Sensitivität des Impedanzverlaufes auf einzelne Materialparameter und wie lässt sich diese Erkenntnis für einen verbesserten Optimierungsablauf nutzen?
- Was ist ein geeignetes Sensitivitätsmaß, das auch eine quantitative Analyse im Rahmen einer Optimierung zulässt?
- Welche Maßnahmen eignen sich für eine Erhöhung der Sensitivität des Impedanzverlaufes auf die Materialparameter?
- Welche modifizierte Elektrodenanordnung und welches zugehörige Vernetzwerk ergeben sich nach einer Optimierung für eine gesteigerte Sensitivität?
- Wie reproduzierbar können Messergebnisse von einem robusten und weitgehend automatisierten Messsystem geliefert werden und welche Modifikationen an heute üblichen Messaufbauten sind hierfür notwendig?
- Kann auf zusätzliche Messungen, wie beispielsweise eine aufwendige Laser-Doppler-Vibrometermessung, verzichtet werden?

## 1.2 Verbale Gliederung und Aufbau dieser Arbeit

Um die im Kapitel 1.1 erläuterten Ziele erreichen und die Leitfragen beantworten zu können, ist diese Arbeit in folgende Kapitel gegliedert.

Im Anschluss an die Einleitung im **Kapitel 1** wird im **Kapitel 2** die Entwicklung und der Stand der Technik in Bezug auf die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Materialparametern vorgestellt. Dabei ist das Kapitel in ein Unterkapitel zu analytischen Verfahren und eines zu den neueren FEM-basierten inversen Verfahren unterteilt. Letzteres berücksichtigt insbesondere auch vorhandene Betrachtungen der Sensitivität. Beide Verfahren werden im Rahmen dieser Arbeit genutzt, zum einen für eine Startwertbestimmung und zum anderen für die eigentliche Optimierung der Materialparameter im Rahmen eines inversen Verfahrens. Das Kapitel schließt mit einer Einordnung dieser Arbeit in das wissenschaftliche Umfeld sowie der Abgrenzung vom Stand der Technik.

Zu Beginn von **Kapitel 3** werden einige wichtige Begriffsdefinitionen vorgenommen und physikalische Grundlagen von Piezokeramiken erläutert. Anschließend



werden mit den Grundgleichungen für die Materialbeschreibung unter anderem die theoretischen Grundlagen für die Betrachtung der komplexwertigen Impedanz gelegt, auf der die verwendeten Verfahren zur Materialparameterbestimmung basieren. Neben der Impedanz werden auch die beteiligten Stoffkonstanten und deren Zusammenhänge aufgezeigt. Im letzten Unterkapitel werden zwei Möglichkeiten der Berücksichtigung von Materialdämpfung dargestellt.

Im **Kapitel 4** wird zunächst das generierte parametrisierbare FEM-Simulationsmodell erläutert. Anschließend werden zwei Verfahren zur simulativen Bestimmung eines komplexwertigen Impedanzverlaufes vorgestellt. Beide werden im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt, da für unterschiedliche Aufgaben jeweils Vorteile des einen oder des anderen Verfahrens überwiegen.

Der neue Beitrag zur Steigerung der Sensitivität des Impedanzverlaufes auf die Materialparameter wird im **Kapitel 5** vorgestellt. Zunächst werden die vorhandenen Sensitivitäten bei der Verwendung von Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden dargestellt. Anschließend wird auf die Modifikation der Elektrodentopologie und die Ergänzung um ein Vornetzwerk eingegangen. Es wird ein für die Optimierung der Elektroden geeignetes quantitatives Sensitivitätsmaß hergeleitet, welches im letzten Teil dieses Kapitels dazu genutzt wird, um die Topologie der Elektroden für eine erhöhte Sensitivität des Impedanzverlaufes auf bisher schwierig zu bestimmende Materialparameter zu optimieren.

Die zur Messung des komplexwertigen Impedanzverlaufes eingesetzte Messtechnik wird im **Kapitel 6** vorgestellt. Nach einer kurzen Einführung in das Messverfahren nach *DIN EN 60444* (vgl. [DIN00]) werden die für eine Automatisierung des Messablaufes notwendigen Anpassungen vorgestellt. Es folgt die Beschreibung der Modifikationen zur Messung der Impedanz bei segmentierten Elektroden. Nach einem Vergleich der Methoden zur Elektrodensegmentierung wird am Ende dieses Kapitels kurz das in dieser Arbeit favorisierte und eingesetzte Verfahren der Laser-Ablation beschrieben.

Das eigentliche Verfahren der Materialparameterbestimmung wird im **Kapitel 7** erläutert. Zu Beginn wird allgemein die Optimierung mittels eines inversen Verfahrens beschrieben. Für die Optimierung spielen geeignete Startwerte für die gesuchten Materialparameter eine wichtige Rolle, so dass deren Bestimmung das zweite Unterkapitel gewidmet ist. Im Anschluss wird die im Rahmen dieser Arbeit modifizierte Materialparameterbestimmung beispielhaft auf eine reale Piezokeramik angewendet und auf Plausibilität hin überprüft. Möglichkeiten der Konsistenzprüfung der ermittelten Materialparameter werden aufgezeigt und das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Verfahren wird vorgestellt.

Das letzte **Kapitel 8** fasst diese Arbeit zusammen und zeigt die erreichten Ziele auf. Darauf aufbauend werden Anknüpfungspunkte für nachfolgende Arbeiten abgeleitet. Im Anschluss sind im **Anhang A** zu ausgewählten Themen weiterführende Details zusammengestellt, die sinnvolle Zusatzinformationen zu ausgewählten Punkten der Arbeit enthalten.

## 2 Entwicklung und Stand der Technik

In diesem Kapitel wird die Entwicklung auf dem Gebiet der Bestimmung von Kenngrößen für Piezokeramiken bis zum heutigen Stand der Technik dargestellt. Dabei werden zwei Bereiche unterschieden. Im Kapitel 2.1 werden die analytischen Verfahren vorgestellt, bei denen die Bestimmung von Piezomaterialdaten das Ziel ist. Diese wurden bereits zu der Zeit genutzt, als noch keine Rechner für die Berechnung komplizierter Modelle zur Verfügung standen. Ihnen liegen deshalb Randbedingungen zugrunde, die zu analytisch einfacher handhabbaren Spezialfällen führen und nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich besitzen. Dennoch haben diese Verfahren auch in der heutigen Zeit ihre Berechtigung und werden beispielsweise im Rahmen dieser Arbeit für die Bestimmung von Startwerten für das anschließende inverse Verfahren genutzt (vgl. Kapitel 7.2). Gute Startwerte erleichtern die Nutzung von Optimierungsalgorithmen, so dass die Verbesserung und Automatisierung der Startwertschätzung ein weiteres Ziel dieser Arbeit darstellt.

Im Kapitel 2.2 wird die Entwicklung der letzten Jahre auf dem Gebiet der Materialparameterbestimmung mittels inverser Verfahren aufgezeigt. Diese Verfahren beruhen auf dem Vergleich eines gemessenen mit einem mittels FEM simulierten Impedanzverlauf. Über eine Optimierung werden die der Simulation zugrunde liegenden Materialparameter so angepasst, dass eine möglichst gute Übereinstimmung der beiden Impedanzverläufe erreicht wird. Genutzt wird hierfür heute meist der Vergleich des Betrages der komplexwertigen Impedanzen. Im Rahmen dieser Arbeit ergibt sich hieraus ein Erweiterungspotential durch die Nutzung der komplexwertigen Impedanzinformation.

### 2.1 Analytische Verfahren

Schon in den 50er Jahren wurden erste Verfahren zur Bestimmung der Materialdaten von Piezokeramiken etabliert, um Entwicklern von Schallwandlern die Abschätzung des Verhaltens eines zu entwickelnden Systems zu ermöglichen. Mason leitete über thermodynamische Ansätze Zustandsgleichungen her (vgl. Kapitel 3.4) und wertete

sie für spezielle geometrische Randbedingungen aus [Mas48; MaJa54]. Diese wurden so gewählt, dass sich jeweils ein eindimensionaler Sonderfall ergab, der analytisch leicht zu lösen und damals als Anhaltspunkt für den Wandlerentwurf ausreichend war. 1967 fassten Onoe und Jumonji die wichtigsten Näherungsformeln für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden zusammen und gaben elektrische Ersatzschaltungen für die Abbildung der Impedanz in der Nähe einer Resonanzstelle an [OnJu67].

Die für die Einhaltung der genannten Randbedingungen nötigen geometrischen Vorgaben für die zu untersuchenden Probekörper wurden 1961 in dem *IRE Standard on Piezoelectric Crystals* [IRE61] zusammengestellt (vgl. Tabelle A.2). Die dritte Revision dieses Standards (nach [IEE66; IEE78]) bildet heute den *IEEE Standard on Piezoelectricity* [IEE87]. Dieser dient neben der *DIN IEC 60483*<sup>1</sup> und der *DIN EN 50324*<sup>2</sup> als Grundlage praktisch aller heute genutzten analytischen Verfahren. Für die Bestimmung aller Materialkenngrößen werden demnach verschiedene Probekörper mit unterschiedlichen Geometrien und Polarisierungen benötigt.

In diesen Betrachtungen werden die keramischen Materialien als ideal verlustlos angenommen. Holland leitete 1967 über den Ansatz eines generalisierten Poynting-Vektors die Berücksichtigung von Verlusten durch die Verwendung von komplexwertigen Materialkenngrößen her und wandte diese Theorie beispielhaft bei der Bestimmung eines Phasenwinkels für den piezoelektrischen Koppelfaktor einer stabförmigen PZT-Piezokeramik an [Hol67; Hol70]. Diese Beschreibungsweise der Verluste gilt heute als anerkannt und wird oft für die Berücksichtigung der Verluste im Rahmen der Materialbeschreibung angewendet (vgl. Kapitel 3.5.2). Die Verluste werden dabei in dielektrische, mechanische (elastische) und piezoelektrische Verluste unterteilt [UcHi01].

Die bis dahin übliche und auch im *IRE Standard* [IRE61] angegebene Auswertung des Betrages der Impedanz oder Admittanz vernachlässigt die in der Phase steckende Zusatzinformation. Laut Holland u. a. entstehen hierdurch mehrere Fehlerquellen, die durch eine 1969 neu vorgestellte Methode vermieden werden können, die aufgrund der mathematischen Analogie zur Verstärkertechnik als Verstärkungs-Bandbreite-Methode bezeichnet wird [HoEe69]. Hierbei kann der Einfluss der Unsicherheiten der dielektrischen Konstanten auf die Bestimmung der piezoelektrischen Konstan-

---

<sup>1</sup>*DIN IEC 60483*: „Leitfaden zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von piezoelektrischer Keramik mit hohem elektromechanischem Koppelfaktor“ [DIN88]

<sup>2</sup>*DIN EN 50324*: „Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten“ (Teil 1: Begriffe [DIN02], Teil 2: Messverfahren Kleinsignal [DIN02b], Teil 3: Messverfahren Großsignal [DIN02c])

ten verringert werden. Auch kann mit diesem Verfahren abgeschätzt werden, ob durch eine zu starke elektrische Anregung bei der Bestimmung der Admittanz ungünstige nichtlineare Effekte auftreten. Dabei wird die Darstellung des Verlaufes als Admittanzortskurve verwendet, wie sie auch in Abbildung A.2 dargestellt ist. Es muss jedoch festgestellt werden, dass bei zu starker Modenkopplung sowohl die Standardverfahren als auch das von Holland erweiterte Verfahren versagen. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit mit ein Grund für die Verwendung des inversen Verfahrens auf Grundlage der FEM-Simulation (vgl. Kapitel 2.2), da für die hier zu untersuchenden Piezokeramiken die Bedingung der separierten Schwingungsmoden meist nicht erfüllt ist.

Eines der ersten iterativen Verfahren zur Bestimmung von komplexwertigen Piezomaterialdaten wurde 1976 von Smits vorgestellt [Smi76], welches einige Vorteile gegenüber den bis dahin verwendeten Verfahren aufweist. Es kommt mit vier verschiedenen Probekörpergeometrien aus und verwendet anstelle von Näherungsformeln die exakte Beschreibung durch die Zustandsgleichungen (vgl. Kapitel 3.4). Durch die Messung der Immitanz<sup>3</sup> für nur drei unterschiedliche Frequenzen wird ein iterativ zu lösendes Gleichungssystem aufgestellt. Anders als das Verfahren im *IRE Standard* [IRE61] ist dieses auch geeignet für Materialien mit kleinem Kopplungsfaktor  $k$ . Ein weiterer Vorteil ist die konsistente Bestimmung der Piezomaterialdaten in einem eingeschränkten Frequenzbereich. Bei dem iterativen Verfahren werden ausgehend von einem bekannten oder geschätzten Wert für die elastische Konstante  $s_{11}^E$  die Werte der Permittivität  $\epsilon_{33}^T$  und der piezoelektrischen Konstanten  $d_{31}$  berechnet. Aus diesen beiden Größen und einem weiteren gemessenen Wert der Admittanz wird iterativ ein verbesserter Wert für  $s_{11}^E$  bestimmt. Spätere Arbeiten haben gezeigt, dass die Hauptschwierigkeit dieses Verfahrens in der Abhängigkeit der ermittelten Kenngrößen von den gewählten Frequenzen für die Messung der Admittanz oder Impedanz liegt [KCC97]. Die günstige Wahl dieser Frequenzen liegt in der Hand des Experimentators und ist deshalb schwierig reproduzierbar zu gestalten. Später vorgestellte Verfahren umgehen diese Schwierigkeit beispielsweise durch eine automatisierte Auswahl geeigneter Frequenzen. Eine Anwendung dieses Verfahrens zur Bestimmung der temperaturabhängigen Piezomaterialdaten für ein PLZT-Material<sup>4</sup> wurde von Smits 1985 vorgestellt [Smi85].

Ein erster Ansatz zur Automatisierung der im *IEEE Standard* [IEE87] angegebenen Prozedur zur Bestimmung der Realteile der Piezomaterialdaten wurde 1991 von

---

<sup>3</sup>Immitanz ist der Oberbegriff von Impedanz und Admittanz.

<sup>4</sup>PLZT bezeichnet eine PZT-Piezokeramik mit einem zusätzlichen Lanthan-Anteil.

Sherrit u. a. beschrieben [SGW91]. In der Standardprozedur verwendete Tabellen werden hierzu durch Approximationspolynome abgebildet. Im Mittelpunkt steht aber auch hier die Bestimmung der komplexwertigen Materialdaten, im Gegensatz zu Smits aber mit einem nicht-iterativen Verfahren. Neben der Resonanz- und der Antiresonanzfrequenz der betrachteten Radialgrundschiwingung benötigt dieses Verfahren zusätzlich die Serienresonanzfrequenz der ersten Oberschiwingung und zusätzliche Messungen bei Frequenzen, die als Verbesserung der Methode von Smits nun nicht manuell gewählt werden. Erstmals wird hier ein Probekörper als ausreichend erwähnt, jedoch werden nur niederfrequente Stützstellen genutzt, um eine Modenkopplung auszuschließen und nur den Radialmode zu betrachten. Hierdurch nimmt die Übereinstimmung von Testdaten und dem berechneten Verlauf der Impedanz für höhere Frequenzen allerdings stark ab. Um besser die durch die Dämpfung hervorgerufene Abweichung der Serien- und Parallelresonanz  $f_s$  und  $f_p$  von der Minimal- und Maximalfrequenz  $f_m$  und  $f_n$  berücksichtigen zu können (vgl. Anhang A.1), werden diese nicht aus  $\text{Re}\{Z(\omega)\}$  und  $\text{Re}\{Y(\omega)\}$  bestimmt, sondern aus den mit der Kreisfrequenz gewichteten Größen  $\text{Re}\{\omega \cdot Z(\omega)\}$  und  $\text{Re}\left\{\frac{Y(\omega)}{\omega}\right\}$ . Zudem werden die charakteristischen Frequenzen  $f_s$  und  $f_p$  als komplexwertige Größen  $\underline{f}_s$  und  $\underline{f}_p$  angesetzt. Die erwähnte Näherung  $f_s \approx f_m$  und  $f_p \approx f_n$  verliert mit zunehmender Dämpfung ihre Gültigkeit, dieser Einfluss wurde von Kwok u. a. näher untersucht [KCC97]. Eine in dieser Arbeit genutzte Näherung ist im Anhang A.1 in Gleichung (A.2) angegeben. Die Lage der verschiedenen hier erwähnten charakteristischen Frequenzen im Impedanzverlauf ist für eine Resonanzstelle in der Abbildung A.3 dargestellt.

Die Betrachtungen für die Radialschiwingung werden von Sherrit in einer weiteren Veröffentlichung verallgemeinert und auf die Dickenschiwingung einer plattenförmigen Piezokeramik angewendet [SWM92]. Hierbei werden, je nach Größe des Koppelfaktors  $k_t$ , zwei Möglichkeiten seiner Bestimmung unterschieden. Für einen kleinen Kopplungsfaktor  $k_t$  wird die Methode des *IEEE Standards* [IEE87] genutzt, jetzt aber unter Verwendung der oben genannten komplexwertigen Frequenzen. Für einen größer werdenden Kopplungsfaktor nehmen die Quereinflüsse der unterschiedlichen Moden zu und es wird eine Bestimmung über das Verhältnis der Serienresonanzfrequenz der ersten Oberschiwingung zu der der Grundschiwingung empfohlen. Dieses ist im genannten *IEEE Standard* tabelliert und hier durch ein Polynom approximiert. Aufgrund der abnehmenden Bandbreite für Kopplungsfaktoren  $k_t < 0,3$  und der hierdurch unsicheren Bestimmung der Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen schlägt Sherrit in diesem Fall die Nutzung weiterer Frequenzen vor, für deren separate Bestimmung geänderte Impedanz- und Admittanzausdrücke verwendet werden.

Auf Grundlage dieser Erkenntnisse haben 1994 Alemany u. a. erneut ein erweitertes iteratives Verfahren zur Bestimmung der komplexwertigen Piezomaterialdaten vorgestellt [APJ94]. Um die fehleranfällige Bestimmung der Frequenzstützstellen für die Impedanz- oder Admittanzmessung zu umgehen, wird hier erstmals eine Approximation des Verlaufes mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für eine robuste Bestimmung genutzt. Betrachtet wird wiederum ein eingeschränkter Frequenzbereich, der die Resonanz- und Antiresonanzfrequenz der Grundschiwingung sowie die Serienresonanzfrequenz der ersten Oberschiwingung beinhaltet. Anhand von vier Probekörpern werden die Piezomaterialdaten innerhalb eines iterativ gelösten nichtlinearen Gleichungssystems bestimmt, wobei im Gegensatz zum Verfahren des *IEEE Standards* nun auch kleine Kopplungsfaktoren Berücksichtigung finden.

Die Nutzung von verschiedenen Probekörpern ist weit verbreitet, bringt aber auch Schwierigkeiten mit sich. Beispielsweise ist es bei der Herstellung nicht zu vermeiden, dass die unterschiedlichen Probekörper eine nicht identische elektrische Polarisierung aufweisen [AGP95]. Es ist deshalb in Bezug auf die Konsistenz der Daten fraglich, welchen Einfluss diese unterschiedliche Prozessierung auf die Piezomaterialdaten hat. Durch die Nutzung unterschiedlicher Frequenzbereiche für die verschiedenen Probekörper wird ebenfalls die Konsistenz beeinträchtigt. Darüber hinaus kann auch eine Geometrieabhängigkeit nicht ausgeschlossen werden [RWS09]. Diese Punkte legen nahe, für die Bestimmung möglichst nur einen Probekörper zu nutzen, dessen geometrische Abmessungen möglichst dicht an der später einzusetzenden Geometrie liegen. Deshalb haben Alemany u. a. ihr Verfahren auf die oft genutzte Radialschiwingung einer axial polarisierten Piezokeramik angepasst. Insgesamt beinhaltet das neue Verfahren zwei verschachtelte Iterationsschleifen. In der äußeren werden die Frequenzstützstellen bestimmt, für die die Messwerte ermittelt werden sollen. Sie ersetzt demnach die beim vorherigen Verfahren als problematisch angesehene manuelle Wahl von Frequenzstützstellen. Innerhalb der inneren Schleife werden die Messungen für die vorher bestimmten Frequenzen durchgeführt und die Materialdaten ermittelt. Durch die Verschachtelung konvergiert das Verfahren vergleichsweise langsam. Durch eine Entkopplung dieser beiden Vorgänge kann hier eine Beschleunigung des Verfahrens erreicht werden [AMT02].

Um die Verluste in den komplexwertigen Piezomaterialdaten noch besser berücksichtigen zu können, wurde dieses Verfahren im Anschluss auf die Auswertung der ersten Oberschiwingung ausgeweitet [GoAl96]. Im Gegensatz zu anderen Verfahren wird hier jedoch nicht der Mittelwert für die Materialdaten bei unterschiedlichen Frequenzbereichen während der Ermittlung gebildet, sondern der gesamte Frequenzbe-

reich innerhalb des Iterationsprozesses betrachtet, wodurch eine bessere Beurteilung der Verluste ermöglicht wird.

Die bisher vorgestellten Verfahren wurden 1997 von Kwok u. a. verglichen und um eine eigene Methode ergänzt [KCC97]. Hierbei wird über eine nichtlineare Regression der Impedanzverlauf im Bereich der Grundresonanz an den theoretischen Verlauf angepasst. Der zu verwendende Frequenzbereich beginnt bei  $f_1 = \frac{f_m + f_n}{2} - 1,5 \cdot (f_n - f_m)$  und endet bei  $f_2 = \frac{f_m + f_n}{2} + 1,5 \cdot (f_n - f_m)$ , wodurch sichergestellt wird, dass sowohl die Resonanzfrequenz als auch die Antiresonanzfrequenz im betrachteten Intervall liegen. Zunächst wird für das Verfahren der dielektrische Verlustfaktor  $\tan \delta_d$  aus dem Phasenverlauf für  $f = 2f_p$  geschätzt, da für diese Bedingung der zweite Summand in der analytischen Beschreibung des Impedanzverlaufes Null wird (vgl. Gleichungen (1) und (4) in [KCC97]). Anschließend wird eine Gauß-Newton-Approximation für den Betragsverlauf der Impedanz durchgeführt und die Parameter  $c_{33}^D$ ,  $\epsilon_{33}^S$ ,  $k_t$ ,  $\tan \delta_m$  (mechanischer Verlustfaktor) und  $\tan \delta_k$  (Verlustfaktor von  $k_t$ ) werden bestimmt. Durch eine nachfolgende Approximation des Phasenverlaufes wird der zunächst geschätzte Wert für  $\tan \delta_d$  korrigiert.

Alle beschriebenen Verfahren setzen die Frequenzunabhängigkeit der Piezomaterialdaten für den betrachteten Frequenzbereich voraus. Ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, lässt sich eine gute Übereinstimmung von theoretischem und gemessenem Verlauf nicht für den gesamten Frequenzbereich erreichen. Lässt sich jedoch ein Parameter mit hoher Frequenzabhängigkeit identifizieren, kann dessen Verlauf in Abhängigkeit der Frequenz separat ermittelt und so die Übereinstimmung verbessert werden [KCC97].

Einen anderen Ansatz ohne eine Approximation des Impedanzverlaufes verfolgen Du u. a. [DWU03]. Hierbei wird der theoretische Verlauf der Admittanz (getrennt nach Real- und Imaginärteil) hinsichtlich seiner Abhängigkeit von den Imaginärteilen der Piezomaterialdaten untersucht. Es ergeben sich zwei von den bisher betrachteten Verfahren abweichende Bestimmungsgrundlagen aus dem dynamischen Verhalten nahe der Grundresonanzfrequenz. Zum einen wird die Ableitung des Imaginärteils der Admittanz genutzt und zum anderen die Asymmetrie des Verlaufes des Realteils der Admittanz nahe des Maximums ausgewertet. Eine theoretische Herleitung für die Fälle einer platten- und einer stabförmigen Piezokeramik anhand des Impedanzverlaufes ist in [DWU04] angegeben, welche in [DWU04a] auf drei LiNbO<sub>3</sub>-Probekörper der Kristallklasse  $3m$  angewendet wird.

Bisher wurden die ermittelten komplexwertigen Piezomaterialdaten nur durch die Übereinstimmung von gemessenem und theoretisch berechnetem Verlauf der Impedanz- oder Admittanzkurven verifiziert. Pardo u. a. haben in [PAB05; PAB06]



die drei genutzten Probekörpergeometrien als dreidimensionale FEM-Modelle (homogenes Material) nachgebildet und im Rahmen einer harmonischen Analyse den Abgleich von Messung und Simulation vorgenommen. Für die Radialresonanz einer dünnen Scheibe und die Längsschwingung eines Stabes konnte eine gute Übereinstimmung erreicht werden. Abweichungen der Ergebnisse für die Scherschwingung einer Platte machen aber deutlich, dass die Bestimmung anhand der idealisierten Formel aus dem *IEEE Standard* unzureichend ist, da diese für eine ungestörte Schwingungsform (ungekoppelte Mode) hergeleitet ist. Die reale Schwingungsform, deren Form mittels der FEM sichtbar gemacht wird, weicht von der idealen Schwingungsform ab und führt deshalb zu Variationen bei den ermittelten Materialdaten. Aufgrund dieser Erkenntnisse haben Pardo u. a. eine alternative Realisierung des Scherschwingers vorgeschlagen [PAB07], der die Übereinstimmung verbessert hat. Allerdings wird bei den Ergebnissen erneut die Problematik der Verwendung mehrerer Probekörper und die damit einhergehende unterschiedliche Polarisierung deutlich.

In einem Übersichtsartikel haben Sherit und Mukherjee 2007 die analytischen Ansätze unter Berücksichtigung der Verluste durch komplexwertige Piezomaterialdaten zusammengefasst [ShMu07]. Neben einer exemplarischen Herleitung der Impedanz für einen stabförmigen Schwinger sind hier kompakt noch einmal die analytischen Ausdrücke für die verschiedenen Probekörpergeometrien zusammengefasst. Auch Aspekte wie elektrische Ersatzschaltbilder und Mason- oder KLM-Dreitorersatzmodelle<sup>5</sup> werden dargestellt.

Da insbesondere die iterativen Verfahren von der Qualität der Startwerte abhängig sind, haben Masaki u. a. 2008 für ihr iteratives Verfahren eine explizite Prozedur zur Bestimmung geeigneter Startwerte vorgestellt [MHM08]. Hierzu betrachten sie zwei Frequenzbereiche, einen um die Grundschiwingung und einen um die erste Oberschwingung der Radialschwingung, um mittels des Verfahrens der kleinsten Fehlerquadrate eine Approximation der Admittanzkurve getrennt nach Real- und Imaginärteil durchzuführen. Zum Einsatz kommt ein Levenberg-Marquardt-Algorithmus zur numerischen Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems. Auf diese Weise wird die Bestimmung einzelner Frequenzstützstellen vermieden und stattdessen ein vergleichsweise großer Frequenzbereich für die Anpassung genutzt.

---

<sup>5</sup>Das Mason-Modell ist das bekannteste Dreitormodell zur Beschreibung eines elektromagnetischen Wandlers durch elektrische Ersatzgrößen und kann vorteilhaft mittels der Netzwerktheorie berechnet werden [LSW09]. Eine Erweiterung ist das nach den Entwicklern benannte KLM-Modell [KLM70; SLD99].

Einen weiteren Aspekt stellt die Betrachtung der Verluste über einen energetischen Ansatz dar. Sherrit wählt diese Vorgehensweise, um die Analogie der Beschreibung der Verluste durch komplexwertige Piezomaterialdaten und die Verwendung eines komplexwertigen Koppelfaktors für die Berechnung im Frequenzbereich aufzuzeigen [She08]. Beide stellen sich als eine geeignete Beschreibung für die Berücksichtigung der Verluste heraus.

Die bereits erwähnte Problematik durch die Verwendung mehrerer Probekörper (inkonsistentes Material, Verfügbarkeit vom Hersteller) versuchen Sherrit u. a. durch die Verwendung einer einzigen Probe zu umgehen [SMW10]. Anders als bei den bereits vorgestellten Methoden mit nur einem Probekörper werden hier jedoch aus einer zur Verfügung stehenden Piezokeramik nach und nach unterschiedliche Probekörper gefertigt, indem aus der ursprünglichen rotationssymmetrischen Scheibe (Messung von Radial- und Dickenresonanz) stabförmige Piezokeramik für die Untersuchung der verschiedenen Scher- und Längsschwingungen geschnitten werden. Zusätzlich ist hierbei die Entfernung und neue Aufbringung der Elektroden sowie die erneute elektrische Polarisierung notwendig, wodurch dieses Verfahren technisch sehr aufwendig und fehleranfällig ist. Eine Veränderung des Materials aufgrund der mechanischen Bearbeitungsschritte kann nicht ausgeschlossen werden und stellt die Konsistenz der gewonnenen Daten wiederum in Frage. Die eigentliche Bestimmung der Kenngrößen erfolgt dabei wieder nach den bereits beschriebenen Verfahren nach Smits [Smi76] und Sherrit [SGW91].

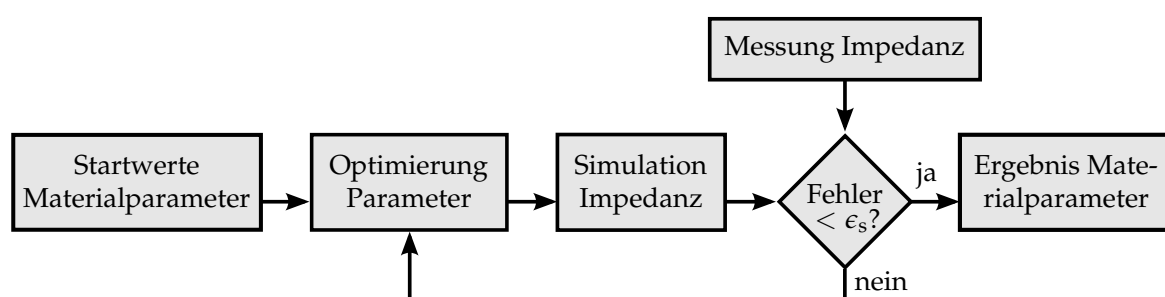
Praktisch alle vorgestellten analytischen Ansätze zur Bestimmung der Piezomaterialdaten basieren auf den Impedanz- und Admittanzgleichungen, die auch in dem *IEEE Standard* angegeben sind [IEE87], teilweise erweitert um die Berücksichtigung der Verluste durch die Verwendung komplexwertiger Materialdaten. Diese Gleichungen sind jedoch immer nur für bestimmte Geometrien (vgl. Anhang A.3) als eindimensionale Spezialfälle hergeleitet, da hier die jeweils abzubildenden Resonanzstellen gut separiert sind und unabhängig voneinander betrachtet werden können. Wie schon erwähnt, ist es sinnvoll, die Bestimmung der Materialdaten an Probekörpern vorzunehmen, die sich an der später geplanten Piezokeramikgeometrie orientieren und den Frequenzbereich der späteren Verwendung berücksichtigen. Oft sind für solche Piezokeramiken die Geometrierandbedingungen aber nicht mehr einzuhalten, gerade auch in Hinblick auf Miniaturisierungen oder komplexe Piezokeramikgeometrien.

Da hierdurch die analytischen Verfahren an ihre Grenzen stoßen, sind in den vergangenen Jahren mehr und mehr Verfahren entwickelt worden, die nicht mehr an diese Vorgaben gebunden sind. Um sie geht es im folgenden Unterkapitel 2.2. Trotz-

dem werden im Rahmen der Startwertschätzung (vgl. Kapitel 7.2) Methoden aus diesem Kapitel verwendet, um die oft unzureichenden oder ungenauen Herstellerangaben zu ergänzen oder zu verbessern, da nur durch hinreichend gute Startwerte für die Materialparameter eine zuverlässige Optimierung im Rahmen des inversen Verfahrens durchgeführt werden kann.

## 2.2 Inverse Verfahren und Sensitivitätsbetrachtungen

Die im vorherigen Kapitel beschriebenen Verfahren basieren auf vereinfachten eindimensionalen Modellen, die sich aus geometrischen Randbedingungen für verschiedene Probekörper ergeben. Es hat sich aber gezeigt, dass die unter diesen Randbedingungen bestimmten Piezomaterialdaten nicht für präzise dreidimensionale FEM-Simulationen eingesetzt werden können. Zudem ist die Herstellung der verschiedenen benötigten Probekörper aufwendig und kostenintensiv [KaKa08]. Auch die Bestimmung an unterschiedlichen Probekörpern und damit auch in verschiedenen Frequenzbereichen verringert die Konsistenz der gewonnenen Kenngrößen [LKK08]. Aus diesen Gründen und der zunehmenden Verfügbarkeit von leistungsstarken Rechnern werden immer mehr Verfahren etabliert, die keine besonderen Anforderungen an die Probekörper stellen und meist mit weniger Exemplaren auskommen. Auch eine Modenkopplung, die bei den analytischen Verfahren nicht berücksichtigt werden kann, kann mittels der FEM-Simulation abgebildet oder sogar, wie von Kybartas und Lukoševičius gezeigt (vgl. [KyLu02]), nutzbar gemacht werden.



**Abbildung 2.1:** Prinzipieller Ablauf eines inversen Verfahrens zur Materialparameterbestimmung.

Die Grundidee der inversen Verfahren basiert auf dem Vergleich eines einfach zu messenden charakteristischen Verlaufes mit einem mittels FEM simulierten Verlauf und der Angleichung des simulierten an den gemessenen durch Variation der Materialparameter. Auf diese Weise wird auf die passenden Materialparameter rückgeschlossen. Diese Vorgehensweise wird deshalb als inverses Verfahren bezeichnet. Aufgrund

der guten Messbarkeit wird meist der frequenzabhängige komplexwertige Impedanzverlauf gewählt. Der prinzipielle Ablauf solcher Verfahren ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Ausgehend von einem Startparametersatz wird ein mittels Simulation bestimmter Impedanzverlauf mit einem gemessenen verglichen und ein Fehlermaß bestimmt. Ist ein maximaler Fehler  $\epsilon_s$  noch nicht unterschritten, wird innerhalb eines Optimierungsverfahrens ein angepasster Parametersatz bestimmt und dieser Vorgang solange wiederholt, bis die angegebene Fehlergrenze unterschritten ist und das Ergebnis ausgegeben wird. Für eine genauere Beschreibung des in dieser Arbeit genutzten Ansatzes sei auf Kapitel 7.1 verwiesen.

Im Folgenden soll der Stand der Technik auf diesem Gebiet dargestellt werden. Bereits 1990 erkannte Lerch die Notwendigkeit, kompliziertere Zusammenhänge bei der Transducer-Entwicklung mittels der FEM auch transient zu untersuchen [Ler90]. Die Ersatzmodellbetrachtung mittels Mason- oder KLM-Modellen (vgl. [Sil84]) reichte für die dreidimensionale Betrachtung nicht mehr aus, da es in der Praxis immer die gegenseitige Beeinflussung von unterschiedlichen Moden gibt. Es entstand eine zwei- und dreidimensionale FEM-Formulierung für unterschiedliche Analysearten, mit denen statische, harmonische, transiente und Eigenfrequenzanalysen ermöglicht wurden [BaWi76; AWW98]. Aus den konstituierenden Gleichungen (vgl. Kapitel 3.4) wird hierzu durch Diskretisierung eine FEM-Formulierung hergeleitet (vgl. auch [AlHu70]). Für deren Lösung sind neben dem Modell auch die Materialparameter nötig.

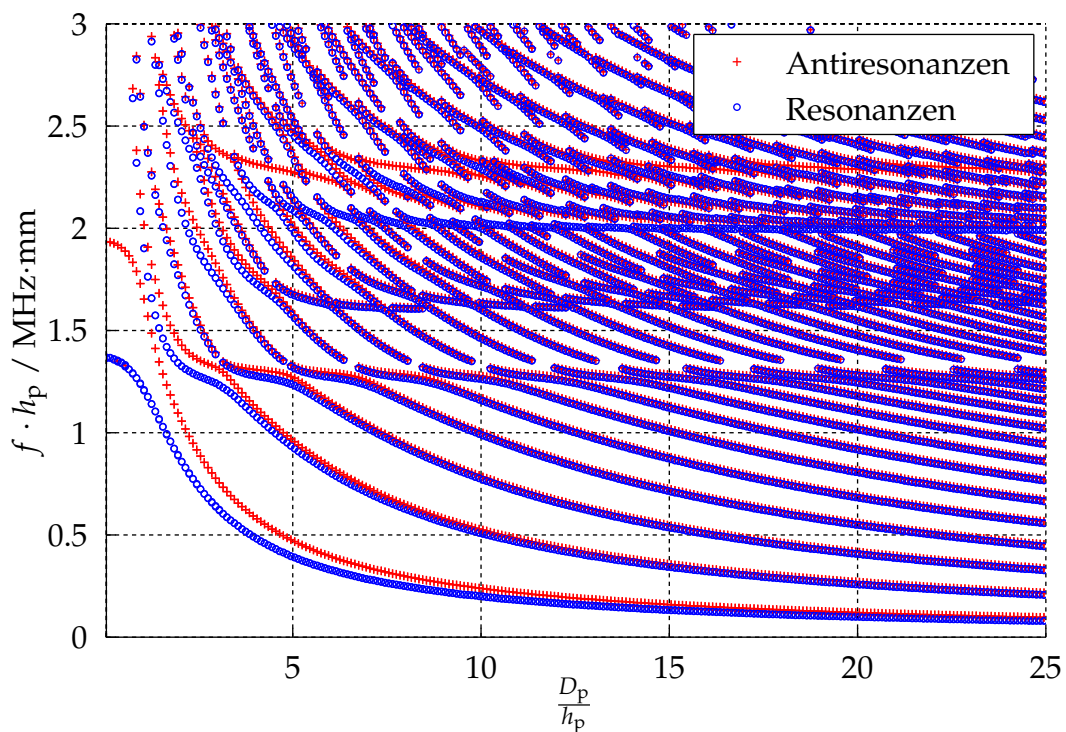
Bei der Lösung von FEM-Problemen kann zwischen einer Lösung im Zeit- und im Frequenzbereich unterschieden werden. Für den letzteren wird der eingeschwungene Zustand angenommen. Kleinere Bilanzräume (2D) lassen sich implizit lösen (beispielsweise mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren, vgl. [Bat96]). Bei umfangreicheren Problemstellungen (3D) ist dies aufgrund der großen Bandbreite<sup>6</sup> der beteiligten Matrizen nicht mehr möglich und es kommen iterative Löser zum Einsatz. Vorteilhaft an der Berechnung im Frequenzbereich ist z. B. die Möglichkeit, die Dämpfung für jeden Berechnungsschritt separat vorzugeben. Der größte Nachteil ist allerdings, dass die Berechnung für jede Frequenz im interessierenden Frequenzbereich einzeln vorgenommen werden muss und so ein hoher Rechenaufwand entsteht. Bei der Simulation im Zeitbereich kommen Zeitintegrationsverfahren zum Einsatz. Es handelt sich um die einzige Analyseart, die eine Berücksichtigung von Nichtli-

---

<sup>6</sup>Die Bandbreite einer Matrix wird über die Abstände der Nebendiagonalen von der Hauptdiagonale definiert, in denen noch Einträge ungleich Null vorhanden sind. [BaWi76]

nearitäten erlaubt, die für das Großsignalverhalten von Piezokeramiken eine Rolle spielen [SLK99]. Hier ist aber die Berücksichtigung der Dämpfung bisher nur in Form des in Kapitel 3.5.1 vorgestellten Rayleigh-Dämpfungsmodells möglich.

Einen iterativen Lösungsansatz zur Lösung des nichtlinearen Problems stellt das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) dar, welches für Piezokeramiken der *6mm*-Kristallklasse (vgl. Kapitel 3.4) von Kaltenbacher u. a. in [KKL00] angewendet worden ist. Die Dämpfung in Form der Rayleigh-Dämpfungsparameter ist hierbei durch Messung des modalen Dämpfungsfaktors  $\xi$  ermittelt worden und es konnte bereits eine gute Übereinstimmung von simuliertem und gemessenem Impedanzverlauf für den betrachteten Frequenzbereich erreicht werden. Eine Erweiterung auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall sowie die Möglichkeit der Einschränkung der Bestimmung auf ausgewählte Parameter stellen Kaltenbacher u. a. 2001 vor [KSK01]. Aufgrund der hohen Frequenzabhängigkeit der Materialparameter werden hier zwei Datensätze für unterschiedliche Frequenzbereiche bestimmt.



**Abbildung 2.2:** Resonanz- und Antiresonanzstellen in Abhängigkeit des Durchmesser-Dicken-Verhältnisses  $\frac{D_p}{h_p}$ , wobei  $h_p = 1$  mm gewählt ist und der Durchmesser  $D_p$  zwischen 0,1 mm und 25,0 mm variiert.

Die bei den analytischen Verfahren ungünstige Kopplung der Moden wird von Kybartas und Lukoševičius in ihrem 2002 vorgestellten Verfahren zur Materialparameterbestimmung ausgenutzt [KyLu02]. Auch hier steht die konsistente Bestimmung an einem Probekörper und in einem eingeschränkten Frequenzbereich im Vordergrund. Das Verfahren basiert ebenfalls auf einer FEM-Simulation und wird für eine

rotationssymmetrische PZT-4-Scheibe durchgeführt. Die Änderung der Modenkopplung, die besonders stark im Bereich der Dickenschwingung ausgeprägt ist, wird in Abhängigkeit des Durchmesser-Dicken-Verhältnisses  $\frac{D_p}{h_p}$  untersucht. Als sinnvolle Darstellungsweise hat sich hierfür die Eintragung von Resonanz- und Antiresonanzstellen in einer Ebene herausgestellt, für deren Abszisse das Verhältnis  $\frac{D_p}{h_p}$  und auf deren Ordinate die mit der Dicke skalierte Frequenz  $f \cdot h_p$  aufgetragen ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Information, die bei dieser Darstellung verloren geht, ist der Betrag der Impedanz an den jeweiligen Resonanz- und Antiresonanzstellen. Die große Variation der Modenkopplung soll für eine präzise Bestimmung der Materialparameter genutzt werden. Die Abbildung macht zudem einen großen Vorteil der Nutzung einer Simulation deutlich, da vergleichbare Diagramme durch Messungen aufgrund der hohen Anzahl unterschiedlich dimensionierter Piezokeramiken nur mit sehr hohem Aufwand zu erstellen wären.

Als Zielfunktion für die Minimierung des Unterschieds zwischen simuliertem und gemessenem Betrag der Impedanz mittels des Verfahrens der kleinsten Fehlerquadrate wird von Kybartas und Lukoševičius die Korrelation der beiden Verläufe gewählt. Hier wird erstmals eine systematische Untersuchung der Sensitivität des Verlaufes des Betrages der Impedanz auf die einzelnen Materialparameter vorgenommen, wobei diese als reelle Größen angenommen werden. Der Einfluss wird getrennt für die Bereiche der Radial- und Dickenschwingung bewertet bei einer Variation jedes Parameters im Bereich von  $\pm 10\%$  von einem Ausgangsdatensatz. Aus diesen Untersuchungen ergibt sich beispielsweise eine sehr niedrige Sensitivität auf die Permittivität  $\epsilon_{11}^S$ , so dass diese mit diesem Verfahren nicht bestimmt werden kann. Die Sensitivität auf andere Parameter ist nicht für alle Durchmesser-Dicken-Verhältnisse gleich, so dass als Kompromiss hier ein Verhältnis von  $\frac{D_p}{h_p} = 10$  für die Bestimmung gewählt wird. Insgesamt bleibt ein nicht zu vernachlässigender Unterschied des Betrages nach der Optimierung bestehen. Hierfür ist zum einen vermutlich die nicht berücksichtigte Materialdämpfung verantwortlich, zum anderen aber auch die gewählte Zielfunktion mittels der Korrelationsfunktion, die die unterschiedlichen Impedanzbeträge nicht berücksichtigt sondern nur die gegenseitige Verschiebung der beiden Verläufe minimiert. Eine erweiterte Zielfunktion, die sowohl den Betrag als auch die Lage der Resonanzen und Antiresonanzen berücksichtigt, ist deshalb eines der Ziele dieser Arbeit (vgl. Kapitel 5).

Eine ähnliche Analyse der Sensitivität haben Joo u. a. vorgenommen [JLR03]. Allerdings wird hier nur die Sensitivität bei Änderung mehrerer Parameter gleichzeitig betrachtet, so dass kompensatorische Anteile vernachlässigt werden und die Sensitivität nicht parameterspezifisch ermittelt wird. Als Zielfunktion für die Optimierung

werden hier nur die Abweichungen an den Resonanz- und Antiresonanzstellen berücksichtigt, so dass nur wenig Informationen einfließen. Das in diesem Beitrag formulierte FEM-Modell berücksichtigt zudem keine Dämpfung, so dass im Ergebnis eine vergleichsweise große Abweichung zwischen Simulation und Messung erhalten bleibt.

Eine Schwierigkeit der inversen Verfahren ist die nicht zu überprüfende Eindeutigkeit der Lösung und der geringe Einfluss einiger Parameter auf den Impedanzverlauf. Aus mathematischer Sicht führt dies zu einem Gleichungssystem, dessen Rang nicht der Dimension der Systemmatrix entspricht und es handelt sich deshalb um ein schlecht konditioniertes Problem. Die Lösung benötigt in diesem Fall eine Regularisierung. Ein Verfahren, bei dem zu diesem Zweck ein inexaktes Newtonverfahren eingesetzt wird, stellen Lahmer u. a. 2005 vor [LKM05] (Ein alternativer Ansatz für die hier verwendete inexakte Newton-Iteration wird von Lahmer u. a. 2008 beschrieben, bei dem eine modifizierte Landweber-Iteration<sup>7</sup> zum Einsatz kommt [LKK08].). Grundlage bildet auch hier der Abgleich von Messung und dreidimensionaler Simulation des Impedanzverlaufes einer einzigen Piezokeramik der *6mm*-Kristallklasse. Um die Verluste berücksichtigen zu können, werden die Materialparameter als komplexwertige Größen angenommen (vgl. Kapitel 3.5.2). Für den betrachteten rotationssymmetrischen Fall wird der Elastizitätsmodul  $c_{12}^E$  aufgrund seines zu geringen Einflusses vernachlässigt und auch die Imaginärteile der Materialparameter können aus diesem Grund nicht zusammen in dem inversen Verfahren bestimmt werden.

Diese Arbeiten werden von Kaltenbacher u. a. in [KLM06] fortgeführt. Es wird gezeigt, dass auch bei einer rotationssymmetrischen Anordnung, die effizient als 2D-FEM-Problem gelöst werden kann, alle Materialparameter in den Gleichungen enthalten bleiben. Der deutliche Rechenzeitvorteil durch diese Erkenntnis wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit bei der Aufstellung des Simulationsmodells genutzt (vgl. Kapitel 4.1). Nachteilig ist der schon erwähnte geringe Einfluss der Größe  $c_{12}^E$ , der an dieser Stelle durch die einfache anstelle der für die übrigen Parameter vorkommenden doppelten Differentiation innerhalb der Differentialgleichungen mathematisch begründet wird. Eine Möglichkeit, die schlechte Sensitivität auf einzelne Parameter zu verbessern, ist die zusätzliche Messung alternativer Größen neben dem Impedanzverlauf. Im genannten Beitrag wird hierzu die Auslenkung eines Oberflächenpunktes mittels eines Laser-Doppler-Vibrometers erfasst und in das inverse Verfahren einbezogen. Die zu optimierenden Parameter weisen sehr unterschiedliche

---

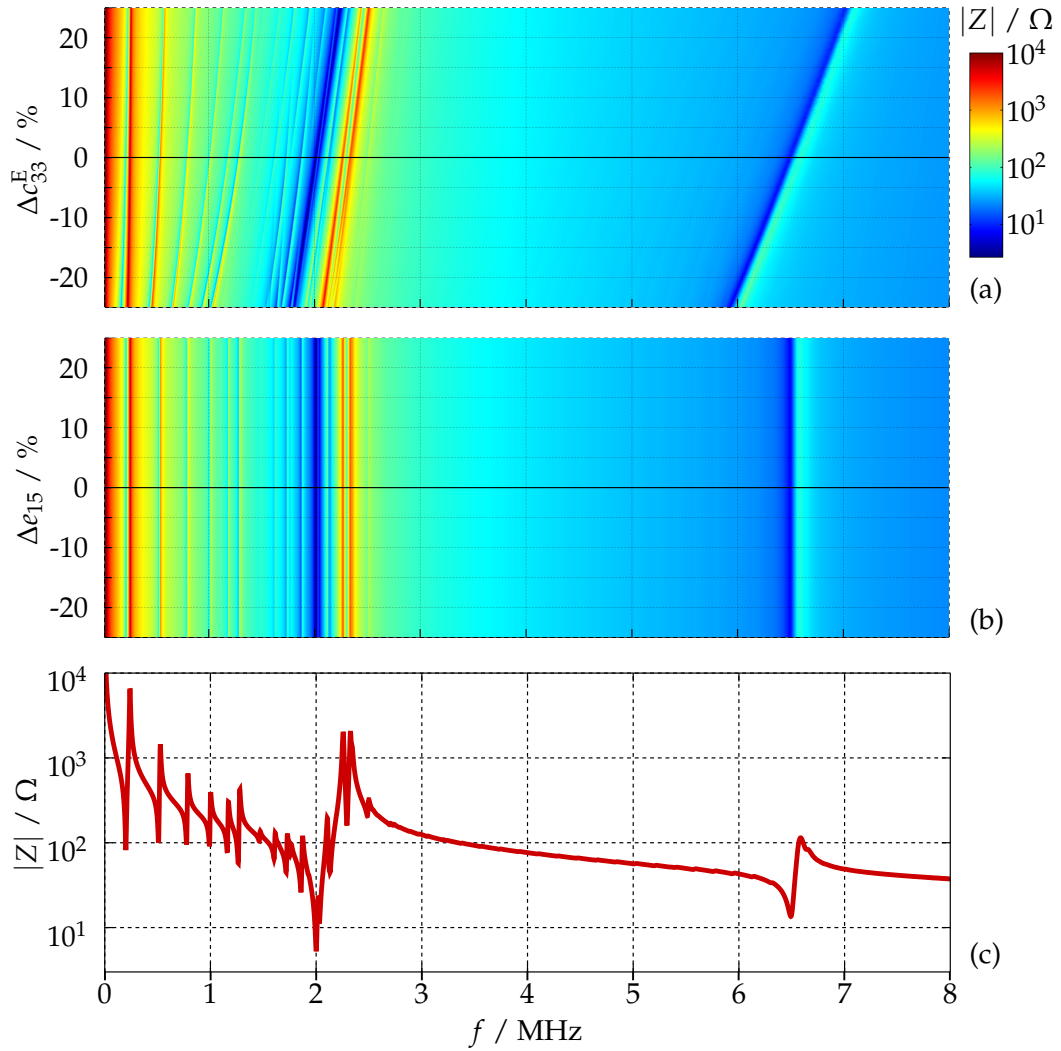
<sup>7</sup>Der Landweber-Algorithmus ist geeignet zur Lösung schlecht gestellter linearer inverser Probleme und wurde 1951 von Landweber vorgestellt [Lan51].

Größenordnungen auf, wodurch eine Skalierung vor der Optimierung vorgesehen werden muss. Neben dem schwierig zu bestimmenden Elastizitätsmodul  $c_{12}^E$  ist auch der Parameter  $e_{31}$  erst nach vielen Iterationen bestimmt. Am Beispiel des Parameters  $c_{13}^E$  wird gezeigt, dass zu ungenaue Startwerte für das inverse Verfahren eine genaue Bestimmung einzelner Parameter sogar verhindern können. Dies ist mit ein Grund dafür, dass eine verbesserte Startwertbestimmung auch ein Ziel dieser Arbeit darstellt.

Andrade u. a. stellten 2007 ebenfalls ein Verfahren zur Bestimmung von Materialparametern vor [ASB07]. Es basiert auf dem Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus, der als Funktion *fminsearch* in dem auch in dieser Arbeit genutzten Softwarepaket MATLAB<sup>®</sup> des Anbieters MATHWORKS<sup>™</sup> enthalten ist [Mat14]. Das von Nelder und Mead vorgestellte Simplex-Verfahren optimiert eine nichtlineare Funktion mehrerer Parameter, ohne dabei die explizite Ableitung der Funktion zu benötigen. Das Verfahren konvergiert langsamer als vergleichbare auf einer Ableitung der Funktion basierende Verfahren, ist aber im Gegenzug als robuster einzustufen [NeMe65; JJM98]. Für die Simulation wird auch hier ein zweidimensionales Modell eingesetzt. Die Zielfunktion nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate bewertet die Summe der quadratischen Abstände in Richtung des Betrages der Impedanz. Zusätzlich wird hier jedoch eine Gewichtungsfunktion hinzugefügt, die die bei der späteren Anwendung interessierenden Frequenzbereiche stärker betont. Bei dem genutzten Rayleigh-Dämpfungsmodell wird der masseabhängige Steifigkeitsterm durch die Wahl von  $\alpha_M = 0$  eliminiert. Auch hier wird festgestellt, dass eine ungünstige Wahl der Startparameter die Gefahr eines lokalen Minimums im Parameterraum als Ergebnis der Optimierung erhöht.

Álvarez u. a. haben darauf aufbauend eine Sensitivitätsbetrachtung in das iterative Verfahren integriert und dieses Verfahren als globale Sensitivitätsanalyse bezeichnet [AAB07]. Ähnlich wie bei der in Abbildung 2.2 dargestellten Variation des Durchmesser-Dicken-Verhältnisses wird hier je ein Materialparameter im Bereich  $\pm 40\%$  um einen Ausgangspunkt variiert und der zugehörige Impedanzverlauf mittels FEM simuliert. Auf diese Weise lassen sich die Einflüsse der einzelnen Parameter auf den Impedanzverlauf frequenz aufgelöst beurteilen. Zur Darstellung dieser Zusammenhänge werden die Beträge der Impedanzen in einer Ebene eingetragen, deren Abszisse von der Frequenz und deren Ordinate von der Parametervariation gebildet wird. Ein Vergleich zweier exemplarischer Verläufe ist für eine PZT-Piezokeramik bei Variation von  $c_{33}^E$  und der piezoelektrischen Konstanten  $e_{15}$  in Abbildung 2.3 gezeigt. Der unterschiedliche Einfluss dieser beiden Größen auf den Impedanzverlauf ist deutlich zu erkennen.





**Abbildung 2.3:** Exemplarische Darstellung des Einflusses von Parametervariationen im Bereich von  $\pm 25\%$  für (a) den Elastizitätsmodul  $c_{33}^E$  und für (b) die piezoelektrische Konstante  $e_{15}$  auf den Betrag des Impedanzverlaufes einer Piezokeramik mit  $D_p = 10\text{ mm}$  und  $h_p = 1\text{ mm}$ . Teilabbildung (c) zeigt den Betrag der Impedanz für den Ausgangsdatensatz mit  $\Delta c_{33}^E = \Delta e_{15} = 0$ .

Vorteilhaft an diesem Verfahren ist aus mathematischer Sicht, dass die oft problematische Matrixinversion durch diesen Vorwärtsansatz vermieden wird. Neben den zehn Materialparametern, die in einem großen Teil der Verfahren betrachtet werden, sind hier zunächst auch die Dichte  $\rho$  sowie die beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  in den Parametervektor für die Optimierung aufgenommen. Für die Dichte zeigt sich aber, dass sie alle Moden in gleicher Weise beeinflusst und besser durch direkte Messungen bestimmt werden kann. Um die in Abbildung 2.3 gezeigte Darstellung auch mathematisch nutzen zu können, wird hieraus eine Steigung für einzelne Moden in Abhängigkeit der Parameter- und Frequenzänderung definiert und die Parameter je nach Einflussgröße in drei Gruppen unterteilt. Während des be-

schriebenen Algorithmus werden zunächst die einflussreichsten Parameter ermittelt und danach die weiteren, wobei die einzelnen Parameter entgegen der Realität zur Vereinfachung als unabhängig angenommen werden. Das für 100 Iterationen angegebene Beispielergebnis einer PZT-Piezokeramik zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung und das Verfahren erweist sich als verhältnismäßig robust gegenüber Variationen der Startwerte, obwohl große Abweichungen wenig einflussreicher Parameter nicht ausgeschlossen werden können.

Eine Sensitivitätsbeurteilung anhand von Konfidenzintervallen stellen Lahmer u. a. vor [LKK08]. Es stellt sich heraus, dass die untersuchten Konfidenzintervalle dabei von den Positionen der Frequenzstützstellen abhängen und es wird in [LKS08] ein Ansatz entsprechend der Theorie der optimalen Versuchsplanung vorgestellt, um die Wahl möglichst weniger Stützstellen (Rechenzeitoptimierung) systematisch zu verbessern. Die Untersuchungen werden für zwei Materialien vorgestellt, wobei für das erste bereits gute Startwerte vorliegen (Pz26) und das zweite ein bis dahin nicht untersuchtes Material darstellt (Pz36)<sup>8</sup>. Es werden jeweils drei verschiedene Probekörper genutzt, um verschiedene Schwingungsformen für die Auswertung nutzen zu können. Es zeigt sich, dass bei unzureichend bekannten Startwerten die Reduzierung des Algorithmus auf zunächst wenige markante Materialparameter hilfreich sein kann.

Da es bei unbekannten Materialparametern schwierig ist, das eigentliche Verfahren und seine Konvergenz zu beurteilen, wird von mehreren Autoren hierzu ein bekannter simulierter Datensatz als Startdatensatz gewählt. Auf diese Weise kann die Konvergenz zu den ursprünglichen Werten nach einer definierten Variation beurteilt werden. Dieses Vorgehen wird auch im Rahmen dieser Arbeit beispielsweise für die Sensitivitätsuntersuchungen oder für Parameterstudien eingesetzt (vgl. Kapitel 5).

Einen Versuch, das inverse Verfahren für die gleichzeitige Bestimmung der Materialparameter eines Verbundes aus Piezokeramik und Anpassschichten zu erweitern, stellen Wolf u. a. vor [WLB08]. Hierbei werden die zusätzlichen Materialparameter durch die Aufnahme der Lamé-Konstanten<sup>9</sup> in dem Parametervektor für die Optimierung berücksichtigt. Da die Startwerte der Piezokeramik aus Voruntersuchungen bekannt sind, soll eine Optimierung nur der Lamé-Konstanten den Abgleich von Messung und Simulation verbessern. Dies führt jedoch aufgrund der geringen Sensitivität des betrachteten Impedanzverlaufes auf diese Parameter nicht zum Ziel. Eine

---

<sup>8</sup>Pznn sind die Handelsnamen von PZT-Piezokeramiken des Herstellers Ferroperm. [Fer16]

<sup>9</sup>Mit den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  lässt sich der Elastizitätstensor eines isotropen Materials vollständig beschreiben.

