

DISSERTATION

Mathematische Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenveranstaltungen –

Normative und empirische Analysen zu exemplarischen
Klausuraufgaben aus dem ersten Studienjahr in der
Elektrotechnik

VORGELEGT VON JÖRG KORTEMEYER

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

an der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der
Universität Paderborn

2018

Inhaltsverzeichnis

1	Forschungsanliegen und Zielsetzung	9
1.1	Problemlage in Ingenieurstudiengängen in der Studieneingangsphase	9
1.2	Problemlage bei der Mathematik-Ausbildung für Ingenieure	10
1.2.1	Curriculum von Mathematik-Veranstaltungen für Ingenieure	11
1.2.2	Curriculum von Grundlagenveranstaltungen zur Elektrotechnik am Beispiel der Universität Paderborn	16
1.2.3	Forschungsstand zu Herausforderungen für Studierende bezogen auf die Schnittstelle der Fächer Mathematik und Elektrotechnik	20
1.3	Institutioneller Hintergrund	29
1.3.1	Das Projekt KoM@ING	29
1.3.2	Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik	30
1.4	Leitfragen und Ziele der Untersuchungen	32
2	Theoretische Grundlagen für die Untersuchung	34
2.1	Mathematisches Modellieren	35
2.1.1	Einleitung	35
2.1.2	Modellierungskreisläufe	36
2.1.3	Kann der Modellierungskreislauf dazu dienen, reale Modellierungssituationen zu beschreiben?	40
2.1.4	Zwischenfazit zum Modellierungskreislauf	42
2.1.5	Ein alternativer Ansatz zur Beschreibung von mathematischen Modellierungen	42
2.1.6	Mathematisches Modellieren und die ATD	45
2.1.7	Untersuchungen vergleichbarer Thematiken mittels der ATD	46
2.2	Problemlösestrategien und Heuristiken nach Polya	49
2.2.1	Problemlösen nach Polya	49
2.2.2	Anwendungsprobleme nach Polya	51
2.2.3	Operationalisierungen von Problemlösestrategien nach Bruder und Collet	54
2.2.4	Zwischenfazit zum Problemlösen	61
2.3	Erkenntnistheoretische Spiele und mathematische Ressourcen	61
2.3.1	Sinnegebung mit Formeln (quantitativ)	63
2.3.2	Sinnegebung ohne Formeln (qualitativ)	65
2.3.3	Mechanisches Gleichungssuchen	66
2.3.4	Weiterentwicklung nach Bing (2008)	67
2.3.5	Kritik an den Erkenntnistheoretischen Spielen	70
2.3.6	Verbindungen zu den Theorien zur Modellierung und zum Problemlösen	70
2.3.7	Zwischenfazit zu den Ansätzen aus der amerikanischen Physikdidaktik	71

3	Forschungsfragen und methodologischer Ansatz: Durchgeführte Studien und Analysewerkzeuge	72
3.0.1	Forschungsfragen	72
3.0.2	Ein Überblick über den methodologischen Ansatz	73
3.1	Die Studi-Expert-Lösung (SEL)	75
3.1.1	Grundkonzept der Studi-Expert-Lösung	76
3.1.2	Vorgehensbeschreibung - Der Entstehungsprozess einer Studi-Expert-Lösung	77
3.2	Experteninterviews mit Wissenschaftlichen Mitarbeitern aus der Elektrotechnik	79
3.2.1	Entwicklung eines Leitfadens zur Analyse von Experteninterviews	80
3.2.2	Anpassung der PARI-Methodik auf die vorliegende Situation	84
3.2.3	Durchführung der Studien	88
3.2.4	Transskription und Auswertung der Interviews	89
3.3	Sukzessives, beispielhaftes Entwickeln einer Studi-Expert-Lösung	93
3.4	Lösungsprozesse der Studierendenpaare	102
3.4.1	Aufbau der Studien	102
3.4.2	Die explikative, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring	106
3.4.3	Das Konzept der niedrig-inferenten Analysen	108
3.4.4	Induktive Kategorien zur Analyse der Bearbeitungsprozesse der Studierenden und Experten	111
3.5	Klausurbearbeitungen von Studierenden	115
3.5.1	Ablauf der Studie	116
3.5.2	Auswertung der Daten aus den Klausuren	116
3.5.3	Analyseverfahren für die durch die Kodierung erhaltenen Daten	119
3.6	Gesamtüberblick zu den Studien und ihren Auswertungsmethoden	120
4	Normative und empirische Untersuchungen zu einer Aufgabe zum Thema „Magnetische Kreise“	123
4.1	Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts	125
4.1.1	Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren	125
4.1.2	Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe A	129
4.1.3	Abhängigkeitsstruktur	131
4.2	Hintergründe zu der Aufgabe	132
4.2.1	Elektrotechnische Grundlagen der Aufgabe	132
4.2.2	Mathematische Hintergründe der Aufgabe	138
4.3	Die Studi-Expert-Lösung	139
4.4	Beantwortung der ersten Forschungsfrage	160
4.5	Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben	165
4.5.1	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A1 und A2	165
4.5.2	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A3	171
4.5.3	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A4	176
4.5.4	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A5	181
4.5.5	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A6	189
4.6	Beantwortung der zweiten Forschungsfrage	195
4.7	Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden	208
4.7.1	Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe A	208
4.7.2	Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen	212
4.8	Beantwortung der dritten Forschungsfrage	227

5	Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Schwingkreise“	230
5.1	Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts	232
5.1.1	Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren	232
5.1.2	Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe B	236
5.1.3	Abhängigkeitsstruktur	237
5.2	Hintergründe zu der Aufgabe	238
5.2.1	Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe B	238
5.2.2	Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe B	244
5.3	Die Studi-Expert-Lösung	249
5.4	Beantwortung der ersten Forschungsfrage	278
5.5	Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben	283
5.5.1	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B1 und B2	283
5.5.2	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B3	289
5.5.3	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B4	295
5.5.4	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B5	305
5.5.5	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B6	311
5.5.6	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B7	316
5.6	Beantwortung der zweiten Forschungsfrage	327
5.7	Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden	339
5.7.1	Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe B	339
5.7.2	Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen	343
5.8	Beantwortung der dritten Forschungsfrage	346
6	Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Signalanalyse“	349
6.1	Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts	351
6.1.1	Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren	351
6.1.2	Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe C	353
6.1.3	Abhängigkeitsstruktur	354
6.2	Hintergründe zu der Aufgabe	354
6.2.1	Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe C	355
6.2.2	Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe C	355
6.3	Die Studi-Expert-Lösung	356
6.4	Beantwortung der ersten Forschungsfrage	371
6.5	Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben	373
6.5.1	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C1	374
6.5.2	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C2	377
6.5.3	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C3	381
6.5.4	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C4	384
6.6	Beantwortung der zweiten Forschungsfrage	388
6.7	Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden	395
6.7.1	Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe C	395
6.7.2	Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen	396
6.8	Beantwortung der dritten Forschungsfrage	398

7	Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Komplexe Wechselstromrechnung“	400
7.1	Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts	401
7.1.1	Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren	402
7.1.2	Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe D	404
7.1.3	Abhängigkeitsstruktur	405
7.2	Hintergründe zu der Aufgabe	407
7.2.1	Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe D	407
7.2.2	Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe D	409
7.3	Die Studi-Expert-Lösung	411
7.4	Beantwortung der ersten Forschungsfrage	427
7.5	Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben	431
7.5.1	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D1	431
7.5.2	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D2	434
7.5.3	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D3	438
7.5.4	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D4	443
7.5.5	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D5	447
7.5.6	Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D6	450
7.6	Beantwortung der zweiten Forschungsfrage	453
8	Zusammenfassung und Diskussion	465
8.1	Beantwortung der ersten Forschungsfrage	465
8.2	Beantwortung der zweiten Forschungsfrage	469
8.3	Beantwortung der dritten Forschungsfrage	479
8.4	Gegenüberstellung zu den Ergebnissen aus der vorgestellten Theorien und Ansätze für Folgeuntersuchungen	482
8.4.1	Beschreibung der Unterschiede zu Ergebnissen vergleichbarer Untersuchungen	482
8.4.2	Optimierungen für die Analyse verwandter Fragestellungen	483
8.4.3	Übergeordnete Fragen für weitere Untersuchungen	484
8.5	Schlusswort – Implikationen für Lehre und Forschung	486
8.5.1	Implikationen für Dozenten	486
8.5.2	Implikationen für Studierende	488
8.5.3	Implikationen für die Forschung	490

Zusammenfassung:

Dieses Dissertationsprojekt untersucht die mathematischen Fähigkeiten, welche in technischen Fächern in Ingenieurstudiengängen benötigt werden. Ingenieurstudierende lernen Mathematik in zwei Kontexten: durch die «Mathematik für Ingenieure» (Mfi) und durch die Verwendung von Mathematik in Vorlesungen zu Ingenieurwissenschaften wie den «Grundlagen der Elektrotechnik» (GET). Von den Studierenden wird erwartet, dass sie mathematische Kompetenzen einsetzen, um Aufgaben in der Elektrotechnik zu analysieren und zu lösen. Es gibt verschiedene Herausforderungen für die Studierenden: Es gibt Asynchronizitäten zwischen den Vorlesungen zur Mfi und GET. Der Mfi-Kurs hat die deduktive Struktur einer Mathematik-Vorlesung, um Verständnis zu sichern, während der GET-Kurs ebenfalls eine bestimmte Reihenfolge an Themen hat, um ihren roten Faden aufzuzeigen. Es gibt verschiedene mathematischen Praktiken in Mfi und in GET und die Verwendung von Mathematik in (mathematischen) Elektrotechnikvorlesungen ist kein Teil der Mathematikvorlesungen.

Die Grundlage der vorgestellten Analysen bilden vier Aufgaben, welche aus einer Klausur nach dem ersten Jahr in Elektrotechnik stammen. Zum Lösen dieser Aufgaben müssen die Studierenden ihr Wissen aus der Elektrotechnik mit ihren mathematischen Fähigkeiten kombinieren. Die vier Aufgaben behandeln die folgenden Themen: magnetische Kreise, Schwingkreise und Ausgleichsvorgänge, Signalanalysen und komplexe Wechselstromrechnung. Die zur Lösung benötigten mathematischen Themen beinhalten Analysis in einer Veränderlichen, komplexe Zahlen und gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Theorie der Untersuchungen basiert auf vier theoretischen Ansätzen: dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007), mathematischem Problemlösen und Heuristiken nach Polya (1949), sowie mathematischer Argumentation und mathematischen Ressourcen in der Physik, vgl. Tuminaro und Redish (2007) bzw. Bing (2008).

Zur Beschreibung der Schnittstelle zwischen Mathematik und Ingenieurfächern wurden vier Arten von Studien unter Verwendung der vier Aufgaben durchgeführt: Experteninterviews, normative Aufgabenanalysen, qualitative Studien von Lösungsprozessen von Studierendenpaaren und Kategorisierungen von Lösungen aus Klausurbearbeitungen:

- die Experteninterviews nutzen die PARI-Methodik, eine aufgabenbasierte Interviewmethode. Sie werden verwendet, um explizite und implizite Kompetenzerwartungen der Lehrenden aus der Elektrotechnik zu identifizieren. Die Interviews liefern zusätzlich Informationen zu typischen Fehlern, alternativen Lösungswegen und Validierungsmethoden.
- Normative Lösungen zu den vier Aufgaben, die sogenannte «Studi-Expert-Lösung» (SEL), wird entwickelt unter Verwendung der theoretischen Ansätze und der Experteninterviews.
- Videostudien mit Studierendenpaaren wurden durchgeführt und analysiert, um Unterschiede zu den optimalen Lösungen, typische Strategien und Unterschiede zu den Lösungen der Experten zu finden. Die Videostudien wurde analysiert unter Verwendung sogenannter «niedrig-inferenter Analysen».
- Klausurbearbeitungen zu den Aufgaben werden verwendet, um die Ergebnisse aus der normativen Lösung aus der Videostudien zu bestätigen, zu verfeinern und zu erweitern.

Die Daten aus den Experteninterviews wurden unter Verwendung der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) analysiert. Die Videostudien wurde unter Verwendung einer explikativen

qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) analysiert, wobei die SEL als Explikationsmaterial eingesetzt wird. Die Klausuren wurden mit einer evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012) analysiert.

Die Kombination der vier Arten von Studien liefert tiefere Erkenntnisse zu Problemlöseprozessen in mathematik-haltigen Ingenieurfächern und hilft Charakteristika solcher Prozesse zu finden. Drei Phasen mit bestimmten Charakteristika können in den normativen und empirischen Lösungsprozessen gefunden werden: Mathematisierung, mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten und Validierung. Im Mathematisierungsteil werden konventionalisierte Skizzen verwendet, um die benötigten Gleichungen für die Berechnungsteile der Aufgaben zu finden. Das mathematisch-elektrotechnische Arbeiten schließt die Arbeit mit physikalischen Größen anstatt Zahlen mit ein, sowie bestimmte Strategien zur Umformung von solchen Gleichungen. Der Validierungsteil besteht aus Strategien zur Überprüfung der Ergebnisse der Rechnungen wie Validierungen über die Einheiten und Größenordnungen der Lösungen.

Die Analyse der Studierendenbearbeitungen zeigt Fehler und Problemstellen auf verschiedenen Ebenen. Zum Beispiel gibt es Problemstellen bei der Anwendung mathematischer Methoden im elektrotechnischen Kontext und der Verbindung zwischen mathematischen und physikalischen Ergebnissen. Bestimmte Strategien der Studierenden, um mit der Schnittstelle zwischen den beiden Fächern umzugehen und die Phasen durchführen zu können, werden präsentiert. Zum Beispiel gibt es die Strategie, den physikalischen Hintergrund in verschiedenen Weisen zu betrachten, das „Gleichungsmanagement“ zum Kombinieren verschiedener Gleichungen zum Erhalt einer Gleichung mit nur einer Unbekannten und Validierungsstrategien wie dem Vergleich der Einheiten auf beiden Seiten einer Gleichung.

Der entwickelte theoretische Ansatz, welcher aus den genannten vier verschiedenen Typen von Studien besteht, kann als Basis für die Analyse weiterer Kontexte verwendet werden, in denen Mathematik angewendet wird, wie in anderen Ingenieurbereichen (z. B. Maschinenbau oder Bauingenieurwesen) oder der Physik. Die Ergebnisse zu Fehlern, Herausforderungen, Strategien und Unterschieden zu Expertenbearbeitungen können als Basis für die Formulierung von Strategien in anderen Kontexten verwendet werden.

Abstract:

This thesis project aims to study the mathematical skills required in technical subjects of bachelor programs in engineering. Engineering students learn mathematics in two contexts: through the «Math for Engineering Students» (MfES) course and through the usage of mathematics in lectures on engineering sciences (like the «Fundamentals of Electrical Engineering»). The students are expected to use mathematical competencies to analyse and solve tasks in electrical engineering. There are several challenges for the students: There are asynchronies between lectures on MfES and FoEE. The MfES-course has the deductive structure of a lecture on mathematics in order to assure understanding, while the FoEE-course also has a certain order of its topics to present their common theme. There are different mathematical practices in MfES and FoEE, and the usage of mathematics in (mathematical) EE-lectures is not part of the lectures on mathematics.

The foundation of the presented analyses is formed by four exercises, which were taken from an exam after the first year of electrical engineering. To solve such exercises, students have to combine their knowledge in electrical engineering with their skills in math. The four exercises

deal with the following topics: magnetic circuits, oscillating circuits and transients, RMS-values and rectified values, and complex alternating current. The mathematical topics required to solve the exercises contain calculus in one variable, complex numbers, and ordinary differential equations. The theory of the research is based on four theoretical approaches: the modeling cycle by Blum und Leiß (2007), mathematical problem solving and heuristics by Polya (1949), and mathematical argumentation and mathematical resources in physics, see Tuminaro und Redish (2007) resp. Bing (2008).

To describe the interface between mathematics and engineering four kinds of studies were conducted: expert interviews, normative task analyses, qualitative studies of solving processes of pairs of students, and categorisations of solutions written down in exams:

- The expert interviews are using the PARI-methodology, a task-based interview method. They are used to identify the explicit and implicit competence expectations of the instructors in electrical engineering. The interviews give information on typical mistakes, alternative solution paths and validation methods.
- The normative solution to the four exercises, the so-called «student-expert-solution» (SES), is developed using the theoretical approaches and the expert interviews.
- Video studies of pairs of students were conducted and analysed to find differences to optimal solutions, typical strategies, and differences to the solutions of the experts. The video studies were analyzed using so-called «low inference analysis».
- The solution from written examinations are used to confirm, refine and enhance the results in the normative solution and in the video studies.

The data of the expert interviews were analyzed using the qualitative content analysis by Mayring (2010). The video studies were analyzed with explicative, qualitative content analysis by Mayring (2010) and the SES is used as explication material. The exams are analysed by evaluative, qualitative content analysis, Kuckartz (2012).

The combination of the four kinds of studies gives more insight on problem solving processes in engineering courses using mathematics and helps to find characteristics of such processes. Three phases with certain characteristics can be found in the normative and empirical solution processes: mathematisation, mathematical-electro-technical work and validation. In the mathematisation part conventionalized sketches are used which contain the relevant information on relevant components and their composition in order to form the required equations for the calculation parts of the exercises. The mathematical-electro-technical work includes dealing with physical quantities rather than numbers, as well as certain strategies for manipulating such equations. The validation part consists of strategies to review the results of the calculations like validations of the units and the magnitudes of the solutions.

The analysis of the students' work shows mistakes and challenges on different levels. For example there are challenges in applying mathematical methods in the context of electrical engineering and the connections between mathematical and physical results. Certain strategies of the students to deal with the interface between the two subjects and the execution of the phases are presented. For example there is the strategy of looking at the physical background in different ways, equation management (to combine different equations to get an equation with just one unknown) and validation strategies comparing the units on both sides of the equation. The developed theoretical framework consisting of the four different kinds of studies that can be used as a basis for the analysis of other contexts in which mathematics is used in applied ways, like other fields of engineering (e.g., mechanical or civil engineering) or physics. The results on mistakes, challenges, strategies and differences to expert solutions can form the basis for the formulation of strategies in other contexts.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Personen bedanken, welche mich bei dem jahrelangen Erstellungsprozess der Dissertation unterstützt haben:

Zu Beginn möchte ich mich bei Rolf Biehler und Niclas Schaper für die großartige und tatkräftige Betreuung und Unterstützung in den letzten Jahren bedanken. Ohne die vielen konstruktiven Diskussionen wäre es unmöglich gewesen, einen Ansatz für die Kompetenzuntersuchung an der Schnittstelle von Mathematik und Ingenieurwissenschaften zu finden. Ihre kritischen Anmerkungen, konstruktiven Hinweise sowie die Ermöglichung des Austauschs mit anderen Forschern bei Tagungen haben es ermöglicht, die Arbeit zu einem erfolgreichen Ende zu führen.

Dem Bundesministerium für Bildung und Forschung danke ich für die finanzielle Förderung meines Dissertationsprojekts im Rahmen des Paderborner Teilprojekts (FKZ 01PK11021B) von KoM@ING¹ im Projektverbund KoKoHs², ohne die diese Arbeit unmöglich gewesen wäre.

Bei Christoph Schulte und weiteren wissenschaftlichen Mitarbeitern vom Institut für Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik an der Universität Paderborn möchte ich mich für die Expertise bezogen auf die elektrotechnischen Fachinhalte, ihre eingebrachte Erfahrung aus der Elektrotechnik-Lehre bedanken sowie den Zugriff auf die Klausurbearbeitungen aus der Elektrotechnik. Gleiches gilt für meine studentischen Hilfskräfte Manuel Winkler, Daniel Mazarin, Lukas Bathelt und Sergej Wiebe, die mich bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösungen unterstützt haben sowie die Transkription der mehr als zwanzig Stunden Videomaterial sowie die Kategorisierung der Klausurbearbeitungen durchgeführt haben. In diesem Rahmen möchte ich mich auch bei den Korrekturleserinnen und -lesern meiner Dissertation bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Anne Frühbis-Krüger, mit der ich nun seit mehr als zehn Jahren in der Mathematiklehre für Ingenieurstudierende an der Leibniz Universität Hannover zusammenarbeite. Sie hat mir viele Freiheiten bei der Erprobung und dem Einsatz innovativer Lehrmethoden im Rahmen der „Mathematik für Ingenieure“ gegeben sowie den Erhalt aussagekräftiger Ergebnisse durch den Zugriff auf große Kohorten von bis zu 2000 Studierenden ermöglicht. Zusätzlich möchte ich für ihre Unterstützung bei der Vorkursreform an der Leibniz Universität im Jahr 2013 bedanken, wobei hier der Dank auch den beteiligten Ingenieur fakultäten gilt. Darüberhinaus bedanke ich mich für ihre Mitwirkung an meiner Prüfungskommission in der Disputation.

Für die Mitwirkung an der Promotionskommission möchte ich mich darüberhinaus bei Mathias Hattermann und Yael Fleischmann bedanken. Mein Dank gilt auch dem Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik (khdm), der Arbeitsgruppe Biehler sowie der Fachgruppe Mathematikdidaktik für die gute Arbeitsatmosphäre sowie die sachkundige Unterstützung bei Fragen.

Schließlich danke ich von ganzem Herzen meinen Freunden, die mir gerade während der Zeit des Niederschreibens der Dissertation durch schwere Zeiten geholfen haben und mir in vielen Situationen Beistand gegeben haben und in hohem Maße für mich da waren. Ich möchte bei den von mir unterrichteten Ingenieurstudierenden an der Leibniz Universität Hannover sowie den P1-Vorkursteilnehmern an der Universität Paderborn dafür bedanken, dass sie mir immer wieder die intrinsische Motivation geben, in dem Feld „Mathematik für Ingenieure“ etwas bewegen zu wollen. Hierbei möchte ich im besonderen Maße den Saalgemeinschaften dafür danken, dass sie mir ein gutes Arbeitsumfeld in Hannover gegeben haben, aber es auch geschafft haben, mir auch mal Ablenkung zu bieten und den Kopf freizubekommen.

¹ Kompetenzmodellierungen und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium

² Kompetenzmodelle und Instrumente zur Kompetenzerfassung im Hochschulsektor – Validierungen und methodische Innovationen

Kapitel 1

Forschungsanliegen und Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung von mathematischen Kompetenzen, welche in Grundlagenfächern zur Elektrotechnik an der Universität benötigt werden. Die Mathematik spielt eine wesentliche Rolle in ingenieurwissenschaftlichen Fächern, denn nur mit Hilfe von Mathematisierungen der zugrundeliegenden physikalischen Situationen können Aufgabenstellungen aus vielen Fächern in der Elektrotechnik oder auch anderen Ingenieurwissenschaften gelöst werden. Dabei ist jedoch nicht die Frage beantwortet worden, wie sich genau die Übergänge zwischen der Elektrotechnik und der Mathematik darstellen.

1.1 Problemlage in Ingenieurstudiengängen in der Studieneingangsphase

Zunächst stellt sich die Frage, warum es interessant ist, sich mit diesem Thema auseinanderzusetzen. Dafür gibt es vielfältige Gründe – und auch in der öffentlichen Diskussion tauchen immer wieder Punkte auf, warum das Thema relevant ist. Selbst bevor sich künftige Studierende zu einem Ingenieurstudium entschließen, werden sie in den Medien immer wieder mit folgenden Punkten konfrontiert:

Ein häufiges Thema ist der „Ingenieurmangel“, d. h. es können viele Stellen im Bereich der Elektrotechnik und des Maschinenbaus mangels Bewerber nicht besetzt werden bzw. Ingenieure, die in den Ruhestand gehen, können durch keine neuen Absolventen ersetzt werden. Immer wieder tauchen überdies Zahlen zu hohen Abbruchquoten in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen auf:

Das Hochschul-Information-Systems (HIS) aus Hannover erfasst seit 1969 Daten zu Studierenden in Deutschland. Dabei werden sogenannte Studienbereiche gebildet, in denen mehrere Studiengänge ähnlicher Form zusammengefasst werden; die Fächergruppe „Ingenieurwissenschaften“ wird auf diese Weise in die Studienbereiche „Maschinenbau“, „Elektrotechnik“ und „Bauwesen“ aufgesplittet. Dabei werden Daten verwendet, welche in Heublein et al. (2012) veröffentlicht wurden. In dem Studienbereich Elektrotechnik gibt es vergleichsweise hohe Anzahlen von Studienabbrechern. Er belegt – gemeinsam mit dem Studienbereich Maschinenbau – jeweils die höchsten Plätze bzgl. Abbrecherquote und den sogenannten Schwundzahlen, welche gleich näher erläutert werden. Bei den Studienanfängern der Jahre 1999 bis 2001, welche im Jahr 2006 ihr Studium absolviert hatten, lag die Abbruchquote an Universitäten im Studienbereich Maschinenbau bei 34% und im Studienbereich Elektrotechnik bei 33%. Die Werte sind gegenüber den Zahlen sieben Jahre früher, d. h. Anfang 1992 bis 1994 und Ende

1999, um 9% (Maschinenbau) bzw. 10% (Elektrotechnik) gestiegen, vgl. Heublein et al. (2012, S. 16).

Auch an Fachhochschulen gibt es ähnliche Entwicklungen: dort ist die Abbruchquote in der Elektrotechnik von Zeitraum 1 zu Zeitraum 2 von 20% auf 36% gestiegen und im Maschinenbau zwischen diesen beiden Zeiträumen von 25% auf 32%, vgl. Heublein et al. (2012, S. 18).

Wenn man noch die Studierenden miteinbezieht, die die Fächergruppe bzw. den Studienbereich gewechselt haben, aber dennoch weiter studiert haben – dieses ist die sogenannte Schwundquote –, so haben universitäre Studiengänge bezogen auf das Absolventenjahr 2006 im Maschinenbau bzw. der Elektrotechnik jeweils einen Schwund an Studierenden von 53%, was der Rekord unter sämtlichen Studienbereichen ist, vgl. Heublein et al. (2012, S. 58).

Heublein et al. (2010) erläutert Ursachen für die Studienabbrüche: In der Fächergruppe Ingenieurwissenschaften werden bei den Studienabbrechern von 2008 die folgenden vier Punkte am häufigsten genannt, wobei die Befragten eine Option von acht Möglichkeiten auswählen mussten: Leistungsprobleme (genannt von 25%), mangelnde Studienmotivation (20%), Prüfungsversagen (14%) und problematische Studienbedingungen (14%).

1.2 Problemlage bei der Mathematik-Ausbildung für Ingenieure

In diesem Abschnitt werden normative Analysen darüber präsentiert, welchen Kenntnis- bzw. Wissenstand Studierende aus der „Mathematik für Ingenieure“ (im folgenden MfI) sowie mathematischen Veranstaltungen wie Vorkursen erlangen können. Anschließend werden diese mathematischen Themen den Inhalten von Grundlagenveranstaltungen in Elektrotechnik zugeordnet, wobei hierfür die „Grundlagen der Elektrotechnik“ (GET-A und GET-B) der Universität Paderborn näher vorgestellt werden, da aus „GET-B“ Klausuraufgaben in den Analysen in Kapitel 4 bis 7 verwendet werden.

Da in dieser Arbeit die mathematikbezogenen Kompetenzen bezogen auf Elektrotechnik modelliert sowie eine Kompetenzentwicklung erfasst werden sollen, wurden in einem ersten Schritt typische Merkmale der Mathematikvorlesungen wie auch der Vorlesung zu den Grundlagen der Elektrotechnik betrachtet. Analog zu universitären Mathematikveranstaltungen für Mathematik-Studierende gibt es eine Aufteilung in Vorlesung und Übung. Die Übungsveranstaltungen dienen dazu, die Vorlesungsinhalte zu vertiefen und geben Anlass zu einer näheren Auseinandersetzung mit den Inhalten der Vorlesung.

Dabei zeigten sich deutliche Unterschiede in der Form, wie Inhalte in der Elektrotechnik vermittelt werden: In den Grundlagen der Elektrotechnik wird die Theorie in der Vorlesung in einer sehr allgemeinen Form präsentiert. In den Übungen, die zu der Vorlesung angeboten werden, werden dagegen Verfahrensweisen vorgestellt, wie Übungsaufgaben auch im Hinblick auf spätere Klausuren gelöst werden können. Dazu wird der Inhalt der Vorlesung in vielen Fällen z. B. bzgl. der beschriebenen physikalischen Ausgangssituation und der zur Lösung notwendigen mathematischen Inhalte vereinfacht. Dadurch wird gewährleistet, dass die Vorlesungsinhalte auf Übungsaufgaben anwendbar sind. In den Klausuren werden häufig keinerlei Begründungen für die Lösungen verlangt, sondern es reicht die Angabe eines korrekten Endergebnisses, um eine volle Punktzahl für eine Aufgabe zu erhalten.

1.2.1 Curriculum von Mathematik-Veranstaltungen für Ingenieure

In diesem Abschnitt wird exemplarisch anhand der Mathematikveranstaltungen für Ingenieure an der Leibniz Universität Hannover geschildert, welche mathematischen Inhalte Ingenieurstudierende üblicherweise im Rahmen ihrer Grundlagenveranstaltungen an deutschen Universitäten kennenlernen. Er soll den normativen Rahmen der Mathematik-Kenntnisse für die Analysen liefern. In der Vorlesung „Mathematik für Ingenieure“ gibt es deutliche Unterschiede zu typischen Veranstaltungen mit der Zielgruppe Mathematikstudierende. Der Schwerpunkt liegt weitgehend auf Berechnungsverfahren; Beweisverfahren werden hingegen kaum behandelt. Inhaltlich wird ein sehr breites Feld an Themen abgedeckt, welches sich über die Analysis in einer und mehreren Veränderlichen bis hin zur Linearen Algebra und der Behandlung von Komplexen Zahlen erstreckt. Die Veranstaltungen folgen dem typischen deduktiven Aufbau, da es aufgrund der Ordnung im Aufbau der mathematischen Theorie kaum Anpassungsmöglichkeiten bei der Reihenfolge gibt. Im folgenden werden die vier Veranstaltungen näher vorgestellt.

Mathematik-Vorkurs für Ingenieure

Der Mathematik-Vorkurs für Ingenieure unterteilt sich in zwei große Bereiche. Einerseits, im folgenden als VK1 bezeichnet, werden Inhalte aus der Schule (Sekundarstufe 1) vorgestellt, welche nicht oder nur stark am Rande innerhalb der Vorlesungen (aber nicht in Übungsaufgaben) behandelt werden. Andererseits, im folgenden als VK2 bezeichnet, gibt es im Themen im Vorkurs, die in Erstsemesterveranstaltungen zur Mathematik behandelt werden, aber die vorher noch einmal aufgefrischt werden sollen, damit die Routinen wieder in Erinnerung gerufen werden. Bei diesen Themen werden die Hauptideen vorgestellt, aber eine vertiefte Behandlung der Theorie findet erst in den regulären Mathematik-Veranstaltungen statt. Teilweise werden auch – wie z. B. in der Paderborner Variante dieses Vorkurses – Themen behandelt, welche neu an Universität sind, konkret in dem Fall „Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ “, um die spätere Anwendung der Vorkursinhalte aufzuzeigen. Die besagten Vorkursinhalte sind in diesem Fall konkret Trigonometrie, Potenzgesetze (im Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion) sowie Vektorrechnung.

[VK1.1] Der Vorkurs beginnt mit der Einführung verschiedener Zahlenbereiche: natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie reelle Zahlen $\mathbb{R}$. In diesem Zusammenhang werden Teilbarkeitsregeln (beispielsweise für Teilbarkeit durch 2, 3, 5, 9 oder 11) oder auch der euklidische Algorithmus zum Bestimmen eines größten gemeinsamen Teilers als Hilfsmittel zum Kürzen von Brüchen behandelt. Für den Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ und zur Vorstellung eines auf der bisher entwickelten Theorie aufbauenden Beweisen wird dann abschließend bewiesen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. In einem zweiten Abschnitt gibt es eine Einführung in Notationen aus der Mathematik wie dem Summen- und Produktzeichen oder auch Quantoren. Des Weiteren werden Mengen und Mengenoperationen eingeführt.

[VK1.2] Als nächstes folgt ein großer Abschnitt zu Funktionen, in dem zunächst der Funktionsbegriff und anschließend Eigenschaften wie bijektiv oder gerade eingeführt werden. In diesem Abschnitt werden Lösungsverfahren für lineare Gleichungen (inkl. Dreisatz) und erste Gleichungssysteme mit den Lösungsmethoden Gleichsetzungs-, Einsetzungs- oder Additionsverfahren vorgestellt. (Das Gauß'sche Eliminationsverfahren folgt später.) Dann gibt es einen Übergang zu Lösungsverfahren für Polynome zweiten Grades (Satz von Vieta, Quadratische Ergänzung, pq-Formel) oder höheren Grades (Polynomdivision, Horner-Schema). Insbesondere die beiden letztgenannten Verfahren sind im ersten Semester für Studierenden wichtig, um bei-

Thema	Theorie	Kalkül
Folgen und Reihen	Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz, Grenzwerte	Umformungen an Brüchen („Hauptlinge eliminieren“), Geometrische Reihe
Differenzieren	Sekanten- und Tangentensteigungen, Differentialquotient	Ableitungen verschiedener Funktionentypen, Produktregel, Kettenregel
Integrieren	Integration als Differenzionsumkehr, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für bestimmte Integrale	Stammfunktionen verschiedener Funktionentypen, Partielle Integration, Substitution
Analytische Geometrie	Vektorrechnung (Normierung, Länge, Addition und Subtraktion), Skalar- und Vektorprodukt	Bestimmen der in Spalte 2 genannten Ausdrücke, Kosinussatz, orthogonale Projektion
Gauß-Algorithmus	Lineare Gleichungssysteme (homogen und inhomogen), Zeilenstufenform und elementare Zeilenoperationen	Gauß-Algorithmus für verschiedene Fälle bezogen auf die Anzahl freier Parameter

Tabelle 1.2.1: Themen aus dem Bereich VK2 des Vorkurses

spielsweise die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zur Berechnung von Eigenwerten bestimmen zu können.

[VK1.3] Im letzten Teilabschnitt von VK1 werden weitere Funktionentypen neben den bislang behandelten Polynomen eingeführt. Zunächst geht es um Trigonometrie, wobei hier zunächst das Bogenmaß eingeführt wird, in welchem die Winkel an der Universität üblicherweise dargestellt werden. Dann werden die üblichen trigonometrischen Seitenverhältnisse (Sinus, Kosinus, ...) am rechtwinkligen Dreieck eingeführt und Zusammenhänge zwischen ihnen gezeigt sowie einige konkrete Sinus- und Kosinuswerte bestimmt. Anschließend findet ein Übergang auf den Einheitskreis statt, es werden die Additionstheoreme eingeführt sowie kurz auf die Umkehrfunktionen eingegangen. Als nächstes werden Potenz-, Wurzel- und Logarithmengesetze behandelt und in diesem Kontext die binomischen Formeln und der binomische Lehrsatz.

[VK2] Die Themen im Bereich VK2 erstrecken sich grob über Folgen und Reihen, Differenzieren und Integrieren in einer Veränderlichen, Analytische Geometrie und dem Gauß-Algorithmus, d. h. alles Themen üblicher Erstsemesterveranstaltungen in den Ingenieurwissenschaften. Die Themen, die (eingeschränkte!) Theorie sowie die vorgestellten Methoden sind in Tabelle 1.2.1 dargestellt.

Mathematik für Ingenieure

In diesem Abschnitt wird beispielhaft ein zweisemestriger Kurs zur „Mathematik für Ingenieure“ vorgestellt. Die Mathematik für Ingenieure I enthält – bezogen auf die üblichen Erstsemesterveranstaltungen für Bachelor-Studierende der Mathematik und des gymnasialen Lehramts – sowohl Inhalte einer üblichen Analysis I als auch Inhalte einer üblichen Lineare Algebra I.

Aufgrund der starken Verwendung von Analytischer Geometrie in Mechanikfächern wie der Technischen Mechanik oder der Baumechanik erfolgt der Einstieg in die Veranstaltung mit der Betrachtung des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ und Vektoren als dessen Elemente. In diesem Zusammenhang wird zunächst das Skalarprodukt in zwei Darstellungen – als Summe der Produkte der einzelnen Komponenten bzw. unter Verwendung des Kosinus eingeführt. Dabei werden auch Begriffe wie „Basis“ und „Dimension“ eines Vektorraums thematisiert. Dieser Abschnitt schließt ab mit der Betrachtung des Vektorprodukts zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Anschließend werden aufgrund der hohen Relevanz in der Elektrotechnik Komplexe Zahlen eingeführt und die Rechenoperationen in allen drei Darstellungen (kartesisch, Polar, Euler) behandelt.

Der folgende Abschnitt befasst sich mit Linearen Gleichungssysteme und in diesem Zusammenhang mit das Gauß'sches Eliminationsverfahren vorgestellt. Dabei werden Lineare Gleichungssysteme direkt als Matrizengleichungen geschrieben und in diesem Zusammenhang die Bestimmung des Rangs einer Matrix, d. h. das Überführen eines Linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform und anschließendes Ablesen des Rangs für Aussagen zur Existenz von Lösungen linearer Gleichungssysteme, thematisiert. Danach folgt ein Abschnitt zu Matrizenrechnung, also Aussagen zu Kommutativität (diese ist für Matrizenmultiplikation nicht erfüllt), Assoziativität und Distributivgesetzen. Dann wird die Bestimmung von Determinanten quadratischer Matrizen sowie von Eigenwerten (als Nullstellen des charakteristischen Polynoms) und Eigenvektoren quadratischer Matrizen behandelt.

Im folgenden Teil erfolgt ein Übergang in die Themen der Analysis I, in dem Folgen behandelt werden. Dabei geht es in erster Linie um den Begriff der Konvergenz und verschiedene Konvergenzkriterien. Nach der Behandlung von Stetigkeit werden Grenzwerte von Funktionen betrachtet sowie Eigenschaften stetiger Funktionen. Das Thema „Reihen“ entfällt an dieser Stelle, was später noch näher begründet wird. In der Veranstaltung geht es dann weiter mit Differentiation und der Behandlung von Differenzierbarkeit in einem Punkt sowie Ableitungsregeln (Summen-, Faktor-, Produkt-, Ketten- und Quotientenregel sowie die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion). In diesem Bereich wird der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, die Regeln von de l'Hospital sowie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Ableitungen behandelt.

Der letzte Abschnitt im ersten Semester befasst sich mit der Integration in einer Veränderlichen. Dieses ist ein zentraler Bestandteil der ingenieurwissenschaftlichen Fachveranstaltungen wie der Mechanik oder der Elektrotechnik in den ersten Semestern. In diesem Zusammenhang werden das bestimmte Integral unter Verwendung der Riemann'schen Zwischensummen, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie Integrationsmethoden (Summen- und Faktorregel, Partielle Integration, Substitution, Integration durch Partialbruchzerlegung) behandelt. Bei der anschließenden Betrachtung von Reihen werden in besonderem Maße Potenz-, Taylor- und Fourierreihen thematisiert.

Die Vorlesung „Mathematik für Ingenieure II“ schließt direkt an die „Mathematik für Ingenieure I“ an. Das erste Thema sind Reihen und in diesem Zusammenhang Potenzreihen. Durch die vorherige Behandlung von Differenzieren und Integrieren in einer Veränderlichen können hier direkt Taylorreihen (zur Annäherung von Funktionen mit Potenzreihen, die Ableitungen enthalten) und Fourierreihen (zur Annäherung von periodischen Funktionen mit Reihen, die trigonometrische Ausdrücke und Integrale enthalten) behandelt werden. Diese beiden Formen von Reihen sind die Hauptanwendung von Reihen in den Ingenieurwissenschaften. Innerhalb dieses Abschnitts werden dann auch noch uneigentliche Integrale sowie Erweiterungen der

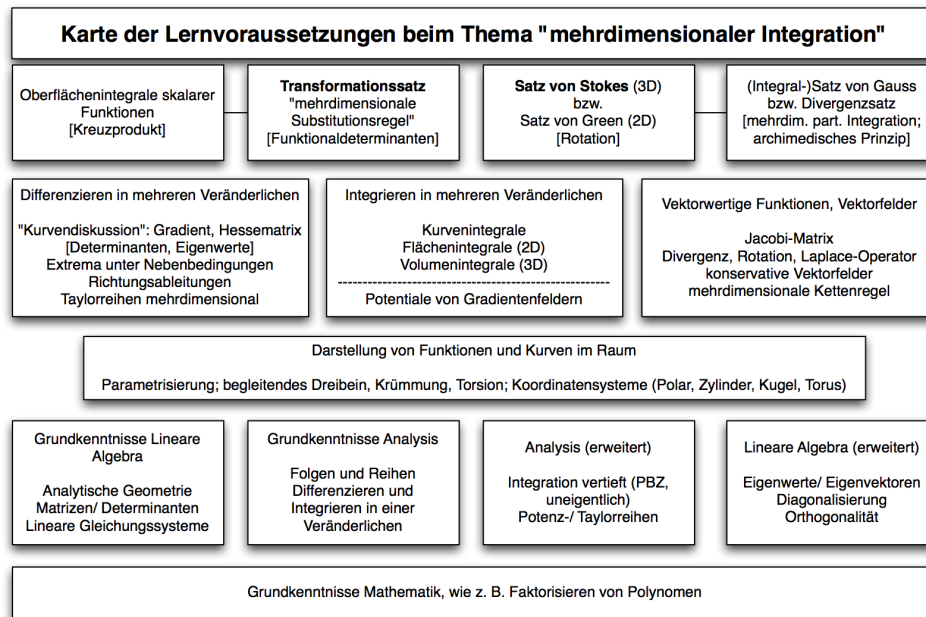


Abbildung 1.2.1: Deduktiver Aufbau der Mathematik für Ingenieure bis zum Thema „Mehrdimensionale Integration“

Integralrechnung wie die Bestimmung von Bogenlängen und Krümmungen betrachtet.

Der zentrale Bestandteil der Mathematik für Ingenieure II ist die Analysis in mehreren reellen Veränderlichen, sowohl auf skalarwertige Funktionen bzw. Skalarfelder als auch auf vektorwertige Funktionen bzw. Vektorfelder. Bezogen auf die Veranstaltungen für Mathematik-Studierende entsprechen die Inhalte mehreren Analysis-Veranstaltungen, wobei es einen speziellen Fokus auf Rechenmethoden gibt. Im Rahmen der Differentialrechnung von Skalarfeldern werden mehrdimensionale Differenzierbarkeit, partielle Ableitungen (Gradient, Hesse-Matrix) sowie Extrema mit Nebenbedingungen, welche mittels des Lagrange-Verfahrens bestimmt werden können, behandelt. Bei der Differentialrechnung für Vektorfelder werden Jacobi-Matrizen und Ausdrücke wie Divergenz und Rotation eingeführt, Funktionaldeterminanten (u. a. für die spätere Verwendung bei Koordinatenwechseln im Transformationssatz) und die Bestimmung von Potentialen vorgestellt, welche bei konservativen Vektorfeldern möglich ist.

Bei der Integralrechnung von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher werden Kurvenintegrale und die Integration auf Normalbereichen vorgestellt. Der Hauptbestandteil in diesem Zusammenhang ist der Transformationssatz für Transformationen in andere Koordinatensysteme wie Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten, und die Bestimmung von Flächen-, Oberflächen- und Volumenintegralen. Bei der Integration von Vektorfeldern werden in erster Linie die drei Integralsätze von Green, Stokes und Gauß behandelt, welche Überführungen in die Integration von Skalarfeldern erlauben – und daher eine große Rolle bei der Betrachtung elektrischer oder magnetischer Felder in der Elektrotechnik spielen. Der deduktive Aufbau der Mathematik für Ingenieure bis hin zur mehrdimensionalen Integration ist in Abbildung 1.2.1 dargestellt.

Den Abschluss der Mathematik für Ingenieure II bilden Gewöhnliche Differentialgleichungen, d. h. Differentialgleichungen in einer Veränderlichen, die somit nicht auf den Inhalten zur mehrdimensionalen Analysis aufbauen. In diesem Zusammenhang werden lineare Differentialgleichungen

erster Ordnung sowohl in homogener Form (lösbar mit der „Trennung der Veränderlichen“) und inhomogener Form (lösbar mit „Variation der Konstanten“) behandelt. Alternativ wird auch das Partikulärverfahren zur Lösung vorgestellt, welches inhomogene Differentialgleichungen mit einer Funktion löst, die die Summe aus einer allgemeinen homogenen Lösung und einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Mit Hilfe dieses Verfahrens und sogenannter charakteristischer Gleichungen werden anschließend noch Differentialgleichungen der Ordnung 2 und höher sowie Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gelöst.

Numerische Mathematik für Ingenieure

Die letzte reine Mathematik-Veranstaltung für Ingenieure stellt numerische Verfahren zur Lösung verschiedener Aufgabentypen vor. Dabei gibt es häufig Alternativverfahren zu bereits in den Vorveranstaltungen vorgestellten Inhalten. Inhaltlich entspricht die Veranstaltung Numerik-Veranstaltungen für Mathematik-Studierende, wobei wieder ein besonderer Fokus auf Rechenmethoden gelegt wird:

In der Veranstaltung werden direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme (LGS) behandelt, d. h. neben dem Gauß-Algorithmus werden auch LR-, Cholesky- sowie QR-Zerlegungen (mittels Householder-Transformationen) von Matrizen sowie das cg-Verfahren (cg steht für konjugierte Gradienten) behandelt. Als iterative Verfahren werden u. a. das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren thematisiert und es werden zur Eigenwertbestimmung Gerschgorin-Kreise sowie das Von-Mises-Verfahren und die Inverse Iteration behandelt. Als Verfahren zur Interpolation und zur Ausgleichsrechnung wird die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme und Spline-, Newton- & Lagrange-Interpolationen besprochen. Als Verfahren zur Numerischen Integration, der sogenannten Quadratur, werden Newton-Cotes-Quadraturformeln und im speziellen die Simpson- und die $3/8$ -Regel behandelt.

Zur Behandlung nichtlinearer Gleichungen wird der Banach'sche Fixpunktsatz sowie geometrische Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen vorgestellt. Als weiteres Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen wird die Laplace-Transformation behandelt. Zur näherungsweisen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen wird das Euler'sche Polygonzugverfahren behandelt sowie explizite Einschrittverfahren vorgestellt. Zur Lösung von Randwertproblemen bei Differentialgleichungen werden finite Differenzenverfahren und Variationsmethoden wie das Ritz-Galerkin-Verfahren thematisiert. Des Weiteren werden verschiedene Typen partieller Differentialgleichungen (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) besprochen und finite Differenzen behandelt.

Exemplarische weitere mathematische Inhalte in späteren Semestern

Darüber hinaus gibt es weitere mathematische Inhalte, die in verschiedenen Veranstaltungen mit Zielgruppe Ingenieurstudierende auftreten. Die folgende Liste ist exemplarisch zu verstehen, um das Spektrum der in den Ingenieurwissenschaften auftretenden mathematischen Gebiete aufzuzeigen. Diese Inhalte werden situiert in den Fachveranstaltungen eingeführt:

- In dem Fach „Signale und Systeme“, welches an der Leibniz Universität Hannover Studiengänge aus den Bereiche Maschinenbau und Elektrotechnik belegen, werden Distributionen, eine Erweiterung des Funktionsbegriffs aus der Funktionsanalysis, eingesetzt. Mit dieser situierten Verwendung von Distributionen befasst sich die Arbeitsgruppe von Professor Hochmuth an der Leibniz Universität Hannover im Rahmen eines weiteren

Teilprojekts in KoM@ING. Eine Veröffentlichung hierzu findet sich unter Hochmuth und Schreiber (2016).

- In der Robotik werden Quaternionen eingesetzt, welche ein Zahlbereich sind, der die komplexen Zahlen erweitert. Dort ersetzen sie Drehmatrizen, was für eine Verringerung von Rechenoperationen bei der Beschreibung von Robotorbewegungen sorgt.
- Methoden der Stochastik und Statistik, welche in der Schule aber nicht in den mathematischen Grundlagenveranstaltungen behandelt werden, kommen z. B. in der Nachrichtentechnik zum Einsatz.
- Stellenwertsysteme (bzw. die Umrechnung zwischen verschiedenen polyadischen Systemen) werden im Rahmen von Informatik-Veranstaltungen behandelt, welche Ingenieurstudierende im Bachelor belegen.

1.2.2 Curriculum von Grundlagenveranstaltungen zur Elektrotechnik am Beispiel der Universität Paderborn

In diesem Abschnitt werden die Inhalte der Vorlesungen zu den Grundlagen der Elektrotechnik an der Universität Paderborn vorgestellt. Beide Vorlesungen werden seit jeweils mehr als sechs Jahren von denselben Dozenten gelesen. In den fünf Tabellen werden den elektrotechnischen Themen, welche jeweils in der zweiten Spalte stehen, die benötigten mathematischen Gebiete in der dritten Spalte zugeordnet. Hierzu wurden die Skripten zu den beiden Veranstaltung im Hinblick auf mathematische Gebiete gesichtet.

Inhalte der GET-A

In der Erstsemesterveranstaltung zu den Grundlagen der Elektrotechnik, kurz „GET-A“, werden die folgenden Themen behandelt. Die Quelle ist hier das Skript von Frau Prof. Dr. Mertsching. In jedem Fall werden Umformstrategien für arithmetisch-algebraische Ausdrücke mit physikalischen Größen benötigt, die Brüche, deren Zähler und Nenner reelle Zahlen sind, sowie Potenzen (in vielen Fällen Zehnerpotenzen) beinhalten:

	Themen aus dem Skript zur GET-A	Vorkommende mathematische Inhalte
1	Einführung: Historischer Überblick	Winkel, Vektoren
2	Elektrostatisches Feld: Elektrische Ladung; Elektrisches Feld; Elektrische Spannung und elektrisches Potential; Elektrischer Fluss und elektrische Flussdichte; Verhalten der Feldgrößen bei verschiedenen Ladungsanordnungen: Ladungsdichten, Flächenladung, Oberflächenladung; Influenz: Dünne leitende Platten im homogenen elektrischen Feld, Leitende Hohlkugel mit elektrischer Punktladung im Zentrum; Dielektrische Polarisierung; Elektrische Felder an Grenzflächen von Dielektrika; Kapazität: Kondensator, Bauformen von Kondensatoren, Grundschaltungen mit linearen Kapazitäten; Energie im elektrischen Feld	Vektoren (Beträge von Vektoren, Einheitsvektoren), Summenzeichen, Vektoraddition und -subtraktion, Skalarprodukt, Bestimmte Integration vektorwertiger Funktionen, Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Integralsatz von Gauss, Trigonometrie, Zylinder- und Kugelkoordinaten (inkl. Funktionaldeterminanten)

3	Stationäres elektrisches Strömungsfeld: Elektrische Stromstärke; Elektrische Stromdichte; Ladungsträ- gerbewegung im leitenden Material; Ohmscher Wi- derstand: Widerstand, Bauformen von Widerstän- den, Grundsaltungen mit linearen Widerständen; Strömungsfelder an Grenzflächen der spezifischen Leitfähigkeit: Verschwindende spezifische Leitfäh- igkeit in einem Teilbereich, Ideale spezifische Leitfä- higkeit in einem Teilbereich; Energie und Leistung im Strömungsfeld	Differenzieren in einer Ver- änderlichen, Bestimmte In- tegrale in einer Veränderli- chen, Integration vektorwer- tiger Funktionen, Trigonome- trie
4	Einfache elektrische Gleichstromnetzwerke: Zwei- pole: Quellen, Widerstände; Zählpfeile und Zählpfeil- systeme; Kirchhoffsche Gesetze; Einfache Wider- standsnetzwerke; Theorie der Gleichstromnetzwer- ke: Ersatzquellen, Überlagerungsprinzip, Analyse großer Netzwerke, Maschenanalyse, Knotenanaly- se	Summenzeichen, Differen- zieren in einer Veränderli- chen, Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme
5	Stationäres Magnetfeld: Magnete; Kraft auf strom- durchflossene Leiter; Kraft auf geladene Teilchen; Kraftwirkung bei zwei parallelen stromdurchflosse- nen Leitern; Kraftwirkung auf zylindrischen Perma- nentmagneten; Magnetische Feldstärke und Durch- flutungsgesetz; Verhalten der magnetischen Feld- größen bei verschiedenen Leiteranordnungen: Un- endlich langer kreisförmiger Leiter mit endlichem Querschnitt, Kreisringspule, Zylinderspule, Belie- bige Anordnungen mit bekannter Stromverteilung; Magnetische Spannung und magnetisches Potenti- al; Magnetische Polarisierung: Diamagnetismus, Pa- ramagnetismus, Ferromagnetismus; Magnetischer Fluss; Magnetische Felder an Grenzflächen von ma- gnetischen Werkstoffen; Magnetische Kreise; Induk- tivität: Induktivität der Kreisringspule mit Kern, Induk- tivität einer Doppelleitung, Bauformen von Spulen; Magnetischer Kreis mit Luftspalt	Summenzeichen, Trigo- nometrie, Vektorrechnung (Einheitsvektoren), Vektor- addition und -subtraktion, Vektorprodukt, Vektorwertige Funktionen, Skalarprodukt, Integration vektorwertiger Funktionen, Integralsatz von Gauß, Logarithmen

6	Zeitveränderliches elektromagnetisches Feld: Induktionsgesetz: Bewegungsinduktion, Transformationsinduktion, Beispiele zum Induktionsgesetz; Selbstinduktion; Einfache Induktivitätsnetzwerke; Gegeninduktion: Magnetisch gekoppelte Stromkreise, Berechnung von Gegeninduktivitäten, Koppelfaktoren; Energie im magnetischen Feld: Magnetische Energie einer Spule, Magnetische Energie gekoppelter Spulen, Berechnung der magnetischen Energie aus den magnetischen Feldgrößen, Hystereseverluste, Berechnung von Kräften aus der magnetischen Energie, Berechnung von Induktivitäten aus der magnetischen Energie; Wirbelströme: Wirbelstrom in einem dünnen Blech; Anwendungen des Induktionsgesetzes: Bewegungsinduktion, Transformationsinduktion	Summenzeichen, Einheitsvektor, Vektorprodukt, Vektorwertige Funktionen, Trigonometrie, Differenzieren, Skalarprodukt, Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme, Bestimmte Integrale in einer Veränderlichen, Kurvenintegrale, Integration vektorwertiger Funktionen, Logarithmen
---	---	--

Inhalte der GET-B

In der Zweitsemesterveranstaltung zu den Grundlagen der Elektrotechnik, kurz „GET-B“, werden die Themen behandelt, welche in der folgenden Tabelle dargestellt sind. Die Quelle ist hier Böcker (2012). In der folgenden Tabelle sind die Inhalte der GET-B aus dem Skript aufgelistet und jeweils die benötigten Themen aus der Mathematik aufgelistet. In jedem Fall werden Umformstrategien für arithmetisch-algebraische Ausdrücke mit physikalischen benötigt, die Brüche, deren Zähler und Nenner reelle Zahlen sind, sowie Potenzen (in vielen Fällen Zehnerpotenzen) beinhalten:

	Themen aus dem Skript zur GET-B	Vorkommende mathematische Inhalte
1	Elektrische Netzwerke mit diskreten Elementen: Zweipole und Zählpeilsysteme, Kirchhoffsche Gesetze, Mehrpole, Ableitung der Kirchhoffschen Gesetze aus den allgemeinen Feldgleichungen	Summenzeichen, Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme, Kurvenintegrale vektorwertiger Funktionen, mehrdimensionale Integration vektorwertiger Funktionen, Weg- und Flächenelemente
2	Mittelwert und Effektivwert	Bestimmte Integration in einer Veränderlichen, Wurzelgesetze, Trigonometrie
3	Elementare Zweipole: Bezeichnungen, Widerstand, Kondensator, Drossel oder Spule	Bestimmte Integration in einer Veränderlichen, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung (homogen), Trigonometrie, Partialbruchzerlegungen
4	Nichtlineare Elemente: Nichtlineare Drossel, Nichtlinearer Kondensator	Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung (homogen), Bestimmte Integration in einer Veränderlichen

5	Leistung, Arbeit, Energie im elektrischen Netzwerk: Arbeit und Energie, Energiebilanz im Netzwerk	Summenzeichen, Bestimmte Integration in einer Veränderlichen, Grenzwerte von Funktionen
6	Elementare Ausgleichsvorgänge: RC-Glied, RL-Glied, Anfangs-Endwert-Darstellung für RC- und RL-Glieder	Lineare Gleichungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung (homogen und inhomogen), Partikulärverfahren inkl. Exponentialansatz
7	Schwingkreise: LC-Schwingkreis, RLC-Parallelschwingkreis, RLC-Reihenschwingkreis, Aufschaltung von sprungförmigen Größen auf RLC-Netzwerke	Gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung (homogen und inhomogen), Komplexe Zahlen inkl. komplexe Konjugation, Partikulärverfahren inkl. Exponentialansatz, Trigonometrie
8	Gleichstromsteller: Tiefsetzsteller, Hochsetzsteller	Lineare Gleichungen, Bestimmte Integration in einer Veränderlichen, Gewöhnliche Differentialgleichungen (homogen und inhomogen)
9	Sinusförmige Vorgänge in linearen Netzwerken: Sinusförmige Größen, Darstellung sinusförmiger Größen mit komplexen Zeigern, Sinusförmige Größen an Zweipolen, Impedanz und Admittanz, Impedanzen und Admittanzen der elementaren Zweipole, Reihenschaltung und Parallelschaltung, Impedanzen einiger Zweipole, Allgemeine Voraussetzungen für die Rechnung mit Impedanzen und Admittanzen	Trigonometrie, Komplexe Zahlen, Eulerdarstellung einer komplexen Zahl, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung (homogen und inhomogen), Vektoraddition und -subtraktion
10	Frequenzabhängige Darstellungen von Impedanzen und Admittanzen: RC-Parallelschaltung, RL-Reihenschaltung, RL-Parallelschaltung, RC-Reihenschaltung, RLC-Parallelschwingkreis, RLC-Reihenschwingkreis	Trigonometrie, Komplexe Zahlen, Logarithmen
11	Übertragungsfunktionen	Komplexe Zahlen
12	Leistung bei sinusförmigen Vorgängen: Momentan-, Wirk-, Blind- und Scheinleistung, Leistung und Energie, Wirk- und Blindstrom, Wirk- und Blindspannung, Wirk- und Blindleistungsbilanz sowie Gesamtenergie in Netzwerken, Tabelle für Schein-, Wirk- und Blindleistungen	Trigonometrie, Komplexe Zahlen (Überführung von Produkten in Polar- und Eulerdarstellung), Vektoraddition und -subtraktion, Summenzeichen
13	Reale Bauelemente (L, C, R): Normreihen, Kennwerte, Bauformen, Reales Verhalten, Verlustwinkel und Verlustfaktor	Trigonometrie, Komplexe Zahlen, Logarithmen

14	Einfache magnetische Systeme mit Kern und Luftspalt: Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises, Induktivität und Energie, Beziehungen zwischen Scheinleistung, Geometrie sowie Material, Kraftwirkung, Nichtlineare Magnetisierung, Hysterese	Bestimmte Integrale in einer Veränderlichen, Integration vektorwertiger Funktionen, Lineare Gleichungen, Summenzeichen, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung (homogen und inhomogen), Trigonometrie
15	Transformator: Aufbau sowie Schaltzeichen, Idealisiertes Verhalten, Messwandler und Übertrager, Modellierung von Transformatoren mit Streuung, Berücksichtigung der Verluste, Leerlaufverhalten, Kurzschluss und Verhalten bei Belastung, Zusammenhang zwischen Geometrie und Scheinleistung	Lineare Gleichungen, Komplexe Zahlen, Matrizenrechnung, Vektoraddition und -subtraktion
16	Gleichstrommotor: Wirkprinzip, Aufbau, Kommutator und Ankerwicklungsschemata, Mathematische Modellierung, Elektrische und mechanische Leistung, Wirkungsgrad, Schaltungsarten, Klemmenbezeichnungen und Schaltzeichen, Fremderregter und permanent erregter Motor, Betrieb mit Vorwiderständen, Speisung durch einen Tiefsetzsteller, Nebenschlussmotor, Reihenschlussmotor	Vektorprodukt, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung (homogen)
17	Linearmotor: Grundprinzip, einphasiger Linearmotor, Zweiphasiger Linearmotor, Drehstrom-Linearmotor	Trigonometrie, Lineare Gleichungen
18	Drehstrom: Energieübertragung, Komplexe Zeiger der Sternschaltung, Komplexe Zeiger der Dreieckschaltung, Umrechnung zwischen Stern- und Dreieckschaltung	Trigonometrie, Lineare Gleichungen, Vektoraddition und -subtraktion, Komplexe Zahlen

1.2.3 Forschungsstand zu Herausforderungen für Studierende bezogen auf die Schnittstelle der Fächer Mathematik und Elektrotechnik

Im folgenden soll zunächst ein Fokus auf die Mathematik in Ingenieurwissenschaften gerichtet werden:

Hochmuth und Schreiber (2016) beschreiben die Rolle der Mathematik im ingenieurwissenschaftlichen Studium folgendermaßen:

Alle Studierenden müssen im Grundstudium Grundlagenkurse zur Höheren Mathematik (HM) durchlaufen. In theorieorientierten Veranstaltungen des Ingenieurstudiums gehört die Mathematik zu den wesentlichen Werkzeugen, stellt aber auch eine der größten Hürden dar. Es besteht generell Konsens darüber, dass hohe Abbruchquoten im Ingenieursstudium nicht zuletzt auf Schwierigkeiten der Studierenden mit der Mathematik zurückzuführen sind und folglich das Lehren und Lernen von Mathematik im Ingenieursstudium verbessert werden sollte.

(Hochmuth und Schreiber, 2016, S. 549f.)

Cramer et al. (2015) kritisieren einige Charakteristika der Mathematik-Lehre in „INT“- Fächern, also Fächern aus den Bereichen Informatik (I), Naturwissenschaften (N) und Technik (T). Die Autoren sagen zu der Mathematik in INT-Fächern:

„Mathematik wird an den Hochschulen nicht nur von Mathematikern gelehrt; die mathematische Sozialisation von Studierenden der Servicefächer wird auch wesentlich von Lehrenden dieser Fächer geprägt. Diese Prägung hat unterschiedliche Erscheinungsformen.“

(Cramer et al., 2015, S. 62)

Im folgenden Absatz beschreiben sie drei „Erscheinungsformen“ der Mathematik in INT-Fächern, vgl. Cramer et al. (2015, S. 62ff):

1. „Mathematik sofort“: Mathematik kommt vom ersten Tag in den von den Autoren als „Kernfächer“ bezeichneten Uni-Veranstaltungen, d. h. „Grundlagen der Elektrotechnik“ oder „Technische Mechanik“, vor und wird dort als Werkzeug eingesetzt. Nach Einschätzung der Autoren werden die Studierenden darauf in der Schule kaum vorbereitet und Mathematikvorlesungen können diese Lücke – wenn überhaupt – erst mit Verspätung schließen.
2. „Spezielle Mathematik-Kulturen“: Laut den Autoren haben die mangelnden schulischen Vorkenntnisse der Anfänger-Studierenden auch die Folge, dass sich in den Disziplinen, in denen Mathematik angewendet wird, eine von den Autoren als „Surrogat-Mathematik“ bezeichnete Form der Mathematik entwickelt hat. Die Studierenden erarbeiten sich die Lerninhalte, die weder in der Schule noch in der Hochschule vermittelt werden, mittels Lehrbüchern, die teilweise ungewöhnliche Herangehensweisen verwenden. So kritisieren die Autoren Stephenson (2005) ein Lehrbuch für Biologiestudierende, welches eine „Mathematik im Labor“ einführt. In diesem Fall werden anstatt von Standardverfahren für verschiedene Aufgaben jeweils eigenständige Folgen von Schritten zur Lösung vorstellt, welche von den Lesern nachgeahmt werden sollen.
3. „Relevante Mathematik wandert ab“: Die Autoren sehen in der „Umorientierung einführender Mathematikveranstaltungen auf Nachholen von Schulstoff und Schließen von Lücken“, vgl. Cramer et al. (2015, S. 64), auch die Folge, dass Anwendungsfächer der Mathematik (wie auch die Grundlagen der Elektrotechnik), mathematische Inhalte selbst vermitteln müssen, welche die Studierenden dort früher benötigen, als sie in Mathematikveranstaltungen gelehrt werden. Ein Beispiel für eine solche Veranstaltung sind die „Mathematischen Methoden der Physik“, welche für Physikstudierende an der Leibniz Universität Hannover parallel zu den Hauptveranstaltungen zur „Analysis“ und „Linearen Algebra“, die Physik-Studierende ebenfalls besuchen, angeboten wird.

Neben dem bereits beschriebenen Spannungsfeld können aber noch weitere Gründe angeführt werden, die für viele Ingenieurstudierende im speziellen aber auch für Studierende in mathematikhaltigen Fächern (einschließlich dem Bachelorstudium in Mathematik selbst) am Anfang Herausforderungen darstellen:

1. In Servicefächern werden häufig aus organisatorischen und inhaltlichen große Studiengruppen mit einer Vielzahl an Studiengängen gebildet. Dadurch treten in vielen Fällen innerhalb einer Mathematikveranstaltung vierstellige Studierendenanzahlen auf.

Die Zusammenfassung verschiedener Ingenieurstudiengänge ermöglicht eine hohe Durchlässigkeit zwischen den verschiedenen Studiengängen, was aufgrund der nach internen Erhebungen hohen Wechselquote zwischen verschiedenen Ingenieurstudiengängen sogar erwünscht ist.

2. Die großen Lehrveranstaltungen haben noch weitere Konsequenzen für Studierende: Es gibt eine große Schwierigkeit der individuellen Betreuung der Studierenden und ein Hausübungsbetrieb, wie er typisch für die meisten universitären Mathematik-Veranstaltungen ist, ist nicht koordinierbar.
3. Durch Reformen im schulischen Bereich gibt es veränderte Vorbedingungen: In diesem Bereich ist die Umstellung auf G8 zu nennen, die die Verschiebung von mathematischen Inhalten ins Studium zur Folge hatte. Die Studierenden haben häufig weniger ausgeprägte Routinen bei Rechenkalkülen und es gibt eine größere Heterogenität bei den Kenntnissen zu Studienbeginn.
4. Darüber hinaus muss auch eine Sozialisation ins Studium stattfinden. Häufig sind „Strategiewechsel“ erforderlich, da Lernen wie in der Schule nicht mehr den gewünschten Erfolg bringt.
5. Zuletzt ist in Servicefächern häufig der Status der Mathematik für Studierende unklar, denn Mathematik ist weder ein Hauptfach noch ein echtes Nebenfach. Es ist kein Hauptfach, denn die Studierenden sind nicht zum Mathematikstudium an die Universität gekommen, auch wenn sie sich (größtenteils) der Bedeutung von Mathematik für den gewählten Studiengang bewusst sind. Andererseits ist die Mathematik kein Nebenfach, da es eine starke Verbindung zu den Hauptfächern wie der „Technischen Mechanik“ oder den „Grundlagen der Elektrotechnik“ gibt und diese Fächer auf die Vermittlung bestimmter mathematischer Inhalte in den universitären Mathematikveranstaltungen zur Unterstützung in der eigenen Lehre angewiesen sind.

Hochmuth und Schreiber (2016, S. 561) kommen zu dem Ergebnis:

„Insbesondere wird deutlich, dass die pragmatische Mathematikverwendung in den Ingenieurwissenschaften nicht zwingend einer im engeren Sinne strengen mathematischen Rechtfertigung bedarf, sondern dass alternativ oder ergänzend auch Begründungen aus anderen Bezugswissenschaften bzw. dem Fach selbst möglich sind.“

Für die Studierenden gilt es in diesem Zusammenhang mehrere Herausforderungen zu bewältigen. Die Vorlesungen zur „Mathematik für Ingenieure“ (im folgenden MfI) und den „Grundlagen der Elektrotechnik“ (im folgenden GET) sind häufig zeitlich asynchron gelegt, was bedeutet, dass mathematische Inhalte in den Grundlagen der Elektrotechnik eher benötigt werden, als sie in der Mathematikvorlesung vermittelt werden bzw. vermittelt werden können. Einerseits können hier die Vorkurse eine Hilfe für die Studierenden sein, in dem dort – vor dem Einsetzen der ingenieurwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen – wesentliche mathematische Inhalte für die ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen wiederholt werden - insbesondere die Inhalte aus VK2. Andererseits kann dieses aber auch nicht immer geschehen, was zum Beispiel für die Integralsätze aus der Vektoranalysis (wie z. B. dem Satz von Gauss), die direkt am Anfang des ersten Semesters in den Grundlagen der Elektrotechnik an der Universität Paderborn zur Berechnung von physikalischen Größen in elektrischen Feldern benötigt werden. Eine mathematisch fundierte Aufbereitung aller zum Verständnis notwendigen Grundlagen erfordert

einen fast zweisemestrigen Kurs. (An anderen Universitäten werden die Integralsätze aus der Vektoranalysis teilweise erst im dritten Semester behandelt.) Die Mathematikvorlesungen weisen eine deduktive Struktur auf, so dass grundsätzlich ein roter Faden erkennbar ist und die Studierenden die Inhalte besser nachvollziehen können, was durch die Abbildung 1.2.1 verdeutlicht wird. Es kann daher nicht ohne Weiteres gewährleistet werden, dass die Inhalte zu jeder Zeit parallel in beiden Fächern (Mathematik für Ingenieure, Grundlagen der Elektrotechnik) behandelt werden.

In den Tabellen zu den Inhalten der GET-A und GET-B aus Abschnitt 1.2.2 sind nur die mathematischen Themen aufgezählt, welche sich über verschiedene Bereiche der Grundlagenveranstaltungen zur Mathematik für Ingenieurstudierende in den ersten beiden Semestern sowie im Vorkurs erstrecken. Wie diese Inhalte tatsächlich behandelt werden und welche mathematischen Kompetenzen die Studierenden dabei beherrschen müssen, ist eine wichtige Leitfrage dieser Arbeit. Schon bei der Durchsicht der beiden Skripte zeigen sich deutliche Unterschiede zur innermathematischen Verwendung der Inhalte. Fettweis (1996) nennt drei Begründungen für die Praxis der Mathematikverwendung in den Ingenieurwissenschaften:

1. Das Vorgehen wird durch existierende fachmathematische Theorien weitgehend begründet, wobei diese nicht rekapituliert werden (können).
2. Die Richtigkeit des Vorgehens kann durch physikalische Prinzipien begründet werden, also eine Begründung im Sinne einer „erfolgreichen Praxis“, d. h. es werden korrekte Ergebnisse bei einer sinnvollen Anwendung geliefert.
3. Es gibt eine Universalität von physikalisch motivierten Prinzipien, womit eine Anwendbarkeit begründet werden kann, welche über das hinausgeht, was in den Mathematik-Veranstaltungen gezeigt wurde, solange es keine mathematischen Widersprüche bei den tatsächlichen Anwendungen gibt.

An der Schnittstelle von Mathematik und Ingenieurwissenschaften wird beispielsweise unterschiedlich mit mathematischen Strukturen umgegangen, was sich u.a. in der Verwendung von Differentialen oder Vektoren zeigt. Die Verwendung von Mathematik in Elektrotechnik-Vorlesungen wird allerdings nicht in Mathematik-Vorlesungen thematisiert. Dadurch werden die Studierenden üblicherweise nicht mit den Unterschieden bzw. den daraus resultierenden kognitiven Konflikten konfrontiert, aber müssen dennoch laufend damit umgehen. Redish (2005) verdeutlicht diese Unterschiede mit Beispielen aus der Physik und stellt zwei Thesen auf:

1. In der Physik wird Mathematik unterschiedlich verwendet: Seiner Ansicht nach bezeichnen Physiker und Mathematiker Konstanten und Variablen unterschiedlich. Physiker verwenden unterschiedliche Typen von Konstanten: Zahlen wie 2, e oder π , Konstanten unterschiedlicher Dimension, gesuchte Parameter und Anfangsbedingungen. Dabei verschwimmt der Unterschied zwischen Konstanten und Variablen. Die Symbole stehen eher für Ideen als Größen. Er sagt zusammenfassend:

„We mix «things of physics» and «things of math» when we interpret equations.“

(Redish, 2005, S. 2)

Symbole in der Physik werden nicht willkürlich gewählt, sondern mit bestimmten geistigen Vorstellungen zu physikalischen Größen oder Messergebnissen verbunden. Laut

Redish (2005, S. 3) ist die Belegung von mathematischen Ausdrücken mit physikalischer Bedeutung sowohl mächtig als auch nützlich und ermöglicht es, mit komplexen mathematischen Ausdrücken zu arbeiten ohne in die mathematische Tiefe mit der benötigten mathematischen Strenge zu gehen. Ein Beispiel hierfür sind die Einheiten und die Dimensionskontrollen.

2. Physiker und Mathematiker haben unterschiedliche Ziele für den Einsatz von Mathematik: Physiker modellieren mit Hilfe von Mathematik eine Situation, wie sie in der Physik vorliegt. Hierzu bilden sie – analog zu dem später vorgestellten Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) – das Problem aus der physikalischen Welt in die Mathematik ab, bearbeiten es mathematisch, interpretieren das Ergebnis in der physikalischen Welt und evaluieren es bezüglich der zugrundeliegenden Situation. Redish (2005) attestiert, dass in der üblichen universitären Lehre zu wenig Betonung auf den kritischen Schritten des gerade beschriebenen Modells liegt und die dadurch bei Studierenden ausgelösten Erwartungen, wie man Mathematik in den Naturwissenschaften betreibt, zu Problemen führen kann.

Aufbauend hierauf werden die in Abschnitt 2.3 später näher vorgestellten erkenntnistheoretischen Spiele, vgl. Tuminaro und Redish (2007), und Rechtfertigungsstrategien in der Physik, vgl. Bing (2008), entwickelt.

Alpers (2017) konzeptualisiert über eine Dokumentenanalyse von typischen Ingenieur- und Mathematiklehrbüchern Unterschiede in drei Bereichen. Im Kontext dieser Arbeit sind vor allem die bereits oben erwähnte Verwendung von Vektoren sowie von Differentialen interessant. In Statikbüchern werden Vektoren mit einer Größenordnung und einer Richtung eingeführt, aber nicht axiomatisch als Element eines abstrakten Vektorraums. Die üblichen Ingenieurlehrbücher, welche im universitären Bereich eingesetzt werden, – der Autor nennt Papula (2001) und Meyberg und Vachenauer (2013) – gehen da in ähnlicher Weise vor, wobei Meyberg und Vachenauer (2013) später die Definition eines Vektors noch für reelle Vektorräume vornehmen. In der Schulmathematik werden Vektoren in der Regel als Klasse von gleichlangen, parallelen und gleichgerichteten Pfeilen aufgefasst, welche durch Verschiebung ineinander überführt werden können. Kraftvektoren in der Statik sind gebundene Vektoren, welche gemäß Schnell et al. (2013) entlang einer sogenannten Wirkungslinie bewegt werden können, ohne ihren statischen Effekt zu verlieren. Dieses wirkt sich auf die Vektoroperationen aus, denn wenn zwei Vektoren addiert werden, welche nicht auf derselben Wirkungslinie liegen, werden sie wie freie Vektoren behandelt und es muss die Wirkungslinie des resultierenden freien Vektors bestimmt werden. Weitere Unterschiede treten im Zusammenhang mit den Begriffen Komponente, Koordinate und Betrag eines Vektors auf. Hierzu werden in den Fächer unterschiedliche Notationen verwendet, wodurch Inkonsistenzen entstehen können. Als weiteren Unterschied nennt Alpers (2017, S. 138) die Darstellung von Ingenieur- und Mathematikbüchern zur Verwendung von Differentialen, welche in den Ingenieurwissenschaften eher als „infinitely small quantities“ betrachtet werden. Bei der Verwendung in den Ingenieurwissenschaften wird ein mindestens bezüglich einer Dimension infinitesimal kleiner Teil ausgewählt und mit einer infinitesimal kleinen Länge (dl), Fläche (dA), Volumen (dV) oder Masse (dm) multipliziert, wodurch sich wieder eine infinitesimal kleine Größe ergibt. Diese infinitesimal kleinen Größen werden durch Integration „aufaddiert“, was eine (endliche) Eigenschaft des ganzen Objekts ergibt.

Altieri und Prediger (2017) setzen sich mit dem prozeduralen Wissen von Ingenieurstudierenden in Mathematiktests auseinander und unterscheiden dabei das Wissen zu Lösungsalgorithmen («knowlegde in mind») und das verwendete Wissen in seiner Anpassung einschließlich

Genauigkeit und Geschwindigkeit sowie Flexibilität und Anpassbarkeit auf komplexe Situationen («knowlegde in use»). Das Ziel ist die Entwicklung einer theoretischen Grundlage des Zusammenspiels aus dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen in der Mathematik für ingenieurstudierende. Bei elf eingesetzten Items in dem Test erzielten durchschnittlich 34% der Studierenden die richtige Lösung, 11% hatten einen Fehler im «knowlegde in mind» und 44% im «knowlegde in use». Altieri und Prediger (2017) attestiert, dass Studierende, welche am Anfang schwach sind, nicht in der Lage sind, ihre Defizite aufzuholen.

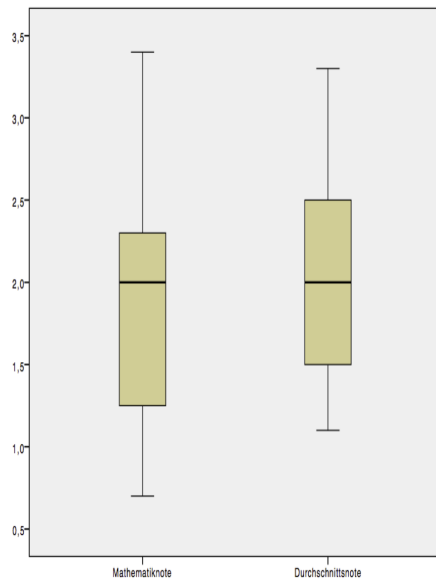
Mei und Heitzer (2017) entwickeln Online-Aufgaben für die Mathematik für Bauingenieure, welche Baumstrukturen haben und adaptiv sind. Es wurden hierzu didaktisch orientierte Inhaltsanalysen zu Themen der Höheren Mathematik durchgeführt. Diese Aufgaben wurden von ca. 80% der Studierenden als hilfreich für das mathematische Verständnis und die Bearbeitung von weiteren Aufgaben bewertet. Ca. 40% der Studierenden gaben an, dass sie ohne die Online-Aufgaben schlechter in den Klausuren abgeschnitten hätten. Des Weiteren wurde über Pearson-Korrelationskoeffizienten eine Korrelation zwischen den Klausurpunkten und der Anzahl der bearbeiteten Onlineaufgaben, der Anzahl der erreichten Punkte in den freiwilligen Hausübungen und der Anzahl der erreichten Punkte in den verpflichtenden kurzen Onlinetests bestimmt. Dabei haben über verschiedene Semester die Hausübungen die höchste Korrelation (0,3 bis 0,5), die Online-Aufgaben eine etwas niedrigere Korrelation (ebenfalls im Bereich 0,3 bis 0,5) und die verpflichtenden Onlinetests die geringster (0,1 bis 0,3). Hieraus ziehen Mei und Heitzer (2017) den Schluss, dass aufgrund der nur etwas geringeren Korrelation die Online-Aufgaben effektiv sind.

Eine Studie zur Motivation und Relevanzeinschätzung von der Mathematikausbildung in Ingenieurstudiengängen

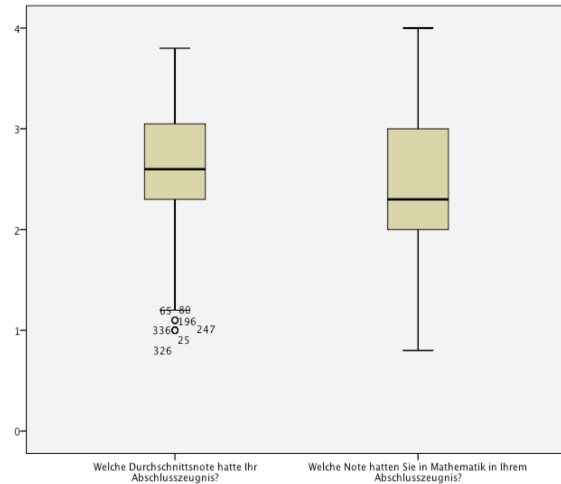
Die AG Ing-Math des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik, welches im Abschnitt 1.3.2 näher vorgestellt wird, hat im Wintersemester 2010/11 über Fragebögen Angaben zur schulischen Vorbildung sowie zur Motivation zur Aufnahme des Studiums von Ingenieurstudierenden erhoben. Die Fragebögen wurden in Erstsemesterveranstaltungen zur Mathematik („Mathematik für Maschinenbauer 1“, „Höhere Mathematik für Elektrotechniker A“) sowie Elektrotechnik („Grundlagen der Elektrotechnik A, GET-A“) eingesetzt und es wurden über die Veranstaltungen ca. 400 Studierende in sämtlichen Ingenieurstudiengängen der Universität Paderborn erreicht:

In der Abbildung 1.2.2 werden die Abiturdurchschnittsnote sowie die letzte Mathematik-Note der Studierenden der Elektrotechnik bzw. des Maschinenbaus gezeigt. Es zeigt sich, dass einerseits in beiden Fällen die Elektrotechniker bessere Ergebnisse als die Maschinenbauer erzielt haben; andererseits zeigt sich in beiden Fällen eine große Streuung bei den angegebenen Noten.

Darüber hinaus wurde nach den Leistungskursen gefragt. Bezogen auf die üblichen Inhalte ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge sind die Inhalte der Fächer Mathematik, Physik und Chemie am relevantesten. In Nordrhein-Westfalen belegen Schüler jeweils zwei Leistungskurse - in Niedersachsen beispielsweise gibt es drei Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau. In der Tabelle 1.2.4 sind die Fächer angegeben, welche mehr als 1% der Teilnehmer (insgesamt ca. 350) angegeben haben. Es zeigt sich, dass zwar fast zwei Drittel der Studierenden einen Leistungskurs in Mathematik belegt hatten, allerdings nur etwas weniger als ein Viertel einen Leistungskurs in Physik und nur ca. sieben Prozent einen Leistungskurs in Chemie. Diese



Studiengänge aus der „Höheren Mathematik für Elektrotechniker“ sowie der „GET-A“



Studiengänge aus der „Mathematik für Maschinenbauer 1“

Abbildung 1.2.2: Abiturschnitt sowie letzte Mathematiknote in der Schule

Fach	Relativ
Mathematik	66,06%
Physik	24,09%
Biologie	18,25%
Englisch	15,69%
Deutsch	13,14%
Erdkunde	9,49%
Geschichte	7,66%
Chemie	6,93%
Sozialwissenschaften	5,47%
Betriebswirtschaftslehre	5,47%
Sport	4,74%

Tabelle 1.2.4: Leistungskurse der Ingenieurstudierenden

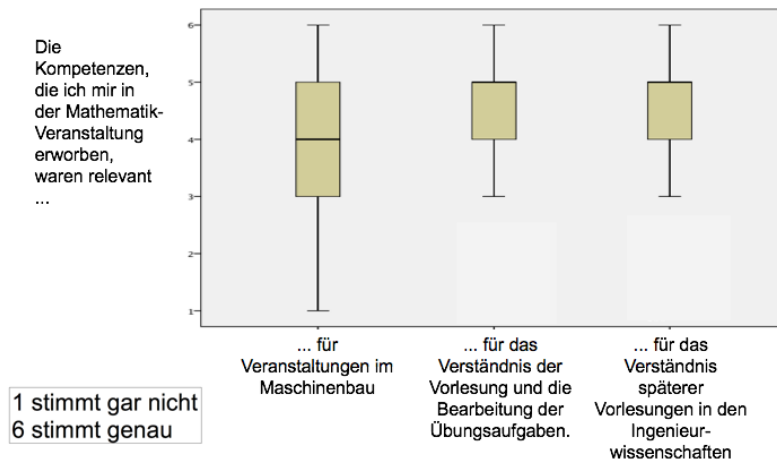


Abbildung 1.2.3: Relevanz der Inhalte aus der Mathematikveranstaltung, n=400

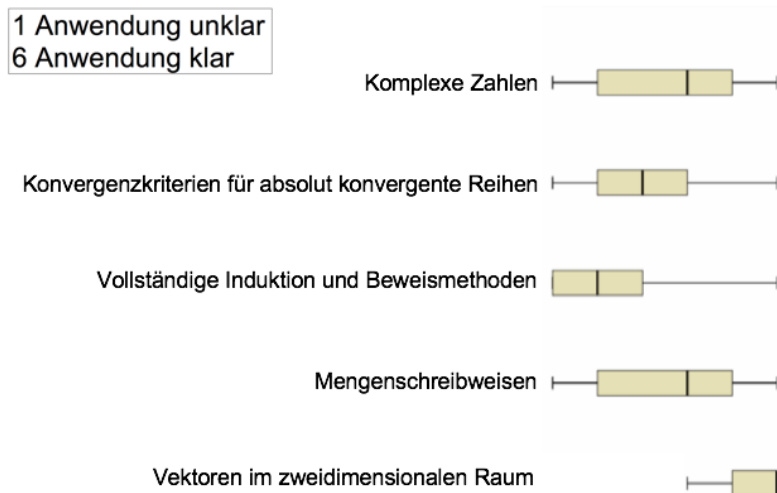


Abbildung 1.2.4: Relevanz einzelner Themen aus der Mathematikveranstaltung

Fächer sind besonders relevant für die Studierendengruppe des Maschinenbaus und sind üblicherweise auch Pflichtfächer im Studium.

In einer Studie der AG Ing-Math wurde ebenfalls unter den 400 Studierenden erhoben, wie sie die Relevanz der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften beurteilen:

Bezogen auf die Relevanz der Kompetenzen, welche in der Mathematik-Veranstaltung erworben wurden, ergibt sich das in Abbildung 1.2.3 dargestellte Resultat. Die fehlende Relevanz aus Sicht der Studierenden ist hier damit zu begründen, dass in der damaligen Mathematik-Veranstaltung vor allem Analysis behandelt wurde, während gleichzeitig in dem Anwendungsfach „Technische Mechanik“ (im folgenden TM), das sich im ersten Semester mit Statik auseinandersetzt, eher Methoden der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie verwendet wurden. Daher zeigt sich dort tendenziell am wenigsten Relevanz mit hoher Heterogenität in den Antworten. Es gibt viel Wissen auf Vorrat.

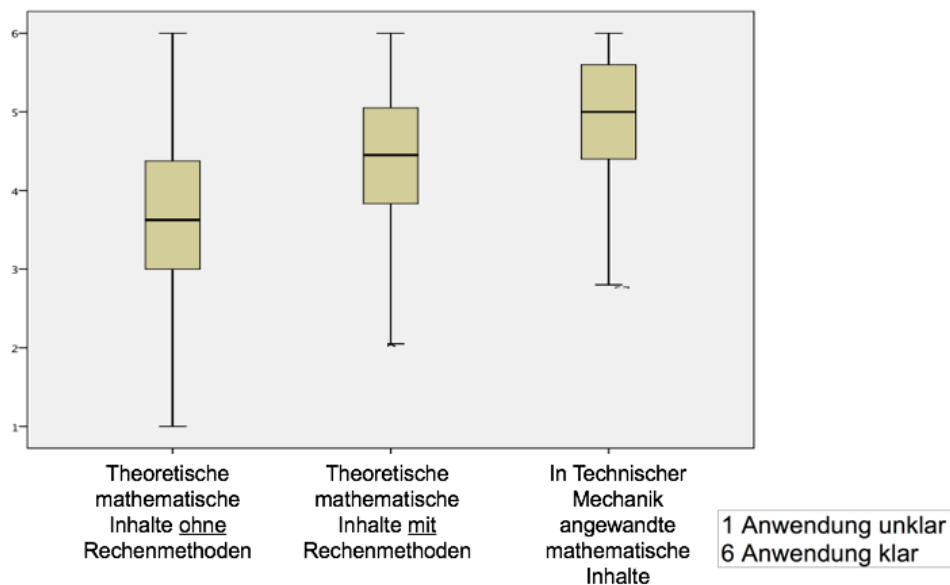


Abbildung 1.2.5: Faktorenanalyse zur Dimensionsreduktion bei den Themen der Mathematik-Veranstaltung

Es wurden auch zahlreiche einzelne Themen aus der Mathematik-Veranstaltung untersucht. In Abbildung 1.2.4 sind sechs dieser Themen exemplarisch herausgegriffen worden. Erfasst wurden dieser Werte wieder auf 6-stufigen Likert-Skalen, bei denen ein höherer Wert für eine höhere Zustimmung stand. Hierzu wurden 41 Themen aus der Veranstaltung Mathematik-Veranstaltung von den Studierenden bezogen auf Anwendbarkeit bewertet. Bei der Skala liegt links der Wert 1 (am linken Ende des Boxplots bei „Vollständiger Induktion und Beweismethoden“ und rechts der Wert 6 beim Median von „Vektoren im zweidimensionalen Raum“.

Bei den Themen 'Komplexe Zahlen', 'Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen' und 'Mengenschreibweisen' zeigen sich jeweils eine hohe Heterogenität bei den Antworten, 'Vollständige Induktion und Beweismethoden' wurde eine niedrige und 'Vektoren im zweidimensionalen Raum' eine hohe Anwendbarkeit gegeben. Mit Hilfe der Daten zu den empirischen Beobachtungen vieler verschiedener Items wurde eine Faktorenanalyse eingesetzt, um auf wenige zugrundeliegende latente Variablen („Faktoren“) zu schließen. Das Ziel dieser Analyse ist eine Dimensionsreduktion, in dem das Antwortverhalten bei verschiedenen Items verglichen wird. Dabei ergeben sich hier drei Faktoren, welche in 1.2.5 dargestellt sind. Man bezeichnet in diesem Zusammenhang die Korrelation der Werte eines Items mit dem Faktor auch als Ladung, d. h. eine hohe Ladung bedeutet eine hohe Korrelation mit dem Faktor.

Die Faktorenanalyse ergibt eine mögliche Einteilung der Themen der Veranstaltung in drei Bereiche:

- Faktor 1: Schlecht bewertet bezogen auf Anwendbarkeit
- Faktor 2: Heterogen bewertet bezogen auf Anwendbarkeit
- Faktor 3: Sehr positiv bewertet bezogen auf Anwendbarkeit

Hierbei zeigt sich, dass theoretische Themen (wie das Führen von Induktionsbeweisen) hoch auf Faktor 1 laden. Rechnerische Themen (Ableiten einer Funktion) laden hoch auf Faktor 2,

allerdings sonst negativ. Themen im Zusammenhang mit der TM laden nur auf Faktor 3. Damit kann man die drei Faktoren folgendermaßen bezeichnen: Faktor 1 „rein theoretisch“, Faktor 2 „theoretisch und rechnerisch“ und Faktor 3 „anwendbar in Technischer Mechanik“.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Studierenden die Relevanz der mathematischen Inhalte in erster Linie im Zusammenhang mit ihrer ingenieurwissenschaftlichen Fachveranstaltung Technische Mechanik sehen. Rechnerische Inhalte erscheinen ihnen relevanter als rein theoretische Inhalte.

1.3 Institutioneller Hintergrund

In diesem Abschnitt wird die institutionelle Einbindung dieses Dissertationsprojekts vorgestellt. Dabei wird das BMBF-geförderte Projekt KoM@ING als auch das von der Stiftung Mercator und der VolkswagenStiftung geförderte Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik und insbesondere dessen AG IngMath vorgestellt.

1.3.1 Das Projekt KoM@ING

Die vorliegende Dissertation wurde im Rahmen des Paderborner Teilprojekts des BMBF-geförderten Forschungsprojekts KoM@ING erstellt und legt den Kern der Forschungen aus dem Paderborner Teilprojekt vor. Die Abkürzung KoM@ING steht für „Kompetenzmodellierungen und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium“. KoM@ING war wiederum eines von 24 Teilprojekten von KoKoHs, „Kompetenzmodelle und Instrumente zur Kompetenzerfassung im Hochschulsektor – Validierungen und methodische Innovationen“, welches ebenfalls vom BMBF gefördert wurde. An KoM@ING waren sechs Universitäten beteiligt:

- Technische Universität Dortmund
- Leibniz Universität Hannover
- Universität Paderborn
- Humboldt-Universität zu Berlin
- Universität Stuttgart
- sowie das IPN in Kiel

Das Ziel des Projekts waren Beiträge zur Kompetenzmodellierung und Studien zur Kompetenzentwicklung und relevanter Entwicklungsbedingungen, sowohl bezogen auf die Mathematik als auch wichtige Bereiche der ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächer. Eine Herausforderung war dabei die bereits vorgestellte Trennung zwischen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen. Dabei gab es zwei Forschungszugänge, nämlich einen quantitativen IRT-basierten und einen qualitativen, welcher sich eher mit Prozessanalysen auseinandersetzt. In dem Projekt wurden Grundlagen für eine Kompetenzdiagnostik geschaffen, die als Basis für die Gestaltung und Evaluation von Lehrinnovationen dienen.

In den Teilprojekten an den Universitäten Berlin, Dortmund, Hannover sowie Paderborn wurden Teilkompetenzen modelliert, die in der Mathematik für Ingenieure auf der einen und den mathematikhaltigen Lehrveranstaltungen der Elektrotechnik und des Maschinenbaus auf der anderen

Seite einerseits curricular von Lehrendenseite erwartet und andererseits von Studierenden tatsächlich entwickelt werden. Die Analysen geben Aufschluss darüber, wie die Schnittstelle zwischen der „Mathematik für Ingenieure“ als Lehrveranstaltung und der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften besser gestaltet werden kann. Es wurde analysiert, wie Studierende die theoretisch erlernte Mathematik an die Anforderungen in den ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen anpassen und welche Kompetenzfacetten dabei auftreten.

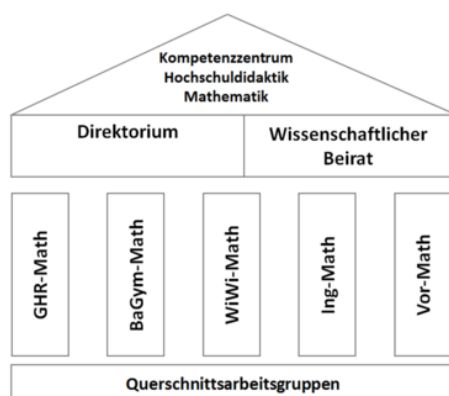
Bei den Untersuchungen wurde zwischen der „Grundlagenphase“ (die ersten zwei bis drei Semester) und der „Fortgeschrittenen Bachelor- und Masterphase“ (drittes bis zehntes Semester) unterschieden. Bei der Kompetenzmodellierung in der Grundlagenphase wurden die geforderten mathematischen Kompetenzen in der Höheren Mathematik und dem entsprechenden ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfach (Grundlagen der Elektrotechnik, Technische Mechanik) untersucht. Die Kompetenzmodellierung in der fortgeschrittenen Bachelor- und Masterphase setzte sich mit den Anforderungen (Aufgaben, Problemstellungen) in Lehrveranstaltungen auseinander, bei denen Teilkompetenzen zur Lösung vereinigt werden müssen. Hierzu wurden Aufgabenanalysen und Expertenbefragungen durchgeführt, um zu analysieren, wie die Erwartungen an die Studierenden bezüglich der mathematikbezogenen Kompetenzentwicklung sind. Darüberhinaus wurden Bearbeitungsstrategien und -prozesse mit Hilfe von Beobachtungen und lautem Denken untersucht. Das Ergebnis dieser Analysen war die Modellierung und Ausformulierung von Kompetenzen und ihren Facetten sowie von Problemlösungsmustern für ingenieurwissenschaftliches Mathematiklernen. Diese Dissertation stellt die Ergebnisse für die Grundlagenphase bezogen auf die Grundlagen der Elektrotechnik vor.

Im Teilprojekt C (Standorte Stuttgart und Kiel) wurden einerseits IRT-basierte Kompetenzmodelle für die Höhere Mathematik für Ingenieure (HM), die Technische Mechanik (TM), Werkstofftechnik (WT) und Konstruktionstechnik (KT) entwickelt und andererseits die Kompetenzentwicklung in den Fächern Technische Mechanik und Konstruktionstechnik erforscht, insbesondere hierbei die Rolle mathematischer Kompetenzen. Der zentrale Punkt dieses Teilprojekts war die Kompetenzmodellierung, -messung und -entwicklung in der Grundlagenphase von Maschinenbaustudiengängen; aufgrund der domänenübergreifenden Testentwicklung und Datenerhebung wurden jedoch auch Bauingenieurstudiengänge in die Untersuchungen miteinbezogen. Das Forschungsdesign war aufgrund der Zielsetzung der Untersuchung einer Kompetenzentwicklung längsschnittlich angelegt. Für die Untersuchungen wurden die HM und die TM gewählt, da sie in allen Maschinenbaustudiengängen Basismodule bilden und die TM ein Anwendungsfeld der HM ist. Für die genauere Untersuchungen spielten auch KT und WT eine wichtige Rolle, da in der KT bei Auslegungsfragen auf die TM zurückgegriffen wird und für die Kompetenzen in der KT wiederum Fähigkeiten und Kenntnisse aus der WT wichtig sind.

1.3.2 Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik

Das Projekt KoM@ING ist eingebettet in das Kompetenzzentrum für Hochschuldidaktik Mathematik (khdm), welches in Biehler et al. (2016) näher beschrieben wird. Das khdm wurde 2010 in Folge einer Ausschreibung der Volkswagen Stiftung und der Stiftung Mercator gegründet. Diese Ausschreibung hatte das Ziel, Projekte finanziell zu fördern, welche das Lehren und Lernen an Universitäten und Fachhochschulen optimieren möchten. Zurzeit sind die Universität Paderborn, die Leibniz Universität Hannover sowie die Universität Kassel die drei universitären Partner des khdm.

Im folgenden werden noch zwei weitere Projekte aus der AG Ing-Math kurz vorgestellt, die neben dem BMBF-geförderten Projekt KoM@ING im khdm existieren.



AG GHR-Math - Studiengänge: Grund-, Haupt- und Real-schullehramt

AG BaGym-Math - Studiengänge: Bachelor Mathematik, gymnasiales Lehramt

AG WiWi-Math - Wirtschaftswissenschaftliche Studiengänge

AG Ing-Math - Ingenieurwissenschaftliche Studiengänge

AG Vor-Math - Vor- und Brückenkurse in sämtlichen Studiengängen

Abbildung 1.3.1: Struktur des Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm)

Situierter Erwerb von mathematischen Kenntnissen in den „Grundlagen der Elektrotechnik A“ - Aufbau eines Wikis

Das Ziel dieses Projekts war Entwicklung eines Webangebots zum situierten Erwerb von Mathematikkenntnissen innerhalb der Veranstaltung „Grundlagen der Elektrotechnik A“ (im folgenden GET-A) an der Universität Paderborn. Diese Veranstaltung besuchen Studierende der Elektrotechnik im ersten Semester. Inhalte dieses Wikis sind:

- Mehrdimensionale Flächen-, Hüllflächen und Volumenintegrale in verschiedenen Koordinatensystemen, z. B. im Zusammenhang mit dem Satz von Gauss (einem der drei Integralsätze aus der Vektoranalysis)
- Verwendung von Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten, z. B. zur Feldbeschreibung elektrischer oder magnetischer Felder
- Formulierung infinitesimaler Linien-, Flächen- und Volumenelemente in verschiedenen Koordinatensystemen

Dazu wurde ein Webangebot entwickelt, welches u. a. Verlinkungen zu den Inhalten der Vorlesung GET-A wie auch Selbsttests zur Erfassung des Vorwissens enthält. Nähere Angaben zu dem Projekt finden sich z. B. in Hennig und Mertsching (2013).

Entwicklung und Einbau von anwendungsbezogenen (Modellierungs-)Aufgaben in der „Mathematik für Maschinenbauer“

Das Ziel dieses Projektes war die Entwicklung und Evaluation von Interventionselementen für die „Mathematik für Maschinenbauer“. Durch die Erstellung der Aufgaben wurde das Einsatzgebiet der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften betont und die Studierenden wurden auf das Modellieren, Simulieren und Interpretieren von Problemstellungen und Lösungen vorbereitet. Die hierzu benötigte Mathematik wurde an die Technische Mechanik angepasst, welche die ingenieurwissenschaftliche Hauptfachveranstaltung für Maschinenbaustudierende im ersten Semester ist. So wurden auch Anpassungen im zeitlichen Ablauf durchgeführt und die Lerninhalte bezüglich ihrer Relevanz umgestaltet. Durch die ingenieurwissenschaftlichen Anwendungsbeispiele wird die Mathematik hervorgehoben und in die einzelnen Themen der Veranstaltung integriert.

In Wolf und Biehler (2016, S. 3) werden sechs Kriterien für eine gute Anwendungsaufgabe in

der „Mathematik für Maschinenbau“ festgelegt. Die Ergebnisse können für Vergleiche zu den „echten“ Anwendungsaufgaben aus den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ eingesetzt werden, welche in dieser Arbeit analysiert werden:

1. Mathematik-Themenorientiert („themenorientiert“) : Die Übungsaufgabe soll in einer Mathematikveranstaltung eingesetzt werden und daher sollte einzuübende Thema (z. B. das Lösen eines linearen Gleichungssystems) den mathematischen Teil dieser Aufgabe bestimmen oder in auffälliger Weise darin vorkommen, wobei den Lernenden die Zusammenhänge klar werden sollen, allerdings die Mathematik so angewendet werden, wie sie in der Mathematikveranstaltung eingeführt wurde.
2. Maschinenbau-Authentisch („authentisch“): Die Werte aus der Aufgabe müssen in der Praxis vorkommen können und nicht beispielsweise zum Erhalten eines ganzzahligen mathematischen Ergebnisses gewählt werden. Hierbei sollen auch die korrekten Einheiten verwendet werden und die Problemstellung soll für Maschinenbaustudierende relevant und eine derartige Berechnung sollte realistisch sein.
3. Modellierungsorientiert: Zur Lösung der Aufgabe ist ein mehrfacher Wechsel zwischen dem mathematischen Vorgehen und der physikalischen Interpretation notwendig, wobei der Wechsel durch spezielle Aufgabenteile angeregt werden soll und es sollen keine „weitreichenden“ Idealisierungen und Annahmen getroffen werden müssen.
4. Übersichtlich und kognitiv angemessen („übersichtlich“): Die Aufgabenstellung sollte kurz und präzise formuliert sein und stilistische Mittel wie z. B. Bilder oder Skizzen verwendet werden, wobei insgesamt eine DIN-A4-Seite nicht überschritten werden sollte. Die Aufgabe soll obwohl bezogen auf die Mathematik als auch auf die Physik bzw. Technik angemessen sein, wobei optimalerweise die technischen Aspekte bereits vorher in der Fachveranstaltung behandelt sein sollten.
5. Abgeschlossen bzgl. Maschinenbauwissen („abgeschlossen“): In der Aufgabe sollte entweder bekanntes Wissen aus den Maschinenbau-Fachvorlesungen eingesetzt werden oder es müssen Informationen zu dem physikalisch-technischen Hintergrund mitvermittelt werden, welche z. B. in einem Anhang stehen könnten oder durch Hinweise auf Bücher oder Internetseiten geliefert werden können.
6. Prototyp- und Ankerbeispielaufgabe für Mathematik und / oder Maschinenbau („übertragbar“): Die Aufgabe sollen Studierenden als Anhaltspunkt für eine Aufgabe ähnlichen Typs dienen.

1.4 Leitfragen und Ziele der Untersuchungen

In diesem Abschnitt werden Leitfragen für die weiteren Untersuchungen formuliert, welche unter Heranziehen von Theorie zu Forschungsfragen ausgeformt werden sollen. Die in dem darauffolgenden Unterabschnitt formulierten Ziele sollen einen Ausblick auf die kommenden Untersuchungen geben, welche auf den Leitfragen und den Ausführungen in diesem Kapitel basieren.

1. Wie gelingt Studierenden der Umgang mit den mathematischen Anforderungen in den Grundlagen der Elektrotechnik? Wie kann dieses normativ beschrieben werden und wie gelingt es tatsächlich?

2. Welche kognitiven Anforderungen treten bei dem Umgang mit Mathematik in Elektrotechnik auf? Was sind Fehler und Schwierigkeiten? Welche Problemstellen ergeben sich durch die Schnittstelle von Mathematik und Elektrotechnik?
3. Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen lassen sich finden und mit welchen Methoden lassen sie sich beschreiben? Können Methoden aus der Schule herangezogen werden?

Das Ziel der Untersuchungen ist die kompetenzorientierte Analyse und Modellierung der Teilkompetenzen, die in der Mathematik für Ingenieure einerseits und in den Lehrveranstaltungen der Elektrotechnik andererseits explizit wie auch implizit erwartet werden und von den Studierenden tatsächlich entwickelt werden. Daraus ergeben sich Herausforderungen für die Modellierung von Kompetenzen: Es müssen drei Wissensbereiche integriert werden, nämlich Elektrotechnik, Mathematik und die Mathematik, welche in der Elektrotechnik eingebettet ist.

Die Kompetenzen werden dabei anhand einer Konzeptualisierung der Lösungsprozesse bei mathemathhaltigen Elektrotechnik-Aufgaben eingeordnet. Dabei stellt die in den Ingenieurwissenschaften eingebettete Mathematik eine besondere Herausforderung dar. Insbesondere ist zu klären, wie Studierende die zunächst theoretisch erlernte Mathematik an Anforderungen einer ingenieurmathematischen Mathematikverwendung anpassen müssen und welche technischen und mathematischen Kompetenzfacetten hierbei in welcher Form zur Bearbeitung verschiedener Aufgaben benötigt werden.

Gegenstand der Untersuchungen sind vier typische Elektrotechnikaufgaben aus einer Klausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ (GET-B), der Zweitsemester-Veranstaltung für Elektrotechnik-Studierende an der Universität Paderborn. Die Themengebiete dieser Aufgaben sind magnetische Kreise, Schwingkreise und Ausgleichsvorgänge, Signalanalyse und komplexe Wechselstromrechnung. Diese sind Standardthemen aus dem ersten Studienjahr in elektrotechnischen Studiengängen. Sie decken ein großes Spektrum sowohl an mathematischen wie auch an elektrotechnischen Themengebieten ab.

Diese Aufgaben werden auf drei Ebenen untersucht:

1. Rekonstruktion der impliziten Kompetenzerwartungen in den Aufgaben
2. Analyse von Lösungsprozessen dieser Aufgaben von Paaren von Studierenden unter Laborbedingungen (Prozessanalyse) bezogen auf die erste Ebene
3. Analyse der Aufgabebearbeitungen von Studierenden aus der entsprechenden Klausur unter realen Leistungsbedingungen (Produktanalyse) bezogen auf die erste und zweite Ebene

Das Ziel der Analysen ist eine Theoriebildung zum Finden eines Forschungsansatzes für die Betrachtung von Schnittstellen von Mathematik und ihren Anwendungsfächern (in diesem Fall: Grundlagen der Elektrotechnik) sowie eine Beschreibung der Strategien, welche Studierende in diesem Kontext entwickelt haben.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen für die Untersuchung

Das Ziel ist das Finden eines normativen Ansatzes für die Analyse von Aufgaben aus Ingenieurveranstaltungen, mit dessen Hilfe Analysen von Videostudien und Klausurbearbeitungen möglich sind. Auch für die Bearbeitungsprozesse der Studierenden mussten geeignete theoretische Ansätze gefunden werden. Zunächst mussten dafür ausführliche „Musterlösungen“ entstehen, die in möglichst allgemeiner Weise den Lösungsprozess und Variationen davon konzeptualisieren. Für die Untersuchung der Kompetenzen ist dies aber noch unzureichend, denn neben den konkreten Lösungswegen ist auch das Wissen von Experten aus den Ingenieurwissenschaften (insbesondere Lehrenden aus den Ingenieurwissenschaften) von großer Bedeutung. Welche Kompetenzerwartungen haben sie an die Zweitsemester, die die Klausur bearbeiten, und zwar sowohl explizit als auch implizit?

Zu Beginn der Untersuchungen lagen vier Elektrotechnikaufgaben aus einer Zweitsemesterklausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“, kurz GET-B, an der Universität Paderborn vor, welche von Professor Böcker gehalten wird. Diese Aufgaben decken wesentliche Bereiche der Grundlagenausbildung von Elektrotechnikstudierenden ab, wie Vergleiche mit Curricula anderer Universitäten sowie Diskussionen mit Elektrotechnik-Experten gezeigt haben. Zu den vier Aufgaben gab es zusätzlich Musterlösungen, die Mitarbeitern aus der Elektrotechnik für die Korrektur der Klausur zur Verfügung gestellt worden waren. Diese enthielten ausschließlich die Rechenwege für die Teilaufgaben und teilweise sogar nur Endergebnisse, jedoch keine Begründungen für die Lösungen, wobei diese in der Klausur auch nicht erwartet worden waren. Zusätzlich lagen noch die Veranstaltungsmaterialien vor, konkret das Skript zur Vorlesung, die Serien von Übungsaufgaben sowie spezielle Hilfsmittel wie ein Merkblatt zur Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die Aufgaben werden in den Kapiteln 4 bis 7 vorgestellt und hinsichtlich von acht Forschungsfragen analysiert.

Für die Untersuchung schienen drei theoretische Ansätze, die jeweils verschiedene genannte Teilaspekte behandeln, als passend, da sie sich mit Lösungsprozessen und Problemlösestrategien auseinander, in denen Mathematik zur Lösung von Aufgaben aus anderen Gebieten eingesetzt wird.

- Der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) ist ein Hilfsmittel zur Analyse von außermathematischen Aufgaben, welche mit mathematischen Methoden gelöst werden. Der Modellierungskreislauf unterteilt den Lösungsprozess in sieben verschiedene Phasen: Verstehen, Vereinfachen, Mathematisieren, Mathematisches Arbeiten, Interpretieren, Validieren und Erklären. In einem Unterabschnitt werden auch Möglichkeiten zur Klassifikation

von Modellierungsaufgaben im Rahmen der Schuldiskussion vorgestellt. Am Ende dieses Abschnitts wird ein alternativer Ansatz hierzu in Form der Anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) vorgestellt.

- Die Analyse des Problemlösens nach Polya (1949) und die Operationalisierungen von Problemlösestrategien nach Bruder und Collet (2011) liefern Hilfsmittel, welche beim Lösen von mathematischen Aufgaben eingesetzt werden können. Die Operationalisierungen liefern eine Einordnung in die aktuelle Problemlösediskussion und liefern Begriffe für die späteren Analysen. Dabei wird teilweise auch explizit auf außermathematische Anwendungsgebiete eingegangen. Während des Problemlösens spielt auch heuristisches Schließen eine entscheidende Rolle.
- Die erkenntnistheoretischen Spiele nach Tuminaro und Redish (2007) konzeptualisieren Lösungsstrategien bei Physikaufgaben von Studierenden aus dem ersten Jahr, die in Form von sechs speziellen Spielen angegeben werden. Diese Spiele bestehen aus bestimmten Zügen, die zielgerichtet bei einem konkreten Spiel immer in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt werden. In Bing (2008) werden Weiterentwicklungen der erkenntnistheoretischen Spiele vorgestellt, welche eher auf die zugrundeliegenden Argumentationsweisen abzielen.

2.1 Mathematisches Modellieren

Einfach ausgedrückt bezeichnet mathematisches Modellieren den Bearbeitungsprozess eines realen Problems, bei dem Mathematik zum Einsatz kommt. Modellierungsaufgaben zeichnen sich häufig durch eine Vielzahl von Lösungswegen aus, die die Anwendung verschiedenster mathematischer Inhalte beinhalten. Dieser Aspekt führt zu einer schlechten Überschaubarkeit der möglichen Lösungswege und -mengen.

Mathematisches Modellieren ist für die Betrachtung der vorliegenden Situation relevant, da die betrachteten elektrotechnischen Aufgaben reale Problemsituationen darstellen und zur Lösung der Aufgaben in jedem Fall mathematische Verfahren notwendig, wobei das Spektrum der benötigten mathematischen Inhalte sehr breit ist und sowohl Schulmathematik als auch Kenntnisse der Hochschulmathematik aus den ersten beiden Fachsemestern im Elektrotechnikstudium voraussetzt.

Die vorgestellten Modellierungskreisläufe beschreiben das Lösen von außermathematischen Aufgaben unter Verwendung mathematischer Methoden. Daraus ergeben sich Analogien zu den Typen von Aufgaben, wie sie in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächern auftreten. In den folgenden Abschnitten werden ausgewählte Modellierungskreisläufe vorgestellt, welche üblicherweise in der deutschen Mathematikdidaktik zur Beschreibung von Modellierungsaufgaben eingesetzt werden und daher im Bezug auf die Aufgabentypen normativ dem entsprechen, was die Studierenden in ihrer Schulausbildung kennengelernt haben sollten.

2.1.1 Einleitung

Nach Greefrath et al. (2013, S. 11) legt mathematisches Modellieren den Fokus auf den Lösungsprozess von Aufgaben aus der Realität bzw. – wie es später genannt wird – den „Rest der Welt“ außerhalb der Mathematik. Dabei treten Grenzen auf, da die Realität nicht vollständig in einem mathematischen Modell dargestellt werden kann, weswegen nur Teilaspekte in eine

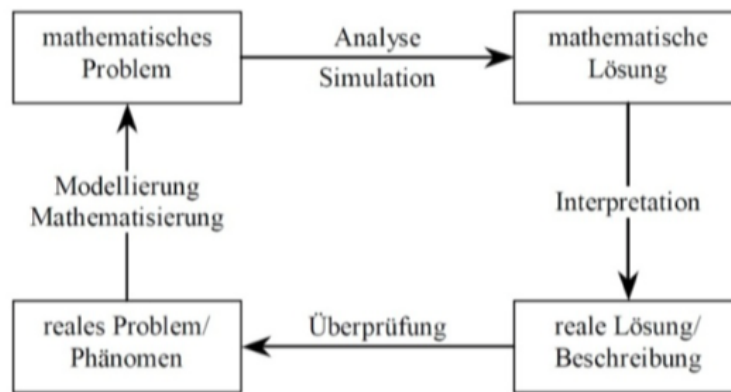


Abbildung 2.1.1: Modellierungskreislauf nach Ortlieb (2004, S. 23)

mathematische Form überführt werden, vgl. Henn (1998, S. 5). Es können auf unterschiedliche Weise Vereinfachungen vorgenommen werden, weshalb Modelle nicht eindeutig sind.

Nach Greefrath et al. (2013, S. 13) sollten Modelle widerspruchsfrei, stimmig und zweckmäßig sein. Hierbei ist mit Stimmigkeit gemeint, dass das Modell die wesentlichen Beziehungen der realen Situation darstellt. Die Zweckmäßigkeit kann mit Hilfe des Problems, welches bearbeitet wird, beurteilt werden. Hierbei können laut Neunzert und Rosenberger (1991, S. 149) modellabhängig sowohl die Sparsamkeit als auch die Vielzahl der dargestellten Beziehungen berücksichtigt werden. Man setzt mathematische Modelle ein, um Simulationen durchführen zu können, z. B. um Ergebnisse von physikalischen Experimenten vorhersagen zu können.

2.1.2 Modellierungskreisläufe

Modellierungsprozesse werden in vielen Fällen durch Kreisläufe idealisiert dargestellt. Sie können dabei nach Greefrath et al. (2013, S. 14) als Veranschaulichung des Modellierungsbegriffs, Bearbeitungshilfe für Modellierungsaufgaben, als eigener Lerninhalt oder als Strukturierung für Stoffgebiete eingesetzt werden. Darüber hinaus bilden sie – wie in dieser Arbeit – die Grundlage für empirische Untersuchungen.

Greefrath et al. (2013, S. 16) unterscheidet drei unterschiedliche Typen von Modellierungskreisläufen:

1. Modellierungskreisläufe mit direktem Mathematisieren :

Bei diesen Modellierungskreisläufen wird nur ein Schritt von der Situation hin zum mathematischen Modell verwendet, welcher bei Ortlieb (2004) als „Modellierung/Mathematisierung“ bezeichnet wird. Eine Darstellung des Modellierungskreislaufs ist in Abbildung 2.1.1 zu finden. Dabei ist mit Mathematisierung der Schritt gemeint, welche mit der Aufstellung eines mathematischen Modells endet.

2. Zweischnittiges Mathematisieren :

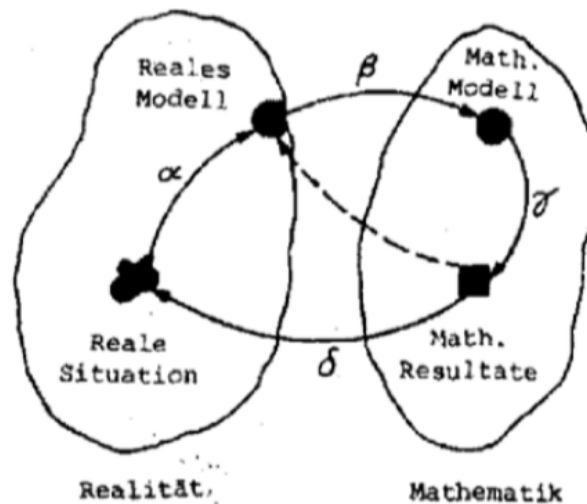


Abbildung 2.1.2: Modellierungskreislauf nach Blum (1985, S. 200)

Bei Modellierungskreisläufen dieser Gruppe gibt es einen Zwischenschritt zwischen der realen Situation und dem mathematischen Modell. Die Abbildung 2.1.2 stellt einen derartigen Kreislauf dar. In dieser Abbildung bezeichnet α das Vereinfachen, Strukturieren und Präzisieren der Aufgabe, β ihr Mathematisieren, γ das mathematische Arbeiten und δ die Rück-Interpretation bzw. Anwenden der Ergebnisse. In späteren Modellen wird der Schritt von den mathematischen Resultaten zur realen Situation näher beschrieben. Maaß (2005, S. 117) ergänzt den Kreislauf um die „interpretierte Lösung“, welche das Interpretieren und das Validieren trennt.

3. Dreischrittiges Mathematisieren :

Das folgende Modell wurde von Blum und seinen Mitarbeitern im DISUM-Projekt entwickelt und erweitert die Modellierungskreisläufe um das sogenannte Situationsmodell erweitert. Das Ergebnis ist der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007), welcher beschreibt, wie Mathematik zum Lösen von Anwendungsaufgaben z. B. im Schulkontext eingesetzt werden kann. In diesem Kontext ist der Modellierungskreislauf ein normatives Instrument und dient als didaktische Grundlage zur Vermittlung von Modellierungskompetenzen z. B. an Universitäten, vgl. Geng (2003). Als solches wird er sowohl deskriptiv als auch normativ eingesetzt.

Der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007, S. 225) unterteilt den Lösungsprozess einer Anwendungsaufgabe in der Mathematik in zwei große Bereiche, nämlich die Welt der Mathematik und den Rest der Welt. Dieses ist in der Abbildung 2.1.3 dargestellt. Im Einzelnen gibt es sieben Phasen, die durchlaufen werden, gemäß (Blum und Leiß, 2007, S. 225f). Die Beschreibung der Phasen wird – bis auf die Phase 4 – wird Greefrath et al. (2013, S. 19) entnommen. Diesem gegenübergestellt werden typische Fehler nach Hinrichs (2008, S. 64-76), welche jeweils in den Absätzen unter den Beschreibungen stehen:

- [1] Verstehen:** Die Schülerinnen und Schüler konstruieren ein eigenes mentales Modell zu einer gegebenen Problemsituation und verstehen so die Fragestellung.

Probleme können hier in einer zu anspruchsvollen oder verschachtelten Aufgabenstellung liegen. Durch Signalwörter können falsche Schlüsse gezogen werden oder unpassende

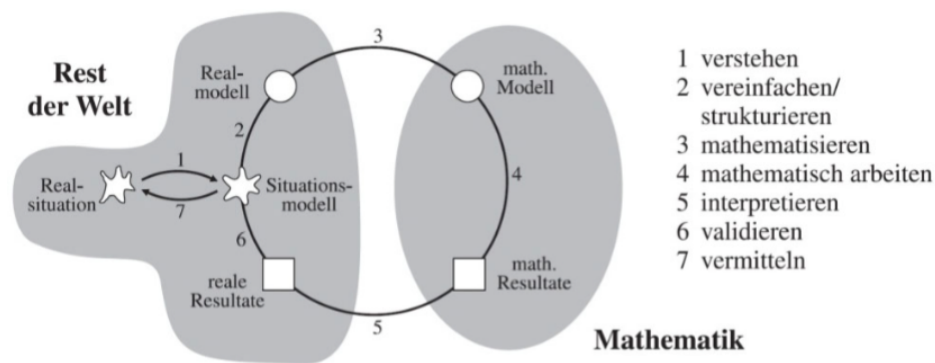


Abbildung 2.1.3: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007, S. 225)

Rechenoperationen suggeriert werden. Auch im Grundverständnis einer z. B. physikalischen Situation können Schwierigkeiten auftreten.

- [2] Vereinfachen:** Die Schülerinnen und Schüler trennen wichtige und unwichtige Informationen einer Realsituation.

In dieser Phase ist das Ziel die Vereinfachung des Situationsmodells. Dabei müssen „wichtige“ von „unwichtigen“ Informationen in Bezug auf die Fragestellung getrennt werden und Vereinfachungen vorgenommen werden. Eine wichtige Frage ist, welche Mathematik in diesem Gebiet relevant ist und welche Analogien man sieht.

Probleme können darin liegen, dass die Schüler sich nicht trauen, Idealisierungen und Abschätzungen vorzunehmen oder auch die Unterscheidung zwischen wichtigen Informationen und Nebensächlichkeiten nicht korrekt durchführen.

- [3] Mathematisieren:** Die Schülerinnen und Schüler übersetzen geeignet vereinfachte Realsituationen in mathematische Modelle (z. B. Term, Gleichung, Figur, Diagramm, Funktion).

In dieser Phase wird das Realmodell mathematisiert, wobei mathematisch idealisierte Objekte eingeführt werden müssen. Hierzu werden Funktionen oder Formeln aufgestellt oder Graphen gezeichnet, wobei auch Nebenbedingungen und verschiedenen Lösungsmöglichkeiten berücksichtigt werden müssen.

Probleme können hier durch die Verwendung falscher oder für die Situation nicht passender Formeln sein oder es werden unpassende Modelle z. B. in Bezug auf physikalische Phänomene verwendet. Überdies kann es noch Übersetzungsfehler in die mathematischen Operatoren geben.

Das Ziel dieser Phase ist das Bilden eines mathematischen Modells. Ein mathematisches Modell verwendet mathematische Sprache zur Beschreibung eines Systems, wobei wesentliche Parameter erfasst werden müssen und durch Berechnungen Vorhersagen für das zugrundeliegende System gemacht werden können. Es kann berechnet und wissenschaftlich beschrieben werden, wobei es thematisch sehr weit gestreut sein kann, z. B. sich auf physikalische Gesetzmäßigkeiten stützen kann.

- [4] **Mathematisches Arbeiten:** Dieses mathematische Modell wird nun mit Hilfe der Mathematik bearbeitet, um mathematische Ergebnisse zu erzielen.

In dieser Phase ist das Ziel, ein mathematisches Resultat zu erhalten. Dabei können mathematische Werkzeuge angewendet, sowohl analytisch, als auch geometrisch oder numerisch mit dem Computer. Dabei kann es auch verschiedene Lösungswege geben. Durch verschiedene Mathematisierungen können hier anspruchsvolle oder weniger anspruchsvolle Wege gewählt werden.

Als Problem kann auftreten, dass die Aufgabe nicht lösbar für Schüler ist, falls das Modell zu kompliziert ist.

- [5] **Interpretieren:** Die Schülerinnen und Schüler beziehen sich die im Modell gewonnenen Resultate auf die Realsituation und erzielen damit reale Resultate.

In diesem Schritt werden die mathematischen Resultate wieder auf die Realsituation bzw. das reale Modell bezogen. Dabei müssen auch Dinge wie Einheiten beachtet werden. Es können in dieser Phase Fehler aus den bisherigen Phasen selbstständig von Schülern aufgedeckt werden.

Probleme können sein, dass die mathematischen Lösungen überinterpretiert werden, in dem die Schüler irgendetwas berechnen und so interpretieren, dass es zur Sachsituation passt. Sie passen ihre Ergebnisse so an, dass sie zur Erwartung passen z. B. auch bezüglich Einheiten oder sie missachten die Wertebereiche der Ergebnisse. Es ist auch möglich, dass sie richtig rechnen, aber die eigentliche Fragestellung missachten.

- [6] **Validieren:** Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die realen Resultate im Situationsmodell auf Angemessenheit.

In diesem Schritt werden die realen Resultate in Bezug auf die Realsituation überprüft. Außerdem werden getroffene Modellannahmen reflektiert. Hier können auch mehrere Modelle verglichen werden oder Rundungen überdacht werden. Mögliche Kontrollstrategien sind Dimensionen, Größenordnungen, Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Werten, Randbedingungen, Widerspruchsfreiheit oder auch die Stabilität des Modells.

Es können jedoch auch Probleme auftreten. Es könnte der Eindruck entstehen, dass das mathematische Resultat allgemeingültig ist, wobei das jedoch nicht zur Realsituation passt. Ein weiterer Modellierungsprozess, der durch eine ablehnende Validierung entsteht, könnte zu Verbesserungen des Realmodells und des mathematischen Modells führen, die jedoch die Realsituation nicht mehr passend modellieren.

- [7] **Darlegen, Erklären:** Die Schülerinnen und Schüler beziehen die im Situationsmodell gefundenen Antworten auf die Realsituation und beantworten so die Fragestellung.

In dieser Phase werden die Ergebnisse dokumentiert und präsentiert. Dazu muss das Vorgehen erläutert werden, was kommunikative und argumentative Kompetenzen fördern soll.

Probleme können sein, dass Schüler in dieser Situation bestimmte Aspekte unterschlagen. Sie beschreiben sie unverständlich oder vernachlässigen Dinge wie Skizzen zur Veranschaulichung oder ihnen gelingt es nicht, sich in die anderen Personen hineinzusetzen.

2.1.3 Kann der Modellierungskreislauf dazu dienen, reale Modellierungssituationen zu beschreiben?

In Bezug auf reale Modellierungsprozesse zeigen sich in verschiedenen Studien Schwierigkeiten bei der Anwendung des Modellierungskreislaufs. Riebel (2010, S. 111) zeigt an vierzig Aufgabenbearbeitungen (acht verschiedenen Probanden aus der vierten oder fünften Klasse, die jeweils fünf verschiedene Modellierungsaufgaben bearbeitet haben), dass Validierung in den realen Modellierungsprozessen bei keiner Gruppe auftrat.

Die Arbeiten von Borromeo-Ferri verdeutlichen auch, dass der Modellierungskreislauf nicht linear durchlaufen wird. Borromeo-Ferri (2006) sagt hierzu:

„Through many empirical studies we know in the meantime, that the modelling process courses not in a linear way. [sic] But there is still a lack of research, how phases of modelling can be described on a micro-level and then be compared in contrast to the «ideal phases». “

(Borromeo-Ferri, 2006, S. 89)

In ihren Studien sind Modellierungspfade von großer Bedeutung, welche individuelle Modellierungsvorgänge sind. In dem COM-Projekt rekonstruierte Borromeo-Ferri individuelle Modellierungspfade beim Modellieren in Gruppen. Dabei zeigte sich, dass die Probanden in einer bestimmten Phase nach ihren Vorlieben begannen und verschiedene Phasen mehrere Male oder einmal mit dem Fokus auf eine bestimmte Phase oder mit dem Fokus auf dem Ignorieren anderer durchliefen. Hierbei muss allerdings auch beachtet werden, dass solche Analysen nur auf verbalen Äußerungen der Probanden bzw. externen Darstellungen für den Startpunkt und die Modellierungsschritte beruhen, d. h. implizite Schritte nicht erfasst werden können, Näheres hierzu siehe Borromeo Ferri (2007).

Der Modellierungskreislauf wird in einigen empirischen Studien kritisiert. Hinterfragt wird dabei die Trennung von der Realität bzw. dem „Rest der Welt“ und der Mathematik, genauso wie der lineare Ablauf der Modellierungsschritte. Voigt (2013) führt dazu aus:

„Diese Trennung von Realität und Mathematik und die Folge von Schritten im Modellierungskreislauf bilden ein Artefakt. Auch die normative Funktion des Kreislaufes ist fraglich. Soll man beispielsweise die Modellierungskompetenz als Summe von Einzelkompetenzen (entsprechend den einzelnen Schritten aus dem Kreislaufschema) ansehen oder eher als Koordination von Kompetenzen in jedem Schritt [...]? Und von welcher Art ist die mathematische Kompetenz?“

(Voigt, 2013, S. 1049)

Voigt (2013) zweifelt damit an, dass die Modellierungskompetenz durch die Teilschritte des Modellierungskreislaufs operationalisiert werden kann. In diesem Zusammenhang sieht er einen „weißen Fleck“ in dem Bereich zwischen dem sogenannten „Rest der Welt“ und der Mathematik.

Eine zentrale Frage ist hierbei, ob der Modellierungskreislauf deskriptiv eingesetzt werden kann, welches das tatsächliche Vorgehen von Schülern beschreiben kann. So zeigt Borromeo-Ferri

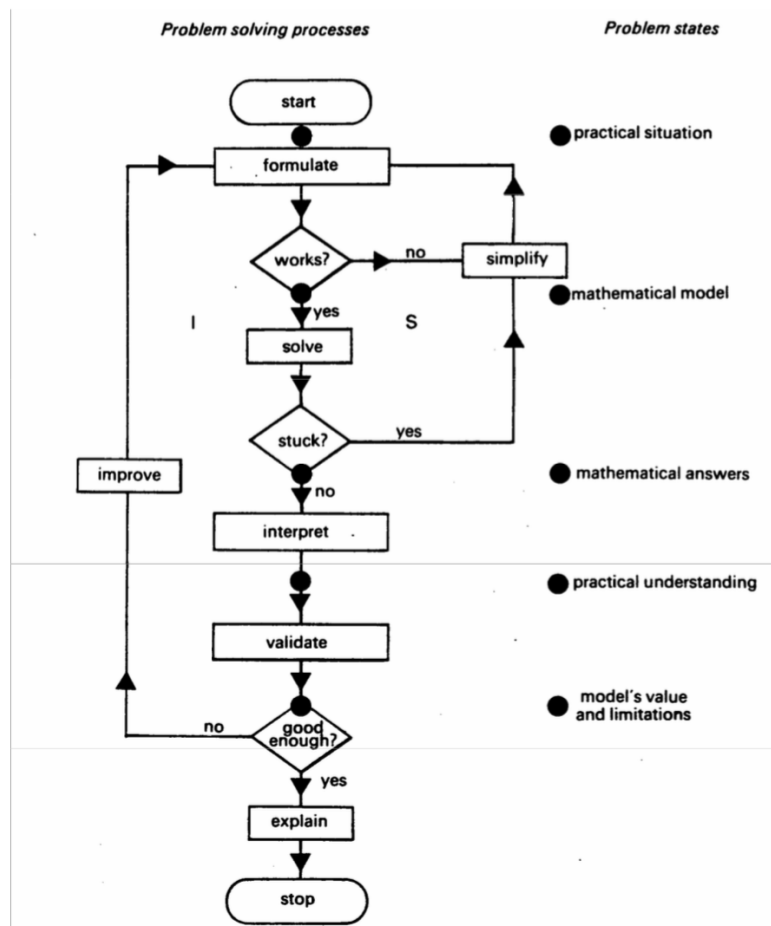


Abbildung 2.1.4: Bearbeitungsprozess einer Modellierungsaufgabe nach Burkhardt (2006, S. 181)

(2011), dass es kein iteratives Durchlaufen der Schritte gibt und Schülern sogenannte „Modellierungsrouten“ zugewiesen werden können, wodurch sich ein nicht-linearer Durchlauf des Modellierungskreislaufs ergibt. In Borromeo-Ferri (2011) verwendet die Autorin den Begriff „individuelle Modellierungsvorläufe“ und sagt hierzu aus, dass diese „in individuell sehr unterschiedlicher Art und Weise“, vgl. Borromeo-Ferri (2011, S. 170), ablaufen können. Ihre Analysen von Schülerbearbeitungen zeigen, dass der Modellierungskreislauf eine Idealisierung ist und ein Mittel zur Orientierung und Veranschaulichung eines metakognitiven Prozesses. Burkhardt (2006, S. 181) beschreibt den Modellierungsvorgang in einem Ablaufdiagramm, welches in 2.1.4 dargestellt ist. Dabei werden Schleifen sowie das erneute Durchlaufen verschiedener Schritte dargestellt. Mit anderen Worten zeigt sich also auch hier eine nicht-lineare Vorgehensweise beim Durchlaufen der Schritte.

Schukajlow-Wasjutinski (2011, S. 81ff.) diskutiert einige Punkte zum Modellierungskreislauf, die im folgenden aufgelistet werden:

- Es erscheint unangebracht, dass die Übergänge zwischen den Phasen im Modellierungskreislauf nur in eine Richtung möglich sind. Stattdessen schlägt er vor, dass sie Pfeile, die die Übergänge kenntlich machen, in beide Richtungen gehen sollten.

- Er betrachtet die Trennung in „Rest der Welt“ als missverständlich, denn sie unterstützt die Vorstellung, dass „Mathematik einen vom Weltwissen getrennten Wissensbereich“ darstelle, vgl. Schukajlow-Wasjutinski (2011, S. 82).
- Er sieht reale Modellierungsprozesse als mehrdimensional an, denn die einzelnen Phasen werden nicht nacheinander abgearbeitet, sondern teilweise sogar parallel.

2.1.4 Zwischenfazit zum Modellierungskreislauf

Der Modellierungskreislauf erscheint nach den Ausführungen in diesem Abschnitt relevant, da er Übergängen zwischen „Realsituationen“ und der Mathematik beschreibt – und man kann in dem Kontext dieser Arbeit die elektrotechnischen Aufgaben als „idealisierte Realität“ betrachten. Dabei konzeptualisiert der Modellierungskreislauf auch Teilschritte, die in ähnlicher Form übertragbar sein könnten. Bei dem Einsatz des Modellierungskreislaufs muss allerdings auch die Kritik berücksichtigt werden. Der Modellierungskreislauf wird in dieser Arbeit normativ eingesetzt, um verschiedene konzeptualisierbare Phasen der Lösungsprozesse und -produkte bei den vier Aufgaben unterscheiden zu können.

2.1.5 Ein alternativer Ansatz zur Beschreibung von mathematischen Modellierungen

Gemäß Winsløw et al. (2014) gibt es drei Grundelemente, auf welchen die Anthropologische Theorie der Didaktik (ATD) beruht. Diese drei Elemente sind:

1. Didaktische Transpositionen als Anlass zur Anwendung der ATD
2. Praxeologien als Beschreibungsmittel für mathematische Aktivitäten
3. Zusammenspiel mathematischer und didaktischer Praxeologien

Die *didaktische Transposition* beschreibt die Veränderung von schulischem Wissen hin zu lehrendem Wissen und dem tatsächlich gelehrten und gelernten Wissen, vgl. Chevallard (1985) bzw. Bosch und Gascón (2006). (Dieses entspricht der Unterscheidung von intended, implemented und attained curriculum in anderen Kontexten.) Dieses sorgt dafür, dass eine Untersuchung des langen und komplizierten Prozesses, in dem mathematisches Wissen entsteht, transformiert werden und schließlich zum Lehren in einem bestimmten Lehrkontext ausgewählt wird, notwendig ist, um die Interaktionen der Studierenden, Lehrenden und des mathematischen Wissens in diesem Kontext zu verstehen. Darüber hinaus müssen die Eigenschaften dieser Institutionen verstanden werden. In diesem Zusammenhang wird der Begriff *Institution* in der Weise von Douglas (1986) verwendet, die – in Anlehnung an Lewis (2008) – eine Institution als Vereinbarung definiert, welche entsteht, wenn alle Parteien ein gemeinsames Interesse daran haben, dass es eine sichere Konventionen gibt, keine widersprüchlichen Interessen gibt und es keine Abweichungen gibt, so dass auf diese Weise die gewünschte Auslegung von Regeln verloren geht. Des Weiteren sagt sie:

„For a convention to turn into a legitimate social institution it needs a parallel cognitive convention to sustain it.“

(Douglas, 1986, S. 46)

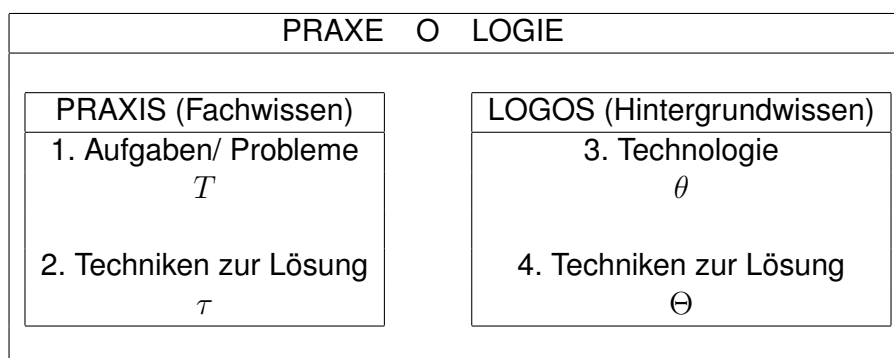


Abbildung 2.1.5: Aufbau einer Praxeologie

Praxeologien dienen in der ATD zur Beschreibung mathematischer Aktivitäten und sind in die Modelle, welche mit Hilfe der ATD rekonstruiert werden, die kleinsten Analyseeinheiten. Eine *Praxeologie*¹ besteht nach Chevallard (1999) aus zwei verwandten, aber dennoch unterschiedlichen Komponenten:

1. dem praktischen Block (Praxis), dem „WIE man etwas bearbeitet“ (oder kurz: das Know-how)
2. dem theoretischen Block (Logos), dem „WARUM man es auf diese Weise bearbeitet bzw. bearbeiten darf“

Die beiden Blöcke werden jeweils in zwei Unterpunkte unterteilt, welche in den folgenden beiden Abschnitten näher beschrieben werden und jeweils üblicherweise mit bestimmten Buchstaben bezeichnet werden. Eine graphische Darstellung des Aufbaus einer Praxeologie findet sich in Abbildung 2.1.5. Allen Definitionen zugrunde liegt der oben-definierte Begriff der Institution, welcher nach Winsløw et al. (2014) z. B. ein Lehrbuch oder eine zugrundeliegende Veranstaltung sein kann.

Der praktische Block wird aufgeteilt in die Aufgaben bzw. Probleme T (für *task*) und die Techniken zur Lösung τ . Die Aufgaben sind konkrete Aufgabentypen, welche im Kontext einer Institution gestellt werden. Die Techniken zur Lösung enthalten konkrete Wege, um diese Aufgabe zu bearbeiten und lösen zu können. Der theoretische Block wird aufgeteilt in die Technologien θ und die Theorien Θ , welche als zwei Ebenen der Beschreibung und Begründung zu verstehen sind. Die Technologie θ enthält eine Menge an Notationen und Argumenten, die eine erste Beschreibung, Erklärung und Begründung enthalten und auch bei der Organisation von unterschiedlichen Typen von Aufgaben und Techniken nützlich sind. Die Theorie Θ enthält dagegen eine abstrakte Menge an Konzepten und Argumenten, die die Technologie unterstützen können, und die Technologie vertiefend begründet.

Eine Praxeologie wird über das 4-Tupel

$$(T, \tau, \theta, \Theta)$$

festgelegt. Aus dem Englischen spricht man auch von den 4T, nämlich *task* T , *technique* τ , *technology* θ sowie *theory* Θ .

Praxeologien kann man in mehreren hierarchischen Stufen anordnen und darüber hinaus zwei verschiedene Typen von Motiven zur Erstellung einer Praxeologie unterscheiden, nämlich

¹Der Begriff Praxeologie ist eine Kombination der Wörter Praxis (=Fachwissen) und Logos (Hintergrundwissen).

die Beschreibung und Analyse von einerseits mathematischen Aktivitäten in *mathematischen Praxeologien* und andererseits von Lehr- und Lernaktivitäten in *didaktischen Praxeologien*. Die üblichen Praxeologien, welche zur Unterscheidung der Struktur des Wissens verwendet werden, sind die folgenden:

- Punktpraxeologie: enthält einen Aufgabentyp
- Lokale Praxeologie: enthält eine Menge an Aufgabentypen in einer allgemeinen Technologie
- Regionale Praxeologie: enthält alle Punkt- und lokalen Praxeologien, die in einer Theorie vereinigt werden

Damit gilt die folgende Relation:

$$\text{Punktpraxeologie} \subset \text{Lokale Praxeologien} \subset \text{Regionale Praxeologien}$$

Hochmuth und Schreiber (2016, S. 553) erläutern den Begriff der Praxeologie an der Aufgabe T : „Integriere $\sin(x)^2$ “. Hierzu wird in der Höheren Mathematik folgende Technik, d. h. τ , verwendet:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^2 dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos(x) \cos(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \sin(x)^2 dx = -\sin(x) \cos(x) + x - \int \sin(x)^2 dx \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach $\int \sin(x)^2 dx$ erhält man:

$$\int \sin(x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Die Technologie θ setzt sich hier aus elementaren Rechenregeln (algebraische Umformungen, $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$), Integrationsregeln für trigonometrische Funktionen sowie der partiellen Integrationsregel zusammen. Die Theorie Θ ist die Integrationstheorie für Funktionen in einer Veränderlichen aus der Höheren Mathematik.

Eine dritte entscheidende Rolle spielt die Betrachtung der sogenannten *Ökologie* (englisch *ecology*) von mathematischen und didaktischen Praxeologien. Die Ökologie einer Praxeologie in einer gegebenen Institution besteht aus den Bedingungen, die die Entwicklung einer Praxeologie in der Institution ermöglichen bzw. begünstigen, und den Einschränkungen, die üblicherweise diese Entwicklung hemmen. Als Werkzeug hierfür führte Chevallard (1992) die sogenannte „Hierarchie der didaktischen Mitbestimmung“ ein. Innerhalb dieses Schemas können Einschränkungen und Bedingungen identifiziert und analysiert werden, die bei unterschiedlichen Ebenen der Verallgemeinerung erscheinen (oder entwickelt werden können):

Zivilisation $\supset$ Gesellschaft $\supset$ Lehrende Institution $\supset$ Pädagogik

U

Disziplin $\supset$ Bereich $\supset$ Sektor $\supset$ Thema $\supset$ Frage/Subjekt

Wenn man Mathematik als in einer gegebenen Institution gegebenen und strukturierten Disziplin im obigen Sinne betrachtet, können folgende unterschiedliche Ebenen ausgemacht werden, welche durch Beispiele erläutert sind:

- Bereiche: Analysis, Lineare Algebra, Differentialgleichungen
- Sektoren: Analysis in einer Veränderlichen, Matrizenalgebra
- Themen: Grenzwerte, Differenzieren, Determinanten
- Fragen/Subjekte: Wie differenziert man ein Produkt von Funktionen?

Ein Thema wird im Wesentlichen von einer Technologie vereinigt, z. B. Grenzwerte einer Funktion, die mit einer expliziten Formel berechnet werden. Ein Sektor wird durch eine Theorie vereinigt und ein Beispiel für einen Sektor sind z. B. Grenzwerte in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

2.1.6 Mathematisches Modellieren und die ATD

Winsløw et al. (2014, S. 105 ff.) beschreibt, wie das Verhältnis von Mathematik und anderen wissenschaftlichen Disziplinen, welche Mathematik einsetzen, mittels ATD beschrieben werden kann. Üblicherweise wird die Organisation des mathematischen Inhalts in Universitäten – sowohl in der Mathematik für Mathematiker als auch beispielsweise in der Mathematik für Ingenieure – durch eine Liste spezifischer Themen (Notationen, Sätze, Techniken, etc.) beschrieben, die in verschiedene Bereiche (Lineare Algebra, Analysis, Gewöhnliche Differentialgleichungen etc.) aufgeteilt sind. In Mathematik-Veranstaltungen mit der Zielgruppe Ingenieure tritt häufig ein breites Spektrum an Themen auf, vgl. Abschnitt 1.2.1. Dabei treten mathematische Modelle häufig erst am Ende eines Kapitels auf, was von Barquero et al. (2013) als *Applicanism* bezeichnet wird: Mathematische Kurse werden nach der inneren Logik der mathematischen Konzepte organisiert. Die Begründungen und der Sinn und Zweck werden losgelöst von den vorbestimmten, unverbundenen und isolierten mathematischen Praxeologien, die den Studierenden häufig als „leblose Denkmäler“ gezeigt werden.

Innerhalb des ATD-Ansatzes ist die erkenntnistheoretische Bedeutung der Modellierung radikal verschieden. In der ATD wird mathematische Modellierung als stetiger Prozess der Rekonstruktion mathematischer Praxeologien betrachtet. Dadurch werden sie fortlaufend breiter und komplexer. Es gibt einen Übergang von Punktpraxeologien zu lokalen und regionalen Praxeologien mit dem Hauptziel, zentrale Fragen - inner- und außermathematisch - zu beantworten. Dadurch ist Modellierung kein Aspekt, sondern der Kern mathematischer Aktivitäten.

Zur Beschreibung hiervon führte Chevallard (2006) die didaktische Notation der *Study-and-Research-Paths* (SRP) ein. Der Startpunkt eines SRP ist eine erzeugende Frage Q_0 , die eine zentrale Bedeutung in den Studierenden bekannten Kontexten hat. Durch die Untersuchung von Q_0 entstehen abgeleitete Fragen Q_i . Durch die Untersuchung dieser Fragen entstehen vorläufige Antworten, die zu den möglichen Wegen, die Studierende durchlaufen, korrespondieren. Ein Beispiel (aus einem Kurs in Spanien): Es wurde eine Tabelle mit der Entwicklung der Größe der Bevölkerung in einem bestimmten Zeitraum gegeben. Die Frage war, wie die Größe der Bevölkerung sich in kurzer und in langer Zeit entwickelt. Die Frage wurde unter Verwendung verschiedener Kursinhalte untersucht: Differenzengleichungen erster Ordnung, Matrizenalgebra, gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme davon. Das führte dazu, dass die Inhalte in einer vollständig anderen Logik untersucht wurden, unabhängig vom üblichen Aufbau von Mathematikveranstaltungen. Die mathematischen Sektoren wurden in verbundene Praxeologien integriert und Antworten aus den Modellen generiert. Einschränkungen waren die Schwierigkeiten bei der Koexistenz mit anderen Lehr- und Prüfungsformaten. Außerdem fehlte das Vokabular zur Beschreibung und Rechtfertigung der neuen mathematischen Handlungsweise. Zuletzt gab

es auch deutliche Veränderungen im didaktischen Kontrakt.

2.1.7 Untersuchungen vergleichbarer Thematiken mittels der ATD

In diesem Unterabschnitt werden Studien vorgestellt, welche die ATD zur Untersuchungen verwandter Fragestellungen wie der in dieser Dissertation einsetzen:

Beschreibung der Verwendung der Dirac-Delta-Distribution in der Veranstaltung „Signale und Systeme“

Hochmuth und Schreiber (2016) setzen sich mit der Frage auseinander, „welche Inhalte, Konzepte, heuristische Strategien [...] für ein erfolgreiches Durchlaufen [...] fortgeschrittener Lehrveranstaltungen wie „Signale und Systeme“ [...] relevant sind. Im folgenden wird die Veranstaltung als SigSys bezeichnet. Entsprechend Winsløw et al. (2014) werden zwei Blickwinkel auf die universitäre Ausbildung eingenommen:

1. der „interne“, d. h. der eines Beteiligten, der auf Lehre und Lernen von mathematischen Praxen bedacht ist
2. der „externe“, d. h. der eines Beobachters, der auf Bedingungen und Beschränkungen von mathematischen Praxen in der Mathematikausbildung achtet, welche durch die Institution oder auch durch die Zeit variieren können

In der Ingenieurausbildung wird innerhalb der Höheren Mathematik die mathematische Bedeutung von mathematischen Symbolen angesprochen, in ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen jedoch meistens eine kontextspezifische. Zur Explizierung, Analyse und Reflektion der Mathematik in verschiedenen institutionellen Kontexten, welche auch interne und externe Blickwinkel zulässt, setzen die Autoren die ATD ein.

Der Forschungsgegenstand ist die Dirac-Delta-Distribution, die ein zentrales Konzept von „SigSys“ ist, und laut Hochmuth und Schreiber (2016, S. 554) „notwendig zum Verständnis zahlreicher Inhalte und Beziehungen der Lehrveranstaltung“.

Hochmuth und Schreiber (2016, S. 554ff.) merken an, dass die mathematische Modellierung signal- oder systemtheoretischer Zusammenhänge selbst kein Teil der Lehrveranstaltung ist, sondern „von Beginn an mit mathematisch aussehenden Objekten operiert wird“. Die verwendeten Modelle sind mathematisch formuliert und bilden den Kern der Signaltheorie in Form einer kohärent strukturierten Welt. Ein Signal wird dabei in Abhängigkeit vom Kontext als (reellwertige) Funktion oder (reelle) Zahlenfolge betrachtet. Die Begriffe sind mit elektrotechnischen und physikalischen Vorstellungen verknüpft. Einerseits beziehen sie sich auf eine „elektrotechnische Realität“, welche physikalischen Gesetzen folgt und zur Beobachtung gemessen werden kann und andererseits können sie über eine mathematische Modellbildung begründet oder über eine „erfolgreiche elektrotechnische Praxis“ gerechtfertigt werden. Beide Vorstellungen müssen von den Studierenden verknüpft werden, auch wenn sie „vielfältig und teils widersprüchlich“ sind. Die Autoren verorten diese vorliegende Situation weder in der „Mathematik“ noch im „Rest der Welt“ im Sinne des Modellierungskreislaufs.

Mathematisch betrachtet sind Signale an einzelnen Punkten weder differenzierbar noch stetig. Aus diesem Grund werden in Büchern zur Signaltheorie Distributionen eingeführt, welche den

Funktionenbegriff erweitern. Dabei ergibt sich als Aufgabe T im Sinne der ATD die Bestimmung einer „Ableitung“ einer nicht differenzierbaren bzw. sogar unstetigen Funktion. Über die Beschreibung des qualitativen Verhaltens kann ein Signal als punktwiser Grenzwert einer stetigen und differenzierbaren Funktionenschar angenommen werden. Bei dieser Vorstellung eines Grenzwerts gibt es deutlich Unterschiede zu den Definitionen von Grenzwerten, wie sie in „Mathematik für Ingenieure“-Veranstaltungen eingeführt werden. Die Integration wird symbolisch durchgeführt, wobei hier die Vorstellung des Integrals aufgegriffen wird, dass ein Integral die unendliche Summe infinitesimal kleiner Stücke ist, die mit einer Funktion gewichtet sind. Dieses Vorgehen lässt sich über die Eigenschaften von Distributionen rechtfertigen, wobei der fachmathematische Zusammenhang in die Veranstaltung nicht dargestellt wird, sondern über „Plausibilitätsüberlegungen“ argumentiert wird, vgl. Hochmuth und Schreiber (2016, S. 557)

Im Sinne der ATD ist dieser Rückgriff auf Ableitungen der Funktionsschar (mit differenzierbaren und stetigen Funktionen) eine Technik τ . Die Vorstellungen zu Grenzwerten und Integralen bilden hier die Technologie θ . Die Theorie Θ ist die „elektrotechnische Distributionentheorie“, welche sich von der mathematischen unterscheidet. Für diese Theorie werden grafische Darstellungen mit grafischen Anschauungen verwendet, welche mit Vorstellungen zum Integral sowie „Analogien“ zur gelernten Mathematik verbunden werden. Die Technik τ aus SigSys passt dabei nicht zu den Diskursen aus der Höheren Mathematik und muss spezifische Aspekte aus der Mathematik vernachlässigen; beispielsweise können die Grenzwertsätze nicht angewendet werden. Mit den bekannten Mitteln aus der Höheren Mathematik können kognitive Konflikte nicht aufgelöst werden und müssen daher ignoriert werden.

Vorteile dieses Zugangs über Folgen bzw. Funktionsscharen sehen Hochmuth und Schreiber (2016, S. 560) in der Anschaulichkeit, denn auf diese Weise können Eigenschaften von Distributionen, die ein idealisiertes Konzept sind, plausibel gemacht werden. So können Eigenschaften verdeutlicht werden, da die Folgenglieder als Repräsentanten von Größen betrachtet werden können und physikalisch-technische Entsprechungen haben. Ein weiterer Vorteil wird in den engen Zusammenhängen zwischen Technik τ und Aufgabenstellung T gesehen: Es werden bezogen auf das technische Verständnis idealisierte Objekte herangezogen und durch realitätsnahe Objekte (konkret stetige und differenzierbare Signale) angenähert.

Zu dieser Vorgehensweise zitiert Hochmuth und Schreiber (2016) die Arbeit Fettweis (1996):

„Die Frage der Äquivalenz von Darstellungen mit unterschiedlichen Folgen spielt in der mathematischen Theorie der Distributionen eine wichtige Rolle. [...] Wir können uns hier allerdings nicht mit der exakten Theorie der Distributionen befassen. Es soll uns genügen, dass die Darstellung durch Funktionenfolgen einem physikalischen Bedürfnis entspricht und dass bei sinnvoller Anwendung des benutzten Prinzips eindeutige, korrekte Ergebnisse erzielt werden. Auf Grund seiner universellen Bedeutung bliebe dieses Prinzip selbst dann noch gültig, wenn an gewissen Stellen sogar die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Distributionentheorie nicht mehr erfüllt wären.“

(Fettweis, 1996, S. 11f.)

Es gibt keinen strukturellen Aufbau mathematischer Inhalte. Dadurch gibt es Praxeologien, die sich zwar auf gemeinsame Technologien und Techniken beziehen, welche in den beiden Kontexten unterschiedlich ausgeformt sind und die sich in den Aufgaben zeigen. Praxeologien aus der

Mathematik wie z. B. mit Objekten aus der Analysis (wie Integrale) oder Lineare Algebra (bei linearen Abbildungen) werden hier eher als „Mittel zum Zweck“. Dabei gibt es keinen Rückgriff auf die Elemente des Logos. Praxeologien zu fortgeschrittenen, mathematischen Inhalten wie aus der Funktionalanalysis werden „verwendungsbezogen“ eingeführt, d. h. das Logos wird „häufig durch grafische und technische Veranschaulichungen, Plausibilitätsargumente und Verweise auf erklärende mathematische oder bestätigende physikalisch-technische Technologien geprägt und zeichnet sich in Bezug auf die im engeren Sinne fachmathematische Behandlung durch Übereinfachung und Verkürzungen aus.“

Es gibt eine technische Realität, die mit mathematischen Modellen der Lehrveranstaltung beschrieben werden soll. Dabei kann das mathematische Modelle nur Teilaspekte dieser technischen Realität abbilden und sie folgt eigenen Grenzen, die den im Modell vorkommenden Symbolen zusätzliche Bedeutungen geben. Des Weiteren müssen die Größen in den Modellen gemessen werden können, wobei die Messungen wiederum Beschränkungen unterliegen, die weder für die mathematischen Größen noch für die Größen in der technischen Realität gelten.

Beschreibung der Verwendung von Mathematik bei Ingenieuren unterschiedlicher Fachrichtungen in Berufen

Quéré (2017) untersucht, welche Mathematik Ingenieure verschiedener Fachrichtungen in Frankreich am Arbeitsplatz benötigen und hat zur Untersuchung sowohl Fragebögen als auch Interviews eingesetzt. Auf diese Weise hat er drei Praxeologien aus der Analyse der Interviews erarbeitet, vgl. Quéré (2017, S. 5f.):

1. Typen von Aufgaben und mathematischen Technologien: Hiermit bezeichnet er Praxeologien, bei denen allgemeine Typen von Aufgaben auftreten, welche nicht unbedingt mit Mathematik verbunden sind, bei denen jedoch die Ingenieure mathematische Techniken sowie Technologien erwähnen, welche mit Mathematik verbunden sind. Hierzu zählt er Dinge wie „Argumentieren“ oder „Problemlösen“. Dabei nehmen sie Bezug auf Techniken und Technologien, welche mit Beweisen, dem Testen von Hypothesen oder Logik zusammenhängen. Andere Ingenieure beziehen sich auf die „Grundlagen“ und nennen in diesem Zusammenhang mathematische Gebiete wie Kryptographie oder iteratives Problemlösen. Ein weiterer Typ von Aufgaben ist das „Kommunizieren über Mathematik“ und hierbei sind die Aufgabentypen direkt mit Mathematik verbunden und Techniken zum Kommunizieren von Mathematik wurden direkt in der Ingenieurausbildung gelernt.
2. Typen von Aufgaben in speziellen Gebieten und mathematische Techniken: Zu diesen Praxeologien zählen Aufgaben, die aus anderen wissenschaftlichen Gebieten wie der Physik stammen. In den Interviews nennen die Ingenieure hier verschiedene mathematische Grundfähigkeiten wie Methoden aus der Analysis. Hierbei werden Techniken und Technologien aus der Mathematik wie Sätze oder Formeln eingesetzt, ohne zu versuchen, diese mathematisch zu verstehen.
3. „Reasusing“ als Kombination von Begründen (Reasoning) und Verwenden (Using), welches er als Konzept für eine persönliche und neue mathematische Erfahrung betrachtet: Bei diesen Kategorien von mathematischen Praxeologien wird Mathematik in den Techniken, der Technologien und der Theorie kombiniert. Dieses ist speziellen Typen von Aufgaben verbunden. Beispielsweise muss dann nicht nur gewusst werden, welcher Satz verwendet werden muss, sondern auch ein tiefes Verständnis des Beweises des Satzes

vorhanden sein, um zu verstehen, welche Parameter es ermöglichen, ein Ergebnis in geschickterer Weise als die Kollegen zu erhalten.

2.2 Problemlösestrategien und Heuristiken nach Polya

Die Theorie des mathematischen Problemlösens wurde in ausführlicher Weise in dem Buch „How to solve it“, Polya (1949), eingeführt. Dort gibt Polya eine Beschreibung des Lösungsprozesses von vor allem innermathematischen (Beweis-)Aufgaben in vier Schritten an. Hierzu gibt er verschiedene Heuristiken zum Lösen derartiger Aufgaben an. Er geht dabei jedoch auch die Anwendbarkeit seines Ansatzes bei Anwendungsaufgaben zur Mathematik ein, wobei er vor allem Unterschiede beim Verstehen der Aufgabe ausmacht. Diese Ansätze werden in den ersten beiden Unterabschnitten dieses Abschnitts vorgestellt. Diese Herangehensweise dient als Feinstrukturierung der Aufgabenbearbeitungen.

Im Abschnitt 2.2.3 stelle ich Operationalisierungen nach Bruder und Collet (2011) von Polyas Heuristiken bezogen auf den Schulkontext vor. Auf diese Weise können konkretere Beschreibungsweisen für die Vorgehensweisen der Studierenden gefunden und gleichzeitig dienen die in Bruder und Collet (2011) als Einführung von Vokabeln für die Beschreibung von studentischen Tätigkeiten.

2.2.1 Problemlösen nach Polya

Polya (1949) beschreibt in seinem Buch „How to solve it“ (Schule des Denkens, Polya (1951)) Schritte, die zum Lösen einer Mathematikaufgabe durchlaufen werden müssen. Seine Konzeptualisierung schließt sowohl Beweisaufgaben als auch Rechen- und Anwendungsaufgaben mit ein. Seine Heuristiken und Problemlösestrategien zeigen notwendige Schritte, die beim Lösen jeder Teilaufgabe beachtet werden müssen.

Polya (1949) unterteilt mathematische Problemlöseprozesse in vier Phasen:

1. das Verstehen der Aufgabe,
2. das Entwickeln eines Plans,
3. das Ausführen des Plans und
4. die Rückschau

Diese werden in Polya (1949, S. XVI und XVII) näher erläutert:

Polya (1949) gibt in jedem Abschnitt typische Leitfragen an, die wesentlich für das Problemlösen sind. Die Heuristiken und entsprechende Stichworte wie Vorwärtsarbeiten werden im nächsten Abschnitt näher erläutert. Überdies gibt es noch entsprechende Fragen, die in jeder Phase gestellt werden sollen: Wo soll ich beginnen? Was kann ich tun? Was ist mein Ziel?

In Phase 1, dem Verstehen und der Analyse der Aufgabe, sollen folgende Fragen und Problemlösehinweise aus vier verschiedenen Bereichen geklärt werden:

- Analyse der Angaben in der Aufgabe:
 - Was ist unbekannt und was ist gesucht?
 - Was ist gegeben?

- Wie lauten die Voraussetzungen?
- Was sind die Behauptungen?