Optimierung unter Berücksichtigung aller Parameter verbessert zwar den Abgleich, jedoch werden hier die als gut bekannten Startwerte der Piezokeramik stark verändert und in physikalisch fragliche Bereiche verschoben. So verhindert in diesem Fall die geringe Sensitivität der verwendeten Messgröße auf die zu bestimmenden Materialparameter eine zuverlässige Bestimmung. Abhilfe kann die Berücksichtigung weiterer Messgrößen schaffen, indem beispielsweise Oberflächenauslenkungen in die Betrachtungen einbezogen werden (vgl. [KLM06]).

Die erwähnte Berücksichtigung haben Rupitsch und Lerch in Form der Einbeziehung der Normalenkomponente der Oberflächengeschwindigkeit realisiert [RuLe09]. Zum Einsatz kommt hier ebenfalls der Levenberg-Marquardt-Algorithmus (vgl. [MHM08]), da dieser im Vergleich zum vorher eingesetzten Gauss-Newton-Verfahren robuster in Bezug auf schlechtere Startwerte ist (auf Kosten der Konvergenzgeschwindigkeit). Auch hier wird die Variation einzelner Materialparameter im Bereich  $\pm 30\%$  genutzt, um die Sensitivität zu beurteilen, diesmal aber sowohl für den Impedanzverlauf als auch die neu betrachtete Geschwindigkeitskomponente. Das Ergebnis dieser Sensitivitätsanalyse ist in Tabelle 2.1 wiedergegeben.

Tabelle 2.1: Ergebnis der Sensitivitätsanalyse nach [RuLe09].

Parameter	Radial- und Dickenresonanz	Radial- oder Dickenresonanz	Oberflächen- geschwindigkeit
$c_{33}^E, \epsilon_{33}^S, e_{33}$	•		•
$c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{44}^E$		•	•
$\epsilon_{11}^S, e_{31}, e_{15}$			•

Aus dieser Sensitivitätsstudie wird ein vierstufiges Iterationsschema abgeleitet, das in den einzelnen Stufen die unterschiedlichen Sensitivitäten berücksichtigt. Die Anwendung dieses Schemas auf eine Pz27-Piezokeramik ist in [RWS09] vorgestellt, allerdings wird hierbei die Materialdämpfung vernachlässigt. Diese Vorgehensweise wird auch im Rahmen dieser Arbeit in ähnlicher Form angewendet, indem eine mehrstufige Optimierung zum Einsatz kommt (vgl. Kapitel 7.1). In Kapitel 3.4 ist zu sehen, dass aufgrund der vorliegenden Symmetrie der  $6mm$ -Kristallklasse diese unterschiedliche Sensitivität auch aus physikalischer Sicht zu erwarten ist. Eine Erweiterung des inversen Verfahrens, bei der auch die Materialdämpfung in Form von Dämpfungskoeffizienten berücksichtigt wird, stellen Rupitsch u. a. 2010 vor [RSI10]. Die verwendeten Koeffizienten für die drei Materialmatrizen entsprechen den Verlustfaktoren aus Kapitel 3.5.2 dieser Arbeit. Sie werden sowohl als gleich für alle

Einträge der Matrizen als auch frequenzunabhängig angenommen. Der Vergleich von ermittelten Parametern mit und ohne Berücksichtigung der Dämpfung zeigt, dass die Einbeziehung der Dämpfung in das Verfahren zu einer besseren Übereinstimmung mit den vom Hersteller angegebenen Werten führt.

Die mittels der globalen Sensitivitätsanalyse in [AAB07] gewonnenen Erkenntnisse greifen Álvarez u. a. 2010 wieder auf und stellen eine erweiterte Methode vor [PAB10]. Das Vorgehen besteht dabei aus den vier Schritten: Messung von direkt zugänglichen Größen (z. B. Geometrie, Dichte), Abschätzung der Sensitivität einzelner Materialparameter, Grobermittlung anhand der sechs einflussreichsten Parameter und als letzter Schritt die Optimierung aller Parameter mittels Nelder-Mead-Algorithmus. Nach der Grobermittlung sind die Hauptresonanzen und -antiresonanzen bereits gut abgebildet, die gekoppelten Moden benötigen jedoch den weiteren Optimierungsschritt. Die Extraktion der Resonanzstellen (Maxima der Konduktanz) und der Antiresonanzstellen (Maxima der Resistanz)<sup>10</sup> stellt sich aufgrund der vielen Modenkopplungen im Bereich der Dickenschwingung als schwierig heraus. Abhilfe schafft hier eine Butterworth-Vorfilterung<sup>11</sup> des Impedanzverlaufes, nach deren Anwendung die Lage des sich ergebenden Maximums als Frequenz der ungestörten Schwingung angenommen wird. Die verwendete Zielfunktion für die Optimierung kombiniert die Abweichungen sowohl im Resistanz- als auch im Konduktanzverlauf, so dass auch Parameter mit ausschließlichem Einfluss auf entweder die Resonanzen oder die Antiresonanzen bewertet und optimiert werden. Der aus den ermittelten Materialparametern simulierte Verlauf der komplexwertigen Impedanz zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen.

Einen Ansatz für eine Approximation des Elastizitätsmoduls  $c_{44}^E$  aus anderen Einträgen der Elastizitätsmatrix haben Rautenberg u. a. 2011 vorgestellt [RRH11]. Ziel ist zum einen die Einschränkung des Definitionsbereiches dieses Parameters für das inverse Verfahren und zum anderen die Schaffung eines Kriteriums zur Überprüfung der Konsistenz von in der Literatur vorhandenen Datensätzen. Es stellt sich zudem heraus, dass die Elektrodenhöhe einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Ergebnisse hat und im Simulationsmodell berücksichtigt werden muss. Ist sie nicht bekannt, kann eine Einbeziehung in die Optimierung als gesuchter Parameter sinnvoll sein. Auch die in Gleichung (3.1) angegebenen Korrekturen sowie eine harmonische Berechnung im Frequenzbereich führen hier zu besseren Materialpa-

<sup>10</sup>Impedanz  $\underline{Z} = \text{Resistanz } R + j \text{ Reaktanz } X$  ; Admittanz  $\underline{Y} = \text{Konduktanz } G_Y + j \text{ Suszeptanz } B_Y$

<sup>11</sup>Der Amplitudengang eines *Butterworth-Filters* verläuft unterhalb der Grenzfrequenz möglichst glatt und fällt danach mit  $n \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$  ab (Filterordnung  $n$ ) [KoSc04]. In [PAB10] wird ein Filter vierter Ordnung eingesetzt.

rametern. Es zeigt sich aber auch, dass Datensätze im Umlauf sind, die nicht den physikalischen Vorgaben durch das hier vorgestellte Kriterium genügen.

Ein auf zwei unterschiedlich polarisierten quaderförmigen Probekörpern basierendes Verfahren stellen Rupitsch u. a. in [RIL11] vor. Abweichend von den letzten Arbeiten dieser Arbeitsgruppe wird hier aufgrund des hohen Aufwandes wieder auf die zusätzliche Messung der Oberflächengeschwindigkeit verzichtet. Die Symmetrien der Probekörper erlauben es in diesem Fall, Teile der Simulationen auf den zweidimensionalen und damit rechenzeitgünstigen Fall zu reduzieren. Gleichzeitig weisen die Impedanzverläufe beider Körper durch die unterschiedliche Polarisation verschiedene Sensitivitäten in unterschiedlichen Frequenzbereichen auf, so dass sie sich innerhalb des Verfahrens ergänzen. Zur Visualisierung der Sensitivität wird hier ebenfalls eine grafische Darstellung ähnlich der Abbildung 2.3 gewählt. Eine Anwendung dieses Verfahrens auf die Materialien PIC255 und PIC155 ist in [Ru115] veröffentlicht.

Im folgenden Unterkapitel 2.3 sollen die Erkenntnisse der Analyse des Standes der Technik genutzt werden, um die Ansätze dieser Arbeit einzuordnen und abzugrenzen. Zudem lässt sich auf dieser Grundlage die Zielstellung dieser Arbeit, wie sie in Kapitel 1.1 beschrieben ist, ableiten und motivieren.

## 2.3 Einordnung und Abgrenzung dieser Arbeit

Die vorangegangenen Kapitel zeigen, dass viele Arbeiten existieren, die die Ermittlung eines geeigneten Materialparametersatzes einer Piezokeramik für die Nutzung in einer Simulation mittels der FEM zum Ziel haben. Da die Materialparameter neben einem geeigneten Modell die wichtigste Rolle für eine realitätsnahe Simulation spielen, ist eine zuverlässige und reproduzierbare Bestimmung ein wichtiger Teil des Simulationsprozesses. Die aufgeführten Verfahren verfolgen verschiedene Ansätze bei der Bestimmung, teilweise rein analytisch anhand stark vereinfachter Modelle und neuerdings eher unterstützt durch simulative Verfahren, die weniger Einschränkungen bezüglich der Probekörpergeometrien unterworfen sind. Das Hauptproblem der letztgenannten inversen Verfahren liegt in der stark unterschiedlichen und teilweise sehr geringen Sensitivität des genutzten Impedanzverlaufes auf einzelne Materialparameter.

In einigen der im Kapitel 2.2 beschriebenen Beiträge wird diese Sensitivität betrachtet und auf verschiedene Weise berücksichtigt. Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Sensitivität bietet die Verwendung verschiedener Probekörper (z. B. [DWU04;

RIL11]). Da aber eine Geometrieabhängigkeit der Materialparameter nicht ausgeschlossen werden kann, ist die Übertragung auf eine andere Geometrie immer mit Unsicherheiten behaftet. In dieser Arbeit wird deshalb die ausschließliche Verwendung einer einzelnen Piezokeramik als Probekörper favorisiert, deren Form zudem möglichst ähnlich der der später zu verwendenden Piezokeramik ist.

Ähnlich lässt sich auch in Bezug auf die Verwendung verschiedener Grundschwingungsformen für die Bestimmung von Teilmengen der Piezomaterialkenngrößen argumentieren (z. B. bei nahezu allen analytischen Ansätzen). Hier ist die Konsistenz für einen angestrebten Frequenzarbeitspunkt nicht gegeben, da die in unterschiedlichen Frequenzbereichen ermittelten Parameter zu einem Datensatz zusammengesetzt werden und so die Unsicherheit und die Inkonsistenz erhöhen. Hieraus resultiert das Ziel, die Sensitivität aller Parameter für einen gewünschten Frequenzarbeitspunkt zu erhöhen und anzugleichen, um eine konsistente Bestimmung zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang ist auch die im Allgemeinen frequenzabhängige Dämpfung zu erwähnen, für deren Berücksichtigung die komplexwertige Darstellung (vgl. Kapitel 3.5.2) sowie der Ansatz des Rayleigh-Dämpfungsmodells (vgl. Kapitel 3.5.1) möglich sind. Da für die transiente Simulation mittels aktuell verfügbarer kommerzieller Löser nur das Rayleigh-Dämpfungsmodell implementiert ist, steht deren Berücksichtigung bei der Materialparameterbestimmung im Rahmen dieser Arbeit im Vordergrund, auch wenn durch die Verwendung der zwei Rayleigh-Dämpfungsparameter nur eine eingeschränkte Approximation des tatsächlichen Verlaufes möglich ist. Für einen eingeschränkten Frequenzbereich um einen Arbeitspunkt ist diese Approximation jedoch gut geeignet (vgl. Kapitel 3.5.1). Die vorgestellten Arbeiten zeigen weiterhin, dass aufgrund der vergleichsweise kleinen Dämpfungswerte einer Piezokeramik die Bestimmung zu großen Unsicherheiten führen kann.

Eine weitere Möglichkeit zur Erhöhung der Sensitivität ist die Einbeziehung von weiteren Messgrößen unabhängig vom Impedanzverlauf. Hier wird oft entweder die Auslenkung der Oberfläche oder deren Normalgeschwindigkeit gewählt und mittels eines Laser-Doppler-Vibrometers gemessen (z. B. [AuMo89; PMB07; RuLe09; RWS12; WIR15]). Diese Messung bedeutet jedoch einen erheblichen apparativen Mehraufwand und wird deshalb in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die neu entwickelte Methode soll beispielsweise auch für eine regelmäßige Kontrolle während des Herstellungsprozesses geeignet sein, so dass der hiermit verbundene apparative Aufwand nicht angemessen wäre.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Piezokeramiken betrachtet, die in guter Näherung der *6mm*-Kristallklasse angehören (vgl. Kapitel 3.3) und somit die hierfür typischen

Symmetrien in den Materialtensoren aufweisen (vgl. Kapitel 3.4). Sowohl die Betrachtung von stark abweichenden Geometrien (z. B. dünne Filme, [PJG10]) als auch von mikroskopischen Materialeffekten (z. B. Phasenanteile und -übergänge in [Sch10], Domänengrenzenverschiebungen in [GHS80; STH97]) werden nicht berücksichtigt. Da bei den betrachteten transienten Simulationen, für die die Materialparameter bestimmt werden sollen, praktisch ausschließlich Entwicklungen und Bewertungen für sensorische Anwendungen im Vordergrund stehen, wird auch auf die Berücksichtigung des Großsignalverhaltens verzichtet. Zur Berücksichtigung beispielsweise von mechanischen Vorspannungen (z. B. [KrBe61; RIS11]), Nichtlinearitäten (z. B. [Lah08]), Hystereseeffekten (z. B. [HKK08; WSR11; RWS12; SKL12]) oder Großsignaleinflüssen (z. B. [DaNe92; UChi01; RNW11; KKH10]) sei deshalb an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.

Ein Eingriff in den FEM-Code ist im Rahmen der Optimierung innerhalb des inversen Verfahrens nicht vorgesehen (vgl. Kapitel 8.2), da auf kommerziell verfügbare Löser zurückgegriffen wird. Mögliches Optimierungspotential hauptsächlich bezüglich der Rechengeschwindigkeit bleibt deshalb an dieser Stelle ungenutzt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine hohe Konsistenz und Reproduzierbarkeit der ermittelten Materialparameter von PZT-Piezokeramiken angestrebt wird. Diese soll durch die Verwendung eines einzelnen Probekörpers sichergestellt werden, der im Bereich der späteren Einsatzfrequenz genutzt wird, um die Parameter zu bestimmen. Die als problematisch bekannte unterschiedliche und geringe Sensitivität gerade auch für den Fall einer rotationssymmetrischen Piezokeramik soll dadurch verbessert werden, dass die Elektrodentopologie modifiziert und die komplexwertige Impedanz über eine erweiterte Messanordnung ausgewertet wird. Durch die geänderten Elektroden und ein darauf abgestimmtes elektrisches Vernetzwerk werden laterale Feldanteile in der Piezokeramik protegert, die zur Steigerung der Sensitivität des Impedanzverlaufes auf die aufgrund der hohen Symmetrie zuvor schwierig zu bestimmenden Materialparameter führen. Die Rotationssymmetrie wird hierbei aufgrund der rechentechnischen Vorteile beibehalten. Es bleiben zudem alle gesuchten Materialparameter in der mathematischen Beschreibung enthalten (vgl. Kapitel 4.1). Es wird ausschließlich die Piezokeramik ohne weitere Komponenten eines Ultraschallwandlers betrachtet, da sich eine kombinierte Betrachtung im Rahmen der Materialparameterbestimmung als problematisch erwiesen hat [BLK06].

Bisherige Betrachtungen von modifizierten Elektroden, deren Formen sich von der vollflächigen Elektrode unterscheiden, beschränken sich auf analytische Beschreibungen weniger Sonderfälle (z. B. [Mcm63; HoEe68; MOT73; LiMa06]). Die Verwendung im Rahmen des inversen Verfahrens zur Materialparameterbestimmung ist bisher

nicht berücksichtigt und soll im Rahmen dieser Arbeit deshalb zur Verbesserung der problematischen Sensitivitäten auf ausgewählte Materialparameter genutzt werden.



## 3 Piezomaterialdaten und Materialparameter

### 3.1 Begriffsdefinitionen

Im Rahmen dieser Arbeit tauchen immer wieder die beiden Begriffe Piezomaterialdaten und Materialparameter auf. Um hier eine eindeutige Abgrenzung zu ermöglichen, werden diese Begriffe und deren Nutzung an dieser Stelle definiert und erläutert. Die grundlegenden Gleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens in Form von Zustandsgleichungen gelten für beide Betrachtungen und sind im Kapitel 3.4 zusammengefasst.

**Piezomaterialdaten** beschreiben die physikalischen Eigenschaften eines Materials, die idealerweise als geometrieunabhängig und homogen angenommen werden. Die in dem Kapitel 2.1 vorgestellten Verfahren haben zum Ziel, diese Piezomaterialdaten für bestimmte Probekörper zu bestimmen. Zu Beginn sind diese Daten reelle Größen, später wird oft im Zuge der Berücksichtigung der Materialdämpfung deren komplexwertige Schreibweise verwendet (vgl. Kapitel 3.5.2).

Im Gegensatz dazu wird der Begriff der **Materialparameter** dazu verwendet, die Materialkenngrößen für die Simulation mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) kenntlich zu machen. Hierbei handelt es sich um für die Simulation angepasste Materialdaten, indem beispielsweise die Berücksichtigung der Dämpfung durch ein spezielles Modell, hier das Rayleigh-Dämpfungsmodell, vorgenommen wird (vgl. Kapitel 3.5.1). Dieses kann im Gegensatz zu den komplexwertigen Piezomaterialdaten auch in der transienten FEM-Simulation berücksichtigt werden und stellt deshalb eine Zielgröße der in dieser Arbeit betrachteten Materialparameterbestimmung dar.

Zusätzlich werden auch simulationsspezifische Korrekturen in diesen Größen berücksichtigt. Für ein von Semblat vorgestelltes phänomenologisches Ersatzmodell des Rayleigh-Dämpfungsmodells wurde eine Verringerung der Eigenfrequenz und somit eine Vergrößerung der Periodendauer beobachtet [Sem97]. Hieraus leitete Rau-

tenberg 2012 eine Korrekturvorschrift her, mit deren Hilfe die durch das Rayleigh-Dämpfungsmodell hervorgerufene Verringerung der Steifigkeit ausgeglichen werden kann [Rau12]. Somit werden für die FEM-Simulation die angepassten Größen  $\tilde{C}$  und  $\tilde{\alpha}_K$  aus den Gleichungen (3.1) genutzt. Hierbei ist  $C$  die Steifigkeitsmatrix.  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  sind die beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter.

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= C \cdot (1 + \alpha_M \alpha_K) \\ \tilde{\alpha}_K &= \frac{1}{\alpha_M + \frac{1}{\alpha_K}}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Aufgrund der Einschränkungen des Rayleigh-Dämpfungsmodells können die Materialparameter bei nicht zu vernachlässigender Dämpfung nur für einen eingeschränkten Frequenzbereich hinreichend gut bestimmt werden, so dass sich die Materialparameterbestimmung an dem späteren Einsatzfrequenzbereich orientiert und um einen Arbeitspunkt erfolgt. Hierbei spielt die konsistente Bestimmung der Daten in dieser Umgebung eine wichtige Rolle. Diese kann beispielsweise durch die klassische Materialdatenbestimmung mit analytischen Verfahren aufgrund der bei unterschiedlichen Frequenzen analysierten Probekörper nicht erreicht werden.

## 3.2 Tensor- und Matrixnotation

Als Beispiel für die in dieser Arbeit verwendete Tensornotation soll das für anisotrope Materialien verallgemeinerte Hookesche Gesetz aus Gleichung (3.2) betrachtet werden, dass später in den grundlegenden Zustandsgleichungen enthalten sein wird (vgl. Kapitel 3.4). Hierbei wird der Tensor der mech. Spannung  $[T]$  über den Tensor der Elastizitätsmoduln  $[c]$  mit dem Tensor der mech. Dehnung  $[S]$  verknüpft.

$$[T] = [c] \cdot [S] \quad \Rightarrow \quad T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} S_{kl} \quad i, j, k, l = 1..3\tag{3.2}$$

Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention  $\sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i$  lässt sich diese Gleichung in der üblichen Koordinatenschreibweise in Gleichung (3.3) schreiben [Ein16].

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}\tag{3.3}$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.1 (a) grafisch veranschaulicht. Die neun Komponenten  $T_{ij}$  (rot) sind über 81 Koppelkoordinaten  $c_{ijkl}$  (blau) mit den neun

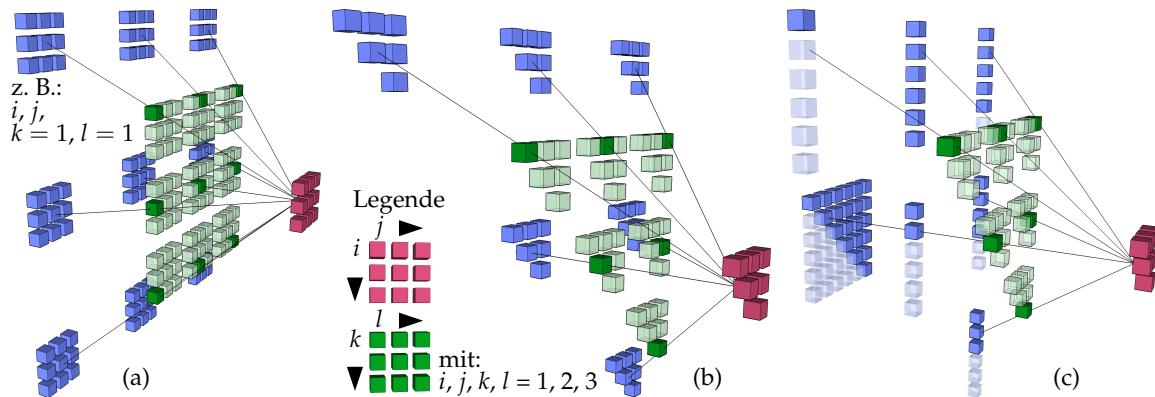
Komponenten  $S_{kl}$  verknüpft. Es lässt sich allgemein zeigen, dass sowohl der Spannungstensor als auch der Dehnungstensor aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte und Drehmomente symmetrische Tensoren sind (vgl. [Rau12]), somit gelten die in Gleichung (3.4) angegebenen Symmetrieeigenschaften für  $[c]$ .

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk} \quad (3.4)$$

Dieser Fall der Symmetrie der beiden Tensoren  $[T]$  und  $[S]$  ist in Abbildung 3.1 (b) dargestellt. Die vorher 81 Unabhängigen  $c_{ijkl}$  werden auf 36 reduziert. Werden diese verbliebenen Koppelkoordinaten entsprechend der Voigtschen Notation umsortiert (vgl. Tabelle 3.1) und in eine Matrix angeordnet, ergibt sich die in Abbildung 3.1 (c) dargestellte Anordnung. Weitere Symmetriebetrachtungen aufgrund von thermodynamischen Betrachtungen (vgl. [TiGa80]) führen auf eine weitere Symmetribeziehung in Gleichung (3.5), die weitere 15 Unabhängige im Koppeltensor eliminiert (hellblau) und zu den in Abbildung 3.1 (c) gezeigten 21 verbleibenden unabhängigen Komponenten (blau) führt.

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (3.5)$$

Unberücksichtigt sind bis hierher die Symmetrieeigenschaften aufgrund der Kristallstruktur, die eine weitere Reduzierung der Anzahl unabhängiger Größen mit sich bringt<sup>12</sup> (vgl. Kapitel 3.4).



**Abbildung 3.1:** Grafische Veranschaulichung des Übergangs zur Voigtschen Matrixnotation für Tensoren mit (a) vollbesetztem Koppeltensor  $[c]$  (81 Komponenten, blau), (b) durch symmetrische Tensoren auf 36 Koppelkomponenten reduzierter Tensor sowie (c) die Umsortierung entsprechend der Voigtschen Notation (vgl. Tabelle 3.1) und weiterer Symmetrieanwendung für 21 verbleibende Koppelkomponenten.

<sup>12</sup>Für den isotropen Fall ergeben sich nur noch zwei unabhängige Größen, mit denen sich das lineare mechanische Verhalten beschreiben lässt (Elastizitätsmodul  $E$ , Poissonzahl  $\nu$ ). [LSW09]

**Tabelle 3.1:** Indizierung bei Tensor- und Matrixnotation entsprechend der Voigtschen Notation

Tensorindizierung	Matrixindizierung
$ij$ und $kl$	$p$ und $q$
11	1
22	2
33	3
23 und 32	4
31 und 13	5
12 und 21	6

Insgesamt ergibt sich durch die Voigtsche Notation entsprechend der Tabelle 3.1 die in Gleichung (3.6) angegebene Darstellungsweise für die Gleichung (3.2).

$$T_p = c_{pq} \cdot S_q \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & \text{sym.} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}}_c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}}_S \quad (3.6)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Scherungselemente zur Einhaltung des Energieerhaltungssatzes entsprechend Gleichung (3.7) definiert sind ([KBB10]).

$$S_4 = 2S_{23} \quad S_5 = 2S_{13} \quad S_6 = 2S_{12} \quad (3.7)$$

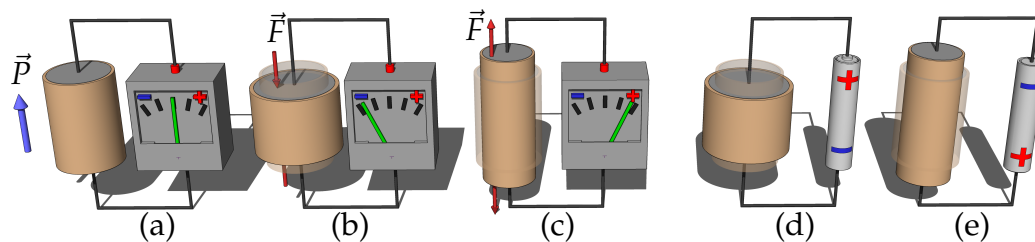
Aufgrund der vorliegenden Symmetrien der PZT-Piezokeramiken (vgl. Kapitel 3.3) werden die Zusammenhänge in dieser Arbeit größtenteils mittels der Voigtschen Notation im Matrixform angegeben, da sich diese aufgrund der gültigen Matrixoperationen besser handhaben lassen als Tensoren.

### 3.3 Piezoelektrische Keramiken und piezoelektrischer Effekt

Grundlage aller aktorischen und sensorischen Nutzung von Piezokeramiken ist der piezoelektrische Effekt. Er wurde bereits 1880 von den Brüdern Jacques und Pierre Curie entdeckt. An Turmalinkristallen stellten sie fest, dass bei einer mechanischen

Verformung eine Ladungstrennung erfolgt und somit eine elektrische Spannung auf zwei sich gegenüberliegenden Oberflächen des Kristalls entsteht. Dieser Effekt wird als *direkter piezoelektrischer Effekt* bezeichnet. Der umgekehrte Fall, bei dem der Kristall durch das Anlegen einer elektrischen Spannung eine Verformung erfährt, wird dementsprechend *inverser* oder *reziproker piezoelektrischer Effekt* genannt. [TiGa80]

Die Abbildung 3.2 zeigt die möglichen elektrischen Spannungen und mechanischen Deformationen, deren Vorzeichen von der Polarisation der betrachteten Piezokeramik abhängen. Durch einen Primäreffekt wird auch immer ein Sekundäreffekt hervorgerufen, der dem ihn hervorruufenden Primäreffekt entgegen wirkt. So entspricht die durch die Kraft  $\vec{F}$  in Abbildung 3.2 (c) (Ausdehnung Piezokeramik) hervorgerufene elektrische Spannung dem Fall (d) und wirkt somit der Ausdehnung der Piezokeramik entgegen. Diese Effekte hängen mit der Kristallstruktur zusammen und ein Beispiel einer Perowskit-Struktur, die die in dieser Arbeit betrachteten PZT-Piezokeramiken aufweisen, ist in Abbildung 3.3 abgebildet [Par05]. Entsprechend

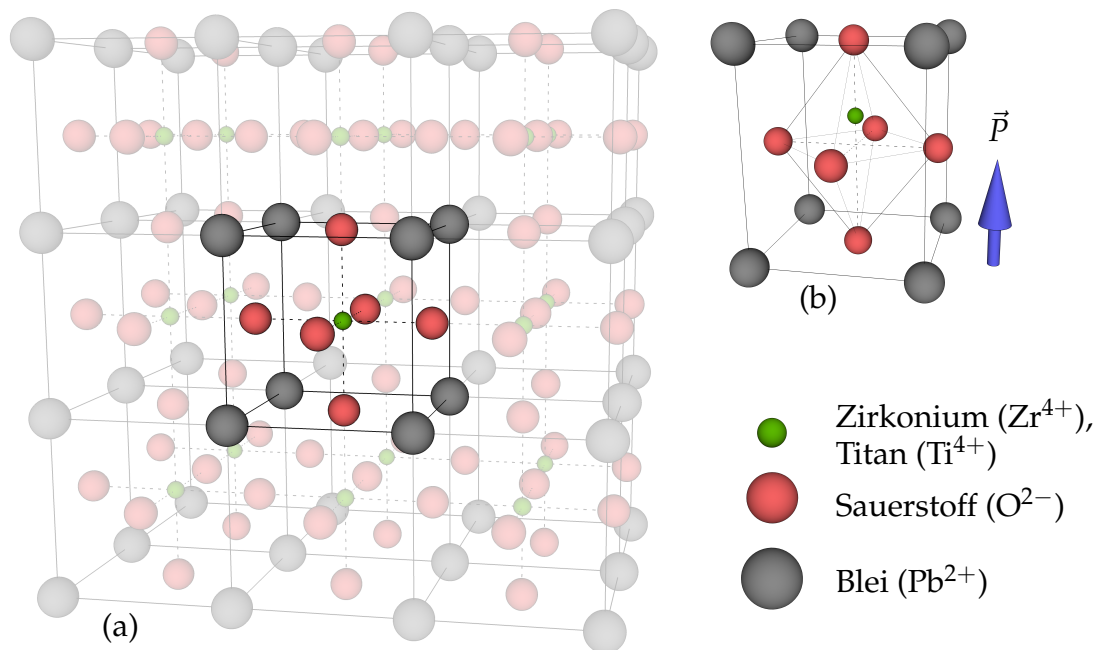


**Abbildung 3.2:** Der piezoelektrische Effekt mit (a) Ruhezustand, (b)-(c) direktem und (d)-(e) indirektem piezoelektrischem Effekt. Der blaue Pfeil gibt die Polarisation  $\vec{P}$  der Piezokeramiken an, von der die Richtungen der sich ergebenden Spannungen und Auslenkungen abhängen.

dieser beiden Wirkmechanismen gibt es unterschiedliche Einsatzgebiete, eine intensivere Erforschung begann jedoch erst ca. 60 Jahre nach ihrer Entdeckung. Angefangen von Ultraschallmessungen der Meerestiefe in den 1940er Jahren (sensorische Nutzung des direkten Effektes) bis hin zu Anwendungen in der Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik z. B. als Oszillatoren (aktorische Nutzung des reziproken Effektes). Entwicklungen auf dem Gebiet der Schaltungstechnik begünstigten den Einsatz von Piezokeramiken für sensorische Anwendungen. [TEK10]

In jüngster Zeit werden weitere Einsatzgebiete erschlossen, beispielhaft sei hier die Energiegewinnung (engl. *energy harvesting*) durch den direkten piezoelektrischen Effekt genannt [BKW13]. Die weiteste Verbreitung haben heute Materialien wie Quarz, Bariumtitanat ( $\text{BaTiO}_3$ ) und besonders Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) [Pic16], weshalb sich die Untersuchungen dieser Arbeit auf das letztgenannte Material konzentrieren werden.

Für die mathematische Beschreibung der Materialien gibt es zwei unterschiedliche Ansätze. Bei der ersten, der quantenmechanischen Beschreibung, wird ein mikroskopischer Ansatz auf atomarer Ebene verfolgt und versucht, das dynamische Verhalten des Kristallgitters mit Theorien der Quantenmechanik zu beschreiben (vgl. z. B. [BoHu54; GHS80]). Der in dieser Arbeit für die Beschreibung der Materialien mit Hilfe von Zustandsgleichungen genutzte Ansatz ist ein thermodynamischer, der die Vorgänge anhand der beobachtbaren Phänomene makroskopisch beschreibt (vgl. [TiGa80]). Hierauf wird in Kapitel 3.4 genauer eingegangen. Insgesamt gibt

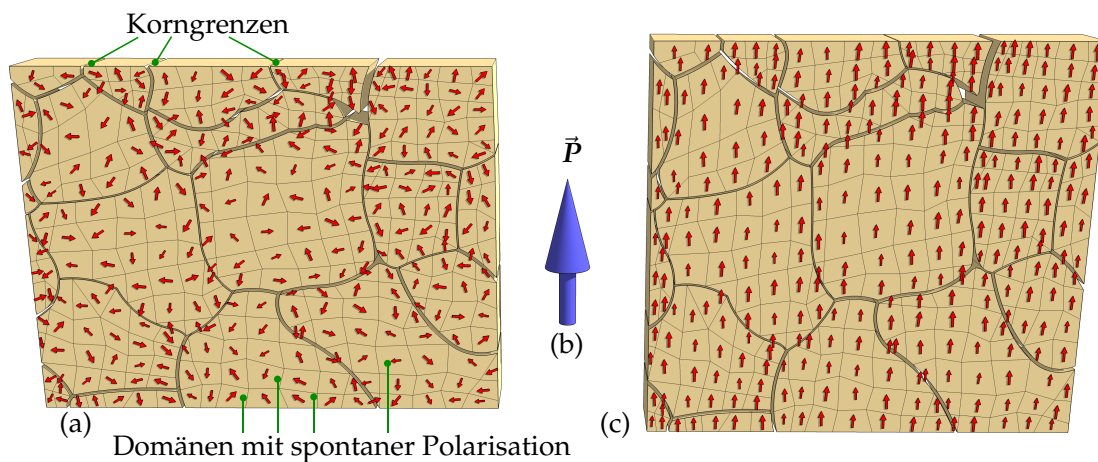


**Abbildung 3.3:** Die kristalline Perowskit-Struktur am Beispiel von PZT: (a) Kubische Kristallstruktur (z. B. für  $\vartheta > \vartheta_c$ ) und (b) polarisierter (tetragonaler) Zustand mit verschobenem Ladungsschwerpunkt. Bei gleicher Struktur erhält man durch den Austausch von Blei durch Barium sowie der Entfernung von Zirkonium Bariumtitanat ( $\text{BaTiO}_3$ ).

es 32 Kristallklassen, welche in sieben Systeme unterteilt werden: triklinen, monoklines, orthorhombisches, tetragonales, trigonales, hexagonales und kubisches Kristallsystem. Vom ersten zum letzten System nimmt die Symmetrie zu und daher die Anzahl der unabhängigen Parameter in den Materialmatrizen ab. Von diesen 32 Kristallklassen können jedoch nur die nichtzentrosymmetrischen Kristallklassen einen piezoelektrischen Effekt zeigen und es bleiben letztlich 20 Klassen, für die dieser Effekt aufgrund nicht verschwindender piezoelektrischer Konstanten auftritt. Von diesen sind zehn sogenannte polare Kristallklassen, die eine spontane Polarisation<sup>13</sup>

<sup>13</sup>Eine spontane Polarisation entsteht durch die Verschiebung verschieden geladener Ionen im Kristallgitter.

aufweisen. Diese geschieht spontan aus energetischen Gründen bei der Abkühlung unter die Curie-Temperatur  $\vartheta_c$  und ist der Grund für die Bezeichnung. Sie findet in kleinen Teilbereichen, den sogenannten (ferroelektrischen) Domänen, in gleicher Richtung statt. Eine Änderung der spontanen Polarisation führt bei thermischer Ursache zum pyroelektrischen und bei mechanischer Ursache zum piezoelektrischen Effekt<sup>14</sup>, weshalb diese Gruppe der Kristalle auch als Pyroelektrika bezeichnet wird. Je nachdem, wie viel Energie nötig ist, um die Ausrichtung der Polarisation der Domänen dauerhaft zu ändern, werden hier zwei weitere Untergruppen unterschieden. Die Gruppe, in die die hier betrachteten PZT-Piezokeramiken fallen, werden



**Abbildung 3.4:** Ausrichtung der spontanen Polarisation (rote Pfeile) einzelner Domänen vor (a) und nach (c) der Polarisation (b) einer Piezokeramik.

Ferroelektrika genannt. Bei diesen reicht eine vergleichsweise niedrige Energie, um die Domänen in eine gemeinsame Richtung dauerhaft auszurichten [DaNe92]. Dieser als Polarisation (umgangssprachlich: Polung, vgl. auch Abbildung 3.4) bezeichnete Vorgang wird später bei der Beschreibung der Herstellung von Piezokeramiken genauer beschrieben. Es bleibt festzuhalten, dass die Polarisation durch zwei Effekte wieder aufgehoben werden kann, zum einen durch eine zu starke Erwärmung über die sogenannte Curie-Temperatur  $\vartheta_c$  und zum anderen durch ein starkes Gegenfeld mit mindestens der Koerzitivfeldstärke  $E_k$  [JCJ71] (vgl. Abbildung 3.5). Bei den Einsatzbedingungen der Piezokeramiken ist deshalb auf die dauerhafte Unterschreitung dieser Grenzwerte zu achten.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Ausnahme: Kristalle der polar-neutralen Kristallklassen weisen keine pyroelektrischen Eigenschaften auf, jedoch ist jeder pyroelektrische Kristall immer auch piezoelektrisch. [TiGa80]

<sup>15</sup>Erste Effekte der thermischen Depolarisierung sind bereits unterhalb der Curie-Temperatur  $\vartheta_c$  zu beobachten, so dass für den praktischen Einsatz die maximale Temperatur im Bereich  $\vartheta_{\max} = (0.5 \dots 0.75) \cdot \vartheta_c$  liegen sollte. [Mel01]

Die wichtigen Schritte bei der Herstellung von PZT-Piezokeramiken sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, da sie einen großen Einfluss auf die späteren Kenngrößen der Piezokeramik haben. Am Anfang steht das Mischen und Mahlen der Rohstoffe, im Fall von PZT beispielsweise in Form von Bleititanat ( $\text{PbTi}_3$ ) und Bleizirkonat ( $\text{PbZrO}_3$ ) in Pulverform. Das Mischungsverhältnis der Stoffe bestimmt dabei das spätere elektrische Verhalten und kann durch zusätzliche Dotierungen verstärkt und auf bestimmte Anforderungen abgestimmt werden [Sch10]. Nach einem ersten Vorsinterschritt (ca. 800 °C) wird zur Homogenisierung erneut gemahlen und es erfolgt die Formgebung durch Pressen in eine Form. Hierbei gibt es, je nach geometrischer Anforderung an die spätere Piezokeramik, zwei Vorgehensweisen. Zum einen kann die Form bereits die spätere Geometrie widerspiegeln (bekannter Schwund wird vorher eingerechnet) und zum anderen kann diese bei höheren Anforderungen für eine mechanische Feinnacharbeit größer dimensioniert sein. Es folgt der Hauptsinterschritt mit bis zu 1300 °C. Nach der mechanischen Nachbearbeitung werden die Elektroden aufgebracht, je nach Typ entweder durch eingebrannte siebgedruckte Silberpasten (Dickschicht, ca. 10  $\mu\text{m}$ ) oder durch das Aufspütern von beispielsweise Gold, Silber oder Kupfer-Nickel (Dünnschicht, ca. 1  $\mu\text{m}$ ). [Pic16]

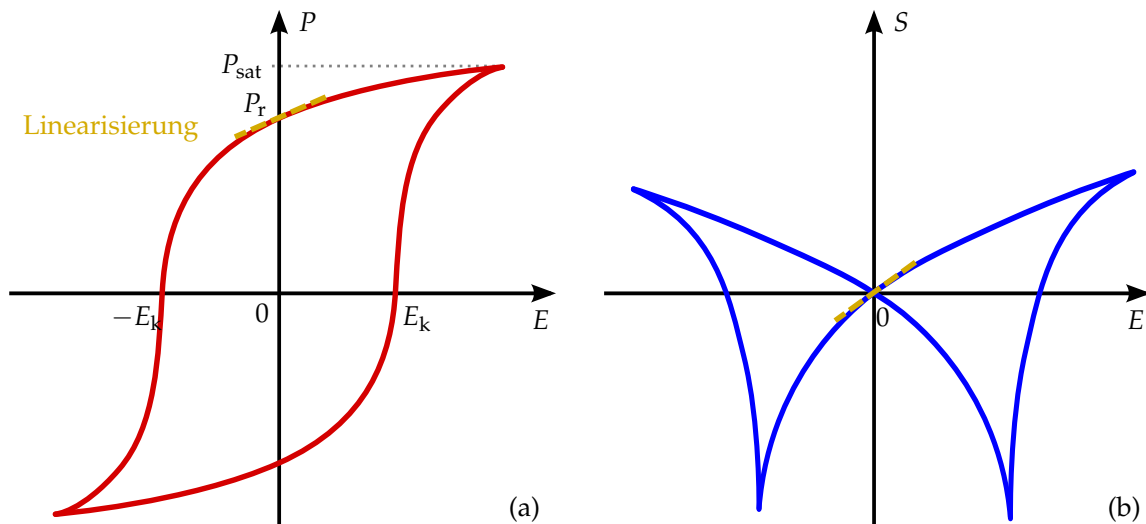
In diesem Zustand besitzen die ferroelektrischen Domänen zwar eine spontane Polarisation, aber die Ausrichtung ist noch stochastisch verteilt und nach außen nicht wirksam (Abbildung 3.4 (a)). Deshalb folgt an dieser Stelle der Schritt der Polarisation (Abbildung 3.4 (b)), bei der durch ein starkes äußeres elektrisches Feld die Ausrichtungen der Domänen gleich orientiert werden. Da es sich bei PZT-Piezokeramiken um Ferroelektrika handelt, bleibt ein Teil dieser Polarisation auch nach Abschalten des Feldes als remanente Polarisation  $P_r$  erhalten (Abbildung 3.4 (c)) [Rus95]. Die Abbildung zeigt ebenfalls den Effekt einer Geometrieänderung der Piezokeramik durch die Polarisation (Größenordnung ca. 1 %, [Mas48]). Der Vorgang wird meist durch eine Erwärmung bis knapp unter die Curie-Temperatur  $\vartheta_c$  unterstützt<sup>16</sup>. Da durch die nachträglichen Polarisation auch unregelmäßige Körper unabhängig von der vorher erfolgten mechanischen Bearbeitung polarisiert werden können und sich ein hoher piezoelektrischer Effekt ergibt, bietet dieses Verfahren viele Vorteile [HLW08].

Die im Zusammenhang mit der Polarisation auftretende typische Hysterese ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Eingetragen sind hier auch die genannte Koerzitivfeldstärke  $E_k$  sowie die remanente Polarisation  $P_r$ . Für das in dieser Arbeit betrachtete Kleinsignalverhalten wird ein linearer Bereich bei kleinen Änderungen der elektri-

<sup>16</sup>Beispiele für übliche Curie-Temperaturen: Bariumtitanat ca. 120 °C, PZT-5A ca. 365 °C, mit Dotierungen bis über 500 °C. [TiGa80]



schen Feldstärke  $E$  angenommen, die als Linearisierung ebenfalls angedeutet ist. Der Verlauf aus Abbildung 3.5 (b) wird aufgrund ihrer Form oft als Schmetterlingskurve bezeichnet.



**Abbildung 3.5:** Prinzipieller Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke  $E$  und (a) der Polarisation  $P$  sowie (b) der Dehnung  $S$  als Hysteresekurven ( $E_k$ : Koerzitivfeldstärke,  $P_r$ : remanente Polarisation,  $P_{sat}$ : Sättigungspolarisation). Die Linearisierung des Kleinsignalverhaltens (gelb) ist eingezeichnet und die Dehnung durch die Polarisation ist für die Teilabbildung (b) vernachlässigt.

Insgesamt werden die späteren Eigenschaften einer Piezokeramik sowohl von der stofflichen Zusammensetzung als auch von dem geschilderten Herstellungsprozess beeinflusst. Die große Anzahl an Einflussmöglichkeiten hierbei macht deutlich, dass es trotz gleicher Materialbezeichnungen unterschiedlicher Hersteller nicht möglich sein kann, die verfügbaren Materialparameter für exakte Simulationen zu nutzen und immer eine Bestimmung für eine konkrete Materialprobe nötig ist. Somit spielt die in dieser Arbeit betrachtete Materialparameterbestimmung eine grundlegende Rolle im Simulationsprozess.

### 3.4 Lineare Zustandsgleichungen piezoelektrischer Kristalle

Die Zustandsgrößen für die elektromechanische Beschreibung von Materialien sind die elektrische Feldstärke  $E$ , die elektrische Flussdichte  $D$ , die mechanische Spannung  $T$  sowie die mechanische Dehnung  $S$ . Diese ändern sich nicht unabhängig voneinander, sondern sind über Materialtensoren miteinander verkoppelt. Die verschiedenen

Möglichkeiten dieser Kopplung bei unterschiedlicher Wahl der unabhängigen Zustandsgrößen soll in diesem Kapitel betrachtet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Materialkenngrößen nicht zeitabhängig sind und das Material ein elastisches Verhalten aufweist und somit reversibel auf eine Verformung reagiert (Energieelastizität). Für die Herleitung und Erläuterung wird die in Kapitel 3.2 eingeführte Notation verwendet.

Wie bereits im Kapitel 3.3 erwähnt, kann ein thermodynamischer Ansatz für die Beschreibung der Zustandsgleichungen genutzt werden. Dieser führt auf die Definition einer inneren Energie eines abgeschlossenen Systems, welche entsprechend dem Energieerhaltungssatz nur durch Wärmeaustausch oder Arbeitsverrichtung verändert werden kann. Die volumenbezogene innere Energie  $U^{(i)}$  wird als Dichte der inneren Energie bezeichnet. Für sie gilt nach [TiGa80] und [HLW08] die Gleichung (3.8).

$$dU^{(i)} = \vartheta d\sigma + E_i dD_i + T_{ij} dS_{ij} \quad (3.8)$$

Die innere Energie kann als ein thermodynamisches Potential betrachtet werden. Die in Gleichung (3.8) vorkommenden unabhängigen Variablen (elektrische Flussdichte  $D$ , mechanische Dehnung  $S$  und Entropie  $\sigma$ ) werden als extensive, die drei restlichen (elektrische Feldstärke  $E$ , mechanische Spannung  $T$  und Temperatur  $\vartheta$ ) als intensive Variablen bezeichnet [TEK10; TKN02]. Um auf die in dieser Arbeit betrachteten Materialparameter zu kommen, muss ein alternatives thermodynamisches Potential angesetzt werden, welches sich durch die Wahl von  $\sigma$ ,  $E$  und  $S$  anstelle der in Gleichung (3.8) genutzten unabhängigen Zustandsgrößen  $\sigma$ ,  $D$  und  $S$  ergibt (Gleichung (3.9)).  $H$  ist hierbei die elektrische Enthalpie.

$$dH = \vartheta d\sigma - D_i dE_i + T_{ij} dS_{ij} \quad (3.9)$$

Im Folgenden werden nur adiabatische Änderungen der Zustandsgrößen betrachtet<sup>17</sup> und der erster Term in der Gleichung (3.9) kann mit  $d\sigma = 0$  vernachlässigt werden. Auf die Einhaltung dieser Bedingung während der späteren Impedanzmessungen im Rahmen dieser Arbeit muss dementsprechend sorgfältig geachtet werden (vgl. Kapitel 6.1). Die partiellen Ableitungen nach den beiden verbliebenen unabhängigen Zustandsgrößen bei gleichzeitiger Konstanz der jeweils anderen (ge-

<sup>17</sup>Bei adiabatischer Zustandsänderung wird keine Wärme zwischen dem System und der Umgebung ausgetauscht und am System verrichtete Arbeit führt zur Erhöhung der inneren Energie  $U^{(i)}$  des Systems.

kennzeichnet durch den Index im Exponenten) führen auf die Gleichungen in (3.10). Die Bedeutungen aller konstanten Zustandsgrößen (hier  $S$  und  $E$ ) sind auf Seite 42 in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

$$T_{ij} = \left( \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \right)^E \quad \text{und} \quad D_i = - \left( \frac{\partial H}{\partial E_i} \right)^S \quad (3.10)$$

Zu beachten ist, dass die beiden abhängigen Größen  $D_i$  und  $T_{ij}$  eine funktionale Abhängigkeit von allen Zustandsgrößen aufweisen, es gilt also  $T_{ij} = T_{ij}(S_{kl}, E_k)$  und  $D_i = D_i(S_{kl}, E_k)$ . Werden jedoch nur kleine Änderungen der mechanischen und elektrischen Größen betrachtet, lassen sich diese Zusammenhänge linearisieren. In den Gleichungen (3.11) und (3.12) wird dazu eine mehrdimensionale Taylorreihe entwickelt und nach den linearen Termen abgebrochen.

$$T_{ij}(E_k, S_{kl})_{\text{lin}} = T_{ij}(E_k^0, S_{kl}^0) + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} \right)^S \cdot (E_k - E_k^0) + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)^E \cdot (S_{kl} - S_{kl}^0) \quad (3.11)$$

$$D_i(E_k, S_{kl})_{\text{lin}} = D_i(E_k^0, S_{kl}^0) + \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)^S \cdot (E_k - E_k^0) + \left( \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} \right)^E \cdot (S_{kl} - S_{kl}^0) \quad (3.12)$$

Als Entwicklungspunkt kann der mechanisch und elektrisch freie Fall ( $E_k^0 = S_{kl}^0 = D_i(E_k^0, S_{kl}^0) = T_{ij}(E_k^0, S_{kl}^0) = 0$ ) gewählt werden. Zusammen mit den Gleichungen (3.10) ergeben sich die Zustandsgleichungen (3.13) und (3.14) in Abhängigkeit von der elektrischen Enthalpie  $H$ .

$$T_{ij} = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} \right)^S \cdot E_k + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)^E \cdot S_{kl} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_k \partial S_{ij}} \right) \cdot E_k + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)^E \cdot S_{kl} \quad (3.13)$$

$$D_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)^S \cdot E_k + \left( \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} \right)^E \cdot S_{kl} = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial E_k} \right)^S \cdot E_k - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial S_{kl}} \right) \cdot S_{kl} \quad (3.14)$$

Die Größen vor den Zustandsvariablen bilden die Materialmatrizen. Aufgrund der enthaltenen partiellen Ableitung zweiter Ordnung werden sie auch als Materialkon-

stanten zweiter Ordnung bezeichnet. In den Gleichungen (3.15) bis (3.17) sind die in der Literatur üblichen Abkürzungen für diese Kenngrößen aufgeführt [DIN88].<sup>18</sup>

$$c_{ijkl}^E = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)^E \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{ik}^S = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial E_k} \right)^S \quad (3.16)$$

$$e_{ikl} = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial S_{kl}} \right) = e_{kij} \quad (3.17)$$

In den Gleichungen (3.18) bis (3.21) sind die gekoppelten Zustandsgleichungen zu sehen, welche das Kleinsignalverhalten für den linearen Bereich bei kleinen elektrischen und mechanischen Auslenkungen beschreiben ([HLW08]).

$$\begin{aligned} T &= -e^t E + c^E S & [6 \times 1] &\Leftrightarrow [6 \times 3] \cdot [3 \times 1] + [6 \times 6] \cdot [6 \times 1] \\ D &= \epsilon^S E + e S & [3 \times 1] &\Leftrightarrow [3 \times 3] \cdot [3 \times 1] + [3 \times 6] \cdot [6 \times 1] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} S &= d^t E + s^E T \\ D &= \epsilon^T E + d T \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} S &= g^t D + s^D T \\ E &= \beta^T D - g T \end{aligned} \quad (3.20)$$

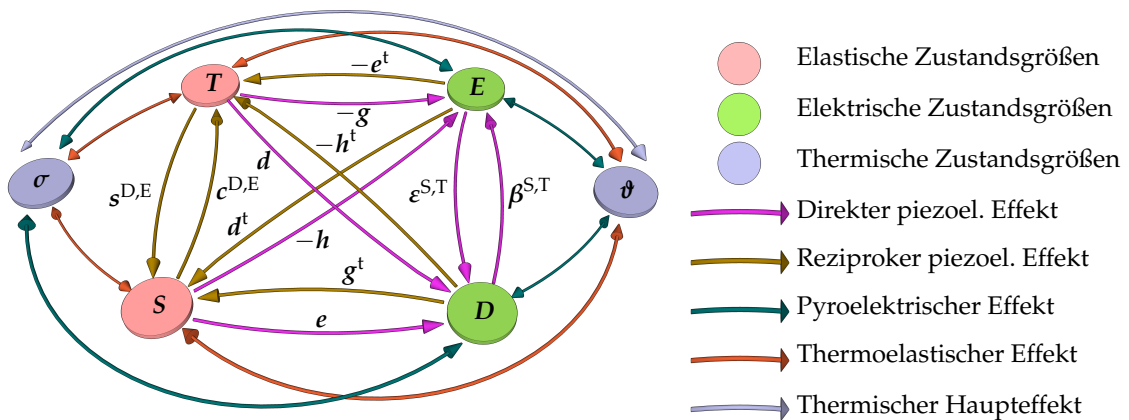
$$\begin{aligned} T &= -h^t D + c^D S \\ E &= \beta^S D - h S \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aus den 24 ursprünglich vorhandenen Zustandsgleichungen verbleiben durch die adiabatische Betrachtung an dieser Stelle acht Zustandsgleichungen, sie werden allgemein auch als konstituierende Gleichungen der Piezoelektrizität bezeichnet. Enthalten sind die dielektrischen Eigenschaften in Form der Permittivitäten  $\epsilon$  und

<sup>18</sup>Die Gleichheit der piezoelek. Moduln kann über eine Umindizierung aus der elektrischen Enthalpie hergeleitet werden. [TiGa80]

der Impermittivität  $\beta$  sowie die elastischen Materialeigenschaften durch die Elastizitätsmoduln  $c$  und die Elastizitätskonstanten  $s$ . Hinzu kommen die piezoelektrischen Eigenschaften als piezoelektrische Konstanten  $g$  und  $d$  sowie die piezoelektrischen Moduln  $h$  und  $e$ . Eine vollständige Übersicht auch der in dieser Arbeit nicht berücksichtigten thermischen, pyroelektrischen und thermoelastischen Materialkonstanten ist in [TiGa80] dargestellt.

In den Gleichungen (3.18) bis (3.21) beschreiben die jeweils oberen Zeilen den indirekten, die unteren den direkten piezoelektrischen Effekt. Die Zusammenhänge der Zustandsgrößen über die Materialmatrizen lassen sich auch grafisch veranschaulichen. In Abbildung 3.6 sind alle Abhängigkeiten eingezeichnet, wobei bei den thermoelastischen, pyroelektrischen und thermischen Übergängen der Übersichtlichkeit halber nur Doppelpfeile eingezeichnet sind anstelle beider möglichen Zusammenhänge. Auch sind die zugehörigen Materialgrößen nicht bezeichnet, da sie im Rahmen dieser Arbeit keine Berücksichtigung finden. Die Pfeile bei den beschrifteten Übergängen zeigen jeweils von der abhängigen zur unabhängigen Zustandsgröße. Welches Paar der Zustandsgleichungen für die Beschreibung genutzt wird, hängt von



**Abbildung 3.6:** Zusammenhänge der Zustandsgrößen in den linearen Zustandsgleichungen.

gegebenen Randbedingungen ab [DaNe92]. Im Rahmen dieser Arbeit wird die als  $e$ -Form bezeichnete Variante<sup>19</sup> aus Gleichung (3.18) genutzt, da hier die für die FEM üblichen Materialparameter  $c^E$ ,  $e$  und  $\epsilon^S$  direkt enthalten sind [PAB07]. Prinzipiell ist die Umrechnung der Materialmatrizen ineinander möglich [Ike90; DIN02]. Aufgrund der dabei auftretenden Fehlerfortpflanzung sollte aber möglichst darauf verzichtet werden [LKK08; Lah08].

<sup>19</sup>Die allgemein übliche Bezeichnung orientiert sich an den jeweils vorkommenden elektromechanischen Koeffizienten ( $d$ ,  $e$ ,  $h$  und  $g$ ).

Tabelle 3.2: Konstante Zustandsgrößen und ihre Bedeutung und Realisierung.

Konstante Zustandsgröße	Bedeutung (Realisierung)
Mech. Spannung $T$	Mechanisch frei (Spannungsfreie Halterung)
Mech. Dehnung $S$	Mechanisch geklemmt (Unbeweglich eingeklemmt)
El. Feldstärke $E$	Elektrisch frei (Kurzschluss der Elektroden)
El. Flussdichte $D$	Elektrisch geklemmt (Elektroden isoliert, offen)
Temperatur $\vartheta$	Isotherm (Temperierung)
Entropie $\sigma$	Adiabatisch (Keine Eigenerwärmung)

In der Tabelle 3.2 sind die in den Gleichungen (3.18) bis (3.21) als Exponenten angegebenen konstanten Zustandsgrößen noch einmal zusammengestellt und die jeweilige Realisierung ist angegeben. Die der Vollständigkeit halber angegebenen thermischen Zustandsgrößen werden im Rahmen dieser Arbeit als immer konstant angenommen und deshalb in den Gleichungen nicht explizit gekennzeichnet.

### Symmetrie bedingte Reduzierung von Matrixeinträgen am Beispiel des piezoelektrischen Effektes

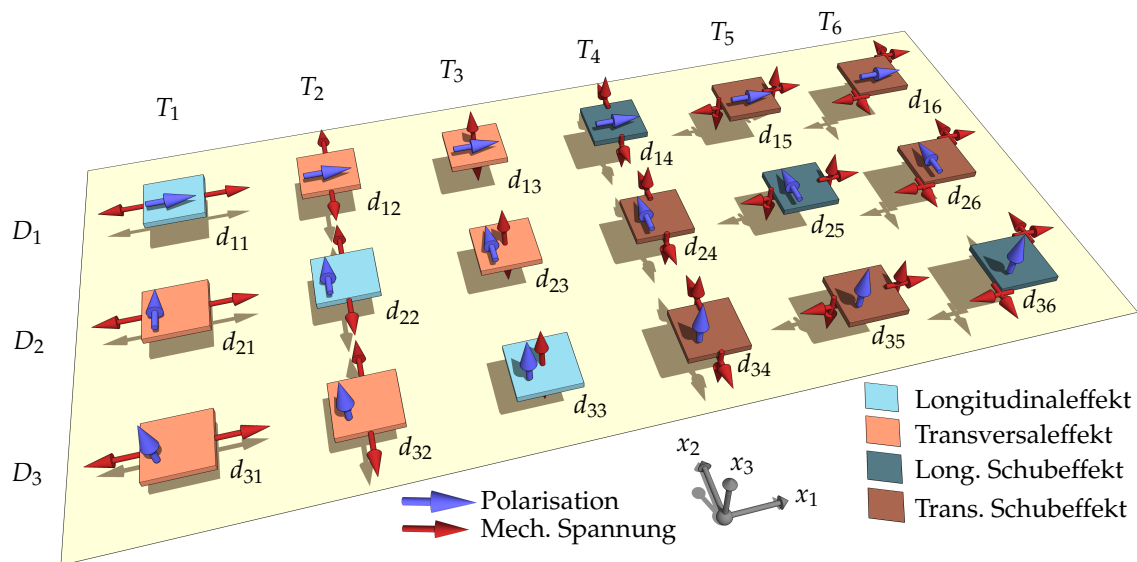


Abbildung 3.7: Vier Arten des direkten piezoelektrischen Effektes und deren Position in der Materialmatrix  $d$  (gelber Hintergrund).