⇒ „Bestimmungsaufgabe“, vgl. Polya (1951, S. 66), ⇒ „Diagnose“, vgl. Polya (1951, S. 95), ⇒ „Bezeichnung“, vgl. Polya (1951, S. 75)

- Lösbarkeit der Aufgabe:

- Sind die Voraussetzungen erfüllbar?
- Reichen die Voraussetzungen zur Lösung der Aufgabe bzw. Bestimmung der Unbekannten? ⇒ „Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Polya (1951, S. 140)
- Sind die Voraussetzungen unzureichend, überbestimmt oder kontradiktorisch? ⇒ „Bedingung“, vgl. Polya (1951, S. 65)
- Ist die Aufgabe sinnvoll oder auch richtig gestellt? ⇒ „Reductio ad absurdum“, vgl. Polya (1951, S. 188)

- Anschauung: Mache eine Skizze, führe passende Bezeichnungen ein. ⇒ „Figuren“, vgl. Polya (1951, S. 105)

- Analyse der Teile der Aufgabe:

- Trenne verschiedene Teile der Voraussetzung und Behauptung. ⇒ „Zerlegung und Zusammensetzung“, vgl. Polya (1951, S. 252)
- Kannst Du sie angeben oder anders formulieren? ⇒ „Variation der Aufgabe“, vgl. Polya (1951, S. 218)

In Phase 2, dem Ausdenken eines Plans und dem Erarbeiten einer Lösungsstrategie, soll ein Zusammenhang zwischen den Angaben in der Aufgabe und der Unbekannten bzw. der zu zeigenden Behauptung gesucht werden. Hierzu sollen Hilfsaussagen untersucht werden und bekannte Resultate herangezogen werden, wenn nicht ein unmittelbarer Zusammenhang gefunden werden kann. Ziel dieses Schrittes ist es, einen Plan zur Lösung der Aufgabe zu erhalten. Dabei müssen die Vermutung(en) geprüft werden. Die Leitfragen und Problemlösehinweise in diesem Schritt sind:

- Hast Du die Aufgabe so oder ähnlich schon einmal gesehen? ⇒ „Analogie“, vgl. Polya (1951, S. 52) Suche nach Mustern oder Regelmäßigkeiten in der Aufgabe. ⇒ „Schablonenaufgabe“, vgl. Polya (1951, S. 206)
- Kennst Du eine verwandte Aufgabe oder eine Aussage (etwa aus der Vorlesung), die helfen könnte? ⇒ „Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und früher schon gelöst ist“, vgl. Polya (1951, S. 120)
- Betrachte die Unbekannte bzw. die zu zeigende Behauptung:
 - Kennst Du Aufgaben mit ähnlicher Unbekannten oder Behauptungen? Kannst Du diese bzw. ihr Ergebnis verwenden?
 - Kannst Du Methode aus der anderen Aufgabe verwenden? ⇒ „Hilfsaufgabe“, vgl. Polya (1951, S. 122)
 - Kannst Du ein Hilfselement einführen, so dass das frühere Resultat verwendbar wird? ⇒ „Hilfselemente“, vgl. Polya (1951, S. 128)

- Kannst Du die Aussage der Behauptung anders ausdrücken? Gehe auf die Definition(en) zurück.
- Versuche, eine verwandte Aufgabe zu lösen:
 - Kannst du dir eine einfachere verwandte Aufgabe denken, etwa durch Änderung der Voraussetzung oder der Behauptung? $\Rightarrow$ „Wenn du nicht die vorgegebene Aufgabe lösen kannst“, vgl. Polya (1951, S. 238)
 - Kannst du die Aufgaben verallgemeinern $\Rightarrow$ „Verallgemeinerung“, vgl. Polya (1951, S. 223) oder spezialisieren $\Rightarrow$ „Spezialisierung“, vgl. Polya (1951, S. 207)?
 - Gibt es analoge Aufgaben?
 - Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen?
 - Kannst Du die Aufgabe nach Veränderung der Voraussetzungen oder Behauptung lösen?

In Phase 3 folgt das Ausführen des Plans. Dazu soll jeder Schritt bei der Ausführung auf Richtigkeit geprüft werden. Kannst gezeigt werden, dass jeder Schritt richtig ist? Teilweise kann hierzu Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten verwendet werden.

In Phase 4 gibt es schließlich die Rückschau, Prüfung bzw. Vertiefung. Hierzu gibt es vier zentrale Fragen:

- Kannst du das Resultat bzw. den Beweis überprüfen? Kannst du durch Einsetzen spezieller Zahlen usw. checken, ob es stimmt? $\Rightarrow$ „Nachprüfung durch Dimensionsbetrachtung“, vgl. Polya (1951, S. 160)
- Werden alle Angaben in der Aufgabe, die ganzen Voraussetzungen und alle vorkommenden Begriffe, benutzt?
- Kannst das Resultat auf verschiedene Weise bestimmt werden?
- Kannst das Resultat bzw. die Methode für irgendeine andere bzw. spätere Aufgabe einsetzen?
 - Welches neue Wissen ergibt sich? $\Rightarrow$ „Korollar“, vgl. Polya (1951, S. 154)
 - Sollte man sich das Resultat/die Methode für später merken?
 - Kann man so neue Aufgaben erfinden? $\Rightarrow$ „Induktion“, Polya (1951, S. 133)
 - Stimmt die Umkehrung? Oder eine Verallgemeinerung?

2.2.2 Anwendungsprobleme nach Polya

Dieses erläutert er in einem Abschnitt in Polya (1949), wie sein Ansatz zum Problemlösen auf Anwendungsaufgaben angewendet werden kann. Hierzu sagt er:

„Practical problems are different in various respects from purely mathematical problems, yet the principal motives and procedures of the solution are essentially the same. Practical engineering problems usually involve mathematical problems.“

(Polya, 1949, S. 149)

Er sieht Unterschiede, Analogien und Verbindungen zwischen den beiden Aufgabentypen, welche im folgenden näher beschrieben werden. Dabei werden Ausführungen aus Polya (1951, S. 171ff.) verwendet. Er verwendet als Beispiel den Bau eines Stauwerks durch Bauingenieure. Für diese Arbeit erscheint dieses Beispiel relevant, da es hier – genauso wie bei den später analysierten Aufgaben aus der Elektrotechnik – um eine Anwendung von Mathematik unter Verwendung von Idealisierungen geht. Die Lösung der Aufgabe ist gemäß der vier Phasen nach Polya (1949) gegliedert, wobei jeweils die Unterschiede zu rein mathematischen Aufgaben gezeigt werden:

Unterschiede in Phase 1 (Verstehen der Aufgabe) – Unbekannte, Bedingungen, Daten

Zum Verständnis der Aufgabe sind keine speziellen Kenntnisse notwendig, denn Dämme wurden schon zu Zeiten gebaut, als noch keine modernen wissenschaftlichen Theorien existierten. Die im Vorabschnitt genannten Hilfsfragen können für diese Phase folgendermaßen beantwortet werden:

- Was ist unbekannt? Hier gibt es viele Unbekannte, wie die Lage des Dammes, seine geometrische Form, seine Größe, das Baumaterial etc.
- Wie lautet die Bedingung? Bei großen Bauprojekten müssen viele ökonomische Bedürfnisse berücksichtigt werden und andere Bedürfnisse so wenig wie möglich missachtet werden. Beispielsweise soll über den Damm elektrischer Strom geliefert werden, Wasser für Bewässerung und für naheliegende Gemeinden geliefert werden und es sollen Überschwemmungen verhindert werden. Andererseits soll so wenig wie möglich die Schifffahrt, der Fischbestand oder die Landschaft beeinträchtigt werden. Die Kosten sollen möglichst gering sein und die Bauzeit soll möglichst kurz sein.
- Was ist gegeben? Es gibt eine große Menge an Daten. Hierzu zählen:
 - topographische Daten zur Umgebung des Flusses und seiner Nebenflüsse
 - geologische Daten über die Festigkeits des Fundaments, mögliches Durchsickern und benutzbares Baumaterial
 - meteorologische Daten über die Niederschlagsmengen und Höhen von Fluten
 - volkswirtschaftliche Daten über den Wert des zu überflutenden Bodens, Materialkosten, Löhne

Bei einer derartigen Aufgabe sind die Unbekannten, Bedingungen und Daten komplexer und weniger scharf formuliert als in mathematischen Aufgaben.

Unterschiede in Phase 1 (Verstehen der Aufgabe) – Wissen, Begriffe

Zur Lösung der Aufgabe ist Fachwissen aus dem Bereich des Bauingenieurwesens notwendig, welches in diesem Abschnitt näher charakterisiert wird. Zu der benötigten Menge an Wissen zählt hier:

- eine wissenschaftliche Theorie der Festigkeit der Baustoffe
- die eigene Erfahrung des Bauingenieurs

- die Menge an Erfahrung aus Ingenieurbüchern, welche in technischer Literatur zu finden ist

Der Bauingenieur verfügt unter Umständen über Vorerfahrungen in dem Bereich Dammbau. Er hat Dämme aus Erde oder Mauerwerk gesehen, welche Wasser zurückhalten. Er hat die Flut gesehen, die gegen einen Damm prescht, und vielleicht die durch sie entstandenen Risse und Zerstörungen repariert. Er hat Dämme brechen gesehen und kennt Beispiele für Dämme, die Jahrhunderte hielten und für Dammbüche, die Katastrophen verursacht haben. Dabei kann er sich den Druck des Flusses gegen die Dammoberfläche und die Spannung und den Druck im Inneren des Dammes vorgestellt haben.

Dieses Wissen zum Druck in Flüssigkeiten bzw. Spannung und Druck in festen Körpern hatten die Damm-Bauer in der Antike noch nicht, aber es ist ein wichtiger Teil des Wissens von modernen Bauingenieuren. Zusätzlich gibt es noch Wissen, was kein exaktes wissenschaftliches Niveau hat. Hierzu zählen Kenntnisse zur Erosion durch fließendes Wasser, Beförderung von Schlamm, über Möglichkeiten von Formänderungen und Materialeigenschaften.

Damit sind das Wissen und die Begriffe in derartigen Anwendungsaufgaben komplexer und weniger rigoros definiert als in mathematischen Aufgaben.

Unterschiede in Phase 2 (Entwickeln eines Planes) –

Phase 1A und 1B haben gezeigt, dass die zum Verstehen der Aufgabe notwendigen Dinge (Unbekannte, Daten, Bedingungen, Wissen, Begriffe) in Anwendungsaufgaben komplexer und weniger rigoros definiert sind. Polya (1949) führt hierzu aus:

„This is an important difference, perhaps the main difference, and it certainly implies further differences; yet the fundamental motives and procedures of the solution appear to be the same for both sorts of problems.“

(Polya, 1949, S. 151)

Derartige Anwendungsaufgaben erfordern mehr Erfahrung als mathematische, wobei der Unterschied in der Form des benötigten Wissens liegt. In beiden Fällen können Veränderungen an der Aufgabe („Hast du dieselbe Aufgabe schon in einer wenig verschiedenen Form gesehen?“) oder Analogien („Kennst du eine verwandte Aufgabe?“) hilfreich sein.

Es ergeben sich einige Gegensätze zu rein mathematischen Aufgaben:

- Im Gegensatz zu mathematischen Aufgaben, in denen sehr klare Begriffe verwendet werden, werden in derartigen Anwendungsaufgaben häufig eher „verschwommene“ Ideen verwendet und die Begriffsklärung selbst ist ein wichtiger Teil der Aufgabe.
- Bei einer Mathematikaufgabe sind alle Daten (bzw. Voraussetzungen) und Sätze wesentlich und müssen bedacht werden. In Anwendungsaufgaben gibt es eine Fülle von Daten und Bedingungen. Davon sollten möglichst viele berücksichtigt werden, aber andere müssen vernachlässigt werden.

Bezogen auf den Damm müssen verschiedene Interessen abgewogen werden wie z. B. gesellschaftliche gegenüber volkswirtschaftlichen. Beispielsweise bei den geologischen Daten muss der Bauingenieur viel über die Beschaffenheit des Bodens wissen, aber muss irgendwann

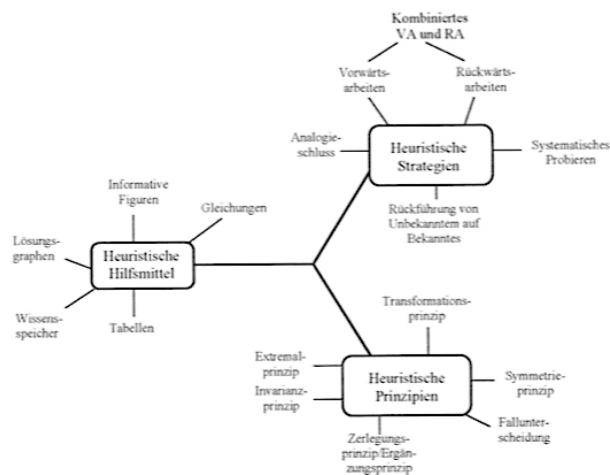


Abbildung 2.2.1: Heuristiken nach Bruder und Collet (2011, S. 45)

aufhören Daten zu sammeln, wodurch jedoch eine Ungewissheit bleibt.

Das erschwert die Beantwortung der Fragen „Hast du alle Daten benutzt?“ und „Hast du die ganze Bedingung benutzt?“, die sehr wichtig bei innermathematischen Aufgaben sind. Hier müssen sie umformuliert werden zu „Hast du alle Daten benutzt, die offensichtlich zu der Lösung beitragen könnten?“ bzw. „Hast du alle Bedingungen benutzt, die offensichtlich die Lösung beeinflussen könnten?“. Es werden hier sehr viele Daten gesammelt, aber es ist unvermeidlich, irgendwo einen Schlussstrich zu ziehen und etwas zu vernachlässigen.

Phase 3: Durchführen des Plans

Während Damm-Erbauer in der Antike nur auf ihre Erfahrung vertrauen konnten, sieht es bei Bauingenieuren in der heutigen Zeit anders aus. Sie müssen die Widerstände wie auch den Druck und die Spannung im Inneren exakt quantitativ berechnen, wo bei hierzu das Fachgebiet der Elastizitätslehre wesentlich ist. Die mathematische Bearbeitung der Aufgabe führt hier auf Approximationen, da nebensächliche Daten und Bedingungen solcher Anwendungsaufgaben vernachlässigt werden. Daher ist es auch sinnvoll, kleinere Ungenauigkeiten in den Rechnungen z. B. zu Gunsten eines einfacheren Modells zuzulassen.

2.2.3 Operationalisierungen von Problemlösestrategien nach Bruder und Collet

In diesem Abschnitt werden die Heuristiken nach Bruder und Collet (2011, S. 45ff.) näher vorgestellt. Sie sollen Operationalisierungen des mathematischen Problemlösens und der Heuristiken nach Polya (1951) liefern. Bruder und Collet (2011) richtet sich an Lehrer in der Sekundarstufe I und II, die Heuristiken lehren und lernen möchten. Mit Hilfe dieser Operationalisierungen soll eine Sprache für die späteren Analysen der Studierendenlösungen entwickelt werden.

Ein Schema der Gliederung der Unterpunkte ist in Abbildung 2.2.1 näher dargestellt. Dabei ist unter den Unterpunkten folgendes zu verstehen:

- Heuristische Hilfsmittel: Heuristische Hilfsmittel dienen zum besseren Verständnis und zur Strukturierung eines Problems.
- Heuristische Strategien: Heuristische Strategien sind Verfahren, welche unabhängig von einem fachspezifischen Kontext bei der Suche nach Lösungen hilfreich sein können.
- Heuristische Prinzipien: Heuristische Prinzipien sind Vorgehensweisen, welche stärker auf Mathematik bezogen mögliche Wechsel in der Sichtweise einer Aufgabe beschreiben.

Zusätzlich gibt es noch heuristische Regeln. Sie beschreiben allgemeine Herangehensweisen beim Problemlösen, welche analog zu Polyas Überlegungen aus dem Vorabschnitt sind.

In den folgenden vier Abschnitten werden diese vier Unterpunkte näher beschrieben und expliziert, wie solche Hilfsmittel, Strategien, Prinzipien oder Regeln aussehen können.

Heuristische Hilfsmittel

Heuristische Hilfsmittel dienen entsprechend Bruder und Collet (2011, S. 45ff.) dazu, eine Aufgabe besser zu verstehen und zu strukturieren. Dabei sind die konkreten Hilfsmittel Übersichten über das Gegebene und das Gesuchte, Visualisierungen, die Beziehungen zwischen Größen darstellen oder Informationsreduktionen mittels Gleichungen. In diesem Zusammenhang gibt es einen Verlust an Informationen zu Gunsten eines besseren Aufgabenverständnisses.

Zu den Hilfsmitteln, welche im folgenden näher erläutert werden, zählen:

- Informative Figuren
- Lösungsgraphen
- Tabellen
- Wissensspeicher
- Gleichungen

Nähere Beschreibung der fünf genannten Hilfsmittel

Informative Figuren :

Informative Figuren sind ein Synonym für „sinnvolle Skizzen“, wobei dieser Begriff im folgenden noch näher charakterisiert wird. Sie liefern eine graphische Darstellung, in der möglichst viele Informationen und Beziehungen eingehen sollen. Darüber hinaus soll möglichst viel aus ihnen abgelesen werden können und u. U. sollen sogar neue Beziehungen oder Informationen entdeckt werden können.

Bruder und Collet (2011, S. 55) liefert eine Zusammenstellung der Eigenschaften einer informativen Figur:

- Abspeichern verbal gegebener Aufgabenstellungen, vor allem Kennzeichnung der Start- und Zielgrößen und Veranschaulichung wichtiger gegebener Beziehungen und Zusammenhänge
- Einführung von Bezeichnungen (für Punkte, Strecken, Winkel, ...)

- Hilfe bei der Ideenfindung durch grafische und figurale Assoziationen
- Verifizieren von algebraischen Zusammenhängen

Tabellen :

Tabellen dienen in einer ersten Stufe dazu, Informationen darzustellen. Einfache Formen hiervon sind Datenblätter oder Wertetabellen. Sie dienen als heuristisches Hilfsmittel, wenn sie als Hilfsmittel für Strukturierung von Informationen eingesetzt werden, um z. B. systematisches Probieren zu unterstützen. Tabellen können auch bei der Darstellung eines Suchprozesses zum Finden einer Lösung zu helfen oder um alle möglichen Fälle in einer bestimmten Situation zu finden.

Lösungsgraphen :

Lösungsgraphen helfen bei Lösungswegen, die aus mehreren Schritten bestehen. Bei diesen muss vorher ein Plan für die Lösung entwickelt werden, bei dem die Inhalte der einzelnen Teilschritte näher durchdacht werden. Lösungsgraphen können dann als metakognitive Strategie dienen, um die Strukturen von verschiedenen Lösungswegen zu vergleichen und u. U. auch neue Problemlösestrategien abzuleiten.

Wissensspeicher :

Wissensspeicher fassen die wesentlichen Punkte zu einem Gebiet zusammen, aber gehen über Merk- oder Formelhefte hinaus. Sie enthalten zentrale mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie Anwendungen zu einem Thema und fassen diese zusammen. Sie ermöglichen ebenfalls die Umstrukturierung von Wissensselementen, d. h. es können beispielsweise mathematische Zusammenhänge einerseits nach ihren Voraussetzungen und andererseits nach ihren Behauptungen sortiert werden.

Gleichungen :

Gleichungen dienen als Element, um die Anzahl der Informationen in der Phase, in der die Aufgabe verstanden wird, zu reduzieren und auf diese Weise eine Mathematisierung zu erleichtern. Mit Hilfe von Gleichungen kann man proportionale Zusammenhänge zwischen Größen erkennen wie auch Zusammenhänge, in denen Potenz-, Exponential- oder Logarithmusgleichungen auftreten. Sie helfen beim Verständnis von komplexeren Zusammenhängen, bei denen viele verschiedene Bedingungen berücksichtigt werden müssen.

Heuristische Strategien

In diesem Abschnitt werden die Vorgehensweise aus Bruder und Collet (2011, S. 68ff.) vorgestellt, die verwendet werden können, wenn die Aufgabe verstanden wurde. Sie sind nicht an ein Fach gebunden, sondern können in verschiedensten Situationen helfen, zu einer Lösung zu kommen. Im einzelnen gibt es folgende Strategien:

- Systematisches Probieren

- Vorwärtsarbeiten
- Rückwärtsarbeiten
- Analogieschlüsse
- Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes

Nähere Beschreibung der fünf genannten Strategien

Systematisches Probieren :

Beim Durchdenken neuer Zusammenhänge bezeichnet Systematisches Probieren ein Durchgehen aller relevanten Möglichkeiten. Bruder und Collet (2011, S. 75) fasst folgende Trainingsmöglichkeiten für das Systematische Probieren zusammen:

- Verwendung eines selbstgewählten Beispiels zum besseren Verständnis eines Problems
- Unterscheidung verschiedener Fälle bei wenn man in logisch-kombinatorischen Aufgaben
- Schrittweises Nachvollziehen zeitabhängiger Prozesse
- Variation von Annahmen macht über bestimmte Größen in Modellierungsprozessen

Vorwärtsarbeiten :

Beim Vorwärtsarbeiten geht der Problemlöser von dem Gegebenen aus und versucht mit Hilfe dessen, das Gesuchte zu erreichen. Dabei beginnt er mit der Startsituation und versucht durch das Arbeiten mit den in der Aufgabe gegebenen Informationen ein bestimmtes Ziel zu erreichen. Dabei treten Teilziele auf, welche durch eine Kombination mit den Ausgangsdaten oder mittels Hilfsmitteln nach unterschiedlich vielen Zwischenschritten zum Ziel führen.

Bruder und Collet (2011, S. 76) bzw. Bruder und Collet (2011, S. 82) nennt zur Strategie des Vorwärtsarbeitens folgende Schlüsselfragen:

- „Was kann ich aus dem folgern, was ich schon weiß?“ bzw.
- „Was ist gegeben?“,
- „Was weiß ich über das gegebene?“ sowie
- „Was kann ich daraus ermitteln?“.

Rückwärtsarbeiten :

Rückwärtsarbeiten läuft entgegengesetzt zum Vorwärtsarbeiten ab. Es erfordert eine größere Flexibilität beim Denken, nämlich die Möglichkeit, Denkprozesse bzw. unternommenen Aktionen vom letzten Schritt zurückzuentwickeln. Beim Rückwärtsarbeiten versucht man von der Behauptung zur Voraussetzung zu gelangen, d. h. von dem, was gesucht ist, zu dem, was gegeben ist. Man ermittelt hierzu in den Teilschritten jeweils die Sachverhalte, aus denen man auf das Ziel schließen kann. Diese Sachverhalte werden dann zum neuen Ziel und man wiederholt den beschriebenen Schritt solange, bis man auf Sachverhalte, die bereits bewiesen wurden, oder auf eine gegebene Größe stößt. Schlüsselfragen hierfür sind nach Bruder und Collet (2011, S. 76) bzw. Bruder und Collet (2011, S. 82):

- „Was müsste ich wissen oder kennen, um das Gesuchte daraus ableiten zu können?“ oder
- „Woraus ließe sich das, was das Ergebnis sein soll, folgern?“

bzw.

- „Was ist gesucht?“,
- „Was weiß ich über das Gesuchte?“ oder
- „Was benötige ich, um das Resultat daraus zu ermitteln?“

Analogieschluss :

Bei einem Analogieschluss sucht man Ähnlichkeiten zwischen dem vorliegenden Problem und bereits gelösten Aufgaben. Dabei wird überprüft, ob eine zu der vorliegenden Aufgabe ähnliche Aufgabe bereits erfolgreich gelöst wurde und ob man bereits bekannte Vorgehensweisen bei der Lösungsfindung wiederverwenden kann. Eine Schlüsselfrage ist, welche ähnlichen Probleme bereits gelöst wurden und auf welche Weise. Bruder und Collet (2011, S. 83) nennt des Weiteren die folgenden Schlüsselfragen für Schülerinnen und Schüler:

- „Wie sind wir in ähnlichen Situationen vorgegangen?“,
- „Was kommt euch bei dieser Aufgabe bekannt vor?“ und
- „Vergleicht die letzten Aufgaben(lösungen) miteinander - welche Gemeinsamkeiten gibt es?“

Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes :

Das Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes hat das Ziel, Analogieschlüsse zu suchen bzw. zu erzeugen. Es kann durch die folgenden Dinge bewerkstelligt werden: Umstrukturieren, Erweitern oder Weglassen von Informationen der Aufgabe. Auf diese Weise können u. U. Aufgaben entstehen, die leichteren, bekannten Aufgaben zugeordnet werden können. Das Prinzip kommt häufig bei der Erarbeitung neuer mathematischen Inhalte zum Tragen.

Heuristische Prinzipien

Heuristische Prinzipien sind nach Bruder und Collet (2011, S. 87) Tätigkeiten, bei denen „Aspektwechsel“ und „Aspektbeachtungen“ durchgeführt werden.

- Zerlegungs-/ Ergänzungsprinzip
- Extremalprinzip
- Invarianzprinzip
- Transformationsprinzip
- Symmetrieprinzip
- Fallunterscheidung

Nähere Beschreibung der sechs genannten Prinzipien

Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip :

Das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip sind komplementäre Tätigkeiten. Beim Zerlegungsprinzip werden die Aufgaben unterteilt, so dass nur eine Teilmenge der verwendeten Informationen verwendet wird. Dadurch soll eine Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes erreicht werden. Zusätzlich können sich auch die Zerlegungen auf inhaltliche, mathematische Aspekte beziehen, wie die Zerlegung einer zu integrierenden Fläche in Teilflächen und die anschließende Betrachtung von Ober- und Untersummen beim Riemann- Integral.

Fallunterscheidung :

Fallunterscheidungen sind vollständige Zerlegungen von zu lösenden Aufgaben, weswegen sie einen Spezialfall des Zerlegungsprinzips sind. Beispielsweise können so bei Linearen Gleichungssystemen Lagerrelationen von Geraden unterschieden werden. Eine übliche Darstellung hierfür sind Baumdiagramme.

Invarianzprinzip :

Nach Bruder und Collet (2011, S. 96) geht es beim Invarianzprinzip „um das Erkennen, die Suche nach oder die Konstruktion von Konstanten, Bezugsgrößen oder Gemeinsamkeiten in den Informationen der Aufgabenstellung.“ Ein typisches Beispiel hierfür ist das Berechnen von Flächen und Körpern durch Auslegen mit Einheitsquadraten oder Einheitswürfeln. Auch Zeiteinheiten (wie Stunden oder Minuten) oder Ortsangaben sind derartige Invarianten. Typische Fragen sind hier:

- „Was bleibt gleich?“ oder
- „Was haben alle Objekte gemeinsam?“

Extremalprinzip :

Beim Extremalprinzip wählt man das größte, kleinste oder auf andere Weise am Rande liegende Element einer Menge. Das Prinzip kann eingesetzt werden, falls in der Aufgabenstellung eine gemeinsame Eigenschaft der Elemente einer Menge behandelt wird. Die typischen Fragen bei dem Extremalprinzip sind nach Bruder und Collet (2011, S. 99):

- „Unter welchen Bedingungen gilt ein Zusammenhang?“ bzw.
- „Welche Mindestbedingung (Randbedingung) muss erfüllt sein?“,
- „Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Bedingung zu erfüllen?“ ,
- „Wie viele Schritte sind höchstens (oder mindestens) nötig, um ein gegebenes Problem zu lösen?“

bzw.

- „Wo habe ich die besten Chancen?“ (bei Gewinnspielen oder Lotto) sowie
- „Wo liegt das Optimum?“ (z. B. der geringste Material- oder Zeitaufwand oder der maximale Gewinn)

Symmetrieprinzip :

Das Symmetrieprinzip beinhaltet das Suchen nach Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) bei den in der Aufgabe gegebenen Informationen. Der Begriff ist hier nicht nur im geometrischen Sinn zu verstehen, sondern beinhaltet auch beispielsweise auch das folgende Beispiel: Zeigen Sie, dass für $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{3}{a+b+c}$$

Hier kann Symmetrie durch das Auseinanderziehen des Zählers auf der rechten S. erzielt werden:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c}$$

Nun können die einzelnen Summanden verglichen werden und für jeden einzelnen kann verwendet werden, dass sich durch das Dividieren durch eine größere positive reelle Zahl der Bruch verkleinert.

Transformationsprinzip :

Bei dem Transformationsprinzip werden Aspektwechsel in einem innermathematischen Sinn durchgeführt. Diese Wechsel können in den folgenden Weisen gemacht werden:

- Suche nach anderen mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten für das Gegebene und Gesuchte
Beispiel: Wechsel der Darstellungsform einer Komplexen Zahl von kartesischer auf Eulerdarstellung
- Variation der Bedingungen, in dem man Gegebenes und Gesuchtes in verschiedenen Zusammenhängen betrachtet
- Zerlegung, Ergänzung oder Verknüpfung der Aufgabeninhalte mit Neuem

Heuristische Regeln

Bruder und Collet (2011, S. 104ff.) unterscheidet allgemeine und spezielle heuristische Regeln. Die allgemeinen Regeln schließen im mathematischen Sinne beispielsweise das Zurückführen auf Definitionen mit ein, bei dem verwendete Begriffe auf ihre Definitionen zurückgeführt werden. Dieses ist eine Form der bereits beschriebenen Strategien, von Unbekanntem auf Bekanntes zu schließen. Die Regeln sind allgemein anwendbar und dienen zum besseren Verständnis einer Aufgabe.

Spezielle heuristische Regeln beschreibt Bruder und Collet (2011, S. 104) folgendermaßen:

Spezielle heuristische Regeln stellen eine Aufforderung zum Vollzug eines Teilschrittes zur Ideenfindung bei der Anwendung eines speziellen Prinzips auf einen Vertreter einer bestimmten Aufgabenklasse dar im Rahmen einer bewusst oder unterbewusst gewählten Strategie. Damit sind spezielle heuristische Regeln jeweils an eine bestimmte Aufgabenklasse gebunden.

Eine solche Regel kann sein, dass man rechtwinklige Dreiecke und somit trigonometrische Methoden verwenden kann, um Längen und Entfernungen berechnen zu können.

2.2.4 Zwischenfazit zum Problemlösen

Das Problemlösen ist ein zentraler Bestandteil von Aufgaben. Die Problemlösestrategien nach Polya können dabei eingesetzt werden, um innermathematisches Lösen einer Aufgabe zu konzeptualisieren, andererseits aber auch für Anwendungsprobleme, was eine Relevanz für diese Untersuchungen zeigt. Mit Hilfe der Operationalisierungen nach Bruder und Collet (2011) sollen Problemlöse-Strategien, welche die Studierenden in ihren Bearbeitungsprozessen zeigen, näher konzeptualisiert werden und mit Hilfe der Einführung passender Begriffe Verbindungen zu der Problemlöse-Diskussion gezogen werden. Analog zum Modellierungskreislauf muss hier die Anwendbarkeit auf Realsituationen bzw. auf die „Realität in Elektrotechnik-Aufgaben im ersten Studienjahr“, welche Idealisierungen unterliegen, untersucht werden.

2.3 Erkenntnistheoretische Spiele und mathematische Ressourcen

In dem folgenden Abschnitt werden Ansätze zur Beschreibung von Vorgehensweisen von Physikstudierenden im ersten Jahr vorgestellt, welche die Arbeitsgruppe von Professor Redish an der University of Maryland entwickelt hat. Dabei geht es einerseits um Strategien, die Studierenden helfen, Aufgaben für sich zu erschließen und in Tuminaro und Redish (2007) über die sogenannten erkenntnistheoretischen Spiele beschrieben wurden. Andererseits werden Rechtfertigungsstrategien für die Verwendung von Mathematik vorgestellt, welche in Bing (2008) erarbeitet wurden.

Die Ansätze erscheinen relevant, da die Elektrotechnik als das Teilgebiet der Physik betrachtet werden kann, welche sich mit elektrischem Strom und Elektrogeräten befasst. In dieser Betrachtungsweise sollte es einige Gemeinsamkeiten zu Tuminaro und Redish (2007) bzw. Bing (2008) geben. Auf diese Weise können Ansätze für die Analyse von Bearbeitungsprozessen von Studierenden im ersten Semester gewonnen werden und es kann überprüft werden, ob einige der Prinzipien übertragbar sind. Die Erkenntnistheoretischen Spiele wurden in Tuminaro und Redish (2007) entwickelt, um das Problemlösen in universitären Anfängerkursen zur Physik

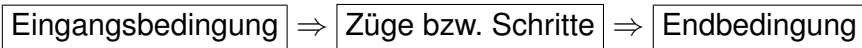


Abbildung 2.3.1: Grundstruktur erkenntnistheoretischer Spiele nach Tuminaro und Redish (2007, S. 5)

besser beschreiben zu können. In den Spielen treten sowohl mathematische als auch physikalische Ressourcen auf. Solche Problemlöseprozesse sind aus diesem Grund vergleichbar mit Lösungsprozessen in ingenieurwissenschaftlichen Anfängerkursen, da dort in ähnlicher Weise - wie in Kapitel 1 dargestellt - Ressourcen aus zwei unterschiedlichen Bereichen, nämlich der Mathematik und der Ingenieurwissenschaft selbst, eingesetzt werden müssen, wobei die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften in analoger Weise auf Physik aufbauen.

Methodik der Untersuchungen: Die Studien wurden in einem Physikkurs bei Physikstudierenden im ersten Studiengang durchgeführt. Tuminaro analysierte 60 Stunden von videographierten Treffen von Studierenden, die Hausaufgaben unter Laborbedingungen lösten. Aus diesem Material wurden einerseits Episoden ausgewählt, in denen die Studierenden ihre Überlegungen und Begründungen stark artikulierten, und andererseits Episoden, in denen mathematischen Fragen - sowohl qualitativ wie auch quantitativ - diskutiert wurden. Diese beiden Aspekte reduzierten das Material auf elf Stunden, welche dann transkribiert und analysiert wurden. In diesem Material wurden Videoausschnitte identifiziert, in denen die Studierenden schlüssige und einheitliche [consistent] Aktivitäten durchführten. Diese wurden von Tuminaro und Redish mehrfach angesehen, um mögliche Ziele und Schritte zu beschreiben. Daraus ergaben sich Hypothesen für verschiedene Strategien, welche sie als erkenntnistheoretische Spiele bezeichneten und welche im folgenden näher erläutert werden. In wöchentlichen Treffen mit der Arbeitsgruppe wurden die Transkriptionen und Kodierungen der Episoden genau überprüft und auf diese Weise die Beschreibungen der aus dem Material entwickelten erkenntnistheoretischen Spiele verfeinert. Schließlich analysierten zwei verschiedene Kodierer eine Beispielepisode mit Hilfe der Sprache der erkenntnistheoretischen Spiele und erzielten eine Interrator-Reliabilität von 80%. Dieses führte auf sechs verschiedene erkenntnistheoretische Spiele.

Erkenntnistheoretische Spiele (kurz E-Spiele) konzeptualisieren Regeln, Strategien, Einschränkungen und verschiedene Züge, die die Studierenden beim Lösen einer Aufgabe aus einer Physik-Grundlagenveranstaltung anwenden. Die Studierenden sind sich diesen Zügen nicht bewusst, denn die Züge wurden ihnen nicht vermittelt, sondern sie entwickeln sich durch Erfahrung beim Lösen derartiger Aufgaben. Dabei zeigt sich eine Orientierung an bestimmten Regeln und Strukturen. Die Übergänge sind in Abbildung 2.3.1 dargestellt, vgl. Tuminaro und Redish (2007, S. 4). In Tuminaro und Redish (2007) wird eine grobe Unterteilung der sechs Erkenntnistheoretischen Spiele in drei Rahmungen vorgenommen:

- (a) Sinngebung mit Formeln (quantitativ): Mit Hilfe von mathematischen Formeln beschreiben Studierende das Verhalten in der physikalischen Situation. Dieser Vorgang kann sowohl von der Mathematik als auch von der Physik ausgehen. Tuminaro unterscheidet hierbei die E-Spiele „Mapping Meaning to Mathematics“ und „Mapping Mathematics to Meaning“.
- (b) Sinngebung ohne Formeln (qualitativ): Die Studierenden setzen sich qualitativ mit der Aufgabe auseinander. Hilfsmittel hierbei ist beispielsweise das Erstellen einer Skizze oder die qualitative Untersuchung der auftretenden physikalischen Vorgänge. Tuminaro unterscheidet hierbei die E-Spiele „Physical Mechanism Game“ und „Pictorial Analysis“.

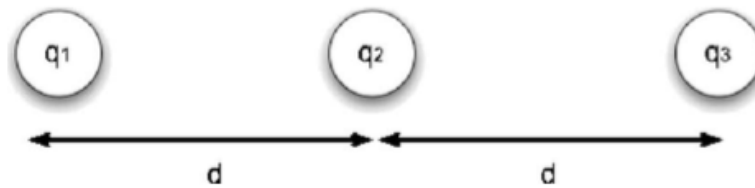


Abbildung 2.3.2: Skizze zu dem Drei-Ladungen-Problem

- (c) Mechanisches Gleichungssuchen: Hierbei kombinieren Studierende Gleichungen, die ihnen für die Lösung einer Aufgabe relevant erscheinen, ohne die physikalischen Implikationen zu bedenken. Alternativ kann auch die Musterlösung einer anderen Aufgabe herangezogen werden und die Bezeichnungen angepasst werden. Tuminaro unterscheidet hierbei die E-Spiele „Recursive Plug and Chug“ und „Transliteration to Mathematics“.

In den folgenden drei Abschnitten werden die zwei Spiele, die jeweils zu einer Rahmung gehören, näher beschrieben. Zur Erläuterung werden die erkenntnistheoretischen Spiele anhand der folgenden Aufgabe, dem Drei-Ladungen-Problem, vgl. Tuminaro und Redish (2007, S. 19), beispielhaft angewendet:

Wie in Abbildung 2.3.2 dargestellt, liegen drei geladene Partikel auf einer Geraden und haben jeweils den Abstand d . Die Ladungen q_1 und q_2 werden festgehalten und Ladung q_3 ist frei beweglich, aber liegt im Gleichgewicht zu den beiden anderen Ladungen, d. h. keine Nettoelektrostatische Kraft wirkt auf Ladung q_3 . Falls die Ladung q_2 den Wert Q hat, welchen Wert muss dann q_1 haben?

Lösung der Aufgabe: Die Aufgabe kann durch ein Kräftegleichgewicht und die Verwendung des Coulomb'schen Gesetzes gelöst werden. Es gilt entsprechend:

$$F_{q_2 \rightarrow q_3} + F_{q_1 \rightarrow q_3} = 0 \Leftrightarrow F_{q_2 \rightarrow q_3} = -F_{q_1 \rightarrow q_3}.$$

Nach dem Coulomb'schen Gesetz gilt (r Abstand der Ladungen q_i und q_j , ϵ_0 elektrische Feldkonstante):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r^2}$$

Angewendet auf die vorliegende Situation erhält man

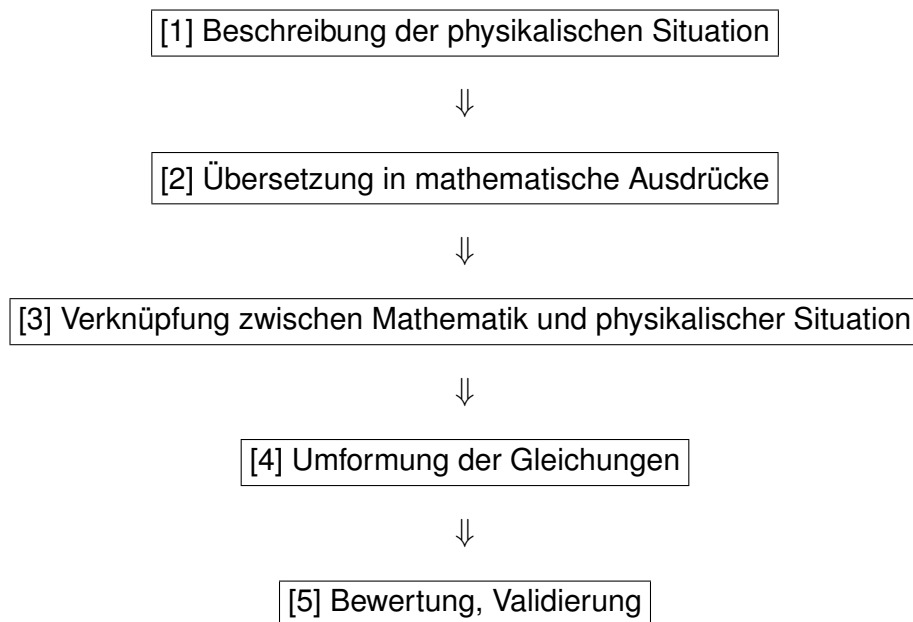
$$\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 d^2} = -\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2}$$

und durch Einsetzen von $q_2 = Q$ nach Auflösen das Ergebnis $q_1 = -4Q$.

2.3.1 Sinngebung mit Formeln (quantitativ)

Mapping Meaning to Mathematics

Beschreibung: Die Studierenden fangen an, ein konzeptionelles Verständnis für die Situation, wie sie in der Aufgabe beschrieben ist, zu entwickeln und führen dieses zu einer quantitativen Lösung aus. Dabei führen sie folgende Schritte aus:

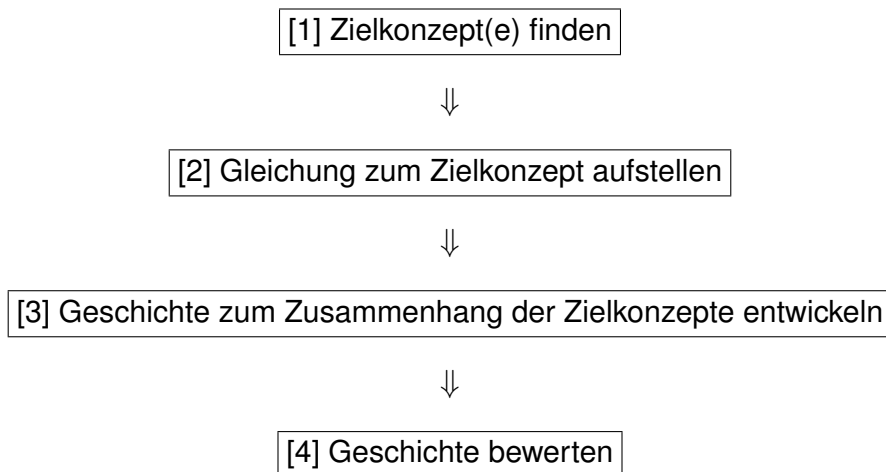


Wissenbasis: Menge an physikalischen und mathematischen Hilfsmitteln. Es werden unterschiedliche Hilfsmittel bei den unterschiedlichen Schritten verwendet.

Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen: Im ersten Schritt wird erkannt, dass die beiden Kräfte gleich groß sein müssen, da es laut Aufgabe keine Bewegung gibt. In Schritt 2 werden die Formeln $F_1 = \frac{(xQ)q_3}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ und $F_2 = \frac{Qq_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2}$ aufgestellt, welche in Schritt 3 gleichgesetzt werden. Dabei kürzen sich einige Größen, was der Umformung der Gleichungen in Schritt 4 entspricht. Das erhaltene Ergebnis wird mit Vorerfahrungen aus Experimenten sowie den Annahmen aus Schritt 1 validiert, d. h. es wird überprüft, ob der Wert mathematisch wie physikalisch plausibel ist.

Mapping Mathematics to Meaning

Beschreibung: Die Studierenden fangen an, eine konzeptionelle Geschichte zu entwickeln, die zu einer bestimmten Physikgleichung passt. Dabei werden folgende Schritte durchlaufen:



Wissenbasis: Menge an physikalischen und mathematischen Hilfsmitteln. Es werden unterschiedliche Hilfsmittel bei den unterschiedlichen Schritten verwendet.

Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen: Es werden am Anfang Kräfte und Abstände betrachtet, die hier das Zielkonzept sind. Hierzu kann als Gleichung das Coulomb'sche Gesetz verwendet werden. In dem dritten Schritt wird die Gleichung gedeutet und erkannt, dass der Abstand quadratisch in den Nenner der Coulomb'schen Gesetzes eingeht. Dieses wird in einem letzten Schritt mit Vorerfahrungen aus Laborversuchen in Verbindung gebracht.

2.3.2 Sinngebung ohne Formeln (qualitativ)

Physical Mechanism Game

Beschreibung: Die Studierenden versuchen eine physikalisch schlüssige und beschreibende Geschichte zu entwickeln, die auf dem intuitiven Verständnis physikalischer Mechanismen beruht. Dabei werden folgende Züge ausgeführt:

[1] Entwicklung einer Geschichte über die physikalische Situation



[2] Bewertung der Geschichte

Wissenbasis: einfache Begründungsweisen. Die Studierenden verwenden keine expliziten Verweise auf physikalische Prinzipien oder Gleichungen.

Hilfsmittel: Im Gegensatz zu „Mapping Meaning to Mathematics“ wird nicht den dort genannten Schritten gefolgt. Die Studierenden entwickeln eine Geschichte und betrachten das E-Spiel als abgeschlossen, wenn die Geschichte evaluiert ist.

Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen: Bei diesem Spiel wird kein formaler Weg durchlaufen, sondern die Studierenden verwenden einfache Begründungsweisen, um ihre Schlüsse zu erklären und zu unterstützen. Es werden keine formalen mathematischen oder physikalischen Prinzipien verwendet, sondern stattdessen fast ausschließlich Teilaspekte davon. Beispielsweise können Studierende gemäß Tuminaro und Redish (2007, S. 11) argumentieren, dass q_1 die Ladung $-Q$ haben muss, da q_1 und q_2 gegensätzliche Effekte auf q_3 haben müssen. Zusätzlich werden noch die Kräfte zwischen den q_i betrachtet, die sich entweder anziehen oder abstoßen müssen. Die Kräfte müssen sich gegenseitig auslöschen. Ein weiterer Aspekt ist das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet. Dabei werden die unterschiedlichen Abstände zwischen q_1 und q_3 bzw. q_2 und q_3 betrachtet, die sich auf die Kräfte auswirken. Ein Ergebnis ist, welche Kräfte betrachtet werden müssen.

Pictorial Analysis Game

Beschreibung: Die Studierenden erstellen eine Skizze, die Beziehungen zwischen den Einflüssen in der Problemstellung verdeutlicht. Dieses kann sowohl eine schematische Zeichnung, als auch eine Ablaufskizze sein. Dabei werden folgende Schritte durchlaufen:

[1] Zielkonzept(e) finden



[2] Darstellungsform finden



[3] Konzeptionelle Beschreibung der Beziehung zwischen den Objekten



[4] Lücken in der Darstellung füllen

Wissenbasis: Menge an physikalischen und mathematischen Hilfsmitteln. Es werden unterschiedliche Hilfsmittel bei den unterschiedlichen Schritten verwendet. Hinzu kommen darstellerische Übersetzungen.

Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen: Die Studierenden in Tuminaro und Redish (2007, S. 13) betrachten die Kräfte als Zielkonzept und zeichnen diese in ein Diagramm. Dort erfassen sie, wie die einzelnen Kräfte aufeinander wirken, d. h. ob sie sich abstoßen oder anziehen.

2.3.3 Mechanisches Gleichungssuchen

Recursive Plug-and-Chug

Beschreibung: Die Studierenden setzen Zahlen ein und erhalten numerische Ergebnisse ohne ein konzeptionelles Verständnis für die physikalischen Implikationen ihrer Ergebnisse zu haben. Dabei treten folgende Züge auf:

[1] Zielgröße identifizieren



[2] Gleichung finden, die Zieleigenschaft mit anderen Eigenschaften verbindet



[3] Bestimme, welche Größen bekannt sind



[4a] Berechne Zielgröße (wenn in [3] nur eine Zielgröße unbekannt ist)



[4b] Bestimme neue Zielgröße (sonst, gehe dann zu [1])

Wissenbasis: Die Formeln werden ohne konzeptionelles Verständnis genutzt. Es findet keine Validierung bzw. Bewertung im Sachkontext statt.

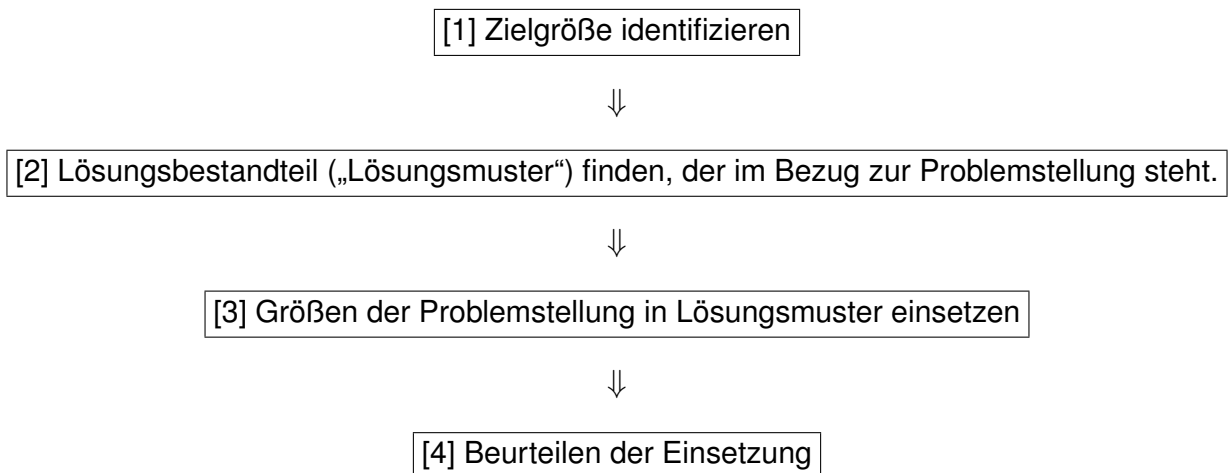
Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen: Es werden als Zielgrößen Kräfte und Abstände erkannt. Diese treten in dem Coulomb'schen Gesetz auf, so dass dieses in Schritt 2 herangezogen wird. Dieses kann in der Form

$$\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{Q q_3}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

eingesetzt werden, in dem die bekannte Größe $q_2 = Q$ eingesetzt wird. Aus den Angaben in der Aufgabe kann man mit diesem Spiel zu keiner Lösung kommen, da beispielsweise das Gleichgewicht der Kräfte nicht berücksichtigt wird.

Transliteration to Mathematics

Beschreibung: Die Studierenden verwenden ausgearbeitete Beispiele, um eine Lösung für ein neues Problem zu entwickeln. Transliteration bedeutet dabei: Stelle etwas in den entsprechenden Bezeichnungen eines anderen Alphabets dar. Dabei sind die durchlaufenen Schritte:



Erläuterung dieses erkenntnistheoretischen Spiels anhand des Beispiels mit den drei Ladungen:

Die Studierenden identifizieren Kräfte und Abstände als Zielgröße und suchen eine Beispielaufgabe zum Coulomb'schem Gesetz. Dabei wählen sie eine Aufgabe, in der nur zu zwei Ladungen vorkommen:

Zwei kleine Objekte mit einer Netzladung von Q (wobei Q eine positive Zahl ist) üben eine Kraft der Größe F aufeinander aus. Wir ersetzen eine der Kräfte durch eine andere, deren Netzladung $4Q$ ist. Wenn wir die Q - und $4Q$ -Ladungen auf den dreifachen Abstand zueinander verschieben, welche Größe hat dann die Kraft auf $4Q$?

(a) $F/9$ (b) $F/3$ (c) $4F/9$ (d) $4F/3$ (e) meine Lösung ist nicht dabei.

Hierzu ist 2.3.3 die passende Skizze, wobei dort die richtige Lösung (c) direkt angegeben ist. Die Studierenden setzen hier Zahlen in die Lösung ein, ohne zu beachten, dass es sich um keine analoge Aufgabe handelt.

2.3.4 Weiterentwicklung nach Bing (2008)

Bing erweiterte das Konzept der Erkenntnistheoretischen Spiele in seiner Dissertation. Zentrale Fragen seiner Arbeit sind: Womit begründen die Studierenden, warum das verwendete mathematische Verfahren zu dem korrekten Ergebnis führt? Wie rechtfertigen sie ihr Vorgehen?

Er beschreibt seine Methodik in Bing und Redish (2009, Seite 6). Zur Untersuchung seines Themas videographierte er ungefähr 150 Stunden der Arbeit von Physikstudierenden in höheren Bachelor-Semestern. Diese Studierenden besuchten Vorlesungen zu Fächern wie Quantenmechanik bzw. höhere Mechanikvorlesungen. Es wurden Treffen der Studierenden videographiert,

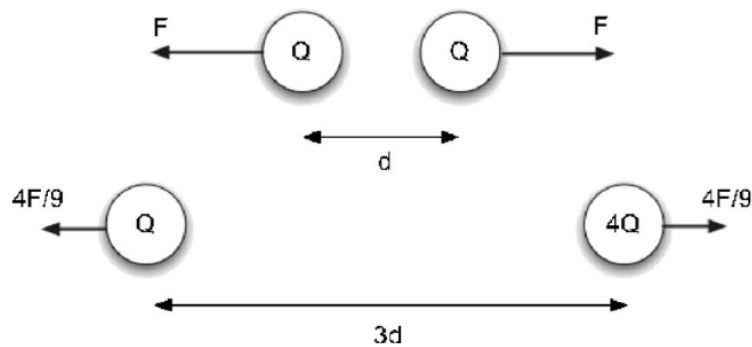


Abbildung 2.3.3: Skizze des 2-Ladungs-Problems (mit der richtigen Antwort), siehe Tuminaro und Redish (2007, S. 19)

bei denen sie sich mit den Übungsaufgaben auseinandersetzten, wobei teilweise auch Vorlesungen selbst aufgezeichnet wurden.

Bei den Analysen wurden drei Punkte berücksichtigt:

- (A) Die Rahmung von Aufgaben durch Studierende ist laut Bing am einfachsten zu erkennen, wenn es gegensätzliche Meinungen oder Missverständnisse gibt. Dieses führt auf mathematische Unstimmigkeiten, die von den Studierenden durch Vorschläge für Wechsel in der mathematischen Sichtweise gelöst werden können. Aus diesem Grund betrachtet Bing diese Rechtfertigungen als eine Erfassungsmöglichkeit für die aktuellen Rahmungen ihrer Überlegungen.
- (B) Bing wählte seine Daten aus, in dem er bei 95% der Aufzeichnungen persönlich anwesend war und Notizen machte. Mit Hilfe dieser Notizen konnten die besten Debatten, Argumente und Missverständnisse gefunden werden, wobei mit „besten“ hier das Material gemeint ist, was viel Material zur Analyse lieferte. Dabei brachten längere Diskussion über einen zentralen Punkt gute Anlässe für eine tiefere Analyse. Auf diese Weise wurden die 150 Stunden Videoaufzeichnung zu 50 Ausschnitten zusammengefasst, die Argumente, Debatten und Missverständnisse lieferten, die eindeutig zugeordnet werden können und lang genug für gute Hinweise auf Rechtfertigungsstrategien sind.
- (C) Es wurde eine Wissensanalyse durchgeführt, deren Grundidee es war, prototypische Gesprächsverläufe zu finden, um die vorliegenden Ausschnitte damit komprimieren zu können. Hierzu wurde eine Teilmenge der 50 Beispielepisoden individuell analysiert mit Ziel, die Arten von Rechtfertigungen zu finden, die die Studierenden verwenden. Dann wurden Episoden auf Gemeinsamkeiten untersucht und mathematische Rahmungen identifiziert. Dann wurde dieses nach und nach auf alle Episoden erweitert. Daraus wurden schließlich vier Rahmungen hergeleitet.

Bing (2008, Seite 45ff.) liefert vier Rahmungen, wie Mathematik in der Physik eingesetzt wird und hat diese anhand der mathematischen Argumentationsweisen herausgearbeitet. Dabei hat er untersucht, welche mathematischen Argumente Studierende für die Richtigkeit Ihrer Aussagen anführen und was typische Merkmale dafür sind. Seine Überlegungen erscheinen relevant für meine Untersuchungen, da die Studierenden am Ende des zweiten Semester schon mehr Erfahrung im Lösen von Aufgaben haben und sich die Sprache der erkenntnistheoretischen

	Rechtfertigung	Merkmale
Calculation	Durch richtige Anwendung eines Algorithmus erhält man ein richtiges Ergebnis	- Fokus auf technische Genauigkeit - Mathematisches Verbindung: ich brauche jenes, um dieses zu erhalten
Physical Mapping	Mathematik und Physik validieren sich gegenseitig	- Oft unterstützt durch Diagramme und Skizzen - Demonstrative Gesten - mechanische Verbindungen
Invoking Authority	Der Autorität (Professor, Skript) werden Ergebnisse geglaubt ohne Beweise zu fordern. Physikalische Regeln werden strikt und ohne Zweifel befolgt.	- Regeln zitieren - Fehlen von Folgerungsketten - Wenig Wissen über die Strukturen und Beweise
Math Consistency	Analogien oder logische Verbindungen zu anderen mathematischen Ideen geben Gewissheit, dass man richtig handelt.	- Analogien zu anderen mathematischen Ideen - Kategorisierung der Aufgabe

Tabelle 2.3.1: Mathematische Rechtfertigungen nach Bing und Redish (2009, Seite 8)

Spiele an einigen Stellen nicht als ausreichend erwies.

Er unterscheidet dabei vier verschiedene Begründungsstrategien, welche in der Tabelle 2.3.1 dargestellt sind:

- (a) Berechnung [Calculation], vgl. Bing (2008, S. 45): Das korrekte Durchlaufen eines Algorithmus liefert ein gültiges Resultat.

Beispiel: Die Studierenden sind überzeugt, dass die verwendeten mathematischen Verfahren (wie Lösungsalgorithmen für Differentialgleichungen) das Ergebnis liefern, welches man von den Algorithmen erwartet.

- (b) Abbildung in die Physik [Physical Mapping], vgl. Bing (2008, S. 48): Das Ergebnis wird anhand von realen Vorgängen in der Physik begründet.

Beispiel: Das über einen mathematischen Weg erhaltene Ergebnis stimmt mit dem überein, was in der Realität passiert.

- (c) Heranziehen von Autorität [Invoking Authority], vgl. Bing (2008, S. 52): Es wird ein Ergebnis aus der Vorlesung, aus den Übungen oder aus Fachbüchern herangezogen.

Beispiel: Formeln aus Lehrbüchern, Skripten etc. werden ohne Beweis verwendet.

- (d) Übertragbarkeit von mathematischen Verfahren [Math Consistency], vgl. Bing (2008, S. 55): Die Ähnlichkeit zu oder logische Verknüpfung mit einer anderen mathematischen Idee liefert eine Validierung, unabhängig von der konkreten Anwendung.

Beispiel: Mathematische Verfahren werden übertragen, z. B. Mittelwerte werden über die Anwendung von Integralen berechnet.

2.3.5 Kritik an den Erkenntnistheoretischen Spielen

Bing (2008, Seite 61ff.), der in derselben Arbeitsgruppe wie Tuminaro arbeitet, kritisiert in seiner Dissertation die erkenntnistheoretischen Spiele und beschreibt, warum sie seiner Ansicht nach nicht auf Studierende höheren Semesters anwendbar sind. Hierzu gibt er zwei Hauptgründe an:

1. Die implizite Natur der Arbeit der in seiner Dissertation beobachteten Studierenden höheren Semesters: Tuminaro hatte in seiner Forschung ausschließlich Studierende im ersten Semester Physik beobachtet. Diese Studierenden arbeiten langsamer und sprechen mit ihren Kommilitonen expliziter über die Details ihrer Arbeit. Studierende höheren Semesters neigen dazu, automatisierte Unterrouninen zu haben, und mathematische Umformungen und Interpretationen von Graphen schneller und unkommentiert durchzuführen. Auch wenn sie ähnliche Spiele wie die erkenntnistheoretischen Spiele in Tuminaros Studien spielen, gibt es hierfür weniger Hinweise, weswegen viel interpretiert werden müsste.
2. Der Fokus der erkenntnistheoretischen Spiele auf das erzielte Produkt des Spiels: Dieses Ziel definiert gemeinsam mit der Wissensbasis ein erkenntnistheoretisches Spiel. Der Fokus darauf, was ein Student zu erzielen versucht, schränkt nach Bings Ansicht den Fokus der Beschreibung in unnötigerweise Weise ein. Stattdessen setzt sich Bing damit auseinander, was die Studierenden als Quelle für das Wissen im Spiel ansehen und wie sich ihre Einstellung im Laufe einer Problemlöseepisode ändert.

Bei einem Fokus auf die Verwendung von erkenntnistheoretischen Spielen oder die Ziele des Handelns der Studierenden im höheren Semester, würde das Ergebnis zu sprunghaft (und oft zu implizit) präsentiert und viele Gedanken würden bezüglich der Einstellung der Studierenden unterschiedlicher erscheinen, als sie tatsächlich sind.

Aus diesem Grund wurde das Konzept in Bing (2008) verallgemeinert und verwendet andere Rahmungen. Da die erkenntnistheoretischen Spiele teilweise schwer zu unterscheiden sind, analysierte er Videostudien mit Studierenden im Hinblick auf die Begründungen für die Korrektheit der eingesetzten Mathematik.

2.3.6 Verbindungen zu den Theorien zur Modellierung und zum Problemlösen

In diesem Abschnitt sollen Verbindungen zwischen den Arbeiten von einerseits den erkenntnistheoretischen Spielen, vgl. Tuminaro und Redish (2007), und den Rechtfertigungsstrategien, vgl. Bing (2008), und andererseits dem mathematischen Problemlösen und den Heuristiken nach Polya (1951) aufgezeigt werden. Dabei sind erstere Operationalisierungen von zweiterem, allerdings konkret bezogen auf die vorliegende Situation. Dieses wird nun an den sechs E-Spielen bzw. den vier Rechtfertigungsstrategien verdeutlicht:

Die drei Spiele „Mapping Mathematics to Meaning“ (MaMe), „Mapping Meaning to Mathematics“ (MeMa) und „Physical Mechanisms“ (PM) beinhalten jeweils Übergänge zwischen Mathematik und Physik. Damit beschreiben sie Ähnliches wie der Modellierungskreislauf. Bei PM wird dabei eher in qualitativer Weise vorgegangen und damit auch eher qualitative mathematische Aussagen, die sich z. B. auf Größenordnungsvergleiche beziehen, gemacht. Bei MeMa werden dagegen tatsächlich Rechnungen durchgeführt, also quantitativ vorgegangen. MaMe ist hier eine spezielle Form des Durchlaufs des Modellierungskreislaufs, nur hier startend in der Mathematik und – analog zu den Ausführungen von Schukajlow-Wasjutinski (2011) – den Modellierungskreislauf in anderer Reihenfolge durchlaufend.

Bezogen auf das Problemlösen sind einerseits die Ausführungen zum Dammbau, vgl. Polya (1949, Seite 151), von Bedeutung, die genau solche Übergänge zwischen Mathematik und Physik thematisieren. Andererseits können häufig „Hilfsaufgaben“, vgl. Polya (1951, Seite 122), oder „Analogien“, vgl. Polya (1951, Seite 52), eingesetzt werden.

Die „Transliteration“ entspricht dem, was Polya als „Schablonenaufgabe“, vgl. Polya (1951, Seite 206), bezeichnet. Dabei wird nach Mustern oder Regelmäßigkeiten aus einer anderen Aufgabe gesucht und dann überprüft, wie diese auf die vorliegende Aufgabe übertragbar sind. „Recursive Plug and Chug“ entspricht einer niedrigen Form von der „Analyse der Daten der Aufgabe“ (vgl. Polya (1951, Seite 95)) in der ersten Phase in Polyas Problemlöseschema. Es werden solange Ausdrücke kombiniert bis man eine Unbekannte nur noch durch bekannte Größen ausgedrückt hat. Weitere theoretische Hintergründe werden hierbei nicht beachtet. Die „Pictorial Analysis“ entspricht Polyas „Mache eine Skizze“, vgl. Polya (1951, Seite 105), welches er in seinem Abschnitt über „Figuren“ näher beschreibt.

Auch die Rechtfertigungsstrategien nach Bing (2008) können in die Schemata eingeordnet werden. „Calculation“ entspricht hierbei einem „Aufstellen von Gleichungen“ (vgl. Polya (1951, Seite 61)) und anschließendem mathematischen Arbeiten. Dabei findet ein Durchlaufen des Modellierungskreislaufs nach Blum und Leiß (2007) statt, da eine Mathematisierung über die Gleichungen stattfinden, dann mathematisch gearbeitet wird (unter Verwendung einer Mathematik der Größen), jedoch keine Validierung vor dem physikalischen Hintergrund stattfindet. „Physical Mechanisms“ sind – analog zu oben – in Verbindung mit dem Dammbau-Beispiel zu sehen. Das „Berufen auf Autoritäten“ entspricht der Verwendung eines bekannten Resultats, einer sogenannten „Hilfsaufgabe“ (vgl. Polya (1951, Seite 122)), innerhalb des Begründungshorizonts der Vorlesung. „Math Consistency“ entspricht der Verwendung von „Hilfselementen“ (vgl. Polya (1951, Seite 128)). Auch hier gibt es Übergänge, die vergleichbar zum Modellierungskreislauf sind. Die Validierung wird hier aber eher in Form einer Ergebnisüberprüfung statt einer Überprüfung vor dem physikalischen Hintergrund statt.

2.3.7 Zwischenfazit zu den Ansätzen aus der amerikanischen Physikdidaktik

Die Ansätze nach Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) sind für die Untersuchungen relevant, da sie konkrete Strategien von Studierenden bei Aufgabenbearbeitungen beschreiben, welche physikalische und mathematischen Anteile beinhalten. Hierbei sind klare Analogien zwischen der Physik und der Elektrotechnik vorhanden, die für weitere Untersuchungen von Bearbeitungsprozessen eingesetzt werden können.

Kapitel 3

Forschungsfragen und methodologischer Ansatz: Durchgeführte Studien und Analysewerkzeuge

In diesem Kapitel wird aufbauend auf den am Anfang des Kapitels formulierten Forschungsfragen eine Methodologie entwickelt, mit deren Hilfe Antworten auf die Fragen gefunden werden können. Bei den Teilstudien wird jeweils erläutert, wie diese angelegt und schließlich ausgewertet wurden.

3.0.1 Forschungsfragen

In diesem Abschnitt werden die Leitfragen, welche am Ende des ersten Kapitels auf Seite 32 formuliert werden, mit den in vorangegangenen Kapitel vorgestellten Theorien zu Forschungsfragen für die weiteren Untersuchungen transformiert. Dabei wird auch darauf eingegangen, welche der in diesem Kapitel vorgestellten Konzepte jeweils zu den Analysen herangezogen werden.

1. In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?
 - 1.1. Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
 - 1.2. Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
 - 1.3. Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

Im Rahmen der ersten Forschungsfrage werden normative Analysen zu den Aufgaben durchgeführt. Zur Analyse wird zunächst eine Studi-Expert-Lösung in den fünf geschilderten Schritten erstellt. Damit soll die Forschungsfrage 1.1 beantwortet werden, wobei „mathematik-bezogen“ hier sowohl Tätigkeiten der Mathematisierung, also der mathematischen Beschreibung der in der Aufgabe vorliegenden Situation, als auch des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens, also der mathematischen Bearbeitung der Aufgabe, miteinschließt. Durch Forschungsfrage 1.2 wird anschließend beschrieben, welche Fehler und Problemstellen normativ zu erwarten sind, wobei hierzu einerseits die

Experteninterviews und andererseits die Studi-Expert-Lösungen herangezogen werden. Die letzte Unterfrage, Forschungsfrage 1.3, ordnet dann die Lösung in die Modellierungstheorie aus der Schuldidaktik ein.

2. Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?
 - 2.1. Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?
 - 2.2. Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.
 - 2.3. Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

Im Rahmen dieser Forschungsfrage werden tatsächliche Bearbeitungsprozesse der Studierenden untersucht. Das Ziel ist dabei zu untersuchen, ob die im Rahmen der Forschungsfrage 1.2 erhobenen Fehler und Problemstellen tatsächlich auftreten und ob es noch weitere gibt. Dabei soll auch darauf eingegangen werden, welche Unklarheiten sich in den Diskussionen der Studierenden während der Bearbeitungsprozesse zeigen. Mittels der Bearbeitungsprozesse sollen in Forschungsfrage 2.2 ähnlich wie in den Arbeiten Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) Strategien der Studierenden beschrieben werden, wie sie Aufgaben bearbeiten. In der letzten Unterfrage, Forschungsfrage 2.3, werden noch Unterschiede zwischen den Bearbeitungsprozessen der Experten aus den Experteninterviews und den Bearbeitungsprozessen der Studierendenpaare erfasst.

3. Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?
 - 3.1. Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?
 - 3.2. Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

Analog zu den qualitativen Analysen in Forschungsfrage 2 werden in Forschungsfrage 3.1 Fehler und Problemstellen in Klausurbearbeitungen untersucht. Mittels Forschungsfrage 3.2 sollen hierzu Häufigkeitsvergleiche zu den Fehlern und Problemstellen gefunden werden, welche sich in den beiden vorherigen Forschungsfragen ergeben haben.

Der folgende Unterabschnitt gibt einen Überblick über die Studien, die zur Beantwortung der Forschungsfragen durchgeführt wurden.

3.0.2 Ein Überblick über den methodologischen Ansatz

In diesem Kapitel werden die für die Analysen durchgeführten Studien sowie die Methoden, mit denen sie ausgewertet wurden, näher vorgestellt. In sämtlichen Studien wurden dieselben



Abbildung 3.0.1: Gesamtdarstellung des theoretischen Ansatzes der Untersuchungen

vier Aufgaben aus einer Zweitsemesterklausur zur Elektrotechnik verwendet. Diese stammt aus der Veranstaltung „GET-B“ an der Universität Paderborn, welche dort seit etlichen Jahren vom Institut für Leistungselektronik und Antriebstechnik (LEA) betreut wird. Diese baut auf der Veranstaltung „GET-A“ auf, welche jedoch von einem anderen Institut durchgeführt wird.

Die vier Aufgaben decken sowohl bezogen auf Elektrotechnik als auch auf Mathematik ein großes Spektrum an Themen ab. Sie sind nicht für die Analysezwecke entwickelt worden, sondern authentische Aufgaben bzw. Aufgabentypen, welche sich beruhend auf expliziten wie impliziten Kompetenzerwartungen über die verschiedenen Durchläufe der Veranstaltung entwickelt haben. Über Gespräche mit Experten und Master-Studierenden verschiedener Universitäten aus der Elektrotechnik ist außerdem sichergestellt, dass die Aufgaben typisch für Veranstaltungen zur Elektrotechnik im ersten Jahr sind. Zudem wurden auf diese Weise die quantitativen Untersuchungen (Stufe 3) mit einem $n > 90$ ermöglicht.

Um ein umfassendes Bild in den Analysen zu erhalten, wurde eine Kombination aus drei verschiedenen Stufen von Studien gewählt:

1. Experteninterviews zum Erhalt von einerseits einer ausführlichen Musterlösung mit Begründungen für jeden Schritt und andererseits von Informationen zu typischen Fehlern von Studierenden nach ihrem zweiten Fachsemester in Elektrotechnik, Lösungsalternativen, Validierungsstrategien sowie Variationsmöglichkeiten für die Aufgaben und Lernziele. Die Ergebnisse dieses Experteninterviews fließen in die sogenannte Studi-Expert-Lösung ein, welche im folgenden Abschnitt näher beschrieben wird.
2. Videostudien mit zwölf Paaren von Elektrotechnik-Studierenden in ihrem zweiten Fachsemester zur authentischen Beschreibung von Charakteristika studentischer Arbeitsprozesse und zur Identifikation von Unterschieden zur Ideallösung und auftretender Schwierigkeiten.
3. Auswertung von ca. neunzig Klausurbearbeitungen, welche in einer zweistündigen Klausur unter Klausurbedingungen angefertigt wurden, zur Bestätigung, Verfeinerung und Erweiterung der Ergebnisse aus den Experteninterviews und den Videostudien.

Die Analysen in Stufe 2 und 3 basieren auf der Studi-Expert-Lösung (SEL) zu den vier Aufgaben. Die Kombination der genannten Elemente wird in Abbildung 3.0.1 gezeigt. Dieses Kapitel stellt nun für die drei verschiedenen Stufen vor, wie die entsprechenden Studien durchgeführt wurden, welche inhaltlichen Überlegungen es dabei gab, welcher theoretische Ansatz zur Auswertung gewählt wurde und wie dieser für die vorliegende Situation angepasst wurde:

Abschnitt 3.1 beschreibt den Ansatz der Studi-Expert-Lösung (kurz SEL), welche das grundlegende Werkzeug für sämtliche weiteren Analysen ist. Neben einer normativen Aufgabenlösung, welche in ihrer Strukturierung auf den im Vorkapitel vorgestellten theoretischen Ansätzen von Blum und Leiß (2007) und Polya (1949) beruht, gehen in die Analysen die Ergebnisse des Experteninterviews mit ein. Auf diese Weise enthält die SEL Hinweise zu kognitiven Ressourcen, die während der Aufgabenbearbeitung benötigt werden sowie weitere theoretische Hinweise, die über die eigentlichen Bearbeitungsprozesse der Aufgabe hinausgehen.

Abschnitt 3.2 beschreibt die Durchführung der Experteninterviews, die mit Hilfe der sogenannten PARI-Methodik entwickelt wurden, welches eine drei-phasige teilstrukturierte Interviewtechnik ist. Sie wurden mit Hilfe von Methoden der inhaltlich-strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet und bilden einen der beiden Grundpfeiler der Studi-Expert-Lösung.

Anschließend wird in Abschnitt 3.3 gezeigt, wie aufbauend auf den Analysen und dem Experteninterview beispielhaft ein Auszug der Klausurlösung eines Aufgabenteils in den fünf in Abschnitt 3.1 beschriebenen Schritten zu einer Studi-Expert-Lösung ausgebaut wird.

In den Abschnitten 3.4 und 3.5 werden die Ansätze zur Analyse der Lösungsprozesse von Studierenden vorgestellt:

Abschnitt 3.4 beschreibt die Durchführung und Analyse der Bearbeitungsprozesse von Studierendenpaaren. Diese Bearbeitungsprozesse, bei denen die Studierenden laut denken sollten, wurden videographiert und vollständig transkribiert. Für die Analyse werden Methoden der explizierenden qualitativen Inhaltsanalyse eingesetzt, wobei hier die Studi-Expert-Lösung ein zentrales Hilfsmittel ist, und darauf aufbauend wird das Konzept der Niedrig Inferenten Analysen (NIA) präsentiert.

Abschnitt 3.5 beschreibt, wie die vorliegenden Klausurbearbeitungen, d. h. Bearbeitungsprodukte, zu den vier Elektrotechnik-Aufgaben untersucht wurden. Diese wurden gemäß eines selbstentwickelten Kategoriensystems neu kodiert, d. h. die ursprüngliche Korrektur wurde nicht übernommen, und dann mit Hilfe statistischer Methoden ausgewertet, wobei die Vorgehensweise evaluative, qualitative Inhaltsanalysen verwendet.

In Abschnitt 3.6 wird schließlich ein Überblick über den Datenbestand aus den verschiedenen Studien und über die Auswertungsmethode. Dann wird ein Überblick über die Struktur der kommenden Kapitel gegeben.

3.1 Die Studi-Expert-Lösung (SEL)

Studi-Expert-Lösungen sind in dieser Arbeit ein wesentliches Element und bilden die Basis für die Analysen der Bearbeitungsprozesse von Studierenden. Dieses schließt sowohl die qualitativen Studien (siehe Abschnitt 3.3) als auch quantitative Analysen (siehe Abschnitt 3.4)

mit ein. In diesem Abschnitt wird das Grundkonzept einer Studi-Expert-Lösung, im folgenden SEL, und ihr Erstellungsprozess näher vorgestellt. Ein weiteres Ziel der Erstellung der SEL ist die Entwicklung eines theoretischen Modells, welches auf den theoretischen Grundlagen (vgl. Kapitel 2) basiert, diese aber geeignet für universitäre Grundlagenveranstaltungen in Anwendungsfächern der Mathematik umdefiniert und Lösungen, d. h. Lösungsprozesse wie auch Lösungsprodukte, geeignet normativ strukturiert.

Die SEL ist eine normative Lösung zu Aufgaben aus universitären Anwendungsfächern der Mathematik (in den vorliegenden Untersuchungen konkret den „Grundlagen der Elektrotechnik“), welche zusätzliche Angaben zu Lösungsalternativen, typischen Fehlern und Schwierigkeiten sowie eine didaktische Rekonstruktion enthält. Hierzu enthält sie einerseits eine ausführliche Lösung, in der jeder Rechenschritt ausgeführt und jeder Lösungsschritt begründet ist. Dabei soll zu den einzelnen Teilen der Aufgabe mit Hilfe der SEL ein „Lösungsraum“ erfasst werden, welcher möglichst alle für Zweitsemester-Studierende des entsprechenden Anwendungsfachs verwendbaren Lösungswege enthält. Eine Gliederung der SEL erfolgt hier über theoretische Ansätze an der Schnittstelle von Mathematik und ihren Anwendungen, welche in Kapitel 2 erläutert wurden, d. h. Blum und Leiß (2007) und Polya (1949). Die SEL wird entsprechend der Lösungsprozesse in Phasen gegliedert. Zusätzlich hierzu sollen auch didaktische Motive sowie ein Aufgabenraum, welcher alle Aufgabentypen bzw. -varianten zu diesem Thema der Veranstaltung enthält, erfasst werden. Die letzten Punkte ergeben sich aus der auf Seite 79 vorgestellten Liste an Zusatzinformationen, welche über das Experteninterview gewonnen wurden. Der genaue Entstehungsprozess ist in einem Unterabschnitt dieses Abschnitts ab Seite 77 beschrieben.

Die Methode, welche in diesem Abschnitt beschrieben wird, wird zur Beantwortung der Forschungsfrage

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

und ihren drei Unterfragen

- Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

eingesetzt.

3.1.1 Grundkonzept der Studi-Expert-Lösung

Eine Studi-Expert-Lösung besteht aus zwei Dimensionen:

- der Dimension der Problemlösung selber
- der Dimension der verallgemeinernden theoretischen Einordnung der Problemlöseschritte im Hinblick auf Kompetenzerwartungen

Hierfür wurde ein spezielles Darstellungsformat in zwei Spalten entwickelt:

In der linken Spalte wird eine ausführliche idealtypische bzw. normative Lösung der Aufgabe beschrieben, in der sämtliche zur Lösung der Aufgaben notwendigen Zwischenschritte umgesetzt und erläutert werden. In der rechten Spalte wird der Lösungsprozess in Phasen unterteilt und diesen kognitiven Ressourcen sowohl bezogen auf Elektrotechnik als auch auf Mathematik zugewiesen. Darüber hinaus enthält die rechte Spalte Hinweise von Experten, welche im Rahmen der dritten Phase der halbstrukturierten Interviews erhoben wurden.

Das theoretische Fundament der Studi-Expert-Lösung bilden die beiden theoretischen Ansätze zur Gliederung von Lösungsprozessen bei Anwendungsaufgaben, die Mathematik einsetzen. Diese wurden in Kapitel 2 näher vorgestellt:

1. der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007)
2. das Problemlösen nach Polya (1949) sowie metakognitive Strategien nach Schoenfeld (1985)

Die Ansätze werden für die SEL neu interpretiert und integriert, um die spezifischen mathematischen Anforderungen in Elektrotechnikaufgaben angemessen theoretisch erfassen zu können. Hierzu wird der Modellierungskreislauf anders interpretiert, damit er besser zu den vorliegenden Problemlöseprozessen passt. Die Beschreibung dieser Anpassung erfolgt im kommenden Kapitel nach der Vorstellung der Studi-Expert-Lösung zu der dort vorgestellten Aufgabe, da die Uminterpretation eine Folge der Analyse dieser Aufgabe zu „Magnetischen Kreisen“ war. Außerdem werden Heuristiken nach Polya bei der Lösungsbeschreibung berücksichtigt, in dem jeweils die vier Phasen seines Problemlöseprozesses herangezogen werden, d. h., dass beispielsweise am Anfang der Bearbeitung eines Aufgabenteils verdeutlicht wird, was gegeben und was gesucht ist und am Ende auf verschiedene Möglichkeiten zur Validierung bzw. Rückschau eingegangen wird.

3.1.2 Vorgehensbeschreibung - Der Entstehungsprozess einer Studi-Expert-Lösung

Der Ausgangspunkt für die Erstellung der Studi-Expert-Lösung waren die Lösungen, welche Korrektoren aus der Elektrotechnik zur Klausurkorrektur zur Verfügung gestellt wurden. Diese sind eher kurz gefasst, da sie sich an Experten in der Elektrotechnik richten, die eine gute Kenntnis der zugrundeliegenden Theorie haben. Diese wurde in den fünf folgenden Schritten iterativ zu einer Studi-Expert-Lösung erweitert: Die ersten vier Schritte wurden nacheinander mit dem Fachwissen erstellt, welches normativ aus Vorlesungen sowie Übungen und Übungsmaterialien zur „GET-B“ und „Mathematik für Ingenieure“ bekannt ist. Dieses Wissen hatte der Interviewer bei den Experteninterviews, wobei sich aufgrund der Analysen in den ersten vier iterativen Schritten und den studentischen Bearbeitungsprozessen noch weitere Fragen und Vermutungen zu den Aufgabenlösungen ergaben. Das Experteninterview wurde dann dazu genutzt, einerseits diese Punkte zu klären und andererseits Metainformationen entsprechend der Liste auf Seite 79 sowie zusätzliches Fachwissen, was erst in höheren Semestern erworben wird, zu erfassen.

1. Ergänzung der Lösungen um Zwischenschritte (Spalte 1):
Das Ziel dieses Schrittes ist das Schließen von Lücken in den vorliegenden Lösungen.

Konkret werden hier bei den Rechnungen Schritte ergänzt, die beispielsweise verdeutlichen, wie die Einheiten der eingesetzten Größen zu der Einheit der Ergebnisgröße zusammengesetzt werden oder Zehnerpotenzen miteinander verrechnet werden.

2. Einbettung in die physikalische Theorie (Spalte 1):

In den vorliegenden Lösungen werden kaum Aussagen zu den elektrotechnischen Hintergründen bzw. den physikalischen Vorgängen gemacht, die in den Aufgaben betrachtet werden. Die Quelle hierfür war das Skript zur Veranstaltung, d. h. Böcker (2012). Für ein vollständiges Verständnis insbesondere von Fehlvorstellungen in den studentischen Bearbeitungsprozessen müssen diese jedoch ergänzt werden.

3. Gliederung der Aufgaben und Lösungen nach den theoretischen Ansätzen (Spalte 1):

Die Lösungen der Aufgaben werden in Teilschritte zerlegt und damit grob-strukturiert. Derartige Teilschritte können beispielsweise das Aufstellen einer Formel und die Berechnung einer Größe mit Hilfe der aufgestellten Formel sein. Die Phasen des Problemlösens nach Polya (1949) ermöglichen eine feinere Struktur, angefangen mit „Was ist gegeben?“ und „Was ist gesucht?“ in Phase 1.

4. Ergänzen der kognitiven Ressourcen (Spalte 2):

Die durch die bisherigen erhaltenen Lösungen werden in diesem Schritt um die kognitiven Ressourcen ergänzt, welche in Bearbeitungsprozessen notwendig sind.

5. Durchführung der Experteninterviews (Spalte 1):

In diesem fünften Schritt werden die Aufgaben ohne Lösungen den Experten vorgelegt und es wird – wie im Vorabschnitt beschrieben – ein halbstrukturiertes Interview nach PARI-Methodik durchgeführt, vgl. Seite 89. Dieses geht folgendermaßen in die entwickelte Lösung mit ein: Die Phase 1 und 2 der PARI-Methodik dienen dazu, den Rechenweg zu vervollständigen. Fehlende Schritte und Überlegungen, die von den Experten genannt wurden, wurden in der ersten Spalte ergänzt, wobei die Strukturierung mittels Polya-Lösungsphasen direkte Bezüge zur zweiten Phase der PARI-Interviews aufweist. Desweiteren konnte der Interviewer auf diese Weise Fragen und Vermutungen klären, welche sich durch die Analyse der Aufgaben und der Bearbeitungsprozesse ergeben hatten. So können die in Phase 2 erhobenen Informationen direkt bei „Was ist gegeben?“ etc. zugeordnet werden. Außerdem dienen die Informationen, welche in Phase 2 expliziert wurden, den roten Faden der Aufgabe zu mehr zu explizieren und Bezüge zwischen den Unteraufgaben herzustellen. Phase 3 ermöglicht das Erfassen von Alternativlösungen und Abzweigungen in den Lösungswegen.

Für die zweite Spalte der Studi-Expert-Lösung können Ergebnisse aus allen drei PARI-Phasen eingesetzt werden. In Phase 1 wird eine Strukturierung der Aufgabe deutlich, welche bei der Bestimmung der einzelnen Lösungsphasen des Lösungsprozesses nützlich ist. Phase 2 ermöglicht es, nähere Informationen zu den einzelnen Lösungsphasen zu erhalten, da die vier Fragenkomplexe zusätzliche, standardisierte Informationen liefern. Phase 3 bildet dann ein zentrales Element für die zweite Spalte der Studi-Expert-Lösung: Einerseits können durch diese Phase typische Fehler und Hürden angegeben werden. Andererseits können Anmerkungen zu den Lösungsprozessen ergänzt werden, welche unter „Aus Expertensicht“ berücksichtigt werden und somit einen tieferen Einblick in die Lösungen geben.

Mit Hilfe dieser fünf Schritte sollen tiefere Informationen zu der Aufgabe gesammelt werden, die über das Wissen eines Zweitsemesters bzw. jemanden, der sich in das Gebiet neu eingearbeitet hat, hinausgehen. Die Klausurlösungen werden hier iterativ erweitert, wobei die ersten vier

Schritte ohne den Experten unternommen werden. In jedem Schritt wird die SEL gemäß der Angaben zu den Schritten ergänzt, d. h. zunächst wurden in der Klausurlösung Zwischenschritte ergänzt. Nach dem dieser Schritt durchlaufen war, wurden die physikalischen Hintergründe zu der Aufgabe unter Verwendung des Skripts ergänzt. Diese wurden im nächsten Schritt nach den theoretischen Ansätzen gegliedert und im darauffolgenden um kognitive Ressourcen, die bei der Bearbeitung wichtig sind, ergänzt. Zu diesem Zeitpunkt wurde der Experte vom dem Ersteller der SEL interviewt, der auf diese Fragen zu der Bearbeitung klären konnte.

Die weiteren in Kapitel 2 dargestellten Theorien zu metakognitiven Strategien wie Planung und Überwachung oder dem Problemlösen in der Physik, d. h. Tuminaro und Redish (2007) bzw. Bing (2008), spielen bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösung keine Rolle, da die SEL eine normative Lösung ist und die drei erwähnten Ansätze reale Strategien beschreiben und daher erst bei der Betrachtung von realen Lösungsprozessen relevant werden.

3.2 Experteninterviews mit Wissenschaftlichen Mitarbeitern aus der Elektrotechnik

Der Ausgangspunkt der Analysen waren Klausuraufgaben sowie deren Lösungen, welche von dem Institut, welches die Elektrotechnik-Veranstaltung „GET-B“ betreut, zur Klausurkorrektur zur Verfügung gestellt worden waren. Diese enthielten ausschließlich Rechenwege einschließlich kurzer Anmerkungen, teilweise auch nur Endergebnisse, ohne Argumente für die verwendeten Lösungswege zu liefern. In den folgenden beiden Kapiteln sind diese Lösungen in einer unveränderten Form jeweils im ersten Abschnitt dargestellt. Wegen ihrer Kürze sind sie unzureichend für die Analysen der Bearbeitungsprozesse in den Videostudien sowie -produkte aus den gescannten Klausuren.

Die Methode, welche in diesem Abschnitt beschrieben wird, dient zur Ergänzung der normativen Lösungen zu den Aufgaben, also der Studi-Expert-Lösung. Die Experteninterviews werden dabei bei den folgenden Unterfragen der Forschungsfragen eingesetzt:

- Forschungsfrage 1.1: Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Forschungsfrage 1.2: Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Forschungsfrage 2.3: Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

eingesetzt.

Für die Experteninterviews wurde ein teilstrukturiertes Interview entwickelt, mit dessen Hilfe einerseits eine ausführliche Aufgabenlösung inklusive den begleitenden Kognitionen und Begründungen für die Vorgehensweisen erfasst werden sollen, welche eine Grundlage für die weiteren Analysen bilden, wozu im Folgenden die PARI-Methodik (siehe Unterabschnitt 3.2.3) verwendet wird. Andererseits sollen zusätzliche Informationen zu der Aufgabe erhoben werden. Zu diesen zusätzlichen Informationen, welche zur besseren Orientierung im folgenden als Exp-I1 bis Exp-I6 bezeichnet werden, zählen

- Exp-I1 der Lösungsraum der Aufgaben, d. h. Lösungsalternativen aus der Elektrotechnik bzw. der Mathematik, wobei damit auch solche gemeint sind, die Zweitsemestern zu diesem Zeitpunkt des Studiums noch nicht geläufig sind,
- Exp-I2 aus Übungen und Klausuren bekannte typische Fehler von Zweitsemesterstudierenden,
- Exp-I3 Validierungsstrategien für die Ergebnisse,
- Exp-I4 Variationsmöglichkeiten für Aufgaben zu dem Themengebiet der Aufgabe, sowie
- Exp-I5 die Motive beim Stellen einer solchen Aufgabe,
- Exp-I6 die zu überprüfenden Kompetenzen und das zu überprüfende Wissen bei den Studierenden.

Die Experten in den Studien waren Wissenschaftliche Mitarbeiter von dem Institut, welches die Klausur gestellt hat. Sie haben alle ihr Diplomstudium in Elektrotechnik erfolgreich abgeschlossen und waren schon mit der Gestaltung des Übungsbetriebs in der „GET-B“ betraut.

Vor der Durchführung des Experteninterviews hatte sich der Interviewer bereits intensiv mit der Klausurlösung, welche der Startpunkt für die Analysen war, auseinandergesetzt und konnte so gezielt Fragen stellen, um Vermutungen aus der vorigen Aufgabenanalyse überprüfen zu können. In der Aufgabenanalyse hatte er die Klausurlösungen um Zwischenschritte ergänzt, die Aufgabe in die physikalische Theorie eingebettet, die Aufgabe nach den beschriebenen theoretischen Ansätzen gegliedert und kognitive Ressourcen bei der Bearbeitung ergänzt. Auf diese Weise deckte diese Lösung vor dem Experteninterview die Kenntnisse guter Elektrotechnik-Studierender nach Beendigung ihres zweiten Semesters ab, aber es fehlt noch die Perspektive von Experten, die sich mit vertieften Fachwissen mit solchen Typen von Aufgaben auseinandersetzen. Details zu der Vorgehensweise finden sich in der Vorgehensbeschreibung zur Erstellung der Studi-Expert-Lösung ab Seite 77.

3.2.1 Entwicklung eines Leitfadens zur Analyse von Experteninterviews

Das Ziel war es, Expertenkognitionen aufzuzeichnen. In diesem Abschnitt wird zunächst die Entwicklung eines Leitfadens für die Experteninterviews unter Verwendung der sogenannten PARI-Methodik nach Hall et al. (1995) vorgestellt. In den folgenden Unterabschnitten wird zunächst beschrieben, wie die Studien durchgeführt wurden, und anschließend, wie die Auswertung der Studien ablief.

Die Experten in den Studien wurde unter Verwendung eines teilstrukturierten Interviewleitfadens, welcher in diesem Abschnitt näher vorgestellt wird, zur Erstellung einer ausführlichen „Musterlösung“ mit zusätzlichen Informationen zur Aufgabe interviewt. Als Grundlage für das Experteninterview wurde die sogenannte PARI-Methodik gewählt, welche in Hall et al. (1995) erläutert wird:

Die PARI-Methodik wurde laut Hall et al. (1995, S. 1ff.) im Rahmen des „Basic-Job-Skills“-Programm der US-Air-Force entwickelt, um eine effektive Anleitung zur Bearbeitung von Problemlöseaufgaben zu geben. Hierbei werden kognitive Prozesse und Strukturen analysiert, welche zu dem Erfolg beim Aufgabenlösen beitragen. Es wurden Studien mit über 200 Air-Force-Technikern durchgeführt, deren Hauptaufgabe Störungserkennung und -behebung ist. Über

die PARI-Methodik ergibt sich eine Struktur für den Erwerb des Wissens, welcher kognitive wie auch andere Komponenten miteinbezieht.

In Hall et al. (1995, S. 32ff.) wird die Vorgehensweise beim Interview näher beschrieben: Die PARI-Methodik verwendet lautes Denken und schließt verschiedene Aufgabenanalyse-Techniken mit ein. Das Ziel der PARI-Methodik ist eine breite und tiefe Untersuchung von Problemlöseprozessen. Dieses führt auf halbstrukturierte Interviews, in denen Experten Probleme in realistischen Problemlösesituationen bearbeiten. Ein Interviewer verwendet standardisierte Interviewfragen, um systematisch die Experten während und nach der Lösungserzeugung zu befragen. Nach der Lösung werden die Experten gebeten, die Lösungen in einer Reihe von Durchgängen zu elaborieren. Dort werden sie explizit befragt, welche Faktoren oder Gründe sie für die Problemlöseentscheidungen während des Lösungsprozesses durchdacht haben. Auf diese Weise ergeben sich differenzierte (aber strukturierte) Protokolldaten, die sowohl die Lösungsschritte als auch die unterstützenden Gründe für komplexe Probleme liefern. Mit diesen detaillierten Protokolldaten können genaue Ziele für die tiefere Anleitung wie auch Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Bereichen bzgl. allgemeinerer Fähigkeiten identifiziert werden. Damit können laut Hall et al. (1995) die Ergebnisse auch dafür verwendet werden, um Curricula für Lernumgebungen zu entwickeln, Fähigkeitsentwicklungen zu beschleunigen und flexible, anpassungsfähige Wissensbasen zu fördern.

Prozeduren, welche mit der PARI-Methodik untersucht werden können, treten in situierten Problemlöseabläufen auf, in denen Experten ihr Wissen bei bestimmten Problemkontexten und Aufgabenanforderungen einsetzen. Bezogen auf solche Situationen erforschen die Interviewer die Gründe für die Handlungen, welche die Experten ausführen, und die Interpretationen der Experten für die Ergebnisse ihrer Handlungen. Dadurch werden die Begründungsprozesse deutlich, welche zur Problemlösung führen. Die Erfassung dieser Entwicklungen ist Teil des halbstrukturierten Interviews, welches entwickelt wurde, um das Wissen und die Fähigkeiten im Kontext ihrer Verwendung zu zeigen.

Bei den Interviews wird eine Struktur verwendet, die Handlungen (*Actions*), Auslöser für Handlungen (*Precursor*), Ergebnisse (*Results*) und Interpretationen der Ergebnisse (*Interpretation*) zu unterscheiden und auf diese Weise näher erforschen zu können.

Das Interview beginnt damit, dass der Experte die Aufgabenstellung liest und diese für sich interpretiert. Anschließend werden die verschiedenen Phasen Action, Precursor, Result und Interpretation durchlaufen, wie es in Abbildung 3.2.1 dargestellt ist.

In dem nächsten Schritt spezifiziert der Experte für jeden erfolgreichen Lösungsschritt eine Handlung, einen kognitiven Auslöser für die Handlung und eine Interpretation des Ergebnisses. Dadurch soll sichergestellt werden, dass nicht nur klargestellt wird, wie das Problem gelöst wurde, sondern auch warum es auf diese spezielle Weise gelöst wurde.

Hierbei wird als Action (Handlung) eine Operation betrachtet, die ein Problemlöser an einem System durchführt (z. B. das Durchführen einer Messung) oder eine Operation, die dazu dient Informationen über das System zu sammeln (z. B. das Nachvollziehen von Schaltbildern). In beiden Fällen dient die Action dazu, ein bestimmtes Resultat zu erzielen und stellt einen Test seiner Hypothese dar. Der Auslöser der Handlung (Precursor) liefert eine Rechtfertigung oder ein Ziel für die Handlung. Daraufhin erhält der Interviewer ein Ergebnis und eine Interpretation des Ergebnisses bezogen auf die zugrundeliegende Hypothese. Die Interpretation soll verdeutlichen, was das Ergebnis dem Experten über den Fehler aussagt, welche Systemkom-

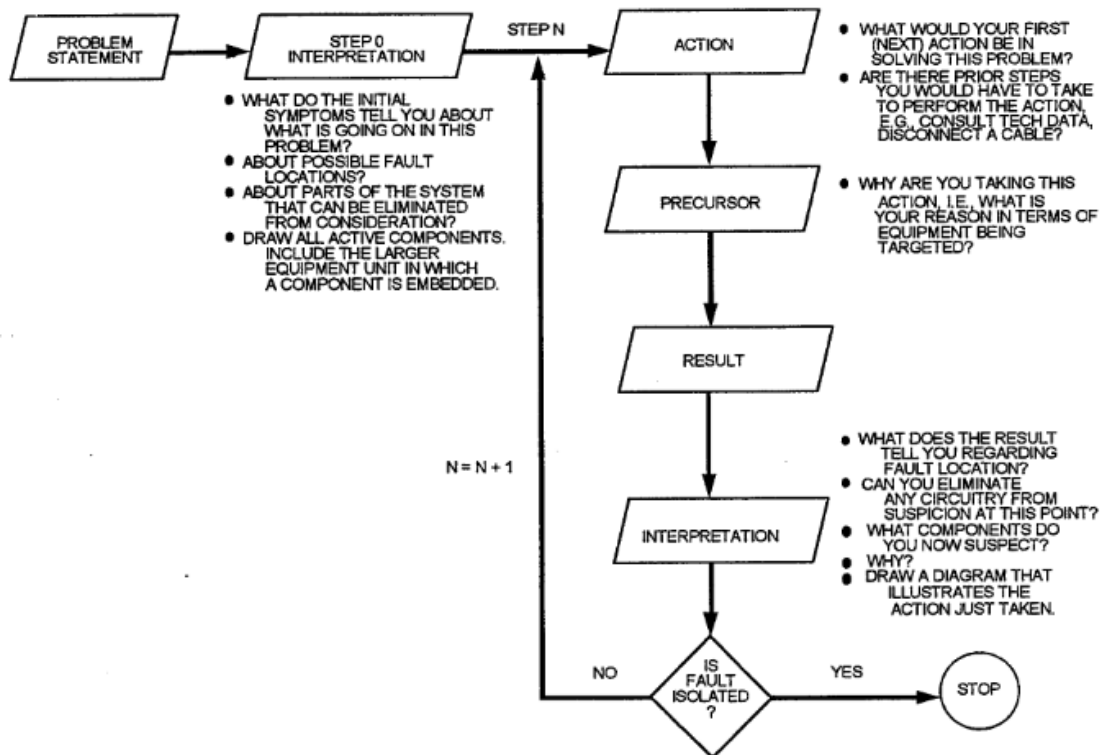


Abbildung 3.2.1: PARI-Interviewstruktur nach (Hall et al., 1995, S. 47)

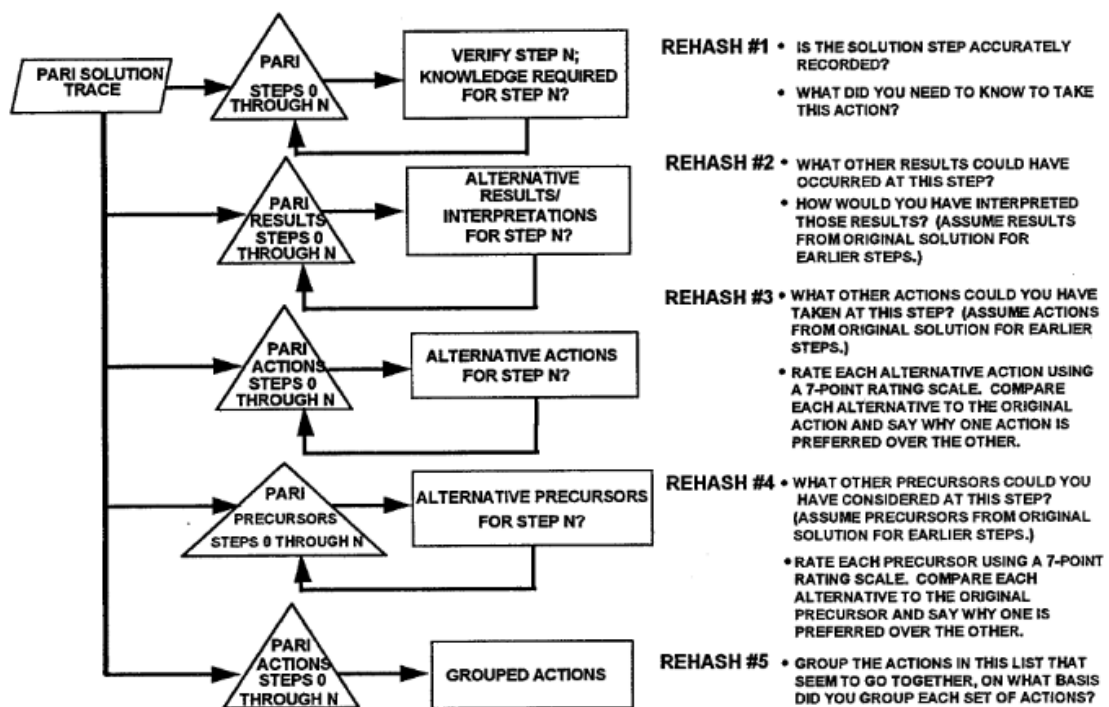


Abbildung 3.2.2: PARI-Rekapitulationsphase nach (Hall et al., 1995, S. 49)

ponenten ausgeschlossen oder zurückgestuft werden können und was der Experte jetzt als Hauptursachen betrachtet und aus welchen Gründen.

Ab Hall et al. (1995, S. 48) werden Schritte zur Rekapitulation der Lösungsschritte bei der PARI-Methodik vorgestellt, welche der Interviewer durchführt und in denen der Experte seine ursprüngliche Lösung verifiziert und elaboriert. Dieses ist in Abbildung 3.2.2 dargestellt.

1. Verifikation des Lösungsweges: Das Ziel dieser Rekapitulation ist die Verifikation des Lösungsweges, in dem der Experte dem Interviewer versichert, dass die Dokumentation des Interviewers richtig ist. Dadurch können Mehrdeutigkeiten klargestellt werden oder auch Diagramme klarer gezeichnet und beschriftet werden. Außerdem kann der Interviewer nach weiteren Erklärungen für beliebige Elemente fragen, welche im Lösungsweg nicht vollkommen expliziert wurden.

Die folgenden Rekapitulationen dienen zum Erweitern des kognitiven Modells und seiner Aussagekraft für Instruktionen:

2. Alternative Lösungen/ Interpretationen: In diesem Schritt soll der ganze Umfang der Hypothesen behandelt werden, welche von dem Experten in jedem Schritt durchdacht wurden. Für jeden Lösungsschritt soll der Problemlöser weitere mögliche Folgen der unternommenen Handlungen nennen und jede Folge interpretieren. Jedes mögliche Ergebnis bestätigt oder widerlegt ein Element der Menge der Hypothesen des Experten.
3. Alternative Handlungen: In diesem Schritt sollen alternative Handlungen dem Experten zur Erforschung der Ausrüstung entlockt werden, jeweils unter Verwendung der Ziele, die sich durch jeden Precursor in dem ursprünglichen Lösungspfad ergeben haben. Der Experte soll sämtliche Handlungen nennen, die er als angemessen ansieht, um das Ziel, welches im Precursor formuliert ist, zu erreichen. Am Ende soll der Experte eine 7er-Likert-Skala (von „viel schlechter“ bis „viel besser“) verwenden, um jede alternative Prozedur mit der verwendeten Prozedur zu vergleichen.
4. Alternative Auslöser für Handlungen: Diese Rekapitulation ist dazu entwickelt worden, dem Experten alternative Ziele und Evaluierungen zu entlocken, die er bedacht hat, während er den Plan für die Untersuchung der Ausrüstung entwickelt hat. Auf diese Weise soll expliziert werden, warum sich der Problemlöser auf ein bestimmtes Ziel (oder eine Komponente der Ausrüstung) fokussiert hat. Der Experte wird gebeten, sämtliche Auslöser für Handlungen zu nennen, die er als passend bezüglich der vorherigen Schritte angenommen hat. Analog zu 3. soll auch hier der Experte die Auslöser für Handlungen auf einer 7er-Likert-Skala vergleichen.
5. Gruppierung von Handlungen: In dieser Rekapitulation sollen Gruppierungen von Handlungen höherer Ordnung entlockt werden. Auf diese Weise kann bei Lösungen in einem höheren Abstraktionslevel erforscht werden, welche Gemeinsamkeiten im Problemlösen zwischen verschiedenen Experten bzw. Problemen sie haben. Hierzu wird dem Experten eine Liste der Handlungen vorgelegt, die er in seinem ursprünglichen Lösungsweg verwendet hat. Dann soll der Experte die Handlungen gruppieren und die Grundlage für das Gruppieren bestimmter Handlungen erläutern. Damit sollen sich größere Abschnitte des Plans des Problemlösers für die Untersuchung zeigen.

Auf diese Weise erhält man eine Menge an Lösungen, die als Basis für weitere Analysen und Interviews dienen können. Zu der Auswertung der Interviews werden in Hall et al. (1995) keine Angaben gemacht. In dieser Arbeit werden hierzu inhaltsanalytische Methoden, konkret die die inhaltlich-strukturierende, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010), verwendet.

3.2.2 Anpassung der PARI-Methodik auf die vorliegende Situation

Zur Entwicklung des halbstrukturierten Leitfadens, der in den Experteninterviews eingesetzt wurde, wurden die Schritte beim ersten PARI-Durchlauf sowie aus den wiederholten Durchgängen in der PARI-Methodik, der sogenannten PARI-Rekapitulationsphase, in drei Phasen gegliedert, welche in diesem Abschnitt näher erläutert werden. Eine Anpassung der PARI-Methodik war notwendig, da im Gegensatz zu den Studien in Hall et al. (1995) in diesen Studien die PARI-Methodik in einem didaktischen Kontext eingesetzt wird und dadurch insbesondere Veränderungen in der abschließenden Phase notwendig sind, welche nun näher erläutert werden. Zunächst wird hier kurz auf die Zuordnung der Phasen eingegangen, wobei die PARI-Rekapitulationsphase in zwei Phasen untergliedert wird, welche als Phase 2 und 3 bezeichnet sind. Hierbei werden im folgenden Verbindungen zu den auf Seite 79 genannten zusätzlichen Informationen in der Aufgabe aufgebaut:

- Phase 1: In dieser Phase wird der Experte – entsprechend der ersten Phase im PARI-Durchlauf – aufgefordert, die Aufgaben zu lösen und dabei laut zu denken, um auf diese Weise zusätzliche Erläuterungen zu seiner Niederschrift zu geben. Aufgrund der Aufgabenstruktur, welche durch die Klausuraufgabe vorgegeben ist, entfallen hier weitere strukturierende Eingriffe.
- Phase 2: In der ersten „Unterphase“ der PARI-Rekapitulationsphase gehen der Experte und der Interviewer die Aufgabenbearbeitung durch, um den Lösungsweg zu verifizieren und Unklarheiten zu beseitigen. Dabei stellt der Interviewer Fragen an den Experten zur Begründung des Handelns, zum Vorgehen im Lösungsprozess und zur Interpretation beantwortet werden.
- Phase 3: In der zweiten „Unterphase“ der PARI-Rekapitulationsphase finden die oben als „Erweiterung des kognitiven Modells“ bezeichneten Teile der PARI-Rekapitulationsphase statt. In dieser Phase gab es die größten Anpassungen, da in unseren Studien die PARI-Methodik nicht zum „Trouble-Shooting“ bzw. der Fehleranalyse eingesetzt werden soll, sondern zur Beantwortung von Fragen in didaktischen Kontexten. Hierzu werden die Fragen in dieser Phase kontextbezogen auf die vorliegenden Elektrotechnik-Aufgaben angepasst und haben das Ziel, didaktische Hintergründe zu der Aufgabe zu erfassen.

Die beiden ersten Phasen sind ähnlich zu den Phasen aus der vorgestellten PARI-Methodik. Die dritte Phase wurde ergänzt, um Prüfungsaufgaben in Bildungskontexten untersuchen zu können. Erläuterungen zu diesen Zuordnungen finden sich in dem nächsten Abschnitt, der die Phasen näher vorstellt.

Die drei Phasen der PARI-Methodik

Zur Erstellung der Lösung wurden Experteninterviews basierend auf der PARI-Methodik durchgeführt, welche in geeigneter Weise für die betrachtete Situation angepasst wurde. Die drei Phasen, die bei der PARI-Methodik durchlaufen werden, werden zusammenfassend wie in Tabelle 3.2.1 dargestellt. Der folgende Unterabschnitt zeigt, nach welchem Leitfaden die halbstrukturierten Interviews durchgeführt wurden.

Phase 1:	Der Experte bearbeitet die Aufgabe und erläutert seine Tätigkeiten mithilfe des lauten Denkens.
Phase 2:	Die Aufgabenbearbeitung wird zusammen mit dem Versuchsleiter durchgegangen, um die Gründe für das Vorgehen und die verwendeten Ressourcen zu rekonstruieren.
Phase 3:	Dem Experten werden Fragen zu den fachlichen und didaktischen Hintergründen der Aufgabe gestellt.

Tabelle 3.2.1: Phasen in der angepassten Variante der PARI-Methodik

Phase 1 (Aufgabenbearbeitung des Experten)

In diesem Abschnitt wird der Experte aufgefordert, die Aufgabe selbst zu lösen, d. h. es wird ihm - genauso wie den Studierenden in den Studien - zunächst ausschließlich die Aufgaben, aber keine Lösung zur Verfügung gestellt. Dieses entspricht der ersten Phase des PARI-Interviews, vgl. Seite 84 bzw. Hall et al. (1995, S. 46). Das Ziel dieser Phase ist es, dass der Experte die Aufgabe unter authentischen Bedingungen löst, was insbesondere bedeutet, dass die Bearbeitung (und somit die Erhebung der Daten) direkt mit dem Umdrehen des Aufgabenblatts beginnt. Auf diese Weise muss sich der Experte selbst mit der Aufgabe auseinandersetzen und wird an die Hürden erinnert, denn es müssen alle Lösungsschritte durchgeführt werden. Dadurch soll eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Aufgabe stattfinden und vor allem auch alle Vorüberlegungen vor der eigentlichen Bearbeitung der Aufgabe, die ansonsten implizit bleiben würden, erfasst werden. Man kann außerdem erste Aufschlüsse darüber erhalten, welche Aspekte bei der Lösung dem Experten besonders wichtig erscheinen. Es zeigt sich außerdem, wie der Experte im Lösungsprozess die Aufgabe untergliedert und sie auf diese Weise für sich in kleineren Schritten als den Aufgabenteilen strukturiert.

Am Beginn der Studie wird dem Experten eine Elektrotechnik-Aufgabe vorgelegt, wie sie in Klausuren vorkommt. Dann wird ihm die Instruktion gegeben:

„Lösen Sie bitte die folgende Aufgabe. Hierbei ist es für uns wichtig, dass Sie während der Bearbeitung laut denken, wenn Sie zusätzliche Erläuterungen geben wollen.“

Während dieser Phase soll keine Unterbrechung des Lösungsflusses durch den Interviewer stattfinden. Durch diesen Schritt sollen insbesondere Schritte identifiziert werden, die der Experte zwar durchführt, aber nicht niederschreibt bzw. in einer Musterlösung angibt. Dadurch soll herausgefunden werden, welche Aspekte der Aufgabenlösung dem Experten wichtiger sind als andere.

Phase 2 (Durchgehen der Aufgabenbearbeitung zur genaueren Beschreibung des Vorgehens):

In dieser Phase soll die Aufgabenbearbeitung Schritt für Schritt durchgegangen werden. Es wird also keine neue Lösung generiert, sondern die in Phase 1 erstellte Lösung soll ergänzt werden. Fragen auf einer Meta-Ebene soll es hier noch nicht geben; diese folgen in Phase 3. Hierdurch soll ermittelt werden, welches Vorwissen und welche Materialien hinzugezogen werden und was sonst noch bei der Bearbeitung berücksichtigt werden muss. Diese Phase entspricht der Rekapitulationsphase in der PARI-Methodik, vgl. Seite 82 bzw. Hall et al. (1995, S. 48).

Das Ziel der Fragen ist zunächst eine Vervollständigung der schriftlichen Lösung, welche in Phase 1 generiert wurde. Zusätzlich sollen eventuelle Unklarheiten beseitigt werden. Für jeden Schritt werden standardisiert (siehe unten) bestimmte Fragenkomplexe durchlaufen, damit man bei allen Aufgabenteilen dieselben Informationen hat. Diese Fragenkomplexe sind:

- Fragen zur Begründung: Erhebung der Gründe und Ziele des Handelns
- Fragen zum Vorgehen: Beschreiben von Verbindungen zwischen den einzelnen Aufgabenteilen verdeutlichen, Erfassen der verwendeten Informationen
- Fragen zur Interpretation: Deutungen der Ergebnisse
- Allgemeinere Fragen: Erfassung des „Mitgedachten“, falls der Experte seine Schritte zu wenig erläutert

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Phase liegt in der Beantwortung von Fragen und Vermutungen, welche beim Interviewer durch die ersten vier Iterationen bei der Erstellung der SEL, vgl. Seite 77, sowie durch die Bearbeitungsprozesse der Studierenden entstanden sind. Zur Einleitung dieser Phase wird dem Experten folgende Instruktion gegeben:

„Ich möchte nun mit Ihnen Ihre Aufgabenbearbeitung durchgehen, um die näheren Schritte zu klären. Um herauszufinden, wie ein Experte bei der Aufgabenbearbeitung vorgeht, ist es für uns von großem Interesse zu wissen, welche Schritte Sie im einzelnen unternehmen, weshalb Sie diese Schritte unternehmen, zu welchen Ergebnissen Sie dabei kommen und wie Sie diese Ergebnisse verwerten. Wenn Sie ein bestimmtes Ergebnis erhalten, sollten Sie uns sagen, wie Sie dieses Ergebnis interpretieren.“

Die Fragen lassen sich in vier Fragenkomplexe aufteilen, welche hier mit Beispielfragen vorgestellt werden:

1. Fragen zur Begründung:
„Weshalb unternehmen Sie diesen Schritt?“, „Aus welchem Grund tun Sie dies?“, „Welches Ziel verfolgen Sie damit?“
2. Fragen zum Vorgehen:
„Was tun Sie als nächstes?“, „Wie gehen Sie jetzt/dabei vor?“, „Welche Schritte sind als nächstes zu tun?“, „Wie wollen Sie diese Frage beantworten?“, „Welche Informationen verwenden Sie in diesem Schritt?“
3. Fragen zur Interpretation:
„Was bedeutet dieses Ergebnis?“
4. Allgemeine Fragen:
„Welche Gedanken gehen Ihnen gerade durch den Kopf?“, „Was überlegen Sie gerade?“, „Welche Frage stellt sich Ihnen jetzt?“

Phase 3 (Didaktische Rekonstruktion):

In dieser letzten Phase des PARI-Interviews sollen zusätzliche Informationen zu dem Aufgabentyp gesammelt werden, welche in den folgenden Aspekten zusammengefasst werden: Alternativen bei Lösungen, Abkürzungen bei den Lösungswegen, Schwierigkeiten der Studierenden, typische Fehler und Probleme sowie spezifische Fragen zur konkreten Aufgabe. Diese Phase 3 entspricht den Rekapitulationen zur Erweiterung des kognitiven Modells, vgl. Seite 83 bzw. Hall et al. (1995, S. 49ff.). Die vorkommenden Fragen zielen auf den Erhalt der Informationen ab, welche gemäß den Ausführungen zur didaktischen Rekonstruktion auf Seite 79 durch das Experteninterview gewonnen werden sollen.

In den bisherigen Phasen wurden ausschließlich Informationen zu einer konkreten Aufgabe erfasst, wodurch insbesondere mittels Phase 2 Kompetenzerwartungen erfasst werden können. Das Ziel der dritten Phase ist es, allgemeinere Informationen zu dem Aufgabentyp zu erhalten, womit alle Überlegungen gemeint sind, die ein Experte bzw. insbesondere der Aufgabensteller bei der Entwicklung der Aufgabe bedacht hat. Mit Hilfe dieser Fragen soll eine didaktische Rekonstruktion der Aufgabe stattfinden. Grob lassen sich diese Fragen in zwei Komplexe unterteilen, die den zusätzlichen Informationen entsprechen, welche als Exp-I1 bis Exp-I6 auf Seite 79 vorgestellt wurden:

1. Erfassung des Lösungsraums der Aufgaben sowie üblicher Hürden für Zweitsemester (konkrete Beispiele der Fragen folgen unten):
 - Alternativlösungen: In dieser Kategorie wird erfasst, wie die Aufgabenteile einerseits mit dem normativen Kenntnisstand eines Zweitsemesters (sowohl bezogen auf Elektrotechnik als auch auf Mathematik) anders gelöst werden können. Dabei soll auch untersucht werden, ob es bessere oder schlechtere Lösungswege gibt, z. B. durch die Verwendung anderer Informationen bei der Bearbeitung. Ein weiterer Punkt ist die Erfassung verschiedener Lösungsmöglichkeiten innerhalb eines Lösungsschritts.
 - Fehler: Diese Kategorie dient der Erforschung typischer Fehler von Studierenden nach ihrem ersten Studienjahr. Konkreter geht es um Fehler im Ansatz, leichte oder schwere Lösungsschritte für Zweitsemester, häufiger übersehene Informationen oder Schwierigkeiten im innermathematischen Bereich.
 - Validierungsmöglichkeiten: Mit Fragen zu dieser Kategorie sollen Überprüfungsmöglichkeiten für Formeln und Ergebnisse gesammelt werden. Dabei gibt es einerseits eine A-Priori-Validierung durch mögliche Abschätzungen. Andererseits gibt es auch eine Validierung a posteriori unter Verwendung von verschiedener Überprüfungsmöglichkeiten am Ergebnis, welche durch das Interview erfasst werden sollen.
2. Motive und von Studierenden erwarteten Kompetenzen beim Stellen einer solchen Aufgabe:
 - von Studierenden erwartete Kompetenzen: Im Bereich „Kompetenzen“ sollen Gründe für das Stellen der Aufgabe erhoben werden. Dabei ist die Leitfrage, aus welchem Grund die Aufgabe in dieser Form gestellt wurde und was die Studierenden aus der Aufgabe mitnehmen sollen.
 - Variationen: Dieser Abschnitt des Interviews soll die Variationsmöglichkeiten für die gesamte Aufgabe erfassen. Es soll der Frage nachgegangen werden, wie man Aufgaben zu einem bestimmten Themengebiet aus den Grundlagen der Elektrotechnik

noch variieren kann und welche Einflüsse das auf die Lösbarkeit, insbesondere für Zweitsemester, hätte.

Hierzu gibt es folgende Instruktion:

„Ich möchte mit Ihnen nun losgelöst von Ihrer Bearbeitung über die Aufgabe sprechen. In diesem Teil möchte ich konkrete Fragen stellen, die uns noch zu einem umfassenderen Bild verhelfen sollen, welche Kompetenzen bei der Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden.“

Passende Fragen zur Erfassung des Lösungsraums der Aufgaben sowie üblicher Hürden für Zweitsemester in diesem Abschnitt sind die folgenden, wobei im Anschluss an die Liste erläutert wird, in welcher Weise sie innerhalb des Interviews eingesetzt wurden:

- „Kann man die Aufgabe bzw. den Aufgabenteil auf eine andere Weise bearbeiten?“
- „Gibt es mit Wissen aus höheren Semester effizientere Möglichkeiten, diese Aufgabe zu bearbeiten?“
- „Gibt es Lösungswege, die man im vornherein als wenig erfolgversprechend bei dieser Aufgabe bezeichnen kann?“
- „An welchen Punkten hat man die Möglichkeit, unterschiedlich vorzugehen?“
- „Welche Fehler würden Studierende typischerweise am Ende des zweiten Semesters bei der Aufgabe machen?“
- „Gibt es weitere Informationen, welche alternativ verwendet werden können?“
- „Welche Informationen übersehen Studierende am Ende des zweiten Semesters häufig? Welche Schritte fallen ihnen schwer?“
- „Treten bei der Aufgabe bzw. dem Aufgabenteil innermathematische Schwierigkeiten auf?“

Die Fragen wurden im Interview nacheinander gestellt, d. h. der Interviewer verlas eine Frage und der Experte beantwortete sie in der Reihenfolge, wie sie hier aufgelistet sind. Hierzu gingen der Interviewer und der Experte die Aufgabenbearbeitung des Experten durch.

3.2.3 Durchführung der Studien

Bei den Studien mit den Experten wurden eine Kamera und ein Visualizer eingesetzt. Die Experten wurden unter Verwendung einer angepassten PARI-Methodik, welche im folgenden Unterabschnitt näher vorgestellt wird, interviewt.

Die Kamera war in den Studien frontal auf die Experten und den Visualizer gerichtet, vgl. 3.2.3. Auf diese Weise konnten die Handlungen des Experten während der Aufgabenbearbeitung und den weiteren Schritten des PARI-Interviews erfasst werden. Während der Studie hatten die Experten auch einen Taschenrechner sowie ein Geodreieck zur Verfügung. Außerdem lagen auf der Auflagefläche des Visualizers mehrere DIN-A4-Blätter für die Niederschrift und darauf zu Beginn der Studie noch verdeckt die Aufgabenstellung.

Am Anfang des Interviews wurden die beiden technischen Geräte (Kamera und Visualizer) eingeschaltet und der Interviewer setzte sich neben den Experten, wie es in Abbildung 3.2.3 zu



Abbildung 3.2.3: Einsatz des Visualizers bei Experteninterviews

sehen ist, so dass er auch mitverfolgen konnte, was der Experte aufschreibt. Die Kombination aus Visualizer und Kamera wurde gewählt, um einerseits über die Kamera die Handlungen des Experten erfassen zu können und andererseits mittels des Visualizers sowohl die von oben gefilmte Niederschrift als auch die das gleichzeitig Gesagte über das interne Mikrophon aufzeichnen zu können.

Nach Beginn der Aufnahme am Visualizer und an der Kamera durfte der Experte die Aufgabenstellung umdrehen und im folgenden wird der Ablauf des PARI-Interviews verfolgt, wie er im kommenden Unterabschnitt dargestellt ist. Die Studien mit den Experten dauerten zwischen einer Dreiviertelstunde bis hin zu eineinhalb Stunden in Abhängigkeit von der Länge der Aufgaben, die sich deutlich unterschied.

3.2.4 Transskription und Auswertung der Interviews

Bei der Transskription der Experteninterviews wurde folgendermaßen vorgegangen:

Die Aufnahmen der Experteninterviews, welche parallel mit einer Videokamera und einem Visualizer erstellt wurden, wurden in einer fünfspaltigen Tabelle durch eine studentische Hilfskraft transkribiert. Diese fünf Spalten sind Zeit, (handelnde) Person, Gesprochenes, Geschriebenes/Handlung und Bemerkungen. Im folgenden werden sie näher beschrieben:

1. Zeit: In dieser Spalte sind Zeitangaben enthalten, welche den Zeitpunkt im Video angeben. Dabei ist jeweils der Startpunkt eines Sinnabschnitts angegeben. Die Angabe in der Folgezeile signalisiert dann den Startpunkt des nächsten Sinnabschnitts (und somit das Ende des vorherigen). Die Sinnabschnitte ergeben sich aus den Inhalten der folgenden Spalten. So sorgt der Wechsel eines Arguments (Spalte 3) oder einer Handlung bzw. zwischen Geschriebenem und Handlung (Spalte 4) für den Übergang zum nächsten Sinnabschnitt, welcher durch einen Zeilenwechsel (inkl. Zeitangabe) gekennzeichnet ist.
2. (handelnde) Person: In dieser Spalte wird aufgeführt, welche Person handelt. Bei den Experteninterviews sind die handelnden Personen konkret der interviewte Experte und der Interviewer.

3. **Gesprochenes:** In dieser Spalte wird transkribiert, was der Experte bzw. der Interviewer sagt, wobei die sprechende Person über die zweite Spalte unterschieden wird.
4. **Handlung/ Geschriebenes:** In dieser Spalte werden alle Informationen angegeben, welche aus den beiden Aufzeichnungen (Videokamera, Visualizer) neben dem Gesprochenen zu entnehmen sind. Damit wird das Transkript so ergänzt, dass man es ohne eine nochmalige Sichtung der Aufzeichnungen vollständig verstehen kann. Hierzu zählen:
 - Das Aufschreiben einer Formel bzw. das Durchführen von Rechnungen
 - Das Erstellen einer Skizze inkl. der dargestellten Informationen
 - Die Ergänzung von aus der Aufgabe vorliegenden Skizzen durch bspw. Markieren von bestimmten Punkten oder Hervorheben bestimmter Bestandteile (Schraffieren etc.)
 - Gestik bei der Aufgabenbearbeitung, d. h. Andeuten von Verschiebungen bzw. Zeigen der Anwendung der Rechte-Hand-Regel aus der Physik mit der rechten Hand
5. **Bemerkungen:** In dieser Spalte werden Informationen zur Strukturierung der Aufgabenbearbeitung gegeben. So ist hier beispielsweise in Phase 1 vermerkt, wenn der Experte zu einem nächsten Aufgabenteil übergeht.

Zur Analyse der Experteninterviews wird eine inhaltlich-strukturierende, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010, S. 92ff.) verwendet. Das Ziel einer strukturierenden Inhaltsanalyse ist es, eine Struktur aus dem vorliegenden Material abzuleiten. Diese Struktur wird vorher über ein Kategoriensystem festgelegt und alle Bestandteile des Textes, die mit diesen Kategorien zusammenhängen, werden anhand dieser Struktur zusammengestellt und in das Kategoriensystem eingeordnet.

Mayring (2010, S. 92) nennt hierzu einige Punkte:

- Die Strukturierungsdimensionen müssen genau festgelegt werden, aus der Forschungsfrage abgeleitet und theoretisch begründet werden.
- Die Dimensionen der Strukturierung werden häufig noch weiter differenziert und in einzelne Ausprägungen aufgespalten. Die Dimensionen werden dann in einem Kategoriensystem zusammengestellt.
- Es muss genau überprüft werden, wann ein Bestandteil des Materials in eine Kategorie fällt. Dazu schlägt Mayring (2010, S. 92) eine zweischrittige Vorgehensweise vor:
 1. **Definition der Kategorien:** hierbei wird genau definiert, welche Bestandteile des Textes in eine Kategorie fallen
 2. **Kodierregeln:** Um eindeutige Zuordnungen zu ermöglichen, werden Regeln formuliert, die eindeutige Zuordnungen an den Stellen ermöglichen, an denen es Probleme bei der Abgrenzung von verschiedenen Kategorien gibt.

Als Ziel der inhaltlichen Strukturierung des Materials nach bestimmten Themen beschreibt Mayring (2010, S. 94) die Extraktion und Zusammenfassung von Textes nach bestimmten Inhaltsbereichen. Nach Mayring (2010, S. 98) bestimmen theoriegeleitet entwickelte Kategorien, welche Inhalte aus dem Material auf diese Weise herausgefiltert werden sollen. Das auf diese Weise aus dem Text extrahierte Material wird zunächst in Unterkategorien und dann zu Hauptkategorien zusammengefasst.

Die Vorgehensweise bei der inhaltlich-strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse beschreibt Mayring in Kombination seiner Ablaufmodelle auf Mayring (2010, S. 93) und Mayring (2010, S. 99) folgende Schritte, wobei sich das erste Ablaufmodell auf die allgemeine strukturierende, qualitative Inhaltsanalyse, im folgenden AS-QIA, bezieht und das zweite auf die Variationen von Schritten der allgemeinen AS-QIA bei Verwendung der inhaltlich-strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse, im folgenden IS-QIA. Für andere Formen der AS-QIA, d. h. die formale, die typisierende und die skalierende, vgl. Mayring (2010, S. 94), ergeben sich Änderungen bei den Schritten, die mit IS-QIA bezeichnet sind:

1. Schritt (AS-QIA) Bestimmung der Analyseeinheiten
2. Schritt (IS-QIA) Theoriegeleitete Festlegung der inhaltlichen Hauptkategorien
3. Schritt (AS-QIA) Bestimmung der Ausprägungen, Zusammenstellung des Kategoriensystems
4. Schritt (AS-QIA) Formulierung von Definitionen, Ankerbeispielen und Kodierregeln zu den einzelnen Kategorien
5. Schritt (AS-QIA) Materialdurchlauf: Fundstellenbeschreibung
6. Schritt (AS-QIA) Materialdurchlauf: Bearbeitung und Extraktion der Fundstellen
7. Schritt (AS-QIA) Überarbeitung, gegebenenfalls Revision von Kategoriensystem und Kategoriendefinition. Dieser Schritt hat gegebenenfalls einen weiteren Durchlauf dieses Ablaufmodells ab Schritt 3 zur Folge.
8. Schritt (IS-QIA) Paraphrasierung des extrahierten Materials
9. Schritt (IS-QIA) Zusammenfassung pro Kategorie
10. Schritt (IS-QIA) Zusammenfassung pro Hauptkategorie

im vorliegenden Fall ergeben sich die Analyseeinheiten aus der Struktur der Aufgabe, die der Experte in der Studie bearbeitet. Sie bilden thematisch geschlossene Einheiten, die – auch zur Ermöglichung des Stellens in einer Klausur – festgelegt wurden.

Es soll die Forschungsfrage 1 beantwortet werden, wie eine normative Lösung der vorliegenden Elektrotechnik-Aufgabe aussieht und welche Schwierigkeiten, Hürden und Validierungsstrategien Experten bei den Studierenden erwarten, vgl. Seite 72:

Zunächst ergibt sich die Kategorie „Reine Aufgabenbearbeitung“, welche die ersten zwei Phasen des PARI-Interviews (Schritt 1: Bearbeitung der Aufgaben durch den Experten mit lautem Denken ohne Unterbrechung, Phase 2: Durchgehen der Lösung des Experten mittels einer vorgegebenen Gliederung) erfasst.

Die weiteren inhaltlichen Strukturierungsdimensionen im Sinne von Mayring (2010) ergeben sich basierend auf den zusätzlich erhobenen Informationen zu der Aufgabe gemäß Seite 79 sowie den theoretischen Ansätzen nach Blum und Leiß (2007) und Polya (1949), welche im vorherigen Kapitel ausführlich dargestellt sind. Auf diese Weise ergeben sich folgende Kategorien, welche direkt in die Gestaltung der Fragen im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion (Phase 3) des PARI-Interviews eingeflossen und auf Seite 87 bzw. Seite 79 näher beschrieben sind:

1. Alternativlösungen zu den Aufgabenteilen

2. Typische Fehler der Studierenden nach dem ersten Jahr
3. Validierungsmöglichkeiten der Ergebnisse
4. Lernziele und Gründe für das Stellen der Aufgabe in der vorliegenden Version
5. Mögliche Variationen für Aufgaben zu dem Themengebiet

Die Kategorien in den Transskripten der Expertenbearbeitungen wurden gemäß Schritt 3 bis 7 der explikativen Inhaltsanalyse (vgl. Mayring (2010, S. 92)) noch in Unterkategorien aufgeteilt, wie im folgenden näher erläutert wird, siehe Seite 92. So wurde bei den Alternativlösungen beispielsweise zwischen denen unterschieden, welche Zweitsemestern bekannt sein können und denen, welche Wissen aus höheren Semestern voraussetzen. Bei den Validierungsstrategien wurden so Strategien unter Verwendung der Einheiten vorkommenden Größen und Strategie unter Verwendung der Größenordnung der vorkommenden Größen unterschieden.

Im Detail wird folgendermaßen vorgegangen:

Zur Auswertung der Transskripte wird bei den Transskriptteilen zu Phase 1 paraphrasiert, was der Experte sagt und welche Handlungen (inkl. Niederschrift) er dabei ausführt. Hierbei werden ergänzende Informationen, welche auf Rückfragen in Phase 2 gegeben wurden, direkt mit eingearbeitet, also z. B. zur Begründung von Lösungsschritten oder Interpretation der Ergebnisse. So ergeben die Bearbeitung des Experten mit lautem Denken aus Phase 1 sowie seine Erläuterungen auf Rückfragen in Phase 2 eine vollständige Bearbeitung der Aufgabe.

Phase 3, die didaktische Rekonstruktion, ergibt übergeordnete Informationen zu der Aufgabe. Dabei wurden nacheinander die im Vorabschnitt erwähnten Fragen zu Fehler, Validierung, Lösungsalternativen, gestellt. Die Fragen zu Motiven, Lernziele (erwarteten Kompetenzen) und Aufgabenvariationen beziehen sich übergeordnet auf die ganze Aufgabe und wurden nach Durchgehen aller Aufgabenteile gestellt. In den Transkripten wurden entsprechende Textstellen markiert und mit Abkürzungen versehen, also z. B. 'F' für Fehler, und dienen als Kategorien für die Auswertung. Die Kategorien sind dabei folgendermaßen definiert:

Über die folgende Kategoriendefinition wird festgelegt, wann eine Aussage des Experten welcher Kategorien zuzuordnen ist. Auch wenn in dem Interview nacheinander zu den unterschiedlichen Dingen konkrete Fragen gestellt wurden (wie z. B. „Welche typischen Fehler treten bei Studierenden am Ende ihres zweiten Semesters auf?“), haben sich in den Antworten des Experten die Kategorien immer wieder vermischt, so dass im ganzen Transkript zu Phase 3 eine Markierung der verschiedenen Kategorien notwendig ist. Zu den bereits genannten Strukturierungsdimensionen, welche der Liste von Zusatzinformationen auf Seite 79 entsprechen, werden in der folgenden Kategorien-Liste auch die weiteren Ausdifferenzierungen nach Mayring (2010, S. 92) angegeben. Für die einzelnen Strukturierungsdimensionen werden jeweils auch die Kodierregeln, vgl. Seite 90, angegeben:

1. Fehler (F; bezogen auf Aufgabenteile): In dieser Kategorie werden von den Experten genannte typische Fehler gesammelt, welche bei Studierenden nach ihrem zweiten Fachsemester auftreten. Diese Fehler können in verschiedene Typen unterteilt werden:
 - Fehler bezogen auf die fachlichen Hintergründe: Fehler in den Inhalten der Elektrotechnik oder der Mathematik (sowohl bezogen auf Grundlagen wie Anwendung von Potenzen als auch Anwendung von Lösungsverfahren aus der Höheren Mathematik wie der Trennung der Veränderlichen)

- Fehler bezogen auf zugrundeliegende physikalische Mechanismen und Auswirkungen darauf auf die mathematische Modellierung
2. Validierung (V; bezogen auf Aufgabenteile): Diese Kategorie sammelt sämtliche Validierungsstrategien, welche zur Überprüfung der erhaltenen Formeln und Ergebnisse dienen können. Dazu zählen „A-priori-Validierungsstrategien“ zur Überprüfung der Richtigkeit der Formeln wie auch „A-posteriori-Validierungsstrategien“ zur Überprüfung der Ergebnisse. Hierbei können oberflächliche Strategien wie die Einheiten- bzw. Dimensionskontrolle (in beiden Formen der Validierung) wie auch tiefergehende Validierungsstrategien wie die Betrachtung der zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen mit ihren Implikationen für das Ergebnis auftreten.
 3. Lösungsalternativen (L; bezogen auf Aufgabenteile): Diese Kategorie fasst alle Aussagen des Experten zu Lösungswegen zusammen, welche er nicht in Phase I verwendet bzw. anschließend in Phase 2 erläutert hat. Hierbei treten Alternativverfahren sowohl bzgl. der mathematischen Modellierung elektrotechnischer Sachverhalte als auch verschiedene Lösungsverfahren für die bereits mathematisierten Situationen, beispielsweise die Wahl des Partikulärverfahrens zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung anstatt der Kombination aus Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten. Alternativ sind bei diesem Beispiel auch Verfahren aus höheren Semestern denkbar wie die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mittels Laplace-Transformationen.
 4. Aufgabenvariationen (A; bezogen auf die Gesamtaufgabe): In dieser Kategorie werden Aussagen des Experten dazu gesammelt, wie man Aufgaben zu demselben Themengebiet variieren kann. Hierzu zählen z. B. Möglichkeiten zum Hinzufügen von Bauteilen im magnetischen Kreis oder im Schwingkreis. Dieses hat teilweise dann Auswirkungen auf die Lösbarkeit der Aufgabe, welche auch in dieser Kategorie gesammelt werden. Des Weiteren werden hier die Gründe erhoben, warum die Aufgabe in der vorliegenden Weise gestellt wurde.
 5. Motive für das Stellen, Lernziele bzw. erwartete Kompetenzen (K; bezogen auf die Gesamtaufgabe): In dieser Kategorie wird erhoben, welche Gründe der Experte dafür angibt, dass die Aufgabe überhaupt gestellt wurde. Es werden die Kompetenzen im Sinne von Fähigkeiten erfasst, von denen der Experte erwartet, dass sie durch diese Aufgabe von einem höheren Blickwinkel aus abgeprüft werden. Zuletzt werden auch Ausblicke auf Inhalte aus späteren Elektrotechnik-Veranstaltungen hier erfasst, für die die Aufgabe eine Grundlage bildet.

In den Transskripten wurden die entsprechenden Stellen in der dritten Phase gemäß dieser fünf Kategorien markiert. Diese bilden im Sinne von Mayring (2010) die Hauptdimensionen und die Ausdifferenzierungen die Unterdimensionen. Sie wurden im Text unterstrichen und am Rand vermerkt, zu welcher der fünf Kategorien (F, V, L, A, K) sie zuzuordnen sind. Dann wurden die entsprechenden Aussagen nach den einzelnen Kategorien pro Aufgabenteil (F, V, L) bzw. für die Gesamtaufgabe (A, K) gesammelt und paraphrasiert. Anschließend wurden diesen Aussagen mittels der im vorherigen Kapitel vorgestellten Theorie interpretiert.

3.3 Sukzessives, beispielhaftes Entwickeln einer Studi-Expert-Lösung

In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Studi-Expert-Lösung in den fünf Schritten anhand eines Beispiels dargestellt. Die späteren SELen enthalten ausschließlich die SEL in der Form, wie sie nach Durchlaufen der fünf Schritte aussieht. Dafür wurde die Berechnung der Eisenreluktanz aus Aufgabenteil A2 der Aufgabe A gewählt. Nähere Einordnungen hierzu finden sich in Abschnitt 4.3 ab Seite 139.

Zu Beginn der Entwicklung der SEL lag folgende Lösung vor, welche zur Klausurkorrektur zur Verfügung gestellt wurde, vgl. entsprechenden Abschnitt in Kapitel 4:

$$\begin{aligned}
 R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\
 &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\
 &\quad \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\
 &= 26,526 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} \\
 &= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}
 \end{aligned}$$

In der Korrektorenlösung wird direkt die gesamte Reluktanz berechnet, welche sich aus Eisen- und Luftreluktanzen additiv zusammensetzt. Für die SEL wird diese Berechnung zerlegt, da für Eisen- und Luftreluktanzen unterschiedliche Formeln benötigt werden und so näher auf die Teilschritte zur Berechnung eingegangen werden. Darüberhinaus ist der Wert für R_{Fe} auch für die spätere Skizzierung der linearen Funktion (ebenfalls A2) interessant.

Ergänzung der Lösungen um Zwischenschritte (Spalte 1)

Bei der Ergänzung werden hier im Wesentlichen die nötigen Zehnerpotenzen ergänzt. Ein Verrechnen der Einheiten unter Verwendung der SI-Basiseinheiten ist hier nicht notwendig, da diese direkt unverändert bleiben. Falls das nötig wäre, wäre das auch ein Teil dieses Schrittes. Darüberhinaus wurden die Indizes verändert, so dass die Verbindung zu dem gegebenen Ersatzschaltbild deutlicher wird. Außerdem wird die Berechnung der Permeabilität μ separat hinzugefügt:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}} \cdot 10^3 = 4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}.$$

$$\begin{aligned}
R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
&= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\
&\quad \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\
&= 26,526 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} \\
&= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}
\end{aligned}$$

Einbettung in die physikalische Theorie (Spalte 1)

In diesem Schritt wird erläutert, welche physikalischen Hintergründe für diese Aufgabe notwendig sind. Dieses ist in dem nachfolgenden Text beschrieben:

Gesamter Widerstand im Eisen: In dem dargestellten magnetischen Kreis gibt es vier Eisenstücke: das obere Stück, das linke und das rechte Stück und (mit Abstand d) das untere Stück. Jedes Stück kann als magnetischer Widerstand aufgefasst werden. Zur besseren Übersicht werden die Reluktanzen, welche in der Lösung des Instituts als R_1 , R_2 und R_3 bezeichnet sind, im folgenden als R_{oben} , R_{links} , R_{rechts} und R_{unten} bezeichnet. Da das linke und das rechte Stück dieselbe Länge und Querschnittsfläche haben, kann man sie zusammenfassen, d. h. es gilt $R_{\text{links}} = R_{\text{rechts}}$. Für die Reluktanzen im Eisen gilt die Formel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$, wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ gilt. Die Reluktanzen ergeben sich jeweils als Quotient der aktiven Länge einer Seite und der Querschnittsfläche, wobei zusätzlich noch die magnetische Leitfähigkeit ("die Permittivität") im Vakuum bzw. im Eisen berücksichtigt werden muss. Da μ_r keine Einheit hat und genau 1000 ist, ergibt sich:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}} \cdot 10^3 = 4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\
 &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\
 &\quad \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\
 &= 26,526 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} \\
 &= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}
 \end{aligned}$$

Gliederung der Aufgaben und Lösungen nach den theoretischen Ansätzen

In diesem Abschnitt wird eine Aufteilung nach Polya (1949) eingeführt. Es wird am Anfang aufgezeigt, was gegeben und was gesucht ist. Eine Einteilung mittels den Modellierungsansätzen wird bei der Beantwortung von Forschungsfrage 1.3 präsentiert.

Gesucht ist Gesamtreluktanz des magnetischen Kreises. Diese verknüpft – in gewisser Analogie zum ohmschen Widerstand beziehungsweise zum ohmschen Gesetz – die magnetische Spannung mit dem magnetischen Fluss.

Gegeben ist für die Studierenden das Ersatzschaltbild, welches sie in Aufgabenteil A1 erstellt haben und eine daraus ableitbare Zerlegung in Teilreluktanzen.

Wir können aus dem Aufgabenteil A1 die Formel entnehmen, mit der wir den Gesamtwiderstand berechnen können. Dieser setzt sich aus den Reluktanzen R_{Fe} (Reluktanz im Eisen) und R_L (Reluktanz in der Luft) zusammen. Aufgrund der Reihenschaltung der Widerstände können die sich ergebenden Werte einfach addiert werden.

So ergibt sich:

Gesamter Widerstand im Eisen: In dem dargestellten magnetischen Kreis gibt es vier Eisenstücke: das obere Stück, das linke und das rechte Stück und (mit Abstand d) das untere Stück. Jedes Stück kann als magnetischer Widerstand aufgefasst werden. Zur besseren Übersicht werden die Reluktanzen, welche in der Lösung des Instituts als R_1 , R_2 und R_3 bezeichnet sind, im folgenden als R_{oben} , R_{links} , R_{rechts}

und R_{unten} bezeichnet. Da das linke und das rechte Stück dieselbe Länge und Querschnittsfläche haben, kann man sie zusammenfassen, d. h. es gilt $R_{\text{links}} = R_{\text{rechts}}$. Für die Reluktanzen im Eisen gilt die Formel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$, wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ gilt. Die Reluktanzen ergeben sich jeweils als Quotient der aktiven Länge einer Seite und der Querschnittsfläche, wobei zusätzlich noch die magnetische Leitfähigkeit ("die Permittivität") im Vakuum bzw. im Eisen berücksichtigt werden muss. Da μ_r keine Einheit hat und genau 1000 ist, ergibt sich:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 10^3 = 4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\ &= \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\ &\quad \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\ &= 26,526 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} \\ &= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} \end{aligned}$$

Ergänzen der kognitiven Ressourcen (Spalte 2)

In diesem Schritt werden in der zweiten Spalte Erläuterungen zu der Rechnung gegeben und dabei die kognitiven Ressourcen herausgestellt:

Gesucht

ist Gesamtreluktanz des magnetischen Kreises. Diese verknüpft – in gewisser Analogie zum Ohm'schen Widerstand beziehungsweise zum Ohm'schen Gesetz – die magnetische Spannung mit dem magnetischen Fluss.

Gegeben ist für die Studierenden das Ersatzschaltbild, welches sie in Aufgabenteil A1 erstellt haben und eine daraus ableitbare Zerlegung in Teilreluktanzen.

Wir können aus dem Aufgabenteil A1 die Formel entnehmen, mit der wir den Gesamtwiderstand berechnen können. Dieser setzt sich aus den Reluktanzen R_{Fe} (Reluktanz im Eisen) und R_L (Reluktanz in der Luft) zusammen. Aufgrund der Reihenschaltung der Widerstände können die sich ergebenden Werte einfach addiert werden.

So ergibt sich:

Gesamter Widerstand im Eisen: In dem dargestellten magnetischen Kreis gibt es vier Eisenstücke: das obere Stück, das linke und das rechte Stück und (mit Abstand d) das untere Stück. Jedes Stück kann als magnetischer Widerstand aufgefasst werden. Zur besseren Übersicht werden die Reluktanzen, welche in der Lösung des Instituts als R_1 , R_2 und R_3 bezeichnet sind, im folgenden als R_{oben} , R_{links} , R_{rechts} und R_{unten} bezeichnet. Da das linke und das rechte Stück dieselbe Länge und Querschnittsfläche haben, kann man sie zusammenfassen, d. h. es gilt $R_{links} = R_{rechts}$. Für die Reluktanzen im Eisen gilt die Formel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$, wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ gilt. Die Reluktanzen ergeben sich jeweils als Quotient der aktiven Länge einer Seite und der Querschnittsfläche, wobei zusätzlich noch die magnetische Leitfähigkeit ("die Permittivität") im Vakuum bzw. im Eisen berücksichtigt werden muss. Da μ_r keine Einheit hat und genau 1000 ist, ergibt sich:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 10^3 = 4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= R_{oben} + 2 \cdot R_{links} + R_{unten} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\ &= \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\ &\quad \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\ &= 26,526 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} \\ &= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} \end{aligned}$$

Phase A2.1: Aufstellen der Reluktanzgleichung aus Ersatzschaltbild

Ressourcen:

Aufstellen einer oder mehrerer Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen

Phase A2.2a: Berechnung von $R_m(d)$

(a) Ressourcen aus der Mathematik der Größen:

- Einheitenmanagement:

1. Umgang mit dem SI-Einheitensystem

2. Umgang mit Zehnerpotenzen im Zusammenhang mit Einheiten

- Umformtechniken und -strategien der "Größenalgebra": Umformen algebraisch-arithmetischer Bruchterme mit physikalischen Größen

(b) Ressourcen aus der Elektrotechnik:

1. Kenntnis der Reluktanzformel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$

2. Anwendung der Formel auf die konkrete Situation

3. Additive Zerlegung der Reluktanzen möglich

Durchführung der Experteninterviews (Spalte 1)

In diesem letzten Schritt werden noch die Bearbeitung des Experten und seine Hinweise zu alternativen Lösungsmöglichkeiten, typischen Fehlern von Studierende und Überprüfungsmöglichkeiten der Lösung des Experten ergänzt.

Gesucht

ist Gesamtreluktanz des magnetischen Kreises. Diese verknüpft – in gewisser Analogie zum Ohm'schen Widerstand beziehungsweise zum Ohm'schen Gesetz – die magnetische Spannung mit dem magnetischen Fluss.

Gegeben ist für die Studierenden das Ersatzschaltbild, welches sie in Aufgabenteil A1 erstellt haben und eine daraus ableitbare Zerlegung in Teilreluktanzen.

Wir können aus dem Aufgabenteil A1 die Formel entnehmen, mit der wir den Gesamtwiderstand berechnen können. Dieser setzt sich aus den Reluktanzen R_{Fe} (Reluktanz im Eisen) und R_L (Reluktanz in der Luft) zusammen. Aufgrund der Reihenschaltung der Widerstände können die sich ergebenden Werte einfach addiert werden.

So ergibt sich:

Gesamter Widerstand im Eisen: In dem dargestellten magnetischen Kreis gibt es vier Eisenstücke: das obere Stück, das linke und das rechte Stück und (mit Abstand d) das untere Stück. Jedes Stück kann als magnetischer Widerstand aufgefasst werden. Zur besseren Übersicht werden die Reluktanzen, welche in der Lösung des Instituts als R_1 , R_2 und R_3 bezeichnet sind, im folgenden als R_{oben} , R_{links} , R_{rechts} und R_{unten} bezeichnet. Da das linke und das rechte Stück dieselbe Länge und Querschnittsfläche haben, kann man sie zusammenfassen, d. h. es gilt $R_{links} = R_{rechts}$. Für die Reluktanzen im Eisen gilt die Formel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$, wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ gilt. Die Reluktanzen ergeben sich jeweils als Quotient der aktiven Länge einer Seite und der Querschnittsfläche, wobei zusätzlich noch die magnetische Leitfähigkeit ("die Permittivität") im Vakuum bzw. im Eisen berücksichtigt werden muss. Da μ_r keine Einheit hat und genau 1000 ist, ergibt sich:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 10^3 = 4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Phase A2.1: Aufstellen der Reluktanzgleichung aus Ersatzschaltbild

Ressourcen:

Aufstellen einer oder mehrerer Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen

Phase A2.2a: Berechnung von $R_m(d)$

(a) Ressourcen aus der Mathematik der Größen:

- Einheitenmanagement:

1. Umgang mit dem SI-Einheitensystem

2. Umgang mit Zehnerpotenzen im Zusammenhang mit Einheiten

- Umformtechniken und -strategien der "Größenalgebra": Umformen algebraisch-arithmetischer Bruchterme mit physikalischen Größen

(b) Ressourcen aus der Elektrotechnik:

1. Kenntnis der Reluktanzformel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$

2. Anwendung der Formel auf die konkrete Situation

3. Additive Zerlegung der Reluktanzen möglich

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\
 &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\
 &\quad \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\
 &= 26,526 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} \\
 &= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}
 \end{aligned}$$

Expertenbearbeitung: Der Experte sagt, dass er hierzu zunächst die Einzelreluktanzen bestimmen muss und alle dafür benötigten Größen angegeben sind. Er schreibt zunächst die allgemeinen Formeln für eine Reluktanz auf, also

$$R = \frac{l}{\mu A},$$

also Reluktanz als der Quotient $\frac{\text{Länge}}{\text{Permeabilität} \cdot \text{Querschnittsfläche}}$, und notiert darüberhinaus

$$R_M(d) = R_{\text{Fe, ges}} + R_{\text{L, ges}}.$$

In seiner Rechnung verwendet er zunächst eine falsche Zerlegung des Eisenstücks. (Aufgrund der unterschiedlichen Längen muss hier eine Zerlegung durchgeführt werden. Wegen derselben Querschnittsfläche hätte in diesem Fall aber auch eine Gesamtberechnung der Reluktanz gereicht.) Er nennt auswendig den Wert für die Permeabilität im Vakuum, also μ_0 . Durch Einsetzen berechnet er den Zahlenwert für die erste Reluktanz, ist sich aber unsicher bei deren Einheit und gibt diese zunächst mit $\frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ an. Während des Eintippens spricht er die Werte vor sich hin und bemerkt dabei seine Fehler bei den verwendeten Längen und Querschnittsflächen. Dann sagt er, dass die beiden anderen Eisenreluktanzen auf dieselbe Weise berechnet werden können und sich dann die Gesamteisenreluktanz als Summe der drei Einzelreluktanzen ergibt. Nach Einsetzen fällt ihm auf, dass die Einheit der Gesamteluktanz $\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ sein muss. Er geht anschließend zu der Reluktanz in der Luft über. Zur Berechnung leitet er sich die Formel für die Reluktanz in der Luft her, in dem er von

$$\frac{l}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}} \text{ zu } \frac{2 \cdot \text{Luftspaltbreite}}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}}$$

übergeht. Hierzu bemerkt er (0843): „Das d ziehe ich vor, weil es als Variable vorliegt.“ Auf diese Weise erzielt er das Gesamtergebnis. Zum Skizzieren der Funktion bemerkt er:

Man sieht, bei $d = 0$ fällt der zweite Summand weg. Das heißt, wir fangen bei $R_{\text{Fe, ges}}$ an und dann steigt der Term linear mit der Steigung der Luftspaltreluktanz.

Der Experte erläutert hierzu in Phase 2, dass er die „generelle Funktion“ (1411) verwendet, also

$$R = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A},$$

wobei er bei der Luftspaltbreite die relative Permeabilität μ_r nicht berücksichtigen müsse, da $\mu_r = 1$ gilt, wobei er direkt erwähnt, dass relative Permeabilität beim Eisen $\mu_r = 1000$ ist.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Durch eine andere Zusammenfassung der Eisenreluktanzen hätte sich hier mehr Aufwand ergeben. Analog zu A1 hätte es hier keinen alternativen Weg mit Wissen aus höheren Semestern gegeben.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Fehler können bei der Umrechnung der Einheiten auftreten, denn Größen in cm bzw. cm^2 müssen in m bzw. m^2 umgerechnet werden. Weitere Fehler sind, dass die Studierenden aufgrund der Analogie zwischen magnetischem und elektrischen Ersatzschaltbild annehmen, dass die Einheiten gleich sind. Sie nehmen z. B. fälschlicherweise als Einheit für den magnetischen Widerstand Ω (Ohm) statt $\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ an.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Luftreluktanzen sind deutlich größer als Eisenreluktanzen. Das ist in der vorliegenden Aufgabe auch der Fall. Diese Ungleichung ist auch in der Realität erfüllt, was der Experte als Merkmal der gestellten Aufgaben bezeichnet. Daher können die Studierenden dieses als Möglichkeit zur Validierung verwenden. Dazu sagt der Experte in (3555): „Es müsste also einen Studenten skeptisch machen, wenn er für die Luftspaltreluktanz einen sehr kleinen Wert erhält.“

3.4 Lösungsprozesse der Studierendenpaare

Das Ziel der Analyse der Bearbeitungsprozesse von Studierendenpaaren im zweiten Semester Elektrotechnik ist der Erhalt von authentischen Daten, wie eine Elektrotechnik-Aufgabe von Elektrotechnik-Zweitsemestern bearbeitet wird und welche typischen Charakteristika und Schwierigkeiten dabei auftreten. Während die Produkte, wie sie aus den Klausurbearbeitungen vorliegen, ausschließlich das Resultat des Bearbeitungsprozesses zeigen und dieses sehr kurz dargestellt ist, sollen über die Erhebung der Bearbeitungsprozesse in die Vorlesungen die Lösungsentwicklung sowie die Überlegungen der Studierenden erfasst werden.

Dabei werden einerseits Bearbeitungen mittels explikativer qualitativer Inhaltsanalyse mit der Studi-Expert-Lösung verglichen und Unterschiede zur Studi-Expert-Lösung erarbeitet, welche als Mittel für die Explikation eingesetzt wird. Andererseits werden aber auch die Bearbeitungsprozesse zu einzelnen Teilaufgaben bei den drei bis fünf Studierendenpaaren, die jeweils eine Aufgabe bearbeitet haben, verglichen und auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht. Dadurch soll – natürlich in begrenztem Rahmen – ein Spektrum der Lösungsprozesse bei den Studierendenbearbeitungen ermittelt werden.

Die Methode, welche in diesem Abschnitt beschrieben wird, wird zur Beantwortung der Forschungsfrage

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

und ihrer drei Unterfragen

- Welche Fehler und Problemstellen treten auf?
- Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.
- Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

eingesetzt.

3.4.1 Aufbau der Studien

Die Videostudien wurden mit Studierendenpaaren unter Einsatz von zwei Kameras bzw. einer Kamera und einem Visualizer durchgeführt. In den ersten Studien kamen zwei Kameras zum Einsatz. Eine Kamera war frontal auf die Studierenden gerichtet, so dass man einen besseren Überblick über deren Handlungen bzw. Gesten hat. In der Abbildung 3.4.1 ist so beispielsweise zu sehen, wie der auf dem Bild rechte Studierende seinem Partner den Stromfluss in Aufgabe A1 erläutert. Eine weitere Kamera steht hinter den Studierenden und ist direkt auf die Niederschrift gerichtet, so dass man klarer Gesagtes zu Geschriebenem zuordnen kann. Eine Aufnahme der Kamera im Hintergrund ist in Abbildung 3.4.2 zu sehen. Diese zweite Kamera wurde in späteren Studien durch einen zuvor bereits in Expertenstudien eingesetzten Visualizer ersetzt, da dieser die Mitschrift aus einem besseren Winkel, nämlich direkt von oben, filmen kann. Sowohl Kameras als auch der Visualizer zeichneten auch den Ton mit auf, wobei hier



Abbildung 3.4.1: Aufbau der zwei Kameras: Zu sehen ist eine Aufnahme von der Frontalkamera sowie die Kamera zum Filmen der Niederschrift im Hintergrund

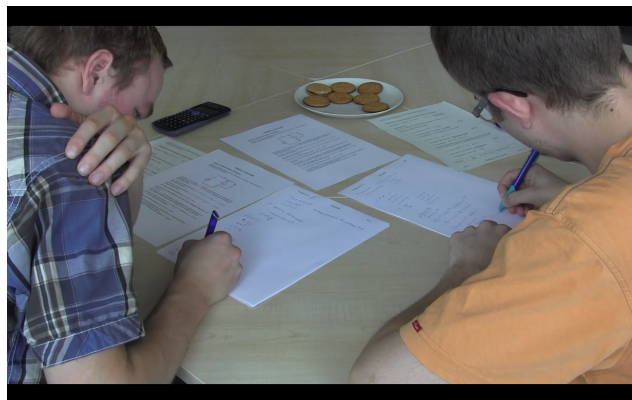


Abbildung 3.4.2: Aufnahme der Kamera, welche hinter den Studierenden positioniert ist

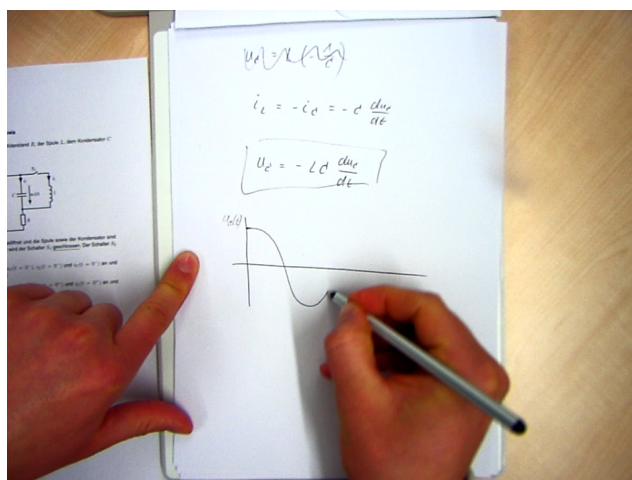


Abbildung 3.4.3: Bild des Visualizers mit Gesten des Bearbeiters

in besonderem Maße der Visualizer sehr gute Ergebnisse lieferte, da er direkt neben den Studierenden sowie deren Mitschrift positioniert ist. Die Abbildung 3.4.3 zeigt einen mit dem Visualizer gefilmten Ausschnitt der Aufgabenbearbeitung von Aufgabe B.

Die Studien liefen folgendermaßen ab:

Vor dem Eintreffen der Studierenden wurden die beiden Kameras aufgebaut und so ausgerichtet, dass man sowohl die Studierenden selbst in der Frontalkamera sowie die Niederschrift in der Hintergrundkamera bzw. später im Visualizer gut sehen konnte. Des Weiteren wurden an zwei Plätzen Stapel mit Blättern bereitgelegt, die mit „Notizzettel“ überschrieben waren und auf denen die Studierenden zusätzlich eine Angabe zur Testperson sowie eine Seitenzahl machen sollten. Auf den Stapeln lag die Aufgabenstellung mit der Rückseite nach oben, so dass sie die Studierenden sie vor Beginn der Studien nicht lesen konnten.

Es lag das Skript zur Veranstaltung GET-B bereit, so dass die Studierenden bei Unklarheiten die theoretischen Grundlagen nachschlagen konnten. Bei Schwierigkeiten konnten sie sich an den Leiter der Studie wenden. Die Studierenden durften während der Bearbeitung – genauso wie in der Klausur – einen Taschenrechner verwenden.

Nach dem Eintreffen der Studierenden sollten sie sich auf die beiden Plätze setzen, welche die beiden Kameras bzw. die Kamera und der Visualizer gemäß vorheriger Ausrichtung gut aufzeichnen konnten. Daraufhin hat der Leiter der Studie den Ablauf erläutert und die Studierenden explizit darum gebeten, dass sie während der Bearbeitung laut denken. Danach wurde die Aufnahme an beiden Geräten gestartet und die Studierenden durften die Aufgabenblätter umdrehen.

Während der Bearbeitung gab es keine Zeitvorgaben. Nach dem Durchlaufen sämtlicher Aufgabenteile wurden die Studierenden durch den Leiter der Studie gefragt, ob sie noch Ergänzungen machen wollten. Falls nein, wurden hier die Aufnahmen gestoppt. In der Regel dauerten die Studien eine bis eineinhalb Stunden.

Die Aufgaben wurden von Paaren (bzw. bei der Probestudie von einem Trio) von Studierenden bearbeitet, um Interaktion zwischen den beiden Studierenden und Denken zu fördern. Die Bearbeitung durch einen einzelnen Studierenden sorgt in vielen Fällen dafür, dass still gearbeitet wird. Außerdem können die beiden Studierenden sich so gegenseitig Hilfestellungen bei der Bearbeitung geben, die für die Analysen der Bearbeitungen nützlich sein können. Darüber hinaus müssen in den Bearbeitungen mit Studierendenpaaren Abstimmungen zwischen den beiden Studierenden stattfinden, so dass auch metakognitive Strategien, die sonst eher unbewusst und unartikulierte verwendet werden, hier expliziert werden müssen.

Es gab Eingriffe bei den Studien, falls die Studierenden in der Aufgabenbearbeitung nicht mehr weiterkamen. Dieses sollte sicherstellen, dass eine möglichst vollständige Bearbeitung der gesamten Aufgabe, d. h. aller Aufgabenteile, in den Studien erfolgen konnte. Dieses ist insbesondere bei anspruchsvolleren Aufgabenteilen wichtig, da ansonsten bei einem Abbruch der Aufgabe bzw. des Aufgabenteils auch nicht klar wäre, wo genau die Schwierigkeiten liegen. Es wurde das Prinzip der minimalen Hilfe verwendet.

Eine ähnliche Rolle spielte auch das Skript: Im Gegensatz zu den Klausuren gingen die Studierenden unvorbereitet an die Aufgaben, wobei sie vorher auch keine Angaben zu möglichen Aufgabentypen hatten. Insbesondere bei Faktenwissen, konkreter bei zu lernenden Formeln, ist

es daher wichtig sicherzustellen, dass sie dieser zu Verfügung haben und nicht – beispielsweise wegen fehlender Formeln – der Bearbeitungsprozess der Aufgabe abgebrochen wird.

Die Aufnahmen der Studierendenbearbeitungen, welche parallel mit einer Videokamera hinter den Studierenden und einer weiteren Kamera, welche frontal auf die Studierenden gerichtet war, erstellt wurden, wurden in einer fünfspaltigen Tabelle durch eine studentische Hilfskraft transkribiert. Diese fünf Spalten sind Zeit, (handelnde) Person, Gesprochenes, Geschriebenes/Handlung und Bemerkungen. Im folgenden werden sie näher beschrieben:

1. Zeit: In dieser Spalte sind Zeitangaben enthalten, welche den Zeitpunkt in der Aufzeichnung angeben. Dabei ist jeweils der Startpunkt eines Sinnabschnitts angegeben. Die Angabe in der Folgezeile signalisiert dann den Startpunkt des nächsten Sinnabschnitts (und somit das Ende des vorherigen). Die Sinnabschnitte ergeben sich aus den Inhalten der folgenden Spalten. So sorgt der Wechsel der sprechenden Person (Spalte 2), eines Arguments (Spalte 3) oder einer Handlung bzw. zwischen Geschriebenem und Handlung (Spalte 4) für den Übergang zum nächsten Sinnabschnitt, welcher durch einen Zeilenwechsel in dem Transskript (inkl. Zeitangabe) gekennzeichnet ist.
2. (handelnde) Person: In dieser Spalte wird aufgeführt, welche Person handelt. Bei den studentischen Bearbeitungen gibt es zwei (in einem Fall drei) bearbeitende Studierende, welche mit P1, P2 und P3 in dieser Spalte gezeichnet sind, sowie den Studienleiter, der nach einem Prinzip der minimalen Hilfe arbeitet.
3. Gesprochenes: In dieser Spalte wird transkribiert, was der Experte bzw. der Interviewer sagt, wobei die Person über die zweite Spalte unterschieden wird.
4. Handlung/ Geschriebenes: In dieser Spalte werden alle Informationen angegeben, welche aus den beiden Aufzeichnungen der Videokameras zusätzlich zu dem Gesprochenen zu entnehmen sind. Damit wird das Transkript so ergänzt, dass man es ohne eine nochmalige Sichtung der Aufzeichnungen vollständig verstehen kann. Hierzu zählen:
 - Das Aufschreiben einer Formel bzw. das Durchführen von Rechnungen
 - Das Erstellen einer Skizze inkl. der dargestellten Informationen
 - Die Ergänzung von aus der Aufgabe vorliegenden Skizzen durch bspw. Markieren von bestimmten Punkten oder Hervorheben bestimmter Bestandteile (Schraffieren etc.)
 - Gesten bei der Aufgabenbearbeitung, d. h. Andeuten von Verschiebungen bzw. Zeigen der Anwendung der Rechte-Hand-Regel aus der Physik mit der rechten Hand
5. Bemerkungen: In dieser Spalte werden Informationen zur Strukturierung der Aufgabenbearbeitung gegeben. So ist hier beispielsweise in Phase 1 vermerkt, wenn der Experte zu einem nächsten Aufgabenteil übergeht.

Zur Auswertung der Transskripte wird paraphrasiert, was die handelnden Personen (P1, P2, P3, Studienleiter) sagen und welche Handlungen bzw. Gesten sie dabei ausführen. Dieses wird anschließend mit der Studi-Expert-Lösung verglichen, welche hier als Mittel der Explikation eingesetzt wird. Dadurch entstehen die sogenannten NIAs, welche im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

Die Analyse der Bearbeitungen basiert auf der explikativen, qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010, S.85). Dieses Verfahren wird im folgenden Unterabschnitt beschrieben.

3.4.2 Die explikative, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring

Die Analyse der Transkripte der studentischen Bearbeitungsprozesse ist angelehnt an die qualitative Inhaltsanalyse mittels Explikation nach Mayring. Er beschreibt diese folgendermaßen:

„Bei dieser Form der qualitativen Inhaltsanalyse wird zu Textstellen, welche interpretiert werden sollen, wird zusätzliches Material herangezogen. Dieses dient dazu, die Textstelle zu erklären, verständlich zu machen, zu erläutern und zu explizieren. Dabei ist die Grundidee, dass genau definiert wird, welches zusätzliche Material zur Erklärung der Textstelle zugelassen wird.“

Mayring (2010, S. 86) beschreibt, dass die Grundlage der Explikation eine lexikalisch-grammatische Definition sein soll. Damit meint er, dass „die Bedeutung der Sprache laufend auf dem jeweiligen kulturellen Hintergrund in ihrer jeweils aktuellen Ausprägung in Wörterbüchern, Lexika festgehalten; die Struktur von Sätzen wird in Grammatiken festgelegt.“ Er betrachtet es als Voraussetzung der Explikation, die lexikalisch-grammatikalische Definition der Textstelle zu kennen.

Die Analyse mittels Explikation wird laut Mayring (2010, S. 86) dann interessant, wenn der Sprecher von der lexikalisch-grammatikalischen Analyse abweicht, eigene Bedeutungen in die Sprache hineinlegt oder sich unvollständig bzw. unklar ausdrückt. Dieses führt zu einem Rückgriff auf den Kontext, wobei er hierbei zwei Explikationsstrategien unterscheidet, nämlich der engen und der weiten Kontextanalyse. Bei der engen Kontextanalyse wird ausschließlich das direkte Textumfeld betrachtet und bei der weiten Kontextanalyse wird Zusatzmaterial herangezogen. Dieses Zusatzmaterial sind vorangegangene Informationen, Hintergrundinformationen, der nonverbale Kontext und der Situationskontext der zu klärenden Textstelle.

Mayring beschreibt in seinem Ablaufmodell einer explizierenden Inhaltsanalyse insgesamt sechs Schritte, vgl. Mayring (2010, S. 87, Abbildung 13):

- E1 Bestimmung der Auswertungseinheit, d. h. der zu explizierenden Textstelle: In diesem Schritt wird die Textstelle definiert, welche expliziert werden soll. Diese bildet eine Auswertungseinheit in der Analyse.
- E2 Lexikalisch-grammatikalische Definition der Textstelle: Hierbei wird überprüft, ob die Textstelle bereits durch eine grammatikalische Analyse oder der lexikalischen Bedeutung der Textstelle erklärbar ist, wobei hierbei auch der sprachliche bzw. soziokulturelle Hintergrund betrachtet werden soll. Eine Übersetzung des Textes oder einer Textstelle wäre mit diesem Schritt bereits abgeschlossen und laut Mayring (2010, S. 86) ebenfalls als explizierende Inhaltsanalyse im weitesten Sinne zu verstehen, d. h. sollte dieser Schritt ausreichen, wäre die explizierende, qualitative Inhaltsanalyse hier bereits beendet.
- E3 Bestimmung des zulässigen Explikationsmaterials: In diesem Schritt wird bestimmt, welches weitere Material zur Explikation zugelassen werden soll. Dabei wird von einem engen Kontext zu einem immer weiteren Umfeld fortgeschritten.

E4/E5 Materialsammlung:

- E4 Enge Kontextanalyse - direktes Textumfeld: Bei dieser Form der Analyse wird ausschließlich Material aus dem Text selbst zugelassen. Dabei werden Stellen gesammelt, welche zu der betrachteten Textstelle in direkter Beziehung stehen. Außerdem soll noch überprüft werden, ob die Textstelle, die erklärt werden soll, in dem vorliegenden Material in gleicher oder ähnlicher Form auftauchen.

- E5 Weite Kontextanalyse - Zusatzmaterial über den Text hinaus: Bei dieser Form der Textanalyse wird Material gesammelt, welches über den eigentlichen Text hinausgeht. Hierzu zählen Informationen über den Verfasser des Textes, Informationen über die Entstehungsbedingungen des Textes, allerdings auch das theoretische Verständnis der Aufgabe. Die weiteste Form davon ist die Betrachtung des vollständigen Verstehenshintergrunds zur Explikation, welche bis hin zu freien Assoziationen der interpretierenden Person mit der Textstelle gehen kann, wobei eine solche Herangehensweise genau begründet werden muss.
- E6 Formulierung der explizierenden Paraphrase(n): In diesem Schritt soll eine Formulierung gefunden werden, welche die betrachtete Textstelle erklärt. Solche Paraphrasen entstehen durch eine Zusammenfassung des gesamten Materials.
- E7 Überprüfung, ob die Explikation ausreicht: Hierbei ersetzt die Paraphrase im Text die zu erklärende Stelle. Das Ziel davon ist die Überprüfung, ob eine sinnvolle Explikation erreicht wurde. Bei einem Nichtausreichen der Explikation gehe zu E3 zurück.

Für diese sieben Schritte gibt Mayring (2010, S. 89) jeweils Explikationsregeln an, wobei für die Textauswahl in E1 noch keine Auswertungsregeln angegeben werden müssen:

E2 Lexikalisch-grammatikalische Definition

- E2.1 Bestimme die vor dem sprachlichen und soziokulturellen Hintergrund relevanten Lexika und Grammatiken.
- E2.2 Analysiere danach die Textstelle auf ihre grammatikalische und lexikalische Bedeutung.
- E2.3 Überprüfe, ob die Textstelle dadurch bereits hinreichend erklärt ist.

E3 Bestimmung des Explikationsmaterials

- E3.1 Beginne mit dem engsten Textkontext, d. h. beim direkten Umfeld der zu explizierenden Stelle im Text.
- E3.2 Schreite zu immer weiterem Kontext fort, wenn die Überprüfung der Explikation nicht befriedigend ist.

E4 Enge Kontextanalyse

- E4.1 Sammle alle Aussagen, die in einer direkten Beziehung zur fraglichen Stelle im direkten Textkontext stehen, d. h. die sich
- definierend, erklärend,
 - ausschmückend, beschreibend,
 - beispielgebend, Einzelheiten aufführend,
 - korrigierend, modifizierend,
 - antithetisch, das Gegenteil beschreibend
- zur Textstelle verhalten
- E4.2 Überprüfe, ob die zu erklärende Textstelle im Text noch in gleicher oder ähnlicher Form auftaucht, und untersuche den dortigen engen Textkontext.

E5 Weite Kontextanalyse

- E5.1 Überprüfe, ob den Verfasser der Textstelle weiteres explizierendes Material zugänglich ist.
- E5.2 Ziehe Material über die Entstehungssituation des Textes zur Erklärung heran.
- E5.3 Überprüfe, ob aus dem theoretischen Vorverständnis explizierendes Material abgeleitet werden kann.
- E5.4 Überprüfe, ob aufgrund des eigenen allgemeinen Verstehenshintergrundes weiteres Material heranzuziehen ist.
- E5.5 Begründe die Relevanz, den Bezug des gesamten Materials zur fraglichen Textstelle.

E6 Explizierende Paraphrase

- E6.1 Fasse das zur Explikation gesammelte Material zusammen und formuliere daraus eine Paraphrase für die fragliche Textstelle.
- E6.2 Bei widersprüchlichem Material formulieren mehrere alternative Paraphrasen.

E7 Überprüfung der Explikation

- E7.1 Füge die explizierende Paraphrase anstatt der fraglichen Stelle in das Material ein.
- E7.2 Überprüfe, ob im Gesamtzusammenhang des Materials die Textstelle ausreichend sinnvoll ist.
- E7.3 Wenn die Explikation nicht ausreichend erscheint, bestimme neues Explikationsmaterial und durchlaufe die Analyse aufs Neue (ab drittem Schritt).

In dieser Arbeit dient die zuvor bereits vorgestellte SEL sowie der elektrotechnische und mathematische Hintergrund der Aufgabe als das herangetragene „zusätzliche Material“. Das Ziel bei deren Erstellung ist, dass diese so umfassend sein sollen, dass kein weiteres Material bei den Analysen der studentischen Arbeitsprozesse hinzugezogen werden muss. Statt einer Betrachtung der lexikalisch-grammatischen Definition dient hier die in der SEL erfasste elektrotechnische bzw. mathematische Fachsprache als Grundlage für die weiteren Analysen. Auch die Betrachtung der oben-geschilderten Abweichungen und der Verwendung von eigenen Bedeutungen bei der Sprache bezieht sich hier auf Unterschiede zu der SEL.

In dem folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie die explikative Inhaltsanalyse verwendet wird, um die Studierendenbearbeitungen zu analysieren. Hierzu wird das Konzept der niedrig-inferenten Analysen verwendet.

3.4.3 Das Konzept der niedrig-inferenten Analysen

Die niedrig-inferenten Analysen, kurz NIAs, sind Analysewerkzeuge für die Auswertung der Videostudien mit den Studierendenpaaren aus der Elektrotechnik. Als Material zur Explikation dienen die Studi-Expert-Lösungen. Sie haben fünf Funktionen:

- Verknüpfung der Phasen aus der Studi-Expert-Lösung mit den Phasen, die sich in den Lösungsprozessen der Studierenden zeigen
- Beschreibung von Unterschieden zwischen den idealisierten Lösungswegen in der Studi-Expert-Lösung und den tatsächlichen Lösungsprozessen der Studierenden

- Kommentierung und Interpretation der Unterschiede mit dem Ziel, (aufgabenunabhängige) Strategien der Studierenden beschreiben zu können
- Bezüge der Vorgehensbeschreibungen zu den Erkenntnistheoretischen Spielen, vgl. Tuminaro und Redish (2007), und Rechtfertigungsstrategien, vgl. Bing (2008), identifizieren und beschreiben. Diese Ansätze beschreiben tatsächliche Strategien (bzw. Spiele), die Studierende beim Lösen einsetzen und sind daher kein Bestandteil der vorherigen Analysen, da diese eine normative Perspektive auf die Aufgabenlösung einnehmen.

Zur Erstellung der NIAs werden die Transkripte zu den Videostudien mit den Studierenden in Phasen gemäß E1 (vgl. Seite 106) gegliedert, die an die Studi-Expert-Lösung angelehnt sind, die als Explikationsmaterial im Sinne von E2 (vgl. Seite 106) bei den Analysen herangezogen wird. Bei der Bezeichnung der Phasen wird eine andere Nummerierung als in der Studi-Expert-Lösung verwendet, da zwar grundsätzlich ähnliche Schritte unternommen werden, aber nicht suggeriert werden soll, dass die Phasen 1 zu 1 übereinstimmen. Innerhalb der Phasen werden in den Analysen jeweils drei Schritte durchgeführt. Diese Phasen entsprechen einer Zerlegung des Explikationsmaterials im Sinne von E3, vgl. Seite 106. Die Kontextanalyse, welche nach enger (vgl. Seite 106) bzw. weiter (vgl. Seite 107) Kontextanalyse unterschieden wird, geschieht hier mit der Studi-Expert-Lösung, die den Kontext normativ für die Analysen „rahmt“.

1. die Beschreibung des Vorgehens der Studierenden vor dem Hintergrund der Kontextanalyse in der SEL, vgl. Seite 106. Anschließend Paraphrasierung der Vorgehensweisen mit Hilfe der SEL als „explizierende Paraphrase“ entsprechend vgl. Seite 107. An dieser Stelle diene das Experteninterview auch zur Klärung von Fragen aus den studentischen Bearbeitungsprozessen.
2. Erarbeitung der Unterschiede zu der Studi-Expert-Lösung auch vor dem Hintergrund der Ausführungen in der Kontextanalyse, vgl. Seite 106f. Dieses wurde in der Anpassung auf die vorliegende Situation in der Mathematik erweitert, um die auf Seite 110 erwähnten Punkte. Ergänzung wurden noch weitere Punkte im Kontext der Aufgabenbearbeitung paraphrasiert, siehe unten, die aber im Kontext der Aufgabenbearbeitung von Bedeutung sind, z. B. das Suchen des Ansatzes oder Aussagen zur Vollständigkeit der Lösung.
3. Kommentierung sowie mögliche Erklärungen und Interpretation der in Schritt 2 gefundenen Unterschiede

Das Ziel der Analysen ist es, durch Vergleiche mit der normativen Studi-Expert-Lösung Unterschiede bei den Lösungsprozessen der Studierenden zu erarbeiten und Strategien der Studierenden zu erkennen, die bei solchen Aufgaben noch unerfahrener als die Experten in den Interviews sind. Hierzu sollen insbesondere nähere Daten dazu erhoben werden, ob die in PARI-Phase 3 durch die Experten angegebenen Hürden tatsächlich bei den Lösungsprozessen von Studierenden erkennbar sind, vgl. die Forschungsfragen auf Seite 72.

Konkrete Vorgehensweise zur Erstellung der niedrig-inferenten Analysen

Im ersten Schritt wird das Vorgehen der Studierenden bei der Bearbeitung qualitativ beschrieben, wobei die Phasen der Lösung an den Phasen aus der Studi-Expert-Lösung orientiert sind. Dabei steht im Fokus der Analyse, welche Schritte die Studierenden unternehmen und welche Begründungen sie für ihr Vorgehen nennen. Teilweise ergeben sich auch Unterschiede bei den

Vorgehensweisen der einzelnen Personen in einem Studierendenpaar.

Die Unterschiede zu der SEL, die in einem zweiten Schritt erarbeitet wurden, können anhand folgender Kategorien gegliedert werden. Hierbei werden die folgenden Kategorien verwendet:

1. Fehler: falsche Bearbeitungen bzw. Zwischenschritte der Studierenden
2. Andere Lösungsstrategien: alternative Lösungswege, die richtig sind, aber nicht von der Studi-Expert-Lösung erfasst sind
3. Vereinfachungen bei der Bearbeitung: Selbstgewählte Aufteilungen und „Tricks“ bei der Bearbeitung der Aufgabe

Des Weiteren werden bei den Paraphrasierungen noch folgende Punkte miteingefasst, welche das tatsächliche Vorgehen von Studierendenpaaren, die mit den vorliegenden Aufgaben konfrontiert sind, beschreiben:

1. Suchen eines Ansatzes: Überlegungen, die zum Finden eines Ansatzes bzw. Bestimmung einer Formel zur Lösung der Teilaufgaben führen, und deren Rechtfertigung
2. Stille Überlegungen und Aktionen ohne Begründungen: Schritte, die die Studierenden ohne weitere Erläuterung unternehmen
3. (metakognitive) Validierungen: Rechtfertigungen, die die Richtigkeit der Ergebnisse belegen
4. Vollständigkeitsbeurteilung der Lösung: Den Studierenden ist teilweise unklar, ob sie bereits die Aufgaben vollständig gelöst haben bzw. ihre Argumentationen ausreichen

Während die SEL normative Lösungen enthält, dienen diese Punkte eher dazu zu beschreiben, wie die Lösungsprozesse der Studierenden ablaufen und was sie beim lauten Denken äußern bzw. was aus den Niederschriften erkennbar ist. Dieses ist interessant, um eine vollständige und feingegliederte Darstellung der Lösungsprozesse zu erhalten und insbesondere Verbindungen zu den Theorien von Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) erhalten zu können.

Im dritten Schritt der NIA-Analysen wurden Kommentierungen sowie mögliche Erklärungen und Interpretationen für die in Schritt 2 ermittelten Unterschiede zur Studi-Expert-Lösung erarbeitet. Hierbei sollten Strategien identifiziert und modelliert werden, die die Studierenden einsetzen. Diese Strategien können (teilweise) direkt den Unterschieden aus Analyseschritt 2 zugeordnet werden und verdeutlichen beispielsweise, warum die Studierenden gewisse Fehler machen oder wie sie vorgehen, wenn ihnen zunächst eine Formel unbekannt ist.

Eine Bearbeitung zu jeder der vier Aufgaben wird mit Hilfe des Konzeptes der NIA analysiert. Die übrigen Bearbeitungen werden an den Stellen im Lösungsprozess näher analysiert, die sich in der Analyse der ersten Bearbeitung als interessant bzw. als problematisch gezeigt haben. Derartige Stellen werden in den Transkripten entsprechend der oben genannten induktiven Kategorien (Fehler etc.) verglichen. Dort werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den drei bis fünf Bearbeitungen der Studierendenpaare untersucht. Auf diese Weise sollen typischen Charakteristika in den Bearbeitungen und dem Finden von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den unterschiedlichen Studierendenpaaren herausgearbeitet werden.

3.4.4 Induktive Kategorien zur Analyse der Bearbeitungsprozesse der Studierenden und Experten

In diesem Abschnitt werden Kategorien für die Strategien vorgestellt, welche für die Analysen der Bearbeitungsprozesse sowohl von Studierenden als auch von Experten zur Strukturierung eingesetzt werden. Diese sollen einen Überblick und eine Gliederung für die Analysen der Bearbeitungsprozesse der Studierenden geben. Die groben Kategorien {A. . .} bis {C. . .} wurden aus den theoretischen Analysen entwickelt. Die Unterkategorien ergeben sich aus der Bündelung von Strategien, welche sich in den Bearbeitungsprozessen gezeigt haben und über die groben Kategorien gegliedert wurden. Die Kategorien und Unterkategorien dienen zur Ausdifferenzierung der drei Phasen, welche sich aus den normativen Analysen ergeben haben:

- A Mathematisierung,
- B Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten und
- C Validierung.

Unter Verwendung der in diesem Unterabschnitt vorgestellten Kategorien werden einerseits die Vergleiche zwischen den verschiedenen Bearbeitungen der Studierendenpaare und andererseits der Vergleich zwischen den jeweiligen Studierendenbearbeitungen und der Expertenbearbeitung durchgeführt. Mit ihrer Hilfe werden die Bearbeitungsprozesse einzeln interpretiert, dieses in den Zwischenfazit für die Aufgabenteile zusammengefasst und dieses dann wiederum für die einzelnen Aufgaben zusammengefasst. Auf dieser Ebene werden schließlich auch Verbindungen zwischen verschiedenen Aufgaben gezogen.

Mathematisierung:

- {A1} Einstieg in die Aufgabe und Verstehen der Aufgabenstellung
 - Erwartung an eine korrekte Lösung: Strategien zur Erfassung von dem, was zur Lösung der Aufgabe erwartet wird, z. B. durch Analyse der Begriffe. Entsprechend Polya (1949): „Was ist gesucht?“
 - Gegebene Daten: Auseinandersetzung mit den in der Aufgabe gegebenen Größen. Entsprechend Polya (1949): „Was ist gegeben?“
 - Arbeit mit konventionalisierten Skizzen: Nutzen der in den Aufgabenstellungen gegebenen Skizzen z. B. von Schwingkreisen zum Finden eines mathematischen Ansatzes
 - Strukturierung und Benennung: Unterteilung der Aufgabe in Teilaufgaben sowie geschickte Wahl der Benennung selbstgewählter Größen. Entsprechend Polya (1949): „Bezeichner“
 - Schlagwörter in der Bearbeitung: Finden von Begriffen aus der Elektrotechnik-Vorlesungen, welche den Weg vorgegeben, wie z. B. „Kräftegleichgewicht“.
 - Analogien zu bereits gelösten Aufgaben: Können Wege genutzt werden, welche in bereits gelösten Aufgaben eingesetzt wurden. Entsprechend Polya (1949): „Hast du die Aufgaben so oder ähnlich schon einmal gesehen?“
- {A2} Arbeit mit Physik

- Betrachtung physikalischer Mechanismen: Betrachtung der physikalischen Vorgänge, welche in den Aufgaben auftreten. Entsprechend: „Physical Mechanisms“ nach Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008)
 - Interpretation von Formeln und Gleichungen: Auseinandersetzung mit den physikalischen Implikation der in den Aufgaben auftretenden Formeln anstatt eines bloßen Zitierens, z. B. Interpretation der Ableitung in der Bauteilgleichung von Spule bzw. Kondensator
 - Spezialisierung und Verallgemeinerung: Durchdenken von Veränderungen an der Aufgabe und deren physikalischer Implikation, z. B. durch Hinzufügen oder Weglassen von Bauteilen. Entsprechend Polya (1949): „Kannst du die Aufgabe verallgemeinern oder spezialisieren?“
 - Verwendung von Analogien zwischen verschiedenen Konzepten: Nutzen von Analogien innerhalb der Physik bzw. Elektrotechnik, z. B. die Analogie zwischen Elektrizität und Magnetismus
 - Rückschlüsse auf Formelbestandteile aus dem physikalischen Kontext: Finden von Formelbestandteilen aus der Analyse der physikalischen Situation, z. B. Verwenden, dass die magnetische Leitfähigkeit in Betrachtungen zum Magnetismus relevant ist
 - Mathematisierung physikalischer Vorgänge: Direkte Nutzung der Betrachtung eines physikalischen Vorgangs zur mathematischen Beschreibung, z. B. des Spannungsverlaufs zum Finden einer Funktion, die diesen beschreibt. Entsprechend Tuminaro und Redish (2007): „Mapping Meaning to Mathematics“
- **{A3}** Heranziehen von Faktenwissen (Gleichungen, Sätzen) aus Autoritäten im Sinne von Bing (2008)
 - Wahl einer Formel mit anschließender Anpassung: Heranziehen einer allgemeinen Formel, welche dann auf die Benennung der Veränderlichen und die konkrete Situation in der gegebenen Aufgabe angepasst wird, z. B. Anpassung der Formel für magnetische Energie auf die Anwendung in Eisen oder Luft
 - Sammeln von Formeln: Suchen aller Formeln, die für die vorliegende Situation relevant sein könnten
 - Heranziehen von Merksätzen: Verwenden von Merksätzen, welche in der Elektrotechnik-Veranstaltung vermittelt wurden, unter Beachtung von deren Anwendbarkeit, z. B. „Beim Kondensator eilt der Strom vor. Bei Induktivitäten die Ströme sich verspäten.“ unter der Bedingung, dass Wechselstrom vorliegt.
 - **{A4}** Herleiten von Gleichungen und (Zwischen-)Ergebnissen unter Verwendung mathematischer Methoden
 - Nutzung innermathematischer Mathematisierungshilfsmittel: Nutzen von Methoden aus der Mathematik zur Beschreibung von elektrotechnischen Vorgängen, z. B. Einsatz von Begriffen aus der Graphentheorie zur Beschreibung von Einflüssen von Strömen und Spannungen in einem Netzwerk
 - (Fächerübergreifende) Isomorphismen: Direkte Verbindungen zwischen mathematischen Ausdrücken und elektrotechnischen Größen, z. B. Bestimmung einer Größe als Realteil eines mathematischen Ausdrucks

- Verwendung mathematischer Formeln zum Erschließen der Physik: Verstehen von Physik mit Hilfe einer vorliegenden mathematischen Formel, entsprechend „Mapping Mathematics to Meaning“
- Nutzen von Begriffen aus der Aufgabenstellung zur Mathematisierung von Ausdrücken, z. B. des Begriffs „ $\llbracket X \rrbracket$ -Dichte“ als Verhältnis der Größe X zu einer Fläche oder einem Volumen, also dem Quotienten dieser Werte.

{AB} Übergang zwischen Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen den ersten beiden Phasen Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten, z. B. zur Sicherstellung des Erhalts einer lösbaren Formel unter Beachtung aller benötigten Einflüsse

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten:

- **{B1}** Verringerung des mathematischen Aufwands
 - Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung, z. B. Verwendung von Multiplikationen statt Integration von Vektorfeldern durch homogene Felder
 - Vereinfachung der zu verwendenden Formeln, z. B. Zusammenfassung von Größen durch gemeinsame Formelelemente
- **{B2}** Arbeit mit mathematischen Ausdrücken
 - Schnelles Einsetzen von Zahlen und Arbeit mit numerischen Variablen: Einsetzen von bekannten Größen im ersten Schritt, um diese von unbekannten Größen unterscheiden zu können. Um die Bezüge zu den eingesetzten Größen weiterhin sichtbar zu halten, fassen sie jedoch die Größen weder bzgl. der Zahlenwerte noch der Einheiten zusammen.
 - Gleichungsmanagement: Kombination mehrerer Formeln mit dem Ziel, durch sukzessive Kombination eine Formel zu erhalten, in der alle Größen bis auf die gesuchte bekannt sind. Entsprechend Bruder und Collet (2011) „Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes“
 - Rückwärtsarbeiten: Betrachtung der Form eines realistischen Ergebnisses zum Erschließen eines passenden Ansatzes
 - Zerlegen und Zusammensetzen: Veränderungen in der Zusammenfassung von Größen, die beispielsweise addiert werden müssen, zur einfacheren Berechnung. Entsprechend „Zerlegungs-/ Ergänzungsprinzip“ nach Bruder und Collet (2011)
- **{B3}** Anwendung von Methoden aus universitären Mathematikveranstaltungen, d. h. sowohl aus der „Mathematik für Ingenieure“ als auch aus mathematischen Vorkursen
 - Einsetzen von Methoden aus der Sekundarstufe 1, z. B. Potenz- und Wurzelgesetzen, Bruchrechnung, Aufstellen linearer Gleichungen
 - Arbeit mit komplexen Zahlen

- Differenzieren von Funktionen in einer Veränderlichen
- Integration von Vektorfeldern
- Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen
- Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen
- Mathematische Umstrukturierung durch Umformung eines Ausdrucks zur leichteren Berechnung

- **{B4}** Weitere Methoden aus dem mathematischen Problemlösen

- Einsetzen von Werten: Erstellen von Wertetabellen zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion.
- Extremalprinzip: Einsetzen von maximalen und minimalen Werten für die betrachteten Größen zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion. Entsprechend „Extremalprinzip“ nach Bruder und Collet (2011)
- Qualitative Betrachtungen der Formeln: Untersuchung von Formeln durch Einsetzen bestimmter Werte, z. B. Variieren von Größen zur Betrachtung der physikalischen Vorgänge
- Qualitative Prognose von Lösungen: Überlegungen, wie die Lösung einer Gleichung aussehen kann, z. B. dass die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung eine Exponentialfunktion ist

{BC} Übergang zwischen mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten und Validierung

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen den zweiten beiden Phasen mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten und Validierung zur laufenden Überprüfung von Rechnungen.

Validierung:

- **{C1}** Validierung über Einheiten der auftretenden physikalischen Größen
 - Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: Verwendung des Systems von sieben Grundeinheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampere, Kelvin, Mol, Candela) zur Beschreibung aller weiteren Einheiten aus der Physik unter Beachtung von Präfixen (kilo, mega, etc.).
 - Verwendung von strukturellen Elementen von Formeln: Überlegungen zu der Struktur von Formeln bezogen auf die Einheiten, z. B. dass alle Summanden dieselbe Einheit haben müssen. Entsprechend: Entsprechend „Symmetrieprinzip“ nach Bruder und Collet (2011)
- **{C2}** Validierung über Größenordnungen der Ergebnisse
 - Innermathematischer Vergleich mehrerer Größen: Nutzen, dass bekannt ist, dass es Größenverhältnisse zwischen zwei Größen gibt, z. B. dass eine Größe immer größer gleich einer anderen ist, z. B. für den Gleichrichtwert einer Spannung und den arithmetischen Mittelwert

- Kenntnis aus Veranstaltung: Wissen über die Wertebereiche der vorkommenden Größen, z. B. eine untere und obere Grenze für die magnetische Flussdichte b_L .
- Intuitive Vorstellung: Überlegungen zu realistischen Größenordnungen, welche den Studierenden z. B. aus Versuchen und Experimenten, z. B. ein realistischer Wert für die anhängbare Masse an einen magnetischen Kreis
- **{C3}** Validierungsstrategien unter Betrachtung von Realsituationen
 - Validierung nach Blum und Leiß (2007): Überlegungen, ob die Ergebnisse das tatsächliche Verhalten korrekt wiedergeben
- **{C4}** Validierung durch Mehrfachbearbeitung
 - Nutzen zweier Rechenwege: Nutzen, dass eine Größe auf zwei Wegen berechenbar ist (vgl. **{B1}**) und überprüfen, ob in beiden Fällen das gleiche Ergebnis erzielt wird, oder gleichzeitige Berechnung im Rahmen der Partnerarbeit mit demselben Ziel.

3.5 Klausurbearbeitungen von Studierenden

In diesem Abschnitt wird vorgestellt, wie die vorliegenden Bearbeitungen aus den Klausuren analysiert wurden. Die Kategorisierung von Klausuraufgaben ermöglicht es – im Gegensatz zu den SELs und den NIAs – auch quantitative Aussagen über Herausforderungen und Hürden in den vier vorliegenden Elektrotechnik-Aufgaben zu machen. Jedoch haben die Produkte der Aufgabenbearbeitung aus der Klausur in den meisten Fällen den großen Nachteil, dass sie kurz gehalten sind und keine Begründungen bzw. insbesondere Vorüberlegungen enthalten, welche in den Experteninterviews und Videostudien mit den Studierenden erfasst werden konnten.

Die schriftlichen Klausuren wurden dabei anhand des Schemas ausgewertet, dass für jede Aufgabe getrennt von der ursprünglichen Klausurlösung aufbauend auf der Studi-Expert-Lösung erstellt wurde. Dieses Schema beruht auf den Phasen der Studi-Expert-Lösung, welche jeweils in die Lösungsschritte unterteilt wurden, die Bearbeiter der Aufgabe durchführen müssen, um die Aufgaben lösen zu können. So wird beispielsweise das Aufstellen einer Formel von dem Bestimmen einer Größe mit Hilfe der hergeleiteten Formel unterschieden. Weitere solche Lösungsschritte können z. B. das Erstellen einer Skizze oder die Interpretation einer Formel sein.

Die Methode, welche in diesem Abschnitt beschrieben wird, wird zur Beantwortung der Forschungsfrage

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

und ihrer beiden Unterfragen

- Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?
- Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

eingesetzt.

3.5.1 Ablauf der Studie

Aus der Zweitsemesterklausur, aus der die Aufgaben für die Studien übernommen wurden, liegen insgesamt ca. 90 Bearbeitungen vor. Die Daten wurden somit unter Klausurbedingungen erhoben, d. h. die Studierenden haben einzeln gearbeitet und sie konnten keine Informationen von außen hinzuziehen. Als Hilfsmittel war ein nicht programmierfähiger Taschenrechner zugelassen. Insgesamt standen für die Bearbeitung der vier analysierten Aufgaben sowie einer weiteren zum Thema „Gleichstrommaschine“ 120 Minuten Klausurzeit zur Verfügung.

Diese Bearbeitungen wurden durch Studentische Hilfskräfte eingescannt und in separaten PDF-Dokumenten gesichert. Dabei wurde über Personencodes sichergestellt, dass die Bearbeitung der- bzw. desselben Studierenden bei verschiedenen Aufgaben weiterhin zuordenbar sind. Eine Durchführung einer quantitativen Studie wäre unter ökonomischen Gesichtspunkten nicht möglich gewesen. Jedoch stellen die Klausurbedingungen sicher, dass sich hier verwertbare Daten ergeben, die Aufschlüsse über die Leistungen einzelner Studierender geben.

3.5.2 Auswertung der Daten aus den Klausuren

Für die Auswertung der Daten aus den Klausuren wurde ein feingliedriges Kategorienschema entwickelt, um verschiedene Kompetenzen bei der Aufgabenbearbeitung trennen zu können. Mit dessen Hilfe können nicht nur Aussagen über die Richtigkeit einer Teilaufgabe als ganzes, sondern auch über notwendige Teilschritte gemacht werden. So wird beispielsweise das Aufstellen einer Formel und die Bestimmung des Wertes einer Größe unter Verwendung der hergeleiteten Formel getrennt betrachtet. Dieses ermöglicht neben der Untersuchung von Aspekten wie Lösungsquoten auch die Berechnung von Partial-Credit-Modelle, welche den Vergleich zwischen verschiedenen Kompetenzen sowie eine Skalenbildung ermöglichen.

Für die Analyse der Daten wurde eine evaluative, qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012, S. 100) durchgeführt. Damit soll quantitativ die Forschungsfrage – vgl. Seite 72 – geklärt werden, welche Hürden bei den Bearbeitungsprodukten der Studierenden erkennbar sind. Die Schritte sind in Abbildung 3.5.1 dargestellt. Im einzelnen werden folgende Einzelschritte durchgeführt nach Kuckartz (2012, S. 99):

1. Festlegen der Bewertungskategorie: In der Phase werden die Kategorien festgelegt, nach welchen Bewertungen durchgeführt werden. Dabei werden Bezüge zur Forschungsfrage gestellt.
2. Identifizieren und Codieren der für die Bewertungskategorie relevanten Textstellen: Hierbei müssen sämtliche Textstellen gefunden werden, die für eine spezielle Kategorie relevant sind.
3. Fundstellen der Bewertungskategorie fallbezogen zusammenstellen: In diesem Schritt werden relevante Punkte aus 2 zu Hauptkategorien geordnet.
4. Ausprägungen der Bewertungskategorie formulieren und Fundstellen zuordnen, ggf. Veränderung der Definitionen und Zahl der Ausprägungen: In diesem Punkt werden differenziert die Ausprägungen einer Kategorie zusammengestellt. Dabei wird zwischen einer hohen Ausprägung, einer niedrigen Ausprägung sowie „nicht zu klassifizieren“ unterschieden. Schritt 4 und 5 werden in mehreren Verfeinerungsstufen durchlaufen.

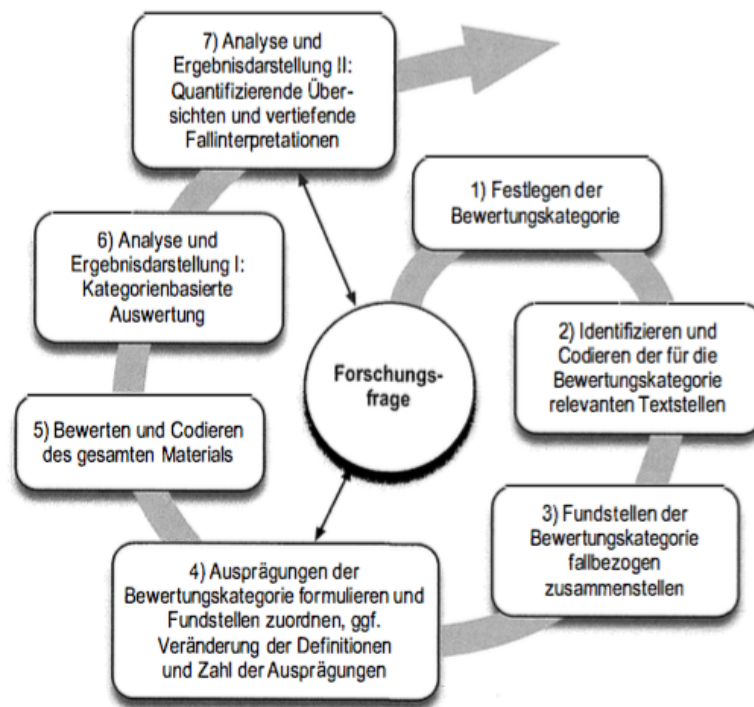


Abbildung 3.5.1: Evaluative, qualitative Inhaltsanalyse nach (Kuckartz, 2012, S. 100)

5. Bewerten und Codieren des gesamten Materials: Hier gibt es eine endgültige, kategorienbezogene Einschätzung und Bewertung des Materials. In Zweifelsfällen soll notiert werden, warum eine derartige Einstufung vorgenommen wurde.
6. Analyse und Ergebnisdarstellung I - Kategorienbasierte Auswertung: Dieses ist die erste Stufe der Auswertung. Zunächst werden die Kategorien mit ihren Ausprägungen dargestellt, welche mit Beispielen unterstützt werden. Bei den Beschreibungen wird zwischen „statistisch-tabellarisch“ und „verbal-interpretativ“ unterschieden.
7. Analyse und Ergebnisdarstellung II - Quantifizierende Übersichten und vertiefende Fallinterpretationen: In dieser zweiten Stufe der Analysen werden bivariate Zusammenhangsanalysen und vertiefende Interpretationen durchgeführt. Ein Hilfsmittel sind hier z. B. Kreuztabellen, die die Zusammenhänge zwischen den Kodierungen verschiedener Kategorien und ihren Ausprägungen darstellten. Außerdem können z. B. Untersuchungen mit Partial-Credit-Modelle unterstützt durch Bildung von Skalen eingesetzt werden.

Anpassung der evaluierenden, qualitativen Inhaltsanalyse auf die vorliegende Situation und Kodierung der Daten

Die evaluierende, qualitative Inhaltsanalyse wurden in der folgenden Weise bei den Analysen verwendet:

Im ersten Schritt wurde mit Hilfe der Studi-Expert-Lösung ein Kategorienschema gemäß Kuckartz (2012, S. 99) entwickelt, welches jede Phase aus der SEL noch weiter in Teilschritte untergliedert. Diese Teilschritte unterteilen beispielsweise das Aufstellen einer Gleichung und das Bestimmen der Lösung mit Hilfe der Formel. Diese waren in der SEL noch zusammengefasst,

werden hier aber getrennt gemäß ihrer Richtigkeit bewertet, um genauere Aussagen gewinnen zu können. Eine Anwendbarkeit hat sich nach Analyse aller vorliegenden Klausurbearbeitungen, d. h. ca. 90, gezeigt. Ein solches Schema ist in Abbildung 3.5.2 dargestellt. Diese Abbildung stellt ein Schema mit Ankerbeispielen da, mit welchem die vorliegenden Klausurbearbeitungen kategorisiert wurden. Näheres dazu folgt in diesem Unterabschnitt.

Da diese Gliederung entlang einzelner, unabhängiger Schritte des Lösungsprozesses durchgeführt wurde, war keine Kombination verschiedener Textstellen bzw. hier Teile der Klausur-Niederschrift der Studierenden notwendig, so dass Schritt 2 und 3 hier nicht explizit durchgeführt werden mussten. Die Kombination von Schritt 4 und 5 wurde folgendermaßen durchgeführt:

Mit dem entwickelten Kategorisierungsschema wurden jeweils zwanzig Bearbeitungen, also ca. ein Fünftel der eingescannten Klausuren, eingestuft. Das hierzu verwendete Schema wird unten beispielhaft für Aufgabe A näher erläutert. Durch die Kodierung der ersten Klausurbearbeitungen ergaben sich in den realen Bearbeitungsprozessen in den Klausurbearbeitungen Optimierungen bei dem Kategorisierungsschema. In einem zweiten Schritt haben zwei Studierende mit dem optimierten Kategorisierungsschema unabhängig voneinander dieselben Klausuren kodiert und es wurden mittels Zellenvergleichen in einer Tabellenkalkulation Unterschiede in den drei vorliegenden Kodierungen derselben Aufgaben ermittelt. Diese wurden bei einem gemeinsamen Termin diskutiert und idaraufhin wurde das Kodierungsschema nochmals optimiert, wobei sich hier eher kleinere Änderungen ergeben haben.

Anschließend haben die beiden Studierenden die bereits kodierten Klausuren entsprechend der Ergebnisse der 3er-Diskussion überarbeitet und auch die restlichen Klausuren kategorisiert. Als die Daten vorlagen, wurde unter Verwendung von SPSS die Interrater-Reliabilität, also Cohen's κ , bestimmt.

Die Werte für κ lagen bei der Berechnung der Werte für die beiden Studierenden jeweils über 0,9, also bei einer fast vollkommenen Übereinstimmung. Im nächsten Schritt wurden die Ergebnisse der Studierenden wieder über einen Zellenvergleich in Excel untersucht und bei Differenzen habe ich eine Entscheidung zu der Einstufung der Bearbeitung gefällt.

Die Partial-Credits wurden in den Aufgaben folgendermaßen vergeben: Bei jedem Lösungsschritt werden im Sinne eines Partial-Credit-Modells nach Masters und Wright (1997) drei verschiedene, ordinale Stufen in der Kodierung unterschieden:

- Studierende erhalten die Kategorisierung 2, wenn die Lösung vollkommen korrekt ist.
- Sie erhalten die Kategorisierung 1, falls die Lösung fehlerhaft ist, aber dennoch richtige Anteile enthält. Es wird beispielsweise die Kategorisierung 1 vorgenommen, wenn die Lösung multipliziert mit einer Zehnerpotenz richtig wäre oder falls ausschließlich die Einheit des Ergebnisses stimmt. In Unterkategorien, d. h. 1a und 1b, wird in den Daten auch erfasst, welcher Fehler bzw. Mangel genau vorliegt.
- Studierende erhalten eine 0, falls der Lösungsschritt vollkommen falsch ist oder nicht bearbeitet wurde.

Durch die Abstimmung der drei Kodierer wurde ein wesentlicher Punkt deutlich, nämlich die Frage nach dem Umgang mit Folgefehlern und wie diese bei der Kategorisierung berücksichtigt werden sollen, was konkret Folgendes bedeutet. Zur Sicherstellung der Unabhängigkeit verschiedener Schritte in der Aufgabenbearbeitung wird folgendermaßen vorgegangen:

	Kategorie mit Kurzbeschreibung der Ideallösung	Ausprägungen	Ankerbeispiele
A1	Ersatzschaltbild: es wird ein Ersatzschaltbild angegeben, was für die Mathematisierung in A2 hilfreich ist. Da keine direkte Verbindung zu A2 hergestellt wird, ist es auch richtig, wenn alle Reluktanzen zu einer zusammengefasst werden, da „so weit wie möglich“ vereinfacht werden sollte.	2a Wahl einer passenden Zusammenfassung mit Eisen und Luft getrennt (unabhängig von der Anzahl der jeweiligen Reluktanzen) 2b Gesamtzusammenfassung aller Reluktanzen 1a Falsche Zusammenfassung: konstante (bzw. Eisen-) und vom Luftspalt abhängige Reluktanzen werden zusammengefasst 1b unvollständiges Bild: Luftreluktanz fehlt gänzlich 1c unvollständiges Bild: Eisenreluktanz fehlt gänzlich 0a falsches Ersatzschaltbild, z. B. Parallelschaltung 0b Strukturell falsches Ersatzschaltbild 0c keine Bearbeitung	
A2a	Reluktanz-Formelaufstellen (Achtung: Vertauschung der Reihenfolge mit dem nächsten ist möglich): Es wird eine Formel der groben Form $R_{ges} = R_{Fe} + R_L$ aufgestellt. Es werden die passenden Formeln für beide R's verwendet.	2 es werden beide Formeln (für Eisen und Luft) richtig herangezogen 1a es wird für Eisen und Luft dieselbe Formel verwendet 1b es werden falsche Reluktanzen zusammengefasst 1c es fehlen Reluktanzen 1d Kombination von 1a und 1b 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
A2b	Reluktanz-Berechnung: Es werden die korrekten Werte für die einzusetzenden Größen (Länge, Querschnittsfläche) eingesetzt und das Ergebnis stimmt im Rahmen von Toleranzen.	2 es wird die Reluktanz richtig berechnet 1a es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt 1b Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	

Tabelle 3.5.2: Beispiel für die Kodierung der Daten (aus Aufgabe A)

Falls Studierende die Formel falsch hergeleitet haben (kodiert als 0) bzw. die Formel fehlerhaft ist (kodiert als 1), aber dann mit dieser Formel aber dann korrekt weitergerechnet wurde, so wird das Bestimmen der Größe mit Hilfe der falschen Formel als richtig gewertet werden, also als 2 kodiert, falls keine weiteren Fehler auftreten. Dadurch ist eine Unabhängigkeit der Bewertung einzelner Lösungsschritte weitgehend gewährleistet.

Ein mittels der evaluierenden qualitativen Inhaltsanalyse erstelltes Kategorienschema ist in Tabelle 3.5.2 beispielhaft dargestellt. Es bezieht sich auf die Aufgabe A in den Studien.

3.5.3 Analyseverfahren für die durch die Kodierung erhaltenen Daten

Für jeden Aufgabenteil werden zunächst die Teilschritte beschrieben, die die Studierenden durchlaufen müssen, um den Aufgabenteil in der Klausur bearbeiten zu können. Dieses entspricht dem sechsten Schritt in der evaluierenden, qualitativen Inhaltsanalyse. Das Ziel ist die Beantwortung der Forschungsfrage gemäß Seite 72, welche Hürden bei Studierenden auftreten,

wobei dieses in diesem Fall quantitativ erhoben wird. Dazu wird folgende Gliederung bei den Analysen unternommen:

1. In einem ersten Schritt werden die Lösungsquoten für die einzelnen Kategorien vorgestellt. Zunächst wird gesagt, wie viele Studierende (sowohl absolut als auch relativ) den einzelnen Lösungsschritt richtig (Kodierung 2), halb-richtig (Kodierung 1) oder falsch gelöst (Kodierung 0) haben.
2. Anschließend werden die jeweiligen Anteile der Unterkategorien vorgestellt, d. h. es wird zum Beispiel die Frage beantwortet, wie viele der Studierenden, die die Aufgabe richtig gelöst haben, den Lösungsweg A verwendet haben oder bei wie vielen, die eine halb-richtige Lösung haben, die Einheit inkorrekt war. Dieses wird über die Kategorien 2a (richtige Lösung mit Lösungsweg 1), 2b (richtige Lösung mit Lösungsweg 2), 1a (richtiger Zahlenwert, aber falsche Einheit), 1b (richtige Einheit, aber falscher Zahlenwert) etc. erfasst.
3. Dann werden Kreuztabellen aufgestellt, die zusammengehörige Aufgabenteile miteinander verbinden. So können beispielsweise Zusammenhänge zwischen dem Aufstellen einer Formel und der Berechnung eines Ergebnisses mit Hilfe der Formel untersucht werden und auch Aussagen gemacht werden, wie viele Studierende beides richtig bearbeitet haben und damit Aufgaben vollständig richtig gelöst haben.
4. Zuletzt wird noch betrachtet, wie viele Studierende den Aufgabenteil gänzlich nicht bearbeitet haben bzw. wie viele Studierende die Aufgabe nach diesem Aufgabenteil abgebrochen haben.

Nach diesen vierschrittigen Analysen werden die Ergebnisse im Zusammenhang mit der Studi-Expert-Lösung diskutiert und ergänzen auf diese Weise die Analyseergebnisse aus den beiden anderen Analysestufen.

3.6 Gesamtüberblick zu den Studien und ihren Auswertungsmethoden

Dieser letzte Abschnitt soll noch einen kurzen Überblick über die Daten und Studien geben, welche für die Analysen in kommenden Kapiteln vorhanden sind:

In diesem Kapitel wurde die Methodologie der drei Typen von Studien zu vier Elektrotechnik-Grundlagentaufgaben, d. h.

- Experteninterviews
- Videostudien mit Studierendenpaaren
- Klausurbearbeitungen von Studierenden

sowie der Ansatz der Studi-Expert-Lösung als Hilfsmittel für Analysen von universitären Aufgaben in Anwendungsfächern der Mathematik wie den „Grundlagen der Elektrotechnik“ vorgestellt.

Nach dem Durchführen der Studien liegen folgende Daten vor:

	Form der Daten	Erhebungsform	Anzahl pro Aufgabe
1	Experteninterviews	Laborbedingungen	1
2	Videostudien mit Studierendenpaaren	Laborbedingungen	3 bis 5
3	Klausurbearbeitungen von Studierenden	Klausurbedingungen	ca. 90

Diese wurden folgendermaßen erhoben und ausgewertet:

	Form der Daten	zugrundeliegende Auswertungsmethode	Ergebnis der Auswertungen
1	Experteninterviews	inhaltlich-strukturierende, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010)	Studi-Expert-Lösung
2	Videostudien mit Studierendenpaaren	explizierende, qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010)	Niedrig-inferente Analysen (pro Studierendenpaar, vergleichend)
3	Klausurbearbeitungen von Studierenden	evaluierende, qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012)	Statistische Auswertungen (Lösungsquoten, Partial-Credit-Modelle)

Daraus ergibt sich der gesamte Forschungsansatz zur Untersuchung der Forschungsfragen. Dieser ist in Abbildung 3.6 dargestellt.

In dem kommenden Kapitel werden die unterschiedlichen Analyseformen an einer Aufgabe zu Magnetischen Kreisen exemplarisch durchgeführt:

Ausgehend von der Aufgabenlösung des Instituts und einer Einführung in die elektrotechnischen und mathematischen Hintergründe wird zunächst die Studi-Expert-Lösung zu der Aufgabe vorgestellt. Aufbauend auf der Studi-Expert-Lösung werden dann erste Aussagen zu einem theoretischen Ansatz zur Analyse von Aufgaben aus universitären mathematischen Anwendungsfächern gemacht, was konkret eine Umdefinition des Modellierungskreislaufs bedeutet.

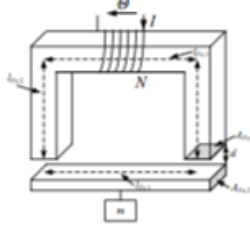
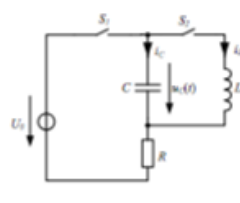
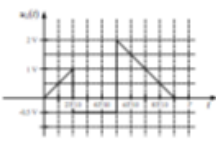
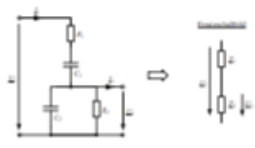
Die SEL wird dann zur Analyse der studentischen Bearbeitungsprozesse eingesetzt, wobei hierzu einerseits eine vollständige niedrig-inferente Analyse für eine Gruppe und andererseits vergleichende Analysen zu bestimmten Aufgabenteilen zu verschiedenen Gruppen vorgestellt werden. Danach werden die Klausurbearbeitungen untersucht, wobei für jeden Aufgabenteil Lösungsquoten bestimmt werden und anschließend ein Partial-Credit-Modell zum Aufstellen und zum Auswerten von Formeln aufgestellt wird. Zusammenfassend ergibt sich dann eine Gliederung der Bearbeitung der Aufgaben und Ergebnisse zu Kompetenzen, welche sich in den Bearbeitungen der Studierenden gezeigt haben.

KOMPETENZEN AN DER SCHNITTSTELLE MATHEMATIK-ELEKTROTECHNIK

Finden von abstrahierten Kompetenzen losgelöst von tatsächlichen Aufgaben

↑ Abstraktion der Ergebnisse ↑

BETRACHTETE AUFGABEN

Aufgabe A Magnetischer Kreis 	Aufgabe B Schwingkreis 	Aufgabe C Signalanalysen 	Aufgabe D komplexe Wechselstromrechnung 
--	--	---	---

↑ Anwendung auf ↑

VERWENDETE UND ENTWICKELTE WERKZEUGE

Studi-Expert-Lösung Eine normative Lösung zu den Aufgaben mit expliziten und impliziten Kompetenzerwartungen	Niedrig-inferente Analysen Ziel: Finden von Unterschieden zu Ideallösungen und Identifikation von Schwierigkeiten	Klausurkategorisierungen Ziel: Bestätigung, Verfeinerung und Erweiterung der Ergebnisse aus den ersten beiden Stufen
--	---	--



Experteninterviews mit vier Mitarbeitern aus der Elektrotechnik

Videostudien mit zwölf Studierendenpaaren

Klausurbearbeitungen von ca. 90 Studierenden



Modellierungs-kreislauf	Problemlösen und Metakognition	mathem.-physikal. Lösungsstrategien	PARI-Methodik
-------------------------	--------------------------------	-------------------------------------	---------------

↑ Theoretische Beschreibung durch ↑

ZUGRUNDELIEGENDE SITUATION

Grundlagen der Elektrotechnik



Mathematik für Ingenieure

Über Jahrzehnte über implizite Kompetenzvorstellungen entwickelt und weiterentwickelt

Abbildung 3.6.1: Gesamter Forschungsansatz

Kapitel 4

Normative und empirische Untersuchungen zu einer Aufgabe zum Thema „Magnetische Kreise“

Dieses Kapitel dient dazu, die methodologischen Ansätze und entwickelten Werkzeuge, welche im vorherigen Kapitel vorgestellt werden, an einer Aufgabe zu verdeutlichen. Dabei werden Bezüge zu der Zielsetzung der einzelnen Elemente im Analyseprozess gemacht. Dabei geht es thematisch um „Magnetische Kreise“. Magnetische Kreise treten in der Konstruktion von Elektromotoren, Transformatoren und Elektromagneten auf. Im Bezug auf Graphentheorie, welche bei Aufgabe B näher erklärt wird, ist ein magnetischer Kreis ein geschlossener ungerichteter Pfad, in welchem ein magnetischer Fluss (vergleichbar mit elektrischem Strom) auftritt. Im einzelnen ist dieses Kapitel folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst wird in Abschnitt 4.1 die Aufgabenstellung vorgestellt, wie sie den Studierenden in einer Klausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ vorlag. Dabei wird zusätzlich auch die Kurzlösung zitiert, welche den Korrektoren der Klausur vorlag. Diese Korrektoren sind Experten in der Elektrotechnik, d. h. der Dozent der Vorlesung der Veranstaltung sowie Wissenschaftliche Mitarbeiter aus der Elektrotechnik.

In Abschnitt 4.2 werden die theoretischen Hintergründe zu der Aufgabe vorgestellt. Dazu zählen einerseits die elektrotechnischen Grundlagen der Aufgabe, welche in dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, d. h. Böcker (2012), dargestellt. Andererseits werden auch die für die Bearbeitung der Aufgabe benötigten mathematischen Kenntnisse näher erläutert. Darüberhinaus gibt es noch eine Vertiefung, bei der in diesem Fall die feldtheoretischen Grundlagen dargestellt werden, welche zum vollständigen Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Situation benötigt werden, allerdings über den Kenntnisstand eines Zweitsemester-Studierenden hinausgehen.

Der folgende Abschnitt, also Abschnitt 4.3, präsentiert eine normative Aufgabenanalyse zu der vorliegenden Aufgabe. Hierbei wird das Konzept der Studi-Expert-Lösung (SEL) eingesetzt, welche im vorherigen Kapitel ab Seite 75 näher vorgestellt wurde. Diese SEL enthält neben einer ausführlichen Musterlösung auch die Anmerkungen des Experten aus dem Experteninterview sowie Bezüge zu den in Kapitel 2 präsentierten theoretischen Grundlagen wie dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) oder dem mathematischen Problemlösen nach Polya (1949). In einem Unterabschnitt wird die Abhängigkeitsstruktur der Aufgabe vorgestellt, d. h. es wird vorgestellt, inwiefern Angaben aus der Aufgabenstellung, in vorherigen Aufgabenteile

berechnete Größen sowie Naturkonstanten beim Lösen der Aufgabenteile eingesetzt werden.

Der Abschnitt 4.4 stellt dann die Antworten auf die drei Unterfragen der Forschungsfrage 1

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

vor:

- Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In den Abschnitten 4.5 bis 4.8 werden Ergebnisse aus den Analysen der Studierendenbearbeitungen vorgestellt. Diese werden jeweils mit Methoden analysiert, welche in Kapitel 3 ausführlicher vorgestellt wurden:

Im Abschnitt 4.5 werden die Bearbeitungen aller vier Paare bei einem bestimmten Teil der Aufgabe vorgestellt und anschließend in Zwischenfazit Zusammenfassungen für die spätere Beantwortung der Forschungsfrage 2 (siehe unten) erstellt. Die methodologischen Grundlagen und die verwendeten Kategorien werden in Kapitel 3 ab Seite 102 dargestellt. Mit Hilfe dieser Daten werden im Abschnitt 4.6 Antworten auf die Unterfragen der zweiten Forschungsfrage

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

vorgestellt. Dabei werden im einzelnen folgende Aspekte über die folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

- Welche Fehler und Problemstellen treten auf? (ab Seite 195)
- Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4. (ab Seite 197)
- Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben? (ab Seite 201)

Im darauffolgenden Abschnitt 4.7 werden die Klausurbearbeitungen von ca. 90 Studierenden zu der vorliegenden Aufgabe, welche mit Hilfe eines auf Basis der SEL entwickelten Kategorienschemas neu korrigiert wurden, hinsichtlich verschiedener inhaltlicher Aspekte analysiert. Dabei werden Lösungshäufigkeiten für einzelne Aufgabenabschnitte vorgestellt und auf diese Schwierigkeiten ermittelt. Mit Hilfe dieser Daten wird ab Seite 227 die dritte Forschungsfrage

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

im Abschnitt 4.8 mit ihren Unterfragen

- Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?
- Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

beantwortet.

Die Ergebnisse zu den einzelnen Forschungsfragen werden bezogen auf alle vier verwendeten Klausuraufgaben im Kapitel 8 zusammengefasst und gegenübergestellt.

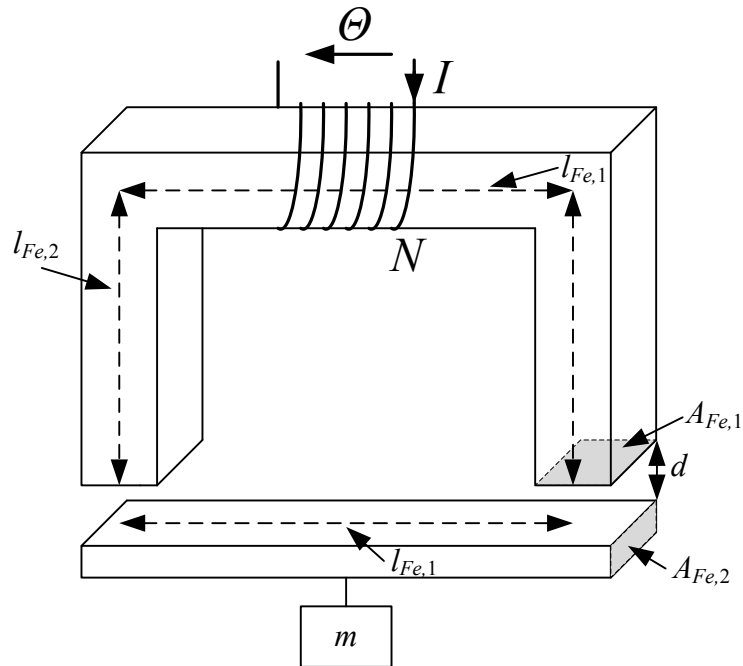
4.1 Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts

In diesem Abschnitt wird zunächst die Aufgabe selbst vorgestellt, wie sie in den Studierenden in der Klausur und später in den Studien mit den Studierendenpaaren vorlag. Zusätzlich wird jeweils zu den einzelnen Aufgabenstellungen die Lösung für die Korrektoren der Klausur, welche von dem Institut erstellt wurde, zitiert. Da sich diese an Experten in der Elektrotechnik richtet, ist diese an vielen Stellen sehr kurz gehalten und es gibt keine weiteren Anmerkungen beispielsweise zu den Hintergründen der Lösung. Aus diesem Grund war sie unzureichend für die weiteren Analysen und wurde im Rahmen der Studi-Expert-Lösung erweitert, um eine Grundlage für die Analysen der Bearbeitungsprozesse und -produkte zu bilden.

4.1.1 Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren

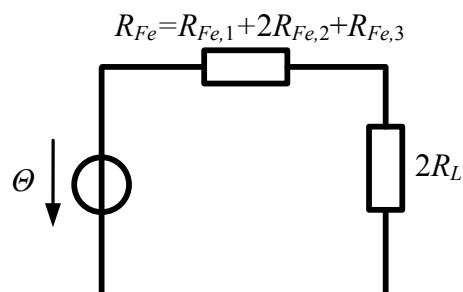
Aufgabe A: Magnetischer Kreis

Gegeben sei der dargestellte magnetische Kreis, bestehend aus zwei Eisenkernen mit unterschiedlichen Querschnittsflächen. Die Wicklung auf dem U-Kern habe $N = 100$ Windungen und werde vom Strom $I = 10A$ durchflossen. An den Stoßstellen entstehe eine Fuge, die sich wie ein Luftspalt verhalte. Für die Eisenkerne gelte: $l_{Fe,1} = 50cm$, $l_{Fe,2} = 30cm$, $A_{Fe,1} = 150cm^2$, $A_{Fe,2} = 60cm^2$, $\mu_r = 1000$.



4.1.1 (A1) SKIZZIEREN SIE DAS ELEKTRISCHE ERSATZSCHALTBILD DES MAGNETISCHEN KREISES UND VEREINFACHEN SIE DIESES SOWEIT ES GEHT. (2 PUNKTE)

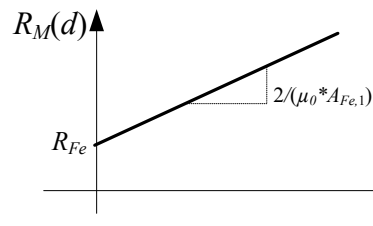
Lösung



4.1.2 (A2) GEBEN SIE DEN MAGNETISCHEN GESAMTWIDERSTAND $R_M(d)$ ALS FUNKTION DER VARIABLE d AN UND SKIZZIEREN SIE DESSEN VERLAUF IN EINEM DIAGRAMM. (3 PUNKTE)

Lösung

$$\begin{aligned}
R_M(d) &= R_{Fe,1} + 2R_{Fe,2} + R_{Fe,3} + 2R_L \\
&= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_{Fe,1} + 2l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \right) + \frac{2}{A_{Fe,1} \mu_0} \cdot d \\
&= 26,526 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 53,052 \frac{\text{MA}}{\text{Vs}} \cdot d \\
&= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} + 106,104 \frac{\text{MA}}{\text{Vs}} \cdot d
\end{aligned}$$



4.1.3 (A3) GEBEN SIE DIE INDUKTIVITÄT L DER ANORDNUNG IN ABHÄNGIGKEIT DER LUFTSPALTBREITE d AN UND BESTIMMEN SIE: (3 PUNKTE)

LÖSUNG

$$L(d) = \frac{N^2}{R_M(d)} = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{l_{Fe,1} + 2l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \right) + \frac{2}{A_{Fe,1} \mu_0} \cdot d}$$

(A) DIE LUFTSPALTBREITE d , BEI DER DIE INDUKTIVITÄT MAXIMAL WIRD

LÖSUNG

$$\Rightarrow d = 0$$

(B) DEN MAXIMALWERT DER INDUKTIVITÄT

LÖSUNG

$$\Rightarrow L_{\text{MAX}}(d = 0) = 80,21 \text{ mH}$$

Nehmen Sie für die weiteren Berechnungen eine Luftspaltbreite $d = 2\text{mm}$ an!

4.1.4 (A4) BERECHNEN SIE DIE MAGNETISCHE FLUSSDICHTHE b_L IM LUFTSPALT. (3 PUNKTE)

Lösung

$$\Phi = b_L \cdot A_{Fe,1} = \frac{N \cdot I}{R_M}$$
$$b_L = \frac{N \cdot I}{R_M \cdot A_{Fe,1}} = \frac{100 \cdot 10\text{A}}{336,881 \frac{\text{KA}}{\text{Vs}} \cdot 0,015\text{m}^2} = 0,198\text{T}$$
$$\Phi = 2,97\text{mVs}$$

4.1.5 (A5) GEBEN SIE DIE MAGNETISCHE ENERGIE IM LUFTSPALT W_L UND IM EISEN W_{Fe} AN. (2 PUNKTE)

Lösung

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot \phi_L^2 \cdot 2 \cdot R_L = \phi_L^2 \cdot R_L = 934,92\text{mJ}$$
$$W_{Fe} = \frac{1}{2} \cdot \phi_{Fe}^2 \cdot R_{Fe} = 549,27\text{mJ}$$

4.1.6 (A6) WELCHE MASSE m KANN DIE ANORDNUNG TRAGEN? (4 PUNKTE) HINWEIS: VERWENDEN SIE HIERFÜR DIE NÄHERUNG $h_{Fe} \approx 0$

Lösung

$$F = 2 \cdot A_{Fe,1} \cdot \Delta p$$
$$\Delta p = \frac{1}{2} (b_L \cdot h_L - b_{Fe} \cdot h_{Fe}) \approx \frac{1}{2} \cdot b_L \cdot h_L = \frac{b_L^2}{2\mu_0}$$
$$F = 2 \cdot A_{Fe,1} \cdot \frac{b_L^2}{2\mu_0} = m \cdot g \Rightarrow m = A_{Fe,1} \cdot \frac{b_L^2}{\mu_0 \cdot g} = 47,7\text{kg}$$

4.1.2 Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe A

In diesem Abschnitt werden die für Aufgabe A benötigten Formeln vorgestellt. In den Formeln wird die Notation aus Böcker (2012), dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, verwendet:

Reluktanz R :

$$R = \frac{l}{\mu A}$$
$$= \frac{\text{Länge in Meter m}}{\left(\text{Permeabilität in } \frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot \text{Zeit in Sekunde s}}{\text{Stromstärke in Ampere A} \cdot \text{Länge in Meter m}} \right) \cdot (\text{Fläche in Quadratmeter m}^2)}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Reluktanz R :

$$\frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s})}$$

Magnetischer Fluss Φ :

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{R} = \frac{(\text{Windungsanzahl ohne Einheit}) \cdot (\text{Stromstärke in Ampere A})}{\text{Reluktanz in } \frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot (\text{Zeit in Sekunde s})}{\text{Stromstärke in Ampere A}}}$$

Damit ist die Einheit für den magnetischen Fluss Φ :

$$(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s}) := \text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}$$

Induktivität L :

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$$
$$= \frac{(\text{Windungsanzahl ohne Einheit}) \cdot (\text{Magnetischer Fluss in Weber Wb})}{\text{Stromstärke in Ampere A}}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Induktivität L :

$$\frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot \text{Zeit in Sekunde s}}{\text{Stromstärke in Ampere A}} =: \text{Induktivität in Henry H}$$

Magnetische Flussdichte b :

$$b = \frac{\Phi}{A} = \frac{\text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}}{\text{Fläche in Quadratmeter m}^2}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Flussdichte b :

$$\frac{\text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}}{\text{Fläche in Quadratmeter m}^2} =: \text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}$$

Magnetische Energie W :

$$W = \frac{1}{2} \Phi^2 \cdot R$$

$$= \frac{1}{2} \text{Magn. Fl. in Quadratweber Wb}^2 \cdot \text{Reluktanz R in } \frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s})}$$

Damit ergibt sich für die Einheit der magnetischen Energie:

$$(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Stromstärke in Ampere A}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s})$$

$$:= \text{Magnetische Energie in Joule J}$$

Magnetische Feldstärke h :

$$h = \frac{b}{\mu}$$

$$= \frac{\text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}}{\text{Permeabilität in } \frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot \text{Zeit in Sekunde s}}{\text{Stromstärke in Ampere A} \cdot \text{Länge in Meter m}}}$$

Damit ergibt sich als Einheit (nach Umformungen unter Verwendung der SI-Einheiten):

$$\frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{Länge in Meter m}}$$

Magnetischer Druck p für die magnetische Kraftwirkung:

$$p = \frac{1}{2} b h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\text{Magn. Flussd. in Tesla T}) \cdot \left(\text{Magn. Feldst. in } \frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{Länge in Meter m}} \right)$$

Damit ergibt sich als Einheit:

$$\frac{(\text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}) \cdot (\text{Stromstärke in Ampere A})}{\text{Länge in Meter m}}$$

Gravitationskraft F :

$$F = m \cdot g$$

$$= (\text{Masse in Kilogramm kg}) \cdot \left(\text{Erdbeschleunigung in } \frac{\text{Länge in Meter m}}{\text{Zeit in Quadratsekunden s}^2} \right)$$

Damit ist die Einheit der Gravitationskraft:

$$\frac{(\text{Masse in Kilogramm kg}) \cdot (\text{Länge in Meter m})}{\text{Zeit in Quadratsekunden s}^2} =: \text{Kraft in Newton N}$$

4.1.3 Abhängigkeitsstruktur

In diesem Abschnitt soll vorgestellt werden, inwiefern berechnete Ergebnisse aus vorherigen Aufgabenteile in späteren wiederverwendet werden. Dieses gibt Aufschluss darüber, welche Folgefehler bei der Bearbeitung der Aufgabe auftreten, falls eine bestimmte Größe falsch berechnet wurden. Dieses gilt insbesondere für die Gesamtreluktanz, welche in Aufgabenteil A2 berechnet wird und anschließend in allen weiteren Aufgabenteilen bis auf einen verwendet wird. Die Tabelle stelle die Abhängigkeitsstruktur für Aufgabe A dar.

In den Tabellen wird die folgende Notation verwendet:

- $X^{[A]}$ bedeutet: die Größe steht in der Aufgabenstellung
- X^{AY} bedeutet: die Größe X wurde in Aufgabenteil AY berechnet
- X (ohne Index) bedeutet: die Größen sind Naturkonstanten (hier μ_0 und g)

	Zur Rechnung benötigte Größen	Berechnete Größen
A2	• Länge $l_{Fe,1}^{[A]}$ • Länge $l_{Fe,2}^{[A]}$ • Querschnittsfläche $A_{Fe,1}^{[A]}$ • Querschnittsfläche $A_{Fe,2}^{[A]}$ • relative Permeabilität $\mu_R^{[A]}$ • magnetische Feldkonstante μ_0	• Eisenreluktanz R_{Fe}^{A2} • Luftreluktanz $R_L(d)^{A2}$ • Gesamtreluktanz $R_{ges}(d) = R_{Fe} + 2 \cdot R_L(d)^{A2}$
A3	• Windungsanzahl $N^{[A]}$ • Gesamtreluktanz $R_{ges}(d)^{A2}$	• Induktivität $L(d)^{A3}$ • Induktivität $L(0)^{A3}$
nach A3	• Gesamtreluktanz $R_{ges}(d)^{A2}$ • Luftreluktanz $R_L(d)^{A2}$	• Gesamtreluktanz $R_{ges}(0, 002)^{A3b}$ • Luftreluktanz $R_L(0, 002)^{A3b}$
A4	• Windungsanzahl $N^{[A]}$ • Strom $I^{[A]}$ • Querschnittsfläche $A_{Fe,1}^{[A]}$ • Gesamtreluktanz $R_{ges}(0, 002)^{A3b}$	magnetische Flussdichte $b_L(0, 002)^{A4}$

A5	• Windungsanzahl $N^{[A]}$ • Strom $I^{[A]}$ • Gesamtreluktanz $R_{ges}(0, 002)^{A3b}$ • Eisenreluktanz R_{Fe}^{A2} • Luftreluktanz $R_L(0, 002)^{A3b}$	• magnetische Energie $W_{Fe}(0, 002)^{A5}$ • magnetische Energie $W_L(0, 002)^{A5}$
A6	• Querschnittsfläche $A_{Fe,1}^{[A]}$ • magnetische Flussdichte $b_L(0, 002)^{A4}$ • magnetische Feldkonstante μ_0 • Gravitationskonstante g	Masse m^{A6}

4.2 Hintergründe zu der Aufgabe

Dieses Kapitel stellt die theoretischen Grundlagen vor, welche zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden. Im ersten Unterabschnitt geht es um die elektrotechnischen Grundlagen, welche Studierende in der Elektrotechnik nach Ende ihres zweiten Fachsemesters aus Böcker (2012), für die Bearbeitung der Aufgabe kennen können. Im zweiten Abschnitt geht es entsprechend um die mathematischen Grundlagen, welche Elektrotechnik-Studierende nach ihrem ersten Studienjahr aus den Vorlesungen kennen sollten.

4.2.1 Elektrotechnische Grundlagen der Aufgabe

Allgemein ist zur Lösung der Aufgabe die Kenntnis des SI-Einheitensystems notwendig, wobei die Ankürzung SI aus dem Französischen von „Système international d’unités“ kommt. In die-

Basisgröße	Einheit	Einheitenzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Stromstärke	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Tabelle 4.2.1: SI-Basiseinheiten nach Hagmann (2013, S. 2)

Präfix	Bezeichnung	entsprechende Zehnerpotenz
k	Kilo	10^3
M	Mega	10^6
G	Giga	10^9
T	Tera	10^{12}
m	Milli	10^{-3}
μ	Mikro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}

Tabelle 4.2.2: Einheitspräfixe nach Hagmann (2013, S. 4)

sem System werden sämtliche in der Elektrotechnik auftretenden Einheiten mit Hilfe von sieben SI-Basiseinheiten ausgedrückt, welche in der Tabelle 4.2.1 dargestellt sind. Mittels dieser sieben Basiseinheiten können alle weiteren Einheiten eindeutig dargestellt werden. Sie bilden daher eine wesentliche Grundlage für die Bearbeitung von Elektrotechnik-Aufgaben und sind eine wichtige Hilfe im Rahmen von Einheitenüberprüfungen und Validierungen.

Im Zusammenhang mit Einheiten spielen häufig Zehnerpotenzen eine zentrale Rolle. Diese werden häufig durch Einheitenpräfixe, d. h. zum Beispiel das k in Kilogramm, welches für 10^3 steht, ergänzt. Weitere derartige Präfixe sind in Tabelle 4.2.2 dargestellt.

Im folgenden werden die in der Aufgabe verwendeten Fachbegriffe erläutert:

Magnetische Spannung Θ : Die Magnetische Spannung entspricht den bei einem geschlossenen Weg S in einem magnetischen Kreis eingeschlossenem Strom. Ihre Einheit ist Ampere A. Sie kann über das Durchflutungsgesetz berechnet werden:

$$\Theta = \oint_s \vec{h} \, d\vec{s}$$

In dieser Formel ist $\vec{h}$ die magnetische Feldstärke, welche unten noch näher erläutert wird. Zur Vereinfachung werden in der Vorlesung GET-B stückweise homogene Felder im k -ten Element des magnetischen Kreises angenommen, vgl. Böcker (2012, S. 121). Damit ergibt sich $\Theta_k = l_k h_k$.

Magnetischer Fluss Φ : Der Magnetische Fluss Φ in einem magnetischen Kreis ist eine Größe zur Beschreibung eines magnetischen Feldes. Er ist – vergleichbar mit dem elektrischen Strom – die Folge einer magnetischen Spannung und fließt durch einen magnetischen Widerstand. Magnetische Widerstände werden auch als Reluktanz bezeichnet. Im Fall eines geschlossenen Weges spricht man bei der magnetischen Spannung auch von Durchflutung. Der magnetische Fluss ist nicht an ein „Medium“ gebunden, da selbst im Vakuum ein magnetischer Fluss vorliegt. Es gilt:

$$\Phi = \oint_A \vec{b} \, d\vec{A}$$

In dieser Formel ist $\vec{b}$ die magnetische Flussdichte, welche unten noch näher erläutert wird. Zur Vereinfachung werden in der Vorlesung GET-B stückweise homogene Felder im k -ten Element des magnetischen Kreises angenommen, vgl. Böcker (2012, S. 121). Damit ergibt

sich $\Phi_k = A_k b_k$ und Φ kann unter Verwendung der in diesem Abschnitt geschilderten Formeln folgendermaßen berechnet werden:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{R} = \frac{\text{(Windungsanzahl ohne Einheit)} \cdot \text{(Stromstärke in Ampere A)}}{\text{Reluktanz in } \frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{(Spannung in Volt V)} \cdot \text{(Zeit in Sekunde s)}}$$

Damit ist die Einheit für den magnetischen Fluss Φ :

$$\text{(Spannung in Volt V)} \cdot \text{(Zeit in Sekunde s)} := \text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}$$

Reluktanz R : Der magnetische Widerstand oder auch Reluktanz ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der magnetischen Spannung Θ und dem magnetischen Fluss Φ , d. h. der Quotient $R = \frac{\Theta}{\Phi}$. Dieser Zusammenhang heißt Hopkinson'sches Gesetz. Unter Berücksichtigung der obigen Annahme zu den stückweise homogenen Feldern im k -ten Element des magnetischen Kreises ergibt sich:

$$R = \frac{l}{\mu A} = \frac{\text{Länge in Meter m}}{\left(\text{Permeabilität in } \frac{\text{Volt V} \cdot \text{Sekunde s}}{\text{Ampere A} \cdot \text{Meter m}} \right) \cdot \text{(Quadratmeter m}^2\text{)}}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Reluktanz R :

$$\frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{(Spannung in Volt V)} \cdot \text{(Zeit in Sekunde s)}}$$

Die in der Formel vorkommende magnetische Permeabilität μ beschreibt die Durchlässigkeit einer Materie für ein magnetisches Feld. Sie ist definiert als $\mu = \frac{b}{h}$, wobei b die magnetische Flussdichte und h die magnetische Feldstärke ist. Die Permeabilität μ ergibt sich als Produkt $\mu = \mu_0 \mu_r$. Man kann unterschiedlichen Materialien verschiedene relative Permeabilitätszahlen μ_r zuordnen. Im Vakuum gilt $\mu = 1$, in der Luft $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ und im Eisen liegt μ_r zwischen 300 und 10000. Des Weiteren ist μ_0 definiert als das Verhältnis der magnetischen Flussdichte zur magnetischen Feldstärke im Vakuum. Ihr Wert beträgt $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$.

Induktivität L : Die Induktivität L setzt die Änderungsrate des magnetischen Flusses mit der magnetischen Spannung in Beziehung, wie es auch in Aufgabe B und Aufgabe C verwendet wird. In Aufgabe A kann aufgrund der vorliegenden Situation folgende Formel verwendet werden:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{\text{(Windungsanzahl ohne Einheit)} \cdot \text{(Magnetischer Fluss in Weber Wb)}}{\text{Stromstärke in Ampere A}}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Induktivität L :

$$\frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot \text{Zeit in Sekunde s}}{\text{Stromstärke in Ampere A}} =: \text{Induktivität in Henry H}$$

Magnetische Flussdichte b :

Die magnetische Flussdichte b beschreibt für jeden Punkt im Raum die Dichte der Feldlinien des Magnetfeldes. Es gilt hiermit $\Phi = \int_A \vec{b} \cdot d\vec{A}$. Zur Vereinfachung werden in der Vorlesung GET-B stückweise homogene Felder im k -ten Element des magnetischen Kreises angenommen, vgl. Böcker (2012, S. 122). Damit ergibt sich $b_k = \mu_r \mu_0 h_k$ und b_k kann unter Verwendung der in diesem Abschnitt geschilderten Formeln folgendermaßen berechnet werden:

$$b = \frac{\Phi}{A} = \frac{\text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}}{\text{Fläche in Quadratmeter m}^2}$$

Damit ergibt sich als Einheit für die Flussdichte b :

$$\frac{\text{Magnetischer Fluss in Weber Wb}}{\text{Fläche in Quadratmeter m}^2} =: \text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}$$

Magnetische Energie W :

Die magnetische Energie W übt eine Kraft auf bewegte Ladungen in einem magnetischen Feld aus. Diese Kraft heißt Lorenzkraft. Unter Berücksichtigung der obigen Annahme zu den stückweise homogenen Feldern im k -ten Element des magnetischen Kreises ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{1}{2} \Phi^2 \cdot R \\ &= \frac{1}{2} (\text{Magn. Fl. in Quadratweber Wb}^2) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \text{Reluktanz in } \frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s})} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Einheit der magnetischen Energie:

$$\begin{aligned} &(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Stromstärke in Ampere A}) \cdot (\text{Zeit in Sekunde s}) \\ &:= \text{Magnetische Energie in Joule J} \end{aligned}$$

Alternativ kann Joule (J) auch als (Kraft in Newton N) · (Länge in Meter m) definiert werden, was die obere Definition noch mehr erläutert. Böcker (2012, S. 124) gibt hierzu noch die Formel

$$\frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot \text{Induktivität in Henry H} \cdot \text{Quadratstromstärke in Ampere}^2$$

an.

Magnetische Feldstärke h :

Die magnetische Feldstärke h , welche auch als magnetische Erregung bezeichnet wird, ordnet jedem Punkt im Raum die Richtung und Stärke des durch die magnetische Spannung induzierten Magnetfeldes ordnet.

Es gilt hiermit $\Theta = \int_l \vec{h} \cdot d\vec{s}$. Analog zur Aussage für die Flussdichte b kann h folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b}{\mu} \\ &= \frac{\text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}}{\text{Permeabilität in } \frac{\text{Spannung in Volt V} \cdot \text{Zeit in Sekunde s}}{\text{Stromstärke in Ampere A} \cdot \text{Länge in Meter m}}} \end{aligned}$$

Elektrische Größe			Magnetische Größe		
Elektrische Spannung		U	Magnetische Spannung		Θ
Elektrischer Strom		I	Magnetischer Fluss		Φ
Resistanz (elektrischer Widerstand)		R	Reluktanz (magnetischer Widerstand)		R_m
Konduktivität (elektrische Leitfähigkeit)		γ	Permeabilität (magnetische Leitfähigkeit)		μ
Konduktanz (elektrischer Leitwert)		G	Permeanz (magnetischer Leitwert)		G_m

Tabelle 4.2.3: Analogien zwischen elektrischen und magnetischen Größen

Damit ergibt sich als Einheit (nach Umformungen unter Verwendung der SI-Einheiten):

$$\frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{Länge in Meter m}}$$

Magnetischer Druck p für die magnetische Kraftwirkung: Der magnetische Druck p (auch magnetische Energiedichte genannt) ist die Kraftwirkung, die zwischen Magneten auftritt. Zur Berechnung der eigentlichen Kraft muss einer Fläche (in Quadratmeter m^2) multipliziert werden. Unter Berücksichtigung der obigen Annahme zu den stückweise homogenen Feldern im k -ten Element des magnetischen Kreises ergibt sich:

$$p = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\text{Magn. Flussd. in Tesla T}) \cdot \left(\text{Magn. Feldst. in } \frac{\text{Stromstärke in Ampere A}}{\text{Länge in Meter m}} \right)$$

Damit ergibt sich als Einheit:

$$\frac{(\text{Magnetische Flussdichte in Tesla T}) \cdot (\text{Stromstärke in Ampere A})}{\text{Länge in Meter m}}$$

Gravitationskraft F : Die Gravitationskraft F gibt, wie auch die Erdanziehungskraft auf eine vorgegebene Masse m ist. Dabei ist der sogenannte Ortsfaktor $g = 9,81\text{m/s}^2$ relevant.

$$F = m \cdot g$$

$$= (\text{Masse in Kilogramm kg}) \cdot \left(\text{Erdbeschleunigung in } \frac{\text{Länge in Meter m}}{\text{Zeit in Quadratsekunden s}^2} \right)$$

Damit ist die Einheit der Gravitationskraft:

$$\frac{(\text{Masse in Kilogramm kg}) \cdot (\text{Länge in Meter m})}{\text{Zeit in Quadratsekunden s}^2} =: \text{Kraft in Newton N}$$

Bei der Bearbeitung der Aufgabe werden häufiger Analogien zwischen magnetischen und elektrischen Kreisen genutzt. Diese sind in Tabelle 4.2.3 dargestellt.

Ein Ersatzschaltbild ist eine graphische Darstellung einer Ersatzschaltung, die sich elektrisch genauso verhält wie die ursprüngliche elektrische Schaltung, allerdings überschaubarer und leichter berechenbar ist.

Die magnetische Flussdichte $\vec{b}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{h}$ sind in den beiden Definitionen als Vektorfelder definiert. Wenn man annimmt, dass es stückweise homogene Felder gibt, d. h. die Feldstärke ist unabhängig vom Ort, gelten folgende beiden Formeln im k -ten Element des magnetischen Kreises:

$$\Phi_k = A_k b_k, \quad (4.1)$$

$$\Theta_k = l_k h_k. \quad (4.2)$$

In der Feldtheorie wird in den meisten Fällen die magnetische Flussdichte $\vec{b}$ anstatt des magnetischen Flusses verwendet, da mit der Flussdichte diskreten Feldpunkten (und nicht nur bestimmten Flächen) einen Wert zuordnen kann. Man kann durch eine Integration aus der Flussdichte $\vec{b}$ wieder den magnetischen Fluss Φ erhalten:

$$\Phi = \int_A \vec{b} \cdot d\vec{A}$$

Die SI-Einheit der magnetischen Flussdichte ist Weber: $1Wb = 1T \cdot m^2 = 1V \cdot s$.

Man bezeichnet $\Psi = N\Phi$ als Verkettungsfluss, wobei N die Windungszahl ist. Es gilt für die Induktion L die folgende Formel:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\frac{N^2 I}{R_L + R_{Fe}}}{I} = \frac{N^2}{R_L + R_{Fe}} \quad (4.3)$$

Die Einheit der Induktivität ist Tesla, wobei gilt: $1T = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 \frac{N}{Am} = 1 \frac{Wb}{m^2} = 1 \frac{kg}{As^2}$.

Die geleistete (elektrische) Arbeit ist definiert als das Integral der elektrischen Leistung p an einem elektrischen Bauelement mit zwei Anschlüssen über der Zeit

$$w[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt. \quad (4.4)$$

Die Arbeit wird nur als Energie dieses Elements bezeichnet, wenn diese als Speichergröße identifiziert werden kann. Die Arbeit in einer Spule bzw. einem Kondensator ist definiert als:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t), \quad (4.5)$$

bei einem Kondensator als

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t). \quad (4.6)$$

In A6 wird ein Kräftegleichgewicht aufgestellt. Dabei tritt die Formel für die Gravitationskraft auf, also $F = m \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist. In Deutschland beträgt der Wert dieser Größe ca. $9,81 \frac{m}{s^2}$.

Der magnetische Druck p (auch magnetische Energiedichte genannt) ist die Kraft, die zwischen Magneten auftritt. Er ist proportional zum Quadrat der magnetischen Flussdichte $\vec{b}$:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{b}^2}{\mu_0} \quad (4.7)$$

In dieser Formel ist μ_0 die magnetische Feldkonstante.

4.2.2 Mathematische Hintergründe der Aufgabe

Für die Bearbeitung einer Aufgabe zu magnetischen Kreisen werden Kenntnisse zur Vektoranalysis benötigt. Unter der Annahme, dass es stückweise homogene Felder im k -ten Element des magnetischen Kreises gibt, sind hier jedoch ausschließlich Umformtechniken der Größenalgebra notwendig. Eine Anwendung höherer Mathematik ist in dieser Aufgabe nicht erforderlich, aber möglich.

An einigen Stellen müssen die Studierenden – sowohl bezogen auf Zahlenwerte als auch auf Einheiten – Umformungen an Brüchen bzw. Doppelbrüchen vornehmen. Notwendige Umformungen in diesem Zusammenhang sind die folgenden:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{sowie} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt. Des Weiteren treten an einigen Stellen durch die Zehnerpotenzen bei den SI-Einheiten auch Potenzgesetze auf und es sind Umformungen mit $\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$ und $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ notwendig, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt.

Bei allgemeineren Ansätzen über Vektorfelder muss Vektoranalysis eingesetzt werden. Hierzu zählen Kurven- und Flächenintegrale vektorwertiger Funktionen. Dazu folgt ein kurzer Überblick über die Anforderungen unter Einsatz von Vektorfeldern. Dieser ist konkreterweise bezogen auf die Form für die Berechnung der magnetischen Spannung Θ und des magnetischen Flusses Φ , also

$$\Theta = \oint_s \vec{h} \, d\vec{s}$$

bzw.

$$\Phi = \oint_A \vec{b} \, d\vec{A}$$

Um $\vec{h} \, d\vec{s}$ berechnen zu können, muss der Integrationsweg $\vec{s}$ parametrisiert werden. Dann kann anschließend das Skalarprodukt aus den beiden Vektoren bestimmt werden und die Aufgabe mittels eines Dreifachintegrals gelöst werden. Analogerweise würde man auch $\vec{A}$ parametrisieren.

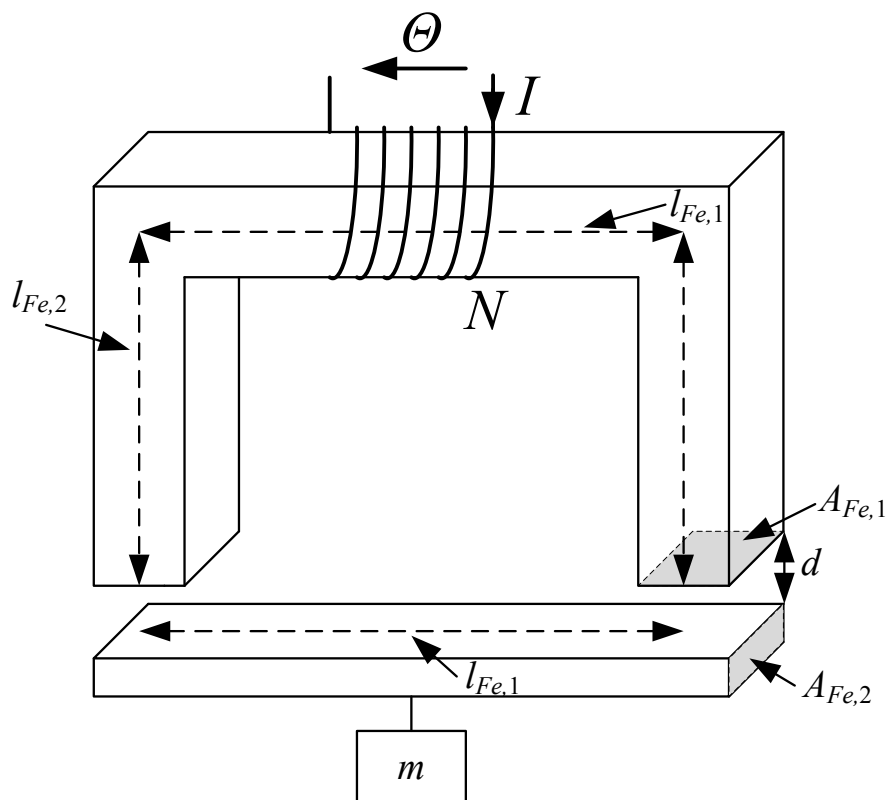
Eine mögliche Vereinfachung wäre, dass $\vec{h}$ das Gradientenfeld zu einer unbekannten Funktion p ist, die in diesem Fall Potential heißt. Dann könnte die Rechnung vereinfacht werden, in dem man dieses Potential p berechnet und mittels des Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung den Wert als Differenz des Potentials an der oberen Grenze (dreidimensional!) und der unteren Grenzen (natürlich ebenfalls dreidimensional) berechnet. Auch hier gibt es ein analoges Vorgehen bei dem Flächenelement $d\vec{A}$.

Da in der Aufgabe geschlossene Wegintegrale betrachtet werden, können Integralsätze verwendet werden. Damit wäre ein allgemeinerer Ansatz ohne die Verwendung der später in der Studi-Expert-Lösung vorgestellten Idealisierungen verwendet werden:

- Bei der magnetischen Spannung Θ ist es der Satz von Stokes, der die Summe mehrerer Kurvenintegrale, die zusammen einen geschlossenen Weg bilden, mit dem einem Flächenintegral über die Rotation des Kurvenelements $\vec{h}$ gleichsetzt.
- Bei dem magnetischen Fluss Φ kann der Satz der Gauss eingesetzt werden. Dieser setzt die Summe mehrerer Flächenintegrale, die eine geschlossene Hüllfläche bilden, mit dem Volumenintegral über die Divergenz des Flächenelements $\vec{b}$ gleich.

4.3 Die Studi-Expert-Lösung

In diesem Abschnitt wird die normative Lösung der Aufgabe, die sogenannte Studi-Expert-Lösung, sowie eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Teilen der Aufgabe vorgestellt. Diese ist in zwei Spalten unterteilt: In der ersten Spalte gibt es eine ausführliche Lösung der Aufgabe, welche unter Verwendung der Phasen nach Polya (1949) gegliedert ist. In der zweiten Spalte gibt es Anmerkungen zu kognitiven Ressourcen. Im Anschluss an die Bearbeitung des Experten ist jeweils sein Bearbeitungsprozess und seine Aussagen zu Lösungsalternativen, typischen Fehlern von Studierenden im ersten Studienjahr und Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse dargestellt, wobei (mmss) die Zeitpunkte in den Experteninterviews sind. Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösung gibt es ab Seite 75 im vorherigen Kapitel. Eine Einführung in die elektrotechnischen Fachbegriffe gibt es in dem entsprechenden Unterabschnitt des zweiten Abschnitts dieses Kapitels. Die vierstelligen Zahlen in runden Klammern geben in der Form (mmss) den Zeitpunkt im Experteninterview an.



Phase A0: Aufstellen des Realmodells mit impliziten Idealisierungen

Ressourcen: konventionalisierte Skizzen zu magnetischen Kreisen lesen und auf der Basis der impliziten Idealisierungen nutzen können; Kenntnis der Fachtermini wie der magnetische Fluss Θ

Abbildung 4.3.1: Skizze des Magnetischen Kreises

Gegeben

sei der dargestellte magnetische Kreis, bestehend aus zwei Eisenkernen mit unterschiedlichen Querschnittsflächen. Die Wicklung auf dem U-Kern habe $N = 100$ Windungen und werde vom Strom $I = 10\text{A}$ durchflossen. An den Stoßstellen entstehe eine Fuge, die sich wie ein Luftspalt verhalte. Für die Eisenkerne gelte: $l_{Fe,1} = 50\text{cm}$, $l_{Fe,2} = 30\text{cm}$, $A_{Fe,1} = 150\text{cm}^2$, $A_{Fe,2} = 60\text{cm}^2$, $\mu_r = 1000$.

Expertenbearbeitung: Der Experte notiert die gegebenen Größen und begründet diesen Schritt damit, dass es ihm eine „gewisse Übersicht“ darüber gibt, welche Größen angegeben sind. Er unterscheidet die Größen in elektrische und magnetische Größen. Um sämtliche Größen in den folgenden Schritten direkt einsetzen zu können, rechnet er sie in die SI-Basiseinheiten um, so zum Beispiel Quadratcentimeter (cm^2) in Quadratmeter (m^2) (01-0142). Er spricht von einer aktiven „magnetischen Länge“, d. h. er interpretiert schon einzelne Größen im physikalischen Kontext. Außerdem erwähnt er, dass das Material, aus dem der magnetische Kreis besteht (nämlich Eisen), ebenfalls gegeben ist.

In der zweiten Phase des PARI-Interviews, also dem erneuten Durchgehen seiner Aufgabenbearbeitung, sagt der Experte, dass er mit

seinen Überlegungen auch bestimmte weitere Rechenwege ausschließen kann, die komplizierter sind und anspruchsvollere mathematische Methoden erfordern. Die SI-Basiseinheit bezeichnet er als „richtige Einheit“.

[A1] Skizzieren Sie das elektrische Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises und vereinfachen Sie dieses soweit es geht. (2 Punkte)

Lösung

Gesucht ist ein vereinfachtes elektrisches Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises. Dieses Ersatzschaltbild dient als idealisierte Modellierung des vorliegenden Systems, auf Grundlage deren in den weiteren Aufgabenteilen in einfacher Weise eine mathematische Betrachtung des vorliegenden elektrotechnischen Problems vorgenommen werden kann.

Gegeben ist die Skizze eines magnetischen Kreises mitsamt geometrischer und elektrotechnischer Angaben. Dieses System wird von einem Strom durchflossen. Aufgrund der Geometrie kann nun der magnetische Kreis in eine Schaltung aus elektrotechnischen Grundelementen im Sinne einer Modellbildung überführt werden.

Jeder Teil des magnetischen Kreises muss als magnetischer Widerstand (Reluktanz) betrachtet werden. Aus der Skizze kann man erkennen, dass die Werte der Eisenwiderstände konstant sind, da die Materialien eine konstante Dichte haben, d. h. die Dichte kann ortsunabhängig berechnet werden. Andernfalls wären mehrdimensionale Integrale zur Berechnung notwendig.

Die Breite der Fuge ist im Gegensatz jedoch variabel gesetzt, da die Größe d unbekannt ist. Der untere Eisenkern ist parallel zu den begrenzenden Flächen des oberen Eisenkerns. Wegen der vorliegenden Reihenschaltung der Widerstände kann man einerseits die konstanten Eisenwiderstände addieren und andererseits die beiden variablen Luftwiderstände, welche über von der Luftspaltbreite d abhängige lineare Gleichungen berechnet werden können.

Aufgrund des Stromflusses I durch die Spule kommt es zu einem magnetischen Feld. Die dadurch im magnetischen Kreis entstehende Felderregung wird im Ersatzschaltbild durch die magnetische Durchflutung Θ berücksichtigt, welche analog zu der Spannung in einem elektrischen Stromkreis ist.

Phase A1: Nutzen der Methode des Ersatzschaltbilds als Mathematisierungshilfe

Ressourcen:

Konventionalisierte Skizzen zur Mathematisierung nutzen können, Kenntnis des Fachbegriffs Reluktanz

Mögliche Fehler:

Die Studierenden betrachten Zählpeilsysteme, welche in elektrischen Schaltplänen angeben, in welcher Richtung die angegebenen Größen - elektrische Stromstärke und elektrische Spannung - positiv zu zählen sind. Dieses wirkt sich dort in Vorzeichen aus. Eine Betrachtung von Richtungen ist hier jedoch nicht notwendig und lässt auf eine falsche Analogie schließen.

Expertenbearbeitung: Der Experte zeichnet direkt das Ersatzschaltbild, wobei er zwei Arten von Reluktanzen unterscheidet, nämlich Eisen- und Luftreluktanzen. Anschließend geht er auf den physikalischen Hintergrund ein; konkret betrachtet er die Erregung $\mu \cdot I$, die auf das System ausgeübt wird. Er verwendet dabei abwechselnd

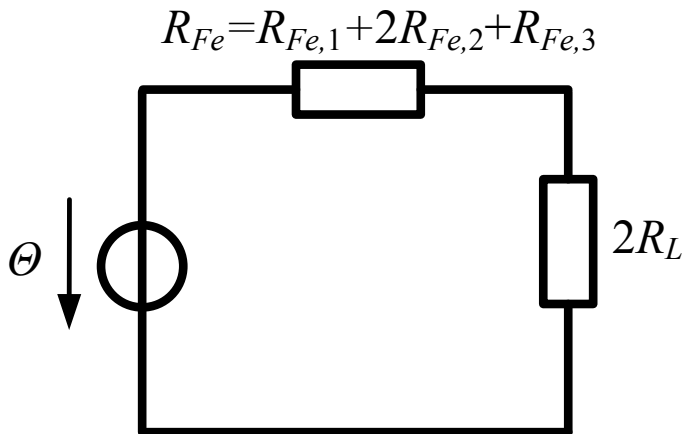


Abbildung 4.3.2: „Vereinfachtes“ Ersatzschaltbild zu dem Magnetischen Kreis. Hierbei stehen die R_i für die Reluktanzen, wobei eine genauere Erläuterung in Aufgabenteil A2 stattfindet.

die Begriffe „Reluktanz“ (also den Begriff für einen magnetischen Widerstand) und „Widerstand“, womit üblicherweise ein elektrischer Widerstand bezeichnet wird. Zitat aus (0306):

„Ich nehme einfach alle Eisenreluktanzen zusammen, führe ich zu einem Ersatzwiderstand zusammen.“

Er bezeichnet die gesamte Eisenreluktanz als $R_{Fe, ges}$ und die gesamte Luftreluktanz als $R_{L, ges}$.

In der zweiten Phase des PARI-Interviews beschreibt der Experte die Zerlegung in Einzelreluktanzen entsprechend der gegebenen Größen für die Längen und Querschnittsflächen, welche eingesetzt werden müssen und sich für die Teilstücke der Eisenkerne unterscheiden. Im nächsten Schritt kombiniert er jeweils die Größen miteinander, die von d unabhängig (das sind genau die Eisenreluktanzen) bzw. von d abhängig sind (konkret, die Luftreluktanzen) und begründet dieses mit einer Minimierung des Rechenaufwands. Er verwendet ebenfalls, dass die Materialien der beiden Stücke identisch sind, also sowohl der U-Kern als auch das unten dargestellte Metallstück aus Eisen bestehen. Er folgert in (1156):

„Also konnte ich dieselben Formeln nehmen und ich konnte direkt diese Größen zusammenfassen, auch weil alle Größen zur Berechnung gegeben waren. So konnte ich direkt das Ergebnis ausrechnen ohne eine Variable darin beizubehalten, was bei der Luftspaltreluktanz der Fall war.“

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: In der Rechnung hätten die verschiedenen Eisenkerne in unterschiedlicher Weise zusammengefasst werden können, was unter Umständen Vereinfachungen ergeben hätte. Beispielsweise hätte man die Eisenreluktanzen mit demselben Querschnitt zusammenfassen können. Dieses hätte Nachteile bei den folgenden Teilen der Aufgabe bedeutet, denn dort hätte man statt einer Gesamtreluktanz immer eine Summe von Einzelreluktanzen verwenden müssen, was den Aufwand u. a. beim Eintippen in den Taschenrechner erhöht hätte. Der Experte sagt darüberhinaus, dass es mit Wissen aus höheren Semestern es hier keine Vereinfachung gegeben hätte, allerdings hätte man durch eine höhere Expertise ohne den Zwischenschritt, d. h. dem Hinschreiben der sechs Reluktanzen, diese direkt zusammenfassen können.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Es können Reluktanzen bei dem Ansatz vergessen werden. Dieser Fehler hätte zu Folgefehlern in mehreren Aufgabenschritten geführt – siehe Abhängigkeitsstruktur von Aufgabe A.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Zur Validierung können die einzelnen Bestandteile des Eisenkerns nochmals betrachtet werden und so überprüft werden, ob jeglicher Teil des U-Kerns, des weiteren Eisenstücks und die Luftspalte berücksichtigt wurden.

[A2] *Geben Sie den magnetischen Gesamtwiderstand $R_M(d)$ als Funktion der Variable d an und skizzieren Sie dessen Verlauf in einem Diagramm. (3 Punkte)*

Gesucht

ist Gesamtreluktanz des magnetischen Kreises. Diese verknüpft – in gewisser Analogie zum Ohm'schen Widerstand beziehungsweise zum Ohm'schen Gesetz – die magnetische Spannung mit dem magnetischen Fluss.

Gegeben ist für die Studierenden das Ersatzschaltbild, welches sie in Aufgabenteil A1 erstellt haben und eine daraus ableitbare Zerlegung in Teilreluktanzen.

Wir können aus dem Aufgabenteil A1 die Formel entnehmen, mit der wir den Gesamtwiderstand berechnen können. Dieser setzt sich aus den Reluktanzen R_{Fe} (Reluktanz im Eisen) und R_L (Reluktanz in der Luft) zusammen. Aufgrund der Reihenschaltung der Widerstände können die sich ergebenden Werte einfach addiert werden.

So ergibt sich:

Gesamter Widerstand im Eisen: In dem dargestellten magnetischen Kreis gibt es vier Eisenstücke: das obere Stück, das linke und das rechte Stück und (mit Abstand d) das untere Stück. Jedes Stück kann als magnetischer Widerstand aufgefasst werden. Zur besseren Übersicht werden die Reluktanzen, welche in der Lösung des Instituts als R_1 , R_2 und R_3 bezeichnet sind, im folgenden als R_{oben} , R_{links} , R_{rechts} und R_{unten} bezeichnet. Da das linke und das rechte Stück dieselbe Länge und Querschnittsfläche haben, kann man sie zusammenfassen, d. h. es gilt $R_{links} = R_{rechts}$. Für die Reluktanzen im Eisen gilt die Formel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$, wobei $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ gilt. Die Reluktanzen ergeben sich jeweils als Quotient der aktiven Länge einer Seite und der Querschnittsfläche, wobei zusätzlich noch die magnetische Leitfähigkeit ("die Permittivität") im Vakuum bzw. im Eisen berücksichtigt werden muss. Da μ_r keine Einheit hat und genau 1000 ist, ergibt sich:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 10^3 = 4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Phase A2.1: Aufstellen der Reluktanzgleichung aus Ersatzschaltbild

Ressourcen:

Aufstellen einer oder mehrerer Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen

Phase A2.2a: Berechnung von $R_m(d)$

(a) Ressourcen aus der Mathematik der Größen:

- Einheitenmanagement:

1. Umgang mit dem SI-Einheitensystem

2. Umgang mit Zehnerpotenzen im Zusammenhang mit Einheiten

- Umformtechniken und -strategien der "Größenalgebra": Umformen algebraisch-arithmetischer Bruchterme mit physikalischen Größen

(b) Ressourcen aus der Elektrotechnik:

1. Kenntnis der Reluktanzformel $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$

2. Anwendung der Formel auf die konkrete Situation

3. Additive Zerlegung der Reluktanzen möglich

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 R_{Fe} &= R_{oben} + 2 \cdot R_{links} + R_{unten} \\
 &= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{Am}} \frac{0,5m}{0,015m^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{Am}} \frac{0,3m}{0,015m^2} + \dots \\
 &\quad \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{Am}} \frac{0,5m}{0,006m^2} \\
 &= 26,526 \frac{10^3 A}{Vs} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3 A}{Vs} + 66,315 \frac{10^3 A}{Vs} \\
 &= 124,673 \frac{kA}{Vs}
 \end{aligned}$$

Gesamter Widerstand in den Luftspalten: Bei der Berechnung der Reluktanzen in der Luft spielt die magnetische Leitfähigkeit im Eisen keine Rolle. Der Abstand zwischen den Eisenkernen ist laut Aufgabenstellung d (in der Einheit Meter) und in diesem Aufgabenteil variabel gewählt. Durch Einsetzen in die entsprechende Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 R_L(d) &= \frac{1}{A_{Fe,1} \mu_0} \cdot d = \frac{1}{0,015m^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}} \cdot d \\
 &= 53,052 \frac{10^6 A \cdot m}{V \cdot s \cdot m^2} \cdot d = 53,052 \frac{MA}{Vsm} \cdot d
 \end{aligned}$$

Dieser Wert muss nun verdoppelt werden, da es zwei Luftspalte zwischen den beiden Eisenstücken gibt.

Entsprechend der Einleitung dieses Aufgabenteils müssen noch die beiden Werte addiert werden. So erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 R_M(d) &= R_{Fe} + 2R_L(d) \\
 &= 124,673 \frac{kA}{Vs} + 106,104 \frac{MA}{Vsm} \cdot d \\
 &=: \text{Konstante} + d \cdot \text{Steigung}
 \end{aligned}$$

Zuletzt ist

noch eine graphische Darstellung des Widerstands in Abhängigkeit von d verlangt. Dabei der Wert von R_{Fe} den y -Achsenabschnitt an und die Steigung der Gerade ist $2R_L$.

Validierung:

Die Reluktanz ergibt sich als Konstante + $d \cdot$ Steigung, d. h. als lineare Funktion, und entspricht damit qualitativ den Erwartungen. Der konstante Anteil ist den Eisenstücken zuzuschreiben, während der variable auf die Luftspalte entfällt.

Hinweise:

Die magnetische Spannung ist nicht mit einer elektrischen Spannung zu verwechseln. Die Einheit der magnetischen Spannung ist Ampere.

Fortsetzung (Phase A2.2a):

Bei der Beschreibung werden die Knicke bei dem oberen Eisenkern nicht berücksichtigt. Da die Längen jedoch in der vorgegebenen Weise gewählt sind, führt dieses doch zum korrekten Ergebnis, da jeweils der die Mittelpunkte der Stücke verwendet werden, wie es in der Skizze angedeutet ist

Phase A2.3: Skizzierung von $R_m(d)$

Ressourcen:

Graphisches Interpretieren und Darstellen einer Funktion

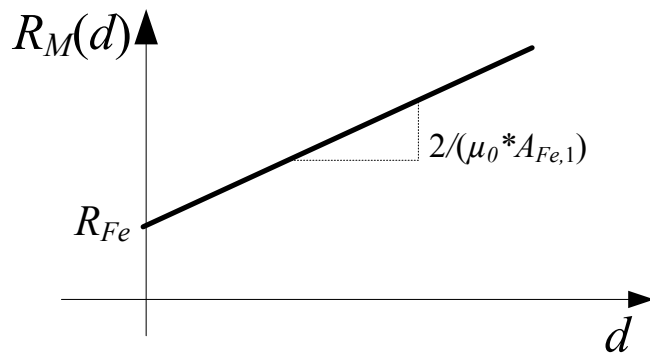


Abbildung 4.3.3: Graphische Darstellung des Verlaufs der Gesamtre­luktanz in Abhängigkeit der Luftspaltbreite d

Expertenbearbeitung: Der Experte sagt, dass er hierzu zunächst die Einzelreluktanzen bestimmen muss und alle dafür benötigten Größen angegeben sind. Er schreibt zunächst die allgemeinen Formeln für eine Reluktanz auf, also

$$R = \frac{l}{\mu A},$$

also Reluktanz als der Quotient $\frac{\text{Länge}}{\text{Permeabilität} \cdot \text{Querschnittsfläche}}$, und notiert darüberhinaus

$$R_M(d) = R_{\text{Fe, ges}} + R_{\text{L, ges}}.$$

In seiner Rechnung verwendet er zunächst eine falsche Zerlegung des Eisenstücks. (Aufgrund der unterschiedlichen Längen muss hier eine Zerlegung durchgeführt werden. Wegen derselben Querschnittsfläche hätte in diesem Fall aber auch eine Gesamtberechnung der Reluktanz gereicht.) Er nennt auswendig den Wert für die Permeabilität im Vakuum, also μ_0 . Durch Einsetzen berechnet er den Zahlenwert für die erste Reluktanz, ist sich aber unsicher bei deren Einheit und gibt diese zunächst mit $\frac{Vs}{A}$ an. Während des Eintippens spricht er die Werte vor sich hin und bemerkt dabei seine Fehler bei den verwendeten Längen und Querschnittsflächen. Dann sagt er, dass die beiden anderen Eisenreluktanzen auf dieselbe Weise berechnet werden können und sich dann die Gesamteisenreluktanz als Summe der drei Einzelreluktanzen ergibt. Nach Einsetzen fällt ihm auf, dass die Einheit der Gesamtre­luktanz $\frac{A}{Vs}$ sein muss. Er geht anschließend zu der Reluktanz in der Luft über. Zur Berechnung leitet er sich die Formel für die Reluktanz in der Luft her, in dem er von

$$\frac{l}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}} \text{ zu } \frac{2 \cdot \text{Luftspaltbreite}}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}}$$

übergeht. Hierzu bemerkt er (0843): „Das d ziehe ich vor, weil es als Variable vorliegt.“ Auf diese Weise erzielt er das Gesamtergebnis. Zum Skizzieren der Funktion bemerkt er:

Man sieht, bei $d = 0$ fällt der zweite Summand weg. Das heißt, wir fangen bei $R_{\text{Fe, ges}}$ an und dann steigt der Term linear mit der Steigung der Luftspaltreluktanz.

Der Experte erläutert hierzu in Phase 2, dass er die „generelle Funktion“ (1411) verwendet, also

$$R = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A},$$

wobei er bei der Luftspaltbreite die relative Permeabilität μ_r nicht berücksichtigen müsse, da $\mu_r = 1$ gilt, wobei er direkt erwähnt, dass relative Permeabilität beim Eisen $\mu_r = 1000$ ist.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Durch eine andere Zusammenfassung der Eisenreluktanzen hätte sich hier mehr Aufwand ergeben. Analog zu A1 hätte es hier keinen alternativen Weg mit Wissen aus höheren Semestern gegeben.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Fehler können bei der Umrechnung der Einheiten auftreten, denn Größen in cm bzw. cm^2 müssen in m bzw. m^2 umgerechnet werden. Weitere Fehler sind, dass die Studierenden aufgrund der Analogie zwischen magnetischem und elektrischen Ersatzschaltbild annehmen, dass die Einheiten gleich sind. Sie nehmen z. B. fälschlicherweise als Einheit für den magnetischen Widerstand Ω (Ohm) statt $\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ an.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Luftreluktanzen sind deutlich größer als Eisenreluktanzen. Das ist in der vorliegenden Aufgabe auch der Fall. Diese Ungleichung ist auch in der Realität erfüllt, was der Experte als Merkmal der gestellten Aufgaben bezeichnet. Daher können die Studierenden dieses als Möglichkeit zur Validierung verwenden. Dazu sagt der Experte in (3555): „Es müsste also einen Studenten skeptisch machen, wenn er für die Luftspaltreluktanz einen sehr kleinen Wert erhält.“

[A3]

- (a) *Geben Sie die Induktivität L der Anordnung in Abhängigkeit der Luftspaltbreite d an*
- (b) *Bestimmen Sie die Luftspaltbreite d , bei der die Induktivität maximal wird*
- (c) *Bestimmen Sie den Maximalwert der Induktivität*

(A) **Bearbeitungsvariante I:**

Aus der Veranstaltung ist bekannt, dass man die Induktivität als Quotient aus der Windungszahl zum Quadrat und dem Gesamtwiderstand berechnen kann. Die Aufgabenstellung gibt vor, dass in der Formel die Luftspaltbreite d als Variable vorkommen soll, d. h. wir verwenden am besten die Darstellung des Gesamtwiderstands aus dem vorherigen Aufgabenteil. So ergibt sich:

$$L(d) = \frac{N^2}{R_M(d)} = \frac{N^2}{R_{Fe} + 2R_L(d)}$$

und wir erhalten durch Einsetzen:

$$L(d) = \frac{10000}{124,671 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} + d \cdot 106,103 \frac{\text{MA}}{\text{Vs} \cdot \text{m}}}$$

Zum Bearbeiten der beiden kommenden Aufgabenteile ist es nützlich zu bemerken, dass gilt:

$$L(d) = \frac{\text{Konstante}}{\text{Konstante} + d \cdot \text{Konstante}}$$

Phase A3.1a: Bestimmen einer Formel zur Berechnung von L

Ressourcen:

Abruf von Vorlesungswissen unter Verwendung von A2, kein Gleichungsmanagement wegen direkter Anwendung der Formel aus der Vorlesung

(B) **Bearbeitungsvariante I:**

Betrachtung des vorliegenden Bruches: Das Ziel ist, einen Bruch dieser Form zu maximieren. Ein Bruch wird maximal, wenn sein Nenner minimal wird. Da dort eine Konstante und linearer Term auftritt, können wir nur den linearen Term minimieren, in dem wir d kleinstmöglich wählen. Da die Luftspaltbreite d keine negativen Werte annehmen kann, ist der gesuchte Wert $d = 0$.

Bearbeitungsvariante II:

Betrachtung der Proportionalitätseigenschaften im Zusammenhang mit physikalischen Mechanismen: Die Induktivität L ist proportional zum magnetischen Fluss – vergleiche Ausführungen im vorherigen Abschnitt. Wir wissen aus dem vorausgegangenen Aufgabenteil, dass

$$L \propto \Phi \propto \frac{1}{R_m}.$$

Die Reluktanz nimmt mit der Luftspaltbreite zu, da der Luftspalt in Reihe zum Eisenkreis geschaltet ist. Folglich ist $L(d = 0)$ maximal.

Phase A3.2a: mathematische Argumentation

Ressourcen: Bruchrechnung, Nutzung funktionaler Zusammenhänge

Fehler: Betrachtung von Ableitungen zur Bestimmung des Maximums, in dem eine Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt. Dieses ist hier nicht möglich, da es sich um ein Randextremum handelt.

Phase A3.2b: physikalische Argumentation mit Inhalten aus der Vorlesung

(C) Nach der Argumentation aus Teil (b) suchen wir nun den Wert $L(0)$. So ergibt sich (in der Einheit Henry):

$$\begin{aligned} L(0) &= \frac{N^2}{R_M(0)} = \frac{N^2}{R_{Fe} + 2R_L(0)} = \frac{N^2}{R_{Fe}} \\ &= \frac{10000}{124673 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}} = 0,08021 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 80,21 \text{mH} \end{aligned}$$

Phase A3.3: Lösen von (c)

Ressourcen:
Einheitenmanagement,
Umformtechniken und
-strategien der "Größenalgebra"

Expertenbearbeitung: Der Experte erinnert sich an die Formel

$$L = \frac{N^2}{R_M}$$

für die Induktivität und kommentiert diese mit „Das kann ich auch aufschreiben. R_M ist bekannt.“ Zum Bestimmen des Maximalwertes muss der „Term unten“ minimiert werden. Er erkennt, dass dieses für $d = 0$ gilt und dass dann der zweite Summand immer Nenner wegfällt. In (1158) sagt der Experte dazu:

„Das bedeutet $L_{\max}$ liegt vor bei $d = 0$.“

Er verwendet dann den Wert $N = 100$ Windungen und berechnet den Maximalwert. Die Einheit gibt er direkt mit Millihenry an, ohne sie zu hinterfragen.

In der zweiten Phase des PARI-Interviews argumentiert der Experte über die Form des Bruches, was die Aufgabe seiner Meinung nach vereinfacht. Dazu äußert er sich folgendermaßen (1611):

„Man hätte auch ableiten und nach Hoch- und Tiefpunkten suchen können, allerdings sieht man, dass nur ein Term von der Luftspaltbreite abhängt, auch noch linear.“

Er argumentiert dann weiter, dass der Zähler und die Eisenreluktanz konstant sind und daher nur der zweite Summand im Nenner betrachtet werden müsse, vgl. (1611):

„Um den zu minimieren ist die simple Lösung, die Luftspaltbreite auf null zu setzen, damit der Summand rausfällt.“

Da alle Größen gegeben waren, konnte er direkt in die Rechnung einsteigen, wobei er noch anführt, dass N aus der Aufgabenstellung und R_M auf A2 bekannt waren. Das Ergebnis interpretiert er so, dass die Induktivität mit größer werdendem Luftspalt fällt, da die Gesamtreluktanz im Nenner der Formel für die Reluktanz steht.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Bei einer anderen Zusammenfassung der Reluktanzen in den vorherigen Aufgabenteilen wären die Zusammenhänge nicht sofort ablesbar. Mit Wissen aus den höheren Semestern hätte man verwenden können, dass die Induktivität antiproportional mit der Reluktanz zusammenhängt. Daraus ergibt sich, dass man die Reluktanz minimieren muss, um die Induktivität zu maximieren. Laut dem Experten ist mit dem Wissen aus der Vorlesung noch nicht klar, dass die Induktivität maximal wird, wenn $d = 0$ ist und er würde eine rein-physikalische Herangehensweise bei Zweitsemesterstudierenden ausschließen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Es gibt mögliche Fehler im innermathematischen Bereich. Statt einer Rückführung auf die Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs, der über den Bruch beschrieben wird, hätte man Extrema mittels Differenzieren suchen können. Fehler können hier beim Bilden der Ableitung auftreten. Bei Verwendung von vorher errechneten Werten können immer wieder Tippfehler in den Taschenrechner auftreten. So können durch Flüchtigkeit an solchen Stellen falsche Ergebnisse erzielt werden.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Jeder Maximalwert, bei dem $d \neq 0$ ist, müsste gerechtfertigt werden, da sich dieser schon aus der physikalischen Betrachtung der Situation ergibt. Durch Einsetzen von verschiedener Werten mit positiver Luftspaltbreite ergeben sich kleinere Induktivitäten.

Nehmen Sie für die weiteren Berechnungen eine Luftspaltbreite $d = 2\text{mm}$ an!

[A4] Berechnen Sie die magnetische Flussdichte b_L im Luftspalt. (3 Punkte)

Lösung

Gesucht ist die magnetische Flussdichte b_L im Luftspalt.

Gegeben sind neben Wundungszahl und Spulenstrom bereits die Beziehung $\Phi = b \cdot A$ aus den vorangegangenen Aufgabenteilen.

Abschätzung: Aus der Veranstaltung ist bekannt, dass für die Flussdichte b_L im Eisen in Abhängigkeit von der Dicke des Eisens gilt: $0\text{T} \leq b_L \leq 2\text{T}$.

Herleitung I: Aus der Veranstaltung ist eine Formel bekannt, mit der man b_L bestimmen kann, nämlich $\Phi = b_L \cdot A_{Fe,1}$, mit der eine Relation zwischen b_L , $A_{Fe,1}$ und Φ hergestellt wird, mit deren Hilfe man

Phase A4.1a: Bestimmen einer Gleichung zur Berechnung der magnetischen Flussdichte b_L

Ressourcen: Gleichungsmanagement

Heranziehen relevanter Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen; zielgerichtetes Umformen von Gleichungen, um unb. aus bek. Größen zu ermitteln; Ableitung der Gleichung aus theoretischen Zusammenhängen ist nicht notwendig

nach Umstellen verschiedene Variablen bestimmen kann. Da in dieser Formel jedoch ausschließlich $A_{Fe,1}$ bekannt ist, muss eine weitere Formel hinzugezogen werden, nämlich $\Phi = \frac{N \cdot I}{R_M}$. Bei dieser Formel sind alle Größen auf der rechten Seite aus der Aufgabenstellung bekannt (N und I) bzw. wurden bereits berechnet, wobei man hier nun das konstante d einsetzen kann. Durch Gleichsetzen der beiden Formeln für Φ erhalten wir einen Ausdruck, in dem nur die Größe b_L unbekannt ist, d. h. wir können den mathematischen Ausdruck nach einer algebraischen Umformung (Division durch $A_{Fe,1}$) einsetzen, um die Größe b_L zu bestimmen.

Herleitung II:

Es ist bereits bekannt, dass wir

$$\Phi = \int b \, dA \quad \text{zu} \quad \Phi = b \cdot A$$

vereinfachen können. Aus dieser Beziehung können wir direkt die magnetische Flussdichte B bestimmen. Des Weiteren wissen wir bereits, dass der magnetische Fluss Φ im gesamten magnetischen Kreis konstant ist und somit folgt für die magnetische Flussdichte im Luftspalt

$$b_L = \frac{\Phi}{A_L}$$

Im vorausgegangenen Aufgabenteil haben wir ferner Φ zu

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{R_m}$$

aus der magnetischen Durchflutung und der Reluktanz bestimmt. Damit erhalten wir

$$b_L = \frac{N \cdot I}{R_m \cdot A_L}$$

So erhalten wir:

$$\begin{aligned} b_L &= \frac{N \cdot I}{R_M \cdot A_{Fe,1}} = \frac{100 \cdot 10 \text{ A}}{336,881 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} \cdot 0,015 \text{ m}^2} = \frac{10^3 \text{ A}}{336,881 \frac{10^3 \text{ A}}{\text{Vs}} \cdot 0,015 \text{ m}^2} \\ &= \frac{\text{Vs}}{336,881 \cdot 0,015 \text{ m}^2} = \frac{1}{336,881 \cdot 0,015} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 0,198 \frac{\text{kg}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2} \\ &= 0,198 \text{ T} \end{aligned}$$

Validierung: Die Richtigkeit des Ergebnisses können wir auf zwei Arten validieren. Wir überprüfen zunächst die Einheit unter Verwendung der SI-Einheiten, für die gilt: $\frac{\text{A}}{\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$.

An dieser Stelle spielen die SI-Einheiten eine entscheidende Rolle, da mit deren Hilfe sämtliche Einheiten verändert werden. Konkret gibt die linke Seite die Einheiten gemäß Umformungen an den Größen wieder und die rechte Seite die Darstellung von Tesla T in SI-Einheiten. Nach Einsetzen des SI-Darstellung von Volt V ist diese Umformung möglich.

Phase A4.1b: Bestimmen einer Gleichung zur Berechnung der magnetischen Flussdichte b_L
Ressourcen:

(a) Ressourcen aus der Elektrotechnik:
1. Kenntnis $\Phi = \int b \, dA$
2. Kenntnis $\Phi = NI/R_m$
bzw. Lösung der vorangeg. Aufgaben

(b) Ressourcen aus der Mathematik der Größen:
- Einheitenmanagement:
1. Umgang mit dem SI-Einheitensystem

Phase A4.2: Berechnung von b_L
Ressourcen: Einheitenmanagement, Umformtechniken und -strategien der "Größenalgebra"

Phase A4.3: Validierung über Einheiten und Größenordnungen von b_L
Ressourcen: Abruf von Vorlesungswissen

Aus der Veranstaltung ist bekannt, dass $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ der Einheit T, also Tesla, entspricht, in der die Größe angegeben werden muss. Desweiteren ist eine Validierung über die Größe von b_L möglich. Aus der Veranstaltung ist bekannt, dass für die Flussdichte b_L in Abhängigkeit von der Dicke des Eisens gilt:

$$0\text{T} \leq b_L \leq 2\text{T}$$

(siehe obige Abschätzung)

Expertenbearbeitung: Der Experte rechnet die nun vorgegebene Luftspaltspalte direkt von 2mm auf 0,002m um, ehe er in die Aufgabe einsteigt. Er erkennt, dass er den magnetischen Fluss mit Hilfe der Induktivität bestimmen kann, wofür er den magnetischen Fluss Φ braucht und er notiert $L \cdot i$. Dann gibt er an, dass der magnetische Fluss auch alternativ als Quotient von Durchflutung und magnetischem Widerstand berechnet werden kann. Er kombiniert anschließend die beiden genannten Formeln und stellt sie nach b_L um. Beim Einsetzen notiert er bekannte Größen direkt in seiner Formel, während er unbekannte Größen wie R_M stehenlässt. Dieser war bisher nur in Abhängigkeit von d berechnet worden, in diesem Aufgabenteil muss allerdings noch $d = 0,002\text{m}$ eingesetzt werden. Er berechnet dann $R_M(0,002\text{m})$ und ergänzt sein Ergebnis bei Aufgabenteil A2, dessen Ergebnis die von d abhängige und somit variable Gesamtreluktanz war. Nach einer Zwischenrechnung zum Erhalten von Φ berechnet er nun b_L mit Hilfe der kombinierten Formel.

In Phase 2 führt der Experte hierzu aus:

„[Die Flussdichte ist] generell definiert als der Fluss durch die jeweilige Fläche. Da der Fluss noch nicht bekannt war, musste ich den erst berechnen. Dafür habe ich verschiedene Möglichkeiten gehabt, einmal $L \cdot I$ oder Φ geteilt durch die magnetische Reluktanz. Da die Luftspaltlänge explizit gegeben war, habe ich das als Hinweis aufgefasst, diesen Weg zu verfolgen, da man hier das Ergebnis aus A2 verwenden konnte.“

(2038)

Das Ergebnis hat er dann in die Formel zur Berechnung der Flussdichte eingesetzt. Auf die Rückfrage, warum er Φ berechnet hat und nicht die andere Formel verwendet hat, in die man direkt einsetzen konnte, antwortet er, dass er den Wert Φ im kommenden Aufgabenteil benötige. Anschließend äußert er sich noch dazu, dass in dem magnetischen Kreis überall derselbe magnetische Fluss vorhanden ist und man so den Wert weiterhin einsetzen könnte, wenn man ihn einmal berechnet hat. Das Ergebnis der Rechnung begründet er folgendermaßen: Der erhaltene Wert ist für Anwendungen realistisch. Dabei hebt er hervor, dass der Zusammenhang linear ist und dieser Sachverhalt gerade für Anwendungen in Elektromotoren und Transformatoren günstig ist. (Die letzte Aussage ist nicht für die Bearbeitung

der Aufgabe wesentlich, aber wurde von dem Experten besonders hervorgehoben.)

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte stellt direkt zwei Wege vor. Er argumentiert, dass es keine weiteren gibt, wobei der Aufgabensteller verschiedene in den Formeln enthaltene Werte hätte vorgegeben können.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Durch eine falsche Umrechnung von d können hier Fehler in Zehnerpotenzen auftreten. Ansonsten kann es noch Fehler im Umstellen von Formeln oder bei der Eingabe in den Taschenrechner geben. Er sieht keine mathematischen Fehler, da hier ausschließlich Divisionen und keine höheren mathematischen Verfahren vorkommen.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Eine Validierung kann über die Praxis stattfinden. Magnetische Flussdichten können nicht über 2,2 Tesla liegen. Dadurch können Fehler im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen aufgedeckt werden.

[A5] Geben Sie die magnetische Energie im Luftspalt W_L und im Eisen W_{Fe} an. (2 Punkte)

Lösung

Gesucht sind die magnetischen Energien in Luftspalt und im Eisen.

Gegeben sind verschiedene, in den vorausgegangenen Aufgabenteilen erhaltene, Größen, die zur Berechnung der magnetischen Energie in verschiedenen Weisen genutzt werden können.

Abschätzung: Aus der Veranstaltung ist bekannt, dass in dem vorliegenden Kreis der Großteil der Energie im Luftspalt gespeichert ist. Dies kann zur Überprüfung des Ergebnisses genutzt werden. Zur Berechnung der magnetischen Energie sind mehrere Formeln aus der Vorlesung bekannt. Es kann die allgemeine Formel $W = \frac{1}{2} \Phi^2 R$ einerseits für das Eisen und andererseits für die Luft angepasst werden

Phase A5.1a: Berechnung von W_{Fe} und W_L
Ressourcen:
Einheitenmanagement, Umformtechniken und -strategien der "Größenalgebra"

und anschließend unter Verwendung der vorliegenden Größen verwendet werden. Die Größe Φ können wir folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{N \cdot I}{R_M(0,002\text{m})} = \frac{100 \cdot 10\text{A}}{336,881 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}} \\ &= \frac{10^3 \text{A} \cdot \text{Vs}}{336,881 \cdot 10^3 \text{A}} = 0,00297\text{Vs} = 2,97\text{mVs}\end{aligned}$$

- (a) Nach Einsetzen von $d = 0,002\text{m} = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$ – dieser Wert wurde vor dem Aufgabenteil A4 als Luftspaltbreite neu angegeben – in die Formel aus A2 ergibt sich hier:

$$\begin{aligned}R_L(0,002\text{m}) &= 53,052 \frac{10^6 \text{A}}{\text{Vsm}} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\text{m} \\ &= 106,104 \frac{10^3 \text{A}}{\text{Vs}} = 106,104 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}\end{aligned}$$

Nun muss beachtet werden, dass der Luftspalt doppelt vorkommt und daher auch bei der Reluktanz doppelt berücksichtigt werden muss. Damit erhalten wir die Formel: $W_L = \frac{1}{2} \Phi^2 \cdot 2R_L$. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}W_L &= \frac{1}{2} \left(\frac{N \cdot I}{R} \right)^2 \cdot 2 \cdot R_L \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2,97\text{mVs})^2 \cdot 2 \cdot 106,104 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} \\ &= 934,92 \cdot 10^{-6} \cdot (\text{Vs})^2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = 934,92 \cdot 10^{-3}\text{VAs} \\ &= 934,92\text{mJ}\end{aligned}$$

Durch Kürzen der Einheiten unter Berücksichtigung von mega bzw. kilo ergibt sich die Einheit VAs, was Joule entspricht.

- (b) Zur Berechnung von R_{Fe} kann direkt der Wert aus Teil A2 verwendet werden und der Wert Φ wurde bereits in diesem Aufgabenteil berechnet. Nun müssen die Werte in die Formel eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}W_{Fe} &= \frac{1}{2} \Phi^2 \cdot R_{Fe} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{N \cdot I}{R} \right)^2 \cdot R_{Fe} = \frac{1}{2} \cdot (2,97\text{mVs})^2 \cdot 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}} \\ &= 549,27 \cdot 10^{-6} \cdot (\text{Vs})^2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = 549,27 \cdot 10^{-3}\text{VAs} \\ &= 549,27\text{mJ}\end{aligned}$$

Validierung: Die Einheitenkontrolle gibt einen Hinweis darauf, dass wahrscheinlich kein grober Rechenfehler vorliegt.

Der Großteil der Energie wird im Luftspalt gespeichert, was der am Anfang erwähnten Abschätzung entspricht. Dies wird vor allem deutlich, wenn man das Volumen des Luftspaltes im Verhältnis zu dem des Eisens betrachtet.

Phase A5.2: Validierung über das SI-Einheitensystem
Ressourcen: Abruf von Faktenwissen

Expertenbearbeitung: Der Experte erinnert sich, dass in beiden Formeln $\frac{1}{2}\Phi^2$ vorkommt, aber „da fehlt noch was.“ (1740) Er setzt seine Überlegungen fort mit:

„Ok, das könnte man auch über Einheiten lösen.“

(1818)

und sagt dann, dass die Zieleinheit Joule ist. Er überspringt wegen der Unklarheiten bei der zu verwendenden Formel schließlich zunächst diesen Aufgabenteil und bearbeitet A6. Nach vollständiger Bearbeitung von A6 ergänzt er bei seinen Formeln die entsprechenden Reluktanzen und erhält auf diese Weise

$$W_L = \frac{1}{2}\Phi^2 R_{L, ges}$$

für die Energie in der Luft und analog

$$W_{Fe} = \frac{1}{2}\Phi^2 R_{Fe, ges}$$

für die Energie im Eisen. Mit der Formel berechnet er dann den Wert für W_L . Dieser erscheint ihm zu „ziemlich hoch“ (2219), woraufhin er auf einen Fehler schließt und sein Ergebnis mit einem Blitz kennzeichnet. Er vermutet die Berechnung des magnetischen Flusses als Fehlerquelle. Er berechnet diesen neu und verdeutlicht, dass der Wert für W_L nun geringer ist. Er berechnet dann auch die magnetische Energie im Eisen. Er bezeichnet das Ergebnis als „sinnvoll.“ (Anmerkung: Dieses Ergebnis ist nicht korrekt aufgrund des falschen Vorfaktors $\frac{1}{2}$.)

In Phase 2 ergänzt er, dass überall derselbe Fluss vorherrscht. Er kann wieder auf Ergebnisse aus den ersten Aufgabenteilen zurückgreifen. Er hat somit alle Werte, die er für diesen Aufgabenteil benötigt, bereits zuvor errechnet. Er interpretiert das Ergebnis so, dass ein Großteil der Energie im Luftspalt gespeichert ist, „was in der Realität auch immer der Fall ist.“ (3735). Er führt hierzu weiter aus:

„Denn das Eisen ist, man sieht es auch an den Ergebnissen, ein relativ schlechter Energiespeicher. Man sieht das auch als Deutung, wir haben für den Eisenteil ein geometrisch relativ großes Gebilde im Gegensatz zum Luftspalt. Aber dennoch beträgt die Energie im Eisen nur knapp ein Drittel der Energie im Luftspalt.“

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Mit den Methoden aus der GET-B gibt es keine Alternativen. In späteren Veranstaltungen wird tieferes Wissen über Energieverteilung und magnetische Kreise vermittelt. Man kann aufbauend auf den Ergebnissen der vorherigen Teile die Aufgabe ohne weitere Vorüberlegungen bearbeiten, daher ist die Vorgehensweise bezüglich den gegebenen Größen effizient.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Fehler können hier vermehrt bei der Eingabe in den Taschenrechner auftreten. Dieses ist in den Bearbeitungen der Studierenden zu erkennen, wenn der Rechenweg, d. h. die verwendeten Formeln und eingesetzten Werte, richtig sind, aber dennoch das Endergebnis nicht stimmt. Fehler treten auch durch Weglassen von Klammern in den Lösungen auf, wenn dann z. B. statt $100 \cdot \frac{10}{150 \cdot R_M}$ ein $100 \cdot \frac{10}{150} \cdot R_M$ berechnet wird. Weitere Fehler treten hier auch durch eine ungewöhnlich große Zahl an Auswahlmöglichkeiten für die verwendete Formel auf.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte machte zunächst einen Fehler bei der Bearbeitung, wodurch das Ergebnis deutlich zu hoch war. Er schloss auf einen Fehler bei der Flussberechnung, da dieser quadratisch eingeht und aus diesem Grund einen starken Einfluss hat. Aus der Vorlesung weiß man, dass der Großteil der Energie im Luftspalt gespeichert wird. Man hat also eine Vorstellung über Größenordnungen und Erfahrungswerte, welche nach Bearbeiten der Übungsaufgaben vorhanden sein sollte. Innermathematische Schwierigkeiten treten hier überlicherweise nicht auf, da nur Produkte berechnet werden.

[A6] Welche Masse m kann die Anordnung tragen? (4 Punkte) Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Näherung $h_{Fe} \approx 0$

Lösung

Gesucht ist die Masse m , bei der ein Gleichgewicht vorliegt. Die Masse ist am unteren Eisenkern befestigt, welcher im Abstand $d = 0,002m$ (Vorgabe vor Aufgabe A4) schwebt. Wenn diese Masse unterschritten wird, würde eine Anziehung vorliegen; wenn sie überschritten wird, würde der untere Eisenkern hinunterfallen.

Gegeben ist die Masse sowie die Erdbeschleunigung g . Zu nutzen sind auch die Ergebnisse aus den vorausgegangenen Aufgabenteilen.

1. Die Kraft, mit der die Masse m nach unten gezogen wird, kann als Produkt aus der Masse m und der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ berechnet werden.
2. Zur Berechnung von Kräften wurde in der Veranstaltung des Konzept des „magnetischen Drucks“ eingeführt, welcher als $p = \frac{1}{2}bh$ definiert ist, wobei b die Flussdichte und h die Feldstärke ist. Diese Größe entspricht der Energiedichte und hat als Einheit Kraft pro Fläche, d. h. $\frac{N}{m^2}$. Außerdem gilt: $\Delta p = p_L - p_{Fe}$.

Phase A6.1: Bestimmen einer Gleichung zur Berechnung der Masse

Ressourcen:

Gleichungsmanagement

3. Aus der Veranstaltung ist wiederum bekannt, dass die Kraftwirkung über die Formel

$$F = 2A_{Fe,1}\Delta p = 2A_{Fe,1} \cdot (p_L - p_{Fe})$$

berechnet werden kann.

4. Die magnetische Feldstärke h ist an dieser Stelle noch unbekannt, sie kann aber über $h = \frac{b}{\mu}$ berechnet werden.
5. Eine Vereinfachung wird nun durch den Hinweis in der Aufgabe vorgenommen, der die Anzahl der rechts betrachteten Größen von 4 auf 2 reduziert.

Mit Hilfe dieser Vorbetrachtungen können wir Δp folgendermaßen schreiben:

$$\Delta p = \frac{1}{2}(b_L \cdot h_L - b_{Fe} \cdot h_{Fe}) \approx \frac{1}{2} \cdot b_L \cdot h_L = \frac{b_L^2}{2\mu}$$

Damit können wir nun zwei Weisen angeben, wie die Kraft beschrieben werden kann: $F = m \cdot g$ und

$$F = 2A_{Fe,1} \frac{b_L^2}{2\mu} = A_{Fe,1} \frac{b_L^2}{\mu}.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir:

$$2 \cdot A_{Fe,1} \cdot \frac{b_L^2}{2\mu} = m \cdot g$$

In dieser Gleichung sind alle Werte bis auf m bekannt, was auch genau der hier gesuchten Größe entspricht. Durch Auflösen nach m erhalten wir $m = A_{Fe,1} \cdot \frac{b_L^2}{\mu \cdot g}$. Durch Einsetzen in diese Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned} m &= A_{Fe,1} \cdot \frac{b_L^2}{\mu \cdot g} = 0,015 \text{ m}^2 \cdot \frac{0,198^2 \text{ T}^2}{4\pi 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 47,7 \frac{\text{m}^2 \text{ T}^2}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 47,7 \frac{\frac{\text{m}^2 \text{ kg}^2}{(\text{As})^2 \text{ s}^2}}{\frac{\text{V}}{\text{As}}} = 47,7 \frac{\text{m}^2 \text{ kg}^2}{\text{As}^3 \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3}} = 47,7 \text{ kg} \end{aligned}$$

Phase A6.2: Berechnung von m

*Ressourcen:
Einheitenmanagement,
Umformtechniken und
-strategien der "Größenalgebra"*

Validierung: In Grundlagenlaboren wurden bereits ähnliche Versuche mit magnetischen Kreisen durchgeführt. Daher gibt es Vorerfahrungen zu den erwartbaren Größenordnungen in derartigen Situationen. Aus dieser ist die Größenordnung des zu erwartenden Ergebnisses bekannt.

Phase A6.3: Validierung über Erfahrungen aus Grundlagenlaboren

*Ressourcen:
Abruf von Erfahrungen aus
Grundlagenlaboren*

Expertenbearbeitung: Der Experte überlegt kurz in (1855) „Die Kraft oder die Masse?“ Er notiert dann die Formel

$$F = \frac{1}{2} (b_L \cdot h_L - b_{Fe} \cdot h_{Fe}),$$

welche die Kraftdifferenz zwischen den beiden auftretenden Kräften in der Luft und im Eisen beschreibt. Er argumentiert, dass durch die Vereinfachung $h_{Fe} \approx 0$ gemäß Aufgabenstellung der hintere Term wegfällt. Dann erkennt er, dass sich der Term über $b = \mu \cdot h$ vereinfachen lässt und so die Formel zu

$$F = \frac{1}{2} \cdot b_L^2 \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

wird. Beim Notieren ersetzt er F durch Δp , den magnetischen Druck. Für die magnetische Kraft erinnert sich an die Formel $F = \Delta p \cdot A_{Fe,1} \cdot 2$, welche er verbalisiert und symbolisch aufschreibt. So erhält er die magnetische Kraft und gibt seine Lösung folgendermaßen an:

$$F = 463,24N \Rightarrow m = \underline{47,2kg}$$

Er gibt keine Formel an, wie er mit der Gravitationskonstante g umrechnen kann (diese wäre $m = \frac{F}{g}$), sondern überführt es direkt in korrekter Weise, also unter Verwendung von g , ohne dieses konkret aufzuschreiben.

In Phase 2 des PARI-Interviews ergänzt der Experte in seiner letzten Rechnung in A6 die fehlende Formel zur Berechnung der Gravitationskonstanten. Er interpretiert das Ergebnis physikalisch, in dem er den magnetischen Druck und die Masse in Verbindung setzt: Er sagt, dass durch eine Verringerung der Masse eine Anziehung stattfinden würde und analog durch eine Erhöhung zu einer Abstoßung führen würde.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: In der Vorlesung wird nur der eine Weg beschrieben, also über den magnetischen Druck und die Kraft. Im Verlauf des Studiums werden noch weitere Möglichkeiten vorgestellt. Unter Verwendung der zuvor berechneten Größen ist der verwendete Weg allerdings der effizienteste. Wenn die Bedingung weggelassen wird, dass $h_{Fe} \approx 0$ ist, wird es komplizierter, wobei die Hintergründe und Vorgehensweisen erst im späteren Studium behandelt werden. Der Hinweis aus der Aufgabe ist allerdings realistisch, denn durch den Faktor $\mu_r = 1000$ ist die Feldstärke im Eisen 1000-mal geringer als in der Luft und kann daher idealisierend vernachlässigt werden.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Studierende berücksichtigen teilweise nicht den Hinweis in der Aufgabe, d. h. dass $h_{Fe} \approx 0$ gelten soll. Außerdem beachten sie nicht, dass

eine direkte Umrechnung von h_L zu b_L möglich ist mittels der Formel $h = \frac{b}{\mu}$. Mathematisch treten einfache Umformungen auf, konkret das Auflösen der beiden gleichgesetzten Kräfte im Kräftegleichgewicht und das Umstellen nach m . Dabei können – analog zu vorherigen Aufgabenteilen – Umformungsfehler bei den Zahlenwerten, Einheiten und Einheitspräfixen auftreten. Ein Fehler kann hier ebenfalls die Nicht-Verwendung des Konzepts für den magnetischen Druck sein. Ein weiterer Fehler kann das Gleichsetzen von Masse m und Kraft F sein, wobei gilt $F = m \cdot g$.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Dieses geht hier über das Vorstellungsvermögen. So kann nicht sein, dass die zehnfache Masse angezogen wird. Der letztendliche Größenbereich kann hier aber nicht in einem bestimmten, kleineren Intervall liegen, aber es kann schon aus der gegebenen Situation vermutet werden, welche Größenordnung das Ergebnis hat und dass die Masse beispielsweise nicht unter einem Kilogramm liegen kann.

Variationen der Aufgabe:

Man hätte die gleichen Größen, die in der Aufgabe berechnet werden sollten (wie z. B. die Reluktanzen) auch mit anderen vorgegebenen Werten wie z. B. dem resultierenden Fluss berechnen lassen können. Veränderungen hätten auch beim Aufbau geschehen können, z. B. durch das Anbringen weiterer Windungen an dem linken und rechten Teilstück des U-Kerns. Dieses hätte zu einer Addition der Windungen geführt, da so eine Reihenschaltung vorgelegen hätte. Der Einstieg über die Berechnung der Reluktanzen ist üblich, aber man hätte beispielsweise auch den Wert der Reluktanz vorgeben können, um daraus z. B. dann die Luftspaltbreite berechnen zu lassen. Dieses wäre in diesem Sinne also eine Umkehraufgabe. Mit Wissen aus höheren Semestern könnte man z. B. fragen, ab welcher Distanz sich der Fluss nicht mehr über das Eisen kurzschließen würde, sondern direkt über das linke und das rechte Teilstück des Eisens. Hierzu fehle den Studierenden aber laut dem Experten noch das technische Verständnis, denn es würde eine für Zweitsemesterstudierende noch nicht beherrschbare Komplexität mit sich bringen, die zu dem noch Methoden aus der Elektrodynamik erfordert. In A4 könnte durch andere Angaben anstatt einer Vorgabe von d noch Variationen schaffen. Allgemein gibt es für die vorliegende Aufgabe mit Methoden und Wissen aus höheren Semestern kaum geschicktere Lösungsmöglichkeiten und weitere Veränderungen würden laut dem Experten die Aufgabe in jedem Fall umfangreicher machen.

4.4 Beantwortung der ersten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die erste Forschungsfrage,

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

für Aufgabe A beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

1.1 Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?

In der Aufgabe sind – im Gegensatz zu den anderen drei Aufgaben – keine Methoden aus der Höheren Mathematik notwendig. Es müssen zur Lösung die auftretenden Größen, also Zahlenwerte mit Einheiten, mit Hilfe der Grundrechenarten kombiniert werden. Dabei treten Doppelbrüche auf, welche Größen enthalten. Im Zusammenhang mit den Einheiten müssen Einheitenpräfixe in Zehnerpotenzen umgewandelt und mit anderen Einheiten kombiniert werden. Zur Überführung der Einheiten kann das SI-Basiseinheitensystem verwendet werden, welches aus sieben Grundeinheiten besteht, mit deren Hilfe sämtliche übrigen Einheiten gebildet werden können. In den einzelnen Aufgabenteilen treten noch weitere mathematische Kompetenzen auf: In A2 müssen die in A1 gefundenen Reluktanzen mit Hilfe ihrer Abmessungen (Längen, Querschnittsflächen) und Formeln aus der Elektrotechnik zunächst beschrieben und dann berechnet werden. In A3 muss eine Formel, in der ein Bruch auftritt, qualitativ analysiert werden, um seinen Maximalwert zu finden. In A4 und A6 müssen verschiedene Formeln miteinander verknüpft werden, um eine Formel zu erhalten, welche bis auf die gesuchte Größe nur bekannte Größen enthält. In A5 können die beiden gesuchten Werte bzgl. ihrer Größenordnung miteinander verglichen werden. Bei Alternativansätzen, welche beide nicht notwendig zur Lösung dieser Aufgabe sind, kann in A3 Differenzieren und in den folgenden Aufgabenteilen Integration von Vektorfeldern, also insbesondere mehrdimensionale Integration, eingesetzt werden. In A3 muss das Extremum einer Funktion gefunden werden, wobei dieses ein Randextremum ist. Im Zusammenhang mit den Integrationen müssen Argumente gefunden werden, die eine Überführung auf Multiplikationen ermöglichen.

Der Experte nennt im Experteninterview die folgenden von den Studierenden erwarteten Kompetenzen: Das Hauptlernziel der Aufgabe ist laut dem Experten das Abprüfen von „Kochrezepten“, welche die Studierenden in den Übungen vermittelt bekommen haben. Konkret sind diese hier der Umgang mit der Skizze zum magnetischen Kreis, die Erstellung und Verwendung von Ersatzschaltbildern sowie die Berechnung typischer Größen (wie Reluktanzen, Induktivitäten, Flusssichten etc.) und deren Verständnis im Zusammenhang mit dem zugrundeliegenden physikalischen Kontext. Der Umgang mit diesen Kochrezepten sei bei den Studierenden sehr unterschiedlich, da sie sich die Aufgabe häufig unterschiedlich strukturieren, was man z. B. am Zeitpunkt im Bearbeitungsprozess erkennen könne, zu dem die Umformungen vorgenommen werden. In Grundlagenveranstaltungen werden hierbei häufig Vereinfachungen vorgenommen, „um die Studenten langsam an die Thematik heranzuführen, ohne sie zusätzlich zu verwirren.“ (4107)

Die Studierenden sollen überdies auch physikalische Zusammenhänge durch die Aufgabe erlernen, z. B. dass die Luftreluktanz größer als die Eisenreluktanz ist und dass dort der

Hauptteil der Energie gespeichert wird, wo die Reluktanz am größten ist. d. h. sie sollen die Ergebnisse für spätere Veranstaltungen memorisieren, um dortige qualitative Zusammenhänge besser einschätzen zu können. Sie sollen sich überdies qualitativ klarmachen können, was bei Variationen der Aufgabe passiert, z. B. wenn man von der U-Form zu einer E-Form übergeht. Durchführen können sollen sie dieses aber noch nicht, da entsprechende Verfahren erst in späteren Semestern behandelt werden und sie derartige Herangehensweisen noch nicht in den Übungen gesehen haben. Gerade im Hinblick auf A3 sollen die Studierenden nicht nur mathematische Verfahren anwenden, sondern auch qualitativ argumentieren lernen:

„Wenn wir die Aufgabe stellen, gehen wir davon aus, dass es den Studenten klar ist, dass man das Ergebnis direkt ablesen kann. Man muss also nicht mit großen mathematischen Rechnungen darangehen, sondern man kann es einfach erkennen. So können wir die Aufgabe auch lösen. Wir wollen den Studenten zeigen: Es muss nicht immer alles groß berechnet werden, manche Ergebnisse kann man auch direkt deuten, auch durch einfach Überlegungen direkt lösen.“

(5447)

Die Studierenden sollen lernen, Abhängigkeiten zu nutzen sowie Formeln zu deuten und dabei das erworbene Wissen auf kommende Aufgabenteile anwenden. Ein weiteres Ziel ist das Erlernen und Nutzen von Einheiten. Durch A4 soll ein „Gespür“ für magnetische Flussdichten entwickelt werden und ein Erkennen der Einflüsse der einzelnen Größen auf das Ergebnis. In diesem Zusammenhang sollen die Studierenden auch die Größenordnungen bestimmter Größen abrufen können.

1.2 Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?

Fehler können in dieser Aufgabe durch das Übersehen von Reluktanzen bei der Mathematisierung der Skizze aus der Aufgabenstellung entstehen. Es können Fehler bei der Arbeit mit den Brüchen oder bei der Verknüpfung der Einheiten entstehen, wobei in diesem Zusammenhang auch die auftretenden Zehnerpotenzen falsch umgerechnet werden können. Weitere Fehler können auch dadurch hinzukommen, dass Methoden des Differenzierens und der mehrdimensionalen Integration von Vektorfeldern falsch angewendet werden. Darüberhinaus können die Studierenden auch falsche Formeln heranziehen, um ihre Berechnungen durchzuführen. In A6 kann ein falscher Zugang durch die Studierenden modelliert werden.

Die Problemstelle am Beginn der Aufgabe ist das „Lesen“ der konventionalisierten Skizze und das Überführen in ein Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung aller auftretenden Reluktanzen. In allen Aufgabenteilen ab A2 müssen die auftretenden Brüche korrekt miteinander verrechnet werden und es müssen in allen Aufgabenteilen die für die betrachteten Situationen relevanten Formeln gefunden werden. In A6 muss ein passender Ansatz gefunden werden und zunächst eine Beschreibungsmöglichkeit für das dort auftretende Kräftegleichgewicht.

1.3 Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, aus der Studi-Expert-Lösung aus dem Vorabschnitt allgemeinere Aussagen zu Kompetenzen in Lösungsprozessen in Grundlagenfächern der Elektrotechnik

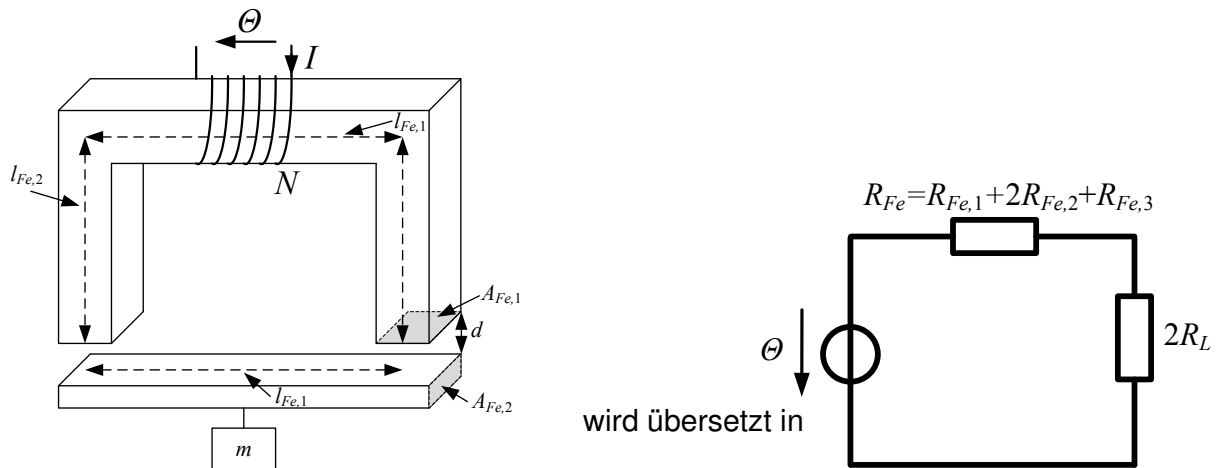


Abbildung 4.4.1: Übersetzung von Magnetischem Kreis in Ersatzschaltbild

zu ziehen. Zu diesem Zweck gibt es die im Zwischenfazit zu den Modellierungskreisläufen angekündigte Umdefinition der Phasen im Modellierungskreislauf, welche sich durch die normative Aufgabenanalyse mittels der Studi-Expert-Lösung, welche im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde, ergeben hat. Dabei ergeben sich drei Phasen:

1. Mathematisierung
2. Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten
3. Validierung

In diesem Abschnitt werden diese drei Phasen anhand exemplarischer Aufgabenteile der Aufgabe A näher beschrieben und definiert. Der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) wurde ab Seite 35 in Kapitel 2 vorgestellt.

Mathematisierung

Bei der Bearbeitung von Aufgabenteil A1 nehmen die Studierenden Idealisierungen und Vereinfachungen nicht selbst vor, sondern diese werden durch die Elektrotechnik-Veranstaltung, insbesondere den dortigen Übungsbetrieb, vorgegeben. Bezogen auf A1 bedeutet das konkret:

- es wird nur das magnetische Verhalten in einer statischen Situation betrachtet
- viele Aspekte werden nicht beachtet: die Induktivität der Spule, Streufelder und das nichtlineare Verhalten des Versuchsaufbaus

Viele dieser Idealisierungen sind den Studierenden nicht bewusst bzw. werden von den Dozierenden auch nicht expliziert. Eine Gefahr dieser Herangehensweise kann eine Überforderung durch eine reale Situation sein, wenn die Studierenden versuchen, sämtliche physikalische Mechanismen zu verstehen.

In A1 wird die Skizze des magnetischen Kreises unter Zuhilfenahme spezieller Überführungsregeln in ein Ersatzschaltbild übersetzt. Dieses ist in Abbildung 4.4.1 dargestellt.