In Abbildung 3.7 ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungsvektors  $T$  und den Komponenten der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  grafisch veranschaulicht (vgl. Gleichung (3.19)). Die Materialmatrix für diesen Zusammenhang enthält die piezoelektrischen Koeffizienten  $d_{ij}$ . Zu einer gegebenen Spannungskomponente  $T_j$  ergibt sich über diese die Komponente  $D_i$ , es folgt also aus einer mechanischen

Spannung eine Ladungstrennung (hier als Polarisierung eingezeichnet). Dies entspricht dem im Abschnitt 3.2 beschriebenen direkten piezoelektrischen Effekt. Die Richtungen beider Zustandsgrößen sind für jede Matrixposition durch Pfeile gekennzeichnet. Die Art der Darstellung orientiert sich an [TiGa80], ist aber hier auf alle vorkommenden Fälle erweitert.

Es können vier Effekte unterschieden werden, die in der Abbildung 3.7 farblich kenntlich gemacht sind. In der linken translatorischen Hälfte der Matrix befinden sich auf der Hauptdiagonalen die Einträge des Longitudinaleffektes und daneben die des Transversaleffektes. Eine entsprechende Anordnung ist auch in der rechten Hälfte der Matrix zu erkennen, hier jedoch für die rotatorischen longitudinalen und transversalen Schubeffekte. Aus dieser Darstellung lässt sich auf anschauliche Weise ableiten, welche Matrixeinträge aufgrund von Symmetrieeigenschaften eines betrachteten Körpers zu Null werden müssen<sup>20</sup>. Anhand einer rotationssymmetrischen Piezokeramikscheibe soll dies beispielhaft gezeigt werden.

Hierzu können einige Einträge und Paarungen von Einträgen der Matrix betrachtet werden. Beispielsweise kann bei gleicher Richtung der mechanischen Spannung der Einträge  $d_{11}$  und  $d_{21}$  bei einem rotationssymmetrischen Körper nicht eine unterschiedliche Richtung der Polarisierung in derselben Ebene folgen. Die Symmetrie kann nur erhalten bleiben, wenn diese beiden Matrixeinträge Null werden. Dieser Vergleich kann auf viele weitere Paare der translatorischen Größen übertragen werden und es bleiben in der linken Hälfte der Matrix nur die Einträge  $d_{31}$ ,  $d_{32}$  und  $d_{33}$  übrig, wobei die ersten beiden zur Wahrung der Symmetrie zudem gleich sein müssen.

Auch bei den Schub- und Scherelementen in der rechten Matrixhälfte lassen sich solche Beziehungen finden. So würden z. B. die Spannungen der Elemente  $d_{14}$  und  $d_{25}$  zu entgegengesetzter Polarisierung führen. Es bleiben letztlich die beiden Einträge  $d_{24}$  und  $d_{15}$  übrig, aber auch hier ist für die Einhaltung der Symmetrie eine Gleichheit erforderlich. Die sich aus der angenommenen Probekörpersymmetrie (vgl. Kapitel 4.1), die in dieser Arbeit für die Verwendung der rotationssymmetrischen FEM-Simulation genutzt und vorausgesetzt wird, ergebende Matrix der piezoelektrischen Koeffizienten ist in Gleichung (3.22) abschließend dargestellt. Die gezeigte

<sup>20</sup>Eine analytische Herleitung über die zu erfüllenden Symmetrieeigenschaften der Tensorkoordinaten ist ebenfalls möglich, hierzu sei auf die Literatur verwiesen [TEK10].

Besetzung der Matrixelemente ist für die anderen Materialmatrizen gleich, so dass sich die Anzahl unabhängiger Einträge in diesen Matrizen auf drei reduziert.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_{15} & \cdot & \cdot \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Insgesamt ergeben sich für die hier verwendeten Zustandsgleichungen (3.18) aufgrund der Symmetrie die Gleichungen (3.23), in der noch zehn unabhängige Größen vorkommen (fünf Elastizitätsmoduln  $c_{pq}^E$ , drei piezoelektrische Konstanten  $e_{pq}$  und zwei Permittivitäten  $\epsilon_{pq}^S$ ), deren zuverlässigere Ermittlung im Rahmen der Materialparameterbestimmung dieser Arbeit ermöglicht wird. Die zugehörige Kristallklasse wird als  $6mm$ -Kristallklasse bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -e_{31} \\ \cdot & \cdot & -e_{31} \\ \cdot & \cdot & -e_{33} \\ \cdot & -e_{15} & \cdot \\ -e_{15} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E} + \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44}^E & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{44}^E & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & \cdot & \cdot \\ \cdot & \epsilon_{11}^S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_{15} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & e_{15} & \cdot & \cdot \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.23)$$

### Übergang zur Beschreibung als Differentialgleichungssystem

Um ein piezoelektrisches System vollständig zu beschreiben, sind neben den eingeführten konstituierenden Zustandsgleichungen weitere Zusammenhänge zu beachten, die in der Gesamtheit das systembeschreibende Differentialgleichungssystem bilden. In Gleichung (3.24) ist das Gaußsche Gesetz für den Fall einer Piezokeramik als Isolator ohne freie Ladungsträger aufgeführt. Mit dem Nabla-Operator  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  folgt ([BSM00]):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D} = 0 \quad (3.24)$$



Die Verknüpfung des elektrischen Feldes mit dem elektrischen Potential ergibt sich nach Gleichung (3.25). [KoSc04]

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi_E = -\nabla \phi_E \quad (3.25)$$

Der Zusammenhang zwischen den Auslenkungen  $\mathbf{u}$  und den Deformationen  $\mathbf{s}$  ist für den linearisierten Fall (kleine Auslenkungen) in Komponentenschreibweise durch Gleichung (3.26) gegeben. [Sut84; MOT73]

$$s_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (3.26)$$

Unter Berücksichtigung der Voigtschen Notation (vgl. Tabelle 3.1, S.32) kann dieser Zusammenhang kompakt mit Hilfe des differentiellen Operators  $\mathcal{B}$  aus Gleichung (3.27) geschrieben werden als Gleichung (3.28). [DWU04]

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x_3} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdot \end{bmatrix}^t \quad (3.27)$$

$$\mathbf{S} = \mathcal{B}\mathbf{u} \quad (3.28)$$

Der Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung und der Auslenkung ist über das Newtonsche Gesetz als linearisierte Form der Bewegungsgleichung gegeben in Gleichung (3.29), wobei  $\rho_0$  die Dichte im Ruhezustand darstellt.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mathcal{B}^t \mathbf{T} \quad (3.29)$$

Neben diesen Gleichungen ist für eine Lösung des Differentialgleichungssystems die Wahl von adäquaten mechanischen und elektrischen Rand- und Anfangsbedingungen nötig. Einsetzen der Gleichungen (3.24), (3.25), (3.28) und (3.29) in die Zustandsgleichungen in der e-Form (vgl. Gleichung (3.18)) ergibt das Differentialgleichungssystem in Gleichung (3.30).

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = -\mathbf{e}^t \mathbf{E} + \mathbf{c}^E \mathbf{S} &\implies \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mathcal{B}^t \left( -\mathbf{e}^t (-\nabla \phi_E) + \mathbf{c}^E (\mathcal{B}\mathbf{u}) \right) \\ \mathbf{D} = \varepsilon^S \mathbf{E} + \mathbf{e} \mathbf{S} &\implies 0 = \nabla \left( \varepsilon^S (-\nabla \phi_E) + \mathbf{e} (\mathcal{B}\mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

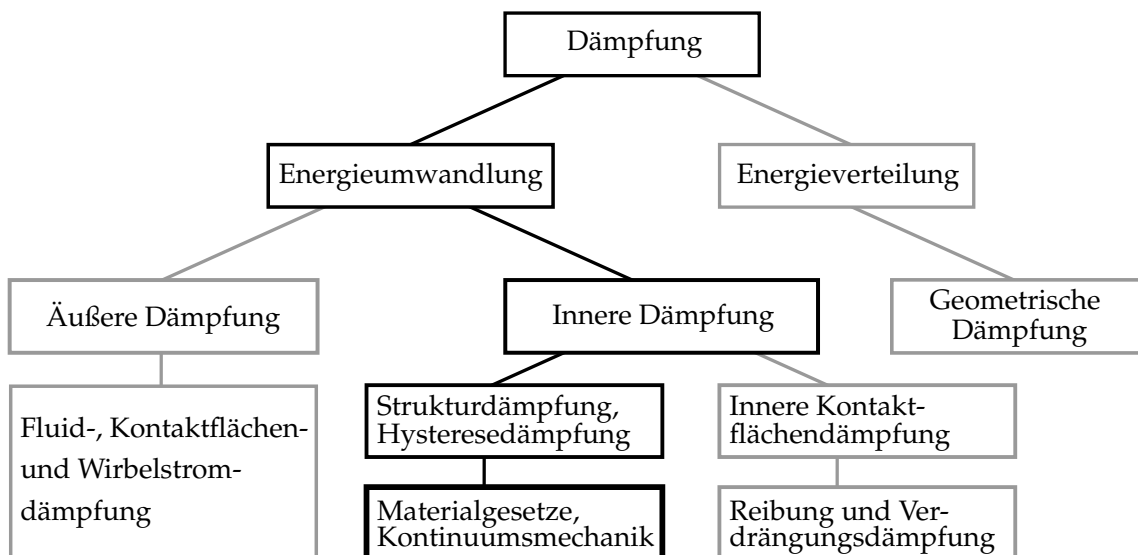
Nach einer Umformung ergibt sich hierfür die Darstellung aus Gleichung (3.31).

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \mathcal{B}^t \left( \mathbf{e}^t \nabla \phi_E + \mathbf{c}^E \mathcal{B} \mathbf{u} \right) &= 0 \\ \nabla \left( -\boldsymbol{\varepsilon}^S \nabla \phi_E + \mathbf{e} \mathcal{B} \mathbf{u} \right) &= 0\end{aligned}\quad (3.31)$$

Für die Berechnung im Rahmen einer FEM, die eine für die Berechnung günstige Approximation der Differentialgleichungen (3.31) darstellt, ist eine örtliche Diskretisierung in finite Elemente (FE) nötig. Hierzu und zu den möglichen Lösungsalgorithmen sei auf die Literatur verwiesen [BaWi76; Bat96; AWW98; Koc00; Jin02; Kal07].

### 3.5 Berücksichtigung der Dämpfung

Mechanische Schwingungsvorgänge sind immer auch mit einer Energiedissipation verbunden. Dabei lassen sich verschiedene Effekte als Ursache unterscheiden. Diese sind in Abbildung 3.8 aufgeführt und klassifiziert. Gerade zwischen den Effekten der inneren und äußeren Dämpfung hängt die Grenze dabei von der Wahl der Systemgrenzen ab und ist deshalb nicht immer eindeutig zuzuordnen. Das in dieser Arbeit genutzte und in diesem Kapitel eingeführte Rayleigh-Dämpfungsmodell lässt sich im Bereich der Materialgesetze einordnen und der zugehörige Pfad ist durch die schwarzen Linien in Abbildung 3.8 kenntlich gemacht.



**Abbildung 3.8:** Die Klassifizierung der Dämpfungseffekte (nach [Bee94]). Hier betrachtete Dämpfungseffekte lassen sich in die Kontinuumsmechanik einordnen, der entsprechende Pfad ist schwarz kenntlich gemacht.

Die Effekte der äußeren Dämpfung als auch die der geometrische Dämpfung, bei der volumenbezogene Energie durch Verteilung reduziert wird, spielen im Rahmen der Betrachtung der Bestimmung der Materialparameter keine Rolle. Generell lassen sich die Dämpfungseigenschaften auf zwei Arten für die Simulation berücksichtigen. Zum einen kann ein Rayleigh-Dämpfungsmodell genutzt werden und es ergeben sich vorteilhafte Eigenschaften für die Berechnung mittels der FEM. Einzelheiten hierzu sind im Unterabschnitt 3.5.1 dargestellt. Zum anderen ist eine Berücksichtigung durch die Wahl von komplexwertigen Materialeigenschaften möglich, hierauf wird im Unterabschnitt 3.5.2 eingegangen.

### 3.5.1 Rayleigh-Dämpfungsmodell

Um den Einfluss der Dämpfung auf ein System mit vielen Freiheitsgraden zeigen und eine Begründung für die Nutzung des Rayleigh-Dämpfungsmodells geben zu können, wird die allgemeine Bewegungsgleichung als Differentialgleichung in Matrixschreibweise aus Gleichung (3.32) genutzt. Hier wird der Zusammenhang der Auslenkungen  $\mathbf{u}$  mit den Kräften  $\mathbf{F}$  über die drei Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  (Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix) hergestellt [Bee94].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.32)$$

Ausgehend von diesem allgemeinen Fall wird im ersten Schritt zunächst der freie Fall ( $\mathbf{F} = 0$ ) ohne Dämpfung ( $\mathbf{C} = 0$ ) in Gleichung (3.33) betrachtet.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (3.33)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Ansatzfunktion zur Lösung dieses DGL-Typs. Hier wird die zeitharmonische komplexe Schwingung nach Gleichung (3.34) gewählt und durch Einsetzen in Gleichung (3.33) ergibt sich die Gleichung (3.35).

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = (j\omega)^2 \hat{\mathbf{u}}e^{j\omega t} = -\omega^2 \mathbf{u}(t) \quad (3.34)$$

$$\left( -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.35)$$

Diese Gleichung hat die nicht gesuchte triviale Lösung  $\hat{\mathbf{u}} = 0$ . Weitere nicht-triviale Lösungen existieren, wenn die Summe der Matrizen in der Klammer nicht invertierbar ist, also für die Bedingung in Gleichung (3.36). Diese als charakteristisches

Polynom bezeichnete Gleichung ergibt als Lösungen die Eigenwerte der Matrix, die in diesem Fall als Eigenkreisfrequenzen  $\omega_e$  bezeichnet werden. [BaWi76]

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (3.36)$$

Werden die gefundenen Eigenfrequenzen nacheinander in die Gleichung (3.35) eingesetzt, ergeben sich die als Eigenschwingungen bezeichneten Eigenvektoren  $\mathbf{u}_e$  des Systems [Daz09]. Diese spielen bei der im Folgenden beschriebenen modalen Transformation eine wichtige Rolle. Hierzu werden modale Koordinaten eingeführt, die durch die Gleichung (3.37) beschrieben sind, wobei die Matrix  $\boldsymbol{\phi}$  die Modalmatrix ist. Sie wird durch das Zusammenstellen der Eigenformen gebildet.<sup>21</sup>

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad (3.37)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.37) in Gleichung (3.33) und die Multiplikation mit der inversen Modalmatrix  $\boldsymbol{\phi}^{-1}$  von links ergibt sich die Gleichung (3.38).

$$\boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} = 0 \quad (3.38)$$

Durch diese Transformation werden die symmetrischen Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  diagonalisiert. Für das Gleichungssystem bedeutet dies, dass aus den gekoppelten Differentialgleichungen nun ein System mit entkoppelten Gleichungen entstanden ist. Dieses bietet viele Vorteile für die Lösung des Gleichungssystems. Unter Berücksichtigung der Symmetrien der Matrizen ergeben sich die beiden Gleichungen (3.39) [MKR95].  $\mathbf{M}^*$  und  $\mathbf{K}^*$  werden als modale Masse- und Steifigkeitsmatrizen bezeichnet und  $\mathbf{I}$  beschreibt eine quadratische Einheitsmatrix.

$$\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^* = \boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \text{diag}(\omega_e^2) \quad (3.39)$$

Somit ist das gekoppelte System aus Gleichung (3.33) durch die Modaltransformation in ein System entkoppelter Gleichungen überführt worden und kann wie in Gleichung (3.40) dargestellt werden.

$$\boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} = \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}(\omega_e^2) \mathbf{q} = \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^* \mathbf{q} = 0 \quad (3.40)$$

Im Folgenden wird die Dämpfung aus Gleichung (3.32) wieder berücksichtigt und mit der Anwendung der modalen Transformation auf den zusätzlichen geschwin-

<sup>21</sup>Die Matrix wird dabei so normiert, dass sich die einfache Darstellungsmöglichkeit nach den Gleichungen (3.39) ergibt. [HoEe68]

digkeitsproportionalen Anteil der Systemgleichung ergibt sich die Gleichung (3.41).

$$M^* \ddot{q} + \underbrace{\phi^{-1} C \phi}_{C^*} \dot{q} + K^* q = 0 \quad (3.41)$$

Wird die Steifigkeitsmatrix auf Grundlage physikalischer Zusammenhänge aufgestellt, ist sie im Allgemeinen nicht symmetrisch [Daz09]. Dadurch ergibt sich für die Matrix  $C^*$  keine Diagonalform und die Gleichungen des Systems werden durch die Anwendung der modalen Transformation nicht entkoppelt. Die genannten Vorteile für die Berechnung beispielsweise im Rahmen einer FEM-Berechnung gehen verloren. In diesem Fall wird die Dämpfung als *nicht-klassische Dämpfung* bezeichnet im Gegensatz zur *klassischen Dämpfung* bei diagonalisierbarer Dämpfungsmatrix. Wird als Spezialfall jedoch die Dämpfungsmatrix als Linearkombination aus Masse- und Steifigkeitsmatrix erstellt, ergibt sich aufgrund der Symmetrien der Einzelmatrizen  $M$  und  $K$  auch eine Symmetrie der kombinierten Matrix  $C$ .

$$C = \alpha_M M + \alpha_K K \quad (3.42)$$

Die in Gleichung (3.42) angegebene Zusammensetzung der Dämpfungsmatrix wird als Rayleigh-Dämpfungsmodell bezeichnet. Die Faktoren  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  heißen dementsprechend Rayleigh-Dämpfungsparameter, wobei  $\alpha_M$  den masseabhängigen und  $\alpha_K$  den steifigkeitsabhängigen Anteil bestimmen. Die transformierte Matrix  $C$  ist in Gleichung (3.43) angegeben und weist nun ebenfalls unter Berücksichtigung von Gleichung (3.40) die für die Berechnung günstige Diagonalform auf.

$$\phi^{-1} C \phi = \alpha_M \phi^{-1} M \phi + \alpha_K \phi^{-1} K \phi = \alpha_M M^* + \alpha_K K^* \quad (3.43)$$

Insgesamt ergibt sich für das freie diagonalisierte Differentialgleichungssystem die Gleichung (3.44), also die um den Dämpfungsanteil erweiterte Gleichung (3.40).

$$M^* \ddot{q} + (\alpha_M M^* + \alpha_K K^*) \dot{q} + K^* q = 0 \quad (3.44)$$

Das Rayleigh-Dämpfungsmodell basiert nicht auf einer physikalischen Herleitung, sondern ist für die bessere Lösbarkeit aus mathematischer Sicht sinnvoll. Trotzdem wird es in einem großen Teil der kommerziellen FEM-Werkzeuge als Dämpfungsmodell für transiente Vorgänge eingesetzt. Aus ihm lassen sich, je nach Wahl der beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter, vier Fälle ableiten, die in Tabelle 3.3 zusammengestellt sind. Nur das Rayleigh-Dämpfungsmodell kann jedoch als gute Approximation des realen Schwingungsverhaltens angesehen werden [Daz09]. Wird

**Tabelle 3.3:** Verschiedene Dämpfungsmodelle je nach Wahl der Rayleigh-Dämpfungsparameter. ([Ler90])

Wahl der Parameter	Beschriebene Dämpfung
$\alpha_M = 0$ und $\alpha_K = 0$	Ungedämpftes System
$\alpha_M > 0$ und $\alpha_K = 0$	Masseabhängige Dämpfung
$\alpha_M = 0$ und $\alpha_K > 0$	Steifigkeitsabhängige Dämpfung
$\alpha_M > 0$ und $\alpha_K > 0$	Rayleigh-Dämpfungsmodell

ein modaler Dämpfungsfaktor  $\xi$  eingeführt<sup>22</sup>, kann aus Ansätzen für die reinen masse- und steifigkeitsabhängigen Modelle (vgl. [MaSp11; Sem97]) und der Gleichung (3.43) ein Zusammenhang zwischen der modalen Dämpfung  $\xi_i$  und der  $i$ -ten Eigenkreisfrequenz nach Gleichung (3.45) hergeleitet werden [Bat96; MKR95].

$$2\xi_i = \frac{\alpha_M}{\omega_i} + \alpha_K \omega_i \quad (3.45)$$

Um den modalen Dämpfungsfaktor aus einem gedämpften Zeitverlauf zu ermitteln (vgl. Abbildung 3.9), kann zunächst das logarithmische Dekrement  $D$  nach Gleichung (3.46) aus zwei aufeinander folgenden Maximalwerten ermittelt werden, wobei  $\delta$  die Abklingkonstante ist. [Foe85]

$$D = \ln \left( \frac{\hat{u}_n}{\hat{u}_{n+1}} \right) = \frac{2\pi\xi_i}{\sqrt{1 - \xi_i^2}} = \frac{2\pi\delta_i}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta_i^2}} \quad (3.46)$$

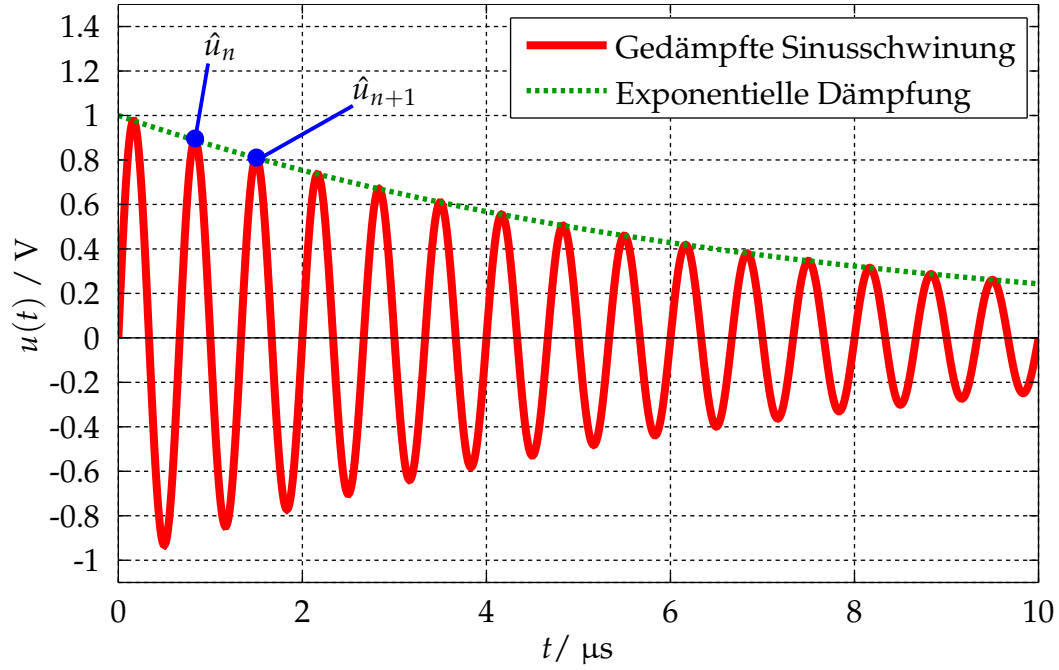
Die Umstellung ergibt die Gleichung (3.47) zur Ermittlung des Lehrschen Dämpfungsmaßes  $\xi_i$ .

$$\xi_i = \frac{D}{\sqrt{D^2 + (2\pi)^2}} \quad (3.47)$$

Werden nun  $\xi_1$  und  $\xi_2$  für zwei Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  als  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  vorgegeben, ergibt Gleichung (3.45) ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  [Kal07]. Die Lösung des Gleichungssystems führt auf die Bestimmungsgleichungen (3.48) für die beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter.

$$\alpha_M = 2\xi \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad \text{und} \quad \alpha_K = 2\xi \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \quad (3.48)$$

<sup>22</sup>Für den modalen Dämpfungsfaktor  $\xi$  ist auch die Bezeichnung *Lehrsches Dämpfungsmaß* üblich.



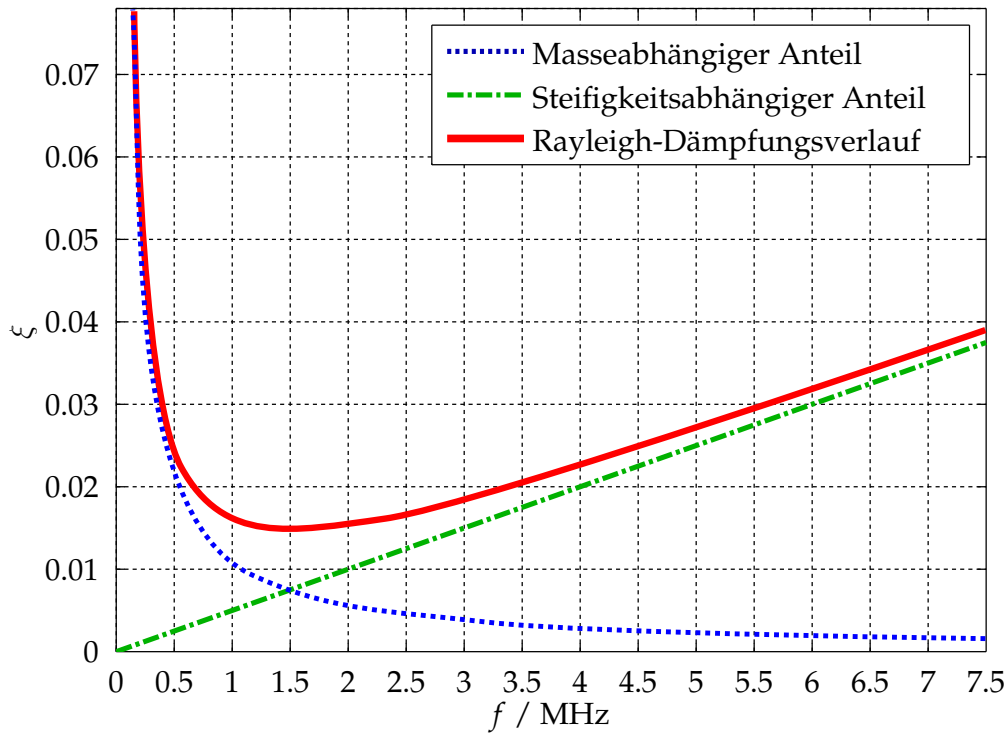
**Abbildung 3.9:** Verlauf einer gedämpften Sinusschwingung  $u(t) = \hat{u}_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)$ . Zwei aufeinander folgende Maximalwerte sind mit  $\hat{u}_n$  und  $\hat{u}_{n+1}$  gekennzeichnet. ( $f_0 = 1,5$  MHz,  $\delta = \omega_0 \xi$ ,  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ , Anfangsphase  $\varphi_0 = 0$  und modalem Dämpfungsfaktor  $\xi = 0,015$ ).

Werden die beiden Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nah an einer Zielkreisfrequenz  $\omega_0$  gewählt, lassen sich bei Vorgabe einer gewünschten modalen Dämpfung  $\xi$  die Rayleigh-Dämpfungsparameter bestimmen [KaKa08]. Ein Beispiel mit der Dämpfung  $\xi = 0,015$  für die Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 1,5$  MHz ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Durch die Wahl von  $f_1 = f_0 - 10$  kHz und  $f_2 = f_0 + 10$  kHz für dieses Beispiel ergibt sich der dargestellte Dämpfungsverlauf über der Frequenz.

### Berücksichtigung des Rayleigh-Dämpfungsmodells im Differentialgleichungssystem

Das Differentialgleichungssystem, dass die Grundlage für die FEM-Berechnung bildet, ist in Gleichung (3.31) angegeben. Die formale Ähnlichkeit mit den in Gleichung (3.44) hergeleiteten Matrixansatz für die Einbeziehung des Rayleigh-Dämpfungsmodells soll an dieser Stelle genutzt werden, um die Dämpfung in das DGL-System zu integrieren. Hiermit lässt sich das System in Gleichung (3.49) angeben, eine mathematische Herleitung ist z. B. in [Lah08] zu finden.

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_M \rho_0 \dot{\mathbf{u}} - \mathcal{B}^t \left( \mathbf{e}^t \nabla \phi_E + \mathbf{c}^E \mathcal{B} \mathbf{u} + \alpha_K \mathbf{c}^E \mathcal{B} \dot{\mathbf{u}} \right) &= 0 \\ \nabla \left( -\epsilon^S \nabla \phi_E + \mathbf{e} \mathcal{B} \mathbf{u} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$



**Abbildung 3.10:** Beispiel eines Rayleigh-Dämpfungsverlaufes mit den beiden Rayleigh-Dämpfungsparametern  $\alpha_M = 1,414 \cdot 10^5 \frac{1}{s}$  und  $\alpha_K = 1,592 \cdot 10^{-9} s$  für eine modale Dämpfung von  $\xi = 0,015$  bei 1,5 MHz.

Es lässt sich erkennen, dass der Sonderfall der Elektrostatik für die Frequenz  $f = 0$ , also bei verschwindenden Zeitableitungen in Gleichung (3.49), abgeleitet werden kann, wie er in Gleichung (3.50) angegeben ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^t \left( e^t \nabla \phi_E + c^E \mathcal{B} u \right) &= 0 \\ \nabla \left( -\varepsilon^S \nabla \phi_E + e \mathcal{B} u \right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass sich das Rayleigh-Dämpfungsmodell als Spezialfall des allgemeineren Falls der Verwendung komplexwertiger Piezomaterialdaten beschreiben lässt, der in dem folgenden Kapitel beschrieben wird [KLM06].

### 3.5.2 Komplexwertige Piezomaterialdaten

Die erste einheitliche Beschreibung von dielektrischen, elastischen und piezoelektrischen Verlusten in Piezokeramiken durch komplexwertige Größen wurde 1967 von Holland zusammengefasst [Hol67]. Dabei werden die Einträge der Materialmatrizen



als komplexwertige Größen getrennt nach Real- und Imaginärteil dargestellt, wie es in Gleichung (3.51) für die elastischen Konstanten gezeigt ist.

$$\underline{s}_{ij}^E = \operatorname{Re} \left\{ \underline{s}_{ij}^E \right\} - j \operatorname{Im} \left\{ \underline{s}_{ij}^E \right\} = s'_{ij}{}^E - j s''_{ij}{}^E \quad (3.51)$$

Stellt man aus den komplexwertigen Größen die 9x9-elementige Systemmatrix  $\underline{M}$  entsprechend der Gleichung (3.19) ( $d$ -Form, Seite 40) auf, ergibt sich die Zustandsgleichung in der in Gleichung (3.52) angegebenen Form.

$$\begin{bmatrix} \underline{S} \\ \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{s}^E & \underline{d}^t \\ \underline{d} & \underline{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{E} \end{bmatrix} = \underline{M} \cdot \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{E} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{M} = \underline{M}' - j \underline{M}'' \quad (3.52)$$

Wird für das System die Verlustleistungsdichte betrachtet und berücksichtigt, dass diese für ein passives Material nicht negativ sein kann, ergibt sich die Forderung nach der positiven Definitheit<sup>23</sup> des Imaginärteils  $\underline{M}''$  [Hol67]. Hieraus lassen sich Randbedingungen für die enthaltenen Materialdaten ableiten, die in den Gleichungen (3.53) zusammengefasst sind.

$$\begin{aligned} s''_{ii}{}^E &\geq 0 & \forall i \in \{1, 3, 4, 6\} \\ \varepsilon''_{ii}{}^T &\geq 0 & \forall i \in \{1, 3\} \\ s''_{11}{}^E &\geq |s''_{12}{}^E| \\ s''_{11}{}^E \cdot s''_{33}{}^E &\geq (s''_{13}{}^E)^2 \\ s''_{11}{}^E \cdot \varepsilon''_{33}{}^T &\geq (d''_{31})^2 \\ s''_{33}{}^E \cdot \varepsilon''_{33}{}^T &\geq (d''_{33})^2 \\ s''_{44}{}^E \cdot \varepsilon''_{11}{}^T &\geq (d''_{24})^2 \\ s''_{33}{}^E \cdot (s''_{11}{}^E + s''_{12}{}^E) &\geq 2 (s''_{13}{}^E)^2 \\ \varepsilon''_{33}{}^T \cdot (s''_{11}{}^E + s''_{12}{}^E) &\geq 2 (d''_{31})^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Werden für alle Einträge der jeweiligen Materialmatrizen die gleichen Verluste angenommen, können analog die Materialmatrizen als komplexwertige Größen, wie sie in den Gleichungen (3.54) aufgeführt sind, definiert werden. Die Darstellungsform kann dabei auf alle anderen hier nicht dargestellten Materialmatrizen übertragen werden.

<sup>23</sup>Eine symmetrische Matrix wird als positiv definit bezeichnet, falls alle ihre Eigenwerte größer als Null sind.

$$\begin{aligned}
\underline{s}^E &= \operatorname{Re} \{ \underline{s}^E \} - j \operatorname{Im} \{ \underline{s}^E \} = s'^E - j s''^E \\
\underline{d} &= \operatorname{Re} \{ \underline{d} \} - j \operatorname{Im} \{ \underline{d} \} = d' - j d'' \\
\underline{\varepsilon}^T &= \operatorname{Re} \{ \underline{\varepsilon}^T \} - j \operatorname{Im} \{ \underline{\varepsilon}^T \} = \varepsilon'^T - j \varepsilon''^T
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Eine energetische Betrachtung der Verluste sorgt hier für das negative Vorzeichen vor den Imaginärteilen. Diese Definition ist in der Literatur nicht einheitlich und muss dementsprechend bei der Angabe des Vorzeichens der Piezomaterialdaten berücksichtigt werden. Sie stellt aber aus physikalischer Sicht die sinnvollere Definition dar und wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Die Kennzeichnung des Realteils als gestrichene Größe und des Imaginärteils als doppelt gestrichene Größe hat sich aufgrund der kompakteren Schreibweise in der Literatur als nützlich erwiesen und wird auch hier verwendet.

Werden der mechanische Verlustfaktor  $\tan \delta_m$ , der dielektrische Verlustfaktor  $\tan \delta_e$  sowie der piezoelektrische Verlustfaktor  $\tan \delta_d$  eingeführt, lassen sich die Gleichungen aus (3.54) umschreiben [GHS80; Uchi01]. Gebräuchlich ist auch die Verwendung der mechanischen Güte  $Q_m$ , der dielektrischen Güte  $Q_e$  sowie der piezoelektrischen Güte  $Q_d$ . Der Zusammenhang zwischen diesen und den Verlustfaktoren ist in den Gleichungen (3.55) dargestellt und als Näherung für geringe Dämpfungen gültig.

$$\begin{aligned}
\underline{s}^E &= s'^E - j s''^E = s'^E \left( 1 - j \frac{s''^E}{s'^E} \right) = s'^E (1 - j \tan \delta_m) \approx s'^E \left( 1 - j \frac{1}{Q_m} \right) \\
\underline{d} &= d' - j d'' = d' \left( 1 - j \frac{d''}{d'} \right) = d' (1 - j \tan \delta_d) \approx d' \left( 1 - j \frac{1}{Q_d} \right) \\
\underline{\varepsilon}^T &= \varepsilon'^T - j \varepsilon''^T = \varepsilon'^T \left( 1 - j \frac{\varepsilon''^T}{\varepsilon'^T} \right) = \varepsilon'^T (1 - j \tan \delta_e) \approx \varepsilon'^T \left( 1 - j \frac{1}{Q_e} \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Die Bedeutung der komplexwertigen Größen wird deutlich, wenn beispielsweise die komplexwertige anstelle der reellen Wellenzahl in die Gleichung (3.56) für die Wellenausbreitung eingesetzt wird.

$$u(x, t) = \hat{u} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{mit } \underline{k} = k' - jk'' \tag{3.56}$$

Es ergibt sich durch Umformung die Gleichung (3.57), in der der durch die komplexwertige Wellenzahl hinzugekommene Dämpfungsterm erkennbar ist, der zu einem exponentiell gedämpften Verlauf führt (vgl. Abbildung 3.9 auf Seite 51).

$$u(x, t) = \hat{u} e^{j(\omega t - (k' - jk'')x)} = \hat{u} e^{j(\omega t - k'x)} \cdot e^{-k''x} \tag{3.57}$$

## 4 Simulationsmodell

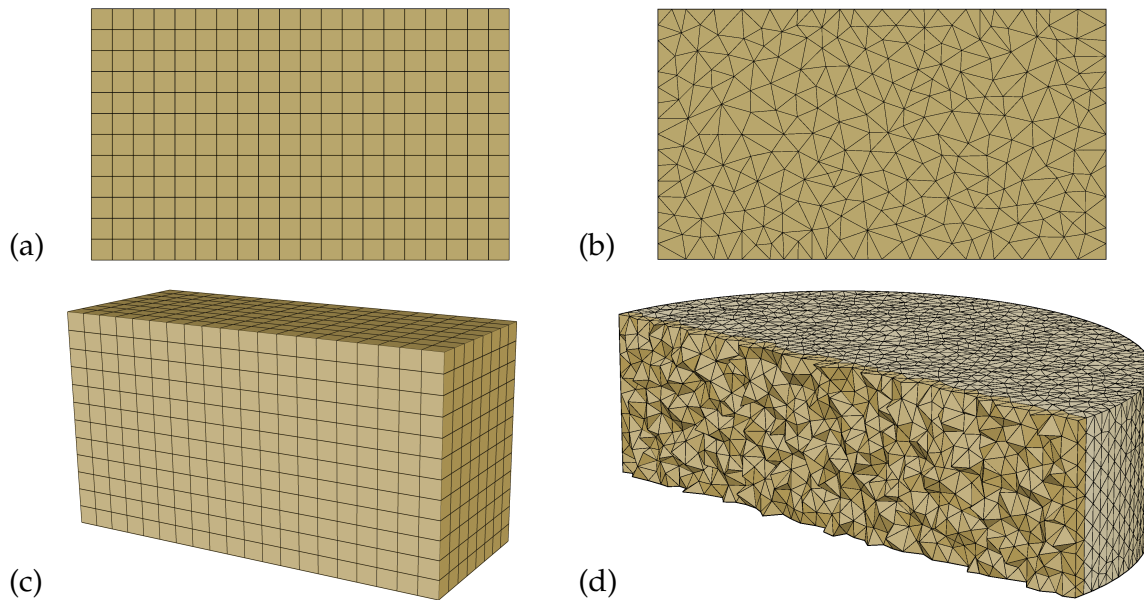
Die Anpassung eines simulierten an einen gemessenen komplexwertigen Impedanzverlauf ist Bestandteil der Materialparameterbestimmung mittels eines inversen Verfahrens (vgl. Kapitel 7). Zur Ermittlung des simulierten Verlaufes wird ein FEM-Modell genutzt, welches im Kapitel 4.1 näher beschrieben wird. Es gibt zwei Vorgehensweisen zur simulativen Ermittlung des Impedanzverlaufes, welche in den Kapiteln 4.2 und 4.3 zusammen mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen beschrieben sind.

### 4.1 Parametrisierbares Simulationsmodell zur Impedanzermittlung

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Optimierungen haben immer auch Auswirkungen auf das genutzte Simulationsmodell. Es wird deshalb als parametrisierbares Modell realisiert, bei dem alle wichtigen Parameter und Randbedingungen variabel vorgebar sind und während des Optimierungsprozesses angepasst werden können [HRU09; Unv12; URH15]. Bei der Berechnung mittels der FEM wird das zu untersuchende Gebiet in kleine Teilbereiche zerlegt. Hierbei handelt es sich um die örtliche Diskretisierung. Darüber hinaus muss für eine transiente Analyse auch eine zeitliche Diskretisierung vorgenommen werden, die nicht unabhängig von der örtlichen erfolgen kann.

Bei der örtlichen Diskretisierung kann grundsätzlich zwischen der Nutzung eines strukturierten und eines unstrukturierten Gitters unterschieden werden. Bei einfachen und regelmäßigen Geometrien kommt üblicherweise die strukturierte Variante zum Einsatz. Wird die Geometrie zu kompliziert, muss auf ein unstrukturiertes Gitter umgestiegen werden. Ein Vergleich beider Möglichkeiten ist in Abbildung 4.1 gegenübergestellt, wobei zwischen zwei- und dreidimensionalen Gittern unterschieden

wird. Bei den unstrukturierten Gittern wird die Delaunay-Triangulation<sup>24</sup> verwendet. Wenn es die Symmetrie des zu untersuchenden Objektes zulässt, wird aufgrund des deutlich geringeren Rechenaufwandes die zweidimensionale Berechnung vorgezogen. Bei größeren Bilanzräumen kann aufgrund des hohen Rechenaufwandes eine dreidimensionale Berechnung praktisch unmöglich werden.



**Abbildung 4.1:** Vergleich verschiedener örtlicher Diskretisierungen mit (a) strukturiertem (Rechteckelemente) und (b) unstrukturiertem (Dreieckelemente) zweidimensionalen Gitter sowie mit (c) strukturiertem (Quaderelemente) und (d) unstrukturiertem (Tetraederelemente) dreidimensionalen Gitter.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Piezokeramiken ließen sich auch als 3D-Modell aufbauen und simulieren, allerdings wird im Rahmen der Optimierung eine große Anzahl an Modellvariationen benötigt, so dass die Dauer einer Einzelsimulation eine wichtige Rolle spielt und das entwickelte Verfahren nur mit dem zweidimensionalen Modell zu realisieren ist. Es lässt sich zeigen, dass für den rotationssymmetrischen Fall (z. B.  $\varphi_z = 0$ , keine Winkelabhängigkeit:  $\frac{\partial}{\partial \varphi_z} = 0$ ) die Gleichungen (4.1) gelten, wobei hier die Zylinderkoordinaten  $(r_z, \varphi_z, z)$  verwendet worden sind [KaKa08]. Durch den Vergleich der vorkommenden Materialparameter mit der allgemeinen Beschreibung für die betrachtete Kristallklasse in den Gleichungen (3.23) auf Seite 44 zeigt sich, dass alle zu bestimmenden Materialparameter auch in den durch die Rotationssymmetrie geänderten Zustandsgleichungen (4.1) enthal-

<sup>24</sup>Die Delaunay-Triangulation ist ein gebräuchliches Verfahren, um ein Gitter für eine Punktemenge zu erstellen (2D: Dreieck (namensgebend), 3D: Tetraeder). Besonders vorteilhaft an diesem Verfahren ist die optimale Maximierung der kleinsten vorkommenden Winkel, da diese Eigenschaft für die numerischen Berechnungen erwünscht ist. [Kle05]

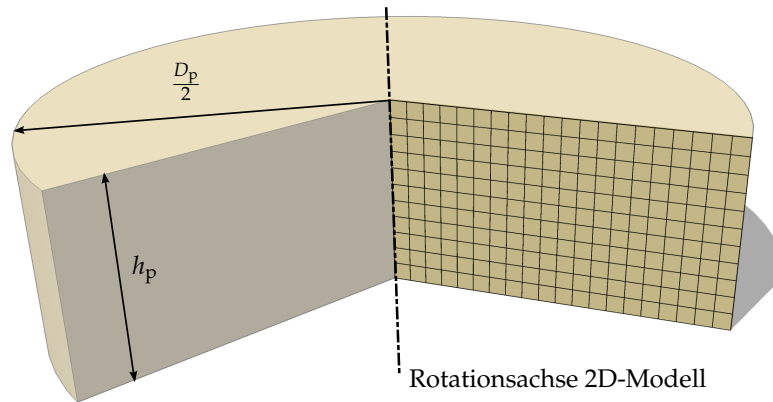
ten bleiben. Somit ist die zweidimensionale Betrachtung auch im Hinblick auf die Materialparameterbestimmung zulässig.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_{r_z r_z} \\ T_{zz} \\ T_{r_z z} \\ T_{\varphi_z \varphi_z} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \cdot & e_{31} \\ \cdot & e_{33} \\ e_{15} & \cdot \\ \cdot & e_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{r_z} \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & \cdot & c_{12}^E \\ c_{13}^E & c_{33}^E & \cdot & c_{13}^E \\ \cdot & \cdot & c_{44}^E & \cdot \\ c_{12}^E & c_{13}^E & \cdot & c_{11}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{r_z r_z} \\ S_{zz} \\ S_{r_z z} \\ S_{\varphi_z \varphi_z} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} D_{r_z} \\ D_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{r_z} \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & e_{15} & \cdot \\ e_{31} & e_{33} & \cdot & e_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{r_z r_z} \\ S_{zz} \\ S_{r_z z} \\ S_{\varphi_z \varphi_z} \end{bmatrix} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Die Feinheit des örtlichen Gitters orientiert sich bei der Diskretisierung für die FEM an der Wellenlänge der Schwingungsanteile mit der höchsten Ortsfrequenz. Diese kleinste abzubildende Wellenlänge wird mit einer Abtastrate erfasst, die als Faustregel mindestens acht bis 20 Werte je Wellenlänge betragen sollte (vgl. z. B. [SHH09]). Je größer die Abtastung, desto schneller kann das Modell berechnet werden, aber desto höher sind auch die numerischen Fehler bei der Berechnung, so dass hier immer ein Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit gefunden werden muss. Bei einer Diskretisierung mit 10 Knoten pro kleinster Wellenlänge kann von einem numerischen Fehler, der auch als numerische Dispersion bezeichnet wird, im Bereich von 3 % ausgegangen werden. Dieser reduziert sich bei Verwendung von 20 örtlichen Stützstellen auf weniger als 1 % [AWV98]. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb eine örtliche Diskretisierung von 20 Werten je kleinster Wellenlänge gewählt. Ein Beispiel einer Diskretisierung für eine Piezokeramik ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Es ist bei der Simulation von breitbandigen Signalen jedoch nicht zu verhindern, dass der Einfluss der numerischen Dispersion für deutlich größere Wellenlängen wieder an Bedeutung gewinnt (vgl. Kapitel 4.3).

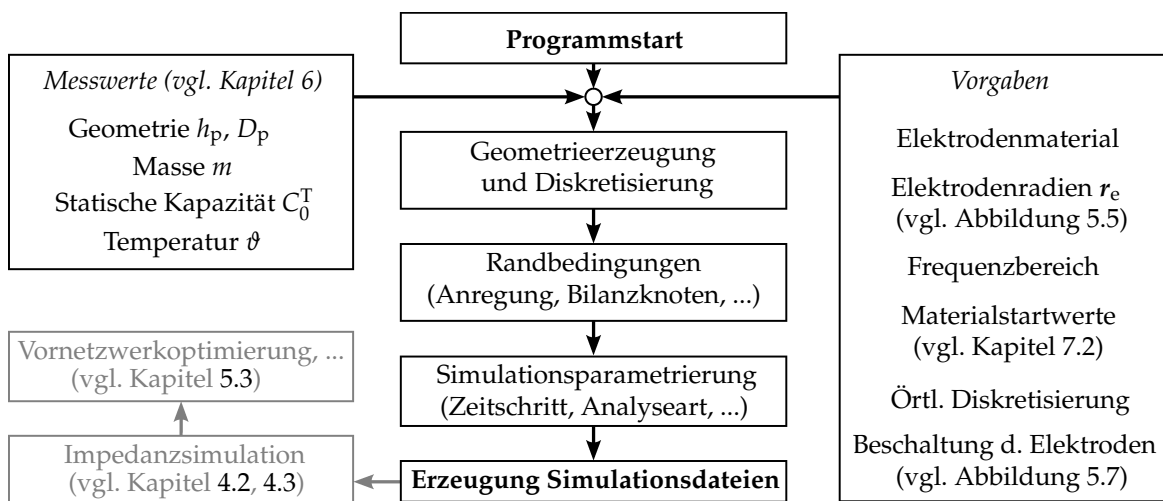
Die Differentialgleichungen, die mittels FEM gelöst werden, enthalten neben der örtlichen auch die zeitliche Abhängigkeit (vgl. Gleichungen (3.49)). Somit ist nach der örtlichen Diskretisierung erst eine semi-diskrete Formulierung erreicht und die zusätzliche zeitliche Diskretisierung führt auf das vollständig diskretisierte System von Differentialgleichungen. Nach einer üblichen Faustformel ergibt sich die zeitliche mittels eines Faktors von  $2/3$  aus der örtlichen Abtastung.

Die Auswertungen der Simulationsergebnisse und die Optimierungen werden in MATLAB<sup>®</sup> vorgenommen (vgl. Kapitel 7.1), so dass auch die Erstellung der Simulationsdateien zweckmäßig hier erfolgt. Hierzu ist im Rahmen dieser Arbeit eine



**Abbildung 4.2:** Exemplarisches FEM-Gitter für eine zweidimensionale Diskretisierung einer Piezokeramik mit  $D_p = 7,35$  mm und  $h_p = 2,05$  mm für eine Frequenz von 1 MHz und 20 Knoten pro Wellenlänge. Angedeutet ist die Lage des 2D-Schnittes in der dreidimensionalen rotationssymmetrischen Piezokeramik.

MATLAB<sup>®</sup>-Toolbox entstanden, die alle für die Simulation nötigen Dateien erzeugt und so vollständig in den automatisierten Ablauf eingebunden werden kann [Un-He11; Unv06]. Sowohl die Erzeugung von zwei- als auch von dreidimensionalen Geometrien ist hierbei berücksichtigt, auch wenn im Rahmen der Materialparameterbestimmung aufgrund der erwähnten Rechenzeitproblematik nur zweidimensionale Modelle zum Einsatz kommen. Die Schritte zur Erzeugung der Simulationsdateien und die benötigten Eingangsgrößen sind in Abbildung 4.3 veranschaulicht. Die hier angegebenen Abbildungen und Kapitel enthalten weitere Details zu den jeweiligen Punkten.



**Abbildung 4.3:** Schritte zur Erzeugung der Dateien für die FEM-Simulation mit den berücksichtigten Messwerten und den benötigten Vorgaben.

Für die eigentliche numerische Berechnung der FEM wird das kommerzielle Software-Paket CAPA genutzt, welches speziell für die Berechnung von gekoppelten elektro-

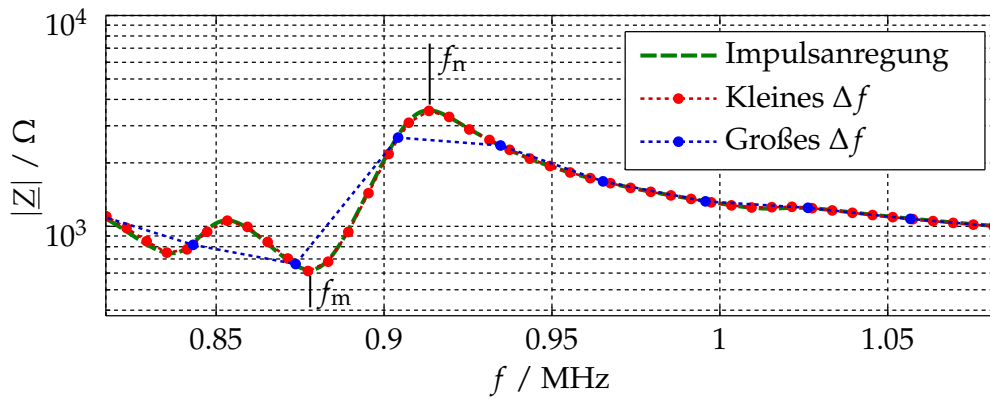
mechanisch-akustischen Problemstellungen entwickelt wurde [Wis16]<sup>25</sup>. Mit ihm sind harmonische, transiente und Eigenfrequenzanalysen möglich, wobei im Rahmen dieser Arbeit die ersten beiden genutzt werden, um die Impedanzverläufe für den Vergleich mit einer Messung zu simulieren. Diese beiden Vorgehensweisen sind in den Kapiteln 4.2 und 4.3 beschrieben, wobei zunächst die Ermittlung der komplexen Impedanz aus der harmonischen Analyse betrachtet wird und im zweiten Unterkapitel die Bestimmung mittels einer transienten Analyse im Vordergrund steht.

## 4.2 Impedanzverlauf durch harmonische Analyse

Bei der harmonischen Analyse wird die komplexwertige Impedanz im interessierenden Frequenzbereich für diskrete Stützstellen bestimmt. Für jede dieser Stützstellen  $f_i$  wird eine eigene harmonische Simulation durchgeführt und aus dem Ergebnis die Impedanz  $\underline{Z}(f_i)$  berechnet und gespeichert. Vorteilhaft an dieser Vorgehensweise ist, dass das örtliche Gitter optimal auf die jeweils untersuchte Frequenz angepasst werden kann und somit die numerischen Fehler minimiert werden. Zudem können Materialparameter (beispielsweise die Rayleigh-Dämpfungsparameter) für jede Simulation separat eingestellt und so an frequenzabhängige Verläufe angenähert werden. Diesen Vorteilen gegenüber steht die hohe Rechenzeit, die mit steigender Anzahl der Stützstellen zunimmt. Um die teilweise schmalen Resonanzstellen abbilden zu können, sind hier bei den im Rahmen dieser Arbeit üblicherweise betrachteten Frequenzbereichen bis zu einigen hundert Stützstellen und somit Einzelsimulationen notwendig. Trotz der hohen Anzahl lassen sich beispielsweise Minimal- und Maximalfrequenzen  $f_m$  und  $f_n$  (vgl. Anhang A.1, Seite 123) für Resonanzstellen aufgrund einer vergleichsweise geringen Frequenzauflösung nur ungenau bestimmen. Zur Verdeutlichung ist hierzu in Abbildung 4.4 ein Ausschnitt zweier mittels harmonischer Analyse gerechneter Simulationsreihen im Bereich der Radialresonanz dargestellt. In dem gröber aufgelösten Verlauf (großes  $\Delta f$ ) kann die Resonanzstelle nur unzureichend genau ermittelt werden.

Bei der harmonischen Simulation wird für eine feste Kreisfrequenz  $\omega_i$  der Potentialverlauf  $\phi_E$  einer Elektrode als Antwort auf eine Ladungsanregung  $q_e = \hat{q}_e e^{j\omega_i t}$  in komplexwertiger Form getrennt nach Real- und Imaginärteil gespeichert. Die Impedanz wird mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung über den Quotienten aus

<sup>25</sup>Die Referenz der Befehle und Formatierungen in den Simulationsdateien für die Berechnungen mittels CAPA ist in [Lan02] zusammengestellt.



**Abbildung 4.4:** Vergleich eines Ausschnitts zweier mittels harmonischer Analyse gerechneter Simulationsreihen zur Ermittlung des Betrages der Impedanz im Bereich einer Resonanzstelle. Der höher aufgelöste Verlauf (kleines  $\Delta f$ , rot) weist gegenüber dem niedriger aufgelösten (blau) die fünffache Anzahl an Frequenzstützstellen auf. Zusätzlich ist der Betrag einer nach dem Impulsverfahren (vgl. Kapitel 4.3) bestimmten Impedanz dargestellt (grün).

Spannung und Strom ermittelt, der wiederum aus dem anregenden harmonischen Verlauf der Ladung nach Gleichung (4.2) bestimmt werden kann.

$$\underline{i} = \frac{d}{dt} \left( \hat{q}_e e^{j\omega_i t} \right) = j\omega_i \cdot \hat{q}_e e^{j\omega_i t} \quad \text{mit} \quad \omega_i = 2\pi f_i \quad (4.2)$$

Somit ergibt sich für die Impedanzermittlung für die Frequenzstützstelle  $i$  die Gleichung (4.3), wobei der Zähler das Ergebnis einer harmonischen FEM-Simulation darstellt.

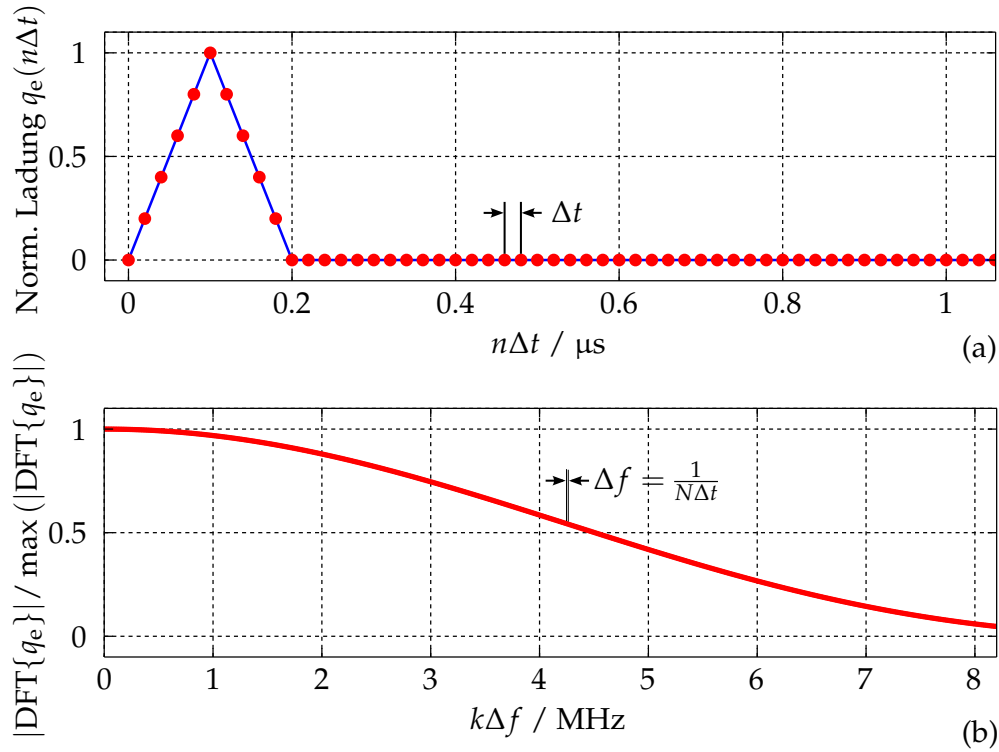
$$\underline{Z}(f_i) = \frac{\text{Re}\{\underline{\phi}_E\} + j\text{Im}\{\underline{\phi}_E\}}{j2\pi f_i \hat{q}_e} \quad (4.3)$$

### 4.3 Transiente Bestimmung mittels Impulsanregung

Eine alternative Methode zur Bestimmung der Impedanz stellt die systemtheoretische Ermittlung über eine Impulsantwort dar. Hierbei wird ein diskreter Ladungsimpuls als Eingangsfunktion für die FEM-Simulation gewählt und die transiente Antwort ausgewertet. Somit kommt dieses Verfahren mit nur einer transienten Simulation aus, so dass ein großer Rechenzeitvorteil gegenüber der in Kapitel 4.2 beschriebenen Vorgehensweise entsteht. Der größte Nachteil hingegen ist, dass das der Rechnung zugrunde liegende Gitter der örtlichen Diskretisierung nur für einen begrenzten Frequenzbereich der geforderten Abtastung von 20 Knoten pro Wellenlänge entsprechen kann. Wird jedoch ein beschränkter Frequenzbereich betrachtet, lässt sich



der auf diese Weise ermittelte Impedanzverlauf als Näherung des Verlaufes aus der harmonischen Analyse verwenden.