Die Darstellungsform des Ersatzschaltbilds bietet hier eine Vielzahl an Informationen zu der vorliegenden physikalischen Situation in dem vorliegenden magnetischen Kreis und hat somit

$$\begin{aligned}
R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu} \frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu} \frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\
&= \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,3\text{m}}{0,015\text{m}^2} + \dots \\
&\quad \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}} \frac{0,5\text{m}}{0,006\text{m}^2} \\
&= 26,526 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 2 \cdot 15,916 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} + 66,315 \frac{10^3\text{A}}{\text{Vs}} \\
&= 124,673 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}
\end{aligned}$$

Abbildung 4.4.2: Berechnung der gesamten Eisenreluktanz in beiden Eisenkernen

im Sinne von Bruder und Collet (2011) die Rolle einer informativen Figur, vgl. entsprechenden Abschnitt in Kapitel 2 ab Seite 54. Diese Darstellungsform ermöglicht es, den Ansatz mit anderen diskutierbar zu machen, und auf einen Blick die Richtigkeit von Annahmen zu überprüfen.

In A1 erweist sich das Ersatzschaltbild als spezifisches diagrammatisches System, das die Mathematisierung unterstützt, und bei der Übersetzung des magnetischen Kreises in mathematische Formeln hilft. Andererseits gibt es keine Verwendung allgemeiner Problemlösestrategien wie dem „Erstellen einer Grafik“ (vgl. Polya).

Allgemein ergibt sich durch die Analyse der vorliegenden Aufgabe die folgende Definition: Die Phase der Mathematisierung beinhaltet die mathematische Beschreibung der in der Aufgabe gegebenen Situation. Im Gegensatz zu dem Modellierungskreislauf werden hier typischerweise konventionalisierte Skizzen verwendet, anstatt dass Modelle selbst entwickelt werden müssen. Diese konventionalisierten Skizzen unterliegen speziellen Überführungsregeln, mit Hilfe derer aus der elektrotechnischen Darstellung mathematische Ausdrücke gewonnen werden können. Auf diese Weise werden die Bearbeiter der Aufgaben bei dem Finden einer lösbaren mathematischen Aufgabe aufbauend auf der Situation in der Elektrotechnik unterstützt.

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten

Zur Erläuterung dieser Phase gibt es exemplarisch aus der Berechnung der Gesamtreluktanz im Eisen aus dem Aufgabenteil A2, welche in Abbildung 4.4.2 dargestellt ist. Dabei ergibt sich diese Reluktanz als Summe der vier Einzelreluktanzen, welche in der SEL mit R_{oben} , R_{links} (tritt doppelt auf, da genauso groß wie R_{rechts}) und R_{unten} .

In dieser Phase tritt die „Mathematik der Größen“ auf. Dieses schließt Dinge wie das unten definierte Einheitenmanagement sowie Techniken und Transformationsstrategien für Brüchen von physikalische Größe mit ein. Hierzu wird definiert:

1. Einheitenmanagement ist das Übersetzen der Einheiten in die sogenannten SI-Basiseinheiten, die im internationalen Einheitensystem festgelegt sind. Dabei müssen sogenannte Einheitspräfixe (wie das k bei kA - also das Kilo in Kiloampere) in Zehnerpotenzen (hier 10^3) hin- und rückübersetzt werden.

2. Die Umformungen selbst beinhalten häufig Doppelbrüche, wie auch in der Abbildung deutlich wird. Diese müssen passend umgeformt, um die Einheit der Ergebnisgröße zu erhalten. Analog hierzu müssen auch die Einheitspräfixe, also letztendlich Zehnerpotenzen, miteinander verrechnet werden.

Allgemein ergibt sich durch die Analyse der vorliegenden Aufgabe die folgende Definition: In der Phase des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens wird das elektrotechnische Problem gelöst, wobei eine „Mathematik mit Größen“ verwendet wird. Unter Größen versteht man ein Paar aus Zahlenwert und Einheit, wobei insbesondere die Einheit und der notwendige Umgang mit in diesem Zusammenhang auftretenden Zehnerpotenzen häufig eine wichtige Rolle spielen. In dieser Phase treten spezielle Strategien wie z. B. das „Gleichungsmanagement“ auf. Hiermit wird die Kombination von mehreren Gleichungen bezeichnet, die sich aus der Mathematisierung der vorliegenden Aufgaben ergeben haben, mit dem Ziel, eine Gleichung zu erhalten, bei der ausschließlich eine Größe oder ein funktionaler Ausdruck unbekannt ist. Nach dem Bestimmen einer solchen Gleichung kann diese in der Regel mit mathematischen Methoden aus der Mathematik für Ingenieure bzw. entsprechenden Vorkursen mit der Zielgruppe Ingenieurstudierende gelöst werden. Teilweise kommt es jedoch durch die in Kapitel 1 dargestellten Asynchronizitäten dazu, dass die benötigte Mathematik ausschließlich situiert in Elektrotechnik-Veranstaltungen eingeführt wurde.

Zusammenfassend kann man folgende beiden Merkmale dieser Phase festhalten:

1. Es gibt einerseits spezielle mathematische Methoden wie das vorgestellte Gleichungsmanagement. Bei diesen Methoden kommen anstatt einfacher Zahlen Größen, d. h. Zahlen mit Einheiten, zum Einsatz.
2. Andererseits fällt auf, dass – im Gegensatz zum Modellierungskreislauf – nicht mit einer Mathematik gearbeitet, die vom elektrotechnischen Kontext gelöst ist. Stattdessen gibt es immer wieder Rückgriffe auf die zugrundeliegende Elektrotechnik bzw. Physik.

Validierung, d. h. die Überprüfung der Ergebnisse

Im Gegensatz zu der Validierung im Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) findet in dieser Aufgabe keine Hinterfragung der Annahmen des verwendeten Modells statt. Stattdessen besteht die Validierung hier aus der Überprüfung der Ergebnisse, wozu unterschiedliche Methoden verwendet werden können:

Bei allen Rechnungen (also in den Aufgabenteilen A2 bis A6) kann eine Validierung über Einheitenkontrollen durchgeführt werden. In den Aufgabenteilen A3 bis A6 können jeweils noch weitere Überprüfungsstrategien verwendet werden: In A3 gibt es zwei Zugänge zu der Aufgabe, einen über eine innermathematische Betrachtung des Bruches und einen über die Betrachtung der zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen, wobei beide Wege zu demselben Resultat, also $d = 0$, führen müssen und so jeweils der eine Weg den anderen validiert. In A4 bis A6 können jeweils Größenordnungen eingesetzt werden, wenn auch in drei verschiedenen Weisen: in A4 ist eine Größenordnung für die gesuchten magnetischen Flussdichten aus der Veranstaltung bekannt. In A5 ist aus der Veranstaltung bekannt, wie die Relation der beiden gesuchten Ergebnisse aussieht, d. h. dass die magnetische Energie in der Luft ist immer größer als die magnetische Energie im Eisen. In A6 ist den Studierenden die Größenordnung der Masse, welche in diesem Aufgabenteil angehängt wird, aus Versuchen bekannt und sie erhalten über ihre Intuition, ob das Ergebnis die richtige Größenordnung hat.

4.5 Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben

In diesem Abschnitt werden die Bearbeitungsprozesse der fünf Studierendenpaare für alle sieben Aufgabenteile beschrieben und anschließend in einem Zwischenfazit gegenübergestellt, um Merkmale, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu finden. Im folgenden steht G... für die Gruppenbezeichnung des Studierendenpaars. Innerhalb der Gruppen steht P... für die einzelnen Studierenden:

4.5.1 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A1 und A2

[A1,A2] Ansatzfindung zur Berechnung der Reluktanzen: Skizzieren Sie das elektrische Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises und vereinfachen Sie dieses soweit es geht. Geben Sie den magnetischen Gesamtwiderstand $R_M(d)$ als Funktion der Variable d an.

G1 : Nach dem Lesen der Aufgabenstellung wird von P3 direkt die Anzahl der Widerstände hinterfragt und von ihm selbst mit „vier“ beantwortet. P2 erkennt dann, dass die Luftwiderstände R_L gleichgroß sind. Die beiden Eisenstücke werden als jeweils ein Widerstand betrachtet. P1 möchte dann, dass die Richtung der Durchflutung, also des magnetischen Flusses, miteingezeichnet wird. Nach kurzer Diskussion meint P3, dass die Richtung egal sei, da sie in einem Ersatzschaltbild nicht betrachtet werden müsse, wozu P2 in (0319) ergänzt:

„Man zeichnet es ja ein, weil es schön aussieht.“

P1 betrachtet es als Vereinfachung, alle Widerstände zu einem zusammenzufassen, wobei er direkt berücksichtigt, dass bei dem Luftwiderstand noch ein d , die Luftspaltbreite, in der Formel vorkommt.

Die Studierenden geben zunächst die allgemeine Formel für einen magnetischen Widerstand an, nämlich $R = \frac{l}{A\mu_0\mu_R}$. Dabei erkennen sie, dass sie alle vorkommenden Variablen bei der Berechnung einsetzen können, wobei sie bei R_L d 'so lassen', da sie nicht einsetzen können. Die Studierenden setzen das unvereinfachte Ersatzschaltbild aus A1 ein und mathematisieren die Aufgabe entsprechend. Sie erkennen, dass es einen „Fixwiderstand“ R_M gibt, der nicht von d abhängt. Wegen der identischen Querschnittsflächen bei dem oberen U-Kern addieren sie die drei Längen zu 110cm (= 30cm+50cm+30cm). Sie berechnen so die zwei Eisenwiderstände (U-Kern, unteres Eisenstück) und erhalten den Widerstand in den beiden Luftspalten durch Verdopplung. Im letzten Schritt addieren sie die Werte. P2 ist unsicher bei der Einheit, aber kommt dann richtigerweise auf $\frac{kA}{Vs}$. Auf diese Weise kommen die drei Studierenden zu dem richtigen Endergebnis.

Die Studierenden setzen $d = 0$ zur Bestimmung des Schnittpunkts mit der y -Achse ein. Sie erkennen, dass der gerade berechnete magnetische Gesamtwiderstand eine lineare Funktion ist, in dem sie die Terme in konstante Terme (für die beiden Eisenkerne) und lineare Terme (für den von d abhängigen Luftspalt aufteilen). Dann bestimmen sie zwei Punkte auf der Geraden zum genaueren Zeichnen, in dem sie einen selbstgewählten Wert bei d einsetzen und dann durch die beiden Punkte durchzeichnen. Die Bearbeitung ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung der Studierenden entspricht der SEL, aber sie vereinfachen das Ersatzschaltbild in anderer Weise. Sie fassen im Zusammenhang mit der Vereinfachung beispielsweise anhand gleicher Querschnittsflächen zusammen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden erstellen Ersatzschaltbilder, welche die konventionalisierte Darstellung in der folgenden Situation sind, um eine Hilfe für die Mathematisierung zu erhalten.
- **{AB}** Bei den geforderten Vereinfachungen lösen sie sich von der konventionalisierten Darstellung im Ersatzschaltbild, sondern betrachten direkt Rechenvereinfachungen in ihren verwendeten Formeln. So kommen sie auf korrekte Teilergebnisse und erhalten den korrekten Gesamtwiderstand. Eine direkte Verbindung zwischen den beiden Aufgabenteilen wird nicht gesehen.
- **{B1}** Sie richten ihre Überlegungen bei der Unterteilung in Teilwiderstände im Ersatzschaltbild nicht auf das spätere Rechnen aus. Im Zusammenhang mit der Vereinfachung der Rechnung zeigt sich, dass den Studierenden unklar ist, nach welchen Kriterien sie vereinfachen sollen.
- **{B3}** Die Studierenden nehmen Vereinfachungen beim Rechnen selbst vor, indem sie Eisenstücke mit derselben Querschnittsfläche zusammenfassen, in dem sie deren Längen addieren, d. h. innermathematische Umformungen mit Brüchen, vornehmen.
- **{B4}** Sie skizzieren ihr Ergebnis, in dem sie den Wert bei $d = 0$ bestimmen sowie ein lineares Wachstum bei dem Ausdruck erkennen.
- **{C1}** Zur Validierung ihrer Formeln nutzen sie die Studierenden die Einheiten der betrachteten Reluktanzen.

G2 : Nach dem Lesen der Aufgabenstellung zeichnet P1 einen Widerstand für das obere Stück des U-Kerns, jeweils einen für die beiden Seitenstücke und einen für das untere Eisenstück ein. P2 erkennt, dass die drei Stücke, aus denen der U-Kern besteht, dieselbe Querschnittsfläche haben, und man sie daher als einen betrachten kann. P1 verweist dann auf das Wort „Vereinfachen“ in der Aufgabenstellung und zeichnet sechs Widerstände ein. P1 hinterfragt, warum es sechs Widerstände sind und P2 erklärt ihm, dass er für den U-Kern drei Teilreluktanzen gewählt hat, da die Längen unterschiedlich sind. P1 kommt dann beim Zählen auf vier Widerstände und P2 weist ihn auf die zwei Luftwiderstände hin. Sie einigen sich schließlich auf sechs Widerstände. Sie sind unsicher bei der Benennung ihrer Widerstände und benennen gleichgroße Widerstände identisch, also konkret den Widerstand im linken und den im rechten Stück des U-Kerns. Es gibt eine Unsicherheit, wie die Zusammenfassung zur Vereinfachung aussehen soll. P1 erinnert sich an die Formel

$$R_{\text{magnetisch}} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

und P2 merkt an, dass der gesuchte Gesamtwiderstand auch schneller berechnet werden könne, wenn Größen wie den magnetischen Fluss Φ zur Verfügung hätte. Sie berechnen dann unabhängig voneinander die einzelnen Widerstände für die Teilstücke. P2 überlegt, ob die

Größenordnungen der Ergebnisse stimmen können. P1 erinnert sich an die Einheit $\frac{A}{V \cdot s}$ und erkennt, dass bei R_L eine Abhängigkeit von d bleiben wird, dort aber kein μ_r , die relative Permeabilität, in der Formel berücksichtigt werden muss, da dort $\mu_r = 1$ gilt. P2 addiert dann die erhaltenen Ergebnisse für die Teilreluktanzen zur Gesamteluktanz auf und berücksichtigt dabei das $2 \cdot d$, was variabel bleibt.

P2 beginnt das Skizzieren des Graphen für die Gesamteluktanz in (1251) mit dem Vorlesen der Aufgabenstellung. Nach einer Rückfrage von P1, wie P2 die Beschriftung vornimmt, sagt dieser, dass er d „unten“ und R_{gesamt} „oben“ einträgt. Dann zeichnen beide den Verlauf und P1 fragt in (1331), ob dieser linear ist. Daraufhin zeichnen beide eine lineare Funktion, welche bei $(0, R_{Fe})$ die y -Achse schneidet. Das Ergebnis ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Das Vorgehen entspricht der Studi-Expert-Lösung, aber sie fassen die auftretenden Reluktanzen nicht zusammen, als nehmen keine Vereinfachung vor.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden erstellen ein Ersatzschaltbild als Mathematisierungshilfe, wie es in der Aufgabe verlangt ist.
- **{A3}** Bei der Herleitung der Reluktanzformel gehen sie von der allgemeinen Formel $R = \frac{l}{\mu A}$ aus, welche ihnen aus der Vorlesung bekannt ist, und spezialisieren sie für die Anwendung auf Eisen bzw. Luft.
- **{B1}** Bei den Studierenden zeigen sich unterschiedliche Strukturierungen bei den Festlegungen der verwendeten Widerstände, wobei ihnen der Begriff der Vereinfachung unklar ist. Sie nehmen unterschiedliche Bündelungen vor: Während P2 die Reluktanzen im U-Kern wegen verschiedener Längen getrennt betrachtet, fasst P1 sie wegen der identischen Querschnittsfläche zusammen. Schließlich einigen sie sich auf die maximal richtige denkbare Anzahl an Widerständen, bündeln dann aber durch gleiche Benennung gleichgroße Widerstände.
- **{B2}** Sie nutzen eine Strategie des Zerlegens und Zusammenfassens von in den Formeln auftretenden Größen, die sie nach unterschiedlichen Dingen (Längen, Querschnittsflächen) bündeln.
- **{B4}** Sie skizzieren ihr Ergebnis, in dem sie den Wert bei $d = 0$ bestimmen sowie ein lineares Wachstum bei dem Ausdruck erkennen.
- **{C1}** P1 arbeitet über die Einheit der Reluktanz in der Validierung.
- **{C2}** P2 setzt Größenordnungen zur Validierung des Ergebnisses für die Reluktanz ein.

G3 : Nach dem Lesen der Aufgabe diskutieren die beiden Studienteilnehmer über die Richtung des Flusses. P2 fällt das m in dem dargestellten magnetischen Kreis auf, was er als Masse betrachtet, die „bestimmt noch kommt.“ (0055) P1 setzt die Durchflutung (magnetisch) mit der Spannung (elektrisch) gleich. P1 betrachtet den ganzen U-Kern als einen Widerstand und bezeichnet diesen als R_{M1} und P2 den unteren Eisenkern als R_{M2} . P2 bezeichnet den Widerstand im Luftspalt mit R_δ , weil er ihn „immer“ so nenne. Den Aufgabenteil mit der Vereinfachung löst P2, in dem er alle Widerstände zu einem zusammenfasst. In A2 ziehen sie

Formel für die Reluktanz $\frac{l}{\mu A}$ heran und P1 fragt, wo d in der Aufgabe ist. P2 sagt, dass das der Luftspalt sei, und P1 folgert, dass die Luftwiderstände davon abhängig sind. Zu der Berechnung der Einzelreluktanzen spezialisieren sie jeweils die genannte Formel für die Reluktanz. Sie berechnen zunächst R_{M1} , wobei P2 erkennt, dass die Querschnittsfläche überall gleichgroß ist, so dass sie insgesamt als Länge 110cm verwenden, was P1 ad hoc in m umrechnet. Beim Aufschreiben der Formel setzen sie direkt bekannte Werte ein, aber fassen erst im nächsten Schritt zusammen. Analog gehen sie bei R_{M2} vor. Bei den Luftspalten erkennt P1, dass sie μ_0 statt $\mu_0 \cdot \mu_r$ haben, und P2 ergänzt, dass als l hier $2d$ ist. So erhalten sie durch Addition der Teilergebnisse den Gesamtwiderstand und kommen so auf das Gesamtergebnis.

Die Studierenden haben die Skizze des Graphen für die Gesamteluktanz nicht erstellt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe entsprechend der SEL, wobei sie den letzten Teil der Aufgabe nicht bearbeiten. Sie nehmen eine andere Vereinfachung als in der SEL vor, denn sie fassen alle Reluktanzen zu einer zusammen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die beiden Teilnehmer der Studie diskutieren zunächst über die Skizze in der Aufgabe, um damit das Ersatzschaltbild erstellen zu können.
- **{A1}** P2 erkennt den Buchstaben m in der Skizze zu der Aufgabe, der nicht als gegebene Größe in Aufgabenstellung auftaucht, aber klassifiziert diesen sofort als eine Masse.
- **{A1}** Nach Anschauung weisen sie im Ersatzschaltbild zunächst zwei Reluktanzen zu, nämlich eine pro Eisenstück. Zusätzlich liest P2 die Luftwiderstände ab, welche er als Standardnotation mit R_δ bezeichnet. Somit arbeitet er hier auch über die Benennung und organisiert sich die Aufgabe auf diese Weise.
- **{A2}** Sie betrachten dabei die auftretenden physikalischen Mechanismen, die in dem Zusammenhang mit Magnetismus in Analogie zur Elektrizität auftreten.
- **{A3}** Bei der Berechnung gehen sie von der allgemeinen Formel für Reluktanzen aus und spezialisieren sie.
- **{B1}** Als Vereinfachung betrachtet das Studierendenpaar die Zusammenfassung aller Widerstände zu einem einzigen, ohne einen Bezug zu Aufgabenteil A2 zu betrachten.
- **{B3}** Sie betrachten den U-Kern als eine Reluktanz, da seine Querschnittsfläche an allen Teilstücken identisch ist, also nehmen eine Vereinfachung nach identischen Bestandteilen der Formel vor. Dabei betrachten sie nicht die „Knicke“ in dem U-Kern.

G4 : Nach dem Lesen der Aufgabenstellung notiert sich P2 die allgemeine Formel für die Berechnung einer Reluktanz, also $R = \frac{l}{\mu A}$. P2 betrachtet den magnetischen Fluss in der Skizze zum Magnetischen Kreis und die Studienteilnehmer zeichnen sechs Widerstände ein. Eine Vereinfachung wird nicht vorgenommen. Bei der Berechnung der Widerstände sagt P1 zunächst, dass die Spannung 1000 A beträgt, wobei P2 nicht darauf eingeht. P1 und P2 erkennen, dass μ_r für das Eisen angegeben ist. P2 ist unklar, was mit d gemeint ist, und P1 deutet in der Skizze auf den Luftspalt. Daraufhin berechnet P2 die Reluktanz im oberen Bereich des U-Kerns und erklärt

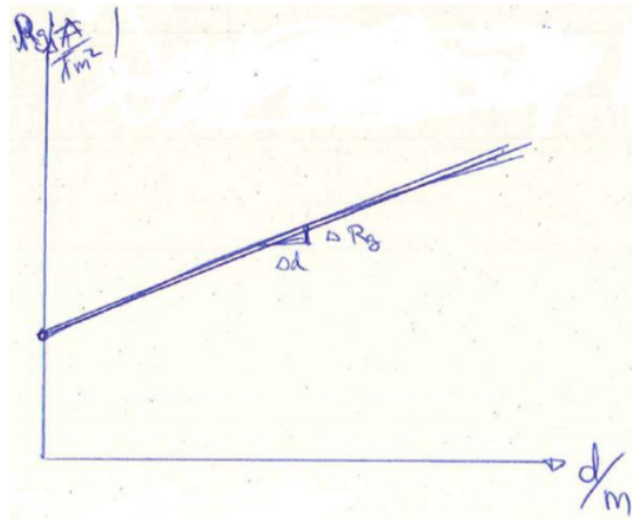


Abbildung 4.5.1: Skizze von Gruppe 4 für die Gesamtrelektanz

P1 anschließend die Vorgehensweise. P2 ist unsicher bei der Einheit der Reluktanz und versucht es sich über das Ohm'sche Gesetz $R = U/I$ zu erschließen. Sie notieren die Einheiten separat, d. h. ohne die Zahlenwerte, anhand ihrer Formel für die Reluktanz. P2 berechnet die beiden anderen Eisenreluktanzen. P1 fragt, welche Größen P2 für R_{Luft} verwendet, weil d unbekannt ist. Bei den Benennungen der Widerstände treten Unterschiede auf, die den Teilnehmern zunächst nicht auffallen, welche aber später mit Hilfe des Ersatzschaltbildes geklärt werden. P1 überlegt weiter, wie die korrekte Einheit ist und erwägt einen Ausdruck mit Tesla. P2 kombiniert seine Teilergebnisse am Ende und berechnet die Gesamtrelektanz folgendermaßen:

$$R_{ges} = R_{oben} + R_{unten} + 2 \cdot (R_{links} + R_{Luft}).$$

P1 und P2 kommen auf unterschiedliche Ergebnisse, aber der Fehler wird nicht ersichtlich, und schließlich übernimmt P1 das Ergebnis von P2. Damit löst die Gruppe die Aufgabe richtig. Die Gruppe erstellt ab (1820) die Abbildung 4.5.1. P2 kommentiert mit:

„Wir sollen das nur skizzieren, das ist scheißBegal, wie das aussieht.“

und beschriftet die Achsen zunächst nicht. P1 ergänzt dann nach einer Rückfrage die Angaben zu den Einheiten an beiden Achsen und zeichnet ein Steigungsdreieck ein.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Das Vorgehen der Studierenden entspricht dem Lösungsweg in der SEL, wobei keine Vereinfachung vorgenommen wird.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 setzt sich mit den Vorgaben in der Aufgabe auseinander und überlegt, was sie in der Situation bedeuten.
- **{A2}** P1 vermischt bei der Auseinandersetzung mit der Aufgabe die analogen Konzepte Magnetismus und Elektrizität, da er bei der Berechnung des magnetischen Widerstands R den in der Aufgabe vorgegebenen elektrischen Strom I miteinbeziehen möchte – resultierend aus dem Ohm'schen Gesetz $R = \frac{U}{I}$.

- **{A3}** P2 zieht die Formel für die Reluktanz heran, welche dann für Eisen und Luft spezialisiert wird.
- **{B1}** P2 zeichnet sechs Widerstände ein, aber nimmt keine Vereinfachung vor.
- **{B1}** Bei den Reluktanzen verwenden P1 und P2 unterschiedliche Benennungen, was ihnen zunächst nicht auffällt und zu Schwierigkeiten in der Paardiskussion führt.
- **{B3}** P2 bündelt sein Ergebnis, in dem er die an zwei Stellen vorkommende 2 ausklammert, was ihm als eine Vereinfachung für später dienen könnte.
- **{B4}** Die Studierenden zeichnen eine lineare Funktion, wobei P2 zunächst auf eine Beschriftung der Achsen verzichtet und P1 schließlich Einheiten, aber keine Skalierung, ergänzt.
- **{C1}** Nach der Berechnung der ersten Teilreluktanz hinterfragt P2 die Einheit und versucht sie sich über eine Analogie zum elektrischen Widerstand zu erschließen. Hierzu nimmt er eine Dimensionskontrolle vor, d. h. er zerlegt die Größen in Zahlenwert und Einheit und betrachtet erstmal nur zweiteres.

Zwischenfazit zu den Aufgabenteilen A1 und A2

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Es treten Fehler verschiedener Art auf: Eine Gruppe betrachtet zwischenzeitlich die Masse m , die zwar in der Aufgabe vorkommt, an dieser Stelle jedoch irrelevant ist. Es gibt Vermischungen von den magnetischen Widerständen in der Aufgabe mit Konzepten für elektrische Widerstände nach Ohm'schem Gesetz. Die beiden Studierenden bei einem Paar verwenden unterschiedliche Benennungen für selbstbenannte Größen, was zu Schwierigkeiten in der Paardiskussion führt. Ein Paar führt die Umrechnung auf die SI-Basiseinheiten falsch durch. Beim Skizzieren der linearen Funktion trägt ein Paar zwar die Einheiten ein, verwendet aber trotz Diskussion keine Skalierung an den Achsen.

Problemstellen ergeben sich in diesem Aufgabenteil in dem Punkt, ob eine korrekte Darstellung der Ersatzschaltbilder vorliegt, bei der sämtliche Reluktanzen, also alle im Eisen und alle in der Luft, berücksichtigt werden. In Bezug auf das Rechnen ist hierbei eine geschickte Zusammenfassung der Widerstände wichtig, um den Aufwand zu verringern. Unklarheiten herrschen bei allen Studierendenpaaren darüber, wie eine Vereinfachung, wie sie die Aufgabe, verlangt, aussehen kann. Einen Zusammenhang zwischen Überlegungen bei der Unterteilung in Teilwiderstände in Aufgabenteil A1 und dem späteren Rechnen in Aufgabenteil A2 verwendet keine Gruppe. Im Zusammenhang mit der Vereinfachung der Rechnung zeigt sich, dass den Studierenden unklar ist, nach welchen Kriterien sie vereinfachen sollen: keine Vereinfachung, alle Reluktanzen zu einer vereinigen, eine Unterteilung nach Eisen und nach Luft oder zwei Eisenreluktanzen und zwei Luftreluktanzen entsprechend der Skizze in der Aufgabe. Stattdessen suchen die Studierenden Gemeinsamkeiten zwischen den Summanden in der Formel, wie gleiche Querschnittsflächen oder gleiche betrachtete Längen.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Alle Studierendenpaare erstellen Ersatzschaltbilder, welche die konventionalisierte Darstellung in der folgenden Situation sind. Hierzu setzen sie sich mit der in der Aufgabe gegebenen Skizze auseinander, wobei einem Paar der Buchstabe m unklar ist, wobei es diesen aber sofort als Masse klassifiziert. Mit Hilfe der Skizze weisen die Studierenden dann Reluktanzen aus und bezeichnen diese so, dass man aus der Benennung gleich ihre Rolle erkennen kann, d. h. beispielsweise R_δ für den Luftwiderstand. Ein Paar geht die Vorgaben aus der Aufgabe durch und überlegt, was sie im Folgenden für eine Rolle spielen können.

{A2} Die Studierenden durchdenken die auftretenden physikalischen Mechanismen. Hierbei treten Vermischungen zwischen den analogen Konzepten „Magnetismus“ und „Elektrizität“ auf.

{A3} Alle Studierendenpaare ziehen die Formel für die Reluktanz, $R = \frac{l}{\mu A}$, aus der Vorlesung heran und spezialisieren sie für die Anwendung auf Eisen- bzw. Luftreluktanzen.

{AB} Die Studierendenpaare betrachten beim Vereinfachen des Ersatzschaltbilds mögliche Vereinfachungen in den Rechnungen anstatt ein mögliches Zusammenfassen von Reluktanzen in dem Bild, gehen aber dennoch nicht so vor wie in der SEL.

{B1} Jedes Studierendenpaar wählt eine andere Vereinfachung bei der Zusammenfassung der auftretenden Reluktanzen, aber nur eines bedenkt dabei bereits die Rechnungen und keines der Paare wählt im Hinblick auf die Rechnung die Vereinfachung aus der SEL. Teilweise zeigen sich auch Unterschiede zwischen den Bearbeitungen der einzelnen Studierenden eines Studierendenpaars. Die Kriterien, wonach eine Vereinfachung durchgeführt werden soll, sind den Studierenden unklar. Es tritt dabei auf: die Zusammenfassung zu einer Reluktanz, zu zweien (Luft und Eisen), zu vierten (zweimal Luft, zweimal Eisen) und zuletzt das Belassen von sechs Reluktanzen. Sie richten ihre Überlegungen bei der Unterteilung in Teilwiderstände nicht auf das spätere Rechnen aus. Im Zusammenhang mit der Vereinfachung der Rechnung zeigt sich, dass den Studierenden unklar ist, nach welchen Kriterien sie vereinfachen sollen. Bei einem Studierendenpaar wird einerseits nach identischen Längen und andererseits nach identischen Querschnittsflächen gebündelt.

{B2} Die Studierenden nutzen eine Strategie des Zerlegens und Zusammenfassens der sechs auftretenden Reluktanzen, also überlegen auf mathematischer Ebene, wie sie geeignet bündeln können.

{B3} In den Rechnungen nehmen die Studierenden Vereinfachungen und Zusammenfassungen an den in den Formeln auftretenden Brüchen vor. Dabei betrachten sie nicht die „Knicke“ bei dem U-Kern. Ein Paar nutzt als Vereinfachung das Ausklammern des Faktors 2, der an zwei Stellen auftritt.

{B4} Beim Zeichnen des Graphen $R_m(d)$ setzen die Studierendenpaare den Wert $d = 0$ ein, um den y -Achsenabschnitt zu bestimmen und erkennen den Wert der Luftreluktanz als Steigung der zu zeichnenden linearen Funktion.

{C1} Zur Validierung setzen drei der vier Studierendenpaare Einheitenkontrollen mit der Einheit der Reluktanz ein.

{C2} Ein Paar durchdenkt Größenordnungen der vorkommenden Reluktanzen.

4.5.2 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A3

[A3]

(a) Geben Sie die Induktivität L der Anordnung in Abhängigkeit der Luftspaltbreite d an

(b) Bestimmen Sie die Luftspaltbreite d , bei der die Induktivität maximal wird

G1 : Die Studierenden erkennen, dass die 'normale Formel' für Induktivität nicht anwendbar ist und suchen über qualitative physikalische Überlegungen nach einer passenden Formel. Sie erkennen konkret, dass wenn 'der Widerstand größer wird, dann wird der Strom ja kleiner'. Da sie die benötigte Formel nicht kennen, erhalten sie vom Studienleiter die Formel $L = \frac{N^2}{R_{\text{ges}}}$. P2 betrachtet die Formel für die Induktivität und erkennt, dass das Maximum bei $d = 0$ liegt. P1 versucht das Ergebnis durch algebraische Umformungen plausibler zu machen, in dem er die Luftreluktanz ausklammert, da er davon ausgeht, dass er es noch zeichnen müsse. P2 überzeugt ihn dann, dass man den Wert $d = 0$ aus der Formel $L = \frac{N^2}{R_{\text{ges}}}$ ablesen kann, da das d im Nenner steht und dieser dann minimal wird und somit der Bruch maximal. Die Studierenden setzen den Wert $d = 0$ zur Bestimmung der gesuchten Lösung ein.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung entspricht der SEL, wobei eine Vermischung der beiden Begründungsvarianten auftritt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P2 zieht physikalisches Wissen heran, um die Aufgabe zu lösen.
- **{A2}** P2 interpretiert die Formel für die Induktivität physikalisch.
- **{B4}** P1 möchte durch eine Umformung verdeutlichen, wie die Abhängigkeit der Induktivität von der Luftspaltbreite ist und macht hiermit qualitative Überlegungen.
- **{B4}** P2 erkennt aus der Formel zur Berechnung der Induktivität, dass der Nenner mittels $d = 0$ minimiert werden muss.

G2 : P1 steigt direkt in (1516) mit

Das kann ich dir sagen. Das ist bei null.

ein. P2 sagt, dass $L = \frac{\Phi}{I}$ ist, aber P1 meint, dass das hier nicht hilft, wobei P2 gleichzeitig erkennt, dass I vorgegeben ist. P1 sagt, dass mit Hilfe einer Abhängigkeit Φ ersetzt werden kann und erinnert sich an die Formel $\frac{N \cdot I}{R_{\text{ges}}}$, ohne zu sagen, woher genau diese Formel kommt. P2 erkennt, dass sich durch Kombination der Formel I herauskürzt und erinnert sich an die Formel $L = \frac{N^2}{\text{magnetischer Widerstand}}$, wobei P1 eine Abhängigkeit des Ergebnisses von d erkennt. Sie setzen dann die Werte ein. P1 ergänzt, dass der Bruch maximal wird, wenn kein Luftspalt da ist und da d im Nenner steht, muss es möglichst klein sein. Dann diskutieren sie darüber, ob sie damit die Aufgabe schon gelöst haben, da dort „bestimmen“ statt „angeben“ steht. P2 schlägt vor zu sagen, dass bei $d = 0$ der Nenner minimal wird und der Bruch dadurch maximal. So berechnen sie die richtige maximale Induktivität und kommen zum richtigen Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe entsprechend der SEL, wobei sie beide Begründungsvarianten vermischen. Ihnen ist unklar, ob die Argumentation über den Bruch ausreichend zur Beantwortung der Aufgabe ist.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Am Ende der Aufgabenbearbeitung diskutieren die Studierenden darüber, welches der beiden Argumente, d. h. „kein Luftspalt“ bzw. „Bruch ist maximal bei $d = 0$ “ die Aufgabe korrekt löst. In diesem Zusammenhang hinterfragen die Studierenden, was der Unterschied zwischen „bestimmen“ und (von ihnen angeführt) „angeben“ ist, d. h. es ist unklar, ob beide Argumente für eine richtige Lösung akzeptabel sind.
- **{A2}** Zunächst wird von P1 gesagt, dass bei einem fehlenden Luftspalt die Induktivität maximal wird, d. h. es werden physikalische Mechanismen in der Argumentation eingesetzt.
- **{A3}** Die Studierenden ziehen mehrere Formeln für Induktivitäten in verschiedenen Kontexten heran, die ihnen für die Bearbeitung relevant erscheinen.
- **{B2}** Sie setzen Gleichungsmanagement ein, um die Formel zu kombinieren. P1 sieht, dass das Gleichungsmanagement nicht abbricht, d. h. immer mehr als eine Unbekannte übrigbleibt, da mit der Luftspaltbreite d noch eine weitere Unbekannte erhalten bleibt.
- **{B4}** Anschließend argumentiert P1 über die Form des Bruches und dass dieser maximal wird, wenn man $d = 0$ einsetzt, was einer Rechtfertigung über „Berechnung“ (siehe Bing (2008)) entspricht.

G3 : P2 steigt mit $U = R \cdot I$ in die Diskussion ein und sagt, dass sie Φ brauchen. Sie erinnern sich, dass $\Phi = \frac{I \cdot N}{R_{\text{ges}}}$ ist und setzen direkt bekannte Größen ein. Dabei sind sie unschlüssig über die Richtungen des magnetischen Flusses. P2 schlägt zum Bestimmen des Maximums ableiten vor, während P1 den Bruch untersuchen möchte. Sie erkennen mit Hilfe einer weiteren Formel, dass sie es mit der Windungszahl, welche 100 ist und direkt eingesetzt wird, multiplizieren müssen und der Strom sich herauskürzt, so kommen sie auf $L = \frac{100^2}{R_{\text{ges}}}$, wobei sie R_{ges} direkt einsetzen. Zur Berechnung des Maximums sagt P1:

Aber du kannst ja auch überlegen, wann das ist. Das heißt, unterm Bruchstrich muss es minimal werden, also muss $d = 0$ sein. Ist auch irgendwie logisch: Je weniger der Widerstand, desto mehr Strom geht dadurch.

(1644)

Dabei werden in der Argumentation Begriffe aus dem Bereich des elektrischen Stroms eingesetzt, aber die Analogie, welche die Zusammenhänge aus dem elektrotechnischen Hintergrund dieses Kapitel einsetzt, überzeugt P2, dass das Argument richtig ist. P2 ergänzt, dass „Bestimmen Sie“ nur hinschreiben heißt. Die Lösung der Aufgabe ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden leiten zunächst die Formel für die Induktivität her. Danach bearbeiten sie die Aufgabe entsprechend der SEL. Ihnen ist unklar, ob das Argument über die Form des Bruches als Antwort ausreicht.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Es gibt am Ende eine Unklarheit der Anforderungen bezüglich der Begründung von $d = 0$.
- **{A2}** Die Studierenden leiten sich die Formel für die Induktivität über eine Analogie zum elektrischen Widerstand her, die sie auf die Situation anpassen wollen. Sie beschließen daher, zunächst Φ zu suchen, was in der Analogie der Spannung entspricht, wobei wieder die Richtung hinterfragt wird.
- **{A2}** P1 interpretiert sein Ergebnis über physikalische Mechanismen.
- **{B2}** Die Studierenden betreiben zunächst Gleichungsmanagement, um die Formeln zu kombinieren.
- **{B3}** In der Phase der Planentwicklung schlägt P2 die Maximumberechnung über Ableiten vor.
- **{B4}** Nach Erhalt einer Formel mit einer unbekannten Größe setzen die Studierenden bekannte Werte ein. Dann argumentiert P1 über die Eigenschaften des Bruches.

G4 : P2 schreibt direkt die Formel $L = N^2 \cdot R_{\text{ges}}^{-1}$ auf. P1 sagt, dass das maximal ist, wenn die Ableitung gleich 0 ist. P2 stimmt ihm zu und sagt, dass die Kettenregel verwendet werden muss. Sie bilden die Ableitung gemeinsam und setzen hierzu die Quotientenregel ein. P2 sagt dann, dass keine Quotientenregel gemacht werden müsse, da nur ein einziges Mal d vorkommen würde, aber P1 rechnet dennoch damit weiter. (Anmerkung: Dieses ist falsch, da durch das d im Nenner in jedem Fall die Ketten- oder Quotientenregel angewendet werden muss.) An der Ableitung erkennt P2, dass diese nie 0 wird und es höchstens Polstellen, aber keine Nullstellen gäbe. Die Funktion näherte sich asymptotisch dem Wert Null an, aber erreicht diesen nicht. Daraufhin gibt der Studienleiter den Hinweis, dass es auch ohne Ableiten geht und sie die Funktion betrachten sollen. Daraufhin sagt P2 unmittelbar lachend:

Achso, okay. Ja, dann wird L wohl maximal, wenn der Nenner minimal ist, der Nenner ist minimal für $d = 0$.

(2615)

Damit berechnen sie die maximale Induktivität korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden ziehen die Formel aus der SEL richtig heran, aber möchten das Maximum über Ableiten bestimmen. Nach einem Hinweis durch den Studienleiter kommt direkt die Argumentation über die Form des Bruches.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Es zeigt sich eine Unklarheit, ob eine Argumentation an der Form des Bruches reicht.
- **{A1}** Es kommt nämlich direkt die richtige Lösung, nach dem Hinweis durch den Studienleiter, dass eine Argumentation ohne Ableitungen möglich ist.

- **{A3}** P2 kennt die passende Formel für diese Situation, wodurch weitere Vorüberlegungen hier entfallen.
- **{B3}** Diese Gruppe verbinden Maximieren mit Differenzieren, wobei sie versuchen, die Ableitung in dem Kontext zu interpretieren.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil A3

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Bei zwei Paaren tritt der Fehler auf, dass sie Differenzieren zur Bestimmung eines lokalen Maximums einsetzen möchten. Dieses ist hier aber nicht zielführend, da es sich um ein Randextremum handelt. In diesem Aufgabenteil muss die Problemstelle bewältigt werden, unter Verwendung der richtigen zugrundeliegenden physikalischen Vorstellungen und gleichzeitig der Arbeit mit den auftretenden mathematischen Ausdrücken zu erkennen, dass die Induktivität maximal ist, wenn $d = 0$ ist und somit kein Luftspalt vorhanden ist. Den Studierenden ist unklar, welches der beiden Argumente, d. h. „kein Luftspalt $\Rightarrow$ maximale Induktivität“ bzw. „Bruch ist maximal bei $d = 0$ “ die Aufgabe korrekt löst und als Begründung ausreicht. In diesem Zusammenhang hinterfragen die Studierenden, was der Unterschied zwischen „bestimmen“ und (von ihnen angeführt) „angeben“ ist, d. h. es ist unklar, ob beide Argumente für eine richtige Lösung akzeptabel sind. Eine weitere Unklarheit ergibt sich bei dem Einsatz von Analogien zu elektrischen Widerständen und der dortigen analogen Größe zur Induktivität Φ .

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Es gibt eine Unklarheit, ob eine Argumentation mit Hilfe der Form des Bruches zur Lösung der Aufgabe ausreicht. Ein Paar hinterfragt explizit, was der Unterschied zwischen „bestimmen“ und (von ihnen angeführt) „angeben“ ist.

{A2} Ein Paar zieht physikalisches Wissen heran, um die Aufgabe zu lösen, in dem es argumentiert: „kein Luftspalt $\Rightarrow$ maximale Induktivität“. Die übrigen Paare setzen das als Rechtfertigung ihres Ergebnisses im Sinne von „Physical Mechanisms“, vgl. Bing (2008), ein. Zur Herleitung der Formel nutzt ein Paar Analogien zum elektrischen Widerstand, die sie zur Anpassung der Situation nutzen wollen. Sie beschließen daher, zunächst Φ zu suchen, welche in der Analogie der Spannung bei der Elektrizität entspricht. Die Formel für die Induktivität wird physikalisch gedeutet.

{A3} Die Studierenden ziehen mehrere Formeln heran, die ihnen für die Bearbeitung relevant erscheinen. Ein Paar kennt direkt die passende Formel für die Induktivität in dieser Situation, wodurch weitere Vorüberlegungen entfallen.

{B2} Zur Kombination ihrer Formeln nutzen mehrere Studierendenpaare Gleichungsmanagement. Dabei wird von einem Paar erkannt, dass mehr als eine Unbekannte durch das vorkommende d übrigbleibt.

{B3} Zwei Studierendenpaare möchten das Maximum über Differenzieren der Induktivitätsfunktion bestimmen.

{B4} Anhand der Formel zur Berechnung der Induktivität erkennen die Studierendenpaare, dass sie durch Einsetzen von $d = 0$ im Nenner maximiert werden kann. Eine Gruppe möchte dieses durch eine Umformung verdeutlichen. Eine Gruppe kommt erst direkt nach dem Hinweis,

dass ohne Ableiten gearbeitet werden kann, darauf, dass eine Argumentation über einen Bruch möglich ist.

4.5.3 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A4

[A4] Berechnen Sie die magnetische Flussdichte b_L im Luftspalt. (3 Punkte)

G1 :

P1 beginnt in (2920) mit der Aussage, dass die magnetische Flussdichte

$$b_L = \frac{\Phi}{A}$$

ist, d. h. der magnetische Fluss wird durch die betrachtete Querschnittsfläche dividiert. Als weitere Formel für den Widerstand gibt P1

$$R = \frac{\Theta}{\Phi}$$

an. P3 fragt (2920), ob die korrekte Einheit des Ergebnisses, also Tesla, Ampere/m^2 als Darstellung in SI-Basiseinheiten hat und überprüft die Einheiten der eingesetzten Größen für die erste Formel für b_L . P2 erinnert sich dann an die Formel

$$\Phi = \frac{\Theta}{A},$$

welche von P3 bestätigt wird. P1 verweist auf das Durchflutungsgesetz, mit dessen Hilfe die Studierenden das Ergebnis berechnen. Ab (7105) (während der Bearbeitung von A6) erkennen sie, dass das b_L zu groß sein muss und diskutieren über ihre Formelherleitung im Gleichungsmanagement. P1 meint, dass

$$b_L = \frac{\Phi}{A}$$

ist, und P2, dass

$$b_L = \frac{\Theta}{A}$$

ist. P1 stützt seine Argumentation dadurch, dass

$$\Phi = \int b \, dA$$

ist, und dass die Größen über den Widerstand zusammenhängen. So zeigt sich, dass die Formel von P1 richtig ist und sie erhalten durch Umstellen die korrekte Formel, mit der sie das richtige Ergebnis erhalten, ohne es zu validieren. Das Ergebnis der Studierenden ist richtig.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise der Studierenden entspricht dem Lösungsweg in der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Der Begriff „Durchflutungsgesetz“ wird als Schlagwort verwendet, um Analogien zu bereits gelösten Aufgaben ziehen zu können.
- **{A2}** Zur Bestimmung der Formel für den Widerstand nutzen die Studierenden eine Analogie zwischen Reluktanzen und elektrischen Widerständen, denn mit den Analogien, welche im elektrotechnischen Hintergrund dargestellt sind, ergibt sich die Reluktanz als Quotient von magnetischer Spannung und magnetischen Fluss analog zu dem elektrischen Widerstand, welcher der Quotient aus Spannung und Stromstärke ist.
- **{A3}** Die Studierenden rufen verschiedene Formeln für die zu berechnenden Größen ab, die sie aus der Vorlesung kennen und ihnen relevant erscheinen.
- **{A4}** Die Studienteilnehmer verwenden den Begriff „Dichte“, um Rückschlüsse auf die Berechnung der Flussdichte zu erhalten. So beschreiben sie die Flussdichte b_L als das Verhältnis der Größe magnetische Flussdichte pro Fläche, also einen Quotienten dieser beiden Werte. So erschließen sie sich die Formel.
- **{B2}** Die Studierenden setzen Gleichungsmanagement in ihrer Lösung ein.
- **{C1}** Bei dem Bestimmen der Formel für die Flussdichte werden Dimensionskontrollen eingesetzt.

G2 : P2 gibt an, dass b überall gleich ist, und es somit im Eisen berechnet werden kann. h , die magnetische Feldstärke, ist im Gegensatz dazu materialabhängig. P1 möchte die Flussdichte aber dennoch im Luftspalt berechnen, da es der Aufgabenstellung entspricht, welche b_L enthält, woraufhin P2 mit $b_L = b_{Fe}$ reagiert. Sie diskutieren über den Ansatz und P1 ruft $\Phi = \int b \, dA$ ab, was er nach b umstellen möchte, und erkennt dann ohne weitere Argumentation die Vereinfachung, dass $\Phi = b \cdot A$ ist. P1 erinnert sich an die zweite Formel für Φ , nämlich $\Phi = \frac{N \cdot I}{R_{ges}}$, und setzt beide Formeln gleich:

$$\frac{N \cdot I}{R_{ges}} = b \cdot A$$

Dieses stellt P1 nach b um, wobei P2 unsicher ist, wofür A steht und welcher Widerstand verwendet werden muss, also die Reluktanz in der Luft oder die Gesamtrelektanz. P1 begründet, dass A die Querschnittsfläche ist, und R der Widerstand in der Luft sein müsste, also betrachtet nun statt R_{ges} die Größe R_L . Sie diskutieren darüber und P2 meint, dass sich R_{ges} auf das Ganze beziehen würde und das dann mit der Querschnittsfläche nicht mehr passen würde, also rechnen sie mit R_L . Nach Bearbeitung von A6 und einem zu großen Ergebnis in der dortigen Rechnung rechnen sie A4 nochmal mit R_{ges} und kommen auf den korrekten Wert für b_L .

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise der Studierenden entspricht dem Vorgehen in der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Beim Klären der Benennungen der Größen verwendet P2 aufgrund eines Hinweises von P1 für die Reluktanz R in der Formel anstatt R_{ges} den Wert R_L , also tritt hier ein Problem mit Benennungen auf.
- **{A3}** Sie rufen Formeln aus dem Kontext ab, die ihnen als möglicherweise relevant erscheinen.
- **{B1}** Die Studierenden suchen nach dem einfachsten Weg, die im Eisen und Luft identische konstante Flussdichte zu bestimmen, wählen diesen aber nicht (das wäre laut ihrer Aussage die Berechnung im Eisen), aufgrund der Bezeichnung b_L in der Aufgabe, die durch den Index Luft betrachtet.
- **{B1}** Die Studienteilnehmer setzen sich mit den gegebenen Größen auseinander und hinterfragen, ob sie variabel oder konstant sind.
- **{B1}** Sie stellen das Integral für die Flussdichte auf, in dem sie den Begriff Dichte interpretieren und vereinfachen es an dieser Stelle begründungslos (Begründung s. o.) zu einer Multiplikation.
- **{C2}** Die Studierenden überprüfen die Größenordnung der berechneten Flussdichte, aber erkennen nicht, dass sie falsch gerechnet haben

G3 : P1 sagt, dass die Flussdichte als der Quotient $\frac{\text{Fluss}}{\text{Fläche}}$ definiert sei und P2 ergänzt, dass der magnetische Fluss über $b \, dA$ erhalten werden kann sowie konstant und überall gleich sei. Unter Verwendung der Formel $R = \frac{\Phi}{\Phi}$ rechnen Sie den Fluss dann über die Formel $\Phi = \frac{N \cdot I}{R_{ges}}$ aus. Sie wissen, dass dieser Wert $\Phi = b \cdot A$ entspricht und stellen damit nach b um, also $b = \frac{\Phi}{A}$, wobei sie die andere Definition von Φ von oben verwenden. Während ihrer Rechnung setzen sie bekannte Größen direkt ein. Die Einheit geben sie als Tesla an. Ihr Ergebnis ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise der Studierenden entspricht dem Vorgehen in der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die Studierenden nutzen Analogien zwischen elektrischen und magnetischen Widerständen. Damit vergegenwärtigen sie sich die physikalische Situation.
- **{B1}** Die beiden Studierenden erhalten den Ansatz, in dem sie Flussdichte in zweierlei Weise interpretieren, einmal als Quotienten des magnetischen Flusses bei einer vorgegebenen Fläche und andererseits als Integral über den Fluss bezogen auf die Fläche. Dieses sind unterschiedliche Stufen der Vereinfachung der Ausdrücke.
- **{B2}** Bei der Berechnung mit der Formel verwenden sie ein direktes Einsetzen bekannter Werte, welches ihnen bei der Unterscheidung zwischen bekannten und unbekannten Größen hilft.

- **{B3}** In ihrer Rechnung setzen sie das Wissen, dass die Flussdichte b konstant ist, auch zur Umformung des Integrals ein, in dem sie

$$\int b \, dA = b \int dA$$

ausnutzen.

- **{C1}** Sie geben die Zieleinheit Tesla an, ohne jedoch mit ihrer Hilfe zu validieren.

G4 : P2 möchte den Durchflutungssatz anwenden. P1 kennt diesen Satz nicht und P2 gibt die vektorielle Aussage $\int h \, ds = \int S \, dA$ an, welche er zu $N \cdot I = L_i \cdot H_i$ vereinfacht. Sie diskutieren, ob die magnetische Feldstärke h_i konstant ist, was auf einem Missverständnis beruht, da P1 b , die magnetische Flussdichte, und h , die magnetische Feldstärke, verwechselt. P2 berechnet $\Phi = \frac{I}{R_{\text{ges}}}$ und notiert als Einheit mTm^2 , also Milli-Tesla-Quadratmeter. P2 begründet mit $U = R \cdot I$, dass hier $U = N \cdot I$ gelten muss, wobei R aus A2 bekannt ist. Er notiert $\Phi = \frac{N \cdot I}{R_{\text{ges}}}$. P2 rechnet

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N \cdot I}{R},$$

was richtig wird, wenn man I links durch ein Φ ersetzt. Dann notiert P2 die Formel $\Phi = \int b \, dA$ und stellt um zu $b = \frac{\Phi}{A}$. Damit berechnet P2 den Wert korrekt und P1 stimmt zu.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise der Studierenden entspricht dem Vorgehen in der SEL. Sie setzen zunächst mit Vektorfeldern an, aber führen dieses auf die Ausdrücke zurück, welche in der SEL zur Berechnung eingesetzt werden.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 zitiert den Durchflutungssatz und wenden ihn auf die Situation an.
- **{A2}** P2 setzt sich mit der physikalischen Situation auseinander, in dem er Analogien zwischen Magnetismus und Elektrizität heranzieht.
- **{A2}** Dabei verwendet P2 eine Doppelnotation im Zusammenhang mit dem Buchstaben I (für Strom), berücksichtigt allerdings an dieser Stelle die Analogie korrekt und verwendet I nicht zum Rechnen, sondern nur zum Verständnis der Situation und zum Erläutern des Vorgehens für P1.
- **{A3}** P2 zieht die korrekte Formel heran.
- **{B2}** P2 rechnet damit direkt das Ergebnis aus.
- **{C1}** Das Ergebnis überprüft P2 mit einer Dimensionskontrolle.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil A4

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Ein Fehler in der Bearbeitung eines Studierendenpaares resultiert daraus, dass statt der Gesamtreluktanz R_{ges} nur eine Betrachtung der Reluktanz im Eisen, d. h. R_{Fe} , erfolgt. Bei einem Paar tritt eine Doppelnotation bzgl. des Buchstaben i für elektrotechnischen Strom auf. In diesem Aufgabenteil ist die Problemstelle das Finden eines Ansatzes durch eine geeignete Kombination der Formeln. Hierbei können verschiedene Grade der Verallgemeinerung der Situation verwendet werden wie z. B. auch eine Betrachtung des b- und h-Feldes, d. h. der Felder für magnetischen Fluss und magnetische Feldstärke, unter der Verwendung von Vektorfeldern. In den Überlegungen können dabei auch Analogien zwischen Reluktanzen und elektrischen Widerständen eingesetzt werden. Unklar ist einem Studierendenpaar, ob sie verwenden dürfen, dass die Flussdichte im Eisen und in der Luft identisch ist, denn ihnen erscheint die Berechnung im Eisen einfacher. Aufgrund der Bezeichnung b_L für die gesuchte Größe, bei der L für Luft steht, berechnen sie die Flussdichte allerdings in der Luft.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Die Studierenden vermischen R_{ges} und den Wert R_L , d. h. es tritt ein Problem mit den Benennungen der Größen auf. Sie verwenden darüber hinaus den Begriff „Durchflutungsgesetz“ bzw. „Durchflutungssatz“, der ihnen bei der Wahl der Formeln hilft.

{A2} Im Zusammenhang mit der Physik nutzen die Studierendenpaare Analogien zwischen Reluktanzen, also magnetischen Widerständen, und elektrischen Widerständen. So erhalten sie durch die Analogie zu dem Ohm'schen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ eine Formel, über welche sie die Reluktanz bestimmen können. Dabei treten bei einem Paar Doppelnotationen zwischen elektrischem Strom i und der entsprechenden magnetischen Größe auf.

{A3} Die Studierenden rufen verschiedene Formeln aus der Veranstaltung GET-B ab, welche ihnen relevant erscheinen.

{A4} Die Studienteilnehmer verwenden den Begriff „Dichte“, um Rückschlüsse auf die Berechnung der Flussdichte zu erhalten. So beschreiben sie die Flussdichte b_L als das Verhältnis der Größe pro Fläche, also einen Quotienten dieser beiden Werte.

{B1} Als Vorbereitung auf die Anwendung von Mathematik überlegen die Studienteilnehmer bei den vorkommenden Größen, ob sie variabel oder konstant sind. Das Ziel ist das Finden eines möglichst einfachen Weges. Hierzu interpretieren sie die Flussdichte in zwei Weisen, nämlich einmal als Quotienten des magnetischen Flusses bei einer vorgegebenen Fläche und andererseits als Integral über den Fluss bezogen auf die Fläche. Bei der Vereinfachung des Weges nutzt ein Studierendenpaar nicht den ihm einfacher erscheinenden Weg über die Flussdichte im Eisen, sondern aufgrund der Verwendung des Indexes L für Luft den über die Flussdichte in der Luft.

{B2} Bei der Berechnung verwendet ein Studierendenpaar ein direktes Einsetzen bekannter Werte, welches ihnen bei der Unterscheidung zwischen bekannten und unbekannten Größen hilft. Als Verfahren für die Rechnung setzen die Studierenden Gleichungsmanagement ein, d. h. sie kombinieren solange relevante Formeln bis sie eine Formel erhalten, welche neben der gesuchten Größe nur bekannte Größen enthält.

{B3} Ein Studierendenpaar stellt das Integral für die Flussdichte auf und argumentiert, dass die Flussdichte b konstant ist. Dieses wird zur Umformung des Integrals eingesetzt, in dem sie

$$\int b \, dA = b \int dA$$

ausnutzen.

{C1} Mehrere Studierendenpaare verwenden die Einheit Tesla und deren Darstellung in SI-Basiseinheiten zur Validierung ihrer Rechnungen. Im Gegensatz zu den anderen Paaren nutzt ein Paar dieses nicht für Dimensionskontrollen während der Rechnung.

{C2} Ein Studierendenpaar überprüft die Größenordnung der berechneten Flussdichte mit Wissen aus der Veranstaltung, aber erkennt nicht, dass es falsch gerechnet hat.

4.5.4 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A5

[A5] Geben Sie die magnetische Energie im Luftspalt W_L und im Eisen W_{Fe} an. (2 Punkte)

G1 :

P2 beginnt die Bearbeitung in (3210) mit dem Vorlesen der Aufgabenstellung und notiert $W = \frac{1}{2} \Delta p$, wobei P3 direkt fragt, ob das nicht einfacher geht. Nach einer kurzen Diskussion zum vorherigen Aufgabenteil steigt P1 in (3342) ein mit „ist gleich $\frac{1}{2} \Phi R_m$ “ und schlägt dann vor, mit dem Eisen anzufangen. Er hinterfragt dann, ob sie beide Eisenstücke oder nur das obige benötigen. P2 erläutert dann, dass die Widerstände addiert werden müssten, da das „ja proportional zum Widerstand“ sei. So kommt P1 durch Kombination der Formeln auf

$$W_{Fe} = \frac{1}{2} \Phi^2 R_m = \frac{1}{2} \Theta^2 \frac{1}{R_m}$$

und setzen dort die Werte ein. P3 hinterfragt dann, wie man denn Θ ausrechnen kann und P1 gibt „ist gleich $\frac{\Phi}{R}$ “ an, vgl. (3552). P2 erhält dann $212 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}$. P1 sagt, dass dieses gerundet ein Viertel Joule sei und P2 fragt, ob es die magnetische Energie im Eisen oder in der Luft sei. P1 antwortet mit

„Im Eisen. Bei Luft kann das genauso machen?“

P2 kommentiert mit:

„Bei mir kommt gerade ein viel zu hoher Wert raus. Was habe ich denn falsch gemacht?“

In den Berechnungen erhält P2 23 Mega-Joule für den Luftspalt und P3 9,39 Mikro-Joule, vgl. (4052). Daraufhin sagt P2:

„Ich glaube, wir haben einen Fehler gemacht. Wir müssen für den Widerstand den Gesamtwiderstand einsetzen.“

Er setzt dann $d = 0,002\text{m}$ und kommt auf $230,77 \frac{\text{kA}}{\text{Vs}}$. P1 bestätigt dann, dass sie den Gesamtwiderstand einsetzen müssen und erkennt, dass sich dadurch in der Formel keine Kürzungsmöglichkeiten bei den Widerständen ergeben. In (4513) nennt P3 336,88 als Ergebnis für den Gesamtwiderstand und P1 kommentiert mit:

„Ist der Widerstand ziemlich groß?“

In (4845) beenden sie die Berechnung der magnetischen Energie in der Luft. Zwischen den drei Gruppenmitgliedern ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen den erhaltenen Werten, vgl. (5028) bis (5157). P2 sagt schließlich:

„Allein der Luftspalt ist 212. Und Eisen ist 224.“

P1 korrigiert dann den Wert im Eisen auf 124, was P2 direkt in (5239) bestätigt. Er erläutert dort:

„Und Luftspalt hast du einen hier und einen hier. Du hast wahrscheinlich nur einen genommen und hast deswegen einen zu kleinen Wert, also quasi die Hälfte. Du musst dann das nochmal mal 2 rechnen.“

P1 erkennt dann, dass sie denselben Fehler auch in vorherigen Aufgabenteilen gemacht haben. Der Fehler ist auch im Graph in A2 vorhanden, wobei P2 hierzu erläutert:

„Dann ändern wir einfach die Skalierung und dann passt das.“

P2 nennt schließlich die Werte „9, 35 für Luft und 5, 49 für Eisen“, wobei er in seiner Mitschrift als Einheit $\frac{A}{V_{sm}}$ angibt. P1 reagiert in (5533) mit „Nein, 0, 55 für Eisen.“ und P3 mit „Ja. Und 0, 93 für Luft.“ P2 reagiert darauf mit

„Wo habe ich denn eine 0 zu viel?“

P3 erläutert, dass es „ja ungefähr das gleiche sein [müsste] wie davor“ und P2 vermutet den Fehler beim Abtippen in den Taschenrechner. Daraufhin gehen P1 und P2 die Formel durch und finden schließlich den Fehler bei der Taschenrechnereingabe.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden die Vorgehensweise aus der SEL, wobei zwischenzeitlich eine Unklarheit bzgl. der für die Formeln notwendigen Reluktanz besteht.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 ist unklar, ob sie nur ein Eisenstück oder beide benötigen.
- **{A2}** Die Studierenden vergleichen ihre Werte für Luft und Eisen mit physikalischen Argumenten.
- **{A3}** P2 zieht eine Formel für die magnetische Energie W heran. Es werden später noch alternative Formeln aus der Vorlesung erwogen.
- **{AB}** P2 erkennt, dass die Widerstände addiert werden müssen, da eine Proportionalität zwischen Energie und Widerständen auftritt.
- **{B1}** P1 hinterfragt, ob es eine einfachere Formel für die Berechnung der magnetischen Energien gibt.
- **{B3}** Es tritt ein Fehler im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen der auftretenden Größen auf.
- **{C2}** Sie verwenden intuitive Vorstellungen zu der Größenordnung der gesuchten Werte.

G2 : P1 beginnt in (2547) die Bearbeitung mit dem Vorlesen der Aufgabenstellung und P2 reagiert direkt mit

„Im Luftspalt ist auf jeden Fall größer.“

(2547)

Daraufhin fragt P1 nach der Formel und P2 notiert

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \Phi^2 R_{\text{mag}}$$

und ergänzt, dass es auch $\frac{1}{2} Li^2$ gibt, da sie „die Induktivität auch haben“, sowie „auch noch [eine Formel] mit Flussdichte und Feldstärke“ (2615). Sie einigen sich auf die erste Formel und P1 klärt dann mit P2, dass dieses die Formel für die magnetische Energie im Eisen ist. Eine weitere kurzfristige Unklarheit ergibt sich daraus, ob beim Eisen beide Stücke oder nur der U-Kern betrachtet werden müssen. Sie stellen dann eine Formel für beide Teile separat auf und vereinfachen dieses durch symbolisches Kürzen mit R_{mag} . Dann setzen sie ein und berechnen 4 Joule als Wert für W_{Fe} .

Die Berechnung von W_L beginnt P2 in (2905) mit

„Bei W_L machen wir das gleiche, nur $2d$ nehmen. Also das müssen wir einsetzen.“

Auf die Rückfrage von P1, ob das für den Widerstand gelte, antwortet P2:

„Ja, wieder dieselbe Formel.“

(2905)

P1 sagt dann, dass sie sofort einsetzen können und kommt auf das Ergebnis 2,36 Joule. Daraufhin fragt P2 in (3034):

„Ist in Luft nicht mehr? Sollte normalerweise in Luft nicht mehr Energie sein.“

Dieses verneint P1. P2 verweist dann auf die Vorlesung, aber P1 verneint erneut. Daraufhin diskutieren P1 und P2:

3044 P2 Ist vielleicht auch, weil es sehr klein ist. Aber normalerweise sollte in Luft mehr Energie sein. Die Formel stimmt aber?

3049 P1 Ja, das sollte passen.

3052 P2 Wie viel hattest du nochmal beim Luftwiderstand? Der müsste deutlich größer sein.

3102 P1 Genau, und deswegen ist weniger Energie. Sollte passen.

Damit beenden sie die Aufgabe inkorrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden den Lösungsweg aus der SEL, kommen aber durch das Einsetzen falscher Werte auf falsche Ergebnisse.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Den Studierenden ist unklar, ob sie beide Eisenstücke oder nur eines benötigen.
- **{A2}** P2 vergleicht die Werte der magnetischen Energie in der Luft und im Eisen, um eine Abschätzung für die Werte zu gewinnen.
- **{A3}** Die Studierenden ziehen eine Formel aus der Vorlesung zur Berechnung heran, bedenken dabei auch andere Varianten der Formel, in denen andere Größen benötigt werden.
- **{A3}** Die Studierenden verwenden Analogien zwischen den Formeln für Eisen und für Luft.
- **{B2}** Die Studierenden arbeiten im Gleichungsmanagement symbolisch.
- **{B4}** Sie argumentieren über qualitative Zusammenhänge zwischen den Werten für Eisen und Luft.
- **{C2}** Es wird ein Vergleich zwischen den Energien in Eisen und in Luft zur Validierung genutzt.

G3 : P2 beginnt die Aufgabenbearbeitung in (2357) mit „Magnetische Energie im Luftspalt?“, worauf P1 antwortet:

„Was ist das denn? Das hat irgendwas mit dem b-Feld zu tun, sonst wäre das ja gleich.“

Danach diskutieren P1 und P2, ob das h- und das b-Feld konstant sind. Nach dem Notieren der Formel für die Energie im magnetischen Feld sagt P1:

„Das ist linear, weil wir ein festes μ haben.“

(2503)

In (2605) meint P2 dann:

„Also $\frac{b \cdot h}{2}$ für beides. Aber das ist ja unterschiedlich. Die Energie unten ist ja anders als die oben.“

P1 antwortet dann mit:

„Ja hier: dV . Das ist nicht direkt die Energie, sondern über das Volumen.“

und daraufhin sagt P2

„Ah ja, ok. Energiedichte. Dann müssen wir noch über das Volumen integrieren. Aber sie ist über das Volumen konstant, also können wir einfach mit dem Volumen integrieren.“

Sie notieren in (2650):

$$W = \int \frac{bh}{2} dV = \frac{b \cdot h}{2} \cdot V$$

P1 hinterfragt dieses:

„Ich meine, unten haben wir ja ein anderes b-Feld als hier und dann auch ein anderes h-Feld. Das würde ja heißen, dass sich das durch das Volumen wieder aufhebt.“

P2 antwortet in (2743):

„Macht es das denn? Das macht es ja nicht, warte mal. Ach, da ist die zweite Fläche. Das habe ich ja noch gar nicht gesehen.“

Nach einer kurzen Unklarheit, ob die zweite Fläche verwendet wurde, welches P1 bestätigt, sagt er, dass sie $b^2 \cdot \mu$ verwendet können und P2 erkennt, dass die Umformung von $b = \mu \cdot h$ auf $h = \frac{b}{\mu}$ führt. So kommen sie schließlich auf die Formel

$$W_L = \frac{b^2}{2\mu}$$

und setzen direkt bekannte Werte ein. Sie erhalten als Ergebnis: $W_L = 467,5 \text{ mJ}$.

P2 beginnt die Berechnung von W_{Fe} in (3122) mit

„Lass uns das mal für beide ausrechnen. Wenn das das gleiche ist, ist das richtig. Und sonst müssen wir uns Gedanken darüber machen.“

Er berechnet dann: $b = \frac{\Phi}{A} = 0,49473833 \text{ T}$ und erläutert P1 auf Nachfrage, dass das b-Feld ist, vgl. (3247). Daraufhin diskutieren sie, ob sie die richtige Länge und den richtigen Werte für μ verwendet haben und bemerken dann einen Fehler beim Einsetzen. Sie kommen schließlich auf den Wert $W_{\text{Fe(unten)}} = 257,12 \text{ mJ}$. Sie diskutieren dann weiter über das Ergebnis und P1 sagt, dass sich nur μ_0 ändert. Dann gehen sie die eingesetzten Größen in SI-Einheiten durch. P2 sagt schließlich in (3717) und (3739):

„Ne, warte mal. Wir machen was falsch. Kann das sein, dass wir die Gesamtenergie angeben müssen. Im gesamten Eisen? Dass wir die Summe aus beiden brauchen? Dann brauchen wir unsere Ergebnisse nur addieren und fertig. (...) Ja, vor allem, weil wir oben mit der ganzen Länge gerechnet haben. Da hätte das schon einfallen können.“

Sie beenden den Aufgabenteil schließlich mit:

- 3829 P2 Jetzt ist fast so viel Energie in der Luft bzw. im Luftspalt wie im Eisen.
Das kann doch bestimmt irgendwas für die Masse gleich sein, oder?
- 3841 P1 Das gleicht sich bestimmt irgendwie aus, dass sich der Luftspalt so einstellt.

Ihre Ergebnisse sind aufgrund einer falschen Formel um den Faktor 2 falsch.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden den Weg aus der SEL, wobei sie zunächst allgemeiner mit Volumenelementen ansetzen, aber mit richtigen Argumenten die Ausdrücke so vereinfachen, dass sie statt einer Integration eine Multiplikation verwenden. Durch Heranziehen falscher Formeln sind ihre Ergebnisse nicht korrekt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Sie überlegen eine Vereinfachung in der Herangehensweise, in dem sie sich damit auseinandersetzen, ob die Felder konstant sind.
- **{A2}** Die Studierenden betrachten die allgemeinere physikalische Situation und setzen sich dabei mit dem magnetischen Fluss (b-Feld) und der Feldstärke (h-Feld) auseinander.
- **{A2}** Sie überlegen, ob die Energie unterschiedlich an verschiedenen Stellen des Netzwerks ist.
- **{A3}** Die Studierenden setzen Analogien zwischen den beiden auftretenden Formeln für die magnetischen Energien im Eisen und in der Luft ein.
- **{A4}** Die Studierenden interpretieren das Volumenelement dV in ihrer Formel als ein Kästchen im Raum.
- **{AB}** Beim Bemerken des Fehlers, dass sie statt einer Teilenergie die Gesamtenergie benötigen, bedenken sie direkt die Implikationen auf ihre Rechnung.
- **{B1}** Mit Hilfe der Interpretation vereinfachen sie die Aufgabe von einer Integrationsaufgabe auf die Multiplikation konstanter Größen.
- **{B4}** Sie betrachten die herangezogene Formel und machen qualitative Überlegungen.
- **{C1}** Die Studierenden validieren unter Verwendung der SI-Einheiten.
- **{C2}** Die Studierenden vergleichen die Werte, die sie für die Energie in der Luft und im Eisen erhalten haben.
- **{C4}** Sie rechnen auf zwei unterschiedlichen Wegen und nutzen den Vergleich der Ergebnisse zur Validierung.

G4 : P2 beginnt die Bearbeitung in (3510) mit

„So, W_{Luft} , das ist, hmmm, die Energiedichte ist glaube ich $\frac{b \cdot h}{2}$. Ist das konstant? Ja, das ist konstant. Dann müssen wir auch nicht integrieren, sondern können einfach multiplizieren.“

Er notiert die Formel $W_L = \frac{b \cdot h}{2} \cdot V$. Dann hinterfragen sie, ob mit dem Volumen multipliziert werden muss. P2 begründet dann:

„Ja, ich bin mir sehr sicher, weil diese Magnetisierungskennlinien, wenn du die Energiedichte haben wolltest, hast du sowieso nur darüber integriert. Ist ja im Prinzip $b \cdot h$, und dann musstest du ja noch die Dichte mit dem Volumen multiplizieren, um auf die Energie zu kommen.“

(3550)

$$E_{Fe} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \cdot V +$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1.7^2}{4 \cdot 10^{-7}} \cdot 3.23433 \cdot 10^{-7}$$

$$= 2.35 \cdot 10^{-7} + 3.62 \cdot 10^{-7}$$

$$= 6.17 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Abbildung 4.5.2: Berechnung von G_4 für die magnetische Energie im Eisen, eigentlich W_{Fe} , bereits ergänzt um die Einheit Joule

P2 führt dann weiter aus, dass er $h = \frac{b}{\mu_0}$ hat und so auf $\frac{b^2}{2\mu_0} \cdot A_{Fe} \cdot d$ kommt, wobei er in seiner Niederschrift direkt den Faktor 2 ergänzt und mit der 2 im Nenner kürzt. So kommt er auf $W_L = 0,9361 \text{ J}$. P1 fragt dann, ob das Gesamtvolumen verwendet wurde, aber P2 verneint damit, dass er nur das Volumen der beiden Luftspalte genommen hat. P1 fragt dann, ob es also „mal d “ wäre und korrigiert damit seine Mitschrift, in der er den Faktor 2 vergessen hatte.

In (3740) beginnt P2 die Bestimmung von W_{Fe} mit „Und Eisen?“, worauf P1 mit der Aussage reagiert, dass b und A konstant seien und P2 sagt, dass das b -Feld „hier“ das gleiche wie im Eisen ist. Daraufhin sagt P2:

„Aber bei dem h -Feld ist's anders, also da hab' ich's anders, weil man muss durch μ_0 und μ_r dividieren.“

P2 zeigt dann an der Skizze, dass die seitlichen Teile des U-Kerns das gleiche b -Feld wie in der Luft haben, aber bei der Ober- und Unterseite ein anderes ist. Er gibt dann als Formel

$$\frac{2b^2}{\mu_r} \cdot A_{Fe,1} \cdot d$$

an. P2 erkennt, dass er als Länge anstatt d das $l_{Fe,2}$ verwenden muss. Mit der Formel berechnen sie schließlich W_{Fe} kommen jedoch zunächst durch Einsetzen eines falschen Wertes für das b -Feld auf unterschiedliche Ergebnisse. Schließlich kommen mit der in Abbildung 4.5.2 gezeigten Rechnung auf das Ergebnis $6,17 \cdot 10^{-7}$. P2 ergänzt schließlich in (4600), dass die Einheit Joule ist und sie beenden damit die Aufgabe. Durch Rundungsfehler und falschen Umgang mit Zehnerpotenzen sind die Ergebnisse falsch.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden den Weg aus der SEL, aber setzen teilweise falsche Größen ein und missachten die Einheitspräfixe bei den auftretenden Einheiten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- {A1} Die Studierenden erkennen, dass die vorkommenden Werte konstant sind.

- **{A1}** Die Studierenden sind unsicher, ob sie in den Rechnungen das ganze Volumen oder nur einen Teil benötigen.
- **{A3}** Die Studierenden ziehen die benötigten Formeln heran und bedenken dabei Analogien zwischen der Formel für die magnetische Energie im Eisen und die in der Luft.
- **{B1}** Aus dem vorkommenden, konstanten Werten schließen sie, dass sie anstatt zu integrieren hier multiplizieren können.
- **{C1}** Die Studierenden ergänzen am Ende die Einheit Joule, allerdings ohne zu überprüfen, ob sich diese aus den Einheiten auf der anderen Seite der Gleichung ergibt.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil A5

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Bei zwei Paaren entstehen Fehler dadurch, dass sie anstatt der Gesamtreluktanz nur eine Teilreluktanz verwenden. Es treten Fehler bei der Verwendung der Einheitspräfixe bei den auftretenden Einheiten auf, also – mathematisch betrachtet – Fehler im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen. Ein Studierendenpaar kommt durch Einsetzen falscher Werte auf falsche Ergebnisse. Die Problemstelle in diesem Aufgabenteil ist einerseits der Abruf der passenden Formeln bzw. das Erkennen der passenden Analogien zwischen den beiden benötigten Formeln für die magnetische Energie in Eisen, W_{Fe} , und Luft, W_L . Dabei muss bedacht werden, dass allgemein $W_L > W_{\text{Fe}}$ gilt. Des Weiteren können hier wieder Überlegungen mit allgemeineren Ansätzen über Vektorfelder verwendet werden, welche dann mit ähnlichen Argumenten wie in den vorherigen Aufgabenteilen auf Multiplikationen vereinfacht werden können. Einem Paar ist unklar, ob sie nur ein Eisenstück in ihrer Rechnung berücksichtigen müssen oder beide benötigen.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1}** Einem Studierendenpaar ist unklar, ob sie nur ein Eisenstück oder beide benötigen. Ein Studierendenpaar überlegt als mögliche Vereinfachung, ob die betrachteten Felder homogen bzw. konstant sind.
- {A2}** Die Studierenden betrachten die zugrundeliegende Physik bei der Bearbeitung dieses Aufgabenteils. Dabei betrachtet ein Studierendenpaar die allgemeinere physikalische Situation und setzt sich dabei mit dem magnetischen Fluss (b-Feld) und der Feldstärke (h-Feld) auseinander. Ein Paar überlegt, ob die Energie unterschiedlich an verschiedenen Stellen des Netzwerks ist. Darüber hinaus vergleichen die Studierenden die Werte der magnetischen Energie in der Luft und im Eisen.
- {A3}** Die Studierenden ziehen verschiedene Formeln aus der Vorlesung für die magnetische Energie W heran, in denen jeweils unterschiedliche Größen verwendet werden. Bei dem Aufstellen der Formeln verwenden alle Studierendenpaare Analogien zwischen den Formeln für Eisen und für Luft.
- {A4}** Die Studierenden interpretieren das Volumenelement dV in ihrer Formel als ein Kästchen im Raum, also ein „Volumen“.

{AB} Ein Studierendenpaar erkennt, dass die Widerstände addiert werden müssen, da eine Proportionalität zwischen Energie und Widerständen auftritt. Beim Bemerkten des Fehlers, dass sie statt einer Teilenergie die Gesamtenergie benötigen, bedenken sie direkt die Implikationen auf ihre Rechnung.

{B1} Die Studierenden überlegen eine Vereinfachung in der Herangehensweise, in dem sie sich damit auseinandersetzen, ob die Felder homogen sind und sich somit konstante Werte ergeben. Mit Hilfe dieser Interpretation vereinfachen sie die Aufgabe von einer Integrationsaufgabe in mehreren Veränderlichen auf die Multiplikation konstanter Größen.

{B2} Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe durch direktes Einsetzen von Werten, ohne dass eine Kombination von Gleichungen notwendig ist.

{B3} Die mathematische Arbeit beschränkt sich hier auf das direkte Einsetzen in die passenden Formeln, d. h. weitere Umformungen treten nicht auf. Es treten Fehler im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen der auftretenden Größen auf.

{B4} Die Studierendenpaare argumentieren über qualitative Zusammenhänge zwischen den Werten für Eisen und Luft, nämlich $W_L > W_{Fe}$.

{C1} Die Studierenden validieren unter Verwendung der SI-Einheiten-Darstellung der Einheit Joule. Ein Studierendenpaar zitiert sie zwar, aber verwendet sie nicht zur Validierung.

{C2} Die Studierenden vergleichen die Werte, die sie für Luft und Eisen erhalten haben, und setzen damit Vorlesungswissen über die Größenordnungen ein. Die Studierenden verwenden intuitive Vorstellungen zu der Größenordnung der gesuchten Werte.

{C4} Ein Studierendenpaar rechnet auf zwei unterschiedlichen Wegen und nutzt den Vergleich der Ergebnisse zur Validierung.

4.5.5 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe A6

[A6] Welche Masse m kann die Anordnung tragen? (4 Punkte) Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Näherung $h_{Fe} \approx 0$

G1 : In (5749) leitet P1 die Bearbeitung mit „Masse, hatten wir gesagt, ist der Druckunterschied“ ein. Er ist dabei unsicher, ob Druck der Quotient aus Fluss und Fläche oder aus Energie und Fläche ist. Er erinnert sich, dass $\Delta p = \frac{F}{A}$ gilt. P3 erinnert sich an die Formel, dass der Druck $\Delta p = \frac{1}{2} b \cdot h$ ist, und P2 ergänzt, dass $h = \frac{b}{\mu_0 \mu_r}$ ist. P1 zieht dann noch die Formel heran, dass $F = m \cdot g$, wobei g die Gravitationskonstante ist, und P3 zitiert aus dem Skript $F = 2A_{Fe}\Delta p$, wobei P1 den Faktor 2 hinterfragt, welchen P3 mit dem Skript begründet. P3 ergänzt dann, dass

$$\Delta p = p_{\text{Luft}} - p_{\text{Ferrum}}$$

ist und P2 sagt, dass die Formel „etwas wie“ $\frac{1}{2} b^2 \frac{1}{\mu_0 \mu_r}$ sei. P1 begründet anschließend den Faktor 2 damit, dass man einmal den linken Teil und einmal den rechten Teil des U-Kerns betrachtet. P2 meint, dass die Formel $F = 2A_{Fe}\Delta p$ mit $F = m \cdot g$ gleichgesetzt werden müsse und P1 ergänzt:

„Dann müssen wir noch das μ (d. h. die Permeabilität) mitreinbringen.“

(6119)

P1 und P2 sind unsicher, ob sie b oder h aus der Formel eliminieren müssen. P1 sagt, dass b unterschiedlich in Eisen und Luft sei. Durch den Hinweis des Studienleiters, dass sie in die Aufgabenstellung gucken sollen, bemerken die Studierenden den Hinweis, dass $h_{Fe} \approx 0$ ist.

Dann rechnen die Studierenden unabhängig voneinander und kommen auf sehr unterschiedliche Ergebnisse. P1 hinterfragt dann die Einheit der Zielgröße, während P2 folgert, dass es einen Fehler bei der Berechnung von b_L gegeben haben muss. Nach einer Neuberechnung von b_L (Aufgabe A4) berechnen die Studierenden die Ergebnisse mit ihren jeweiligen Formeln und kommen auf wieder auf verschiedene Ergebnisse. P2 kommt auf 1,6 Tonnen und erkennt dann, dass das sein Wert für Δp ist. P1 verifiziert seine Formel über die Einheit und folgert aus $\Delta p = \frac{F}{A}$, dass $F = \Delta p \cdot A$ gilt. Damit kommt er auf 24,3 kg. In der Diskussion zwischen P1 und P2 – wobei P2 auf ein Ergebnis „zwischen 4,6 und 4,9“ (8446) gekommen ist – erkennt P2 zunächst, dass er den Faktor 2 in der Formel nicht beachtet hat, und P1 schließt daraus, dass er sein Ergebnis verdoppeln muss, wodurch er auf 48,6 kg (korrekt: 47,7 kg) kommt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden den Weg aus der SEL, aber kommen aufgrund von Rundungsfehlern bei der Taschenrechnereingabe auf geringere Abweichungen (0,9 kg) zu dem tatsächlichen Ergebnis.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 verwendet als Schlagwort für die Vorgehensweise den Begriff „Kräftegleichgewicht“.
- **{A2}** Die Studierenden setzen sich zunächst mit allgemeinen physikalischen Vorgängen zu Masse und Druck auseinander und betrachten diese in Verbindung mit den in den Voraufgaben berechneten Größen magnetischer Fluss und Energie.
- **{A2}** Sie rekonstruieren aufbauend auf ihrem physikalischen Verständnis der Aufgabe, welche Bestandteile in der Formel vorkommen müssen – konkret ermitteln sie, dass hier die Permeabilität μ , also die magnetische Leitfähigkeit, μ relevant sein muss.
- **{A3}** Wegen einer Unsicherheit beim Ansatz sammeln sie Formeln, welche ihnen aus der Veranstaltung in diesem Kontext bekannt sind.
- **{AB}** Beim Rechnen gibt es ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Formelaufstellungen/Rechnen im Sinne von Bruder und Collet (2011) bzw. Polya (1949).
- **{C1}** Zur Validierung setzen sie einerseits die Einheiten der vorkommenden Größen ein
- **{C2}** Die Studierenden überprüfen die Größenordnung des Zahlenwerts des Ergebnisses und haben eine intuitive Vorstellung, in welchem Bereich dieser liegt. So erkennen sie ein Zehntel bzw. das Zehnfache des richtigen Wertes als falsch.

G2 : P2 ist unsicher, wie man magnetische Kraft berechnet, und vermutet, dass es mit Impulsen zusammenhängt. Zitat aus (3117): „Auf jeden Fall ist Δp drin.“ P1 vermutet, dass die Formel

$$\frac{1}{2} \cdot \text{irgendwas} \cdot \Delta p$$

sei und fragt P2 nach der Einheit. P2 denkt, dass $\frac{1}{t}$ in der gesuchten Einheit vorkommt, weil Impuls $m \cdot v$ und Kraft $m \cdot a$ sei. Sie erhalten auf Rückfrage vom Studienleiter die Formel $F = 2A_{Fe,1} \cdot \Delta p$ und P2 bemerkt den Hinweis in der Aufgabe, dass als Näherung $h_{Fe} \approx 0$ verwendet werden soll. P2 ist unsicher, ob bei der Berechnung von Δp die entsprechenden

Werte im Eisen minus die entsprechenden in der Luft oder umgekehrt berechnet werden müssen, was P1 mit „Luft minus Eisen“ beantwortet. P2 überlegt, welchen Vorfaktor diese Differenz haben muss und P1 erkennt, dass man wegen $h_{Fe} = 0$ zu $\Delta p = \frac{b^2}{\mu_0}$ vereinfachen kann, da $b = \mu \cdot h$ ist. P1 erkennt, dass dieses mit $m \cdot g$ gleichgesetzt werden kann und durch Umstellen erhält P2 die Formel

$$m = \frac{2A_{Fe,1} \cdot \frac{b^2}{\mu_0}}{g}.$$

Durch Einsetzen kommen sie auf 960 Kilogramm. (Anmerkung: Der für b_L eingesetzte Wert, welcher in A4 berechnet worden war, war falsch). Es kommt ihnen zu viel vor bei einem Abstand von 2mm. Sie geben erneut in den Taschenrechner ein und P2 hinterfragt, ob es in der Formel mit μ_0 multipliziert oder dividiert werden muss. Der Studienleiter gibt den Hinweis, dass ein Wert falsch ist, und P1 folgert, dass b_L nicht stimmt. Daraufhin gehen sie zurück zu ihrer Lösung von A4. Nach Korrektur des Wertes für b_L kommen sie in A6 auf 95kg, da sie die $\frac{1}{2}$ in der Formel missachten. Dieses Ergebnis halten sie für realistischer. Dennoch zweifelt P1: „Ich wüsste nicht, was falsch ist, aber 95kg ist echt viel.“ Die Studierenden erhalten ungefähr das Doppelte des eigentlichen Ergebnisses.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden den Lösungsweg aus der SEL, wobei zwischenzeitlich Fehler durch falsche Zehnerpotenzen bei den Größen auftreten. Das Endergebnis unterscheidet sich um den Faktor 2 von dem korrekten Endergebnis.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die Studierenden rekonstruieren aus der Physik, welche Bestandteile die Formel haben muss und versuchen auf diese Weise eine passende Formel zu finden.
- **{B2}** Sie kombinieren die Gleichungen im Sinne eines Gleichungsmanagements, d. h. solange, bis sie eine Formel für die gesuchte Größe haben, in der nur noch bekannte Größen vorkommen.
- **{BC}** Wegen Unklarheiten beim Ergebnis setzt ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Formelarbeit und Validierung ein.
- **{C1}** Während ihrer Rechnung überprüfen sie die Einheiten, wobei ihnen zwischenzeitlich diese Einheiten nicht bekannt sind.
- **{C2}** Am Ende erhalten sie das doppelte Ergebnis, welches mit Hilfe der Validierung über Größenordnungen nicht als falsch erkannt wird und erkennen nicht, dass dieser Wert falsch ist.

G3 : P2 leitet ein mit

„Kannst noch ein bisschen TM machen und die Kraft auf die Fläche ausrechnen und unten das gleiche Gewicht dranhängen, wenn du es durch g teilst. Musst dann nur Summe aller Kräfte, nach unten $m \cdot g$, nach oben ... (wird unterbrochen)“

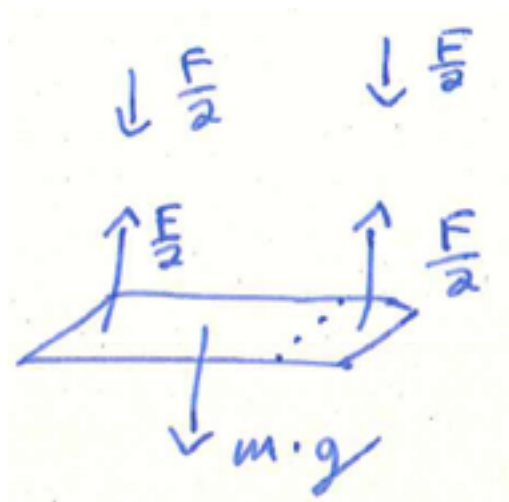


Abbildung 4.5.3: Skizze der Gruppe 3 zu Aufgabe A6

P1 und P2 sind unsicher, wie der Hinweis $h_{Fe} \approx 0$ zu verstehen ist. P1 bezieht es auf das h -Feld, also das Feld der magnetischen Feldstärke, und P2 betrachtet es als die Höhe vom Eisen, was aber schnell ausgeräumt werden kann. Sie diskutieren dann, ob h_{Fe} überhaupt 0 sein kann, also der Hinweis aus der Aufgabe überhaupt richtig sein kann, und welche Bedeutung das für die Aufgabe hat. P2 ist zusätzlich noch unklar, ob die doppelte Kraft nach unten wirkt, weil bei dem U-Kern zwei Berührungspunkte mit dem unteren Eisenstück vorhanden sind, und somit die doppelte Kraft wirkt. Nach einer Diskussion über die Richtung der Kräfte sagt P2:

Der Fluss und die Permeabilitätsdinger gehen in die andere Richtung. Deswegen ist es trotzdem Plus. Also rechnen wir es für eine Seite aus, multiplizieren es mit 2 und teilen es durch g und haben die Masse.

P1 entgegnet darauf: „Ja, das ist ein Plan.“ Sie erstellen gemeinsam die Skizze 4.5.3.

Sie stellen

$$\left| \frac{\vec{F}}{2} \right| = \left| \int_A \vec{f} dA \right| \quad (4.8)$$

und setzen

$$\vec{f} = \left(\frac{b}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{h^2}{2} (\mu_1 - \mu_2) \right) \vec{e}_y.$$

Hierbei berücksichtigen sie sowohl die Richtung der Kraft durch den Einheitsvektor $\vec{e}_y$, welcher in y -Richtung zeigt, als auch den Hinweis über die beiden Permeabilitäten, welche im Nenner stehen. P2 sagt, dass die Richtung irrelevant für das Ergebnis ist, da sie schon im Kräftegleichgewicht berücksichtigt wird. Letzteren Term streichen sie wegen der Bedingung an h_{Fe} in der Aufgabe. Dann setzen sie ein und erhalten

$$|\vec{f}| = \frac{197,2^2 m^2 T^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\infty} \right)$$

und kommen mit Hilfe dieser Formel auf den richtigen Wert für die Kraft an einer Seite. Unter Verwendung von Gleichung (4.8) verdoppeln sie den Wert, womit sie das linke und das rechte Stück des U-Kerns berücksichtigen. Ihr Ergebnis setzen sie dann mit $m \cdot g$ gleich. Durch Umstellen kommen sie auf $47,65 kg$, welches das richtige Endergebnis ist. P2 ist unsicher, ob

die Einheit des Ergebnisses Kilogramm oder Gramm. P1 begründet die Einheit Kilogramm damit, dass das die SI-Basiseinheit sei und Newton als $N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$ definiert sei.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Mittel aus der Technischen Mechanik zur Lösung der Aufgabe und verwenden somit nicht das Konzept „magnetischer Druck“ aus der SEL. Sie verbringen viel Zeit mit der Planung ihrer Vorgehensweise und lösen schließlich die Aufgabe damit korrekt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 gibt am Anfang einen Plan vor und ordnet die Aufgabe der Technischen Mechanik zu, in der häufiger Kräftegleichgewichte wie das hier vorliegende berechnet werden müssen.
- **{A1}** Sie missinterpretieren den Buchstaben h zunächst, weil sie aus ihrer Vorlesung zur Elektrotechnik die Notation H für magnetische Feldstärke kennen.
- **{A1}** Zur gegenseitigen Erläuterung ihres Plans wählen sie eine informative Figur, wobei sie wieder die Richtung des magnetischen Flusses hinterfragen.
- **{B1}** Es gibt eine lange Planungsphase, bei der zuerst ein sehr allgemeiner, vektorieller Ansatz verwendet wird, der erst nach dem Beachten der Gravitationskraft g verworfen wird.
- **{B2}** Auf diese Weise erhalten sie durch Kombination über Gleichungsmanagement eine Formel für die Kraft, in der sie direkt bekannte Größen einsetzen können, und gehen dann entsprechend ihres Plans zu der Masse über.
- **{C1}** Sie validieren ihre Rechnungen mit Hilfe der SI-Basiseinheiten, wobei P1 über die Darstellung der Einheit Newton in SI-Basiseinheiten argumentiert. Es zeigt sich hier noch eine Fehlerquelle, nämlich dass die SI-Basiseinheit für Gewicht nicht Gramm, sondern Kilogramm ist.

G4 : P2 steigt in den Aufgabenteil mit

„Kräftegleichgewicht, also ist $m \cdot g$ gleich zweimal die Kraft des Luftspaltes. Unser Feld steht hier ja vereinfacht normal drauf, also haben wir einfach zweimal die Fläche mal $\frac{b^2}{2}$ mal eins durch (wird unterbrochen)“

(4600)

ein. Daraufhin ergänzt P1: „ μ_0 , ähm, ne“ P2 interpretiert den Hinweis aus der Aufgabe so, dass wegen $h = \frac{b}{\mu}$ hier μ nun gegen unendlich gehen muss. Er berücksichtigt dann $h = \frac{1}{\mu_0}$ und erkennt, dass sich die Zweien in der Formel kürzen. P2 stellt auf:

$$m \cdot g = 2F_L = 2 \cdot A_{Fe,1} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

und stellt dieses nach m um. Auf diese Weise erhält korrekterweise als Ergebnis 47,7 kg. P1 rechnet selbst nochmals und erzielt dasselbe Ergebnis. Das Ergebnis ist richtig.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden – ähnlich wie G3 – einen Ansatz über ein Kräftegleichgewicht anstatt über den „magnetischen Druck“. Dieses stellen sie korrekt auf und kommen so zu dem richtigen Endergebnis.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 ordnet die Aufgabe direkt dem Aufgabentyp „Kräftegleichgewicht berechnen“ zu.
- **{A2}** P2 nennt erste Vereinfachungen, nämlich den Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte b und magnetischer Feldstärke h . P1 ergänzt den Faktor μ , der aufgrund der Situation vorkommen muss.
- **{A3}** Er zitiert die nötigen Formeln aus der Vorlesung.
- **{B2}** P2 arbeitet symbolisch mit der Formel, setzt ein und kommt auf das richtige Ergebnis.
- **{C4}** Die Studierenden vergleichen ihre Ergebnisse und validieren dadurch, dass diese identisch sind.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil A6

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Es treten Fehler durch Verwendung falscher Zehnerpotenzen bei den Ergebnissen auf, welche jedoch von den Studierendenpaaren erkannt werden. Das Endergebnis unterscheidet sich bei einer Gruppe um den Faktor 2 von dem korrekten Endergebnis. Bei einem Studierendenpaar gibt es zunächst eine Missinterpretation bei dem Buchstaben h , weil sie aus einer Veranstaltung zur Elektrotechnik die Notation H für magnetische Feldstärke kennen. Die Problemstelle in diesem Aufgabenteil ist die korrekte mathematische Beschreibung des vorliegenden „Kräftegleichgewichts“. Hierzu können die Studierenden zwei verschiedene Ansätze wählen, einen über den magnetischen Druck Δp und einen über Anwendung von Kenntnissen aus der Technischen Mechanik unter Verwendung der Erdbeschleunigung g . Darüber hinaus können bei dem Aufstellen der Formeln noch Überlegungen hinzugezogen werden, welche Größen Bestandteile der benötigten Formeln sein müssen. Zuletzt stellt es noch eine Herausforderung dar zu erkennen, in welchen Bereichen realistische Ergebnisse für die gesuchte Masse m liegen können. Einem Paar ist unklar, wie sie das für sie relevant erscheinende Konzept „magnetischer Druck“ aus der SEL hier einsetzen können, weswegen sie viel Zeit mit der Planung ihrer Vorgehensweise verbringen. Einem Paar ist zwischenzeitlich unklar, dass Kilogramm die SI-Basiseinheit für Gewicht ist und nicht Gramm.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Als Kategorisierung der Aufgabe erkennen die Studierendenpaare, dass sie ein „Kräftegleichgewicht“ berechnen müssen. Dabei setzen jeweils zwei Paare Wissen aus der GET-B-Vorlesung durch Verwendung des magnetischen Drucks Δp ein und die anderen verwenden

Kenntnisse aus der Technischen Mechanik zu. Eine Gruppe missinterpretiert den Buchstaben h zunächst. Zur Unterstützung der Planentwicklung und zur gegenseitigen Erläuterung setzen die Studierenden informative Figuren ein.

{A2} Die Studierenden setzen sich in ihren Überlegungen zunächst mit allgemeinen physikalischen Vorgängen zu Masse und Druck auseinander und betrachten diese in Verbindung mit den in den Voraufgaben berechneten Größen magnetischer Fluss und Energie. Damit rekonstruieren mehrere Paare, welche Bestandteile in der Formel vorkommen müssen – konkret ermitteln sie, dass hier die Permeabilität μ , also die magnetische Leitfähigkeit, relevant sein muss.

{A3} Die Studierenden zitieren Formeln aus der Vorlesung, wobei die Paare teilweise nicht direkt mitbedenken, ob diese für die Lösung der Aufgabe nützlich sind.

{AB} Beim Rechnen tritt bei mehreren Paaren ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Formelaufstellungen/Rechnen im Sinne von Bruder und Collet (2011) bzw. Polya (1949) auf.

{B1} Ein Studierendenpaar durchdenkt sehr allgemeine, vektorielle Ansätze, die erst nach dem Beachten der Gravitationskraft g verworfen werden.

{B2} Die Paare kombinieren die auftretenden Gleichungen im Sinne eines Gleichungsmanagements, d. h. solange, bis sie eine Formel für die gesuchte Größe haben, in der nur noch bekannte Größen vorkommen. Ein Paar arbeitet symbolisch mit der Formel, stellt diese um, setzt ein und kommt auf das richtige Ergebnis.

{BC} Die Studierenden nutzen ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Berechnungen mit den Formeln und Validierung der Ergebnisse, um das Ergebnis für die Masse in einen für sie realistischen Bereich zu bringen.

{C1} Die Studierenden nutzen während und nach ihrer Rechnung Einheiten zur Validierung, wobei ihnen teilweise die Einheiten zunächst nicht bekannt sind. Sie nutzen dabei die SI-Basiseinheiten, wobei einer Gruppe zwischenzeitlich unklar ist, dass die SI-Basiseinheit für Gewicht nicht Gramm, sondern Kilogramm ist.

{C2} Die Studierenden überprüfen die Größenordnung des Zahlenwerts des Ergebnisses und haben eine intuitive Vorstellung, in welchem Bereich dieser liegt, welche z. B. aus Versuchen in der Vorlesung oder Grundlagenlaboren stammen könnte. So erkennen die verschiedenen Paare ein Zehntel bzw. das Zehnfache des richtigen Wertes als falsch, jedoch nicht das Doppelte des gesuchten Ergebnisses.

{C4} Die Studierenden vergleichen ihre Ergebnisse untereinander und validieren dadurch, ob diese identisch sind.

4.6 Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die zweite Forschungsfrage,

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

für Aufgabe A beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?

In dieser Aufgabe treten verschiedene Arten von Fehlern auf. Eine Gruppe betrachtet bei ihrer Bearbeitung zwischenzeitlich die Masse m , welche jedoch erst in A6 relevant wird. Ein Paar

missinterpretiert den Buchstaben h .

Es gibt Vermischungen zwischen Konzepten des Magnetismus (wie beispielsweise der Berechnung von Reluktanzen) mit Konzepten aus der Elektrizität wie für elektrische Widerstände nach Ohm'schem Gesetz. Bei einem Paar tritt eine Doppelnotation bzgl. des Buchstaben i auf - einmal im Kontext des Magnetismus und einmal im Kontext der Elektrizität. Die beiden Studierenden bei einem Paar verwenden unterschiedliche Benennungen für selbstbezeichnete Größen (also Größen, deren Name nicht aus der Aufgabenstellung bekannt ist), was zu Schwierigkeiten in der Paardiskussion in A1 führt. Bei A4 resultiert ein Fehler in der Bearbeitung zweier Studierendenpaare daraus, dass statt der Gesamtreluktanz R_{ges} nur eine Betrachtung der Reluktanz im Eisen, d. h. R_{Fe} erfolgt.

Bezogen auf die Anwendung mathematischer Methoden führt ein Paar die Umrechnung auf die SI-Basiseinheiten in A1 falsch durch. Ein Paar betrachtet in diesem Zusammenhang in A6 fälschlicherweise Gramm als SI-Basiseinheit für Gewicht anstatt Kilogramm. Es treten bei mehreren Paaren Fehler mit Zehnerpotenzen auf, welche in dieser Aufgabe in Form von Einheitspräfixen auftreten. Bei zwei Paaren tritt der Fehler auf, dass sie in A3 Differenzieren zur Bestimmung des Maximums einsetzen möchten. Dieses ist hier aber nicht zielführend, da es sich um ein Randextremum und kein lokales Extremum handelt.

Bei der Aufgabe A treten unterschiedliche Problemstellen auf, die jedoch gruppiert werden können:

Zum einen müssen in den Aufgabenteilen A1, A2 und A6 Skizzen in mathematische Ausdrücke übersetzt werden, wobei im Übergang von A1 zu A2 das sogenannte Ersatzschaltbild als konventionalisiertes Hilfsmittel verwendet wird. Um einen richtigen Rechenansatz zu finden, müssen dabei alle Reluktanzen (insgesamt sechs Stück) beachtet werden, wobei im Sinne von einfacheren mathematischen Ausdrücke Vereinfachungen mitbedacht werden sollten. In A6 muss ein Kräftegleichgewicht unter Verwendung von Kenntnissen aus der Technischen Mechanik oder einem speziellen Konzept aus der Elektrotechnik-Vorlesung anhand der vorliegenden Skizze aus der Aufgabenstellung beschrieben werden.

Im Aufgabenteil A3 gibt es in der Argumentation zwei Wege, nämlich rein-innermathematisch durch Betrachtung eines Bruches oder rein-physikalisch durch Betrachtung der physikalischen Mechanismen (vgl. Tuminaro und Redish (2007) oder Bing (2008)), welche zu dem gleichen Ergebnis führen müssen. In mehreren Aufgabenteilen, insbesondere in den drei letzten Aufgabenteilen (also A4 bis A6), gibt es Nebeneinander von allgemeinen Ansätzen mit Hilfe von Vektorfeldern für magnetische Flussdichte b und magnetische Feldstärke h und einfacheren Gleichungen, welche statt mehrdimensionaler Integration nur Multiplikationen erfordern. Auch diese müssen über geeignete Argumente, welche Mathematik und Physik kombinieren, ineinander überführbar sein. Zu diesen Argumenten zählen die Homogenität der betrachteten Felder, wodurch h und b konstant sind, sowie Integrationsregeln, die das Herausziehen einer Konstanten aus dem Integral erlauben, so dass nur noch einfache Volumenintegrale über 1 übrigbleiben. Zu den notwendigen physikalischen Kenntnissen zählt in A5 auch eine Größenrelation zwischen den beiden berechneten Größen W_L und W_{Fe} , welche zur Überprüfung der Ergebnisse eingesetzt werden kann.

Unklarheiten treten diese in dieser Aufgabe vor allem durch unklare Aufgabenstellungen auf. In A1 ist den Studierenden unklar, wie die von der Aufgabe verlangte Vereinfachung aussehen soll.

Dieses kann sich sowohl auf die Anzahl der Reluktanzen beziehen, welche sich letztendlich bei allen vier Studierendenpaaren unterscheidet, als auch bei der Gestalt der zu berechnenden mathematischen Ausdrücke, in denen Zusammenfassungen anhand gemeinsamer Größen (wie gleicher Längen oder Querschnittsflächen) oder gemeinsamer Faktoren gewählt werden können. In A3 ist den Paaren unklar, wie der Begriff „bestimmen“ in der Aufgabenstellung zu verstehen ist und welches Argument ausreichend für eine korrekte Bearbeitung ist, also ob eine Argumentation über die Form des Forms oder die Physik anstatt der Anwendung „höherer“ mathematischer Methoden wie Differenzieren möglich ist. Ein Studierendenpaar diskutiert dabei sogar, wie sie die Aufgabe unter Verwendung verschiedener Synonyme von „bestimmen“ bearbeiten würden. In A4 argumentiert eine Gruppe, dass die Berechnung der magnetischen Flussdichte im Eisen, b_{Fe} , leichter sei als die Berechnung der magnetischen Flussdichte in der Luft, b_L , und dass $b_{Fe} = b_L$ gelte. Da jedoch in der Aufgabe nach b_L wählen sie den Weg über die Berechnung in der Luft, den sie als schwerer bewerten.

Bezogen auf die Physik treten Unklarheiten durch verwendete Analogien mit elektrischen Widerständen auf, wobei dieses sowohl bei der Berechnung der Reluktanz in A2 als auch bei der Berechnung der Induktivität in A3 eine Rolle spielt. Bei der Anwendung einer Formel, in der die Reluktanz R auftritt, ist den Studierenden unklar, ob sie dort die Gesamt- oder nur eine Teilreluktanz einsetzen müssen. Bei A6 weiß ein Paar zunächst nicht, wie sie das Konzept „magnetischer Druck“, welches ihnen relevant erscheint, zur Lösung der Aufgabe einsetzen können.

Bezogen auf die vom Experten erwarteten Fehler zeigt sich zunächst, dass in den verschiedenen Videostudien viele weitere Fehler auftraten und insbesondere Unklarheiten, welche sich aus der Aufgabenstellung ergaben. Der Fehler, dass zu wenig Reluktanzen gefunden wurden, zeigte sich in den Videostudien nicht. Die Arbeit mit den Brüchen und mit den Einheiten war eine erwartete Problemstelle, aber die Studierenden gingen richtig damit um. Problemstellen bezogen auf die Verwendung von Vektorfeldern traten nur bei einem Studierendenpaar auf, wobei diese auch überwunden wurden, da mit Hilfe der passenden Argumente (Homogenität) Übergänge zu den in den SEL verwendeten Formeln gefunden wurden. Der nicht-zielführende Zugang zum Bestimmen des Maximums in A3 mit Differenzieren trat bei zwei der vier Studierendenpaare auf. Es bestätigt sich, dass der Ansatz in A6 eine Problemstelle ist, da die Studierendenpaare eine längere Zeit für die Entwicklung eines Lösungsplans benötigten, jedoch letztendlich – im Gegensatz zu der Annahme des Experten – ein richtiger Ansatz gefunden wird und zumindest keine Endergebnisse erzielt werden, welche sich um Zehnerpotenzen von den korrekten Ergebnissen unterscheiden.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

Die in diesem Abschnitt gewählten Kategorien beziehen sich auf die Kategorien **{A1}** bis **{C4}**, welche in dem Abschnitt 3.4.4 näher vorgestellt wurden. Sie werden in diesem Abschnitt näher aufgefächert, so dass Vergleiche mit den anderen Aufgaben möglich werden:

{A1}:

- Erwartung an eine korrekte Lösung: Im Aufgabenteil A3 ist unklar, ob eine Argumentation an der Form des Bruches zur Lösung der Aufgabe ausreicht und was von den

Studierenden für eine volle Punktzahl erwartet wird. Ein Paar hinterfragt explizit, was der Unterschied zwischen „bestimmen“ und (von ihnen angeführt) „angeben“ ist.

- Gegebene Daten: Eine Gruppe missinterpretiert den Buchstaben h in A6 zunächst und deutet ihn nicht als magnetische Feldstärke.
- Arbeit mit konventionalisierten Skizzen: Als konventionalisierte Darstellung wird von allen Studierenden im Aufgabenteil A1 das Ersatzschaltbild genutzt. Dafür setzen sich die Studierenden mit der Skizze auseinander und suchen verschiedene Reluktanzen.
- Strukturierung und Benennung: Bei der Aufgabenbearbeitung versuchen die Studierenden möglichst eindeutige Namen für die selbstgewählten Benennungen zu finden wie beispielsweise R_δ für den Luftwiderstand. In A4 und A5 ergeben sich Schwierigkeiten im Zusammenhang mit den Benennungen, da den Studierenden unklar ist, ob sie den gesamten Wert oder nur einen Teilwert benötigen, z. B. in A4 die Gesamtreluktanz oder nur die Teilreluktanz in der Luft.
- Schlagwörter in der Bearbeitung: Als Begriff für die Rechnung nennt eine Gruppe in A4 das „Durchflutungsgesetz“. In A6 nennen die Studierenden „Kräftegleichgewicht“ als Schlagwort für die angestrebte Rechnung.

{A2}:

- Verwendung von Analogien zwischen verschiedenen Konzepten: Die Studierenden nutzen in A2, A3 und A4 Analogien zwischen „Magnetismus“ und „Elektrizität“ zum Erschließen passender Formeln unter Einsatz entsprechender Formeln aus der Elektrizitätslehre, z. B. für Widerstände das Ohm'sche Gesetz aus der Elektrizitätslehre in A2. In diesem Zusammenhang verwendet ein Paar den i in einer Doppelnotation in den beiden genannten Kontexten.
- Betrachtung physikalischer Mechanismen: In A3 argumentiert ein Paar über Physik, dass die Induktivität am größten ist, wenn es keinen Luftspalt gibt. Bei der Analyse der magnetischen Energien setzt sich ein Paar mit Vektorfeldern auseinander, in dem sie das h -Feld für die magnetische Feldstärke sowie das b -Feld für den magnetischen Fluss an jeder Position im Raum betrachten, und diskutieren, welche Werte an unterschiedlichen Stellen vorliegen. In A6 setzen sich Studierende zunächst mit allgemeinen physikalischen Vorgängen zu Masse und Druck auseinander und betrachten diese in Verbindung mit den in den Voraufgaben berechneten Größen magnetischer Fluss und Energie. Dieses hilft ihnen bei der Rekonstruktion der benötigten Formel für diesen Aufgabenteil.
- Rückschlüsse auf Formelbestandteile aus dem Kontext: Beim Aufstellen der Formeln überlegen alle Studierendenpaare, welche Größe aufgrund des physikalischen Hintergrunds vorkommen müssen und schließen so z. B. auf die magnetische Leitfähigkeit μ .

{A3}:

- Wahl einer Formel mit anschließender Anpassung: Alle Studierendenpaare ziehen in A2 die Formel für die Reluktanz, $R = \frac{l}{\mu A}$, heran und spezialisieren sie für die Anwendung auf Eisen- bzw. Luftreluktanzen. Ein ähnliches Vorgehen des Heranziehens von Formeln mit anschließender Anpassung auf Eisen und Luft gibt bei der magnetischen Energie in A5.

- Sammeln von Formeln: In A3, A4 und A6 ziehen die Studierenden mehrere Formeln heran, die ihnen für die Bearbeitung relevant erscheinen, wobei ein Paar in A3 direkt die passende Formel für diese Situation kennt, wodurch bei dieser Gruppe das Gleichungsmanagement im Gegensatz zu den anderen Gruppen entfällt.

{A4}:

- Verwendung mathematischer Formeln zum Erschließen der Physik: Die Studierenden interpretieren das Volumenelement dV in ihrer Formel als ein Kästchen im Raum, auf dass es eine physikalische Wirkung gibt.
- Nutzen von Begriffen aus der Aufgabenstellung zur Mathematisierung von Ausdrücken: Die Studierenden interpretieren in A4 den Begriff „Dichte“, um Rückschlüsse auf die Berechnung der Flussdichte zu erhalten. So beschreiben sie die Flussdichte b_L als das Verhältnis der Größe pro Fläche, also einen Quotienten dieser beiden Werte.

{AB}:

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Beim Bemerken des Fehlers in A5, dass sie statt einer Teilenergie die Gesamtenergie benötigen, bedenken sie direkt die Implikationen auf ihre Rechnung. Beim Rechnen nutzen mehrere Paare ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Formelaufstellen und Rechnen im Sinne von Bruder und Collet (2011) bzw. Polya (1949) auf. Die Studierenden durchdenken bereits beim Vereinfachen des Ersatzschaltbilds Vereinfachungen in den Rechnungen.

{B1}:

- Vereinfachung der zu verwendenden Formeln: Die Studierendenpaare durchdenken Vereinfachungen für die Zusammenfassung der auftretenden Reluktanzen in A1, wobei ihnen das Kriterium zur Vereinfachung unklar ist. Möglichkeiten sind: nach Eisen und Luft, nach Position im Kreis mit unterschiedlichen Längen und Querschnittsflächen oder ein Bündeln nach gleichen Längen und Querschnittsflächen.
- Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung: Beim Aufstellen der Gleichungen in A4 und A5 überlegen die Studierenden, ob die enthaltenen Größen konstant oder variabel bzw. die betrachteten Felder homogen, d. h. ortsabhängig, sind. Das Ziel ist eine Vereinfachung der Rechnung, in diesem Fall von mehrdimensionaler Integration mit Vektorfeldern auf Multiplikationen. Hierzu interpretieren sie die Flussdichte in zwei Weisen, nämlich einmal als Quotienten des magnetischen Flusses bei einer vorgegebenen Fläche und andererseits als Integral über den Fluss bezogen auf die Fläche.

{B2}

- Gleichungsmanagement: In A3, A4 und A6 nutzen die Studierenden Gleichungsmanagement, d. h. sie kombinieren Gleichungen solange, bis sie eine Formel für die gesuchte Größe haben, in der nur noch bekannte Größen vorkommen.
- Schnelles Einsetzen von Zahlen und Arbeit mit numerischen Variablen: Ein Paar nutzt in A4 ein schnelles Einsetzen von Zahlen, d. h. sie setzen bekannte Größen direkt ein, ohne sie jedoch mit anderen Größen zusammenzufassen, was sich sowohl auf den Zahlenwert als auch auf die Einheit bezieht. Sie setzen sie stattdessen als numerische Variablen ein.

- Zerlegen und Zusammensetzen: In A2 verwenden die Studierenden eine Strategie des Zerlegens und Zusammensetzens von den Formelausdrücken nach unterschiedlichen Kriterien, um herauszufinden, wie sie die Reluktanzen am geschicktesten kombinieren können.

{B3}:

- Einsetzen von Methoden aus der Sekundarstufe 1: Die Aufgabe kann - im Gegensatz zu den anderen drei Aufgaben – mit mathematischen Methoden aus der Sekundarstufe 1 gelöst werden, wobei teilweise die Studierenden in A3 einen Ansatz mit Differenzieren und in A4 einen Ansatz mit mehrdimensionaler Integration von Vektorfeldern erwägen. In sämtlichen Aufgabenteilen wird mit Bruchtermen operiert, in welchen Größen, d. h. Zahlenwerte mit Einheiten, auftreten. Dabei müssen Einheitspräfixe wie Kilo oder Milli in Zehnerpotenzen (hier 10^3 und 10^{-3}) umgewandelt werden, wobei auch die Rückumwandlungen zu entsprechenden Einheitspräfixen auftreten.
- Differenzieren, Integration von Vektorfeldern: In A3 ist der Ansatz der Maximumsbestimmung über Differenzieren für keines der Paare zielführend und in A4 kann der Integralansatz in eine Multiplikation umgeformt werden.

{B4}:

- Einsetzen von Werten: Beim Zeichnen des Graphen für $R_m(d)$ in A2 setzen die Studierendenpaare den Wert $d = 0$ ein, um den y -Achsenabschnitt zu bestimmen und erkennen den Wert der Luftreluktanz als Steigung der zu zeichnenden linearen Funktion. Ein Paar gibt dabei allerdings keine Skalierung an.
- Qualitative Betrachtungen der Formeln: Mit Hilfe einer Analyse der Formel zur Berechnung der Induktivität in A3, welche als Bruch gegeben ist, erkennen die Studierendenpaare, dass sie durch Einsetzen von $d = 0$ im Nenner maximiert werden kann. Das Studierenden trio möchte dieses durch eine Umformung verdeutlichen. In A4 nutzen die Studierenden qualitative Zusammenhänge zwischen den Werten der magnetischen Energie für Eisen und Luft.

{BC}:

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Die Studierenden nutzen in A6 ein Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zwischen Berechnungen mit den Formeln und Validierung der Ergebnisse.

{C1}:

- Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: In allen Aufgabenteilen nutzen die Studierenden Einheitenkontrollen, um zu überprüfen, ob sie die Einheit der Zielgröße, beispielsweise Joule in A5 oder Kilogramm in A6, durch Kombination der Einheiten der eingesetzten Größen erhalten. Dabei greifen sie auf das SI-Basiseinheiten-System zurück, wobei einem Paar zwischenzeitlich unklar ist, dass die SI-Basiseinheit für Gewicht Kilogramm anstatt Gramm ist.

{C2}:

- Kenntnis aus Veranstaltung: In A4 ist ein Intervall bekannt, in dem die magnetische Flussdichte liegen kann, was die Studierendenteams jedoch nicht nutzen.

- Innermathematischer Vergleich mehrerer Größen: In A5 wissen die Studierenden, dass die magnetische Energie in der Luft größer als im Eisen ist.
- Intuitive Vorstellungen: Die Studierenden überprüfen in A6 die Größenordnung des Zahlenwerts über eine intuitive Vorstellung, welche sie aus der Vorlesung oder Versuchen im Grundlagenlabor kennen können. Auf diese erkennen mehrere Paare ein Zehntel bzw. das Zehnfache des richtigen Wertes als falsch, jedoch nicht das Doppelte des gesuchten Ergebnisses.

{C4}:

- Nutzen zweier Rechenwege: In den Aufgabenteilen A5 und A6 rechnen Studierendenpaare auf unterschiedlichen Wegen und nutzen den Vergleich ihrer Ergebnisse zur Validierung.

2.3 Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Studierendenbearbeitungen aus dem vorherigen Abschnitt Interpretationen der Expertenbearbeitungen, welche innerhalb der SEL beschrieben sind, gegenübergestellt und auf diese Weise Unterschiede zwischen den Bearbeitungen herausgearbeitet. Die Expertenbearbeitungen werden hier zusätzlich zur Studi-Expert-Lösung noch einmal übernommen. Der Experte ist hier der Aufgabensteller und einer der Korrektoren der Klausur.

Vor dem eigentlichen Einstieg in die Bearbeitung investiert der Experte Zeit in die Vorbereitung. So rechnet er im Gegensatz zu den Studierenden die vorkommenden Größen um, so dass sie direkt in der SI-Basiseinheiten-Darstellung ohne Präfixe vorliegen. So macht er beispielsweise aus 50cm 0,5m. Dieses kann später direkt in der Rechnung eingesetzt werden.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A1 und A2:

Der Experte zeichnet direkt das Ersatzschaltschild, wobei er zwei Arten von Reluktanzen unterscheidet, nämlich Eisen- und Luftreluktanzen. Anschließend geht er auf den physikalischen Hintergrund ein; konkret betrachtet er die Erregung $\mu \cdot I$, die auf das System ausgeübt wird. Er verwendet dabei abwechselnd die Begriffe „Reluktanz“ (also den Begriff für einen magnetischen Widerstand) und „Widerstand“, womit üblicherweise ein elektrischer Widerstand bezeichnet wird. Zitat aus (0306):

„Ich nehme einfach alle Eisenreluktanzen zusammen, führe ich zu einem Ersatzwiderstand zusammen.“

Er bezeichnet die gesamte Eisenreluktanz als $R_{\text{Fe, ges}}$ und die gesamte Luftreluktanz als $R_{\text{L, ges}}$.

In der zweiten Phase des PARI-Interviews beschreibt der Experte die Zerlegung in Einzelreluktanzen entsprechend der gegebenen Größen für die Längen und Querschnittsflächen, welche eingesetzt werden müssen und sich für die Teilstücke der Eisenkerne unterscheiden. Im nächsten Schritt kombiniert er jeweils die Größen miteinander, die von d unabhängig (das sind genau die Eisenreluktanzen) bzw. von d abhängig sind (konkret, die Luftreluktanzen) und begründet dieses mit einer Minimierung des Rechenaufwands. Er verwendet ebenfalls, dass die Materialien der beiden Stücke identisch sind, also sowohl der U-Kern als auch das unten dargestellte Metallstück aus Eisen bestehen. Er folgert in (1156):

„Also konnte ich dieselben Formeln nehmen und ich konnte direkt diese Größen zusammenfassen, auch weil alle Größen zur Berechnung gegeben waren. So konnte ich direkt das Ergebnis ausrechnen ohne eine Variable darin beizubehalten, was bei der Luftspaltreluktanz der Fall war.“

Der Experte sagt, dass er hierzu zunächst die Einzelreluktanzen bestimmen muss und alle dafür benötigten Größen angegeben sind. Er schreibt zunächst die allgemeinen Formeln für eine Reluktanz auf, also

$$R = \frac{l}{\mu A},$$

also Reluktanz als der Quotient $\frac{\text{Länge}}{\text{Permeabilität} \cdot \text{Querschnittsfläche}}$, und notiert darüberhinaus

$$R_M(d) = R_{\text{Fe, ges}} + R_{\text{L, ges}}.$$

In seiner Rechnung verwendet er zunächst eine falsche Zerlegung des Eisenstücks. (Aufgrund der unterschiedlichen Längen muss hier eine Zerlegung durchgeführt werden. Wegen derselben Querschnittsfläche hätte in diesem Fall aber auch eine Gesamtberechnung der Reluktanz gereicht.) Er nennt auswendig den Wert für die Permeabilität im Vakuum, also μ_0 . Durch Einsetzen berechnet er den Zahlenwert für die erste Reluktanz, ist sich aber unsicher bei deren Einheit und gibt diese zunächst mit $\frac{Vs}{A}$ an. Während des Eintippens spricht er die Werte vor sich hin und bemerkt dabei seine Fehler bei den verwendeten Längen und Querschnittsflächen. Dann sagt er, dass die beiden anderen Eisenreluktanzen auf dieselbe Weise berechnet werden können und sich dann die Gesamteisenreluktanz als Summe der drei Einzelreluktanzen ergibt. Nach Einsetzen fällt ihm auf, dass die Einheit der Gesamteluktanz $\frac{A}{Vs}$ sein muss. Er geht anschließend zu der Reluktanz in der Luft über. Zur Berechnung leitet er sich die Formel für die Reluktanz in der Luft her, in dem er von

$$\frac{l}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}} \text{ zu } \frac{2 \cdot \text{Luftspaltbreite}}{\mu_0 \cdot A_{\text{Fe},1}}$$

übergeht. Hierzu bemerkt er (0843): „Das d ziehe ich vor, weil es als Variable vorliegt.“ Auf diese Weise erzielt er das Gesamtergebnis. Zum Skizzieren der Funktion bemerkt er:

Man sieht, bei $d = 0$ fällt der zweite Summand weg. Das heißt, wir fangen bei $R_{\text{Fe, ges}}$ an und dann steigt der Term linear mit der Steigung der Luftspaltreluktanz.

Der Experte erläutert hierzu in Phase 2, dass er die „generelle Funktion“ (1411) verwendet, also

$$R = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A},$$

wobei er bei der Luftspaltbreite die relative Permeabilität μ_r nicht berücksichtigen müsse, da $\mu_r = 1$ gilt, wobei er direkt erwähnt, dass relative Permeabilität beim Eisen $\mu_r = 1000$ ist.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A1 und A2:

- **{A1}** Insgesamt investiert er in diesem wie auch im vorangegangenen Aufgabenabschnitt viel Zeit in die Vorbereitung seiner Tätigkeiten.

- **{A2}** Der Experte beschreibt physikalische Vorgänge mathematisch, die er zunächst qualitativ durch Begriffe wie „Erregung“ (als Anlass für den Beginn eines physikalischen Mechanismus) beschreibt.
- **{A2}** Hierbei durchmischt er die analogen Konzepte „Widerstand“ (üblicherweise Bezeichnung für den elektrischen Widerstand) sowie „Reluktanz“ (magnetischer Widerstand), wobei er von einem „Ersatzwiderstand“ spricht, welches in der Elektrotechnik der korrekte Fachbegriff für die gemeinsame Betrachtung mehrerer Widerstände ist.
- **{A3}** Dieses dient ihm dazu, Größen wie die Gesamtreluktanz im folgenden Aufgabenteil berechnen zu können, was auf rein-qualitativer Ebene nicht möglich.
- **{B1}** Er strukturiert die betrachteten Widerstände nach den zu erwartenden Rechnungen im kommenden Aufgabenteil. Dabei nutzt er eindeutige Notationen, was ebenfalls ein Hilfsmittel für kommende Aufgabenteile ist.
- **{B4}** Dort könne man nur die Aussage machen, dass dieser Wert größer als die einzelnen Reluktanzen ist.
- **{A2}** Er sagt, dass er bei $R_{\text{ges,Fe}}$ mit dem Zeichnen anfängt und meint damit, dass der y -Achsenabschnitt (also der y -Wert bei $d = 0$) genau dieser gesamten Eisenreluktanz entspricht. Analog setzt er die Steigung der Geraden mit R_{Luft} gleich.
- **{A3}** Vor den Teilrechnungen zieht er die allgemeine Formel

$$\text{Reluktanz} = \frac{\text{Länge}}{\text{Permeabilität} \cdot \text{Querschnittsfläche}}$$

heran und spezialisiert sie für die Berechnung von Eisen- bzw. Luftreluktanzen. Dabei kennt er Werte wie μ_0 als Faktenwissen auswendig.

- **{B1}** Der Experte beginnt die Rechnung mit einem strukturierten Aufschreiben der zu berechnenden Summe.
- **{B1}** Mit Hilfe der Formel strukturiert er die Berechnung der Teilreluktanzen und als weitere Organisationsmaßnahme die Variable d vor dem Bruch, um die Form der linearen Gleichung zu verdeutlichen. Als Überwachungsstrategie nutzt er die Überprüfung der Einheit der Reluktanz.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte beschreibt erst unter Verwendung physikalischer Begriffe die auftretenden Vorgänge (Erregung) im Sinne einer Geschichte. Er nutzt – wie die Studierenden – die Analogie zu elektrischen Widerständen, geht damit aber auch bezogen auf Begriff wie „Ersatzwiderstand“, was kein Studierendenpaar gesagt hat, aufmerksamer um. Er strukturiert wie in der Musterlösung, was nicht überraschend ist, da er der Aufgabensteller ist. In seiner Rechnung notiert er erst die gesamte Formel, so dass sein Weg „Ersatzschaltbild $\Rightarrow$ Formel $\Rightarrow$ Ergebnis“ klarer strukturiert ist. Hier hatten die Studierenden erst die Teilsummanden notiert, berechnet und am Ende erst aufaddiert. Er schreibt das d vor den Bruch, um strukturell die lineare Funktion zu verdeutlichen. Er verwendet Benennungen, welche genauer die Bedeutung der Ergebnisse zeigen als bei den Studierenden, z. B. $R_{\text{ges, Fe}}$.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A3:

Der Experte erinnert sich an die Formel

$$L = \frac{N^2}{R_M}$$

für die Induktivität und kommentiert diese mit „Das kann ich auch aufschreiben. R_M ist bekannt.“ Zum Bestimmen des Maximalwertes muss der „Term unten“ minimiert werden. Er erkennt, dass dieses für $d = 0$ gilt und dass dann der zweite Summand immer Nenner wegfällt. In (1158) sagt der Experte dazu:

„Das bedeutet $L_{\max}$ liegt vor bei $d = 0$.“

Er verwendet dann den Wert $N = 100$ Windungen und berechnet den Maximalwert. Die Einheit gibt er direkt mit Millihenry an, ohne sie zu hinterfragen.

In der zweiten Phase des PARI-Interviews argumentiert der Experte über die Form des Bruches, was die Aufgabe seiner Meinung nach vereinfacht. Dazu äußert er sich folgendermaßen (1611):

„Man hätte auch ableiten und nach Hoch- und Tiefpunkten suchen können, allerdings sieht man, dass nur ein Term von der Luftspaltbreite abhängt, auch noch linear.“

Er argumentiert dann weiter, dass der Zähler und die Eisenreluktanz konstant sind und daher nur der zweite Summand im Nenner betrachtet werden müsse, vgl. (1611):

„Um den zu minimieren ist die simple Lösung, die Luftspaltbreite auf null zu setzen, damit der Summand rausfällt.“

Da alle Größen gegeben waren, konnte er direkt in die Rechnung einsteigen, wobei er noch anführt, dass N aus der Aufgabenstellung und R_M auf A2 bekannt waren. Das Ergebnis interpretiert er so, dass die Induktivität mit größer werdendem Luftspalt fällt, da die Gesamtreluktanz im Nenner der Formel für die Reluktanz steht.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A3:

- **{A1}** Der Experte führt vor dem Rechnen einige Vorüberlegungen zu möglichen Ergebnissen durch und rechnet erst dann. Seine Ausführungen übersetzt er direkt in Formeln und verdeutlicht daran seine Aussagen.
- **{A2}** Er beschreibt mathematisch, was in der Elektrotechnik passiert, oder entsprechend Tuminaro und Redish (2007): Er spielt das „Mapping Meaning to Mathematics“-Game. Dabei bleibt das Nicht-Auftreten negativer Werte für d implizit. (Dieses ist physikalisch klar, da eine Luftspaltbreite keine negativen Werte annehmen kann.)
- **{B3}** Er nennt „Maximieren“ als Schlüsselwort die Notwendigkeit zum Differenzieren, aber bricht in dieser Aufgabe mit diesem Schema. Dieses ist auch sinnvoll, da es sich um ein Randextremum handelt.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte durchdenkt im Sinne eines Extremalprinzips (vgl. Bruder und Collet (2011)), welche Einflüsse die Größen auf die Rechnung haben. Er nennt Differenzieren in den Rechnungen als üblichen Weg für Aufgaben, in denen Maximalwerte vorkommen, möchte hier aber mit dem Schema brechen.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A4:

Der Experte rechnet die nun vorgegebene Luftspaltspalte direkt von 2mm auf 0,002m um, ehe er in die Aufgabe einsteigt. Er erkennt, dass er den magnetischen Fluss mit Hilfe der Induktivität bestimmen kann, wofür er den magnetischen Fluss Φ braucht und er notiert $L \cdot i$. Dann gibt er an, dass der magnetische Fluss auch alternativ als Quotient von Durchflutung und magnetischem Widerstand berechnet werden kann. Er kombiniert anschließend die beiden genannten Formeln und stellt sie nach b_L um. Beim Einsetzen notiert er bekannte Größen direkt in seiner Formel, während er unbekannte Größen wie R_M stehenlässt. Dieser war bisher nur in Abhängigkeit von d berechnet worden, in diesem Aufgabenteil muss allerdings noch $d = 0,002\text{m}$ eingesetzt werden. Er berechnet dann $R_M(0,002\text{m})$ und ergänzt sein Ergebnis bei Aufgabenteil A2, dessen Ergebnis die von d abhängige und somit variable Gesamtreluktanz war. Nach einer Zwischenrechnung zum Erhalten von Φ berechnet er nun b_L mit Hilfe der kombinierten Formel.

In Phase 2 führt der Experte hierzu aus:

„[Die Flussdichte ist] generell definiert als der Fluss durch die jeweilige Fläche. Da der Fluss noch nicht bekannt war, musste ich den erst berechnen. Dafür habe ich verschiedene Möglichkeiten gehabt, einmal $L \cdot I$ oder Φ geteilt durch die magnetische Reluktanz. Da die Luftspatllänge explizit gegeben war, habe ich das als Hinweis aufgefasst, diesen Weg zu verfolgen, da man hier das Ergebnis aus A2 verwenden konnte.“

(2038)

Das Ergebnis hat er dann in die Formel zur Berechnung der Flussdichte eingesetzt. Auf die Rückfrage, warum er Φ berechnet hat und nicht die andere Formel verwendet hat, in die man direkt einsetzen konnte, antwortet er, dass er den Wert Φ im kommenden Aufgabenteil benötige. Anschließend äußert er sich noch dazu, dass in dem magnetischen Kreis überall derselbe magnetische Fluss vorhanden ist und man so den Wert weiterhin einsetzen könnte, wenn man ihn einmal berechnet hat. Das Ergebnis der Rechnung begründet er folgendermaßen: Der erhaltene Wert ist für Anwendungen realistisch. Dabei hebt er hervor, dass der Zusammenhang linear ist und dieser Sachverhalt gerade für Anwendungen in Elektromotoren und Transformatoren günstig ist. (Die letzte Aussage ist nicht für die Bearbeitung der Aufgabe wesentlich, aber wurde von dem Experten besonders hervorgehoben.)

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A4:

- **{A1}** Der Experte rechnet vorgegebene Werte in ihre SI-Basiseinheit um.
- **{A1}** Er ergänzt den Wert $R_m(0,002\text{m})$, welcher erst in späteren Aufgabenteilen benötigt wird, bei Aufgabenteil A2, in dem er $R_m(d)$, also die von d abhängige Gesamtreluktanz, berechnet hat.
- **{A3}** Der Experte ruft bekannte Formeln für eine solche Situation ab, wobei er mit den vorkommenden Begriffen arbeitet, in dem er Flussdichte als Fluss pro Fläche direkt mathematisiert.
- **{B2}** Er kombiniert auftretende Formeln so, dass bis auf die gesuchte Größe nur bekannte Größen in der Gleichung auftreten. Diese Herangehensweise definiere ich als „Gleichungsmanagement“.

- **{C3}** Bei der Validierung sagt er, dass der Wert realistisch ist und dieses ihm beim Stellen einer Aufgabe auch wichtig ist.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte überführt direkt alle Einheiten in SI-Basiseinheiten. Er notiert den Wert $R(0,002\text{m})$ zu Beginn bei den am Beginn der Aufgabe umgerechneten Größen. Er zitiert die Vorlesung, um sein Ergebnis zu validieren, und weist darauf hin, dass es realistisch ist. Die Studierenden haben das nicht genutzt.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A5:

Der Experte erinnert sich, dass in beiden Formeln $\frac{1}{2}\Phi^2$ vorkommt, aber „da fehlt noch was.“ (1740) Er setzt seine Überlegungen fort mit:

„Ok, das könnte man auch über Einheiten lösen.“

(1818)

und sagt dann, dass die Zieleinheit Joule ist. Er überspringt wegen der Unklarheiten bei der zu verwendenden Formel schließlich zunächst diesen Aufgabenteil und bearbeitet A6. Nach vollständiger Bearbeitung von A6 ergänzt er bei seinen Formeln die entsprechenden Reluktanzen und erhält auf diese Weise

$$W_L = \frac{1}{2}\Phi^2 R_{L, \text{ges}}$$

für die Energie in der Luft und analog

$$W_{\text{Fe}} = \frac{1}{2}\Phi^2 R_{\text{Fe, ges}}$$

für die Energie im Eisen. Mit der Formel berechnet er dann den Wert für W_L . Dieser erscheint ihm zu „ziemlich hoch“ (2219), woraufhin er auf einen Fehler schließt und sein Ergebnis mit einem Blitz kennzeichnet. Er vermutet die Berechnung des magnetischen Flusses als Fehlerquelle. Er berechnet diesen neu und verdeutlicht, dass der Wert für W_L nun geringer ist. Er berechnet dann auch die magnetische Energie im Eisen. Er bezeichnet das Ergebnis als „sinnvoll.“ (Anmerkung: Dieses Ergebnis ist nicht korrekt aufgrund des falschen Vorfaktors $\frac{1}{2}$.)

In Phase 2 ergänzt er, dass überall derselbe Fluss vorherrscht. Er kann wieder auf Ergebnisse aus den ersten Aufgabenteilen zurückgreifen. Er hat somit alle Werte, die er für diesen Aufgabenteil benötigt, bereits zuvor errechnet. Er interpretiert das Ergebnis so, dass ein Großteil der Energie im Luftspalt gespeichert ist, „was in der Realität auch immer der Fall ist.“ (3735). Er führt hierzu weiter aus:

„Denn das Eisen ist, man sieht es auch an den Ergebnissen, ein relativ schlechter Energiespeicher. Man sieht das auch als Deutung, wir haben für den Eisenteil ein geometrisch relativ großes Gebilde im Gegensatz zum Luftspalt. Aber dennoch beträgt die Energie im Eisen nur knapp ein Drittel der Energie im Luftspalt.“

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A5:

- **{A1}** Ein Ergebnis, was ihm falsch erscheint, markiert er mit einem Blitz.
- **{A2}** Der Experte notiert sich zunächst, was in der Formel aufgrund des physikalischen Hintergrunds vorkommen muss, wobei er in diesem Fall eine falsche Analogie einsetzt.
- **{C1}** Er prüft die Formeln mit seinen physikalischen Kenntnissen (z. B. mit Dimensionskontrollen bei den Einheiten), aber übersieht dabei einen Faktor $\frac{1}{2}$.
- **{C2}** Bei der Überprüfung der Zahlenwerte betrachtet er, dass die eine magnetische Energie größer als die andere sein muss.
- **{C2}** Er vergleicht die Größenordnungen der Ergebnisse, da die eine magnetische Energie immer größer als die andere ist.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte leitet die benötigte Formel her, in dem er überlegt, welche Größen darin vorkommen müssen. So trifft er die passende Wahl bei der verwendeten Formel. Er zitiert die Formel nicht, sondern geht er qualitativ vor und übersieht so einen Faktor $\frac{1}{2}$. Er markiert ein falsches Ergebnis mit einem Blitz, anstatt direkt damit seine Rechnungen zu revidieren.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A6:

Der Experte überlegt kurz in (1855) „Die Kraft oder die Masse?“ Er notiert dann die Formel

$$F = \frac{1}{2} (b_L \cdot h_L - b_{Fe} \cdot h_{Fe}),$$

welche die Kraftdifferenz zwischen den beiden auftretenden Kräften in der Luft und im Eisen beschreibt. Er argumentiert, dass durch die Vereinfachung $h_{Fe} \approx 0$ gemäß Aufgabenstellung der hintere Term wegfällt. Dann erkennt er, dass sich der Term über $b = \mu \cdot h$ vereinfachen lässt und so die Formel zu

$$F = \frac{1}{2} \cdot b_L^2 \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

wird. Beim Notieren ersetzt er F durch Δp , den magnetischen Druck. Für die magnetische Kraft erinnert sich an die Formel $F = \Delta p \cdot A_{Fe,1} \cdot 2$, welche er verbalisiert und symbolisch aufschreibt. So erhält er die magnetische Kraft und gibt seine Lösung folgendermaßen an:

$$F = 463,24N \Rightarrow m = \underline{47,2kg}$$

Er gibt keine Formel an, wie er mit der Gravitationskonstante g umrechnen kann (diese wäre $m = \frac{F}{g}$), sondern überführt es direkt in korrekter Weise, also unter Verwendung von g , ohne dieses konkret aufzuschreiben.

In Phase 2 des PARI-Interviews ergänzt der Experte in seiner letzten Rechnung in A6 die fehlende Formel zur Berechnung der Gravitationskonstanten. Er interpretiert das Ergebnis physikalisch, in dem er den magnetischen Druck und die Masse in Verbindung setzt: Er sagt, dass durch eine Verringerung der Masse eine Anziehung stattfinden würde und analog durch eine Erhöhung zu einer Abstoßung führen würde.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil A6:

- **{A2}** Der Experte steigt in die Bearbeitung mit der Suche nach dem richtigen physikalischen Konzept ein, was ihm bei der Planung einer Aufgabenbearbeitung hilft.
- **{A2}** Dabei geht er wieder vom allgemeinen Konzept „Kraft“, welches durch F symbolisiert wird, zu dem hier speziell eingesetzten Konzept „magnetischer Druck“ über.
- **{A3}** Er arbeitet in diesem Aufgabenteil weniger systematisch, sondern notiert die Formeln, welche ihm für eine solche Situation einfallen.
- **{B3}** Die Umformungen nimmt er in diesem Fall symbolisch vor, bis er eine Formel für die Kraft F erhalten hat, wobei er diese direkt in die zugehörige Masse m umrechnet.
- **{C3}** Eine Validierung geschieht hier über die Größenordnungen, welche durch vorherige Laborversuche bekannt sind.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte notiert hier zunächst alle Formeln und Merksätze, die ihm einfallen. Damit gelangt er zum Konzept „Magnetischer Druck“. Hier waren die Rechnungen der Studierenden, welche teilweise Erkenntnisse aus einem anderen Ingenieurgebiet (nämlich Technischer Mechanik) einschließen, zielgerichteter.

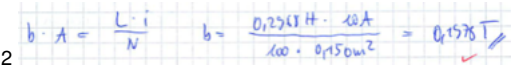
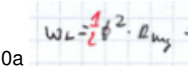
4.7 Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analyse der ca. 90 Klausurbearbeitungen zu der Aufgabe A vorgestellt. Diese Aufgabe wurde – wie bereits erwähnt – in einer Klausur eingesetzt, welche üblicherweise nach dem zweiten Fachsemester in Elektrotechnik geschrieben wird. Für die Analyse wurde nicht die Korrektur der Klausur übernommen, sondern die Klausur wurde gemäß eines Kategoriensystems, welches auf der SEL aufbaut, neu korrigiert. Die Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen, welche unter dem Einsatz von Partial Credits (2 richtig, 1 halbrichtig, 0 falsch) durchgeführt wurde, wurde einerseits hinsichtlich Lösungsquoten und andererseits hinsichtlich Zusammenhängen zwischen dem Aufstellen einer Formel und dem Berechnen eines Wertes mit Hilfe der aufgestellten Formel untersucht. Weitere Ausführungen zu der Analyse der Klausurbearbeitungen gibt es im vorherigen Kapitel ab Seite 115.

4.7.1 Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe A

	Kategorie mit Kurzbeschreibung der Ideallösung	Ausprägungen	Ankerbeispiele
--	--	--------------	----------------

A1	Ersatzschaltbild: es wird ein Ersatzschaltbild angegeben, was für die Mathematisierung in A2 hilfreich ist. Da keine direkte Verbindung zu A2 hergestellt wird, ist es auch richtig, wenn alle Reluktanzen zu einer zusammengefasst werden, da „so weit wie möglich“ vereinfacht werden sollte.	2a Wahl einer passenden Zusammenfassung mit Eisen und Luft getrennt (unabhängig von der Anzahl der jeweiligen Reluktanzen) 2b Gesamtzusammenfassung aller Reluktanzen 1a Falsche Zusammenfassung: konstante (bzw. Eisen-) und vom Luftspalt abhängige Reluktanzen werden zusammengefasst 1b unvollständiges Bild: Luftreluktanz fehlt gänzlich 1c unvollständiges Bild: Eisenreluktanz fehlt gänzlich 0a falsches Ersatzschaltbild, z. B. Parallelschaltung 0b Strukturell falsches Ersatzschaltbild 0c keine Bearbeitung	
A2a	Reluktanz-Formelaufstellen (Achtung: Vertauschung der Reihenfolge mit dem nächsten ist möglich): Es wird eine Formel der groben Form $R_{ges} = R_{Fe} + R_L$ aufgestellt. Es werden die passenden Formeln für beide R's verwendet.	2 es werden beide Formeln (für Eisen und Luft) richtig herangezogen 1a es wird für Eisen und Luft dieselbe Formel verwendet 1b es werden falsche Reluktanzen zusammengefasst 1c es fehlen Reluktanzen 1d Kombination von 1a und 1b 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
A2b	Reluktanz-Berechnung: Es werden die korrekten Werte für die einzusetzenden Größen (Länge, Querschnittsfläche) eingesetzt und das Ergebnis stimmt im Rahmen von Toleranzen.	2 es wird die Reluktanz richtig berechnet 1a es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt 1b Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
A2c	Darstellung der linearen Funktion: Die lineare Funktion steigt an und aufgrund des Wertes der Eisenreluktanz ist $R_{ges}(0) > 0$.	2a es wird eine lineare Funktion gezeichnet, die den Angaben in der Kurzbeschreibung genügt 2b die lineare Funktion wird im negativen Bereich fortgesetzt, d. h. es wird kein Bezug zur Situation hergestellt 1a es wird eine Funktion gezeichnet, die nicht linear ist 1b die Funktion geht durch den Ursprung, d. h. es wird der Wert R_Fe nicht beachtet bzw. nicht richtig interpretiert 1c Gleichzeitig erfüllt: 1a und 1b 0 keine Bearbeitung	

A4b	Flussdichte-Berechnung: Der Wert der Flussdichte wird mit Hilfe der zuvor aufgestellten Formel berechnet.	2 es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben 1a Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz 1b nur die Einheit ist korrekt 1c nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt 0a es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt 0b keine Bearbeitung	2 
A5a	Magnetische-Energie-Formel (Eisen): Es wird die richtige Formel zur Berechnung der magnetischen Energie im Eisen herangezogen, also $W_{Fe} = 0,5 \cdot \Phi^2 \cdot R_{Fe}$	2 Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet. 1a Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung 1b es wird statt R_{Fe} hier wieder R_{ges} verwendet 0a falsche Formel 0b keine Bearbeitung	
A5b	Magnetische-Energie-Formel (Luft): Es wird die richtige Formel zur Berechnung der magnetischen Energie in der Luft herangezogen, also $W_L = \Phi^2 \cdot R_L$	2 Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet. 1a Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung 1b es wird statt R_L hier wieder R_{ges} verwendet 0a Verwendung einer falschen Formel 0b keine Bearbeitung	0a 
A5c	Magnetische-Energie-Berechnung (Eisen): Es wird der korrekte Wert berechnet, d. h. richtiger Zahlenwert, richtige Zehnerpotenz und richtige Einheit.	2 es wird das korrekte Ergebnis angegeben 1a Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz 1b nur die Einheit ist korrekt 1c nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt, aber nicht die Einheit 0a falsches Ergebnis 0b keine Bearbeitung	
A5d	Magnetische-Energie-Berechnung (Luft): Es wird der korrekte Wert berechnet, d. h. richtiger Zahlenwert, richtige Zehnerpotenz und richtige Einheit.	2 es wird das korrekte Ergebnis angegeben 1a Zahlenwert ist korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz 1b die Einheit ist korrekt 0a falsches Ergebnis 0b keine Bearbeitung	

A6a	Masse-Formelaufstellen: Es wird erkannt, dass ein Gleichgewicht bestimmt werden muss und eine Formel der Form $m = (A \cdot b^2)/(\mu \cdot g)$ angegeben.	2a Richtige Formeln werden herangezogen und passend kombiniert bzw. die Kombination wird angedeutet 2b Richtige Formel zur Berechnung „steht da“ 1a Relevante Formeln werden herangezogen, aber falsch kombiniert 1b Falsche Formel für magnetische Kraft (richtig: $F = A \cdot b^2/\mu$) 1c Falsche Formel für Gravitationskraft (richtig: $F = m \cdot g$) 0a falsches Ergebnis 0b keine Bearbeitung	2 2
A6b	Masse-Berechnung: Das Ergebnis wird korrekt berechnet, d. h. richtiger Zahlenwert, richtige Zehnerpotenz und richtige Einheit.	2 es wird das korrekte Ergebnis angegeben 1a Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz 1b nur die Einheit ist korrekt 1c nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt 0a falsches Ergebnis 0b keine Bearbeitung	2 1a 1b

4.7.2 Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen

In den eckigen Klammern ist jeweils angegeben, auf welche Aufgabenteile sich die Aufgabenstellungen bzw. die Ausführungen in den Kreuztabellen beziehen.

[A1] Skizzieren Sie das elektrische Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises und vereinfachen Sie dieses soweit es geht.

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: In diesem Aufgabenteil müssen die Studierenden aus der Skizze des magnetischen Kreises insgesamt sechs Widerstände ablesen. Diese können zu vier konstanten Widerständen im Eisen und zwei Widerständen, die von der Luftspaltbreite d abhängen, zusammengefasst werden.

Lösungsquoten: Der Aufgabenteil wurde von 77 von 92 (83,7%) richtig gelöst, wobei 70 (76,1%) bei ihrer Vereinfachung Eisen- und Luftwiderstände getrennt betrachtet haben, und sieben (7,6%) sämtliche Widerstände zusammengefasst haben. Neun (9,8%) haben strukturell falsche Ersatzschaltbilder gezeichnet (z. B. für Parallelschaltungen) und fünf (5,4%) haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet. Ein Studierender hat zu wenig Widerstände, nämlich ausschließlich die Eisenwiderstände, eingezeichnet.

Kreuztabellen zu den Unterkategorien: entfällt hier, da es keine Unterkategorien gibt

Abbruchquoten¹:

- bei fünf Studierenden konnten in keinem Aufgabenteil halbrichtige oder richtige Lösungen kategorisiert werden.
- ein Student hat ausschließlich Teil A1 bearbeitet.

Ausblick auf Folgeaufgaben²:

In diesem Aufgabenteil wurden keine Berechnung durchgeführt, daher kein Bezug zu anderen.

Kommentare: Bei den Bearbeitungen der Studierenden zeigt sich, dass ihnen der Begriff "Vereinfachung" unklar war. Ein Trennen von Eisen- und Luftwiderständen ist an dieser Stelle weder für die Berechnung noch nach Definition eines Ersatzschaltbilds notwendig. Sieben Studierende haben alle Widerstände zusammengefasst, was auch der Aufgabenstellung entspricht.

[A2] Geben Sie den magnetischen Gesamtwiderstand $R_M(d)$ als Funktion der Variable d an und skizzieren Sie dessen Verlauf in einem Diagramm.

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: Die Studierenden müssen die Formeln für den Eisenwiderstand und den Luftwiderstand abrufen, die beide aus der Formel $\frac{l}{\mu A}$ abgeleitet werden können. Ihre Ergebnisse müssen sie zusammenfassen, wobei hierbei Umformstrategien der Größenalgebra verwendet werden müssen.

Lösungsquoten bezogen auf die Aufgabenteile A1 und A2

- 62 (67,4%) der 92 Studierenden haben beide Formeln für den Eisen- bzw. Luftwiderstand richtig abgerufen. 16 (17,4%) haben richtige Teilergebnisse, wobei der Hauptfehler das Weglassen von Widerständen ist. Dieser tritt bei elf der 16 Studierenden auf. 14 Studierende, also 15,2%, haben diesen Aufgabenteil falsch (sechs Studierende) bzw. nicht (acht Studierende) nicht bearbeitet.
- 39 (42,4%) berechnen den Gesamtwiderstand korrekt. Bei den halbrichtigen Lösungen, wie sie bei 17 Studierenden (18,5%) auftreten, werden einerseits falsche Längen und Flächen eingesetzt (bei acht Studierenden) oder es treten trotz richtiger Formeln Fehler auf (bei neun Studierenden). Bei 36 Studierenden (39,1%) gibt es falsche oder keine Bearbeitungen.
- Der Gesamtwiderstand wird von 40 Studierenden (43,5%) richtig skizziert, wobei zwei der Studierenden nicht beachten, dass die Funktion für negative Luftspaltbreiten nicht definiert ist. 14 Studierende haben halbrichtige Lösungen, wobei bei jeweils fünf Studierenden die Funktion durch den Ursprung geht (somit der konstante Eisenwiderstand nicht betrachtet wird) bzw. nicht linear ist und vier Studierende sogar beide Fehler machen. 38 Studierende (41,3%) haben keine oder falsche Bearbeitungen.

		Reluktanz-Formelaufstellen						Gesamt
		0a – falsche Bearbeitung	0b – keine Bearbeitung	1a – es wird für Eisen und Luft dieselbe Formel verwendet	1b – es werden falsche Reluktanzen zusammengefasst	1c – es fehlen Reluktanzen	2 – es werden beide Formeln (für Eisen und Luft) richtig herangezogen	
Ersatzschaltbild	0a – falsches Ersatzschaltbild, z. B. Parallelschaltung	2	1	0	0	0	3	6
	0b – Strukturell falsches Ersatzschaltbild	2	1	0	0	0	0	3
	0c – keine Bearbeitung	0	4	0	0	1	0	5
	1b – unvollständiges Bild: Luftreluktanz fehlt gänzlich	0	0	0	0	0	1	1
	2a – Wahl einer passenden Zusammenfassung mit Eisen und Luft getrennt	0	2	1	4	10	53	70
	2b – Gesamtzusammenfassung aller Reluktanzen	2	0	0	0	0	5	7
Gesamt		6	8	1	4	11	62	92

Tabelle 4.7.2: [A1, A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Ersatzschaltbild und dem Formelaufstellen bei der Reluktanz

		Reluktanz-Berechnung					Gesamt
		0a – falsche Bearbeitung	0b – keine Bearbeitung	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	
Reluktanz-Formelaufstellen	0a – falsche Bearbeitung	3	2	0	1	0	6
	0b – keine Bearbeitung	0	8	0	0	0	8
	1a – es wird für Eisen und Luft dieselbe Formel verwendet	1	0	0	0	0	1
	1b – es werden falsche Reluktanzen zusammengefasst	1	0	3	0	0	4
	1c – es fehlen Reluktanzen	5	4	1	0	1	11
	2 – es werden beide Formeln (für Eisen und Luft) richtig herangezogen	5	7	4	8	38	62
Gesamt		15	21	8	9	39	92

Tabelle 4.7.3: [A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der Reluktanz und ihrer Berechnung

		Reluktanz-Skizzierung						Gesamt
		0 – keine Bearbeitung	1a – es wird eine Funktion gezeichnet, die nicht linear ist	1b – die Funktion geht durch den Ursprung, d. h. es wird der Wert RFe nicht beachtet bzw. nicht richtig interpretiert	1c – Gleichzeitig erfüllt: 1a und 1b	2a – es wird eine lineare Funktion gezeichnet, die den Angaben in der Kurzbeschreibung genügt	2b – die lineare Funktion wird im negativen Bereich fortgesetzt, d. h. es wird kein Bezug zur Situation hergestellt	
Reluktanz-Berechnung	0a – falsche Bearbeitung	5	0	2	1	6	1	15
	0b – keine Bearbeitung	14	0	0	2	5	0	21
	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	4	0	1	1	2	0	8
	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	3	0	0	0	6	0	9
	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	12	5	2	0	19	1	39
Gesamt		38	5	5	4	38	2	92

Tabelle 4.7.4: [A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und ihrer Skizzierung

Kreuztabellen zu den Unterkategorien bezogen auf die Tabellen 4.7.2, 4.7.3 sowie 4.7.4:

58 der 92 Studierenden zeichnen ein korrektes Ersatzschaltbild und stellen die Formel für die magnetischen Widerständen korrekt auf. Zehn Studierende geben ein korrektes Ersatzschaltbild an, aber vergessen dennoch bei der Mathematisierung Widerstände. Vier Studierende fassen falsche Widerstände in der Formel für die Widerstandsberechnung zusammen, obwohl sie in der Zeichnung noch korrekt die beiden unterschiedlichen Formen der Widerstände betrachten.

38 der 92 Studierenden erhalten aus einer korrekten Formel ein korrektes Ergebnis für die Reluktanz. Trotz einer korrekten Formel machen vier Studierende Fehler beim Einsetzen der Längen und Flächen und bei acht Studierenden treten Fehler bei den Umformungen auf, d. h. die Formel ist zwar korrekt und die Werte werden korrekt eingesetzt, aber das Ergebnis ist dennoch falsch.

20 der 92 Studierenden zeichnen nach einer korrekten Rechnung eine lineare Funktion, die nicht durch den Ursprung geht. Zwölf Studierende zeichnen die Funktion nicht, wobei nicht ausgeschlossen werden kann, dass sie diesen Aufgabenteil übersehen haben. Sieben Studierende stellen die Funktion falsch dar; fünf zeichnen nichtlineare Funktionen und zwei zeichnen lineare Funktionen durch den Ursprung. Trotz keiner Durchführung der Rechnung zeichnen fünf Studierende eine korrekte lineare Funktion und zwei Studierende, die keine korrekte Rechnung durchgeführt haben, zeichnen eine nicht-lineare Funktion, die durch den Ursprung geht, d. h. sie begehen zwei Fehler.

¹Hier ist aufgeführt, wie viele Studierende nach Bearbeitung dieses Aufgabenteils keine richtigen Anteile in den folgenden Aufgabenteilen hatten.

²Hier werden Kreuztabellen zwischen Unterkategorien innerhalb des Aufgabenteils vorgestellt.

		Maximalwert-Berechnung						Gesamt
		0a – es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	1c – nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt	2 – es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben	
Reluktanz-Berechnung	0a – falsche Bearbeitung	1	5	0	5	1	3	15
	0b – keine Bearbeitung	2	16	0	1	0	2	21
	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	0	3	0	3	0	2	8
	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	1	3	2	2	0	1	9
	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	1	8	7	5	0	18	39
Gesamt		5	35	9	16	1	26	92

Tabelle 4.7.5: [A2,A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und des Maximalwerts der Induktion

		Flussdichte-Berechnung						Gesamt
		0a – es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	1c – nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt	2 – es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben	
Reluktanz-Berechnung	0a – falsche Bearbeitung	3	5	0	4	0	3	15
	0b – keine Bearbeitung	3	14	0	2	0	2	21
	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	2	2	1	2	0	1	8
	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	3	2	0	3	0	1	9
	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	2	3	2	17	1	14	39
Gesamt		13	26	3	28	1	21	92

Tabelle 4.7.6: [A2,A4] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der Flussdichte

Abbruchquoten: Vier Studierende haben nach diesem Aufgabenteil in den Kategorisierungen weder halbrichtige noch richtige Lösungen erhalten. Insgesamt gilt das nach Aufgabenteil A2 für zehn Studierende.

		MagnEnEisen-Berechnung					Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
Reluktanz-Berechnung	0a – falsche Bearbeitung	0	9	0	6	0	15
	0b – keine Bearbeitung	2	15	0	3	1	21
	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	0	4	0	2	2	8
	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	1	6	0	2	0	9
	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	3	13	1	14	8	39
Gesamt		6	47	1	27	11	92

Tabelle 4.7.7: [A2,A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der magnetischen Energie des Eisens

		MagnEnLuft-Berechnung					Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
Reluktanz-Berechnung	0a – falsche Bearbeitung	3	6	0	6	0	15
	0b – keine Bearbeitung	3	12	0	5	1	21
	1a – es werden (teilweise) die Längen und Flächen falscher Teilstücke eingesetzt	0	2	0	4	2	8
	1b – Trotz richtiger Formeln treten Fehler (z. B. durch falsche Eingaben in den Taschenrechner) auf	2	4	0	3	0	9
	2 – es wird die Reluktanz richtig berechnet	4	8	2	17	8	39
Gesamt		12	32	2	35	11	92

Tabelle 4.7.8: [A2,A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der magnetischen Energie in der Luft

Ausblick auf Folgeaufgaben bzgl. der Tabellen 4.7.5, 4.7.2 und 4.7.2: Der errechnete Wert für den magnetischen Gesamtwiderstand muss in mehreren Aufgaben zur Berechnung verwendet werden. Es ergibt sich die Frage, welchen Einfluss richtige Ergebnisse auf die weitere Bearbeitung haben bzw. ob sie folgerichtig weiterrechnen.

Kommentare: Es lässt sich keine Aussage dazu machen, inwiefern tatsächlich das Ersatzschaltbild in A1 zur Mathematisierung in A2 genutzt wird. In den Videostudien hatte sich gezeigt, dass die Aufgabenteile unabhängig voneinander bearbeitet wurden. Zehn Studierende lassen Widerstände aus dem Ersatzschaltbild weg, wobei sie jedoch die Unterschiede zwischen Eisen- und Luftwiderständen beachten. Vier Studierende trennen im Ersatzschaltbild noch korrekt zwischen Eisen- und Luftwiderständen, fassen diese aber in der Rechnung zusammen. Von den 58 Studierenden mit korrektem Übergang zwischen Ersatzschaltbild und Mathematisierung erhalten nur noch 38 Studierende das richtige Ergebnis für den Gesamtwiderstand. Die so erhaltene lineare Funktion zeichnen nur 20 Studierende richtig, wobei unklar ist, ob dieser Aufgabenteil übersehen wurde, wie es in einer der Videostudien vorkam, da immerhin zwölf ihn nicht bearbeiten. Es gibt Studierende, die keine rechnerische Lösung erzielt haben, aber versuchen qualitativ eine Skizze anzufertigen.

[A3] Geben Sie die Induktivität L in Abhängigkeit der Luftspaltbreite d an. Bestimmen Sie den Wert für d , für den die Induktivität maximal wird. Bestimmen Sie den Maximalwert der Induktivität.

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: Durch Kombination mehrerer Formeln müssen die Studierenden eine Formel finden, mit der die Induktivität L in Abhängigkeit von den gegebenen Größen berechnet werden kann. Im zweiten Aufgabenteil muss aus der gefundenen Formel oder über qualitative physikalische Zusammenhänge der Wert bestimmt werden, bei dem die Formel für die Induktivität maximal wird. Im letzten Aufgabenteil muss der Maximalwert bestimmt werden.

Lösungsquoten bezogen auf den Aufgabenteil A3:

- 64 Studierende (69,6%) nutzen die richtige Formel. Zwei Studierende setzen eine Formel ein, mit der zwar die Induktivität berechnet werden kann, die aber in dieser Situation nicht anwendbar ist. Vier Studierende verwenden eine vollkommen falsche Formel und 22 Studierende geben keine Formel zur Lösung an.
- 56 Studierende (60,9%) geben als Wert $d = 0$ an, wobei 15 Studierende (16,3%) eine Begründung angeben. Acht Studierende (8,7%) begründen mathematisch, während sieben Studierende (7,6%) physikalisch begründen. Die Angabe von $d = 0$ mit einer falschen Begründung, sowohl mathematisch als auch physikalisch, tritt nicht auf. 28 Studierende (30,4%) bearbeiten die Aufgabe nicht. Drei Studierende erhalten andere Werte für d und 5 versuchen über Ableitungen zu einem Ergebnis für d zu kommen.
- 26 Studierende (28,3%) geben das korrekte Ergebnis für den Maximalwert an. Bei neun Studierenden (9,8%) ist die Zehnerpotenz nicht korrekt, aber der Zahlenwert und die Einheit stimmen. Bei 16 Studierenden (17,4%) stimmt ausschließlich die Einheit und bei

		Maximum-bei- $d=0$						Gesamt
		0a – andere Werte für d erhalten	0b – nichtzielführender Ansatz über Ableitung	0c – keine Bearbeitung	2a – $d=0$ wird erkannt und mathematisch richtig begründet	2b – $d=0$ wird erkannt und physikalisch richtig begründet	2c – $d=0$ wird erkannt und nicht begründet	
Induktivitätsformel	0a – Wahl einer Formel, mit der man in keinem Kontext eine Induktivität berechnen kann	0	0	1	1	0	2	4
	0b – keine Bearbeitung	0	1	20	0	1	0	22
	1a – Wahl einer anderen passenden Induktivitätsformel, für die Größen fehlen und nicht zur Lösung führt	1	0	1	0	0	0	2
	2 – Nutzen einer richtigen Formel, die nur von bekannten Größen abhängt	2	4	6	7	6	39	64
Gesamt		3	5	28	8	7	41	92

Tabelle 4.7.9: [A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Induktivitätsformel und dem Erkennen, dass das Maximum bei $d = 0$ vorliegt

		Maximalwert-Berechnung						Gesamt
		0a – es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	1c – nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt	2 – es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben	
Maximum-bei- $d=0$	0a – andere Werte für d erhalten	2	1	0	0	0	0	3
	0b – nichtzielführender Ansatz über Ableitung	1	2	0	2	0	0	5
	0c – keine Bearbeitung	0	26	0	2	0	0	28
	2a – $d=0$ wird erkannt und mathematisch richtig begründet	1	0	1	1	1	4	8
	2b – $d=0$ wird erkannt und physikalisch richtig begründet	0	2	0	1	0	4	7
	2c – $d=0$ wird erkannt und nicht begründet	1	4	8	10	0	18	41
Gesamt		5	35	9	16	1	26	92

Tabelle 4.7.10: [A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Erkennen, dass das Maximum bei $d = 0$ vorliegt, und der Berechnung des Maximalwerts

einem Studierenden stimmt ausschließlich der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz. Fünf Studierende (5,4%) erhalten ein falsches Ergebnis, bei dem Zahlenwert noch Einheit stimmt. 35 Studierende (38%) haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.

Kreuztabellen zu den Unterkategorien bezogen auf die Tabellen 4.7.9 und 4.7.10:

52 Studierende geben eine richtige Formel für die Induktivität an und geben an, dass die Induktivität bei Einsetzen von $d = 0$ maximal wird. 13 dieser 52 Studierenden, die die richtige Formel angegeben haben, geben noch eine Begründung für $d = 0$ an, wobei sieben mathematisch und sechs physikalisch begründen. Ein Student begründet den Wert $d = 0$ physikalisch, ohne eine Formel für die Induktivität angegeben zu haben. Ein anderer Student begründet den Wert mathematisch an einer falschen Formel.

26 Studierende, die das Maximum bei $d = 0$ erkannt haben, erhalten das korrekte Ergebnis beim Einsetzen. Unter denen, die $d = 0$ haben, geben neun ausschließlich einen korrekten Zahlenwert (modulo Zehnerpotenz) an und zwölf ausschließlich eine korrekte Einheit. Unter denen, die $d \neq 0$ haben, gibt niemand ein folgerichtiges Ergebnis an, allerdings erhalten vier Studierende die richtige Einheit.

Abbruchquoten: Fünf Studierende haben nach diesem Aufgabenteil weder halbrichtige noch richtige Kategorisierungen bekommen. Insgesamt gilt das nach A3 für 15 Studierende.

Ausblick auf Folgeaufgaben: entfällt, da die Ergebnisse aus diesem Aufgabenteil in keinem weiteren verwendet werden.

Kommentare: Nur ein Viertel der Studierenden mit richtiger Formel begründet den Wert, bei dem das Maximum vorliegt, wobei eine fehlende Begründung auch nicht zu Punktabzügen in der Korrektur führte. Bei den Begründungen treten mathematische und physikalische Begründungen gleichhäufig auf, wobei einmal sogar qualitativ physikalisch argumentiert wird. In diesem Aufgabenteil zeigt sich zum ersten Mal, dass viele Studierende mit halbrichtigen Ergebnissen nur die Einheit richtig angeben, wobei die Ursache einerseits im Einheitenmanagement liegen kann, aber andererseits auch pures Faktenwissen sein kann. Ein Fehler in einer falschen Zehnerpotenz, d. h. das Ergebnis wäre bei Multiplikation mit 10^n , wobei $n \in \mathbb{Z}$, richtig, tritt hier bei acht Leuten auf.

[A4] Berechnen Sie die magnetische Flussdichte b_L im Luftspalt.

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: Die Studierenden müssen durch Gleichungsmanagement aus zwei Formeln für den magnetischen Fluss Φ eine Formel zur Berechnung von b_L herleiten. Mit Hilfe dieser Formel müssen sie anschließend mit Hilfe von Umformtechniken der Größenalgebra die magnetische Flussdichte b_L bestimmen.

Lösungsquoten bezogen auf den Aufgabenteil A4:

- 54 Studierende (58,7%) verwenden richtige Formeln, wobei 49 Studierende (53,3%) verdeutlichen, wie sie die Formel erhalten. Fünf Studierende geben die Formel ohne weitere Argumentationen an. Bei einem Studierenden treten Fehler im Gleichungsmanagement auf. 18 Studierende (19,6%) verwenden eine falsche Formel und 19 Studierende (20,7%) bearbeiten den Aufgabenteil nicht.
- 21 Studierende (22,8%) geben das korrekte Ergebnis an. Bei drei Studierenden (3,3%) stimmen der Zahlenwert und die Einheit modulo Zehnerpotenz, bei 28 Studierenden (30,4%) ist nur die Einheit korrekt und bei einem Studierenden ist nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz richtig. 13 Studierende (14,1%) erhalten ein falsches Ergebnis, d.

		Flussdichte-Berechnung						Gesamt
		0a – es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	1c – nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt	2 – es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben	
Flussdichte-Formelaufstellen	0a – es werden falsche Formeln herangezogen	4	5	0	8	0	1	18
	0b – keine Bearbeitung	0	19	0	0	0	0	19
	1 – es treten Fehler im Gleichungsmanagement auf, d. h. bei der Kombination der Formeln treten Fehler auf	0	0	0	1	0	0	1
	2a – Richtige Formeln werden herangezogen und passend kombiniert bzw. die Kombination wird angedeutet	9	1	2	18	1	18	49
	2b – Richtige Formel zur Berechnung wird ohne Argumentation angegeben	0	1	1	1	0	2	5
Gesamt		13	26	3	28	1	21	92

Tabelle 4.7.11: [A4] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die Flussdichte und ihrer Berechnung

h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmen. 26 Studierende (28,3%) bearbeiten diesen Aufgabenteil nicht.

Kreuztabellen zu den Unterkategorien bezogen auf 4.7.11:

20 Studierenden haben mit der richtigen Formel das richtige Ergebnis erzielt. Bei 19 Studierenden war ausschließlich die Einheit korrekt. Neun Studierende haben trotz richtiger Formel ein Ergebnis erzielt, bei dem weder Zahlenwert noch Einheit richtig war.

Abbruchquoten: Fünf Studierende haben nach diesem Aufgabenteil in den Kategorisierungen keine richtigen oder halbrichtigen Lösungen bekommen. Insgesamt haben 20 Studierende nach A4 keine halbrichtigen oder richtigen Kategorien bekommen.

Ausblick auf Folgeaufgaben bezogen auf die Tabelle 4.7.12: Durch folgerichtige Lösungen kann man keine Rückschlüsse ziehen.

Kommentare: 20 Studierende lösen diesen Aufgabenteil vollkommen richtig. 19 Studierende geben nur die richtige Einheit an, was analog zu oben auch reines Faktenwissen sein kann. Der richtige Zahlenwert modulo Zehnerpotenz wird nur von drei Studierenden erhalten. Hier könnte eine Strategie vorliegen, über das Angeben der Einheit noch Punkte zu erhalten.

		Masse-Berechnung				Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
Flussdichte-Berechnung	0a – es wird ein falsches Ergebnis erhalten, d. h. weder Zahlenwert noch Einheit stimmt	1	8	4	0	13
	0b – keine Bearbeitung	0	24	1	1	26
	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1	1	0	1	3
	1b – nur die Einheit ist korrekt	2	14	11	1	28
	1c – nur der Zahlenwert modulo Zehnerpotenz und Toleranz stimmt	0	1	0	0	1
	2 – es wird das korrekte Ergebnis (also Zahlenwert und Einheit) angegeben	1	6	3	11	21
Gesamt		5	54	19	14	92

Tabelle 4.7.12: [A4,A6] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Flussdichte und dem Berechnen der Masse

[A5] Geben Sie die magnetische Energie im Luftspalt W_L und im Eisen W_{Fe} an.

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: Die Studierenden müssen eine geeignete Formel aus der Vorlesung zur Berechnung der magnetischen Energien auswählen. Dann müssen sie Größen einsetzen und mit Hilfe von Umformtechniken der Größenalgebra zusammenfassen.

Lösungsquoten bezogen auf den Aufgabenteil A5:

- 34 Studierende (37%) geben eine richtige Formel für die magnetische Energie im Eisen an, die nur bekannte Größen enthält. Sechs Studierende (6,5%) haben halbrichtige Lösungen, wobei fünf eine Formel angeben, die wegen fehlender Größen nicht anwendbar ist, und ein Studierender verschiedene Widerstände gegeneinander kürzt. Sieben Studierende geben eine falsche Formel an und 45 Studierende (48,9%) bearbeiten diesen Aufgabenteil nicht.
- 42 Studierende (45,7%) geben eine richtige Formel für die magnetische Energie in der Luft an. Es verwenden zehn Studierende (10,9%) eine Formel, die zwar richtig ist, aber wegen fehlender Größen nicht anwendbar. 13 Studierende (14,1%) verwenden eine falsche Formel und 27 Studierende (29,3%) bearbeiten diesen Aufgabenteil nicht.
- Elf Studierende (12%) geben das korrekte Ergebnis für die magnetische Energie im Eisen an. Bei einem Studierenden sind Zahlenwert und Einheit korrekt modulo Zehnerpotenz. Bei 27 Studierenden (29,3%) ist nur die Einheit korrekt. Sechs Studierende (6,5%) haben ein falsches Ergebnis und 47 Studierende (51,1%) bearbeiten diesen Aufgabenteil nicht.
- Elf Studierende (12%) geben das korrekte Ergebnis für die magnetische Energie in der Luft an. Bei zwei Studierenden sind Zahlenwert und Einheit korrekt modulo Zehnerpotenz, während bei 35 Studierenden (38%) nur die richtige Einheit haben. Bei zwölf Studierenden (13%) liegt ein falsches Ergebnis vor und 32 Studierende (34,8%) bearbeiten den Aufgabenteil nicht.

Kreuztabellen zu den Unterkategorien bezogen auf die Tabellen 4.7.13 bis 4.7.16:

Elf Studierende berechnen mit der richtigen Formel das korrekte Ergebnis für die magnetische Energie im Eisen. 16 Studierenden geben unter Verwendung einer richtigen Formel nur die Einheit richtig an. Bei elf Studierenden ist trotz Mängeln im Formelaufstellen die Einheit korrekt angegeben.

Elf Studierende berechnen mit der korrekten Formel die magnetische Energie in der Luft richtig. Bei 35 Studierenden ist nur die Einheit korrekt, wobei 20 dieser Studierenden die richtige und zehn eine falsche Formel verwenden.

		MagnEnEisen-Berechnung					Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
MagnEnEisen-Formel	0a – falsche Formel	2	0	0	5	0	7
	0b – keine Bearbeitung	1	43	0	1	0	45
	1a – Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung	1	0	0	4	0	5
	1b – es wird statt RFe hier wieder Rges verwendet	0	0	0	1	0	1
	2 – Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet.	2	4	1	16	11	34
Gesamt		6	47	1	27	11	92

Tabelle 4.7.13: [A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie im Eisen und ihrer Berechnung

		MagnEnLuft-Berechnung					Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
MagnEnLuft-Formel	0a – falsche Formel	2	1	0	10	0	13
	0b – keine Bearbeitung	0	27	0	0	0	27
	1a – Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung	5	0	0	5	0	10
	2 – Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet.	5	4	2	20	11	42
Gesamt		12	32	2	35	11	92

Tabelle 4.7.14: [A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie in der Luft und ihrer Berechnung

		MagnEnLuft-Formel				Gesamt
		0a – falsche Formel	0b – keine Bearbeitung	1a – Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung	2 – Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet.	
MagnEnEisen-Formel	0a – falsche Formel	6	0	0	1	7
	0b – keine Bearbeitung	6	27	5	7	45
	1a – Formel ist richtig, aber hier wegen fehlender Größen nicht anwendbar und führt nicht zur Lösung	0	0	5	0	5
	1b – es wird statt RFe hier wieder Rges verwendet	1	0	0	0	1
	2 – Die richtige Formel, die nur bekannte Größen enthält, wird verwendet.	0	0	0	34	34
Gesamt		13	27	10	42	92

Tabelle 4.7.15: [A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die magnetische Energie im Eisen und dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie in der Luft

		MagnEnLuft-Berechnung					Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
MagnEnEisen-Berechnung	0a – falsches Ergebnis	6	0	0	0	0	6
	0b – keine Bearbeitung	5	31	0	11	0	47
	1a – Zahlenwert und Einheit sind korrekt modulo Zehnerpotenz und Toleranz	0	0	1	0	0	1
	1b – nur die Einheit ist korrekt	1	1	1	24	0	27
	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	0	0	0	0	11	11
Gesamt		12	32	2	35	11	92

Tabelle 4.7.16: [A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der magnetischen Energie im Eisen und der Berechnung der magnetischen Energie in der Luft

		Masse-Berechnung				Gesamt
		0a – falsches Ergebnis	0b – keine Bearbeitung	1b – nur die Einheit ist korrekt	2 – es wird das korrekte Ergebnis angegeben	
Masse-Formel	0a – falsches Ergebnis	0	4	2	0	6
	0b – keine Bearbeitung	0	44	0	0	44
	1a – Relevante Formeln werden herangezogen, aber falsch kombiniert	1	0	0	0	1
	1b – Falsche Formel für magnetische Kraft (richtig: $F = A \cdot b^2 / \mu$)	0	1	3	0	4
	2a – Richtige Formeln werden herangezogen und passend kombiniert bzw. die Kombination wird angedeutet	4	5	14	14	37
Gesamt		5	54	19	14	92

Tabelle 4.7.17: [A6] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die Masse und ihrer Berechnung

34 Studierende geben beide Formeln richtig an. Die beiden Formeln sind strukturell ähnlich aber nicht identisch. Acht Studierende geben die richtige Formel für die magnetische Energie in der Luft an, während ihre Formel für die magnetische Energie im Eisen falsch ist. Andererseits gibt es keinen Studierenden, der die Formel für die magnetische Energie im Eisen richtig hat, aber die Formel für die magnetische Energie in der Luft falsch angibt.

Abbruchquoten: 24 Studierende haben im letzten Aufgabenteil keine halbrichtige oder richtige Kategorisierung bekommen, nachdem sie in A5 noch mindestens eine halbrichtige Kategorisierung bekamen. Insgesamt sind 44 Studierende im Laufe der Aufgabe ausgestiegen.

Ausblick auf Folgeaufgaben: entfällt, da die Ergebnisse nicht in dem folgenden Aufgabenteil benötigt werden.

Kommentare: Die beiden Aufgabenteile sind eng verwandt. Es treten wieder viele Fehler beim Einsetzen der Zahlen auf, so dass häufig nur die Einheit richtig ist. Es fällt auf, dass die Formel für die magnetische Energie in der Luft trotz sehr ähnlicher Form bekannter zu sein scheint als die Formel für die magnetische Energie im Eisen.

[A6] Welche Masse m kann die Anordnung tragen?

Kurzbeschreibung der Kompetenzen: Die Studierenden müssen mittels Gleichungsmanagement - analog zur Technischen Mechanik - ein Kräftegleichgewicht zwischen der Erdanziehungskraft und der magnetischen Kraft aufstellen. Den so erhaltenen Wert müssen sie mit Umformungstechniken der Größenalgebra zusammenfassen.

Lösungsquoten bezogen auf den Aufgabenteil A6:

- 37 Studierende (40,2%) verwenden eine korrekte Formel und deuten an, wie sie diese aus den beiden hinzuzuziehenden Formeln kombinieren. Ein Studierender macht einen Fehler im Gleichungsmanagement, auch wenn er die richtigen Formeln verwendet, und vier Studierende (4,3%) verwenden eine falsche Formel für die magnetische Kraft. Sechs Studierende (6,5%) erhalten eine falsche Formel und 44 Studierende (47,8%) bearbeiten die Aufgabe nicht.
- 14 Studierende (15,2%) geben das korrekte Ergebnis an. Bei 19 Studierenden (20,7%) ist nur die Einheit korrekt. Fünf Studierende (5,4%) erhalten ein falsches Ergebnis und 54 Studierende (58,7%) geben kein Ergebnis für die Masse an.

Kreuztabellen zu den Unterkategorien bezogen auf Tabelle 4.7.17: 14 Studierende berechnen mit einer korrekten Formel das Ergebnis korrekt. Es treten hier keine folgerichtigen Lösungen auf, d. h. bei Mängeln bei der Herleitung der Formel werden auch keine folgerichtigen Ergebnisse erzielt. 14 Studierende erhalten trotz einer richtigen Formel nur eine korrekte Einheit. Fünf Studierende geben trotz Mängeln bei der Bestimmung der Formel die richtige Einheit an.

Abbruchquoten: 48 Studierende haben noch den letzten Aufgabenteil so bearbeitet, dass eine halbrichtige oder richtige Kategorisierung vorgenommen werden konnte.

Ausblick auf Folgeaufgaben: entfällt, da es der letzte Aufgabenteil ist.

Kommentare: Es gibt hier mehrere Studierende, die Aufgabenteile ausgelassen haben, aber diesen Aufgabenteil wieder bearbeitet haben. Wieder geben mehr Studierende ausschließlich die Einheit des Ergebnisses an als ein korrektes Endergebnis.

4.8 Beantwortung der dritten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die dritte Forschungsfrage,

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

für Aufgabe A beantwortet. Dieses ist in zwei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

3.1 Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?

A1 Bei den Bearbeitungen der Studierenden zeigt sich, dass ihnen der Begriff „Vereinfachung“ unklar war. Das in der Klausurlösung des Instituts beschriebene Trennen von Eisen- und Luftwiderständen ist an dieser Stelle weder für die Berechnung noch nach Definition eines Ersatzschaltbilds notwendig. Sieben Studierende haben alle Widerstände zusammengefasst, was auch der Aufgabenstellung entspricht.

A2 Es lässt sich keine Aussage dazu machen, inwiefern tatsächlich das Ersatzschaltbild in A1 zur Mathematisierung in A2 genutzt wird. Zehn Studierende lassen Widerstände aus dem Ersatzschaltbild weg, wobei sie jedoch die Unterschiede zwischen Eisen- und Luftwiderständen beachten. Vier Studierende trennen im Ersatzschaltbild noch korrekt zwischen Eisen- und Luftwiderständen, fassen diese aber in der Rechnung zusammen. Von den 58 Studierenden mit korrektem Übergang zwischen Ersatzschaltbild und Mathematisierung erhalten nur 38 Studierende das richtige Ergebnis für den Gesamtwiderstand. Die so erhaltene lineare Funktion zeichnen nur 20 Studierende richtig und zwölf haben die Gesamtreluktanz nicht skizziert. Es gibt 20 Studierende, die keine rechnerische Lösung erzielt haben, aber versuchen eine Skizze anfertigen.

A3 Nur ein Viertel der Studierenden mit richtiger Formel begründet den Wert $d = 0$, bei dem das Maximum vorliegt, wobei eine fehlende Begründung auch nicht zu Punktabzügen in der Korrektur führte. Bei den Begründungen treten mathematische und physikalische Begründungen gleichhäufig auf, wobei einmal sogar ohne Verwendung des Bruches physikalisch argumentiert wird. In diesem Aufgabenteil zeigt sich zum ersten Mal, dass viele Studierende mit halbrichtigen Ergebnissen nur die Einheit richtig angeben, wobei die Ursache einerseits im Einheitenmanagement liegen kann, aber andererseits auch pures Faktenwissen sein kann. Ein Fehler in einer falschen Zehnerpotenz, d. h. das Ergebnis wäre bei Multiplikation mit 10^n , wobei $n \in \mathbb{Z}$ gilt, richtig. Dieses tritt bei acht Studierenden auf.

A4 20 Studierende lösen diesen Aufgabenteil vollkommen richtig. 19 Studierende geben nur die richtige Einheit an, was analog zu oben reines Faktenwissen sein kann. Der richtige Zahlenwert modulo Zehnerpotenz wird nur von drei Studierenden angegeben. Hier könnte eine Strategie vorliegen, über das Angeben der Einheit noch Teilpunkte zu erhalten.

A5 Die beiden Formeln für die gesuchten Größen, magnetische Energie in der Luft und magnetische Energie im Eisen, sind eng verwandt. Es treten wieder viele Fehler beim Einsetzen der Zahlen auf, so dass häufig nur die Einheit richtig ist. Es fällt auf, dass die Formel für die magnetische Energie in der Luft trotz sehr ähnlicher Form bekannter zu sein scheint als die Formel für die magnetische Energie im Eisen.

A6 Es gibt hier mehrere Studierende, die Aufgabenteile ausgelassen haben, aber diesen Aufgabenteil wieder bearbeitet haben. Insgesamt beantworten allerdings nur 14 von 92 Studierenden diese Aufgabe richtig. Wiederum geben mehr Studierende ausschließlich die Einheit des Ergebnisses an anstatt ein korrektes Endergebnis. Es zeigt sich bei einigen Studierenden, dass sie ausschließlich die korrekte Formel mit der richtigen Einheit des Ergebnisses angeben.

3.2 Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

In A1 bestätigt sich durch die Klausuren, dass den Studierenden unklar ist, wie eine geeignete Vereinfachung des Ersatzschaltbilds aussieht. Dabei gehen sie nach unterschiedlichen Kriterien vor. Das Nichtdurchführen der Zusammenfassung, wie es ein weiteres Studierendenpaar gemacht hat, zeigt sich bei sieben Studierenden in der Klausur. Das Übersehen von Widerständen trat in den Videostudien gar nicht und in der Klausur nur bei einem Studierenden auf.

Im Aufgabenteil A2 zeigt sich in beiden Formen der qualitativen Studien, dass die meisten Studierenden keine Verbindung zwischen den Aufgabenteilen A1 und A2 ziehen, d. h. das in A1 erstellte Ersatzschaltbild nicht zur in A2 benötigten Mathematisierung nutzen. Eine Aufteilung

in Luft- und Eisenwiderstände haben sämtliche Studierenden in Videostudien und Klausuren vorgenommen, aber während in den Klausuren vier Studierende in der Bearbeitung von A2 beide Formen von Reluktanzen zusammenfassen, wurde die Trennung in den Videostudien weiterhin durchgehalten. Der korrekte Übergang zwischen Ersatzschaltbild und Rechenansatz wird von 58 Studierenden (von insgesamt 92) in den Klausuren richtig durchgeführt und von allen vier Studierendenteams in den Videostudien. Während in den Videostudien alle Studierendenteams das richtige Ergebnis für die Reluktanz erhalten, erzielten dieses trotz richtigem Ansatz in der Klausur nur 38 der 58 Studierenden, welche einen korrekten Übergang durchgeführt haben. Eine korrekte Skizze der Gesamtreluktanz haben 20 Studierende in der Klausur und zwei der vier Studierendenteams, wobei dieser Teil von zwölf Studierenden nicht bearbeitet wurde. Hierbei ist unklar, ob dieser – wie bei einem Studierendenteam - übersehen wurde.

In der Klausur haben ca. ein Viertel der Studierenden den Wert $d = 0$ begründet, wobei gleichviele Studierende über Mathematik (Analyse des Bruches) und über Physik (größte Induktivität ohne Luftspalt) begründet haben, wobei auch keine Begründung in der Klausur verlangt war. In den Videostudien haben alle Studierenden den Wert begründet, wobei ihnen die Erwartung an die Begründung unklar war. Ansonsten zeigt sich in den Klausurbearbeitungen, dass viele Studierende nur die Einheit richtig haben. Ein Fehler in der Größenordnung, bei der sich das in der Klausur erhaltene Ergebnis von dem richtigen Ergebnis um eine Zehnerpotenz unterschieden hat, trat bei acht Studierenden auf.

Der Fehler in A4, dass die falsche Reluktanz verwendet wurde, konnte in den Klausuren nicht nachgewiesen werden. 20 Studierende haben den Aufgabenteil richtig bearbeitet, während ihn – nach Korrektur – alle Studierendenteams richtig hatten. Teilrichtige Lösungen traten in der Klausur mit richtiger Einheit gab es bei 19 Studierenden und mit richtigem Zahlenwert modulo Zehnerpotenz bei drei Studierenden. Dadurch könnte sich bei den Studierenden eine Taktik zeigen, dass sie zum Sammeln von Teilpunkten nur die Einheit angeben, da diese unabhängig von den Rechnungen immer identisch ist.

Wie in den Videostudien zeigt sich, dass den Studierenden die Formel für die magnetische Energie in der Luft geläufiger als die im Eisen ist. Dieses kann darauf zurückzuführen sein, dass in der einen Formel neben den physikalisch relevanten Größen auch noch ein Faktor $\frac{1}{2}$ beachtet werden muss. Ähnliches zeigte sich nicht in den Klausurbearbeitungen, in denen häufig nur die allgemeine Formel für die magnetische Energie angegeben war. Analog zu A4 haben viele Studierende in den Klausuren ausschließlich die Einheit richtig.

Während in den Videostudien sämtliche Studierende zu Ergebnissen gekommen sind, wobei teilweise Abweichungen um den Faktor 2 auftraten, haben nur 14 Studierende in den Klausuren diesen Aufgabenteil richtig bearbeitet. Auch hier haben viele Studierende nur die richtige Formel und die richtige Einheit, hier Kilogramm, angegeben.

Kapitel 5

Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Schwingkreise“

In diesem Kapitel werden die Ansätze, deren Methodologie in Kapitel 3 erläutert und die exemplarisch in Kapitel 4 an einer Aufgabe durchgeführt wurden, auf eine Aufgabe zum Thema „Schwingkreise und Ausgleichsvorgänge“, der sogenannten Aufgabe B, angewendet. Bei dieser Aufgabe werden bezogen auf die Mathematik hauptsächlich Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen verwendet. Dieses Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 die Aufgabenstellung vorgestellt, wie sie den Studierenden in einer Klausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ vorlag. Dabei wird zusätzlich auch die Kurzlösung zitiert, welche den Korrektoren der Klausur vorlag. Diese Korrektoren sind Experten in der Elektrotechnik, d. h. der Dozent der Vorlesung der Veranstaltung sowie Wissenschaftliche Mitarbeiter aus der Elektrotechnik.

In Abschnitt 5.2 werden die theoretischen Hintergründe zu der Aufgabe vorgestellt. Dazu zählen einerseits die elektrotechnischen Grundlagen der Aufgabe, welche in dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, d. h. Böcker (2012), dargestellt. Andererseits werden auch die für die Bearbeitung der Aufgabe benötigten mathematischen Kenntnisse näher erläutert. Darüberhinaus gibt es noch eine Vertiefung, bei der in diesem Fall die feldtheoretischen Grundlagen dargestellt werden, welche zum vollständigen Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Situation benötigt werden, allerdings über den Kenntnisstand eines Zweitsemester-Studierenden hinausgehen.

Der folgende Abschnitt, also Abschnitt 5.3, präsentiert eine normative Aufgabenanalyse zu der vorliegenden Aufgabe. Hierbei wird das Konzept der Studi-Expert-Lösung (SEL) eingesetzt, welche im vorherigen Kapitel ab Seite 75 näher vorgestellt wurde. Diese SEL enthält neben einer ausführlichen Musterlösung auch die Anmerkungen des Experten aus dem Experteninterview sowie Bezüge zu den in Kapitel 2 präsentierten theoretischen Grundlagen wie dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) oder dem mathematischen Problemlösen nach Polya. In einem Unterabschnitt wird die Abhängigkeitsstruktur der Aufgabe vorgestellt, d. h. es wird vorgestellt, inwiefern Angaben aus der Aufgabenstellung, in vorherigen Aufgabenteile berechnete Größen sowie Naturkonstanten beim Lösen der Aufgabenteile eingesetzt werden.

Der Abschnitt 5.4 stellt dann die Antworten auf die drei Unterfragen der Forschungsfrage 1

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

vor:

- Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In den Abschnitten 5.5 bis 5.8 werden Ergebnisse aus den Analysen der Studierendenbearbeitungen vorgestellt. Diese werden jeweils mit Methoden analysiert, welche in Kapitel 3 ausführlicher vorgestellt wurden: Im Abschnitt 5.5 werden die Bearbeitungen aller drei Paare bei einem bestimmten Teil der Aufgabe vorgestellt und anschließend in Zwischenfazit-Zusammenfassungen für die spätere Beantwortung der Forschungsfrage 2 (siehe unten) erstellt. Die methodologischen Grundlagen und die verwendeten Kategorien werden in Kapitel 3 ab Seite 102 dargestellt. Mit Hilfe dieser Daten werden im Abschnitt 5.6 Antworten auf die Unterfragen der zweiten Forschungsfrage

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

vorgestellt. Dabei werden im einzelnen folgende Aspekte über die folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

- Welche Fehler und Problemstellen treten auf? (ab Seite 327)
- Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4. (ab Seite 329)
- Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben? (ab Seite 332)

Im darauffolgenden Abschnitt 5.7 werden die Klausurbearbeitungen von ca. 90 Studierenden zu der vorliegenden Aufgabe, welche mit Hilfe eines auf Basis der SEL entwickelten Kategorienschemas neu korrigiert wurden, hinsichtlich verschiedener Punkte analysiert. Dabei werden Lösungshäufigkeiten für einzelne Aufgabenabschnitte vorgestellt und auf diese Schwierigkeiten ermittelt. Mit Hilfe dieser Daten wird ab Seite 346 die dritte Forschungsfrage

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

im Abschnitt 5.8 mit ihren Unterfragen

- Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?
- Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

beantwortet.

Die Ergebnisse zu den einzelnen Forschungsfragen werden bezogen auf alle vier verwendeten Klausuraufgaben im Kapitel 8 zusammengefasst und gegenübergestellt.

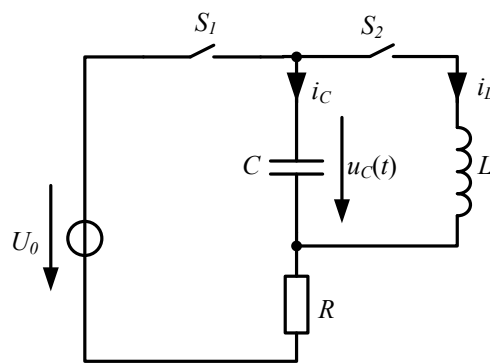
5.1 Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts

In diesem Abschnitt wird zunächst die Aufgabe selbst vorgestellt, wie sie in den Studierenden in der Klausur und später in den Studien mit den Studierendenpaaren vorlag. Zusätzlich wird jeweils zu den einzelnen Aufgabenstellungen die Lösung für die Korrektoren der Klausur, welche von dem Institut erstellt wurde, zitiert. Da sich diese an Experten in der Elektrotechnik richtet, ist diese an vielen Stellen sehr kurz gehalten und es gibt keine weiteren Anmerkungen beispielsweise zu den Hintergründen der Lösung. Aus diesem Grund war sie unzureichend für die weiteren Analysen und wurde im Rahmen der Studi-Expert-Lösung erweitert, um eine Grundlage für die Analysen der Bearbeitungsprozesse und -produkte zu bilden.

5.1.1 Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren

Aufgabe B: Ausgleichsvorgang/ Schwingkreis

Gegeben sei folgendes Netzwerk mit dem Widerstand R , der Spule L , dem Kondensator C und der idealen Spannungsquelle U_0 .



Die Schalter S_1 und S_2 sind für $t \leq 0$ s geöffnet und die Spule sowie der Kondensator sind vollständig entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibt weiterhin geöffnet.

5.1.1 (B1) GEBEN SIE DIE WERTE DER GRÖSSEN $u_C(t = 0^-)$, $i_L(t = 0^-)$ UND $i_C(t = 0^-)$ AN UND BEGRÜNDEN SIE IHRE ANTWORT. (1,5 PUNKTE)

Lösung

- $u_C(t = 0^-) = 0$, da laut Aufgabenstellung vollständig entladen
 $i_L(t = 0^-) = 0$, da Kondensator und Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen sind
 $i_C(t = 0^-) = 0$, da Kondensator und Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen sind

5.1.2 (B2) GEBEN SIE DIE WERTE DER GRÖSSEN $u_C(t = 0^+)$, $i_L(t = 0^+)$ UND $i_C(t = 0^+)$ AN UND BEGRÜNDEN SIE IHRE ANTWORT. (1,5 PUNKTE)

Lösung

$u_C(t = 0^+) = 0$, da sich die Spannung am Kondensator nicht sprungartig ändern kann
 $i_L(t = 0^+) = 0$, da sich der Strom durch eine Drossel nicht sprungartig ändern kann
 $i_C(t = 0^+) = \frac{U_0}{R}$, da die Gesamtspannung U_0 vollständig an R anliegt (wegen $u_C(t = 0^+) = 0$) und $i_L(t = 0^+) = 0$ gilt.

5.1.3 (B3) LEITEN SIE DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR $u_C(t)$ FÜR $t \geq 0$ HER. (3 PUNKTE)

Lösung

Bauteilgleichungen:

$$u_R(t) = i_C(t)R$$

$$C\dot{u}_C(t) = i_C(t)$$

Maschengleichung:

$$U_0 = u_R(t) + u_C(t)$$

$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_0 - u_C(t)}{R}$$

$$C\dot{u}_C(t) = \frac{U_0 - u_C(t)}{R}$$

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = U_0$$

5.1.4 (B4) LÖSEN SIE DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG. WIE GROSS IST DIE MASSGEBLICHE ZEITKONSTANTE DER SCHALTUNG? (5 PUNKTE)

Lösung

Lösung des homogenen Teils mit $u_{ch}(t) = U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$RC \left(-\frac{1}{\tau} \right) U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$RC \left(-\frac{1}{\tau} \right) = -1$$

$$\tau = RC$$

Lösung des inhomogenen Teils:

$$u_{ci}(t) = U_0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

Daraus folgt für die allgemeine Lösung:

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{ci}(t)$$

$$u_c(t) = U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0$$

Einsetzen der Anfangswerte:

$$u_c(t=0) = 0$$

$$u_c(t) = U_{ch0}e^{-0} + U_0 = 0$$

$$U_{ch0} = -U_0$$

Daraus folgt für die Lösung:

$$u_c(t) = -U_0e^{-\frac{t}{RC}} + U_0 = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird der Schalter S_1 wieder geöffnet. Der Ausgleichsvorgang sei zu diesem Zeitpunkt vollständig abgeschlossen. Außerdem wird der Schalter S_2 geschlossen.

5.1.5 (B5) GEBEN SIE DIE WERTE DER GRÖSSEN $u_C(t = t_1^-)$ UND $i_C(t = t_1^-)$ SOWIE VON $u_C(t = t_1^+)$ UND $i_C(t = t_1^+)$ AN UND BEGRÜNDEN SIE IHRE ANTWORT. (2 PUNKTE)

Lösung

$u_C(t = t_1^-) = U_0,$	da der Kondensator durch den Ausgleichsvorgang vollständig geladen wurde
$i_C(t = t_1^-) = 0,$	da der Kondensator vollgeladen ist und somit nicht weiter geladen werden kann
$u_C(t = t_1^+) = U_0,$	da sich die Spannung an einem Kondensator nicht sprungartig ändern kann
$i_C(t = t_1^+) = -i_L = 0,$	da sich der Spulenstrom nicht sprungartig ändern kann

5.1.6 (B6) LEITEN SIE DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR $u_C(t)$ FÜR $t \geq t_1$ HER. (3 PUNKTE)

Lösung

Bauteilgleichung:

$$C \cdot \dot{u}_C(t) = i_C$$

$$L \dot{i}_L(t) = u_L$$

Maschen- und Knotengleichung:

$$u_C = u_L$$

$$-i_C = i_L$$

$$C \ddot{u}_C = \dot{i}_C = -\dot{i}_L = -\frac{u_L}{L}$$

$$L_C \ddot{u}(t) + u(t) = 0$$

5.1.7 (B7) ERMITTELN SIE DIE SCHWINGUNGSGLEICHUNG FÜR DIE SPANNUNG $u_C(t)$, INDEM SIE DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG LÖSEN UND DIE ANFANGSWERTE EINSETZEN. (6 PUNKTE)
HINWEIS: DIE ZEITACHSE DARF SO VERSCHOBEN WERDEN, DASS SICH $t_1 = 0$ ERGIBT.

Lösung

Lösung durch Exponentialansatz:

$$\begin{aligned} u(t) &= \underline{U} e^{-st} \\ CLs^2 \underline{U} e^{-st} + \underline{U} e^{-st} &= 0 \\ CLs^2 + 1 &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j \frac{1}{\sqrt{CL}} \\ \frac{1}{\sqrt{LC}} &= \omega_0 \\ \sqrt{\frac{L}{C}} &= Z_0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$u(t) = \underline{U}_1 e^{j\omega_0 t} + \underline{U}_2 e^{-j\omega_0 t}$$

Nur reelle Lösungen sind sinnvoll, daher $\underline{U}_1^* = \underline{U}_2$

$$u(t) = U_C \cos(\omega_0 t) + U_S \sin(\omega_0 t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned} u_C(t = t_1 = 0) &= U_0 \\ u(t = 0) &= U_C \cos(\omega_0 0) = U_C = U_{C0} \\ \dot{u}(t = 0) &=? \\ \dot{u}(t = 0) &= U_C \omega_0 (-\sin(\omega_0 t)) + U_S \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{u}(t = 0) &= 0 = U_S \omega_0 \\ U_S &= 0 \\ u(t) &= U_{C0} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

5.1.2 Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe B

In diesem Abschnitt werden die für Aufgabe B benötigten Formeln vorgestellt. In den Formeln wird die Notation aus Böcker (2012), dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, verwendet.

(Elektrischer) Widerstand R :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\text{Spannung in Volt V}}{\text{Stromstärke in Ampere A}} \quad (5.1)$$

Damit ergibt sich für die Einheit des (elektrischen) Widerstands:

$$R = \frac{\text{Spannung in Volt V}}{\text{Stromstärke in Ampere A}} := (\text{elektrischer}) \text{ Widerstand in Ohm } \Omega$$

Ladung Q :

$$Q = I \cdot t = (\text{Stromstärke in Ampere A}) \cdot (\text{Zeit in Sekunden s}) \quad (5.2)$$

Damit ergibt sich als Einheit:

$$(\text{Stromstärke in Ampere A}) \cdot (\text{Zeit in Sekunden s}) =: \text{Ladung in Coulomb C}$$

Kapazität C :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\text{Ladung in Coulomb C}}{\text{Spannung in Volt V}} \quad (5.3)$$

Damit ergibt sich die Einheit:

$$\frac{\text{Ladung in Coulomb C}}{\text{Spannung in Volt V}} =: \text{Kapazität in Farad F}$$

Für die Bauteilgleichungen ist folgende Vorbemerkung wichtig:

Bei der Integration über die Zeit kommt die Zeit in Sekunden s als zusätzlicher Faktor in den Ausdruck. Durch das Umkehren beim Differenzieren muss dort entsprechend durch die Zeit in Sekunden s dividiert werden.

Bauteilgleichungen des Kondensators bzw. Kapazität C :

$$C \dot{u}_C(t) = i_C(t) \Leftrightarrow C = \frac{i_C(t)}{\dot{u}_C(t)} \Leftrightarrow u_C(t) = \int \frac{i_C}{C} dt \quad (5.4)$$

Unter Verwendung der Vorbemerkung von oben bestätigt sich die Einheit für Farad F.
Bauteilgleichung der Spule bzw. Induktivität L :

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}_L(t) \Leftrightarrow L = \frac{u_L(t)}{\dot{i}_L(t)} \Leftrightarrow i_L(t) = \int \frac{u_L}{L} dt \quad (5.5)$$

Damit ergibt sich folgende Einheit:

$$\frac{(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunden s})}{\text{Stromstärke in Ampere A}} := \text{Induktivität in Henry H}$$

5.1.3 Abhängigkeitsstruktur

In dieser Aufgabe werden Ergebnisse aus vorherigen Aufgabenteilen zur Berechnung von Lösungen in späteren Aufgabenteilen verwendet. Die Tabelle stellt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Aufgabenteilen für Aufgabe B dar. Dabei wird die folgende Notation verwendet:

- $X^{[B]}$ bedeutet: die Größe steht in der Aufgabenstellung zu Aufgabe B
- X^{B^Y} bedeutet: die Größe X wurde in Aufgabenteil BY berechnet
- X (ohne Index) bedeutet: die Größe ist eine Naturkonstante

	Zur Rechnung benötigte Größen, Skizzen, Formeln (In dieser Aufgabe wurden keine Zahlenwerte vorgegeben)	Berechnete bzw. abgelesene Größen
B1	Skizze des Schwingkreises ^[B]	• Kondensatorspannung $u_C(t = 0^-)^{B1}$ • Spulenstrom $i_L(t = 0^-)^{B1}$ • Kondensatorstrom $i_C(t = 0^-)^{B1}$
B2	• Kondensatorspannung $u_C(t = 0^-)^{B1}$ • Spulenstrom $i_L(t = 0^-)^{B1}$ • (Der Kondensatorstrom wird nicht benötigt, da er unabhängig von dem Wert vorher ist)	• Kondensatorspannung $u_C(t = 0^+)^{B2}$ • Spulenstrom $i_L(t = 0^+)^{B2}$ • Kondensatorstrom $i_C(t = 0^+)^{B2}$
B3	• Kondensatorspannung $u_C(t)^{B2}$ • Kondensatorstrom $i_L(t)^{B2}$ • Widerstand $R^{[B]}$ • Kapazität $C^{[B]}$ • Ideale Spannungsquelle $U_0^{[B]}$	inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ^{B3}
B4	• inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung^{B3} • Kondensatorspannung $u_C(t)^{B2}$	Lösung der Differentialgleichung ^{B4}

B5	• Skizze des Schwingkreises^[B] • Interpretation des abgeschlossenen Ausgleichsvorgangs^[B]	• Kondensatorsspannung $u_C(t = t_1^-)$^{B5} • Kondensatorsstrom $i_C(t = t_1^-)$^{B5} • Kondensatorsspannung $u_C(t = t_1^+)$^{B5} • Kondensatorsstrom $i_C(t = t_1^+)$^{B5}
B6	• Kondensatorsspannung $u_C(t_1)$^{B5} • Kondensatorstrom $i_L(t_1)$^{B5} • Induktivität L^[B] • Kapazität C^[B] • Ideale Spannungsquelle U_0^[B]	homogene, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ^{B6}
B7	• homogene, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ^{B6} • Kondensatorsspannung $u_C(t_1)$^{B5}	Lösung der Differentialgleichung ^{B7}

5.2 Hintergründe zu der Aufgabe

Dieses Kapitel stellt die theoretischen Grundlagen vor, welche zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden. Im ersten Unterabschnitt geht es um die elektrotechnischen Grundlagen, welche Studierende in der Elektrotechnik nach Ende ihres zweiten Fachsemesters aus Böcker (2012), für die Bearbeitung der Aufgabe kennen können. Im zweiten Abschnitt geht es entsprechend um die mathematischen Grundlagen, welche Elektrotechnik-Studierende nach ihrem ersten Studienjahr aus den Vorlesungen kennen sollten.

5.2.1 Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe B

In dieser Aufgabe werden elektrische Netzwerke mit diskreten Elementen betrachtet, welche aus Zweipolen bestehen, d. h. aus Elementen mit zwei elektrischen Anschlüsse, Polen oder Klemmen. Solche Elemente sind Widerstände, Kondensatoren, Spulen oder auch Batterien. Hierbei werden Ströme, Spannungen und Leistungen als zeitlich veränderliche Größen aufgefasst. Bei einem Zweipol gilt der folgende Zusammenhang, wobei p für die zeitveränderliche Leistung, u für die zeitveränderliche Spannung und i für den zeitveränderlichen Strom steht, vgl. Böcker (2012, S. 3):

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (5.6)$$

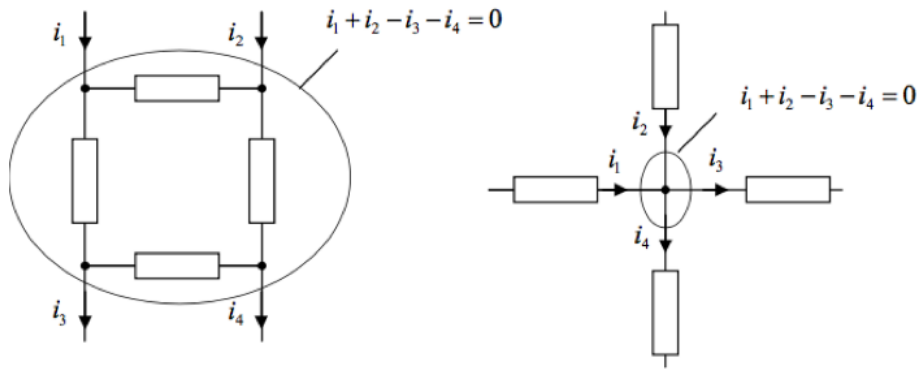


Abbildung 5.2.1: Anwendungen der Knotenregel, siehe (Böcker, 2012, S. 4)

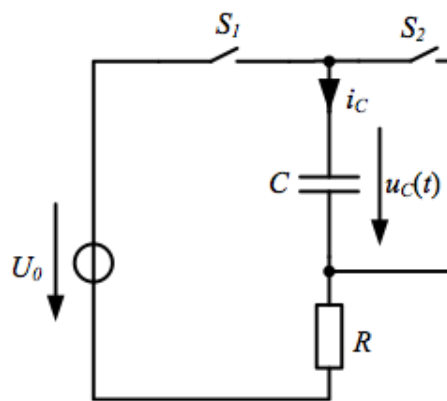


Abbildung 5.2.2: Masche nach Schließen der Schalter

In einem elektrischen Netzwerk gelten die Kirchhoff'schen Gesetze:

Erstes Kirchhoff'sches Gesetz: Die (entsprechend des Durchlaufs vorzeichenbehaftete) Summe aller Ströme über eine beliebig gewählte geschlossene Hülle ist stets Null, siehe Böcker (2012, S. 3). Es gilt also:

$$\sum_k i_k(t) = 0$$

Ein Spezialfall hiervon ist die Knotenregel: Ein Knoten ist ein Verzweigungspunkt in einem Schaltkreis, welcher durch einen dicken Punkt dargestellt wird. (Dieses entspricht der graphentheoretischen Bedeutung eines Knoten.) Es gilt: Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist stets Null. In der Abbildung 5.2.1 sind Beispiele aus dem Böcker (2012) gezeigt.

Zweites Kirchhoff'sches Gesetz: („Maschenregel“) Eine Masche ist ein geschlossener Teil eines Schaltkreises.

Bezogen auf die vorliegende Aufgabe erhalten wir die in Abbildung 5.2.2 dargestellte Masche beim Schließen der Schalter.

Bei einem geschlossenen Schalter S_1 stellt das Rechteck mit einem Kondensator C , einem Ohm'schen Widerstand R und einer idealen Spannungsquelle U_0 eine Masche dar. Ideal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Spannung nicht vom elektrischen Strom abhängt, welcher durch die Quelle U_0 fließt. In einer Masche ist die Summe aller Teilspannungen gleich

0, vgl. Böcker (2012, S. 4). Da beim Durchlaufen die Pfeile der beiden Spannungen U_0 und $u_C(t)$ in unterschiedliche Richtungen zeigen, müssen diese beiden Spannungen beim Aufstellen der Maschengleichung mit unterschiedlichen Vorzeichen versehen werden, wobei es hier unerheblich ist, bei welcher Spannung das Vorzeichen positiv gewählt wird, da die Summe der Spannungen nach dem Maschensatz 0 ist. $u_R(t)$ zeigt hier in dieselbe Richtung wie $u_C(t)$ und fällt am Widerstand R ab. (Graphentheoretisch ist eine Masche ein bewerteter, gerichteter Kreis in einem Graphen.)

Herleitung der Kirchhoff'schen Gesetze aus den allgemeinen Feldgleichungen

Erstes Kirchhoff'sches Gesetz (nach Böcker (2012, S. 6)) Es gilt die Bilanzgleichung der elektrischen Ladung (auch Kontinuitätsgesetz). Die vorkommenden Größen sind: $\vec{j}$ Vektorfeld der Stromdichte, ρ Ladungsdichte, i Gesamtstrom durch die Hülle des Volumens V (wird positiv gezählt), q gesamte elektrische Ladung im Volumen V

$$\underbrace{\oint \partial V \vec{j} \cdot d\vec{A}}_{-i} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho dV}_{\dot{q}} \quad (5.7)$$

Daraus folgt das erste Kirchhoff'sche Gesetz, wenn sich die Ladung q im Volumen V nicht ändert, also $\dot{q} = 0$ gilt:

$$i = \sum_k i_k(t) = 0.$$

Dieses ist zum Beispiel beim Kondensator erfüllt, da sich zwar die Ladungen auf den Elektroden ändern, jedoch die Gesamtladung erhalten bleibt.

Zweites Kirchhoff'sches Gesetz (nach Böcker (2012, S. 7)) Wir verwenden das Faraday'sche Induktionsgesetz, wobei $\vec{E}$ das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke, $\vec{B}$ das Vektorfeld der magnetischen Flussdichte und A die betrachtete, eingeschlossene Fläche ist, deren Rand mit ∂A bezeichnet ist:

$$- \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (5.8)$$

Der gesamte magnetische Fluss durch die Fläche A ergibt sich als $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Nur wenn der magnetische Fluss φ durch eine Masche eines Netzwerks Null ist, gilt das zweite Kirchhoff'sche Gesetz: $u = \sum_k u_k(t) = 0$.

Bauteilgleichungen - Ohm'scher Widerstand

Das Ohm'sche Gesetz gilt auch für zeitlich veränderliche Vorgänge. Wir erhalten also

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t), \quad (5.9)$$

d. h. am Widerstand ist der Strom proportional zur Spannung, vgl. Böcker (2012, S. 12). Der Proportionalitätsfaktor R heißt Ohm'scher Widerstand. Das Ohm'sche Gesetz ist hierbei eine Idealisierung, da reale Widerstände ein induktives bzw. kapazitives Verhalten zeigen.

Bei einer Reihenschaltung zweier Widerstände gilt:

$$u_1(t) = R_1 i(t), u_2(t) = R_2 i(t) \Rightarrow u(t) = u_1(t) + u_2(t) = (R_1 + R_2) i(t) = R i(t) \quad (5.10)$$

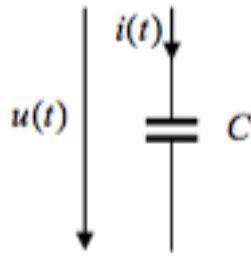


Abbildung 5.2.3: Schaltsymbol des Kondensators

Als Ersatzwiderstand R ergibt sich $R = R_1 + R_2$.

Bei einer Parallelschaltung von zwei Widerständen gilt dagegen:

$$i_1(t) = \frac{u(t)}{R_1}, i_2(t) = \frac{u(t)}{R_2} \Rightarrow i_1(t) + i_2(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u(t) \quad (5.11)$$

Durch Umstellen zu $u(t) = Ri(t)$ erhält man den Ersatzwiderstand

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.12)$$

Bauteilgleichungen - Kondensator

Der Kondensator speichert eine elektrische Ladung q , wobei sich auf den beiden Elektroden jeweils Ladungen mit gegensätzlichem Vorzeichen befinden. Da auf diese Weise die Summe der Ladungen Null ist, ist das erste Kirchhoff'sche Gesetz hier anwendbar. Kondensatoren werden mit dem Schaltsymbol in Abbildung 5.2.3 dargestellt:

Unter Hinzunehmen der Bilanzgleichung der elektrischen Ladung muss gelten:

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV, \quad (5.13)$$

wobei i den Strom, q die Ladung und ρ die Ladungsdichte bezeichnet. Daraus folgt für eine konstante Ladung, d. h. $\dot{q}(t) = 0$, der Kirchhoff'sche Knotensatz (siehe unten). Außerdem ist

$$q(t) = Cu(t), \quad (5.14)$$

wobei man die Proportionalitätskonstante C als Kapazität (Einheit Farad $1F = \frac{As}{V}$) bezeichnet. Durch Differenzieren von (5.14) und Einsetzen in (5.13) erhält man die Bauteilgleichung:

$$i_C(t) = C\dot{u}_C(t). \quad (5.15)$$

Der Strom ist also abhängig von der Änderung der Spannung, vgl. Böcker (2012, S. 13). Als Merksatz haben die Studierenden in den Übungen folgende Aussage erhalten: „Die Spannung durch einen Kondensator kann sich nicht sprunghaft ändern.“

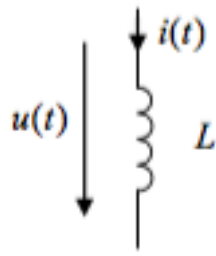


Abbildung 5.2.4: Schaltsymbol der Spule

Bauteilgleichungen - Spule

Eine Spule ist ein aufgewickelter Draht, wobei die Windungen des Drahtes voneinander getrennt sind, und wird über das Schaltsymbol in 5.2.4 dargestellt. Wenn eine Spule durch einen sich zeitlich ändernden Strom durchflossen wird, so entsteht um den elektrischen Leiter ein sich zeitlich ändernder magnetischer Fluss. Eine Änderung des Stroms erzeugt an den Enden des Leiters eine Selbstinduktionsspannung. Daher ergibt sich der magnetische Verkettungsfluss ψ als Integration über die vielschichtige Fläche, die durch die Drähte der Spule entsteht. Wir nehmen an, dass jede Windung vom gleichen magnetischen Fluss durchsetzt wird, daher soll gelten, wobei N die Windungszahl der Spule ist:

$$\psi = N\varphi \quad (5.16)$$

Nach Induktionsgesetz gilt

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t), \quad (5.17)$$

wobei ψ den magnetischen Verkettungsfluss bezeichnet. Der magnetische Verkettungsfluss kann bei Bauelementen mit linearen Materialien als proportional zum Strom angenommen werden, d. h. es gilt

$$\psi(t) = Li(t), \quad (5.18)$$

wobei man die Proportionalitätskonstante L als Induktivität (Einheit Henry $H = \frac{Vs}{A}$) bezeichnet. Durch Differenzieren von (5.18) und Einsetzen in (5.17) erhält man die Bauteilgleichung für die Spule nach Böcker (2012, S. 17):

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}. \quad (5.19)$$

Damit ist die Spannung abhängig von der Änderung des Stroms. Als Merksatz haben die Studierenden in den Übungen folgende Aussage erhalten: „Der Strom durch eine Spule kann sich nicht sprunghaft ändern.“

Bemerkung: Da die Bauteilgleichungen von Kondensator und Spule Ableitungen der Größen $u_C(t)$ bzw. $i_L(t)$ enthalten, ergeben sich die Differentialgleichungen in der Lösung der Aufgabe. Für den Ohm'schen Widerstand erhalten wir eine Proportionalität zwischen der Spannung u und dem Strom i .

Zeitveränderliches Verhalten: Das Verhalten des Schwingkreises wird charakterisiert über die Werte der beiden Ströme i_C und i_L sowie der beiden Spannungen u_C und u_L sowie der idealen Spannungsquelle U_0 . Die Werte von i_C, i_L, u_C, u_L ändern sich mit der Zeit und eine

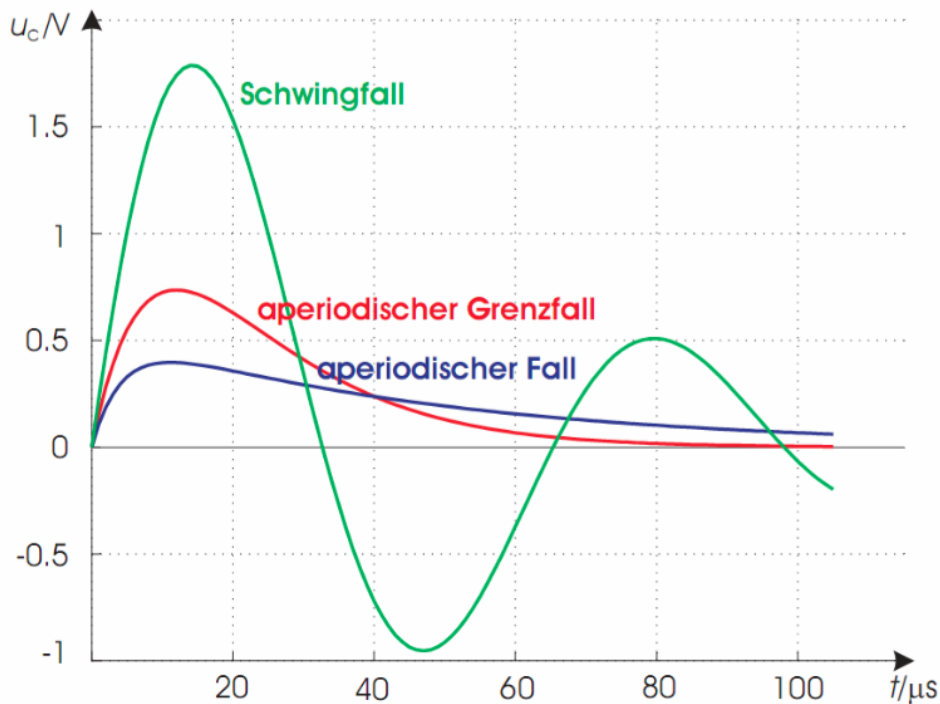


Abbildung 5.2.5: Verläufe der Lösungen in den drei Fällen

ideale Spannungsquelle gibt unabhängig von der Last immer die gleiche Spannung ab.

Merkblatt zur Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung aus der Elektrotechnik

Das Fachgebiet für Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik (LEA) der Universität Paderborn, welches für die Veranstaltung „GET-B“ zuständig ist, aus welchem die zugrundeliegende Klausur stammt, hat ein Merkblatt für die Lösung von homogenen, linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herausgegeben. Dieses wurde mitsamt den Übungsmaterialien hochgeladen und wird hier wörtlich zwischen den beiden Linien zitiert. Das Unterstreichen einer Variable bedeutet, dass diese komplexwertig ist, und j wird hier als komplexe Einheit verwendet (statt dem in der Mathematik üblichen i):

Standardform: $\ddot{x} + 2d\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$

mit d Dämpfungsgrad

ω_0 Kennkreisfrequenz

Exponentialansatz:

$u(t) = \underline{U} \cdot e^{st}$ führt auf die charakteristische Gleichung: $s^2 + 2d\omega_0s + \omega_0^2 = 0$

Lösung über pq-Formel führt auf drei Fälle:

1. $s_{1/2} = -\omega_0 d \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_d$ für $d < 1$
 → konjugiert komplexes Lösungspaar → Schwingfall
 → Lösungsfunktion: $x(t) = [k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)] e^{-\frac{t}{\tau}}$
2. $s_{1/2} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau_{1/2}}$ mit $\tau_1 = \tau_2$ für $d = 1$
 → zwei gleiche reelle Lösungen → aperiodischer Grenzfall
 → Lösungsfunktion: $x(t) = k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
 (In diesem speziellen Fall ergibt sich die Lösungsfunktion aus einem modifizierten Ansatz, welcher als Variation der Konstanten bezeichnet wird: $u(t) = \underline{U}(t) \cdot e^{st}$)
3. $s_{1/2} = -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_{1/2}}$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$ für $d > 1$
 → zwei ungleiche reelle Lösungen → aperiodischer Fall
 → Lösungsfunktion: $x(t) = k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

Allgemein: $\tau = -\frac{1}{\operatorname{Re}(s)}$ $\omega_d = |\operatorname{Im}(s)|$ (mit ω_d : Eigenkreisfrequenz)

Auf der Rückseite des Merkblatt sind die Zeitverläufe für die drei Fälle dargestellt. Dieses ist als Abbildung 5.2.1 übernommen.

Mit Hilfe des Ansatzes $u(t) = U \cdot e^{st}$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$s^2 U e^{st} + 2d\omega_0 s U e^{st} + \omega_0^2 U e^{st} = 0 \Rightarrow s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0. \quad (5.20)$$

Darüber ergeben sich die drei angegebenen Fälle, wobei die Fallunterscheidung hier über den Wert des Dämpfungsgrades abläuft. Da ω_0^2 bekannt ist und über einen Koeffizientenvergleich mit dem Koeffizienten des linearen Terms in der charakteristischen Gleichung d eindeutig bestimmt werden kann, kann hier die Lösung ohne tatsächliches Anwenden von Regeln zum Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt werden.

5.2.2 Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe B

Das benötigte Wissen aus der Mathematik kann aufgeteilt werden in Wissen im Zusammenhang mit dem Aufstellen der benötigten Gleichungen (A) und Wissen im Zusammenhang mit der Lösung von homogenen und inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung (B).

[A] Graphentheorie : Bei der Aufstellung der Maschen- und Knotengleichungen entsprechend der Kirchhoff'schen Gesetze werden Methoden aus der Graphentheorie eingesetzt. In der Graphentheorie ist ein Graph die Vereinigung einer Menge von Knoten mit einer Menge von Kanten. Eine Kante wiederum ist eine Menge von genau zwei Knoten. Wenn die Kanten durch ein Paar von Knoten gegeben sind, spricht man von gerichteten Graphen. Hierbei unterscheidet man zwischen der Kante (a, b) , der Kante von Knoten a zu Knoten b , und der Kante (b, a) , der Kante von Knoten b zu Knoten a . Ein Weg in einem gerichteten Graphen ist eine Folge von Knotenpaaren und man spricht von einem geschlossenen Weg, wenn der Start- und der Endknoten identisch sind. Kanten können mit Gewichten, d. h. reellen Zahlen, versehen werden.

In diesem Fall spricht man von gewichteten Graphen.

Der elektrotechnische Begriff eines Knotens entspricht dem mathematischen Begriff, wobei dabei die Gewichte der berührenden Kanten betrachtet werden. Eine Masche ist graphentheoretisch betrachtet ein geschlossener Weg, bei dem die durchlaufenen Kanten gewichtet sind.

Bauteilgleichung: Die Bauteilgleichungen für Widerstand, Spule und Kondensator können physikalisch interpretiert werden. Die drei Gleichungen geben jeweils Proportionalitäten zwischen verschiedenen Größen im Schwingkreis an. Bei dem Widerstand gilt:

$$u = R \cdot i,$$

d. h. die Spannung U ist proportional zu dem Strom I . Bei einem Kondensator gilt die Bauteilgleichung:

$$C \cdot \frac{du}{dt} = i,$$

d. h. die Ableitung der Spannung U ist proportional zum Strom I . Über die Stetigkeit der Funktionen erhält man, dass sich die Spannung am Kondensator nicht sprunghaft ändern kann. Bei einer Spule bzw. Drossel gilt die Bauteilgleichung:

$$L \cdot \frac{di}{dt} = u,$$

d. h. die Ableitung des Stroms I ist proportional zur Spannung U . Über die Stetigkeit der Funktionen erhält man, dass sich der Strom an der Spule nicht sprunghaft ändern kann.

[B] Gewöhnliche Differentialgleichungen :

- Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung in der eine Funktion und ihre Ableitungen in Relation gesetzt werden, o. B. d. A. sei der Name dieser Funktion y und sie soll von x abhängig sein. Häufig schreibt man im Kontext von Differentialgleichungen statt einem $y(x)$ nur ein y . Sie heißt gewöhnlich, wenn nur Ableitungen in einer Veränderlichen auftreten. Bei Ableitungen in mehreren Veränderlichen spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Die Ordnung der Differentialgleichung ist die höchste auftretende Ableitung. Eine Differentialgleichung heißt homogen, wenn nur Terme enthalten sind, wenn sie keine Terme enthält, die ausschließlich eine Funktion von x enthalten, aber nicht y oder eine Ableitung von y . Sonst heißt die Differentialgleichung inhomogen. Eine Differentialgleichung wird homogenisiert, in dem man alle Terme weglässt, in denen kein y oder eine Ableitung von y enthalten ist.
- Zur Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung kann die Kombination der Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ (TdV) und „Variation der Konstanten“ (VdK) eingesetzt werden.

Im folgenden wird ein Beispiel für die Bestimmung der Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung angegeben. Dieses soll erläutern, wie die Ingenieur-Studierenden die genannten Verfahren vermittelt wurden. Dabei wird mit den Prinzipien aus der „Mathematik für Ingenieure“ argumentiert. Dieses soll auch helfen, die Argumentationen der Studierenden in den späteren Studien besser nachvollziehen zu können. Dabei stellt Teil (a) das Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ (TdV) vor, Teil (b) den Umgang mit einem Anfangswert und Teil (c) die „Variation der Konstanten“ (VdK):

5.2.1 GEGEBEN SEI DIE FOLGENDE INHOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG:

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$$

(A) HOMOGENISIEREN SIE DIE GLEICHUNG UND BESTIMMEN SIE EINE ALLGEMEINE LÖSUNG.

(B) BESTIMMEN SIE DIE LÖSUNG DER INHOMOGENEN DGL.

Lösung

(a) Man erhält die homogenisierte DGL, in dem man alle Terme ohne y bzw. y' weglässt bzw. $= 0$ setzt. Dieses ergibt:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

1. Setze $y' = \frac{dy}{dx}$. Dadurch ergibt sich: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$
2. Trenne die Veränderlichen (TdV) ($\cdot dx$, $\cdot \frac{1}{y}$) und füge Integralzeichen hinzu:

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

3. Dieses Ergebnis wird nun nach y aufgelöst:

$$\begin{aligned} \ln(y) + c_1 &= -\ln(x) + c_2 \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + c \\ &\Rightarrow y(x) = e^{-\ln(x)+c} = \frac{1}{x} \cdot e^c = \frac{k}{x}. \end{aligned}$$

(b) Unter Verwendung der Lösung von Teil (a), also $y(x) = \frac{k}{x}$.

1. Variation der Konstanten: Ersetze k durch $k(x)$, also $y(x) = \frac{k(x)}{x}$.
2. Berechne die Ableitung von $y(x)$ (hier Produktregel):

$$y'(x) = k'(x) \cdot \frac{1}{x} - k(x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

3. Setze in die inhomogene DGL ein (dabei MUSS der Summand mit $k(x)$ wegfallen, was als Probe eingesetzt werden kann):

$$\begin{aligned} \sin(x) &= y' + \frac{y}{x} \\ &= k'(x) \cdot \frac{1}{x} - k(x) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{k(x)}{x}}{x} \\ &= k'(x) \cdot \frac{1}{x} - k(x) \cdot \frac{1}{x^2} + k(x) \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= k'(x) \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. Auflösen nach $k'(x)$ und bestimmen von $k(x)$ (hier mit partieller Integration):

$$k'(x) = x \sin(x)$$

$$\begin{aligned}
k(x) &= \int k'(x) \, dx = \int x \cdot \sin(x) \, dx \\
&= -x \cdot \cos(x) - \int 1(-\cos(x)) \, dx \\
&= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + \theta, \theta \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

5. Einsetzen von $k(x)$:

$$y(x) = \frac{k(x)}{x} = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\theta}{x}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann auch Wissen über die Lösung von Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = c \cdot y(x), c \in \mathbb{R},$$

eingesetzt werden und in einem sogenannten Partikuläransatz für $y(x)$ ein $e^{\lambda x}$ eingesetzt werden. So ergibt sich hier beispielsweise $\lambda e^{\lambda x} = c e^{\lambda x}$ und man kann direkt $\lambda = c$ ablesen. Bei einem solchen Ansatz ergibt sich die Lösung als Summe der allgemeinen Lösung der homogenisierten Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, wobei die Lösung mittels VdK bestimmt werden kann.

Aus der „Mathematik für Ingenieure II“ ist das folgende Verfahren für die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bekannt, d. h. zur Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung der Gestalt

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, erhält man wie folgt. Es ist bekannt, dass y die Form $y = e^{\lambda x}$ haben muss, da ansonsten sich keine Null als Summe verschiedener Ableitungen mit Vorfaktoren ergeben kann. Durch Einsetzen (und dementsprechend Differenzieren) und dividieren durch $e^{\lambda x} \neq 0$ erhält man die *charakteristische Gleichung*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

Seien im folgenden λ_1 und λ_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $P(\lambda)$:

1. Fall: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}.$$

3. Fall: Die Nullstellen sind komplex konjugiert, also $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist dann

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Eine Beispielaufgabe, in der wiederum die Argumentation der „Mathematik für Ingenieure“ eingesetzt wird, ist die folgende:

5.2.2 BERECHNEN SIE DIE ALLGEMEINE LÖSUNG DER FOLGENDEN HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN.

$$(A) y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (B) y'' + 4y' + 8y = 0 \quad (C) y'' - 4y' + 4y = 0$$

Lösung

- (a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$ sind 1 und -3 , die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- (b) Hier sind die Nullstellen von $P(\lambda)$ die komplexen Zahlen $-2 + 2i$ und $-2 - 2i$, die Lösung lautet also

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- (c) Hier ist

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Analog zum Vorgehen bei Differentialgleichungen erster Ordnung können auch hier Anfangswerte eingesetzt werden. Da dieses auch in Aufgabenteil B7 notwendig ist, wird es hier auch anhand einer innermathematischen Aufgabe erläutert:

5.2.3 LÖSEN SIE DIE FOLGENDEN ANFANGSWERTPROBLEME.

(A) $y'' - 6y' + 8y = 0$, WOBEI $y(0) = 4$ UND $y'(0) = 14$

(B) $y'' - 14y' + 49y = 0$, WOBEI $y(0) = 1$ UND $y'(0) = 10$

(C) $y'' - 4y' + 9y = 0$, WOBEI $y(0) = 0$ UND $y'(0) = 5$

Lösung

- (a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind 2 und 4, die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Die Anfangswerte liefern die Gleichungen

$$c_1 + c_2 = 4$$

$$2c_1 + 4c_2 = 14$$

mit der Lösung $c_1 = 1$ und $c_2 = 3$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = e^{2x} + 3e^{4x}.$$

(b) $P(\lambda)$ hat die doppelte Nullstelle $c_{1,2} = 7$. Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = e^{7x}(c_1 + c_2x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Die Bedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 10$ liefern $c_1 = 1$ und $7c_1 + c_2 = 10$, also $c_2 = 3$. Damit ist

$$y(x) = e^{7x}(1 + 3x)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

(c) Die Nullstellen der charakteristischen Gleichungen ergeben sich als $c_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}i$. Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x)) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ führt auf $c_1 = 0$, die Bedingung $y'(0) = 5$ liefert $c_2 = \sqrt{5}$. Schließlich ist

$$y(x) = \sqrt{5}e^{2x} \sin(\sqrt{5}x)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Bei inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden sogenannte „Ansätze vom Typ der rechten Seite“ verwendet, bei denen Wissen über die Form der Lösungen derartiger Differentialgleichung in analoger Weise zu dem oben beschriebenen Partikuläransatz eingesetzt wird.

5.3 Die Studi-Expert-Lösung

In diesem Abschnitt wird die normative Lösung der Aufgabe, die sogenannte Studi-Expert-Lösung, sowie eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Teilen der Aufgabe vorgestellt. Diese ist in zwei Spalten unterteilt: In der ersten Spalte gibt es eine ausführliche Lösung der Aufgabe, welche unter Verwendung der Phasen nach Polya (1949) gegliedert ist. In der zweiten Spalte gibt es Anmerkungen zu kognitiven Ressourcen. Im Anschluss an die Bearbeitung des Experten ist jeweils sein Bearbeitungsprozess und seine Aussagen zu Lösungsalternativen, typischen Fehlern von Studierenden im ersten Studienjahr und Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse dargestellt, wobei (mmss) die Zeitpunkte in den Experteninterviews sind. Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösung gibt es ab Seite 75 im vorherigen Kapitel. Eine Einführung in die elektrotechnischen Fachbegriffe gibt es in dem entsprechenden Unterabschnitt des zweiten Abschnitts dieses Kapitels. Die vierstelligen Zahlen in runden Klammern geben in der Form (mmss) den Zeitpunkt im Experteninterview an.

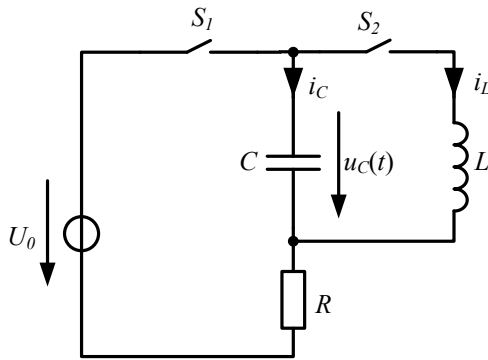


Abbildung 5.3.1: Skizze des Schwingkreises

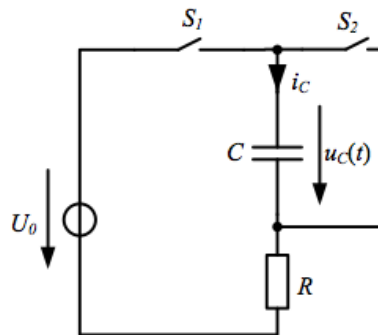


Abbildung 5.3.2: Skizze des linken Teils des Schwingkreises

Gegeben sei das Netzwerk mit dem Widerstand R , der Spule L , dem Kondensator C und der idealen Spannungsquelle U_0 , wie es in Abbildung 5.3.1 dargestellt ist. Die Schalter S_1 und S_2 sind für $t \leq 0$ s geöffnet und die Spule sowie der Kondensator sind vollständig entladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibt weiterhin geöffnet.

Dadurch ergibt sich das Netzwerk, welches in Abbildung 5.3.2 dargestellt ist.

Die vollständige Entladung kann so interpretiert werden, dass es kein Magnetfeld in der Spule und kein elektrisches Feld im Kondensator gibt. Somit hat keines der Bauteile gespeicherte Energie.

Expertenbearbeitung: Der Experte durchdenkt andere Varianten der Aufgaben, bzw. „was passieren würde, wenn es nicht so wäre“. Er beschreibt, dass wenn beide Schalter geschlossen sind, ein idealer Schwingkreis vorläge, der die ganze Zeit schwingt. Da sie jedoch offen vor dem Zeitpunkt 0 sind und beide Energiespeicher (Anmerkung: d. h. Kondensator und Spule) gibt es keine Schwingung beim Schließen von S_1 .

Phase B0: Verstehen der Skizze mit Erläuterung

Ressourcen: konventionalisierte Skizzen zu Netzwerken lesen können; Kenntnis der Fachtermini sowie hier der physikalischen Eigenschaften der Bauteile

[B1] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^-)$, $i_L(t = 0^-)$ und $i_C(t = 0^-)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

Lösung

Gesucht sind in diesem Aufgabenteil die Spannungen und Ströme an der Spule L und dem Kondensator C bei geöffneten Schaltern S_1 und S_2 zum Zeitpunkt $t = 0^-$, also vor dem Schließen des Netzwerks. Hierbei wird eine spezielle Notation in der Elektrotechnik verwendet, bei der x^- den linksseitigen Grenzwert an der Stelle x und entsprechend x^+ den rechtsseitigen Grenzwert bezeichnet. Hier kommt noch hinzu, dass $t = 0^-$ in der Elektrotechnik als übliche Schreibweise dafür verwendet wird, dass noch keine physikalischen Vorgänge abgelaufen sind, wie sie beispielsweise durch das Schließen eines Schalters ausgelöst werden.

Gegeben ist das Schaltbild aus obiger Abbildung. Die Schalterstellungen zum Zeitpunkt $t = 0^-$ sind ebenso wie die Anfangsbedingungen für Kondensator und Spule angegeben

Abschätzung:

Der Kondensator ist ungeladen und jeweils vom restlichen Netzwerk getrennt, da beide Schalter geöffnet sind. Da kein geschlossenes Netzwerk vorliegt, kann sofort gesagt werden, dass alle Spannungen und Ströme gleich Null sind. Es gilt also:

$$u_C(t = 0^-) = 0, \quad i_L(t = 0^-) = i_C(t = 0^-) = 0$$

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts:

$u_C(t = 0^-) = 0$, da laut Aufgabenstellung vollständig entladen
 $i_L(t = 0^-) = 0$, da Kondensator und Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen sind
 $i_C(t = 0^-) = 0$, da Kondensator und Spule laut Aufgabenstellung vollständig entladen sind

Begründungsvariante 1:

Durch die geöffneten Schalter ist die einzige Quelle der Schaltung (U_0) von der restlichen Schaltung getrennt. Zudem ist jeweils eine Klemme von Kondensator und Spule offen. Daher kann durch keines der Bauteile ein Strom fließen, denn es besteht kein geschlossener Stromkreis. Aus diesem Grund gilt

$$i_C(t = 0^-) = 0$$

und

$$i_L(t = 0^-) = 0.$$

Ein Kondensator kann ebenso wie eine Spule einen Energiespeicher darstellen. Im Kondensator ist die Energie in einem elektrischen Feld zwischen den beiden Elektroden gespeichert. Diese beträgt entsprechend der Formel für den Energieerhalt eines Plattenkondensators

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t). \quad (5.21)$$

Der Kondensator ist laut Aufgabenstellung für $t \leq 0$ vollständig entladen; es ist also $E_C = 0$. Damit ist, mit obigem Zusammenhang, ebenso die Spannung

$$u_C(t = 0^-) = 0.$$

Die Bauteilgleichung eines Kondensators lautet

$$i_C(t) = C \dot{u}_C(t).$$

In gleicher Weise kann noch eine (zusätzliche) Begründung für den Spulenstrom vorgenommen werden. In einer Spule wird die Energie in Form eines magnetischen Feldes, das sich um den aufgewickelten, stromdurchflossenen Leiter bildet, gespeichert. Die in der Spule gespeicherte Energie beträgt

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t). \quad (5.22)$$

Da die Spule ebenfalls ungeladen ist für $t \leq 0$, also $E_L(t) = 0$, ist $i_L(t) = 0$ für diesen Zeitraum.

Expertenbearbeitung: Der Experte weist auf den geöffneten Schalter hin und erkennt sofort, dass kein Stromfluss bei der Spule möglich ist. Dabei tritt ein Notationsproblem durch $t = 0^-$ auf, da er sich bei der Bedeutung dieser Notation unsicher ist, diese sich allerdings richtig erschließt. Zur Bestimmung der Spannung am Kondensator berücksichtigt er den Widerstand und dass dieser in Reihe geschaltet ist, wodurch keine sprunghafte Änderung möglich ist. Zur Betrachtung des Stroms im Kondensator schreibt er direkt das Ohm'sche Gesetz auf und ergänzt

„Der mathematische Aufwand ist da eher gering“.

(Im folgenden Teil bemerkt er dann, dass er das Ohm'sche Gesetz an dieser Stelle noch nicht benötigt, da auch der Schalter S_1 noch geöffnet ist.)

Phase B1: Bestimmen der Anfangsbedingungen

Ressourcen:

Schaltbilder (insbesondere Schaltzeichen) lesen können

allgemeine physikalische Kenntnisse über Stromkreise,

elektrotechnische Kenntnisse über Spannungs- bzw. Stromverläufe von Kondensatoren und Spulen

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte nennt keine alternativen Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Der Experte sieht Fehler, welche durch Missverständnisse bei der Notation 0^- und 0^+ entstehen können, und sagt, dass ein unmittelbar vor bzw. nach dem Schließen des Schalters eindeutiger sei. In diesem Zusammenhang spricht er von einer „Fehlinterpretation der Aufgabe“ (4438).

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

[B2] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^+)$, $i_L(t = 0^+)$ und $i_C(t = 0^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

Lösung

Gesucht sind nun dieselben Spannungen und Ströme, jedoch zum Zeitpunkt kurz nach dem Umlegen des Schalters S_1 . Durch das Umlegen des Schalters S_1 ist der linke Teil des Netzwerks geschlossen.

Gegeben sind die Resultate aus dem vorigen Aufgabenteil mitsamt der erhaltenen Ergebnisse (also die Werte vor Umlegen des Schalters), die zur Lösung dieses Aufgabenteils benötigt werden.

Notation: x^+ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert an x bzw. x^- den linksseitigen Grenzwert.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts:

$u_C(t = 0^+) = 0$, da sich die Spannung am Kondensator nicht sprungartig ändern kann
 $i_L(t = 0^+) = 0$, da sich der Strom durch eine Drossel nicht sprungartig ändern kann
 $i_C(t = 0^+) = \frac{U_0}{R}$, da die Gesamtspannung U_0 vollständig an R anliegt (wegen $u_C(t = 0^+) = 0$) und $i_L(t = 0^+) = 0$ gilt.

Begründungsvariante 1: Es ist bekannt, dass sich die Spannung am Kondensator, ebenso wie der Strom an der Spule, nicht sprungartig ändern kann. Damit müssen diese Größen hier weiterhin die Werte aus Aufgabenteil B1 besitzen. Der Kondensatorstrom kann sich - im

Gegensatz zu den beiden anderen Größen $i_L(t)$ und $u_C(t)$ - hingegen sprungartig ändern und ergibt sich über das Ohm'sche Gesetz, da beim Aufladen ein Strom im Netzwerk fließt, da nun der Schalter S_1 geschlossen ist. Dieser fließt solange bis der Kondensator geladen ist und die Ausgangsspannung U_0 angenommen hat.

Begründungsvariante 2: Alternativ kann auch darüber argumentiert werden, dass die Ableitung von $u_C(t) \geq 0$ ist. Dieser Wert kommt in der Bauteilgleichung des Kondensators vor. Im Moment des Schalterschließens ist die Spannung über dem Kondensator noch 0, weil sich noch keine Ladung auf ihm befindet. Danach fließt ein Strom, da der Wert von $u_C(t)$ durch das Einschalten ansteigt. Wenn Strom über den Kondensator fließt, baut sich langsam ein Feld und damit eine Spannung auf. Insgesamt erhält man:

$$u_C(t = 0^+) = 0, \quad i_L(t = 0^+) = 0, \quad i_C(t = 0^+) \neq 0$$

Begründungsvariante 3 (Ausführliche Herleitung der Feldgleichungen):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Dadurch wird ein Stromkreis aus Quelle U_0 , Kondensator C und Ohm'schen Widerstand R geschlossen, während die Spule L , die sich im rechten Teil des Netzwerks befindet, weiterhin von der Schaltung getrennt ist. Folglich ist zu erwarten, dass der entladene Kondensator von der Quelle über den Ohm'schen Widerstand geladen wird.

Die in einem Kondensator (beziehungsweise in einer Spule) gespeicherte Energie ist in Form eines elektrischen beziehungsweise magnetischen Feldes gespeichert. Die gespeicherte Energie kann sich nicht sprungartig ändern, sondern muss durch einen Stromfluss über der Zeit gemäß der allgemeinen Formel für Energieerhaltung

$$E(t) = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t) dt \quad (5.23)$$

auf- oder abgebaut werden. Durch Umstellen der Formeln für den Energieerhalt einer Spule, also (5.22), erhält man

$$i_L(t) = \sqrt{\frac{2E_L(t)}{L}} \quad (5.24)$$

und entsprechend für den Kondensator, also (5.21),

$$u_C(t) = \sqrt{\frac{2E_C(t)}{C}}. \quad (5.25)$$

Gemäß (5.24) und (5.25) sind der Strom an der Spule bzw. die Spannung am Kondensator mit der Energie verknüpft und können sich folglich nicht sprungartig ändern, da die beiden Größen über stetige Funktionen bestimmt werden, denn $E_C(t)$ und $E_L(t)$ sind stetig, L und C sind konstant und auch die Wurzel ist eine stetige Funktion.

Phase B2: Bestimmen der Anfangsbedingungen im Moment nach dem Schalten

Ressourcen:

Schaltbilder lesen können (insbesondere hier das Ignorieren des rechten Teils aufgrund des offenen Schalters)

Elektrotechnisches Wissen: Zusammenhang zwischen Energie und Spannung am Kondensator, Zusammenhang zwischen Energie und Strom an der Spule, insbesondere Fähigkeit zur sprunghaften Änderung der Bauteile

Da eine Klemme der Spule durch den geöffneten Schalter S_2 weiterhin offen ist, ist weiterhin kein Spulenstrom vorhanden und es gilt:

$$i_L(t = 0^+) = 0$$

Für den Kondensator gilt, dass sich die Spannung nicht sprunghaft ändern kann. Zum Zeitpunkt $t = 0^-$ betrug diese gemäß Aufgabenteil B1 noch $u_C(t) = 0$. Da zwischen dem links- und dem rechtsseitigen Grenzwert bei $t = 0$ nur ein infinitesimal kleiner Zeitschritt liegt, wäre nur durch eine Unstetigkeit der Spannung, sprich durch einen Sprung,

$$u_C(t = 0^-) \neq u_C(t = 0^+),$$

möglich. Da dies durch die bisherigen Argumente ausgeschlossen werden kann, gilt

$$u_C(t = 0^+) = 0.$$

Es kann eine Masche durch U_0 , C und R abgelesen werden. Aus der Skizze und dem Maschensatz, nach dem die Summe aller orientierten Teilspannungen in einer Masche bei einem Umlauf 0 ist, folgt die Gleichung:

$$U_0 = u_C(t) + u_R(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (5.26)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0^+$ ist damit

$$U_0 = u_C(t = 0^+) + u_R(t = 0^+) = u_R(t = 0^+).$$

Der Strom durch den Ohm'schen Widerstand ist gleich dem Kondensatorstrom und es gilt daher das Ohm'sche Gesetz. Wir erhalten:

$$i_C(t = 0^+) = i_R(t = 0^+) = \frac{u_R(t = 0^+)}{R} = \frac{U_0}{R}.$$

Validierung: Spulenstrom und Kondensatorsprung sind mit der Begründung über die Feldenergien nicht vorhanden.

Expertenbearbeitung: Zu Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteil B2 geht der Experte wieder auf die Unsicherheit im Bereich der Notation ein und erklärt, dass er 0^- als den Zeitpunkt direkt vor dem Schließen des Schalters S_1 und 0^+ als den Zeitpunkt direkt nach dem Schließen des Schalters interpretiert. Aufgrund der in B1 erwähnten nicht möglichen sprunghaften Änderung der Spannung am Kondensator gibt er direkt

$$u_C(0^+) = 0$$

an. Beim Strom i_L argumentiert er, dass dieser auch weiterhin 0 aufgrund des geöffneten Schalters S_2 ist. Unter Berücksichtigung des Widerstands R gibt er dann zur Berechnung des Kondensatorstroms das Ohm'sche Gesetz an, wobei er dieses bereits in Aufgabenteil B1 näher ausgeführt hat.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte nennt keine alternativen Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Der Experte sieht Fehler, welche durch Missverständnisse bei der Notation 0^- und 0^+ entstehen können, und sagt, dass ein unmittelbar vor bzw. nach dem Schließen des Schalters eindeutiger sei. In diesem Zusammenhang spricht er von einer „Fehlinterpretation der Aufgabe“ (4438).

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

Typische Fehlerquelle: Der Kondensatorstrom wird fälschlicherweise als stetig angenommen. Dieses ist nicht der Fall, da das elektrische Feld durch die Coulombkraft entsteht, welche keine bewegten Ladungen voraussetzt. Es kann damit unabhängig von einem Stromfluss bestehen.

[B3] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq 0$ her. (3 Punkte)

Lösung

Gesucht ist die Differentialgleichung des Systems für $t \geq 0$. Diese Gleichung beschreibt das Verhalten des vorhandenen Systems dynamisch, d. h. unter Berücksichtigung von Veränderungen im System. Wir können damit später die Zustandsgröße $u_C(t)$ bestimmen.

Gegeben sind Schaltbild, Schalterstellungen und die Größen R , C und L . Hiermit lässt sich die Differentialgleichung aufstellen.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts:

Bauteilgleichungen:

$$u_R(t) = i_C(t)R$$

$$C\dot{u}_C(t) = i_C(t)$$

Maschengleichung:

$$U_0 = u_R(t) + u_C(t)$$

$$i_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_0 - u_C(t)}{R}$$

$$C\dot{u}_C(t) = \frac{U_0 - u_C(t)}{R}$$

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = U_0$$

Begründungsvariante 1: Es soll die Differentialgleichung des Systems für $t \geq 0$ hergeleitet werden. Der Kondensator stellt den einzigen Energiespeicher der Schaltung dar, da die Spule durch den geöffneten Schalter S_2 kein Teil des betrachteten Netzwerks bzw. der linken Masche ist. Damit muss die Bauteilgleichung des Kondensators, die $\dot{u}_C(t)$ enthält, sowie die Gleichung für den Ohm'schen Widerstand, also $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$, d. h. ein proportionaler Zusammenhang, betrachtet werden. Da nur ein Energiespeicher vorhanden ist und in den Bauteilgleichungen nur eine Ableitung von $u_C(t)$ vorhanden ist, ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung in $u_C(t)$. Diese ist linear, da nur Konstanten als Koeffizienten auftreten. Die Spannungsquelle U_0 tritt nicht als Faktor bei $u_C(t)$ oder einer Ableitung von $u_C(t)$ auf, muss aber bei der Beschreibung des Netzwerks berücksichtigt werden. Sie wirkt sich daher als inhomogener Teil bzw. Störfunktion in der gewöhnlichen Differentialgleichung aus.

Begründungsvariante 2:

Es wird das Verhalten im Intervall $t \in [0, \infty)$ über die Differentialgleichung beschrieben. Aus den vorherigen Aufgabenteilen ist die Bauteilgleichung des Kondensators

$$i_C(t) = C\dot{u}_C(t) \quad (5.27)$$

sowie die Gleichung für $i_R(t)$ bekannt

$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}. \quad (5.28)$$

Mit dem Knotensatz erhält man

$$i_C(t) = i_R(t) \quad (5.29)$$

und erhält durch Einsetzen von (5.29) in (5.28) eine Gleichung für $i_C(t)$, welche in (5.27) eingesetzt werden kann. So erhält man

$$\frac{u_R(t)}{R} = C\dot{u}_C(t). \quad (5.30)$$

Da die Kondensatorspannung $u_C(t)$ die zu bestimmende Größe der Differentialgleichung ist, ist in dieser Gleichung lediglich $u_R(t)$ noch zu ersetzen:

Da die Spannung der idealen Spannungsquelle U_0 entgegengesetzt zu den beiden Spannungen $u_C(t)$ und $u_R(t)$ gerichtet ist, ergibt sich nach dem Maschensatz

$$U_0 = u_C(t) + u_R(t). \quad (5.31)$$

Wir können (5.31) nach $u_R(t)$ umstellen und in (5.30) einsetzen:

$$\frac{U_0 - u_C(t)}{R} = C\dot{u}_C(t). \quad (5.32)$$

Phase B3.1: Wissen zu Schwingkreisen

Überschlagsrechnung zu:

- Gleichungstyp
- Lösungsverfahren
- Wissen zur Realsituation bzw. realem Verhalten

Phase B3.2: Mathematisierung der Schaltung

Ressourcen:

Kenntnis der Gleichungen der Bauteile (Spule, Kondensator), die ihr Verhalten mit Ableitungen beschreiben (Begründung für die Formeln siehe oben). In diesen treten Spannungen und Ströme sowie deren Ableitungen auf. Kirchhoffscher Knoten- bzw. Maschensatz
Management von Funktionalgleichungen (inkl. Ableitungen), d. h. Gleichungsmanagement zur Bestimmung von $u_C(t)$

Damit ist die Differentialgleichung

$$u_C(t) + RC\dot{u}_C(t) = U_0 \quad (5.33)$$

gefunden.

Validierung: Wie erwartet handelt es sich um eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung, da $u_C(t)$ und $\dot{u}_C(t)$ auftreten. Der homogene Teil der Differentialgleichung

$$u_C(t) + RC\dot{u}_C(t) = 0$$

beschreibt die Eigenbewegung des Systems aus Kondensator und Ohm'schen Widerstand. Durch die Spannungsquelle U_0 wird die Eigenbewegung gestört, so dass sich eine inhomogene Differentialgleichung mit dem sogenannten Störglied U_0 ergibt. Die Eigenbewegung beschreibt, was wäre, wenn es keine Spannung von außen gäbe und so die Spannung eines anfänglich geladenen Kondensators langsam auf 0 abfällt, weil ein Strom fließen und der Kondensator sich über den Widerstand entladen würde. Dieses würde zunächst schnell ablaufen, weil die Spannung $u_R(t)$ hoch ist und dieses aufgrund der Proportionalität in der Bauteilgleichung des Ohm'schen Widerstands dadurch auch für den Strom $i_R(t)$ gelten würde. Im weiteren Verlauf wird die Spannung $u_R(t)$ immer kleiner, wodurch auch die Entladung geringer wird.

Diese Eigenbewegung ist vergleichbar mit einer Feder, die schwingt, nach dem man sie herunterzieht und loslässt. Sie hat auf diese Weise eine gespeicherte Energie und man kann über eine Differentialgleichung ihre Eigenbewegung bis zum Stillstand beschreiben. Durch erneutes Ziehen an der Feder würde hier entsprechend eine Störfunktion hinzukommen.

Expertenbearbeitung: Der Experte sagt, dass er zunächst den Maschensatz nach Kirchhoff verwendet. Er skizziert den linken Teil des Schwingkreises und zeichnet dort die Bauteile Kondensator und Widerstand sowie den Stromfluss und die Quellenspannung ein. Er sagt, dass er die Induktivität (Anmerkung: d. h. die idealisierte Spule) weglassen kann. Dann schreibt er mit dem Maschensatz

$$U_0 = u_C(t) + i_C \cdot R. \quad (5.34)$$

Für $u_C(t)$ gibt er die Formel

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C \, dt \quad (5.35)$$

an. Hiermit ersetzt er das $u_C(t)$ in der durch den Maschensatz erhaltenen Gleichung, also (5.34). Hierbei erwähnt er, dass auch eine

Phase B3.3 Validierung

Ressourcen:

Wissen über das Verhalten der Größe $u_C(t)$ und der daraus resultierende Form der Differentialgleichung Interpretation des homogenen Falls

Auflösung nach den Strömen möglich wäre und setzt dann ein. Dann leitet er „die ganze Gleichung“ nach t ab. Dabei fällt U_0 als Konstante weg und er erhält dadurch aus

- $\frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$ ein $\frac{i_C(t)}{C}$ und aus
- $i_C R$ ein $\frac{di_C}{dt} R$.

Dieses kombiniert er dann zu

$$0 = \frac{i_C}{C} + \frac{di_C}{dt} R \quad (5.36)$$

und erhält so eine Differentialgleichung für den Strom im Kondensator, die er nun in eine Differentialgleichung für die Spannung umformt. Hierzu formt er die Formel (5.35) zu

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (5.37)$$

um und erkennt „das hätte man auch deutlich schneller machen können“ (1059). Durch Einsetzen von (5.37) in Gleichung (5.36) erhält er:

$$0 = \frac{du_C}{dt} + CR \frac{d^2 u_C}{dt^2}. \quad (5.38)$$

Hierzu erläutert er:

„Im Prinzip ist das die Differentialgleichung, wonach gesucht ist. Man muss sie nur noch einmal integrieren und sich die Frage nach der Konstanten stellen.“

(1121)

Er setzt dann Gleichung (5.37) in (5.35) ein und erhält so die Differentialgleichung

$$U_0 = u_C + RC \frac{du_C}{dt}.$$

Er sagt, dass die Differentialgleichung eine Funktion beschreibt, die abgeleitet wieder dieselbe Funktion ergibt. Dieses erfüllt nur die e-Funktion, was „man sich merken kann“ (2753). Er erläutert, dass er zunächst die Werte an den Schaltzeitpunkten bestimmt hat und dann den Verlauf zwischen diesen.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte nennt keine alternativen Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Der Experte mögliche Fehler im Umgang mit derartigen Gleichungen und in der Kombination im Sinne des „Gleichungsmanagements“.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

[B4] Lösen Sie die Differentialgleichung. Wie groß ist die maßgebliche Zeitkonstante der Schaltung? (5 Punkte)

Lösung

Gesucht ist nun die Lösung der Differentialgleichung, also die Funktion $u_C(t)$ zur Berechnung der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit. In diesem Zuge ist ebenso nach der Zeitkonstante der Schaltung gefragt. Diese ist definiert als die Zeit, in der ein exponentiell absinkender Prozess auf das $\frac{1}{e}$ ($\approx 37\%$)-Fache seines Ausgangswertes abgesunken ist. Auf diesem Weg erhält man bei einer Exponentialfunktion die Tangente im Ursprung, also dem Startpunkt. Wenn man mit der Anfangssteigung weitergehen würde, wäre der Wert bei der Zeitkonstante 0.

Gegeben ist die Differentialgleichung sowie die Werte der Größen aus den vorigen Aufgabenteilen. Aus der Differentialgleichung kann die allgemeine Funktion zur Beschreibung der Kondensatorspannung bestimmt werden. Diese wird dann über die Anfangsbedingungen an das hier vorliegende, konkrete System angepasst.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts:

Lösung des homogenen Teils mit $u_{ch}(t) = U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$RC \left(-\frac{1}{\tau} \right) U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$
$$RC \left(-\frac{1}{\tau} \right) = -1$$
$$\tau = RC$$

Lösung des inhomogenen Teils:

$$u_{ci}(t) = U_0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

Daraus folgt für die allgemeine Lösung:

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{ci}(t)$$

$$u_c(t) = U_{ch0}e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0$$

Einsetzen der Anfangswerte:

$$u_c(t=0) = 0$$

$$u_c(t) = U_{ch0}e^{-0} + U_0 = 0$$

$$U_{ch0} = -U_0$$

Daraus folgt für die Lösung:

$$u_c(t) = -U_0e^{-\frac{t}{RC}} + U_0 = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Vorüberlegung Mit den Überlegungen aus B3 ist bekannt, dass eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung vorliegt. Aus der Höheren Mathematik ist bekannt, dass Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten über e-Funktionen gelöst werden können.

Begründungsvariante 1:

Schritt I:

In diesem Aufgabenteil soll die zuvor ermittelte Differentialgleichung

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = U_0$$

gelöst werden. Gesucht ist also die Funktion $u_C(t)$. Als erster Schritt wird die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$ gesucht, d. h. alle Terme ohne $u_C(t)$ bzw. der Ableitungen von $u_C(t)$ werden gleich 0 gesetzt. Hier kann ein Exponentialansatz gewählt werden, d. h. $u_{Ch}(t) = Ae^{\lambda t}$ wird in die homogene Differentialgleichung eingesetzt. Diesen Ansatz kann man erkennen, da hier die Ableitung $\dot{u}_C(t)$ ein Vielfaches der Funktion $u_C(t)$ ist. Diese Eigenschaft haben nur Exponentialfunktionen, für die nun geeignete Konstanten A und λ bestimmt werden müssen:

$$RC \frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t}) + Ae^{\lambda t} = 0$$

$$RC A \lambda e^{\lambda t} + Ae^{\lambda t} = 0$$

$$Ae^{\lambda t}(\lambda RC + 1) = 0$$

Daraus folgt $\lambda RC + 1 = 0$, da $A \neq 0$ (triviale Lösung) und $e^{\lambda t} \neq 0 \quad \forall \lambda, t \in \mathbb{R}$.

Damit ist mit dem Wissen aus den Vorlesungen zur Höheren Mathematik $\lambda = \frac{-1}{RC}$ und somit ist

$$u_{Ch}(t) = Ae^{\frac{-t}{RC}}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Phase B4.1: Finden der allgemeinen Lösung des homogenen Systems

Ressourcen:

Wissen zur Wahl des passenden Verfahrens zur Lösung derartiger Differentialgleichungen, speziell 'Trennung der Veränderlichen'

Mathematischer Kommentar: Dieses Verfahren ist aus Vorlesungen zur Höheren Mathematik bekannt. Dort wird auch die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nach Peano bzw. Picard-Lindelöf bewiesen. Aspekte wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden bei Übungsaufgaben nicht thematisiert.

Schritt II:

Diese Lösung beschreibt das Verhalten des homogenen Systems, also der Schaltung ohne Spannungsquelle U_0 . Diese ist unabhängig von der Störfunktion, also U_0 . Per Definition beschreibt die Zeitkonstante τ die Zeit, in der ein exponentiell absinkender Prozess auf $\frac{1}{e}$ seines Ausgangswertes abgesunken ist. Aus der Elektrotechnik-Vorlesung ist den Studierenden bekannt, dass τ der Steigung im Ursprung entspricht. Dies entspricht

$$A \frac{1}{e} = Au_{Ch}(t = \tau).$$

Phase B4.2: Bestimmen der Zeitkonstanten

Ressourcen:

*Kenntnis der Definition der Zeitkonstanten
Umformen von Bruchgleichungen*

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{e} &= e^{\frac{-\tau}{RC}} \\ \frac{1}{e} &= \frac{1}{e^{\frac{-\tau}{RC}}} \Leftrightarrow e = e^{\frac{\tau}{RC}} \\ 1 &= \frac{\tau}{RC} \Leftrightarrow \tau = RC\end{aligned}$$

$\tau = RC$ ist damit die Zeitkonstante einer Reihenschaltung aus Ohm'schen Widerstand und Kondensator.

Um nun die Differentialgleichung des Gesamtsystems mit Spannungsquelle U_0 , also die inhomogene Differentialgleichung, zu lösen, können zwei verschiedene Lösungswege verfolgt werden.

Schritt III, Variante 1 „Partikuläransatz“:

Aus der Höheren Mathematik ist bekannt, dass die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als Summe der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer beliebigen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, einer sogenannten Partikulärlösung, gebildet werden kann, also dass gilt:

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Ci}(t).$$

Es wird nun eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gesucht.

Hierzu muss man eine einzige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden. Man kann erkennen, dass $u(t) = U_0$ eine Lösung ist und mit Wissen aus der Höheren Mathematik erhält man:

$$u_{Ci}(t) \equiv U_0,$$

sprich u_{Ci} ist konstant und von der Zeit unabhängig. Durch Addition der allgemeinen homogenen und der speziellen inhomogenen Lösung der Differentialgleichung ergibt damit die Lösung des inhomogenen Systems:

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Ci}(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}} + U_0.$$

Allein die Konstante A ist noch unbekannt. Zum Lösen von A wird ein Anfangswert benötigt, also ein Funktionswert der gesuchten Funktion u_C . Aus Aufgabenteil B1 und B2 wissen wir bereits, dass $u_C(0) = 0$ ist. Einsetzen dieses Anfangswertes ergibt

$$0 = Ae^{\frac{-0}{\tau}} + U_0 = A + U_0$$

so dass $A = -U_0$ folgt. Damit ist

$$u_C(t) = -U_0 e^{\frac{-t}{\tau}} + U_0 = U_0(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

die gesuchte Lösung der Differentialgleichung mit $\tau = RC$. Diese Lösung ist eindeutig, da wir Werte der Funktion $u_C(t)$ kennen, nämlich konkret $u_C(0) = 0$ (aus B1 bzw. B2) und damit die Konstante A in der Lösung bestimmen konnten. Aufgrund der Stetigkeit der eingegangenen Gleichungen ist dieses die Lösung für alle $t \geq 0$.

Phase B4.4a: Lösen des inhomogenen Systems

Ressourcen:

Kenntnis des Bauteilverhaltens zum Finden einer speziellen Lösung, Elektrotechnisches Faktenwissen: Kirchhoff'scher Maschensatz

Mathematischer Kommentar: Erfahrung im Differenzieren und Integrieren bzw. beim Lösen von Differentialgleichungen notwendig. Dieser Weg wird üblicherweise im Kontext von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung in der Höheren Mathematik vermittelt.

Schritt III, Variante 2 „Variation der Konstanten“:

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann durch Variation der Konstanten (VdK) ermittelt werden. Dazu wird in der allgemeinen Lösung des homogenen Systems

$$u_C(t) = A e^{\frac{-t}{\tau}}$$

für die Konstante A $A(t)$ eingesetzt, d. h. wir betrachten die Konstante A als zeitabhängige Funktion $A(t)$ und bestimmen diese so, dass wir nach Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung den Wert U_0 erhalten.

Es ergibt sich $u_C(t) = A(t)e^{\frac{-t}{\tau}}$. $u_C(t)$ wird als nächstes in die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt, um $A(t)$ zu bestimmen.

$$\tau \frac{d}{dt} \left(A(t) e^{\frac{-t}{\tau}} \right) + A(t) e^{\frac{-t}{\tau}} = U_0$$

Unter Berücksichtigung der Produktregel folgt:

$$\tau \left(\frac{d}{dt} (A(t)) e^{\frac{-t}{\tau}} + A(t) \frac{d}{dt} (e^{\frac{-t}{\tau}}) \right) + A(t) e^{\frac{-t}{\tau}} = U_0$$

$$\tau \left(\dot{A}(t) e^{\frac{-t}{\tau}} + A(t) \frac{-1}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} \right) + A(t) e^{\frac{-t}{\tau}} = U_0$$

$$\tau \dot{A}(t) e^{\frac{-t}{\tau}} = U_0$$

$$\dot{A}(t) = \frac{U_0}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}}$$

Bestimmung von $A(t)$ durch Integration von $\dot{A}(t)$:

$$A(t) = \int \dot{A}(t) dt = \int \frac{U_0}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} dt = \frac{U_0}{\tau} \int e^{\frac{t}{\tau}} dt$$

$$A(t) = \frac{U_0}{\tau} (\tau e^{\frac{t}{\tau}} + K) \quad K \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = U_0 e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{\tau} K$$

Einsetzen von $A(t)$ in $u_C(t)$ liefert:

$$u_C(t) = A(t) e^{\frac{-t}{\tau}} = U_0 e^{\frac{t}{\tau}} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_0}{\tau} K e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = U_0 + \frac{U_0}{\tau} K e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Allein K ist noch unbekannt. Zur Bestimmung von K wird ein Anfangswert benötigt. Aus Aufgabenteil B1 und B2 wissen wir bereits, dass $u_C(t=0) = 0$ ist. Einsetzen ergibt

$$0 = U_0 + \frac{U_0}{\tau} K e^{\frac{-t}{\tau}} \Big|_{t=0} = U_0 + \frac{U_0}{\tau} K$$

sodass $K = -\tau$ folgt. Damit ist

$$u_C(t) = U_0 (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}).$$

Phase B4.4b: Lösen des inhomogenen Systems

Ressourcen:

Variation der Konstanten, Methoden aus der Analysis in einer Veränderlichen (partielle Integration, Produktregel)

Mathematischer Kommentar: Dieses Verfahren ist systematisch, d. h. es führt sicher zu einer Lösung und wird daher den Studierenden als erstes vermittelt.

Validierung bzw. anschauliche Begründung: Bei Betrachtung der Reihenschaltung aus Ohm'schen Widerstand und Kondensator wird klar, dass die Quelle U_0 den anfänglich ungeladenen Kondensator C allmählich auflädt. Dabei steigt die Spannung am Kondensator an und der Strom sinkt entsprechend den bisherigen Argumentationen mit zunehmender Aufladung ab, da das sich aufbauende elektrische Feld dem Aufladungsprozess entgegenwirkt. Für $t \rightarrow \infty$ nimmt die Kondensatorspannung den Wert der Quellenspannung U_0 an. In dem Moment fließt kein Strom mehr und nach der Bauteilgleichung des Widerstands $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$ ist dann auch die Spannung über dem Widerstand 0. Der exponentielle Anteil der Lösung beschreibt das oben dargestellte Eigenverhalten, hier also das Einschwingverhalten. Unsere Erwartungen haben sich damit bestätigt.

Expertenbearbeitung: Der Experte beginnt seine Aufgabenbearbeitung mit „Zeitkonstante kann man erkennen.“ (1309) und schreibt

$$\tau = RC.$$

Er führt dann weiter aus:

„Für mich ist es jetzt nicht notwendig, diese Differentialgleichung formal zu lösen, weil ich direkt sehe, welche Form sie haben wird.“

(1309)

Er skizziert dann den Verlauf der Spannung und erläutert, dass der Kondensator am Ende auf U_0 aufgeladen ist und am Anfang den Wert 0 hat. Da es nur einen Energiespeicher gibt (Anmerkung: nämlich den Kondensator) wird der Ausgleichsvorgang über eine e-Funktion beschrieben. Diese beschreibt er mit

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Seine Formel überprüft er durch Einsetzen von Werten durch Einsetzen von 0 erhält er e^0 und somit in der Klammer $1 - 1$, was dem Wert 0 in seiner Skizze entspricht. Dann führt er aus, dass er ∞ einsetzt und sagt, dass e^0 „bekanntlich 1“ (1339) ist und so nach Einsetzen nur noch U_0 übrigbleibt.

Er erläutert, dass er verwendet, dass der Kondensator am Ende auf U_0 aufgeladen ist und beschreibt anschließend seine Skizze genauer, in dem er sagt, dass sich die Spannung immer weiter an den Wert U_0 annähert und die Abweichung von U_0 ab einem bestimmten Wert vernachlässigt werden kann.

Zusätzliche Informationen des Experten:

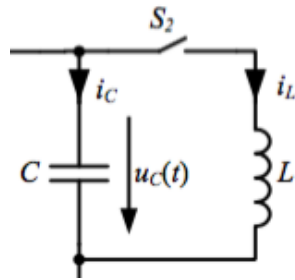


Abbildung 5.3.3: Rechter Teil des Schwingkreises

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Die Studierenden können als weiteres Verfahren Laplace-Transformationen einsetzen, wobei – auch nach Ansicht des Experten – die Studierenden dieses Verfahren noch nicht kennen. Ansonsten können Ansätze zur Lösung von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung verwendet werden, wie eben die explizit von ihm erwähnte „Trennung der Variablen“. Ab (4304) führt er diese Verfahren noch näher aus und ergänzt auch sogenannte Partikulärverfahren mit dem Hinweis

„Das ist aber nichts anderes für mich, wie die Lösung zusammenzubasteln. Es gibt nunmal für jede homogene Differentialgleichung einen Ansatz, den man anwenden kann.“

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Fehlerpotential sieht er in den unklaren Anforderungen an die Lösung der Aufgabe, konkret ob eine formale Lösung verlangt ist und ob man über Erfahrung argumentieren darf. Dieses erschließt sich für ihn aus der Punktzahl die auf die Aufgabe vergeben wird.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Er sieht Validierungen über die physikalischen Mechanismen: „Also grundsätzlich gilt: Wenn nur ein Energiespeicher in einem Ausgleichsvorgang beteiligt ist, laufen alle Ausgleichsvorgänge über eine e-Funktion ab. Wie der Endwert und der Anfangswert von diesen e-Funktionen definiert sind, das hängt letztendlich von den Initialwerten ab.“ Dann erläutert er, wie die Werte der Spannung bestimmt werden können.

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird der Schalter S_1 wieder geöffnet. Der Ausgleichsvorgang sei zu diesem Zeitpunkt vollständig abgeschlossen. Außerdem wird der Schalter S_2 geschlossen. Daher muss das Netzwerk betrachtet werden, welches in Abbildung 5.3.3 dargestellt ist.

Der Ausgleichsvorgang wird als abgeschlossen definiert. Das ist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung notwendig, wird aber eigentlich erst für $t \rightarrow \infty$ erreicht. Zum Zeitpunkt t_1 sei dies gegeben.

[B5] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = t_1^-)$ und $i_C(t = t_1^-)$ sowie von $u_C(t = t_1^+)$ und $i_C(t = t_1^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung

Gesucht sind nun erneut die Kondensatorspannung und der Kondensatorstrom. Allerdings wird nun der Zeitpunkt $t = t_1^-$ respektive $t = t_1^+$ betrachtet. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wurde der Schalter S_1 wieder geöffnet und der Schalter S_2 im Gegenzug erstmalig geschlossen.

Gegeben ist das Schaltbild, aus dem sich die geforderten Größen bestimmen lassen. Ebenso können die Lösungen der vorhergegangenen Aufgabenteile verwendet werden.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts:

$u_C(t = t_1^-) = U_0,$	da der Kondensator durch den Ausgleichsvorgang vollständig geladen wurde
$i_C(t = t_1^-) = 0,$	da der Kondensator vollgeladen ist und somit nicht weiter geladen werden kann, da kein Strom zur Ladung vorhanden ist
$u_C(t = t_1^+) = U_0,$	da sich die Spannung an einem Kondensator nicht sprunghaft ändern kann
$i_C(t = t_1^+) = -i_L = 0,$	da sich der Spulenstrom nicht sprunghaft ändern kann

Begründungsvariante 1: Durch die neue Stellung der Schalter sind Quelle und Ohm'scher Widerstand von der Schaltung getrennt. Es besteht eine Parallelschaltung aus Kondensator und Spule. Der Spulenstrom $i_L(t)$ ist vor dem Umlegen der Schalter noch gleich Null. Er kann sich nicht sprunghaft ändern, da wir $i_L(t)$ aufgrund der Bauteilgleichung der Spule, also $u_L(t) = L\dot{i}_L(t)$, als Integral über die stetige Funktion $\frac{u_L(t)}{L}$ bestimmen können (s. o.). In diesem Fall kann sich der Kondensatorstrom $i_C(t)$ auch nicht sprunghaft ändern. Normalerweise kann der Kondensatorstrom springen, aber da eine Spule in einer Parallelschaltung in der Masche vorhanden ist, ist hier kein Springen möglich. Der (aus dem ersten Teil der Aufgabe aufgeladene) Kondensator wird in dieser Situation zur Spannungsquelle.

Begründungsvariante 2:

Nach Aufgabenstellung ist die Quelle U_0 von der Schaltung getrennt. Es ergibt sich eine Parallelschaltung aus Kondensator C und Spule L . Da der Ohm'sche Widerstand kein Teil des Stromkreises ist, ist dieser ungedämpft, d. h. er übt keine Effekte auf den Stromkreis aus.

Zum Zeitpunkt t_1^- ist jedoch S_1 noch geschlossen und S_2 noch offen; es besteht noch die Reihenschaltung aus U_0 , C und R . Laut Aufgabenstellung sind zudem alle Ausgleichsvorgänge zu diesem Zeitpunkt abgeschlossen, d. h. alle durch Erregung veränderten Größen werden so definiert, dass sie ihren Grenzwert angenommen haben. Aus den betrachteten Grenzwerten und dadurch dass der Ausgleichsvorgang als abgeschlossen definiert wird (siehe oben vor Aufgabenteil B5) lässt sich erkennen, dass die Kondensatorspannung auf den Wert U_0 aufgeladen ist. Wenn der Kondensator aufgeladen ist, fließt demnach kein Strom mehr, wodurch

$$u_C(t = t_1^-) = U_0$$

und

$$i_C(t = t_1^-) = 0$$

gilt. Außerdem fällt keine Spannung mehr über R ab.

Wenn zum Zeitpunkt t_1 die Schalter wie angegeben umgelegt werden, ist S_1 bei $t = t_1^+$ offen und S_2 geschlossen. Folglich besteht eine Parallelschaltung aus dem aufgeladenen Kondensator und der Spule. Die Kondensatorspannung kann sich auch jetzt nicht sprunghaft ändern. Daher ist weiterhin

$$u_C(t = t_1^+) = U_0 = u_C(t = t_1^-)$$

Die Spule war zu Anfang ($t < 0$) entladen und seither nicht angeschlossen, da S_2 stets offen war. Folglich ist $i_L(t = t_1^-) = 0$. Da sich der Spulenstrom nicht sprunghaft ändern kann, gilt

$$i_L(t = t_1^+) = 0 = i_L(t = t_1^-).$$

Da in der Parallelschaltung aus L und C der Spulenstrom betragsgleich dem Kondensatorstrom ist, gilt mit

$$|i_C(t)| = |i_L(t)| \quad \text{für } t \geq t_1,$$

dass

$$i_C(t = t_1^+) = 0.$$

Expertenbearbeitung: Am Anfang der Aufgabenbearbeitung in (3106) sagt der Experte, dass die Angabe in der Aufgabe, dass der Ausgleichsvorgang abgeschlossen ist, bedeutet, dass der Kondensator nun auf die Spannung U_0 aufgeladen ist. Er ergänzt:

„Obwohl das in der Realität nie der Fall wäre, soll das scheinbar hier angenommen werden.“

Phase B5: Finden der Anfangsbedingungen für den Zeitpunkt t_1

Ressourcen:

*Lesen eines Schaltbilds
Kenntnis allgemeiner Eigenschaften von Spulen (bzgl. Springen) und Kondensatoren (auch in ihrer Funktion als Spannungsquelle)*

Nachdem er kurz auf das zu B1 und B2 analoge Notationsproblem mit t_1^- und t_1^+ eingeht, zieht er aus dem laut Aufgabenstellung vollständig abgeschlossenen Ausgleichsvorgang die Information, dass kein Strom mehr im Kondensator fließt, also $i_C(t = t_1) = 0$ ist. Die Spannung am Kondensator ändert sich durch die Parallelschaltung nicht sprungförmig und daher ist sowohl vor als auch nach dem Schließen U_0 . Da zusätzlich auch kein Strom mehr durch den Widerstand fließt, liegt nach seiner Aussage ein idealer Schwingkreis vor und es gilt $i_C(t) = 0$.

In seinen Erläuterungen hebt er hervor, dass der abgeschlossene Ausgleichsvorgang hier der zentrale Punkt ist, da somit die Spannung u_C den Wert U_0 hat. „Man könnte auch den Grenzwert dafür bilden.“ (3106). Er beschreibt dann die Funktionsweise des Schwingkreises:

„Aufgeladen wird der Kondensator durch den Schalter S_1 , entladen von S_2 , bzw. der Schwingkreis wird ausgelöst mit dem Schalter S_2 .“

Dabei hat er verwendet, dass die oben bereits erwähnten sprunghaften Änderungen nicht möglich sind bzw. kein Stromfluss durch die geöffneten Schalter möglich ist.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte nennt keine alternativen Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: siehe B1.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

[B6] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq t_1$ her. (3 Punkte)

Lösung

Gesucht ist die Differentialgleichung der Parallelschaltung aus Kondensator und Spule für $t \geq t_1$. Diese Gleichung beschreibt das Verhalten des vorhandenen Systems dynamisch. Wir können damit später die Zustandsgröße $u_C(t)$ lösen.

Gegeben sind Schaltbild, Schalterstellungen und die Größen R , C und L . Hiermit lässt sich die Differentialgleichung aufstellen.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts: Bauteilgleichung:

$$C\dot{u}_C(t) = i_C$$

$$L\dot{i}_L(t) = u_L$$

Maschen- und Knotengleichung:

$$u_C = u_L$$

$$-i_C = i_L$$

$$C\ddot{u}_C = \dot{i}_C = -\dot{i}_L = -\frac{u_L}{L}$$

$$L_C\ddot{u}(t) + u(t) = 0$$

Vorüberlegung: Es soll die Differentialgleichung des Systems für $t \geq t_1$ hergeleitet werden. In diesem Fall gibt es zwei Energiespeicher, nämlich die Spule und den Kondensator, die beide über Differentialgleichungen mittels ihrer Bauteilgleichungen beschrieben werden. Allerdings gibt es dieses Mal keinen Ohm'schen Widerstand und keine äußere Erregung wie in der linken Masche. Somit ergibt sich durch die beiden Bauteilgleichungen, die jeweils Ableitungen enthalten, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese ist homogen, da keine äußere Erregung vorhanden ist, die sich als Störfunktion auswirken würde; ein Widerstand würde sich so auswirken. Es ist außerdem bekannt, dass Schwingungen durch trigonometrische Funktionen beschrieben werden und daher müssen wir eine solche als Lösung der Differentialgleichungen erhalten. Aus der Höheren Mathematik ist bekannt, dass eine trigonometrische Funktion keine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanter Koeffizienten sein kann. Daher muss die Differentialgleichung mindestens quadratisch sein, also die Ordnung 2 haben.

Begründungsvariante 1:

Es soll nun die Differentialgleichung für die Parallelschaltung aus Spule und Kondensator hergeleitet werden. Bekannt sind die Bauteilgleichungen für Kondensator

$$i_C(t) = C\dot{u}_C(t) \quad (5.39)$$

sowie Spule

$$u_L(t) = L\dot{i}_L(t). \quad (5.40)$$

Nach Knotensatz gilt

$$u_C(t) = u_L(t) =: u(t) \quad (5.41)$$

und nach Maschensatz erhält man

$$-i_C(t) = i_L(t) =: i(t). \quad (5.42)$$

So ergibt sich durch Einsetzen von (5.41) und (5.42) in (5.39)

$$i(t) = -C\dot{u}(t) \quad (5.43)$$

Phase B6: Aufstellen einer Differentialgleichung durch Mathematisierung der Schaltung

Ressourcen:

Prinzip: Ersetze Bauteile durch ihre Gleichungen Management von Funktionalgleichungen (inkl. Ableitungen), also Gleichungsmanagement unter Verwendung von Methoden der Analysis

Nun muss die erste Ableitung von (5.43) bestimmt werden, so dass (5.43) in (5.40) eingesetzt werden kann. Damit ergibt sich:

$$u(t) = L \frac{d}{dt}(i(t)) = L \frac{d}{dt}(-C\dot{u}(t)) = -LC\ddot{u}(t), \quad (5.44)$$

Nach Umstellen in die übliche Form, d. h. von $u(t)$ -abhängige Terme links, die übrigen rechts, erhält man.

$$LC\ddot{u}(t) + u(t) = 0. \quad (5.45)$$

Validierung: Wie erwartet handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, d. h. die höchste Ableitung ist eine zweite Ableitung und es gibt keinen inhomogenen Term.

Expertenbearbeitung: Bei der Bearbeitung dieses Aufgabenteils zeichnet der Experte zunächst den rechten Teil des Schwingkreises und berücksichtigt dabei die Spule und den Kondensator. Den Widerstand, welcher ein Teil des linken Teils des Schwingkreises ist, lässt er also weg. Dann notiert er die Bauteilgleichung der Spule, nämlich

$$u_C = L \frac{di_L}{dt} \quad (5.46)$$

ein und notiert den Zusammenhang $i_L = -i_C$. Als nächstes möchte er

$$i_L = \int u_C(t) dt$$

verwenden, erkennt aber durch Einsetzen, dass dieses nicht richtig ist. Dann notiert er unter Verwendung von Formel (5.37):

$$i_L = -i_C = -C \frac{du_C}{dt} \quad (5.47)$$

Er setzt dann (5.47) in die Bauteilgleichung der Spule, d. h. Formel (5.46) ein, und erhält damit

$$u_C = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}. \quad (5.48)$$

Der Experte erläutert dieses später mit

„Da habe ich erstmal die Schaltung vereinfacht auf das, was wesentlich ist für diesen Aufgabenteil.“

(3412)

und bezieht sich damit auf das Weglassen des linken Teils des Schwingkreises. Verwendet hat er den Maschensatz und die Strom-Spannungsbeziehung für den Kondensator und die Spule.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Der Experte nennt keine alternativen Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Der Experte nennt keine typischen Fehler.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

[B7] Ermitteln Sie die Schwingungsgleichung für die Spannung $u_C(t)$, indem Sie die Differentialgleichung lösen und die Anfangswerte einsetzen. (6 Punkte)

Hinweis: Die Zeitachse darf so verschoben werden, dass sich $t_1 = 0$ ergibt.

Lösung

Gesucht ist nun die Lösung der Differentialgleichung, also die Funktion zur Beschreibung der Kondensatorspannung $u_C(t)$ im rechten Teil des Schwingkreises über der Zeit t .

Gegeben sind die Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingungen aus den vorigen Aufgabenteilen. Mit diesen kann die Lösung der Kondensatorspannung gefunden werden.

Begründungsvariante 0 - Klausurlösung des Instituts: Lösung durch Exponentialansatz:

$$\begin{aligned}u(t) &= \underline{U} e^{-st} \\ CLs^2 \underline{U} e^{-st} + \underline{U} e^{-st} &= 0 \\ CLs^2 + 1 &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j \frac{1}{\sqrt{CL}} \\ \frac{1}{\sqrt{LC}} &= \omega_0 \\ \sqrt{\frac{L}{C}} &= Z_0\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$u(t) = \underline{U}_1 e^{j\omega_0 t} + \underline{U}_2 e^{-j\omega_0 t}$$

Nur reelle Lösungen sind sinnvoll, daher $\underline{U}_1^* = \underline{U}_2$

$$u(t) = U_C \cos(\omega_0 t) + U_S \sin(\omega_0 t)$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned}
 u_C(t = t_1 = 0) &= U_0 \\
 u(t = 0) &= U_C \cos(\omega_0 0) = U_C = U_{C0} \\
 \dot{u}(t = 0) &=? \\
 \dot{u}(t = 0) &= U_C \omega_0 (-\sin(\omega_0 t)) + U_S \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\
 \dot{u}(t = 0) &= 0 = U_S \omega_0 \\
 U_S &= 0 \\
 u(t) &= U_{C0} \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

Begründungsvariante 1:

Es soll die Schwingungsgleichung für $u_C(t)$ ermittelt werden, also eine Lösung der Differentialgleichung von (5.45) gefunden werden. Man sieht aus der Gleichung, dass die zweite Ableitung ein Vielfaches der Funktion ist. Daraus kann man auf zwei mögliche Funktionentypen schließen. Einerseits könnte die Lösung eine Exponentialfunktion Ae^{cx} mit geeignetem c sein oder eine Linearkombination $A \cos(cx) + B \sin(cx)$:

Der folgende Lösungsweg entspricht dem Verfahren aus der Höheren Mathematik und es muss bis auf einen Punkt keine Anpassung an die Elektrotechnik erfolgen. In der Elektrotechnik wird j statt i als komplexe Einheit verwendet, da i hier für den Strom steht. Die charakteristische Gleichung der vorliegenden Differentialgleichung lautet

$$P(\lambda) = LC\lambda^2 + 1$$

Die Nullstellen des Polynoms lauten:

$$\begin{aligned}
 0 &= P(\lambda) = LC\lambda^2 + 1 \\
 \lambda^2 &= \frac{-1}{LC} \\
 \lambda &= \pm \sqrt{\frac{-1}{LC}} = \pm \sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ wird die Kennkreisfrequenz genannt. Es handelt sich dabei um diejenige Frequenz, mit der ein ungedämpftes und frei schwingendes System schwingt.

Zu zwei komplex konjugierten Nullstellen $\lambda = \alpha \pm j\beta$ des charakteristischen Polynoms lautet der Lösungsansatz für die homogene Differentialgleichung

$$u_{Ch}(t) = K_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + K_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Da das System frei schwingend und die Differentialgleichung also homogen ist, ist hier $u_C(t) = u_{Ch}(t)$. Ferner ist $\alpha = 0$ sowie $\beta = \omega_0$, so dass sich die Lösung wie folgt vereinfacht:

$$u_C(t) = K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t)$$

Phase B7.1a: Bestimmen der Lösung der Differentialgleichung

Ressourcen:

Wissen zum Lösen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, d. h. hier Aufstellen der charakteristischen Gleichung der DGL mittels Exponentialansatz Wahl des Lösungsansatzes entsprechend der Lösungen der charakteristischen Gleichung mit Wissen aus der Höheren Mathematik, hier konkreter Umgang mit komplexen Nullstellen als Lösung der charakteristischen Gleichung und j als komplexe Einheit in der Elektrotechnik

Anmerkung:

Die Verschiebung und das dadurch erfolgte Homogenisieren der Differentialgleichung sorgt dafür, dass keine Verfahren vom 'Typ der rechten Seite', welche bei inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung benötigt werden, angewendet werden müssen, sondern nur ein Anfangswertproblem gelöst werden muss.

Um aus dieser allgemeinen Lösung die Schwingungsgleichung des Kondensators im Kontext der Aufgabe zu erhalten, werden die Anfangswerte aus Aufgabenteil B5 verwendet:

$$i_C(t = t_1) = 0$$

$$u_C(t = t_1) = U_0$$

Wird letztere Bedingung in die allgemeine Lösung eingesetzt, ergibt sich

$$U_0 = u_C(t = t_1) = K_1 \cos(\omega_0 t_1) + K_2 \sin(\omega_0 t_1).$$

Um die Gestalt der Gleichung zu vereinfachen, **kann** eine neue Zeitachse gemäß Hinweis in der Aufgabenstellung gesetzt werden. Ansonsten müssten sogenannte Verfahren 'vom Typ der rechten Seite' angewendet werden, die eine anschließende Rechnung zur Bestimmung einer Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung erforderlich machen würden. Es wird daher im Folgenden mit der um $-t_1$ verschobenen Zeitachse gerechnet. Es ist also $t_1 = 0$. Dann ergibt sich

$$U_0 = u_C(t = t_1 = 0) = K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) = K_1.$$

Der Vorteil der Verschiebung der Zeitachse ist klar erkennbar. Nun kann K_2 durch den zweiten Anfangswert gefunden werden:

$$\begin{aligned} 0 = i_C(t = t_1 = 0) &= C \dot{u}_C(t = 0) \\ &= C \frac{d}{dt} (U_0 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t)) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$0 = C U_0 \omega_0 (-1) \sin(\omega_0 t) + C K_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \Big|_{t=0}$$

$$0 = C K_2 \omega_0 \Leftrightarrow K_2 = 0$$

Damit ergibt sich

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

Anmerkung: Ohne die Verschiebung der Zeitachse müsste man wieder über

$$u_C(x) = u_{Ch}(x) + u_{Ci}(x)$$

ansetzen, also nun über die Ansätze vom Typ der rechten Seite eine Partikulärlösung bestimmen. Durch die Homogenisierung ist die Partikulärlösung in diesem Fall die Nullfunktion und die Rechnung ist abgeschlossen.

Begründungsvariante 2:

Mit dem 'Merkblatt zur homogenen, linearen DGL 2. Ordnung', welches in 5.2 vorgestellt wurde, sieht die Lösung folgendermaßen aus. Dieses stellt die drei möglichen Lösungsansätze entsprechend der drei Fälle aus dem Verfahren aus dem Höheren Mathematik vor. Die Grundidee ist, die Differentialgleichung über Koeffizientenvergleiche zu lösen und den Koeffizienten ihre elektrotechnische Bedeutung zuzuweisen. Dabei werden keine allgemeingültigen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen eingesetzt, sondern das Verfahren funktioniert nur für homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung. Auf dem Blatt ist als Standardform

$$\ddot{x} + 2d\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

angegeben, wobei d der Dämpfungsgrad und ω_0 die Kennkreisfrequenz ist. Von dem Wert von d ist abhängig, welcher der drei Fälle gewählt werden muss. Nach Wahl eines Exponentialansatzes mit $u(t) = Ue^{st}$ und anschließender Division durch Ue^{st} erhält man $s^2 + 2d\omega_0s + \omega_0^2 = 0$. Zum Koeffizientenvergleich muss zunächst (5.45) so umgeformt werden, dass der Vorfaktor vor $\ddot{u}$ eine 1 ist. Dann erhält man über Koeffizientenvergleich $2d\omega_0 = 0$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, also $\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Das Merkblatt gibt nun vor, dass ein ungedämpfter Schwingfall vorliegt, da $d = 0$ ist, und die Lösungen der DGL folgendes sind:

$$s_{1/2} = -\omega_0d \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_d$$

So erhält man durch Koeffizientenvergleich $s_{1/2} = j\sqrt{\frac{1}{LC}}$ und als Lösungsfunktion

$$\begin{aligned} x(t) &= (K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t)) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \left(K_1 \cos\left(\frac{1}{LC}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{1}{LC}t\right) \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \dots \end{aligned}$$

Die folgenden Schritte zur Bestimmung von K_1 und K_2 sind analog zur ersten Begründungsvariante.

Phase B7.1b: Bestimmen der Lösung der Differentialgleichung

Ressourcen:

Gleichungsumformen, um den Leitkoeffizienten als 1 zu setzen

Koeffizientenvergleich zur Bestimmung von d und ω_0

Wahl des Lösungsansatzes entsprechend der Lösungen der charakteristischen Gleichung nach Merkblatt aus GET-B

Begründungsvariante 3:

Mit Laplace-Transformationen kann zur Lösung dieser Aufgabe auch folgender Lösungsweg gewählt werden:

Die Differentialgleichung soll im Spektralbereich gelöst werden. Zunächst wird dazu die Differentialgleichung in den Spektralbereich transformiert (es sei hier $u(t) := u_C(t)$):

$$LC\ddot{u}(t) + u(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad LC(s^2 U(s) - su(t=0) - \dot{u}(t=0)) + U(s) = 0$$

Hier wird ebenso die Verschiebung der Zeitachse zu $t_1 = 0$ genutzt, um in einfacher Weise auflösen zu können. Bekannt sind die Anfangsbedingungen

$$u_C(t = t_1 = 0) = U_0$$

sowie $i_C(t = t_1 = 0) = 0$. Aus letzterer folgt mit $i_C(t) = C\dot{u}_C(t)$, dass

$$\dot{u}_C(t = t_1 = 0) = 0$$

Damit folgt für die spektrale Differentialgleichung:

$$LC(s^2 U(s) - sU_0 - 0) + U(s) = 0$$

$$LCs^2 U(s) - LCsU_0 + U(s) = 0$$

$$U(s)(LCs^2 + 1) = LCsU_0$$

Der Vorteil der Transformation in den Spektralbereich wird hier deutlich. $U(s)$ kann explizit gefunden werden:

$$U(s) = \frac{LCsU_0}{LCs^2 + 1}$$

beziehungsweise in Normalform:

$$U(s) = \frac{sU_0}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{sU_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{da} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Diese Lösung muss nun in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Dazu wird zunächst eine Partialbruchzerlegung von $U(s)$ vorgenommen. Die Nullstellen des Nennerpolynoms lauten

$$s^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$$

und damit ist

$$U(s) = \frac{sU_0}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}.$$

Die Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{sU_0}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{s + j\omega_0} + \frac{B}{s - j\omega_0}$$

lässt sich durch Multiplikation mit dem Hauptnenner zu

$$sU_0 = A(s - j\omega_0) + B(s + j\omega_0)$$

Phase B7.1c: Finden der Lösung der Differentialgleichung

Ressourcen:

Laplace-Transformation einer Differentialgleichung

aus dem Zeitbereich in den Spektralbereich (üblicherweise Inhalt der Mathematikveranstaltungen nach dem ersten Jahr),

ggfs. Partialbruchzerlegung, Umgang mit komplexen Zahlen,

Laplace-

Rücktransformation: ggfs.

Kenntnis der bekannten

Laplace-Transformation

" $e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$ ",

Kenntnis der komplexen

Darstellung des Kosinus als

Faktenwissen

umformen. Durch Einsetzen von $s = j\omega_0$ erhält man $U_0 = 2B$, respektive $U_0 = 2A$ durch Einsetzen von $s = -j\omega_0$. Damit ist

$$U(s) = \frac{sU_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{U_0}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega_0} + \frac{1}{s - j\omega_0} \right)$$

Rücktransformation in den Zeitbereich mit Kenntnis von

$$e^{-at} \circ \bullet \frac{1}{s + a}$$

ergibt

$$U(s) \bullet \circ u(t) = \frac{U_0}{2} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}).$$

Damit ist

$$U_0 \frac{1}{2} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

die Lösung der Schwingungsgleichung.

Validierung: Es handelt sich wie erwartet um eine harmonische und periodische Schwingung. Es gibt keinen zeitunabhängigen Term, d. h. es gibt keinen Term, in dem kein $u_C(t)$ oder eine Ableitung davon auftritt.

Expertenbearbeitung: Der Experte kommentiert nach Lesen der Aufgabenstellung zunächst mit

„Das ist sehr angenehm“

(4228)

Er bestimmt dann die Lösung durch „scharfes Hinsehen“, da im Schwingkreis keine Dämpfung durch einen Widerstand vorliegt, der schließlich auch in seiner Skizze fehlt. Er sagt, dass die Spannung am Anfang den Wert U_0 hat und danach abfällt. Da der Wert von u_C bei $t = 0$ ungleich 0 ist, verwendet der Experte den Cosinus, denn der Sinus wäre an dieser Stelle 0. Die Periodendauer bestimmt er über die charakteristische Kreisfrequenz ω_0 für diesen Schwingkreis, welche über die Formel $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ bestimmt werden kann. Diese Informationen kombiniert er zu der Lösung

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t).$$

Zur Lösung der Differentialgleichung ergänzt er, dass eine Funktion gesucht ist, die zweimal abgeleitet sich selbst ergibt.

„Und da fällt mir nur Sinus oder Cosinus ein.“

(3450)

Da am Zeitpunkt t_1 der Wert U_0 vorliegt, kann es nach seinen Ausführungen nur der Cosinus sein.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: In diesem Bereich nennt der Experte unter Bezugnahme auf B4 wieder einerseits die Möglichkeiten der Herangehensweise über die partikulären Ansätzen, hier mit Sinus und Cosinus und andererseits die Laplace-Transformationen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Die Studierenden könnten nicht berücksichtigen, dass der Ausgleichsvorgang vollkommen abgeschlossen ist, da dieses in der Realität auch unmöglich ist.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Die Lösung der Differentialgleichung beschreibt eine ungedämpfte Schwingung. Dieses entspricht der zugrundeliegenden physikalischen Situation, die kein Bauelement wie ein Widerstand vorliegt. Bezogen auf die physikalischen Mechanismen sagt er, dass wenn S_2 nie geöffnet würde, „die Schwingung immer und ewig fortgesetzt werden würde“ (3737), da keine Energie in Wärme umgesetzt wird. Dazu ergänzt er in (5001):

„Wenn ich etwas herausbekomme, was nicht schwingt, kann ich davon ausgehen, dass es falsch ist.“

Variationen der Aufgabe:

Er charakterisiert die Aufgabe als „eine recht typische Aufgabe“ (4156). Die Skizze könnte durch einen Umschalter ergänzt werden, vgl. (4438), welcher die Aufgabe klarer verständlich macht und dadurch würde das ganze Überlegen wegfallen. Bezogen auf Schwingkreise sieht er zwei Möglichkeiten, nämlich entweder schwingend (d. h. ungedämpft) oder gedämpft. Es könnten Reihen- oder Parallelschaltungen verwendet werden und weitere Bauteile ergänzt werden:

„Man kann da selbst auch sehr kreativ sein, wie man das anordnen kann und wie nicht.“

Hierzu kann man Bauteile verschieden anordnen und dann überlegen, ob das so möglich ist oder die Schaltungstopologie verändern. Er führt aus:

„Beispielsweise, wenn einer eine Induktivität und einen Öffner in Reihe zeichnet, der zu einem bestimmten Zeitpunkt einschaltet, wenn ein Strom fließt, trainiert man automatisch den Grundsatz, der Strom kann sich nicht sprunghaft ändern und deswegen kann der Schalter nicht aufgehen. Oder eben das analoge dazu ist eine ideale Spannungsquelle, die parallel geschaltet ist zu einem Kondensator. Kann auch wieder nicht sein, wenn die Spannung hier am Anfang einen anderen Wert hat als die Spannung hier von der idealen Spannungsquelle, weil dafür sich die Spannung sprunghaft ändern müsste.“

(6141ff.)

Er würde auch von Induktivität statt Spule und Kapazität statt Kondensator sprechen, da die beiden ersten Begriffe für ihn ein ideales Verhalten der Bauteile beschreiben, während die zweiten (also Spule und Kondensator) für die realen, verlustbehafteten Bauteile stehen. Er plädiert außerdem dafür, dass man nicht – wie in der Aufgabe geschrieben – die Achse auf 0 skalieren darf, weil

„entweder ist es dann in diesem Teil (deutet auf B3) oder ist es in diesem Teil (deutet auf B7) falsch. Für mich muss die Definition, die man hier unten macht, auch im oberen Teil gelten.“

(4440)

Er führt weiter aus, dass er keine Formel dazu bräuchte, die Lösbarkeit zu überprüfen, aber es immer zu Konflikten in der Lösung kommen würde.

5.4 Beantwortung der ersten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die erste Forschungsfrage,

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

für Aufgabe B beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

1.1 Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?

In der Aufgabe B werden einige mathematischen Kompetenzen von den Studierenden erwartet. Sie müssen in der Lage sein, die konventionalisierte Skizze des Netzwerks, welche in Abbildung 5.3.1 gegeben ist, hinsichtlich der Gleichungen, welche für die verschiedenen Aufgabenteile benötigt werden, zu lesen und dabei „Übersetzungsoperationen“ durchzuführen. Ein erster Schritt ist dabei zu erkennen, dass in der ersten Aufgabenhälfte (B1 bis B4) nur der linke Teil der Skizze relevant ist, und in der zweiten Aufgabenhälfte (B5 bis B7) nur der rechte Teil der Skizze, wobei die physikalischen Vorgänge aus der ersten Aufgabenhälfte bzgl. physikalischer Eigenschaften (Ladung, Endladung) dennoch von Bedeutung sind.

Beim Aufstellen der Differentialgleichungen (B3 bzw. B6) müssen die Studierenden alle benötigten Gleichungen finden, wobei sie die Bauteilgleichungen für Kondensator, Spule und Widerstand direkt aus der Veranstaltung zitieren können. Für das Aufstellen der Knoten- und Maschengleichungen nach den Kirchhoff'schen Gesetzen müssen die Studierenden Kenntnisse aus der Graphentheorie anwenden und beispielsweise geschlossene Pfade bei der Betrachtung von Maschen untersuchen.

Das Lösen der Differentialgleichungen schließt Methoden aus der „Mathematik für Ingenieure“ mit ein. In beiden Aufgabenhälften werden die Methoden – im Gegensatz zu Vorlesung zur „Mathematik für Ingenieure“ – auf Größen anstatt auf Zahlen angewendet, ansonsten ist jedoch keine zur Mathematik unterschiedliche Vorgehensweise notwendig. Dieses sind in der ersten Aufgabenhälfte Lösungsverfahren für inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung, wie die Kombination aus „Trennung der Veränderlichen“ (bei einer homogenisierten Differentialgleichung) und „Variation der Konstanten“ oder alternativ das Partikulärverfahren mit einer Superposition aus der Lösung der homogenisierten Differentialgleichung und einer Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Bei beiden Verfahren werden unter anderem Methoden bzw. Regeln für das Differenzieren (hier z. B. die Produkt- und Kettenregel) sowie für die Integration (in der Regel die Partielle Integration) benötigt. Dabei müssen noch zusätzlich Anfangswerte betrachtet werden, welche in den Aufgabenteilen B1, B2 und B5 gefunden werden sollen. In der zweiten Aufgabenhälfte muss eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden, was nur über einen Partikuläransatz mit Superposition möglich ist. Dabei spielen Anfangswerte eine Rolle, welche sich aus dem Verhalten der betrachteten Funktion ergeben.

Der Experte nennt im Experteninterview die folgenden von den Studierenden erwarteten Kompetenzen: Es soll das Verständnis der physikalischen Situation abgefragt werden. Dabei geht es konkret darum, dass eine Spannung nicht an einem Kondensator (bzw. einer Kapazität) springen kann, genausowenig wie ein Strom an einer Spule (bzw. einer Induktivität). Dann soll eingeübt werden, wie man Differentialgleichungen „im elektrotechnischen Kontext“ aufstellt und löst. Auf die Rückfrage danach, dass die Lösung der Differentialgleichungen doch eher in der Mathematik einzuordnen ist, antwortet er:

„Letztendlich ist das eine Methode, die ein Ingenieur in der Praxis anwendet und deswegen ist es schon sinnvoll, dass [man] diese mathematischen Methoden angewendet auf diese Situation abfragt.“

(5711)

Es soll abgeprüft werden, ob die Studierenden die zugrundeliegenden Grundprinzipien verinnerlicht haben, da die Bearbeitung eine Frage der Übung ist. Des Weiteren formuliert er (vgl. 6302):

„Aber die Grundsätze müssen für mich eigentlich vorher klar sein, die es einzuhalten gilt:

- Strom in der Induktivität
- Spannung im Kondensator.

Das muss für mich vor der mathematischen Lösung stehen. Die Abfrage, ob es möglich ist oder nicht, sollte nicht erst durch den mathematischen Formalismus deutlich werden.“

1.2 Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?

Mögliche Fehler bei der Bearbeitung der Aufgabe können dadurch entstehen, dass nicht alle relevanten Informationen aus der konventionalisierten Darstellung entnommen werden oder irrelevante Informationen zusätzlich herangezogen werden. Der Experte vermutet auch ein mögliches Missverständnis bei der Notation x^+ und x^- im Zusammenhang mit links- bzw. rechtsseitige Grenzwerten an x , was in Aufgabenteil B1 und B2 der 0 und in Aufgabenteil B5 dem Zeitpunkt t_1 entspricht. Eine weitere Fehlerquelle kann eine falsche Anzahl an Gleichungen sein, durch die bei der Kombination im Gleichungsmanagement über- oder unterbestimmte Ausdrücke entstehen. Bei einem falschen Ergebnis des Gleichungsmanagements können nicht lösbare oder nicht mit den Studierenden bekannten Methoden lösbare Differentialgleichungen entstehen, so dass sich ein Fehler beim Aufstellen auf die kommenden Aufgabenteile fortsetzt. Bei der Lösung der Differentialgleichungen kommen verschiedene Methoden und Regeln sowohl aus der Analysis in einer Dimension (Produktregel, Partielle Integration etc.) als auch Verfahren zur Bestimmung der Lösung quadratischer Gleichungen vor, die allesamt Fehlerquellen sein können.

Problemstellen gibt es bei dieser Aufgabe einerseits beim Aufstellen der Gleichungen, bei dem zwei verschiedene Methoden zum Tragen kommen: das Heranziehen relevanter Bauteilgleichungen aus der Veranstaltung und die Anwendung graphentheoretischer Methoden zum Aufstellen der Gleichungen, welche aus den Kirchhoff-Regeln folgen. Andererseits stellen auch die Lösungsverfahren für die gewöhnlichen Differentialgleichungen Problemstellen dar, da die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung nur über die Abfolge mehrerer Schritte und Regeln möglich ist und außerdem den Studierenden ein passendes Verfahren geläufig sein muss. Bei dem Verfahren können wiederum Unterschiede zwischen der Vermittlung des Verfahrens in der „Mathematik für Ingenieure“ und in der „GET-B“ vorhanden sein. Zusätzlich können noch weitere Problemstellen dadurch entstehen, dass aufgrund einer Asynchronizität, wie sie in Kapitel 1 erläutert wurde, ein mathematisches Verfahren nur im Rahmen der Elektrotechnik-Veranstaltungen behandelt wurde und dadurch u. U. weniger geübt ist bzw. die Grenzen der Anwendbarkeit dieses Verfahrens den Studierenden nicht bekannt sind.

1.3 Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In diesem Abschnitt werden normative Beschreibungen der Kompetenzen vorgenommen, welche bzgl. des im Rahmen von der Aufgabenanalyse von Aufgabe A entwickelten dreiphasigen Schemas gegliedert sind. Dieses soll einerseits die Ergebnisse aus der Studi-Expert-Lösung strukturiert zusammenfassen und andererseits im weiteren Verlauf für Vergleiche zwischen den vier Aufgaben eingesetzt werden.

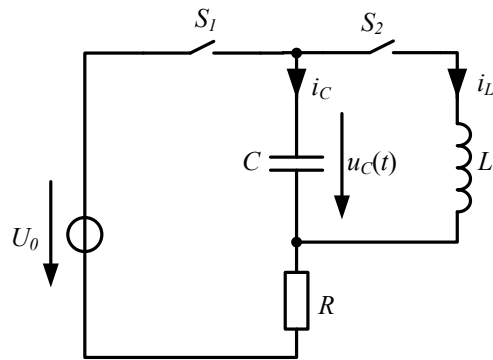
Mathematisierung:

Die Unterschiede zur Mathematisierung im Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) sind ähnlich wie in Aufgabe A, dass hier keine Modelle selbst entwickelt werden müssen, dass die Mathematisierung auch hier die Übersetzung konventionalisierter Darstellungen (hier ein Schwingkreis mit zwei Schaltern) in mathematische Ausdrücke beinhaltet. In Rahmen der Mathematisierung müssen in den Aufgabenteilen B1, B2 und B5 die Begriffe aus der Aufgabenstellung direkt mathematisiert werden. Hierbei ist es wieder der Fall, dass die dabei vorgenommenen Idealisierungen den Studierenden nicht bewusst sind. Der Experte kritisiert in diesem Zusammenhang, dass die in der Aufgabe für die Bauteile verwendeten Bezeichnungen Kondensator und Spule die Begriffe für reale Bauteile sind und er von Kapazitäten und Induktivitäten sprechen würde, um das idealisierte Verhalten anzudeuten. So muss die Entladung eines Bauteils in Zusammenhang mit dem Funktionswert 0 gebracht werden. Aus diesem Grund hat die Spannung $u_C(t)$ am Kondensator C und der Strom $i_L(t)$ an der Spule L den Wert 0 Volt bzw. 0 Ampere. Bei den Übergängen zwischen B1 und B2 bzw. innerhalb von B5 muss der Verhalten der Bauteile betrachtet werden, welches über die im Folgenden näher erläuterten Bauteilgleichungen bzw. über Merksätze (Spannung am Kondensator bzw. Strom an der Spule kann sich nicht sprunghaft ändern) beschrieben werden kann. Die erhaltenen Werte sind noch ein entscheidender Teil für die Berechnungen in den Aufgabenteilen B4 und B7.

In den Aufgabenteilen B3 und B6 gibt es direkte Übergänge zwischen den elektrotechnischen Teilen und den hier weitgehend mathematischen Teilen. So können einerseits die Bauteile und andererseits auch die Schaltungstopologie direkt in Gleichungen übersetzt werden. Für die drei Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule gibt es Gleichungen, die ihr Verhalten beschreiben, und ohne weitere Umformung hier eingesetzt werden können. Darüber hinaus können Gleichungen verwendet werden, die sich über die Kirchhoff'schen Gesetze ergeben und direkt aus der Schaltungstopologie abgeleitet werden können, welche im Hinblick auf die Mathematik graphentheoretisch betrachtet wird. Diese Gleichungen heißen Maschen- bzw. Knotengleichungen und setzen sich mit den Zusammenhängen verschiedener Spannungen bzw. Ströme auseinander.

Ein interessanter Punkt ist noch der Übergang zwischen dem ersten Aufgabenabschnitt (B1 bis B4) und dem zweiten Aufgabenabschnitt (B5 bis B7). Unter Verwendung der Idealisierung in der Aufgabe ist der Ausgleichsvorgang abgeschlossen, obwohl eigentlich ausschließlich eine Konvergenz gegen den Wert der Quellspannung, also U_0 , vorliegt. In diesem Fall wird jedoch eine Gleichheit betrachtet und in der Mathematisierung für B5 angenommen, dass der Wert U_0 tatsächlich erreicht werden könne.

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten:



Aus den Überlegungen zu den beiden Typen an Gleichungen (Bauteil, Kirchhoff) aus der Mathematisierung ergibt sich ein Set an Gleichungen, die nun im Gleichungsmanagement kombiniert werden. Falls sämtliche Gleichungen bedacht wurden, ergeben sich in B3 (linke Seite) auf diese Weise drei Gleichungen (Bauteil Widerstand, Bauteil Kondensator, Kirchhoff Masche), die unmittelbar miteinander kombiniert werden können. Das Ziel der Umformung ist hier der Erhalt einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung, welche sich ergibt, wenn danach vorgegangen wird, dass in der Zielgleichung nur Terme mit $u_C(t)$ und $\dot{u}_C(t)$ und Konstanten vorkommen dürfen, jedoch alle Terme mit $i_C(t)$ und dessen Ableitungen mittels der drei Gleichungen ersetzt werden müssen. B6 (rechte Seite) kann in analoger Weise gelöst werden. Hier ergeben sich vier Gleichungen (Bauteil Spule, Bauteil Kondensator, Kirchhoff Masche, Kirchhoff Knoten) und um eine Kombination der Bauteilgleichungen der Spule und des Kondensators zu ermöglichen, muss die Bauteilgleichung des Kondensators von

$$C\dot{u}_C(t) = i_C$$

zu

$$C\ddot{u}_C(t) = \dot{i}(t)$$

abgeleitet werden.

Die auf diese Weise erhaltenen Differentialgleichungen (in B3 eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswert, in B6 eine durch den Hinweis in der Aufgabe homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangswerten) können dann mit Methoden aus der Mathematik-Veranstaltung gelöst werden. Dabei ist die Verwendung von Größen statt Zahlen für den Lösungsalgorithmus irrelevant, wobei die Anfangswerte selbst jedoch durch Überlegungen aus der Elektrotechnik bestimmt werden können.

Validierung:

Im Gegensatz zur Validierung nach dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) gibt es hier – wie in Aufgabe A – keine Hinterfragung der Annahmen, sondern eine Überprüfung der Ergebnisse mit ähnlichen Methoden wie in Aufgabe A. Validierungen können bei dieser Aufgabe darüber erfolgen, dass die Mathematik das in Versuchen nachweisbare physikalische Verhalten korrekt wiedergeben muss. Die Lösungen der beiden Differentialgleichungen aus B3 und B6 müssen sich genauso verhalten wie auch die Spannung u_C selbst. So muss das Ergebnis aus B4 bei $t = 0$ den Wert 0 haben, also $u_C(0) = 0$, und gegen U_0 konvergieren, d. h. $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = U_0$, bzw. die Lösungsfunktion u_C in B7 eine Schwingung beschreiben:

Aus elektrotechnischen Grundlagenlaboren ist das Verhalten derartiger Schaltungstopologien bekannt. So kann ein Graph bezogen auf den ersten Aufgabenabschnitt von $u_C(t)$ skizziert werden, für den gilt: $u_C(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = U_0$. Daraus können Rückschlüsse auf die Form der Lösung der Differentialgleichung gezogen werden, nämlich dass sie eine e-Funktion und U_0 enthalten muss. Dadurch ergibt sich ebenfalls, dass es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung handeln muss, sofern eine reelle Funktion $u_C(t)$ betrachtet wird. In der zweiten Aufgabenhälfte ist durch Grundlagenlabore ebenfalls bekannt, dass eine derartige Schaltung unter Annahme von Idealisierungen immer weiter „schwingt“, woraus man auf das Vorkommen trigonometrischer Formeln in der Lösung schließen kann sowie auf das Vorliegen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

5.5 Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben

In diesem Abschnitt werden die Bearbeitungsprozesse der fünf Studierendenpaare für alle sieben Aufgabenteile beschrieben und anschließend in einem Zwischenfazit gegenübergestellt, um Merkmale, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu finden. Im folgenden steht G... für die Gruppenbezeichnung des Studierendenpaars. Innerhalb der Gruppen steht P... für die einzelnen Studierenden:

5.5.1 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B1 und B2

[B1,B2] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^-)$, $i_L(t = 0^-)$ und $i_C(t = 0^-)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte) Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^+)$, $i_L(t = 0^+)$ und $i_C(t = 0^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

G1 : P1 betrachtet am Anfang den Schwingkreis als eine Mischung aus Reihen- und Parallelschaltung und fragt P2:

„Den gibt es doch sonst immer nur parallel oder in Reihe nicht so gemischt, oder?“

(0144)

Dann erkennt er, dass am Anfang nur Kondensator und Widerstand existieren, und P2 ergänzt, dass der zweite Kreis – gemeint ist der rechte – dadurch wegfällt. P1 fragt daraufhin, ob Spannung am Kondensator springen kann, und P2 zieht dann die Bauteilgleichung für den Kondensator, d. h. $i_C = C \dot{u}_C$, heran. P1 sagt dann, dass wenn der Kondensator nicht geladen ist, die Spannung 0 ist, und P2 entgegnet, dass sich dann „wie ein Kurzschluss“ (0328) verhält. Der Strom in der Spule ist dann auch 0. P2 argumentiert anschließend über die Energie im Kondensator, welche über die Formel $E_C = \frac{1}{2} C U^2$ beschrieben wird. Da C eine Konstante ist und E 0, muss dann auch U null sein, da keine Energie gespeichert ist, was P2 um „Die sind ja entladen“ (0410) ergänzt. Mit demselben Argument über die Energie begründet P2, dass i_C null ist. P1 nennt dann den Merksatz

„Die Spannung am Kondensator kann ja nicht springen.“

(0533)

und begründet so, dass auch nach dem Schließen des Schalters die Spannung null Volt ist. P2 begründet ausführlicher:

„Klar, der verhält sich im Einschaltaugenblick wie ein Kurzschluss quasi, weil es fließt ja alles auf die Platten. Der will sich ja aufladen und deshalb liegt keine Spannung an. Die baut sich ja auf.“

(0533)

Bei i_C sagt P2, dass dieses $\frac{U_0}{R}$ ist, und P1 ergänzt

„Weil diverse Spannung am Widerstand abfällt.“

(0650)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung der beiden Studierenden vermischt Argumente aus beiden Bearbeitungsvarianten. Zusätzlich hinterfragen die Studierenden noch, ob eine Reihen- oder Parallelschaltung vorliegt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Des Weiteren verwenden sie einen deutlich zu allgemeinen Ansatz, in dem sie über Energien argumentieren, wobei dieser auch zielführend ist.
- **{A1}** Die Studierenden möchten Verbindungen zu Standardaufgaben bzw. ähnlichen Aufgaben aus den Übungen verwenden, also im Sinne von Polya (1949) hinterfragen sie, ob sie schon ähnliche Aufgaben gelöst haben, um dieses für diese Aufgabe zu nutzen.
- **{A2}** Bei der Interpretation der Bauteilgleichung des Kondensators spielen sie „Mapping Mathematics to Meaning“, vgl. Tuminaro und Redish (2007). P1 bleibt dabei auf einer physikalischen Ebene, während P2 diese beiden Ebenen mittels des E-Spiels verbindet.
- **{A2}** Bei der ganzen Bearbeitung zeigt sich ein Nebeneinander von mathematischen und physikalischen Argumenten. So beschreibt P2 in dem letzten Zitat explizit die physikalischen Mechanismen (vgl. Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008)) zur Lösung der Aufgabe.
- **{A3}** Sie ziehen dann noch einen Merksatz über Kondensatoren aus der Vorlesung heran, ohne jedoch die Bedingungen für die Gültigkeit dieses Satzes zu nennen.

G2 : P1 ordnet die Aufgabe zunächst (falsch) im Bereich „Wechselstrom“ ein. P2 fragt, ob das ein großes U ist, und P1 daraufhin, was 0^- ist. P2 deutet dieses richtigerweise als Zeitpunkt vor dem Schließen des Schalters S_1 und sagt:

„Wenn die Schalter alle offen sind, fließt da auch kein Strom und dann ist das auch keine Spannung. Also 1 [d. h. Aufgabe B1] finde ich entspannt.“

(0123)

P2 interpretiert dann 0^+ als den Zeitpunkt nach dem Abklingen (das ist inkorrekt) und folgert, dass man R nicht vernachlässigen könne. P1 sagt daraufhin:

„Das ist direkt da und dann lädt sich das halt (...), also immer weiter auf.“

(0210)

P1 liest dann vor „Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ her“, (0232), was der Aufgabentext von B3 ist. P2 sagt dann, dass die Schalter geöffnet sind und daher noch alles 0 ist, und fragt anschließend, ob da vorher eine Ladung drauf ist.“ P2 notiert die Werte und begründet sie.