**Abbildung 4.5:** Diskreter normierter Ladungsimpuls  $q_e(n\Delta t)$  für die Dreieckimpulsanregung im Rahmen der transienten FEM (a) und der zugehörige normierte Betrag seines Frequenzspektrums im relevanten Frequenzbereich (b).

In der Systemtheorie wird zur Ermittlung der Impulsantwort, die auch Gewichtsfunktion genannt wird, ein idealer Dirac-Impuls verwendet. Dieser hat ein unendlich breites Frequenzspektrum. Die ebenfalls mögliche Analyse über eine Sprungantwort wird für die Simulation nicht gewählt, da diese zu deutlich höherem Speicherbedarf führt [Ler90]. Für die zeitlich diskretisierte Berechnung innerhalb der FEM wird der Dirac-Impuls durch einen diskreten Dreieckimpuls angenähert, der zu einem hinreichend breiten Frequenzspektrum führt, so dass der gesamte interessierende Frequenzbereich abgedeckt wird [OpSc95]. Gleichzeitig werden zu hohe Frequenzanteile vermieden, die aufgrund der ungünstigen räumlichen Abtastung zu numerischen Problemen führen würden. Der im Rahmen dieser Arbeit genutzte diskrete Dreieckimpuls ist zusammen mit dem Betrag seines Frequenzspektrums in Abbildung 4.5 dargestellt. Durch eine hohe Anzahl an zeitlichen Abtastwerten und damit einer vergleichsweise langen simulierten Zeit wird hier eine kleine Frequenzauflösung erreicht (vgl.  $\Delta t$  und  $\Delta f$  in Abbildung 4.5). Gleichzeitig wird hierdurch sichergestellt,

dass auch bei variierender Dämpfung ein ausreichendes Abklingen des Potentials  $\phi_E$  zur Anwendung des Impulsverfahrens gewährleistet ist<sup>26</sup>.

Die Impedanz lässt sich als Quotient der Spektren aus Spannung und Strom nach Gleichung (4.4) bestimmen. Hierbei ist  $N$  die Anzahl der Abtastwerte und  $\Delta t$  der in Abbildung 4.5 dargestellte Simulationszeitschritt.

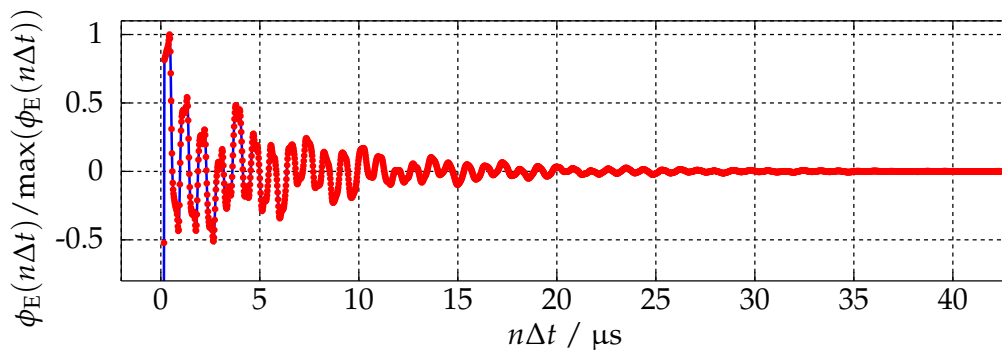
$$\underline{Z}(k\Delta f) = \frac{\text{DFT}\{u(n\Delta t)\}}{\text{DFT}\{i(n\Delta t)\}} \quad \forall \quad n, k \in \{0, N-1\} \quad (4.4)$$

Die Spannung  $u(n\Delta t)$  entspricht hierbei direkt dem als Impulsantwort auf den Ladungsimpuls  $q_e(n\Delta t)$  simulierten elektrischen Potential  $\phi_E(n\Delta t)$ , da das Bezugspotential (Potential der Masseelektrode) auf Null gesetzt ist. Der Strom kann als zeitliche Ableitung (hier als diskreter Differenzenquotient) der Ladung entsprechend Gleichung (4.5) ausgedrückt werden.

$$i(n\Delta t) = \frac{\Delta q_e(n\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \underline{i}(k\Delta f) = \text{DFT} \left\{ \frac{\Delta q_e(n\Delta t)}{\Delta t} \right\} \quad (4.5)$$

Hiermit ergibt sich die in Gleichung (4.6) angegebene Darstellung im Frequenzbereich zur Bestimmung des gesuchten Verlaufes der komplexwertigen frequenzabhängigen Impedanz  $\underline{Z}(k\Delta f)$  aus dem simulierten elektrischen Potential  $\phi_E(n\Delta t)$ .

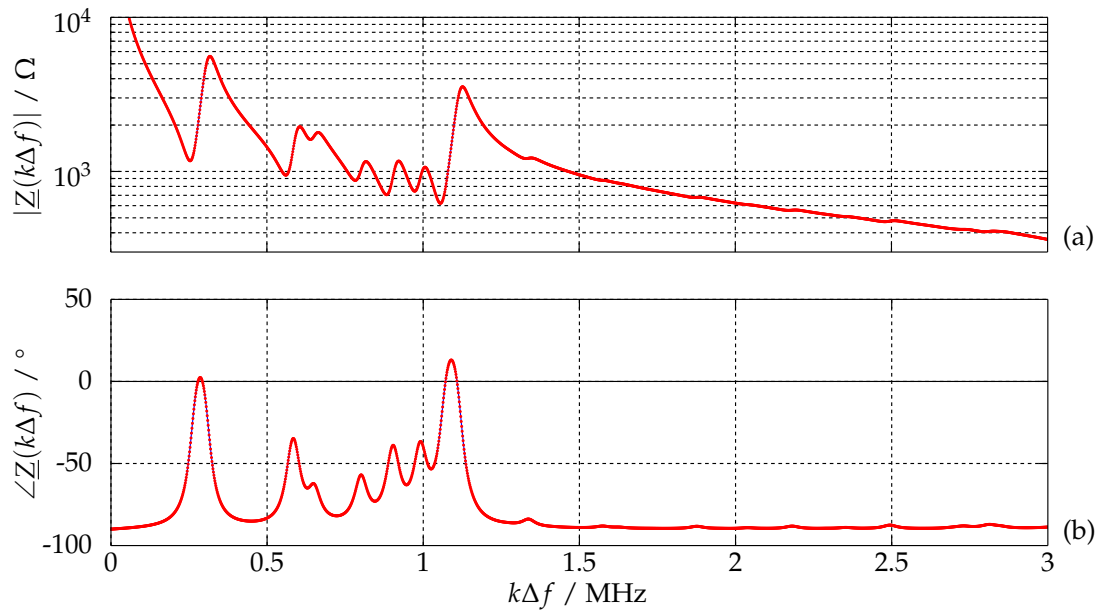
$$\underline{Z}(k\Delta f) = \frac{\text{DFT}\{\phi_E(n\Delta t)\}}{\text{DFT}\left\{\frac{\Delta q_e(n\Delta t)}{\Delta t}\right\}} \quad (4.6)$$



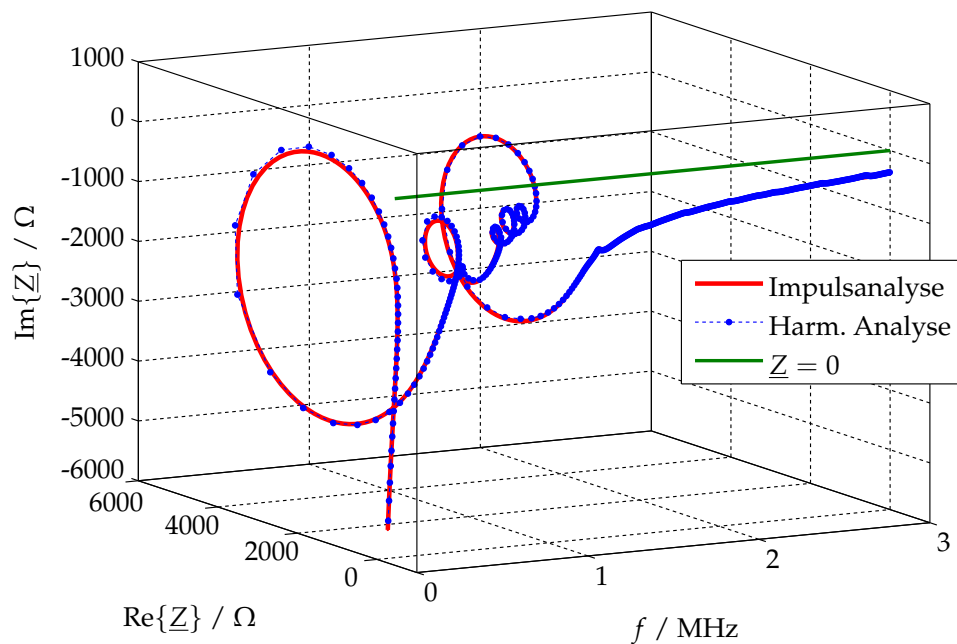
**Abbildung 4.6:** Simulierte diskrete Impulsantwort  $\phi_E(n\Delta t)$  auf den Ladungsimpuls  $q_e(n\Delta t)$  für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden.

<sup>26</sup>Das Potential bildet in diesem Fall ein Energiesignal und beinhaltet eine beschränkte Gesamtsignalenergie [OhLu10]. Die systemtheoretische Betrachtung ist damit zulässig.

In Abbildung 4.6 ist die simulierte diskrete Impulsantwort  $\phi_E(n\Delta t)$  auf den Ladungsdreieckimpuls  $q_e(n\Delta t)$  für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden dargestellt. Die sich daraus ergebende Impedanz nach Gleichung (4.6) getrennt nach Betrag und Phase ist in Abbildung 4.7 visualisiert.



**Abbildung 4.7:** Mittels Impulsantwort berechneter diskreter Impedanzverlauf  $\underline{Z}(k\Delta f)$  getrennt nach Betrag (a) und Phase (b).



**Abbildung 4.8:** Vergleich der beiden Verfahren zur Simulation des Impedanzverlaufes anhand einer dreidimensionalen Ortskurve  $\underline{Z}(f)$ .

Eine alternative Darstellung eines komplexwertigen Impedanzverlaufes ist in Abbildung 4.8 zu sehen, bei der sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil in Abhängigkeit von der Frequenz als dreidimensionale Ortskurve dargestellt sind.

Hierbei lassen sich die Abweichungen zwischen zwei Impedanzverläufen in einem Diagramm beurteilen. An dieser Stelle ist diese Darstellungsvariante gewählt, um die beiden Verfahren der vorangegangenen Kapitel zu vergleichen. Die Ermittlung mittels Impulsanregung ist aufgrund der erwähnten Einschränkungen nicht in der Lage, die mittels harmonischer Analyse ermittelten Impedanzen exakt für einen großen Frequenzbereich abzubilden, jedoch kann sie aufgrund der großen Vorteile für einen eingeschränkten Frequenzbereich als gute Näherung genutzt werden.

### **Verwendung der zwei Verfahren zur simulativen Impedanzermittlung**

Die simulative Bestimmung eines komplexwertigen Impedanzverlaufes  $\underline{Z}$  wird im Rahmen dieser Arbeit an verschiedenen Stellen benötigt. Ein wichtiger Anwendungsfall ist die Ermittlung und anschließende Optimierung der Sensitivität des Impedanzverlaufes auf die einzelnen Materialparameter (vgl. Kapitel 5.1 und 5.5). Da hier eine erhöhte Sensitivität über den gesamten betrachteten Frequenzbereich angestrebt wird, ist eine punktweise Ermittlung mittels der harmonischen Analyse (vgl. Kapitel 4.2) für diese Anwendung aufgrund der hohen Rechenzeit nicht zielführend. Die Ermittlung über die Impulsanalyse ist zwar nicht in der Lage, den Verlauf über den gesamten Frequenzbereich exakt wiederzugeben, aber für eine Analyse der Sensitivität und deren Optimierung ist eine systematische Abweichung aufgrund der beschriebenen Abweichung bei der örtlichen Diskretisierung tolerierbar.

Bei der eigentlichen Materialparameterbestimmung hingegen kommt es auf eine möglichst exakte Ermittlung der Impedanz an, um einen quantitativen Abgleich zwischen Simulation und Messung vornehmen zu können. Für das Zielkriterium der Optimierung im Rahmen der Materialparameterbestimmung ist jedoch kein fein aufgelöster Verlauf der Impedanz über der Frequenz erforderlich. Es reicht hier eine kleinere Anzahl von harmonischen Analysen für ausgewählte Frequenzstützstellen aus, um Kenngrößen für die Definition des Zielkriteriums zu ermitteln. Wird alternativ nur ein Frequenzarbeitspunkt betrachtet, kann hier ebenfalls die Ermittlung mittels Impulsanregung genutzt werden (vgl. Abbildung 4.8).

Beide in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren werden deshalb im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt, um das Ziel der verbesserten Materialparameterbestimmung durch die erhöhte Sensitivität mittels segmentierter Elektroden zu erreichen.

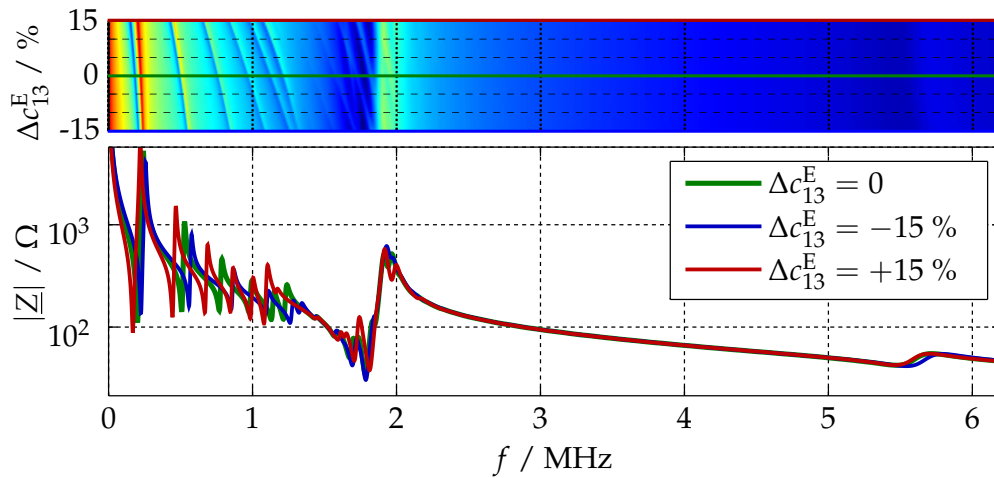
## 5 Möglichkeiten zur Sensitivitätssteigerung

Eine geringe Sensitivität des Impedanzverlaufes auf einzelne Materialparameter für eine symmetrische Piezokeramik ist bereits bei der Analyse des Standes der Technik als eine der größten Einschränkungen der inversen Verfahren identifiziert worden (vgl. Kapitel 2.2). Im folgenden Unterkapitel wird diese Sensitivität grafisch für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden für alle Materialparameter ermittelt und für ausgewählte Größen dargestellt. Eine tabellarische Übersicht für verschiedene Durchmesser-Dicken-Verhältnisse der Piezokeramik fasst die Ergebnisse zusammen und dient als Motivation für die in den Unterkapiteln 5.2 und 5.3 vorgestellten Modifikationen. Ein für die Optimierung geeignetes quantitatives Sensitivitätsmaß wird im Unterkapitel 5.4 definiert und im letzten Unterkapitel 5.5 dieses Kapitels genutzt, um eine optimierte Elektrodentopologie zu ermitteln.

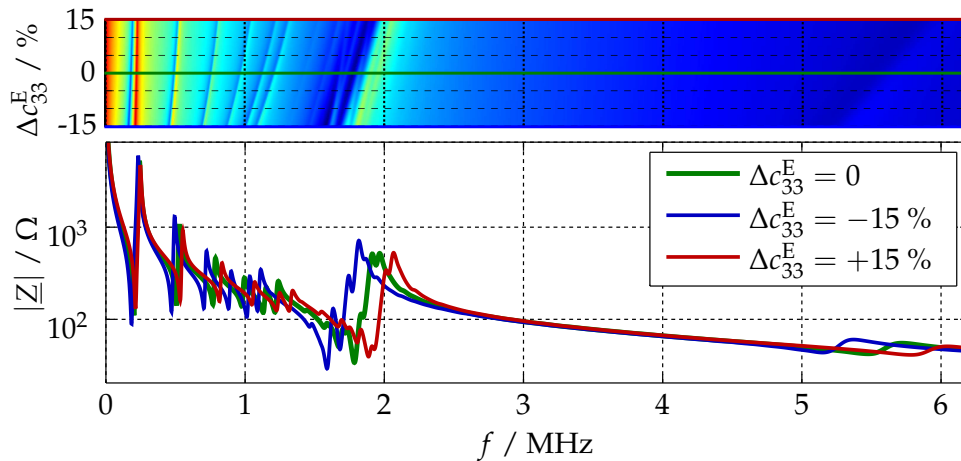
### 5.1 Sensitivitätsanalyse für vollflächige Elektroden

In diesem Kapitel wird die Sensitivität des Impedanzverlaufes auf einzelne Materialparameter erläutert. Dieser Einfluss lässt sich qualitativ anschaulich anhand einer ähnlichen Darstellungsweise zeigen, wie sie auch in Abbildung 2.3 auf Seite 21 verwendet ist. Um die in dem Kapitel 5.2 beschriebene Modifikation der Elektrodentopologie zur Steigerung der Sensitivität zu motivieren, ist in den Abbildungen 5.1 bis 5.4 zunächst der Einfluss der Materialparametervariation für eine Piezokeramik mit der Höhe  $h_p = 1 \text{ mm}$  und einem Durchmesser von  $D_p = 10 \text{ mm}$  mit vollflächigen Elektroden für eine Auswahl von vier Größen dargestellt. Hierfür ist jeweils ein Materialparameter im Bereich  $\pm 15 \%$  des Ausgangswertes in 1 %-Schritten variiert. Es sei darauf hingewiesen, dass die hier gewählte einheitliche Variation von  $\pm 15 \%$  nicht den tatsächlichen Schwankungsbreiten der Materialparameter entspricht. Einige können durch Messungen im Rahmen der Startwertermittlung bereits genauer bestimmt werden (vgl. Kapitel 7.2) und andere weisen eine höhere Unsicherheit auf.

Um jedoch den Einfluss einer Variation auf den Impedanzverlauf untereinander vergleichen zu können, ist hier ein einheitlicher Bereich der Variation gewählt.

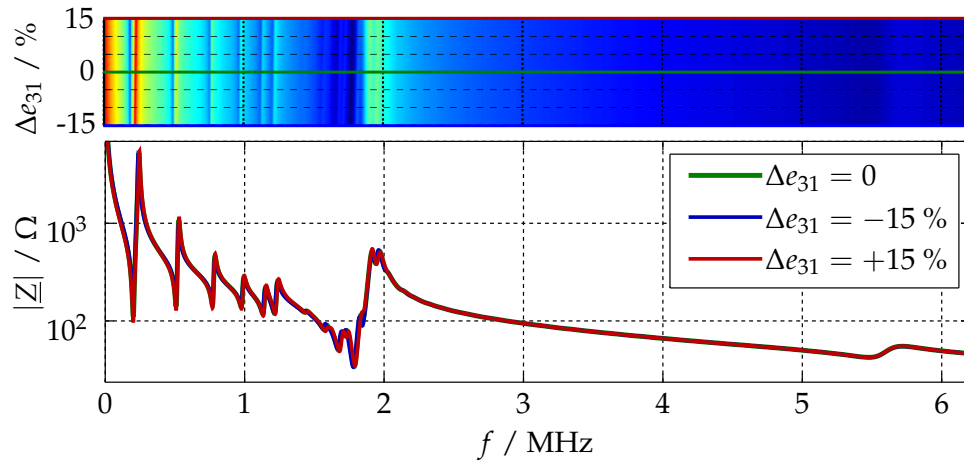


**Abbildung 5.1:** Sensitivität des Betrages der Impedanz auf eine Variation der Steifigkeitskonstante  $c_{13}^E$  im Bereich  $\pm 15\%$ . In der oberen Teilabbildung ist die gesamte Variation dargestellt und in der unteren sind die beiden Verläufe für eine Variation von  $-15\%$  (blau) und  $+15\%$  (rot) zusammen mit dem Ausgangsdatensatz für  $\Delta c_{13}^E = 0$  (grün) eingezeichnet.

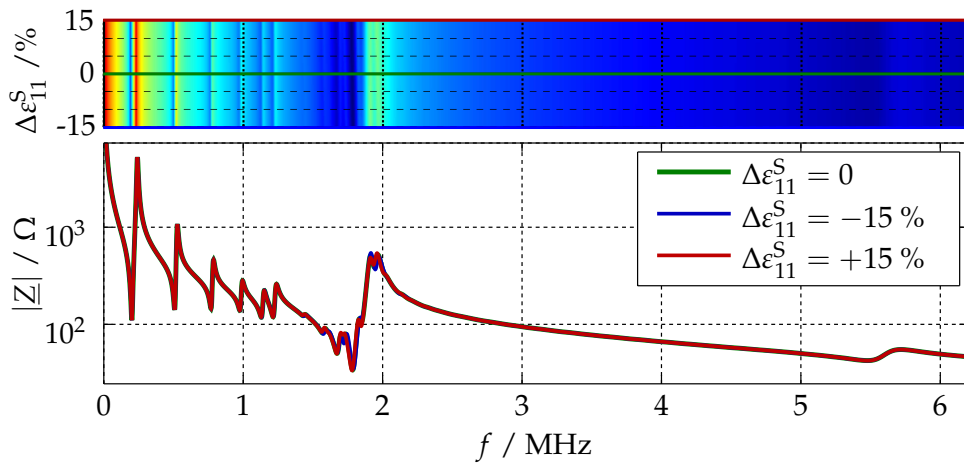


**Abbildung 5.2:** Sensitivität des Betrages der Impedanz auf eine Variation der Steifigkeitskonstante  $c_{33}^E$  im Bereich  $\pm 15\%$ .

Bei den Variationen der beiden Steifigkeitskonstanten  $c_{13}^E$  und  $c_{33}^E$  in den Abbildungen 5.1 und 5.2 ist ein Einfluss über den gesamten betrachteten Frequenzbereich zu beobachten. Bei genauer Betrachtung sind dennoch einige Unterschiede erkennbar. So ist der Einfluss im Bereich der Dickenresonanzstelle (um 2 MHz) und deren erster Oberschwingung (zwischen 5 und 6 MHz) für die Variation von  $c_{33}^E$  ausgeprägter und eine positive Änderung führt jeweils zu entgegengesetzten Verschiebungen im Bereich der Radialresonanzen (unterhalb 1,5 MHz).



**Abbildung 5.3:** Sensitivität des Betrages der Impedanz auf eine Variation der piezoelektrischen Konstante  $e_{31}$  im Bereich  $\pm 15\%$ .



**Abbildung 5.4:** Sensitivität des Betrages der Impedanz auf eine Variation der Permittivität  $\epsilon_{11}^S$  im Bereich  $\pm 15\%$ .

Demgegenüber sind die Einflüsse der beiden in den Abbildungen 5.3 und 5.4 dargestellten Materialparameter  $e_{31}$  und  $\epsilon_{11}^S$  geringer. Trotzdem sind auch hier kleinere Frequenzbereiche mit beeinflusstem Betrag der Impedanz erkennbar. Ein Grund für diese stark unterschiedliche Beeinflussung ist die hohe Symmetrie der betrachteten Piezokeramik (vgl. Kapitel 3.4).

Durch Betrachtung aller Materialparameter sind die Sensitivitätsbewertungen in den Tabellen 5.1 und 5.2 abgeleitet, wobei hierfür auch eine Variation des Verhältnisses  $\frac{D_p}{h_p}$  berücksichtigt ist (vgl. auch Abbildung 2.2). Als zweckmäßig hat sich zudem die getrennte Bewertung von Radial- und Dickenresonanzbereich herausgestellt, da diese Bereiche oft unterschiedlich stark von variierten Materialparametern beeinflusst werden. Der betrachtete Frequenzbereich schließt auch die erste Oberschwingung der

Dickenresonanz ein.<sup>27</sup> In der Tabelle 5.1 ist die ungenügende Sensitivität des Impedanzverlaufes auf bestimmte Materialparameter zu erkennen (vgl. auch Kapitel 3.4). Diese führt bei der Optimierung im Rahmen einer Materialparameterbestimmung zu Schwierigkeiten und stellt für die heute eingesetzten Verfahren eine der wichtigsten Einschränkungen dar (vgl. Kapitel 2.2).

**Tabelle 5.1:** Sensitivität des Impedanzverlaufes auf Variation einzelner Materialparameter für verschiedene Verhältnisse von  $D_p/h_p$  im **Radialresonanzbereich**. „+“ kennzeichnet einen deutlichen, „-“ einen geringen und „Ø“ einen nicht sichtbaren Einfluss. (grün: insgesamt hinreichend gut bestimmbar, rot: nicht hinreichende Sensitivität über den gesamten Frequenzbereich).

$\frac{D_p}{h_p}$	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{33}^E$	$c_{44}^E$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$	$\alpha_M$	$\alpha_K$
3	+	-	+	+	Ø	-	-	Ø	Ø	-	-	-
10	+	Ø	+	+	Ø	-	-	Ø	Ø	+	-	-
25	+	Ø	+	+	Ø	Ø	-	Ø	Ø	+	-	-

**Tabelle 5.2:** Sensitivität des Impedanzverlaufes auf Variation einzelner Materialparameter im **Dickenresonanzbereich** (Legende vgl. Tabelle 5.1).

$\frac{D_p}{h_p}$	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{33}^E$	$c_{44}^E$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$	$\alpha_M$	$\alpha_K$
3	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	Ø	-
10	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	Ø	-
25	-	Ø	-	+	-	Ø	+	Ø	Ø	+	Ø	-

Soll die Sensitivität quantitativ bewertet und verbessert werden, reicht die bisher gewählte grafische Auswertung nicht mehr aus und es muss ein geeignetes Sensitivitätsmaß definiert werden. Das im Rahmen dieser Arbeit hergeleitet wird in Kapitel 5.4 beschrieben und im Kapitel 5.5 genutzt, um die Optimierung der Elektrodentopologie zu bewerten. Es sei erwähnt, dass die gegenseitige Beeinflussung der Parameter an dieser Stelle aufgrund der jeweiligen Änderung nur eines Materialpa-

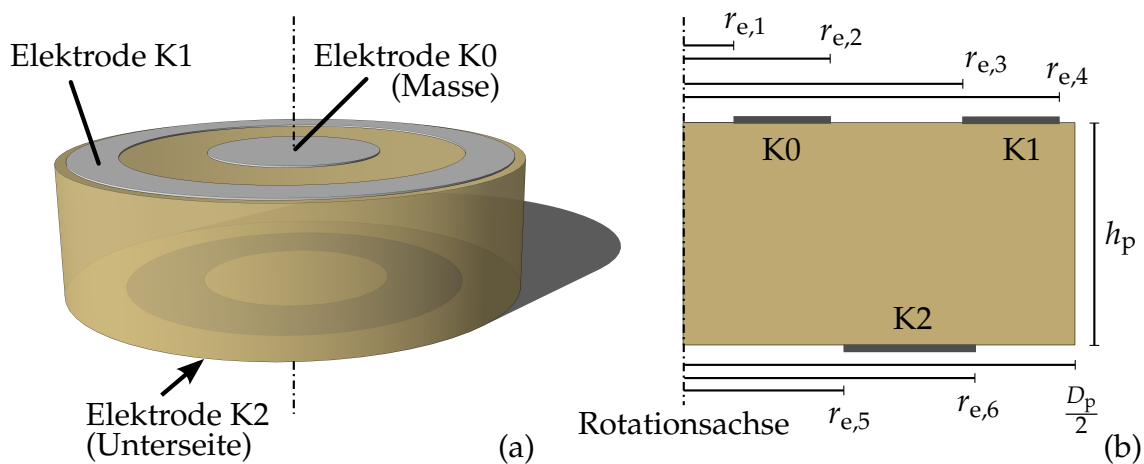
<sup>27</sup>Die umfangreichen Untersuchungen bestätigen größtenteils die wenigen in der Literatur zu findenden Ergebnisse, es sind jedoch auch einige Materialparameter mit einem abweichenden Einfluss vorhanden [KyLu02; RWS09; RRH11]. Ein quantitativer Vergleich ist aufgrund der unterschiedlichen Verfahren zur Beurteilung des Einflusses an dieser Stelle nicht möglich.



rameters unberücksichtigt bleibt, später bei der Optimierung aber in die Bewertung einfließt.

## 5.2 Sensitivitätssteigerung durch Anpassung der Elektrodentopologie

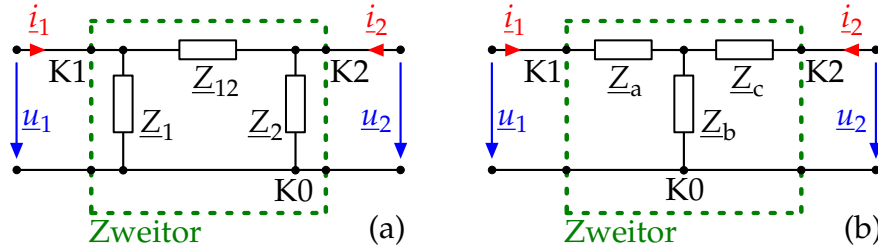
Für die hier betrachteten Optimierungsaufgaben wird üblicherweise eine hohe Anzahl an Simulationen benötigt. Die Simulationen im Rahmen der Materialparameterbestimmung müssen die Auswirkungen von mindestens zehn unterschiedlichen Parametern erfassen und es ist eine entsprechend hohe Anzahl an Einzelsimulationen nötig. Diese können mit zurzeit verfügbarer Rechentechnik nicht in vertretbarer Zeit mit dreidimensionalen Modellen simuliert werden und müssen auf die Verwendung der in Kapitel 4.1 beschriebenen rotationssymmetrischen zweidimensionalen FEM-Modelle beschränkt werden. Hierdurch bedingt ist auch eine Einschränkung auf Materialien, die eine homogene Anisotropie aufweisen. Eine verbleibende Möglichkeit, die hohe Symmetrie trotz dieser Einschränkung zu reduzieren, ist die Verwendung von segmentierten Elektroden [KBR13; URH13; KJB15]. Durch diese veränderte Elektrodentopologie werden Komponenten des elektrischen Feldes innerhalb der Piezokeramik ermöglicht, die nicht nur in der 3-Richtung (vgl. Anhang A.2) orientiert sind. Eine Realisierung, die mit der geforderten Rotationssymmetrie vereinbar ist, ist die Verwendung von Ringelektroden. Eine Anordnung für drei Elektroden



**Abbildung 5.5:** (a) Beispielanordnung dreier Elektroden für eine Piezokeramikscheibe mit den Elektrodenbezeichnungen in der dreidimensionalen Ansicht (mit  $r_{e,1} = 0$ ) und (b) der Kennzeichnung aller geometrischen Abmessungen.

ist in Abbildung 5.5 (a) dargestellt. Dabei stellt die Elektrode K0 die Masselektrode dar und die beiden Elektroden K1 und K2 werden für die Anregung mittels

einer elektrischen Ladung verwendet. Zur Steigerung der Sensitivität (vgl. Kapitel 5.4) sind die in der Abbildung 5.5 (b) angegebenen Abmessungen der Elektroden  $r_e = (r_{e,1}; r_{e,2}; r_{e,3}; r_{e,4}; r_{e,5}; r_{e,6})$  im Modell als variabel vorgesehen (vgl. Kapitel 5.5).



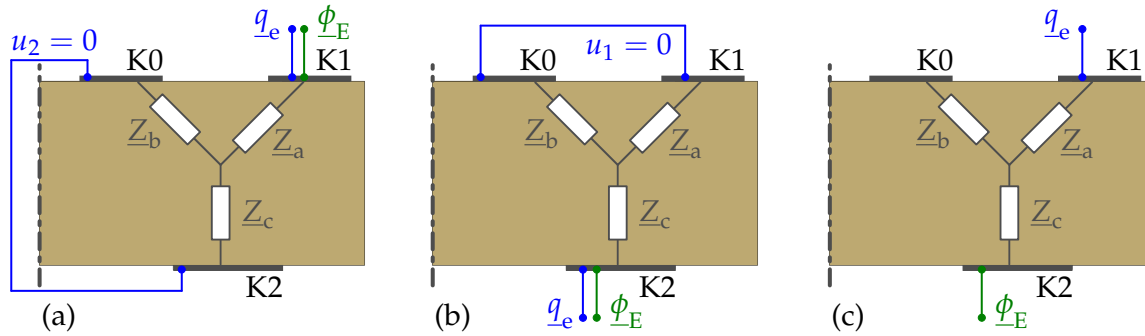
**Abbildung 5.6:** Zweitorersatzmodell einer Piezokeramik als (a)  $\pi$ -Netzwerk (Dreieck-Schaltung) und als äquivalentes (b) T-Netzwerk (Stern-Schaltung).

Für die mathematische Beschreibung in diesem Kapitel wird die Piezokeramik als Zweitor betrachtet. Hierbei entspricht das Ersatzschaltbild einem  $\pi$ -Netzwerk mit den Ersatzgrößen  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_{12}$  nach Abbildung 5.6 (a). Für Teile der Berechnungen ist eine äquivalente Darstellung als T-Netzwerk (vgl. Abbildung 5.6 (b)) mit den Ersatzgrößen  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$  und  $\underline{Z}_c$  sinnvoll. Die Umrechnung wird als Stern-Dreieck-Transformation bezeichnet (vgl. [KoSc04]) und ist für den hier verwendeten Fall komplexwertiger Impedanzen in Tabelle 5.3 angegeben.

**Tabelle 5.3:** Die Stern-Dreieck-Transformation nach [KoSc04] erweitert auf komplexwertige Impedanzen.

Stern-Dreieck-Transformation	Dreieck-Stern-Transformation
$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b}{\underline{Z}_c}$	$\underline{Z}_a = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_{12}) \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12})^{-1}$
$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c}{\underline{Z}_a}$	$\underline{Z}_b = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12})^{-1}$
$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_c}{\underline{Z}_b}$	$\underline{Z}_c = (\underline{Z}_2 \underline{Z}_{12}) \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12})^{-1}$

Die Betrachtung der Piezokeramik als Zweitor ermöglicht die Beschreibung durch die im Folgenden definierten charakteristischen Größen. Es handelt sich dabei um die Zweitorparameter Eingangs- und Ausgangskurzschlussadmittanz ( $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{22}$ ) und die vorwärts- und rückwärtsgerichteten Leerlauf-Kernimpedanz ( $\underline{Z}_{21}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ). Letztere sind aufgrund der Umkehrbarkeit des Zweitores gleich ( $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$ ), sodass die drei in Tabelle 5.4 zusammengefassten komplexwertigen Größen zur Beschreibung des Zweitores übrig bleiben. Es ist jeweils die Definition der Größe zusammen mit den konkreten Berechnungen für die beiden in Abbildung 5.6 gezeigten Ersatzschaltbilder angegeben.



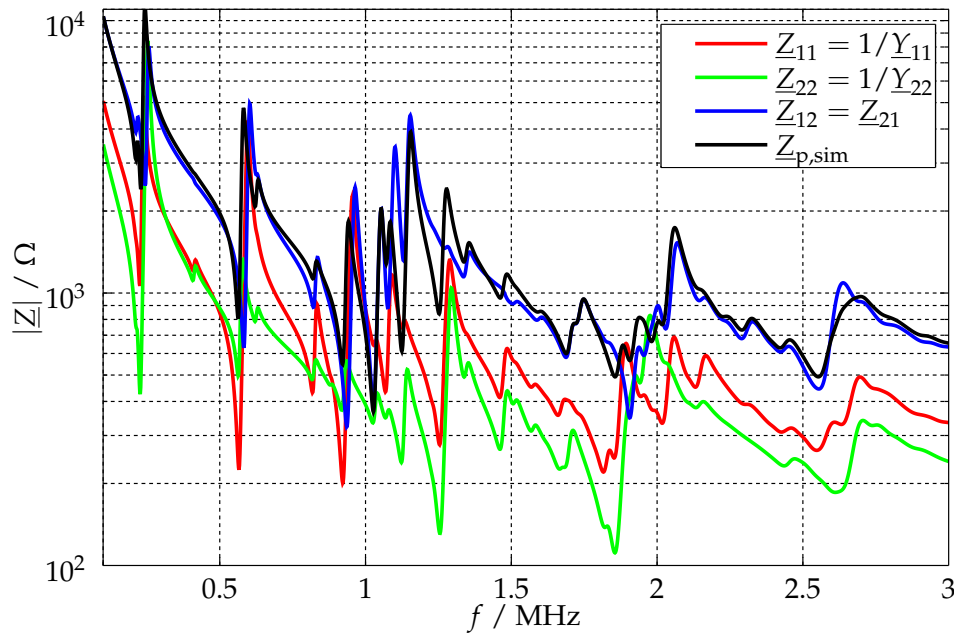
**Abbildung 5.7:** Nachbildung der drei Definitionen zur Ermittlung der Zweitordparameter in der FEM-Simulation mit (a) der Eingangskurzschlussadmittanz  $\underline{Y}_{11}$ , (b) der Ausgangskurzschlussadmittanz  $\underline{Y}_{22}$  und (c) der Leerlauf-Kernimpedanz  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$  mit freier Elektrode K0. Die jeweilige Eingangsgröße  $q_e$  (elektrische Ladung) und die jeweilige Ausgangsgröße  $\phi_E$  (elektrisches Potential) sind gekennzeichnet.

**Tabelle 5.4:** Zweitordparameter zur Beschreibung einer Piezokeramik als  $\pi$ - oder T-Netzwerk.

	Eingangskurz- schlussadmittanz	Ausgangskurz- schlussadmittanz	Leerlauf-Kern- impedanz
Definition	$\underline{Y}_{11} = \frac{i_1}{u_1} \Big _{u_2=0}$	$\underline{Y}_{22} = \frac{i_2}{u_2} \Big _{u_1=0}$	$\underline{Z}_{21} = \frac{u_2}{i_1} \Big _{i_2=0} (= \underline{Z}_{12})$
Stern- schaltung	$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c}{\underline{Z}_a \underline{Z}_b + \underline{Z}_a \underline{Z}_c + \underline{Z}_b \underline{Z}_c}$	$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b}{\underline{Z}_a \underline{Z}_b + \underline{Z}_a \underline{Z}_c + \underline{Z}_b \underline{Z}_c}$	$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_b$
Dreieck- schaltung	$\underline{Y}_{11} = \underline{Z}_1^{-1} + \underline{Z}_{12}^{-1}$	$\underline{Y}_{22} = \underline{Z}_2^{-1} + \underline{Z}_{12}^{-1}$	$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12}}$

Vorteilhaft an dieser Beschreibungsweise ist die Möglichkeit der Nachbildung der drei Fälle der Elektrodenbeschaltung in der FEM-Simulation zur Ermittlung der Impedanz der Piezokeramik, wie sie in den Definitionen in der Tabelle 5.4 enthalten sind. Diese drei Fälle der Simulation sind in der Abbildung 5.7 grafisch veranschaulicht. In der Simulation wird die Anregung über die Vorgabe des elektrischen Potentials realisiert (vgl. Kapitel 4). Die sich in der Simulation ergebenden Impedanzverläufe sind als Beträge in Abbildung 5.8 dargestellt, wobei als Beispiel eine Piezokeramik mit  $D_p = 10$  mm,  $h_p = 1$  mm und  $r_e = (0; 1,66; 3,33; 5; 1,66; 3,33)$  mm gewählt ist.

Die simulierten Verläufe für  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{22}$  und  $\underline{Z}_{12}$  sollen zusammen mit den in Tabelle 5.4 für die Sternschaltung angegebenen Gleichungen genutzt werden, um die Ersatzimpedanzen  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$  und  $\underline{Z}_c$  der in Abbildung 5.6 (b) angegebenen Ersatzschaltung zu ermitteln. Die Impedanz  $\underline{Z}_b$  ist dabei direkt über den Zusammenhang  $\underline{Z}_b = \underline{Z}_{12}$  bekannt. Das verbleibende Gleichungssystem führt dabei auf die Lösungen aus den



**Abbildung 5.8:** Simulierte Beträge der Impedanzverläufe für die drei in Abbildung 5.7 dargestellten Fälle: Eingangskurzschlussadmittanz  $\underline{Y}_{11}$ , Ausgangskurzschlussadmittanz  $\underline{Y}_{22}$  und Leerlauf-Kernimpedanz  $\underline{Z}_{12}$ . Zusätzlich ist der Betrag der später in diesem Kapitel beschriebenen Impedanz  $\underline{Z}_{p,sim}$  dargestellt.

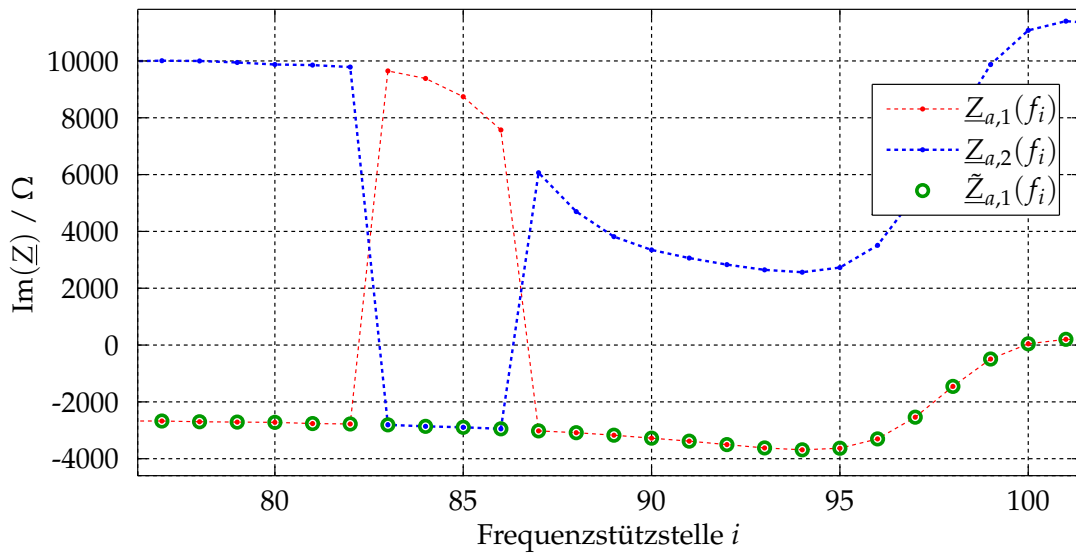
Gleichungen (5.1) und (5.2). Zu beachten ist dabei, dass alle enthaltenen Impedanzen und Admittanzen Funktionen der Frequenz  $f$  darstellen.

Die Lösungen für die beiden Impedanzverläufe  $\underline{Z}_a$  und  $\underline{Z}_c$  sind nicht eindeutig und es müssen die für jede Frequenz passenden Lösungen des Gleichungssystems ermittelt werden. Die jeweils zwei Lösungen aus den Gleichungen (5.1) und (5.2) bilden je zwei stetige Verläufe, jedoch wechseln für einzelne Frequenzstützstellen die beiden Lösungen die Position in diesen Verläufen. Dieses ist für einen Ausschnitt des Imaginärteils von  $\underline{Z}_a$  in Abbildung 5.9 dargestellt.

$$\underline{Z}_a(f) = \pm \frac{\sqrt{4\underline{Y}_{11}(f)\underline{Y}_{22}(f)\underline{Z}_{12}^2(f) + 1}}{2\underline{Y}_{11}(f)} + \frac{1}{2\underline{Y}_{11}(f)} - \underline{Z}_{12}(f) \quad (5.1)$$

$$\underline{Z}_c(f) = \pm \frac{\sqrt{4\underline{Y}_{11}(f)\underline{Y}_{22}(f)\underline{Z}_{12}^2(f) + 1}}{2\underline{Y}_{22}(f)} + \frac{1}{2\underline{Y}_{22}(f)} - \underline{Z}_{12}(f) \quad (5.2)$$

Für die später beschriebene Auswahl der Lösung ist die Zuordnung der mehrdeutigen Lösungen zu zwei jeweils stetigen Verläufen nötig, so dass hier eine Lösungsver-



**Abbildung 5.9:** Wechsel einzelner Lösungspunkte zwischen zwei stetigen Verläufen am Beispiel des Imaginärteils von  $\underline{Z}_a$  und die mittels Verlaufsverfolgung rekonstruierte Zuordnung zum Verlauf  $\tilde{\underline{Z}}_{a,1}(f_i)$ .

folgung durchgeführt wird. Hierbei wird mittels kubischer Extrapolation an einer Stützstelle ein Wert der Impedanz für die folgende Stützstelle geschätzt und der jeweils näherliegende Wert der beiden möglichen Lösungen ausgewählt. Es hat sich gezeigt, dass sowohl im Real- als auch im Imaginärteil ungünstige Schnittpunkte der beiden stetigen Verläufe auftreten können, die zu einem Wechsel des zu verfolgenden Verlaufes führen können. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die in Abbildung 4.8 eingeführte komplexe Ortskurve gewählt und die Extrapolation im dreidimensionalen Raum durchgeführt (mit den Achsen: Frequenz, Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Impedanz). Da sich die Ortskurven der beiden komplexen Lösungen in der räumlichen Darstellung deutlich unterscheiden, ist hierdurch eine robuste Verfolgung und Zuordnung möglich (vgl.  $\text{Im}\{\tilde{\underline{Z}}_{a,1}(f_i)\}$  in Abbildung 5.9 als Projektion der rekonstruierten komplexen Ortskurve).

Sind die zwei Lösungen zwei stetigen Verläufen zugeordnet, erfolgt als nächster Schritt die Auswahl des zutreffenden Lösungsverlaufes für die Beschreibung der Piezokeramik mittels der gewählten Ersatzschaltung. Ohne weitere Zusatzinformationen ist die Mehrdeutigkeit jedoch nicht zuverlässig aufzulösen. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb neben den drei in Abbildung 5.7 (a)-(c) dargestellten Fällen ein weiterer Fall der Elektrodenbeschaltung simuliert. Hierfür werden die beiden Elektroden K1 und K2 gleichzeitig mit  $\underline{q}_e$  angeregt (K1 und K2 kurzgeschlossen) und die sich ergebende Impedanz  $\underline{Z}_p$  gegenüber der Elektrode K0 bestimmt. Für  $\underline{Z}_p$  ergibt sich aus der Parallelschaltung von  $\underline{Z}_a$  und  $\underline{Z}_c$  und der zusätzlichen Reihenschaltung mit  $\underline{Z}_b$  (vgl. Abbildung 5.6 (b)) der in Gleichung (5.3) angegebene Zusammenhang

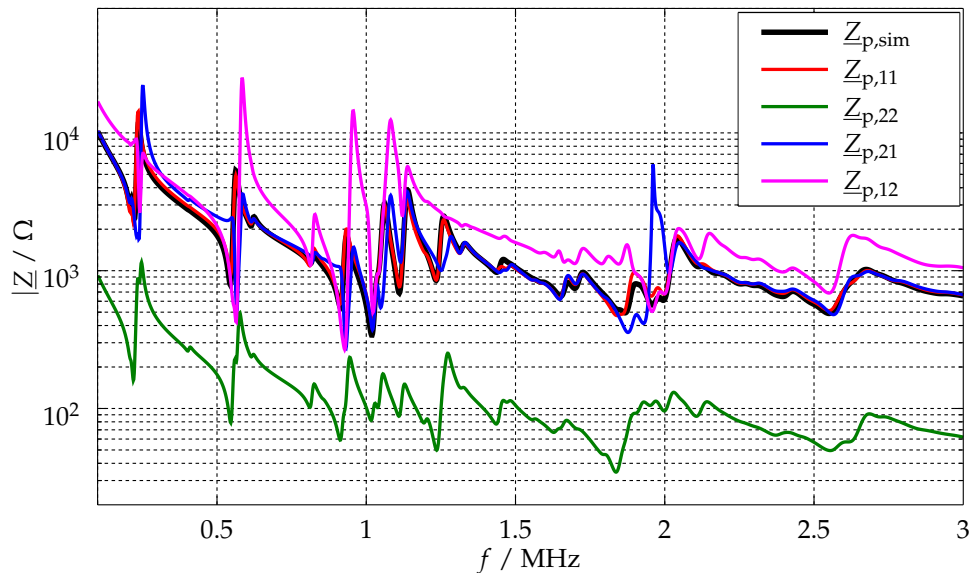
der Ersatzgrößen, wobei durch die Indizes  $r$  und  $s$  die jeweiligen Teillösungen aus den Gleichungen (5.1) und (5.2) unterschieden werden.

$$\underline{Z}_{p,rs}(f) = \frac{\underline{Z}_{a,r}(f)\underline{Z}_{c,s}(f)}{\underline{Z}_{a,r}(f) + \underline{Z}_{c,s}(f)} + \underline{Z}_b(f) \quad \forall \quad r, s \in \{1, 2\} \quad (5.3)$$

Die vier Lösungen  $\underline{Z}_{a,1}$ ,  $\underline{Z}_{a,2}$ ,  $\underline{Z}_{c,1}$  und  $\underline{Z}_{c,2}$  aus den Gleichungen (5.1) und (5.2) werden sukzessive in die Gleichung (5.3) eingesetzt und mit dem mittels FEM-Simulation bestimmten frequenzabhängigen Verlauf von  $\underline{Z}_{p,\text{sim}}$  verglichen. Das jeweils eingesetzte Fehlermaß ist in Gleichung (5.4) beschrieben. Die beiden Teillösungen für  $\underline{Z}_{a,r}$  und  $\underline{Z}_{c,s}$ , die zu dem kleinsten Fehlermaß führen, werden für die weiteren Betrachtungen als Ersatzgrößen für das Modell aus Abbildung 5.6 ausgewählt.  $I$  ist hier die Gesamtzahl der Frequenzstützstellen  $i$ .

$$F_{rs} = \sum_{i=1}^I \left( \lg \left( \frac{|\underline{Z}_{p,\text{sim}}(f_i)|}{1\Omega} \right) - \lg \left( \frac{|\underline{Z}_{p,rs}(f_i)|}{1\Omega} \right) \right)^2 \quad \forall \quad r, s \in \{1, 2\} \quad (5.4)$$

Die Beträge der in der Gleichung (5.4) enthaltenen Impedanzverläufe sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Im gezeigten Fall führt der Verlauf  $\underline{Z}_{p,11}$  zum kleinsten Fehlermaß nach Gleichung (5.4) und die beiden Lösungen  $\underline{Z}_{a,1}$  und  $\underline{Z}_{c,1}$  werden für die weiteren Berechnungen aufgrund des Vergleichs mit dem vierten simulierten Fall  $\underline{Z}_{p,\text{sim}}$  als Ersatzgrößen ausgewählt. Im folgenden Kapitel wird dieses Ersatzschaltbild um ein Vornetzwerk zur Erhöhung der Sensitivität erweitert.



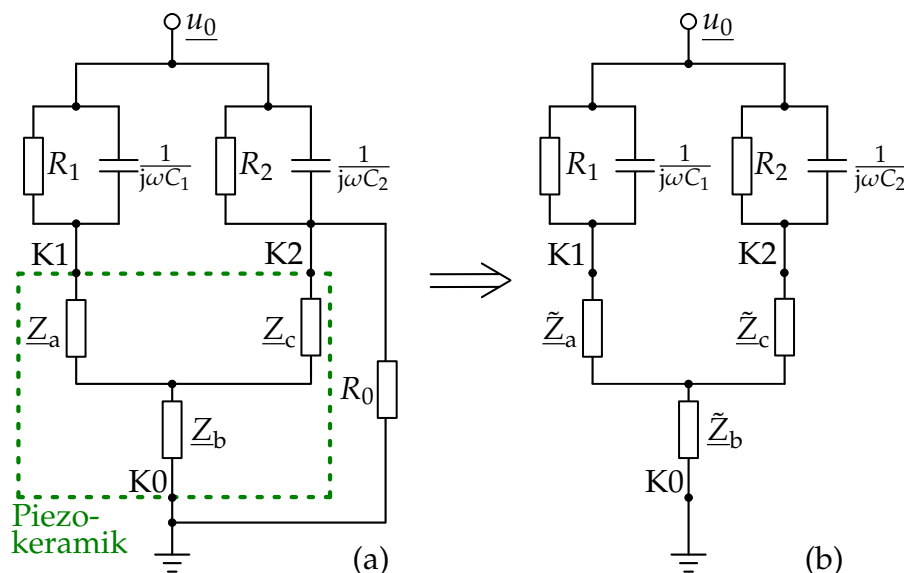
**Abbildung 5.10:** Unterschiedliche Verläufe von  $|\underline{Z}_{p,rs}|$  im Vergleich zu  $|\underline{Z}_{p,\text{sim}}|$  für verschiedene Kombinationen der Lösungen aus den Gleichungen (5.1) und (5.2) für die Fehlermaßermittlung nach Gleichung (5.4).

## 5.3 Erweiterung um ein Vornetzwerk

Um die nicht parallel zur 3-Richtung (vgl. Abbildung A.4, S. 127) verlaufenden lateralen elektrischen Feldanteile und damit die Sensitivität für bestimmte Parameter zu erhöhen, werden die beiden Elektroden K1 und K2 mit unterschiedlichen elektrischen Spannungen angeregt. Sie sollen dabei möglichst über den gesamten betrachteten Frequenzbereich das in Gleichung (5.7) angegebene Verhältnis aufweisen, welches über ein Vornetzwerk eingestellt wird (vgl. Kapitel 5.5). Aufgrund der großen Frequenzabhängigkeit kann dies nur näherungsweise gelingen und die Größen des Vornetzwerkes werden so optimiert, dass eine möglichst gute Einhaltung dieser Vorgabe erreicht wird [JKB15]. Das Vornetzwerk besteht hierbei aus den Impedanzen  $\underline{Z}_{v,1}$  und  $\underline{Z}_{v,2}$ , wie sie in den Gleichungen (5.5) angegeben sind.

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{v,1} &= \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} & (R_1 || C_1) \\ \underline{Z}_{v,2} &= \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} & (R_2 || C_2)\end{aligned}\quad (5.5)$$

Das Vornetzwerk ist zusammen mit dem Zweitorersatzschaltbild der Piezokeramik in Abbildung 5.11 (a) dargestellt. Zudem hat sich die zusätzliche Verwendung des in dieser Abbildung eingetragenen Widerstandes  $R_0$  als vorteilhaft für die Einstellung des gewünschten Spannungsverhältnisses herausgestellt.

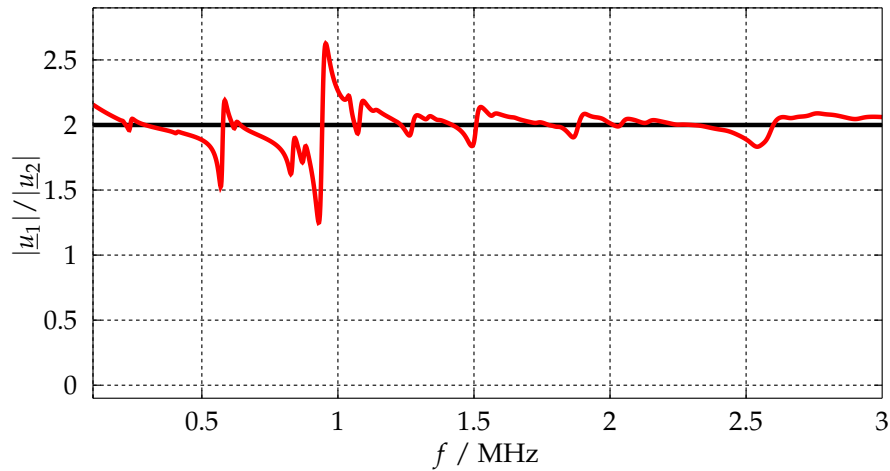


**Abbildung 5.11:** Das Vornetzwerk zur Annäherung eines gewünschten Spannungsverhältnisses für die Elektroden K1 und K2 (a) und die für die Netzwerkberechnung und -optimierung genutzte Ersatzschaltung (b).

Die Einbeziehung des Widerstandes  $R_0$  in die Netzwerkberechnung gelingt hierbei durch die in Tabelle 5.3 auf Seite 70 angegebenen Stern-Dreieck-Transformationen. Das sich ergebende Netzwerk ist in Abbildung 5.11 (b) dargestellt, in dem die in den Gleichungen (5.6) angegebenen Größen  $\tilde{Z}_a$ ,  $\tilde{Z}_b$  und  $\tilde{Z}_c$  den Widerstand  $R_0$  einbeziehen. Bei der Optimierung des Netzwerkes werden die fünf Größen  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  und  $R_0$  so bestimmt, dass das vorgegebene Verhältnis aus Gleichung (5.7) der Elektroden Spannungen der Elektroden K1 und K2 über den betrachteten Frequenzbereich möglichst gut erreicht wird.

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_a &= Z_a + \frac{Z_b \cdot Z_c}{R_0 + Z_b + Z_c} \\ \tilde{Z}_b &= \frac{R_0 \cdot Z_b}{R_0 + Z_b + Z_c} \\ \tilde{Z}_c &= \frac{R_0 \cdot Z_c}{R_0 + Z_b + Z_c}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Um die ermittelten Werte auch in der Realisierung des Vornetzwerkes für die Messung umsetzen zu können (vgl. Kapitel 6.1.2), werden die optimierten Größen anschließend auf Werte einer E-Reihe abgebildet<sup>28</sup>. Ein Beispiel für das erreichte Verhältnis von  $\frac{|u_1|}{|u_2|}$  ist in Abbildung 5.12 dargestellt, wobei als Zielfunktion hier die Gleichung (5.7) angesetzt ist.



**Abbildung 5.12:** Verlauf des frequenzabhängigen Spannungsverhältnisses  $\frac{|u_1|}{|u_2|}$  bei Vorgabe der Zielfunktion aus Gleichung (5.7) nach der Optimierung des Vornetzwerkes ( $R_0 = 100 \, \Omega$ ;  $R_1 = 1,33 \, \text{k}\Omega$ ;  $R_2 = 127 \, \Omega$ ;  $C_1 = 976 \, \text{pF}$ ;  $C_2 = 1 \, \text{pF}$ ).