P1 sagt als Einleitung für B2:

„Aber direkt danach ist ja eigentlich auch noch nix. Das soll wahrscheinlich verdeutlichen, dass noch nicht direkt die Spannung hierrüber anliegt, sondern dass der Strom erst darauf fließen muss. Deswegen ist direkt nach dem Schließen auch noch nichts.“

(0232)

P1 unterstützt seine Argumentation, in dem er jeweils in der Skizze in der Aufgabe auf die für die Argumentation relevanten Teile zeigt. P2 widerspricht ihm mit:

„Aber i_C ja dann schon, weil ein Strom fließt ja schon, wenn du den Schalter schließt.“

(0349)

P2 ist unsicher, was genau gegeben ist und fragt P1, ob C gegeben ist und ob u_C „echt“ 0 ist, was P1 dann mit

„Das ist ja keine Ladungen drauf.“

(0349)

bestätigt. P2 folgert dann, dass bei 0^+ die gesamte Spannung über R abfällt und erkennt ohne Begründung, dass i_L erstmal 0 ist. P2 begründet:

„Es ist auch so, dass bei einem Ausgleichsvorgang die Widerstände den Stromfluss begrenzen. [...] Wenn du die nicht drin hättest, würde der Strom nicht begrenzt werden, weil der Anfang noch keinen Widerstand hat, weil noch keine Spannung darüber abfällt.“

(0534)

P2 notiert anschließend die Werte für 0^+ in allen drei Fällen korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung entspricht der ersten Bearbeitungsvariante. Fehler treten bei diesem Studierendenpaar einerseits durch eine Missinterpretation des physikalischen Kontextes (Wechselstrom) sowie zunächst bei der Notation 0^+ auf.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Am Anfang der Bearbeitung treten zwischen P1 und P2 Missverständnisse über die Bedeutung der Notation 0^+ und 0^- auf. In diesem Zusammenhang verwendet P1 den Aufgabenteil B3 zum Verständnis der ersten Aufgaben.
- **{A2}** Zum Verständnis der physikalischen Mechanismen variieren P1 und P2 die Aufgabe, in dem sie einzelne Bauteile hinzufügen bzw. aus dem Netzwerk nehmen.
- **{A2}** P1 und P2 versuchen, die zugrundeliegende Physik zu ergründen, betrachten also die physikalischen Mechanismen. Zur Erläuterung seiner Argumentation verwendet P1 eine Skizze als „informative Figur“ im Sinne von Bruder und Collet (2011) zur Erläuterung seiner Überlegungen.

G3 : P1 beginnt die Aufgabenbearbeitung mit

„Das erste ist ja noch schön leicht.“

und P2 notiert die Gleichung $u_C(t) = -0 + U_0$. Anschließend sagt er, dass

$$i_L = 0$$

und

$$i_C = 0$$

ist und begründet dieses damit, dass keine Energie gespeichert ist und die Kreise nicht geschlossen sind. Daraufhin sagt er ohne Begründung, dass auch $u_C = 0$ ist. Nach dem Schließen des ersten Schalters zieht P1 die Gleichung für den Kondensator heran,

$$C \cdot \dot{u} = i,$$

und P2 sagt, dass

$$u_C(0^+) = 0$$

ist, weil es nicht springen kann. P1 ergänzt, dass i_L „bleibt“ und P2 sagt, dass es $i_L = 0$ ist. P2 sagt dann, dass $i_C = \frac{U}{R}$ ist und P1 bestätigt, dass das im Kurzschlussfall so ist. Schließlich einigen sie sich korrekterweise auf $i_C = \frac{U_0}{R}$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung vermischt die Bearbeitungsvarianten 1 und 2. Zusätzlich interpretieren die Studierenden die Bauteilgleichungen hinsichtlich des damit beschriebenen physikalischen Verhaltens. Es wird für die Spannung bereits die Maschenregel aufgestellt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P2 versucht parallel die physikalischen Mechanismen zu verstehen. Durch die Kombination ihrer verschiedenen Herangehensweisen kommen sie zu ihren Ergebnissen.
- **{A2}** P1 verwendet die Bauteilgleichung des Kondensators, um zu verstehen, welche physikalischen Vorgänge hier ablaufen. Er spielt damit im Sinne von Tuminaro und Redish (2007) das E-Spiel „Mapping Mathematics to Meaning“.

- **{A3}** P1 steigt in die Aufgabe mit einem Sammeln von Gleichungen ein, die ihm relevant erscheinen. Dabei beachtet er nicht, welche konkret für diesen Aufgabenteil relevant sind.
- **{A3}** Verwendete Formeln werden jeweils erst allgemein angeben und dann auf die vorliegende Situation angepasst. Dieses verringert den kognitiven Aufwand.

G4 : P1 beginnt die Bearbeitung mit

„Also wenn S_1 geschlossen wird bei $t = 0$, dann liegt am Kondensator die Spannung U_0 an, ne? Nee, R müssen wir noch beachten. [...] S_1 wird geschlossen, das heißt wir sind in dieser Masche. [...] Nur die Spannung am Kondensator kann nicht springen.“

(0227), (0242) und (0246)

P1 wird in seinen Ausführungen zwischendurch von P2 bestätigt, der ergänzt, dass der Kondensator vollständig entladen ist. P1 notiert

$$u_C(t = 0^-) = 0 \text{ V}$$

und

$$i_L(t = 0^-) = 0 \text{ A.}$$

Außerdem sagt er, dass

$$i_C(t = 0^-) = \frac{U_0}{R}$$

und begründet das damit, dass der Schalter offen ist, vgl. (0341). Nach Überlegen (14 Sekunden) ergänzt P1 dann:

„Ach, so, nee i_C ist, wir sind ja vor dem Schalten, das ist 0 Volt äh 0 Ampere. Hier. . . das ist 0 Ampere, weil wir vor dem Schalten sind.“

(0348)

P1 erläutert folgendermaßen, was nach dem Schließen des Schalters passiert:

„Jetzt fließt ja i_C . u_C ist unverändert, weil die Spannung am Kondensator nicht springen kann. $i_L(t)$ ist auch unverändert.“

(0423)

P2 ergänzt dann noch, „aber jetzt $\frac{U_0}{R}$ “ und P1 antwortet mit: „Ja, genau. $i_C = \frac{U_0}{R}$ “. Sie notieren ihre Ergebnisse, welches korrekt sind.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung entspricht der Bearbeitungsvariante 1. Zunächst wird ein falscher Wert für $i_L(t = 0^-)$ angegeben, was aber unmittelbar korrigiert wird.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Beim Untersuchen der physikalischen Vorgänge auf der linken Seite des Schwingkreises werden die einzelnen Bauteile sukzessive herangezogen. Gleiches gilt für die Bedingungen an die Bauteile (z. B. vollständige Entladung), wie sie in der Aufgabe angegeben sind.
- **{A3}** Bei der Betrachtung der physikalischen Mechanismen werden hier wieder Merksätze herangezogen, konkret

„Die Spannung kann am Kondensator nicht springen.“

G5 : P1 leitet die Aufgabenbearbeitung in (0134) mit der Bemerkung ein, dass alle drei Werte vor dem Schließen gleich 0 sind,

„weil für $t < 0$ s sind S_1 und S_2 geöffnet, Kondensator entladen und Spule hat auch nichts in sich, dann ist es hier ein Leerlauf.“

P2 markiert dann den linken Teil der Skizze, welcher Kondensator, Widerstand und die Quelle enthält, und begründet dieses damit, dass nur S_1 geschlossen ist, vgl. (0217). P1 entgegnet ihm, dass I_L „trotzdem“ (0225) = 0 sein wird. Er begründet weiter, dass der u_C am Anfang 0 ist, da der Kondensator erst aufgeladen wird und der Strom, der maximal fließt, ist $\frac{U_0}{R}$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung entspricht der Bearbeitungsvariante 1. P2 markiert in der Skizze in der Aufgabe, welcher Teil der Schaltungstopologie gerade für die Bearbeitung relevant ist.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 erkennt, dass die Spule und somit der Spulenstrom i_L in dem linken Teil des Schwingkreises fehlt. Dieses verdeutlicht er durch das „trotzdem“, also den Hinweis, dass neben den verwendeten Argumenten auch in Bezug auf seinen Aufgabeneinstieg dieser null ist.
- **{A1}** Der Begriff „Leerlauf“ wird als Schlagwort zur Beschreibung des Vorgehens verwendet.
- **{A2}** Die Studierenden verwenden physikalische Mechanismen bei ihren Überlegungen. Dabei verbindet P1 direkt Argumente über den grundsätzlichen Aufbau bzw. die Bestandteile des Netzwerks (Schalter sind offen) und Eigenschaften der Bauteile (sind entladen).
- **{A2}** P2 verdeutlicht sich die relevanten Bestandteile an der Skizze, verwenden sie dann als „informative Figur“ (entsprechend Bruder und Collet (2011)) für das Verhalten des Netzwerks.

Zwischenfazit zu den Aufgabenteilen B1 und B2
--

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler in diesem Aufgabenteil hängen damit zusammen, dass bei der Anwendung von Resultaten aus der Elektrotechnik-Vorlesung nicht überprüft wird, ob alle Voraussetzungen zur Anwendung vorhanden. Eine Gruppe missinterpretiert den physikalischen Kontext, in dem sie die Aufgabe dem Gebiet „Wechselstrom“ zuordnet. Eine Gruppe zieht irrelevante Gleichungen heran. Bei diesem Aufgabenteil ist es eine Problemstelle für die Studierenden herauszufinden, welche physikalischen Einflüsse für die gesuchten Werte eine Rolle spielen, insbesondere dass der rechte Teil des dargestellten Netzwerks hier irrelevant ist. Es besteht einerseits eine Unklarheit darüber, ob eine Reihen- oder Parallelschaltung vorliegt und andererseits bei mehreren Gruppen, wie die Notation 0^+ und 0^- zu verstehen ist, wodurch kurzfristig bei einer Gruppe ein Fehler bei der Bestimmung eines gesuchten Wertes auftritt.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Ein Studierendenpaar hinterfragt am Anfang, ob sie bereits ähnliche Aufgaben gelöst haben, vgl. Polya (1949), und möchte auf diese Weise Analogien für ihren Lösungsprozess nutzen. Außerdem wird ein zu allgemeiner Ansatz verwendet und dabei über Energien argumentiert. Es treten bei einem Paar Missverständnisse über die Bedeutung der Notation 0^+ und 0^- auf. Ein Paar erwähnt explizit, dass die Spule aus der konventionalisierten Darstellung irrelevant für den Aufgabenteil ist. Ein Paar betrachtet den folgenden Aufgabenteil, um hier Rückschlüsse auf den Ansatz ziehen zu können. Eine Gruppe verwendet „Leerlauf“ als Schlagwort für die zugrundeliegende Situation.

{A2} Alle fünf Paare argumentieren über physikalische Mechanismen. Bei der Interpretation der Bauteilgleichung des Kondensators spielen zwei Paare „Mapping Mathematics to Meaning“, vgl. Tuminaro und Redish (2007), in dem aus der mathematischen Formel das physikalische Verhalten ablesen möchten. In einer Gruppe bleibt ein Mitglied auf der physikalischen Ebene, während das andere genau die Verbindung zwischen den beiden Seiten des E-Spiels sucht. Bei vier der fünf Gruppen treten Argumente auf, welche Mathematik und Physik verbinden. Zwei Paare variieren die Aufgabe und fügen Bauteile hinzu bzw. nehmen sie gedanklich aus dem Netzwerk zum besseren Verständnis der Situation. Es werden informative Figuren zum Erläutern der Physik verwendet.

{A3} Zwei Paare verwenden Merksätze über Strom und Spannung an Spule und Kondensator wie „Die Spannung kann am Kondensator nicht springen.“ Allgemeinere Formen davon sind „Kondensator, der Strom eilt vor“, „Bei Induktivitäten, die Ströme sich verspäten.“ Ein Paar sammelt alle Gleichungen, die ihnen relevant erscheinen. Die Formeln werden allgemein angegeben und dann auf die Situation angepasst.

{A4} Ein Paar sammelt alle Gleichungen, die ihm relevant erscheinen und passt diese jeweils auf die Situation an.

5.5.2 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B3

[B3] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq 0$ her. (3 Punkte)

G1 : P2 weist auf die Bauteilgleichung

$$i_C(t) = C\dot{u}_C(t) \quad (5.49)$$

hin. P1 möchte die „Maschenregel“ heranziehen, setzt dann aber die Bauteilgleichung (5.49) mit $i = \frac{U_0}{R}$ gleich. Er fragt, ob man vor der höchsten Ableitung immer eine 1 stehen haben möchte. P2 begründet das Gleichsetzen damit, dass der Strom an beiden Bauteilen identisch ist. P1 merkt dann an, dass „etwas noch nicht passt“ und setzt dann die Maschenregel für die Spannung ein, um $u_R = U_0 - u_C$ zu erhalten. Durch Kombination dieser Überlegungen erhalten sie die richtige Differentialgleichung.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung entspricht der SEL zu diesem Aufgabenteil. Es gibt Überlegungen zu der Lösbarkeit der erhaltenen DGL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 und P2 bereiten Gleichungsmanagement vor. Dabei verwenden sie dafür zwei Arten von Gleichungen; erstens Gleichungen aus dem Aufbau des Netzwerks (Maschen, Knoten), **{A4}**, zweitens Gleichungen für die Bauteile (Kondensator, Spule, Widerstand), **{A3}**.
- **{B2}** Sie gehen sukzessiv vor, fügen also immer wieder Gleichungen hinzu, bis sie zu einer Gleichung gelangen, die nur noch bekannte Größen enthält.
- **{B3}** P1 bedenkt den Ansatz zur Lösung der entstehenden mathematischen Aufgabe, indem er konkret fragt, in welcher Form diese angegeben werden muss.

G2 : P2 schlägt die Bauteilgleichungen im Skript nach, da P1 und P2 unsicher bei den Formeln sind. P1 erkennt, dass bei dem Kondensator C noch keine Spannung abfällt. P2 möchte anschließend eine „Masche hereinlegen“ (0754) P1 stellt zu $i = C\dot{u}_C(t)$ um und sagt:

„ u ist dann das Integral von $\frac{i}{C}$ oder was? Und das integrierst du dann über die Zeit.“

(0844)

P2 schlägt vor, $U = Z \cdot I$ zu setzen, erkennt aber dann, dass die Größen so komplex werden. P1 sagt dann, dass die Spannung für Spule und Widerstand angegeben sind und für den Kondensator nur der Strom. Daraufhin entgegnet P2:

„Ich glaube, dass das beim Kondensator vom Strom abhängt. Dieses ist C ist irgendwie eine Proportionalität zwischen dem Strom und der Ableitung der Spannung. Und das L ist eine Proportionalität zwischen der Spannung und der Ableitung vom Strom.“

(1000)

P1 merkt dazu an:

„Wenn sich die Spannung nicht mehr ändert, also die Ableitung 0 ist, dann ist auch der Strom 0.“

(1000)

und setzt nach Bestätigung von P2 fort mit:

„Ja, aber dann ist doch (...) die Spannung das Integral über i .“

(1039)

und schlägt eine unbestimmte Integration vor. Als nächstes macht P1 eine Skizze, bei der nur der linke Teil der Skizze aus der Aufgabenstellung enthalten ist. P2 erkennt dann in (1133):

„Hier, das ist total cool, weil wir brauchen jetzt nur i_C einsetzen. Was hast du denn?
Hast du die gleiche Masche wie ich?“

In 1241 sagt P2 dann, dass nach $u_C(t)$ aufgelöst werden soll. Er setzt dann $i_C = C \frac{du}{dt}$ in $u_C(t) = U_0 - i_C \cdot R$ ein und ergänzt noch, dass U_0 „ja fest“ (1321) ist. Er führt dann aus:

„Also sozusagen u , u ist dann den y oder so.“

(1321)

und

„Ich finde das verwirrend, wenn da viele Sachen dranstehen.“

Damit kommen sie auf die Differentialgleichung $y = U_0 - C \cdot y' \cdot R$. (Diese ist korrekt, wenn man $y = u_C(t)$ setzt.)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung entspricht der SEL. Zunächst formen die Studierenden die Bauteilgleichungen, welche Ableitungen enthalten, nach einer anderen Größe um, so dass Integrale entstehen. P2 verwendet zwischenzeitlich einen Zugang für Wechselstrom. Die Studierenden interpretieren das mathematisch über die Bauteilgleichungen beschriebene Verhalten physikalisch. Die Studierenden nehmen einen Notationswechsel hin zur mathematischen Notation vor.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 überverallgemeinert die Aufgabe zunächst, in dem komplexe Bezeichnungen aus dem Gebiet „Wechselstrom“ mit der Impedanz Z verwendet.
- **{A1}** P1 untersucht anschließend entsprechend Polya (1949), was in dieser Aufgabe gegeben ist und versucht Rückschlüsse zu ziehen.
- **{A2}** P2 interpretiert die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule und die darin enthaltenen Proportionalitäten zwischen jeweils der einen Größe und der Ableitung der anderen Größe. Dieses bezieht er auf die physikalischen Mechanismen im Netzwerk, d. h. er betreibt „Mapping Mathematics to Meaning“. P1 verdeutlicht sich diese Vorgänge an einem Zahlenbeispiel, in dem er 0 einsetzt.
- **{A2}** Beim Umstellen zu einem Integral beachten die Studierenden die physikalischen Mechanismen.

- **{A2}** P1 erstellt eine Skizze als „informative Figur“ (vgl. Bruder und Collet (2011)) zur Verdeutlichung der Situation.
- **{A3}** und **{A4}** Die Studierenden ziehen benötigte Gleichungen heran.
- **{B2}** Die Studierenden kombinieren die Gleichungen im Gleichungsmanagement.
- **{B3}** Beim letztendlichen Kombinieren der Gleichungen im Gleichungsmanagement verwenden P1 und P2 die Bezeichnung für Übungsaufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen aus der Mathematik, d. h. sie setzen

$$y = u_C(t).$$

Sie greifen also auf eine ihnen vertraute Notation für derartige Mathematik-Aufgaben zurück.

- **{B3}** Die beiden Studierenden arbeiten mathematisch mit der Bauteilgleichung und stellen diese um, um ein Integral zu erhalten.

G3 : P2 beginnt damit, die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule anzugeben, also $C \cdot \dot{u}_C(t) = i_C(t)$ und $u_L(t) = L \cdot \dot{i}_L(t)$. P1 fragt daraufhin:

„Jeder ein anderer Weg? Einer über Spannung, einer über Strom?“

(0500)

Da es P2 egal ist, sagt P1, dass es über i schöner sei. P2 durchläuft mit dem Stift dann den linken Teil der Skizze aus der Aufgabe und sagt, dass sie den rechten Teil der Skizze nicht brauchen, also U_0 , R und C enthalten ist. P2 gibt dann in (0620) noch die „Bauteilgleichung“

$$u_C + u_R = U_0$$

an. P1 erhält dann die korrekte Lösung, ohne weiterhin auszuführen, was genau er macht.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Es wird am Anfang nicht der Aufgabenstellung entsprechender Alternativweg über eine Differentialgleichung zum Strom erwogen. Die Studierenden folgen aber schließlich dem in der SEL beschriebenen Weg.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 durchläuft die konventionalisierte Skizze und setzt sich so mit den physikalischen Mechanismen auseinander.
- P1 und P2 betreiben ein strukturiertes Gleichungssammeln: Sie notieren zuerst die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule, d. h. **{A3}**, und dann die Kirchhoff-Gleichungen, **{A4}**.
- **{B3}** P1 verändert dann die Aufgabe, in dem er eine Differentialgleichung über den Strom i bildet, da es „schöner“ sei.
- **{C4}** Die Studierenden validieren, in dem sie unterschiedliche Wege einsetzen und überprüfen, ob sie dasselbe Ergebnis erhalten.

G4 : P1 stellt am Anfang die Maschengleichung für den linken Teil der Skizze in der Aufgabe auf, also $U_0 = u_C(t) + u_R$. P2 deutet dann auf die Masche in der Skizze und fragt, ob P1 diese meint. P1 notiert dann die Bauteilgleichung für den Kondensator, also

$$i_C(t) = C \cdot \dot{u}_C(t)$$

und isoliert $\dot{u}_C(t)$ in dieser Gleichung. P2 fragt in (0720):

„Brauchen wir denn Knoten?“

P1 verneint dieses und notiert $u_C = i_C \cdot R$, also das Ohm'sche Gesetz, und kombiniert die drei Gleichungen zu der korrekten DGL $U_0 = \dot{u}_C(t)CR + u_C(t)$. Daraufhin fragt P2, woher das $u_C(t)$ kommt und P1 begründet:

„Ja, du hast ja über den Kondensator auch noch Spannungsabfall.“

(0902)

Anschließend schreibt er die Formel um zu $0 = \dot{u}_C(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) - \frac{U_0}{RC}$, wobei P2 sagt, dass man U_0 auf der linken Seite stehenlassen kann.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Der Lösungsweg entspricht dem Weg in der SEL. Es wird zusätzlich hinterfragt, ob auch der zweite Typ an Kirchhoff-Gleichungen benötigt wird und die erhaltene DGL vor dem physikalischen Hintergrund interpretiert.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P2 versucht die Differentialgleichung, die sie als Lösung erhalten, zu interpretieren und fragt nach der Ursache für den additiven Term $u_C(t)$. P1 begründet diesen dann über die physikalischen Mechanismen. Somit tritt hier auch das E-Spiel „Mapping Mathematics to Meaning“ auf.
- P1 und P2 betreiben ein strukturiertes Gleichungssammeln, einerseits mit den Bauteilgleichungen (**{A3}**) und andererseits mit den Kirchhoff-Gleichungen (**{A4}**).
- **{AB}** Bei den letzteren hinterfragt P2, ob sie beide Typen von Kirchhoff-Gleichungen benötigen, also auch Knoten. Dieses nutzt er als Kriterium für Vollständigkeit statt dieses in einem sukzessiven Gleichungsheranziehen zu überprüfen.
- **{B3}** Es gibt Unsicherheiten darin, wie die DGL aufgelöst werden muss. Dieses zeigt, dass schon Verbindungen zum nächsten Schritt gezogen werden.

G5 : P1 setzt in (0305) an mit $U = \frac{Q}{C}$, woraufhin P2 ergänzt, dass t gegeben und Q nicht gegeben ist. Daraufhin nennt P1 die Formel

$$Q = \int i_C dt.$$

P1 fragt dann in 0353, ob

„ i die Ableitung der Spannung nach der Zeit“

sei. P2 meint dann, dass das die „Bauteile für die Maschengleichung“ (0450) seien und P1 schlägt in (0614) vor, erstmal die Maschengleichung aufzustellen und formt direkt

$$u_C = U_0 - R \cdot i_C(t)$$

zu

$$u_C = U_0 - R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

um.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden erhalten am Ende das richtige Ergebnis, wobei deren Weg nicht richtig klar ist. Es wird zwischenzeitlich die falsche Gleichung $Q = CU$ herangezogen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P1 vermischt Mathematik und Physik, in dem er den Zusammenhang am Kondensator als „Strom = Ableitung der Spannung nach der Zeit“ beschreibt.
- **{A3}** P1 zieht eine falsche Gleichung für den Kondensator heran, die sich mit der Ladung Q auseinandersetzt.
- **{A4}** Leider ohne weitere Ausführung zieht P1 dann eine Maschengleichung heran und stellt schließlich die richtige DGL auf.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil B3

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Herausforderungen sind in dieser Aufgabe das Finden einer DGL in einer Form, die mit erlernten mathematischen Methoden lösbar ist. Des Weiteren ist die Bearbeitung einer DGL mit elektrotechnischen Größen unter Einsatz mathematischer Methoden für eine Gruppe eine Herausforderung, so dass diese die Notation von u_C (gesuchte Funktion in der Elektrotechnik) auf y (übliche Bezeichnung der gesuchten Lösungsfunktion in der Mathematik) überführt. Eine weitere Herausforderung ist die Validierung der erhaltenen DGL hinsichtlich einer korrekten Beschreibung der betrachteten physikalischen Vorgänge. Einem Studierendenpaar ist unklar, ob sie die Aufgabe alternativ über eine DGL, die den Strom beschreibt, lösen können, da sie dieses als „schöner“ empfinden. Unklar ist auch, ob genügend Gleichungen aufgestellt wurden, d. h. einerseits die Kirchhoff-Gesetze korrekt angewendet und andererseits alle relevanten Bauteile betrachtet wurden. Eine letzte Unklarheit ergibt sich bzgl. des Lösungsverfahrens für die DGL und in welcher Weise diese aufgestellt werden muss, so dass bekannte Lösungsverfahren angewendet werden können. Fehler ergeben sich durch eine falsche Zuordnung der Aufgabe bei dem elektrotechnischen Fachgebiet, hier eine Zuordnung zum Wechselstrom und damit der Betrachtung von Impedanzen statt Widerständen. Des Weiteren zieht eine Gruppe die irrelevante Gleichung $Q = CU$ heran, die die Ladung im Kondensator beschreibt.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Eine Gruppe wählt einen zu allgemeinen Ansatz für die Aufgabe, in dem sie komplexe Variablenbezeichnungen aus dem Gebiet „Wechselstrom“, konkret die Impedanz Z , verwendet. Alle fünf Studierendenpaare „lesen“ die konventionalisierte Darstellung und arbeiten damit. Zwei Paare gehen die Angaben aus der konventionalisierten Skizze durch und versuchen Rückschlüsse auf die benötigten Gleichungen zu ziehen.

{A2} Ein Paar interpretiert die Bauteilgleichungen und zieht daraus Informationen über die physikalischen Mechanismen. Ein Paar verwendet eine „informative Figur“ im Sinne von Bruder und Collet (2011), um sich die Situation zu verdeutlichen. Ein Paar interpretiert die erhaltene DGL physikalisch und hinterfragt die Gründe für den auftretenden linearen Term. Ein Studierendenpaar vermischt argumentativ Mathematik und Physik, in dem gesagt wird: Kondensator ist „Strom = Ableitung der Spannung nach der Zeit“.

{A3} Vier der fünf Paare verwenden exakt die drei korrekten Gleichungen für die Bauteile (Kondensator, Spule, Widerstand). Ein Paar zieht eine falsche Gleichung heran, die sich mit der Ladung Q im Kondensator auseinandersetzt.

{A4} Alle Studierendenpaare verwenden Gleichungen zum Aufbau des Netzwerks (Maschen, Knoten), im folgenden Kirchhoff-Gleichungen.

{AB} Ein Paar hinterfragt, ob sie alle Formen von Gleichungen, d. h. Typ **{A3}** und **{A4}**, benötigen.

{B2} Zwei Studierendenpaare gehen sukzessive vor und ersetzen in ihren Überlegungen immer unbekannte Ausdrücke mittels weiterer Gleichungen. Sie betreiben Gleichungsmanagement.

{B3} Beim Aufstellen der Gleichungen unternimmt ein Paar Überlegungen, welche Form sie haben muss, um lösbar zu sein. Ein Paar führt einen Übergang auf die Notation aus der Mathematik durch, in dem $u_C(t) = y$ gesetzt wird. Ein Paar stellt eine DGL über den Strom $i_C(t)$ auf. Ein Paar diskutiert Unsicherheiten bzgl. der Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen.

{C4} Zur Validierung verwendet ein Studierendenpaar verschiedene Lösungswege und überprüft, ob sie dasselbe Ergebnis erhalten.

5.5.3 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B4

[B4] Lösen Sie die Differentialgleichung. Wie groß ist die maßgebliche Zeitkonstante der Schaltung?

G1 : P1 weiß sofort, dass die Zeitkonstante

$$\tau = RC$$

ist, aber möchte dieses herleiten. P2 sagt dann aber, dass

„das so eigentlich ja immer definiert ist. Deswegen kann man das schon sagen.“

(1225)

P1 fragt dann, wie man eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung löst:

„Wie geht das denn jetzt nochmal bei den inhomogenen? Wir müssen eine Lösung raten und dann? Und dann die andere durch die homogene bestimmen, meine ich, oder?“

(1305)

Diese Herangehensweise ist richtig, aber P1 bemerkt, dass das „jetzt nicht so hilfreich“ (1305) ist, da dieses Verfahren zu homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehört, aber P2 ist unsicher, ob das Merkblatt für Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht dort hilfreich ist und beide überlegen über eine Minute.

P1 führt dann fort:

„Wenn jetzt einfach $U_0 = 0$ V wäre, würde da auch nichts passieren. Weil der Kondensator ist ja auch nicht geladen... Aber ich würde sagen, wir das erstmal mit homogenen Gleichung.“

(1506)

Dann führt P1 aus, dass

„man eine inhomogene [DGL] löst, in dem man die homogene löst und dazu noch eine spezielle Lösung der inhomogenen, oder?“

(1506)

P1 homogenisiert dann die DGL, d. h. er ersetzt U_0 durch 0, und macht einen Ansatz über die Exponentialfunktion, in dem er

$$u_C(t) = a \cdot e^{t/\tau}$$

setzt und dieses in die homogenisierte Differentialgleichung einsetzt. So erhält er:

$$0 = -\frac{1}{\tau} \cdot a \cdot e^{t/\tau} + \frac{1}{RC} \cdot a \cdot e^{-t/\tau} \Leftrightarrow 0 = \underbrace{a \cdot e^{-t/\tau}}_{u_C(t)} \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{RC} \right) \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{RC} \\ \Leftrightarrow \tau = RC$$

Nach der Rechnung ergänzt P1:

„Dann müssen wir noch das mit dem Anfangswert berücksichtigen.“

(2039)

P2 sagt, dass nun eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung benötigt wird. Nach Überlegen wird P1 klar, dass man verwenden kann, dass für $t \rightarrow \infty$ gilt: $u_C = U_0$. P2 zeichnet hierzu den Verlauf der Funktion $u_C(t)$ auf. Als allgemeine Lösung kombinieren P1 und P2:

$$u_C(t) = a \cdot e^{-t/RC} + U_0 \quad (5.50)$$

Außerdem ist ihnen der Wert $u_C(t=0) = 0$ bekannt. Zur Bestimmung des Wertes von a setzt P1 $t = 0$ in die Gleichung (5.50) ein:

$$u_C(t=0) = a \cdot 1 + U_0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a = -U_0$$

So erhalten sie korrekterweise als Gesamtlösung: $u_C(t) = U_0 (1 - e^{-t/RC})$.



Abbildung 5.5.1: Skizze von P2 zu dem Verlauf von $u_C(t)$

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe über einen Partikuläransatz entsprechend der SEL. Es ist jedoch zunächst unklar, ob dieser für eine DGL 1. Ordnung überhaupt verwendet werden darf. Die Zeitkonstante wird entsprechend der SEL bestimmt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** In der Bearbeitung werden sukzessive Informationen herangezogen, z. B. für die bekannten Anfangswerte der DGL.
- **{A3}** P1 kann durch ein „Berufen auf Autoritäten“ entsprechend Bing (2008) direkt die Zeitkonstante angeben und sagt dazu, dass es so definiert ist. Später erhält er das Ergebnis aus dem von der Musterlösung vorgesehenen Weg.
- **{B3}** P1 ist unsicher beim Verfahren zur Lösung der DGL. Er beschreibt, dass er die allgemeine Lösung der homogenen und eine Lösung der inhomogenen Gleichung benötigt, sagt dann aber, dass das Verfahren nur für Differentialgleichungen höherer Ordnung als 1 möglich ist. Dieses stimmt nicht, allerdings werden solche Verfahren in der Höheren Mathematik häufig ausschließlich in diesem Zusammenhang betrachtet.
- **{B4}** P1 versucht die homogenisierte DGL mit den physikalischen Vorgängen zu betrachten, in dem er überlegt, was passiert, wenn $U_0 = 0$ Volt wäre.
- **{B4}** P1 betrachtet den Wert von $u_C(T)$ bei $t = \infty$, was P2 durch eine Skizze von $u_C(t)$, vgl. Abbildung 5.5.3, bestätigt. Unter Verwendung von $u_C(0) = 0$ bestimmen sie die Konstante.

G2 : P1 leitet die Bearbeitung dieses Aufgabenteils in (1552) mit „So, Trennung der Variablen“ ein, vgl. Erläuterungen zur Mathematik in dem vorherigen Abschnitt. P2 reagiert mit

„ $\frac{dy}{dx}$ machen. Wie geht das dann weiter?“

und ergänzt in (1628):

„Ja klar, die Konstante weg. Ich weiß zwar noch nicht genau, wie es dann weitergeht.“

Danach versuchen P1 und P2 das Verfahren zu rekonstruieren. P1 erläutert dann in (1727):

„Mit Trennung der Variablen. (...) Du bringst dein y rüber und machst mal dx . (...) Dann integrierst du beides.“

P2 daraufhin:

„Dann kommt eine Konstante mit rein. (...) Langsam kommt es wieder.“

Sie führen dann beide die Integration aus und in (1928) fragt P1:

„Was wollen wir denn jetzt eigentlich haben?“,

was P2 mit

„Naja, wir wollen das lösen. Du willst y haben.“

beantwortet. In (1950) merkt P1 dann an:

„Wir dürfen das nicht mit x und y machen. Wir müssen das mit dem machen, t usw. Viel besser.“

Die übertragen sie Ihre Rechnungen, in dem sie $y = u_C(t)$ setzen. In (2323) merkt P2, dass sie die Konstante nicht mit C bezeichnen sollten:

„Das ist total dumm, das C zu nennen.“

So kommen sie auf $u_C(t) = -CR \frac{du}{dt}$, sind dann aber unsicher bei der Lösung. P2 schlägt in (2312) vor:

„Können wir ja mal ausprobieren. Wenn du das einsetzt, muss es das lösen.“

Ab (2856) arbeiten sie gemeinsam an derselben Bearbeitung. Als Lösung erhält P2 in (3211)

$$u_C(t) = k(t)e^{-t/CR},$$

wobei er direkt die Konstante variiert, d. h. aus dem k ein $k(t)$ macht. In (3455) sagt P2 dann:

„So, jetzt müssen wir das U_0 da mit hineinkriegen. (...) Und das ging jetzt durch einsetzen. Das war wir ableiten, da einsetzen.“

P1 daraufhin:

„Und dann bei $t = 0$ muss es $= U_0$ sein? Ne, muss es gleich 0 sein, ne?“

Anschließend führen sie die Variation der Konstanten aus. Nach der Rechnung hinterfragt P1 in (4158), ob es richtig sei, dass die Terme mit $k(t)$ in der Rechnung wegfallen. Sie kommen in (4344) schließlich zu der richtigen Lösung.

Der Begriff der maßgeblichen Zeitkonstanten ist ihnen unklar, vgl. P1 in (4424). P2 führt dann aus:

„Vielleicht $\frac{1}{CR}$, weil du das mit t multiplizierst. Je nachdem wie C und R zueinander stehen, ist die Abhängigkeit von t . Zeitkonstante, das war du mit der Zeit multiplizierst.“

Sie antworten dann mit $\tau = \frac{1}{CR}$, was inkorrekt ist.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe über Trennung der Veränderlichen und Variation der Konstanten entsprechend der SEL. Dabei wechseln sie von der von ihnen in B3 eingeführten mathematischen Notation wieder auf die elektrotechnische Notation. Sie wissen nicht, was eine Zeitkonstante ist, und erschließen sich den Begriff falsch, so dass sie diesen Teil falsch beantworten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Sie versuchen sich den Begriff der Zeitkonstanten aus dem Kontext zu erschließen. Ihr falsches Ergebnis resultiert aus einer Fehlinterpretation und nicht aus einer falschen Rechnung.
- **{A1}** und **{A2}** P1 schlägt dann vor, dass sie wieder auf die Bezeichnungen aus der Elektrotechnik übergehen.
- **{A1}** P2 hat im mathematischen Algorithmus ein Problem durch die Verwendung der mathematischen Konstante C , welche in der Elektrotechnik die Kapazität bezeichnet.
- **{A2}** P2 bedenkt, dass sie auch U_0 verwenden müssen. Dieses kann man sowohl auf die Bedeutung in den physikalischen Mechanismen beziehen als auch darauf, dass es eine in der Aufgabe enthaltene Information ist.
- **{B3}** P1 nennt als erstes das passende Verfahren zur Lösung einer derartigen Aufgabe. Dann rekonstruieren P1 und P2 das benötigte Verfahren „Trennung der Variablen“.
- **{B3}** P1 ist zwischenzeitlich unklar, was für eine Form das Ergebnis haben muss. P2 klärt dann, dass die Funktion y gesucht ist.
- **{B3}** Sie erkennen nicht, dass der Wegfall des $k(t)$ -Terms eine Probe ihres Ergebnisses ist.

G3 : P2 bestimmt am Anfang bestimmte Werte von u_C für die „Anfangswertbedingung“: „ u_C für 0 haben wir schon“ (0752) Er sagt dann, die Lösung $u_C = U_0 \cdot e^{\dots}$ sein muss. P1 schlägt daraufhin vor, dass sie „von ganz unten anfangen“ (0805) mit einem kompletten e-Ansatz. Dabei ist er unschlüssig, ob er Konstante $\cdot e^{-t/\tau}$ oder Konstante $\cdot e^{st}$ verwenden soll. P2 ergänzt dann, dass $\tau = -\frac{1}{s}$ ist. P2 versteht dann nicht, warum das $U_0 = 0$ zu setzen ist. P1 erläutert daraufhin die Vorgehensweise:

„Musst nur bemerken, dass erst homogen, dann inhomogen mitlösen, dann weiter addieren, dann hast ja die Lösung.“

(0839)

P2 sagt darauf, dass das τ eines RC-Schwingkreises RC ist, worauf P1 entgegnet, dass das ausgerechnet werden soll. Dann rechnen sie zwei Minuten. P2 sagt dann, dass er bei u_C nicht weiterkommt und möchte statt 0 eine Konstante hinschreiben. P1 erkennt dann den Fehler von P2, der U_0 als Konstante verwendet hatte, und ergänzt dann noch, dass die Konstante $\neq 0$ sein soll, „weil sonst ist die Rechnung überflüssig.“ (1133) Beide rechnen dann unabhängig voneinander und nachdem P1 fertig ist, erklärt er P2:

„So + die homogene Lösung, da erstmal k drin lassen, dann die inhomogene lösen und dann kannst du mit deiner Anfangsbedingung dein k wieder bestimmen.“

(1420)

Er erläutert dann noch, dass man anschließend das τ berechnen kann, was dann da auch steht. P2 erläutert hierzu, dass nach Division durch k dort $1 = \frac{RC}{\tau}$ steht, was man zu $\tau = RC$ umstellen kann, vgl. (1500). P2 fragt dann:

„Wieso muss man das eigentlich noch ausrechnen, das U_0 ?“,

was P1 damit begründet, dass dort „Lösen Sie die DGL“ und nicht „Gebe das Ergebnis“ steht. So erhält P2 $U_0 = u_C + RC\dot{u}_C$. P1 ergänzt dann:

„Dann einmal die Bedingung, dass die Gleichung gegen unendlich geht, das heißt gegen unendlich wird die Ableitung 0“

(1644)

P2 notiert dieses als $\dot{u} = 0$, also $U_0 = u_C$. P1 erklärt in (1730) dann weiter:

„ u_C ist dann die Summe der homogenen + einer speziellen der inhomogenen und da kannst du die Anfangsbedingung einsetzen und dann kriegst du $k = -U_0$.“

P2 sagt dann „ u_C habe ich jetzt quasi U_0 .“ (1730), woraufhin P1 erläutert:

„Ne, das ist eine spezielle Lösung, das ist eigentlich u_C inhomogen. Man kann ja noch so kleine Indizes mit i machen, damit man weiß, dass es für inhomogen steht. Dann jetzt: u_C ist u_C homogen + spezielle der inhomogenen.“

P1 sagt dann, dass dieses $= k \cdot e^{t/\tau}$ ist und τ ja schon bestimmt wurde. P2 ergänzt dann $+U_0$ wegen $t = 0$, was P1 über die Werte bei $u_C(t = 0^-)$ und $u_C(t = 0^+)$ begründet. P1 führt weiter aus, dass $e^{-0} = 1$ ist, und P2 notiert $= k + U_0$, was P1 zu $0 = k + U_0$ ergänzt, wodurch sich dann $k = -U_0$ ergibt. Damit erhalten sie dann die richtige Lösung.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe über einen Partikuläransatz entsprechend der SEL, wobei Unklarheiten bei dem Verfahren im Zusammenhang damit auftreten, wie die Lösung der inhomogenen DGL bestimmt werden kann und in der Lösung berücksichtigt werden muss. Die Zeitkonstante wird korrekt bestimmt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Es tritt eine Mischung verschiedener Notationen aus verschiedenen Kontexten auf. Dieses zeigt die Bedeutung der Benennung von Größen im Kontext der Elektrotechnik.
- **{A1}** Es gibt Unsicherheit über den Aufgabenteil zur Zeitkonstanten. Soll es im Sinne von Bing (2008) als „Berechnung“ oder als „Berufen auf Autoritäten“ aufgefasst werden?
- **{A1}** Durch Notation möchten die Studierenden die homogene und inhomogene Lösung ihrer Differentialgleichung unterscheiden.

- **{A2}** P2 schließt daraus, dass die Funktion asymptotisch gegen unendlich geht, dass die Ableitung als lokale Veränderungsrate 0 wird. Das ist entsprechend Tuminaro und Redish (2007) ein „Mapping Meaning to Mathematics“.
- **{B2}** P2 überlegt am Anfang, welche Form die Lösung der DGL haben muss. Damit wird ein Rückwärtsarbeiten ermöglicht.
- **{B3}** P2 erkennt die Analogie zwischen der Konstante k in der Differentialgleichung und Konstanten bei Stammfunktionen im Zusammenhang von unbestimmten Integralen. Das ist im Sinne von Bing (2008) ein Beispiel für „Math Consistency“.

G4 : P2 setzt an mit $\underline{U} = \underline{U}e^{-t/\tau}$. P1 ignoriert die Unterstreichung von U , was andeuten soll, dass U eine komplexe Variable ist, und leitet reell ab zu $\dot{u}_C(t) = -\frac{U}{\tau}e^{-t/\tau}$. Dann setzt P1 ein, homogenisiert die DGL durch Ersetzen von U_0 durch 0 und sagt, dass sich das $e^{-t/\tau}$ herausgekürzt. So erhält er:

$$0 = CR \cdot 1 : \left(-\frac{1}{\tau}\right) + 1 \Leftrightarrow -\tau = -CR \Leftrightarrow \tau = CR$$

und hat auf diese Weise die Zeitkonstante bestimmt. P1 setzt fort mit

„Jetzt wissen wir ja, dass $u_C(t=0) = 0$ und das ist $= U \dots$ “

(1249)

Daraufhin fragt P2, ob das vor oder nach dem Schalten ist. Zunächst antwortet P1, dass das egal ist und meint dann, dass es nach dem Schalten U_0 ist. P2 klärt auf mit „Es darf nicht springen.“ (1307) P2 fragt dann, ob P1 nicht „die im inhomogenen Teil“ (1329) meint und fragt, ob sie es nicht gegen unendlich laufen lassen müssen:

„Und dann ist es U_0 . Und so wird es $u_C = U_0$.“

(1329)

P1 sagt dann, dass das der partikuläre Teil ist, bei dem man $t \rightarrow \infty$ betrachtet. P1 notiert $u_C(t \rightarrow \infty) = U_0$ und erkennt dann, dass $e^{-\infty} 0$ wird. So kommen sie auf das falsche Ergebnis: $u_C(t) = U_0 e^{-t/RC}$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe über einen Partikuläransatz entsprechend der SEL. Dabei werden zwischenzeitlich komplexe Variablen und Funktionen verwendet. Es treten Schwierigkeiten beim Bestimmen der Lösung der inhomogenen Gleichung auf. Die Zeitkonstante wird entsprechend der SEL bestimmt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 und P2 verwenden andere Anfangswerte, als sie selbst in B1 und B2 bestimmt haben. Sie nutzen nicht die vom Aufgabensteller intendierte Verbindung zwischen den Aufgabenteilen.
- **{B2}** Die Zeitkonstante wird entsprechend Musterlösung bestimmt.

- **{B3}** P2 setzt zunächst mit komplexen Größen an, wobei er gleichzeitig erkennt, dass die Lösung eine e-Funktion enthalten muss im Sinne eines Rückwärtsarbeitens. Dabei wird missachtet, dass den Studierenden keine komplexe Analysis bzw. Funktionstheorie bislang vermittelt wurde.
- **{B3}** Bei der Lösung der DGL gehen sie falsch mit der Konstanten um. Es gibt also Probleme mit der Anwendung des mathematischen Verfahrens.

G5 : P1 leitet ein mit

„Ich würde jetzt sagen, wir machen „Trennung der Veränderlichen“ und danach die „Integration der Konstanten“. Aber wie das jetzt genau funktioniert, ist jetzt die Frage (...) Ich würde sagen, wir homogenisieren die erstmal und sagen $u_C = RC \cdot \dot{u}_C$. Jetzt habe ich homogenisiert. (...) War das schlau?“

(0815)

P1 trennt dann im nächsten Schritt die Veränderlichen korrekt und P2 hinterfragt in (0935), wo das U_0 geblieben ist, was P1 mit der Homogenisierung begründet. P1 fragt dann P2 in (1230):

„Beim Polynom ersten Grades darf ich nicht diesen $e^{\lambda x}$ -Ansatz machen, oder“

P2 begründet dann, dass dieser Ansatz möglich ist, da es in der Vorlesung so hergeleitet wurde. P1 führt die Rechnung dann korrekt aus und erläutert P2 in (1315) die Schritte. Dabei erhält er

$$0 = e^{\lambda t}(1 + \lambda RC)$$

und begründet, dass man λ auf diese Weise bestimmen kann, da die e-Funktion nie den Wert 0 annimmt und somit die Klammer 0 werden müsse. P1 bestimmt so die Lösung der homogenisierten Differentialgleichung. In (1551) fällt P1 auf, dass noch eine Konstante fehlt bzw. wörtlich

„Irgendwo muss hier noch eine Konstante rein.“

In (1637) erläutert P1 näher, dass $u_C(t = 0) = 1$ wäre und ergänzt in (1702) „vor allem passt das von der Einheit nicht.“ P1 ist dann unschlüssig, wo die Konstante ergänzt werden muss. Er setzt dann die erhaltene Lösung für $u_C(t)$ in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhält

$$e^{-t/RC} = U_0 - RCe^{-t/RC} \quad (5.51)$$

und argumentiert dann, dass dieses die gewünschten Eigenschaften hätte:

„Das beginnt bei 0 und steigt so, bis hier U_0 ist, denn am Ende wird U_0 über dem Kondensator anliegen.“

(1800)

Er ergänzt in (1815), dass sie nun die Steigung wissen, aber

„nur im Moment sieht unsere Gleichung definitiv nicht so aus“

Dann überlegt er, wie $e^{-\dots}$ verlaufen würde. Dieses skizziert er. P1 fragt dann nochmals nach der Position der Konstanten und setzt sie in (2015) korrekterweise als Faktor vor die e -Funktion. In (2103) setzt P1 den Wert bei $t = 0$ ein und P2 weist ihn darauf hin, dass hier der Wert U_0 angenommen werden müsse. Hierzu setzt er in die inhomogene Form

$$K \cdot e^{-t/RC} = U_0 - RCKe^{-t/RC} \quad (5.52)$$

$t = 0$ ein und bestimmt so $K = \frac{U_0}{RC}$. Er kennt dann in (2325), dass das λ noch beachtet werden muss, was vorher als $\lambda = -\frac{1}{RC}$ bestimmt wurde. Dadurch kürzt sich die Konstante zu $K = U_0$, was P1 in (2325) ohne Begründung zu $K = -U_0$ macht. P2 sagt dann, dass er dieses Ergebnis nicht hat und P1 kontrolliert P2s Rechnung. P1 argumentiert dann über bekannte Funktionswerte von u_C , merkt aber dann an:

„Genau dann wäre mein

$$u_C = -U_0 \cdot e^{-t/RC}. \quad (5.53)$$

Das ist aber immer noch falsch, weil jetzt sieht das Ganze so aus: Ich bin bei $-U_0$ und werde immer kleiner, aber das möchte ich doch gar nicht. Okay, jetzt ist die Frage, wie wir das beheben.“

(2550) und (2557)

P1 skizziert dann zunächst den Verlauf von (5.53) und anschließend, wie der Verlauf der Funktion eigentlich sein müsse. Daraufhin bemerkt P2, dass noch ein

$$+U_0$$

ergänzt werden muss und sie kommen so zu dem richtigen Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe über einen Partikuläransatz entsprechend der SEL. Es ist jedoch zunächst unklar, ob dieser für eine DGL 1. Ordnung überhaupt verwendet werden darf, in welcher Form die Konstante bestimmt werden kann und wie die inhomogene Lösung in der Gesamtlösung berücksichtigt werden muss. Die Zeitkonstante wird entsprechend der SEL bestimmt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Wegen anhaltender Unsicherheiten skizzieren die Studierenden den Verlauf von $u_C(t)$ und versuchen mit dieser „informativen Figur“ Aufschluss über die zu verwendende Mathematik zu erhalten. Sie betreiben also „Mapping Meaning to Mathematics“ entsprechend Tuminaro und Redish (2007).
- **{A2}** Nachdem sie über den Lösungsalgorithmus Unklarheiten über den Einbezug von U_0 hatten, machen sie sich diesen Zusammenhang an der Skizze deutlich und erkennen so das $+U_0$. **{AB}** Hier gibt es Übergänge zwischen Mathematik (Einbauen von U_0), deren physikalischer Interpretation (Skizze des Graphs von u_C für die zugrundeliegenden Situation) und damit wiederum Rückschlüsse auf das Vorzeichen ($+ U_0$), kombinieren also die erkenntnistheoretischen Spiele „Meaning Mathematics to Meaning“ und „Meaning Meaning to Mathematics“.

- **{B3}** P1 nennt direkt die nötigen Verfahren (wenn auch mit einer falschen Bezeichnung für „Variation der Konstanten“), ist sich aber unsicher bei deren Anwendung. Dadurch wechseln die Studierenden das Verfahren und berufen sich dabei auf „die Vorlesung“, wobei unklar ist, ob sie die Mathematik- oder Elektrotechnik-Vorlesung meinen.
- **{B3}** P1 erkennt, dass eine Konstante für das Verfahren notwendig ist. Er erinnert sich also, dass sie Bestandteil sein muss, aber ist sich unsicher, wo genau. Eine mögliche Ursache kann das Erinnern an den Algorithmus auch entsprechend seiner Bezeichnung sein und eine Kontrolle der Vollständigkeit.
- **{C1}** P1 validiert mitten in der Rechnung die Einheiten, wodurch er seine Rechnung verwirft.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil B4

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten durch Doppelnotationen zwischen der elektrotechnischen Kapazität C und der Integrationskonstante c auf. Bei der Variation der Konstanten führt es bei einer Gruppe zu Diskussionen, dass der $k(t)$ -Term wegfällt, obwohl dieses eine übliche Probe für die Richtigkeit des Lösungsweges ist. Des Weiteren treten Fehler dadurch auf, dass komplexe Variablen verwendet werden, was Kenntnisse der Funktionentheorie für die Lösung voraussetzen würde, Ingenieurstudierende in den ersten beiden Semestern jedoch nur reelle Analysis kennenlernen. Die allgemeine Problemstelle in diesem Aufgabenteil ist die Lösung einer inhomogenen DGL 1. Ordnung, auch wenn das passende Verfahren zumindest namentlich bekannt ist. Mehreren Gruppen ist unklar, ob sie Partikuläransätze, die in Mathematik-Veranstaltungen häufig für DGLen ab Ordnung 2 eingeführt werden, auch auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung anwendbar sind. Darüber hinaus ist unklar, wie das Ergebnis einer Differentialgleichung aussieht, also dass hier eine Funktion gesucht ist, und wie mit Konstanten bei der Lösung einer DGL operiert werden muss, welche essentiell zur Durchführung der „Variation der Konstanten“ sind. Bzgl. der Zeitkonstanten ist unklar, ob diese einfach aus der Veranstaltung zitiert werden kann oder berechnet werden muss. Einer Gruppe ist der Begriff gänzlich unklar.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Die in der Aufgabe gewählten Bezeichnungen aus der Elektrotechnik dienen zwei Paaren zum begrifflichen Verständnis der gegebenen Situation, wobei teilweise Vermischungen mit der Mathematik auftreten. Bei einem Paar tritt eine Doppelnotation zwischen Kapazität C und Integrationskonstante c auf. Einem Paar ist unklar, ob die Zeitkonstante berechnet (Calculation, Bing (2008)) oder zitiert (Berufen auf Autoritäten, Bing (2008)) werden soll. Die Studierenden durchdenken Bezeichnungen für die Teillösungen ihrer inhomogenen Differentialgleichungen, also die homogene und inhomogene, um diese gut unterscheiden zu können. Ein Paar verwendet andere Anfangswerte als die in den Teilen B1 und B2 ermittelten und erkennt damit anscheinend die Zusammenhänge zwischen den Aufgabenteilen. Der Begriff „Zeitkonstante“ wird von einem Paar falsch aus dem Kontext interpretiert und sie erhalten so schließlich ein falsches Ergebnis nicht aus einer falschen Rechnung.

{A2} Ein Paar setzt physikalische Argumente ein, um Argumente für die Anfangswerte zu liefern. Um die Verbindung zwischen Mathematik und Elektrotechnik wieder ziehen zu können, setzt ein Paar einen erneuten Übergang von y zu $u_C(t)$ ein, nachdem es in B3 eine Umbenennung durchgeführt hatte. Ein Paar begründet das Vorkommen von U_0 in der DGL physikalisch. Eine „informative Figur“ des Funktionsgraphen (vgl. Bruder und Collet (2011)) wird eingesetzt, um den Aufbau der Lösung der Differentialgleichung zu erforschen.

{A3} Die Formel für die Zeitkonstante wird im Sinne eines „Berufen auf Autoritäten“ direkt angegeben, in dem ein Paar diesen aus der Vorlesung heranzieht.

{B2} Zwei Studierendenpaare überlegen am Anfang, welche Form die Lösung der DGL hat, so dass ein Rückwärtsarbeiten möglich ist.

{B3} Drei Paare setzen das Partikulärverfahren für die Lösung der Differentialgleichung ein. Ein Paar hinterfragt, ob das Partikulärverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung verwendet werden kann. Zwei Studierendenpaare nutzen TdV/VdK zur Lösung. Ein Paar hinterfragt die Form des Ergebnisses. Bei einem Paar treten Probleme beim Umgang mit der Konstanten im TdV-Algorithmus auf. Ein Paar erkennt den Zusammenhang zwischen der Konstanten k bei der Lösung von unbestimmten Integral und dem k in dem Lösungsalgorithmus für die Differentialgleichung im Sinne einer „Math Consistency“ nach Bing (2008).

{B4} Die homogene Differentialgleichung wird von einem Paar mit physikalischen Vorgängen untersucht, in dem die Implikationen des Setzens von $u_C = 0$, also dem Homogenisieren, durchdacht werden. Ein Paar setzt Extremwerte für $u_C(t)$ im Sinne von Bruder und Collet (2011) ein.

{C1} Während der Rechnungen setzt ein Paar Einheiten zum Validieren ein.

5.5.4 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B5

[B5] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = t_1^-)$ und $i_C(t = t_1^-)$ sowie von $u_C(t = t_1^+)$ und $i_C(t = t_1^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

G1 : P1 zeigt in der Skizze zu der Aufgabe auf den rechten Teil und kommentiert:

„Dann haben wir nur noch einen Schwingkreis. Sogar einen ungedämpften Schwingkreis.“

(3026)

P1 und P2 erkennen, dass der Kondensator nun vollständig aufgeladen ist, also

$$u_C = U_0$$

vor dem Schließen des Schalters und i_C ist deswegen 0. P1 argumentiert dann, dass beide Werte auch nach dem Schließen des Schalters weiterhin so sind, da keine sprunghafte Änderung möglich ist. Dieses notiert er und P2 sagt:

„Genau, da ist das mit der sprunghaften Änderung.“

(3156)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Der Lösungsweg der Studierenden entspricht der Bearbeitungsvariante 1 aus der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 verwendet zum Verständnis den Begriff „Schwingkreis“ aus der Aufgabenbezeichnung, verbindet ihn mit der Situation und erweitert die Bezeichnung um das Wort „ungedämpft“.
- **{A2}** Die Studierenden bestimmen die Werte entsprechend der Musterlösung und ihrer Argumente, begründen also über physikalische Mechanismen.

G2 : Die Bearbeitung dieses Aufgabenteils beginnt in (4602). P2 leitet dann ein mit

„Achso, wir sagen jetzt $t_1 = \infty$ sozusagen erstmal. Damit alles abgeschlossen ist.“

P2 fragt dann in (4748), ob $u_C(t = t_1^+)$ immer noch U_0 ist und

„du mit U_0 in die nächste Schaltung gehst.“

P1 meint dann, dass i_C nicht mehr 0 ist und P2 argumentiert mit:

„Ne, das nicht. Oder ist das bei einer Spule genau andersherum. Da ist ja kein Widerstand mehr drin. Aber über der Spule muss direkt nach Schließen des Schalters die gesamte Spannung abfallen, weil die kann ja nirgendwo hin.“

(4817)

P1 schließt daraus, dass bei beiden die Spannung gleich bleibt, also U_0 , was korrekt ist. P2 sagt dann in (5003), dass i_C unendlich ist, meint aber dann:

„Aber wenn wir sagen, dass der immer noch die gesamte Spannung hat, dann kann da eigentlich noch kein Strom fließen.“

P1 sagt, dass sie vorher eine andere Annahme hatte und P2 dann auch, dass bestimmt einer fließt – „Sonst macht das keinen Sinn.“. P2 überlegt dann in 5059, ob nicht die ganze Zeit die Spannung U_0 ist, aber P1 widerspricht mit:

„Ne, weil die Ladungen fließen ja hier herunter. Deswegen ist weniger Spannung drauf. Wenn die Ladungen herunterfließen, wird die Spannung hier geringer. Ich würde sagen, da fließt der Strom $U_0 \cdot L$. Genau wie wir es vorher gemacht haben. Das wirkt jetzt im ersten Moment eine Spannungsquelle und deswegen ist der Strom $U_0 \cdot L$ bzw. $U_0 \cdot \omega$, haben wir ja gar nicht.“

P2 hinterfragt dann, wie es bei Gleichstrom ist, und sagt, dass dann $\omega = 0$ wäre, weswegen der Strom auch 0 wäre. P1 verneint mit „Nein, unendlich groß.“ Dann diskutieren sie, ob sich die 0 im Zähler oder Nenner der Formel auswirkt. P2 argumentiert dann für unendlich, da kein Widerstand vorhanden ist. P1 meint schließlich bezogen auf die Spannung:

„Das ist ja dann so ein Schwingkreis. Das geht ja immer hin und her.“

(5243)

P1 überlegt dann, was passiert, wenn man eine Spule nur an eine Spannungsquelle anschließt. P2 sagt dazu, vgl. (5406):

„Das ist ja dann eine Spule ohne Widerstand. Dann würde ich eigentlich sagen, müsste da sofort jede Menge Strom durchfließen und es dürfte eigentlich keine Spannung darüber abfallen. Das würde aber bedeuten, dass u_C im ersten Moment 0 wäre, weil wenn über der Spule keine Spannung abfällt, fällt auch über dem Kondensator keine Spannung ab.“

P1 ergänzt dann:

„Ne, da sind Ladungen drauf. Das pendelt sich irgendwann ein, dass es überall gleich ist. Am Anfang aber noch nicht.“

P2 kommt schließlich in (5603) zu dem Ergebnis, dass der Strom unendlich groß ist, angenommen die Spule hat keinen Innenwiderstand. P1 ergänzt:

„Und dann ist die Spannung aber U_0 , weil das ist ja direkt im ersten Moment. Ich würde ja sagen, der Strom ist eine Ursache der Spannung.“

So notieren sie, dass $u_C(t = t_1^+) = U_0$ und $i_C(t = t_1^+) = -\infty$ ist, wobei P2 das Minuszeichen mit der Richtung des Stromflusses begründet. Schließlich sagt P2 in (6102), dass sie später nochmal über das Ergebnis von B5 nachdenken können.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Aufgrund einer Unklarheit bei der Notation bezogen auf t_1^- und t_1^+ bestimmen die Studierenden die Werte für $i_C(t_1)$ falsch. Es gibt zusätzliche Überlegungen hinsichtlich der physikalischen Mechanismen, insbesondere im Zusammenhang mit den auftretenden Ladungen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Es tritt bei der Gruppe ein Problem im Umgang mit der Notation analog zu den Aufgabenteilen B1 und B2 auf.
- **{A1}** P1 löst das Verständnisproblem schließlich, in dem er den Begriff „Schwingkreis“ heranzieht.
- **{A2}** P2 geht nochmals die physikalischen Vorgänge durch und überlegt jeweils, wie der Status der Bauteile nach Ablauf der ersten drei Aufgabenteile und im weiteren Verlauf ist, d. h. ob sie zum Beispiel entladen sind. Es handelt sich um eine mathematisierte Betrachtung der physikalischen Vorgänge. So kommen sie schließlich bei u_C auf den korrekten Wert.
- **{A2}** Anschließend überlegen sie weiter über physikalische Mechanismen und untersuchen das Verhalten, in dem sie sukzessive Bauteile in den Schwingkreis einfügen, wobei sie jedoch zunächst die Spule missachten.
- **{A2}** Sie vermuten, dass i_C unendlich ist, da u_C gegen 0 konvergiert. Dieses hängt mit einer Missinterpretation der Formel und des „direkt danach“ zusammen. Zum weiteren Verständnis arbeiten sie mit den einzelnen Formeln, die die Situation beschreiben.
- **{B4}** Sie möchten das Verhalten $t_1 = \infty$ betrachten, sie betrachten also anstatt eines Grenzwerts eine Gleichheit.

G3 : P2 zeigt auf den rechten Teil der Skizze in der Aufgabe und sagt „Ungedämpfter Schwingkreis“ (2048). P1 sagt direkt, dass $u_C(t = t_1^-) = U_0$ und $i_C(t = t_1^-) = 0$ ist, was P2 um „weil i_L nicht springen kann“ ergänzt. P1 sagt dann, dass kein Strom mehr fließt und begründet über die Bauteilgleichung des Kondensators, also $C \cdot \dot{u}_C = i_C$:

„weil u stetig ist, bleibt das U_0 und $i_C(t = t_1^+) = 0$ Ampere.“

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung entspricht der Bearbeitungsvariante 1. Zusätzlich argumentiert P1 zusätzlich dazu, dass die Spannung physikalisch nicht springen kann, über die Stetigkeit der Funktion u .

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 erkennt, dass ein „ungedämpfter Schwingkreis“ vorliegt und P1 schließt daraus auf die richtigen Werte.
- **{A2}** P1 argumentiert dabei über die auftretenden physikalischen Vorgänge.
- **{A2}** P1 erhält aus der Bauteilgleichung des Kondensators und der Stetigkeit der Funktion $u_C(t)$, dass es keine Sprünge geben kann. Es wird also nicht innerhalb der Physik argumentiert, sondern aus einer mathematischen Eigenschaft der Funktion $u_C(t)$, d. h. es liegt „Mapping Mathematics to Meaning“ vor.

G4 : P1 beginnt die Bearbeitung mit „Der ist vollständig geladen.“ (1630) und deutet auf den Kondensator. P2 deutet auf die Spule und fragt „und die ist entladen?“ (1631), was P1 bejaht. P1 setzt fort:

„Aber wir sind ja erst bei $u_C(t = t_1)$, ist dann U_0 , $i_C(t = t_1^-) = 0A$, weil kann ja kein Strom mehr fließen, weil der vollständig geladen ist. Das $\dot{u}$ ist ja 0, es gibt keine Änderung mehr. Also ist $i_C = 0$. $u_C(t = t_1^+) = U_0$ immer noch und das $i_C(t = t_1^+) = -i_L$ und das ist 0 Ampere, weil der Strom nicht springen kann. [...] In der Spule kann der Strom nicht springen.“

(1633)

Daraufhin gibt P1 die vier Werte korrekt an, wobei er $i_C(t = t_1^+) = -i_L(t = t_1^+)$ ergänzt, also schon eine Knotengleichung verwendet, vgl. Aufgabenteil B6.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung der Studierenden entspricht der Bearbeitungsvariante 1.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P1 setzt sich zunächst mit den physikalischen Eigenschaften der Bauteile auseinander, also welches ge- und welches entladen ist. Er beschreibt so, dass kein Strom mehr fließen kann und gibt an, dass $u_C = U_0$ ist.
- **{A2}** Den Strom i_C gibt er als 0, da $\dot{u} = 0$, also die lokale Veränderungsrate entsprechend der physikalischen Argumente null ist. So interpretiert er die Bauteilgleichung der Spule.

G5 : P2 beginnt die Bearbeitung in (2825) mit

„Okay, die Ladung ist da.“

P1 sagt:

„Der Ausgleichsvorgang ist abgeschlossen. Das heißt, die Spannung ist U_0 , $u_C = U_0$, i_C ist kurz davor gleich 0 und kurz danach ist u_C immer noch U_0 .“

P2 bestätigt dieses. P1 erläutert, was nach dem Schließen des Schalters passiert in (2946):

„So, dann bleibt die Spannung ja trotzdem 0, weil die Ladung ist noch kurz davor noch drauf und du hast ja gar keinen Widerstand, sondern kurz geschlossen, weil der ist ja noch (...) Die Spannung an der Spule ist $u = L \frac{di(t)}{dt}$.“

P2 hinterfragt in (3038), ob es eine Parallelschaltung ist, was P1 bestätigt. In (3052) sagt P2, dass $u_C = U_0$ ist. P1 entgegnet in (3058) dann allerdings, dass sie nicht wissen, wie groß der Strom ist, was P2 mit

„ L ist doch gegeben“

verneint. P1 meint dann in (3111), dass prinzipiell ein Kurzschluss vorläge, was P2 bejaht, und P1 ergänzt dann, dass das am Anfang so wäre und fragt P2, was die Ableitung eines Sprunges wäre, und beantwortet dieses selbst mit „ein Knick“. Daraufhin sagt P1:

„Aber wird sich krass entladen wollen und zwar richtig krass (...) jetzt noch über die Physik (.) Oberstufe (.) Lenz'sche Regel (...) Ich weißt, ich hab da jetzt, ich würde sagen, direkt danach ist der Strom plötzlich unendlich.“

(3200)

P1 ergänzt dann in (3233), dass der Strom weiter abnehmen wird, und in (3241) sagt P1

„Nein! Der Strom ist 0. Du hast es gesagt.“

Dann argumentiert er über die Bauteilgleichung der Spule, also $L \cdot \dot{i}(t) = u_L(t)$, und führt aus:

„Ne, das ist im Prinzip ein Steigungsdreieck. Ist also (...) unendlich. (...) Also würde ich sagen, der Strom ist am (.), nein, der Strom ist am Anfang ganz groß. Denn die Spannung ist die treibende Kraft und seine Spannung ist von der Ladung abhängig. Die Ladung wird hier rumfließen, das heißt seine Spannung wird immer weniger. Das heißt, der Strom kann dann nicht bei 0 anfangen und wird bei 0 immer weniger, das wäre ja dämlich. Also würde ich sagen, der Strom muss am Anfang unendlich sein, oder? (.) Weil wir haben hier dann keinen Widerstand.“

(3311)

Damit wird dieser Aufgabenteil inkorrekt beendet.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten diesen Aufgabenteil inkorrekt. Dabei ziehen für diese Situation irrelevante Regeln heran und schließen so, dass der Strom unendlich sein muss – analog zu Studierendenpaar G2.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Am Ende der Bearbeitung zeigt sich eine Missinterpretation des betrachteten Umschaltmoments.
- **{A2}** P2 beginnt mit einer Aussage über die physikalische Situation, die nun abgelaufen ist. Er betrachtet dann die physikalischen Mechanismen, die beim Schalten wirken.
- **{A3}** P1 zieht inkorrekt die Lenz'sche Regel heran und kommt dadurch zwischenzeitlich zu dem Ergebnis, dass der Strom unendlich ist.
- **{A4}** P2 bezieht den Aufbau der Schaltung mit ein, welcher für ihre mathematische Beschreibung wichtig ist.
- **{B2}** P1 schließt, dass L gegeben ist, wobei tatsächlich nur die Größen bzw. die Ableitung der Größe bekannt ist, woraus dieser Proportionalitätsfaktor bestimmt werden kann. Dieses erscheint ihm gleichwertig.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil B5

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Aufgrund der Missinterpretation der Notation t_1^- und t_1^+ ergibt sich der Fehler, dass zwei Gruppen für den Strom i_C den falschen Zeitpunkt betrachten und so annehmen, dass $i_C = \infty$ sei, da u_C gegen 0 konvergiert. Es treten Vermischungen zwischen Gleichheiten und Konvergenzen auf, denn es wird anstatt eines Grenzwerts $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t)$ der Ausdruck $u_C(\infty)$ betrachtet. Des Weiteren werden irrelevante Formeln und Regeln von einer Gruppe herangezogen. Die Problemstelle in Aufgabenteil B5 ist die Betrachtung der physikalischen Gesamtsituation inkl. „Ladezustand“ (ge- oder entladen) bei den einzelnen Bauteilen. Unklarheiten ergeben sich die verwendete Notation t_1^- und t_1^+ , wodurch Missinterpretationen des zu betrachteten Zeitpunkts entstehen.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Bei einem Paar tritt ein Notationsproblem im Zusammenhang mit t_1^- und t_1^+ auf. Bei einem Paar wird der Umschaltzeitpunkt, welcher in der Aufgabe aufgeführt ist, missinterpretiert. Drei Paare setzen das Wort „Schwingkreis“ zum Verständnis der Aufgabe ein. Die Studierenden erkennen, dass er ungedämpft ist.

{A2} Drei Paare setzen physikalische Mechanismen zur Begründung der Werte ein. Drei Paare untersuchen die physikalischen Zusammenhänge zwischen i_C und u_C auf mathematischer Ebene mittels ihrer Bauteilgleichungen. Zusätzlich überlegen zwei der Paare jeweils, ob diese ge- oder entladen sind und welche Werte für den Strom und die Spannung angenommen werden können. Zum Verständnis fügt ein Paar sukzessive Bauteile hinzu oder nimmt sie wieder aus dem Schwingkreis. Durch Probleme mit der Notation t_1^- und t_1^+ bestimmt ein Paar inkorrekte Werte für i_C an den gesuchten Stellen.

{A3} Ein Paar zieht inkorrekt die Lenz'sche Regel heran.

- {A4}** Ein Paar zieht den Aufbau der Schaltung wird für die mathematische Beschreibung heran.
{B2} Aus zwei bekannten Größen in einer Gleichung mit drei Größen wird direkt auf die dritte geschlossen und diese dann als ebenfalls bekannt betrachtet. So wird eine Verbindung zwischen bekannten und unbekannten Größen gezogen.
{B4} Ein Paar setzt Extremwerte entsprechend Bruder und Collet (2011) zum Verständnis der Situation ein.

5.5.5 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B6

[B6] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq t_1$ her.

G1 : P1 beginnt mit

„Das dürfen wir doch alles von diesem Lösungszettel nehmen.“

(3341)

und bezieht sich damit auf das Merkblatt. P1 und P2 sammeln Gleichungen, welche ihnen bei der Rechnung helfen können. Zunächst machen sie einen „Maschenumlauf“ (3405) und erhalten so, dass $u_C(t) = u_L(t)$ gilt. Mit der Knotenregel erhält P1 $i_C = i_L$, denn „die fließen ja beide raus.“ (3405) P2 verbalisiert dann die Knotenregel:

„Der eine rein, der andere raus, weil es muss doch die Summe aller Ströme im Knotenpunkt null sein. Heißt einer muss rein, der andere herausfließen. So wie das hier eingezeichnet ist, geht das nicht.“

(3405)

P1 entgegnet ihm:

„Doch, das geht schon, wenn der eine negativ ist. Wenn wir beide auf eine Seite packen, haben beide das gleiche Vorzeichen und sind gleich null.“

(3534)

So einigen sie sich auf $i_L = -i_C$. Dann notiert P1 die Bauteilgleichungen für den Kondensator, $i_C = C \cdot \dot{u}_C$, und die Spule, $u_L = L \cdot \dot{i}_L$. Sie kombinieren die vier Gleichungen:

$$u_C = u_L = L \cdot \dot{i}_L = -L \cdot \dot{i}_C$$

sowie

$$i_C = C \cdot \dot{u}_C \quad (5.54)$$

und

$$\dot{i}_C = -\frac{1}{L}u_C \quad (5.55)$$

P1 erkennt dann, dass zum Gleichsetzen die Gleichung (5.54) noch einmal differenziert werden muss. So erhält er korrekt:

$$\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Bearbeitungsvariante 1 in ihrem Lösungsprozess.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die Studierenden überlegen, ob die sich über die Kirchhoff-Regeln ergebenden Formeln physikalisch Sinn ergeben und argumentieren dann mittels der Vorzeichen. Es gibt also einen Übergang Mathematik – Physik – Mathematik. Dabei bedenken sie, ob die Aufgabe überhaupt lösbar ist.
- **{A3}** P1 zieht dann die beiden relevanten Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule heran.
- **{A4}** In einem ersten Schritt die Kirchhoff-Regeln (Maschen- und Knotenregel), also Regeln, die den Aufbau berücksichtigen.
- **{B2}** Mit den vier Gleichungen betreiben die Studierenden ein Gleichungsmanagement und erkennen dabei die Notwendigkeit der Differentiation einer der vorkommenden Gleichungen.
- **{B3}** Die Studierenden differenzieren eine der Gleichungen, um eine Kombination zu ermöglichen.

G2 : P2 leitet die Aufgabenbearbeitung in (5910) mit der Gleichung

$$u_C(t) = u_L(t) \quad (5.56)$$

ein und meint hierzu:

„Das hier finde ich total komisch.“

Dann notiert P2

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Zu der Gleichung (5.56) fragt P1, ob diese echt gleich sind, vgl. (5910). P2 beantwortet dieses mit:

„Muss ja. Es gibt ja kein anderes Bauteil, wo noch Spannung abfallen mit drin. Oder sind die Drähte widerstandsbehaftet? Ne, sind sie nicht. Dann geht das nicht anders.“

In (6134) kombiniert P2 die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule und erhält:

$$-L \cdot \frac{d\left(C \frac{du}{dt}\right)}{dt} = -L \cdot C \frac{d^2u}{dt^2} \quad (5.57)$$

P2 erkennt dann, dass noch irgendwo Spannung abfallen muss, vgl. (6348), und in (6545), dass noch eine Knotengleichung betrachtet werden muss. P1 reagiert dann mit

„Da sind ja keine Knoten.“

P2 erläutert dann:

„Das ergibt aber sonst keinen Sinn. Wenn du unter den rechten Teil betrachtest nicht, aber hier steht ja, dass die Ausgleichsvorgänge von vorher wirken sich auf die Spannung aus. Das finde ich komisch. (...) In unsere Masche taucht ja nur etwas mit Spannung auf. Es kann ja nur/ es muss ja irgendwo Spannung herkommen oder irgendwo ein zusätzlicher Strom, der mehr Spannung verursacht. Sonst kriegst du keinen zusätzlichen Term.“

(6545) und (6619)

So ergänzen P1 und P2 die Knotengleichung $i_C = -i_L$ in (6638) und kommentiert in (6752), dass diese betragsgleich sind. So erhalten P1 und P2 dann die korrekte Differentialgleichung $\ddot{u} \cdot LC + u_C = 0$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Bearbeitungsvariante 1. Sie machen sich zusätzlich Gedanken zu der zugrundeliegenden physikalischen Situation.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 durchdenkt, ob die Drähte widerstandsbehaftet sind. Damit werden üblicherweise vorgenommene Idealisierungen hinterfragt.
- **{A2}** Das Ergebnis bedenkt er physikalisch und schließt daraus, dass noch irgendwo Spannung abfallen muss, vgl. (6545). P1 fällt in diesem Zusammenhang die Betrachtung von Knoten ein. Dieses bedenkt P2 wieder mit physikalischen Mechanismen.
- **{A3}** P2 notiert dann die Bauteilgleichung der Spule. Damit fehlt jeweils eine Bauteil- und eine Kirchhoff-Gleichung, nämlich Kondensator und Knoten.
- **{A4}** P2 stellt die Maschengleichung auf und hinterfragt ihre Richtigkeit.
- **{AB}** Schließlich fügen die Studierenden die Knotengleichung hinzu und haben so sukzessive alle Gleichungen erhalten. Dadurch erhalten sie die richtige Differentialgleichung.
- **{B2}** Als nächstes kombiniert P2 die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule, ohne die Maschengleichung zu beachten.
- **{B3}** Die Studierenden differenzieren eine der Gleichungen, um eine Kombination zu ermöglichen.

G3 : P2 steigt in die Aufgabe mit dem Stichwort „Maschenumlauf“ (2315) ein. P1 nennt $i_C + i_L = 0$ (die Knotengleichung) und sagt, dass er seine Bauteilgleichung einsetzen möchte. Er kommentiert „Bisschen umstellen“ (2350) und notiert die richtige Differentialgleichung $\ddot{u}_C + \frac{u_C}{LC} = 0$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Bearbeitungsvariante 1 und lösen damit die Aufgabe korrekt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 und P2 erkennen kooperativ, dass sie einen „Maschenumlauf“ und eine Knotengleichung benötigen.
- **{A4}** P1 erwähnt dann noch die zu verwendende Knotengleichung. Leider bleibt der Rest der eigentlichen Rechnung unklar.
- **{B2}** Zur Kombination setzen die Studierenden Gleichungsmanagement ein.

G4 : P1 sagt zunächst, dass man $i_C(t = t_1^+) = -i_L$, wenn man „einen Knoten reinlegt“ (1744). P2 entgegnet ihm, dass dann wegen $i_C = 0$ auch $i_L = 0$ ist. Anschließend möchte P1 in den rechten Teil der Skizze in der Aufgabe eine Masche reinlegen. P2 notiert gleichzeitig die beiden Bauteilgleichungen $C \cdot \dot{u}(t) = i_C(t)$ und $L \cdot \dot{i}(t) = u_L(t)$. Währenddessen notiert P1 $u_C = u_L$, d. h. die Maschengleichung. Er notiert schließlich

$$LC\ddot{u}_C(t) + u_C(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0, \quad (5.58)$$

Sie lösen damit die Aufgabe korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Bearbeitungsvariante 1 und lösen damit die Aufgabe korrekt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P2 bedenkt dann, welche Implikationen erhaltene Differentialgleichung beim Einsetzen von konkreten Werten hat.
- **{A3}** und **{A4}** P1 und P2 fügen dann sukzessive die übrigen drei Gleichungen ein.
- **{A4}** P1 beginnt mit der Knotengleichung.
- **{B2}** Zur Kombination setzen die Studierenden Gleichungsmanagement ein.

G5 : P1 beginnt diesen Aufgabenteil in (3415) mit dem Legen einer Masche und sagt in (3425), dass $u_C(t) = u_L(t)$ ist, was P2 nach Überlegen bestätigt. Für $u_L(t)$ nennt P1 die Formel $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$. Daraufhin sind P1 und P2 unschlüssig, ob sie fertig sind. P1 erkennt dann in (3637), dass ein Schwingkreis vorliegt und sagt, dass die ganze Ladung „hier“ sei, wobei er auf den Kondensator zeigt, und dann herumfließt, was er auch an der Skizze verdeutlicht. Dann argumentiert P1 in (2645), dass die ganze Energie in der Spule gespeichert wird und zeichnet dann Sinusschwingungen. Er erläutert dann die physikalischen Vorgänge an der Skizze, in dem er jeweils auf die Bauteile zeigt:

„Also am Ende, zumindest aus Physik weiß ich noch, dass es ungefähr so aussehen wird. Mit so einer Phasenversetzung. (...) Okay (...) Genau, ich glaube, u_C ist maximal, wenn der Strom 0 ist, weil alle Ladung hier drauf ist, ist der Strom 0 und wenn die Spannung hier 0 ist, fließt hier der maximale Strom. (...)“

Er zieht dann die Formel $\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ „aus der Schule“ heran und sagt dann, dass u_C doch $\frac{Q}{C}$ sei, vgl. (3900). Daraufhin sagt P1, dass $u_C = \frac{Q(t)}{C}$ und $Q(t) = Q_0 - \int_0^t \frac{di_L(t)}{dt}$ sei und zieht die Formel $C = L \cdot \frac{di}{dt}$ heran. Daraufhin erkennt P1 in (4032), dass hier eine Differentialgleichung für $u_C(t)$ gesucht ist und versucht sein Ergebnis danach umzustellen. Dann setzen sie ab (4205) neu an und ziehen neue Formeln heran, nun auch für den Kondensator und den Knoten nach Kirchhoff. So kommt P1 in (4505) auf die inkorrekte Differentialgleichung

$$u_C = LC\ddot{u},$$

in der ein Vorzeichenfehler bei u_C auftritt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Bearbeitungsvariante 1, aber verwenden eine falsche Gleichung im Gleichungsmanagement, nämlich $Q = CU$, und verwenden eine falsche Gleichung für den vorhandenen Knoten. Sie kommen dementsprechend auf eine inkorrekte Lösung.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Dabei beziehen sie den Begriff „Schwingkreis“ mitein.
- **{A2}** Sie betrachten als nächstes die physikalischen Mechanismen. Dabei überlegen, wo die Energie gespeichert ist und welchen Einfluss der Kondensator als weiteres Bauteil darauf hat.
- **{A3}** und **{A4}** P1 und P2 ziehen zunächst die Maschengleichung und die Bauteilgleichung der Spule heran.
- **{A3}** Sie verwenden die für diesen Kontext falsche Formel $Q = CU$, welche sich mit der Ladung am Kondensator auseinandersetzt. **{B2}** Diese kombinieren sie mit $C = L \cdot \frac{di}{dt}$, wobei die Herkunft dieser Formel unklar ist, wobei die Studierenden wohl versuchen, die beiden Bauteilgleichungen zu kombinieren.
- **{AB}** Erst in einem späteren Schritt ziehen sie dann die beiden übrigen Gleichungen heran, missachten aber die Knotengleichung.
- **{AB}** Danach hinterfragen sie direkt, ob die Anzahl der Gleichungen vollständig ist.
- **{B2}** Zur Kombination setzen die Studierenden Gleichungsmanagement ein.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil B6

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Ein auftretender Fehler ist auch Heranziehen der Gleichung $Q = CU$, die die Ladung in einem Kondensator beschreibt. In diesem Aufgabenteil ist die Problemstelle das Aufstellen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mittels Gleichungsmanagement, wobei genau die richtige Anzahl an Gleichungen gefunden werden muss. Dabei müssen einerseits Bauteilgleichungen und andererseits Gleichungen, die aus den Kirchhoff-Gesetzen folgen, berücksichtigt werden. Was hier funktionale Ausdrücke und Ableitungen zur Kombination miteinschließt. Darüber hinaus muss auch die mathematische Lösbarkeit der entstehenden DGL 2. Ordnung mitbedacht werden. Unklar sind einem Studierendenpaar die verwendbaren Idealisierungen und sie hinterfragen, ob die Drähte widerstandsbehaftet seien.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1} Einem Studierendenpaar ist unklar, ob die Drähte widerstandsbehaftet sind. Ihnen ist also nicht bewusst, welche Idealisierungen implizit werden dürfen. Zur Lösung wird bei einem Paar das Schlagwort „Maschenumlauf“ eingesetzt.
- {A2} Drei der fünf Studierendenpaare bedenken beim Heranziehen der Kirchhoff-Regeln die physikalischen Vorgänge und kommen so auf die benötigten Vorzeichen. Ein Paar setzt Zahlen in die Formeln ein, um das Verhalten zu untersuchen. Ein Studierendenpaar überlegt, wo Energie gespeichert ist und welchen Einfluss der Kondensator hat.
- {A3} Bei vier der fünf Paare werden die benötigten Bauteilgleichungen explizit herangezogen. Das übrige Paar verwendet sie auch ohne Erläuterungen. Ein Paar verwendet eine falsche Formel zur Berechnung der Ladung in einem Kondensator.
- {A4} Alle fünf Paare verwenden die Maschen- und Knotenregeln, welche aus den Kirchhoff-Regeln folgen.
- {AB} Bei zwei Paaren gibt es mehrere Übergänge zwischen den ersten beiden Phasen, da (zunächst) eine Menge an Gleichungen entstanden ist, die zu einer unterbestimmten Gleichung führte. Ein Paar ist dabei erfolgreich, das andere nicht.
- {B2} Alle Studierendenpaare betreiben mit den vier Gleichungen Gleichungsmanagement.
- {B3} Fast alle Studierendenpaare erkennen, dass eine der Gleichungen differenziert werden muss, um eine Kombination zu ermöglichen.
- {B4} Ein Studierendenpaar verwendet das Merkblatt zur Lösung der Aufgabe, was jedoch erst in B7 relevant ist.

5.5.6 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe B7

[B7] Ermitteln Sie die Schwingungsgleichung für die Spannung $u_C(t)$, indem Sie die Differentialgleichung lösen und die Anfangswerte einsetzen. (6 Punkte)

Hinweis: Die Zeitachse darf so verschoben werden, dass sich $t_1 = 0$ ergibt.

G1 : P1 vergleicht die erhaltene Differentialgleichung mit dem Merkblatt. So erkennt er, dass $\omega_0^2 u_C = \frac{1}{LC} u_C$ ist und somit durch Koeffizientenvergleich $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Da keine erste Ableitung vorhanden ist, gilt $2d\omega_0 = 0$, woraus er $d = 0$ folgert. P2 sagt dazu:

„Ja... Genau, macht auch Sinn. Keine Dämpfung.“

(4146)

und erkennt es als Fall 1 von dem Merkblatt. Für die Lösung verwendet P1

$$s_{1/2} = -\omega_0 d \pm j\omega_0 \sqrt{1 - d^2}$$

und erhält nach Einsetzen von $d = 0$: $s_{1/2} = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$. Damit gibt er – entsprechend Merkblatt – als Lösung an:

$$u_C(t) = \underline{U}e^{j\sqrt{\frac{1}{LC}}} + \underline{U}e^{-j\sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

P2 erinnert sich dann, dass man doch vom Merkblatt den Ansatz mit k_1 und k_2 verwenden muss. P1 vermutet, dass „man da jetzt wahrscheinlich auch gleich hinkommt.“ (4518) P1 erkennt, dass man durch Einsetzen von $t = 0$ zu dem Exponenten 0 kommt. P1 setzt $u_C(t = 0)$ in den Ansatz mit k_1 und k_2 ein, was U_0 ist:

$$U_0 \stackrel{!}{=} u_C(t = 0) = k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0)$$

P2 erkennt, dass in diesem Fall der letzte Summand wegfällt, da $\sin(0) = 0$ ist. P1 möchte dann k_2 bestimmen und setzt dafür den Wert $i_C(t = 0)$ ein und möchte $C \cdot u_C = i_C$, also die Bauteilgleichung des Kondensators verwenden. Er argumentiert:

„Und i_C haben wir gegeben für $t = 0$. Also leiten wir das ganze mal ab, multiplizieren es mit C und sagen dann, dass das gleich $i_C(0)$ ist. So, wenn wir den Cosinus ableiten, dann kommt irgendwas mit Sinus und das ist eh gleich Null für 0. Also lassen wir das einfach weg. Und da kommt Cosinus raus und die innere Ableitung noch davor gezogen und mit C multiplizieren. Das Gesamte soll dann Null sein.“

(5001)

P2 begründet den Wert von 0 mit

„Ja, das haben wir ja gesagt wegen der sprunghaften Änderung.“

(5144)

P1 erhält so

$$0 = i_C(t = 0) = C \cdot k_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und folgert, dass $k_2 = 0$ sein muss, da C und L beide $\neq 0$ sind. Damit folgert P1, dass $k_2 = 0$ ist.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden Begründungsvariante 2 aus der SEL zum Lösen der Aufgabe. Es gibt dabei Abweichungen bei der Bestimmung der zweiten Konstanten, bei der sie Zusammenhänge zu i_C betrachten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Sie interpretieren den Ansatz, also die zu lösende DGL, physikalisch und beurteilen ihn damit als sinnvoll.
- **{A2}** Die verwendeten Werte werden über bereits in vorherigen Teilen eingesetzte Argumente mit sprunghaften Änderungen begründet.
- **{B3}** Es wird mit Hilfe von komplexen Zahlen zur Lösung angesetzt. Dabei ist zu beachten, dass somit auch Inhalte der Funktionentheorie relevant werden, ohne dass diese in Mathematik bzw. explizit in Elektrotechnik behandelt wurden.
- **{B4}** P1 und P2 beginnen die Bestimmung der beiden Konstanten zunächst so, wie es in der Lösung vorgesehen ist. Dann nutzen jedoch statt u_C Zusammenhänge mit i_C , um die zweite Konstante zu bestimmen. Sie verändern also die Aufgabe.
- **{B4}** Die Studierenden führen Koeffizientenvergleiche mit Hilfe des Merkblatts für derartige Differentialgleichungen aus.

G2 : P2 erkennt in (7527), dass die Differentialgleichung nicht homogenisiert werden muss, da es keinen inhomogenen Term gibt. P1 schlägt daraufhin vor, dass sie es mit „e hoch“ machen und schreibt dann

$$0 = e^{\lambda t} + LC\lambda^2 e^{\lambda t} \quad (5.59)$$

auf, welches P2 zu $(1 + LC\lambda^2)e^{\lambda t} = 0$ umformt. P1 fragt daraufhin, ob das komplex ist, vgl. (7628). P2 entgegnet ihm:

Ja, $\sin$ und $\cos$. Passt doch gut für einen Schwingkreis.

(7740)

P1 bestimmt gleichzeitig $\lambda = i\sqrt{\frac{1}{LC}}$. P2 fragt dann:

„Wieso i ?“, was P1 damit begründet, dass er $\sqrt{-1}$ hat. P2 daraufhin: „Ach so, ich dachte Strom i .“

(7740)

P2 notiert dann $u_C(t) = e^{j\sqrt{\frac{1}{LC}}t}$, vgl. (7817). In dieses setzen sie $u_C(0) = U_0$ ein und P2 sagt:

„Daraus folgt, da muss noch U_0 vor. Richtig?“

(7922)

So geben sie inkorrekt als Lösung $U_0 e^{j\sqrt{\frac{1}{LC}}t}$ an und beenden die Aufgabe.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe falsch mit Begründungsvariante 1. Sie wissen dabei nicht, wie sie mit den auftretenden komplexen Wurzeln umgehen sollen, auch wenn sie die komplexen Ausdrücke als „passend“ für einen Schwingkreis betrachten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Beim Ziehen der komplexen Wurzeln verwenden die beiden Studierenden den Bezeichnung i für die komplexe Einheit, wie es in der Mathematik üblich ist. Im elektrotechnischen Kontext müssten sie – aufgrund der Doppelnotation mit Strom i – jedoch eigentlich ein j verwenden. Diesen Fehler bemerken sie.
- **{B1}** P2 untersucht zunächst, welches Verfahren für die Lösung relevant ist, und erkennt, dass keine Inhomogenität vorliegt.
- **{B3}** Sie setzen dann – wie in der Musterlösung vorgehen – über die e-Funktionen an und P1 bemerkt, dass hier komplexe Lösungen auftreten können. Dieses ersetzt P2 automatisch entsprechend der Mathematik-Vorlesung durch Ausdrücke mit Sinus und Cosinus.
- **{B3}** Sie machen Fehler bei der Kombination ihrer Teillösungen.

G3 : P1 leitet die Aufgabenbearbeitung mit „machen wir s^2 “ ein und erkennt über Koeffizientenvergleiche, dass $s^2 = -\frac{1}{LC}$ ist. Dann sagt er, dass $s = \frac{j}{\sqrt{LC}}$ und bestimmt damit $\omega_0 = \frac{1}{|s|} = \sqrt{LC}$ und sagt außerdem, dass $u_C = ke^{j\dots}$ ist. Anschließend nennt P1 die Vorgabe aus der Aufgabe, dass t so auf der Zeitachse verschoben werden darf, dass $t_1 = 0$ ist, und P2 begründet dieses damit, dass man dann ein Anfangswertproblem hat, woraufhin P1 „ $t = t_1$ wäre schöner“ (2835) entgegnet. P2 möchte über $\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ansetzen, während P1 ihn korrigiert und sagt, dass über $u_C = ke^{st}$ angesetzt werden müsse und sich das s aus ω_0 und τ zusammensetze, vgl. (3005). P1 sagt dann:

„Wir haben ja einen Schwingfall. Wann ist der Schwingfall ausgeglichen?“

(3035)

und er erkennt, dass keine Dämpfung vorliegt und er niemals „ausgeglichen“ wird. P2 arbeitet weiterhin mit $\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{LC} = 0$, welches er über die zweifache Ableitung von $e^{t/\tau}$ erhalten hat und P1 argumentiert, dass $s = \frac{1}{\tau}$ ist. Damit kommt P2 auf $s = j\sqrt{LC}$. Daraufhin fragt P1:

„Warum hab ich den Kehrwert drinnen?“

(3148)

Sie erkennen dann, dass $-j = \frac{1}{j}$ ist, wobei P2 sagt:

„mein imaginäres τ bringt mich jetzt auch nicht so viel weiter.“

(3255)

Daraufhin argumentiert P1, dass τ durch s ersetzt werden kann und $\omega_0 = \frac{1}{s}$. P1 erkennt dann:

„Dein Ansatz ist ja, wir haben keine inhomogene Lösung, dass heißt deine homogene plus inhomogene ist gleich deiner ursprünglichen $u_C = ke^{jt\omega_0}$.“

(3449)

P1 zieht dann das Merkblatt heran und P2 sagt, dass es der erste Fall ist, also $-\frac{1}{\tau} \pm \omega_d$, woraufhin P1 ergänzt:

„Das ist ja mit Dämpfung und wir haben ja keine Dämpfung.“

(3625)

und P2 daraufhin

„Ja, können wir $d = 0$ setzen, aber das nützt ja nichts.“

(3630)

P1 rechnet dann die Aufgabe für sich allein weiter und sagt nebenher:

„Das ω_d ist ω_0 und so kommt man auf $U(t_1) = U_0$ für t_1 gegen unendlich.“

Die genauen Ausführungen sind unklar, aber er kommt schließlich auf $U(t) = U_0 \cos(\dots)$ P2 meint daraufhin, dass sie diese Lösung doch bereits zuvor hatten, (dieses sorgt für eine ausführlichere Erklärung von P1), aber P1 sagt:

„Der Realteil einer imaginären Zahl ist 0. Du hast schon wieder das Minus einfach aus der Wurzel herausgezogen. Und du hast die Wurzel gezogen und das 'hoch 2' da gelassen“

und fasst dieses zusammen mit „Probleme mit der Definition deiner Variablen.“ (4240) P1 sieht dann, dass eine Division durch 0 durchgeführt wurde, und P2 sagt, dass dieses „gleich ∞ “ (4300) Daraufhin P1:

„Als Elektrotechniker darfst das, als Mathematiker nicht.“

(4310)

P2 sagt dann, dass τ doch die Abschwingkonstante ist und es so nie abschwingt. Daraufhin erkennt P1, dass im Exponenten Zähler und Nenner vertauscht wurde und $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$ betrachtet werden müsse. P2 sagt dann, dass τ unendlich wird, weil keine Dämpfung vorhanden ist, was P1 bestätigt und dann ergänzt:

„deshalb darf man auch eigentlich nicht den Ansatz nehmen wird, nämlich genau das für die Schwingungsgleichung, wenn du den Schwingfall annimmst, lässt du ja das $e^{-t/\tau}$ weg, weil du weißt ja, dass es nicht abschwächt.“

(4450)

P2 bestätigt dann, dass sie hier $e^{-t/\infty}$ und $U(t) = k_1$ wäre, aber sie noch keine Informationen zu k_1 haben, ergänzt aber direkt, dass sie über den Wert $t = 0$ sagen können, dass $k_1 = U_0$ ist. P1 sagt dann:

„Du kannst, von $t = 0$ kannst du den Betrag machen und $t = 0$ stand in der vorherigen Aufgabe bestimmt. Dementsprechend ist das U_0 . Dann können wir die Ableitung $u(t)$ bilden, dann haben wir Sinus und Cosinus vertauscht. Dann wissen wir, dass $C \cdot \dot{u}_C = i$ und i - wissen wir - das zum Zeitpunkt t von 0 ist und dementsprechend ist $\dot{u}(t) = 0$ und demsprechend ist $k_2 = 0$ und dementsprechend nur ein Cosinusterm und zwar $U_0 \cos(\omega_0 t)$.“

P2 erkennt dann, dass ω_0 der Imaginärteil von τ ist und dieses $\frac{1}{s}$ entspricht. P1 sagt, dass das keinen Unterschied macht, aber P2 erkennt, dass das ein Minus ist, vgl. (4830). P2 begründet dieses mit dem Minus aus der Ableitung von $\cos(t)$, welche $-\sin$ ist. P1 erkennt dann, dass dieser Term ohnehin wegfällt, da $\sin(0) = 0$ ist und P2 erhält so korrekterweise schließlich auch $u_C(t) = U_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung entspricht Bearbeitungsvariante 2. Es treten dabei Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Betrachtung der Funktion bei ∞ auf. Sie betrachten die Situation physikalisch, in dem sie überlegen, wann ein Schwingfall ausgeglichen ist.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Ähnlich wie in der Kritik des Experten stört es die Studierenden, dass die Zeitachse verschoben werden darf, vgl. (2835).
- **{A2}** P1 verwendet die Überlegung, wann ein Schwingfall ausgeglichen ist, womit er wahrscheinlich den Zeitpunkt des Abklingens meint, erkennt dann aber, dass keine Dämpfung (die ein Abklingen verursachen würde) vorliegt. P1 bedenkt also die vorliegenden physikalischen Mechanismen.
- **{A2}** Sie bestimmen die erste Konstante richtig. Bei der zweiten Konstante argumentiert P1 über die Bauteilgleichung des Kondensators und speziell, dass die dort erhaltene Ableitung 0 ist. Sie erkennen dann noch, dass in der Rechnung der Sinusterm wegfällt, und beziehen das noch zusätzlich mit ein.
- **{B3}** P2 bemerkt Schwierigkeiten durch den Einsatz komplexer Variablen, der die Verwendung der vermittelten mathematischen Verfahren auch unmöglich machen würde. **{B4}** Daraufhin diskutieren die beiden Studierenden, ob ein anderer Fall des Merkblatts relevant sein könnte.
- **{B3}** P1 zieht eine Verbindung zu seiner Berechnung mittels der trigonometrischen Funktion Cosinus mit einem passenden Argument.
- **{B3}** Es tritt ein Problem im Zusammenhang mit Grenzwerten auf. P1 löst es mit seiner Aussage in (4310). Es wird durch ihn also ein Unterschied zwischen einem mathematischen Verfahren in der Mathematik-Vorlesung und der Anwendung desselben Verfahrens in der Elektrotechnik wahrgenommen.
- **{B4}** Die Studierenden verwenden das Merkblatt zum Finden eines korrekten Ansatzes und setzen es korrekt ein.

G4 : P1 notiert am Anfang der Aufgabe $u_C(t) = U_0 e^{st}$, $\dot{u}_C(t) = s U_0 e^{st}$ und $\ddot{u}_C(t) = s^2 U_0 e^{st}$ und sagt, dass s eine imaginäre Größe ist. P2 ist unsicher, ob man das so schreiben kann, vgl. (2308), und P1 erläutert:

„Das Minus kannst du ja aufschreiben als j^2 . Dann die Wurzel, bleibt $j \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Müssen wir das jetzt in Sinus und Cosinus umwandeln?“

(2342)

P1 und P2 sind unschlüssig darüber und ziehen dann das Merkblatt hinzu, in dem sie $\sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$ setzen, wobei ω_0 die Kennkreisfrequenz ist. Damit schreibt P1:

$$u_C(t) = U_0 e^{j\omega_0 t} = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega_0 t)) \quad (5.60)$$

und möchte dieses zweimal ableiten. Dann meint P1:

„Brauchen wir doch gar nicht. Wir können einfach hier $u_C(t) = 0$ bestimmen. Brauchen wir das ganze Einsetzen doch gar nicht, oder? Wir haben unser s hier bestimmt.“

(2813)

P2 stimmt zu und sagt, dass sie gucken müssen, ob hier ein Cosinus vorkommt. Daraufhin streicht P1 die bisherigen Ausführungen und sie betrachten $u_C(t_1 = 0)$, was U_0 ist. Dann erkennt P1, dass $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ und schließt nach längerer Überlegung (41 Sekunden), dass die DGL löst, während P2 meint, dass das nur der Anfangswert ist. P1 erkennt, dass sie auf diese Weise nur $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ herauskriegen. Mit Hilfe des Merkblatts setzen sie neu an:

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (5.61)$$

P2 sagt dann, dass sie die Gleichung (5.61) ableiten müssen und P1 ergänzt „zweimal“ (3407). Anschließend sagt P1:

„Das hier in unsere Differentialgleichung. Also das abgeleitete und das $u_C(t)$. Und dann kriegen wir Werte für A und B , und dann haben wir unsere Schwingungsgleichung.“

(3532)

Sie erhalten dann $A = 1$ und $B = 1$. Anschließend setzt P2 $t = 0$ ein und erkennt, dass der Sinus dann 0 ist und der Term wegfällt, vgl. (3903). P1 fasst zusammen:

„Ja, und dann haben wir nur noch eine Cosinus-Schwingung.“

(3914)

„Und die Amplitude ist U_0 (was $A = U_0$ bedeutet und somit das vorherige Ergebnis revidiert) und kriegt so nun $U_0 e^{j\omega t}$ heraus.“

Nun bestimmen P1 und P2 noch B . P1 dazu:

„Man kann doch $\dot{u}_C$ dazu nehmen, das ist ja dann gleich:

$$\dot{u}_C(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t).$$

Wir müssen ja das B noch bestimmen. Und wir wissen ja, dass die Spannung sich nicht ändert. Das heißt, dass es hier, $\dot{u}_C(t_1 = 0) = 0$, keine Spannungsänderung gibt. Daraus folgt, dass B gleich 0 ist. Und daraus folgt, dass $u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$.“

(5002)

Nach dem Einwand von P2, dass P1 das nur durch Einsetzen von $t = 0$ erhalten hat, erläutert P1 weiter:

„ B ist 0 ja, dadurch fällt dieser Sinusteil weg. Die Amplitude für A haben wir bestimmt und damit kriegen wir eine Cosinusschwingung für $u_C(t)$. Und dann können wir die Differentialgleichung. . . “

(5129)

P2 fragt wieder nach, ob es geht, dass P1 die Ableitung gleich 0 setzt. P1 begründet:

„Weil du hier $t = 0$ einsetzt. Der Sinus von 0 ist 0, der Cosinus von 0 ist 1. Also ist $B = 0$, weil die Ableitung muss 0 sein, weil es gibt ja keine Änderung von t_1^- nach t_1^+ . Die Spannung kann ja nicht springen. “

(5252)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bestimmen die Lösung der DGL und die vorkommenden Konstanten entsprechend der Begründungsvariante 2.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die relevanten Werte von Sinus und Cosinus werden korrekt bestimmt, jedoch zunächst die Konstanten falsch bestimmt. Daraufhin interpretieren die Studierenden die auftretenden Größen physikalisch und erkennen über den Funktionengraph, dass nur ein Cosinus mit Amplitude U_0 auftritt.
- **{B3}** P1 setzt mit der Methode aus der Mathematik, also nicht mit dem Merkblatt, zur Lösung der Aufgabe an.
- **{B3}** P1 überlegt einen Darstellungswechsel bei den auftretenden komplexen Zahlen.
- **{B3}** P1 überführt die Eulerdarstellung der komplexen Funktion $u_C(t)$ in eine Polardarstellung, also

$$u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega_0 t)).$$

Hierbei wird die komplexe Einheit in ihrer mathematischen Bezeichnung verwendet. Es treten Verwechslungen mit dem passenden Ansatz für die vorliegende Situation, d. h.

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

auf; so möchte P1 zunächst den ersten Ausdruck ableiten.

- **{B3}** Schließlich betrachten sie die Ableitung $\dot{u}_C(t)$ und kommen so zu den richtigen Werten für die Konstanten.

G5 : P1 setzt in diesem Aufgabenteil in (4541) mit $C \cdot e^{\lambda x}$. Dieses leitet er zweimal ab und kommt so nach Einsetzen auf die Gleichung

$$e^{\lambda x} + LC\lambda^2 e^{\lambda x} = 0, \quad (5.62)$$

was er zu $e^{\lambda x}(1 + LC\lambda^2) = 0$ umformiert. Dann sagt er, dass $\lambda^2 = -\frac{1}{LC}$ ist und schließt daraus, dass $\lambda = \sqrt{\frac{1}{LC}}j$ ist. Auf die Rückfrage von P2 zu dem Minuszeichen antwortet P1, dass $j = \sqrt{-1}$ ist. Er begründet über $\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$, was mit der pq-Formel $\lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{0 - \frac{1}{LC}}$ ergibt. P1 sagt dann zu dem Ansatz:

„Der war, glaube ich, $\cos + j \sin$ oder $j \cos + \sin$. Ich kann ja mal einsetzen. Ich kann ja sagen $u_C = e^{\sqrt{\frac{1}{LC}}j}$.“

(5000)

Er setzt in (5033) fort, dass er jetzt eine Lösung „aus der homogenen und der bla bla Lösung zusammensetzen muss“. Die Lösung habe dann die Form

$$e^{\sqrt{\frac{1}{LC}}} (a \cos(\dots) + j b \sin(\dots)) \quad (5.63)$$

Die Argumente der trigonometrischen Funktionen bezeichnet P1 dann mit ωt . In (5310) sagt er dann, dass er nun a und b herausfinden müsse. Hierzu setzt er in die inhomogene Gleichung ein und verwendet $u_C(t=0) = 0$. P1 sagt dann, dass $\sin(0) = 0$ ist und P2 ergänzt, dass somit $a = U_0$ ist. In (5505) sagt P1 dann, dass sie einen zweiten „Randwert“ benötigen und führt weiter aus:

„Der Strom zum Zeitpunkt t ist unendlich. Hilft uns das weiter?“

(5524)

P2 verneint dieses und P1 sagt in (5545), dass für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sie einmal „komplett herum“ wären. Er führt aus:

„Wir hatten ja gesagt, das sieht sinusförmig aus und ich wissen, wie lange das. . .“

P2 ergänzt, wie es „nach einer Periode“ ist. Aus $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}$ bestimmt er $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}}}$ und erhält $u_C(t = \sqrt{4\pi^2 LC})$. Er merkt dann, dass es „behindert“ gewesen sei, da $\sin(2\pi) = 0$ ist und möchte dann die halbe Periodendauer verwenden. P1 sagt dann in (5809), dass wegen $\sin(\pi) = 0$ sie eine Viertelperiode verwenden sollten. In (5809), (5908) und (5929) erläutert P1 hierzu:

„Da ist die Spannung am Kondensator 0, weil erst ist der Kondensator vollgeladen, dann ist er entladen, dann wird er entgegen polarisiert wieder aufgeladen, dann entlädt er sich und dann ist er wieder vollgeladen und wir betrachten jetzt genau diesen Zeitpunkt, weil das ist hier $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ fertig. Also ist das 0. Ja, $b = 0$.“

Damit kommen sie auf die korrekte Lösung $u_C(t) = U_0 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t\right)$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung entspricht bzgl. der Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung dem Vorgehen in Bearbeitungsvariante 2. Bei der Bestimmung der zweiten Konstanten verwenden die Studierenden einen weiteren Punkt aus dem 2π -Intervall, an dem weder der Sinus noch der Cosinus 0 sind.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die Erläuterung erfolgt mittels der Beschreibung physikalischer Mechanismen innerhalb des Verlaufs der Aufgabe, vgl. beispielsweise das letzte Zitat von P1.
- **{B3}** P1 setzt mit dem Verfahren aus der Mathematik-Vorlesung zur Lösung der Aufgabe an und ignoriert das Merkblatt. Er kommt so zu einem korrekten Ansatz.
- **{B3}** Es gibt Unsicherheit, ob die komplexe Einheit j der Vorfaktor der Sinus- oder Cosinusfunktion in der Euler-Darstellung ist.
- **{B3}** Es wird das Verfahren für die Bestimmung der homogenen und inhomogenen Differentialgleichung eingesetzt. Bei den Bezeichnungen für die Argumente werden elektrotechnische Größen verwendet, um die Verbindungen zur vorliegenden Situation zu klären, auch wenn der Begriff „inhomogen“ zunächst nicht mehr geläufig ist.
- **{B3}** Zur Bestimmung der zweiten Konstanten mit einem weiteren bekannten Wert der Funktion $u_C(t)$ betrachten die Studierenden einen alternativen Punkt, bei dem weder der Sinus noch der Cosinus 0 ist.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil B7

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Als Fehler tritt auf, dass die Teillösungen zunächst falsch zu einer Gesamtlösung kombiniert werden, also die Superposition nicht richtig durchgeführt wird. Des Weiteren wird – analog zu B5 – ein Funktionswert $u_C(\infty)$ anstatt eines Grenzwerts betrachtet. Hierzu argumentiert ein Student: „In Elektrotechnik darfst du das, in Mathematik nicht.“ Es treten auch Doppelnotationen im Zusammenhang mit i als Bezeichnung für den Strom in der Elektrotechnik und i als komplexer Einheit in der Mathematik auf. Ein Studierendenpaar vermischt die Polardarstellung einer komplexen Zahl, $u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega t))$, und den Ansatz zur Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung, $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Die Hauptproblemstelle in diesem Aufgabenteil ist das Lösen einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welches einerseits mit Methoden aus der „Mathematik für Ingenieure“ und andererseits mit Hilfe der korrekten Verwendung des Merkblatts aus der Veranstaltung möglich ist. Hierzu gehört insbesondere die Bestimmung der beiden auftretenden Konstanten, welche oben als A und B bezeichnet sind. Dabei treten bei mehreren Gruppen Unterschiede zur SEL auf, denn statt der Betrachtung der Ableitung der homogenen DGL verwenden sie – in ebenfalls korrekter Weise – Zusammenhänge zum Kondensatorstrom sowie das Betrachten eines weiteren Wertes aus dem Intervall der 2π -periodischen trigonometrischen Funktionen, wobei ein Wert gewählt wird, an dem weder Sinus noch Cosinus des betrachteten Winkels 0 ist. Darüberhinaus ist eine Herausforderung die Berücksichtigung aller physikalischen Einflüsse, wie z. B. des „ $+U_0$ “ während der Rechnung. Unklarheiten ergeben sich bei dem Umgang mit komplexen Ausdrücken, welche sich aus

der Lösung der charakteristischen Gleichung ergeben würden und einen Einsatz von Funktionentheorie notwendig machen würden. Die Studierenden hinterfragen, warum die Zeitachse verschoben wird (dieses dient zur Homogenisierung) und wie sie allgemein mit Inhomogenitäten umgehen müssten. Bei einer Überführung in die Polardarstellung der komplexen Zahl ist den Studierenden unklar, ob der Vorfaktor j (als komplexe Einheit) vor dem Summanden mit dem Cosinus oder mit dem Sinus stehen muss, wobei zweiteres richtig ist.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Bei einem Paar treten Vermischungen in der Notation zwischen Mathematik und Elektrotechnik auf.

{A2} Zwei Studierendenpaare erläutern ihr Vorgehen physikalisch. Eines der Paare begründet die auftretenden Anfangswerte physikalisch. Ein Studierendenpaar kritisiert, dass die Zeitachse verschoben werden darf, da dadurch physikalische Zusammenhänge im Gesamtzusammenhang der Aufgabe verlorengehen. Ein Paar diskutiert über den auftretenden Schwingfall und überlegt, wann dieser abgeklungen ist. Dann ziehen sie heran, dass keine Dämpfung vorliegt. Zur Bestimmung einer Konstante wird von einem Paar über die Bauteilgleichung des Kondensators argumentiert und so auch erkannt, dass der Vorfaktor des auftretenden Sinus 0 ist. Ein Paar bestimmt über den Funktionsgraphen die Amplitude der Schwingung und somit den Vorfaktor des Cosinus richtig.

{B1} Ein Paar erwägt zu nächst ein allgemeineres Verfahren zum Lösen von inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

{B3} Ein Paar setzt beim Ansatz komplexe Zahlen ein, so dass komplexe Analysis zur Bearbeitung notwendig wäre, obwohl diese nicht in den Mathematik-Veranstaltungen behandelt wurde. Ein Paar erkennt, dass in der Lösung komplexe Zahlen auftreten, und es wird anschließend korrekt auf einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen übergegangen. Bei zwei Paaren wird das innermathematische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingesetzt. Ein Paar bestimmt die Konstanten korrekt über das Verfahren aus der Mathematik. Zur Bestimmung der zweiten Konstante setzt ein Paar einen weiteren Wert aus dem 2π -Intervall ein, an dem weder der Sinus noch der Cosinus 0 ist. Ein Paar durchdenkt einen Darstellungswechsel bei der komplexen Zahl. Dabei ist ihm unklar, ob die komplexe Einheit der Vorfaktor beim Cosinus oder beim Sinus ist. (Sinus ist korrekt.) Bei einem Paar treten Fehler in der Kombination der Teillösungen auf. Bei einem Paar treten Schwierigkeiten bei der Verwendung komplexer Variablen auf. In der Berechnung erkennt ein Paar, dass die Lösung über ein passendes Argument des Cosinus angegeben werden kann. Bei einem Paar treten Verwechslungen zwischen der Polardarstellung

$$u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega t))$$

und dem Lösungsansatz für homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

auf.

{B4} Drei Paare verwenden Koeffizientenvergleiche, um das Merkblatt für die Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung verwenden zu können.

5.6 Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die zweite Forschungsfrage,

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

für Aufgabe B beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?

In dieser Aufgabe hängen Fehler unter anderem damit zusammen, dass bei der Anwendung von Resultaten aus der Elektrotechnik-Vorlesung nicht überprüft wird, ob alle Voraussetzungen zur Anwendung vorhanden sind. Eine Gruppe missinterpretiert den physikalischen Kontext, in dem sie die Aufgabe dem Gebiet „Wechselstrom“ zuordnet, was sich in mehreren Aufgabenteilen sowie in der Betrachtung von Impedanzen Z statt Widerständen R auswirkt. Ein Studierendenpaar zieht irrelevante Gleichungen und Regeln (wie die Lenz'sche Regel) heran und betrachtet z. B. die Gleichung $Q = CU$, die die Ladung in einem Kondensator beschreibt. Bei der Bestimmung der Werte in B5 betrachten zwei Gruppen für den Strom i_C den falschen Zeitpunkt und nehmen so an, dass $i_C = \infty$ sei, da die Veränderungsrate von $u_C(t)$, also $\dot{u}_C$, gegen 0 konvergiere. Es treten Vermischungen zwischen Gleichheiten und Konvergenzen auf, denn es wird in mehreren Gruppen anstatt eines Grenzwerts $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t)$ der Ausdruck $u_C(\infty)$ betrachtet. Hierzu argumentiert ein Student: „In Elektrotechnik darfst das, in Mathematik nicht.“ In den Rechnungen der Studierendenpaare treten an zwei Stellen Doppelnotationen auf, die aus einer Vermischung von Elektrotechnik und Mathematik und ihrer jeweiligen Notation resultieren: Es wird einerseits die elektrotechnischen Kapazität C und die Integrationskonstante c vermischt und andererseits i als Bezeichnung für die Stromstärke in der Elektrotechnik und i als komplexer Einheit in der Mathematik vermischt. Eine weitere Vermischung tritt zwischen der Polardarstellung einer komplexen Zahl, $u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega t))$, und dem Ansatz zur Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung, $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, auf. Bei der Ausführung der Lösungsverfahren für die Differentialgleichungen führt es bei einer Gruppe zu Diskussionen, dass der $k(t)$ -Term wegfällt, obwohl dieses eine übliche Probe für die Richtigkeit des Lösungsweges ist. Fehler treten auch durch die Verwendung komplexer Variablen auf, welche – wie im Bereich „Unklarheiten“ erwähnt – zur Anwendung komplexer Analysis führen würden. Weitere Fehler entstehen bei der Kombination der Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichungen nach dem Superpositionsprinzip.

Problemstellen treten in dieser Aufgabe bzgl. der physikalischen Beschreibung der durch die konventionalisierte Darstellung des Netzwerks gegebenen Situation auf. Dabei ist es sowohl in Aufgabenteil B1, B2 als auch in B5 entscheidend zu erkennen, welche Bauteile für die zu beschreibende Situation relevant bzw. irrelevant sind. Beim Übergang von B4 zu B5 muss zudem der Ladezustand der einzelnen Bauteile betrachtet werden, d. h. ob sie ge- oder entladen sind. Die Problemstelle in Aufgabenteil B3 und B6 ist das Finden einer gewöhnlichen Differentialgleichung, welche mit den Studierenden bekannten mathematischen Methoden lösbar ist. Dabei handelt es sich in B3 um eine inhomogene Differentialgleichung erster und in B6 um eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Beim Aufstellen der Differentialgleichung muss überprüft werden, ob die Anzahl der verwendeten Gleichungen, welche sich aus den rele-

vanten Bauteilen sowie den Maschen- und Knotengleichungen nach Kirchhoff ergeben, korrekt ist und eben kein unterbestimmtes System an Gleichungen entsteht. Bei der Kombination der Gleichungen ist zudem noch die Ableitung einer der Gleichungen notwendig, damit überhaupt eine Kombination mit den anderen auftretenden Gleichungen möglich ist. Dabei ergibt sich die zusätzliche Problemstelle, die Differentialgleichung, welche in der elektrotechnischen Notation mit u_C gegeben ist, mit einer mathematischen Theorie zu bearbeiten, in der üblicherweise die Bezeichnung y für die gesuchte Lösungsfunktion der Differentialgleichung verwendet wird. Hinzu kommt, dass es anspruchsvoll ist, das Ergebnis der Kombination der benötigten Gleichungen zu validieren hinsichtlich dessen, ob die physikalischen Vorgänge korrekt beschrieben sind. Hinzu kommt die Frage, ob das gewählte Verfahren überhaupt in der Situation angewendet werden darf, z. B. der Partikuläransatz für eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in Aufgabenteil B4, oder ob die erhaltene Differentialgleichung 2. Ordnung in B6 überhaupt lösbar ist. Im Zusammenhang mit der Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung in B7 müssen überdies noch Anfangswerte zur Bestimmung der Konstanten betrachtet werden, wobei die Studierenden hierzu drei verschiedene gültige Wege gefunden haben.

Erste Unklarheiten treten im Verständnis der konventionalisierten Darstellung des Netzwerks auf. So ist unklar, ob eine Reihen- oder Parallelschaltung vorliegt. Mehrere Gruppen sind unsicher bei dem Verständnis der Notation x^- (bedeutet linksseitiger Grenzwert an x) bzw. x^+ (bedeutet rechtsseitiger Grenzwert an x), was sowohl in B1 und B2, als auch in B5 von entscheidender Bedeutung für das Verständnis der Aufgabe ist. Des Weiteren ist einem Studierendenpaar unklar, welche Idealisierungen verwendet werden können, so dass sie hinterfragen, ob die Drähte widerstandsbehaftet sind. Im Zusammenhang mit der Lösung der DGL ist ein Studierendenpaar unschlüssig, ob sie die DGL auch mittels eines Ansatzes über den Strom lösen dürfen – wobei dieses ohne eine spätere Überführung auf die Spannung nicht der Aufgabenstellung entspricht. Unklarheiten existieren in B3 und B6 auch bzgl. der Anzahl der benötigten Gleichungen (Bauteile, Kirchhoff). Bei dem Aufstellen der Differentialgleichung ist jeweils eine Frage, in welcher Weise die DGL aufgestellt und umgeformt werden muss, so dass sie mit bekannten Methoden lösbar ist. Bei dem Lösen der Differentialgleichungen hinterfragen mehrere Gruppen, ob ihre Ansätze auf die gegebenen Situationen in B4 und B7 anwendbar sind, und wie die Konstanten, welche für Lösungsalgorithmen wie „Variation der Konstanten“ essentiell sind, in dem Verfahren berücksichtigt werden müssen. Im Zusammenhang mit der Zeitkonstante ist den Studierenden unklar, ob diese im Sinne von einem Berufen auf Autoritäten nach Bing (2008) aus der Veranstaltung zitiert werden kann oder berechnet werden muss, wobei einem Studierendenpaar der Begriff gänzlich unklar ist. Darüber hinaus ergeben sich in B7 noch Unklarheiten im Umgang mit komplexen Ausdrücken, welche sich aus der Lösung der charakteristischen Gleichung ohne Beachtung des Ansatzes für einen solchen Fall ergeben würden und einen Einsatz von Funktionentheorie notwendig machen würden. Bei einer Überführung in die Polardarstellung der komplexen Zahl ist den Studierenden unklar, ob der Vorfaktor j (als komplexe Einheit) vor dem Summanden mit dem Cosinus oder mit dem Sinus stehen muss, wobei zweites richtig ist. (Bei der reinen Anwendung der Verfahren und Lösungsansätze aus der reinen Mathematik ergeben sich keine komplexen Zahlen.)

Entgegen der Erwartung haben die Studierenden alle relevanten Informationen aus der konventionalisierten Darstellung übernommen. Nur ein Paar möchte irrelevante Informationen wie die Gleichung $Q = CU$ verwenden. Das von Experten vermutete Missverständnis bzgl. der Notation x^- und x^+ als links- und rechtsseitige Grenzwerte zeigt sich tatsächlich auch in den Videostudien. Eine falsche Anzahl an Gleichungen trat bei einem Studierendenpaar auf und zeigte sich dort erst im mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten, aber dieses zeigte sich letztendlich nur als Problemstelle, denn durch einen Rückschritt auf die Mathematisierung

konnte der Fehler korrigiert werden. Nicht lösbar Differentialgleichungen traten bei keinem Paar auf, aber es zeigten sich Fehler in der Anwendung der Lösungsalgorithmen. Die Fehler waren aber eher auf der Ebene, dass der Algorithmus nicht vollständig bekannt war, anstatt dass Schritte falsch durchgeführt wurden.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

Die in diesem Abschnitt gewählten Kategorien beziehen sich auf die Kategorien **{A1}** bis **{C4}**, welche in dem Abschnitt 3.4.4 näher vorgestellt wurden:

{A1}:

- Analogien zu bereits gelösten Aufgaben: Im Rahmen des grundsätzlichen Verständnisses der Aufgabe inklusive möglicher Vereinfachungen hinterfragt ein Studierendenpaar am Anfang, ob sie bereits ähnliche Aufgaben gelöst haben, vgl. Polya (1949), und möchte auf diese Weise Analogien im Lösungsprozess nutzen.
- Strukturierung und Benennung: Die Benennung der Größen aus der Aufgabenstellung dienen zwei Paaren zum begrifflichen Verständnis der gegebenen Situation, wobei teilweise Vermischungen mit aus der Mathematik üblichen Benennungen auftreten. Bei selbstgewählten Benennungen versuchen die Studierenden möglichst klare Benennungen (z. B. bei den Indizes) zu finden, z. B. um homogene und inhomogene Lösungen der Differentialgleichungen zu unterscheiden.
- Gegebene Daten: Im Rahmen von in der Aufgabe verwendeten Notationen treten Schwierigkeiten in Bezug auf die links- und rechtsseitigen Grenzwerte x^- und x^+ auf, die zu Missinterpretationen bzgl. des im zweiten Teil der Aufgabe (B5 bis B7) betrachteten Zeitpunktes führen. Teilweise werden zu allgemeine Ansätze verwendet und so beispielsweise über Energien und Zusammenhänge aus dem Gebiet „Wechselstrom“ argumentiert.
- Erwartung an eine korrekte Lösung: Mehreren Paaren ist unklar, ob die Zeitkonstante berechnet (Calculation, Bing (2008)) oder zitiert (Berufen auf Autoritäten, Bing (2008)) werden soll. Es ist einem Paar auch unklar, welche Idealisierungen (z. B. bezogen auf die Widerstände in den Drähten) verwendet werden dürfen.
- Schlagwörter in der Bearbeitung: Zur Beschreibung ihrer Vorgehensweise nennen die Studierenden Begriffe wie „Maschenumlauf“ oder „ungedämpfter Schwingkreis“. Der Begriff „Zeitkonstante“ wird in diesem Zusammenhang falsch von einem Paar interpretiert.
- Arbeit mit konventionalisierten Skizzen: Sämtliche Studierendenpaare arbeiten mit der konventionalisierten Skizze des Netzwerks aus der Aufgabenstellung und gehen diese durch. Beim Verstehen der Skizze in der Aufgabe variieren zwei Paare die Aufgabe und fügen Bauteile gedanklich hinzu bzw. nehmen sie aus dem Netzwerk heraus und erkennen dadurch, dass die Spule irrelevant für das Finden der Gleichungen im ersten Aufgabenteil (B1 bis B4) ist.

{A2}:

- Betrachtung physikalischer Mechanismen: Sämtliche Paare setzen physikalischen Mechanismen in ihren Argumentationen ein. Die Studierenden überlegen nach jedem Schritt, wie sich die physikalische Situation verändert, bzw. überlegen, ob die Bauteile geladen und ungeladen sind.
- Spezialisierung und Verallgemeinerung: Die Studierenden fügen sukzessive gedanklich Bauteile hinzu.
- Interpretation von Formeln und Gleichungen: Die Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule, welche jeweils Ableitungen von Größen enthalten, werden physikalisch interpretiert, in dem Vorstellungen zu Veränderungsdaten verwendet werden. Darüber hinaus versuchen die Studierenden die Differentialgleichungen in B3 und B6, welche sich als Resultate des Gleichungsmanagements ergeben haben und noch nicht gelöst wurden (dieses passiert in B4 und B7), physikalisch zu validieren, in dem sie einzelne Terme wie die Inhomogenität in B4 physikalisch rechtfertigen.
- Mathematisierung physikalischer Vorgänge: Die Paare zeichnen den Funktionsgraphen für $u_C(t)$ in beiden Situationen (d. h. in der Situation in B1 bis B4 bzw. in B5 bis B7) mittels ihrer Kenntnisse über das physikalische Verhalten, welches sich über die Bauteile ergibt, um die Anfangswerte der DGL bestimmen zu können, eine Vorstellung über die Form der Lösung der Differentialgleichung zu gewinnen und den Vorfaktor des Cosinus im letzten Aufgabenteil zu bestimmen. In diesem Zusammenhang treten auch Spiele wie „Mapping Mathematics to Meaning“ auf, vgl. Tuminaro und Redish (2007), die Verbindungen zwischen den mathematischen und den physikalischen Anteilen der Aufgabe schaffen.

{A3}:

- Heranziehen von Merksätzen: Beim Bearbeiten der Aufgabenteile B1, B2 und B5 nutzen zwei Paare explizit Merksätze über Strom und Spannung an Spule und Kondensator aus der Elektrotechnik-Veranstaltung wie „Die Spannung kann am Kondensator nicht springen.“ Allgemeinere Formen davon sind „Kondensator, der Strom eilt vor“, „Bei Induktivitäten, die Ströme sich verspäten.“
- Sammeln von Formeln: Die Studierenden sammeln Gleichungen aus der Veranstaltung, die ihnen relevant erscheinen, notieren sie zunächst allgemein und passt sie dann auf die Benennungen in der Aufgabe an. Nur eines der fünf Paare zieht dabei die falsche Formel $Q = CU$ heran und möchte die Lenz'sche Regel anwenden.

{A4}:

- Nutzung innermathematischer Mathematisierungshilfsmittel: Die Nutzung erfolgt hier über die sogenannten Maschen- und Knotenregeln nach Kirchhoff. Diese mathematisieren mittels Methoden aus der Graphentheorie geschlossene Pfade (sogenannte Maschen) und Knoten in den konventionalisierten Darstellungen.

{AB}:

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Während des Aufstellens der Gleichungen hinterfragt ein Studierendenpaar, ob sie alle Formen von Gleichungen, d. h. Typ **{A3}** (zitierte Gleichungen für Bauteile) und **{A4}** (Anwendungen von Kirchhoff), benötigen, um eine lösbare Differentialgleichung zu erhalten. Bei zwei Paaren gibt es mehrere Übergänge zwischen den ersten beiden Phasen Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten, da (zunächst) eine Menge an Gleichungen entstanden war, die zu wenig Gleichungen enthielt, um eindeutig lösbar zu sein.

{B1}:

- Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung: Im Bereich der nutzbaren mathematischen Vereinfachungen erwägt ein Paar zunächst ein allgemeineres Verfahren zum Lösen von inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, ohne die Vereinfachungen in der Aufgabe (Verschieben der Zeitachse) oder das bereitgestellte Merkblatt zu beachten.
- Vereinfachung der zu verwendenden Formeln: Eine Gruppe wechselt zur Notation der Mathematik, also überträgt u_c in y , so dass die Verfahren aus der Mathematik in üblicher Weise eingesetzt werden können.

{B2}:

- Gleichungsmanagement: Zwei Studierendenpaare kombinieren sukzessive die in der Mathematisierung erhaltenen Gleichungen und ersetzen in ihren Überlegungen immer unbekannte Ausdrücke mittels weiterer Gleichungen. Im zweiten Aufgabenteil erkennen alle Studierendenpaare in dem Kontext, dass eine der vorkommenden Gleichungen differenziert werden muss.
- Rückwärtsarbeiten: Zwei weitere Paare überlegen am Anfang der Rechnung in B4, welche Form das Ergebnis haben muss, arbeiten also rückwärts im Sinne von Bruder und Collet (2011). So schließen sie aus dem physikalischen Verhalten, dass die gesuchte Lösung der Differentialgleichung eine Exponentialfunktion enthalten muss und so die benötigte Differentialgleichung die Ordnung 1 haben müsse.

{B3}:

- Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen: Die Studierenden bedenken beim Aufstellen der gewöhnlichen Differentialgleichungen schon, welche Form sie haben müssen, um mit ihnen bekannten Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen lösbar zu sein. Als Lösungsverfahren aus der „Mathematik für Ingenieure“ werden entweder das Partikulärverfahren oder eine Kombination aus „Trennung der Veränderlichen“ und „Variation der Konstanten“ eingesetzt. Im Zusammenhang mit dem Partikulärverfahren setzen sich die Studierenden damit auseinander, ob dieses Verfahren in der gegebenen Situation in B4 (inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung) überhaupt anwendbar ist. Die Studierenden überlegen auch, welche Form das Ergebnis haben muss, wobei dieses bei Differentialgleichungen eine Funktion ist. Im Zusammenhang mit der Bestimmung der Konstanten in B7 verwendet nur ein Paar die zuvor beschriebene Methode aus der Mathematik. Jeweils ein weiteres Paar nutzt Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen bzw. elektrotechnische Zusammenhänge zu der Funktion i_C für den Strom. Des Weiteren treten Schwierigkeiten bei der Kombination der Lösungen der homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen auf.
- Arbeit mit komplexen Zahlen: Ein weiterer großer Bereich der hier verwendeten mathematischen Inhalte hängt mit komplexen Zahlen zusammen, die durch ein falsches Auflösen der charakteristischen Gleichung in B7 auftreten, vgl. den Ansatz im dritten Fall für homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese würden Kenntnisse aus der Funktionentheorie (bzw. komplexen Analysis) bei der Lösung notwendig machen, die die Studierenden noch nicht kennengelernt haben. In diesem Zusammenhang überlegen Studierende Darstellungswechsel bei der komplexen Zahl (von Euler- zu Polardarstellung), wodurch wiederum Vermischungen zwischen $u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega t))$ (also

Polardarstellung) und $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ (als korrekter Lösungsansatz für die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung im dritten Fall, vgl. theoretische Ausführungen) auftreten.

{B4}:

- Qualitative Prognose von Lösungen: Bei den vorkommenden Differentialgleichungen (homogen wie inhomogen) überlegen die Studierenden qualitativ, wie eine Lösung aussieht.
- Extremalprinzip: Im Sinne von Bruder und Collet (2011) verwenden mehrere Studierendenpaare die Extremwerte der Funktion $u_C(t)$, die beispielsweise im ersten Aufgabenabschnitt (B1 bis B4) gegen U_0 konvergiert, und versuchen damit ihre Lösungsprozesse der Differentialgleichungen zu unterstützen, konkret durch Verwendung von $u_C(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = U_0$.

{C1}:

- Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: Während der Rechnungen werden Einheiten zum Validieren des Rechenweges eingesetzt.

{C4}:

- Nutzen zweier Rechenwege: Zur Validierung verwendet ein Studierendenpaar verschiedene Lösungswege, wobei das eine Teammitglied Weg A und das andere Weg B einsetzt. So möchten sie überprüfen, ob sie dasselbe Ergebnis erhalten.

2.3 Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Studierendenbearbeitungen aus dem vorherigen Abschnitt Interpretationen der Expertenbearbeitungen, welche innerhalb der SEL beschrieben sind, gegenübergestellt und auf diese Weise Unterschiede zwischen den Bearbeitungen herausgearbeitet. Die Expertenbearbeitungen werden hier zusätzlich zur Studi-Expert-Lösung noch einmal übernommen. Der Experte ist ein Mitarbeiter aus der GET-B und einer der Korrektoren der Klausur.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B1 und B2:

Der Experte weist auf den geöffneten Schalter hin und erkennt sofort, dass kein Stromfluss bei der Spule möglich ist. Dabei tritt ein Notationsproblem durch $t = 0^-$ auf, da er sich bei der Bedeutung dieser Notation unsicher ist, diese sich allerdings richtig erschließt. Zur Bestimmung der Spannung am Kondensator berücksichtigt er den Widerstand und dass dieser in Reihe geschaltet ist, wodurch keine sprunghafte Änderung möglich ist. Zur Betrachtung des Stroms im Kondensator schreibt er direkt das Ohm'sche Gesetz auf und ergänzt

„Der mathematische Aufwand ist da eher gering“.

(Im folgenden Teil bemerkt er dann, dass er das Ohm'sche Gesetz an dieser Stelle noch nicht benötigt, da auch der Schalter S_1 noch geöffnet ist.)

Zu Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteil B2 geht der Experte wieder auf die Unsicherheit im Bereich der Notation ein und erklärt, dass er 0^- als den Zeitpunkt direkt vor dem Schließen des Schalters S_1 und 0^+ als den Zeitpunkt direkt nach dem Schließen des Schalters interpretiert.

Aufgrund der in B1 erwähnten nicht möglichen sprunghaften Änderung der Spannung am Kondensator gibt er direkt

$$u_C(0^+) = 0$$

an. Beim Strom i_L argumentiert er, dass dieser auch weiterhin 0 aufgrund des geöffneten Schalters S_2 ist. Unter Berücksichtigung des Widerstands R gibt er dann zur Berechnung des Kondensatorstroms das Ohm'sche Gesetz an, wobei er dieses bereits in Aufgabenteil B1 näher ausgeführt hat.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B1 und B2:

- **{A1}** Beim Heranziehen von Formeln bedenkt er den damit verbundenen mathematischen Aufwand. Der Experte analysiert die in der Aufgabe gegebene konventionalisierte Darstellung des Schwingkreises.
- **{A2}** Neben dem Status der Schalter, also ob sie offen oder geschlossen sind, berücksichtigt der Experte auch die Bauteileigenschaften, also ob dort sprunghafte Änderungen möglich sind, denn in Kondensator ist keine sprunghafte Änderung der Spannung möglich, an der Spule keine sprunghafte Änderung des Stroms.
- **{A3,A4}** Neben den geöffneten Schaltern berücksichtigt er sowohl die Bauteile (konkret hier den Widerstand) als auch die Form der Schaltung, hier eine Reihenschaltung, wobei alternativ auch eine Parallelschaltung denkbar wäre.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte bedenkt im Gegensatz zu den Studierenden am Anfang den Aufwand, der durch das Heranziehen bestimmter mathematischer Inhalte entsteht und versucht diesen zu minimieren. Bei der Analyse des Schwingkreises geht der Experte gezielter vor und berücksichtigt dabei – wie die Studierenden – die Bauteile sowie die Schaltungstopologie. Zusätzlich überlegt er noch, ob eine Parallel- oder Reihenschaltung vorliegt. Überlegungen zu Bauteileigenschaften treten bei ihm nicht in Merksätzen auf, sondern beziehen sich ausschließlich darauf, an welchem Bauteil eine sprunghafte Änderung einer Größe möglich ist und an welchem nicht.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B3:

Der Experte sagt, dass er zunächst den Maschensatz nach Kirchhoff verwendet. Er skizziert den linken Teil des Schwingkreises und zeichnet dort die Bauteile Kondensator und Widerstand sowie den Stromfluss und die Quellenspannung ein. Er sagt, dass er die Induktivität (Anmerkung: d. h. die idealisierte Spule) weglassen kann. Dann schreibt er mit dem Maschensatz

$$U_0 = u_C(t) + i_C \cdot R. \quad (5.64)$$

Für $u_C(t)$ gibt er die Formel

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C \, dt \quad (5.65)$$

an. Hiermit ersetzt er das $u_C(t)$ in der durch den Maschensatz erhaltenen Gleichung, also (5.64). Hierbei erwähnt er, dass auch eine Auflösung nach den Strömen möglich wäre und setzt dann ein. Dann leitet er „die ganze Gleichung“ nach t ab. Dabei fällt U_0 als Konstante weg und er erhält dadurch aus

- $\frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$ ein $\frac{i_C(t)}{C}$ und aus
- $i_C R$ ein $\frac{di_C}{dt} R$.

Dieses kombiniert er dann zu

$$0 = \frac{i_C}{C} + \frac{di_C}{dt} R \quad (5.66)$$

und erhält so eine Differentialgleichung für den Strom im Kondensator, die er nun in eine Differentialgleichung für die Spannung umformt. Hierzu formt er die Formel (5.65) zu

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (5.67)$$

um und erkennt „das hätte man auch deutlich schneller machen können“ (1059). Durch Einsetzen von (5.67) in Gleichung (5.66) erhält er:

$$0 = \frac{du_C}{dt} + CR \frac{d^2 u_C}{dt^2}. \quad (5.68)$$

Hierzu erläutert er:

„Im Prinzip ist das die Differentialgleichung, wonach gesucht ist. Man muss sie nur noch einmal integrieren und sich die Frage nach der Konstanten stellen.“

(1121)

Er setzt dann Gleichung (5.67) in (5.65) ein und erhält so die Differentialgleichung

$$U_0 = u_C + RC \frac{du_C}{dt}.$$

Er sagt, dass die Differentialgleichung eine Funktion beschreibt, die abgeleitet wieder dieselbe Funktion ergibt. Dieses erfüllt nur die e-Funktion, was „man sich merken kann“ (2753). Er erläutert, dass er zunächst die Werte an den Schaltzeitpunkten bestimmt hat und dann den Verlauf zwischen diesen.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B3:

- **{A1}** Bei der Skizze lässt er unwesentliche Dinge weg.
- **{A2}** Bei der Berechnung von $u_C(t)$ verwendet er die Vorstellung, dass Ströme (dividiert durch die Kapazität C des Kondensators) kumuliert werden, um die Spannung im Kondensator zu erhalten, also steht hier das Integral für einen Kumulationsgesamteffekt.
- **{A4}** Dabei kommt er so von Gleichungen zur Beschreibung der physikalischen Situation (Maschensatz) zu berechenbaren Ausdrücken.
- **{AB}** Er sammelt nicht am Anfang Formeln, sondern geht sukzessive vor und ersetzt immer wieder Ausdrücke mit unbekannten Größen durch andere Ausdrücke.
- **{B2}** Er argumentiert, dass nur die e-Funktion in der Ableitung wieder sich selbst ergibt, arbeitet hier also rückwärts.
- **{B2}** Er ersetzt direkt mittels Ohm'schen Gesetz $u_L(t)$ durch $i_C(t) \cdot R$, also einen unbekannten Ausdruck durch bekannte Ausdrücke.
- **{B3}** In seinen Rechnungen verwendet er eine Kombination aus Ableitungen und Integrationen, wobei er beim letzten explizit die durch die unbestimmte Integration auftretenden Konstanten erwähnt.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte verwendet eine Skizze, die nur noch den linken Teil des Schwingkreises darstellt und damit für die Bearbeitung von Aufgabenteil B3 unwesentliche Angaben (wie die Bauteile des rechten Teils der Skizze) weglässt. Er zieht nicht strukturiert Formeln heran nach dem Muster, dass er Bauteilgleichungen und Gleichungen nach Kirchhoff-Regeln braucht, sondern zieht diese sukzessive direkt in der Rechnung heran. Damit ist bei ihm eine Trennung von Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten kaum auszumachen. Der Experte geht im Gegensatz zu den Studierenden explizit auf die Eigenschaft des Integrals ein, dass es Effekte kumuliert. Dieses entspricht der Rechtfertigungsstrategie „Math Consistency“ nach Bing (2008). Der Experte geht von der Lösung aus und versucht aus den physikalischen Eigenschaften rückwärts auf die zu findende Differentialgleichung zu schließen, er arbeitet also rückwärts im Sinne von Bruder und Collet (2011). Dabei verwendet er, dass diese die Ordnung 1 haben muss. Dort ergeben sich argumentativ Unterschiede zu der reinen Vorgehensweise des Partikuläransatzes, mit dessen Hilfe Parameter der e-Funktion bestimmt werden können.

Im mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten verwendet der Experte laufend Übergänge zwischen Differenzieren und Integrieren und versucht auf diese Weise einen schlüssigen Lösungsweg zu erhalten, gelangt aber zwischenzeitlich zu einer DGL für $i_C(t)$, die er dann unter Verwendung der Bauteilgleichungen zu einer DGL für $u_C(t)$ umformt.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B4:

Der Experte beginnt seine Aufgabenbearbeitung mit „Zeitkonstante kann man erkennen.“ (1309) und schreibt

$$\tau = RC.$$

Er führt dann weiter aus:

„Für mich ist es jetzt nicht notwendig, diese Differentialgleichung formal zu lösen, weil ich direkt sehe, welche Form sie haben wird.“

(1309)

Er skizziert dann den Verlauf der Spannung und erläutert, dass der Kondensator am Ende auf U_0 aufgeladen ist und am Anfang den Wert 0 hat. Da es nur einen Energiespeicher gibt (Anmerkung: nämlich den Kondensator) wird der Ausgleichsvorgang über eine e-Funktion beschrieben. Diese beschreibt er mit

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Seine Formel überprüft er durch Einsetzen von Werten durch Einsetzen von 0 erhält er e^0 und somit in der Klammer $1 - 1$, was dem Wert 0 in seiner Skizze entspricht. Dann führt er aus, dass er ∞ einsetzt und sagt, dass e^0 „bekanntlich 1“ (1339) ist und so nach Einsetzen nur noch U_0 übrigbleibt.

Er erläutert, dass er verwendet, dass der Kondensator am Ende auf U_0 aufgeladen ist und beschreibt anschließend seine Skizze genauer, in dem er sagt, dass sich die Spannung immer weiter an den Wert U_0 annähert und die Abweichung von U_0 ab einem bestimmten Wert vernachlässigt werden kann.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B4:

- **{A2}** Der Experte arbeitet ganz über die physikalischen Mechanismen. Dabei berücksichtigt er den Wert der Spannung am Anfang und schließlich nach dem Aufladen.
- **{B3}** Bei der „Berechnung“ von $e^{-\infty}$ bildet er keinen Grenzwert, sondern spricht statt von einer Konvergenz von einer Gleichheit. Auch im physikalischen Sinne liegt hier keine Gleichheit vor, sondern eine Annäherung an U_0 , worauf er im folgenden Abschnitt näher eingeht.
- **{B3}** Der Experte verwendet die falsche Aussage, dass es für jede homogene Differentialgleichung einen Lösungsansatz gibt.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Während die Studierenden mathematische Algorithmen durchlaufen, argumentiert der Experte über die physikalischen Vorgänge und kombiniert sie zu einer Lösung der Differentialgleichung. Der Experte unterscheidet nicht zwischen Konvergenz und Gleichheit und verwendet auch nicht entsprechende Notationen mit Verwendung eines $\lim_{n \rightarrow \infty}$. Auch physikalisch wäre es sinnvoll, diese Unterscheidung zu verwenden, da eben der Grenzwert U_0 nicht erreicht wird, worüber der Experte sogar später noch argumentiert. Während bei den Studierenden Unklarheiten bestehen, ob die Zeitkonstante berechnet werden muss oder zitiert werden kann, zitiert der Experte sie direkt und verweist auf allgemeine Elektrotechnik-Kenntnisse.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B5:

Am Anfang der Aufgabenbearbeitung in (3106) sagt der Experte, dass die Angabe in der Aufgabe, dass der Ausgleichsvorgang abgeschlossen ist, bedeutet, dass der Kondensator nun auf die Spannung U_0 aufgeladen ist. Er ergänzt:

„Obwohl das in der Realität nie der Fall wäre, soll das scheinbar hier angenommen werden.“

(3740)

Nachdem er kurz auf das zu B1 und B2 analoge Notationsproblem mit t_1^- und t_1^+ eingeht, zieht er aus dem laut Aufgabenstellung vollständig abgeschlossenen Ausgleichsvorgang die Information, dass kein Strom mehr im Kondensator fließt, also $i_C(t = t_1) = 0$ ist. Die Spannung am Kondensator ändert sich durch die Parallelschaltung nicht sprunghaft und daher ist sowohl vor als auch nach dem Schließen U_0 . Da zusätzlich auch kein Strom mehr durch den Widerstand fließt, liegt nach seiner Aussage ein idealer Schwingkreis vor und es gilt $i_C(t) = 0$.

In seinen Erläuterungen hebt er hervor, dass der abgeschlossene Ausgleichsvorgang hier der zentrale Punkt ist, da somit die Spannung u_C den Wert U_0 hat. „Man könnte auch den Grenzwert dafür bilden.“ (3106). Er beschreibt dann die Funktionsweise des Schwingkreises:

„Aufgeladen wird der Kondensator durch den Schalter S_1 , entladen von S_2 , bzw. der Schwingkreis wird ausgelöst mit dem Schalter S_2 .“

Dabei hat er verwendet, dass die oben bereits erwähnten sprunghaften Änderungen nicht möglich sind bzw. kein Stromfluss durch die geöffneten Schalter möglich ist.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B5:

- **{A1}** Er verwendet Analogien zwischen der Spannung im Kondensator und dem Strom in der Spule, nämlich dass jeweils keine sprunghafte Änderung möglich ist und stellt so Bezüge zu der ersten Aufgabenhälfte her. Er kommt zu dem Ergebnis, dass ein idealer Schwingkreis (vgl. Vorüberlegungen) vorliegt.
- **{A2}** Er betrachtet die Aufgabe in realen Kontexten und kritisiert sie in dem Zusammenhang.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte kommt direkt zu dem Ergebnis, dass ein „idealer Schwingkreis“ vorliegt, während die Studierenden zunächst den Begriff „Schwingkreis“ aus der Aufgabenstellung übernehmen und erst später erkennen, dass keine Dämpfung vorliegt. Der Experte durchdenkt die Aufgabe unter Betrachtung realer Kontexte, während die Studierenden die Aufgabe auf Basis der vorkommenden Idealisierungen betrachten und entsprechend mit den „idealen“ Werten für die Ströme und Spannungen arbeiten.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B6:

Bei der Bearbeitung dieses Aufgabenteils zeichnet der Experte zunächst den rechten Teil des Schwingkreises und berücksichtigt dabei die Spule und den Kondensator. Den Widerstand, welcher ein Teil des linken Teils des Schwingkreises ist, lässt er also weg. Dann notiert er die Bauteilgleichung der Spule, nämlich

$$u_C = L \frac{di_L}{dt} \quad (5.69)$$

ein und notiert den Zusammenhang $i_L = -i_C$. Als nächstes möchte er

$$i_L = \int u_C(t) dt$$

verwenden, erkennt aber durch Einsetzen, dass dieses nicht richtig ist. Dann notiert er unter Verwendung von Formel (5.67):

$$i_L = -i_C = -C \frac{du_C}{dt} \quad (5.70)$$

Er setzt dann (5.70) in die Bauteilgleichung der Spule, d. h. Formel (5.69) ein, und erhält damit

$$u_C = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}. \quad (5.71)$$

Der Experte erläutert dieses später mit

„Da habe ich erstmal die Schaltung vereinfacht auf das, was wesentlich ist für diesen Aufgabenteil.“

(3412)

und bezieht sich damit auf das Weglassen des linken Teils des Schwingkreises. Verwendet hat er den Maschensatz und die Strom-Spannungsbeziehung für den Kondensator und die Spule.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B6:

- **{A1}** Der Experte lässt zunächst bei der Erstellung der Skizze unwesentliche Informationen weg.
- **{A2}** Aussagen dazu, dass die Spannung überall gleich ist und daher $u_C = u_L$ ist, bleiben implizit.
- **{AB}** Er baut dann – analog zu B3 – sukzessive die Formeln zur Berechnung der Ausdrücke auf.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte setzt analog zu Aufgabenteil B3 eine Skizze ein, in der er wesentliche Dinge weglässt. Zu physikalischen Mechanismen äußert er sich nicht, so dass seine Handlungen durch sein Fachwissen impliziter sind als bei den Studierenden. Dieses entspricht der Kritik von Bing (2008) an der Beschreibungskraft der erkenntnistheoretischen Spielen nach Tuminaro und Redish (2007). Der Experte zieht wie in Aufgabenteil B3 die Gleichungen dann heran, wenn er sie braucht, und stellt nicht wie die meisten Studierendenpaare erstmal benötigte Bauteil- und Kirchhoff-Gleichungen auf.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B7:

Der Experte kommentiert nach Lesen der Aufgabenstellung zunächst mit

„Das ist sehr angenehm“

(4228)

Er bestimmt dann die Lösung durch „scharfes Hinsehen“, da im Schwingkreis keine Dämpfung durch einen Widerstand vorliegt, der schließlich auch in seiner Skizze fehlt. Er sagt, dass die Spannung am Anfang den Wert U_0 hat und danach abfällt. Da der Wert von u_C bei $t = 0$ ungleich 0 ist, verwendet der Experte den Cosinus, denn der Sinus wäre an dieser Stelle 0. Die Periodendauer bestimmt er über die charakteristische Kreisfrequenz ω_0 für diesen Schwingkreis, welche über die Formel $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ bestimmt werden kann. Diese Informationen kombiniert er zu der Lösung

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t).$$

Zur Lösung der Differentialgleichung ergänzt er, dass eine Funktion gesucht ist, die zweimal abgeleitet sich selbst ergibt.

„Und da fällt mir nur Sinus oder Cosinus ein.“

(3450)

Da am Zeitpunkt t_1 der Wert U_0 vorliegt, kann es nach seinen Ausführungen nur der Cosinus sein.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil B7:

- **{A1}** Zunächst äußert er sich zum mathematischen Aufwand.
- **{A2}** Er interpretiert die Situation physikalisch.
- **{B2}** In der Bearbeitung geht er rückwärts vor, in dem er überlegt, wie eine Schwingung, wie sie in dem Schwingkreis vorliegt, mathematisch beschrieben werden kann.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

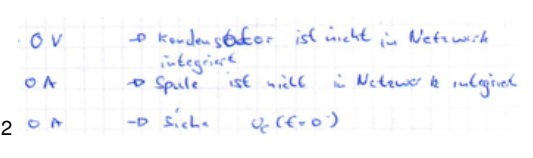
Der Experte geht analog zu B4 vor. Er macht zunächst Überlegungen zum mathematischen Aufwand und wählt danach das Verfahren.

Er rekonstruiert, dass er trigonometrischen Funktionen wie $\sin(x)$ oder $\cos(x)$ benötigt, in dem er rückwärts arbeitet und ermittelt so einen Ansatz. Ein „Vorwärts-Vorgehen“ mittels dem inner-mathematischen Verfahren oder dem Merkblatt aus der Elektrotechnik ist bei ihm im Gegensatz zu den Studierenden nicht zu erkennen.

5.7 Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden

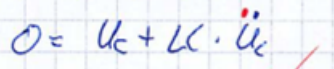
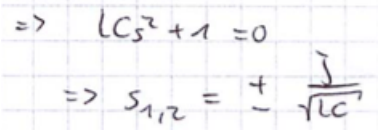
In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analyse der ca. 90 Klausurbearbeitungen zu der Aufgabe A vorgestellt. Diese Aufgabe wurde – wie bereits erwähnt – in einer Klausur eingesetzt, welche üblicherweise nach dem zweiten Fachsemester in Elektrotechnik geschrieben wird. Für die Analyse wurde nicht die Korrektur der Klausur übernommen, sondern die Klausur wurde gemäß eines Kategoriensystems, welches auf der SEL aufbaut, neu korrigiert. Die Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen, welche unter dem Einsatz von Partial Credits (2 richtig, 1 halbrichtig, 0 falsch) durchgeführt wurde, wurde hinsichtlich Lösungsquoten untersucht. Weitere Ausführungen zu der Analyse der Klausurbearbeitungen gibt es im Kapitel 3 ab Seite 115.

5.7.1 Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe B

	Kategorie mit Kurzbeschreibung der Ideallösung	Ausprägungen	Ankerbeispiele
B1a	Bestimmung und Begründung des Wertes für $u_C(0^-)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „vollständig entladen“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	

B1b	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_L(0^-)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „vollständig entladen“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B1c	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_C(0^-)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „vollständig entladen“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B2a	Bestimmung und Begründung des Wertes für $u_C(0^+)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „keine sprungartige Änderung“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B2b	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_L(0^+)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „keine sprungartige Änderung“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B2c	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_C(0^+)$: Der Wert ist $\frac{U_0}{R}$ und es wird als Grund das Ohm'sche Gesetz angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	2 $i_C(t=0^+) = \frac{U_0}{R}$ ✓ $\rightarrow$ Knotenregel
B3a	Zusammenstellen der Bauteilgleichungen: Die Bauteilgleichungen für Widerstand und Kondensator werden richtig angegeben.	2 es werden beide benötigten Gleichungen richtig angegeben 1a die Gleichung für den Widerstand wird richtig angegeben, die Gleichung für den Kondensator ist falsch 1b die Gleichung für den Kondensator wird richtig angegeben, die Gleichung für den Widerstand ist falsch 1c die Gleichung für den Widerstand wird richtig angegeben, die Gleichung für den Kondensator fehlt 1d die Gleichung für den Kondensator wird richtig angegeben, die Gleichung für den Widerstand fehlt 0a keine richtigen Anteile 0b keine Bearbeitung	

B3b	Aufstellen der Maschengleichung: Die Maschengleichung wird richtig angegeben.	2 Die Masche wird korrekt angegeben. 1 Die Anzahl der Teilspannungen stimmt nicht. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B3c	Herleiten der Differentialgleichung: Die Formeln werden mittels Gleichungsmanagement passend kombiniert zum Erhalt der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung.	2 Die Differentialgleichung wird korrekt bestimmt. 1a es wird eine Differentialgleichung in Abhängigkeit einer anderen Größe aufgestellt 1b es treten Fehler im Gleichungsmanagement auf 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B4a	Lösung der homogenisierten DGL: Die homogenisierte Differentialgleichung wird richtig gelöst.	2 korrekte Bearbeitung 1a die Gleichung wird falsch homogenisiert 1b es wird kein passender Ansatz zur Lösung gewählt 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B4b	Bestimmung der Zeitkonstanten: Es wird der Wert der Zeitkonstanten korrekt bestimmt.	2 Es wird RC als Wert der Zeitkonstanten bestimmt. 1a es wird RC ohne Rechnung angegeben (der Wert wurde in der Vorlesung angegeben) 1b es wird $t = 0$ korrekt eingesetzt, aber in den weiteren Schritten passieren Fehler 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B4c	Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: Es wird U_0 als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmt.	2a die Aufgabe wird korrekt über die Begründungsvariante 0 gelöst. 2b die Aufgabe wird korrekt über einen Partikuläransatz gelöst. 2c die Aufgabe wird korrekt über einen Ansatz mit Variation der Konstanten gelöst 1a „2a mit Mängeln“ 1b „2b mit Mängeln“ 1c „2c mit Mängeln“ 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B5a	Bestimmung und Begründung des Wertes für $u_C(t_1^-)$: Der Wert ist U_0 und es wird als Grund „durch Ausgleichsvorgang vollständig geladen“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B5b	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_C(t_1^-)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „vollständig Ladung des Kondensators“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	

B5c	Bestimmung und Begründung des Wertes für $u_C(t_1^+)$: Der Wert ist U_0 und es wird als Grund „keine sprungartige Änderung der Spannung am Kondensator“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B5d	Bestimmung und Begründung des Wertes für $i_C(t_1^+)$: Der Wert ist 0 und es wird als Grund „keine sprungartige Änderung des Spulenstroms“ angegeben	2 Begründung und Wert ist richtig 1a nur der Wert stimmt (mit Einheit) 1b nur der Wert stimmt (ohne Einheit) 1c nur die Begründung stimmt 0a Wert und Begründung sind falsch 0b keine Bearbeitung	
B6a	Zusammenstellen der Bauteilgleichungen: Die Bauteilgleichungen für Spule und Kondensator werden richtig angegeben.	2 es werden beide benötigten Gleichungen richtig angegeben. 1a die Gleichung für die Spule wird richtig angegeben, die Gleichung für den Kondensator ist falsch. 1b die Gleichung für den Kondensator wird richtig angegeben, die Gleichung für die Spule ist falsch. 1c die Gleichung für die Spule wird richtig angegeben, die Gleichung für den Kondensator fehlt. 1d die Gleichung für den Kondensator wird richtig angegeben, die Gleichung für die Spule fehlt. 0a keine richtigen Anteile 0b keine Bearbeitung	
B6b	Aufstellen der Maschengleichung: Die Maschengleichung wird richtig angegeben.	2 Die Masche wird korrekt angegeben. 1 Die Anzahl der Teilspannungen stimmt nicht. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B6c	Aufstellen der Knotengleichung: Die Knotengleichung wird richtig angegeben.	2 Die Masche wird korrekt angegeben. 1 Die Anzahl der Teilströme stimmt nicht. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	
B6d	Infinitesimales Gleichungsmanagement: es wird das Gleichungsmanagement korrekt betrieben. Hierbei müssen insbesondere mehrere Gleichungen abgeleitet werden.	2 es wird die Differentialgleichung korrekt bestimmt 1a es wird nicht beachtet, dass Ableitungen bestimmt werden müssen 1b es wird Integration in einer nicht zielführenden Weise verwendet 1c aus anderen Gründen scheitert das Gleichungsmanagement 1d es wird eine Differentialgleichung 1. Ordnung erhalten 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	1d 
B7a	Lösen der homogenen Differentialgleichung: Es wird ein Ergebnis der Form $u(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t)$ angegeben.	2 es wird die homogene Differentialgleichung korrekt aufgestellt. 1 die charakteristische Gleichung wird korrekt bestimmt, aber falsch gelöst. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	1 

B7b	Einsetzen der Anfangswerte: Es werden beide Anfangswerte korrekt bestimmt.	2 beide Werte werden korrekt bestimmt. 1a nur der Faktor vor dem Cosinus wird korrekt bestimmt. 1b nur der Faktor vor dem Sinus wird korrekt bestimmt. 1c es erfolgt ein falscher Umgang mit den komplexen Funktionen. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung	1c 
-----	--	---	---

5.7.2 Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen

In dem folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Neukodierung der Klausur vorgestellt. Dieses sind nach den sieben Aufgabenteilen der Aufgabe B gegliedert. Die Aufgabe bzw. Teile davon wurden von 93 Studierenden bearbeitet.

[B1] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^-)$, $i_L(t = 0^-)$ und $i_C(t = 0^-)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

- Den Wert von u_C vor dem Umlegen des Schalters S_1 haben 85 der 93 Studierenden, also 92,4%, korrekt bestimmt und eine korrekte Begründung dafür geliefert. Zwei Studierende (2,2%) haben nur den Wert ohne Einheit angegeben, aber eine falsche Begründung dafür angegeben. Bei vier der Studierenden (4,3%) war weder der Wert noch die Begründung richtig und ein Studierender, der einen anderen Teil dieser Aufgabe bearbeitet hat, hat diesen Wert bei B1 nicht bestimmt.
- $i_L(0^-)$ wurde von 86 der 93 Studierenden (93,5%) richtig bestimmt und begründet. Bei einem Studierenden stimmte nur der Wert mit der korrekten Einheiten, bei zweien stimmte der Wert, aber die Einheit fehlte. Der umgekehrte Fall, dass nur die Begründung richtig war, aber damit für einen falschen Wert argumentiert wurde, trat nicht auf. Bei einem Studierenden waren sowohl Wert als auch Begründung falsch und zwei Studierende haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.
- Den Wert $i_C(0^-)$ haben 83 (90,2%) der Studierenden korrekt bestimmt und begründet. Hier stimmten bei jeweils zwei Studierenden der Wert mit Einheiten bzw. ohne Einheit. Es trat nicht der Fall, dass nur die Begründung stimmte. Bei zwei Studierenden waren Wert und Begründung falsch und drei haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.

[B2] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = 0^+)$, $i_L(t = 0^+)$ und $i_C(t = 0^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 Punkte)

- Der Wert nach u_C nach dem Umlegen des Schalters stimmte inklusive Begründung bei 84 (90,3%) der Studierenden. Es trat kein Fall auf, bei dem entweder nur der Wert oder die Begründung stimmte. Bei zwei Studierenden waren Wert und Begründung falsch und bei 6 (6,5%) lag keine Bearbeitung vor.
- $i_L(0^+)$ wurde von 83 (89,2%) korrekt bestimmt und begründet. Bei zwei Studierenden wurde der Wert korrekt angegeben, allerdings ohne Einheit. Bei drei Studierenden waren Wert und Begründung falsch und bei 4 (4,3%) lag keine Bearbeitung vor.

	W:r, B:r – 2	W:r (mE) – 1a	W:r (oE) – 1b	B:r – 1c	W:f, B:f – 0a	unbearb.
$u_C(0^-)$	85 (92, 4%)	0 (0%)	2 (2, 2%)	0 (0%)	4 (4, 3%)	1 (1, 1%)
$i_L(0^-)$	86 (93, 5%)	1 (1, 1%)	2 (2, 2%)	0 (0%)	1 (1, 1%)	2 (2, 2%)
$i_C(0^-)$	83 (90, 2%)	2 (2, 2%)	2 (2, 2%)	0 (0%)	2 (2, 2%)	3 (3, 3%)
$u_C(0^+)$	84 (90, 3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (2, 2%)	6 (6, 5%)
$i_L(0^+)$	83 (89, 2%)	0 (0%)	2 (2, 2%)	0 (0%)	3 (3, 3%)	4 (4, 3%)
$i_C(0^+)$	56 (60, 9%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	26 (28, 3%)	10 (10, 9%)

Tabelle 5.7.2: Kategorisierung von B1 und B2. Abkürzung: W=Wert, B=Begründung, r=richtig, f=falsch, mE=mit Einheit, oE=ohne Einheit

- Bei dem Wert $i_C(0^+)$ erzielten 56 (60, 9%) der Studierenden das korrekte Ergebnis und begründeten es richtig. Der Fall, dass nur der Wert (mit oder ohne Einheit) oder nur die Begründung richtig war, trat nicht auf. Bei 26 (28, 3%) waren Wert und Begründung falsch. 10 (10, 9%) bearbeiteten diesen Aufgabenteil nicht.

Insgesamt ergibt sich die Tabelle 5.7.2 für die Bestimmung der Werte aus den Aufgabenteilen B1 und B2.

[B3] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq 0$ her. (3 Punkte)

- 78 (84, 8%) haben beide Bauteilgleichungen, also die für den Kondensator und die für den Widerstand richtig angegeben. Es trat nicht der Fall auf, dass eine richtig war und die andere falsch bzw. fehlt. Bei einem Studierenden gab es keine richtigen Anteile (1, 1%) und 13 (14, 1%) der Studierenden haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.
- Die Maschengleichung wurde von 77 (83, 7%) der Studierenden korrekt angegeben. Bei zwei Studierenden stimmte die Anzahl der verwendeten Teilspannungen nicht. Es gab eine falsche Bearbeitung und 12 (13%) haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.
- Die zu lösende Differentialgleichung wird von 77 (83, 7%) der Studierenden korrekt aufgestellt. Bei keinem Studierenden war die DGL von der falschen Größe abhängig oder es gab Fehler im Gleichungsmanagement, also der Kombination der vorher bestimmten Gleichungen. 10 (10, 9%) Studierende haben die DGL falsch und 5 (5, 4%) gar nicht angegeben.

[B4] Lösen Sie die Differentialgleichung. Wie groß ist die maßgebliche Zeitkonstante der Schaltung? (5 Punkte)

- Die Lösung der homogenisierten DGL wurde von 57 (62%) korrekt bestimmt. Fehler in der Homogenisierung oder die Verwendung eines nicht passenden Ansatzes traten bei keinem Studierenden auf. Eine falsche Bearbeitung lag bei 18 (19, 6%) Studierenden vor und es gab keine Bearbeitung bei 17 (18, 5%) Studierenden.

	inhomogene Lösung falsch oder halb-richtig	inhomogene Lösung richtig	Gesamt
homogene Lösung falsch	28	8	36
homogene Lösung richtig	0	56	56
Gesamt	28	64	92

Tabelle 5.7.3: Zusammenhang zwischen homogener und inhomogener Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

	W:r, B:r – 2	W:r (mE) – 1a	W:r (oE) – 1b	B:r – 1c	W:f, B:f – 0a	unbearb.
$u_C(t_1^-)$	68 (73,9%)	0 (0%)	2 (2,2%)	5 (5,4%)	10 (10,9%)	7 (7,6%)
$i_C(t_1^-)$	86 (93,5%)	1 (1,1%)	2 (2,2%)	1 (1,1%)	13 (14,1%)	8 (8,7%)
$u_C(t_1^+)$	66 (71,7%)	0 (0%)	2 (2,2%)	8 (8,7%)	8 (8,7%)	8 (8,7%)
$i_C(t_1^+)$	56 (60,9%)	0 (0%)	4 (4,3%)	0 (0%)	20 (21,7%)	12 (13,0%)

Tabelle 5.7.4: Kategorisierung von B5. Abkürzung: W=Wert, B=Begründung, r=richtig, f=falsch, mE=mit Einheit, oE=ohne Einheit

- Die Zeitkonstante wurde von 80 (87%) korrekt bestimmt. Es trat nicht auf, dass sie ohne Rechnung angegeben wurde oder es nach dem Einsetzen von $t = 0$ weitere Fehler gab. Eine falsche Bearbeitung gab es bei 3 (3,3%) Studierenden und keine Bearbeitung bei 9 (9,8%).
- Eine inhomogene Lösung der DGL wurde von 63 (68,5%) mittels eines Partikuläransatzes bestimmt, wobei es bei einem Studierenden dieses Lösungsverfahren mit Abstrichen gab. Eine Lösung über eine „Variation der Konstanten“ hat kein Studierender durchgeführt. 11 (12%) haben diesen Aufgabenteil falsch und 16 (17,4%) nicht bearbeitet.

In der Kreuztabelle 5.7.3 sind die Lösungsanzahlen zwischen der homogenen und der inhomogenen Lösungen der DGL dargestellt.

[B5] Geben Sie die Werte der Größen $u_C(t = t_1^-)$ und $i_C(t = t_1^-)$ sowie von $u_C(t = t_1^+)$ und $i_C(t = t_1^+)$ an und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die Ergebnisse der Kategorisierung von Aufgabenteil B5 sind übersichtlich in Tabelle 5.7.4 dargestellt.

[B6] Leiten Sie die Differentialgleichung für $u_C(t)$ für $t \geq t_1$ her. (3 Punkte)

- 69 (75%) haben beide Bauteilgleichungen, also die eines Kondensators und die einer Spule korrekt angegeben. Es trat nicht der Fall auf, dass nur eine richtig war und die andere falsch oder fehlte. Die übrigen 23 (25%) haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.

- Die Masche wird von 68 (73,9%) der Studierenden korrekt angegeben. Bei 3 (3,3%) stimmte die Anzahl der Teilspannungen nicht. Bei 5 (5,4%) lag eine falsche und bei 16 (17,4%) keine Bearbeitung vor. Der Knoten wurde von 61 (66,3%) korrekt angegeben. Bei 2 (2,2%) stimmte die Anzahl der Teilströme nicht. 8 (8,7%) haben diesen Aufgabenteil falsch und 21 (22,8%) gar nicht bearbeitet.
- Die DGL wurde von 53 (57%) richtig aufgestellt. Die Tatsache, dass eine Ableitung einer Gleichung bestimmt werden muss, haben 3 (3,3%), nicht beachtet, ein Studierender hat eine nicht zielführende Integration durchgeführt und 4 (4,3%) sind am Gleichungsmanagement gescheitert. Insgesamt haben 32 (34,4%) die Aufgabe falsch oder gar nicht bearbeitet.

[B7] Ermitteln Sie die Schwingungsgleichung für die Spannung $u_C(t)$, indem Sie die Differentialgleichung lösen und die Anfangswerte einsetzen. (6 Punkte)

Hinweis: Die Zeitachse darf so verschoben werden, dass sich $t_1 = 0$ ergibt.

- Die homogenisierte DGL wurde von 56 (60,9%) der Studierenden korrekt gelöst. Trotz korrekter Bestimmung der homogenisierten Gleichungen haben 4 (4,3%) sie falsch gelöst. Es gab 12 (13%) falsche Bearbeitungen und 20 (21,7%) haben sie nicht bearbeitet.
- Beim Einsetzen der Anfangswerte wurden die Werte der beiden Konstanten von 38 (41,3%) beide korrekt bestimmt. Bei 4 (4,3%) Studierenden war nur der Faktor vor dem Cosinus korrekt, während bei niemandem ausschließlich der Faktor vor dem Sinus korrekt war oder ein falscher Umgang mit den komplexen Funktionen erfolgte. 18 (19,6%) Studierende hatten eine falsche Bearbeitung und 31 (33,7%) gar keine bei diesem Aufgabenteil.

5.8 Beantwortung der dritten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die dritte Forschungsfrage,

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

für Aufgabe B beantwortet. Dieses ist in zwei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

3.1 Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?

In den ersten beiden Aufgabenteilen zeigt sich, dass die Argumente mit der sprunghaften Änderung der Bauteile und die Effekte eines offenen Schalters fast 90% der Studierenden geläufig sind. Die Veränderung an dem Kondensator, welche durch ein weiteres Bauteil, nämlich den Widerstand hervorgerufen wird, ist jedoch nur etwas mehr als 60% der Studierenden klar. Das Verhalten einzelner Bauteile scheint damit geläufiger zu sein als die Vorgänge, welche durch Kombinationen von Bauteilen entstehen. In B5 bestätigt sich Ähnliches für die Spannung $u_C(t)$, jedoch nicht für den Strom $i_C(t)$. Eine mögliche Ursache könnte in einem Missverständnis

davon resultieren, dass es Missverständnisse im Zusammenhang mit der Notation t_1^- und t_1^+ gibt.

In den Aufgabenteilen B3 und B6 ist auffällig, dass beim Aufstellen der Bauteilgleichungen bei dem überwiegenden Teil der Studierenden jeweils beide Bauteilgleichungen richtig sind oder diese Gleichungen beide falsch bestimmt wurden. Es treten keine Vermischungen auf, bei der eine vorhanden ist und die andere falsch ist bzw. fehlt. Ähnlich sieht es bei den Maschen- bzw. Knotengleichungen nach den Kirchhoff-Gesetzen aus: Entweder haben die Studierenden sämtliche Gleichungen gefunden oder keine davon. Hier war bei zwei Studierenden die Anzahl der Teilspannungen und bei drei Studierenden die Anzahl der Teilströme falsch, also trat dieses als halbrichtige Lösung nur bei einer Minderheit auf. Die Differentialgleichung in B3 wird von allen Studierenden, welche alle nötigen Gleichungen (also auch die Maschengleichung) richtig haben, korrekt gearbeitet. Des Weiteren bestimmen alle Studierenden, welche die Maschengleichung richtig aufgestellt haben, auch die Bauteilgleichungen korrekt. Analog bestimmen alle Studierenden, die Masche und Knoten richtig aufgestellt haben, auch die Bauteilgleichungen in B6 richtig. Bei dem Aufstellen der Differentialgleichung erhalten die meisten Studierenden die richtige Lösung, bei einer Minderheit wird die Ableitung nicht beachtet, gibt es Schwierigkeiten beim Integrieren oder sie scheitern am Gleichungsmanagement.

Die homogenisierte Differentialgleichung im Aufgabenteil B4 wird von ca. drei Viertel der Studierenden, welche sie korrekt aufgestellt haben, richtig gelöst und bei einem Viertel treten Fehler dabei auf. Fehler bei der Homogenisierung oder die Wahl eines unpassenden Ansatzes treten bei keinem Studierenden auf. Die Zeitkonstante wird von fast 90% richtig angegeben. Als Lösungsverfahren wird von den Studierenden das Partikulärverfahren verwendet, also das Verfahren, was in der Elektrotechnik-Veranstaltung hierzu verwendet wurde. Die Kombination aus der „Trennung der Veränderlichen“ und „Variation der Konstanten“, wie es dem Vorgehen aus der Mathematik-Veranstaltung entspricht, wird dagegen nicht eingesetzt. In B7 haben 56 Studierende die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung korrekt gelöst. Bei vier Studierenden gab es eine falsche Lösung trotz richtiger Homogenisierung, also folgt hier auch für einen Großteil der Studierenden aus einer richtigen Homogenisierung auch eine richtige Lösung. 38 Studierende haben beide Konstanten richtig bestimmt, wobei hier auch bei vier Studierenden der Fall auftrat, dass nur der Faktor vor dem Cosinus richtig war, aber es trat nicht der Fall auf, dass nur der Faktor vor dem Sinus richtig bestimmt wurde oder Fehler im Umgang mit den komplexen Funktionen auftraten.

3.2 Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

Ähnlich wie in den Videostudien, in denen alle die korrekten linksseitigen Grenzwerte bestimmt haben, sind diese Werte bei über 90% der Studierenden richtig. Das Missverständnis der Notation, welche bei Studierendenpaaren auftrat, ist eine mögliche Ursache für die falschen rechtsseitigen Grenzwerte in den Klausuren. Dort haben in B1 und B2 nur 60% auch den rechtsseitigen Grenzwert richtig. Der Wert von $i_C(0^+)$ ist von 56 Studierenden richtig bestimmt worden, während dieser von allen Studierendenpaaren korrekt gelöst wurde.

Während in den Videostudien die relevanten Formeln in B3 und B6 (Bauteilgleichungen, Kirchhoff-Gleichungen) von allen Paaren gefunden wurden (mit der Einschränkung, dass ein Paar eine überflüssige Gleichung für die Ladung im Kondensator herangezogen hat), war es in den Klausuren so, dass falsche Bauteil- oder Kirchhoff-Gleichungen herangezogen wurden, aber dass bei den Studierenden jeweils beide Bauteilgleichungen korrekt oder beide falsch

sind und gleiches gibt auch für die Gleichungen nach Kirchhoff. Teilrichtige Lösungen in den Klausurbearbeitungen existieren weder bei dem einen noch bei dem anderen. In den Klausuren berücksichtigte eine Minderheit der Studierenden eine falsche Anzahl an Spannungen und Strömen. Fehler bei der Kombination von richtig aufgestellten Gleichungen (Nicht-Beachten der Ableitung, Integrationsfehler, weitere Kombinationsfehler) traten in den Klausuren nur bei einer Minderheit auf, während sie in den Videostudien nicht auftraten.

Beim Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen in B4 traten in den Videostudien keine falschen Lösungen auf. Die homogenisierte Differentialgleichung wird in allen Videostudien richtig gelöst, während in den Klausuren nur drei Viertel der Studierenden, welche in der Klausur die DGL richtig in B4 aufgestellt haben, diese auch richtig gelöst haben. Während nur drei der vier Studierendenpaar die Zeitkonstante korrekt bestimmt haben, war dieses bei 90% der Studierenden der Fall. Während in den Videostudien zur Lösung der homogenisierten Differentialgleichung von jeweils zwei Studierendenpaaren der Partikulär- und der TdV/VdK-Ansatz verwendet wurden, verwendeten in den Klausuren alle Studierenden das Partikulärverfahren. In B7 haben 56 Studierende in der Klausur die homogene Differentialgleichung korrekt gelöst, was in den Videostudien ebenfalls von sämtlichen Studierenden geleistet wurde. Die Konstanten wurden von 38 Studierenden korrekt bestimmt, wobei vier weitere ausschließlich den Faktor vor dem Cosinus richtig bestimmt haben. Die Variationen bei der Bestimmung der Konstanten waren in den Klausuren nicht erkennbar, wobei der Fall, dass ein weiterer Werte aus dem 2π -Intervall gewählt wurde, nicht auftrat.

Kapitel 6

Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Signalanalyse“

In diesem Kapitel werden die Ansätze, deren Methodologie in Kapitel 3 erläutert und die exemplarisch in Kapitel 4 an einer Aufgabe durchgeführt wurden, auf eine Aufgabe zum Thema „Signalanalyse“, der sogenannten Aufgabe C, angewendet. Bei dieser Aufgabe werden bezogen auf die Mathematik hauptsächlich Integrationsverfahren für Funktionen in einer Veränderlichen verwendet. Im einzelnen ist dieses Kapitel folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst wird in Abschnitt 6.1 die Aufgabenstellung vorgestellt, wie sie den Studierenden in einer Klausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ vorlag. Dabei wird zusätzlich auch die Kurzlösung zitiert, welche den Korrektoren der Klausur vorlag. Diese Korrektoren sind Experten in der Elektrotechnik, d. h. der Dozent der Vorlesung der Veranstaltung sowie Wissenschaftliche Mitarbeiter aus der Elektrotechnik.

In Abschnitt 6.2 werden die theoretischen Hintergründe zu der Aufgabe vorgestellt. Dazu zählen einerseits die elektrotechnischen Grundlagen der Aufgabe, welche in dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, d. h. Böcker (2012), dargestellt. Andererseits werden auch die für die Bearbeitung der Aufgabe benötigten mathematischen Kenntnisse näher erläutert. Darüberhinaus gibt es noch eine Vertiefung, bei der in diesem Fall die feldtheoretischen Grundlagen dargestellt werden, welche zum vollständigen Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Situation benötigt werden, allerdings über den Kenntnisstand eines Zweitsemester-Studierenden hinausgehen.

Der folgende Abschnitt, also Abschnitt 6.3, präsentiert eine normative Aufgabenanalyse zu der vorliegenden Aufgabe. Hierbei wird das Konzept der Studi-Expert-Lösung (SEL) eingesetzt, welche im vorherigen Kapitel ab Seite 75 näher vorgestellt wurde. Diese SEL enthält neben einer ausführlichen Musterlösung auch die Anmerkungen des Experten aus dem Experteninterview sowie Bezüge zu den in Kapitel 2 präsentierten theoretischen Grundlagen wie dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) oder dem mathematischen Problemlösen nach Polya. In einem Unterabschnitt wird die Abhängigkeitsstruktur der Aufgabe vorgestellt, d. h. es wird vorgestellt, inwiefern Angaben aus der Aufgabenstellung, in vorherigen Aufgabenteile berechnete Größen sowie Naturkonstanten beim Lösen der Aufgabenteile eingesetzt werden.

Der Abschnitt 6.4 stellt dann die Antworten auf die drei Unterfragen der Forschungsfrage 1

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

vor:

- Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In den Abschnitten 6.5 bis 6.8 werden Ergebnisse aus den Analysen der Studierendenbearbeitungen vorgestellt. Diese werden jeweils mit Methoden analysiert, welche in Kapitel 3 ausführlicher vorgestellt wurden: Im Abschnitt 6.5 werden die Bearbeitungen aller drei Paare bei einem bestimmten Teil der Aufgabe vorgestellt und anschließend in Zwischenfazit-Zusammenfassungen für die spätere Beantwortung der Forschungsfrage 2 (siehe unten) erstellt. Die methodologischen Grundlagen und die verwendeten Kategorien werden in Kapitel 3 ab Seite 102 dargestellt. Mit Hilfe dieser Daten werden im Abschnitt 6.6 Antworten auf die Unterfragen der zweiten Forschungsfrage

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

vorgestellt. Dabei werden im einzelnen folgende Aspekte über die folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

- Welche Fehler und Problemstellen treten auf? (ab Seite 389)
- Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4. (ab Seite 389)
- Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben? (ab Seite 392)

Im darauffolgenden Abschnitt 6.7 werden die Klausurbearbeitungen von ca. 90 Studierenden zu der vorliegenden Aufgabe, welche mit Hilfe eines auf Basis der SEL entwickelten Kategorienschemas neu korrigiert wurden, hinsichtlich verschiedener Punkte analysiert. Dabei werden Lösungshäufigkeiten für einzelne Aufgabenabschnitte vorgestellt und auf diese Schwierigkeiten ermittelt. Mit Hilfe dieser Daten wird ab Seite 398 die dritte Forschungsfrage

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

im Abschnitt 6.8 mit ihren Unterfragen

- Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?
- Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

beantwortet.

Die Ergebnisse zu den einzelnen Forschungsfragen werden bezogen auf alle vier verwendeten Klausuraufgaben im Kapitel 8 zusammengefasst und gegenübergestellt.

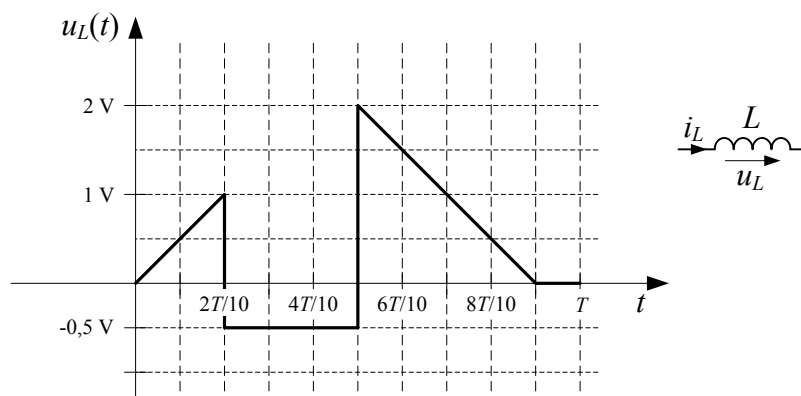
6.1 Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts

In diesem Abschnitt wird zunächst die Aufgabe selbst vorgestellt, wie sie in den Studierenden in der Klausur und später in den Studien mit den Studierendenpaaren vorlag. Zusätzlich wird jeweils zu den einzelnen Aufgabenstellungen die Lösung für die Korrektoren der Klausur, welche von dem Institut erstellt wurde, zitiert. Da sich diese an Experten in der Elektrotechnik richtet, ist diese an vielen Stellen sehr kurz gehalten und es gibt keine weiteren Anmerkungen beispielsweise zu den Hintergründen der Lösung. Aus diesem Grund war sie unzureichend für die weiteren Analysen und wurde im Rahmen der Studi-Expert-Lösung erweitert, um eine Grundlage für die Analysen der Bearbeitungsprozesse und -produkte zu bilden.

6.1.1 Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren

Aufgabe C: Signalkenngrößen

An einer Spule $L = 100 \text{ mH}$ liege für eine Dauer von $T = 10 \text{ s}$ die im Bild dargestellte Spannung $u_L(t)$ an. Zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ fließe durch die Spule kein Strom $i_L(t = 0) = 0 \text{ A}$.



6.1.1 (C1) GEBEN SIE DEN ARITHMETISCHEN MITTELWERT DER SPANNUNG IM INTERVALL $[0; T]$ AN. (1 PUNKT).

HINWEIS: DIE EXPLIZITE BERECHNUNG EINES INTEGRALS IST NICHT ERFORDERLICH!

Lösung

Einfache Lösung durch Auswerten der gegebenen Spannungszeitflächen!

$$\overline{u_L} = \frac{1}{10\text{s}}(1\text{V} \cdot 3\text{s} + 0,5\text{V} \cdot 1\text{s}) = \frac{3,5\text{Vs}}{10\text{s}} = 0,35\text{V}$$

6.1.2 (C2) BERECHNEN SIE DEN EFFEKTIVWERT DER SPANNUNG IM INTERVALL $[0; T]$. (4 PUNKTE)

Lösung

$$\begin{aligned}U_L &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(t) dt} \\&= \sqrt{\frac{1}{10s} \left(\int_0^{2s} \left(\frac{1V}{2s} \cdot t \right)^2 dt + \int_0^{3s} (-0,5V)^2 dt + \int_0^{4s} \left(\frac{-2V}{4s} \cdot t + 2V \right)^2 dt \right)} \\&= \sqrt{\frac{1}{10s} \left(\int_0^{2s} \frac{1V^2}{4s^2} \cdot t^2 dt + \int_0^{3s} 0,25V^2 dt + \int_0^{4s} \left(\frac{4V^2}{16s^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{4V^2}{4s} \cdot t + 4V^2 \right) dt \right)} \\&= \sqrt{\frac{1}{10s} \left(\left[\frac{1V^2}{4s^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{2s} + \left[\frac{1V^2}{4} \cdot t \right]_0^{3s} + \left[\frac{4V^2}{16s^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 - 2 \cdot \frac{4V^2}{4s} \cdot \frac{1}{2} t^2 + 4V^2 \cdot t \right]_0^{4s} \right)} \\&= \sqrt{\frac{1}{10s} \left(\frac{1V^2}{4s^2} \cdot \frac{1}{3} 8s^3 + \frac{1V^2}{4} \cdot 3s + \frac{4V^2}{16s^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 64s^3 - 2 \cdot \frac{4V^2}{4s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16s^2 + 4V^2 \cdot 4s \right)} \\&= \sqrt{\frac{1}{10s} \left(\frac{2V^2s}{3} + \frac{3V^2s}{4} + \frac{16V^2s}{3} - 16V^2s + 16V^2s \right)} \\&= \sqrt{\left(\frac{2V^2}{30} + \frac{3V^2}{40} + \frac{16V^2}{30} \right)} = \sqrt{\left(\frac{8V^2 + 9V^2 + 64V^2}{120} \right)} = \sqrt{\frac{81V^2}{120}} = 0,82V\end{aligned}$$

6.1.3 (C3) BESTIMMEN SIE DEN GLEICHRICHTWERT DER SPANNUNG IM INTERVALL [0; T]. (6 PUNKTE)

Lösung

$$\begin{aligned}\overline{|u_L|} &= \frac{1}{T} \int_0^T |u_L(t)| dt \\&= \frac{1}{10s} \left(\int_0^{2s} \frac{1V}{2s} \cdot t dt + \int_0^{3s} -0,5V dt + \int_0^{4s} \left(\frac{-2V}{4s} \cdot t + 2V \right) dt \right) \\&= \frac{1}{10s} \left(\left[\frac{1V}{2s} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2s} + [0,5V \cdot t]_0^{3s} + \left[\frac{-2V}{4s} \cdot \frac{1}{2} t^2 + 2V \cdot t \right]_0^{4s} \right) \\&= \frac{1}{10s} \left(\frac{1V}{2s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4s^2 + 0,5V \cdot 3s + -\frac{2V}{4s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16s^2 + 2V \cdot 4s \right) \\&= \frac{1}{10s} \left(1Vs + \frac{3}{2}Vs - 4Vs + 8Vs \right) = 0,65V\end{aligned}$$

6.1.4 (C4) WIE GROSS IST DIE INNERE ENERGIE W_L DER SPULE ZUM ZEITPUNKT $t_1 = 2 \text{ s}$? (2 PUNKTE)

Lösung

$$\begin{aligned} i_L(t_1 = 2\text{s}) &= i_L(t = 0) + \frac{1}{L} \int_0^{2\text{s}} u_L(t) \, dt = \frac{1}{L} \int_0^{2\text{s}} \frac{1\text{V}}{2\text{s}} \cdot t \, dt \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1\text{V}}{2\text{s}} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\text{s}} = \frac{1}{L} \frac{1\text{V}}{2\text{s}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{s}^2 = \frac{1\text{Vs}}{L} = \frac{1\text{Vs}}{100\text{mH}} = 10\text{A} \\ W_L(t_1 = 2\text{s}) &= \frac{1}{2} L \cdot i^2(t_1 = 2\text{s}) = \frac{1}{2} \cdot 100\text{mH} \cdot (10\text{A})^2 = 5\text{J} \end{aligned}$$

6.1.2 Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe C

In diesem Abschnitt werden die für Aufgabe C benötigten Formeln vorgestellt. In den Formeln wird die Notation aus Böcker (2012), dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, verwendet:

In der Aufgabe müssen die Studierenden in den ersten drei Aufgabenteilen Formeln kennen, die auf beiden Seiten ausschließlich Spannungen enthalten. Dabei wird bei den Integrationen jeweils die Einheit wie in Faktor behandelt, so dass alle Rechenoperationen auch mit der Einheit durchgeführt werden und die Ergebnisse, sofern der Zahlenwert in Volt (und nicht beispielsweise Quadratvolt) vorliegt, ebenfalls die Einheit Volt haben. Daher sind für die ersten drei Aufgaben ausschließlich die drei Formeln relevant:

Arithmetisches Mittel der Spannung im Intervall $(0, T)$:

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) \, dt \quad (6.1)$$

Effektivwert der Spannung im Intervall $(0, T)$:

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(t) \, dt} \quad (6.2)$$

Gleichrichtwert der Spannung im Intervall $(0, T)$:

$$|\overline{u_L}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u_L(t)| \, dt \quad (6.3)$$

Bauteilgleichung der Spule bzw. Induktivität L :

$$u(t) = L \cdot \dot{i}(t) \Leftrightarrow L = \frac{u(t)}{\dot{i}(t)} \quad (6.4)$$

Damit ergibt sich folgende Einheit:

$$\frac{(\text{Spannung in Volt V}) \cdot (\text{Zeit in Sekunden s})}{\text{Stromstärke in Ampere A}} := \text{Induktivität in Henry H}$$

Innere Energie der Spule W :

$$\frac{1}{2}L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot \text{Induktivität in Henry H} \cdot \text{Quadratstromstärke in Ampere}^2 \quad (6.5)$$

Als Einheit ergibt sich:

$$(\text{Induktivität in Henry H}) \cdot (\text{Quadratstromstärke in Ampere}^2) := \text{Energie in Joule J}$$

6.1.3 Abhängigkeitsstruktur

In dieser Aufgabe werden Ergebnisse aus vorherigen Aufgabenteilen zur Berechnung von Lösungen in späteren Aufgabenteilen verwendet. Die Tabelle stellt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Aufgabenteilen für Aufgabe C dar. Dabei wird die folgende Notation verwendet:

- $X^{[C]}$ bedeutet: die Größe steht in der Aufgabenstellung zu Aufgabe C
- X^{CY} bedeutet: die Größe X wurde in Aufgabenteil CY berechnet
- X (ohne Index) bedeutet: die Größe ist eine Naturkonstante

	Zur Rechnung benötigte Größen bzw. Skizzen	Berechnete Größen
C1	Aus der Skizze abgelesene Werte ^[C] (bei 0, 2s, 0, 5s, 0, 9s)	Arithmetischer Mittelwert der Spannung $ \overline{u_L} ^{C1}$
C2	Aus der Skizze abgelesene Werte ^[C] (bei 0, 2s, 0, 5s, 0, 9s)	Effektivwert der Spannung U_L^{C2}
C3	Aus der Skizze abgelesene Werte ^[C] (bei 0, 2s, 0, 5s, 0, 9s)	Gleichrichtwert der Spannung $\overline{u_L}^{C3}$
C4	• Aus der Skizze abgelesener Wert bei 0,2s^[C] • Spuleninduktivität $L^{[C]}$ • Spulenstrom $i_L(t = 0) = 0A^{[C]}$	Innere Energie $W_L(t = 2s)^{C4}$

6.2 Hintergründe zu der Aufgabe

Dieses Kapitel stellt die theoretischen Grundlagen vor, welche zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden. Im ersten Unterabschnitt geht es um die elektrotechnischen Grundlagen, welche

Studierende in der Elektrotechnik nach Ende ihres zweiten Fachsemesters aus Böcker (2012), für die Bearbeitung der Aufgabe kennen können. Im zweiten Abschnitt geht es entsprechend um die mathematischen Grundlagen, welche Elektrotechnik-Studierende nach ihrem ersten Studienjahr aus den Vorlesungen kennen sollten.

6.2.1 Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe C

Bezogen auf die Elektrotechnik müssen die Studierenden in diesem Fall für die Aufgabenteile C1 bis C3 drei Formeln kennen, welche im folgenden entsprechend Böcker (2012, S. 9) angegeben werden:

1. Das arithmetische Mittel einer zeitlich veränderlichen Größe $x(t)$ im Intervall $[t_0, t_1]$ ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} x(t) \, dt. \quad (6.6)$$

2. Der Effektivwert eines Stroms oder einer Spannung erzeugt in einem Ohm'schen Widerstand die gleiche Leistung wie ein entsprechender Gleichstrom bzw. eine entsprechende Gleichspannung. Er ist definiert als quadratischer Mittelwert:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \, dt} \quad (6.7)$$

3. Der Gleichrichtwert ist ein Mittel zur Beschreibung einer Wechselgröße in der Elektrotechnik und ermöglicht quantitative Aussagen über diese.

$$|\bar{x}| = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| \, dt \quad (6.8)$$

Für den Aufgabenteil C4 wird einerseits die Bauteilgleichung der Spule,

$$L \cdot \dot{i}_L(t) = u_L,$$

benötigt (vgl. Böcker (2012, S. 18)), welche bei Aufgabe B näher erläutert wird. Andererseits ist auch die Formel für die innere Energie

$$W_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

(vgl. Böcker (2012, S. 18)) relevant, welche in Aufgabe A näher vorgestellt wird.

6.2.2 Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe C

Aus mathematischer Sicht werden in Aufgabe C einerseits elementare Rechenoperationen aus Themenfeldern der Sekundarstufe I benötigt (siehe unten, (A)) sowie Integralrechnung in einer Veränderlichen (siehe unten (B)).

- (A) • Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks: Zur Bestimmung dieser Flächen muss jeweils $A = \frac{g \cdot h}{2}$ bestimmt werden, wobei g und h die Längen der beiden Katheten sind.

- Aufstellen einer linearen Funktion: Die Gerade $y(x)$, welche die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbindet, kann über die folgende Formel berechnet werden:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Summen unter Wurzeln dürfen nicht getrennt werden: Es gilt

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- Potenzgesetze: Es gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- Binomische Formel: Für das Quadrieren von $(ax - b)$ gilt:

$$(ax - b)^2 = a^2x^2 - 2axb + b^2$$

- (B)
- Das Integral ist – falls eine konstante Dichte vorliegt – translationsinvariant: Der Integrationsintervall kann entlang der x -Achse beliebig verschoben werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert.
 - Stammfunktion eines Polynoms: Die Stammfunktion $F(x)$ des Polynoms $f(x) = x^n$ ist $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Aufgrund der bestimmten Integrationen in der Aufgabe kann die Integrationskonstante c weggelassen werden.
 - Berechnung eines bestimmten Integrals: Für $\int_a^b f(x) \, dx$ gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

wobei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x)$ ist.

- Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integration: Es gilt

$$a\dot{x}(t) = y(t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{a} \int y(t) \, dt$$

für $a \in \mathbb{R}$

6.3 Die Studi-Expert-Lösung

In diesem Abschnitt wird die normative Lösung der Aufgabe, die sogenannte Studi-Expert-Lösung, sowie eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Teilen der Aufgabe vorgestellt. Diese ist in zwei Spalten unterteilt: In der ersten Spalte gibt es eine ausführliche Lösung der Aufgabe, welche unter Verwendung der Phasen nach Polya (1949) gegliedert ist. In der zweiten Spalte gibt es Anmerkungen zu kognitiven Ressourcen. Im Anschluss an die Bearbeitung des Experten ist jeweils sein Bearbeitungsprozess und seine Aussagen zu Lösungsalternativen, typischen Fehlern von Studierenden im ersten Studienjahr und Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse dargestellt, wobei (mmss) die Zeitpunkte in den Experteninterviews sind. Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösung gibt es ab Seite 75 im vorherigen Kapitel. Eine Einführung in die elektrotechnischen Fachbegriffe gibt es in dem entsprechenden Unterabschnitt des zweiten Abschnitts dieses Kapitels. Die vierstelligen Zahlen in runden Klammern geben in der Form (mmss) den Zeitpunkt im Experteninterview an.

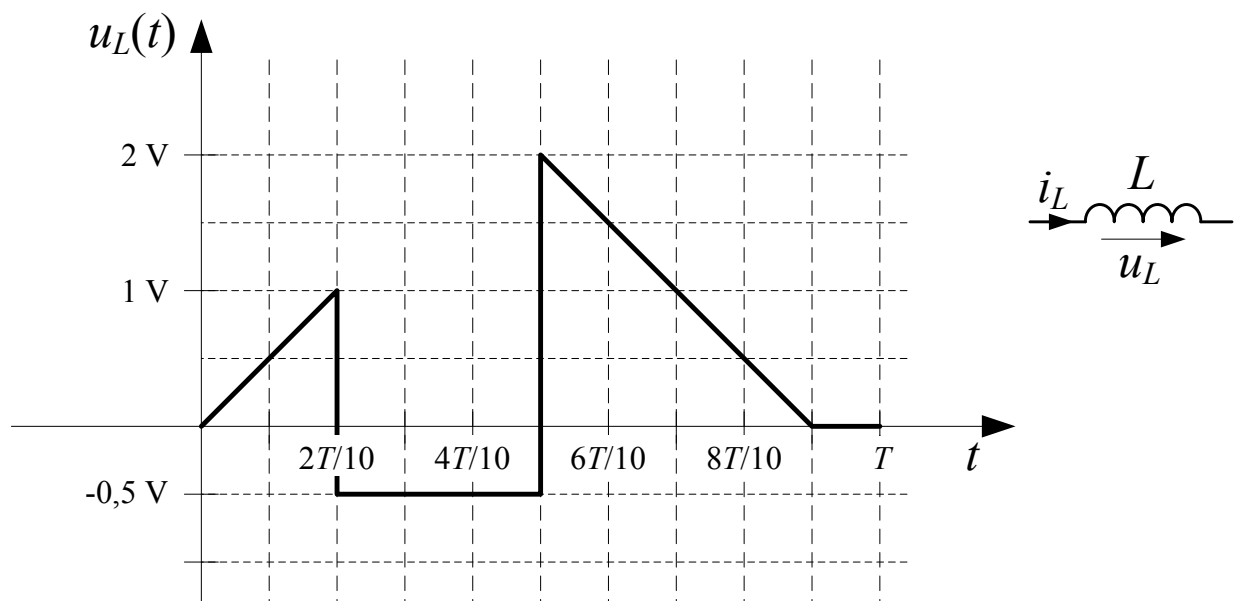


Abbildung 6.3.1: Spannungsverlauf der Spulenspannung $u_L(t)$

An einer Spule $L = 100\text{mH}$ liege für eine Dauer von $T = 10\text{s}$ die in Abbildung 6.3.1 dargestellte Spannung $u_L(t)$ an. Zum Zeitpunkt $t = 0\text{s}$ fließe durch die Spule kein Strom $i_L(0) = 0\text{A}$.

Expertenbearbeitung: Der Experte zeichnet in der Skizze in der Aufgabe die Zeitpunkte ein, in denen sich die Funktionsvorschrift der stückweise linearen Funktionen ändert, also bei zwei Sekunden, fünf Sekunden, neun Sekunden und zehn Sekunden.

[C1] Geben Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung im Intervall $[0; T]$ an. (1 Punkt). Hinweis: Die explizite Berechnung eines Integrals ist nicht erforderlich!

Lösung

Gesucht ist der arithmetische Mittelwert $\overline{u_L}$ der Spulenspannung. Dieser ist definiert als

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) \, dt$$

Dieses ist die übliche Berechnungsweise eines arithmetischen Mittelwerts unter Verwendung von Integralrechnung.

Gegeben ist der Graph der Spulenspannung in einem Koordinatensystem mit der Zeit auf der x -Achse und der Spannung $u_L(t)$ auf der y -Achse.

Abschätzung: Das Integral $\int_0^T u_L(t) dt$ beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen von $u_L(t)$ und der x -Achse. Dabei werden Flächenanteile mit $u_L(t) > 0$ positiv und Flächenanteile mit $u_L(t) < 0$ negativ gezählt. Offensichtlich ist, dass die positiven Flächenanteile überwiegen. Damit wird ein positiver arithmetischer Mittelwert erwartet. Das Maximum der Spulenspannung liegt bei $u_{L,max} = 2V$. Der arithmetische Mittelwert muss kleiner sein.

$$0 < \overline{u_L} < 2V$$

Bearbeitungsvariante I:

Der arithmetische Mittelwert ist definiert als

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt.$$

Das Integral $\int_0^T u_L(t) dt$ beschreibt die Fläche zwischen $u_L(t)$ und der x -Achse. Daher kann hier eine Lösung des Integrals durch Addition der (orientierten) Spannungszeitflächen aus der Skizze erfolgen. Dazu muss die gesamte Fläche hier in vier Teilintervalle unterteilt werden. Jeder Knick von $u_L(t)$ stellt dabei eine Stelle dar, an der eine Teilfläche endet beziehungsweise die nächste Teilfläche beginnt.

Teilstück 1 ist das kleinere Dreieck im Intervall $[0, \frac{2}{10}]$ mit der Fläche

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2T}{10} - 0 \right) 1V = \frac{T}{10} V = \frac{T}{10} Vs = 1Vs$$

da $T = 10s$ laut Aufgabenstellung.

Teilstück 2 ist das auf Teilstück 1 folgende Rechteck im Intervall $[\frac{2}{10}, \frac{5}{10}]$

. Es hat die negative Fläche

$$A_2 = \left(\frac{5T}{10} - \frac{2T}{10} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) V = -\frac{3 \cdot 10s}{10 \cdot 2} V = -\frac{3}{2} Vs.$$

Teilstück 3 ist das größere Dreieck im Intervall $[\frac{5}{10}, \frac{9}{10}]$ mit der Fläche

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{9T}{10} - \frac{5T}{10} \right) 2V = \frac{4 \cdot 10s}{10} V = 4Vs.$$

Das letzte Teilstück im Intervall $[\frac{9T}{10}, T]$ liegt auf der Zeitachse und damit ist

$$A_4 = 0.$$

Wir haben damit das Integral in eine Summe von vier Teilflächen überführt:

$$\int_0^T u_L(t) dt = \sum_{i=1}^4 A_i = 1Vs - \frac{3}{2} Vs + 4Vs + 0Vs = 3,5Vs$$

Damit ist

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^4 A_i = \frac{1}{10s} \cdot 3,5Vs = 0,35V$$

der arithmetische Mittelwert der Spulenspannung.

Phase C1.1a: Bestimmen des arithmetischen Mittelwertes durch Bewertung der Spannungszeitflächen.

Ressourcen:

Kenntnis der Integralformel des arithmetischen Mittelwertes,

Geometrische Vorstellungen zum Verschieben von Integrationsflächen (bei gleicher Dichte bzgl. Integration)

Bearbeitungsvariante II:

Alternativ kann der arithmetische Mittelwert der Spulenspannung auch über Integrale gelöst werden, in dem man vier lineare Funktionen für die Teilstücke aufstellt:

$$u_L(t) = \begin{cases} u_{L,1}(t) & \text{für } t \in [0; \frac{2T}{10}] \\ u_{L,2}(t) & \text{für } t \in [\frac{2T}{10}; \frac{5T}{10}] \\ u_{L,3}(t) & \text{für } t \in [\frac{5T}{10}; \frac{9T}{10}] \\ u_{L,4}(t) & \text{für } t \in [\frac{9T}{10}; T] \end{cases}$$

$u_{L,2}(t)$ und $u_{L,4}(t)$ sind konstant:

$$u_{L,2}(t) = -\frac{1}{2}\text{V}$$

$$u_{L,4}(t) = 0\text{V}$$

Für die übrigen beiden Abschnitte müssen die Gleichungen der jeweiligen Geraden bestimmt werden. Die Gleichung

$$u_{L,1}(t) = \frac{1\text{V} - 0\text{V}}{\frac{2T}{10} - 0}t + 0 = \frac{1\text{V}}{2s}t$$

ist sofort ersichtlich, da $u_{L,1}(t)$ durch den Koordinatenursprung verläuft.

Die Steigung von Abschnitt 3, der zweiten Geraden, ist

$$\frac{0\text{V} - 2\text{V}}{\frac{9T}{10} - \frac{5T}{10}} = -\frac{2\text{V}}{4s} = -\frac{1\text{V}}{2s}$$

Damit ist

$$u_{L,3}(t) = -\frac{1\text{V}}{2s}t + u_{L,3}(0).$$

Aus dem Graphen kann abgelesen werden, dass

$$u_{L,3}\left(\frac{9T}{10}\right) = 0.$$

Dies setzen wir ein:

$$0 = -\frac{1\text{V}}{2s} \frac{9T}{10} + u_{L,3}(0)$$

$$\frac{9}{2}\text{V} = u_{L,3}(0)$$

Damit ist

$$u_{L,3}(t) = -\frac{1\text{V}}{2s}t + \frac{9\text{V}}{2}.$$

Jetzt können wir $\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt$ lösen.

$$\overline{u_L} \cdot T = \int_0^T u_L(t) dt$$

Phase C1.1b1: Mathematische Beschreibung und Integration der graphisch gegebenen Spulenspannungsfunktion

Ressourcen:

*Kenntnis des arithmetischen Mittelwertes,
Aufstellen von linearen Funktionen,
Zerlegung von Definitionsbereichen*

$$\overline{u_L} \cdot T = \int_0^{\frac{2T}{10}} u_{L,1}(t) dt + \int_{\frac{2T}{10}}^{\frac{5T}{10}} u_{L,2}(t) dt + \int_{\frac{5T}{10}}^{\frac{9T}{10}} u_{L,3}(t) dt + \int_{\frac{9T}{10}}^T u_{L,4}(t) dt$$

Da wir die Funktion $u_L(t)$ in vier Teilfunktionen aufgeteilt haben, erhalten wir auch vier Teilintegrale.

$$\begin{aligned} \overline{u_L} \cdot T &= \int_{0s}^{2s} \frac{1V}{2s} t dt + \int_{2s}^{5s} -\frac{1V}{2} dt + \int_{5s}^{9s} -\frac{1V}{2s} t + \frac{9V}{2} dt + \int_{9s}^{10s} 0 dt \\ &= \frac{1V}{2s} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2s} \left(-\frac{1V}{2} \right) [t]_{2s}^{5s} + \left[-\frac{1V}{2s} \frac{t^2}{2} + \frac{9V}{2} t \right]_{5s}^{9s} + 0 \\ &= \frac{1V}{2s} \frac{4s^2}{2} + \frac{-1V}{2} 3s + \left(\frac{-1V}{2s} \frac{81s^2}{2} + \frac{9V}{2} 9s + \frac{1V}{2s} \frac{25s^2}{2} - \frac{9V}{2} 5s \right) \\ &= 1Vs - \frac{3}{2}Vs + 4Vs = \frac{7}{2}Vs \end{aligned}$$

Damit ist

$$\overline{u_L} = \frac{\frac{7}{2}Vs}{T} = \frac{7}{20}V = 0,35V.$$

Phase C1.1b2: Bestimmen des arithmetischen Mittelwertes durch Integration der Spulenspannung, Integration von Polynomen, Verständnis der Integration als Kumulationsgesamteffekt

Weitere Bearbeitungsvarianten:

Das Integral der Spulenspannung sowie die Summe der Teilflächen aus den vorausgegangenen Lösungswegen bestimmen jeweils die Gesamtfläche zwischen Spannungsverlauf und Zeitachse unter Berücksichtigung des Vorzeichens der jeweiligen Flächenanteile.

Die Rechtecksfläche sowie die beiden Dreiecksflächen können daher im Intervall

$$t \in [0; 10s]$$

entlang der Zeitachse verschoben werden. Ebenso können die Flächen unterteilt und umgeordnet werden, solange die Gesamtfläche dabei nicht verändert wird. Durch ein Umordnen kann die Integration erleichtert werden.

Es ergeben sich durch derartige Verschiebungen beliebig viele Lösungswege.

Validierung: Es ergibt sich für $\overline{u_L}$ einen Wert zwischen 0V und 2V erwartet. Damit liegt das Ergebnis unserer Rechnung innerhalb des sinnvollen Bereichs.

Phase C1.2 Validierung des Ergebnisses: Überprüfung der Größenordnung

Hinweise: Man bezeichnet den arithmetischen Mittelwert in der Elektrotechnik auch als Gleichanteil. Diese Begrifflichkeit ist jedoch vor allem für harmonische Wechselsignale sinnvoll.

Expertenbearbeitung: Der Experte notiert sich zunächst die Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts der Spannung, d. h.

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(\tau) \, d\tau.$$

Dann schraffiert er die Dreiecke in der Skizze und beschreibt, wie er diese verschiebt, in dem Stücke abtrennt und in Lücken hineinlegt, um rechteckige Flächen zu erhalten. Gleichzeitig berücksichtigt er die negative Orientierung der Fläche im Intervall [2s, 5s]. Auf diese Weise erhält ohne Verwendung der angegebenen Formel durch Verschiebung von Flächen das richtige Ergebnis.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass er vor der Berechnung mit der Formel bedenkt, ob die Einheit des Ergebnisses passen würde. Er erläutert die Verschiebung von Flächen unter dem Graphen der Funktion, das „Klötzchenschieben“. Er sagt, dass die aufgrund der kurzen Zeit von zehn Sekunden das Ergebnis hier keine praktische Relevanz hat. Der Mittelwert ist das, was aus einem sogenannten Tiefpass, einem elektrotechnischen Bauteil, herauskäme.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Statt der Betrachtung der Flächen (bzw. „Klötzchen“) können hier auch tatsächlich die Integrale gelöst werden. Dabei ist insbesondere die lineare Funktion für das Intervall [5s,9s] schwer zu bestimmen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Fehler entstehen hier vor allem durch das Heranziehen falscher Formeln. Des Weiteren können beim Verschieben der Flächen bzw. der Lösung der Integrale weitere Fehler vorkommen.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Eine Validierung ist jeweils über den Alternativweg möglich, d. h. wenn man die Aufgabe über Flächenverschiebungen gelöst hat, kann man stattdessen auch die Integrale berechnen. Man kann über die Physik bestimmte Werte ausschließen, so muss das Ergebnis im Wertebereich der Funktion liegen.

[C2] Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung im Intervall $[0; T]$.
(4 Punkte)

Lösung

Gesucht ist im Folgenden der Effektivwert der Spannung $u_L(t)$ (englisch: RMS-value, wobei RMS = root mean square). Dieser gibt die energetisch äquivalente und *konstante* Spannung an, mit der ein Ohm'scher Widerstand betrieben werden müsste, um in der gleichen Zeit die gleiche Energie zu verbrauchen wie die Spule mit der nicht konstanten Spannung $u_L(t)$. Der Effektivwert ist definiert als

$$U_L = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(t) \, dt}$$

Für den Effektivwert der Spannung U_{eff} bzw. den entsprechenden Wert für die Stromstärke I_{eff} erhält man mit dem Ohm'schen Gesetz $U_{\text{eff}} = R \cdot I_{\text{eff}}$ bzw. in der üblichen Darstellung $u(t) = R \cdot i(t)$. Bei konstanter Leistung gilt:

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{(U_{\text{eff}})^2}{R} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{R} u^2(t) \, dt.$$

Nun isolieren wir U_{eff} durch Multiplikation beider Seiten mit dem konstanten Wert R und anschließendem Wurzelziehen:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \, dt}$$

Beispiel: Der Effektivwert der Wechselspannung aus der Steckdose ist 230V (bei einer Frequenz von 50 Hz).

Gegeben ist die graphische Darstellung des Spannungsverlaufs, die direkt zum Berechnen des Effektivwerts eingesetzt werden kann.

Abschätzung: Bei der Berechnung des Effektivwertes wird die Funktion zunächst quadriert. Dadurch werden alle Flächenanteile positiv. Wir erwarten daher

$$U_{\text{eff}} > \overline{u_L}$$

In Aufgabenteil C1 wurde bereits $u_L(t)$ als stückweise definierte Funktion bestimmt. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^2 \cdot T &= \int_0^T u_L(t)^2 dt \\
 &= \int_{0s}^{2s} \left(\frac{1V}{2s} t \right)^2 dt + \int_{2s}^{5s} \left(-\frac{1V}{2} \right)^2 dt + \dots \\
 &\quad \dots + \int_{5s}^{9s} \left(-\frac{1V}{2s} t + \frac{9V}{2} \right)^2 dt + \int_{9s}^{10s} 0 dt \\
 &= \int_{0s}^{2s} \frac{1V^2}{4s^2} t^2 dt + \int_{2s}^{5s} \frac{1V^2}{4} dt + \dots \\
 &\quad \dots + \int_{5s}^{9s} \frac{1V^2}{4s^2} t^2 - 2 \frac{1V}{2s} t \frac{9V}{2} + \frac{81V^2}{4} dt + 0
 \end{aligned}$$

Phase C2.1: Bestimmen des Effektivwertes durch Integration

Ressourcen:

Kenntnis der Formel für den Effektivwert,

Integration von Polynomen, Kenntnis der Formel für den quadratischen Mittelwert

Mögliche Fehler:

Verwendung von Flächenberechnungen analog zu C1 und C3

Fehler im Zusammenhang mit Wurzeln und Summen, d. h. beispielsweise Verwendung von $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Wir integrieren (zur besseren Übersicht jedes Integral einzeln):

$$\int_0^{2s} \frac{1V^2}{4s^2} t^2 dt = \frac{1V^2}{4s^2} \frac{1}{3} [t^3]_0^{2s} = \frac{1V^2}{12s^2} \cdot 8s^3 = \frac{2}{3} V^2 s$$

Wir fahren fort mit dem zweiten Integral:

$$\int_{2s}^{5s} \frac{1}{4} V^2 dt = \frac{1}{4} V^2 [t]_{2s}^{5s} = \frac{3}{4} V^2 s$$

Nun lösen wir das dritte und letzte Integral:

$$\begin{aligned}
 &\int_{5s}^{9s} \frac{1V}{4s^2} t^2 - 2 \frac{1V}{2s} t \frac{9V}{2} + \frac{81V^2}{4} dt \\
 &= \int_{5s}^{9s} \frac{1V^2}{4s^2} t^2 dt - \int_{5s}^{9s} \frac{9V^2}{2s^2} t dt + \int_{5s}^{9s} \frac{81V^2}{4} dt \\
 &= \left[\frac{1V^2}{12s^2} t^3 \right]_{5s}^{9s} - \left[\frac{9V^2}{4s} t^2 \right]_{5s}^{9s} + \left[\frac{81V^2}{4} t \right]_{5s}^{9s} \\
 &= \frac{1V^2 s}{12} \cdot (729 - 125) - \frac{9V^2 s}{4} \cdot (81 - 25) + \frac{81}{4} V^2 s \cdot (9 - 5) \\
 &= \frac{151}{3} V^2 s - 126 V^2 s + 81 V^2 s \\
 &= \frac{16}{3} V^2 s
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$U_{\text{eff}}^2 \cdot T = \frac{2}{3} V^2 s + \frac{3}{4} V^2 s + \frac{16}{3} V^2 s = \frac{27}{4} V^2 s$$

die Summe der vier Teilintegrale. Entsprechend ist

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{27}{4} V^2 s} = \sqrt{\frac{27}{40}} V \approx 0,822 V$$

Validierung: Der Effektivwert ist größer als der arithmetische Mittelwert, so dass unsere Erwartungen erfüllt wurden. Eine weitere Validierungsmöglichkeit ist die Dimensionsanalyse: Bei den Einzelintegralen ergab sich jeweils die Einheit $V^2 s$. Nach der Berechnung der vier Integrale dividieren wir durch die Zeit, wodurch sich das s kürzt, und müssen die Wurzel aus den Werten ziehen, so dass aus V^2 wieder V wird.

Phase C2.2: Validierung

Ressourcen:

Validierung über Größenordnungen,

Validierung über Einheiten

Expertenbearbeitung: Zunächst notiert der Experte die Formel

$$U_L = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(\tau) d\tau}.$$

Dann passt er die Formel für die vorliegende Situation an, indem er das Integrationsintervall $[0s, 10s]$ in drei Teilintervalle $[0s, 2s]$, $[2s, 5s]$ und $[5s, 9s]$ entsprechend der stückweisen Definition der skizzierten Funktion zerlegt. Anschließend verschiebt er alle drei Intervalle in den Ursprung, wodurch das erste unverändert bleibt, das zweite zu $[0s, 3s]$ und das dritte zu $[0s, 4s]$ wird. In die Integranden schreibt er jeweils die linearen Funktionen, welche den Spannungsverlauf in dem jeweiligen Intervall beschreiben. So kommt er am Ende auf das richtige Ergebnis.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass der Effektivwert der Spannung zur Bestimmung davon dient, was die Spannung „effektiv leisten kann“ (1705), beispielsweise ist 230 Volt der Effektivwert deutscher Steckdosen. Der Experte beschreibt, dass man durch das Quadrieren im Integranden nicht einfach die Flächen berechnen kann:

„Da muss man wirklich das Integral ausrechnen.“

(2015)

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Hier gibt es keine weiteren Lösungsmöglichkeiten. (Durch die vorkommenden quadratischen Terme in den Integralen kann man hier – im Gegensatz zu C1 und C3 – nicht über die Flächen zu einer Lösung kommen.)

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Studierende könnten eine falsche Zerlegung der Wurzel vornehmen, in dem sie die Summe unter der Wurzel falsch zerlegen, d. h.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Fehler entstehen hier vor allem durch das Heranziehen falscher Formeln. Des Weiteren können beim Verschieben der Flächen bzw. der Lösung der Integrale weitere Fehler vorkommen. Man kann über die Physik bestimmte Werte ausschließen, so muss das Ergebnis im Wertebereich der Funktion liegen.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Eine Validierung kann über die Kontrolle der Einheiten der einzelnen Summanden und des Ergebnisses durchgeführt werden.

[C3] Bestimmen Sie den Gleichrichtwert der Spannung im Intervall $[0; T]$. (6 Punkte)

Lösung

Gesucht ist nun der Gleichrichtwert. Dieser ist der arithmetische Mittelwert des Betrages der Spulenspannung. Er wird vorwiegend bei Wechsignalen betrachtet, da bei diesen sich negative und positive Anteile im arithmetischen Mittel zu Null kompensieren können und der arithmetische Mittelwert daher an Aussagekraft verliert. Der Gleichrichtwert hat das Symbol $\overline{|u_L|}$:

$$\overline{|u_L|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u_L(t)| \, dt$$

Gegeben ist auch hier der Spannungsverlauf an der Spule, aus dem der Gleichrichtwert ermittelt werden kann.

Abschätzung: Bei der Berechnung des Gleichrichtwertes werden alle Spannungszeitflächen positiv gezählt. Im Gegensatz zum Effektivwert aus dem vorigen Aufgabenteil wird hier jedoch der Spannungsverlauf nicht quadriert. Wir erwarten daher einen Wert, der zwischen den beiden vorangegangenen Ergebnissen liegt.

$$\overline{u_L} < \overline{|u_L|} < U_{\text{eff}}$$

Bearbeitungsvariante I:

In Aufgabe C1 wurde bereits der arithmetische Mittelwert zu

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt$$

berechnet. Dabei wurde das Integral, welches die Fläche zwischen $u_L(t)$ und der Zeitachse bezeichnet, in eine Summe aus Teilflächen überführt:

$$\int_{(T)} u_L(t) dt = \sum_{(T)} A_i$$

Dabei ergaben Flächenanteile, die unterhalb der Zeitachse lagen (also bei $u_L < 0$), negative Flächen. Diese werden beim Gleichrichtwert als arithmetisches Mittel des Betrages der Spulenspannung jedoch ebenfalls positiv gezählt, beziehungsweise genauer: Durch die Betragsbildung von $u_L(t)$ spiegelt das Rechteck $t \in [\frac{2T}{10}; \frac{5T}{10}]$ in den ersten Quadranten; entsprechend wird auch die Fläche positiv. Da hier alle Flächenanteile entweder vollständig oberhalb der Zeitachse oder aber vollständig unterhalb der Zeitachse liegen, können wir mit den Flächen A_i aus Aufgabenteil C1 den integralen Gleichrichtwert in

$$|\overline{u_L}| = \frac{1}{T} \int_{(T)} |u_L(t)| dt = \frac{1}{T} \sum_{(T)} |A_i|$$

eine Summe überführen. Die A_i aus Aufgabenteil 1 lauten:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1Vs & A_2 &= -\frac{3}{2}Vs \\ A_3 &= 4Vs & A_4 &= 0Vs \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |\overline{u_L}| &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^4 |A_i| = \frac{1}{T} \left(|1Vs| + \left| -\frac{3}{2}Vs \right| + |4Vs| + |0Vs| \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(1Vs + \frac{3}{2}Vs + 4Vs \right) = \frac{1}{10s} \frac{13}{2}Vs = \frac{13}{20}V = 0,65V \end{aligned}$$

Bearbeitungsvariante II:

Diese Aufgabe kann auch über Integration gelöst werden. Es ist, mit der in Aufgabenteil bestimmten stückweise definierten Funktion $u_L(t)$:

$$|\overline{u_L}| \cdot T = \int_0^T |u_L(t)| dt$$

$$\overline{u_L} \cdot T = \int_0^{\frac{2T}{10}} |u_{L,1}(t)| dt + \int_{\frac{2T}{10}}^{\frac{5T}{10}} |u_{L,2}(t)| dt + \int_{\frac{5T}{10}}^{\frac{9T}{10}} |u_{L,3}(t)| dt + \int_{\frac{9T}{10}}^T |u_{L,4}(t)| dt$$

Phase C3.1a: Bestimmen des Gleichrichtwertes durch Auswertung der Spannungszeitflächen

Ressourcen:

Kenntnis der Formel für den Gleichrichtwert,

Verwendung der Zerlegungs- und Verschiebungsüberlegungen aus C1

Phase C3.1b: Bestimmen des Gleichrichtwertes durch Integration

Ressourcen:

Kenntnis der Formel des Gleichrichtwertes,

Integration von Polynomen

Da die Funktion $u_L(t)$ in vier Teilfunktionen aufgeteilt wurde, erhalten wir auch vier Teilintegrale.

$$\begin{aligned}\overline{u_L} \cdot T &= \int_{0s}^{2s} \left| \frac{1V}{2s} t \right| dt + \int_{2s}^{5s} \left| -\frac{1V}{2} \right| dt + \int_{5s}^{9s} \left| -\frac{1V}{2s} t + \frac{9V}{2} \right| dt + \int_{9s}^{10s} |0| dt \\ &= \int_{0s}^{2s} \frac{1V}{2s} t dt + \int_{2s}^{5s} \frac{1V}{2} dt + \int_{5s}^{9s} -\frac{1V}{2s} t + \frac{9V}{2} dt + 0\end{aligned}$$

denn $-\frac{1V}{2s}t + \frac{9V}{2} \geq 0$ für $t \leq 9s$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}\overline{u_L} \cdot T &= \frac{1V}{2s} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2s} + \frac{1V}{2} [t]_{2s}^{5s} + \left[-\frac{1V}{2s} \frac{t^2}{2} + \frac{9V}{2} t \right]_{5s}^{9s} \\ &= \frac{1V}{2s} \frac{4s^2}{2} + \frac{1V}{2} \cdot 3s + \left(-\frac{1V}{2s} \frac{81s^2}{2} + \frac{9V}{2} 9s + \frac{1V}{2s} \frac{25s^2}{2} - \frac{9V}{2} \cdot 5s \right) \\ &= \overline{u_L} \cdot T = 1Vs + \frac{3}{2}Vs + 4Vs = \frac{13}{2}Vs\end{aligned}$$

Damit ist

$$\overline{u_L} = \frac{\frac{13}{2}Vs}{T} = \frac{13}{20}V = 0,65V.$$

Validierung: Das Ergebnis liegt im erwarteten Bereich, also zwischen $\overline{u_L}$ und U_{eff} .

Phase C3.2 Validierung des Ergebnisses:

Expertenbearbeitung: Der Experte sagt als erstes, dass das Ergebnis „genauso berechnen wie C1 [kann], also formelmäßig“ (1029). Nun kommen Betragsstriche vor, wodurch sich das Vorzeichen des Summanden in der Mitte ändert. Als Formel gibt er

Überprüfung der Größenordnung

$$|\overline{u_L}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u_L(\tau)| d\tau$$

an und überträgt dann die einzelnen Summanden aus C1 unter Berücksichtigung, dass bei dem zweiten Summanden aus einer Subtraktion eine Addition wird.

In Phase 2 erklärt der Experte, dass der Gleichrichtwert der Wert ist, den man erhält, wenn die Spannung durch einen Gleichrichter, ein weiteres elektrotechnisches Bauteil, geführt wird.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Statt der Betrachtung der Flächen (bzw. „Klötzchen“) können hier auch tatsächlich die Integrale gelöst werden. Dabei ist insbesondere die lineare Funktion für das Intervall $[5s, 9s]$ schwer zu bestimmen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Fehler entstehen hier vor allem durch das Heranziehen falscher Formeln. Des Weiteren können beim Verschieben der Flächen bzw. der Lösung der Integrale weitere Fehler vorkommen.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Eine Validierung ist jeweils über den Alternativweg möglich, d. h. wenn man die Aufgabe über Flächenverschiebungen gelöst hat, kann man stattdessen auch die Integrale berechnen. Man kann über die Physik bestimmte Werte ausschließen, so muss das Ergebnis im Wertebereich der Funktion liegen.

[C4] Wie groß ist die innere Energie $W_L(t)$ der Spule zum Zeitpunkt $t_1 = 2s$? (2 Punkte)

Lösung

Gesucht ist in diesem Aufgabenteil die innere Energie der Spule zum Zeitpunkt $t_1 = 2s$. Diese ist die im magnetischen Feld der Spule gespeicherte Energie und errechnet sich zu:

$$W_L(t) = \int P_L(t) dt = \int u_L(t) i_L(t) dt$$

wobei $P_L(t)$ die Leistung der Spule, $u_L(t)$ die Spulenspannung und $i_L(t)$ der Spulenstrom ist.

Gegeben ist der Spannungsverlauf an der Spule, sowie ihre Induktivität und der Spulenstrom zum Zeitpunkt $t = 0$. Es muss der Stromverlauf betrachtet werden, um die innere Energie bestimmen zu können.

Abschätzung: Die innere Energie der Spule muss positiv sein. Eine weitergehende Abschätzung ist hier nicht in einfacher Weise möglich. Man kann hier lediglich aus Erfahrungswerten sagen, dass bei einer maximalen Spannung von 1V und einer Dauer von 2s die Energie der Spule mit $L = 100\text{mH}$ nicht sehr groß sein sollte.

Mit der Bauteilgleichung der Spule

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

folgt:

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \int L \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t) dt = L \int \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t) dt \\ &= L \frac{i_L^2(t)}{2} \quad \text{da} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{i_L^2(t)}{2} \right) = \frac{2i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}}{2} \\ &\quad \text{(Ketten- bzw. Produktregel)} \end{aligned}$$

Da $W_L(2s)$ gesucht und L bekannt ist, wird $i_L(2s)$ zum Ermitteln von $W_L(2s)$ benötigt. Wir wissen, dass

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Leftrightarrow i_L(t) = \int \frac{u_L(t)}{L} dt.$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} i_L(2s) &= \int_{-\infty}^{2s} \frac{u_L(t)}{L} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{u_L(t)}{L} dt + \int_0^{2s} \frac{u_L(t)}{L} dt \\ &= i_L(0) + \int_0^{2s} \frac{u_L(t)}{L} dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^{2s} u_L(t) dt \end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^{2s} u_L(t) dt$ stellt hier abermals die Fläche des kleineren Spannungsdreiecks dar. Die Fläche ist aus Aufgabenteil 1 als $A_1 = 1Vs$ bekannt.

Damit ist

$$\begin{aligned} i_L(2s) &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^{2s} u_L(t) dt = i_L(0) + \frac{1}{L} 1Vs = 0 + \frac{1Vs}{100mH} \\ &= 10 \frac{Vs}{H} = 10 \frac{Vs}{\frac{Vs}{A}} = 10A \end{aligned}$$

da $i_L(0) = 0$ laut Aufgabenstellung. Damit ist die innere Energie der Spule:

$$\begin{aligned} W_L(2s) &= \frac{1}{2} L i_L^2(2s) = \frac{1}{2} L (10A)^2 = \frac{1}{2} 100mH 100A^2 = 5H \cdot A^2 = 5 \frac{Vs}{A} A^2 \\ &= 5Ws = 5J \end{aligned}$$

Phase C4.1: Bestimmung der inneren Energie der Spule durch Berechnung des Spulenstroms

Ressourcen:

*Kenntnis der Formel für die innere Energie,
Kenntnis der Bauteilgleichung einer Spule,
Integration allgemein,
Kenntnis der Einheit Henry in SI-Einheiten*

Validierung: Die Größenordnung ist nach Vorlesungswissen realistisch. Man kann durch Kombination der SI-Einheiten erkennen, dass das Ergebnis die richtige Einheit hat.

Phase C4.2: Validierung

Expertenbearbeitung: Der Experte leitet seine Bearbeitung mit „Jetzt ein ganz anderer Teil: Energieberechnung“ (vgl. 1132) ein. Dann gibt er die Formeln $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$ und $u_C = L \frac{di}{dt}$ an. Die zweite Formel stellt er um zu

Größenordnung, Dimensionsanalyse

$$i_L = \int_{0s}^{2s} \frac{u_L}{L} d\tau = \frac{1}{L} \int_{0s}^{2s} u_L d\tau \quad (6.9)$$

und argumentiert, dass das Integral der Fläche unter dem Graphen der Funktion entspricht und gibt damit den Wert für den Strom an. Sein Ergebnis setzt er dann in die Formel für W_L ein und erhält das gesuchte Ergebnis.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Hierzu kennt der Experte kein alternatives Verfahren.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Hier können auch Fehler durch das Heranziehen falscher Formeln entstehen.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Die Formeln und Ergebnisse können über Einheitenkontrollen validiert werden. Man kann über die Physik bestimmte Werte ausschließen, so muss das Ergebnis im Wertebereich der Funktion liegen.

Variationen der Aufgabe:

Als Variation der Aufgabe könnten man die Spule durch einen Kondensator ersetzen. Eine weitere Möglichkeit wäre, über den Effektivwert die mittlere Leistung bestimmen zu lassen, wobei hier wieder mathematische Schwierigkeiten auftreten können:

„Man darf nicht Mittelwert mal Mittelwert rechnen, weil dann das $\frac{1}{T}$ doppelt eingeht.“

Man könnten die Spannung über einen Sinus beschreiben, was dann die graphische Lösung ausschließt.

6.4 Beantwortung der ersten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die erste Forschungsfrage,

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

für Aufgabe C beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

1.1 Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?

Zunächst müssen bei der Skizze zu Beginn der Aufgabe die Übergänge zwischen verschiedenen Abschnitten der abschnittsweise definierten Funktion abgelesen werden, da diese die Integrationsgrenzen für die weiteren Rechnungen liefern. In jedem Aufgabenteil treten Integrationen von Polynomen in einer Veränderlichen auf, in denen – wie in den übrigen Aufgaben auch – statt Zahlen Größen, also Zahlenwerte mit Einheiten, verwendet werden und mit Brüchen, welche Größen enthalten, gearbeitet werden muss. In den Aufgabenteilen C1, C3 und C4 können die auftretenden Integrale auch mittels der Betrachtung von orientierten Flächen von Dreiecken und Rechtecken berechnet werden; in C2 ist dieser Weg aufgrund der Struktur der auftretenden Formel nicht möglich. In C4 muss die Bauteilgleichung der Spule, $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, in ein Integral mit passenden Grenzen umgewandelt werden, wobei auch dieses über die Betrachtung von Flächen berechnet werden kann. Zusätzlich müssen lineare Funktionen aufgestellt werden unter der Bedingung, dass zwei Punkte bekannt sind. Es müssen in C4 zwei Formeln kombiniert werden.

Der Experte nennt im Experteninterview die folgenden von den Studierenden erwarteten Kompetenzen:

„Die relativ grundlegenden Kenngrößen von Signalen zu berechnen. [...] Viel tiefer geht es nicht.“

(3448)

„Die Formeln sind nun Sachen, die man nicht können muss, sondern die man einfach lernen muss.“

(2300)

Die Formeln in C4 bezeichnet er als „Grundformeln“ (0359), die für alle Energien gleich aufgebaut sind. „Die beiden Formeln sind aber absolutes Grundwissen in der Elektrotechnik.“ (2359). Gleichzeitig sollen die Einheitenüberprüfungen mitbedacht werden.

1.2 Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?

Mögliche Fehler können bei den vorkommenden Integrationen auftreten. Bei den auftretenden Flächen kann nicht beachtet werden, dass diese orientiert sind. In C2 können die Bestandteile der Formel falsch kombiniert werden, d. h. die Wurzel, das Integral und der Vorfaktor $\frac{1}{T}$, oder die Studierenden können fehlerhafterweise versuchen, über Flächenbilanzen in diesem Aufgabenteil anzusetzen. Der Experte sieht mögliche Fehler in einem falschen Umgang mit dem Faktor $\frac{1}{T}$ oder durch das Heranziehen falscher Formeln.

Die Problemstelle in dieser Aufgabe ist das Aufstellen der vorkommenden Funktionen und die korrekte Zerlegung des Integrationsbereichs. Innermathematisch müssen Polynome integriert werden, in welchen Größen statt Zahlen auftreten. Bei dem Alternativweg in C1, C3 und C4 müssen neben der Bestimmung ihres Flächeninhalts die Orientierungen dieser Flächen beachtet werden.

1.3 Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In diesem Abschnitt werden normative Beschreibungen der Kompetenzen vorgenommen, welche bzgl. des im Rahmen von der Aufgabenanalyse von Aufgabe A gegliedert sind:

Mathematisierung:

In dieser Aufgabe erfolgt keine Mathematisierung im Sinne einer Übersetzung elektrotechnischer Ausdrücke in mathematisch lösbare Aufgaben. Hier ist ein Graph gegeben, der die Spannungsfunktion $u_L(t)$ bei einer Spule darstellt. Abgesehen von der Betrachtung einer außer-mathematischen Größe, der Spannung u_C , kann die Aufgabe als innermathematisch betrachtet werden. Für die eigentlichen Rechnungen in den Aufgabenteilen C1 bis C3 ist der elektrotechnische Hintergrund weitestgehend irrelevant. Er spielt ausschließlich eine Rolle in der Form, dass hier Größen, d. h. Zahlen mit Einheiten, anstatt einfacher Zahlen betrachtet werden. In C4 können direkt Formeln aus der Vorlesung herangezogen und auf die Situation durch Einsetzen passender Werte angepasst werden.

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten:

Im Rahmen des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens muss aus dem Spannungsverlauf eine abschnittsweise definierte Funktion abgelesen werden, wobei zwei dieser linearen Funktionen konstant sind. Die Funktion wird dabei in vier Teilabschnitte zerlegt, für die unterschiedliche Funktionsvorschriften gelten. Anschließend müssen die orientierten Flächen zwischen Graph der Funktion und x -Achse berechnet werden. Dafür gibt es in C1 und C3 zwei verschiedene Rechenwege, nämlich einerseits die Berechnung über Formeln für die Flächen von Recht- und Dreiecken und andererseits die Integration unter Beachtung der jeweiligen Integrationsgrenzen,

die sich als die Übergänge zwischen den verschiedenen Abschnitten der stückweise linearen Funktionen ergeben. Bei C2 kann ausschließlich der Weg über die Integration gewählt werden, da dort der Integrand quadriert wird.

Beim Einsetzen der Größen in C1 bis C3 können direkt die Einheiten miteinander verrechnet werden, ohne dass es Übergänge über SI-Basiseinheiten geben muss. In C4 ist Gleichungsmanagement notwendig, um den gesuchten Wert für $W_L(2s)$ bestimmen zu können, da die in der Formel enthaltene Größe i , d. h. die Stromstärke, noch unbekannt ist. Bei deren Berechnung muss beachtet werden, dass der Strom zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits einen Wert ungleich 0 Ampere haben kann; laut Aufgabenstellung ist dieser jedoch 0 Ampere. Hierfür muss die Bauteilgleichung für die Spule, welche eine Ableitung enthält, in einen Integralausdruck umgeformt werden, wobei dabei die Einheiten wie Faktoren behandelt werden können.

Bei der Berechnung der Einheiten muss bei der Berechnung des Stroms die SI-Basiseinheitendarstellung der Einheit Henry beachtet werden. Diese ist $H = \frac{\text{Volt Sekunde}}{\text{Ampere}}$. Bei der Berechnung der Energie muss – wieder unter Verwendung der SI-Basiseinheiten – die Umrechnung $J = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{Volt Ampere Sekunde}$ eingesetzt werden.

Validierung:

Zur Validierung können einerseits die Einheiten und andererseits innermathematische Zusammenhänge zwischen den berechneten Mittelwerten verwendet werden. Zusätzlich kann durch eine Rechnung über den Alternativweg (Weg A: Flächenbilanz, Weg B: über Integration) das Ergebnis überprüft werden:

Die Zieleinheit der in C1 bis C3 zu berechnenden Spannung ist Volt und diese muss sich durch die Einheitenrechnung in jedem Aufgabenteil ergeben. Das bedeutet, dass sich die Einheit Sekunde in den Berechnungen herauskürzen muss, was auch schon während der Rechnung als Überprüfungsmöglichkeit eingesetzt werden kann. Auch in C4 können Einheitenkontrollen eingesetzt werden, zum einen um die Ansätze durch Kombination der vorkommenden Einheiten zu überprüfen und zum anderen, um die Gleichheit der Einheiten (gegebenenfalls in ihrer SI-Basiseinheitendarstellung) auf beiden von Gleichungen nachweisen zu können.

Zwischen den Mittelwerten in C1 und C3 kann man einen direkten Zusammenhang angeben, da in beiden Aufgabenteilen dieselben Flächen betrachtet werden, jedoch in C3 durch den Betrag in der Formel alle Flächen mit einem positiven Vorzeichen verwendet werden. Dadurch muss der erhaltene Wert in C3 größer oder gleich dem Wert in C1 sein.

6.5 Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben

Im folgenden steht G. . . für die Gruppenbezeichnung des Studierendenpaars. Innerhalb der Gruppen steht P. . . für die einzelnen Studierenden. Es gab bei Aufgabe C drei Studierendenpaare:

6.5.1 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C1

[C1] Geben Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung im Intervall $[0; T]$ an. (1 Punkt).

G1 : P1 steigt in die Bearbeitung mit der Aussage ein, dass sie die konstitutive Gleichung bestimmen müssen, worauf P2 mit

„die Aufgabe ist doch: Geben Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung an.“

(0132)

reagiert und weiter erläutert, dass das Intervall von 0 bis T betrachtet werden müsse und sie nur den Mittelwert berechnen müssten, vgl. (0138). In (0147) sagt P2, dass dieser $\frac{1}{T}$ mal Integral der Funktion sei, wobei P1 direkt „Oder gekonntes Kästchenzählen“ (0156) ergänzt. Dann erläutert P1:

„Wir können aus jedem Teilabschnitt den arithmetischen Mittelwert bestimmen und zu dem Gesamten addieren. Im ersten Teilabschnitt ist es 0,5V, im zweiten Teilabschnitt –0,5V und im Dritten ist es 1V. Beim dreieckigen Signal ist es nämlich genau die Hälfte. Und wenn man das jetzt ausrechnet, dann lautet [in Aufgabenteil] C1 die grundsätzliche Definition des Mittelwertes, [...] ja, was der Mittelwert war. eins durch die Gesamtzeit mal $u(t)$, also der Momentanwert, integriert über die Zeit. Von 0 bis 10 Sekunden und das kann man ja gekonnt umschreiben. $\frac{1}{T}$, das ist sind ja 10 Sekunden mal – integrieren können wir auch anders – [...] jeweils den Mittelwert mit der Zeit gewichtet. Letztendlich macht das Integral ja auch.“

(0200) und (0306)

Im Anschluss diskutieren P1 und P2 über die Zerlegung des Intervalls in Teilabschnitte. P1 erläutert hierzu:

„Vier Sekunden. So, wenn das jetzt ausrechnet 1 minus 1,5 sind wir bei 0,5 plus 4 sind wir bei $\frac{3,5}{10} \cdot \frac{3,5}{10}$ V. Das Sekunde kürzt sich, Volt nicht.“

(0349)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden vermischen in ihrer Bearbeitung die beiden Bearbeitungsvarianten zu der Aufgabe.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{B1}** Die Studierenden argumentieren die Gleichwertigkeit der Ansätze über Integration und über die Flächen.
- **{B3}** Die Studierenden erkennen die notwendige Zerlegung des Intervalls zur Berechnung der geforderten Größe.
- **{B3}** Die Studierenden möchten die arithmetischen Mittelwerte der Teilintervalle bestimmen, meinen damit aber eigentlich die gewichteten Mittelwerte bezogen auf das Gesamtintervall.
- **{C1}** Sie führen am Ende eine Einheitenkontrolle durch.

G2 : P1 steigt in (0133) damit in die Bearbeitung ein, dass er das Integrationsintervall in drei Teilabschnitte zerlegen möchte und berechnet dabei zunächst sein zweites Teilintervall. Er setzt dabei direkt die Werte ein, fasst sie aber nicht zusammen. So kommt er zu dem korrekten Ergebnis. Auf Anweisung des Studienleiters erläutert P1 den Weg:

„Ich habe das in drei Intervalle wie gesagt geteilt und den Mittelwert von dem ersten Bereich, von dem ersten Intervall habe ich da... das Integral ist davon halt die Fläche von diesem Dreieck. (...)“

(0540)

Nach den Erläuterungen fragt P2, ob sie die Spule „mit einberechnen“ (0626) müssten. P1 verneint dieses mit „das kommt noch“, vgl. (0640).

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden vermischen in ihrer Bearbeitung die beiden Bearbeitungsvarianten zu der Aufgabe. Sie setzen in ihrer Rechnung einen Übergang von der Aufgabe mit dem Ansatz über Integration und bei der Berechnung einer direkten Überführung in eine Flächenberechnung ein.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 überlegt, ob sie Spule miteinberechnet werden muss. Das ist ein Ergebnis der Prüfung, ob alle Informationen aus der Aufgabe verwendet wurden.
- **{B1}** Sie setzen mit Integralen an, berechnen diese allerdings über eine Betrachtung der Flächen unter den Graphen.
- **{B2}** Sie setzen direkt die Werte für die verschiedenen Größen ein, verwenden also ein *schnelles Einsetzen von Zahlen*. Sie fassen diese erst im letzten Schritt zusammen, verwenden sie also als numerische Variablen.
- **{B3}** Die Studierenden zerlegen das Intervall zur Lösung der Aufgabe.

G3 : P2 steigt in (0200) mit dem Stichwort „Arithmetischer Mittelwert“ in die Bearbeitung ein. P1 ergänzt dann „Mit der Integralformel“, vgl. (0203), und P2 dann wiederum „Joa. 1 durch T .“, vgl. (0205). In (0224) führt P1 aus:

„Arithmetischer Mittelwert. [...] Mittelwert der Spannung u . Jetzt müssen wir das aber staffeln, weil wir drei verschiedene Funktionen haben, verstehst du?“

Sie zerlegen dann das Intervall in ihrer Niederschrift in drei Teilintervalle und diskutieren über die Steigungen in den einzelnen Bereichen. P1 beschreibt hierzu in (0414), wie er die Flächen verschieben kann. Er erkennt dann ebenfalls in (0414):

„Aber wir können auch einfach die Flächen hier berechnen, das geht leichter. Also $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.“

In (0649) führt er auf Rückfrage von P2, warum er nicht integriert, aus:

„Nee, ist einfacher, direkt die Flächen zu nehmen und dann das Ganze durch die Gesamtintervalldauer zu machen.“

Bei der Berechnung treten bei P2 Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Orientierung der Flächen auf, welche P1 in (0933) über „Aber du hast hier den Ordinatenabschnitt vergessen, plus 2V“ lösen kann. So erzielen sie schließlich durch Addition der Werte für die drei Integrale das korrekte Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden vermischen in ihrer Bearbeitung die beiden Bearbeitungsvarianten zu der Aufgabe. Sie setzen in ihrer Rechnung einen Übergang von der Aufgabe mit dem Ansatz über Integration und bei der Berechnung einer direkten Überführung in eine Flächenberechnung ein.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A3}** Sie ziehen die Formel heran und fügen sukzessive Bestandteile wie das $\frac{1}{T}$ hinzu. Sie erschließen sich so die passende Formel.
- **{B1}** Bei der Berechnung verwendet P1 die Flächen und durch die „Gesamtintervalldauer“ dividiert und so gewichtet.
- **{B3}** Die Studierenden zerlegen das Intervall in drei Teilintervalle.
- **{B3}** P2 beachtet zunächst nicht die Orientierung der Flächen.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil C1

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten durch einen falschen Umgang mit den Mittelwerten der Teilintervalle auf, welche zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts im gesamten Intervall gewichtet werden müssten. Weitere Fehler ergeben sich durch herangezogene falsche Formeln, einen falschen Umgang mit der Orientierung der Flächen sowie dadurch, dass fälschlicherweise die Spule, welche erst in C4 relevant ist, von einem Paar zunächst berücksichtigt wird. Die Problemstelle für die Studierenden ist in diesem Aufgabenteil der Umgang mit zwei unterschiedlichen Zugängen, nämlich einerseits Integration von Funktionen in einer Veränderlichen und andererseits der Betrachtung von Flächenbilanzen. Darüberhinaus müssen die Studierenden das Zeitintervall zerlegen, um zu korrekten Werten zu kommen. Eine Unklarheit besteht für ein Paar darin, in welcher Weise mit dem Vorfaktor $\frac{1}{T}$ umgegangen werden muss, der für die Bestimmung der arithmetischen Mittelwerts entscheidend ist.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Ein Studierendenpaar überlegt, ob in diesem Aufgabenteil die Spule miteinberechnet werden muss. Das ist ein Ergebnis der Prüfung, ob alle Informationen aus der Aufgabe verwendet wurden.

{A3} Ein Paar zieht die Formel heran und fügt sukzessive Bestandteile wie das $\frac{1}{T}$ hinzu. Durch werden die passenden Formeln erschlossen.

{B1} Die Studierenden argumentieren am Anfang die Gleichwertigkeit der Ansätze über Integration und über die Betrachtung von Flächen, wobei damit eigentlich Flächenbilanzen gemeint sind. Eine Gruppe setzt im ersten Schritt mit Integralen an, bestimmt deren Werte allerdings über die Betrachtung von Flächen, wie sich in der Studie zeigt.

{B2} Bei einem Paar setzen die Studierenden direkt die Werte für die verschiedenen Größen ein, verwenden also ein *schnelles Einsetzen von Zahlen*. Sie fassen diese erst im letzten Schritt zusammen, verwenden sie also als numerische Variablen.

{B3} Alle Studierendenpaare erkennen die notwendige Zerlegung des Intervalls. Ein Paar möchte die arithmetischen Mittelwerte der Teilintervalle bestimmen, meinen damit aber eigentlich die gewichteten Mittelwerte bezogen auf das Gesamtintervall. In einer Gruppe wird zunächst nicht die Orientierung der Flächen beachtet.

{C1} Ein Studierendenpaar führt eine Einheitenkontrolle durch.

6.5.2 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C2

[C2] Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung im Intervall $[0; T]$. (4 Punkte)

G1 : P1 beginnt die Bearbeitung mit

„Es gibt viele Möglichkeiten, wie man dahin kommt.“

(0448)

In (0504) fragt P1 dann P2

„Also, auf welche Art und Weise wollen wir das lösen? Auf die Einfache, auf ne Schwere oder auf die Schwerste?“

woraufhin P2 entgegnet

„Spontan fällt mir nur die schwerste ein.“

P1 sagt dann:

„Über das Integral. Wenn du möchtest, kannst du ja hinschreiben über das Integral. Man kann ja auch direkt mit dem Faktor $\sqrt{3}$ berechnen, das ist nämlich im Dreieck der Fall.“

(0517)

P2 fragt dann in (0619), ob man auch die Einzelintegrale berechnen kann, woraufhin P1 in (0631) antwortet, dass man „nen Integral grundsätzlich in Teilintervalle aufteilen kann“. So schreiben sie die Formel auf, wobei P1 den Faktor $\frac{1}{T}$, der bei jedem Teilintervall vorkommt, durch ein $\cdot T$ auf die andere Seite zieht. P1 begründet dann, wie man die linearen Gleichungen für den ersten Teilabschnitt bestimmt, vgl. (0705), und dass im zweiten Abschnitt ein „angenehm konstanter“ (0705) Wert vorläge. Zum letzten Teilintervall erläutert P1:

„Ja und das letzte Teilintervall, da können wir die Kurve ja glücklicherweise auch zu dem Ursprung hin verschieben und es spielt auch keine Rolle, ob wir sozusagen das Dreieck jetzt mit negativer Steigung oder mit positiver Steigung – es kommt in beiden Fällen das Gleiche heraus.“

(0756)

Daraufhin notieren P1 und P2 die Formel, wobei P1 erläutert:

„So, [...], U effektiv, naja, ich bin schreibfauler, mal 10 Sekunden. Ich hab einfach diese 10 Sekunden auf die andere Seite gebracht, das erspart mir im nun folgenden Schritt Schreibarbeit.“

(0927)

$$x = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^a \dots dt + \frac{1}{T} \int_0^b \dots dt + \frac{1}{T} \int_0^c \dots dt}$$
$$\Leftrightarrow T x^2 = \int_0^a \dots dt + \int_0^b \dots dt + \int_0^c \dots dt$$

In (1044) sagt P1 außerdem:

„Ich bin gespannt, ob die Einheiten passen. Ach doch, die Einheiten passen, sorry.“

Nach dem Einsetzen der Werte erläutert P1:

„Ich ziehe $V^2 s^2$ überall erstmal raus, diese Einheit sportlich überall rausnehmen, das macht keinen Spaß ansonsten.“

(1135)

P2 bemerkt dann, dass diese Einheit nicht überall vorhanden ist, vgl. (1149), was dann einen Fehler in den Einheiten zeigt. P1 und P2 berechnen dann den Wert über die Einzelintegrale und kommen so auf das Ergebnis. Im letzten Schritt ziehen sie dann die Wurzel. Sie isolieren die Zahlen, addieren sie dann, dividieren durch 10 und ziehen die Wurzel. In (1647) prüft dann P1 noch die Einheit.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe so, wie es in der SEL vorgesehen ist. Dabei strukturieren sie die Aufgabe so um, dass eine Eingabe in den Taschenrechner ohne Zwischenspeichern von Ergebnissen möglich ist.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden verwenden die Zerlegung aus C1.
- **{A3}** P1 zieht eine Merkregel heran und möchte einen Faktor $\sqrt{3}$ miteinbeziehen. Eine Begründung dafür liefert er nicht.
- **{B1}** P1 und P2 durchdenken mehrere Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe, ohne diese näher zu erläutern.
- **{B3}** Die Studierenden nutzen die Translationsinvarianz des Integrals, was aufgrund dessen möglich ist, dass keine Dichte angegeben ist. Sie bedenken den Aufwand ihrer Rechnung bei den Ansätzen.

- **{B3}, {B1}** P1 nutzt eine Umstrukturierung zur Verringerung des Rechenaufwands. Diese ermöglicht ihm ein direktes Berechnen der Werte der Integrale bei den Teilintervallen, andererseits behält er über das Tx^2 auf der linken Seite einen Überblick, welche Schritt noch zu tun sind.
- **{C1}** Die Studierenden nutzen Einheitenkontrollen. Dabei überprüfen entsprechend des Symmetrieprinzips nach Bruder und Collet (2011), ob dieselben Einheiten bei jedem Summanden auftreten.

G2 : P1 notiert die Integrale für die drei Teilintervalle und erläutert in (1131), dass er diese zusammenaddieren muss. P2 fragt in (0931), was bei dem dritten Teilintervall herauskommt und P1 erläutert bei (1150) mittels einer Skizze, wie er die lineare Funktion für diesen Bereich bestimmt. P1 kommt schließlich durch Addition auf $\overline{u_L}$. In (2047) fragt P2:

„Hier mit den Integrationsgrenzen bei der zweiten, ist das egal, ob man... muss man dann von $\frac{2T}{10}$ bis $\frac{5T}{10}$ nehmen oder kann man die einfach auf 0 schieben?“

P1 versucht dann zu begründen, dass das möglich ist. In den Rechnungen ergeben sich dann Schwierigkeiten bei den betrachteten Intervallen und bei der Bedeutung von $\frac{1}{T}$. In (3827) notiert P1 schließlich

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f(x))^2 dt}$$

und erläutert dann, dass er das Integral zerlegen möchte. So entdecken sie Fehler in ihren Rechnungen und versuchen über die erhaltenen Werte auf die Richtigkeit zu schließen. Dabei gehen sie falsch mit Summen unter Wurzeln um, d. h.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

und es treten auch negative Wurzelausdrücke auf. Sie brechen ab.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden beginnen mit dem Rechenweg, wie er in der SEL angegeben ist. Dabei treten jedoch Fehler im Zusammenhang mit Wurzelgesetzen und binomischen Formeln auf.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden verwenden die Zerlegung aus C1.
- **{B3}** P1 nutzt eine Skizze, um sich die Bestimmung der linearen Funktion für das Teilintervall zu vereinfachen. Diese Bestimmung ist hier notwendig – während sie durch die Flächenüberlegungen in C1 überflüssig war.
- **{B3}** Es treten elementare Rechenfehler auf, z. B. im Umgang mit Wurzeln.

G3 : P1 notiert als Einstieg in die Aufgabe in (1108) zunächst die korrekte Formel für den Effektivwert und beschreibt hierzu:

„Die Funktion hier drin quadrieren und aus dem Ganzen die Wurzel nehmen.“

P2 fragt darauf in (1143):

„Also die Funktion, die ich aufgestellt habe, einfach quadrieren?“

und bezieht sich damit auf C1. Nach dem Aufstellen der Formeln sagt P2:

„ $t^2 V^2$, hier muss auch überall V^2 stehen.“

(1346)

Anschließend berechnen sie die Teilstücke. In (1656) zeigt sich, dass P2 wieder den Fehler mit der inkorrekten Aufstellung der linearen Funktion wie in C1 macht, was P1 über „Weil das hier Minus ist“ klärt. P1 argumentiert dann beim Quadrieren des Integranden des dritten Teilintervalls über

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

vgl. (1701). In (1955) fragt P1:

„Die Wurzel wird über dem Ganzen gezogen, oder? Ja.“

In (2143) sagt P1 nach der Rechnung:

„Ich hab jetzt überall ein Sekunde gekürzt. Das hier fällt komplett weg, das ist Quadrat, das fällt weg und das ist nur noch einer.“

Dieses ergänzt er in (2339):

„Normalerweise müsste sich das Sekunde Quadrat kürzen. Was tut es das nicht?“

Sie bringen dann die Brüche auf einen Nenner und addieren sie. Bei dem Ergebnis führen sie partielles Wurzelziehen aus, d. h. $u = \sqrt{\frac{27}{40}}V = 3\sqrt{\frac{3}{40}}V \left(= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}V \right)$. Dieses Ergebnis ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe so, wie es in der SEL vorgesehen ist und sie kommen zum richtigen Ergebnis. Zwischenzeitlich treten Probleme bei der Verwendung binomischer Formeln auf.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 überträgt den Ansatz aus C1, also entsprechend Polya (1949) nutzt er Aufgaben, die schon gerechnet wurden. Er äußert sich aber auch gleich zu den Unterschieden.
- **{B3}** Es wiederholt sich der Fehler in der Orientierung der Flächen. Hier übertragen sich Probleme aus C1.
- **{B3}** Es gibt zunächst Fehler bei der Anwendung der binomischen Formeln auf die lineare Gleichung der Form $(ax - b)$.
- **{C1}** P2 kontrolliert die Einheiten und beachtet dabei Symmetrien in den einzelnen Summanden im Sinne von Bruder und Collet (2011).

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil C2

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten hier an drei Stellen auf: So wiederholt sich der Fehler bei der Orientierung der Flächen. Hier übertragen sich Probleme aus C1, aber es treten zusätzlich noch Fehler im Zusammenhang mit den Wurzelausdrücken auf, da eine Gruppe $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ verwendet, und andererseits bei der Anwendung der binomischen Formel für einen Ausdruck der Form $(ax - b)$, welche für eine ebenfalls von den Studierenden aufgestellte lineare Funktion benötigt wird. Eine Problemstelle ist in diesem Aufgabenteil, dass hier ausschließlich über Integration ein Ergebnis erzielt werden kann und daher der Weg über die Betrachtung von Flächen ausgeschlossen ist. Die Studierenden können hier die Translationsinvarianz eines Integrals mit konstanter Dichte einsetzen, welches den Aufwand beim Aufstellen der Integrale verringert. Beim Aufstellen ist eine weitere Problemstelle, dass die Einheiten für jeden Summanden übereinstimmen müssen, damit diese am Ende addiert werden können. Die Einheiten selbst ergeben sich aber auf unterschiedliche Weise in der Rechnung. Eine Unklarheit besteht für eine Gruppe im Aufstellen einer linearen Funktion aus zwei bekannten Punkten.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1} Alle Studierendenpaare übertragen den Ansatz aus C1 und verwenden die dort genutzte Zerlegung des Intervalls, also entsprechend Polya (1949) nutzt er Aufgaben, die schon gerechnet wurden. Ein Paar äußert sich auch gleich zu den Unterschieden.
- {A3} Ein Paar zieht eine Merkmall her an und möchte daher einen Faktor $\sqrt{3}$ miteinbeziehen. Eine Begründung dafür wird nicht geliefert.
- {B1} Ein Paar durchdenkt mehrere Möglichkeiten zur mathematischen Lösung der Aufgabe, ohne eine nähere Erläuterung dafür zu liefern. Ein Paar nutzt eine Umstrukturierung mit mathematischen Mitteln zur Verringerung des Rechenaufwands, welche eine einfache Eingabe in den Taschenrechner ohne Zwischenspeichern von Ergebnissen ermöglicht. Sie stellen hierzu die Formel dadurch um, dass die Wurzel und der Vorfaktor auf die andere Seite gebracht werden.
- {B3} Ein Studierendenpaar nutzt die Translationsinvarianz des Integrals, was aufgrund dessen möglich ist, dass keine Dichte angegeben ist. Sie bedenken den Aufwand ihrer Rechnung bei den Ansätzen. Bei einem Paar wird eine Skizze genutzt, um die Bestimmung der linearen Funktion für das Teilintervall zu vereinfachen. Bei einem Paar treten Schwierigkeiten bei der Orientierung der Flächen auf und bei einem weiteren Studierendenpaar treten zunächst Fehler bei der Anwendung der binomischen Formeln auf die lineare Gleichung der Form $(ax - b)$ auf, die durch das Quadrieren einer linearen Funktion für einen der Teilabschnitte entstehen.
- {C1} Zwei Paare kontrollieren die Einheiten und beachten dabei, dass diese entsprechend des Symmetrieprinzips nach Bruder und Collet (2011) bei jedem einzelnen Term auftreten müssen.

6.5.3 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C3

[C3] Bestimmen Sie den Gleichrichtwert der Spannung im Intervall $[0; T]$. (6 Punkte)

G1 : P1 und P2 diskutieren zunächst, wie man den Gleichrichtwert aus Mittelwert und Effektivwert berechnen kann. P1 sagt hierzu in (1749):

„Und ermittelt sich, in dem wir den Effektivwert durch den arithmetischen Mittelwert teilen.“

P2 fragt daraufhin, ob es nicht umgekehrt war, was P1 mit der Begründung verneint, dass der Effektivwert grundsätzlich höher als der arithmetische Mittelwert sei, vgl. (1808). Nach Lesen im Skript sagt P1:

„Das war arithmetische Mittelwert des Signals gleichgerichtet, ja. Und, letztendlich es gibt viele Möglichkeiten wie man dahinkommt unter anderem die Lösung zuvor nehmen und einfach das Minus umkehren, das wäre exakt die gleiche Lösung.“

(1841)

In (1950) erläutert P1 weiter:

„Ein (...) ne ähnliche Funktion haben wir schon mal errechnet, ähm, in Aufgabe C1, also können wir letztendlich den Betrag immer vom Teilintegral nehmen.“

(1950)

P1 geht dann die Teilintervalle durch und notiert die Werte der Integrale. P1 sagt schließlich in (2124):

„Ist es denn hoffentlich größer als in Aufgabe C1. Das ist löblich. Es wäre nämlich falsch, wenn's kleiner wäre.“

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden beide Bearbeitungsvarianten indirekt, da sie erkennen, dass sie ihr Ergebnis aus der Rechnung in C1 durch Verändern eines Vorzeichens direkt erhalten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden suchen Verbindungen zu bisherigen Aufgabenteilen und überlegen, ob der gesuchte Wert der Quotient der beiden bisherigen Werte ist.
- **{A1}** P1 erkennt schließlich die Analogie zu C1 und welchen Unterschied es gibt.
- **{C2}** Als Validierung setzt er ein, dass durch den Betrag das Ergebnis hier größer als in C1 sein muss. Er arbeitet also mit einer Größenordnung, die sich rein aus der Mathematik und nicht aus physikalischen Mechanismen ergibt.

G2 : P2 beginnt diesen Aufgabenteil mit Frage, ob die Integrale einzeln ausgerechnet werden können, vgl. (5352), woraufhin P1 in (5407) begründet: „wie die Flächen auch, ja.“ P2 begründet dann weiter:

„Also ich hab mir dann einfach die [...] das untere habe ich mir den Betrag genommen. Dann hab ich, also ist alles positiv halt, ne, und [...] dann hab ich hier hab ich gesagt, der erste Abschnitt ist 0,5 gleichgerichtet. “

(5408)

Er beschreibt dann weiter wie er die einzelnen Teilstücke bestimmt und dann aufsummiert. P1 und P2 diskutieren dann darüber, ob die Werte für die Teilintervalle korrekt bestimmt wurden. P1 beschreibt dann schließlich:

„Was würde denn der Gleichrichtwert? Der Gleichrichtwert ist halt wenn du so ne Art Diode hast, oder (unv.) oder Mosfet oder Transistor egal was, der..., also ist... am Eingang hast du so Quelle und dann misst du die Spannung hier... “

(5828)

Daraufhin diskutieren sie weiter über die Zerlegung, aber kommen letztendlich zum richtigen Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden beide Bearbeitungsvarianten indirekt, da sie erkennen, dass sie ihr Ergebnis aus der Rechnung in C1 durch Verändern eines Vorzeichens direkt erhalten. Sie überlegen zusätzlich Anwendungen eines Gleichrichters.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden erkennen, dass in diesem Aufgabenteil alle Flächen aus C1 positiv betrachtet werden müssen, diskutieren aber über die Zerlegung der Intervalle.
- **{A2}** P1 erklärt den Begriff „Gleichrichtwert“ anhand einer elektrotechnischen Realsituation, nämlich der Betrachtung einer Diode.
- **{A4}** Sie belegen ihrer Berechnungen nicht nur mit dem mathematischen Begriff „Betrag“, sondern auch mit der physikalischen Interpretation „gleichgerichtet“.

G3 : P1 beginnt in (2826) mit der Frage, was der Gleichrichtwert ist. P2 antwortet in (2832) mit „Der Betrag oder so“ und P1 darauf wiederum mit

„Ah, x Betrag. Ja, das ist nicht schwer.“

P1 ergänzt in (2842):

„Dann können wir einfach das alles nehmen, was wir eben hatten. Wir müssen diese Flächen einfach positiv nehmen.“

Dann gehen P1 und P2 die Flächen durch und bei dem dritten Teilintervall fragt P2:

„Aber die Steigung war doch negativ.“

(3036),

worauf P1 mit

„Fläche trotzdem positiv genommen. Die Fläche ist ja trotzdem positiv.“

(3041)

antwortet. Sie erhalten so die korrekten Werte für die drei Teilintervalle und kommen durch Addition auf das richtige Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden beide Bearbeitungsvarianten indirekt, da sie erkennen, dass sie ihr Ergebnis aus der Rechnung in C1 durch Verändern eines Vorzeichens direkt erhalten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A4}** P2 bezieht den Begriff „Gleichrichtwert“ direkt auf den Betrag in den Berechnungen.
- **{B3}** P1 zieht dann eine Verbindung zu Flächen, also einer anderen Vorstellung im Rahmen der Integration.
- **{B3}** Es entsteht ein Widerspruch für P2 dadurch, dass die Steigung in dem letzten Teilintervall negativ ist, aber P1 erläutert, dass die Fläche trotzdem positiv ist. Hier zeigen sich Missverständnisse im Zusammenhang mit Orientierung.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil C3

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Als Fehler zeigt sich bei einem Paar, dass sie es als Widerspruch betrachten, dass die Steigung in dem letzten Teilintervall negativ ist, aber die Fläche trotzdem einen positiven Wert hat, was auf Missverständnisse bezogen auf die Orientierung von Flächen schließen lässt. Als Problemstelle ergibt sich in Aufgabenteil C3 eine passende Verbindung zu dem zur Lösung nutzbaren Ergebnis aus C1 zu finden. Dabei kann eine Verbindung des Begriffs „Gleichrichtwert“ und dessen physikalischer Interpretation mit dem Betrag aus der Mathematik helfen.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Alle Studierendenpaare suchen Verbindungen zu bisherigen Aufgabenteilen. Ein Paar überlegt dabei zunächst, ob der gesuchte Wert der Quotient der beiden bisherigen Werte aus C1 und C2 ist. Sie finden die Analogie zu C1 und erkennen als Unterschied, dass die Beträge der Integranden und somit positive Flächen betrachtet werden müssen.

{A2} P1 erklärt den Begriff „Gleichrichtwert“ anhand einer elektrotechnischen Realsituation.

{A4} Zwei Paare verwenden in ihren Berechnungen nicht nur den mathematischen Begriff „Betrag“, sondern auch die physikalischen Bezeichnung „gleichgerichtet“.

{B3} Die Paare nutzen eine Verbindung zu Flächen, also einer anderen Vorstellung im Rahmen der Integration. Für ein Paar entsteht zunächst ein Widerspruch dadurch, dass die Steigung in dem letzten Teilintervall negativ ist, aber die Fläche trotzdem positiv ist. Hier zeigen sich Missverständnisse im Zusammenhang mit Orientierung.

{C2} Als Validierung setzt ein Studierendenpaar ein, dass durch den Betrag das Ergebnis hier größer als in C1 sein muss. Es arbeitet also mit einer Größenordnung, die sich rein aus der Mathematik und nicht aus physikalischen Mechanismen ergibt.

6.5.4 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe C4

[C4] Wie groß ist die innere Energie W_L der Spule zum Zeitpunkt $t_1 = 2 \text{ s}$? (2 Punkte)

G1 : P1 steigt in die Bearbeitung damit ein, dass er in (2218) sagt, dass die innere Energie der Spule

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

sei. P2 fragt in (2241), was das für ein i ist. P1 erläutert in (2251), dass sie das berechnen müssen und schlägt in (2311) vor, die „konstitutive Gleichung“ aufzuschreiben. Er notiert dann $\dot{u}L = i$, meint „Ne, ne, das passt nicht.“ (2334), woraufhin P2 $u = L\dot{i}$ notiert, welchem P1 zustimmt. In (2412) sagt P1:

„Wir haben zusätzlich auch, ach die Anfangsbedingungen fassen wir später mit ein.
 u von t können wir schreiben, dass wäre es noch richtiger. Nach dt .“

Sie stellen dann die Gleichung nach i um, erhalten so ein Integral und setzen als Grenzen 0 und 2s . P1 erläutert hierzu:

„Also setzen wir das jetzt da ein, wir setzen die . . . wir berechnen's einfach nochmal,
wir haben es ja eigentlich schon berechnet, aber es macht Spaß.“

(2426)

Er wiederholt dann die Erläuterungen zur Berechnung der linearen Funktion aus C2. In (2512) argumentiert er dann, dass es sich um eine Flächenberechnung handle. Damit berechnet er korrekt den Wert des Stroms, wobei er einerseits über die Einheiten und andererseits über die Größenordnung validiert, vgl. (2551). In (2700) schlägt P2 dann ein Einsetzen des Wertes vor. P1 sagt dazu, vgl. (2702):

„Wir haben glücklicherweise kein Problem, aber an diesen Stellen hätten wir i_0 gehabt, also den Anfangswert. Das ist uns glücklicherweise nicht aufgefallen dieses Problem, weil der Anfangswert 0 Ampere beträgt.“

Sie setzen dann die Werte ein und in (2755) äußert P1, dass sie Henry auch anders hätten schreiben können. Dann überprüfen sie die Einheit mittels SI-Basiseinheiten und kommen auf VAs, also Volt-Ampere-Sekunden. P1 sagt schließlich, dass das nichts andere als Joule sei, vgl. (2911), und ergänzt, dass das richtig viel sei, vgl. (2920). Dieses Ergebnis ist korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Dabei interpretieren sie die Situation physikalisch und berücksichtigen auch die Flächenvorstellung im Zusammenhang mit Integration.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 sagt, dass sie dieses schon berechnet hätten, versucht also Beziehungen zu bisherigen Aufgabenteilen herzustellen.
- **{A1}** P2 klärt unbekannte Größen, welche in den Formeln auftreten, konkret das i in der Formel $W = \frac{1}{2} Li^2$.

- **{A2}** Sie notieren die Bauteilgleichung für die Spule, sind aber unsicher, welche Größe dort abgeleitet wird und interpretieren anhand des Bauteilverhaltens.
- **{A3}** P1 sammelt Formeln für die Berechnung der gesuchten Größen.
- **{AB}** Erst im letzten Schritt fällt P1 der Wert auf, den die Funktion i bei $t = 0$ besitzt, aber er erkennt sofort, dass dieser kein Problem macht. Er arbeitet sukzessive und überlegt, welche Auswirkungen seine Erkenntnisse auf die Aufgabe haben.
- **{B3}** Sie stellen dann Gleichung zu einem Integral um, verwenden das Intervall aus der Aufgabe.
- **{B3}** Er zieht wieder Verbindungen zu der Berechnung von Flächen, also wieder dieses Nebeneinander der beiden unterschiedlichen Vorstellungen zur Integration aus vorherigen Aufgabenteilen.
- **{C1}** Über eine Einheitenkontrolle überprüft P1 das Ergebnis und erkennt, dass Henry=Volt Ampere Sekunde ist.

G2 : P1 beginnt die Bearbeitung dieses Aufgabenteils damit, dass er in (6317) die Formel für die innere Energie der Spule im Skript sucht. So findet er die Bauteilgleichung der Spule, vgl. (7148), und P2 formt diese direkt um:

$$u(t) = L\dot{i}(t) \Leftrightarrow i(t) = \int \frac{u(t)}{L}$$

P1 erkennt dann, dass die 2 Sekunden $\frac{1}{5}$ der 10 Sekunden sind und zieht die Formel $W = \frac{1}{2}Li^2$ heran. Dabei vermischt er in seiner Niederschrift i und i^2 . P1 validiert seine Formel durch Ableiten. P2 fragt ihn dann nach seiner Vorgehensweise: Dabei kommen sie auf die Formel $W = \frac{1}{2}L \cdot i^2$ und es treten Verwechslungen zwischen t und T auf. In (7848) hinterfragt P1 die Einheit der Energie:

„Ja, ich glaube, es ist Watt Sekunde, nicht Watt pro Sekunde. Die Leistung ist Watt, wir bezahlen auch Kilowatt Stunde.“

Trotz richtiger Einheit kommen sie nicht auf richtige Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden verwenden die Bearbeitungsvariante aus der SEL, machen hier aber im Zusammenhang mit Notationen zwei Fehler, nämlich eine Verwechslung von i und i^2 und zwischen t und T .

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A3}** P1 zieht alle Formeln aus dem Skript heran, die ihm relevant erscheinen und betreibt so im Sinne von Tuminaro und Redish (2007) ein „Recursive Plug and Chug“.
- **{C1}** Trotz richtiger Einheit (Joule = Watt Sekunde = Volt Ampere Sekunde) erhalten sie so das falsche Ergebnis.

G3 : P2 steigt in (3217) in die Aufgabenbearbeitung mit „Innere Energie ist $\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$ “ ein. Nach Kontrolle im Skript notiert P1 die Formel

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

und formt sie zu

$$i = \frac{1}{L} \int u \, dt$$

um. P2 fragt daraufhin in (3431):

„Hä, müsste ich dann nicht wieder 1 Volt raushaben?“

Dann erkennt er, dass dort noch der Faktor $\frac{1}{L}$ auftritt. In (3610) fragt P1: „Was war Milli? 10^{-6} ?“ P2 beantwortet dieses in (3616) mit 10^{-3} . In (3726) und (3732) diskutieren P2 und P1 über die Einheit und überdenken die SI-Basiseinheiten, in dem Fall Milli-Henry (Dieses ist keine SI-Basiseinheit.) Durch Einsetzen in

$$i = \frac{1}{L} \int u \, dt = \frac{1}{L} \int_0^{2s} \frac{1}{2} t \, V \, dt$$

kommen in (3921) zu dem Ergebnis

$$i = \frac{1}{2} \frac{1}{0,1\text{H}} \cdot 1\text{V}^2\text{s}^4,$$

ohne weitere Zusammenfassungen vorzunehmen. Die innere Energie berechnen sie in (4227), in dem sie symbolisch in die Formel W_L einsetzen. Den Wert bestimmen sie nicht mehr, also bleibt die Lösung unvollständig.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden setzen in ihrem Lösungsprozess die Bearbeitungsvariante aus der SEL ein. Sie brechen jedoch ihre Lösung ab und fassen dabei weder die Zahlenwerte noch die Einheiten zusammen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A3}** Die Studierenden ziehen die richtige Formel heran und stellen sie korrekt nach i um.
- **{B3}** Es treten Probleme mit den Zehnerpotenzen auf, da ihnen unklar ist, was das Präfix 'milli' bedeutet.
- **{B3}** Sie kommen zu dem richtigen Ergebnis bei dem Strom, aber verrechnen weder Zahlenwerte noch Einheiten miteinander. Ähnlich gehen sie bei W_L vor. Die Gründe für diesen Abbruch sind unklar.
- **{C1}** Sie bereiten eine Einheitenkontrolle vor, in dem sie Henry in SI-Basiseinheiten darstellen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten bei einer Gruppe durch Verwechslung von t und T sowie i und i^2 auf, so dass sie im ersten Fall trotz erfolgreicher Einheitenkontrolle einen falschen Zahlenwert erhalten. Bei einer Gruppe treten Probleme mit den Zehnerpotenzen auf, da sie das Präfix 'milli', welches für 10^{-3} steht, falsch interpretieren. Problemstellen in diesem Aufgabenteil sind einerseits das korrekte Arbeiten mit der Bauteilgleichung der Spule unter Berücksichtigung des zu nutzenden Teilintervalls, welche zu einem Integralausdruck umgeformt werden muss, und andererseits die korrekte Kombination der beiden auftretenden Formeln. Als Fehler zeigt sich in einer Gruppe, dass erst im letzten Schritt auffällt, dass der Wert der Strom-Funktion $i(t)$ im Punkt $t = 0$ betrachtet werden muss. Allerdings erkennen sie sofort, dass das keinen Einfluss auf die Richtigkeit ihrer Ergebnisse hat, da $i(0) = 0$ gilt.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Ein Paar sagt, dass sie das erste Integral schon berechnet hätten, versucht also Beziehungen zu bisherigen Aufgabenteilen zu finden. Ein Paar klärt unbekannte Größen, welche in den Formeln auftreten, konkret das i in der Formel $W = \frac{1}{2}Li^2$.

{A2} Ein Studierendenpaar notiert die Bauteilgleichung für die Spule, ist aber unsicher, welche Größe dort abgeleitet wird und interpretieren anhand des Bauteilverhaltens.

{A3} Zwei Studierendenpaare sammeln alle Formeln aus dem Skript, welche ihnen relevant erscheinen.

{AB} Erst im letzten Schritt fällt einem Studierendenpaar der Wert auf, den die Funktion i bei $t = 0$ besitzt, aber es erkennt sofort, dass dieser kein Problem macht. Das Paar arbeitet sukzessive und überlegt, welche Auswirkungen seine Erkenntnisse auf die Aufgabe haben, und erkennt so, dass es keinen Einfluss hat.

{B3} Die Studierenden stellen die Bauteilgleichung der Spule zu einem Integral um. In den Rechnungen setzt ein Paar wieder Argumentationen zu der Gleichwertigkeit einer Flächenberechnung durch. Bei einem Paar treten Probleme mit den Zehnerpotenzen auf, da ihnen unklar ist, was das Präfix 'milli' bedeutet. Ein Paar stellt die Gleichungen richtig auf, aber fasst weder Zahlenwerte noch Einheiten zusammen.

{C1} Validierungen führen alle drei Paare über Einheitenkontrollen durch, sind dabei aber unterschiedlich erfolgreich. Zwei Paare stellen die Zieleinheit richtig über die SI-Basiseinheiten dar, wobei eines damit die Richtigkeit ihres Ergebnisses bestätigt, während das andere dennoch ein falsches Ergebnis hat. Ein Paar bereitet eine Einheitenkontrolle vor, in dem sie Henry in SI-Basiseinheiten darstellen, führt aber die notwendigen Zusammenfassungen aus unbekanntem Grund nicht mehr durch.

6.6 Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die zweite Forschungsfrage,

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

für Aufgabe C beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?

Auftretende Fehler resultieren in diesem Aufgabenteil aus der Anwendung von Regeln für die Integration einer Funktion in einer Veränderlichen. Dabei geht es häufig um die Orientierung der betrachteten Flächen und die Weise, wie die in C1, C2 und C3 gesuchten Größen aus den Werten der einzelnen Integrale bestimmt werden können. Darüber hinaus zeigen sich Fehler in elementaren Bereichen wie der falschen Anwendung von Wurzelgesetzen, nämlich der Verwendung von $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, oder dem Aufstellen einer linearen Funktion aus zwei bekannten Punkten sowie in C2 dem Quadrieren einer solchen Funktion mittels binomischer Formeln. Im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen werden von einer Gruppe die Einheitspräfixe falsch übersetzt. Weitere Fehler ergeben sich dadurch, dass die Studierenden die Spule, welche erst in C4 relevant ist, schon in C1 berücksichtigen möchten. Einer Gruppe fällt erst im letzten Schritt auf, dass der Wert der Strom-Funktion $i(t)$ im Punkt $t = 0$ betrachtet werden muss, wobei sie direkt merken, dass dieses aufgrund von $i(0) = 0$ keine Veränderung auf das Endergebnis bewirkt. Bei einer Gruppe treten Ungenauigkeiten in der Rechnung auf, so dass sie t und T sowie i und i^2 vermischen.

Eine Problemstelle in dieser Aufgabe ist das Nebeneinander zweier möglicher Lösungswege, nämlich einerseits dem Weg über Integration und andererseits über die Bestimmung von Flächeninhalten von Dreiecken und Rechtecken, wobei bei zweiterem die Orientierung der Flächen berücksichtigt werden muss. Ein Weg über die Betrachtung von Flächen ist in allen Aufgabenteilen bis auf Aufgabenteil C2 möglich. Darüber hinaus ist die Funktion, welche in diesem Fall eine Spannung darstellt, stückweise gegeben, so dass für die unterschiedlichen Abschnitte der Funktion unterschiedliche Funktionsvorschriften aufgestellt werden müssen. Dieses erfordert das Aufstellen linearer Funktionen unter Verwendung zweier bekannter Punkte unter Betrachtung möglicher Translationen der auftretenden Flächen. Zusätzliche Problemstellen ergeben sich in C2 durch das Auftreten einer Funktion vom Typ $\sqrt{\frac{1}{T} \int f(x)^2 dx}$, wobei gleichzeitig die Einheiten der Summanden im Integranden berücksichtigt werden müssen, sowie in C4 durch das Umformen der Bauteilgleichung für die Spule, welche einen abgeleiteten Term enthält, in eine Integrationsaufgabe.

Unklarheiten treten in dieser Aufgabe an zwei Stellen auf: Zum einen ist den Studierenden teilweise unklar, wie sie mit dem Vorfaktor $\frac{1}{T}$ umgehen sollen, welcher in allen Teilaufgaben auftritt und gerade in der – wie oben bereits erwähnten – verschachtelten Aufgabe C2 nicht an beliebiger Stelle der Rechnung berücksichtigt werden kann, während er in den anderen Aufgabenteilen entsprechend der Faktorregel beliebig vor oder in dem Integranden stehen kann. Für eine Gruppe ist zunächst unklar, wie sie eine Funktion aus zwei bekannten Punkten aufstellen können, wenn keiner der beiden Punkte auf der y -Achse liegt.

Die erwarteten Fehler und Problemstellen zeigten sich bei einem der Studierendenpaare, insbesondere bezogen auf den Aufgabenteil C2. Dieses bezieht auf die Schwierigkeiten mit den Orientierungen der Dreiecksflächen und den erwarteten mathematischen Fehlern mit Integralen, Wurzeln und dem Aufstellen der linearen Funktion. In diesem Zusammenhang zeigen sich auch die vom Experten erwarteten Fehler bei dem Umgang mit dem Vorfaktor $\frac{1}{T}$.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

Die in diesem Abschnitt gewählten Kategorien beziehen sich auf die Kategorien **{A1}** bis **{C4}**, welche in dem Abschnitt 3.4.4 näher vorgestellt wurden:

{A1}:

- Analogien zu bereits gelösten Aufgaben: Bei der Bearbeitung der Folgeaufgaben nutzen alle Studierenden ihre Zerlegung des Intervalls aus C1 und nutzen so bereits gelöste Aufgaben im Sinne von Polya (1949). In C3 können sogar die Ergebnisse der einzelnen Summanden, welche sich durch die abschnittsweise definierte Funktion ergeben, wiederverwendet werden, wenn beachtet wird, dass aufgrund des Betrags dort jeder Summand mit positivem Vorzeichen betrachtet werden muss. Dieses nutzt jedes Studierendenpaar. Eine Gruppe erkennt auch, dass das Integral, welches in C4 berechnet werden muss, einem der Summanden aus C1 (bzw. C3) entspricht.
- Gegebene Daten: Ein Studierendenpaar überlegt, ob in C1 die Spule miteinberechnet werden muss, obwohl diese erst in C4 relevant ist. Bei der Bearbeitung von C4 klärt ein Paar zunächst alle Größen, die in dem Aufgabenteil vorkommen.

{A2}:

- Interpretation von Formeln und Gleichungen: Ein Studierendenpaar notiert die Bauteilgleichung für die Spule, ist aber unsicher, welche Größe dort abgeleitet wird und interpretieren anhand des Bauteilverhaltens, welches ihnen physikalisch bekannt ist.
- Betrachtung physikalischer Mechanismen: In C3 erklärt ein Paar den Begriff „Gleichrichtwert“ anhand einer elektrotechnischen Realsituation.

{A3}:

- Wahl einer Formel mit anschließender Anpassung: In C1, C2 und C3 verwenden die Studierenden die Formeln für die drei gesuchten Größen aus der Aufgabenstellung. Teilweise werden die Formeln durch sukzessives Heranziehen von Bestandteilen wie $\frac{1}{T}$ zusammengesetzt.
- Sammeln von Formeln: Bei der Bearbeitung von C4 sammeln zwei Studierendenpaare alle Formeln aus dem Skript, welche ihm relevant erscheinen.

{A4}:

- (Fächerübergreifende) Isomorphismen: Zwei Paare verwenden in ihren Berechnungen in C3 nicht nur den mathematischen Begriff „Betrag“, sondern auch die physikalische Bezeichnung „gleichgerichtet“. So stellen sie eine Verbindung zwischen den beiden Bereichen her.

{AB}:

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Erst im letzten Schritt fällt einem Studierendenpaar der Wert auf, den die Funktion i bei $t = 0$ besitzt, aber es erkennt sofort, dass dieser kein Problem macht.

{B1}:

- Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung: Die Studierenden durchdenken beim Rechnen in C1 und C2 verschiedene Herangehensweisen, nämlich einerseits über die Berechnung von Integralen und andererseits über die Betrachtung von Flächenbilanzen. Bei einer Gruppe gibt es sogar innerhalb der Aufgabe einen Wechsel von der Niederschrift mit Integralen zu einer Berechnung mit Flächen.

{B2}:

- Schnelles Einsetzen von Zahlen und Arbeit mit numerischen Variablen: In C1 nutzt ein Studierendenpaar ein schnelles Einsetzen bekannter Werte in die Gleichung und arbeitet dann weiter mit numerischen Variablen, welche sie erst im letzten Schritt zusammenfassen.

{B3}:

- Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen: Die benötigten mathematischen Kenntnisse für diese Aufgaben hängen im Wesentlichen mit der Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen zusammen. Die Studierenden müssen dabei die Verbindung zu Flächenbilanzen beachten und somit die Orientierung der auftretenden Flächen von Drei- und Rechtecken. In diesem Zusammenhang müssen die Studierendenpaare das betrachtete Zeitintervall zerlegen, wobei diese Zerlegung in den Aufgabenteilen C1, C2 und C3 benötigt wird. Des Weiteren wird in C1 Integration zur Berechnung eines arithmetischen Mittelwerts eingesetzt, wobei der Faktor $\frac{1}{T}$ korrekt berücksichtigt werden muss, wobei T die Intervalllänge ist. Bei der Berechnung in den ersten drei Aufgabenteilen nutzen die Studierenden teilweise die Translationsinvarianz des Integrals. In C4 muss eine Umformung einer Gleichung, die Ableitungen enthält, in ein Integral durchgeführt werden. Zusätzlich müssen Einheitspräfixe in Zehnerpotenzen umgewandelt werden.
- Einsetzen von Methoden aus der Sekundarstufe 1: In diesem Aufgabenteil werden außerdem Wurzelgesetze verwendet, es müssen lineare Funktionen aufgestellt werden und diese müssen mittels binomischer Formeln quadriert werden.
- Mathematische Umstrukturierung: In C2 setzt eine Gruppe gezielt eine Umformung der zu berechnenden Größe ein, so dass eine Eingabe in den Taschenrechner möglich ist, ohne dass Ergebnisse zwischengespeichert werden müssen. Dabei wird

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int f(x)^2 dx}$$

zu

$$TU^2 = \int f(x)^2 dx$$

umgeformt.

{C1}:

- Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: In den Aufgabenteilen C1, C2 und C4 nutzen die Studierenden Einheitenkontrollen zur Überprüfung ihrer Ergebnisse. In C3 werden diese aufgrund der Analogien zu C1, bei denen sich nur ein Vorzeichen bei den Summanden ändert, nicht durchgeführt. Bei C4 nutzt ein Studierendenpaar zwar Kontrollen mit Einheiten, kommen aber trotz richtiger Einheiten auf einen falschen Zahlenwert.

- Verwendung von strukturellen Elementen von Formeln: Im Zusammenhang mit den Einheitenkontrollen nutzen die Studierenden in C2 das Symmetrieprinzip nach Bruder und Collet (2011), in dem sie überprüfen, ob alle Terme dieselbe Einheit haben.

{C2}:

- Innermathematischer Vergleich mehrerer Größen: In C3 nutzen die Studierenden, dass ihr Ergebnis aufgrund der Anwendung des Betrags auf alle Summanden, welche sie bereits in C1 erhalten hatten, größer gleich dem Ergebnis aus C1 sein muss.

2.3 Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Studierendenbearbeitungen aus dem vorherigen Abschnitt Interpretationen der Expertenbearbeitungen, welche innerhalb der SEL beschrieben sind, gegenübergestellt und auf diese Weise Unterschiede zwischen den Bearbeitungen herausgearbeitet. Die Expertenbearbeitungen werden hier zusätzlich zur Studi-Expert-Lösung noch einmal übernommen. Der Experte ist ein Mitarbeiter aus der GET-B und einer der Korrektoren der Klausur.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C1:

Der Experte notiert sich zunächst die Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts der Spannung, d. h.

$$\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(\tau) \, d\tau.$$

Dann schraffiert er die Dreiecke in der Skizze und beschreibt, wie er diese verschiebt, in dem Stücke abtrennt und in Lücken hineinlegt, um rechteckige Flächen zu erhalten. Gleichzeitig berücksichtigt er die negative Orientierung der Fläche im Intervall $[2s, 5s]$. Auf diese Weise erhält ohne Verwendung der angegebenen Formel durch Verschiebung von Flächen das richtige Ergebnis.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass er vor der Berechnung mit der Formel bedenkt, ob die Einheit des Ergebnisses passen würde. Er erläutert die Verschiebung von Flächen unter dem Graphen der Funktion, das „Klötzchenschieben“. Er sagt, dass die aufgrund der kurzen Zeit von zehn Sekunden das Ergebnis hier keine praktische Relevanz hat. Der Mittelwert ist das, was aus einem sogenannten Tiefpass, einem elektrotechnischen Bauteil, herauskäme.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C1:

- **{A3}** Der Experte notiert die für diesen Aufgabenteil relevante Formel.
- **{B1}** Trotz Angabe der richtigen Formel, welche ein Integral enthält, wählt er die Flächenberechnung zur Lösung dieser Aufgabe.
- **{B3}** Er verdeutlicht über Schraffur, welche Dreiecke er verschiebt und setzt hierbei die Translationsinvarianz der Integration ein. Dabei berücksichtigt er die Orientierung der Flächen.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte arbeitet am Anfang sehr lange mit der in der Aufgabe gegebenen Skizze. Im Gegensatz zu den Studierenden markiert er die durch senkrechte Linien die Übergänge zwischen den verschiedenen Bereichen der stückweise definierten Funktion und schraffiert die zu berechneten Flächen. Er verdeutlicht, wie er diese verschieben kann, um aus den Dreiecken Rechtecke zu erhalten, deren Flächen einfacher zu berechnen sind. Wie eines der Studierendenpaare setzt er in seiner Niederschrift mit einem Ansatz über Integration an, führt aber die tatsächliche Rechnung über eine Flächenbestimmung ohne ein Integrieren der auftretenden Funktionen aus.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C2:

Zunächst notiert der Experte die Formel

$$U_L = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(\tau) \, d\tau}.$$

Dann passt er die Formel für die vorliegende Situation an, indem er das Integrationsintervall $[0s, 10s]$ in drei Teilintervalle $[0s, 2s]$, $[2s, 5s]$ und $[5s, 9s]$ entsprechend der stückweisen Definition der skizzierten Funktion zerlegt. Anschließend verschiebt er alle drei Intervalle in den Ursprung, wodurch das erste unverändert bleibt, das zweite zu $[0s, 3s]$ und das dritte zu $[0s, 4s]$ wird. In die Integranden schreibt er jeweils die linearen Funktionen, welche den Spannungsverlauf in dem jeweiligen Intervall beschreiben. So kommt er am Ende auf das richtige Ergebnis.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass der Effektivwert der Spannung zur Bestimmung davon dient, was die Spannung „effektiv leisten kann“ (1705), beispielsweise ist 230 Volt der Effektivwert deutscher Steckdosen. Der Experte beschreibt, dass man durch das Quadrieren im Integranden nicht einfach die Flächen berechnen kann:

„Da muss man wirklich das Integral ausrechnen.“

(2015)

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C2:

- **{A3}** Der Experte notiert die Formel zur Berechnung des Effektivwertes und passt sie für die vorliegende Situation an.
- **{B3}** Dabei berücksichtigt er die notwendige Zerlegung des Integrationsintervalls durch die stückweise Definition der Funktion. Er verschiebt die untere Integrationsgrenze jeweils in den Ursprung, was aufgrund der Translationsinvarianz möglich ist.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte erwähnt explizit, dass er die zu betrachtenden Flächen in den Ursprung verschieben kann. Damit möchte er die Rechnung vereinfachen, da in diesem Aufgabenteil keine Berechnung über Flächen möglich ist.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C3:

Der Experte sagt als erstes, dass das Ergebnis „genauso berechnen wie C1 [kann], also formelmäßig“ (1029). Nun kommen Betragsstriche vor, wodurch sich das Vorzeichen des Summanden in der Mitte ändert. Als Formel gibt er

$$|\overline{u_L}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u_L(\tau)| d\tau$$

an und überträgt dann die einzelnen Summanden aus C1 unter Berücksichtigung, dass bei dem zweiten Summanden aus einer Subtraktion eine Addition wird.

In Phase 2 erklärt der Experte, dass der Gleichrichtwert der Wert ist, den man erhält, wenn die Spannung durch einen Gleichrichter, ein weiteres elektrotechnisches Bauteil, geführt wird.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C3:

- **{A1}** Der Experte sagt, dass man Ergebnis „formelmäßig“ wie C1 berechnen kann und nun Betragsstriche vorkommen
- **{A3}** Er notiert die Formel für den Gleichrichtwert.
- **{B1}** Er überträgt die Ergebnisse aus C1 und betrachtet dabei beim zweiten Summanden, dass dieser nun addiert statt subtrahiert wird.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte bearbeitet die Aufgabe – genauso wie die Studierendenpaare – dadurch, dass er seine Teilergebnisse aus C1 überträgt und aus der Subtraktion eine Addition macht.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C4:

Der Experte leitet seine Bearbeitung mit „Jetzt ein ganz anderer Teil: Energieberechnung“ (vgl. 1132) ein. Dann gibt er die Formeln $W_L = \frac{1}{2} Li_L^2$ und $u_C = L \frac{di}{dt}$ an. Die zweite Formel stellt er um zu

$$i_L = \int_{0s}^{2s} \frac{u_L}{L} d\tau = \frac{1}{L} \int_{0s}^{2s} u_L d\tau \quad (6.10)$$

und argumentiert, dass das Integral der Fläche unter dem Graphen der Funktion entspricht und gibt damit den Wert für den Strom an. Sein Ergebnis setzt er dann in die Formel für W_L ein und erhält das gesuchte Ergebnis.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil C4:

- **{A1}** Der Experte nennt zunächst ein Schlagwort zur Berechnung der Aufgabe, nämlich „Energieberechnung“.
- **{A3}** Er notiert alle Formeln, die ihm relevant erscheinen.
- **{B1}** Er argumentiert über Flächen bei der Berechnung des Integrals.

- **{B2}** Er verwendet „Gleichungsmanagement“ zur Kombination der Formeln.
- **{B3}** Der Experte stellt die Bauteilgleichung nach dem Strom i_L um.

Der Experte belegt seine Rechnung im Gegensatz zu den Studierenden mit dem Stichwort „Energieberechnung“. Dabei verwendet er explizit wieder einen Ansatz über die Betrachtung von Flächen, um einen einfacheren Zugang zu erreichen.

6.7 Auswertungen von Klausurbearbeitungen der Studierenden

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analyse der ca. 90 Klausurbearbeitungen zu der Aufgabe A vorgestellt. Diese Aufgabe wurde – wie bereits erwähnt – in einer Klausur eingesetzt, welche üblicherweise nach dem zweiten Fachsemester in Elektrotechnik geschrieben wird. Für die Analyse wurde nicht die Korrektur der Klausur übernommen, sondern die Klausur wurde gemäß eines Kategoriensystems, welches auf der SEL aufbaut, neu korrigiert. Die Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen, welche unter dem Einsatz von Partial Credits (2 richtig, 1 halbrichtig, 0 falsch) durchgeführt wurde, wurde hinsichtlich Lösungsquoten untersucht. Weitere Ausführungen zu der Analyse der Klausurbearbeitungen gibt es im Kapitel 3 ab Seite 115.

6.7.1 Kategoriensystem für die Analysen von Aufgabe C

	Kategorie mit Kurzbeschreibung der Ideallösung	Ausprägungen
C1	Bestimmung des arithmetischen Mittelwerts: Über Betrachtung der Flächenbilanz der orientierten Flächen in der Grafik oder die Bestimmung mit Integralen wird der Mittelwert bestimmt, in dem durch die Intervalllänge dividiert wird. $\overline{u_L} = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt$. Der Wert ist 0,35 Volt.	2a Alle Teilflächen wurden korrekt über die Flächenbilanz berechnet und anschließend durch 10s dividiert. 2b Alle Teilflächen wurden korrekt über Integration berechnet und anschließend durch 10s dividiert. 1a Bei einer Teilfläche stimmt das Vorzeichen nicht. 1b Fehler beim Integrieren z. B. durch falsches Einsetzen der Grenzen. 1c einzelne Teilflächen werden falsch bestimmt. 1d Die Division durch 10s wird vergessen. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung
C2a	Abruf der Formel für den Effektivwert: Die Formel wird richtig angegeben. $U_L = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_L^2(t) dt}$	2 Die korrekte Formel wird angegeben. 1a In der Formel fehlt das $\frac{1}{T}$ 1b In der Formel fehlt das Quadrat im Integranden 1c Die Integrationsgrenzen sind falsch 1d Es fehlt die Wurzel 0a falsche Formel 0b keine Bearbeitung
C2b	Bestimmung des Effektivwerts: Der Effektivwert wird als 0,822 Volt korrekt bestimmt.	2a Der Effektivwert wird korrekt berechnet ohne Verschiebung der Grenzen in den Nullpunkt. 2b Der Effektivwert wird berechnet unter Verschiebung der Grenzen in den Nullpunkt (wie in der Lösung). 1a Es treten Fehler im Umgang mit Wurzeln auf (z. B. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$). 1b Es treten Integrationsfehler auf. 1c Es treten sowohl Integrations- als auch Wurzelfehler auf. 1d es stehen falsche Funktionen im Integranden 1e Teilfunktion falsch bestimmt. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung

C3a	Abruf der Formel für den Gleichrichtwert: Die Formel wird richtig angegeben. $ u_L = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) dt$	2 Die korrekte Formel wird angegeben. 1a In der Formel fehlt das $\frac{1}{T}$. 1b In der Formel fehlt der Betrag im Integranden. 1c Die Integrationsgrenzen sind falsch. 0a falsche Formel 0b keine Bearbeitung
C3b	Bestimmung des Gleichrichtwert: Der Gleichrichtwert wird als 0,65 Volt korrekt bestimmt.	2a Der Gleichrichtwert wird korrekt berechnet ohne Verschiebung der Grenzen in den Nullpunkt. 2b Der Gleichrichtwert wird berechnet unter Verschiebung der Grenzen in den Nullpunkt (wie in der Lösung). 2c Es werden – wie in C1 – die Integrationsflächen betrachtet, diesmal alle mit positiven Vorzeichen. 1a Es treten Fehler im Umgang mit Beträgen auf. 1b Es treten Integrationsfehler auf. 1c Es treten sowohl Integrations- als auch Fehler bei Beträgen auf. 1d es stehen falsche Funktionen im Integranden 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung
C4a	Formel für innere Energie: Die Formel $W_L = \frac{1}{2} Li^2$ wird korrekt angegeben.	2 Die Formel wird korrekt angegeben. 1a es fehlt das Quadrat bei dem Strom i . 1b es fehlt das $\frac{1}{2}$. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung
C4b	Berechnung der inneren Energie: Der Wert der inneren Energie wird mit 5 Joule korrekt angegeben.	2 Der Wert ist korrekt. 1a nur der Zahlenwert ist korrekt (modulo Zehnerpotenz). 1b nur die Einheit ist korrekt. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung
C4c	Formel für den Strom i : Die Formel wird mit $i_L(2s) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_{0s}^{2s} u_L(t) dt$ korrekt angegeben	2a die Formel wird angegeben – mit Wert für i bei $t = 0s$. 2b die Formel wird angegeben – ohne Wert für i bei $t = 0s$. 1a die Integrationsgrenzen sind falsch. 1b das $\frac{1}{L}$ wird vergessen. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung
C4d	Berechnung des Stroms i : Der Wert 10A wird korrekt angegeben.	2 Der Wert ist korrekt. 1a nur der Zahlenwert ist korrekt (modulo Zehnerpotenz). 1b nur die Einheit ist korrekt. 0a falsche Bearbeitung 0b keine Bearbeitung

6.7.2 Kategorisierungen der Klausurbearbeitungen

[C1] Geben Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung im Intervall $[0; T]$ an. (1 Punkt). Hinweis: Die explizite Berechnung eines Integrals ist nicht erforderlich!

44 (47, 31%) haben den Aufgabenteil C1 richtig gelöst, in dem die Flächen betrachtet wurden. 6 (6, 45%) Studierende haben ihn über Integration richtig gelöst. Bei 5 Studierenden (5, 38%) traten Fehler bei der Integration auf und bei 15 Studierenden (16, 13%) wurden einzelne Teilflächen falsch bestimmt. 18 Studierende (19, 35%) haben den Aufgabenteil falsch gelöst und 5 (5, 38%) haben ihn nicht gelöst.

[C2] Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung im Intervall $[0; T]$. (4 Punkte)

- Die Formel für den Effektivwert wurde von 80 Studierenden (86, 02%) richtig angegeben. Bei jeweils einem Studierenden fehlte der Faktor $\frac{1}{T}$ bzw. das Quadrat im Integranden. Die

Integrationsgrenzen wurden von keinem falsch angegeben, genauso wurde die Wurzel von niemandem vergessen. Ein Studierender hat den Aufgabenteil falsch und 10 Studierende (10, 75%) gar nicht gelöst.

- Die Bestimmung des Effektivwerts wurde von 6 Studierenden (6, 45%) ohne und von 8 Studierenden (8, 60%) mit einer Verschiebung der Grenzen in den Nullpunkt durchgeführt. Zwei Studierende haben Fehler in der Integration gemacht und 46 Studierende (49, 46%) verwenden falsche Funktionen im Integranden. 16 Studierende (17, 20%) haben den Teil der Aufgabe falsch und 15 Studierende (16, 13%) gar nicht bearbeitet.

[C3] Bestimmen Sie den Gleichrichtwert der Spannung im Intervall $[0; T]$. (6 Punkte)

- 53 Studierende (56, 99%) haben die korrekte Formel für den Gleichrichtwert angegeben. Drei Studierende haben eine falsche Formel angegeben, wobei ihr Fehler nicht im Fehlen des Vorfaktors $\frac{1}{T}$, bei dem Betrag im Integranden oder bei den Integrationsgrenzen lag. 37 Studierende (39, 78%) haben diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet.
- Zwei Studierende haben den Gleichrichtwert ohne und drei Studierende mit einer Verschiebung des Integrationsintervalls in den Nullpunkt bestimmt. 38 Studierende (40, 86%) haben die in C1 bestimmten Flächen mit positiven Vorzeichen betrachtet und so die Aufgabe richtig gelöst. Jeweils ein Studierender hat Fehler im Umgang mit Beträgen gemacht bzw. Fehler in der Integration begangen. 13 Studierende (13, 98%) haben falsche Funktionen im Integranden verwendet. 20 Studierende (21, 51%) haben die Aufgabe falsch und 15 (16, 13%) gar nicht bearbeitet.

[C4] Wie groß ist die innere Energie $W_L(t)$ der Spule zum Zeitpunkt $t_1 = 2s$? (2 Punkte)

- 75 Studierende (80, 65%) haben die Formel für die innere Energie korrekt angegeben. Jeweils ein Studierender hat das Quadrat beim Strom bzw. den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ vergessen. 5 Studierende (5, 38%) haben den Aufgabenteil falsch und 11 Studierende (11, 83%) gar nicht beantwortet.
- 17 Studierende (18, 28%) haben die innere Energie mitsamt Einheit richtig bestimmt. Bei zwei Studierenden ist nur der Zahlenwert korrekt, bei 29 Studierenden (31, 18%) stimmt nur die Einheit Joule. 19 Studierende (20, 43%) haben den Aufgabenteil falsch und 26 Studierende (27, 96%) gar nicht beantwortet.
- 5 Studierende (5, 38%) haben die Formel für den Strom i unter Beachtung des Wertes bei $t = 0$ richtig aufgestellt. 36 Studierende (38, 71%) ohne den Wert bei $t = 0$ angegeben. 13 Studierende (13, 98%) haben die Formel falsch und 39 Studierende (41, 94%) gar nicht angegeben.
- Der Wert für den Strom wurde von 17 Studierenden (18, 28%) korrekt angegeben. Bei einem Studierenden ist nur der Zahlenwert korrekt; bei 23 Studierenden (24, 73%) ist nur die Einheit korrekt. 6 Studierende (6, 45%) haben die Aufgabe falsch und 46 Studierende (49, 46%) gar nicht bearbeitet.

6.8 Beantwortung der dritten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die dritte Forschungsfrage,

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

für Aufgabe C beantwortet. Dieses ist in zwei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

3.1 Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?

Den ersten Aufgabenteil haben mehr als 50% der Studierenden korrekt gelöst, wobei trotz des Hinweises in der Aufgabenstellung auch 11% den Weg über Integration gewählt haben – 6% richtig und 5% falsch. Bei immerhin einem Sechstel der Studierenden wurden Teilflächen falsch bestimmt, d. h. es traten Fehler im elementaren Rechnen mit Flächen auf. Bei einem Großteil der Studierenden (mehr als 85%) wurde die Formel für den Effektivwert korrekt angegeben, wobei zusätzlich jeweils ein Studierender den Vorfaktor und das Quadrat vergessen haben, aber die Wurzel wurde von allen beachtet, die den Integralansatz durchgeführt haben. Bei der Bestimmung des Wertes wurde von fast 50% der Studierenden in den Klausuren mindestens eine falsche Funktion im Integranden verwendet, d. h. das Aufstellen der linearen Funktionen war für viele Studierende eine Hürde. Fehler in der Integration selbst traten nur bei zwei Studierenden auf. Nur ca. 15% der Studierenden haben den Effektivwert korrekt bestimmt, wobei ca. eine Hälfte die Verschiebung des Integrationsintervalls, so dass die untere Integrationsgrenze auf 0 verschoben wird, vorgenommen hat, welches das Aufstellen der linearen Funktion erleichtert. Von 53 Studierenden (56, 99%) ist die Formel für den Gleichrichtwert korrekt angegeben worden und nur drei Studierende hatten sie falsch; der Rest hat den Aufgabenteil C3 nicht bearbeitet, also gibt es hier auch wieder so gut wie keine halbrichtigen Lösungen. Über Integration haben fünf Studierende diesen Aufgabenteil gelöst, 38 Studierende haben auf ihre Ergebnisse aus C1 zurückgegriffen. Fehler bei der Integration oder im Umgang mit Beträgen traten nur bei einer Minderheit auf.

Von mehr als 80% der Studierenden wurde die Formel für die innere Energie in C4 korrekt angegeben. Bei sieben Studierenden traten Fehler in der Formel auf und der Rest hat diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet. Nur etwas mehr als 18% haben die innere Energie mit Einheit korrekt bestimmt, bei etwas mehr als 30% stimmt ausschließlich die Einheit, d. h. es gibt deutliche Einbrüche gegenüber der Aufstellung der Formel. Diese sind auf das Aufstellen der Formel für den Strom i und seine Berechnung zurückzuführen. Fast 45% der Studierenden haben die Formel richtig aufgestellt, wobei nur fünf Studierende auch den Wert $i(t = 0)$ explizit berücksichtigen. Den Strom i haben 17 Studierende richtig bestimmt, wobei alle diese Studierenden auch dann die innere Energie korrekt bestimmt haben. Hier haben 23 Studierende die Einheit richtig. Eine mögliche Erklärung ist hier, dass durch die Angabe der Einheit möglicherweise Teilpunkte erlangt werden können.

3.2 Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

Aufgabenteil C1 wird von mehr als 50% der Studierenden in den Klausuren richtig gelöst, während in den Videostudien alle drei Studierendenpaare ein richtiges Ergebnis erzielt ha-

ben. Während in den Videostudien Integration oder eine Mischung aus einem Ansatz über Integration und einer Berechnung über Flächen gewählt wurden, haben in den Klausurbearbeitung nur elf Studierende über Integration gearbeitet und der Rest stattdessen Flächen berechnet.

In Aufgabenteil C2 traten in den Klausuren die meisten Schwierigkeiten auf. Ursachen für Fehler war dort – trotz einer richtigen Angabe der Formel für den Effektivwert bei 85% der Studierenden – bei ca. 50% der Studierenden ein falsches Aufstellen der linearen Funktion. Dieses führte ebenfalls in einer Videostudie neben einem falschen Umgang mit der auftretenden Wurzel zu Schwierigkeiten. Nur 15% der Studierenden bestimmten in der Klausur den Effektivwert korrekt, während das in den Videostudien bei zwei der drei Paare der Fall war. Gerade aufgrund der Kombination der einzelnen Bestandteile der Formel (Wurzel, Lineare Funktion, Binomische Formel, Vorfaktor) erkennt man eine Rechtfertigung für das Umstellen der Formel durch ein Studierendenpaar, bei der die Summe der Integrale auf einer Seite und der Rest, d. h. der Vorfaktor und die Wurzel, auf die andere Seite gebracht wurden, wobei dieses über Multiplikation mit T und Quadrieren des Ausdrucks zum Auslösen der Wurzel möglich war.

Bei Aufgabenteil C3 haben 38 Studierende wie in den Videostudien auf die Werte der Teilflächen aus Aufgabenteil C1 zurückgegriffen und dabei das Vorzeichen des einen Summanden geändert. Insgesamt haben 53 Studierende den Aufgabenteil richtig gelöst. Fehler traten hier in den Videostudien nicht und bei den Klausurbearbeitungen nur bei einer Minderheit auf.

Die Bearbeitung von Aufgabenteil C4 des Abrufens der Formel für das Bauteil Spule und das Heranziehen der inneren Energie haben alle Studierendenpaare in den Videostudien richtig gelöst. Viele Studierende haben nur die Einheit in den Klausuren richtig angegeben, aber der Zahlenwert stimmte auch modulo Zehnerpotenz nicht. Die Berücksichtigung des Wertes $i(t = 0) = 0$ innerhalb der Berechnung wird nur bei fünf Studierenden explizit deutlich. In den Videostudien hat dieses nur ein Paar berücksichtigt und dort auch erst nach der Rechnung.

Kapitel 7

Normative und empirische Analysen zu einer Aufgabe zum Thema „Komplexe Wechselstromrechnung“

In diesem Kapitel werden die Ansätze, deren Methodologie in Kapitel 3 erläutert und die exemplarisch in Kapitel 4 an einer Aufgabe durchgeführt wurden, auf eine Aufgabe zum Thema „Komplexe Wechselstromrechnung“, der sogenannten Aufgabe D, angewendet. Bei dieser Aufgabe werden bezogen auf die Mathematik hauptsächlich Rechenoperationen mit komplexen Zahlen in verschiedenen Darstellungen verwendet. Im einzelnen ist dieses Kapitel folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst wird in Abschnitt 7.1 die Aufgabenstellung vorgestellt, wie sie den Studierenden in einer Klausur zu den „Grundlagen der Elektrotechnik B“ vorlag. Dabei wird zusätzlich auch die Kurzlösung zitiert, welche den Korrektoren der Klausur vorlag. Diese Korrektoren sind Experten in der Elektrotechnik, d. h. der Dozent der Vorlesung der Veranstaltung sowie Wissenschaftliche Mitarbeiter aus der Elektrotechnik.

In Abschnitt 7.2 werden die theoretischen Hintergründe zu der Aufgabe vorgestellt. Dazu zählen einerseits die elektrotechnischen Grundlagen der Aufgabe, welche in dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, d. h. Böcker (2012), dargestellt. Andererseits werden auch die für die Bearbeitung der Aufgabe benötigten mathematischen Kenntnisse näher erläutert. Darüberhinaus gibt es noch eine Vertiefung, bei der in diesem Fall die feldtheoretischen Grundlagen dargestellt werden, welche zum vollständigen Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Situation benötigt werden, allerdings über den Kenntnisstand eines Zweitsemester-Studierenden hinausgehen.

Der folgende Abschnitt, also Abschnitt 7.3, präsentiert eine normative Aufgabenanalyse zu der vorliegenden Aufgabe. Hierbei wird das Konzept der Studi-Expert-Lösung (SEL) eingesetzt, welche im vorherigen Kapitel ab Seite 75 näher vorgestellt wurde. Diese SEL enthält neben einer ausführlichen Musterlösung auch die Anmerkungen des Experten aus dem Experteninterview sowie Bezüge zu den in Kapitel 2 präsentierten theoretischen Grundlagen wie dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) oder dem mathematischen Problemlösen nach Polya. In einem Unterabschnitt wird die Abhängigkeitsstruktur der Aufgabe vorgestellt, d. h. es wird vorgestellt, inwiefern Angaben aus der Aufgabenstellung, in vorherigen Aufgabenteile berechnete Größen sowie Naturkonstanten beim Lösen der Aufgabenteile eingesetzt werden.

Der Abschnitt 7.4 stellt dann die Antworten auf die drei Unterfragen der Forschungsfrage 1

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

vor:

- Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?
- Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?
- Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In den Abschnitten 7.5 bis 7.6 werden Ergebnisse aus den Analysen der Studierendenbearbeitungen vorgestellt. Diese werden jeweils mit Methoden analysiert, welche in Kapitel 3 ausführlicher vorgestellt wurden:

Im Abschnitt 7.5 werden die Bearbeitungen aller drei Paare bei einem bestimmten Teil der Aufgabe vorgestellt und anschließend in Zwischenfazit-Zusammenfassungen für die spätere Beantwortung der Forschungsfrage 2 (siehe unten) erstellt. Die methodologischen Grundlagen und die verwendeten Kategorien werden in Kapitel 3 ab Seite 102 dargestellt. Mit Hilfe dieser Daten werden im Abschnitt 7.6 Antworten auf die Unterfragen der zweiten Forschungsfrage

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

vorgestellt. Dabei werden im einzelnen folgende Aspekte über die folgenden Forschungsfragen vorgestellt:

- Welche Fehler und Problemstellen treten auf? (ab Seite 453)
- Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4. (ab Seite 455)
- Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben? (ab Seite 458)

Die Ergebnisse zu den einzelnen Forschungsfragen werden bezogen auf alle vier verwendeten Klausuraufgaben im Kapitel 8 zusammengefasst und gegenübergestellt.

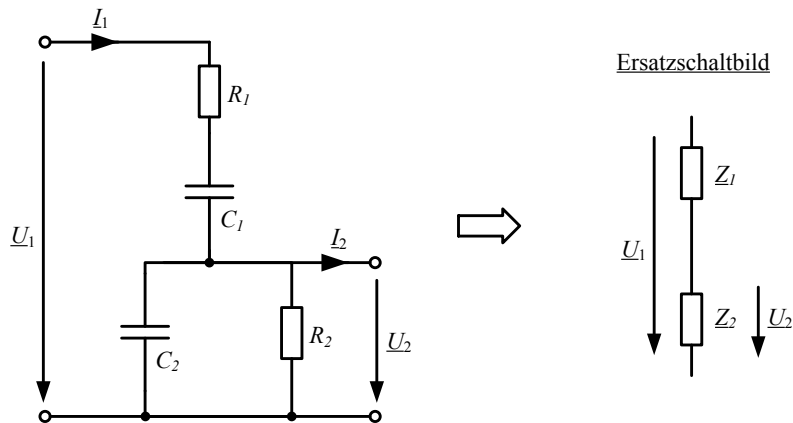
7.1 Aufgabenstellung inkl. Lösung des Instituts

In diesem Abschnitt wird zunächst die Aufgabe selbst vorgestellt, wie sie in den Studierenden in der Klausur und später in den Studien mit den Studierendenpaaren vorlag. Zusätzlich wird jeweils zu den einzelnen Aufgabenstellungen die Lösung für die Korrektoren der Klausur, welche von dem Institut erstellt wurde, zitiert. Da sich diese an Experten in der Elektrotechnik richtet, ist diese an vielen Stellen sehr kurz gehalten und es gibt keine weiteren Anmerkungen beispielsweise zu den Hintergründen der Lösung. Aus diesem Grund war sie unzureichend für die weiteren Analysen und wurde im Rahmen der Studi-Expert-Lösung erweitert, um eine Grundlage für die Analysen der Bearbeitungsprozesse und -produkte zu bilden.

7.1.1 Aufgabenstellung mit Lösung für die Korrektoren

Aufgabe D: Übertragungsfunktion, komplexe Wechselstromrechnung

Gegeben sei der abgebildete Zweig einer Wien-Brückenschaltung. Der Brückenweig lässt auch mit Hilfe des dargestellten Ersatzschaltbildes darstellen.



Der Ausgang des Brückenweigs sei unbelastet, so dass für den Strom $\underline{I}_2 = 0$ gelte. Bekannt außerdem folgende Werte: $\underline{U}_1 = 230\text{V}e^{j0^\circ}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $C_1 = 250\mu\text{F}$, $C_2 = 50\mu\text{F}$, $f = 50\text{Hz}$.

7.1.1 (D1) BERECHNEN SIE DIE SCHEINWIDERSTÄNDE $\underline{Z}_1$ UND $\underline{Z}_2$. (3 PUNKTE)

Lösung

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 100\Omega - j12,73\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \frac{1 - j\omega R_2 C_2}{1 - j\omega R_2 C_2} = \frac{R_2 - j\omega R_2^2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} = 28,68\Omega - j18,02\Omega$$

7.1.2 (D2) BERECHNEN SIE DIE SPANNUNG $\underline{U}_2$. WIE GROSS IST DIE PHASENVERSCHIEBUNG ZWISCHEN $\underline{U}_1$ UND $\underline{U}_2$? (2 PUNKTE)

Lösung

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}_1 = 55,77\text{V} - j18,88\text{V} = 58,88\text{V}e^{-j18,7^\circ}$$

Die Spannung $\underline{U}_2$ eilt der Spannung $\underline{U}_1$ um $18,7^\circ$ nach.

7.1.3 (D3) IN WELCHEM WERTEBEREICH KANN DIE PHASENVERSCHIEBUNG ZWISCHEN $\underline{U}_1$ UND $\underline{U}_2$ BEI DIESER SCHALTUNG LIEGEN? (1 PUNKT)

Lösung

$$\varphi_{U_1} = 0^\circ$$

$$\varphi_{U_2} = [-90^\circ, 90^\circ]$$

7.1.4 (D4) WELCHE FREQUENZ ($f > 0\text{Hz}$) IST ZU WÄHLEN, DAMIT KEINE PHASENVERSCHIEBUNG MEHR ZWISCHEN $\underline{U}_1$ UND $\underline{U}_2$ AUFTRITT? (4 PUNKTE)

Lösung

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C_2}}{\frac{R_2}{1+j\omega R_2 C_2}} = \frac{R_1 + j\omega R_1 R_2 C_2 - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{R_2 C_2}{C_1} + R_2}{R_2}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{R_1}{R_2} + j\omega R_1 C_2 - j\frac{1}{\omega R_2 C_1} + \frac{C_2}{C_1} + 1$$

Hierbei müssen sich die Imaginäranteile dann genau auslöschen:

$$\omega R_1 C_2 = \frac{1}{\omega R_2 C_1}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

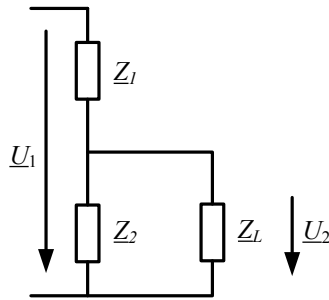
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

mit $\omega = 2\pi f$ folgt:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}}{2\pi} = 22,51\text{Hz}$$

Der Ausgang des Brückenzeigs werde nun mit einer realen Spule belastet. Diese Spule könnte mit einer Ersatzimpedanz $\underline{Z}_L = 5\Omega + j10\pi\Omega$ nachgebildet werden.

7.1.5 (D5) GEBEN SIE DIE INDUKTIVITÄT L SOWIE DEN WICKLUNGSWIDERSTAND R_L DER REALEN SPULE AN. (2 PUNKTE)



Lösung

$$\underline{Z}_L = 32,97\Omega = R_L + j10\pi\Omega = R_L + j31,42\Omega$$

Daraus folgt:

$$R_L = \sqrt{(32,97\Omega)^2 - (31,42\Omega)^2} = 10\Omega$$

$$L = \frac{10\pi\Omega}{\omega} = \frac{10\pi\Omega}{2\pi f} = 0,1\text{H}$$

7.1.6 (D6) BESTIMMEN SIE DEN STROM I_1 , DEN LEISTUNGSFAKTOR SOWIE DIE VON DER SCHALTUNG AUFGENOMMENE WIRK-, SCHEIN- UND BLINDLEISTUNG. (5 PUNKTE)

Lösung

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = 125,45\Omega - j2,91\Omega = 125,48\Omega e^{-j1,33^\circ}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{230\text{V}e^{j0^\circ}}{125,48\Omega e^{-j1,33^\circ}} = 1,833\text{A}e^{j1,33^\circ}$$

$$\lambda = \cos(\varphi) = \cos(0,37^\circ) = 0,99$$

$$S = UI = 230\text{V} \cdot 1,833\text{A} = 421,59\text{VA}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 421,48\text{W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = 9,785\text{VA}$$

7.1.2 Relevante Formeln für die Bearbeitung von Aufgabe D

In diesem Abschnitt werden die für Aufgabe D benötigten Formeln vorgestellt. In den Formeln wird die Notation aus Böcker (2012), dem Vorlesungsskript zur Veranstaltung, verwendet:

In dieser Aufgabe ergeben sich viele Formeln durch die Übersetzung des Netzwerks (inklusive seiner Schaltungstopologie) in mathematische Ausdrücke. Daneben sind noch folgende Formeln für die drei letzten Aufgabenteile relevant:

1. Komplexe Form des Ohm'schen Gesetzes:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

Hierbei ist $\underline{U}$ die komplexe Spannung, Einheit Volt (V), und $\underline{I}$ der komplexe Strom, Einheit Ampere (A). Deren Quotient $\underline{Z}$ heißt Impedanz und ist ein komplexer Widerstand, Einheit Ohm (Ω), welche somit als $\frac{\text{V}}{\text{A}}$ geschrieben werden kann.