<sup>28</sup>Die Werte für Widerstände und Kondensatoren entsprechen laut der *DIN EN 60063* einer Zahlenreihe, bei der in jeder Dekade eine bestimmte Anzahl von Werten liegt [DIN13]. (Hier: geforderte Grenzabweichung weniger als  $\pm 1 \, \%$  (E192))



$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \frac{|\underline{u}_1(f_n)|}{|\underline{u}_2(f_n)|} \right) \geq 2 \quad \text{mit } f_n: \text{Frequenzstützstellen} \quad (5.7)$$

Bei Einhaltung dieser Bedingung kann von hinreichend großen Feldanteilen ausgegangen werden, die nicht parallel zur 3-Achse verlaufen und so zur Steigerung der Sensitivität beitragen (vgl. Kapitel 5.5). Aufgrund der starken Frequenzabhängigkeit der Größen und der beschränkten Anzahl der Freiheitsgrade des Vornetzwerkes ist kein konstantes Verhältnis für alle Frequenzen zu erreichen. Die beiden Spannungen  $\underline{u}_1$  und  $\underline{u}_2$  sind unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.5), (5.6) und (5.8) dabei durch die Ausdrücke in den Gleichungen (5.9) gegeben.

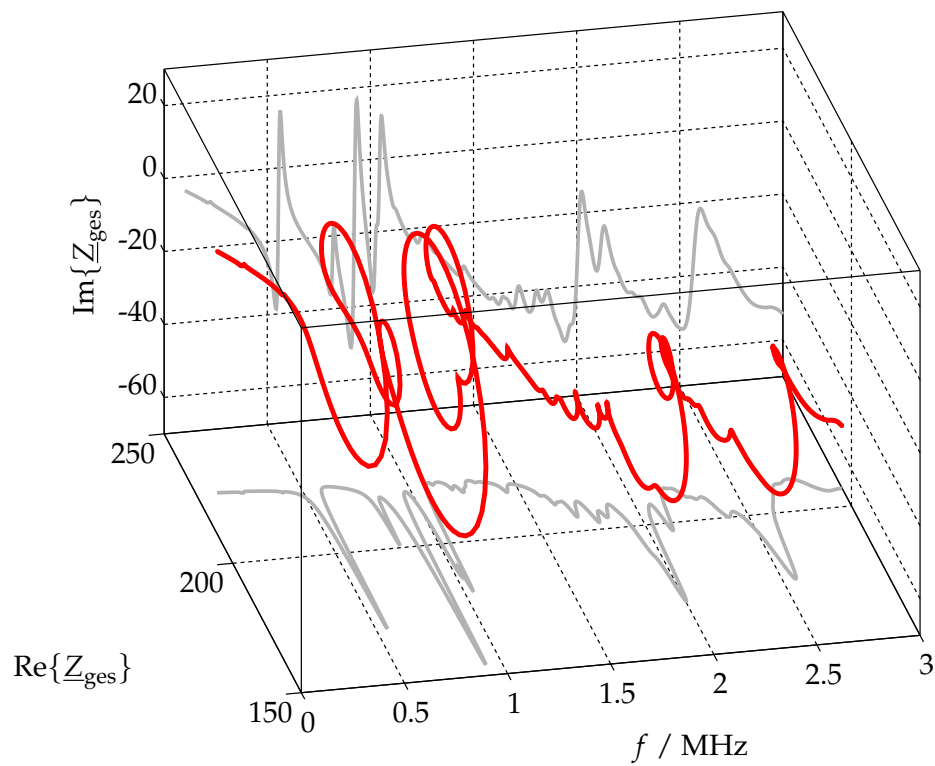
$$\underline{Z}_{vp} = \left( (\tilde{\underline{Z}}_a + \underline{Z}_{v,1})^{-1} + (\tilde{\underline{Z}}_c + \underline{Z}_{v,2})^{-1} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{u}_0 \left( \frac{\tilde{\underline{Z}}_a}{\tilde{\underline{Z}}_a + \underline{Z}_{v,1}} + \left( 1 - \frac{\tilde{\underline{Z}}_a}{\tilde{\underline{Z}}_a + \underline{Z}_{v,1}} \right) \frac{\tilde{\underline{Z}}_b}{\tilde{\underline{Z}}_b + \underline{Z}_{vp}} \right) \\ \underline{u}_2 &= \underline{u}_0 \left( \frac{\tilde{\underline{Z}}_c}{\tilde{\underline{Z}}_c + \underline{Z}_{v,2}} + \left( 1 - \frac{\tilde{\underline{Z}}_c}{\tilde{\underline{Z}}_c + \underline{Z}_{v,2}} \right) \frac{\tilde{\underline{Z}}_b}{\tilde{\underline{Z}}_b + \underline{Z}_{vp}} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Entsprechend Abbildung 5.11 (b) kann die von den Ersatzimpedanzen  $\tilde{\underline{Z}}_a$ ,  $\tilde{\underline{Z}}_b$  und  $\tilde{\underline{Z}}_c$  sowie den optimierten Werten des Vornetzwerkes  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  und  $R_0$  abhängige Gesamtimpedanz  $\underline{Z}_{ges}$  nach Gleichung (5.10) ermittelt werden.

$$\underline{Z}_{ges} = \tilde{\underline{Z}}_b + \underline{Z}_{vp} \quad (5.10)$$

In Abbildung 5.13 ist die Gesamtimpedanz über der Frequenz dargestellt. Dieser Verlauf wird im Kapitel 5.5 genutzt, um die Optimierung der Sensitivität vorzunehmen.



**Abbildung 5.13:** Frequenzabhängiger Verlauf der Gesamtimpedanz  $Z_{\text{ges}}$  aus Piezokeramikersatzschaltung und Vornetzwerk als komplexe Ortskurve. In grau sind zusätzlich als Projektion der Real- sowie der Imaginärteil dargestellt.

## 5.4 Geeignetes quantitatives Sensitivitätsmaß

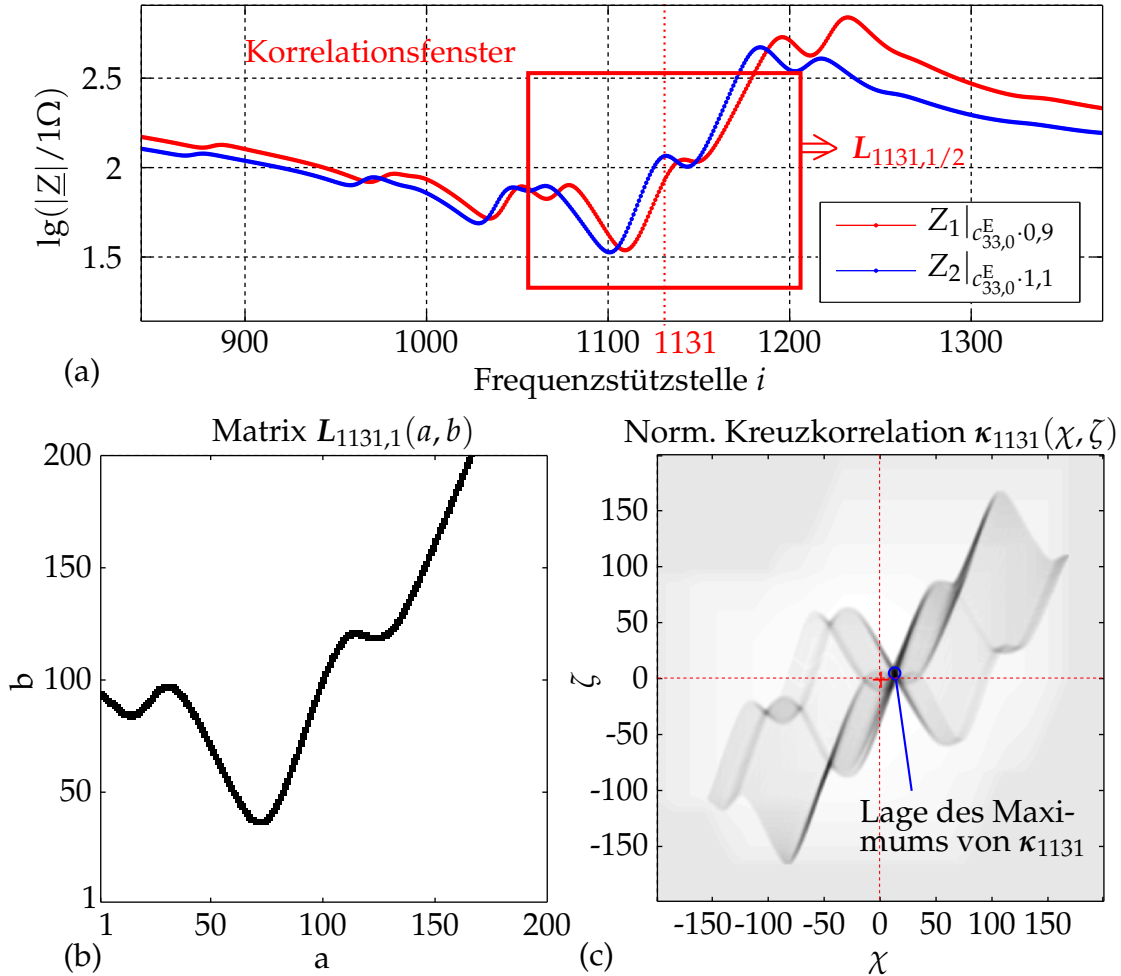
Für die Optimierung der Elektrodengeometrie (vgl. Kapitel 5.5) wird ein quantitatives Maß zur Beurteilung der frequenzabhängigen Sensitivität des Impedanzverlaufes auf Änderungen der Materialparameter benötigt. Die in Kapitel 5.1 genutzte grafische Auswertung ist hierfür nicht geeignet, da zum einen keine quantitative Beurteilung möglich ist und zum anderen viele Simulationen je variiertem Materialparameter zur Erzeugung nötig sind.

Ein erster Ansatz zur Definition eines quantitativen Sensitivitätsmaßes ist in [URH13] dargestellt. Hierbei wird ein mathematischer Ableitungskern genutzt, wie er beispielsweise in der Bildverarbeitung eingesetzt wird [FaSi97]. Mit dessen Hilfe wird die Ableitung des Impedanzverlaufes bezüglich der Änderung eines Materialparameters in Frequenz- und Impedanzrichtung approximiert. Die in vielen Fällen vorkommenden Verschiebungen des Verlaufes in Frequenzrichtung ohne Änderung des Impedanzwertes führen bei diesem Verfahren allerdings zu Divisionen durch Null, welche abgefangen werden müssen. Sie führen in diesen Bereichen zu einem nichtrepräsentativen Maß der Sensitivität.

Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit ein neues Sensitivitätsmaß hergeleitet und für die Optimierung angewendet [UnHe14]. Hierbei wird der Betragsverlauf der Impedanz schrittweise für Frequenzstützstellen  $i$  mit Hilfe einer normierten zweidimensionalen Kreuzkorrelation ausgewertet, wie sie beispielsweise in [Lue92; Lew95] beschrieben ist. Diese wird für zwei mit gegensinnigen Materialparameteränderungen simulierte Impedanzverläufe  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  berechnet. Es wird jeweils ein Ausschnitt der Impedanzverläufe bezüglich Frequenz und Impedanzbetrag durch eine quadratische Matrix abgebildet, so dass bei der zweidimensionalen Korrelation sowohl eine Verschiebung in Frequenz- als auch in Impedanzrichtung ausgewertet werden kann. Ein beispielhafter Ausschnitt und das zugehörige Ergebnis  $\kappa_i(\chi, \zeta)$  der normierten Kreuzkorrelation sind in Abbildung 5.14 gegenübergestellt.  $L_{i,1/2}(a, b)$  sind die beiden zu korrelierenden Matrizen für die Frequenzstützstelle  $i$  mit der Dimension  $N \cdot N$ . Die Größen  $a$  und  $b$  sind die Laufindizes in  $f$ - und  $|\underline{Z}|$ -Richtung in den quadratischen Matrizen  $L_{i,1/2}(a, b)$ . Zur Ermittlung von  $L_{i,1/2}(a, b)$  werden die Ausschnitte der Impedanzverläufe  $|\underline{Z}_1|$  und  $|\underline{Z}_2|$  (vgl. Abbildung 5.14 (a)) auf quadratische Matrizen interpoliert (vgl. Abbildung 5.14 (b)), um hieraus die in Abbildung 5.14 (c) dargestellte normierte Kreuzkorrelationsfunktion  $\kappa_i(\chi, \zeta)$  zu berechnen.

Neben den aus den Lagen der Korrelationsmaxima ermittelten lokalen Verschiebungen der Verläufe in  $f$ - und  $|\underline{Z}|$ -Richtung ( $\Delta\chi$  und  $\Delta\zeta$ ) wird auch der Wert des jeweiligen Maximums  $\kappa_{i,\max}$  für das Sensitivitätsmaß in Gleichung (5.11) berücksich-

tigt. Auf diese Weise wird erreicht, dass eine durch die Materialparametervariation hervorgerufene Änderung der lokalen Kurvenform hin zu unähnlicheren Verläufen ebenfalls zu einer Erhöhung des Sensitivitätsmaßes führt.

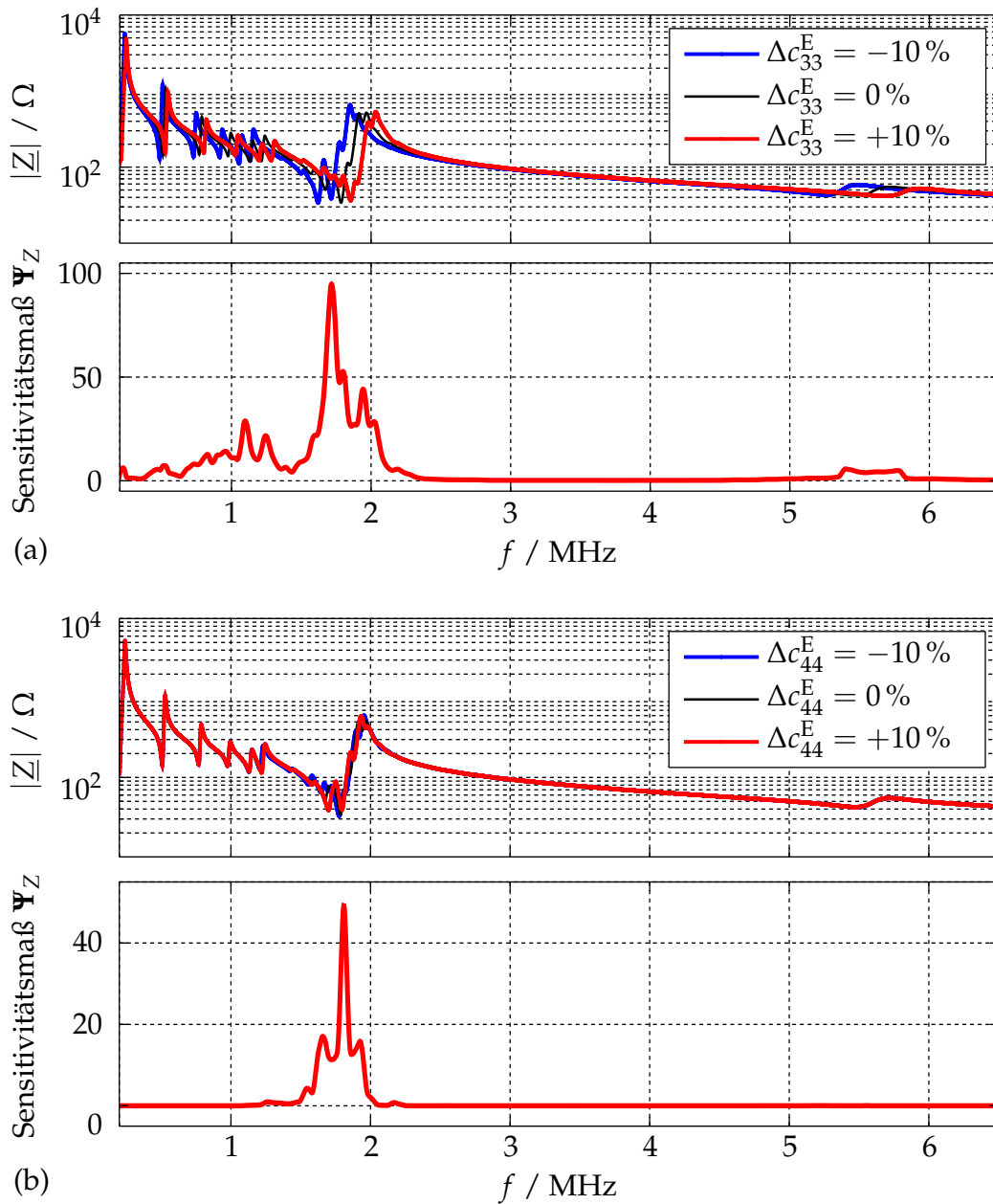


**Abbildung 5.14:** Ausschnitt der Impedanzverläufe für die Korrelation (a) mit einer der transformierten quadratischen Matrizen  $L_{i,1}(a, b)$  (b) zur Ermittlung der normierten zweidimensionalen Kreuzkorrelationsfunktion  $\kappa_i(\chi, \zeta)$  (c) für die Stützstelle  $i = 1131$ . Als Beispiel ist ein Ausschnitt der Impedanzverläufe bei Änderung des Materialparameters  $c_{33}^E$  um  $\pm 10\%$  gewählt.

Bei sehr flachen und steilen Impedanzverläufen innerhalb des Korrelationsfensters weist die ermittelte Verschiebung in jeweils eine Richtung eine hohe Unsicherheit auf. Um diesen Einfluss zu verringern, werden neben der Verschiebung und dem Maximalwert zusätzlich auch die Korrelationslängen  $\tau_{f,i}$  und  $\tau_{Z,i}$  in  $f$ - und  $|Z|$ -Richtungen ermittelt. Deren Kehrwerte werden als Faktoren zur Gewichtung der beiden ermittelten Verschiebungen im Sensitivitätsmaß berücksichtigt. Die Berech-

nungsvorschrift des im Rahmen dieser Arbeit definierten Sensitivitätsmaßes  $\Psi_Z(f_i)$  ist in Gleichung (5.11) angegeben.

$$\Psi_Z(f_i) = \frac{1}{\kappa_{i,\max}(\chi, \zeta)} \left[ \left( \frac{1}{\tau_{f,i}} \cdot \Delta\chi \right)^2 + \left( \frac{1}{\tau_{Z,i}} \cdot \Delta\zeta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$



**Abbildung 5.15:** Der Verlauf des ermittelten Sensitivitätsmaßes  $\Psi_Z$  für die Materialparameter (a)  $c_{33}^E$  und (b)  $c_{44}^E$  bei einer Parametervariation von  $\pm 10\%$ .

In Abbildung 5.15 sind zwei ermittelte Verläufe des Sensitivitätsmaßes  $\Psi_Z$  für die Materialparameter  $c_{33}^E$  und  $c_{44}^E$  dargestellt. Der unterschiedliche Einfluss dieser beiden Materialparameter auf den Impedanzverlauf spiegelt sich im jeweiligen Verlauf des Sensitivitätsmaßes  $\Psi_Z$  wider und entspricht auch für die nicht gezeigten Materialparameter den bereits in den Tabellen 5.1 und 5.2 zusammengestellten qualitativen Ergebnissen. Somit ist mit Hilfe dieses Maßes eine quantitative Beurteilung der Sensitivität des Betrages des Impedanzverlaufes auf die unterschiedlichen Materialparameter möglich.

Dieses Maß wird im folgenden Kapitel 5.5 genutzt, um den Einfluss unterschiedlicher Elektrodengeometrien zu bewerten und eine optimierte Elektrodentopologie für einen Frequenzarbeitspunkt zu ermitteln, bei der der Impedanzverlauf eine höhere Sensitivität auf die verschiedenen Materialparameter aufweist.

## 5.5 Elektrodenoptimierung für eine erhöhte Sensitivität

In diesem Kapitel wird die Optimierung der Elektrodentopologie beschrieben. Dabei werden die Radien der verschiedenen Elektroden nach Abbildung 5.5 (b) (s. S. 69) als zu optimierende Variablen betrachtet. Um die Anzahl der zu optimierenden Größen zu reduzieren und eine gut herstellbare Anordnung zu erhalten, werden die beiden Radien  $r_{e,1}$  und  $r_{e,4}$  von der Optimierung ausgeschlossen und auf die in Tabelle 5.5 angegebenen Abmessungen festgelegt. In dieser Tabelle sind auch die fertigungstechnischen Grenzen aufgeführt, die als Randbedingungen in die Optimierung eingehen. Diese sind durch das gewählte Verfahren der Herstellung der segmentierten Elektroden festgelegt und hier für eine Laserablation aufgeführt (vgl. Kapitel 6.2, S. 95).

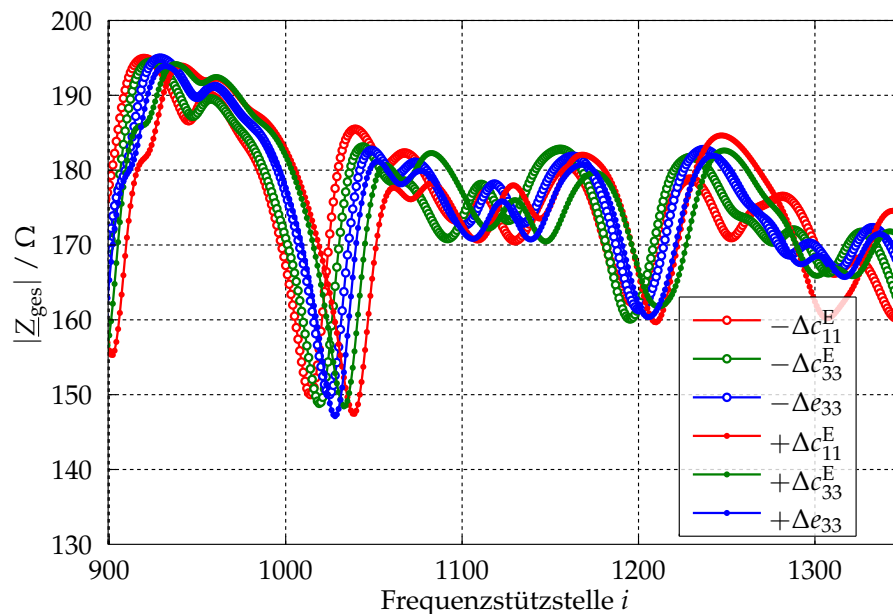
**Tabelle 5.5:** Festlegungen und geometrische Randbedingungen für die Elektrodenoptimierung (Bezeichnungen der Elektrodenradien vgl. Abbildung 5.5 (b)).

Geometriegröße	Festlegung bzw. Randbedingung
$r_{e,1}$	0 mm
$r_{e,2}$	$1 \text{ mm} \leq r_{e,2} \leq D_p/2 - (1 + 0,3) \text{ mm}$
$r_{e,3}$	$r_{e,2} + 0,3 \text{ mm} \leq r_{e,3} \leq D_p/2 - 1 \text{ mm}$
$r_{e,4}$	$D_p/2$
$r_{e,5}$	$0 \text{ mm} \leq r_{e,5} \leq D_p/2 - (1 + 0,3) \text{ mm}$
$r_{e,6}$	$r_{e,5} + 0,3 \text{ mm} \leq r_{e,6} \leq D_p/2$

Als sinnvolle Mindestbreite einer Elektrode ist eine Abmessung von 1 mm vorgesehen und der Mindestabstand zweier Elektroden beträgt für das gewählte Herstellungsverfahren 0,3 mm. Diese Werte sind in Tabelle 5.5 enthalten und müssen bei Wahl eines alternativen Herstellungsprozesses entsprechend der technologischen Vorgaben angepasst werden.

Als Optimierungsalgorithmus kommt aufgrund der in Tabelle 5.5 aufgeführten gegenseitig abhängigen Randbedingungen ein restringierter nichtlinearer Algorithmus zum Einsatz der den Vorteil bietet, dass die Randbedingungen bei der Optimierung berücksichtigt werden und so ein Optimum in einem beschränkten Lösungsraum gefunden werden kann. Eine mögliche Realisierung bietet hier die MATLAB<sup>®</sup> implementierte Funktion *fmincon*, die eine Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens (nur für unrestringierte Probleme anwendbar) darstellt. Es handelt sich hierbei um ein gradientenbasiertes iteratives Verfahren [Pow78; Alt02; NoWr06].

Für die Ermittlung des Zielkriteriums sind für alle betrachteten Materialparameter (vgl. Gleichung (3.23), S. 44) jeweils zwei simulative Ermittlungen des komplexwertigen Impedanzverlaufes nötig. An dieser Stelle werden Variationen von  $\pm 2,5\%$  gewählt. Der Einfluss dieser Variationen ist gut erkennbar (vgl. Abbildung 5.16) und die Sensitivitätsermittlung über die Auswertung der zweidimensionalen Kreuzkorrelationsfunktion (vgl. Kapitel 5.4) kann zuverlässig durchgeführt werden.



**Abbildung 5.16:** Einfluss von Materialparametervariationen von  $\pm 2,5\%$  auf den Betrag des Impedanzverlaufes  $\underline{Z}_{\text{ges}}$  im Bereich der Dickenresonanz (bei einer festen Elektrodengeometrie) am Beispiel der drei Materialparameter  $c_{11}^E$ ,  $c_{33}^E$  und  $e_{33}$ .

Aufgrund der Elektrodensegmentierung und der Nutzung des in Kapitel 5.3 beschriebenen Vornetzwerkes kann die Variation hier bereits kleiner gewählt werden als bei den Sensitivitätsuntersuchungen der Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden (vgl. Kapitel 5.1), da auch mit noch nicht optimierten Elektrodenradien bereits eine erhöhte Sensitivität erreicht wird. Aufgrund der hohen Anzahl an nötigen Simulationen wird an dieser Stelle das Impulsverfahren zur Bestimmung von  $\underline{Z}_{\text{sim}}$  verwendet, wie es in Kapitel 4.3 vorgestellt ist.

Um die Sensitivität für einen eingeschränkten Frequenzbereich zu verbessern, wird für die Optimierung ein Bereich um die Dickenresonanz gewählt. Da die Dickenresonanz in den Gesamtimpedanzverläufen aus Piezokeramik und Vornetzwerk nicht immer gut identifiziert werden kann, wird für die Festlegung des Bereiches eine Simulation mit vollflächigen Elektroden ohne Vornetzwerk genutzt. Es hat sich herausgestellt, dass in dem betrachteten Bereich für alle Materialparameter, außer für die Steifigkeitskonstante  $c_{12}^E$ , ein ausreichender Einfluss auf den Impedanzverlauf vorhanden ist (Sensitivitätsmaß  $\Psi_Z > 0$ ). Diese muss somit aus der Ermittlung des Zielkriteriums um den Arbeitspunkt herausgenommen werden und wird später über ihren Einfluss im Bereich der Radialresonanz berücksichtigt. Hier bestätigt sich die Erwähnung dieses Materialparameters als problematisch zu bestimmende Größe in der Literatur [PAB10; RIL11].

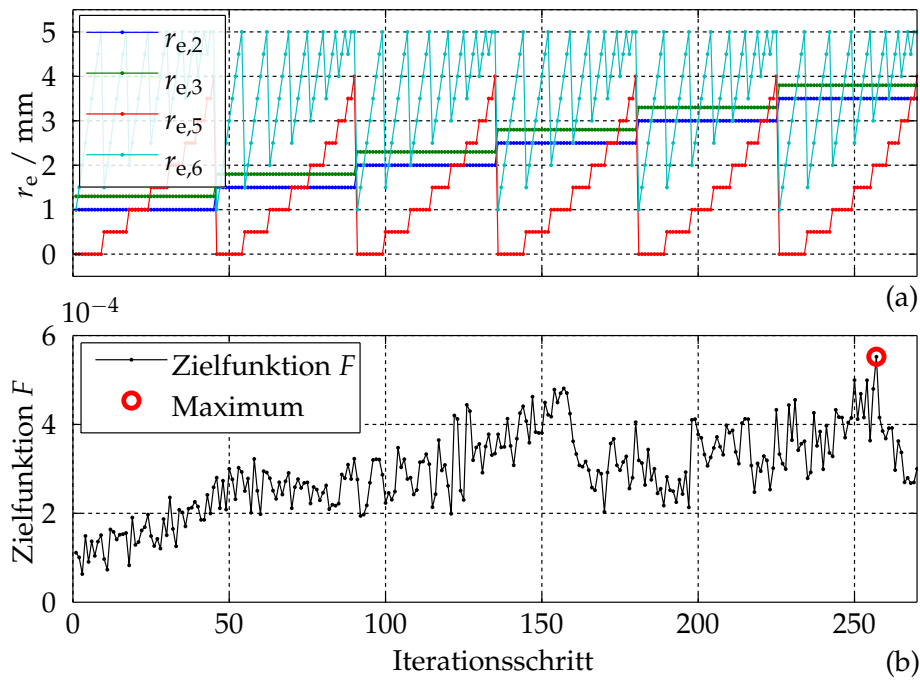
Die Zielfunktion für die Optimierung der Elektrodentopologie soll zwei Forderungen beinhalten. Zum einen wird ein gleichmäßig hoher Wert des Sensitivitätsmaßes und zum anderen ein möglichst großer Wert für die minimale Sensitivität angestrebt. Für alle Sensitivitätsverläufe wird hierzu für den ausgewählten Frequenzbereich der Mittelwert gebildet und das Minimum gewählt. Zusätzlich wird das kleinste Sensitivitätsminimum der Einzelverläufe ermittelt und beide Kenngrößen werden in der Zielfunktion nach Gleichung (5.12) zusammengefasst. Dieses wird durch die Variation der Elektrodenradien unter Berücksichtigung der in Tabelle 5.5 aufgeführten Randbedingungen maximiert. Hierbei werden  $N$  Stützstellen im Dickenresonanzbereich ausgewertet. Bei den Minimum- und Maximum-Funktionen ist als Index jeweils angegeben, bezüglich welchem Parameter das Minimum ermittelt wird, und  $r$  stellt jeweils den Materialparameter dar, für den das Sensitivitätsmaß ermittelt wird.

$$F = \max_r \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi_{Z,r}(n) \right\} + \max_r \{ \min_n (\Psi_{Z,r}(n)) \} \quad (5.12)$$

Es hat sich bei der Optimierung gezeigt, dass viele lokale Maxima mit ähnlich gutem Wert der Zielfunktion existieren und eine hohe Abhängigkeit von den gewählten



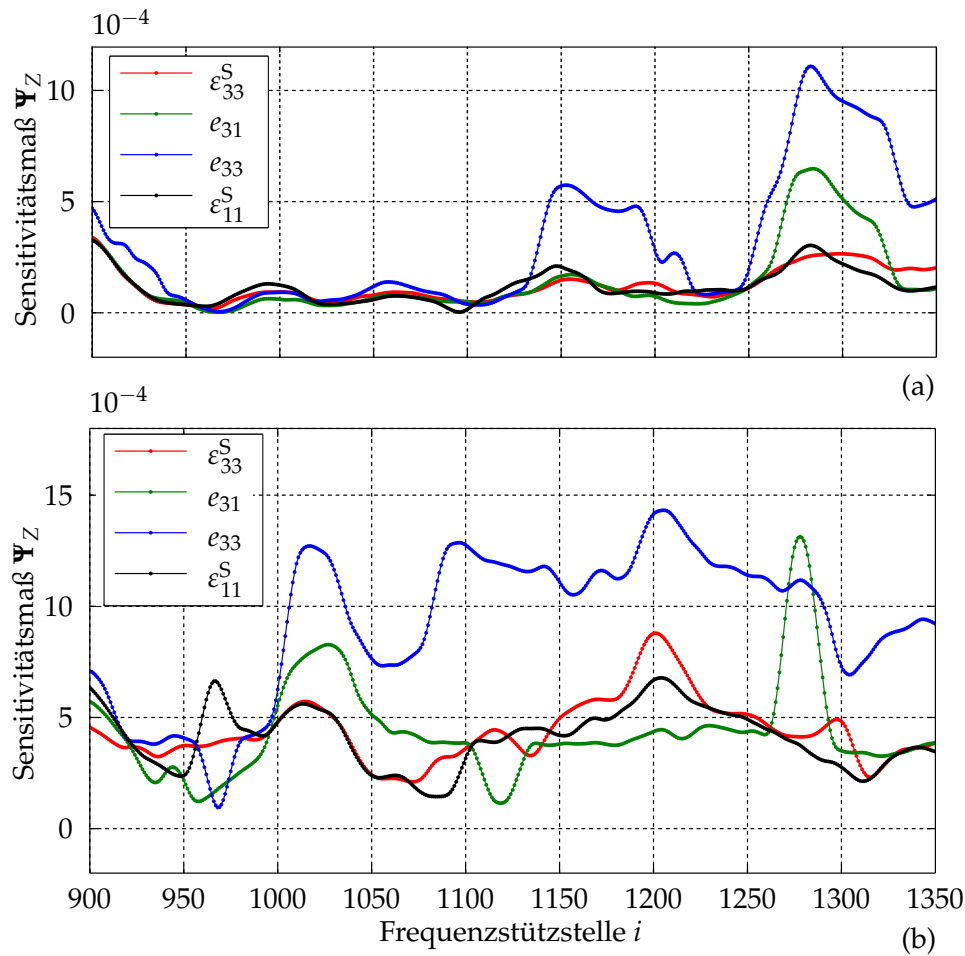
Startwerten existiert. Bei allen gefundenen Radienkombinationen für einen großen Wert der Zielfunktion hat sich jedoch gezeigt, dass der Abstand zwischen den Elektroden K0 und K1 ( $r_{e,3} - r_{e,2}$ ) minimiert wird. Durch Festhalten dieses Abstandes auf dem technologisch kleinstmöglichen Wert kann die Anzahl der Freiheitsgrade der Optimierung reduziert werden und es wird möglich, die Definitionsbereiche der Radien in verschachtelten Schleifen sukzessive zu durchlaufen (Schrittweite 0,5 mm). Auf diese Weise lässt sich eine gute Radienkombination als Startvektor  $r_{e,0}$  bestimmen. Die Variation der Radien während der Schleifendurchläufe und der jeweils ermittelte Wert der Zielfunktion sind in Abbildung 5.17 dargestellt.



**Abbildung 5.17:** (a) Verlauf der Radien und (b) des Wertes der Zielfunktion während der Schleifendurchläufe zur Suche eines geeigneten Startvektors für die Optimierung, wobei die zu dem rot markierten Maximum der Zielfunktion  $F_e$  gehörenden Radien als Startvektor  $r_{e,0}$  gewählt werden.

Durch einen abschließenden Optimierungsdurchlauf wird das Maximum in der Nähe dieser guten Startwerte ermittelt. In Abbildung 5.18 ist der Sensitivitätsverlauf für vier Materialparameter mit kleinem Sensitivitätsmaß dargestellt, wobei die Teilabbildung (a) die Verläufe mit den ursprünglichen Startwerten der Radien und (b) die Verläufe unter Berücksichtigung der optimierten Elektrodenradien zeigen. Es ist zu erkennen, dass die Sensitivität entsprechend der vorgegebenen Zielfunktion aus Gleichung (5.12) für den gesamten betrachteten Bereich erhöht ist.

Um bei der Optimierung die Zahl der Freiheitsgrade zu reduzieren und tatsächlich den Einfluss der Elektrodengeometrie zu analysieren, wird nicht in jedem Opti-



**Abbildung 5.18:** Sensitivitätsverläufe vor (a) und nach (b) der Optimierung der Elektrodenradien für vier Materialparameter mit kleiner Sensitivität ( $\varepsilon_{33}^S$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $\varepsilon_{11}^S$ ) im Bereich der Dickenresonanz der Piezokeramik (Stützstellen  $i = 950$  bis  $i = 1300$  werden ausgewertet). [URH15]

mierungsschritt der Elektrodentopologie eine Optimierung des Vornetzwerkes (vgl. Kapitel 5.3) vorgenommen. Eine erste Optimierung des Vornetzwerkes erfolgt mit den Startwerten der Radien und eine abschließende nach der Ermittlung der angepassten Elektroden. Da die Startwerte der Elektrodengeometrie nach der in diesem Kapitel beschriebenen Methode bereits nahe am Optimum liegen, ist dieses Vorgehen gerechtfertigt und wird auch durch den geringen Unterschied der beiden ermittelten Vornetzwerke bestätigt. Weitere Iterationen dieser beiden Optimierungsvorgänge sind nicht erforderlich, da die verbleibenden Änderungen unterhalb der Fertigungstoleranzen liegen und bei der Herstellung nicht berücksichtigt werden können (vgl. Kapitel 6.2). Für das hier gewählte Beispiel einer Piezokeramik mit  $D_p = 10$  mm und  $h_p = 1$  mm ergeben sich die optimierten Elektrodenradien unter Berücksichtigung der Angaben in Tabelle 5.5 zu  $r_{e,n,\text{opt}} = (0; 3,5; 3,8; 5; 2,05; 3,55)$  mm.

## 6 Mess- und Versuchsaufbauten

### 6.1 Impedanzmessplatz

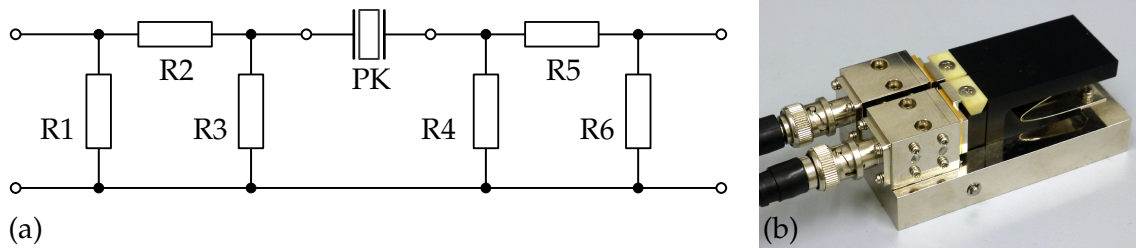
Die Materialparameteroptimierung basiert auf dem Vergleich eines simulierten und eines gemessenen Impedanzverlaufes. Deshalb spielt die genaue und reproduzierbare Messung des komplexwertigen Impedanzverlaufes eine wichtige Rolle. Das für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden eingesetzte Messsystem wird im Unterkapitel 6.1.1 beschrieben. Für die Messung der Impedanz für Piezokeramiken mit segmentierten Elektroden zusammen mit einem Vornetzwerk (vgl. Kapitel 5.2 und 5.3) ist für diese Arbeit eine Erweiterung der Messhardware erforderlich, welche im Unterkapitel 6.1.2 vorgestellt wird.

#### 6.1.1 Grundlagen Impedanzmessverfahren

Ein Verfahren zur Messung der komplexwertigen Impedanz ist in der *DIN EN 60444* definiert<sup>29</sup>. Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Messung des komplexwertigen Impedanzverlaufes ein Netzwerkanalysator verwendet (Anritsu MS4630B, [Anr06]). Hinzu kommt ein  $\pi$ -Netzwerk (Anritsu MA1506A, auch als Pi-Jig bezeichnet), welches den Vorgaben in der genannten Norm entspricht. Das  $\pi$ -Netzwerk erfüllt dabei zwei Aufgaben. Zum einen sorgt es für eine Impedanzanpassung an den Netzwerkanalysator, der eine Ausgangsimpedanz von  $50\ \Omega$  aufweist. Zum anderen werden durch die Ein- und Ausgangsnetzwerke Reflexionen der Messgeräte verringert [DIN00]. Diese beiden Forderungen werden durch die Wahl der in der Bildunterschrift 6.1 angegebenen Dimensionierung der Bauteile erfüllt. Vom Netzwerkanalysator aus gesehen, ergibt sich (bei Abschluss mit  $12,5\ \Omega$ ) eine Impedanz von  $50\ \Omega$

<sup>29</sup>Die *DIN EN 60444* „Messung von Schwingquarz-Parametern nach dem Null-Phasenverfahren in einem  $\pi$ -Netzwerk“ besteht aus insgesamt 11 Teilen. Die für diese Arbeit relevanten Inhalte sind dabei in Teil I („Verfahren zur Messung der Resonanzfrequenz und des Resonanzwiderstandes von Schwingquarzen nach den Null-Phasenverfahren in einem  $\pi$ -Netzwerk“, [DIN00]) und in Teil IV („Messverfahren zur Bestimmung der Ersatzschaltungsparameter von Schwingquarzen mit automatischer Netzwerkanalysatortechnik und Fehlerkorrektur“, [DIN00a]) zu finden.

und aus Richtung der Piezokeramik ergibt sich bei Abschluss des Netzwerkes mit  $50\ \Omega$  eine Impedanz von  $12,5\ \Omega$ .

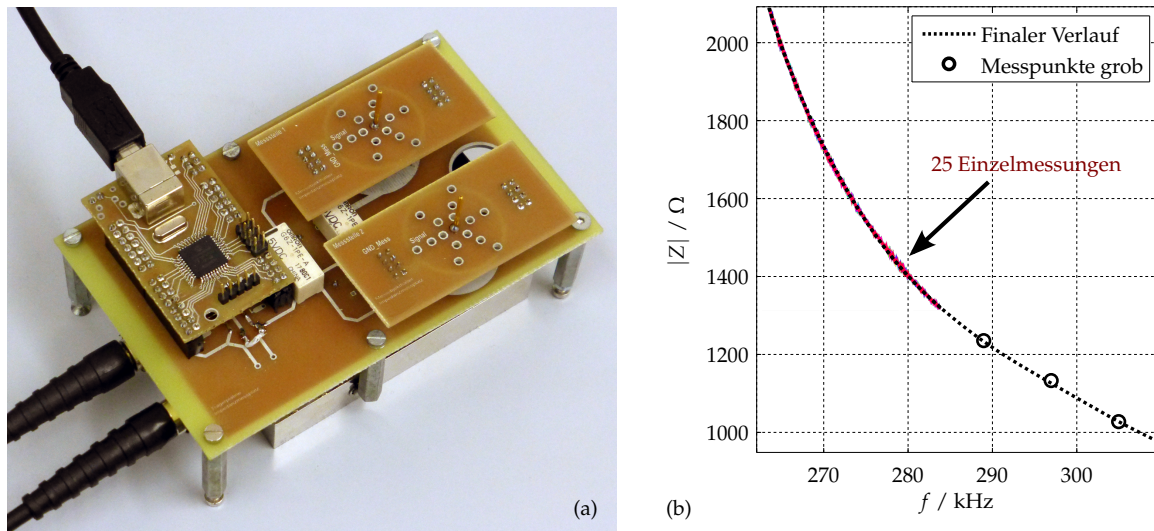


**Abbildung 6.1:** (a) Ein  $\pi$ -Netzwerk nach der DIN EN 60444-1 [DIN00]. Für die Werte der Bauteile gilt:  $R_1 = R_6 = 159\ \Omega$ ,  $R_2 = R_5 = 66,2\ \Omega$  und  $R_3 = R_4 = 14,2\ \Omega$  (PK: zu messende Piezokeramik). (b) Foto des kommerziellen  $\pi$ -Netzwerkes Anritsu MA1506A.

Eine Einschränkung des Netzwerkanalysators stellt die während einer Messung maximal aufnehmbare Anzahl von 1001 Messwerten dar. Da insgesamt ein großer Frequenzbereich mit der Messung abgedeckt werden soll (einige 10 kHz bis über 8 MHz) und die einzelnen Resonanzstellen teilweise sehr schmalbandig sind, reicht die mit diesen 1001 Werten erreichbare Frequenzauflösung nicht aus. Eine Möglichkeit, diese Einschränkung zu umgehen, ist die sequentielle Messung mehrerer kleinerer Frequenzbereiche und die anschließende Zusammensetzung eines Gesamtimpedanzverlaufes (vgl. Abbildung 6.2 (b)). Jedoch ist bei jeder Änderung des zu messenden Frequenzbereiches auch jeweils eine Kalibrierung notwendig, die eine Messung im kurzgeschlossenen Zustand und eine bei offener Messstelle erfordert. Somit können bei manueller Durchführung keine gleichbleibenden Messbedingungen eingehalten werden, da eine wiederholte Positionierung der zu messenden Piezokeramik im  $\pi$ -Netzwerk erforderlich ist.

Da der verwendete Netzwerkanalysator die Möglichkeit einer Fernsteuerung über eine GPIB-Schnittstelle bietet, lässt sich der Messablauf automatisieren. Zu diesem Zweck wurde zusätzlich eine Messanordnung nach Abbildung 6.2 (a) entwickelt, die die Kalibrierung durch Umschalten von verschiedenen Messstellen mittels Relais ermöglicht und ebenfalls in den automatisierten Ablauf integriert werden kann. Die Steuerung der Relais ist dabei über eine Mikrocontroller-Schaltung realisiert. Der gesamte Ablauf wird von einem MATLAB<sup>®</sup>-Programm gesteuert.

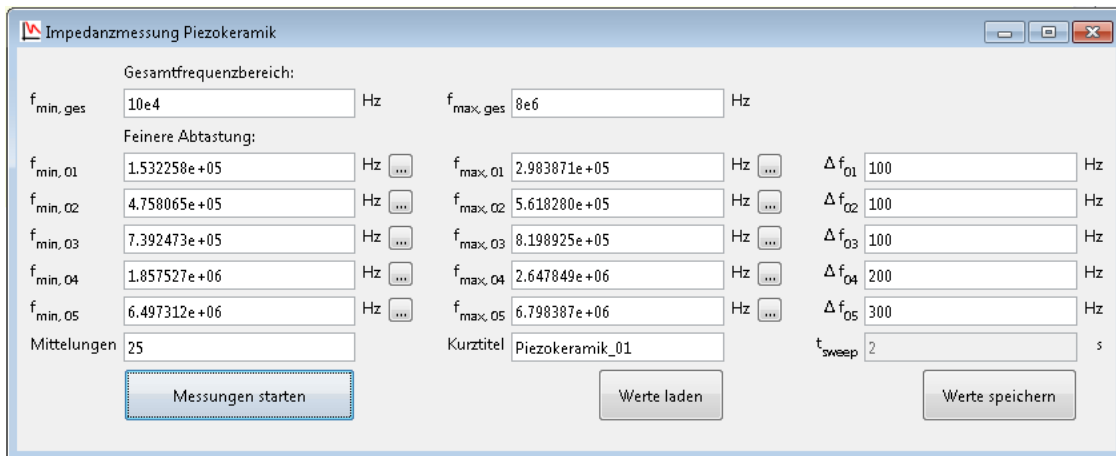
Insgesamt muss für die Messung ein Kompromiss gefunden werden zwischen der Frequenzauflösung zur genauen Bestimmung der verschiedenen Resonanzfrequenzen und der benötigten Messzeit. Da Bereiche zwischen den Resonanzstellen nicht mit einer hohen Frequenzauflösung vermessen werden müssen, hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Frequenzauflösung variabel an die Lage der Resonanzstellen



**Abbildung 6.2:** (a) Messaufbau zur automatisierten Messung eines Impedanzverlaufes für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden durch sequentielle Messung kleiner Frequenzteilmessbereiche mit jeweiliger Kalibrierung. (b) Ausschnitt des Betrages der Impedanz  $|Z|$  im Bereich eines Übergangs zwischen feiner und grober Abtastung. Für den feinen Bereich sind die in diesem Fall 25 Einzelmessungen dargestellt, aus denen der finale Verlauf durch Mittelung bestimmt wird.

anzupassen, die später für die Ermittlung der charakteristischen Frequenzen genutzt werden (vgl. Kapitel 7.2). Um eine benutzerfreundliche Messung zu ermöglichen, ist im Rahmen dieser Arbeit eine grafische Programmoberfläche entstanden, die eine komfortable Festlegung der Randbedingungen für die Messung ermöglicht (vgl. Abbildung 6.3). Durch Klicken in einer zu Beginn vorgenommenen Messung von 1001 Werten über den gesamten interessierenden Frequenzbereich können die mit einer hohen Frequenzauflösung zu messenden Bereiche vom Anwender markiert werden. Zudem kann für alle Bereiche separat die geforderte Auflösung angegeben werden.

Mit Hilfe dieser Angaben werden die für alle feiner zu messenden Bereiche nötigen Einteilungen in Teilmessungen mit 1001 Werten vorgenommen. Innerhalb des Programms wird dann die automatisierte Messung aller Teilbereiche mit der ebenfalls vom Nutzer angegebenen Anzahl von Mittelungen durchgeführt. Der resultierende Impedanzverlauf setzt sich am Ende aus den Bereichen mit hoher Frequenzauflösung zusammen und wird durch die Werte der groben Messung zwischen den Resonanzstellen ergänzt, wobei automatisch eine Kontrolle auf stetige Übergänge zwischen den Einzelmessungen erfolgt. Sollte es beispielsweise bei der automatischen Kalibrierung für die Bereichsumschaltung zu Fehlern kommen, würde dies sofort durch unstetige Übergänge von einer zur nächsten Feinmessung auffallen und kann auf diese Weise abgefangen werden. Der Gesamtverlauf wird zusammen mit den eben-



**Abbildung 6.3:** Die grafische Programmoberfläche für die Impedanzmessung. Die Grenzen der einzelnen Frequenzbereiche können komfortabel durch Klicken in einem zu Beginn grob gemessenen Impedanzverlauf markiert werden (hier nicht zu sehen).

falls automatisch ermittelten charakteristischen Frequenzen (vgl. Anhang A.1, S. 123) und aller Einzelmessungen in einer hierfür entworfenen Datenstruktur gespeichert. Der gesamte Programmablauf ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Folgende Punkte sind für die Reproduzierbarkeit und Zuverlässigkeit der Impedanzmessung ausschlaggebend und werden entsprechend während der Messung berücksichtigt:

- Einschaltverhalten des Netzwerkanalysators (In den ersten Stunden nach dem Einschalten variieren die Messwerte. Durch eine Wartezeit von mindestens 24 h nach dem Einschalten bis zur ersten Messung wird dieser Einfluss vermindert.)
- Temperaturänderung (Der gesamte Aufbau befindet sich in einer Klimakammer, so dass Änderungen der Umgebungseinflüsse minimiert werden.)
- Statistische Streuung der Messwerte (Durch Mittelung vieler statistisch unabhängiger Einzelmesswerte wird die Streuung verringert.)
- Kalibrierung vor der Messung (Bei jeder Änderung des Frequenzbereiches ist im automatisierten Messablauf jeweils eine Kalibrierung vorgesehen.)
- Kontaktierung der Piezokeramik (Die Piezokeramik wird über vergoldete Feder-Prüfstifte kontaktiert, um eine möglichst rückwirkungsfreie und reproduzierbare Messung zu ermöglichen.)

Eine detailliertere Diskussion zu den Einflussgrößen ist in [Smi85] zu finden. Muss für zeitkritische Aufgaben die Anzahl der Messungen eingeschränkt werden, bietet sich eine alternative Vorgehensweise der Festlegung der Frequenzstützstellen für die Messung unter Berücksichtigung der Methode der „Optimalen Versuchsplanung“ an

[Lah08]. Da im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur eine Messung für eine Elektrodenform zu Beginn des Optimierungsprozesses erforderlich ist, ist diese im Vergleich zu den übrigen Schritten nicht zeitkritisch.

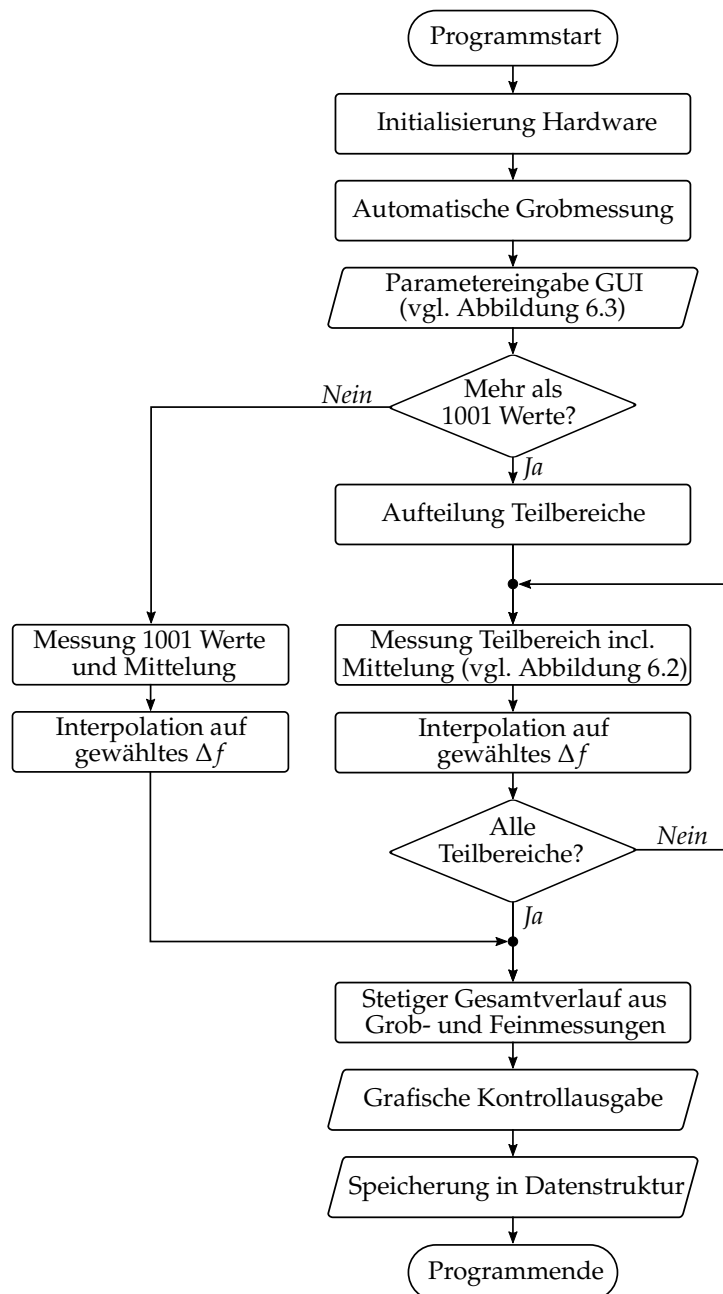
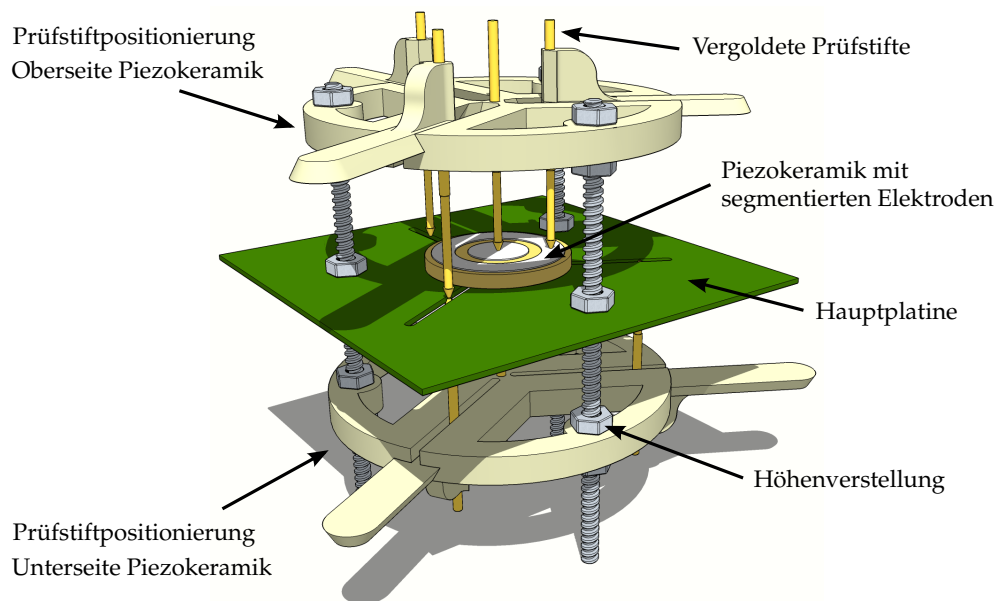


Abbildung 6.4: Programmablaufplan der automatisierten Impedanzmessung.



### 6.1.2 Modifikation des Impedanzmessplatzes

Die Verwendung mehrerer Elektroden und eines Vornetzwerkes (vgl. Kapitel 5.3) macht eine Modifikation der Impedanzmessung erforderlich [RUB13; RUJ14]. Um mögliche zukünftige Erweiterungen des Verfahrens vorzubereiten, werden bei der Modifikation bereits Punkte berücksichtigt, die im Rahmen dieser Arbeit noch keine Verwendung finden. So ist beispielsweise die getrennte Kontaktierung von bis zu drei Elektroden pro Seite der Piezokeramik vorgesehen, von denen hier nur die drei in Abbildung 5.5 dargestellten genutzt werden. Um Piezokeramiken mit unterschiedlichen Geometrien vermessen zu können, ist das auf die jeweilige Piezokeramik abgestimmte Vornetzwerk als auswechselbare Platine vorgesehen. Die zur Kontaktierung genutzten vergoldeten Prüfstifte sind zur Anpassung an unterschiedliche Radien der Elektroden in einer mechanischen Halterung einzeln verschiebbar, für deren Herstellung ein Laser-Sinter-Verfahren<sup>30</sup> eingesetzt wurde. Der mechanische Aufbau zur Elektrodenkontaktierung ist schematisch in Abbildung 6.5 dargestellt. Er ist aus Symmetriegründen auch im Zweig für die Referenzmessung im kurzgeschlossenen Zustand und somit zwei Mal im Aufbau enthalten.



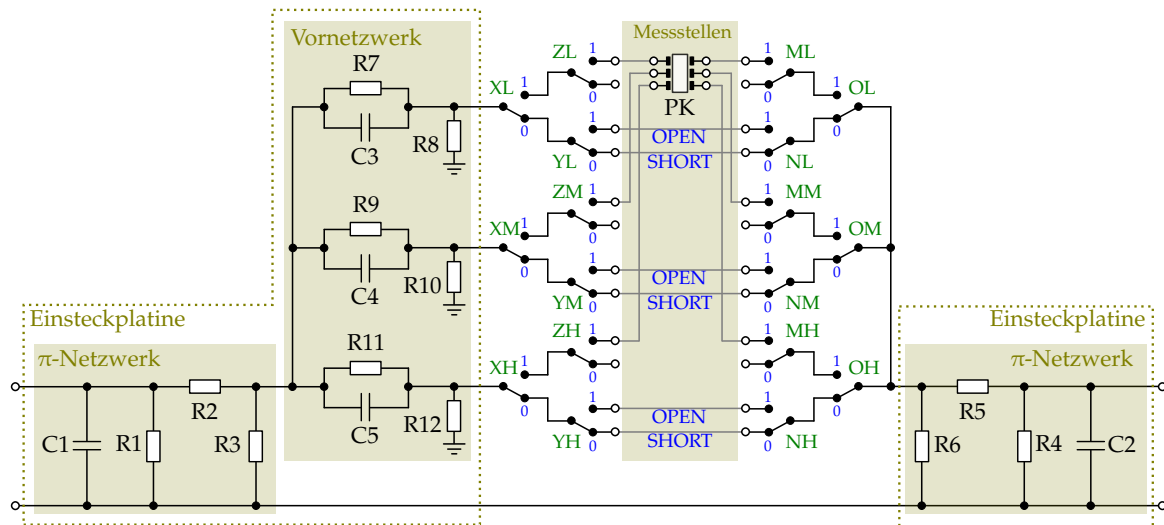
**Abbildung 6.5:** Schematische Darstellung des mechanischen Aufbaus zur Kontaktierung mehrerer Elektroden einer Piezokeramik für die modifizierte Impedanzmessung.

<sup>30</sup>Das Laser-Sinter-Verfahren (engl.: *selective laser sintering* (SLS)) ist ein additives *Rapid-Prototyping*-Verfahren, bei dem schichtweise mittels eines Laserstrahls Material in Pulverform gesintert wird und so sukzessive eine dreidimensionale Geometrie entsteht. Für den im Rahmen dieser Arbeit genutzten Aufbau ist das Material Polyamid 2200 verwendet [Eos16] worden.



Das in Abbildung 6.1 (b) (s. S. 88) dargestellte  $\pi$ -Netzwerk ist für den Impedanzbereich der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Piezokeramiken ausgelegt. Wird der Betrag der Impedanz durch die Untersuchung von beispielsweise bleifreien Piezokeramiken deutlich größer (vgl. Kapitel 8.2), ist es jedoch nicht mehr uneingeschränkt verwendbar. Zudem ist der Einsatz nur bis zu einer Maximaltemperatur von 50 °C spezifiziert, so dass Untersuchungen bei höheren Temperaturen nicht möglich sind. Aus diesen Gründen ist für den neuen Messaufbau das  $\pi$ -Netzwerk als austauschbare Aufsteckplatine auf der Hauptplatine realisiert.

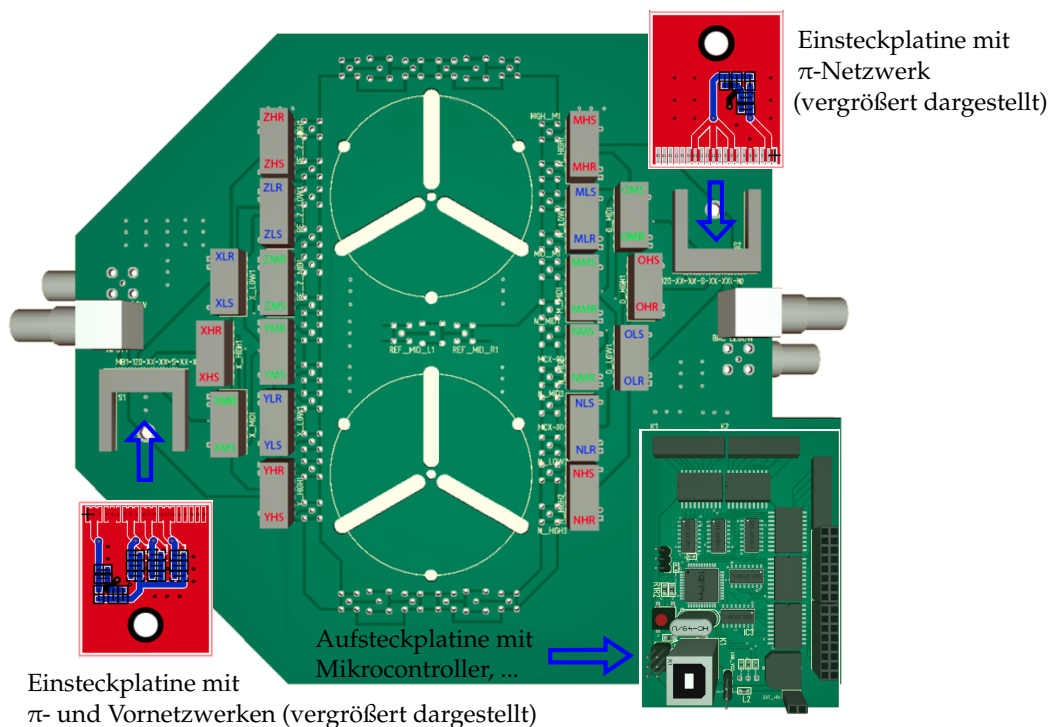
Neben dem mechanischen Teil für die Kontaktierung der Elektroden sind zahlreiche Relais auf der Hauptplatine vorhanden, mit deren Hilfe die Beschaltung verschiedener Elektrodenkonfigurationen realisiert wird. Angesteuert werden sie von einem Mikrocontroller, der neben den benötigten Treibern und Multiplexern für die Relais auf einer aufsteckbaren Platine untergebracht ist. Die Schalterstellungen lassen sich über eine Programmoberfläche grafisch konfigurieren. Schematische Übersichten der Schalterkonfiguration und der Platinen sind in den Abbildungen 6.6 und 6.7 dargestellt. Um möglichst gleiche Leitungslängen für alle Elektrodenbeschaltungen zu erreichen, ist der Aufbau symmetrisch realisiert und beinhaltet deshalb mehr Relais als rechnerisch entsprechend der Schaltzustände nötig wären. Insgesamt ist bei der



**Abbildung 6.6:** Konfigurationsbeispiel der Relais für die Elektrodenkontaktierung am Beispiel einer Piezokeramik mit drei Elektroden je Seite mit  $\pi$ - und Vornetzwerk für die einzelnen Elektroden. Die Relais (XL .. OH, grün) werden hierbei von einem Mikrocontroller während des Messablaufes angesteuert. Die Verbindungen für die Messungen zur Kalibrierung bei offener (OPEN) und geschlossener (SHORT) Messstelle sind in blau eingetragen.

Bauteil- und Komponentenauswahl berücksichtigt, dass für spätere Untersuchungen der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter ein für viele Anwendungen

interessanter Temperaturbereich bis ca. 80 °C mit dem modifizierten Aufbau untersucht werden kann (vgl. Kapitel 8.2). Das Konzept der Steuerung des Messablaufes mittels MATLAB<sup>®</sup> hat sich bewährt und wird für diesen Aufbau beibehalten. Auch die Zusammensetzung der gemessenen Impedanzverläufe aus vielen Einzelmessungen bleibt aufgrund der hohen Reproduzierbarkeit Bestandteil des Ablaufes (vgl. Kapitel 6.1.1). Für den komplexwertigen Impedanzverlauf werden im Anschluss an die Messung die charakteristischen Frequenzen automatisiert ermittelt (vgl. Anhang A.1). Der gemessene Gesamtverlauf wird zusammen mit den Einzelmessungen und den ermittelten charakteristischen Frequenzen in einer Datei mit vorgegebener Datenstruktur<sup>31</sup> für die weitere Nutzung abgespeichert.



**Abbildung 6.7:** Schematische Darstellung der Platinen des modifizierten Messaufbaus mit Hauptplatine (vgl. auch Abbildung 6.5), zwei Einsteckplatinen mit  $\pi$ - und Vornetzwerk sowie der aufsteckbaren Steuerungsplatine mit Mikrocontroller und Relais-Treibern.

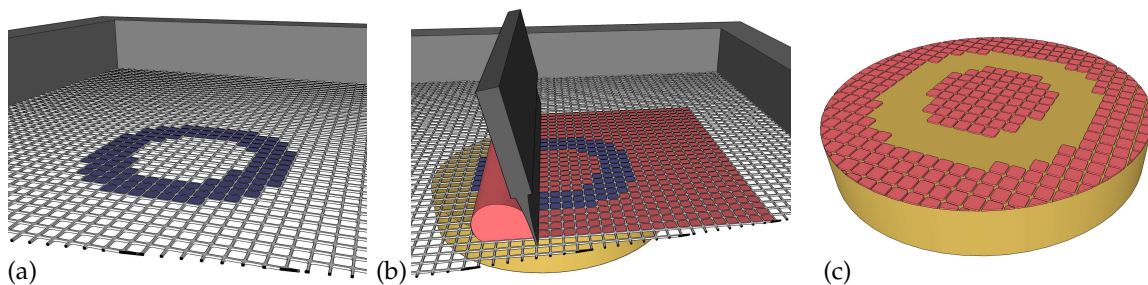
<sup>31</sup>In der Datenstruktur werden neben dem zusammengesetzten Impedanzverlauf auch die Teilmessungen (Teilbereiche und Mehrfachmessungen für Mittelung) für eine spätere Betrachtung und Kontrolle abgelegt, so dass auch im Nachgang beispielsweise die Standardabweichung der Einzelmessungen betrachtet und die Qualität der Messungen beurteilt werden kann.

## 6.2 Verfahren zur Modifikation der Elektrodentopologie

Für die Nutzung von segmentierten Elektroden ist die fertigungstechnische Realisierung der im Rahmen der Optimierung der Elektrodengeometrie ermittelten Topologie erforderlich (vgl. Kapitel 5.5). Hierfür ist die Anwendung verschiedener Verfahren möglich, die in diesem Kapitel verglichen werden. Bei der Auswahl stehen besonders die folgenden Anforderungen im Vordergrund:

- Möglichst geringer Einfluss auf das Piezokeramikmaterial
- Beibehaltung oder Erzeugung einer homogenen Polarisierung
- Dünnschicht-Elektroden für eine geringe mechanische Rückwirkung und Beeinflussung der Piezokeramikschwingung
- Kleine Mindestabstände zwischen benachbarten Elektroden und zum Rand der Piezokeramik
- Hohe Reproduzierbarkeit für die Vergleichbarkeit verschiedener Exemplare

Insgesamt können die Verfahren danach unterschieden werden, ob eine bereits vorhandene vollflächige Elektrode modifiziert oder segmentierte Elektroden aufgebracht werden. Zusätzlich spielt es eine wichtige Rolle, zu welchem Zeitpunkt jeweils die Polarisierung der Piezokeramik erfolgt. Einige Verfahren erfordern eine Polarisierung im Anschluss an die Elektrodensegmentierung, wodurch ein inhomogenes Feld vorliegt und die Annahme eines homogenen Piezokeramikmaterials im Rahmen der Simulationen nicht mehr zutreffend ist.



**Abbildung 6.8:** Schematische Darstellung des Ablaufes beim Siebdruckverfahren in Anlehnung an [BBS08] mit (a) Gitter und Maske im Druckrahmen, (b) Verteilung der Silberpaste auf dem Gitter und der Maske mittels eines Rakels sowie (c) Piezokeramik und aufgebrachter segmentierter Elektrode.

Ein übliches Verfahren zur Aufbringung von Elektroden ist das Siebdruckverfahren (vgl. Abbildung 6.8), bei dem mit Hilfe einer Maske eine silberhaltige Paste mittels eines Rakels aufgebracht wird. Um eine dauerhafte Verbindung mit der Piezokeramik herzustellen, muss diese Paste im Anschluss eingebrannt werden (bei ca. 800°C).

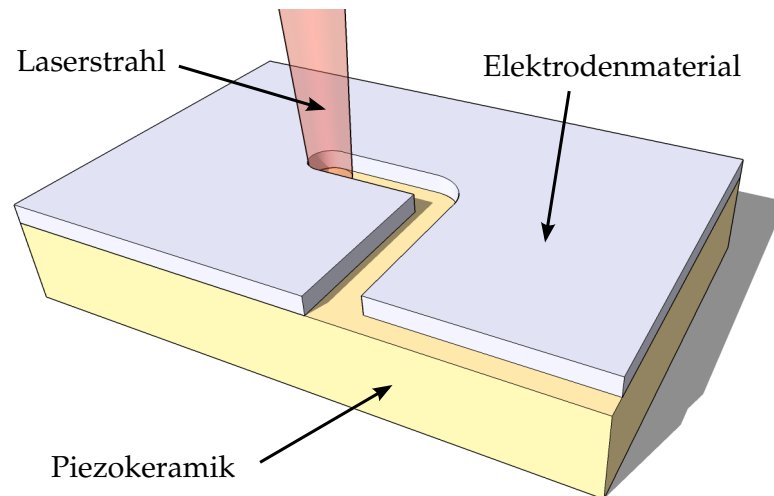
Dadurch geht eine vorher vorhandene Polarisierung verloren und eine erneut vorzunehmende Polarisierung bei vorhandener Segmentierung der Elektroden bringt den oben genannten Nachteil der Inhomogenität mit sich. Zudem liegen die mit Hilfe dieses Verfahrens erzeugten üblichen Schichtdicken im Bereich von 10 µm oder mehr (Dickschichtelektroden, vgl. [Pic16]). Diese führen zu einem nicht mehr zu vernachlässigenden Massebelag auf der Oberfläche der Piezokeramik. Durch die Verwendung einer Maske wird zusätzlich die minimale Ortsauflösung beschränkt und feine Strukturen und Mindestabstände können nicht realisiert werden. Auch die speziell für jede Elektrodengeometrie anzufertigende Maske ist kostenintensiv und aufwendig, so dass aus diesen Gründen dieses Verfahren hier nicht geeignet ist.

Für die Erzeugung von Dünnschichtelektroden (wenige Mikrometer Dicke) wird üblicherweise eine physikalische Gasphasenabscheidung verwendet (auch als Sputtern oder Bedampfen bezeichnet; engl.: *physical vapour deposition* (PVD)). Hierbei wird in einer vakuumisierten Kammer das aufzubringende Material<sup>32</sup> verdampft und auf dem Zielsubstrat kondensiert, in diesem Falle also der Piezokeramik. Diese kann für dieses Verfahren vor der Beschichtung bereits ohne Elektroden polarisiert werden. Da keine nachträgliche Erhitzung nötig ist, bleibt die gewünschte homogene Polarisierung bei diesem Verfahren unbeeinflusst.

Zur Strukturierung bietet sich anschließend das Verfahren der Laserablation an (vgl. Abbildung 6.9). Bei diesem Verfahren wird mit Hilfe eines Laserstrahls Material modifiziert, beispielsweise zum Schweißen, Schneiden, Bohren, Mikrobearbeiten oder Abtragen. Diese Vielfalt der möglichen Anwendungen ergibt sich aus der hohen Abhängigkeit der Laserwirkung von den gewählten Prozessparametern. Der Abtrag ist dabei stark abhängig von der Wellenlänge des eingesetzten Lasers, seiner Intensität, der Dauer und Wiederholfrequenz der Einwirkung sowie dem bearbeiteten Material [MiOs10]. Zusätzlich spielen auch Parameter wie örtliche und zeitliche Kohärenz, Polarisierung und Einfallswinkel eine Rolle. Meist wird der Laser gepulst betrieben und je nach Dauer der Einzelpulse wird zwischen Kurzpulslasern (ns-Bereich) und Ultrakurzpulslasern (ps- bis fs-Bereich) unterschieden. Letztere bieten den Vorteil, dass durch die sehr kurze Einwirkzeit eine Wirkung auf das Substrat minimiert werden kann, so dass beispielsweise bei der hier betrachteten Anwendung zur Strukturierung der Elektrode die Piezokeramik als nahezu unverändert angenommen werden kann („kalte“ Bearbeitung).

---

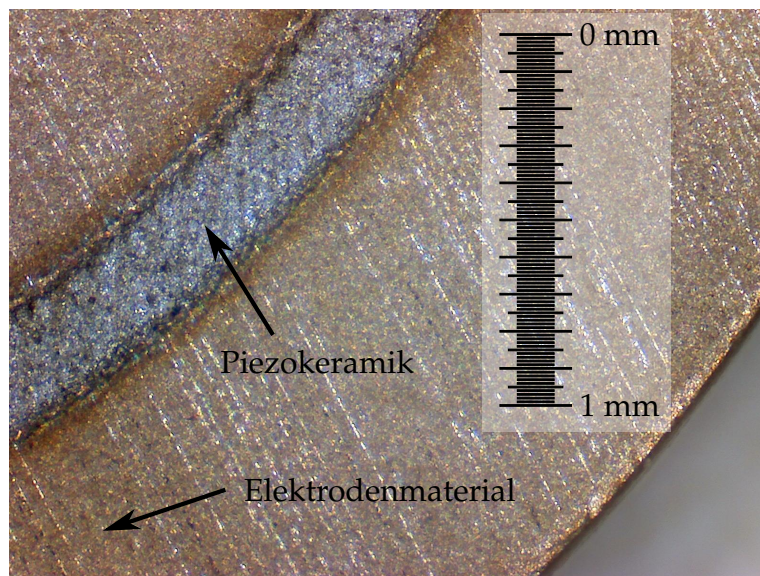
<sup>32</sup>Für Elektroden von Piezokeramiken wird meist Kupfer-Nickel, Gold oder Silber verwendet. Diese können alle mittels PVD aufgebracht werden.



**Abbildung 6.9:** Schematische Darstellung der Segmentierung einer Elektrode mittels Laserablation.

Da es sich bei den physikalisch und chemisch beteiligten Prozessen (z. B. thermisches und nicht-thermisches Aufbrechen von Bindungen) um stark nichtlineare Vorgänge handelt, ist eine genaue Einstellung und Regelung der Prozessparameter erforderlich [Bae11]. Die beiden meistverwendeten Lasersysteme sind CO<sub>2</sub>-Laser ( $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$ ) und Nd:YAG-Laser ( $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$ ; Abk. für: Neodym-dotierter Yttrium-Aluminium-Granat-Laser) [EiEi10]. Letzterer erlaubt aufgrund der geringeren Wellenlänge die Erzeugung feinerer Strukturen und kommt deshalb im Rahmen dieser Arbeit für die Modifikation der Elektroden zum Einsatz. Die Mindestbreite des Laserstrahls beträgt hierbei 0,3 mm und ist bei der Optimierung der Elektroden berücksichtigt (vgl. Tabelle 5.5, Seite 82). Bei eckigen Strukturen müssten auch unterschiedliche Innen- und Außenradien beachtet werden, wie sie in Abbildung 6.9 angedeutet sind (hier aufgrund der geforderten Rotationssymmetrie jedoch nicht verwendet).

Die für diese Arbeit genutzten Piezokeramiken mit segmentierten Elektroden wurden freundlicherweise von dem Unternehmen PI Ceramic GmbH gefertigt, da hier das nötige Fachwissen und die Technik zur Elektrodenfertigung und -strukturierung vorhanden sind (<http://piceramic.de>). Abbildung 6.10 zeigt eine Mikroskopaufnahme der realisierten Elektrodenmodifikation. Die sehr gute Einhaltung der geometrischen Vorgaben für die Strukturierung (vgl. Kapitel 5.5) sind hier zu erkennen. Insgesamt sind über 20 Exemplare realisiert worden, um auch Exemplarstreuungen bezüglich der Einhaltung der geometrischen Randbedingungen sowie des gemessenen Impedanzverlaufes betrachten zu können. Eine Auswahl dieser modifizierten Piezokeramiken ist in Abbildung 7.7 zu sehen.



**Abbildung 6.10:** Mikroskopaufnahme der gelaserten Kupfer-Nickel-Elektrode. Zwischen den beiden Elektroden ist die freigelaserte Piezokeramik zu sehen. Die Breite der Laserspür entspricht dem Mindestabstand der Elektroden.

Der technische Aufwand für die Laserablation ist zurzeit vergleichsweise hoch, jedoch ist anzunehmen, dass durch den Einzug von Laserschneidsystemen in den privaten Anwendungsbereich in naher Zukunft ein deutlicher Preisverfall zusammen mit einem Innovationsschub zu erwarten ist, vergleichbar mit der Entwicklung auf dem Gebiet der 3D-Drucker in den vergangenen Jahren. Ein Beispiel unter vielen ist hier das Modell Glowforge, das auf Grundlage eines der bisher erfolgreichsten *Crowdfundings* (dt.: Schwarmfinanzierung, meist übers Internet initiiert) ins Leben gerufen wurde ([Glo15]).



## 7 Materialparameterbestimmung für Piezokeramiken

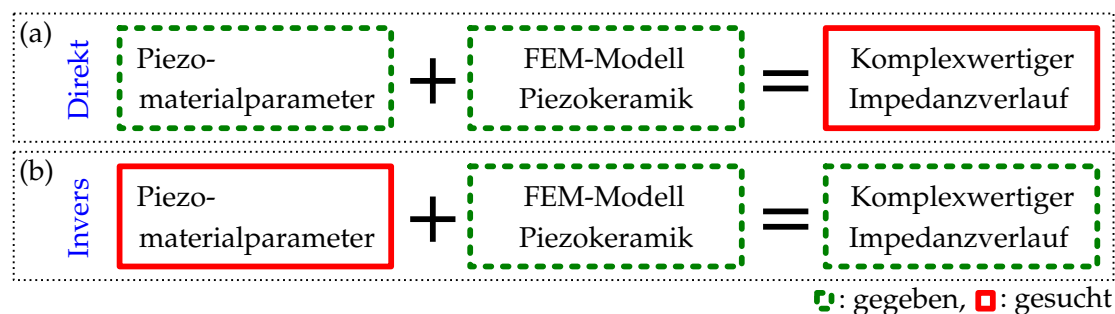
In diesem Kapitel wird die Bestimmung der Materialparameter für Piezokeramiken erläutert. Das zum Einsatz kommende inverse Verfahren zur Optimierung wird im ersten Unterkapitel 7.1 beschrieben. Da es sich bei dem inversen Problem um ein im mathematischen Sinne schlecht gestelltes Problem handelt, ist eine eindeutige Lösung oder die Erreichung eines globalen Optimums schwierig. Aus diesem Grund spielt die Ermittlung von guten Startwerten für die Optimierung eine große Rolle, da hierdurch die Zuverlässigkeit des Verfahrens gesteigert werden kann. Die Startwertermittlung bildet deshalb den zweiten Teil dieses Kapitels.

Im dritten Unterkapitel wird das entwickelte Verfahren zur Materialparameterbestimmung auf eine PIC255-Piezokeramik angewendet. Da es sich um ein gut bekanntes und oft eingesetztes Material handelt, sind Angaben für einen Vergleich in der Literatur vorhanden (vgl. auch Unterkapitel 7.5). Dennoch gibt es keine allgemein anerkannte Verifikationsmethode, mit der eine Überprüfung der verschiedenen Materialparameter möglich wäre, so dass ein wichtiges Mittel für die Verifikation fehlt. Dies erklärt auch die teilweise großen Abweichungen der in der Literatur vorhandenen Materialparameter untereinander. Jedoch kann die Konsistenz der ermittelten Materialparameter überprüft werden. Das im Rahmen dieser Arbeit eingesetzte Verfahren zur Überprüfung und Sicherstellung der Konsistenz ist im nächsten Unterkapitel beschrieben. Es hat sich in Untersuchungen gezeigt, dass durchaus auch Materialparameter im Umlauf sind, die diesen physikalischen Konsistenzbetrachtungen nicht standhalten [RRH11]. Das Kapitel schließt mit einer Plausibilitätsbetrachtung der beispielhaft ermittelten Materialparameter.

### 7.1 Optimierung mittels inversem Verfahren

Bei mathematischen Problemen kann zwischen direkten (auch: Vorwärtsproblemen) und inversen Problemen unterschieden werden. Beim direkten Problem wird aus-

gehend von einem Modell und Eingangsdaten direkt eine Wirkung des Systems berechnet. Demgegenüber besteht die Lösung eines inversen Problems darin, aus einer gegebenen Wirkung und einem Modell auf die Eingangsdaten zu schließen.<sup>33</sup> Der Unterschied zwischen dem direkten und dem inversen Problem der Piezoelektrizität ist in Abbildung 7.1 grafisch verdeutlicht. Das FEM-Modell der Piezokeramik bildet hierbei das mathematische Modell, die Materialparameter repräsentieren die Eingangsdaten und der simulierte Impedanzverlauf stellt die Wirkung des Systems dar.



**Abbildung 7.1:** (a) Direktes und (b) inverses Problem der Piezoelektrizität. Gegebene Größen sind jeweils in grün (gestrichelte Linie) und gesuchte in rot kenntlich gemacht.

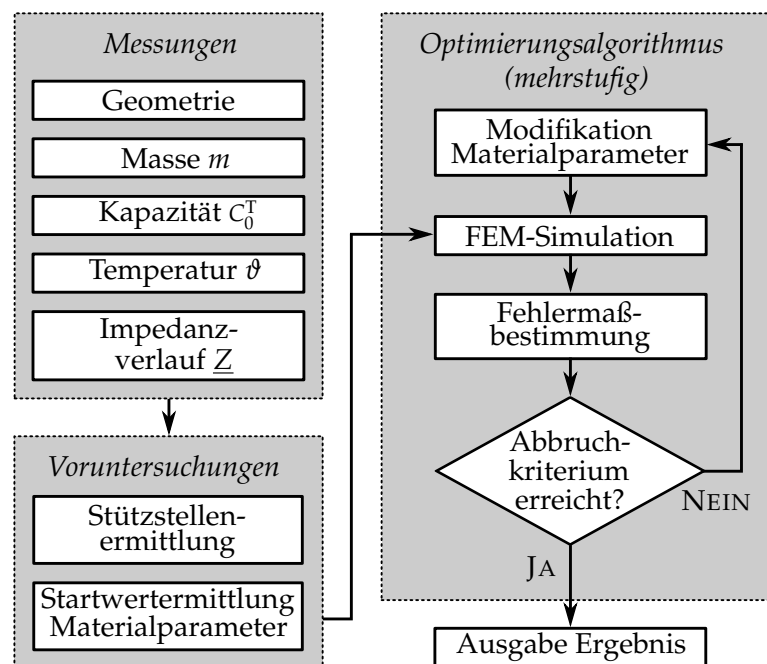
Üblicherweise ist das inverse Problem schwieriger zu lösen und es kann zwischen gut und schlecht gestellten Problemen unterschieden werden. Schlecht gestellte Probleme ergeben sich unter anderem dadurch, dass eine gefundene Lösung nicht eindeutig ist oder die Lösung nicht stetig von den Eingangsdaten abhängt [Rie03]. Bei dem hier betrachteten inversen Problem im Rahmen der Materialparameterbestimmung handelt es sich um ein solches schlecht gestelltes Problem [KLM06].

In Abbildung 7.2 ist der Ablauf der Materialparameterbestimmung dargestellt. Zunächst werden einige Kenngrößen der Piezokeramik durch direkte Messungen ermittelt (Geometrie  $D_p$  und  $h_p$ , Masse  $m$ , freie elektrische Kapazität  $C_0^T$ , Temperatur  $\vartheta$  und der komplexwertige Impedanzverlauf  $\underline{Z}$ ). Da es bei der Materialparameterbestimmung auf einen genauen Vergleich von gemessenem und simuliertem Impedanzverlauf ankommt, wird hier die harmonische Analyse zur Ermittlung der simulierten Impedanz genutzt (vgl. Kapitel 4.2), um die Einschränkungen der transienten Ermittlung mittels des Impulsverfahrens (vgl. Kapitel 4.3) auszuschließen. Da aufgrund der höheren benötigten Rechenzeit dieses Verfahrens eine Ermittlung des gesamten

<sup>33</sup>Ein Beispiel für ein direktes Problem: Berechnung des Schallfeldes an einem gegebenen Punkt im Raum für eine gegebene Schallquelle. Die inverse (schlecht gestellte) Problemstellung: Bestimmung der Position einer Schallquelle nach Messung des Schallfeldes an einem Ort.



Impedanzverlaufes im Rahmen einer Optimierung nicht realisierbar ist, werden im ersten Schritt der Voruntersuchungen deshalb repräsentative Frequenzstützstellen anhand des gemessenen Verlaufes ermittelt. Für diese werden dann die harmonischen Analysen zur Ermittlung der komplexwertigen Impedanz durchgeführt und im Rahmen der Optimierungsdurchläufe für die Bestimmung des später beschriebenen Fehlermaßes eingesetzt. Den wichtigsten Punkt der Voruntersuchungen stellt die Startwertermittlung der Materialparameter dar. Hierauf wird im Kapitel 7.2 im Detail eingegangen.



**Abbildung 7.2:** Gesamtablauf der Materialparameteroptimierung mittels eines inversen Verfahrens zur Angleichung eines simulierten an einen gemessenen Impedanzverlauf einer Piezokeramik.

Im Anschluss an die Voruntersuchung wird die Optimierung der Materialparameter durchgeführt. Hier hat es sich in vielen Untersuchungen als nützlich erwiesen, eine mehrstufige Strategie der Anpassung der Materialparameter zu verfolgen (vgl. z. B. [RuLe09; PAB10; RRH11]). Zu Beginn werden die Materialparameter mit dem größten Einfluss auf den Impedanzverlauf optimiert. In den folgenden Stufen kommen dann weniger einflussreiche Größen hinzu. In der abschließenden Optimierungsstufe werden noch einmal alle Materialparameter gleichzeitig optimiert (mit reduziertem Variationsbereich), um auch bisher nicht berücksichtigte Quereinflüsse in die Optimierung einfließen zu lassen. Die in den jeweiligen Stufen berücksichtigten Materialparameter sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst.

**Tabelle 7.1:** In den vier Stufen der Optimierung jeweils variierte Materialparameter.

Optimierungsstufe	Varierte Materialparameter
1	$c_{33}^E, \epsilon_{33}^S, e_{33}, \alpha_M, \alpha_K$
2	$c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, \alpha_M, \alpha_K$
3	$\epsilon_{11}^S, e_{31}, e_{15}, c_{44}^E, \alpha_M, \alpha_K$
4	Alle Materialparameter

Anders als bei bisherigen Verfahren werden für die verschiedenen Stufen der Optimierung nicht jeweils unterschiedliche Frequenzbereiche ausgewertet. Es wird hingegen der Bereich der Dickenresonanz genutzt, um die Konsistenz der ermittelten Materialparameter besonders auch im später genutzten Frequenzbereich zu erhöhen. Dieses Vorgehen wird durch die im Rahmen dieser Arbeit für diesen Frequenzbereich erhöhte Sensitivität durch die Segmentierung der Elektroden erst ermöglicht (vgl. Kapitel 5.5). Die Rayleigh-Dämpfungsparameter werden bei der Optimierung in jeder Stufe berücksichtigt, da für sie die Startwerte nicht direkt aus den analytischen Gleichungen folgen (vgl. Kapitel 7.2). Da die verschiedenen Materialparameter sehr unterschiedliche Größenordnungen aufweisen (z. B.  $10^{-9}$  für Permittivitäten und  $10^{11}$  für Steifigkeitskonstanten), ist vor der Optimierung eine Normierung auf eine einheitliche Größenordnung nötig [Lah08; KaKa08].

Das für die Optimierung der Elektrodentopologie und des Vornetzwerkes eingesetzte Sensitivitätsmaß (vgl. Kapitel 5.4) kann für den mittels harmonischer Analyse ermittelten Impedanzverlauf nicht verwendet werden. Da hier nur für ausgewählte Frequenzstützstellen komplexwertige Impedanzen ermittelt werden, ist die Berechnung der für dieses Maß nötigen zweidimensionalen Kreuzkorrelationsfunktion nicht möglich. Deshalb wird an dieser Stelle auf das übliche Maß des Abstandes in Impedanzrichtung im Betrag des komplexwertigen Impedanzverlaufes zurückgegriffen. Die Aufsummierung der quadrierten Abstände zwischen den Betragswerten von simuliertem und gemessenem Impedanzverlauf für die  $N$  Frequenzstützstellen nach Gleichung (7.1) bildet somit die zu optimierende Zielfunktion  $F_h$  im Rahmen des inversen Verfahrens.

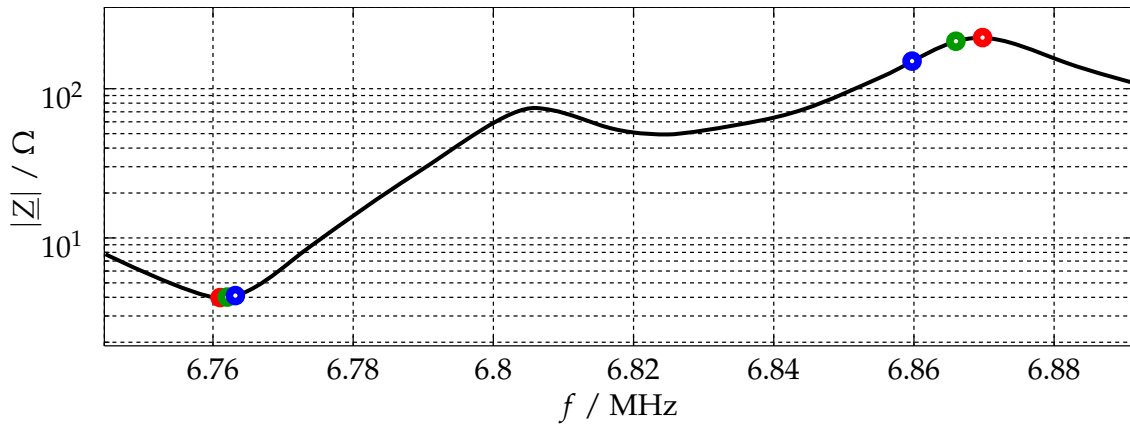
$$F_h = \sum_{n=1}^N (|Z_{\text{sim}}(f_n)| - |Z_{\text{mess}}(f_n)|)^2 \quad (7.1)$$

## 7.2 Startwerte der Materialparameter für die Optimierung

Wie bei Optimierungen üblich hängt auch das Ergebnis der Optimierung im Rahmen der Materialparameterbestimmung von den Startwerten ab. Es werden deshalb Startwerte für die Materialparameter benötigt, die nahe an dem gesuchten Materialparametern liegen. Ausgangspunkt für die Bestimmung der Startwerte sind die Größen, die im Rahmen der Voruntersuchung für die Piezokeramik ermittelt werden. Neben den geometrischen Abmessungen, der Kapazität  $C_0^T$  und der Masse  $m$  (daraus abgeleitet die Dichte  $\rho$ ) ist dies die Messung des komplexwertigen Impedanzverlaufes. Aus diesem werden charakteristische Frequenzen, wie beispielsweise die Serien- und Parallelresonanzfrequenzen, ermittelt (vgl. Kapitel A.1). Sie werden in den analytischen Verfahren zur Bestimmung vieler der gesuchten Materialparameter verwendet (vgl. Kapitel 2.1). Da die Untersuchungen aufgrund der geforderten Konsistenz der Materialparameter im Rahmen dieser Arbeit an nur einer Probekörpergeometrie und um einen Frequenzarbeitspunkt vorgenommen werden, lässt sich mit Hilfe der analytischen Verfahren auf Basis der verschiedenen Normen ([IEE87; DIN88; DIN02b]) jedoch nicht direkt ein vollständiger Materialparametersatz bestimmen.

Die erwähnten charakteristischen Frequenzen werden in vielen der analytischen Gleichungen verwendet und spielen deshalb eine große Rolle für die Startwertermittlung (vgl. Anhang A.4, S. 129 ff). Üblicherweise werden anstelle der Serienresonanzfrequenz  $f_s$  die Minimalimpedanzfrequenz  $f_m$  und anstelle der Parallelresonanzfrequenz  $f_p$  die Maximalimpedanzfrequenz  $f_n$  als Näherungen genutzt (z. B. [DIN02b]). Diese sind in der Betragsdarstellung des Impedanzverlaufes vergleichsweise einfach zu ermitteln.

Wie im Anhang A.1 gezeigt ist, gilt diese Näherung jedoch nur für Piezokeramiken mit geringen Verlusten, da diese Frequenzpaare für größer werdende Dämpfung immer weiter auseinander rücken (vgl. Abbildungen 7.3 und A.2). Zudem tritt in der Praxis häufig der Fall auf, dass die eigentlichen Resonanzen von Oberschwingungen weiterer Resonanzstellen überlagert sind. Dies gilt besonders für den für die Materialparameterbestimmung genutzten Dickenresonanzbereich. Dies führt oft zu einer Verschiebung der Minima und Maxima des Betrages der Impedanz, so dass im Rahmen dieser Arbeit stattdessen die Ermittlung der tatsächlichen Serien- und Parallelresonanz aus dem komplexwertigen Impedanzverlauf angestrebt wird.

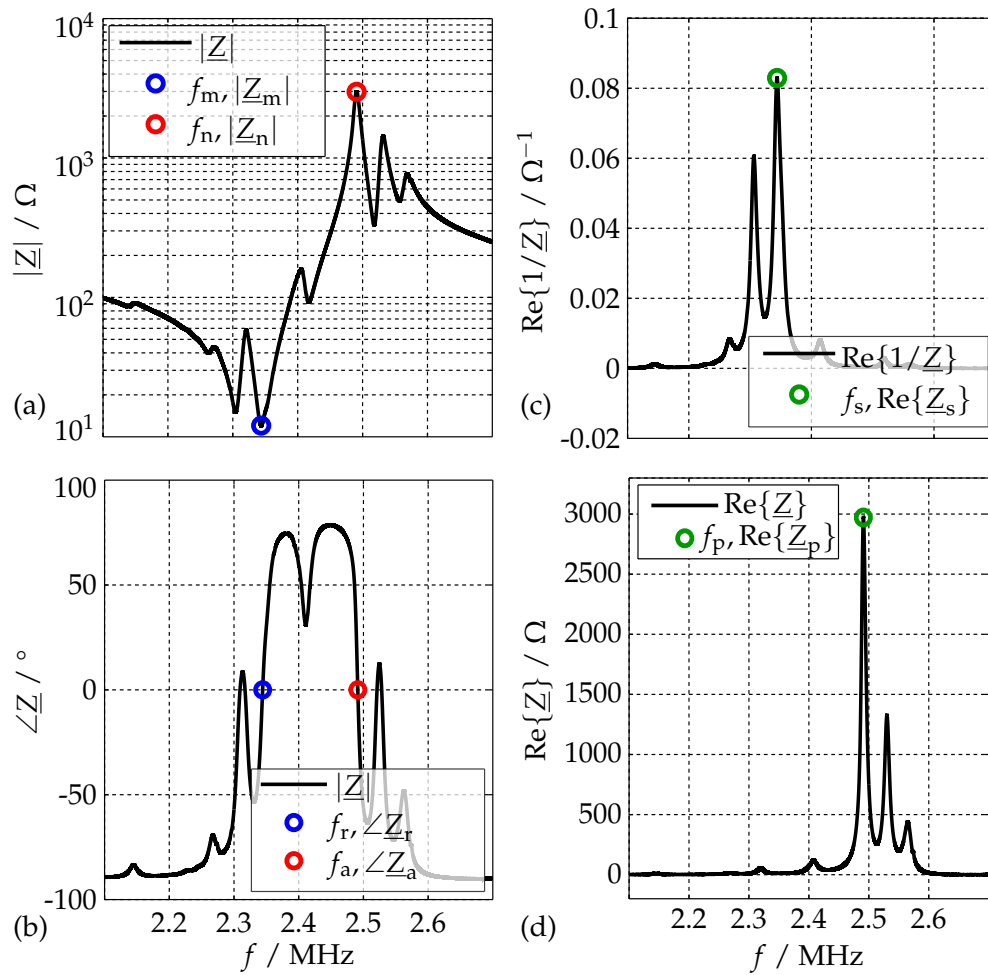


**Abbildung 7.3:** Lage der sechs charakteristischen Frequenzen (vgl. Anhang A.1) im Betragsverlauf der Impedanz  $\underline{Z}$  für eine Resonanzstelle bei nicht zu vernachlässigender Dämpfung. Der Unterschied aufgrund der Näherung von  $f_s$  und  $f_p$  durch  $f_m$  und  $f_n$  kann nicht mehr vernachlässigt werden.

Der komplexwertige Verlauf wird hierzu zunächst getrennt nach Betrag und Phase ausgewertet, wobei die Minimal- und die Maximalfrequenzen  $f_m$  und  $f_n$  im Betragsverlauf ermittelt werden. Im Phasenverlauf hingegen lassen sich durch die Ermittlung der Nullstellen die Resonanz- und die Antiresonanzfrequenzen  $f_r$  und  $f_a$  bestimmen<sup>34</sup>. Sind im Phasenverlauf keine Nullstellen vorhanden, ist die Bestimmung von  $f_r$  und  $f_a$  auf diese Weise nicht möglich (Abbildung 7.4 (b)). Da sie jedoch in die weiteren Rechnungen nicht eingehen, sondern nur die Serien- und Parallelresonanz genutzt werden, stellt dies keine Einschränkung für das hier vorgestellte Verfahren zur Startwertermittlung dar.

Für die Bestimmung der in den analytischen Gleichungen genutzten Serien- und Parallelresonanzfrequenzen wird anstelle der Betrags- und Phasendarstellung die Trennung in Real- und Imaginärteil genutzt. Im Realteil der Impedanz kann durch eine Maximumssuche die Lage der Parallelresonanz  $f_p$  bestimmt werden. Wird anstelle der Impedanz deren Kehrwert, die Admittanz, getrennt nach Real- und Imaginärteil ausgewertet, ergibt sich für die Lage des Maximums wiederum im Realteil die Serienresonanzfrequenz  $f_s$ . Die beiden Frequenzen  $f_s$  und  $f_p$  lassen sich auf diese Weise zuverlässig bestimmen und können anstelle der sonst näherungsweise genutzten Minimal- und Maximalimpedanzfrequenzen verwendet werden. Die Ermittlung dieser charakteristischen Frequenzen ist in Abbildung A.3 dargestellt.

<sup>34</sup>Sind mehr als zwei Nullstellen im Phasenverlauf für eine Resonanzstelle vorhanden (vgl. Abbildung 7.4), kann entsprechend Gleichung (A.1) die Auswahl der zutreffenden Frequenzen getroffen werden.



**Abbildung 7.4:** Ermittlung der charakteristischen Frequenzen aus einem gemessenen komplexwertigen Impedanzverlauf  $\underline{Z}$ . Dabei werden die Minimal- und Maximalimpedanzfrequenz  $f_m$  und  $f_n$  aus dem Betragsverlauf der Impedanz (a) sowie die Resonanz- und Antiresonanzfrequenz  $f_r$  und  $f_a$  aus dem Phasenverlauf (b) bestimmt. Die Serienresonanzfrequenz  $f_s$  ergibt sich aus dem Maximum des Realteils der Admittanz (c) und die Parallelresonanzfrequenz  $f_p$  wird aus dem Maximum des Realteils der Impedanz ermittelt (d). (Die Abszisse aller 4 Teilabbildungen ist für eine leichte Zuordnung gleich gewählt.)

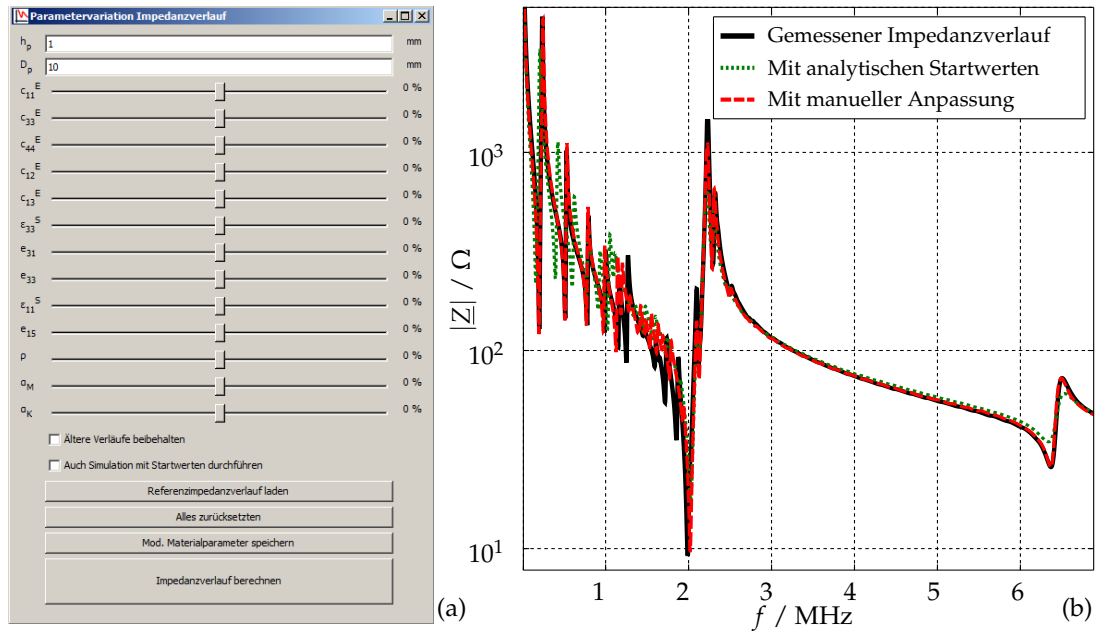
Die analytischen Gleichungen der Normen, die auch bei der vorliegenden Geometrie zur Abschätzung der Startwerte geeignet sind, sind im Anhang A.4 in den Gleichungen (A.5) bis (A.28) zusammengefasst. Für die Bestimmung weiterer Größen wird als Näherung angenommen, dass es sich um ein isotropes Material handelt. Die Steifigkeitsmatrix lässt sich dann durch Gleichung (7.4) beschreiben. Aus der nach Gleichung (7.2) bekannten Steifigkeitskonstanten  $c_{33}^E$  und dem daraus abgeleiteten Elastizitätsmodul  $E$  nach Gleichung (7.3) sowie der planaren Poissonzahl  $\nu^P$  (vgl. Kapitel A.4) lassen sich die Einträge der Steifigkeitsmatrix grob abschätzen [Rau12].

$$c_{33}^E = 4 \cdot (1 - k_t^2) \rho \left( f_p^{(4)} \right)^2 h_p^2 \quad (7.2)$$

$$E = c_{33}^E (1 - 2\nu^P) \cdot \frac{1 + \nu^P}{1 - \nu^P} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{c}_{iso}^E = \frac{E (1 + \nu^P)^{-1}}{(1 - 2\nu^P)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \nu^P & \nu^P & \nu^P & . & . & . \\ \nu^P & 1 - \nu^P & \nu^P & . & . & . \\ \nu^P & \nu^P & 1 - \nu^P & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{2} - \nu^P & . & . \\ . & . & . & . & \frac{1}{2} - \nu^P & . \\ . & . & . & . & . & \frac{1}{2} - \nu^P \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

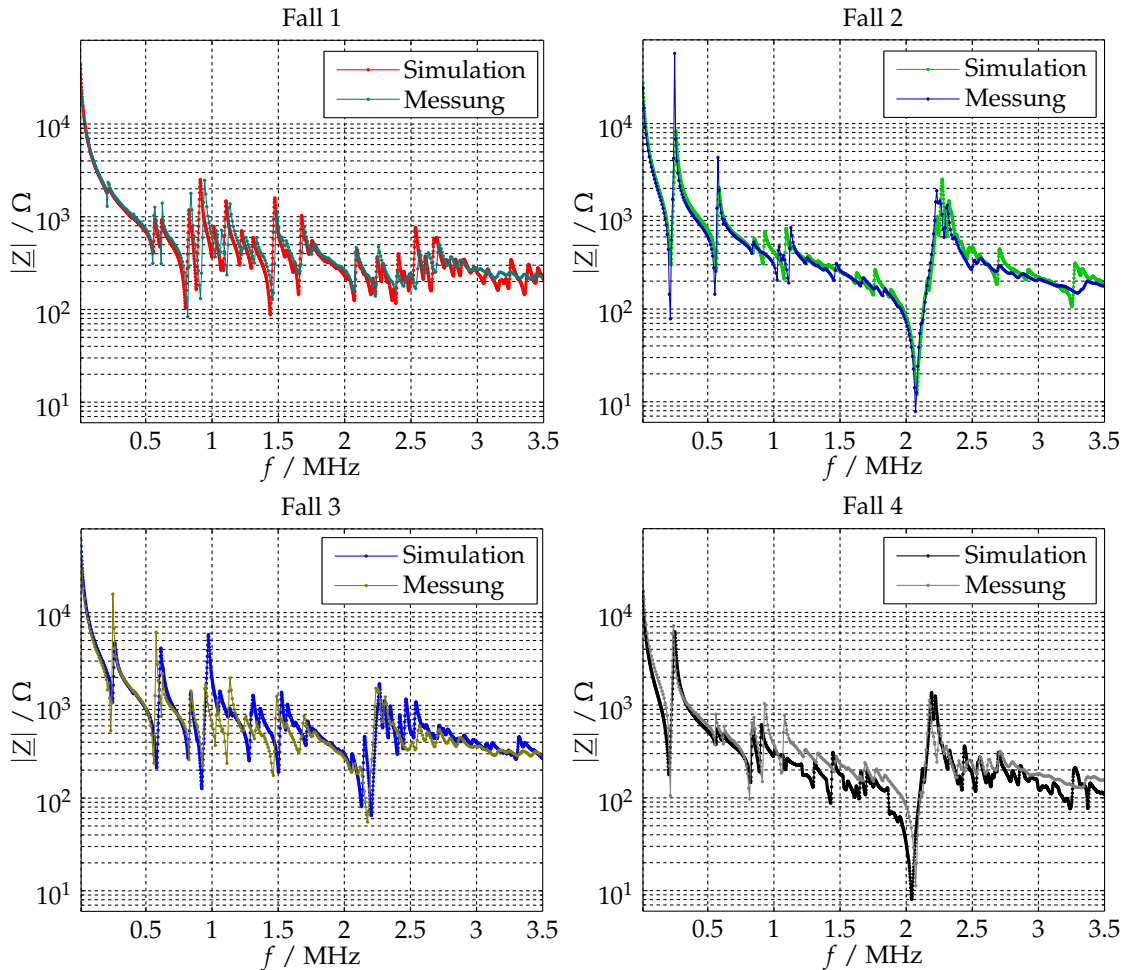
Mit den auf diese Weise ermittelten Schätzwerten für die noch unbekannten Steifigkeitskonstanten können weitere gesuchte Materialparameterstartwerte ermittelt werden (vgl. Gleichungen (A.29) bis (A.50)). Insgesamt bleiben nach der Auswertung der im Anhang A.4 aufgeführten analytischen Ausdrücke vier unbekannte Parameter übrig, für die mit der in diesem Kapitel beschriebenen Methode nicht direkt Startwerte bestimmt werden können. Dies sind die Permittivität  $\varepsilon_{11}^S$ , der piezoelektrische Modul  $e_{15}$  sowie die beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$ . Unter Annahme eines aus a priori-Kenntnissen gewonnenen logarithmischen Dekrements  $D$  werden die Startwerte für die beiden letzteren mit Hilfe der Gleichungen (3.46) bis (3.48) (s. S. 50) für den Bereich der Dickenresonanz bestimmt. Da die beiden verbliebenen Unbekannten bei der für die analytische Auswertung verwendeten Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden einen sehr geringen Einfluss auf den Impedanzverlauf haben (vgl. Tabelle 5.2), werden ihre Startwerte näherungsweise als  $\varepsilon_{11}^S = \varepsilon_{33}^S$  und  $e_{15} = 2/3 \cdot e_{33}$  angenommen. Für den auf diese Weise automatisiert gewonnenen Startparametersatz wird im Anschluss eine manuelle Anpassung vorgenommen, bei der durch Änderung einzelner Materialparameter und direkter Simulation eine Feinanpassung des simulierten an den gemessenen Betrag der Impedanz möglich ist. Die hierfür entstandene grafische Programmoberfläche ist in Abbildung 7.5 (a) dargestellt. Hierdurch kann eine weitere Verbesserung der Startwerte für analytisch nur mit großer Unsicherheit zu bestimmenden Materialparameter erreicht werden. Das Ergebnis dieser manuellen Feinanpassung ist dem gemessenen und dem mit den analytisch bestimmten Startwerten simulierten Verlauf in Abbildung 7.5 (b) gegenübergestellt. Der so bestimmte Startdatensatz bildet die Grundlage der Materialparameterbestimmung mittels eines inversen Verfahrens.



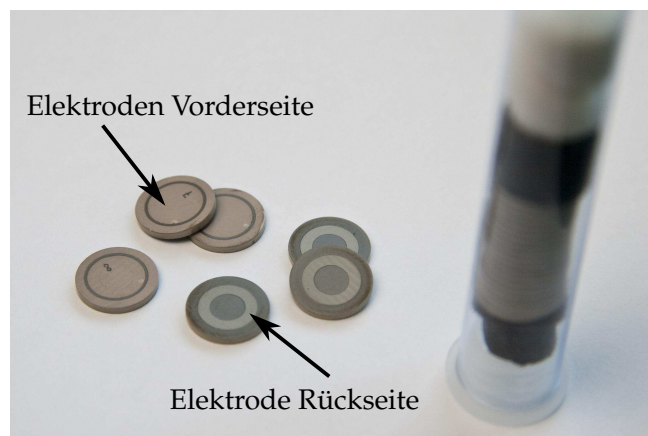
**Abbildung 7.5:** (a) Programmoberfläche zur manuellen Modifikation der Materialparameter für eine Feinanpassung des Startdatensatzes und (b) der Vergleich von gemessenem Betrag des Impedanzverlaufes mit dem simulierten Ergebnis auf Grundlage der analytisch automatisiert ermittelten Startwerte für die Materialparameter sowie den anschließend manuell modifizierten Startwerten.

## 7.3 Anwendung des Verfahrens auf eine PIC255-Piezokeramik

Um das im Kapitel 5 beschriebene Verfahren zu verifizieren, sind in Abbildung 7.6 die Mess- und die Simulationsergebnisse mit den Startwerten für die Materialparameter nach Kapitel 7.2 für die vier unterschiedlichen Beschaltungsfälle ((a)-(c) aus Abbildung 5.7 und  $\underline{Z}_p$ ) gegenübergestellt. Da es sich noch nicht um optimierte Materialparameter handelt, ist kein exakter Abgleich zu erwarten, jedoch weisen die Mess- und die zugehörigen Simulationsergebnisse bereits eine hohe Übereinstimmung auf. Da diese für alle in Kapitel 5 hergeleiteten Fälle vorhanden ist, lassen sich aufgrund dieses Ergebnisses die hergeleitete Vorgehensweise und die zugehörige Modellbildung verifizieren. Auch die Startwertermittlung, wie sie im Kapitel 7.2 beschrieben ist, kann aufgrund dieses Vergleiches als verifiziert angesehen werden, da mit einem schlecht ermittelten Startparametersatz nur eine sehr viel schlechtere Übereinstimmung erreicht werden kann. Die dargestellten Messwerte sind an den in Abbildung 7.7 gezeigten PIC255-Piezokeramiken ermittelt, deren Elektroden nach der im Kapitel 6.2 beschriebenen Methode modifiziert sind.



**Abbildung 7.6:** Vergleich von Simulations- (basierend auf den Startwerten der Materialparameter, vgl. Kapitel 7.2) und Messergebnissen für die vier Fälle der Elektrodenbeschaltung. Die Fälle eins bis vier entsprechen dabei den auf Seite 71 in den Abbildungen 5.7 (a)-(c) dargestellten Fällen (1-3) sowie der Beschaltung zur Ermittlung der Impedanz  $\underline{Z}_p$  (Fall 4).



**Abbildung 7.7:** Die Piezokeramiken aus dem Material PIC255 mit Kupfer-Nickel-Elektroden, die mittels Laserablation segmentiert wurden (vgl. Kapitel 6.2). Die Radien entsprechen dem Optimierungsergebnis aus Kapitel 5.5.



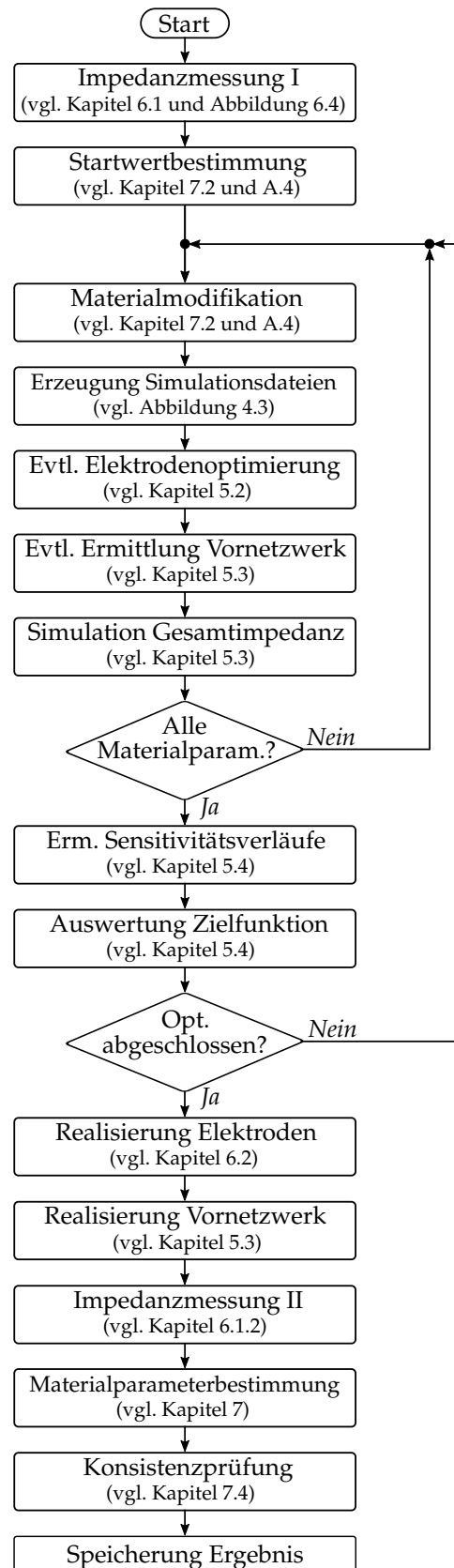
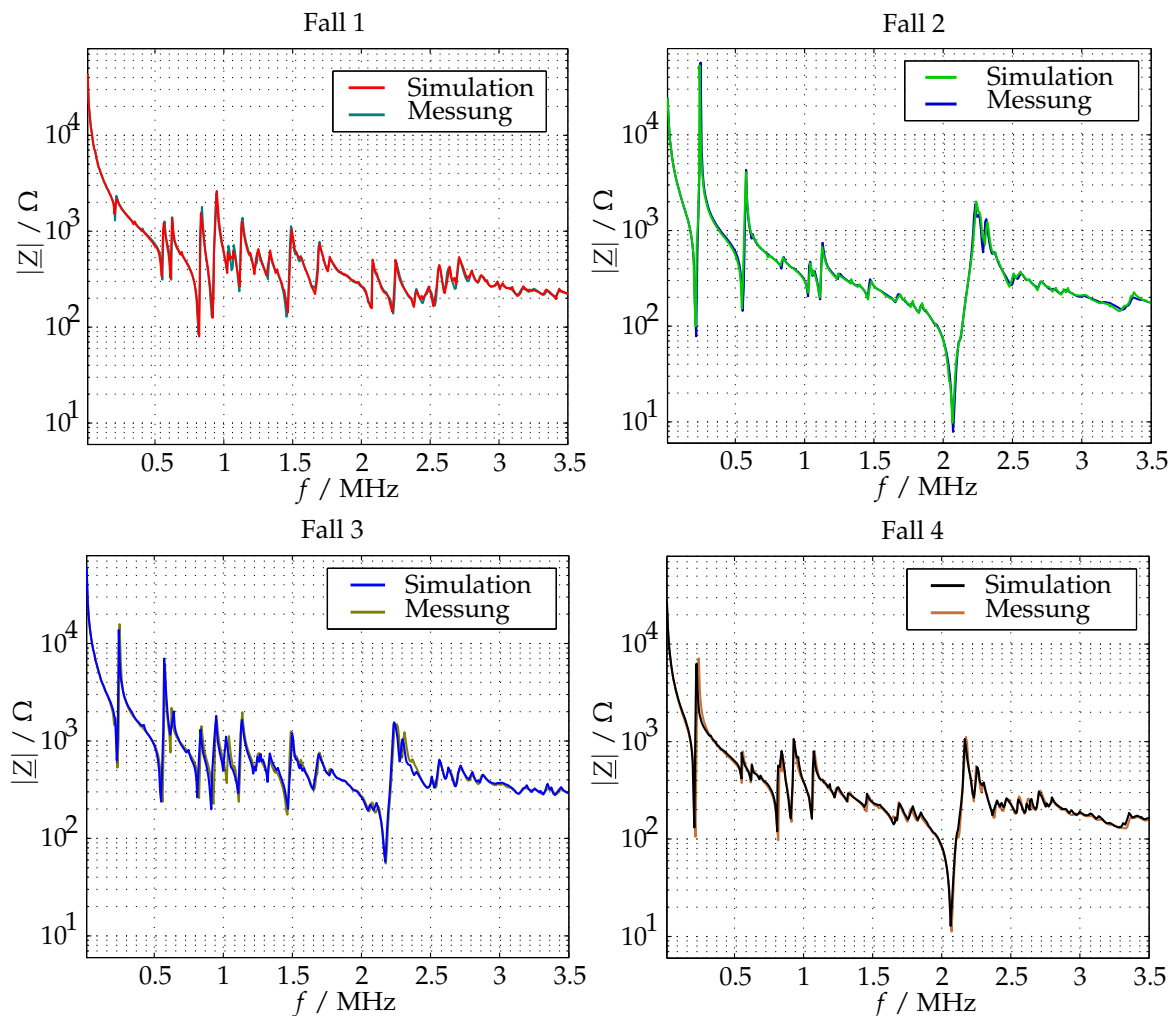


Abbildung 7.8: Der Ablaufplan des gesamten Verfahrens zur Materialparameterbestimmung.

Die auf eine gesteigerte Sensitivität hin optimierten Radien der einzelnen Elektroden sind dem Kapitel 5.5 entnommen. Diese Piezokeramiken werden in diesem Kapitel genutzt, um das Verfahren exemplarisch anzuwenden und einen optimierten Satz an Materialparametern mit Hilfe eines inversen Verfahrens zu ermitteln.

Um die verschiedenen bisher vorgestellten Bestandteile des neuen Verfahrens zur Erhöhung der Sensitivität im Rahmen der Materialparameterbestimmung im Zusammenhang darzustellen, sind die wichtigsten dieser Punkte in Abbildung 7.8 in einem gemeinsamen Ablaufplan als Übersicht zusammengestellt. Die Kapitel und Abbildungen mit weiteren Details zu den einzelnen Schritten sind jeweils in Form von Querverweisen angegeben.



**Abbildung 7.9:** Vergleich von Simulationen und Messungen des Betrages der Impedanz für die vier Fälle der Elektrodenbeschaltung (Legende vgl. Abbildung 7.6) nach der Optimierung der Materialparameter.

In der Abbildung 7.9 sind die vier Beträge der Einzelimpedanzen nach der Materialparameterbestimmung dargestellt. Hierbei sind die gleichen Achseinteilungen

gewählt wie bereits in Abbildung 7.6, um eine gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse vor und nach der Optimierung zu gewährleisten. Da in diesen vier Abbildungen mehr Informationen als in dem während der Optimierung genutzten Gesamtimpedanzverlauf enthalten sind, ist diese Art der Darstellung auch an dieser Stelle gewählt.

Im direkten Vergleich der beiden Abbildungen 7.6 und 7.9 ist deutlich zu erkennen, dass die Optimierung in der Lage ist, die simulierten Impedanzverläufe gut an die gemessenen anzupassen. Verbleibende Unterschiede können aufgrund der für die Optimierung genutzten Gesamtimpedanz nicht ausgeschlossen werden, da hierbei auch kompensatorische Anteile auftreten können. Zudem bleibt auch der Unterschied des vereinfachten zweidimensionalen Simulationsmodells zur realen Piezokeramik erhalten. Insgesamt kann aber von einer sehr guten Übereinstimmung gesprochen und die Materialparameterbestimmung als erfolgreich angesehen werden. Die hierbei ermittelten Materialparameter sind in Tabelle 7.2 aufgeführt.

**Tabelle 7.2:** Die im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Materialparameter.

Elastizitätsmoduln	$c_{11}^E$	$1,19 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
	$c_{12}^E$	$0,84 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
	$c_{13}^E$	$0,83 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
	$c_{33}^E$	$1,17 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
	$c_{44}^E$	$0,21 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
	$c_{66}^E$	$0,21 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Permittivität	$\epsilon_{11}^S$	$8,15 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$
	$\epsilon_{33}^S$	$6,58 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$
Piezoelektrischer Modul	$e_{31}$	$-6,03 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
	$e_{33}$	$15,49 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
	$e_{15}$	$12,09 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Dämpfungsparameter	$\alpha_M$	$1,267 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{s}}$
	$\alpha_K$	$6,259 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

Die Verwendung dieser anhand der Piezokeramik mit segmentierten Elektroden bestimmten Materialparameter kann anhand einer Simulation für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden überprüft werden. Deren genaue Abbildung im Simulationsprozess im Zusammenspiel mit den weiteren Komponenten des Zielsystems ist schließlich eines der Hauptziele des vorgestellten Verfahrens der Materialparameterbestimmung mittels der segmentierten Elektroden. Dieser Vergleich wird in Kapitel 7.5 vorgenommen und ausgewertet.

Die physikalische Konsistenz der ermittelten Materialparameter ist entsprechend des in Kapitel 7.4 beschriebenen Verfahrens der Konsistenzprüfung am Ende der

Materialparameterbestimmung überprüft und bestätigt worden. Somit steht mit diesen Parametern ein konsistenter Datensatz für den interessierenden Frequenzbereich zur Verfügung (hier im Bereich der Dickenresonanzfrequenz), der für zuverlässige und mit der realen Messung möglichst gut übereinstimmenden Simulationen mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) für das eingesetzte Material PIC255 genutzt werden kann. Durch die gesteigerte Sensitivität für die schwierig zu bestimmenden Materialparameter kann hier eine höhere Zuverlässigkeit erreicht werden. Die hohe Reproduzierbarkeit der Ergebnisse aufgrund des hohen Automatisierungsgrades des vorgestellten Verfahrens leistet hier ebenfalls seinen Beitrag. Aus den Simulationen abgeleitete Schlussfolgerungen können somit gut zur Beurteilung des zu simulierenden Systems, beispielsweise einer Realisierung eines Ultraschallsensors, genutzt werden.

## 7.4 Verfahren der Konsistenzprüfung

Die im Rahmen einer Materialparameterbestimmung ermittelten Kenngrößen sind aus mathematischer Sicht zunächst unabhängige Größen. Aus physikalischer Sicht sind die Materialparameter jedoch miteinander verknüpft und können nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Aus diesem Grund ist nach Abschluss der Bestimmung eine Überprüfung der einzuhaltenden gegenseitigen Abhängigkeiten vorzunehmen. Diese wird im Folgenden als Konsistenzprüfung bezeichnet und stellt bei erfolgreichem Abschluss einen physikalisch konsistenten Materialparametersatz sicher.

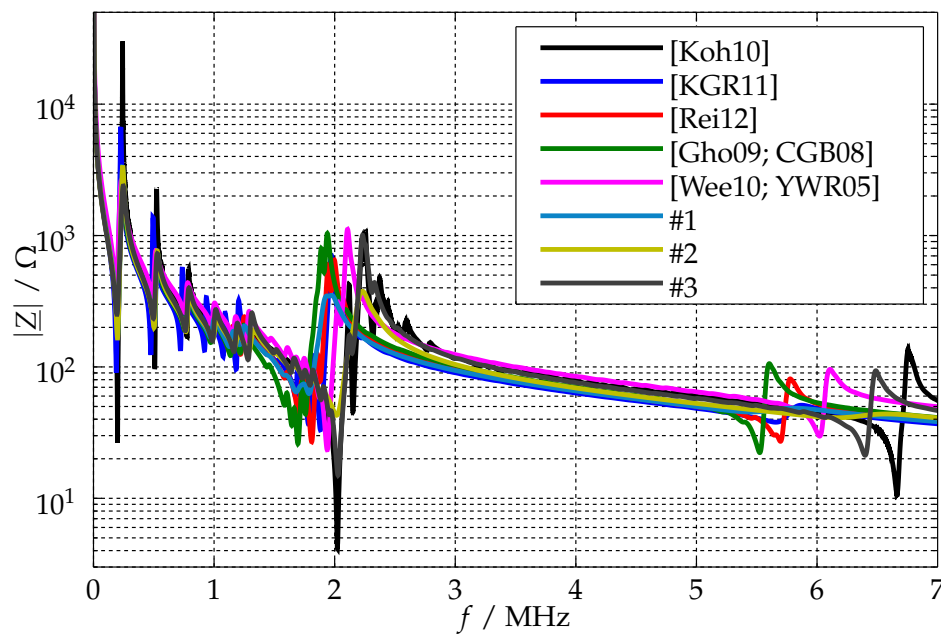
Eine Möglichkeit der Überprüfung ist in [Sch10] vorgestellt und wird dort in zwei Schritten ausgewertet. Zunächst wird bei Überprüfung der mathematischen Kohärenz eine Form der Matrix mit den piezoelektrischen Koeffizienten der Reihe nach in die äquivalenten Darstellungsformen transformiert, bis wieder die Ausgangsform erreicht wird (z. B.  $d \rightarrow e \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow d$ -Form; vgl. Gleichungen (3.18) bis (3.21), S. 40). Ist eine dieser Transformationen nicht durchführbar (Matrixinversion nicht möglich) oder die Ergebnismatrix erreicht nicht wieder den Ausgangszustand, wird der Datensatz als nicht kohärent verworfen. Der zweite Schritt nutzt eine kleine Auswahl von Gleichungen aus der *DIN EN 50324-2* ([DIN02b]), um die physikalische Konsistenz zu prüfen. Hierzu sind physikalisch sinnvolle Definitionsbereiche ausgewählter Materialparameter angegeben, die aus Datenblättern mehrerer Hersteller von Piezokeramiken zusammengestellt sind. Nur wenn beide Prüfungen erfolgreich durchgeführt wurden, wird der Materialparametersatz als konsistent angenommen.

Im Rahmen dieser Arbeit kommt eine ähnliche Vorgehensweise zum Einsatz. Es wird jedoch auf die direkte Feststellung der mathematischen Kohärenz verzichtet und stattdessen die Gesamtheit der Gleichungen aus den Normen [DIN02b] und [DIN88] genutzt (vgl. auch Anhang A.4). Da jeder ermittelte Materialparameter in mehreren Gleichungen enthalten und jeweils mit anderen Größen verknüpft ist, kann durch sukzessives Einsetzen in alle Gleichungen und Vergleich der Ergebnisse ebenfalls die Konsistenz der ermittelten Materialparameter geprüft werden. Sind diese nicht konsistent, entstehen in dem Gleichungssystem Widersprüche und für einzelne Größen ergeben sich unzulässige Mehrdeutigkeiten. Der gefundene Datensatz wird verworfen und ein weiterer Optimierungsschritt durchgeführt, bis ein physikalisch konsistenter Satz von Materialparametern ermittelt ist. Diese neue Art der Überprüfung lässt sich automatisieren und ist im Rahmen dieser Arbeit als Schritt in die Materialparameterbestimmung integriert (vgl. Abbildung 7.8), so dass die Ermittlung von konsistenten Datensätzen auf diese Weise sichergestellt werden kann.

## 7.5 Plausibilitätsbetrachtung für die ermittelten Materialparameter

In der Literatur sind nur vereinzelt vollständige Datensätze von Materialparametern vorhanden. Für das Material PIC255 sind diese zudem oft nur unverändert aus dem Datenblatt des Herstellers PI entnommen [Pic16], die jedoch nur typische Mittelwerte der auch von der jeweiligen Produktionscharge abhängigen Werte darstellen. In der Tabelle 7.3 sind einige Materialparameter für das Material PIC255 vergleichend zusammengestellt, um die teilweise deutlichen Unterschiede verfügbarer Datensätze aufzuzeigen. Für viele dieser Parameter ist die Art der Ermittlung oder die Herkunft nicht angegeben, so dass keine Aussage über das verwendete Verfahren zur Materialparameterbestimmung möglich ist. Zudem wird in diesen Veröffentlichungen größtenteils die Dämpfung vernachlässigt und es sind deshalb keine Werte für die Rayleigh-Dämpfungsparameter vorhanden.

Der Einfluss der unterschiedlichen Datensätze ist in Abbildung 7.10 anhand simulierter Beträge der Impedanzverläufe für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden dargestellt ( $D_p = 10 \text{ mm}$ ;  $h_p = 1 \text{ mm}$ ). Um nur den Einfluss der in Tabelle 7.3 angegebenen Materialparameter zu zeigen, sind für alle Simulationen die Rayleigh-Dämpfungsparameter  $\alpha_M = 10^5 \text{ 1/s}$  und  $\alpha_K = 3.510^{-9} \text{ s}$  verwendet worden.



**Abbildung 7.10:** Vergleich der Beträge der Impedanzverläufe für unterschiedliche PIC255-Materialparameter aus der Literatur nach Tabelle 7.3 für eine Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden.

**Tabelle 7.3:** Vergleich von PIC255-Materialparametern aus der Literatur. Werte für die Rayleigh-Dämpfungsparameter sind in den angegebenen Literaturstellen meist nicht enthalten. (#1, #2, #3: weitere vorhandene Datensätze ohne Quellenangabe)

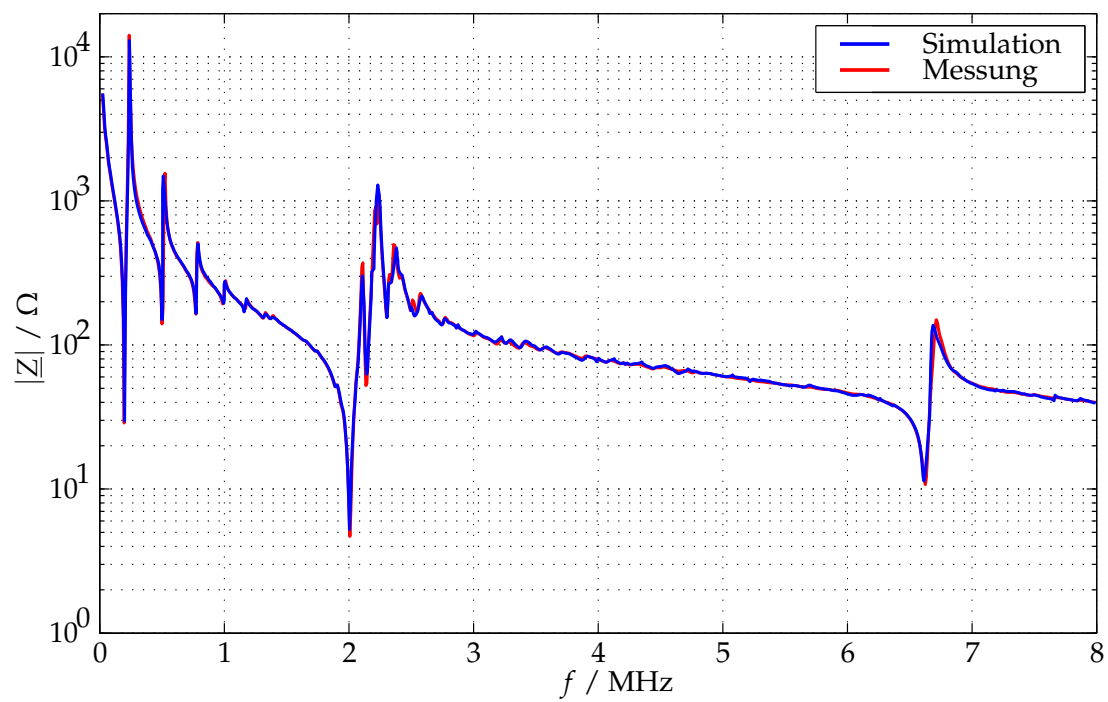
	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{33}^E$	$c_{44}^E$	$c_{66}^E$	$\epsilon_{11}^S$	$\epsilon_{33}^S$	$-e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\rho$
Einheit	$10^{11} \text{ N/m}^2$						$10^{-9} \text{ F/m}$		$\text{C/m}^2$			$\text{kg/m}^3$
[Koh10]	1,17	0,78	0,74	1,02	0,22	0,20	8,23	7,97	6,80	13,03	11,91	7800
[KGR11]	1,17	0,73	0,74	1,02	0,22	0,22	8,23	7,97	6,80	13,02	11,88	7410
[Rei12]	1,23	0,77	0,70	0,97	0,22	0,23	8,23	7,59	7,21	13,74	11,95	7800
[Gho09; CGB08]	1,05	0,58	0,55	0,86	0,21	0,23	8,25	7,12	7,22	14,47	11,63	7800
[Wee10; YWR05]	1,11	0,63	0,69	1,11	0,19	0,24	7,73	6,02	5,61	12,83	10,26	7760
#1	1,21	0,75	0,68	0,94	0,21	0,23	8,03	7,66	7,50	13,21	11,91	7800
#2	1,23	0,79	0,80	1,21	0,21	0,22	7,39	7,48	7,19	15,69	11,52	7800
#3	1,25	0,79	0,81	1,21	0,20	0,23	7,31	6,83	7,42	16,03	12,04	7800

Es wird erkennbar, dass deutliche Unterschiede im Simulationsergebnis bestehen, obwohl jeweils das gleiche Material beschrieben werden soll. Eine auf diesen Materialparametern basierende Simulation kann somit nicht für eine konkrete Piezokeramik mit der Messung übereinstimmende Ergebnisse liefern, wenn nicht die Materialparameter für die tatsächlich verwendete Piezokeramik (Material, Abmessungen) bestimmt worden sind. Hier zeigt sich erneut die Notwendigkeit eines reproduzierbaren Verfahrens zur realitätsnahen, vollständigen und konsistenten Bestimmung

der Materialparameter anhand eines Exemplars einer Piezokeramik, wie es in dieser Arbeit beschrieben ist.

Um die im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Materialparameter dennoch auf Plausibilität hin überprüfen zu können, wird eine gegenüber der zur Bestimmung genutzten Anordnung mit segmentierten Elektroden veränderte Konfiguration genutzt. Da auch Exemplare der Piezokeramiken ohne Segmentierung vorhanden sind, kann hierfür deren gemessener Impedanzverlauf im Vergleich zu einem Simulationsergebnis mit vollflächigen Elektroden genutzt werden. Bei plausiblen Materialparametern sollte auch für diesen Fall eine gute Übereinstimmung erreicht werden können, da es sich um das gleiche Piezokeramikmaterial aus demselben Herstellungsprozess handelt.

Abbildung 7.11 zeigt den Vergleich des simulierten und gemessenen Betrags der Impedanz für die Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden. Auch für diesen gegenüber der für die Bestimmung der Materialparameter genutzten Piezokeramik mit segmentierten Elektroden geänderten Konfiguration ergeben die ermittelten Parameter eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Somit ist das wichtige Ziel erreicht, die erhöhte Sensitivität auf schwierig zu bestimmende Materialparameter durch die Modifikation der Elektroden zusammen mit einem optimierten Vornetzwerk für die Verbesserung des Verfahrens zu nutzen.



**Abbildung 7.11:** Betrag der Impedanz für eine vollflächige Piezokeramik als Vergleich von Simulation mit den im Rahmen der Materialparameterbestimmung ermittelten Parametern und dem gemessenen Verlauf.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und erreichten Ziele noch einmal kurz zusammengefasst. Anknüpfungspunkte für nachfolgende Arbeiten werden im zweiten Unterkapitel aufgezeigt.

### 8.1 Zusammenfassung

Für die Entwicklung oder die Optimierung von Schallwandlersystemen werden heute in vielen Fällen FEM-Simulationen genutzt. Eine wichtige Voraussetzung für eine realitätsnahe Simulation ist eine hinreichend gute Kenntnis der beteiligten Materialien und deren Materialparameter für die numerische Simulation mittels Finiten Elemente. Es hat sich gezeigt, dass sowohl in der Literatur vorhandene Daten als auch verfügbare Herstellerangaben für Piezokeramikmaterialien üblicherweise nicht für eine realitätsnahe Simulation ausreichen, da diese unter anderem meist Mittelwerte über größere Chargen wiedergeben und zudem ein breites Produktspektrum abdecken sollen. Somit ist eine Bestimmung sowohl anhand der tatsächlich eingesetzten Piezokeramiken als auch in dem für die spätere Anwendung geplanten Frequenzbereich erforderlich und ratsam.

Aktuelle Verfahren zur Materialparameterbestimmung basieren auf inversen Methoden, mit deren Hilfe ein Abgleich von gemessenem und simuliertem Impedanzverlauf vorgenommen wird. Problematisch für diese Verfahren ist der teilweise geringe Einfluss einzelner Materialparameter auf den komplexwertigen Impedanzverlauf. In der Literatur sind verschiedene Ansätze beschrieben, um diese Einschränkung zu reduzieren, wie beispielsweise die Verwendung mehrerer Probekörper und die Auswertung in verschiedenen Frequenzbereichen oder die zusätzliche Berücksichtigung weiterer Messgrößen wie der Oberflächenauslenkung. Diese Ansätze führen jedoch zu einem erheblichen Mehraufwand oder zu weniger konsistenten Materialparametern.

Deshalb ist im Rahmen dieser Arbeit ein neuer Ansatz zur Materialparameterbestimmung entwickelt worden. Durch eine Modifikation der Elektrodentopologie auf

der Oberfläche der Piezokeramik wird hierbei der Einfluss der Materialparameter auf den Impedanzverlauf verändert. Insbesondere auch für die vorher wenig einflussreichen Größen konnten hierdurch die Sensitivitäten erhöht werden. Um diese auch quantitativ im Rahmen einer Optimierung beurteilen zu können, ist ein neues Sensitivitätsmaß hergeleitet und eingesetzt worden. Die Sensitivität wird zusätzlich zu der modifizierten Elektrodenkonfiguration durch ein elektrisches Vornetzwerk verbessert, indem hierdurch die laterale Feldanregung vergrößert wird. Um die hohe Anzahl von Simulationen im Rahmen einer Materialparameterbestimmung durchführen zu können, wird als Simulationsmodell ein rotationssymmetrisches Modell verwendet, welches sich als zweidimensionales FEM-Modell berechnen lässt und eine vertretbare Rechenzeit für die Ermittlung der zahlreichen simulierten Impedanzverläufe ergibt.

Durch den hier vorgestellten Ansatz wird es möglich, die Materialparameterbestimmung an einem einzelnen Probekörper vorzunehmen. Hierdurch kann direkt die für die Zielanwendung geplante Piezokeramik verwendet werden. Auf diese Weise finden unvermeidbare Unterschiede in der Herstellung der Piezokeramik, wie beispielsweise die Sinterung oder die Polarisierung, direkt in den Materialparametern Berücksichtigung. Auch die sonst übliche Auswertung verschiedener Schwingungsmodi in unterschiedlichen Frequenzbereichen wird durch dieses neue Verfahren vermieden und es ergibt sich ein bezüglich eines in der späteren Realisierung genutzten Frequenzarbeitspunktes konsistenter Materialparametersatz.

Um die Messung der komplexwertigen Impedanz der Piezokeramik auch bei segmentierten Elektroden durchführen zu können, ist ein neuer Messaufbau zur Impedanzmessung entworfen worden. Dieser ermöglicht die Vermessung der Piezokeramik mit mehreren Elektroden in Kombination mit einem elektrischen Vornetzwerk. Für eine hohe Reproduzierbarkeit ist dieser Messaufbau weitestgehend automatisiert und stellt sowohl die nötigen Kalibrationsmessungen als auch eine hohe Frequenzauflösung im Bereich der interessierenden Resonanz- und Antiresonanzstellen sicher. Die Messergebnisse können auf diese Weise direkt für den Vergleich mit den simulierten Ergebnissen der Gesamtanordnung verwendet und im Rahmen der Materialparameterbestimmung genutzt werden. Hierfür wird ein inverser Ansatz verwendet, bei dem simulierte Impedanzverläufe durch Variation der Materialparameter an einen gemessenen Impedanzverlauf angeglichen werden. Nach Abschluss der Optimierung wird die physikalische Konsistenz der ermittelten Materialparameter auf Grundlage der in Normen und Standards vorhandenen Gleichungen sichergestellt.

Um das Verfahren zu verifizieren, wird das Piezokeramikmaterial PIC255 genutzt, da es ein oft verwendetes Material darstellt und die aus der Literatur bekannten

Materialparameter zum Vergleich herangezogen werden können. Dennoch muss festgehalten werden, dass auch für dieses oft genutzte Material deutlich unterschiedliche Materialparametersätze in der Literatur vorhanden sind. Eine allgemein anzuwendende Methode der Verifikation ist bisher nicht verfügbar, so dass die Ursache für diese Unterschiede nicht abschließend geklärt werden kann, zumal das jeweils verwendete Verfahren zur Bestimmung nicht für alle Materialparametersätze bekannt ist.

Insgesamt kann zusammengefasst werden, dass im Rahmen dieser Arbeit ein neues Verfahren zur Bestimmung der Materialparameter von Piezokeramiken entwickelt wurde. Dieses konnte erfolgreich auf eine Piezokeramik aus dem Material PIC255 angewendet werden, indem für diese eine optimierte Elektrodengeometrie ermittelt und realisiert wurde. Zusammen mit einem angepassten und optimierten Vornetzwerk wurde die Sensitivität besonders auf bisher schwierig zu ermittelnde Materialparameter erhöht und damit eine verbesserte Materialparameterbestimmung ermöglicht.

## 8.2 Ausblick

Für zukünftige Weiterentwicklungen existieren einige Ansatzpunkte, die in diesem Unterkapitel aufgeführt werden. Einen wichtigen Punkt stellt die Übertragung des Verfahrens auf andere Piezokeramikmaterialien dar. Insbesondere sind hier die bleifreien Piezokeramiken zu nennen, da diese bei Wegfall der zurzeit geltenden Ausnahmeregelung der *RoHS-Richtlinie zur Beschränkung der Verwendung bestimmter gefährlicher Stoffe in Elektro- und Elektronikgeräten* [Eur16] weiter in den Fokus der Forschung rücken werden [LHB09]. Viele Hersteller bieten bereits erste bleifreie Piezokeramiken kommerziell an (z. B. [Pic16; Cer16]), jedoch bestehen hier weiterhin große Herausforderungen sowohl bezüglich der technologischen Herstellungsprozesse als auch der messtechnischen Charakterisierung der neuen piezoelektrischen Materialien. Neben der abweichenden Materialzusammenstellung werden auch zunehmend neue Produktionstechnologien für die Herstellung von Piezokeramiken eingesetzt, beispielsweise die Anwendung der Ink-Jet-Technologie ([DLW04; DoBr04; LSS06; RMT05]) oder das Druckverfahren *Fused Deposition Modeling* (dt.: Schmelzschichtung, z. B. [LCM00]). Auch diese führen zu abweichenden Materialeigenschaften, die messtechnisch ermittelt werden müssen.

Eine Kernfrage für die Übertragbarkeit ist hierbei die Kristallklasse der Piezokeramik. Das hier vorgestellte Verfahren über den Abgleich mittels eines rotationssymmetri-

schen Simulationsmodells setzt mindestens die Symmetrie der Kristallklasse  $6mm$  voraus, da nur auf diese Weise alle zu bestimmenden Materialparameter in der theoretischen Beschreibung enthalten und somit ermittelbar bleiben. Bei Abweichungen von dieser Symmetrie ist diese Modellreduzierung eventuell nicht mehr zulässig und es muss nach einer alternativen Bestimmung des simulierten Impedanzverlaufes gesucht werden (z. B. die Verwendung eines 3D-Modells in Kombination mit einer teilweise analytischen Ermittlung).

Ein weiterer Ansatzpunkt für eine Weiterentwicklung ist die Modifikation der Optimierungsstrategie. Im Rahmen der Sensitivitätssteigerung kommen im Rahmen dieser Arbeit Bewertungen des Einflusses verschiedener Materialparameter anhand von Finiten Differenzen zum Einsatz. Diese können ohne Eingriff in den FEM-Code realisiert werden und sind deshalb bei Verwendung eines kommerziellen Lösesers bisher erforderlich. Hierdurch wird jedoch der Rechenaufwand deutlich erhöht. Wenn hingegen die benötigten Ableitungen direkt innerhalb der FEM implementiert wären, könnte anstelle einer diskreten finiten Differenz eine kontinuierliche Differentiation durchgeführt werden, ohne zusätzliche Simulationsdurchläufe zu benötigen. Für die Zukunft soll hierfür die algorithmische Differentiation (AD) mittels *ADOL-C* integriert werden [NaWa12], so dass neben einer genaueren Bestimmung der partiellen Ableitungen für die Optimierung auch ein deutlicher Rechenzeitvorteil zu erwarten ist. Ein ähnlicher Ansatz ist in [PBA08] beschrieben, wobei hier jedoch eine reine MATLAB<sup>®</sup>-Anwendung im Vordergrund steht. Aufgrund der bisherigen vielversprechenden Ergebnisse dieser Arbeit wurde ein DFG-Antrag formuliert mit dem Titel „Ein modellbasiertes Messverfahren zur Charakterisierung der frequenzabhängigen Materialeigenschaften von Piezokeramiken unter Verwendung eines einzelnen Probekörperindividuums“. Dieser wurde im August 2016 bewilligt und wird dazu genutzt werden, die gewonnenen Erkenntnisse zu vertiefen und zu optimieren. Das Forschungsvorhaben bündelt hierfür die Kompetenzen der beiden antragstellenden Arbeitsgruppen „Elektrische Messtechnik“ und „Mathematik und ihre Anwendungen“. [DFG16]

Die Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der Parameter ist bisher vergleichsweise wenig beschrieben (z. B. [PCA92; Sch10; Rau12; OKW16]) und bildet deshalb einen weiteren wichtigen Anknüpfungspunkt. Die Ermittlung der Temperaturabhängigkeit sollte über eine temperierte Messung der komplexwertigen Impedanz zukünftig in das Verfahren integriert werden, um auch temperaturabhängige Materialparameter angeben zu können. Die Modifikationen des Messaufbaus berücksichtigen eine Erweiterung in dieser Richtung bereits. Ein wichtiger Punkt bei der Entwicklung von Schallwandlern ist in diesem Zusammenhang auch die Betrachtung der

Alterung der beteiligten Materialien, allerdings weisen hier oft die neben der eigentlichen Piezokeramik zum Einsatz kommenden Komponenten einen deutlich größeren Einfluss auf (z. B. Kunststoffe, [Rau12; WIR16]). Es bleibt deshalb zu klären, ob durch die hierfür nötigen aufwendigen Betrachtungen von Alterungseffekten ein Zusatznutzen entstehen kann. Neben der Temperatur- kann ebenfalls die Frequenzabhängigkeit der Materialparameter, beispielsweise für sehr breitbandige Anwendungsfälle, in die Betrachtungen aufgenommen werden. Bei der Verwendung der simulativen transienten Analyse müssten hier jedoch die erläuterten Einschränkungen des Rayleigh-Dämpfungsmodells beachtet werden.

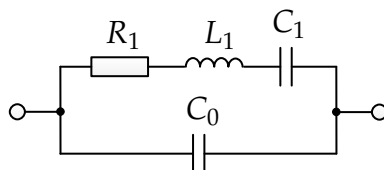
Weitere Ansatzpunkte für nachfolgende Untersuchungen sind die Erweiterung des Simulationsmodells der Piezokeramik um angrenzende Elemente wie Kopplungs- oder Dämpfungsschichten oder die Einbeziehung einer inhomogenen Polarisierung (z. B. durch umkontaktierte Piezokeramiken) in die Betrachtungen. Auch diese Elemente sind geeignet, die Symmetrie zu reduzieren und die Sensitivität im Optimierungsprozess zu erhöhen.



# A Anhang

## A.1 Charakteristische Frequenzen im Impedanzverlauf einer Piezokeramik

Jede der möglichen Resonanzstellen einer Piezokeramik besteht aus einer Serien- und einer Parallelresonanz. Sie kann beschrieben werden durch ein elektrisches Ersatzschaltbild nach Abbildung A.1 (auch als Butterworth Van-Dyke-Modell (BVD) bezeichnet), wobei der Zweig aus  $R_1$ ,  $L_1$  und  $C_1$  die Serienresonanzfrequenz und die zusätzliche Parallelschaltung mit der Kapazität  $C_0$  die Parallelresonanzfrequenz bestimmen [NeBr97; DIN02b; IEE87]. Neben diesen beiden Frequenzen gibt es jedoch vier weitere charakteristische Frequenzen. In Tabelle A.1 sind die Bezeichnungen und Bedeutungen dieser Frequenzen zusammengefasst. Die Reihenfolge spiegelt dabei



**Abbildung A.1:** Ersatzschaltbild für eine Resonanzstelle.

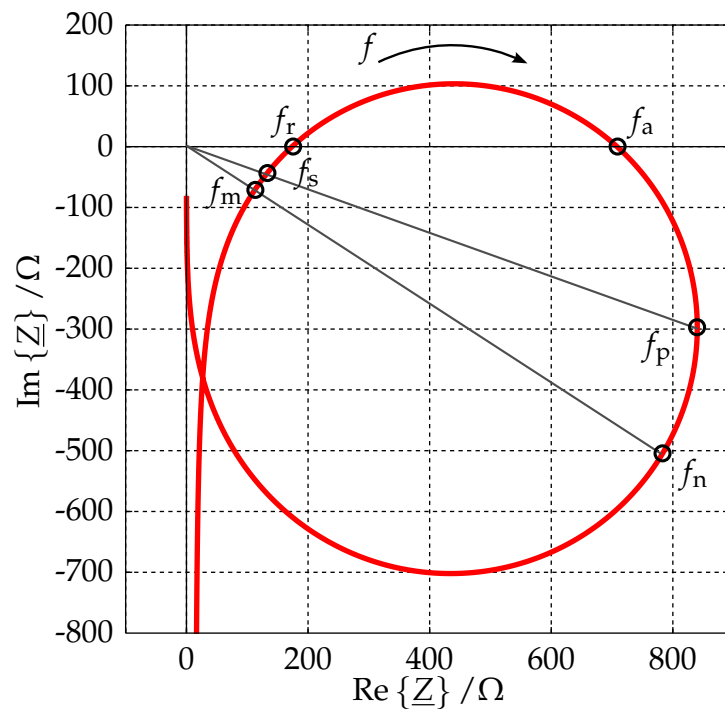
das Auftreten von niedrigen zu hohen Frequenzen wider (vgl. Gleichung (A.1)).

$$f_m < f_s < f_r < f_a < f_p < f_n \quad (\text{A.1})$$

Die elektrischen Ersatzgrößen stehen dabei für die elastische Nachgiebigkeit (dynamische Kapazität  $C_1$ ), die dynamischen Schwingungsverluste ( $R_1$ ), die schwingende Masse ( $L_1$ ) und die statische Kapazität der Piezokeramik ( $C_0$ ). Wird als Darstellungsform eine Ortskurve gewählt, ergibt sich für eine Resonanzstelle ein Kreis in der komplexen Ebene. Hierbei wird der Imaginärteil über dem Realteil der Impedanz in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen. In Abbildung A.2 ist die Impedanzortskurve dargestellt und die in Tabelle A.1 aufgeführten charakteristischen Frequenzen sind gekennzeichnet.

**Tabelle A.1:** Charakteristische Frequenzen einer Resonanzstelle.

Formelzeichen	Bezeichnung	Bedeutung
$f_m$	Minimalimpedanzfrequenz	Der minimale Betrag der Impedanz wird erreicht
$f_s$	Serienresonanzfrequenz	Der Blindwiderstand der Ersatzschaltung wird Null (vgl. Abbildung A.1, Serienkreis $L_1, C_1, R_1$ )
$f_r$	Resonanzfrequenz	Die Impedanz wird rein reell
$f_a$	Antiresonanzfrequenz	Die Impedanz wird rein reell (hochohmiger als $f_r$ )
$f_p$	Parallelresonanzfrequenz	Der maximale Realteil der Impedanz wird erreicht
$f_n$	Maximalimpedanzfrequenz	Der maximale Betrag der Impedanz wird erreicht

**Abbildung A.2:** Ortskurve einer Impedanz für eine Resonanzstelle.

Die Darstellung ist auch als Admittanzortskurve mit Wirk- (Konduktanz) und Blindleitwert (Suszeptanz) möglich [IEE66; Ike90]. Die aufgeführten charakteristischen Frequenzen lassen sich auch aus der üblichen Darstellung des Impedanzverlaufes ermitteln. Hierbei wird meist die Kombination von Betrags- und Phasendarstellung



gewählt, aber auch die Darstellung getrennt nach Real- und Imaginärteil ist möglich. Diese Verläufe sind zusammen in der Abbildung A.3 auf der nächsten Seite dargestellt. Mit schwarzen Kreisen sind die Stellen für die Ermittlung der charakteristischen Frequenzen eingetragen (vgl. Tabelle A.1). Die vier Frequenzen  $f_s$ ,  $f_r$ ,  $f_a$  und  $f_p$ , die aus dem Phasenverlauf und dem Realteil der Impedanz ermittelt werden können, sind mit schwarzen Punkten im Betragsverlauf zusammen mit den Frequenzen  $f_m$  und  $f_n$  eingezeichnet. Um die Lage bezüglich der Frequenz beurteilen zu können, sind senkrechte Hilfslinien hinzugefügt. Für Piezokeramiken mit geringen Verlusten können die drei Frequenzen in der Nähe der Serienresonanz ( $f_m$ ,  $f_s$ ,  $f_r$ ) ebenso wie die drei Frequenzen in der Umgebung der Parallelresonanz ( $f_a$ ,  $f_p$ ,  $f_n$ ) näherungsweise als gleich angenommen werden. Zur Beurteilung der Verluste kann die Gütezahl  $M$  (vgl. Gleichung A.2) herangezogen werden, wobei die Näherung für die Bedingung  $M > 20$  gültig ist. Diese ist für einen großen Teil der Piezokeramiken erfüllt [DIN02b; IRE61].

$$M = Q_m \frac{k_{\text{eff}}^2}{1 - k_{\text{eff}}^2} \approx \frac{1}{2\pi f_s R_1 C_0} \quad (\text{A.2})$$

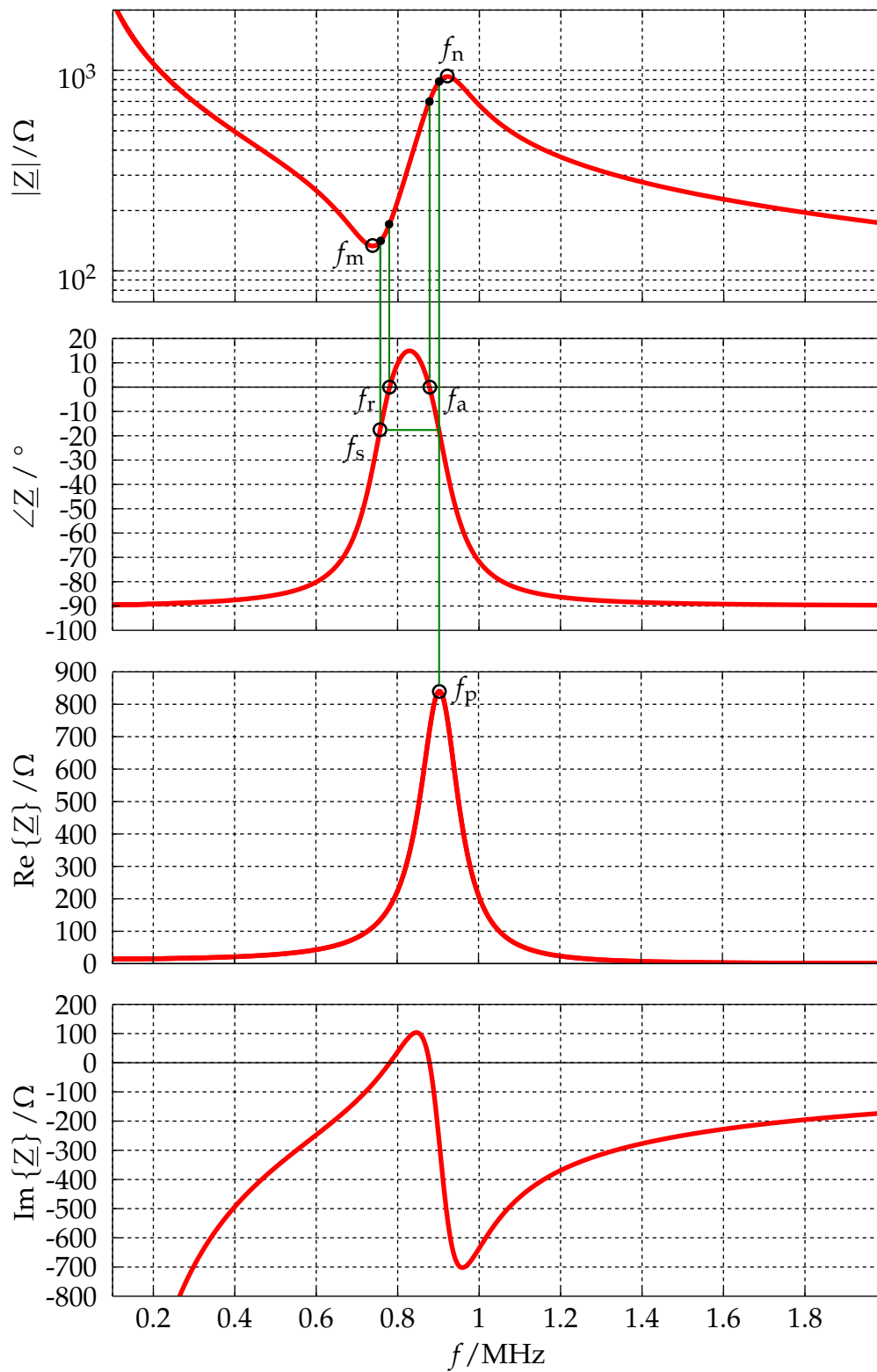
Der effektive elektromechanische Kopplungsfaktor  $k_{\text{eff}}$  kann dabei aus den charakteristischen Frequenzen berechnet werden:

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2} \quad (\text{A.3})$$

Sind die Verluste nicht zu vernachlässigen, kann für die Berechnung der Frequenzdifferenz  $f_p - f_s$  die Näherung aus Gleichung A.4 genutzt werden, in die die Gütezahl aus Gleichung A.2 sowie die Minimal- und die Maximalfrequenz eingehen, die aus dem Impedanzverlauf ermittelt werden können [IRE61].

$$\Delta f = f_p - f_s \approx \frac{f_n - f_m}{\sqrt{1 + \frac{4}{M^2}}} \quad (\text{A.4})$$

In dieser Arbeit wird jedoch, wie in Kapitel 7.2 beschrieben, auf diese Näherung verzichtet und es werden direkt die Serien- und Parallelresonanzen ermittelt und verwendet.



**Abbildung A.3:** Impedanzverlauf dargestellt als Betrag und Phase sowie als Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Impedanz  $\underline{Z}$ .

## A.2 Achsenbezeichnungen

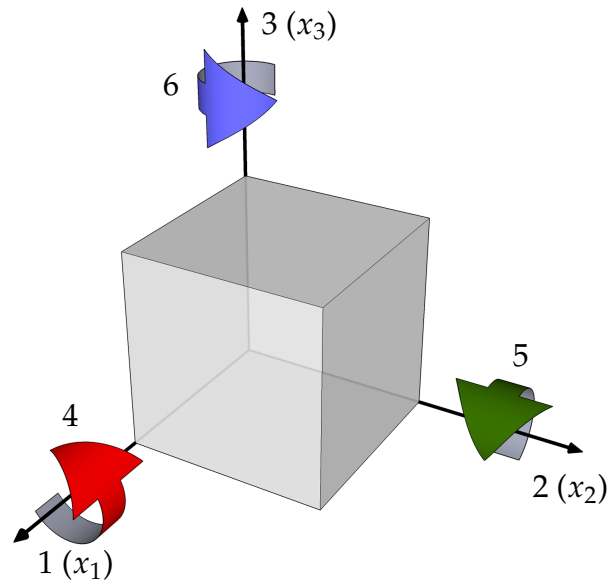


Abbildung A.4: Achsenbezeichnungen für polarisierte Piezokeramiken.

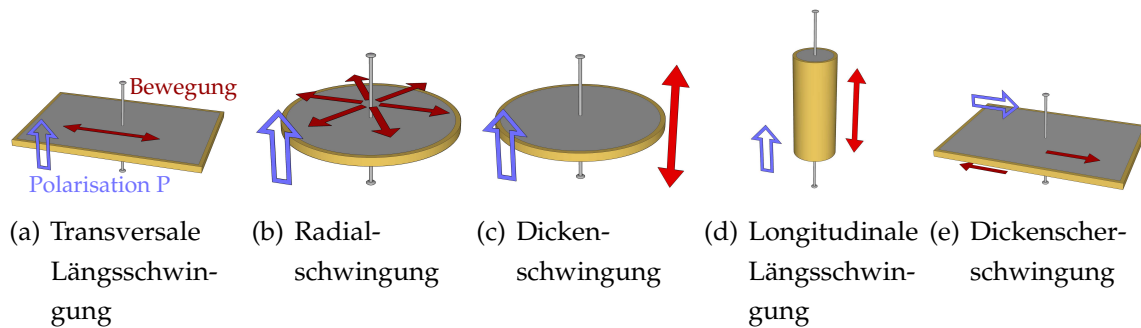
Aufgrund der Richtungsabhängigkeit der Materialparameter werden zur Unterscheidung der Raumrichtungen und Drehachsen Indizes eingeführt [DIN02]. Die  $x_1$ -Achse erhält die Nummer 1, die  $x_2$ -Achse die 2 und die dritte kartesische  $x_3$ -Achse die Nummer 3. Die Rotation um diese drei Achsen wird in der gleichen Reihenfolge mit den Ziffern 4, 5 und 6 gekennzeichnet. Die Zuordnung der Indizes ist in Abbildung A.4 grafisch dargestellt. Es handelt sich hierbei um ein rechtshändiges Koordinatensystem, welches zur Beschreibung von ortsabhängigen Größen in dieser Arbeit ausschließlich verwendet wird.

Üblicherweise wird die  $x_3$ -Achse parallel zur Richtung der Polarisation  $\vec{P}$  gewählt und eine transversale Isotropie der Piezokeramiken führt zu einer Symmetrie der  $x_1$ - und  $x_2$ -Achsen.

## A.3 Probekörpergeometrien und Grundswingungsformen

Viele der analytischen Verfahren zur Piezomaterialdatenbestimmung beruhen auf der Auswertung von fünf unterschiedlichen Probekörpern, die sich durch ihre Geometrie und die Polarisationsrichtung unterscheiden. In den Abbildungen A.5(a)

bis A.5(e) sind die jeweiligen piezokeramischen Resonatoren zusammen mit der Polarisationsrichtung und der Richtung der Verformung dargestellt [DIN02].



**Abbildung A.5:** Fünf vorgegebene Probekörpergeometrien mit Polarisations- und Bewegungsrichtung nach DIN EN 50324-1 [DIN02].

Die Geometrien der Probekörper müssen bestimmte Randbedingungen erfüllen. Neben den in der DIN angegebenen Größenverhältnissen werden in neueren Untersuchungen (z. B. [Sch10], [ShMu07]) noch höhere Anforderung gestellt. Ein Vergleich der Vorgaben zweier dieser Literaturquellen ist in der Tabelle A.2 zusammengestellt.

**Tabelle A.2:** Randbedingungen (RB) für die Probekörpergeometrien nach [DIN02] und [Sch10].

Abbildung	Bezeichnung der Schwingung	RB nach [DIN02]	RB nach [Sch10]
A.5(a)	Transversale Längsschwingung	$\frac{l}{h_p} > 5; \frac{l}{w} > 5$	$\frac{l}{h_p} > 10; \frac{l}{w} > 10$
A.5(b)	Radialschwingung	$\frac{D_p}{h_p} > 10$	$\frac{D_p}{h_p} > 10$
A.5(c)	Dicken(dehnungs)-schwingung	$\frac{D_p}{h_p} > 10$	$\frac{D_p}{h_p} > 10$
A.5(d)	Longitudinale Längsschwingung	$\frac{l}{D_p} > 2,5$	$\frac{l}{D_p} > 5$
A.5(e)	Dickenscherschwingung	$\frac{l}{h_p} > 3,5; \frac{l}{w} > 3,5$	$\frac{l}{h_p} > 5; \frac{w}{h_p} > 5$

Diese Randbedingungen stellen sicher, dass sich der mit der jeweiligen Geometrie zu untersuchende Schwingungsmodus möglichst gut von benachbarten Moden separiert und eine Auswertung anhand einer möglichst ungestörten Schwingungsform ermöglicht wird.

## A.4 Formelsammlung Startwertermittlung

Für die Startwertermittlung der Materialparameter kommen viele Gleichungen zum Einsatz, die in verschiedenen Normen und Standards beschrieben sind. Diese sind jedoch mit Fehlern durchsetzt, so dass an dieser Stelle die im Rahmen dieser Arbeit genutzten Zusammenhänge mit der hier verwendeten Nomenklatur noch einmal in korrigierter Form zusammengestellt sind. Teilweise sind die Gleichungen in der hier genutzten umgestellten Form angegeben. Gleiche Größen aufgrund der betrachteten Symmetrien der  $6mm$ -Kristallklasse sind der Übersichtlichkeit halber nicht separat aufgeführt und können der Gleichung (3.23) auf Seite 44 entnommen werden. Die jeweilige Quelle ist angegeben, um schnell den Kontext nachschlagen zu können. Im Einzelnen sind hauptsächlich folgende Quellen berücksichtigt:

- [DIN88]: *Leitfaden zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von piezoelektrischer Keramik mit hohem elektromechanischen Koppelfaktor*
- [IEE87]: *IEEE Standard on Piezoelectricity*
- [DIN02b]: *Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 2: Messverfahren, Kleinsignal*

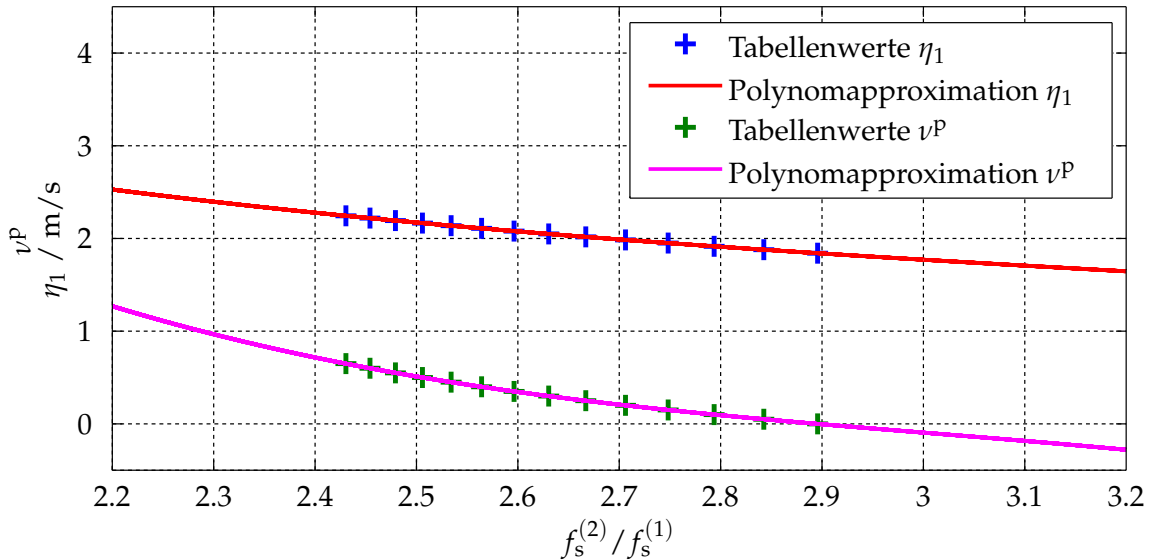
Für Korrekturen genutzte Quellen sind jeweils zusätzlich angegeben, ebenso wie Quellen, die Zusammenhänge beschreiben, die nicht in den zuvor genannten Normen enthalten sind.

Durch Messungen im Rahmen von Voruntersuchungen können die geometrischen Abmessungen  $D_p$  und  $h_{\text{ges}}$ , die Dichte  $\rho$ , die freie statische Kapazität  $C_0^T$  als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso wie die aus dem gemessenen Impedanzverlauf  $\underline{Z}$  bestimmten charakteristischen Frequenzen (vgl. Anhang A.1). Diese werden üblicherweise in folgender Reihenfolge im Exponenten mit Zahlen in runden Klammern durchnummeriert, um die relevanten Resonanzen unterscheiden zu können: die Grundschiwingung der Radialresonanz und deren ersten beiden Oberschwingungen (1 bis 3) sowie die Grundschiwingung der Dickenresonanz und deren erste Oberschwingung (4 und 5). Für den mechanischen Kopplungsfaktor in Dickenrichtung  $k_t$  ergibt sich hieraus die Gleichung (A.5).

$$k_t = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_s^{(4)}}{f_p^{(4)}} \cdot \tan \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_p^{(4)} - f_s^{(4)}}{f_p^{(4)}} \right)} \quad ([\text{IEE87}], \text{Gln. (163)}; [\text{DIN02b}], \text{Gl. 42}) \quad (\text{A.5})$$

In Abhängigkeit des Verhältnisses  $f_s^{(2)}/f_s^{(1)}$  ist in [IEE87] tabellarisch ein Zusammenhang sowohl zur planaren Poissonzahl  $\nu^p$  als auch zur Frequenzkonstanten

$\eta_1$  (kleinste Nullstelle der *Onoe Funktion*<sup>35</sup>) gegeben. Um das aus den Messungen ermittelte Verhältnis in diese beiden Größen umrechnen zu können, werden diese tabellarischen Werte mittels einer Polynomapproximation abgebildet (vgl. Abbildung A.6).



**Abbildung A.6:** Polynomapproximationen für  $\eta_1$  und  $\nu^p$  in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $f_s^{(2)}/f_s^{(1)}$  für die Tabelle 12 in [IEE87].

In den Gleichungen (A.6) und (A.7) sind die Polynome zu den in Abbildung A.6 dargestellten Approximationen angegeben. Ähnliche Polynome sind auch in der Literatur beschrieben (z. B. [SGW91], [Rau12]), die in dieser Arbeit hergeleiteten Koeffizienten führen jedoch zu einer kleineren Abweichung bei den gegebenen Stützstellen.

$$\eta_1 = -0,227 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right)^3 + 2,230 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right)^2 - 7,898 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right) + 11,529 \quad (\text{A.6})$$

$$\nu^p = -1,236 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right)^3 + 11,160 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right)^2 - 34,476 \left( \frac{f_s^{(2)}}{f_s^{(1)}} \right) + 36,262 \quad (\text{A.7})$$

<sup>35</sup>Die *Onoe Funktion*  $\mathcal{J}(x) = \frac{xJ_0(x)}{J_1(x)}$  setzt sich zusammen aus  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$ , den Besselfunktionen erster Art der Ordnungen 0 und 1 [Ono56].

Mit Hilfe dieser Polynomapproximationen und der *Onoe Funktion*  $\mathcal{J}(x)$  lässt sich der planare Kopplungsfaktor  $k_p$  nach Gleichung (A.8) bestimmen.

$$k_p = \sqrt{\frac{\mathcal{J}\left(\eta_1 \left(1 + \frac{f_p^{(1)} - f_s^{(1)}}{f_s^{(1)}}\right)\right) + \nu^P - 1}{\mathcal{J}\left(\eta_1 \left(1 + \frac{f_p^{(1)} - f_s^{(1)}}{f_s^{(1)}}\right)\right) - 2}} \quad ([\text{IEE87}], \text{Gl. (155)}) \quad (\text{A.8})$$

$$k_{31} = \sqrt{k_p^2 \cdot \frac{1 - \nu^P}{2}} \quad ([\text{IEE87}], \text{Gln. (116), (159)}) \quad (\text{A.9})$$

Die Höhe der Elektroden kann nach Gleichung (A.10) abgeschätzt werden, wobei das Elektrodenmaterial und somit seine Dichte  $\rho_e$  als bekannt vorausgesetzt wird. Die mittlere Gesamtdichte  $\rho_{\text{ges}}$  wird aus der gemessenen Masse und den Abmessungen bestimmt.

$$h_e = \frac{\rho_{\text{ges}} h_{\text{ges}}}{2\rho_e} \cdot \left( \frac{f_p^{(4)} - f_s^{(4)}}{f_p^{(4)}} - 4 \frac{k_t^2}{\pi^2} \right) \quad ([\text{IEE87}], \text{Gln. (55), (60), (70)}) \quad (\text{A.10})$$

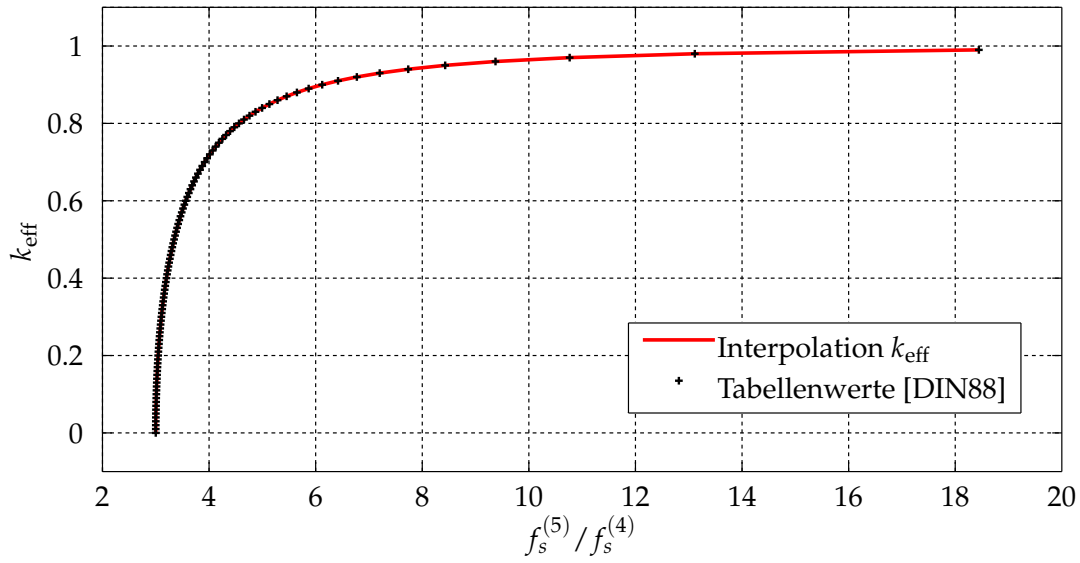
$$s_{11}^E = \frac{\eta_1^2}{\rho \left( 2\pi f_s^{(1)} \frac{D_p}{2} \right)^2 \cdot (1 - (\nu^P)^2)} \quad ([\text{IEE87}], \text{Gl. (153)}) \quad (\text{A.11})$$

$$s_{12}^E = -\nu^P s_{11}^E \quad ([\text{IEE87}], \text{Gl. (113)}; [\text{DIN02b}], \text{Gl. 26}) \quad (\text{A.12})$$

$$s_{66}^E = 2 \left( s_{11}^E - s_{12}^E \right) \quad ([\text{Sch10}], \text{Gl. 8}) \quad (\text{A.13})$$

Der effektive Kopplungsfaktor  $k_{\text{eff}}$  lässt sich aus dem Verhältnis der Serienresonanzfrequenz der Dicken-Grundschiwingung und deren erster Oberschwingung bestimmen. Dieser Zusammenhang ist grafisch in [DIN02b] angegeben und tabellarisch in [DIN88] aufgeführt (Tabelle 4). Im Rahmen der Startwertbestimmung (vgl. Kapitel 7.2) wird der Verlauf entsprechend Abbildung A.7 interpoliert.

$$\varepsilon_{33}^T = \frac{C_0^T h_p}{\pi \left( \frac{D_p}{2} \right)^2} \quad ([\text{DIN02b}], \text{Gl. 54}) \quad (\text{A.14})$$



**Abbildung A.7:** Interpolation von  $k_{\text{eff}}$  in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis  $f_s^{(5)} / f_s^{(4)}$  für die in Tabelle 4 in [DIN88] gegebenen Wertepaare.

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T \cdot (1 - k_p^2) \cdot (1 - k_t^2) \quad ([\text{IEE87}], \text{Gl. (158)}) \quad (\text{A.15})$$

$$c_{33}^D = 4\rho f_p^{(4)} h_p^2 \quad ([\text{DIN02b}], \text{Gl. 19}) \quad (\text{A.16})$$

$$c_t^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \quad ([\text{DIN02b}], \text{Gl. 35}) \quad (\text{A.17})$$

$$e_{33} = k_t \sqrt{c_{33}^D \cdot \varepsilon_{33}^S} \quad ([\text{Sch10}], \text{Gl. 8}) \quad (\text{A.18})$$

$$d_{31} = -\sqrt{\frac{1}{2} k_p^2 \varepsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (4-2)}; [\text{Sch10}], \text{Gl. 8}) \quad (\text{A.19})$$

$$s_{11}^D = s_{11}^E \cdot \left( 1 - \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E} \right) \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (4-1)}; [\text{DIN02b}], \text{Gl. 21}) \quad (\text{A.20})$$



$$s_{12}^D = s_{12}^E - k_{31}^2 s_{11}^E \quad ([DIN02b], \text{Gl. 27}) \quad (\text{A.21})$$

$$s_{55}^D = \frac{1}{4\rho f_p^{(4)2} h_p^2} \quad ([DIN02b], \text{Gl. 18}) \quad (\text{A.22})$$

$$s_{66}^D = 2 \left( s_{11}^D - s_{12}^D \right) \quad ([Sch10], \text{Gl. 8}) \quad (\text{A.23})$$

$$g_{31} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T} \quad ([DIN02b], \text{Gl. 46}; [DIN88], \text{Gl. (2-1)}) \quad (\text{A.24})$$

$$h_{33} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \quad ([DIN88], \text{Gl. (2-5)}) \quad (\text{A.25})$$

$$\beta_{33}^S = \frac{1}{\varepsilon_{33}^S} \quad ([DIN88], \text{Gl. (3-2)}; [DIN88], \text{Gl. (1-9)}) \quad (\text{A.26})$$

$$\beta_{33}^T = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T} \quad ([DIN88], \text{Gl. (3-2)}; [DIN88], \text{Gl. (1-12)}) \quad (\text{A.27})$$

$$Q_m = \frac{1}{2\pi f_s^{(4)} \left| \underline{Z} \left( f_s^{(4)} \right) \right| C_0^T k_{\text{eff}}^2} \quad ([DIN02b], \text{Gl. 66}) \quad (\text{A.28})$$

$$c_{11}^E = \frac{s_{11}^E s_{33}^E - s_{13}^{E\,2}}{(s_{11}^E - s_{12}^E) \cdot \left( s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E) - 2s_{13}^{E\,2} \right)} \quad ([DIN88], \text{Gl. (1-1)}) \quad (\text{A.29})$$

$$c_{12}^E = \frac{s_{13}^{E\,2} - s_{12}^E s_{33}^E}{(s_{11}^E - s_{12}^E) \cdot \left( s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E) - 2s_{13}^{E\,2} \right)} \quad ([DIN88], \text{Gl. (1-2)}; [Sch10], \text{Gl. 8}) \quad (\text{A.30})$$

$$c_{13}^E = \frac{-s_{13}^E}{s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E) - 2s_{13}^{E^2}} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (1-3)}) \quad (\text{A.31})$$

Die folgenden Gleichungen setzen eine Näherung einiger Steifigkeitskonstanten voraus, diese ist in Kapitel 7.2 beschrieben. Bei der hierbei vorkommenden Matrixinversion ergeben sich die Gleichungen (A.29) bis (A.31), wobei in der Norm [DIN88] Schreibfehler vorhanden sind, die hier korrigiert sind. Zusätzlich wird für die Steifigkeitskonstante  $c_{44}^E$  eine Näherung nach Rautenberg auf Grundlage der Arbeiten von Theocaris vorgenommen ([The00; RRH11]). Dafür werden unter Annahme eines transversal isotropen Materials das Elastizitätsmodul sowie die Poissonzahl in transversaler und longitudinaler Richtung nach Gleichungen (A.32) bis (A.35) bestimmt.

$$E_L = \frac{c_{33}^E c_{12}^E + c_{11}^E c_{33}^E - 2c_{13}^{E^2}}{c_{11}^E + c_{12}^E} \quad (\text{A.32})$$

$$E_T = \frac{c_{33}^E c_{11}^{E^2} + 2c_{12}^E c_{13}^{E^2} - c_{33}^E c_{12}^{E^2} - 2c_{11}^E c_{13}^{E^2}}{c_{11}^E c_{33}^E - c_{13}^{E^2}} \quad (\text{A.33})$$

$$\nu_L = \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E + c_{12}^E} \quad (\text{A.34})$$

$$\nu_T = \frac{c_{33}^E c_{12}^E - c_{13}^{E^2}}{c_{11}^E c_{33}^E - c_{13}^{E^2}} \quad (\text{A.35})$$

Für praktisch relevante Werte der Poissonzahl von  $0 < \nu_L < 0,5$  lässt sich hieraus und aus dem bisherigen ( $\tilde{c}_{44}^E$ ) ein verbesserter Schätzwert für  $c_{44}^E$  entsprechend Gleichung (A.36) angeben.

$$c_{44}^E = \frac{1}{3} \left( \frac{5}{3} \cdot \frac{(1 + 2\sqrt{2}) E_L}{2 \left( 2\sqrt{2} + \left| \frac{E_T + E_L \nu_T - E_L}{E_T \nu_L} \right| \right)} + \tilde{c}_{44}^E \right) \quad (\text{A.36})$$

$$d_{33} = \frac{e_{33} - 2c_{13}^E d_{31}}{c_{33}^E} \quad ([\text{AAP04}], \text{Gl. (A-3.2)}) \quad (\text{A.37})$$

$$g_{33} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (2-2)}) \quad (\text{A.38})$$

$$e_{31} = \frac{\varepsilon_{33}^T - \varepsilon_{33}^S - e_{33}d_{33}}{2d_{31}} \quad ([\text{AAP04}], \text{Gl. (A-3.5)}) \quad (\text{A.39})$$

$$s_{33}^D = s_{33}^E - d_{33}g_{33} \quad ([\text{AAP04}], \text{Gl. (A-2.1)}) \quad (\text{A.40})$$

$$h_{31} = e_{31}\beta_{33}^S \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (1-7)}) \quad (\text{A.41})$$

$$c_{11}^D = c_{11}^E + h_{31}e_{31} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (1-7)}) \quad (\text{A.42})$$

$$c_{12}^D = c_{12}^E + h_{31}e_{31} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (1-7)}) \quad (\text{A.43})$$

$$c_{13}^D = c_{13}^E + h_{31}e_{33} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (1-8)}) \quad (\text{A.44})$$

$$c_{55}^D = \frac{1}{s_{55}^D} \quad ([\text{AAP04}], \text{Gl. (A-1.2)}; [\text{DIN02b}], \text{Gl. (20a)}) \quad (\text{A.45})$$

$$k_{33} = \frac{k_{31}d_{33}}{d_{31}} \cdot \sqrt{\frac{s_{11}^E}{s_{33}^E}} \quad ([\text{DIN02b}], \text{Gl. (62)}) \quad (\text{A.46})$$

$$\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{11}^S + e_{15}^2 s_{44}^E \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (3-3)}) \quad (\text{A.47})$$

$$\beta_{11}^T = \frac{1}{\varepsilon_{11}^T} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (3-1)}) \quad (\text{A.48})$$

$$k_{15} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{11}^T}} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (4-5)}; [\text{DIN02b}], \text{Gl. 57}) \quad (\text{A.49})$$

$$\beta_{11}^S = \frac{1}{\varepsilon_{11}^S} \quad ([\text{DIN88}], \text{Gl. (3-1)}) \quad (\text{A.50})$$

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Prinzipieller Ablauf eines inversen Verfahrens . . . . .	15
2.2	Resonanz- und Antiresonanzstellen in Abhängigkeit von $\frac{D_p}{h_p}$ . . . . .	17
2.3	Einfluss von Parametervariationen auf den Impedanzverlauf . . . . .	21
3.1	Grafische Veranschaulichung der Voigtschen Matrixnotation . . . . .	31
3.2	Der piezoelektrische Effekt . . . . .	33
3.3	Die kristalline Perowskit-Struktur am Beispiel von PZT . . . . .	34
3.4	Ausrichtung der spontanen Polarisierung einzelner Domänen . . . . .	35
3.5	Hysteresekurven einer Piezokeramik . . . . .	37
3.6	Zusammenhänge der Zustandsgrößen in den Zustandsgleichungen . . . . .	41
3.7	Vier Arten des direkten piezoelektrischen Effektes . . . . .	42
3.8	Die Klassifizierung der Dämpfungseffekte . . . . .	46
3.9	Verlauf einer exponentiell gedämpften Sinusschwingung . . . . .	51
3.10	Beispiel eines Rayleigh-Dämpfungsverlaufes . . . . .	52
4.1	Vergleich verschiedener örtlicher Diskretisierungen . . . . .	56
4.2	Exemplarisches FEM-Gitter für eine Piezokeramik . . . . .	58
4.3	Schritte zur Erzeugung der Dateien für die FEM-Simulation . . . . .	58
4.4	Vergleich eines Ausschnitts zweier Simulationsreihen . . . . .	60
4.5	Diskreter normierter Ladungsimpuls für die FEM . . . . .	61
4.6	Simulierte diskrete Impulsantwort für eine Piezokeramik . . . . .	62
4.7	Mittels Impulsantwort berechneter Impedanzverlauf . . . . .	63
4.8	Vergleich der Verfahren zur Simulation des Impedanzverlaufes . . . . .	63
5.1	Sensitivität des Betrages der Impedanz auf $c_{13}^E$ . . . . .	66
5.2	Sensitivität des Betrages der Impedanz auf $c_{33}^E$ . . . . .	66
5.3	Sensitivität des Betrages der Impedanz auf $e_{31}^E$ . . . . .	67
5.4	Sensitivität des Betrages der Impedanz auf $\epsilon_{11}^S$ . . . . .	67
5.5	Beispielanordnung dreier Elektroden für eine Piezokeramikscheibe . . . . .	69
5.6	Zweitorersatzmodell einer Piezokeramik als $\pi$ - und T-Netzwerk . . . . .	70
5.7	Ermittlung der Zweitorparameter in der FEM-Simulation . . . . .	71
5.8	Simulierte Impedanzverläufe für vier Beschaltungsfälle . . . . .	72

5.9	Wechsel einzelner Lösungspunkte zwischen zwei Verläufen . . . . .	73
5.10	Unterschiedliche Verläufe für die Fehlermaßermittlung . . . . .	74
5.11	Das Vornetzwerk und die Ersatzschaltung für dessen Optimierung .	75
5.12	Verlauf des Spannungsverhältnisses nach der Optimierung . . . . .	76
5.13	Frequenzabhängiger Verlauf der Gesamtimpedanz . . . . .	78
5.14	Ermittlung der zweidimensionalen Korrelationsfunktion . . . . .	80
5.15	Ermittelte Sensitivitätsverläufe für $c_{33}^E$ und $c_{44}^E$ . . . . .	81
5.16	Einfluss von Materialparametervariationen . . . . .	83
5.17	Radien und Zielfunktion während der Startwertsuche . . . . .	85
5.18	Sensitivitätsverläufe vor und nach der Elektrodenoptimierung . . . .	86
6.1	Ein $\pi$ -Netzwerk nach der <i>DIN EN 60444-1</i> . . . . .	88
6.2	Messaufbau zur Impedanzmessung bei vollflächigen Elektroden . .	89
6.3	Grafische Programmoberfläche für die Impedanzmessung . . . . .	90
6.4	Programmablaufplan Impedanzmessung . . . . .	91
6.5	Schematische Darstellung der Elektrodenkontaktierung . . . . .	92
6.6	Konfigurationsbeispiel der Relais für die Elektrodenkontaktierung .	93
6.7	Schematische Platinendarstellung des modifizierten Messaufbaus . .	94
6.8	Ablaufes des Siebdruckverfahrens . . . . .	95
6.9	Schematische Darstellung einer Laserablation . . . . .	97
6.10	Mikroskopaufnahme der gelaserten Kupfer-Nickel-Elektrode . . . . .	98
7.1	Direktes und inverses Problem der Piezoelektrizität . . . . .	100
7.2	Gesamtablauf der Materialparameteroptimierung . . . . .	101
7.3	Lage der sechs charakteristischen Frequenzen . . . . .	104
7.4	Ermittlung der charakteristischen Frequenzen . . . . .	105
7.5	Vergleich von Messung und Simulation mit Startwerten . . . . .	107
7.6	Impedanzverläufe bei verschiedenen Elektrodenbeschaltungen . . .	108
7.7	Gefertigte Piezokeramiken mit segmentierten Elektroden . . . . .	108
7.8	Ablaufplan des Gesamtverfahrens . . . . .	109
7.9	Impedanzverläufe nach der Materialdatenbestimmung . . . . .	110
7.10	Impedanzverläufe für Materialparameter aus der Literatur . . . . .	114
7.11	Betrag der Impedanz für eine vollflächige Piezokeramik . . . . .	116
A.1	Ersatzschaltbild für eine Resonanzstelle . . . . .	123
A.2	Ortskurve einer Impedanz für eine Resonanzstelle . . . . .	124
A.3	Impedanzverlauf einer Resonanzstelle . . . . .	126
A.4	Achsenbezeichnungen für polarisierte Piezokeramiken . . . . .	127
A.5	Probekörpergeometrien nach DIN EN 50324-1 . . . . .	128

---

A.6	Polynomapproximationen für $\eta_1$ und $\nu^P$ . . . . .	130
A.7	Interpolation von $k_{\text{eff}}$ . . . . .	132





# Tabellenverzeichnis

2.1	Ergebnis der Sensitivitätsanalyse nach [RuLe09] . . . . .	23
3.1	Indizierung bei Tensor- und Matrixnotation nach Voigt . . . . .	32
3.2	Konstante Zustandsgrößen und ihre Bedeutung und Realisierung . .	42
3.3	Verschiedene Modelle je nach Rayleigh-Dämpfungsparameter . . . .	50
5.1	Sensitivität bei Variation einzelner Materialparameter . . . . .	68
5.2	Sensitivität im Bereich der Dickenresonanz . . . . .	68
5.3	Die Stern-Dreieck-Transformation . . . . .	70
5.4	Zweitorparameter zur Beschreibung einer Piezokeramik . . . . .	71
5.5	Randbedingungen für die Elektrodenoptimierung . . . . .	82
7.1	In den vier Stufen der Optimierung variierte Materialparameter . . .	102
7.2	Die im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Materialparameter . . . . .	111
7.3	Vergleich von PIC255-Materialparametern aus der Literatur . . . . .	114
A.1	Charakteristische Frequenzen einer Resonanzstelle . . . . .	124
A.2	Randbedingungen für die Probekörpergeometrien . . . . .	128



## Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach den Nachnamen und anschließend nach der Jahreszahl sortiert.

- [AAB07] N. P. ÁLVAREZ, M. A. ANDRADE, F. BUIOCHI und J. C. ADAMOWSKI: *Identification of Piezoelectric Material Properties by using Global Sensitivity Analysis*. In: International Congress on Ultrasonics (ICU), Wien, Austria, 09.–12.04. (2007), Proceedings
- [AAP04] M. ALGUERO, C. ALEMANY, L. PARDO und A. M. GONZALEZ: *Method for Obtaining the Full Set of Linear Electric, Mechanical, and Electromechanical Coefficients and All Related Losses of a Piezoelectric Ceramic*. In: Journal of the American Ceramic Society, Vol. 87, Nr. 2 (2004), S. 209–215
- [AGP95] C. ALEMANY, A. M. GONZALEZ, L. PARDO, B. JIMENEZ et al.: *Automatic determination of complex constants of piezoelectric lossy materials in the radial mode*. In: Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 28, Nr. 5 (1995), S. 945–956
- [AlHu70] H. ALLIK und T. J. R. HUGHES: *Finite element method for piezoelectric vibration*. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, Nr. 2 (1970), S. 151–157
- [Alt02] W. ALT: *Nichtlineare Optimierung – Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Braunschweig und Wiesbaden: Vieweg-Verlag (2002). ISBN: 978-3-528-03193-0
- [AMT02] L. AMARANDE, C. MICLEA und C. TANASOIU: *Iterative evaluation of the complex constants of piezoceramic resonators in the radial mode*. In: Journal of the European Ceramic Society, Vol. 22, Nr. 11 (2002), S. 1873–1881
- [Anr06] ANRITSU: *Network Analyzer MS4630B Operation Manual*. URL: <http://www.anritsu.com/en-gb/products-solutions/products/ms4630b.aspx> (besucht am 21.05.2016)
- [APJ94] C. ALEMANY, L. PARDO, B. JIMENEZ, F. CARMONA et al.: *Automatic iterative evaluation of complex material constants in piezoelectric ceramics*. In: Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 27 (1994), S. 148–155
- [ASB07] M. A. ANDRADE, E. SILVA, F. BUIOCHI und J. C. ADAMOWSKI: *Characterization of piezoelectric materials by using an optimization algorithm*. In: International Congress on Ultrasonics (ICU), Wien, Austria, 09.–12.04. (2007), Proceedings

- [AuMo89] J.-D. AUSSEL und J.-P. MONCHALIN: *Precision laser-ultrasonic velocity measurement and elastic constant determination*. In: *Ultrasonics*, Vol. 27, Nr. 3 (1989), S. 165–177
- [AWV98] N. N. ABOUD, G. L. WOJCIK, D. K. VAUGHAN, J. MOULD et al.: *Finite element modeling for ultrasonic transducers*. In: *Medical Imaging*, San Diego (CA), 21.02. (1998), Proceedings, S. 19–42
- [Bae11] D. BÄUERLE: *Laser processing and chemistry*. Heidelberg: Springer-Verlag (2011). ISBN: 978-3-642-17612-8
- [Bat96] K.-J. BATHE: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall (1996). ISBN: 978-0-13-301458-7
- [BaWi76] K.-J. BATHE und E. WILSON: *Numerical methods in finite element analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall (1976). ISBN: 978-0-13-627190-1
- [BBS08] J. BÖHRINGER, P. BÜHLER und P. SCHLAICH: *Kompendium der Mediengestaltung für Digital- und Printmedien*. Berlin: Springer-Verlag (2008). ISBN: 978-3-540-78527-9
- [Bee94] C. BEERENS: *Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik*. Dissertation. Ruhr-Universität Bochum (1994)
- [BKW13] C. R. BOWEN, H. A. KIM, P. M. WEAVER und S. DUNN: *Piezoelectric and ferroelectric materials and structures for energy harvesting applications*. In: *Energy & Environmental Science*, Vol. 7, Nr. 1 (2013), S. 25–44
- [BLK06] N. BRETZ, T. LAHMER, M. KALTENBACHER, E. LEDER et al.: *Material Parameter Identification of Piezoelectric Transducers Including the Whole Assembly*. In: *IEEE Ultrasonics Symposium (IUS)*, Vancouver, Canada, 03.–06.10. (2006), Proceedings, S. 804–807
- [BoHu54] M. BORN und K. HUANG: *Dynamical Theory of Crystal Lattices*. Oxford: Clarendon Press (1954). ISBN: 978-0-19-850369-9
- [BSM00] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt: Harri Deutsch Verlag (2000). ISBN: 978-3-8171-2005-5
- [Cer16] CERAMTEC GMBH: *Bleifreie Werkstoffe*. URL: [http://www.ceramtec.de/files/mf\\_materials-lead-free.pdf](http://www.ceramtec.de/files/mf_materials-lead-free.pdf) (besucht am 15. 10. 2016)
- [CGB08] G. CHEVALLIER, S. GHORBEL und A. BENJEDDOU: *A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures*. In: *Smart Materials and Structures*, Vol. 17 (2008), S. 1–11

- [DaNe92] D. DAMJANOVIC und R. NEWNHAM: *Electrostrictive and Piezoelectric Materials for Actuator Applications*. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 3, Nr. 2 (1992), S. 190–208
- [Daz09] A. DAZIO: *Tragwerksdynamik und Schwingungsprobleme*. In: *Vorlesungsskript Baudynamik*, ETH Zürich, Kap. 6 (2009)
- [DFG16] B. HENNING und A. WALTHER: *DFG-Projekt: Ein modellbasiertes Messverfahren zur Charakterisierung der frequenzabhängigen Materialeigenschaften von Piezokeramiken unter Verwendung eines einzelnen Probekörperindividuums (HE2897/8-1, WA1607/14-1)*. URL: <http://gepris.dfg.de> (besucht am 17. 10. 2016)
- [DIN00] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 60444-1 - Messung von Schwingquarz-Parametern nach dem Null-Phasenverfahren in einem  $\pi$ -Netzwerk - Teil 1: Verfahren zur Messung der Resonanzfrequenz und des Resonanzwiderstandes von Schwingquarzen nach dem Null-Phasenverfahren in einem  $\pi$ -Netzwerk*. (2000)
- [DIN00a] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 60444-5 - Messung von Schwingquarz-Parametern nach dem Null-Phasenverfahren in einem  $\pi$ -Netzwerk - Teil 5: Meßverfahren zur Bestimmung der Ersatzschaltungsparameter von Schwingquarzen mit automatischer Netzwerkanalysortechnik und Fehlerkorrektur*. (2000)
- [DIN02] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 50324-1 - Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 1: Begriffe*. (2002)
- [DIN02b] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 50324-2 - Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 2: Messverfahren, Kleinsignal*. (2002)
- [DIN02c] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 50324-3 - Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 3: Messverfahren, Großsignal*. (2002)
- [DIN13] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN EN 60063 - Vorezugsreihen für die Nennwerte von Widerständen und Kondensatoren*. (2013)
- [DIN88] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN IEC 483 - Leitfaden zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von piezoelektrischer Keramik mit hohem elektromechanischen Koppelfaktor*. (1988)

- [DLW04] X. DING, Y. LI, D. WANG und Q. YIN: *Fabrication of BaTiO<sub>3</sub> dielectric films by direct ink-jet printing*. In: *Ceramics International*, Vol. 30, Nr. 7 (2004), S. 1885–1887
- [DoBr04] D. H. LEE und B. DERBY: *Preparation of PZT suspensions for direct ink jet printing*. In: *Journal of the European Ceramic Society*, Vol. 24, Nr. 6 (2004), S. 1069–1072
- [DWU03] X.-H. DU, Q.-M. WANG und K. UCHINO: *Accurate determination of complex materials coefficients of piezoelectric resonators*. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 50, Nr. 3 (2003), S. 312–320
- [DWU04] X.-H. DU, Q.-M. WANG und K. UCHINO: *An accurate method for the determination of complex coefficients of single crystal piezoelectric resonators I: Theory*. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 51, Nr. 2 (2004), S. 227–237
- [DWU04a] X.-H. DU, Q.-M. WANG und K. UCHINO: *An accurate method for the determination of complex coefficients of single crystal piezoelectric resonators II: Design of measurement and experiments*. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 51, Nr. 2 (2004), S. 238–248
- [EiEi10] J. EICHLER und H.-J. EICHLER: *Laser – Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. Berlin und Heidelberg: Springer-Verlag (2010). ISBN: 978-3-642-10461-9
- [Ein16] A. EINSTEIN: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. In: *Annalen der Physik*, Vol 49, Nr. 4 (1916), S. 770–822
- [Eos16] EOS GMBH: *Datenblatt PA 2200*. URL: [https://www.shapeways.com/rrstatic/material\\_docs/mds-strongflex.pdf](https://www.shapeways.com/rrstatic/material_docs/mds-strongflex.pdf) (besucht am 02.06.2016)
- [Eur16] EUROPÄISCHES PARLAMENT: *RoHS-Richtlinie 2011/65/EU*. URL: <http://www.ce-richtlinien.eu/richtlinien/RoHS.html> (besucht am 15.10.2016)
- [FaSi97] H. FARID und E. P. SIMONCELLI: *Optimally rotation-equivariant directional derivative kernels*. In: *7th International Conference Computer Analysis of Images and Patterns*, Kiel, 10.–12.09. (1997), Proceedings, S. 207–214
- [Fer16] FERROPERM PIEZOCERAMICS: *Produktübersicht PZT-Keramiken*. URL: <http://www.ferroperm-piezo.com> (besucht am 23.09.2016)

- [Foe85] O. FÖLLINGER: *Regelungstechnik*. Heidelberg: Hüthig-Verlag (1985). ISBN: 978-3-7785-1137-4
- [Gho09] S. GHORBEL: *Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations*. Dissertation. LISMA Paris (2009)
- [GHS80] P. GERTHSEN, K. H. HÄRDTL und N. A. SCHMIDT: *Correlation of mechanical and electrical losses in ferroelectric ceramics*. In: *Journal of Applied Physics*, Vol. 51, Nr. 2 (1980), S. 1131–1134
- [Glo15] GLOWFORGE INC.: *Glowforge 3D Printer*. URL: <http://glowforge.com> (besucht am 04. 12. 2015)
- [GoAl96] A. M. GONZALEZ und C. ALEMANY: *Determination of the frequency dependence of characteristic constants in lossy piezoelectric materials*. In: *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 29, Nr. 9 (1996), S. 2476–2482
- [HKK08] T. HEGEWALD, B. KALTENBACHER, M. KALTENBACHER und R. LERCH: *Efficient Modeling of Ferroelectric Behavior for the Analysis of Piezoceramic Actuators*. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 19, Nr. 10 (2008), S. 1117–1129
- [HLW08] W. HEYWANG, K. LUBITZ und W. WERSING: *Piezoelectricity – Evolution and future of a technology*. Bd. 114. Springer series in materials science. Berlin: Springer-Verlag (2008). ISBN: 978-3-540-68680-4
- [HoEe68] R. HOLLAND und E. EER NISSE: *Variational Evaluation of Admittances of Multielectroded Three-Dimensional Piezoelectric Structures*. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. 15, Nr. 2 (1968), S. 119–131
- [HoEe69] R. HOLLAND und E. P. EER NISSE: *Accurate Measurement of Coefficients in a Ferroelectric Ceramic*. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. 16, Nr. 4 (1969), S. 173–181
- [Hol67] R. HOLLAND: *Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients*. In: *IEEE - Transaction on Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-14 (1967)
- [Hol70] R. HOLLAND: *Measurement of Piezoelectric Phase Angles in a Ferroelectric Ceramic*. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. 17, Nr. 2 (1970), S. 123–124
- [HRS09] B. HENNING, J. RAUTENBERG, A. SCHRÖDER und C. UNVERZAGT: *Ultrasonic Sensors for Process Applications - Sensor Design*. In: *Intern. Conf. on Sensors, Technologies, Electronics and Applications (Sensor & Test)*, Nuremberg, 26.–28.05. (2009), Proceedings, S. 47–52

- [HRU09] B. HENNING, J. RAUTENBERG, C. UNVERZAGT, A. SCHRÖDER et al.: *Computer assisted design of transducers for ultrasonic sensor systems*. In: Journal of Measurement Science and Technology (MST), Vol. 20 (2009), S. 11ff.
- [IEE66] IEEE: 177-1966 - *Standard Definitions and Methods of Measurement for Piezoelectric Vibrators*. (1966)
- [IEE78] IEEE: 176-1978 - *Standard on Piezoelectricity*. (1978)
- [IEE87] IEEE / ANSI: 176-1987 - *IEEE Standard on Piezoelectricity*. (1987)
- [Ike90] T. IKEDA: *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford: Oxford University Press (1990). ISBN: 978-0-19-856339-6
- [IRE61] IRE STANDARDS COMMITTEE: *IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics*. (1961)
- [JCJ71] B. JAFFE, W. R. COOK und H. L. JAFFE: *Piezoelectric ceramics*. London und New York: Academic Press (1971). ISBN: 978-0-12-379550-2
- [Jin02] J.-M. JIN: *The finite element method in electromagnetics*. 2. Aufl. New York: Wiley (2002). ISBN: 978-0-471-43818-2
- [JJM98] J. C. LAGARIAS, J. A. REEDS, M. H. WRIGHT und P. E. WRIGHT: *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*. In: SIAM Journal of Optimization, Vol. 9 (1998), S. 112–147
- [JKB15] B. JURGELUCKS, K. KULSHRESHTHA, F. BAUSE, C. UNVERZAGT et al.: *On the optimal configuration of triple-ring-electrodes on piezoceramic transducers towards increased parameter sensitivity of impedance*. In: 17th British-French-German Conference on Optimization, London, United Kingdom, 15.–17.06. (2015), Proceedings
- [JLR03] H.-W. JOO, C.-H. LEE, J.-S. RHO und H.-K. JUNG: *Identification of material constants for piezoelectric transformers by three-dimensional, finite-element method and a design-sensitivity method*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 50, Nr. 8 (2003), S. 965–971
- [KaKa08] B. KALTENBACHER und M. KALTENBACHER: *Identification of Piezoelectric Material Parameters*. In: Technical Report – Numerical and Symbolic Scientific Computing, SFB F013 (2008)
- [Kal07] M. KALTENBACHER: *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag (2007). ISBN: 978-3-540-71359-3



- [KBB10] W. KLEBER, H.-J. BAUTSCH und J. BOHM: *Einführung in die Kristallographie*. München: Oldenbourg (2010). ISBN: 978-3-486-27319-9
- [KBR13] K. KULSHRESHTHA, F. BAUSE, J. RAUTENBERG und C. UNVERZAGT: *A modified electrode topology with increased sensitivity of electrical impedance to piezoelectric material parameters*. In: European Conference on Computational Optimization (ECCO), Chemnitz, 17.–19.07. (2013), Proceedings
- [KCC97] K. W. KWOK, H. CHAN und C. CHOY: *Evaluation of the material parameters of piezoelectric materials by various methods*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 44, Nr. 4 (1997), S. 733–742
- [KGR11] B. KOHOUT, G. GÖBEL und N. V. RUITER: *Finite element model of transducer array systems for 3D ultrasound computer tomography*. In: SPIE Proceedings, SPIE Medical Imaging, Lake Buena Vista, Florida, USA, 12.02. (2011), Proceedings
- [KJB15] K. KULSHRESHTHA, B. JURGELUCKS, F. BAUSE, C. UNVERZAGT et al.: *Increasing the sensitivity of electrical impedance to piezoelectric material parameters with non-uniform electrical excitation*. In: Journal of Sensors and Sensor Systems, Vol. 4, Nr. 1 (2015), S. 217–227
- [KKH10] M. KALTENBACHER, B. KALTENBACHER, T. HEGEWALD und R. LERCH: *Finite Element Formulation for Ferroelectric Hysteresis of Piezoelectric Materials*. In: Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 21, Nr. 8 (2010), S. 773–785
- [KKL00] B. KALTENBACHER, M. KALTENBACHER, R. LERCH und R. SIMKOVICS: *Identification of material tensors for piezoceramic materials*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), San Juan, Puerto Rico, 22.-25.10. (2000), Proceedings, S. 1033–1036
- [Kle05] R. KLEIN: *Algorithmische Geometrie – Grundlagen, Methoden, Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag (2005). ISBN: 978-3-540-20956-0
- [KLM06] B. KALTENBACHER, T. LAHMER, M. MOHR und M. KALTENBACHER: *PDE based determination of piezoelectric material tensors*. In: European Journal of Applied Mathematics, Vol. 17, Nr. 4 (2006), S. 383–416
- [KLM70] R. KRIMHOLTZ, D. LEEDOM und G. MATTHAEI: *New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers*. In: Electronics Letters, Vol. 6, Nr. 13 (1970), S. 398–399
- [Koc00] J. KOCBACH: *Finite Element Modeling of Ultrasonic Piezoelectric Transducers*. Dissertation. University of Bergen (2000)

- [Koh10] B. KOHOUT: *Finite Elemente Simulation von Ultraschallwandlersystemen für die Ultraschall Computertomographie*. Diplomarbeit. Universität Karlsruhe (2010)
- [KoSc04] R. KORIES und H. SCHMIDT-WALTER: *Taschenbuch der Elektrotechnik – Grundlagen und Elektronik*. Frankfurt: Harri Deutsch Verlag (2004). ISBN: 978-3-8171-1734-5
- [KrBe61] H. H. A. KRUEGER und D. BERLINCOURT: *Effects of High Static Stress on the Piezoelectric Properties of Transducer Materials*. In: The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, Nr. 10 (1961), S. 1339
- [KrKr86] J. KRAUTKRÄMER und H. KRAUTKRÄMER: *Werkstoffprüfung mit Ultraschall*. Berlin: Springer Verlag (1986). ISBN: 978-3-540-15754-0
- [KSK01] M. KALTENBACHER, R. SIMKOVICS, B. KALTENBACHER und R. LERCH: *Determination of piezoelectric material parameters using a combined measurement and simulation technique*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), Atlanta (GA), USA, 07.–10.10. (2001), Proceedings, S. 1023–1026
- [KyLu02] D. KYBARTAS und A. LUKOŠEVIČIUS: *Determination of piezoceramics parameters by the use of mode interaction and fitting of impedance characteristics*. In: ULTRAGARSAS, Vol. 45, Nr. 4 (2002), S. 22–28
- [Lah08] T. LAHMER: *Forward and Inverse Problems in Piezoelectricity*. Dissertation. Universität Erlangen-Nürnberg (2008)
- [Lan02] H. LANDES: *CAPAPRE Command Reference*. Buckenhof: WisSoft (2002)
- [Lan51] L. LANDWEBER: *An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind*. In: American Journal of Mathematics, Vol. 73, Nr. 3 (1951), S. 615–624
- [LCM00] G. M. LOUS, I. A. CORNEJO, T. F. McNULTY, A. SAFARI et al.: *Fabrication of Piezoelectric Ceramic Polymer Composite Transducers Using Fused Deposition of Ceramics*. In: Journal of the American Ceramic Society, Vol. 83, Nr. 1 (2000), S. 124–128
- [Ler90] R. LERCH: *Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 37, Nr. 3 (1990), S. 233–247
- [Lew95] J. LEWIS: *Fast normalized cross-correlation*. In: Vision interface, Vol. 10, Nr. 1. (1995), Proceedings, S. 120–123

- [LHB09] F. LINDNER, G. HEJTMANN und S. BOUDRY: *Bleifreie Piezokeramiken – Stand und Entwicklungsbedarfe aus industrieller Sicht*. In: DGM Strategie-workshop, Aachen, 15.10.2009. (2009), Proceedings
- [LiMa06] H.-Y. LIN und C.-C. MA: *The influence of electrode designs on the resonant vibrations for square piezoceramic plates*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 53, Nr. 5 (2006), S. 825–837
- [LKK08] T. LAHMER, M. KALTENBACHER, B. KALTENBACHER, R. LERCH et al.: *FEM-Based Determination of Real and Complex Elastic, Dielectric, and Piezoelectric Moduli in Piezoceramic Materials*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 55, Nr. 2 (2008), S. 465–475
- [LKM05] T. LAHMER, B. KALTENBACHER und M. MOHR: *Simulation Based Determination of Piezoelectric Material Parameters*. In: Proc. Appl. Math. Mech. (PAMM), Vol. 5, Nr. 1 (2005), S. 59–62
- [LKS08] T. LAHMER, B. KALTENBACHER und V. SCHULZ: *Optimal measurement selection for piezoelectric material tensor identification*. In: Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 16, Nr. 3 (2008), S. 369–387
- [LSS06] J. A. LEWIS, J. E. SMAY, J. STUECKER und J. CESARANO: *Direct Ink Writing of Three-Dimensional Ceramic Structures*. In: Journal of the American Ceramic Society, Vol. 89, Nr. 12 (2006), S. 3599–3609
- [LSW09] R. LERCH, G. SESSLER und D. WOLF: *Technische Akustik – Grundlagen und Anwendungen*. Berlin und Heidelberg: Springer-Verlag (2009). ISBN: 978-3-540-23430-2
- [Lue92] H. D. LÜKE: *Korrelationssignale – Korrelationsfolgen und Korrelationsarrays in Nachrichten- und Informationstechnik, Messtechnik und Optik*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag (1992). ISBN: 978-3-540-54579-8
- [MaJa54] W. MASON und H. JAFFE: *Methods for Measuring Piezoelectric, Elastic, and Dielectric Coefficients of Crystals and Ceramics*. In: Proceedings of the IRE, Vol. 42, Nr. 6 (1954), S. 921–930
- [Mas48] W. P. MASON: *Electrostrictive Effect in Barium Titanate Ceramics*. In: Physical Review, Vol. 74, Nr. 9 (1948), S. 1134–1147
- [MaSp11] F. MAINARDI und G. SPADA: *Creep, Relaxation and Viscosity Properties for Basic Fractional Models in Rheology*. In: The European Physical Journal, Special Topics, Vol. 193 (2011), S. 133–160

- [Mat14] MATHWORKS: *Matlab – Die Sprache für technische Berechnungen*. URL: <http://www.mathworks.de/products/matlab/> (besucht am 18.02.2016)
- [Mcm63] G. MCMAHON: *Measurement of Poisson's Ratio in Poled Ferroelectric Ceramics*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics Engineering, Vol. 10, Nr. 2 (1963), S. 102–103
- [Mel01] T. MELZ: *Entwicklung und Qualifikation modularer Satellitensysteme zur adaptiven Vibrationskompensation an mechanischen Kryokühlern*. Dissertation. TU Darmstadt (2001)
- [MHM08] M. MASAKI, H. HASHIMOTO, W. MASAHICO und I. SUZUKI: *Measurements of complex materials constants of piezoelectric ceramics: Radial vibrational mode of a ceramic disk*. In: Journal of the European Ceramic Society, Vol. 28, Nr. 1 (2008), S. 133–138
- [MiOs10] A. MIOTELLO und P. M. OSSI: *Laser-surface interactions for new materials production – Tailoring structure and properties*. Heidelberg und New York: Springer-Verlag (2010). ISBN: 978-3-642-03306-3
- [MKR95] D. MOHAMMAD, N. KHA und V. RAMAMURTI: *On the role of Rayleigh damping*. In: Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, Nr. 2 (1995), S. 207–218
- [MOT73] A. MEITZLER, H. O'BRYAN und H. TIERSTEN: *Definition and Measurement of Radial Mode Coupling Factors in Piezoelectric Ceramic Materials with Large Variations in Poisson's Ratio*. In: IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. 20, Nr. 3 (1973), S. 233–239
- [NaWa12] U. NAUMANN und A. WALTHER: *Getting started with ADOL-C. Combinatorial Scientific Computing*, Chapman-Hall CRC Computational Science (2012), S. 181–202. ISBN: 978-1-4398-2735-2
- [NeBr97] B. NEUBIG und W. BRIESE: *Das grosse Quarz-Kochbuch – Quarze, Quarzoszillatoren, Quarz- und Oberflächenwellenfilter (SAW), Messtechnik*. Feldkirchen: Franzis (1997). ISBN: 978-3-7723-5853-1
- [NeMe65] J. A. NELDER und R. MEAD: *A simplex method for function minimization*. In: Computer Journal, Vol. 7, Nr. 4 (1965), S. 308–313
- [NoWr06] J. NOCEDAL und S. J. WRIGHT: *Numerical optimization*. New York: Springer-Verlag (2006). ISBN: 978-0-387-30303-1
- [OhLu10] J.-R. OHM und H. D. LÜKE: *Signalübertragung – Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag (2010). ISBN: 978-3-642-10199-1

- [OKW16] K. OGO, K. KAKIMOTO, M. WEISS, S. J. RUPITSCH et al.: *Determination of temperature dependency of material parameters for lead-free alkali niobate piezoceramics by the inverse method*. In: AIP Advances, Vol. 065101, Nr. 6 (2016), S. 1–9
- [OnJu67] M. ONOE und H. JUMONJI: *Useful Formulas for Piezoelectric Ceramic Resonators and Their Application to Measurement of Parameters*. In: The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 41, Nr. 4-2 (1967), S. 974–980
- [Ono56] M. ONOE: *Contour Vibrations of Isotropic Circular Plates*. In: The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 28, Nr. 6 (1956), S. 1158–1162
- [OpSc95] A. V. OPPENHEIM und R. W. SCHAFER: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. München, Wien: Oldenbourg Verlag (1995). ISBN: 978-3-486-22948-6
- [PAB05] L. PARDO, M. ALGUERÓ und K. BREBØL: *Resonance modes in the standard piezoceramic shear geometry: A discussion based on finite element analysis*. In: Journal de Physique IV, Vol. 128 (2005), S. 207–211
- [PAB06] L. PARDO, M. ALGUERÓ und K. BREBØL: *Resonance Modes in the Standard Characterization of Ferro-Piezoceramic Samples: A Discussion Based on Modelling by Finite Element Analysis*. In: Ferroelectrics, Vol. 336, Nr. 1 (2006), S. 181–190
- [PAB07] L. PARDO, M. ALGUERO und K. BREBØL: *A non-standard shear resonator for the matrix characterization of piezoceramics and its validation study by finite element analysis*. In: Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 40, Nr. 7 (2007), S. 2162–2169
- [PAB10] N. PEREZ, M. A. ANDRADE, F. BUIOCHI und J. C. ADAMOWSKI: *Identification of elastic, dielectric, and piezoelectric constants in piezoceramic disks*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 57, Nr. 12 (2010), S. 2772–2783
- [Par05] H. PARKUS: *Mechanik der festen Körper*. Wien: Springer Verlag (2005). ISBN: 978-3-211-80777-4
- [PBA08] M. A. PERRY, R. A. BATES, M. A. ATHERTON und H. P. WYNN: *A finite-element-based formulation for sensitivity studies of piezoelectric systems*. In: Smart Materials and Structures, Vol. 17, Nr. 1 (2008), S. 1–15
- [PCA92] L. PARDO, F. CARMONA, C. ALEMANY, B. JIMENEZ et al.: *Temperature dependence of piezoelectric properties of Ca-substituted PbTiO<sub>3</sub> ceramics and composites*. In: Ferroelectrics, Vol. 127, Nr. 1 (1992), S. 173–178

- [Pic16] PI CERAMIC: *Piezokeramische Materialien und Bauelemente*. URL: [http://www.piceramic.de/pdf/Katalog\\_Piezo\\_Technologie\\_Piezo\\_Technik\\_Piezo\\_Mechanik\\_Piezo\\_Bauelemente.pdf](http://www.piceramic.de/pdf/Katalog_Piezo_Technologie_Piezo_Technik_Piezo_Mechanik_Piezo_Bauelemente.pdf) (besucht am 19. 10. 2016)
- [PJG10] L. PARDO, R. JIMENEZ, A. GARCIA, K. BREBØL et al.: *Impedance measurements for determination of elastic and piezoelectric coefficients of films*. In: *Advances in Applied Ceramics*, Vol. 109, Nr. 3 (2010), S. 156–161
- [PMB07] L. PARDO, F. MONTERO DE ESPINOSA und K. BREBØL: *Study by laser interferometry of the resonance modes of the shear plate used in the standards characterization of piezoceramics*. In: *Journal of Electroceramics*, Vol. 19, Nr. 4 (2007), S. 437–442
- [Pow78] M. POWELL: *A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations*. Numerical Analysis – Lecture Notes in Mathematics (Vol. 630). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag (1978), S. 144–157. ISBN: 978-3-540-08538-6
- [Rau12] J. RAUTENBERG: *Ein wellenleiterbasiertes Verfahren zur Bestimmung von Materialdaten für die realitätsnahe Simulation von Schallausbreitungsphänomenen am Beispiel stark absorbierender Kunststoffe*. Dissertation. Universität Paderborn (2012)
- [Rei12] C. REINLEIN: *Thermo-mechanical design, realization and testing of screen-printed deformable mirrors*. Dissertation. Technische Universität Ilmenau (2012)
- [Rie03] A. RIEDER: *Keine Probleme mit inversen Problemen – Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. Wiesbaden: Vieweg-Verlag (2003). ISBN: 978-3-528-03198-5
- [RIL11] S. J. RUPITSCH, J. ILG und R. LERCH: *Enhancement of the inverse method enabling the material parameter identification for piezoceramics*. In: *IEEE Ultrasonic Symposium (IUS)*, Orlando, USA, 18.–21.10. (2011), Proceedings, S. 357–360
- [RIS11] S. J. RUPITSCH, J. ILG, A. SUTOR und R. LERCH: *Variation of Material Parameters for the Thickness Extensional Mode of Piezoceramic Discs in Case of Mechanical Loading*. In: *Procedia Engineering*, Vol. 25 (2011), S. 1441–1444
- [RMT05] R. NOGUERA, M. LEJEUNE und T. CHARTIER: *3D fine scale ceramic components formed by ink-jet prototyping process*. In: *Journal of the European Ceramic Society*, Vol. 25, Nr. 12 (2005), S. 2055–2059

- [RNW11] S. J. RUPITSCH, M. NICOLAI, F. WOLF, J. ILG et al.: *Methods for reliable modeling of piezoceramic materials*. In: 3rd Scientific Symposium, SFB/Trans-regio 39 (2011), S. 71–76
- [RRH11] J. RAUTENBERG, S. J. RUPITSCH, B. HENNING und R. LERCH: *Utilizing an Analytical Approximation for c44E to Enhance the Inverse Method for Material Parameter Identification of Piezoceramics*. In: 7th International Workshop on Direct and Inverse Problems in Piezoelectricity, Duisburg, 04.–07.10. (2011), Proceedings
- [RSI10] S. J. RUPITSCH, A. SUTOR, J. ILG und R. LERCH: *Identification procedure for real and imaginary material parameters of piezoceramic materials*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), San Diego (CA), USA, 11.–14.10. (2010), Proceedings, S. 1214–1217
- [RUB13] J. RAUTENBERG, C. UNVERZAGT, F. BAUSE und B. HENNING: *Measurement of material properties for the simulation of piezoelectric sensor systems*. 5th Int. Workshop "Novel Developments, Applications in Sensor und Actuator Technology", Coburg, 18.09. (2013)
- [RuI15] S. J. RUPITSCH und J. ILG: *Complete characterization of piezoceramic materials by means of two block-shaped test samples*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 62, Nr. 7 (2015), S. 1403–1413
- [RUJ14] J. RAUTENBERG, C. UNVERZAGT, B. JURGELUCKS und K. KULSHRESHTHA: *A new measurement setup for an increased sensitivity of electrical impedance to all piezoelectric material parameters with one piezoelectric disk*. 10th Workshop on Direct und Inverse Problems in Piezoelectricity, Wien, Österreich, 21.–24.09. (2014)
- [RuLe09] S. J. RUPITSCH und R. LERCH: *Inverse Method to estimate material parameters for piezoceramic disc actuators*. In: Applied Physics A, Vol. 97, Nr. 4 (2009), S. 735–740
- [Rus95] K. RUSCHMEYER: *Piezokeramik: Grundlagen, Werkstoffe, Applikationen*. Renningen-Malmsheim: Expert-Verlag (1995). ISBN: 978-3-8169-1152-4
- [RWS09] S. J. RUPITSCH, F. WOLF, A. SUTOR und R. LERCH: *Estimation of material parameters for piezoelectric actuators using electrical and mechanical quantities*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), Rome, Italy, 20.–23.09. (2009), Proceedings, S. 1–4

- [RWS12] S. J. RUPITSCH, F. WOLF, A. SUTOR und R. LERCH: *Reliable modeling of piezoceramic materials utilized in sensors and actuators*. In: Acta Mechanica, Vol. 223, Nr. 8 (2012), S. 1809–1821
- [RZG08] J. RAUTENBERG, H. ZIEGLER, U. GAUGLER, G. DIETZ et al.: *Piezosensor zur Temperaturmessung*. Patent. DE102007020491-A1. (2008)
- [Sch10] T. SCHOLEHWAR: *Charakterisierung der Struktur-Gefüge-Eigenschaftsbeziehungen von piezokeramischen Werkstoffen des Systems PZT-SKN*. Dissertation. TU Dresden (2010)
- [Sem97] J. SEMBLAT: *Rheological Interpretation of Rayleigh Damping*. In: Journal of Sound and Vibration, Vol. 206, Nr. 5 (1997), S. 741–744
- [SGW91] S. SHERRIT, N. GAUTHIER, H. D. WIEDERICK und B. K. MUKHERJEE: *Accurate evaluation of the real and imaginary material constants for a piezoelectric resonator in the radial mode*. In: Ferroelectrics, Vol. 119, Nr. 1 (1991), S. 17–32
- [She08] S. SHERRIT: *Complex material coefficients and energy ratios for lossy piezoelectric materials*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 55, Nr. 11 (2008), S. 2479–2483
- [SHH09] R. SIMKOVICS, M. HOFER, T. HEGEWALD, M. ESCOBAR et al.: *Introduction to Modeling and Simulation with GiD and CFS++*. URL: <http://ce.u-sys.org/Veranstaltungen/CAESAR/cfsManual.pdf> (besucht am 13.03.2016)
- [ShMu07] S. SHERRIT und B. K. MUKHERJEE: *Characterization of Piezoelectric Materials for Transducers – Review of techniques for characterizing piezoelectric/electrostrictive material for transducer applications*. In: Dielectric and Ferroelectric Reviews, CL07-1466 (2012), S. 175–244
- [Sil84] M. G. SILK: *Ultrasonic Transducers for Nondestructive Testing*. Bristol: Adam Hilger Ltd (1984). ISBN: 978-0-85274-436-9
- [SKL12] A. SUTOR, J. KALLWIES und R. LERCH: *An efficient vector Preisach hysteresis model based on a novel rotational operator*. In: Journal of Applied Physics, Vol. 111, Nr. 7 (2012)
- [SLD99] S. SHERRIT, S. LEARY, B. DOLGIN und Y. BAR-COHEN: *Comparison of the Mason and KLM equivalent circuits for piezoelectric resonators in the thickness mode*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), Caesars Tahoe (NV), USA, 17.–20.10. (1999), Proceedings, S. 921–926



- [SLK99] R. SIMKOVICS, H. LANDES, M. KALTENBACHER und R. LERCH: *Nonlinear finite element analysis of piezoelectric transducers*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), Caesars Tahoe (NV), USA, 17.–20.10. (1999), Proceedings, S. 1057–1060
- [Smi76] J. SMITS: *Iterative Method for Accurate Determination of the Real and Imaginary Parts of the Materials Coefficients of Piezoelectric Ceramics*. In: IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. 23, Nr. 6 (1976), S. 393–401
- [Smi85] J. G. SMITS: *High accuracy determination of real and imaginary parts of elastic, piezoelectric and dielectric constants of ferroelectric PLZT (11/55/45) ceramics with iterative method*. In: Ferroelectrics, Vol. 64, Nr. 1 (1985), S. 275–291
- [SMW10] S. SHERRIT, A. MASYS, H. WIEDERICK und B. MUKHERJEE: *Determination of the reduced matrix of the piezoelectric, dielectric and elastic material constants for a piezoelectric material with  $C_\infty$  symmetry*. In: IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics (ISAF), Edinburgh, UK, 09.–12.08. (2010), Proceedings, S. 1–4
- [SSR07] H.-M. SONNENBERG, A. SCHMIDT-SCHOENIAN, J. RAUTENBERG, C. UNVERZAGT et al.: *Ultraschallzähler*. Patent. DE102005062628. (2007)
- [STH97] Y. SASAKI, S. TAKAHASHI und S. HIROSE: *Relationship between Mechanical Loss and Phases of Physical Constants in Lead-Zirconate-Titanate Ceramics*. In: Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 36, Teil 1, Nr. 9B (1997), S. 6058–6061
- [Sut84] V. A. ŠUTILOV: *Physik des Ultraschalls*. Wien: Springer-Verlag (1984). ISBN: 978-3-211-81798-8
- [SWM92] S. SHERRIT, H. D. WIEDERICK und B. K. MUKHERJEE: *Non-iterative evaluation of the real and imaginary material constants of piezoelectric resonators*. In: Ferroelectrics, Vol. 134, Nr. 1 (1992), S. 111–119
- [TEK10] J. TICHÝ, J. ERHART, E. KITTINGER und J. PŘÍVRATSKÁ: *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics – Mechanical, Dielectric, and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag (2010). ISBN: 978-3-540-68427-5
- [The00] P. S. THEOCARIS: *Sorting out the elastic anisotropy of transversely isotropic materials*. In: Acta Mechanica, Vol. 143, Nr. 3–4 (2000), S. 129–140
- [TiGa80] J. TICHÝ und G. H. GAUTSCHI: *Piezoelektrische Messtechnik*. Berlin: Springer-Verlag (1980). ISBN: 978-3-540-09448-7

- [TKN02] T. TSURUMI, Y.-B. KIL, K. NAGATOH, H. KAKEMOTO et al.: *Intrinsic Elastic, Dielectric, and Piezoelectric Losses in Lead Zirconate Titanate Ceramics Determined by an Immittance-Fitting Method*. In: Journal of the American Ceramic Society, Vol. 85, Nr. 8 (2002), S. 1993–1996
- [UcHi01] K. UCHINO und S. HIROSE: *Loss mechanisms in piezoelectrics: how to measure different losses separately*. In: IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 48, Nr. 1 (2001), S. 307–321
- [UnHe11] C. UNVERZAGT und B. HENNING: *Finite element simulation of single ultrasonic transducer with segmented electrodes to adjust the directional characteristic*. In: International Congress on Ultrasonics (ICU), Gdansk, Poland, 05.–08.09. (2011), Proceedings
- [UnHe14] C. UNVERZAGT und B. HENNING: *Sensitivitätssteigerung im Rahmen eines inversen Ansatzes zur Materialparameterbestimmung für Piezokeramiken durch Elektrodenmodifikationen*. XXVIII. Messtechnisches Symposium des Arbeitskreises der Hochschullehrer für Messtechnik (AHMT), Saarbrücken, 18.–20.09. (2014)
- [Unv06] C. UNVERZAGT: *Simulation akustischer Sensoren mittels CAPA*. Piezoforum Paderborn, 14.12. (2006)
- [Unv12] C. UNVERZAGT: *Parametrische FEM-Simulationsmodelle für Optimierungsaufgaben*. Workshop "Messtechnische Anwendungen von Ultraschall", Drübeck, 19.06. (2012)
- [URH13] C. UNVERZAGT, J. RAUTENBERG, B. HENNING und K. KULSHRESHTHA: *Modified electrode shape for the improved determination of piezoelectric material parameters*. In: International Congress on Ultrasonics (ICU), Singapore, 01.–04.05. (2013), Proceedings, S. 758–763
- [URH15] C. UNVERZAGT, J. RAUTENBERG und B. HENNING: *Sensitivitätssteigerung bei der inversen Materialparameterbestimmung für Piezokeramiken*. In: tm - Technisches Messen, Vol. 82, Nr. 2 (2015), S. 102–109
- [Wee10] N. WEERAYUTH: *Dynamik und Kontaktvorgänge bei einem hybriden piezoelektrischen Schwingungsmotor*. Dissertation. Universität Karlsruhe (2010)
- [WIR15] M. WEISS, J. ILG, S. RUPITSCH und R. LERCH: *Inverse Method for Determining Material Parameters of Piezoceramics and Passive Materials*. In: Sensor, Nürnberg, 30.05.–01.06. (2015), Proceedings
- [WIR16] M. WEISS, J. ILJ, S. J. RUPITSCH und R. LERCH: *Inverse Methode zur Charakterisierung des mechanischen Frequenzverhaltens isotroper Werkstoffe*. In: tm - Technisches Messen, Vol. 83, Nr. 3 (2016), S. 123–130

- [Wis16] WISsOFT: CAPA – *Finite-Element Simulation Software*. URL: <http://www.wissoft.de/capa.htm> (besucht am 14.03.2016)
- [WLB08] F. WOLF, T. LAHMER, L. BAHR, A. HAUCK et al.: *Finite element modeling of ultrasonic transducer by utilizing an inverse scheme for the determination of its material parameters*. In: IEEE Ultrasonics Symposium (IUS), Beijing, China, 02.-05.11. (2008), Proceedings, S. 784–787
- [WSR11] F. WOLF, A. SUTOR, S. J. RUPITSCH und R. LERCH: *Modeling and measurement of creep- and rate-dependent hysteresis in ferroelectric actuators*. In: Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 172, Nr. 1 (2011), S. 245–252
- [YWR05] Y. YOU-PING, W. SEEMANN, R. GAUSMANN und Z. JUE: *A new hybrid piezoelectric ultrasonic motor with two stators*. In: Journal of Central South University of Technology, Vol. 12, Nr. 3 (2005), S. 324–328