2. Kennkreisfrequenz ω :

$$\omega = 2\pi f$$

Diese Formel setzt die Kennkreisfrequenz ω (Einheit $\frac{1}{\text{s}}$) mit der Frequenz f in Hertz (Einheit $\frac{1}{\text{s}}$) in Relation. In der Aufgabe ist f gegeben.

3. Induktivität L :

$$L = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\omega}$$

Die Induktivität L (Einheit H, also Henry) kann als $\frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ geschrieben werden. Dieses bestätigt sich aus den Einheiten aus der rechten Seite, da $\underline{Z}$ die Einheit $\frac{\text{V}}{\text{A}}$ hat und ω die Einheit $\frac{1}{\text{s}}$.

4. Scheinleistung $\underline{S}$: Für die Scheinleistung $\underline{S}$ gilt – analog zur Leistung P –

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}$$

Damit ergibt sich für S die Einheit Watt (W), welches das Produkt von Volt (V) und Ampere (A) ist.

5. Wirkleistung P : Für die Wirkleistung P gilt

$$P = \text{Re}(\underline{S})$$

6. Blindleistung Q : Für die Blindleistung Q gilt

$$Q = \text{Im}(\underline{S})$$

7. Leistungsfaktor λ :

$$\lambda = \cos\left(\frac{|P|}{S}\right)$$

7.1.3 Abhängigkeitsstruktur

In dieser Aufgabe werden Ergebnisse aus vorherigen Aufgabenteilen zur Berechnung von Lösungen in späteren Aufgabenteilen verwendet. Die Tabelle stellt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Aufgabenteilen für Aufgabe D dar. Dabei wird die folgende Notation verwendet:

- $X^{[D]}$ bedeutet: die Größe steht in der Aufgabenstellung zu Aufgabe D
- X^{DY} bedeutet: die Größe X wurde in Aufgabenteil DY berechnet
- X (ohne Index) bedeutet: die Größe ist eine Naturkonstante

	Zur Rechnung benötigte Größen	Berechnete Größen
D1	• Strom $\underline{I}_2^{[D]}$ • Spannung $\underline{U}_1^{[D]}$ • Widerstand $R_1^{[D]}$ • Widerstand $R_2^{[D]}$ • Kapazität $C_1^{[D]}$ • Kapazität $C_2^{[D]}$ • Frequenz $f^{[D]}$	• Kreisfrequenz ω^{D1} • Scheinwiderstand $\underline{Z}_1^{D1}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_2^{D1}$
D2	• Spannung $\underline{U}_1^{[D]}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_1^{D1}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_2^{D1}$	Spannung $\underline{U}_2^{D2}$
D3	• Spannung $\underline{U}_1^{[D]}$ • Spannung $\underline{U}_2^{D2}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_1^{D1}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_2^{D1}$	Phasenverschiebung φ^{D3}
D4	• Spannung $\underline{U}_1^{[D]}$ • Spannung $\underline{U}_2^{D2}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_1^{D1}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_2^{D1}$ • Kreisfrequenz ω^{D1}	• Frequenz f^{D4} (ohne Phasenverschiebung)

D5	• Ersatzimpedanz $\underline{Z}_L^{[D]}$ • Frequenz $f^{[D]}$ • Kreisfrequenz ω^{D1}	• Widerstand R_L^{D5} • Induktivität L^{D5}
D6	• Spannung $\underline{U}_1^{[D]}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_1^{D1}$ • Scheinwiderstand $\underline{Z}_2^{D1}$ • Ersatzimpedanz $\underline{Z}_L^{[D]}$ • Wirkleistung P^{D6} • Scheinleistung S^{D6} • Blindleistung Q^{D6}	• Strom $\underline{I}_1^{D6}$ • Wirkleistung P^{D6} • Scheinleistung $\underline{S}^{D6}$ • Blindleistung Q^{D6} • Leistungsfaktor λ^{D6} Aus S kann der Wert für P und Q über $P^2 + Q^2 = S^2$ berechnet werden; der Quotient der Beträge der Größen P und S ist λ

7.2 Hintergründe zu der Aufgabe

Dieses Kapitel stellt die theoretischen Grundlagen vor, welche zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden. Im ersten Unterabschnitt geht es um die elektrotechnischen Grundlagen, welche Studierende in der Elektrotechnik nach Ende ihres zweiten Fachsemesters aus Böcker (2012), für die Bearbeitung der Aufgabe kennen können. Im zweiten Abschnitt geht es entsprechend um die mathematischen Grundlagen, welche Elektrotechnik-Studierende nach ihrem ersten Studienjahr aus den Vorlesungen kennen sollten.

7.2.1 Elektrotechnische Hintergründe zu der Aufgabe D

Notation : In der Elektrotechnik werden komplexe Größen durch ein Unterstreichen kenntlich gemacht, d. h. $\underline{x}$ bedeutet $x \in \mathbb{C}$.

Für Reihen- bzw. Parallelschaltungen gilt entsprechend Böcker (2012, S. 15ff.) bzw. Böcker (2012, S. 19ff.) folgendes:

- Reihenschaltung von mehreren gleichen Bauteilen:
 - Für Widerstände gilt die Formel

$$R_{\text{ges}} = \sum_{n=1}^N R_n = R_1 + \dots + R_N$$

- Für Kondensatoren gilt die Formel

$$C_{\text{ges}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\frac{1}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N}}.$$

Für zwei Kondensatoren ergibt sich so:

$$\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- Für Induktivitäten gilt die Formel

$$L_{\text{ges}} = \sum_{n=1}^N L_n = L_1 + \dots + L_N$$

- Parallelschaltung von mehreren gleichen Bauteilen:

- Für Widerstände gilt die Formel

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}}.$$

Für zwei Widerstände ergibt sich so:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Für Kondensatoren gilt die Formel

$$C_{\text{ges}} = \sum_{n=1}^N C_n = C_1 + \dots + C_N$$

- Für Induktivitäten gilt die Formel

$$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n}}.$$

Für zwei Induktivitäten ergibt sich so:

$$\frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Ein Scheinwiderstand $\underline{Z}$ bzw. eine Impedanz $\underline{Z}$ ist ein komplexer Widerstand (siehe Böcker (2012, S. 66)), der sich als Quotient aus einer komplexen Spannung und eines komplexen Stroms ergibt. Gemäß Regeln für komplexe Zahlen kann man diesen in zwei Weisen darstellen:

- (mit Euler- bzw. Polardarstellung)

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

Hier ist φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

- (mit kartesischer Darstellung)

$$\underline{Z} = R + j \cdot X$$

Hierbei ist R , also der Realteil von $\underline{Z}$, die Wirkwiderstand (bzw. Resistanz). Den Imaginärteil X bezeichnet man als Blindwiderstand (bzw. Reaktanz).

Leistung bei sinusförmigen Vorgängen

Wir nehmen an, dass $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$ und $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)$ ist – analog zu Böcker (2012, S. 100). Damit ergibt sich für die Leistung unter Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = 2UI \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI (\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) = UI (\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) \end{aligned}$$

Die Momentanleistung besteht aus zwei Anteilen:

- Einem Gleichanteil der Größe $UI \cos(\varphi)$
- Einem mit einer doppelten Frequenz oszillierenden Term mit der Amplitude UI

Man bezeichnet die mittlere Leistung einer Periode als Wirkleistung. Es gilt $P = UI \cos(\varphi)$. Den Term $\lambda = \cos(\varphi)$ bezeichnet man als Leistungsfaktor. Als Blindleistung bezeichnet man $Q = UI \sin(\varphi)$. Die Scheinleistung S ist das Produkt $S = UI$. Zwischen diesen drei Leistungsbegriffen gibt es folgenden Zusammenhang:

$$P = S \cos(\varphi), Q = S \sin(\varphi), S^2 = P^2 + Q^2 \quad (7.1)$$

Trigonometrisch kann man sich den Zusammenhang zwischen S , P und Q als rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten P und Q und der Hypotenuse S vorstellen. Somit ergeben sich folgende Formeln, vgl. Böcker (2012, S. 100ff.):

- Scheinleistung S : Die Scheinleistung ist definiert als $S = U \cdot I$
- Wirkleistung (bzw. Resistanz) P : Die Wirkleistung P ist der Realteil der Scheinleistung S
- Blindleistung (bzw. Reaktanz) Q : Die Blindleistung Q ist der Imaginärteil der Scheinleistung S
- Leistungsfaktor: Der Leistungsfaktor λ gibt das Verhältnis von dem Betrag der Wirkleistung P und der Scheinleistung S an, also gilt: $\lambda = \frac{|P|}{S}$. Er entspricht dem Kosinus der Phasenverschiebung φ

7.2.2 Mathematische Hintergründe zu der Aufgabe D

Da hier eine Anwendung in der Elektrotechnik vorgestellt wird, wird in diesem Abschnitt j statt i als Bezeichnung für die komplexe Einheit (also die Lösung von $i^2 = -1$) verwendet.

Bezogen auf die Mathematik werden in dieser Aufgabe Umformstrategien zwischen verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen notwendig. Die verschiedenen bieten bezogen auf die verschiedenen Rechenoperationen jeweils Vor- oder Nachteile, welche unten näher erläutert werden. Allgemein gilt:

$$r \cdot e^{j\varphi} = r \cos(\varphi) + jr \sin(\varphi) = x + jy$$

Dabei heißen: r Radius, Norm oder Betrag der komplexen Zahl, φ Winkel oder Argument der komplexen Zahl, x Realteil der komplexen Zahl, y Imaginärteil der komplexen Zahlen. Es gilt: $r, \varphi, x, y \in \mathbb{R}$. Die linke Darstellung heißt Eulerform der komplexen Zahl, die mittlere heißt Polarform der komplexen Zahl und die rechte heißt kartesische Darstellung der komplexen Zahl. Die Polardarstellung wird im Wesentlichen für den Übergang zwischen der linken und der rechten Darstellung genutzt.

Die Zahlen können folgendermaßen ineinander umgerechnet werden:

- Euler nach kartesisch: Entsprechend zu oben mit Koeffizientenvergleichen – $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$
- Kartesisch nach Euler: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

Rechnen mit der kartesischen Form

Für die Addition und Subtraktion ist die kartesische Form die beste Form, da Real- und Imaginärteil direkt addiert bzw. subtrahiert werden können. Es gilt:

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d) \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Bei der Multiplikation muss – analog zu dem Multiplizieren zweier Klammern – jeder mit jedem Term multipliziert werden. Es gilt:

$$(a + jb) \cdot (c + jd) = (a \cdot c + j^2 \cdot b \cdot d) + j(a \cdot d + b \cdot c) = (ac - bd) + j(ad + bc) \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Für die Division gilt folgendes: Man kann einen Bruch der Formel $\frac{a+b \cdot j}{c+d \cdot j}$ immer in einen Bruch der Form $\frac{x+y \cdot j}{z}$ umwandeln, wobei $a, b, c, d, x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt. Hierzu erweitert man den Bruch mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners, also hier $c - d \cdot j$. So erhält man:

$$\frac{a + b \cdot j}{c + d \cdot j} = \frac{(a + b \cdot j)(c - d \cdot j)}{(c + d \cdot j)(c - d \cdot j)} = \frac{(a + b \cdot j)(c - d \cdot j)}{c^2 - j^2 d^2} = \frac{(a + b \cdot j)(c - d \cdot j)}{c^2 + d^2} \quad (7.2)$$

Insbesondere gilt:

$$\frac{1}{j} = \frac{-j}{j(-j)} = \frac{-j}{1} = -j \quad (7.3)$$

Für das Potenzieren ist die kartesische Form nicht gut geeignet, da das Potenzieren einer Summe $(x + jy)$ auf Anwendungen des binomischen Lehrsatzes führt.

Rechnen mit der Eulerform

Für die Addition und Subtraktion ist die Eulerform nicht gut geeignet, da sich keine Vereinfachungen oder allgemeine Zusammenfassungsmöglichkeiten ergeben. Beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren ergeben sich mit Hilfe von Potenzgesetzen nützliche Vereinfachungen: Seien $z = re^{j\varphi}$ und $w = se^{j\theta}$ mit $r, s, \varphi, \theta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $z \cdot w = rse^{j(\varphi+\theta)}$
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{j(\varphi-\theta)}$
- $z^n = (re^{j\varphi})^n = r^n e^{jn\varphi}$

7.3 Die Studi-Expert-Lösung

In diesem Abschnitt wird die normative Lösung der Aufgabe, die sogenannte Studi-Expert-Lösung, sowie eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Teilen der Aufgabe vorgestellt. Diese ist in zwei Spalten unterteilt: In der ersten Spalte gibt es eine ausführliche Lösung der Aufgabe, welche unter Verwendung der Phasen nach Polya (1949) gegliedert ist. In der zweiten Spalte gibt es Anmerkungen zu kognitiven Ressourcen. Im Anschluss an die Bearbeitung des Experten ist jeweils sein Bearbeitungsprozess und seine Aussagen zu Lösungsalternativen, typischen Fehlern von Studierenden im ersten Studienjahr und Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse dargestellt, wobei (mmss) die Zeitpunkte in den Experteninterviews sind. Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise bei der Erstellung der Studi-Expert-Lösung gibt es ab Seite 75 im vorherigen Kapitel. Eine Einführung in die elektrotechnischen Fachbegriffe gibt es in dem entsprechenden Unterabschnitt des zweiten Abschnitts dieses Kapitels. Die vierstelligen Zahlen in runden Klammern geben in der Form (mmss) den Zeitpunkt im Experteninterview an.

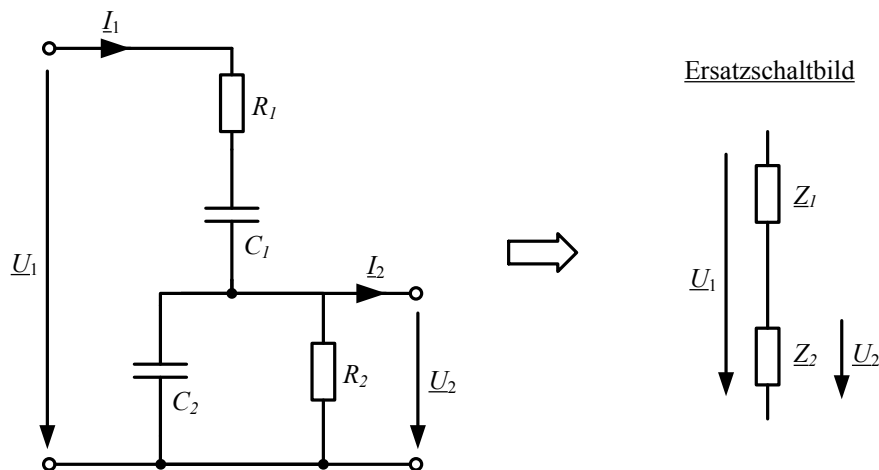


Abbildung 7.3.1: Skizze des Wechselstromkreises

Gegeben sei der in Abbildung 7.3.1 dargestellte Zweig einer Wien-Brückenschaltung. Der Brückenweig lässt auch mit Hilfe des dargestellten Ersatzschaltbildes darstellen.

Der Ausgang des Brückenweigs sei unbelastet, so dass für den Strom $I_2 = 0$ gelte. Bekannt sind außerdem folgende Werte:

$\underline{U}_1 = 230\text{V}e^{j0^\circ}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $C_1 = 250\mu\text{F}$, $C_2 = 50\mu\text{F}$, $f = 50\text{Hz}$.

Phase D0: Lesen der konventionalisierten Darstellung

[D1] Berechnen Sie die Scheinwiderstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$. (3 Punkte)

Lösung

Gesucht sind die Scheinwiderstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$. Diese fassen jeweils einen ohmschen Widerstand sowie eine Kapazität aus der gegebenen Schaltung zusammen.

Gegeben ist das Schaltbild einer Brückenschaltung, bestehend aus Widerständen und Kondensatoren. Dazu ist eingezeichnet, welche Elemente jeweils durch die zu berechnenden Scheinwiderstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ zusammengefasst werden sollen. Aus der Vorlesung bekannt ist die Impedanz eines Kondensators C

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{sowie} \quad \omega = 2\pi f$$

und die Impedanz eines Ohm'schen Widerstandes

$$\underline{Z}_R = R.$$

Des Weiteren ist die sich aus einer Reihenschaltung zweier Impedanzen $\underline{Z}_A$ und $\underline{Z}_B$ ergebende Gesamtimpedanz

$$\underline{Z}_{\text{gesamt}} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_B$$

Phase D1 : Berechnung der Impedanzen

Ressourcen:

Rechnen mit komplexen Zahlen,

Lesen eines Ersatzschaltbilds über Analogien zu einer konventionalisierten Darstellung,

Kenntnis der Formel für die Impedanz eines Kondensators (und eines Ohm'schen Widerstandes),

Kenntnis der Formel für die Gesamtimpedanz einer Reihenschaltung,

Gesamtimpedanz einer Parallelschaltung,

Bruchrechnung mit verschachtelten Doppelbrüchen

sowie für eine Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_{\text{gesamt}} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} \right)^{-1}.$$

Abschätzung: Da die beiden gesuchten Scheinwiderstände jeweils einen realen – das heißt Ohm'schen – und einen imaginären – hier kapazitiven – Anteil besitzen, müssen die Scheinwiderstände jeweils Real- und Imaginärteil besitzen.

Rechenweg:

Die zu bestimmende Impedanz $\underline{Z}_1$ umfasst die Reihenschaltung aus Widerstand R_1 und Kondensator C_1 . Damit ist:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 + \frac{j}{j j\omega C_1} = R_1 + \frac{j}{(-1)\omega C_1} \\ &= 100\Omega - j \frac{1}{2\pi 50\text{Hz} 250\mu\text{F}} \\ &\approx 100\Omega - j 12,73 \frac{1}{\frac{1}{\text{s}} \Omega} = 100\Omega - j 12,73\Omega \end{aligned}$$

Die Impedanz $\underline{Z}_2$ umfasst die Parallelschaltung aus R_2 und C_2 . Damit ist:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega C_2} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \\ &= \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \frac{1 - j\omega C_2 R_2}{1 - j\omega C_2 R_2} = \frac{R_2 - j\omega C_2 R_2^2}{1 - j^2 \omega^2 C_2^2 R_2^2} \\ &= \frac{40\Omega - j 2\pi 50\text{Hz} (40\Omega)^2 50\mu\text{F}}{1 + (2\pi 50\text{Hz} 50\mu\text{F} 40\Omega)^2} = \frac{40\Omega - j 8\pi \frac{1}{\text{s}} \Omega^2 \frac{\text{s}}{\Omega}}{1 + \frac{\pi^2}{25} \frac{1}{\text{s}^2} \frac{\text{s}^2}{\Omega^2} \Omega^2} \\ &= \frac{40\Omega}{1 + \frac{\pi^2}{25}} - j \frac{8\pi\Omega}{1 + \frac{\pi^2}{25}} \approx 28,68\Omega - j 18,02\Omega \end{aligned}$$

Validierung: Wie erwartet sind sowohl Real- als auch Imaginärteil sowohl bei $\underline{Z}_1$ als auch bei $\underline{Z}_2$ vorhanden.

Hinweis: Für den weiteren Verlauf der Aufgabe ist es hilfreich, hier durch die komplex-konjugierte Erweiterung die Scheinwiderstände jeweils nach Real- und Imaginärteil zu trennen.

Expertenbearbeitung: Der Experte steigt in (0350) mit der Formel

$$\underline{Z}_1 = R_1 + Z_{C1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1}$$

in die Aufgabenbearbeitung ein, berechnet dann

$$\omega = 2\pi f = 314,14 \frac{1}{\text{s}}$$

und schließlich korrekt

$$\underline{Z}_1 = 100\Omega - j \cdot 1,273\Omega.$$

Er notiert $\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{-j}{\omega C_2}$, was Parallelschaltung bedeutet, und erweitert seine Formel zu

$$\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{-j}{\omega C_2} = \frac{R_2 \cdot \left(-\frac{j}{\omega C_2}\right)}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}}$$

Er kommentiert dann in (0638), dass er diesen Bruch mit dem komplex Konjugierten erweitert und ergänzt entsprechend den Faktor $\left(R_2 + \frac{j}{\omega C_2}\right)$ in Zähler und Nenner. Er löst anschließend die Klammer in Zähler und Nenner auf. Anschließend setzt er die Größen, d. h. Zahlenwerte mit Einheiten, ein und bemerkt so einen zunächst im Nenner vergessenen Summanden. Des Weiteren verwendet er zunächst $F = \Omega^2 s^2$ statt dem korrekten $F = \frac{s^2}{\Omega^2}$, was er auch über die Einheitenkontrolle bemerkt. So berechnet er $\underline{Z}_2$ korrekt.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass er Formeln für Widerstand und Kapazität sowie Reihen- und Parallelschaltung passend zur Situation aufstellen muss, um diesen Aufgabenteil zu lösen.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Es gibt keinen alternative Lösungsweg.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Es können Fehler in den Impedanzformeln auftreten. Diese sind „Grundformeln, die man nicht herleiten kann.“ (vgl. 4000)

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Verwendung von Einheitenkontrollen unter Beachtung der Präfixe. Dabei muss auch beachtet werden, dass auch die Einheiten quadriert werden müssen.

[D2] Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$? (2 Punkte)

Lösung

Gesucht ist die Spannung $\underline{U}_2$, die über dem Scheinwiderstand $\underline{Z}_2$ abfällt. Darüber hinaus ist nach der Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_2$ und der der Gesamtschaltung eingeprägten Spannung $\underline{U}_1$ gefragt.

Gegeben sind die Eigenschaften aus dem vorherigen Aufgabenteil. Dabei werden die ermittelten Scheinwiderstände benötigt. Mit dem aus der Vorlesung bekannten Spannungsteiler

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

kann die Spannung $\underline{U}_2$ errechnet werden, da $\underline{U}_1$ sowie $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ bekannt sind.

Rechenweg über Spannungsteiler:

Spannungsteiler treten bei der Reihenschaltung von zwei Widerständen auf. Es ergibt sich (beispielsweise bei zwei Widerständen)

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

und nach Ohm'schen Gesetz $\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{ges}}}$. Da bei Reihenschaltungen der Strom durch alle Bauteile identisch ist, gilt $\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{R}_2$. Durch Einsetzen von $\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{ges}}}$ erhält man $\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} \cdot \underline{R}_2$. Es ist $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ die Gesamtimpedanz der Schaltung. Damit folgt:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \frac{28,68\Omega - j18,02\Omega}{28,68\Omega - j18,02\Omega + 100\Omega - j12,73\Omega}$$

Der Einfachheit halber wird hier mit den gerundeten Werten aus Aufgabenteil 1 gerechnet.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}_1 \frac{28,68\Omega - j18,02\Omega}{128,68\Omega - j30,75\Omega} = \underline{U}_1 \frac{\sqrt{28,68^2 + 18,02^2}\Omega e^{j \arctan \frac{-18,02}{28,68}}}{\sqrt{128,68^2 + 30,75^2}\Omega e^{j \arctan \frac{-30,75}{128,68}}} \\ &= \underline{U}_1 \frac{33,87\Omega e^{-j32,14^\circ}}{132,30\Omega e^{-j13,44^\circ}} = \underline{U}_1 0,256 e^{-j(32,14^\circ - 13,44^\circ)} \\ &= 230\text{V} e^{j0^\circ} 0,256 e^{-j18,7^\circ} = 58,88\text{V} e^{-j18,7^\circ} \end{aligned}$$

Damit kann der Phasenwinkel φ_2 der Spannung $\underline{U}_2$ bestimmt werden:

$$\varphi_2 = \arg(\underline{U}_2) = \arg(58,88\text{V} e^{-j18,7^\circ}) = -18,7^\circ$$

Der Phasenwinkel der φ_1 der Spannung $\underline{U}_1$ ist:

$$\varphi_1 = \arg(\underline{U}_1) = \arg(230\text{V} e^{j0^\circ}) = \arg(230\text{V}) = 0^\circ$$

Der Phasenwinkel von $\underline{U}_1$ ist gleich Null, da $\underline{U}_1$ reell ist. Für die Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ folgt:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -18,7^\circ,$$

wobei $\underline{U}_2$ der Spannung $\underline{U}_1$ nacheilt, da

$$\varphi_2 = \arg(\underline{U}_2) < \arg(\underline{U}_1) = \varphi_1.$$

Phase D2.1: Bestimmung der Spannung $\underline{U}_2$

Ressourcen:

Umrechnung zwischen Euler'scher und kartesischer Darstellung einer komplexen Zahl, Prinzip des Spannungsteilers

Phase D2.2: Berechnung der Phasenverschiebung

Ressourcen:

Kenntnis der Phasenverschiebung

Expertenbearbeitung: Der Experte notiert in (1538) die Formel für U_2 , welche $U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_1$ ist. In diese setzt er die in Aufgabenteil D1 errechneten Werte für Z_1 und Z_2 ein. Die Phasenverschiebung berechnet er über

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-32,1V}{54,74V}\right) = -30,4^\circ,$$

verwendet also den Quotienten aus Imaginär- und Realteil, vgl. Erläuterung in den mathematischen Hintergründen zu dieser Aufgabe.

In Phase 2 sagt der Experte, dass er hier einen „Spannungsteiler“ verwendet. In (0334) sagt er, dass dieser zur Bestimmung des Eingangs- und Ausgangsverhaltens der Schaltung dient. Er erläutert weiter:

„An der Stelle ist es gut, noch nicht die Werte am Anfang einzusetzen, damit die Zusammenhänge deutlich werden.“

(0334)

Er beschreibt in (0523), dass die Schaltung als „Phasenschieber“ dient, und erläutert weiter, dass man sie für eine Schaltung braucht, die in einer anderen Phase liegt.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Es gibt keinen anderen Weg als über Spannungsteiler

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr: Es können Fehler in den Impedanzformeln auftreten. Diese sind „Grundformeln, die man nicht herleiten kann.“ (vgl. 4000)

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Verwendung von Einheitenkontrollen unter Beachtung der Präfixe. Dabei muss auch beachtet werden, dass auch die Einheiten quadriert werden müssen.

[D3] In welchem Wertebereich kann die Phasenverschiebung zwischen U_1 und U_2 bei dieser Schaltung liegen? (1 Punkt)

Lösung

Gesucht ist der Wertebereich, in dem die Phasenverschiebung zwischen U_1 und U_2 bei dieser Schaltungstopologie liegen kann, sprich wenn R_1 , C_1 , R_2 und C_2 verändert werden können.

Gegeben sind die bekannte Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = \arg(\underline{U}_2) - \arg(\underline{U}_1)$$

und der Spannungsteiler

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_1.$$

Abschätzung: Es ist bekannt, dass ein Kondensator eine Phasenverschiebung von 90° zwischen Kondensatorstrom und Kondensatorspannung bewirkt. Da hier zwei Kondensatoren vorhanden sind, ist damit eine maximale Phasenverschiebungsbreite von 180° vorstellbar. Wir wissen, dass die Phasenverschiebung nicht von der äußeren Spannung abhängt. Würden alle Kapazitäten zu Null, ergäbe sich aus der Schaltung ein reeller Spannungsteiler. Da dieser keine Phasenverschiebung bewirken kann und die eingeprägte Spannung $\underline{U}_1$ reell, sprich „phasenlos“, ist, muss $\varphi_0 = 0^\circ \in \varphi$ gelten.

Rechenweg:

Mit den allgemeinen Regeln der komplexen Rechnung folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \arg(\underline{U}_2) - \arg(\underline{U}_1) = \arg\left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_1\right) - \arg(\underline{U}_1) \\ &= \arg\left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\right) + \arg(\underline{U}_1) - \arg(\underline{U}_1) = \arg\left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\right) \\ &= \arg(\underline{Z}_2) - \arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{aligned}$$

Aus Aufgabenteil D1 ist bekannt, dass

$$\underline{Z}_1 = R_1 - j \frac{1}{\omega C_1}$$

und

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 - j\omega R_2^2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}.$$

Daraus ergibt sich, dass:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} - j \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega R_2^2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2} \right)$$

Ist $R_1 = R_2 = 0$, wird der Realteil zu Null während der Imaginärteil existent bleibt. Gilt hingegen $C_1 \rightarrow \infty$ sowie $C_2 = 0$, wird der Imaginärteil zu Null, während der Realteil existent bleibt. Da der Imaginärteil stets negativ ist, ergibt sich für den Phasenwinkel

$$\arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \in [-90^\circ; 0^\circ].$$

Es gilt ebenfalls

$$\arg(\underline{Z}_2) \in [-90^\circ; 0^\circ].$$

Mit

$$\Delta\varphi = \arg(\underline{Z}_2) - \arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

Phase D3: Ermitteln des möglichen Bereichs des Phasenwinkels

*Ressourcen:
Rechnen mit komplexen Ausdrücken
elektrotechnische Interpretation komplexer Zahlen in Eulerdarstellung*

ergibt sich das theoretische Maximum unter der Voraussetzung, dass $\arg(\underline{Z}_2)$ und $\arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ unabhängig voneinander sind:

$$\Delta\varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$$

Wir prüfen dies nach:

Gilt $C_2 = 0$, so ist $\underline{Z}_2|_{C_2=0} = R_2$ reell und

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)|_{C_2=0} = \left(R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C_1}\right) \in [-90^\circ; 0^\circ].$$

Damit ist:

$$(\Delta\varphi)|_{C_2=0} = (0^\circ - \arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)) \in [0^\circ; 90^\circ]$$

Gilt hingegen $R_2 = 0$, so ist

$$\arg(\underline{Z}_2)|_{R_2=0} = \arg\left(\frac{-j\omega R_2^2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}\right) = -90^\circ$$

während

$$\arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)|_{R_2=0} = \arg\left(R_1 - \frac{j\omega R_2^2 C_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}\right) \in [-90^\circ; 0^\circ]$$

und es folgt

$$(\Delta\varphi)|_{R_2=0} = \left(-90^\circ - \arg(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)|_{R_2=0}\right) \in [-90^\circ; 0^\circ].$$

Folglich ist die genannte Unabhängigkeit gegeben und der Phasenwinkel kann damit tatsächlich im Intervall

$$\Delta\varphi = [-90^\circ; 90^\circ]$$

liegen.

Validierung: Die maximal mögliche Phasenverschiebungsbreite von 180° wurde durch die Rechnung nicht überschritten. Ferner liegt $\varphi_0 = 0^\circ$ innerhalb des möglichen Bereiches, sodass die Abschätzung keinen Widerspruch zur Rechnung ergibt.

Expertenbearbeitung: Der Experte erläutert hierzu in (2226):

„Wir sind nullkapazitiv, d. h. positiv werden wir nicht. Die Extremfälle sind, wenn man einzelne Bauteile bis zu Null herunterbringt. Das heißt, wenn man kein R drin hat, fällt der Nenner raus. Damit wird es unendlich und wir kommen auf 90° . Und wenn man kein C drin hat, ist es ein Ohm'scher Spannungsteiler und damit man bei Null Grad.“

Er notiert $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$.

In Phase 2 erläutert der Experte in (0706), dass die Kondensatoren die einzigen Bauteile seien, die die Phase verschieben können. Er wird unsicher bei seinem Ergebnis und erläutert

„Graphisch ist es am schönsten zu sehen.“

(0752)

In seinen Überlegungen in (1228), welche er nicht zu Ende führt, sagt er auch:

„Der Strom muss hier aber in jedem Fall voreilen.“

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Man kann hier graphisch vorgehen und sich dann klarmachen, was beim Eingang und Ausgang passiert. Oder man stellt eine allgemeine Formel aus und betrachtet dieses für verschiedene Frequenzen. Mit Kenntnissen in der Messtechnik kann man es auch wissen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Der Experte sieht Fehler in der Umrechnung zwischen Betrag und Phase sowie Real- und Imaginärteil und in der Verwendung des Tangens. Als häufigen Fehler beschreibt er, dass der Taschenrechner statt auf Gradmaß auf Bogenmaß eingestellt ist, vgl. (4000).

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Verwendung von Einheitenkontrollen unter Beachtung der Präfixe. Dabei muss auch beachtet werden, dass analog zu Aufgabenteil D2 die Einheiten quadriert werden müssen.

[D4] Welche Frequenz ($f > 0\text{Hz}$) ist zu wählen, damit keine Phasenverschiebung mehr zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ auftritt? (4 Punkte)

Lösung

Gesucht ist die Frequenz, bei der keine Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ auftritt.

Gegeben sind die Schaltungstopologie und die Eigenschaften aus den vorangegangenen Aufgabenteilen.

Rechenweg:

Wir wissen, dass:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_2$$

Ferner ist die Spannung $\underline{U}_1$ reell. Damit die Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ verschwindet – sprich $\underline{U}_2$ auch reell ist –, da im

Phase D4: Bestimmen der Frequenz ohne Phasenverschiebung

*Ressourcen:
Rechnen mit komplexen Ausdrücken
Übersetzen von 'keine Phasenverschiebung' in $\varphi = 0$
Kenntnis der Formel $\omega = 2\pi f$*

Falle $\text{Im } \underline{U}_2 \neq 0$ ein Imaginärteil im Ergebnis erhalten bliebe. Daher muss $\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ reell sein (keinen Imaginärteil haben), also:

$$\text{Im} \left\{ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} &= \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right) \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{j\omega R_2 C_1} j + j\omega C_2 R_1 + \frac{j\omega C_2}{j\omega C_1}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j \left(\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right)} \end{aligned}$$

Damit der Imaginärteil des Terms zu Null wird, muss der Imaginärteil des Nenners zu Null werden:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \text{Im} \left\{ 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j \left(\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right) \right\} = \omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \\ \Leftrightarrow \omega C_2 R_1 &= \frac{1}{\omega R_2 C_1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned}$$

$$2\pi f = \omega = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{100\Omega 40\Omega 250\mu\text{F} 50\mu\text{F}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 7,071 \cdot 10^{-3} \cdot \text{s}} \approx 22,51\text{Hz}$$

Bei $f = 22,51\text{Hz}$ tritt folglich keine Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ auf. Da der Wert der Frequenz nur positiv sein kann, kann hier die negative Lösung der quadratischen Gleichung ignoriert werden.

Hinweis: Wird nicht nur der Imaginärteil des Nenners zu Null gesetzt, muss komplex konjugiert werden und anschließend der Imaginärteil zu Null gesetzt werden. Hierdurch entsteht ein unnötiger und ordentlicher Rechenaufwand.

Expertenbearbeitung: Der Experte steigt in (4403) in die Bearbeitung mit

„Dafür brauche ich die Übertragungsfunktion.“

ein. Er notiert dann:

$$G = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

und setzt dann die Ergebnisse ein, welche in Aufgabenteil D1 angegeben sind. So erhält er schließlich:

$$G = \frac{R_2 - jR_2^2\omega C_2}{(R_2^3\omega^2 C_2 + 2R_2) - j \left(R_2^2\omega C_2 \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) + \frac{1}{\omega C_1} \right)}$$

Er berechnet dann den Imaginärteil dieses Ausdrucks und erhält ein Ergebnis, was ihm zu groß erscheint. Daraufhin erläutert er in (5441):

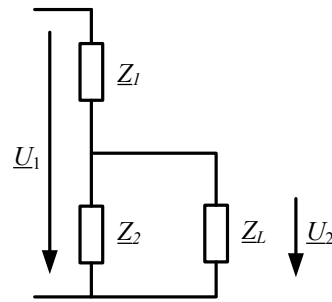


Abbildung 7.3.2: Skizze des Wechselstromkreises mit realer Spule

„Die Übertragungsfunktion G ausschreiben; dann den Imaginärteil berechnen. Diesen dann zu Null setzen und das ω ausrechnen. Ich suche ja die Frequenz, bei der es keinen Imaginärteil gibt; denn es soll ja keine Phasenverschiebung geben.“

In Phase 2 erläutert der Experte, dass hier das Vorgehen aus analogen Aufgaben aus den Übungen verwendet werden kann.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Es gibt keinen alternativen Lösungsweg.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Hier können im Zusammenhang mit der Komplexen Konjugation und im Rechnen mit komplexen Zahlen allgemein auftreten. Er ergänzt:

„Dadurch, dass auch ein handschriftlich beschriebener Zettel zur Prüfung zugelassen ist, neigen die Studenten dazu, sich da die Formeln von ähnlichen Aufgaben drauf zu schreiben und dann einfach die ähnlichste Formel zu nehmen. Kopf aus, Zettel an.“

(4207)

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte nennt keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

Der Ausgang des Brückenzeigs werde nun mit einer realen Spule belastet. Diese Spule könnte mit einer Ersatzimpedanz, also der Zusammenfassung mehrerer Impedanzen zu einer, $\underline{Z}_L = 5\Omega + j10\pi\Omega$ nachgebildet werden. Dieses ist in Abbildung 7.3.2 dargestellt.

[D5] Geben Sie die Induktivität L sowie den Wicklungswiderstand R_L der realen Spule an. (2 Punkte)

Lösung

Gesucht sind die Induktivität und Wicklungswiderstand einer an die Brückenschaltung angeschlossenen realen Spule. Eine Spule besteht oft aus einem aufgewickelten, langen Draht. Man spricht hier von einer 'realen Spule' (statt einer idealen Spule), da aufgrund seiner Länge der Ohm'schen Anteil des Drahtes in der Spule oft nicht vernachlässigt werden kann.

Gegeben ist ein neues Schaltbild, bei dem eine reale Spule ausgangsseitig an die Brückenschaltung angeschlossen. Dieser Ausgang des Brückenzweiges ($\underline{U}_2, \underline{I}_2$) wird nun also belastet. Die Last – also die reale Spule – ist als Scheinwiderstand gegeben.

Rechenweg:

Der gegebene Scheinwiderstand beträgt

$$\underline{Z}_L = 5\Omega + j10\pi\Omega.$$

Wir wissen, dass eine reale Spule in einer Reihenschaltung aus Ohm'schen Widerstand R_L und Induktivität L modelliert wird. Demnach ist

$$\underline{Z}_L = R_L + j\omega L = R_L + j2\pi f L$$

und damit (durch Umstellen):

$$R_L = 5\Omega$$

$$L = \frac{j10\pi\Omega}{j2\pi f} = 0,1\text{H} \quad \text{mit } f = 50\text{Hz}$$

Phase D5: Bestimmung der Induktivität und des Wicklungswiderstandes der realen Spule

*Ressourcen:
Lesen des Ersatzschaltbildes einer realen Spule*

Expertenbearbeitung: Der Experte steigt in (5713) in die Bearbeitung ein mit

„Geben Sie den Wicklungswiderstand an. Na, das sind die 5Ω .“

und notiert $R_L = 5\Omega$. Dann notiert er:

$$L = \frac{10\pi\Omega}{100\pi\frac{1}{\text{s}}} = 0,1\frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 100\text{mH}.$$

In Phase 2 erläutert der Experte ab (2000), dass hier eine „reale Anwendung des Phasenschiebers“ gezeigt wird. Er sagt:

„Die Induktivität, die angeschlossen wird, macht für sich schon eine ziemlich große Phasenverschiebung. Denn wenn man sieht: 5Ω und 10π , dann sind wir schon bei einer Phasenverschiebung von 70° oder so. Vorne ist das normale Stromnetz mit 230V dran.“

(2019)

Er sagt noch, dass eine Unklarheit darüber besteht, ob es eine Reihen- oder Parallelschaltung ist, wobei er entscheidet, dass es eine Reihenschaltung ist aufgrund des Aufwands bei der Berechnung in einer Klausuraufgabe, vgl. (2216). Des Weiteren erläutert er:

„Das Ganze ist ja nur ein Ersatz für die Realität; die beiden Modelle ließen sich auch – wenn ich das richtig in Erinnerung habe – ineinander umrechnen. In der Realität hat man weder eine reine Reihen-, noch eine reine Parallelschaltung, sondern vielmehr eine Mischung von beiden.“

(2216)

In (2712) ergänzt er noch:

„Induktivität und Wicklungswiderstand sind eigentlich nur dazu da, um es mal berechnet zu haben.“

Dieses begründet er damit, dass „der wirkliche Aha-Effekt“ (2712) nur dann passieren würde, wenn die Phasenverschiebung größer ist, denn dann heben sich die Wirkungen gegenseitig auf.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Es gibt keinen alternativen Lösungsweg.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Hier können Fehler durch die Aufgabenstellung auftreten, da die Vorbemerkung zu D5 nun bei allen weiteren Aufgabenteilen gilt.

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte sieht keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

[D6] Bestimmen Sie den Strom I_1 , den Leistungsfaktor, sowie die von der Schaltung aufgenommene Wirk-, Schein- und Blindleistung. (5 Punkte)

Lösung

Gesucht sind der Strom $\underline{I}_1$, der Leistungsfaktor, sowie Wirk-, Schein- und Blindleistung.

Gegeben ist die Schaltung mit angeschlossener induktiver Last. Diese Schaltung verdeutlicht den realen Anwendungsfall der Schaltung: Die Brückenschaltung soll verhindern, dass eine induktive – oder allgemein nicht-reelle – Last in das Versorgungsnetz, hier durch die Spannung $\underline{U}_1$ repräsentiert, propagiert. Die Schaltung soll also die Blindleistungsaufnahme minimieren.

Rechenweg:

Den Strom berechnen wir über

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{Ersatz}}}$$

Wir verwenden, dass eine Reihenschaltung von $\underline{Z}_1$ und der Parallelschaltung von

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}$$

vorliegt. Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{Ersatz}} &= \underline{Z}_1 + \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_L} \right)^{-1} \\ &= 100\Omega - j12,73\Omega + \left(\frac{1}{28,68\Omega - j18,02\Omega} + \frac{1}{5\Omega + j10\pi\Omega} \right)^{-1} \\ &= 126,46\Omega + j0,28\Omega = 126,46\Omega e^{j0,37^\circ}\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\underline{I}_1 = \frac{230V}{126,46\Omega e^{j0,37^\circ}} = 1,82A e^{-j0,37^\circ}$$

Damit können wir die **komplexe** Scheinleistung $\underline{S}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1 = 418,6W e^{-j0,37^\circ} \\ &= 418,59W - 2,7W \cdot j\end{aligned}$$

Wir wissen, dass:

$$\underline{S} = |\underline{S}| e^{j\varphi} = P + jQ$$

Hierbei ist $\underline{S}$ die komplexe Scheinleistung, $|\underline{S}|$ die Scheinleistung, φ der Phasenwinkel, P die Wirkleistung und Q die Blindleistung. Wir können damit ablesen:

$$|\underline{S}| = 418,6W$$

$$\varphi = -0,37^\circ$$

$$P = 418,59W = \text{Re}(\underline{S}) = U \cdot I \cos\left(\frac{|P|}{S}\right)$$

$$Q = -2,7W = \text{Im}(\underline{S}) = U \cdot I \sin\left(\frac{|P|}{S}\right)$$

Phase D6: Bestimmung verschiedener Leistungsgrößen

Ressourcen:

Rechnen mit komplexen Zahlen,

Gesamtwiderstand einer Reihen- bzw. Parallelschaltung,

Kenntnis der Definitionen von Leistungsfaktor, Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Der Leistungsfaktor ergibt sich als

$$\lambda = \frac{|P|}{|S|} = \cos \varphi = \cos(-0,37^\circ) \approx 0,99.$$

Validierung: Es gilt $P \leq S$ und $Q \leq S$, aufgrund des Zusammenhangs über den Satz des Pythagoras. Dementsprechend gilt ebenfalls:

$$0 \leq \varphi = \frac{|P|}{S} \leq 1$$

Expertenbearbeitung: Am Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteil D6 in (5827) notiert der Experte

$$P_1 = \operatorname{Re}\{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1\} = 52,9\text{W}$$

und kommentiert dieses mit

„Oben fließt nur der eine Strom hinein.“

(6000)

In (6048) sagt er dann „Und jetzt der Imaginärteil.“ und notiert

$$Q_1 = \operatorname{Im}\{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1\} = 0,667\text{W}.$$

In (6110) sagt er dann „Scheinleistung per Pythagoras“ und notiert

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 52,9\text{W}.$$

In (6215) ist er unsicher bei der Berechnung des Leistungsfaktors und ob er $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{P}{S}$ ist und welche Bezeichnung üblich ist. Er notiert dann:

$$f_L = \frac{P_1}{S_1} = \frac{52,9\text{W}}{52,9\text{W}} = 1,$$

wobei dann der Studienleiter die Richtigkeit der Formel bestätigt.

In Phase 2 sagt der Experte, dass der Strom über das Ohm'sche Gesetz berechnet werden kann. Er bezeichnet die Formeln für Wirk-, Blind- und Scheinleistung als die „Grundformeln der Leistungsberechnung“, vgl. (2356). Überdies sagt er, dass er die Berechnung des Leistungsfaktors nach hinten gesetzt hätte, da man dazu Wirk- und Scheinleistung benötigt.

Zusätzliche Informationen des Experten:

Alternative Lösungsmöglichkeiten für diesen Aufgabenteil: Man kann hier mit der Scheinleistung beginnen und dieses in Wirk- und Blindleistung zerlegen.

Typische Fehler von Studierenden nach dem ersten Studienjahr:

Verwechslung der Formeln

Möglichkeiten zur Überprüfung der Ergebnisse: Der Experte sieht keine Möglichkeiten zur Validierung der Ergebnisse.

Variationen der Aufgabe:

Der Experte nennt in (6301) folgende Möglichkeiten zur Variation der Aufgabe: Einerseits wäre es möglich, *Umkehraufgaben* zu stellen, bei denen Ausgangsgrößen aus den Ergebnissen berechnet werden müssen. Andererseits könnte er sich auch eine reale Einbettung des in der Aufgabe betrachteten „Phasenschiebers“ vorstellen, die er mit

„Wir haben eine Halle mit Maschinen und müssen dafür sorgen, dass davon am Netz vorne nichts ankommt. Was für Kondensatoren müssen wir da einbauen?“

beschreibt.

7.4 Beantwortung der ersten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die erste Forschungsfrage,

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

für Aufgabe D beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

1.1 Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?

Die mathematischen Kompetenzen beinhalten in dieser Aufgabe das Übertragen von Schaltungstopologien in mathematische Ausdrücke. Dabei müssen einerseits elektrotechnische Strukturen wie Spannungsteiler oder Brückenschaltungen und andererseits Reihen- oder Parallelschaltungen beachtet werden. Dieses hat Einflüsse darauf, wie die einzelnen Summanden miteinander verknüpft werden müssen, wodurch sich Doppelbrüche ergeben.

Die in den mathematischen Ausdrücken auftretenden Zahlen sind – aufgrund des betrachteten Wechselstroms – komplex, also ein Element der komplexen Zahlen, wobei – wie in den anderen Aufgaben auch – Größen betrachtet werden, d. h. Zahlenwerte mit Einheiten. Aus diesem Grund müssen Darstellungswechsel durchgeführt werden, um bestimmte Rechenoperationen durchzuführen zu können, da beispielsweise die Addition und Subtraktion nur in der kartesischen Darstellung zu Vereinfachungen führen können, während zum Potenzieren bzgl. des Aufwands die Eulerdarstellung einer komplexen Zahl am besten ist. Die dritte Darstellung, die Polardarstellung, dient zur Überführung der beiden Darstellungen, aber erlaubt beispielsweise Aussagen über die Winkel in D3. Durch das Auftreten von Brüchen (einschließlich Doppelbrüchen) müssen die Studierenden auch Regeln für die Division komplexer Zahlen in kartesischer Darstellung (unter Verwendung des komplex Konjugierten) sowie in Eulerdarstellung (eine Division führt zu einer Subtraktion der Winkel gemäß Potenzgesetzen) beherrschen.

In D6 müssen die Studierenden Zusammenhänge zwischen Scheinleistung S , Wirkleistung P und Blindleistung Q über den Satz des Pythagoras ausdrücken,

$$S^2 = P^2 + Q^2,$$

und können diesen beispielsweise direkt für eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil einsetzen, denn P ist der Realteil von S , welchen man über den Cosinus erhält, und Q analog der Imaginärteil, welchen man über den Sinus erhält. Es sind allerdings auch – gerade durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras – andere Reihenfolgen in der Rechnung möglich.

Der Experte nennt im Experteninterview die folgenden von den Studierenden erwarteten Kompetenzen: Die beiden ersten Teilaufgaben D1 und D2 dienen dazu, Größen zu berechnen, welche in den folgenden Aufgabenteilen benötigt werden. Die Aufgabe dient des Weiteren zum Erlernen der Berechnung von komplexwertigen Größen, vgl. zum Beispiel (0523), wobei der Experte kritisiert, dass durch das Einsetzen von Zahlenwerte die Zusammenhänge verloren gingen, vgl. ebenfalls (0523). Allgemein soll ein Abfragen des Lernstands zu komplexer Wechselstromrechnung stattfinden, vgl. (0743), und dabei gleichzeitig Herangehensweisen ohne

Verwendung von gewöhnlichen Differentialgleichungen eingeübt werden.

1.2 Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?

Mögliche Fehler ergeben sich hier durch die Arbeit mit den komplexen Größen, d. h. mit komplexen Zahlen und deren Einheiten. Das Rechnen mit komplexen Zahlen schließt einerseits die oben näher erläuterten Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen mit ein, aber andererseits auch Fehler durch die Vermischung von Doppelbrüchen und daher Divisionen komplexer Zahlen unter Verwendung des komplex Konjugierten. Weitere Fehler können als Ursache haben, dass die Studierenden die benötigten Formeln nicht kennen, oder missverstehen, dass sie die Anmerkungen vor D5 in allen weiteren Aufgabenteilen benötigen. Des Weiteren sieht der Experte noch als Fehlerursache, dass der Taschenrechner statt auf Gradmaß auf Bogenmaß eingestellt ist.

Problemstellen ergeben sich in dieser Aufgabe durch die Mathematisierung der Schaltungstopologie und durch die Verwendung komplexer Zahlen. Bei der Mathematisierung der Schaltungstopologie muss beachtet werden, ob ein Spannungsteiler oder eine Brückenschaltung vorliegt, aber auch ob es eine Reihen- oder eine Parallelschaltung gibt. Dadurch ergeben sich bei der Verknüpfung der Werte der Bauteile in den mathematischen Formeln ganz unterschiedliche Ausdrücke bzw. andere Gestalten der auftretenden Doppelbrüche, vgl. theoretische Hintergründe am Anfang des Kapitels.

1.3 Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

In diesem Abschnitt werden normative Beschreibungen der Kompetenzen vorgenommen, welche bzgl. des im Rahmen von der Aufgabenanalyse von Aufgabe A gegliedert sind:

Mathematisierung:

Die Unterschiede zur Mathematisierung im Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) sind ähnlich wie in Aufgabe A, dass hier keine Modelle selbst entwickelt werden müssen, dass die Mathematisierung auch hier die Übersetzung konventionalisierter Darstellungen in mathematische Ausdrücke beinhaltet. Dabei treten hier – in Ergänzung zu Aufgabe A – verschiedene Typen von Schaltungen (Reihen- und Parallelschaltung) sowie die Betrachtung von Wechselstrom, welcher hier für die Notwendigkeit der Betrachtung komplexer Größen sorgt. Die vier solchen Übersetzungen sind in Tabelle 7.4 dargestellt und folgen den Regeln, welche in dem Abschnitt zu den elektrotechnischen Grundlagen in diesem Kapitel vorgestellt wurden.

Bei der Bestimmung des Wertebereichs der Phasenverschiebung müssen die Phasenverschiebungen für die einzelnen Bauteile betrachtet werden, welche über Intervalle von Winkel beschrieben werden und in Aufgabenteil D3 zur Bearbeitung notwendig sind. Diese müssen anschließend mengentheoretisch vereinigt werden.

Darüber hinaus können im Rahmen des letzten Aufgabenteils Analogien zu Gleichungen im Bereich des Gleichstroms und zum Satz des Pythagoras verwendet werden (das Unterstreichen einer Größe bedeutet, dass sie komplexwertig ist, siehe unten):

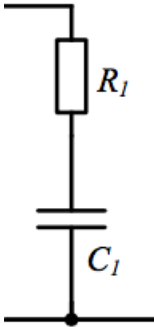
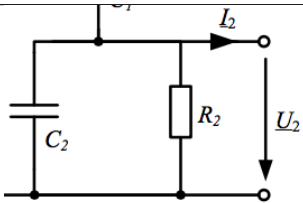
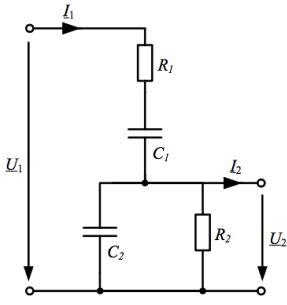
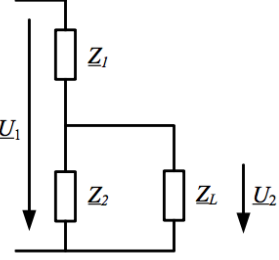
Konventionalisierte Darstellung	Formel
	Reihenschaltung aus R_1 und C_1 : $R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$
	Parallelschaltung aus R_2 und C_2 : $\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}$
	Spannungsteiler für $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$: $\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}_1$
	Gesamtimpedanz aus $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_L$: $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}$

Tabelle 7.4.1: Übersetzung der konventionalisierten Darstellungen in mathematische Ausdrücke

- Das Ohm'sche Gesetz $U = R \cdot I$ (U Spannung, I Strom, R Widerstand) kann übersetzt werden in $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ (U Wechselspannung, I Wechselstrom, Z
- Der Zusammenhang zwischen den Leistungsgrößen S , P , und Q kann über den Satz des Pythagoras dargestellt werden, da $S^2 = P^2 + Q^2$ gilt. Das kann auch geschrieben werden als:

$$S^2 = (UI)^2 = \underbrace{(UI \cos(\varphi))^2}_{\text{Realteil von } UI} + \underbrace{(UI \sin(\varphi))^2}_{\text{Imaginärteil von } UI}$$

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten:

Ein erstes, besonderes Merkmal des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens ist die Verwendung einer in der Mathematik unüblichen Notation: Wenn ausgedrückt werden soll, dass eine Zahl $x \in \mathbb{C}$ ist, wird diese Zahl unterstrichen, d. h. es wird $\underline{x}$ geschrieben. Des Weiteren wird j anstatt i als Bezeichnung für die komplexe Einheit, welche eine Lösung von $i^2 = -1$ ist, verwendet. Die Verwendung komplexer Zahlen zur Beschreibung von Wechselstrom beruht auf der Arbeit Quade (1937).

Den Hauptteil des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens bildet hier das Rechnen mit komplexen Zahlen, einerseits in der Ausführung konkreter Rechenoperationen (insbesondere der Division komplexer Zahlen unter Verwendung des komplex Konjugierten) und andererseits in der Umrechnung von einer kartesischen Darstellung der komplexen Zahl in eine Eulerform (z. B. in Aufgabenteil D3). An mehreren Stellen hilft eine Trennung ein Real- und Imaginärteil (z. B. in D4) und damit verbundene Koeffizientenvergleiche zu anderen Zahlen in derselben Darstellung (z. B. in D5).

Validierung:

Im Gegensatz zur Validierung nach dem Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) gibt es hier – wie in Aufgabe A – keine Hinterfragung der Annahmen, sondern eine Überprüfung der Ergebnisse mit ähnlichen Methoden wie in Aufgabe A. Zur Validierung können vor allem die Einheiten der auftretenden Größen eingesetzt werden. So kann in D1 F (also Farad) als $\frac{As}{V}$ dargestellt werden, ω als $\frac{1}{s}$ und Ω als $\frac{V}{A}$. Auf diese wird die Zieleinheit für den Widerstand, also Ω , erhalten. Die Leistung im letzten Aufgabenteil ergibt sich direkt als W (also Watt), welche als das Produkt aus Volt und Ampere dargestellt werden kann. Darüberhinaus sind Umrechnungen unter Verwendung der SI-Basiseinheiten bei der Einheit H (also Henry) möglich. Sie kann auf die folgende Weise dargestellt werden:

$$\frac{\Omega}{\frac{1}{s}} = \frac{\frac{V}{A}}{\frac{1}{s}} = \frac{Vs}{A} = H$$

Darüber hinaus ergibt sich, dass die Impedanz, welche sich über die komplexen Spannungen ergibt, auch eine komplexe Zahl ist und daher einen Real- und Imaginärteil haben muss. Durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras kann man außerdem sehen, dass $P \leq S$ und $Q \leq S$ gelten muss.

7.5 Vergleichende Analyse der Lösungsprozesse der Studierendenteams zu Teilaufgaben

Im folgenden steht G. . . für die Gruppenbezeichnung des Studierendenpaars. Innerhalb der Gruppen steht P. . . für die einzelnen Studierenden. Es gab bei Aufgabe D drei Studierendenpaare:

7.5.1 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D1

[D1] Berechnen Sie die Scheinwiderstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$. (3 Punkte)

G1 : P1 steigt in (0335) in die Bearbeitung mit „Erstmal sind nur Teilimpedanzen“ ein. P2 sagt anschließend in (0347), dass „die obere“ eine Reihenschaltung aus R_1 und C_1 ist. Daraufhin notiert P1 die Formel

$$\underline{Z}_1 = R_1 + Z_{C1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1}$$

und P2 schlägt in (0407) vor, dass sie Werte einsetzen sollten. Daraufhin tippen sie die Zahlen ein. In (0447) meint P2, dass er „jetzt nur den Betrag und Phase“ hätte und nach Einsetzen kommen sie auf das richtige Ergebnis. Sie geben dann die Formel für $\underline{Z}_2$ an, also

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}},$$

welches P1 in (0628) mit $j\omega C_2$ erweitern möchte. So kommen sie auf $\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{j\omega R_2 C_2 + 1}$ und berechnen mit dem auf komplexe Zahlen eingestellten Taschenrechner den korrekten Wert für $\underline{Z}_2$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise entspricht der Vorgehensweise in der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** Die Studierenden untersuchen zunächst physikalisch die Schaltungstopologie, um damit den passenden Ansatz zu finden, in dem sie die auftretenden Reihen- und Parallelschaltungen identifizieren.
- **{A4}** Sie vollziehen einen Darstellungswechsel, um einen Betrag (entsprechend Norm) und eine Phase (entsprechend Winkel) der komplexen Zahl zu erhalten.
- **{B3}** P1 und P2 formen den Nenner um, um ihn einfacher berechnen zu können, allerdings ohne eine Verwendung des komplex Konjugierten.

G2 : P1 leitet die Aufgabe ein mit

„Wenn man so möchte, haben wir einen Spannungsteiler. Oder siehst du eine Brückenschaltung? “

(0112)

Anschließend notiert er die Formel

$$\underline{Z_1} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

und ergänzt

„ $\underline{Z_1}$ ist eine Reihenschaltung, d. h. der Widerstand R_1 ist in Reihe zur Kapazität. (...) Als zweites kannst du die Parallelschaltung aus C_2 und R_2 machen.“

P2 notiert in (0330)

$$\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \dots}$$

und P1 ergänzt zu

$$\underline{Z_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}.$$

P1 erweitert dann mit R_2 und formt den Bruch zu

$$\frac{R_2}{1 + R_2 j\omega C_2}$$

um, vgl. (0350). Er kommentiert in (0350):

„Somit hat man schöne kompakte Terme.“

In (0430) setzt P1 in die Formel für $\underline{Z_2}$ ein und erläutert in (0523):

„Wenn man sich hier die Einheiten anschaut, haben wir $\frac{1}{s}$. Farad ist $\frac{As}{V}$, haben wir also im Nenner A/V stehen und da wir den Kehrwert bilden, kommen wir auch auf die Einheit Ohm.“

Er erläutert dann noch weiter:

„Ach so, du hast es nicht komfortabel ausgerechnet. Der Kehrwert von j ist $-j$.“

Sie kommen so auf das richtige Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Die Studierenden argumentieren explizit mit einer Vereinfachung der Terme.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P1 startet mit einer Fallunterscheidung (Spannungsteiler oder Brückenschaltung), um einen passenden Ansatz für die Aufgabe zu finden.
- **{A1}** P1 erkennt die vorliegende Mischung aus Reihen- und Parallelschaltung und setzt entsprechend mit den Formeln an. Er spielt das E-Spiel „Mapping Meaning to Mathematics“.
- **{B3}** P1 benennt möglichst einfache mathematische Terme als Ziel, vgl. „kompakt“ (nicht im innermathematischen Sinne zu verstehen) sowie „komfortabel“.
- **{C1}** führt bei dem Ergebnis eine Einheitenkontrolle durch.

G3 : P2 beginnt die Aufgabenbearbeitung in (0024) mit

„Erstmal auf Komplex umschalten. Was wollten denn die denn?“

und geht anschließend die gegebenen Daten in der Aufgabe durch. Dabei nennt er jeweils das Bauteil und die zugehörige Einheit der zugrundeliegenden Größe. In (0209) und (0233) klärt er, dass $\frac{1}{j} = -j$ bzw. Mikro für 10^{-6} steht. Währenddessen betrachtet P1 den Aufbau der Schaltung, vgl. „Ja, R_1 in Reihe“ in (0206) bzw. (0324):

„ Z_1 ist ja die Zusammenfassung von ... aber das Ganze bezieht sich doch auf das alles, oder“

Daraufhin reagiert P2 in (0330) mit:

„Ich wollt schon gerade sagen. Also Z_1 sieht bei mir so aus, als wenn da C_1 und R_1 gemeint sind und Z_2 die Parallelschaltung der beiden.“

Dann klären P1 und P2 die Darstellung des Ergebnisses, vgl. (0351):

„Also kartesisch willst du es eigentlich nicht haben. Also als e hoch.“

Danach gibt es Schwierigkeiten bei der Eingabe in den Taschenrechner, so dass P1 und P2 unterschiedliche Ergebnisse erzielen. Schließlich erzielen P1 und P2 die richtigen Ergebnisse.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise entspricht dem Lösungsweg in der SEL. Die Studierenden überlegen explizit, welcher Darstellung der komplexen Zahl in diesem Zusammenhang am sinnvollsten ist.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 trifft Vorbereitungen zur Aufgabe und untersucht, was gegeben ist im Sinne von Polya (1949). Dabei betrachtet er die Daten bzw. Größen, die vorliegenden Bauteile, die Einheiten der Größen, Umrechnungen bei komplexen Zahlen und mit Zehnerpotenzen sowie dass er den Taschenrechner auf komplexe Rechnung umstellen muss. P1 ergänzt dann noch in den Überlegungen die Schaltungstopologie, konkret, dass R_1 in Reihe ist.

- **{B3}** Die Studierenden diskutieren die beste Form der Darstellung der komplexen Zahl, also ob sie eine kartesische Darstellung oder die Euler-Darstellung mit Hilfe der Exponentialfunktion verwenden sollen.
- **{B3}** Es treten Schwierigkeiten bei der Eingabe der komplexen Zahlen in den Taschenrechner auf.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D1

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten hier bei der Eingabe der komplexen Zahlen in den Taschenrechner auf. Die zwei hauptsächlichen Problemstellen für die Studierenden sind in diesem Aufgabenteil die Analyse der Schaltungstopologie, die für den korrekten Ansatz notwendig ist, sowie die korrekte Arbeit mit komplexen Zahlen. Dieses schließt hier Darstellungswechsel mit ein, welche notwendig sind, um bestimmte elektrotechnische Größen bestimmen zu können. Dabei bedenken die Studierenden auch jeweils, wie sie die einfachste Form der komplexen Ausdrücke erhalten können und formen hierzu beispielsweise den Nenner geeignet um.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Als Einstieg in die Aufgabe beginnt ein Paar mit der Fallunterscheidung „Spannungsteiler oder Brückenschaltung“, um einen passenden Ansatz für die Aufgabe zu finden. Ein Paar untersucht, ob eine Reihen- oder Parallelschaltung oder eine Mischung davon vorliegt. Ein Studierendenpaar untersucht, was gegeben ist im Sinne von Polya (1949). Dabei betrachtet es die Daten bzw. Größen, die vorliegenden Bauteile, die Einheiten der Größen, Umrechnungen bei komplexen Zahlen und mit Zehnerpotenzen sowie dass der Taschenrechner auf komplexe Rechnung umgestellt werden muss.

{A2} Die Studierenden untersuchen zunächst physikalisch die Schaltungstopologie und identifizieren so die auftretenden Reihen- und Parallelschaltungen.

{A4} Die Studierenden vollziehen einen Darstellungswechsel, um einen Betrag (entsprechend Norm) und eine Phase (entsprechend Winkel) der komplexen Zahl zu erhalten, welche direkt zur Bestimmung der elektrotechnischen Größen benötigt werden.

{B3} Ein Studierendenpaar formt den Nenner um, um ihn einfacher berechnen zu können. Ein Paar formuliert als Ziel, dass die mathematischen Terme „kompakt“ (nicht im innermathematischen Sinne zu verstehen) sowie „komfortabel“ sein sollen. Dabei diskutieren die Studierenden, welche Darstellungsform der komplexen Zahl hier die nützlichste ist. Bei einem Paar treten Schwierigkeiten bei der Eingabe der komplexen Zahlen in den Taschenrechner auf.

{C1} Ein Paar führt bei dem Ergebnis eine Einheitenkontrolle durch.

7.5.2 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D2

[D2] Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$? (2 Punkte)

G1 : P2 steigt in (0736) in die Bearbeitung ein mit

„Bei D2 können wir ja einfach Spannungsteiler“

P1 reagiert in (0750) mit „Also $\underline{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \underline{U}_1$ “ und sie kommen so auf den richtigen Betrag, aber einen falschen Winkel. (Dieser Fehler wird bei der Bearbeitung von Aufgabenteil D3 korrigiert.)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe über den Weg aus der SEL.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 startet die Bearbeitung der Aufgabe mit dem Schlagwort „Spannungsteiler“. Dieses gibt den Weg der Rechnung vor, welche von den Studierenden nicht näher erläutert wird.
- **{B3}** Die Studierenden wenden Regeln zur Algebra komplexer Zahlen an.

G2 : P2 beginnt die Aufgabenbearbeitung in (0840) mit der Formel

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

P1 erläutert hierzu in (0900):

„ $U_2 = U_1 \cdot$ den Teilwiderstand durch Gesamtwiderstand und wir haben eine Reihenschaltung vorliegen, wieso sich die Spannung aufteilt. Dieses gilt im Übrigen nur, weil der Strom $I_2 = 0$ beträgt.“

P1 setzt dann Werte ein und speichert bei der Rechnung das Ergebnis für $\underline{Z}_2$ im Taschenrechner, vgl. (0958). In (0958) erläutert er weiter:

„Hierbei sieht man, dass sich das Ohm kürzt.“

So kommen sie auf die korrekte Phasenverschiebung. P2 fragt dann in (1332):

Aber wieso hast du hier 0 – [den Wert].“

P1 erläutert daraufhin:

„Ich bin der Meinung, dass sich die Differenz so bildet. Das würd nicht auffallen, wenn wir addieren in diesem Beispiel. Bei anderen Winkeln würde es schon auffallen, wenn U_1 ein Winkel vorgegeben hat. Die Phasenverschiebung hätte man sonst auch durch $\frac{U_1}{U_2}$ ermitteln können, denn dann würde man drauf kommen, dass es U_1 durch den Winkel von U_2 und das wäre, wenn man die Exponentialgesetze anwendet, würde man den Winkel subtrahieren von U_1 , damit würde man den oberen Term herausbekommen.“

(1353)

Sie kommen schließlich zum richtigen Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe über den Weg aus der SEL. Es treten dabei Schwierigkeiten im Zusammenhang mit den verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen auf.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P1 erläutert die Formel in einer Mischung aus mathematischer Formel und Interpretation der weiterer, nicht explizit genannter Formelbestandteile im elektrotechnischen Kontext, vgl. „ U_1 · den Teilwiderstand“. Damit verbindet er direkt Mathematik und Elektrotechnik.
- **{A3}** P2 beginnt die Aufgabenbearbeitung mit dem Heranziehen der passenden Formel.
- **{B3}** Es treten Schwierigkeiten im Bereich der korrekten Notation des Ergebnisses für die Differenz und deren Vorzeichen auf. P1 weist im Zusammenhang auf den mathematischen Hintergrund hin, konkret auf das zu verwendende Potenzgesetz

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \text{ bzw. } \arg(e^{x-y}) = x - y = \arg\left(\frac{e^x}{e^y}\right).$$

- **{C1}** Bei dem Ansatz wird die Einheitenkontrolle mitbedacht.

G3 : P2 leitet die Aufgabenbearbeitung in (1035) ein mit:

„Was haben wir denn gegeben? Haben wir den Strom? Wir haben U_1 gegeben und wir haben den Gesamtwiderstand, den Strom können wir uns erschließen. Also I_1 können wir uns erschließen. Spannung U_2 . . . also ich würde einfach sagen, das U haben wir gegeben, Gesamtwiderstand kommen wir auf I .“

Anschließend überlegen P1 und P2, wie sie den Gesamtwiderstand berechnen können. In (1145) beschreibt P2 die folgende Vorgehensweise:

„Ne ne, du hast die Gesamtspannung und den Gesamtwiderstand gleich, den können wir zusammenfassen. Dann machst du denn Strom hier damit. Der Strom fließt so stark wie er ist hier durch, d. h. mit dem Widerstand hier und dem Strom hast du die Spannung darüber. Und dann haben wir die Spannung.“

Daraufhin ziehen P1 und P2 das Ohm'sche Gesetz heran und P2 sagt:

„ $I = \frac{U}{R}$, $R_{\text{ges}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$. Da fällt mir gerade auf, ich habe überall die Einheiten dahinter vergessen. Die schreibe ich jetzt noch dahinter.“

(1209)

Dann setzen sie ein und berechnen die Werte. Nach der Rechnung sagt P1 in (1538):

„Das hätte man auch gleich ablesen können, ja. Ja stimmt, wenn man noch einmal hingucken würde, dann hätte man das ablesen können.“

Daraufhin sagt P2 in (1552):

„Ähm, was wollten wir weitermachen? Ach ja, genau – I jetzt über Z_1 und dann haben wir U . Wir wollen wir das nennen? U_1 ist ja da schon vergeben, und U_2 ist ja dahinter. Einfach U_3 ? Wenn Sie den U genannt hätten, hätte ich den U_1 und U_2 genannt. Einfach U_3 ?“

Zur Phasenverschiebung sagt P2 in (2024):

„Eigentlich nur die Winkel betrachten. Das eine ist. . . Moment. . . U_2 und U_1 . Die Phasenverschiebung ja.“

Daraufhin bildet er die Differenz zwischen U_2 und U_1 und bestimmt die Phasenverschiebung korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe mit dem Rechenweg aus der SEL korrekt. Es gibt längere Vorüberlegungen zu der Vorgehensweise und der Betrachtung von Gesamt- bzw. Teilgrößen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** P2 bedenkt am Anfang, was gegeben ist, und geht dabei sämtliche vorkommenden Größen durch.
- **{A1}** Die Studierenden durchdenken ausführlich, wie sie ihre selbstgewählten Benennungen wählen, um für eine weitere Verwendung direkte Bezüge herstellen zu können.
- **{A2}** Mit Hilfe der auftretenden physikalischen Mechanismen überlegen sie, wie sie in der Aufgabe ansetzen können, und entwickeln dann einen Plan dafür.
- **{A3}** Beim Heranziehen der Ohm'schen Gesetzes verwenden sie die reelle Form davon, vermischen diese aber mit der komplexen Darstellung der Impedanzen Z_i .
- **{B1}** P1 erkennt erst nach der Bearbeitung einen Alternativweg für die Rechnung. Dieser kann sowohl als Vereinfachung als auch als Überprüfungsmöglichkeit für den von den Studierenden gewählten Weg dienen.
- **{C1}** P2 möchten in den Rechnungen die Einheiten hinzufügen – wahrscheinlich für eine spätere Validierung.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D2

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Fehler treten hier im Zusammenhang mit den verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen und deren Umrechnung auf. Beim Heranziehen des Ohm'schen Gesetzes wird die reelle Form $U = R \cdot I$ statt einer Version mit einer Impedanz Z herangezogen, die hier relevant wäre, wodurch hier die Konzepte Gleich- und Wechselstrom vermischt werden. Die Problemstelle für die Studierenden ist in diesem Aufgabenteil die Zuordnung mit dem Schlagwort „Spannungsteiler“, mit dessen Hilfe der mathematische Ansatz gefunden werden kann. Dann müssen wieder Regeln der Algebra komplexer Zahlen angewendet werden. Einem Studierendenpaar ist unklar, wie sie ihre Ergebnisse korrekt notieren können und z. B. argumentieren können, warum sich bei einer Division die Differenz der Winkel ergibt, was aus Potenzgesetzen folgt.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1}** Ein Paar startet die Bearbeitung der Aufgabe mit dem Schlagwort „Spannungsteiler“. Dieses gibt den Weg der Rechnung vor, welche von den Studierenden nicht näher erläutert wird. Die Studierenden durchdenken ausführlich, wie sie ihre selbstgewählten Benennungen wählen, um für eine weitere Verwendung direkte Bezüge herstellen zu können. Ein Paar bedenkt am Anfang ausführlich, was gegeben ist, und geht dabei sämtliche vorkommenden Größen durch.
- {A2}** Die Studierenden nutzen physikalische Mechanismen, um einen Ansatz für die Aufgabe zu finden. Bei der Beschreibung der Formel vermischen sie Mathematik und Physik: Ein Beispiel betrachtet in seinen Aussagen beispielsweise U_1 den Teilwiderstand. . . und ersetzt Letzteres direkt durch den korrekten Bruch.
- {A3}** Die Studierendenpaare ziehen relevante Formeln an. Ein Paar verwendet dabei die reelle Form des Ohm'schen Gesetzes, vermischt dieses aber mit der komplexen Darstellung der Impedanzen Z_i .
- {B1}** Ein Studierendenpaar erkennt nach der Rechnung einen Alternativweg für die Rechnung. Dieser kann sowohl als Vereinfachung als auch als Überprüfungsmöglichkeit für den von den Studierenden gewählten Weg dienen.
- {B3}** Die Studierenden wenden Regeln zur Algebra komplexer Zahlen an. Dabei treten bei einem Studierendenpaar Schwierigkeiten im Bereich der korrekten Notation des Ergebnisses für die Differenz und deren Vorzeichen auf. Dieses klärt sich, als sie das zu verwendende Potenzgesetz

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \text{ bzw. } \arg(e^{x-y}) = x - y = \arg\left(\frac{e^x}{e^y}\right)$$

heranziehen.

- {C1}** Bei den Rechnungen werden Einheitenkontrollen mitbedacht und aus diesem Grund von Anfang mitverwendet.

7.5.3 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D3

[D3] In welchem Wertebereich kann die Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ bei dieser Schaltung liegen? (1 Punkt)

G1 : P1 sagt als Einstieg in die Aufgabe:

„Also Z_1 kann ja nur einen positiven Phasenwinkel haben.“

P2 überprüft dieses durch Einsetzen von Werten und erkennt, dass er vergessen hat, ein Minus einzutippen. Schließlich argumentiert P2 in (1150):

„Also φ_1 muss dann ja zwischen... -90° kann man auch erreichen, wenn der Widerstand 0 ist.“

P1 notiert daraufhin $-90^\circ \leq \varphi_1 \leq 0$. Für φ_2 diskutieren P1 und P2 die Werte:

- | | | |
|------|----|--|
| 1229 | P1 | Da müssten wir vielleicht die Impedanz nochmal umformen, damit man das so sieht. |
| 1232 | P2 | Oder wenn wir nur mal die Extremfälle angucken, wenn $R_2 = 0$ ist. |
| 1238 | P1 | Dann ist es 0. |
| 1240 | P2 | Genau. 0 kann also vorkommen. Und wenn der Widerstand unendlich ist. . . |
| 1245 | P1 | Dann fällt die 1 nicht mehr ins Gewicht. |
| 1247 | P2 | Richtig, ja. |
| 1252 | P1 | Dann kann man das nach oben abschätzen. |
| 1255 | P2 | Dann bleibt nur der Kondensator. Also wenn man jetzt mal auf die Schaltung guckt, dann sieht man's ja. Wäre es nur der Kondensator wären es ja auch -90° . Also auch -90 bis 0. |

Daraufhin notieren sie $\varphi_2 = -90^\circ \dots 0^\circ$.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Der Lösungsweg entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Dabei werden von den Studierenden in besonderem Maße die möglichen Extremwerte betrachtet.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{AB}** Zur Bearbeitung nehmen sie gedanklich Veränderungen an dem Netzwerk vor und gehen sukzessive durch, welche Auswirkungen diese auf die Lösung der Aufgabe haben. Dabei bedenken sie einerseits Alternativaufgaben im Sinne von Polya (1949), aber andererseits verwenden sie auch ein „Extremalprinzip“ entsprechend Bruder und Collet (2011).
- **{B3}** Sie vereinigen die Intervalle der Bauteile mathematisch, welche durch die einzelnen Bauteile vorgegeben sind.
- **{B4}** P2 verwendet eine Wertetabelle, um eine Vorstellung der Situation zu erhalten.
- **{B4}** Die Studierenden untersuchen den auftretenden Bruch auf seine Form, in dem sie bedenken, dass die 1 im Nenner für große Zahlen nicht mehr von Bedeutung ist.
- **{C2}** P1 bedenkt als erstes den Wertebereich des zu erhaltenden Ergebnisses für den Phasenwinkel. Dieses kann später als Validierungsstrategie dienen.

G2 : P1 steigt in (1509) mit „ $\pm 90^\circ$, ein wohl geliebtes Thema von uns.“ in die Aufgabenbearbeitung ein. Dann zeichnet er eine Skizze mit U_1 und U_2 . P1 und P2 erläutern ihre Vorgehensweise folgendermaßen:

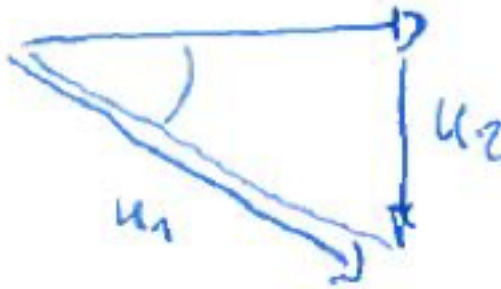


Abbildung 7.5.1: Skizze zur Phasenverschiebung in Aufgabe D3 von Gruppe 2

- | | | |
|------|----|--|
| 1525 | P1 | Das ist U_1 und das ist U_2 Gute Frage, wie groß ist der Verschiebungswinkel zwischen den Beiden? |
| 1703 | P2 | Wie groß kann denn U_2 maximal werden? |
| 1708 | P1 | Genauso groß wie U_1 . |
| 1712 | P2 | Dann wäre ja der maximale Winkel 45° . |
| 1734 | P1 | Nein, angenommen U_1 liegt |
| 1742 | P2 | Aber wenn U_2 genauso groß wäre wie U_1 |
| 1746 | P1 | Es gibt den Fall, da ist der Phasenverschiebungswinkel 90° , weil wir hier 90° haben und hier 0° . Und der andere Extremfall ist, am oberen Teil fällt (...) das ist U_3 und das ist U_2 , somit ist die Gesamtspannung die hier. Und hier ist der Phasenverschiebungswinkel 180° . Ich vertrete die These, der Phasenverschiebungswinkel kann Werte von 0 bis 180° erreichen. Phasenwinkel von 0° kann er bei nur Ohm'scher Last erreichen. |

Daraufhin notieren sie $0^\circ \dots 180^\circ$ und lösen somit die Aufgabe inkorrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Der Lösungsweg entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Die Studierenden beziehen Überlegungen über die auftretenden Brüche mitein.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{AB}** Die Studierenden fügen sukzessive Bauteile aus der Aufgabenstellung hinzu und überlegen, welche Einflüsse dieses auf die Resultate der Aufgabe hat.
- **{B4}** P1 bedenkt am Anfang das Intervall, in dem die Lösung liegen kann und erläutert dieses an einer Skizze, siehe Abbildung 7.5.1.
- **{B4}** P1 und P2 verwenden in ihren Untersuchungen ein „Extremalprinzip“ entsprechend Bruder und Collet (2011).

G3 : P2 beginnt in (2110) mit der Aufgabenbearbeitung.

- 2110 P2 Tendenziell würde ich 180° sagen, aber es geht ja theoretisch bis 360° .
- 2201 P1 Ja, die Phasenverschiebung der Spannungen, die in Reihe geschaltet sind.
- 2208 P2 Phasenverschiebung? Also ein Kondensator macht eine Phasenverschiebung von -90° . Kondensator lässt vorlaufen, Spule irgendwie zurück. Kondensator negativ. Ein Kondensator kann nur bis 90° und ich glaube, das wäre in dem Fall auch.
- 2232 P1 Würde Sinn ergeben, Kondensator der Strom kommt vor.
- 2236 P2 Würde ich auch sagen. Also ich meine, wenn wir die Ergebnisse angucken, dann ist der ja nirgendwo über diesem Winkel. Aber manche sind halt negativ und manche positiv.
- 2245 P1 Ich würde sagen 0 bis 90° .
- 2255 P2 90° würde mir jetzt auch als erstes einfallen. Aber bei so einer Parallelschaltung vielleicht auch das es nochmal einen anderen Einfluss darauf hätte.
- 2312 P1 Nee, aber wenn gesagt wird, dass es durch eine Ersatzschaltung so dargestellt werden kann, dann kann man das betrachten.
- 2319 P2 Ja, ok. Ja, aber die Impedanz Z_2 setzt sich ja aus einem Kondensator in einer Parallelschaltung zusammen und dann musst du ja 1 durch das machen und dann kommt der mit den Impedanzen vielleicht auch nicht unbedingt auf Minus, sondern auch auf Positive. Wie wir es hier auch gemacht haben. Ich würde sagen zwischen -90° und 90° theoretisch. Also wenn der hier jetzt 0 wäre, also 0 Phasenverschiebung hätte, und der hier 90° , dann hätten wir ja hier -90° und der hätte keinen Einfluss. Und wenn der 90° hätte und der hier meinetwegen 0 , hätten wir insgesamt 90° . Also ich würde sagen zwischen -90° und 90° .

Daraufhin skizziert P2 die Schaltung und erläutert daran:

„Du versuchst dir vorzustellen, wie ich mir das vorstelle mit den Winkeln? Du kannst dir das vorstellen mit diesen Dingen hier. Und die werden halt nur nach vorn oder nach hinten. Und der Kondensator hat eine Phasenverschiebung von 90° . . .“

Anschließend geht P2 zu einem Zeigerbild über. [Anmerkung: das ist die konventionalisierte Skizze für eine solche Situation].

- 2458 P2 Das ist ja hier dieses Zeigerbild mit. . . was war nach unten, der Kondensator oder die Spule? Ich meine nach unten war der Kondensator. Und nach oben war die Spule.
- 2515 P1 Ach so, ja so ist's richtig.
- 2518 P2 Ähm, und das heißt das hier kann $+90^\circ$ und das -90° werden. Also ein Kondensator in Reihe macht immer 90° . Obwohl, wenn du dann zwei Kondensatoren mit einer Phasenverschiebung von 90° hintereinander hättest, wärest du dann nicht schon 180° theoretisch?
- 2537 P1 Ja, ist korrekt. -90° und 90° hast du ja eben gesagt.
- 2542 P2 Also aber einer kann nicht weiter als 90° gehen und der hier wird auf jeden Fall entgegengesetzt wirken, weil der parallel ist. Deshalb sag ich 90° in die eine Richtung und maximal 90° in die andere Richtung. Also würde ich zwischen -90° und 90° sagen.

Nach einer kurzen Diskussion, welcher Variable für die Phasenverschiebung verwendet wird (vgl. 2620) und ob ein $\leq$ - oder $<$ -Zeichen verwendet werden muss, beenden sie die Aufgabe inkorrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Der Lösungsweg entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Dabei werden von den Studierenden in besonderem Maße die möglichen Extremwerte betrachtet und ein Zeigerbild miteinbezogen.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden bedenken die Struktur der Schaltung (Reihen- oder Parallelschaltung) und ob diese Einflüsse auf die Ergebnisse hat, die erhalten werden.
- **{A3}** Die Studierenden ziehen Merksätze heran, auch wenn es in diesem Fall in falscher Form geschieht, vgl. (2232).
- **{B3}** In ihren Überlegungen fügen die beiden Studierenden sukzessive Bauteile hinzu und überlegen, welche Einflüsse dieses auf die Rechnung hat.
- **{B4}** P2 bedenkt zunächst, in welchen Intervallen die Winkel der einzelnen Bauteile liegen können.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D3

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Als Fehler tritt hier auf, dass ein Studierendenpaar Aussagen zu den Winkeln heranzieht, die hier nicht gelten, da nicht die Voraussetzungen für die Anwendung nicht erfüllt sind, was von dem Paar nicht überprüft wird. Die Problemstelle ist hier die Vereinigung der Intervalle der Winkel, welche sich durch die einzelnen Bauteile ergeben. Dabei müssen die Studierenden jeweils auch die physikalischen Implikationen der Kombination der Bauteile betrachten und passende Wertbereiche finden.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1}** Die Studierenden bedenken die Struktur der Schaltung (Reihen- oder Parallelschaltung) und ob diese Einflüsse auf die Ergebnisse hat.
- {A3}** Ein Studierendenpaar zieht Merksätze heran, auch wenn es in diesem Fall in falscher Form geschieht.
- {AB}** Zur Bearbeitung nehmen die Studierenden gedanklich Veränderungen an dem Netzwerk vor und gehen sukzessive durch, welche Auswirkungen diese auf die Lösung der Aufgabe haben. Dabei bedenken sie einerseits Alternativaufgaben im Sinne von Polya (1949), aber andererseits verwenden sie auch ein „Extremalprinzip“ entsprechend Bruder und Collet (2011).
- {B3}** Sie vereinigen die Intervalle mathematisch, welche durch die einzelnen Bauteile vorgegeben sind.

{B4} Die Studierenden bedenken im Sinne eines Extremalprinzips nach Bruder und Collet (2011), welche Werte minimal und maximal bei den einzelnen Bauteilen erhalten werden können. Hierzu erstellt ein Paar eine Wertetabelle. Ein anderes Paar untersucht den auftretenden Bruch auf seine Form, in dem sie bedenken, dass die 1 im Nenner für große Zahlen nicht mehr von Bedeutung ist.

7.5.4 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D4

[D4] Welche Frequenz ($f > 0\text{Hz}$) ist zu wählen, damit keine Phasenverschiebung mehr zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ auftritt?

G1 : [Vor der eigentlichen Bearbeitung von D4 stellen P1 und P2 die Übertragungsfunktion schon in D3 auf. Dieses ist hier aufgeführt und der Grund für die zeitliche Lücke.] P1 notiert in (1449) die Formel

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2(1 - j\omega R_2 C_2)}{(\omega R_2 C_2)^2 + 1}$$

und zerlegt diese Formel in (1636) in Real- und Imaginärteil. Hierzu kommentiert P2 in (1910):

„So wird es vielleicht übersichtlicher werden. Okay, das hier ist jetzt auch sehr kompliziert, wenn man vereinfachen will.“

In (2009) schlägt P1 vor, den Bruch mit $R_2 C_2 + 1$ zu erweitern. P2 entgegnet in (2013):

„Ja, ich überleg gerade, ob man's vielleicht gleich nicht so mathematisch machen sollte, das wird ganz schön kompliziert.“

P1 reagiert in (2021) mit „Ziemliche Kloppe drin.“

(PAUSE mit Bearbeitung weiterer Aufgaben.)

P2 erklärt in (5118):

„Damit keine Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ auftritt, dann müssten ja die beiden, der Imaginärteil von $\underline{U}_R$ “

und P1 ergänzt:

„Gleich dem Imaginärteil von $\underline{U}_C$ “

Zur Rechnung schlägt P2 in (5427) vor, den Real- und Imaginärteil zu trennen, und anschließend zu sortieren und komplex konjugiert zu erweitern. In (5451) schlägt P1 vor, mit Hilfe der Zahlenwerte zusammenzufassen. Nach einer Rechnung bis (7421) kommen sie schließlich auf den korrekten Wert.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Bearbeitung der Studierenden entspricht der Vorgehensweise in der SEL. Sie beachten in ihren Rechnungen eine möglichst einfache Darstellung der komplexen Ausdrücke.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{B1}** Sie nennen Bewertungen zum mathematischen Aufwand der Aufgabe. So beurteilen sie Vereinfachungen als „sehr kompliziert“, wollen Rechnungen aus demselben Grund „nicht so mathematisch machen“ und kommentieren mit „Ziemliche Klopper drin“.
- **{B3}** Die Studierenden zerlegen die Formel direkt in ihren Real- und Imaginärteil. Sie strukturieren die Aufgabe so mathematisch.
- **{B3}** Sie nutzen die Zahlenwerte zur Zusammenfassung im Sinne eines „schnellen Einsetzens von Zahlen“ innerhalb der Aufgabe, was zu Lasten der Übersichtlichkeit geht.

G2 : P1 startet in (3106) in die Aufgabenbearbeitung mit

„Das heißt die Imaginärteile von den beiden Schaltungen müssen gleichgroß sein.“

Er erläutert weiter:

„Die müssen sich beide kompensieren, die werden nämlich addiert, deswegen zum Kompensieren müssen sie entgegengesetzt sein.“

Sie formen dann die Ausdrücke symbolisch um und kommen auf

$$\omega^2 C_1 C_2 R_2^2 = 1 + R_1^2 \omega^2 C_2^2.$$

Sie haben Unsicherheiten bei der Richtigkeit der Formel, vgl. (3750) bis (4045). Die Unsicherheiten klärt P1 über

„Theoretisch wäre es das, hoffe, dass es kein Math-Error gibt.“

Wegen anhaltender Unsicherheiten ziehen sie die Formel für $\underline{Z}_2$ heran und überlegen, ob sie zwischendurch einen Kehrwert bilden mussten. Ab (5024) argumentiert P1 folgendermaßen:

„Ja, aber wenn der gesamte Bruch keinen Imaginärteil besitzt und der Zähler ein einfacher ist, eine reelle Zahl, da muss der Nenner auch eine reelle Zahl sein.“

In (5310) kommen sie schließlich korrekterweise auf

$$\omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2},$$

was P1 mit

„So schlecht sieht das gar nicht aus.“

kommentiert. Er führt dann noch eine Einheitenkontrolle durch und kommt auf

$$s^2 = \frac{V}{A} \cdot \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} \cdot \frac{As}{V},$$

was erfüllt ist. Sie kommen schließlich auf das richtige Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden gehen entsprechend der SEL vor. Sie durchdenken dabei, aus welchen Zahlbereichen die enthaltenen Zahlen sein können.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A2}** P1 verbindet in seinen Argumentationen Mathematik und Physik und sagt, dass mit Hilfe von Vorzeichen eine physikalische Kompensation der Größen ausgedrückt werden kann.
- **{B3}** Die Studierenden argumentieren innermathematisch mit Algebra. Sie folgern bei einer Gleichung der Form $x = \frac{y}{z}$, dass wenn $x, z \in \mathbb{R}$ sind, auch $y \in \mathbb{R}$ sein muss.
- **{C1}** Bei dem Ergebnis führen sie eine Kontrolle der Einheiten durch.

G3 : P1 beginnt in (5524) die Bearbeitung der Aufgabe mit

„Gute Frage. Was hatten wir für ne Phasenverschiebung nochmal? [...] Könnten es ja versuchen zu berechnen. Oder kann man das logisch begründen, bevor ich jetzt anfangen zu rechnen.“

Nach weiteren Überlegungen zur vorherigen Aufgabe fragt P1 in (5830):

„Kriegt man das mit Überlegen gelöst? Mit logisch kombinieren? Nein, oder?“

Daraufhin sagt P2:

„Ähm, reines Überlegen. . . das gibt vier Punkte, also so umfangreich kann die Aufgabe nicht sein, wenn ich jetzt mal nach den Punkten gehen würde. [...] Dieser Strom ist auch frequenzabhängig, wenn wir den frequenzabhängig darstellen können, dann können wir auch diese Spannung von dem Strom abhängig darstellen. Dann haben wir den Strom abhängig von der Frequenz und auch den Widerstand abhängig von der Frequenz und dann können wir nach der Frequenz umstellen nachher. Bloß den Strom abhängig von der Frequenz, da müssen wir den Gesamtwiderstand auch wieder abhängig von der Frequenz.“

(5835)

In (5841) meint dann P1, dass der Kondensator dann 0° ist, und dass keine Phasenverschiebung auftritt, vgl. (5946). P1 und P2 sind weiter unschlüssig in der Argumentation und betrachten die Bauteile in dem Netzwerk. P2 erläutert hierzu in (6320):

„Also der soll ja so aussehen, x bzw. y mal e^{0° . Das heißt, wir müssen hier jetzt gucken, welche Sachen haben keinen Einfluss auf diesen Winkel und die erstmal rausziehen. Ich weiß nicht, ob der hier auch, weil wenn wir das mit hoch -1 auflösen würden, hätten wir 1 durch das Gesamte und dann wäre das irgendwie wieder in Abhängigkeit davon.“

P1 sagt darauf, dass es so auch nicht funktioniert, vgl. (6355). P2 schlägt dann vor, den Ausdruck so umzuformen, dass $e^{0^\circ} = f(x)$ entsteht und dann nach f aufzulösen, vgl. (6447) und (6502). Die Aufgabenbearbeitung endet mit der Frage von P2, ob man die Aufgabe lösen kann, wenn man sie so „anguckt“, vgl. (6604). Daraufhin antwortet P1 in (6604) mit:

„Nein, den kennst du nicht und den kennst du nicht. Was willst du das umformen, das ergibt keinen Sinn. Zumal das ja nicht unbedingt 0 sein, reicht ja auch, wenn es gleich ist.“

P1 und P2 beenden die Aufgabe ohne Lösung.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe nicht. Sie versuchen erfolglos einen Ansatz über Rückwärtsarbeiten zu finden.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die beiden Studierenden vermuten, dass sie die Aufgabe ohne Rechnung durch eine „logische Kombination“ lösen können. Dabei schätzt P2 den Aufwand über die in der Klausur erreichbaren Punkte ab.
- **{A2}** Sie untersuchen Abhängigkeiten zwischen den Größen in der Aufgabe. Sie versuchen also entsprechend Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) die physikalischen Mechanismen bzw. hier konkreter Verbindungen zu den Größen zu untersuchen. Diese Überlegung erweitern sie durch die Betrachtung der Bauteile.
- **{A2}** Sie spezialisieren die Aufgabe im Sinne von Polya (1949), in dem sie Bauteile, zu denen keine Abhängigkeiten bestehen, aus ihrer Untersuchung herausnehmen.
- **{B2}** Sie versuchen das Problem mathematisch zu fassen und dann über eine Umkehraufgabe zum Ziel zu kommen, also von einem möglichen Ergebnis über reines Rückwärtsarbeiten auf die Startsituation schließen wollen.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D4

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Ein Studierendenpaar wählt einen falschen Ansatz und löst die Aufgabe daher nicht. Dabei versuchen sie erfolglos einen Ansatz über Rückwärtsarbeiten zu finden. Problemstellen ergeben sich in diesem Aufgabenteil wieder aus der Verwendung komplexer Zahlen. Ein Studierendenpaar zerlegen die Formel direkt in ihren Real- und Imaginärteil und strukturiert die Aufgabe so mathematisch, um mehr Übersichtlichkeit zu erzielen. Ein anderes Paar setzt Zahlenwerte zur Zusammenfassung im Sinne eines „schnellen Einsetzens von Zahlen“ innerhalb der Aufgabe ein, was zu jedoch Lasten der Übersichtlichkeit geht, da sie diese nicht – analog zu anderen Aufgaben – als numerische Variablen nicht zusammenfassen. Einem Studierendenpaar ist unklar, ob sie die Aufgabe ohne Rechnung durch eine „logische Kombination“ lösen können, wobei es den Aufwand über die in der Klausur erreichbaren Punkte abschätzt.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Die beiden Studierenden vermuten, dass sie die Aufgabe ohne Rechnung durch eine „logische Kombination“ lösen können. Dabei wird der Aufwand über die in der Klausur erreichbaren Punkte abgeschätzt. Die Studierenden entwickeln im Sinne von Polya (1949) einen Plan zur Lösung der Aufgabe.

{A2} Ein Studierendenpaar verbindet in seinen Argumentationen Mathematik und Physik und sagt, dass mit Hilfe eines negativen Vorzeichens eine physikalische Kompensation der Größen ausgedrückt werden kann. Die Studierenden in einem anderen Paar untersuchen Abhängigkeiten zwischen den Größen in der Aufgabe und versuchen damit – entsprechend Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) – die physikalischen Mechanismen bzw. hier konkrete Verbindungen zwischen den Größen zu untersuchen, wobei sie in ihren Überlegungen die Bauteile miteinbeziehen. Dabei verallgemeinern sie die Aufgabe im Sinne von Polya (1949), in dem sie Bauteile, zu denen keine Abhängigkeiten bestehen, aus ihrer Untersuchung herausnehmen.

{B1} Die Studierenden nennen Bewertungen zum mathematischen Aufwand der Aufgabe. So beurteilen sie Vereinfachungen als „sehr kompliziert“, wollen Rechnungen aus demselben Grund „nicht so mathematisch machen“ und kommentieren mit „Ziemliche Klopper drin“.

{B2} Die Studierenden versuchen das Problem mathematisch zu fassen und dann über eine Umkehraufgabe mit Rückwärtsarbeiten zum Ziel zu kommen, also von einem möglichen Ergebnis über reines Rückwärtsarbeiten auf die Startsituation schließen wollen.

{B3} Die Studierenden zerlegen die Formel direkt in ihren Real- und Imaginärteil und strukturieren die Aufgabe so mathematisch. Dabei nutzt ein Paar die Zahlenwerte zur Zusammenfassung im Sinne eines „schnellen Einsetzens von Zahlen“ innerhalb der Aufgabe, was zu Lasten der Übersichtlichkeit geht. Ein Studierendenpaar argumentiert innermathematisch mit Algebra, indem sie bei einer Gleichung der Form $x = \frac{y}{z}$ folgern, dass wenn $x, z \in \mathbb{R}$ sind, auch $y \in \mathbb{R}$ sein muss.

{C1} Bei dem Ergebnis führen die Studierenden eine Kontrolle der Einheiten durch.

7.5.5 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D5

[D5] Geben Sie die Induktivität L sowie denwicklungswiderstand R_L der realen Spule an. (2 Punkte)

G1 : Sie erhalten direkt durch Anwendung der relevanten Formeln und Einsetzen der vorgegebenen Werte das korrekte Ergebnis.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Lösung der Studierenden entspricht dem Vorgehen in der Studi-Expert-Lösung.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A3}** Die Studierenden ziehen die relevanten Formeln aus der Veranstaltung heran.

G2 : P1 leitet in (5517) die Aufgabenbearbeitung mit

„Die nächste Aufgabe ist einfach.“

ein. Er führt dann fort:

„Eine reale Spule ist so aufgebaut, besitzt einen Ohm'schen Widerstand und eine ideale Induktivität in Reihe, d. h. $Z_L = R_L + j\omega L$. Und wenn man sich jetzt einen Koeffizientenvergleich $5\Omega + j \cdot 10\pi\Omega$, dann ist $R_L = 5\Omega$ groß und der andere Teil $f_L = 5\Omega$.“

Durch Einsetzen in die Formel für L kommt er auf das richtige Ergebnis. Dazu führt er aus:

„Haben wir $\frac{1}{10}$ H raus. Henry kommt im Übrigen raus, weil wir oben das V/A durch Hertz. Das ist 1/s. Kehrwert bilden ist s. Nun haben wir Vs/A, das ist Henry.“

(5710)

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Vorgehensweise der Studierenden entspricht dem Lösungsweg in der SEL. Zusätzlich führen sie eine Validierung über Einheiten durch.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A4}** Die Studierenden verwenden in der Lösung einen „fächerübergreifenden Koeffizientenvergleich“, d. h. sie stellen direkte Bezüge zwischen Real- und Imaginärteil der Impedanz Z und den gesuchten Größen her.
- **{C1}** Bei dem Ergebnis führen sie eine Einheitenkontrolle durch.

G3 : P2 beginnt in (6644) die Bearbeitung der Aufgabe mit „Wo ist denn R_L ?“ Danach gibt es eine Diskussion über die in der Aufgabe verwendeten Benennungen für die Größen. So bestehen Unklarheiten zwischen den Bezeichnern R_L und Z_L , vgl. (6644) bis (6653). Danach ziehen P1 und P2 relevante Formeln heran und P1 erkennt, dass sie Z_1 und Z_2 „noch wissen, das hat sich ja nicht verändert.“ (6748). Schließlich ziehen sie die Formeln $\underline{Z}_L = j\omega L$ heran, vgl. (7002). P2 erläutert in (7140) die Vorgehensweise:

„So, was machen wir hier jetzt mit dem Wicklungswiderstand der realen Spule. Wollen die den Realteil haben von dem Widerstand, oder was? Wicklungswiderstand ist Ohm'scher Widerstand, ist doch Leiterwiderstand, würde ich jetzt so denken. Und den könnten wir jetzt hier über trigonometrische Formel Kosinus. Das durch das ist Kosinus das.“

P1 notiert dann in (7314) $|\underline{Z}_C| \cos(\varphi) = \underline{R}_C$. Dieses berechnen beide und erhalten verschiedene Werte. Dazu dann P1:

„Was hast du raus? Also du hast den Kosinus eingegeben. Hast du auch den Winkel richtig? Nicht dass du Bogenmaß hast, das wäre schlecht.“

(7427)

P2 antwortet mit: „Degree steht da oben. Das hat ja aber jetzt nicht damit zu tun. Es ist einfach die Tatsache, dass. . .“, vgl. (7435). Sie kommen schließlich zu einem inkorrekten Ergebnis und P2 sagt in (7819):

„Ja. Rein logisch überlegt wäre das Quatsch, weil dann hättest genau die Resonanzfrequenz und dann zerstört sich das System von selbst.“

Sie berechnen dann einen Wert von 0, 1H, welcher korrekt ist.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe entsprechend des Weges in der SEL. Dabei ist ihnen allerdings nicht klar, dass sie einen Koeffizientenvergleich machen können, sondern sie wählen einen komplizierteren Weg unter Einsatz einer Zerlegung der komplexen Größe in x - und y -Anteil mittels Cosinus bzw. Sinus.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden klären zunächst, was in der Aufgabe gegeben ist.
- **{A3}** Aufbauend auf der Analyse der gegebenen Daten ziehen sie relevante Formeln heran.
- **{A4}** Sie gehen von einer Euler-Darstellung der Impedanz aus und beschreiben so, dass sie den Realteil der Zahl mittels der Anwendung des Cosinus und nicht über einen Koeffizientenvergleich erhalten.
- **{B3}** Sie vermuten als Fehlerursache für ihre unterschiedlichen Ergebnisse die Verwendung von Bogen- statt Gradmaß.
- **{C3}** Sie interpretieren ihr Ergebnis über dessen physikalische Implikationen.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D5

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Als Fehlerursache für unterschiedliche Ergebnisse vermutet ein Studierendenpaar die Verwendung von Bogen- statt Gradmaß in den Rechnungen. Die Problemstelle in diesem Aufgabenteil ist das Heranziehen relevanter Formeln aus der Veranstaltung. Mit der geeigneten Formel kann ein „fächerübergreifender Koeffizientenvergleich“ durchgeführt werden, da die eine gesuchte Größe der Realteil und die andere der Imaginärteil der in der Aufgabe vorgegebenen Größe ist. Alternativ bestimmt ein Paar den Realteil hier anstatt über einen Koeffizientenvergleich als Cosinus der Impedanz.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

{A1} Ein Studierendenpaar klärt zunächst, was in der Aufgabe gegeben ist.

{A3} Aufbauend auf der Analyse der gegebenen Daten ziehen die Studierenden relevante Formeln aus der Veranstaltung heran.

{A4} Zwei Studierendenpaare verwenden in der Lösung einen „fächerübergreifenden Koeffizientenvergleich“, d. h. sie stellen direkte Bezüge zwischen Real- und Imaginärteil der Impedanz Z und den gesuchten Größen her. Das dritte Paar geht von einer Euler-Darstellung der Impedanz aus und bestimmt den Realteil der Zahl mittels der Anwendung des Cosinus.

{B3} Die Studierenden vermuten als Fehlerursache für ihre unterschiedlichen Ergebnisse die Verwendung von Bogen- statt Gradmaß.

{C1} Bei dem Ergebnis führen die Studierenden eine Einheitenkontrolle durch.

{C3} Ein Paar interpretiert sein Ergebnis über dessen physikalische Implikationen in einer Realsituation.

7.5.6 Bearbeitungsprozesse der Studierenden bei Aufgabe D6

[D6] Bestimmen Sie den Strom I_1 , den Leistungsfaktor sowie die von der Schaltung aufgenommene Wirk-, Schein- und Blindleistung. (5 Punkte)

G1 : P1 steigt in D6 in (7629) ein mit

„Den Strom I_1 haben wir ja schon.“,

woraufhin P2 sagt:

„Nee, das passt jetzt nicht mehr. Jetzt haben wir ja ne zusätzliche. . .“

P1 fragt in (7935): „Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$?“, was P2 bejaht. P2 berechnet die Scheinleistung $\underline{S}$ über $\underline{S} = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1$, vgl. (7949) P1 sagt dann in (8015), dass der Betrag von

$$S^2 = Q^2 + P^2$$

ist und P2 sagt in (3015), dass die Wirkleistung der Realteil von S und die Blindleistung der Imaginärteil von S ist. Damit berechnen sie korrekt die drei Werte. Bei der Berechnung des Phasenwinkels sind sie sich unsicher, ob dieser als $\varphi = \frac{P}{S}$ berechnet werden kann. Sie berechnen dann den Cosinus dieses Winkels korrekt und beenden die Aufgabe insgesamt korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten die Aufgabe entsprechend der SEL, wobei Unklarheiten bzgl. der Berechnung einzelner Größen auftreten.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A3}** Es gibt Unsicherheiten bei der Formel für den Phasenwinkel.
- **{A3}** Die Studierenden sammeln zunächst alle in dieser Aufgabe benötigten Formeln, ziehen diese also nicht sukzessive heran.
- **{A4}** P2 erläutert den mathematischen Zusammenhang der Größen S, Q, P unter Verwendung der Begriffe für die kartesische Darstellung einer komplexen Zahl.

G2 : P1 leitet in (5810) ein mit „Nichts Schwieriges.“ Für den Strom gibt er die Formel

$$I_1 = \frac{U_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{U_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L}}$$

an. Er setzt dann für alle Größen die Werte ein und erhält so I_1 korrekt. Anschließend bestimmt er die Werte für P, Q, S . Sie berechnen dann $\cos(\varphi)$ korrekt, ohne näher auf die verwendeten Formeln für φ einzugehen.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden bearbeiten den Aufgabenteil gemäs der SEL korrekt.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{B2}** Die Studierenden kombinieren sukzessive die Formeln, um den Wert von I_1 zu erhalten.
- **{B3}** Z_2 notieren sie dabei einerseits als $\underline{Z}_2$ (in Verwendung als komplexe Zahl) und Z_2 (in Verwendung als Norm der komplexen Zahl). Innermathematisch würde also bei üblichen Bezeichnungen hier eine Doppelnotation auftreten.

G3 : P2 steigt in (7936) mit „Einfach, nicht wahr?“ in die Bearbeitung dieser Aufgabe ein. Zunächst hinterfragen P1 und P2, welche Größen im Vergleich zu vorherigen Aufgabenteilen gleichgeblieben sind und welche sich verändert haben, vgl. (7938) ff. Dann bestimmen sie Z_{ges} unter Verwendung der Angaben in der Aufgabe. Hierzu stellt P2 die Formel

$$\underline{Z}_{ges} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_L} \right)$$

auf. Sie berechnen dann $\underline{I}_1$ durch Eingabe ihrer Formeln in den Taschenrechner.

In (8951) fragt P2: „Den Leistungsfaktor, was genau meinen die mit dem Leistungsfaktor?“. Daraufhin kombinieren P1 und P2 in (9038) die Formel $\underline{P} = \underline{U} \cdot \underline{I}$ und P2 ergänzt

„Ist VA, Volt Ampere“

(9045)

Es treten dann Unsicherheiten in den Namen für die abgefragten Leistungen auf:

- | | | |
|------|----|---|
| 9217 | P2 | Ach so, Wirkleistung. Die Wirkleistung war P . Das Ding war Q und die Gesamtleistung war. . . |
| 9230 | P1 | Ich nenne das jetzt einfach P_w , bevor wir jetzt hier. . . das ist die Blindleistung, ne? |
| 9237 | P2 | Scheinleistung. . . S war das, Scheinleistung. |
| 9239 | P1 | Stimmt S . |

P1 zeichnet dann in einer Skizze die Zusammenhänge zwischen Wirk-, Blind- und Scheinleistung ein, vgl. Abbildung 7.5.2. P2 fragt daraufhin:

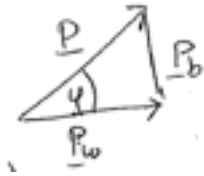


Abbildung 7.5.2: Skizze von Gruppe 3 zum Aufgabenteil D6 - Berechnung von S, P, Q

„Kosinus ist P_b bei dir? Ach. . . jetzt hab ich hier die Scheinleistung.“

(9248)

P1 reagiert mit

„Jetzt machen wir das über Kosinus und Sinus, ne?“

(9253)

Damit berechnen sie folgerichtig die Werte für die drei Leistungen. In (9501) fragt P1: „Was war die Einheit von. . .?“, welches P2 mit „Volt Ampere.“ beantwortet. Für den Leistungsfaktor ziehen sie die korrekte Formel heran, auch wenn es eine Unsicherheit über die richtige Formel gibt, vgl. (9521ff.), und bestimmen ihn korrekt.

Einordnung bezogen auf die Studi-Expert-Lösung : Die Studierenden lösen die Aufgabe gemäß SEL korrekt. Wegen Unklarheiten beziehen sie Einheitenvalidierungen mitein.

Strategien bezogen auf Abschnitt 3.4.4 sowie Problemstellen und Fehler bei deren Anwendung :

- **{A1}** Die Studierenden bedenken bei allen vorkommenden Größen, ob diese noch unverändert zu den vorigen Aufgaben sind. In diesem Zusammenhang tritt ein Folgefehler aufgrund des inkorrekten Ergebnisses in Aufgabenteil D5 auf.
- **{A4}** P1 verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen S, P, Q über eine Skizze, siehe Abbildung 7.5.2. Dadurch werden Bezüge zu dem Satz des Pythagoras hergestellt bzw. der Normberechnung bei einer komplexen Zahl mittels Real- und Imaginärteil.
- **{B3}** Sie führen in der Rechnung einen Darstellungswechsel von der Euler-Darstellung einer komplexen Zahl zu der Polardarstellung durch.
- **{C1}** Sie bedenken vor ihren Rechnungen die Einheiten.

Zwischenfazit zu dem Aufgabenteil D6

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf?

Als Fehler ergibt sich bei einer Gruppe, dass sie in ihrer Rechnung $\underline{Z}_2$ als komplexe Zahl, also $Z_2 \in \mathbb{C}$, und Z_2 als Notation für die Norm dieser Zahl verwendet. Innermathematisch würde also bei üblichen Bezeichnungen hier eine Doppelnotation auftreten. Eine Problemstelle in diesem Aufgabenteil ist der mathematische Zusammenhang der Größen S, Q, P , für die $S^2 = P^2 + Q^2$. Damit kann hier einerseits der Satz des Pythagoras und andererseits kann auch eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil verwendet werden, welche sich als x -Anteil von S über den Cosinus und als y -Anteil von S über den Sinus ergeben. Daher wird hier in der Rechnung auch ein Darstellungswechsel zwischen Eulerdarstellung und Polardarstellung verwendet werden. Es treten Unklarheiten bei der Formel für den Phasenwinkel auf.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

- {A1} Die Studierenden bedenken bei allen vorkommenden Größen, ob diese noch unverändert zu den vorigen Aufgaben sind. In diesem Zusammenhang tritt bei einem Paar ein Folgefehler aufgrund des inkorrekten Ergebnisses in Aufgabenteil D5 auf.
- {A3} Die Studierenden sammeln zunächst alle in dieser Aufgabe benötigten Formeln, ziehen diese also nicht sukzessive heran. Dabei gibt es bei einem Paar Unsicherheiten, wie die Formel für den Phasenwinkel ist.
- {A4} Ein Paar erläutert den mathematischen Zusammenhang der Größen S, Q, P unter Verwendung der Begriffe für die kartesische Darstellung einer komplexen Zahl. Ein weiteres Paar stellt zusätzlich Zusammenhänge zu dem Satz des Pythagoras her, denn es gilt $S^2 = P^2 + Q^2$.
- {B2} Die Studierenden kombinieren sukzessive die herangezogenen Formeln, um den Wert von I_1 zu erhalten.
- {B3} Ein Studierendenpaar nutzt in seinen Rechnungen einerseits $\underline{Z}_2$ in Verwendung als komplexe Zahl, d. h. für $Z_2 \in \mathbb{C}$, und andererseits Z_2 in Verwendung als Norm der komplexen Zahl. Innermathematisch würde also bei üblichen Bezeichnungen hier eine Doppelnotation auftreten. Es treten Darstellungswechsel von einer komplexen Zahl in Eulerdarstellung in eine komplexe Zahl in Polardarstellung auf.
- {C1} Sie bedenken vor ihren Rechnungen die auftretenden Einheiten und die Ergebnisse von deren Kombination.

7.6 Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt wird die zweite Forschungsfrage,

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

für Aufgabe D beantwortet. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?

Fehler treten in dieser Aufgabe vor allem durch die Arbeit mit den komplexen Zahlen auf. Die Fehler ergeben sich aus der Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen oder auch bei der Eingabe in den Taschenrechner. Bei der Division zweier komplexer Zahlen in Eulerdarstellung treten Argumentationsprobleme bei den Studierenden dabei auf, dass die Division zweier komplexer Zahlen auf eine Subtraktion der Winkel führt oder auch ob die Winkel in einer korrekten Darstellung, d. h. Grad- oder Bogenmaß, angegeben sind. Darüber hinaus wirken sie sich indirekt auch bei der Wahl der passenden elektrotechnischen Theorie aus, da die Studierenden teilweise statt der komplexen Version des Ohm'schen Gesetzes, welche Impedanzen Z enthält und für Wechselstrom benötigt wird, die reelle Version mit einem Widerstand R , welche für Gleichstrom gilt, heranziehen. Durch die spezielle Notation $\underline{Z}$ für $Z \in \mathbb{C}$ treten Doppelnotationen zwischen der komplexen Zahl selbst und ihrer Norm auf.

In dieser Aufgabe treten Problemstellen einerseits in der Mathematisierung der Schaltungstopologie und andererseits im Umgang mit komplexen Zahlen auf. Bei der Übersetzung der Schaltungstopologie, welche insbesondere in D1, D2 und D5 notwendig ist, sind in dieser Aufgabe Begriffe wie Spannungsteiler wichtig, die Hinweise auf die Mathematisierung der Schaltung geben. Des Weiteren müssen zum Aufstellen der mathematischen Ausdrücke Regeln für die Kombination von Widerständen, Kondensatoren und Spulen beachtet werden. Diese führen zu einem häufigen Auftreten von Doppelbrüchen, welche als Zähler und Nenner komplexe Größen, d. h. komplexe Zahlen mit Einheiten, haben.

Im Zusammenhang mit komplexen Zahlen müssen die Studierenden Darstellungswechsel zwischen Euler-, Polar- und kartesischer Darstellung durchführen. Bei der kartesischen Darstellung erhalten die Studierenden dadurch einen Real- und einen Imaginärteil und bei der Eulerdarstellung einen Radius und einen Winkel. Die Polardarstellung verknüpft die beiden Darstellungen, vgl. theoretische Erläuterungen am Anfang dieses Kapitels. In den Rechnungen treten die vier Grundrechenarten auf, insbesondere aufgrund der Doppelbrüche die Division und es müssen zusätzlich Potenzgesetze beachtet werden. Dabei setzen sich viele Studierende das Ziel, durch geschickte Umformungen (z. B. unter Verwendung des komplex Konjugierten) möglichst strukturell einfache mathematische Ausdrücke zu erhalten. Dabei müssen die Studierenden noch beachten, dass – anders als in der Mathematik – die komplexe Einheit nicht als i , sondern als j bezeichnet wird. Die Strategie, schnell bekannte Größen einzusetzen und diese erst im letzten Schritt zusammenzufassen (Arbeit mit numerischen Variablen), kann hier zu Einbußen in der Übersichtlichkeit führen.

Zusätzlich treten noch die folgenden Problemstellen in einzelnen Aufgabenteilen auf: In D3 müssen Regeln zur Vereinigung von Intervallen von Winkel angewendet werden. Dazu müssen zunächst die Wertbereiche der einzelnen Winkel, o. B. d. A. φ_1 und φ_2 , gefunden werden und dann mit Potenzgesetzen verknüpft, d. h. das Potenzgesetz $\frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$ angewendet werden, wobei j wieder die komplexe Einheit ist. In D6 müssen die Studierenden noch einen Zusammenhang zwischen der Scheinleistung S , der Wirkleistung P und der Blindleistung Q verwenden, welcher mittels des Satz des Pythagoras über $S^2 = P^2 + Q^2$ beschrieben werden kann. Damit ergeben sich hier in der Kombination aus Zerlegung in x - und y -Anteil (mittels trigonometrischer Funktionen) und Betrachtung des Real- und Imaginärteils zusätzliche mathematische Problemstellen.

In Aufgabe D treten Unklarheiten bei dem Aufschreiben der Ergebnisse auf. Studierenden ist unklar, wie sie die erwähnten Zusammenhänge insbesondere bezogen auf die Winkel in ihrer Niederschrift verdeutlichen sollen. Einem Studierendenpaar ist überdies in Aufgabenteil

D4 unklar, ob sie den Aufgabenteil ohne Rechnung durch eine „logische Kombination“ lösen können, wobei sie den Aufwand über die in der Klausur erreichbaren Punkte abschätzen.

Bei dieser Aufgabe treten die erwarteten Problemstellen bei der Arbeit mit den komplexen Größen auf und zwar sowohl bezogen auf die Umrechnungen zwischen den Darstellungen als auch bei dem Umgang mit den Doppelbrüchen. Es tritt nicht der Fehler auf, dass die Studierenden missachten, dass sie die Angaben vor Aufgabenteil D5 in allen weiteren Aufgabenteilen brauchen. Eine Problemstelle ist die Mathematisierung der Schaltungstopologie, aber diese wird richtig durchgeführt von den Studierendenpaaren, inklusive der Beachtung der Spannungsteiler und der Reihen- und Parallelschaltung.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

Die in diesem Abschnitt gewählten Kategorien beziehen sich auf die Kategorien {A1} bis {C4}, welche in dem Abschnitt 3.4.4 näher vorgestellt wurden:

{A1}:

- Arbeit mit konventionalisierten Skizzen: Alle Studierendenpaare nutzen die Skizze, welche in der Aufgabe vorgegeben ist.
- Erwartung an eine korrekte Lösung: In D4 vermutet ein Studierendenpaar, dass sie die Aufgabe ohne Rechnung durch eine „logische Kombination“ lösen können. Dabei schätzen sie den Aufwand über die in der Klausur erreichbaren Punkte ein.
- Gegebene Daten: In D6 überlegt ein Paar, ob die vorkommenden Größen unverändert zu den vorherigen Aufgabenteilen sind. In allen Aufgabenteilen unternehmen die Studierenden Schritte zur Vorbereitung ihres Arbeitens. Hierzu werden Pläne zur Lösung entwickelt und die Angaben (Größen mit Einheiten, auftretende Bauteile) aus der Aufgabe durchgegangen, woraufhin dann relevante Formeln ausgewählt werden.
- Schlagwörter in der Bearbeitung: Es werden Fallunterscheidungen verwendet, wobei einerseits beispielsweise in D1 zwischen „Spannungsteiler“ oder „Brückenschaltung“ unterschieden wird und andererseits zwischen Reihen- oder Parallelschaltungen (z. B. in D1 und D3).
- Strukturierung und Benennung: Die Studierenden durchdenken die Namen ihrer selbstgewählten Benennungen, um für eine weitere Verwendung direkte Bezüge herstellen zu können. In D6 verwendet ein Studierendenpaar eine Doppelnotation, bei der Z und $\underline{Z}$ für $Z \in \mathbb{C}$ gleichzeitig in derselben Aufgabe als komplexe Zahl und Norm dieser Zahl verwendet werden.

{A2}:

- Betrachtung physikalischer Mechanismen: In den Aufgabenteilen D1 und D2 setzen sich die Studierenden mit der Schaltungstopologie auseinander, in dem sie die physikalischen Mechanismen durchdenken. Dieses zeigt sich auch in ihrer Verbalisierung der Formeln, in dem sie sagen, dass ein Produkt mit dem Teilwiderstand in D2 bestimmt werden muss und für diesen direkt die Formel angegeben wird. Bei der Bearbeitung von D4 durchdenkt ein Studierendenpaar die physikalischen Mechanismen und drückt eine physikalische Kompensation über ein negatives Vorzeichen aus.

- Spezialisierung und Verallgemeinerung: Es werden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen und den Bauteilen durchdacht. Die Studierenden verändern dabei die Aufgabe im Sinne von Polya (1949), in dem sie Bauteile, zu denen keine Abhängigkeiten bestehen, aus ihrer Untersuchung herausnehmen.

{A3}:

- Wahl einer Formel mit anschließender Anpassung: Die Studierendenpaare ziehen für alle Aufgabenteile bis auf D3 jeweils relevante Formeln heran. Dabei muss beachtet werden, dass beispielsweise in D2 das Ohm'sche Gesetz für Wechselstrom (d. h. mit komplexen Größen) anstatt für Gleichstrom verwendet werden muss, wobei ein Paar zunächst die reelle Version verwendet. Unsicherheiten treten bei der Formel für den Phasenwinkel in D6 auf.
- Heranziehen von Merksätzen: Darüber hinaus versuchen die Studierenden Merksätze heranzuziehen, die ihnen relevant erscheinen.

{A4}:

- (Fächerübergreifende) Isomorphismen: Zur Bestimmung des Ergebnisses in Aufgabenteil D1 vollziehen die Studierenden vollziehen einen Darstellungswechsel, um die gesuchten Größen als Betrag und Winkel erhalten zu können. In Aufgabenteil D5 können die gesuchten Werte als Real- und Imaginärteil der angegebenen Impedanz abgelesen werden.
- Nutzung innermathematischer Mathematisierungshilfsmittel: Der Zusammenhang zwischen den Größen S, P, Q in D6 ergibt sich über $S^2 = P^2 + Q^2$, so dass über Vorstellungen mit Real- und Imaginärteil oder über Cosinus (als x -Anteil) oder Sinus (als y -Anteil) die gesuchten Ergebnisse erzielt werden können.

{AB}:

- Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Zur Bearbeitung nehmen die Studierenden gedanklich in D3 Veränderungen an dem Netzwerk vor und gehen sukzessive durch, welche Auswirkungen diese auf die Lösung der Aufgabe haben. Dabei bedenken sie einerseits Alternativaufgaben im Sinne von Polya (1949), aber andererseits verwenden sie auch ein „Extremalprinzip“ entsprechend Bruder und Collet (2011).

{B1}:

- Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung: Die Studierendenpaare durchdenken z. B. in D2 in ihren Bearbeitungen Alternativwege für die Rechnung. Bei einer Gruppe wird ein solcher Weg erst nach der Bearbeitung gefunden und eingesetzt. Außerdem äußern die Studierenden Beurteilungen zu ihren Rechnungen und verwenden dabei Beschreibungen wie „sehr kompliziert“, wollen Rechnungen aus Gründen des Erhalts von einfacheren Ausdrücken „nicht so mathematisch machen“ oder kommentieren mit „Ziemliche Klopper drin“.
- Vereinfachung der zu verwendenden Formeln: Die Studierenden versuchen, möglichst einfache Werte in einfachen Darstellungen zu erhalten.

{B2}:

- Rückwärtsarbeiten: Ein Studierendenpaar versucht in Aufgabenteil D5 das Problem in eine Umkehraufgabe umzuwandeln und so anhand eines möglichen Ergebnisses über reines Rückwärtsarbeiten auf die Startsituation zu schließen.
- Gleichungsmanagement: Durch sukzessives Kombinieren von Formeln kann in D6 der Wert für I_1 erhalten werden.
- Schnelles Einsetzen von Zahlen und Arbeit mit numerischen Variablen: Das schnelle Einsetzen von Zahlen sorgt in Aufgabenteil D4 für eine schlechtere Übersichtlichkeit in den Rechnungen.

{B3}:

- Arbeit mit komplexen Zahlen: Die in dieser Aufgabe benötigten mathematischen Methoden hängen vor allem mit dem Rechnen mit komplexen Zahlen zusammen. Dazu zählen beispielsweise in D1 die Überführung von verschiedener Darstellungsformen (Eulerdarstellung, Polardarstellung, kartesische Darstellung) in andere. Sie müssen in diesem Zusammenhang z. B. in Aufgabenteil D4 Formeln in Real- und Imaginärteil zerlegen. Bei der Bearbeitung der Aufgabenteile (beispielsweise D5) ist es relevant, dass im Taschenrechner die korrekte Form für die Winkel, d. h. Grad- oder Bogenmaß, verwendet wird. In D4 setzen Studierende ein, dass wenn $x, z \in \mathbb{R}$ sind, auch $y \in \mathbb{R}$ sein muss.
- Einsetzen von Methoden aus der Sekundarstufe 1: In diesem Zusammenhang werden auch Potenzgesetze wie $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ bzw. $\arg(e^{x-y}) = x - y = \arg\left(\frac{e^x}{e^y}\right)$ eingesetzt. I

{B4}:

- Extremalprinzip: In D3 bedenken die Studierenden im Sinne eines Extremalprinzips nach Bruder und Collet (2011), welche Werte minimal und maximal bei den einzelnen Bauteilen erhalten werden können.
- Einsetzen von Werten: Hierzu erstellt ein Paar eine Wertetabelle.
- Qualitative Betrachtungen der Formeln: Ein anderes Paar untersucht den auftretenden Bruch auf seine Form, in dem sie bedenken, dass die 1 im Nenner für große Zahlen nicht mehr von Bedeutung ist.

{C1}:

- Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: In allen Aufgabenteilen bis auf D3 werden Einheitenkontrollen zur Überprüfung der Richtigkeit der Rechnungen durchgeführt.

{C3}:

- Validierung entsprechend Blum und Leiß (2007): Ein Studierendenpaar interpretiert in D5 ihr Ergebnis über dessen physikalische Implikationen in einer Realsituation.

2.3 Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Analysen der Studierendenbearbeitungen aus dem vorherigen Abschnitt Interpretationen der Expertenbearbeitungen, welche innerhalb der SEL beschrieben sind, gegenübergestellt und auf diese Weise Unterschiede zwischen den Bearbeitungen herausgearbeitet. Die Expertenbearbeitungen werden hier zusätzlich zur Studi-Expert-Lösung noch einmal übernommen. Der Experte ist ein Mitarbeiter aus der GET-B und einer der Korrektoren der Klausur.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D1:

Der Experte steigt in (0350) mit der Formel

$$\underline{Z}_1 = R_1 + Z_{C1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1}$$

in die Aufgabenbearbeitung ein, berechnet dann

$$\omega = 2\pi f = 314,14 \frac{1}{s}$$

und schließlich korrekt

$$\underline{Z}_1 = 100\Omega - j \cdot 1,273\Omega.$$

Er notiert $\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{-j}{\omega C_2}$, was Parallelschaltung bedeutet, und erweitert seine Formel zu

$$\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{-j}{\omega C_2} = \frac{R_2 \cdot \left(-\frac{j}{\omega C_2}\right)}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}}$$

Er kommentiert dann in (0638), dass er diesen Bruch mit dem komplex Konjugierten erweitert und ergänzt entsprechend den Faktor $\left(R_2 + \frac{j}{\omega C_2}\right)$ in Zähler und Nenner. Er löst anschließend die Klammer in Zähler und Nenner auf. Anschließend setzt er die Größen, d. h. Zahlenwerte mit Einheiten, ein und bemerkt so einen zunächst im Nenner vergessenen Summanden. Des Weiteren verwendet er zunächst $F = \Omega^2 s^2$ statt dem korrekten $F = \frac{s^2}{\Omega^2}$, was er auch über die Einheitenkontrolle bemerkt. So berechnet er $\underline{Z}_2$ korrekt.

In Phase 2 erläutert der Experte, dass er Formeln für Widerstand und Kapazität sowie Reihen- und Parallelschaltung passend zur Situation aufstellen muss, um diesen Aufgabenteil zu lösen.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D1:

- **{A3}** Der Experte zieht die relevante Formel aus der Vorlesung heran.
- **{A4}** Er kombiniert die Bestandteile für Reihen- und Parallelschaltungen gemäß der im Theorieteil erläuterten Regeln.
- **{B2}** Er stellt die Formel zunächst auf und setzt dann die Werte mitsamt ihrer Einheiten ein.
- **{B3}** Er erweitert den Bruch mit dem Komplex-Konjugierten zur Vereinfachung der Form.
- **{C1}** Der Experte führt Einheitenkontrollen zur Überprüfung seiner Ergebnisse aus.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte bemüht sich um ein strukturiertes Aufschreiben bei den Bestandteilen der Formeln, wobei er neben den zu berechnenden Ausdrücken auch immer wieder die Topologie betrachtet. Bei der Rechnung bleibt er auf der symbolischer Formelebene und setzt im vorletzten Schritt ein. Im Gegensatz zu den Studierenden arbeitet er nicht mit dem Einsetzen bekannter Größen im ersten Schritt und einer anschließenden Arbeit mit numerischen Variablen.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D2:

Der Experte notiert in (1538) die Formel für U_2 , welche $U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_1$ ist. In diese setzt er die in Aufgabenteil D1 errechneten Werte für $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ ein. Die Phasenverschiebung berechnet er über

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-32,1V}{54,74V}\right) = -30,4^\circ,$$

verwendet also den Quotienten aus Imaginär- und Realteil, vgl. Erläuterung in den mathematischen Hintergründen zu dieser Aufgabe.

In Phase 2 sagt der Experte, dass er hier einen „Spannungsteiler“ verwendet. In (0334) sagt er, dass dieser zur Bestimmung des Eingangs- und Ausgangsverhaltens der Schaltung dient. Er erläutert weiter:

„An der Stelle ist es gut, noch nicht die Werte am Anfang einzusetzen, damit die Zusammenhänge deutlich werden.“

(0334)

Er beschreibt in (0523), dass die Schaltung als „Phasenschieber“ dient, und erläutert weiter, dass man sie für eine Schaltung braucht, die in einer anderen Phase liegt.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D2:

- **{A1}** Zur Strukturierung der Aufgabe setzt er erst am Ende die Werte für die Größen ein.
- **{A2}** Er beschreibt bezogen auf das Verhalten der Schaltung, dass es sich um einen „Phasenschieber“ handelt, an dem auch die (physikalischen) Zusammenhänge deutlich werden.
- **{A3}** Als Schlagwort zur Beschreibung seiner Vorgehensweise verwendet er „Spannungsteiler“.
- **{A4}** Der Experte notiert gemäß den Regeln für Reihen- und Parallelschaltungen die Formel für U_2 .
- **{B3}** Er berechnet gemäß den Regeln aus der Mathematik den Winkel für die Phasenverschiebung.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte nennt im Gegensatz zu den Studierenden das Stichwort „Phasenschieber“ als elektrotechnische Funktion des zu berechnenden Ausdrucks.

Auch hier verwendet der Experte kein „schnelles Einsetzen von Werten“.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D3:

Der Experte erläutert hierzu in (2226):

„Wir sind nullkapazitiv, d. h. positiv werden wir nicht. Die Extremfälle sind, wenn man einzelne Bauteile bis zu Null herunterbringt. Das heißt, wenn man kein R drin hat, fällt der Nenner raus. Damit wird es unendlich und wir kommen auf 90° . Und wenn man kein C drin hat, ist es ein Ohm'scher Spannungsteiler und damit man bei Null Grad.“

Er notiert $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$.

In Phase 2 erläutert der Experte in (0706), dass die Kondensatoren die einzigen Bauteile seien, die die Phase verschieben können. Er wird unsicher bei seinem Ergebnis und erläutert

„Graphisch ist es am schönsten zu sehen.“

(0752)

In seinen Überlegungen in (1228), welche er nicht zu Ende führt, sagt er auch:

„Der Strom muss hier aber in jedem Fall voreilen.“

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D3:

- **{A3}** Der Experte verwendet den Merksatz, dass der Strom „voreilen“ muss. (Beim Kondensator eilt der Strom vor.)
- **{B1}** Er geht zu einer graphischen Vorstellung im Zusammenhang mit der Lösung über.
- **{B3}** Er vereinigt die durch die Aufgabe auftretenden Intervalle mathematisch.
- **{B4}** Er verwendet das Extremalprinzip nach Bruder und Collet (2011).

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte setzt graphische Vorstellungen zu den Winkeln ein.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D4:

Der Experte steigt in (4403) in die Bearbeitung mit

„Dafür brauche ich die Übertragungsfunktion.“

ein. Er notiert dann:

$$G = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

und setzt dann die Ergebnisse ein, welche in Aufgabenteil D1 angegeben sind. So erhält er schließlich:

$$G = \frac{R_2 - jR_2^2\omega C_2}{(R_2^3\omega^2 C_2 + 2R_2) - j\left(R_2^2\omega C_2\left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right) + \frac{1}{\omega C_1}\right)}$$

Er berechnet dann den Imaginärteil dieses Ausdrucks und erhält ein Ergebnis, was ihm zu groß erscheint. Daraufhin erläutert er in (5441):

„Die Übertragungsfunktion G ausschreiben; dann den Imaginärteil berechnen. Diesen dann zu Null setzen und das ω ausrechnen. Ich suche ja die Frequenz, bei der es keinen Imaginärteil gibt; denn es soll ja keine Phasenverschiebung geben.“

In Phase 2 erläutert der Experte, dass hier das Vorgehen aus analogen Aufgaben aus den Übungen verwendet werden kann.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D4:

- **{A2}** Er erläutert, dass keine Phasenverschiebung mehr auftritt, wenn der Imaginärteil 0 ist.
- **{A3}** Als Schlagwort für seine Herangehensweise nennt er „Übertragungsfunktion“.
- **{A4}** Er kombiniert die Werte für die Spannungen gemäß der mathematischen Übersetzungsregeln für Reihen- und Parallelschaltungen.
- **{B3}** Gemäß mathematischer Regeln isoliert er den Imaginärteil des zu berechnenden Ausdrucks.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Auch in diesem Aufgabenteil bemüht sich der Experte um ein strukturiertes Aufschreiben der Formelbestandteile in der Rechnung, wobei die Zusammenhänge zu der Elektrotechnik nachverfolgbar bleiben.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D5:

Der Experte steigt in (5713) in die Bearbeitung ein mit

„Geben Sie den Wicklungswiderstand an. Na, das sind die 5Ω .“

und notiert $R_L = 5\Omega$. Dann notiert er:

$$L = \frac{10\pi\Omega}{100\pi\frac{1}{s}} = 0,1 \frac{Vs}{A} = 100mH.$$

In Phase 2 erläutert der Experte ab (2000), dass hier eine „reale Anwendung des Phasenschiebers“ gezeigt wird. Er sagt:

„Die Induktivität, die angeschlossen wird, macht für sich schon eine ziemlich große Phasenverschiebung. Denn wenn man sieht: 5Ω und 10π , dann sind wir schon bei einer Phasenverschiebung von 70° oder so. Vorne ist das normale Stromnetz mit 230V dran.“

(2019)

Er sagt noch, dass eine Unklarheit darüber besteht, ob es eine Reihen- oder Parallelschaltung ist, wobei er entscheidet, dass es eine Reihenschaltung ist aufgrund des Aufwands bei der Berechnung in einer Klausuraufgabe, vgl. (2216). Des Weiteren erläutert er:

„Das Ganze ist ja nur ein Ersatz für die Realität; die beiden Modelle ließen sich auch – wenn ich das richtig in Erinnerung habe – ineinander umrechnen. In der Realität hat man weder eine reine Reihen-, noch eine reine Parallelschaltung, sondern vielmehr eine Mischung von beiden.“

(2216)

In (2712) ergänzt er noch:

„Induktivität und Wicklungswiderstand sind eigentlich nur dazu da, um es mal berechnet zu haben.“

Dieses begründet er damit, dass „der wirkliche Aha-Effekt“ (2712) nur dann passieren würde, wenn die Phasenverschiebung größer ist, denn dann heben sich die Wirkungen gegenseitig auf.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D5:

- **{A1}** Der Experte durchdenkt andere Varianten der Aufgabe z. B. bei einer veränderten Schaltungstopologie.
- **{A2}** Er interpretiert das Ergebnis bzgl. der auftretenden physikalischen Mechanismen und beschreibt dieses als „Phasenschieber“.
- **{A4}** Er verwendet eine direkte Verbindung zwischen dem Real- und Imaginärteil der angegebenen Impedanz und den beiden gesuchten Größen.
- **{C1}** Er kombiniert die Einheiten, in dem er auf die SI-Basiseinheiten zurückgeht und kommt so auf die Einheit Henry.

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Der Experte nennt auch hier das Stichwort „Phasenverschieber“. Er äußert sich zu möglichen Variationen der Aufgabe bereits während seiner Rechnung.

Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D6:

Am Beginn der Bearbeitung von Aufgabenteil D6 in (5827) notiert der Experte

$$P_1 = \operatorname{Re}\{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1\} = 52,9\text{W}$$

und kommentiert dieses mit

„Oben fließt nur der eine Strom hinein.“

(6000)

In (6048) sagt er dann „Und jetzt der Imaginärteil.“ und notiert

$$Q_1 = \operatorname{Im}\{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1\} = 0,667\text{W}.$$

In (6110) sagt er dann „Scheinleistung per Pythagoras“ und notiert

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 52,9\text{W}.$$

In (6215) ist er unsicher bei der Berechnung des Leistungsfaktors und ob er $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{P}{S}$ ist und welche Bezeichnung üblich ist. Er notiert dann:

$$f_L = \frac{P_1}{S_1} = \frac{52,9\text{W}}{52,9\text{W}} = 1,$$

wobei dann der Studienleiter die Richtigkeit der Formel bestätigt.

In Phase 2 sagt der Experte, dass der Strom über das Ohm'sche Gesetz berechnet werden kann. Er bezeichnet die Formeln für Wirk-, Blind- und Scheinleistung als die „Grundformeln der Leistungsberechnung“, vgl. (2356). Überdies sagt er, dass er die Berechnung des Leistungsfaktors nach hinten gesetzt hätte, da man dazu Wirk- und Scheinleistung benötigt.

Interpretation der Expertenbearbeitung von Aufgabenteil D6:

- **{A2}** Der Experte bedenkt die zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen.
- **{A3}** Er bezeichnet die Formeln für P , Q und S als „Grundformeln der Leistungsberechnung“, also als notwendiges Faktenwissen in diesem Zusammenhang.
- **{A4}** Er verbindet die gesuchten Größen mit den Real- und Imaginärteilen bereits berechneter Größen.
- **{A4}** Er verwendet den Begriff „Pythagoras“, um den Zusammenhang zwischen Scheinleistung S , Wirkleistung P und Scheinleistung Q zu beschreiben. Es gilt nämlich: $S^2 = P^2 + Q^2$. Darüber berechnet er dann S aus den bekannten Größen P und Q .

Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden:

Wie die Studierenden verbindet der Experte die Größen S , P , Q über den Satz des Pythagoras, aber äußert sich gleich auch dazu, dass es sich um die „Grundformeln der Leistungsberechnung“ handeln würde. Im Gegensatz zu den Studierenden äußert er sich auch zur zugrundeliegenden Physik anstatt nur Formeln heranzuziehen.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Diskussion

Dieses letzte Kapitel der Dissertation fasst die Ergebnisse der normativen und empirischen Aufgabenanalysen zusammen. Dabei werden zunächst Zusammenfassungen der Antworten auf die Forschungsfragen in den Abschnitten 8.1 bis 8.3 gegeben. Darauf folgt im Abschnitt 8.4 die Diskussion der Ergebnisse hinsichtlich verschiedener Aspekte:

1. Beschreibung der Unterschiede zu Ergebnissen vergleichbarer Untersuchungen
2. Optimierungen für die Analyse verwandter Fragestellungen
3. Übergeordnete Fragen für weitere Untersuchungen

Im Abschnitt 8.5 werden mögliche Implikationen für die Lehre für Studierende der Elektrotechnik vorgestellt, welche sich sowohl auf die Gestaltung der Veranstaltungen durch die Dozenten als auch auf eine Hilfe für Studierende beziehen.

8.1 Beantwortung der ersten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen zu der ersten Forschungsfrage,

In welcher Weise können Lösungsprozesse und -produkte und Kompetenzerwartungen zu exemplarischen Grundlagenaufgaben aus der Elektrotechnik auf Basis einer Aufgabenanalyse und Experteninterviews normativ charakterisiert werden?

zusammengefasst. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

1.1 Welche mathematik-bezogenen Kompetenzen werden von den Studierenden erwartet?

Die mathematisch-bezogenen Kompetenzen erstrecken sich in den vier Aufgaben über ein breites Spektrum: Die Studierenden benötigen Kenntnisse in Bruchrechnung, Potenz- und Wurzelgesetzen, Flächenbestimmungen für Dreiecke und Rechtecke und Anwendungen des Satzes des Pythagoras genauso wie Methoden der Analysis in einer Veränderlichen, Wissen über den Umgang mit komplexen Zahlen (Rechenmethoden, Darstellungswechsel) bis hin zu Lösungsalgorithmen für gewöhnliche Differentialgleichungen verschiedener Ordnungen. Das

besondere Merkmal ist, dass hier bei der Anwendung mathematischer Methoden im Gegensatz zur „Mathematik für Ingenieure“ elektrotechnische Größen verwendet werden, d. h. Kombinationen aus Zahlenwerten und Einheiten. Auf die Anwendung mathematischer Verfahren selbst hat dieses keinen Einfluss; die Verwendung von Größen ermöglicht allerdings die Nutzung von Validierungsstrategien, welche sich auf Einheiten beziehen.

Im Zusammenhang mit den Einheiten müssen Einheitenpräfixe (wie Kilo, Mega, Nano, etc.) in Zehnerpotenzen umgewandelt werden (und umgekehrt) und mit anderen Einheiten kombiniert werden, wofür das SI-Basiseinheitensystem mit sieben Grundeinheiten, vgl. Tabelle 4.2.1, eingesetzt werden kann, in welchem jede auftretende Einheit abbildbar ist.

Ein weiteres Merkmal der elektrotechnischen Aufgaben sind konventionalisierte Skizzen, welche einen Einstieg in die Aufgabe bilden und zur mathematischen Beschreibung der Situation eingesetzt werden. Diese treten in verschiedenen Formen auf, zum einen als direkte Vorgabe in der Aufgabe wie z. B. als „Schwingkreis“ (vgl. Aufgabe B) oder zum Selbsterstellen als Mathematisierungshilfe wie das Ersatzschaltbild in Aufgabenteil A1. In Aufgabe C wird ebenfalls eine Skizze als Aufgabeneinstieg genutzt, wobei es sich dabei um den Graphen einer Funktion handelt, aus dem eine stückweise definierte, stetige Funktion abgelesen werden muss.

Aus der Skizze, wie sie in Aufgabe A, B und D gegeben ist, müssen Angaben über die physikalische Situation entnommen werden. In Aufgabe A handelt es sich um die Abmaße der auftretenden magnetischen Widerstände, in Aufgabe B die vorkommenden Bauteile (und deren Status bezogen auf ihre Ladung) und deren Anordnung zur Beschreibung mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gesetzen sowie in Aufgabe D die auftretende Schaltungstopologie aus Reihen- und Parallelschaltungen.

Zum Erhalt berechenbarer Ausdrücke müssen Formeln symbolisch miteinander kombiniert werden, so dass eine Formel entsteht, in welcher alle Größen bis auf die in dem Aufgabenteil gesuchte bekannt sind. Diese Formeln können entweder als Zitat aus der Veranstaltung, Büchern etc. herangezogen werden oder mit Hilfe spezieller Regeln aufgestellt werden.

Darüber hinaus nennen die Experten folgende von den Studierenden erwartete Kompetenzen: Als Hauptlernziele beschreiben sie das Abprüfen von Lösungsalgorithmen, welche die Studierenden in Übungen zu der Elektrotechnik-Veranstaltung gelehrt bekommen haben. Hierzu zählen insbesondere der Umgang mit den konventionalisierten Skizzen und die Berechnung von häufig auftretenden Größen wie Reluktanzen. Dabei sollen die Studierenden den physikalischen Hintergrund bedenken, wobei hierbei – im Gegensatz zu Elektrotechnik-Veranstaltungen für Fortgeschrittene – häufig Vereinfachungen vorgenommen werden. Zu dem physikalischen Hintergrund zählt z. B. auch, dass mehr magnetische Energie in der Luft als im Eisen gespeichert wird. Zu den Kompetenzen zählt auch, dass die Studierenden Variationen der Aufgaben qualitativ mitbedenken sollen, auch wenn diese häufig zu im ersten Studienjahr unlösbaren Aufgaben führen. Die Studierenden sollen Abhängigkeiten nutzen und Formel deuten, wobei dieses das Erlernen und Nutzen von Einheiten miteinschließt. Der Experte, der bei Aufgabe B interviewt wurde, sagt hierzu konkret, dass das Erlernen elektrotechnischer „Grundsätze“ vor der mathematischen Lösung stehen muss.

1.2 Welche Fehler und Problemstellen sind aufgrund der Experteninterviews und auf Basis der Aufgabenanalysen zu erwarten?

Fehler können sich in den Aufgaben sowohl auf das Aufstellen mathematischer Ausdrücke als auch auf die anschließende Arbeit mit mathematischen Ausdrücken, welche Größen enthalten, beziehen:

Bei der Arbeit mit den konventionalisierten Darstellungen werden möglicherweise nicht sämtliche Informationen aus der Skizze gezogen oder falsche Informationen herangezogen, also z. B. in Aufgabe A Reluktanzen übersehen oder in der zweiten Aufgabenhälfte von Aufgabe B der Ladestatus der Bauteile nicht beachtet werden. Es kann ein falscher Zugang zu der Aufgabe gewählt werden, d. h. die Aufgabe einem falschen Themengebiet zugeordnet werden, z. B. der Aufgabenteil A6 nicht dem Berechnen eines Kräftegleichgewichts. Bei dem Verständnis der Aufgabe können z. B. auch Missverständnisse durch die verwendete Notation auftreten, so z. B. durch x^- und x^+ als Notation für links- und rechtsseitige Grenzwerte in Aufgabe B.

Durch die bereits bei der Beantwortung von Forschungsfrage 1.1 erwähnte Vielfalt an auftretenden mathematischen Methoden ergeben sich auch viele mögliche Fehlerquellen aus dem innermathematischen Bereich. In Aufgabe A können Fehler bei der Arbeit mit den Brüchen und dem in diesem Zusammenhang auftretenden Umgang mit Einheiten, d. h. bei der Arbeit mit Zehnerpotenzen und Potenzgesetzen, auftreten. Durch zu allgemeine Zugänge ergeben sich hier weitere Fehler durch die Verwendung von Integration von Vektorfeldern. In Aufgabe B müssen den Studierenden Lösungsalgorithmen für gewöhnliche Differentialgleichungen bekannt sein, die als Kombination mehrerer Methoden aus der Analysis für Funktionen in einer Veränderlichen (Produktregel des Differenzierens, Partielle Integration) und durch den richtigen Umgang mit auftretenden Konstanten für die Studierenden viel Fehlerpotential bergen. In Aufgabe C ergeben sich Fehler einerseits durch die Integration von polynomiellen Funktionen in einer Veränderlichen als auch durch fehlerhafte Kombinationen von Formelbestandteilen (z. B. in Aufgabenteil C2) oder auch in der Anwendung der Wurzelgesetze oder dem Aufstellen einer linearen Funktion. In Aufgabe D ergeben sich mögliche Fehler durch die Arbeit mit komplexen Größen, was hier Grundrechenarten und Darstellungswechsel beinhaltet. Hierzu müssen die Studierenden Brüche erweitern oder auch Kenntnisse in der Arbeit mit trigonometrischen Funktionen und deren Interpretation als x - und y -Anteil einer linearen Funktion kennen, wobei in diesem Zusammenhang auch durch eine Wahl des Bogen- anstatt des Gradmaßes Fehler auftreten können.

Eine Problemstelle in den Aufgaben A und B ist, dass die Studierenden keine Kriterien dafür haben, wann ihre Mathematisierung „vollständig“ ist, d. h. ob sie genügend Gleichungen aufgestellt haben, um zu einer lösbaren Aufgabe bzw. dem richtigen Ergebnis zu gelangen. Ebenfalls müssen die Studierenden die relevanten Formeln kennen, welche in nahezu allen Aufgabenteilen unterschiedlich sind. Benötigte Sätze wie die Kirchhoff-Gesetze müssen richtig angewendet werden und auch dabei beachtet werden, dass alle relevanten Bestandteile (in dem Fall alle Ströme und Spannungen mit richtigen Vorzeichen) beachtet werden. Gerade in diesem Punkt kann auch die in Kapitel 1 erwähnte Asynchronizität zwischen den Mathematik- und Elektrotechnik-Veranstaltungen wieder ein entscheidender Punkt sein, so dass u. U. die benötigten Lösungsverfahren nur aus der Elektrotechnik-Veranstaltung bekannt sind. Eine weitere Problemstelle im Rahmen von Aufgabe C ist, dass bei einer – insbesondere in Aufgabenteil C1 intendierten – Verwendung über Betrachtung über Flächeninhalten auch die Orientierung der Flächen beachtet werden muss. In Aufgabe D kann die Problemstelle das Auftreten von

Doppelbrüchen mit komplexen Größen sein, bei denen eine aufwändige Umformung notwendig ist, um einfachere Ausdrücke zum Rechnen zu erhalten.

1.3 Wie lässt sich der Lösungsprozess aus der Sicht von Modellierungskreisläufen aus der Schuldidaktik beschreiben?

Es zeigen sich in der Aufgabe spezielle Merkmale des Problemlösens im elektrotechnischen Kontext. Zur Übersichtlichkeit wird hier wieder die Aufteilung Mathematisierung, mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten und Validierung verwendet, welche auch bei der Beantwortung dieser Forschungsfrage bei den Aufgabenanalysen der einzelnen Aufgaben genutzt wurde:

Mathematisierung

Im Gegensatz zum Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) nehmen die Studierenden die Idealisierungen und Vereinfachungen in allen Aufgaben nicht selbst vor, sondern diese werden durch die Elektrotechnik-Veranstaltung und deren Übungsbetrieb vorgegeben. So werden in den Aufgaben statische und nicht dynamische Situationen betrachtet und gewisse Aspekte, welche sich aus dem physikalischen Hintergrund ergeben, zumindest in den Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen missachtet. Von den Dozierenden werden diese nicht expliziert, was zu der Gefahr führen kann, dass die Studierenden durch reale Situationen überfordert sind, in denen sie versuchen, sämtliche physikalische Mechanismen zu verstehen. Eine Möglichkeit zur Explizierung des Unterschieds zwischen idealisiertem und realem Verhalten nennt der Experte in Aufgabe B, der reales und idealisiertes Bauteilverhalten durch Begriffe unterscheiden möchte (Kondensator bzw. Kapazität, Spule bzw. Induktivität).

Es werden die in den Aufgaben gegebenen Skizzen mittels Überführungsregeln in mathematische Ausdrücke übersetzt, wobei diese Überführung in den Aufgaben B bis D direkt und in der Aufgabe A über eine Zwischenstufe, das sogenannte Ersatzschaltbild (vgl. Aufgabenteil A1), durchgeführt wird. In Aufgabe C wird hierzu ein Funktionsgraph eingesetzt, in den übrigen sind es konventionalisierte Darstellungen aus der Elektrotechnik, welche die vorgegebenen Schaltungstopologien darstellen. Diese Darstellungen, welche als diagrammatisches System für die gegebenen Situationen eingesetzt werden, enthalten im Sinne einer „informativen Figur“ nach Bruder und Collet (2011) eine Vielzahl von Informationen, welche auf diese Weise übersichtlich und diskutierbar dargestellt werden.

Bei der Überführung können einzelne Anteile der Skizze (wie z. B. der Bauteile in B) sowie der Aufbau (wie z. B. die Anordnung der Bauteile in Aufgabe B und D) in mathematische Ausdrücke, welche Größen enthalten, übersetzt werden, wobei in diesen Überführungsregeln auch Methoden aus der Graphentheorie eingesetzt werden. In Aufgabe B dienen konkrete Werte der Spannung als Anfangswerte für die Differentialgleichungen.

Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten

Im Bereich des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens werden die Formeln, welche in der Mathematisierung erhalten wurden, mit Hilfe von mathematischen Methoden gelöst. Dabei ist ein zentraler Punkt die Verwendung von Größen, d. h. es treten neben Zahlenwerten, wie sie bei innermathematischen Aufgaben ausschließlich vorkommen, auch Einheiten auf. Es wird

eine „Mathematik der Größen“ verwendet, bei der spezielle Techniken und Transformationsstrategien eingesetzt werden. Die vorkommenden Einheiten können in SI-Basiseinheiten dargestellt werden, vgl. Tabelle 4.2.1, und ihre Präfixe, siehe Tabelle 4.2.2, mit Hilfe von Zehnerpotenzen dargestellt werden. Dadurch müssen Methoden zum Zerlegen und Vereinigen von Einheiten verwendet werden unter Kenntnis der SI-Basiseinheitendarstellung der einzusetzenden und zu berechnenden Größen und der Anwendung von Potenzgesetzen zur Kombination der Zehnerpotenzen. Diese Vorgänge werden hier als „Einheitenmanagement“ bezeichnet.

Teilweise müssen verschiedene Formeln miteinander kombiniert werden, um daraus eine Formel zu erhalten, in der alle Größen bis auf die gesuchte bekannt sind. Dieses Verfahren erfordert teilweise das sukzessive Heranziehen immer weiterer Gleichungen. Dieses wird in dieser Arbeit als „Gleichungsmanagement“ bezeichnet.

Die innermathematischen Anforderungen selbst erstrecken sich, wie bei der Beantwortung von Forschungsfrage 1.1 und 1.2 erläutert, über verschiedenste mathematische Gebiete. Durch die Verwendung von Gleichungs- und Einheitenmanagement treten allgemein häufig Doppelbrüche auf, welche sich schon allein aus der Definition der Einheiten oder der Kombination der Formeln ergeben. In Aufgabe D tritt noch ein zusätzlicher Aspekt auf, nämlich die Notation, dass $\underline{x}$ anders als in der Mathematik für Ingenieure dafür verwendet wird, dass $x \in \mathbb{C}$ ist und dass zur Vermeidung einer Doppelnotation zwischen der komplexen Einheit i in der Mathematik und der Stromstärke i in der Elektrotechnik, in der Elektrotechnik j als Bezeichnung für die komplexe Einheit verwendet wird.

Validierung, d. h. die Überprüfung der Ergebnisse

Im Gegensatz zur Validierung im Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) dienen die Validierungsmethoden nicht der Hinterfragung der Annahmen des verwendeten Modells, sondern eine Überprüfung der durch die Rechnung erzielten Ergebnisse. Zentrale Merkmale der Validierung im Kontext der elektrotechnischen Grundlagenaufgaben ist die Arbeit mit den Größenordnungen und den Einheiten der auftretenden Größen, welche sich exakt auf die beiden Bestandteile der Größe, also Zahlenwert und Einheit, beziehen. Im Gegensatz zu der Validierung im Modellierungskreislauf findet in dieser Aufgabe keine Hinterfragung der Annahmen des verwendeten Modells statt, sondern die Validierung besteht hier aus der Überprüfung der Ergebnisse.

Im Zusammenhang mit den Einheiten kann überprüft werden, ob die Einheiten auf beiden Seiten von Gleichungen übereinstimmen, wobei man hier das SI-Basiseinheitensystem als Grundlage einsetzen kann. Dieses kann ohne jegliche Beachtung der Zahlenwerte durchgeführt werden. Auf diese Weise können auch fehlende Bestandteile von Formeln rekonstruiert werden. Bei Größenordnungen können Wertintervalle aus der Vorlesung (z. B. die magnetische Flussdichte b_L in A4) oder Vergleiche zwischen verschiedenen Größen (z. B. bei den magnetischen Energien in A5 oder zwischen den Ergebnissen in C1 und C3) verwendet werden.

8.2 Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen zu der zweiten Forschungsfrage,

Welche Unterschiede gibt es zu den antizipierten Wegen aus den Studi-Expert-Lösungen und den Wegen der Experten? Wie gehen die Studierenden zum Erhalt ihrer Lösungswege vor?

zusammengefasst. Dieses ist in drei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

2.1 Welche Fehler und Problemstellen treten auf? Was sind die Unterschiede zu den normativ erwarteten Fehlern und Problemstellen?

In den Aufgaben zeigen sich verschiedene Arten von Fehlern, welche sich auf das Verstehen der Aufgabe entsprechend Polya (1949), den physikalischen Hintergrund und die Anwendung der mathematischen Methoden beziehen können. In mehreren Aufgaben beziehen die Studierenden bei der Bearbeitung Informationen mit ein, welche erst für spätere Aufgabenteile relevant sind (z. B. die Masse m in Aufgabe A oder die Spule in Aufgabe C) oder sie missinterpretieren Notationen (wie ein Studierendenpaar den Buchstaben h für die magnetische Feldstärke in Aufgabe A). Es treten Verwechslungen zwischen verschiedenen Größen auf, welche nur über die Indizes unterschieden werden können, so dass Vermischungen zwischen Gesamt- und Teilgrößen vorkommen, die nicht über Einheitsüberprüfungen korrigierbar sind, da die Summe mehrerer Größen dieselbe Einheit wie die einzelnen Größen hat.

Es zeigen sich Vermischungen zwischen verschiedenen physikalischen Konzepten, wie z. B. Magnetismus und Elektrizität. Doppelnotationen treten an der Grenze zwischen Mathematik und Physik auf, z. B. bei gleichzeitigen Verwendungen von i als Stromstärke und komplexer Einheit oder C als Kapazität und als Integrationskonstante. Bei Studierendenpaaren treten Fehler bei der Umrechnung auf SI-Basiseinheiten auf, in dem z. B. Gramm anstatt Kilogramm als Basiseinheit für das Gewicht betrachtet wird und Fehler im Zusammenhang mit den Einheitspräfixen und den damit zusammenhängenden Zehnerpotenzen auftreten. Bezogen auf die Beschreibung der physikalischen Mechanismen treten in den Formeln Vermischungen zwischen komplexen und reellen Formen des Ohm'schen Gesetzes (mit einer Impedanz Z bzw. einem Widerstand R) auf. Es werden teilweise falsche Regeln herangezogen, wie die Gleichung zur Beschreibung der Ladung in einem Kondensator ($Q = CU$) oder die Lenz'sche Regel. Es werden Notationen falsch verstanden, insbesondere bei der Beschreibung links- und rechtsseitiger Grenzwerte durch x^- und x^+ in Aufgabe B.

Weitere Fehler treten bei der Anwendung der mathematischen Methoden auf, vor allem in den Aufgaben B, C und D. Diese Fehler gibt es zum einen in elementarerer Bereichen wie der Anwendung von Wurzelgesetzen, dem Aufstellen einer linearen Funktion und der Anwendung von binomischen Formeln. Bezogen auf die Inhalte der „Mathematik für Ingenieure“ beachten die Studierenden beispielsweise beim Übergang von der Berechnung eines Integrals auf eine Flächenberechnung nicht, dass diese Flächen orientiert sind. Im Zusammenhang mit komplexen Zahlen treten Fehler bei der Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen und Zusammenhängen, welche sich z. B. durch Potenzgesetze ergeben, auf. Des Weiteren gibt es auch Fehler, welche durch die Eingabe in den Taschenrechner oder einer falschen Wahl zwischen Grad- und Bogenmaß zustandekommen. In Aufgabe B treten bei der Lösung der homogenen Differentialgleichungen kaum Fehler auf, wobei hier das Merkblatt aus der Veranstaltung genutzt wird. Eine Gruppe verwechselt dabei die Polardarstellung einer komplexen Zahl, $u_C(t) = U_0 (\cos(\omega_0 t) + i \cdot \sin(\omega t))$, und dem Ansatz zur Lösung der homogenen DGL 2.

Ordnung, $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, auf.

Bei den Aufgaben zeigen sich unterschiedliche Problemstellen: Bei der Übersetzung der Skizzen in mathematische Ausdrücke fällt es den Studierenden schwer, sämtliche Einflüsse (in Aufgabe A die verschiedenen Reluktanzen in Eisen und Luft, in Aufgabe B die Bauteile und deren Anordnung) zu erkennen und passend zu mathematisieren. Ob die Beschreibung der elektrotechnischen Vorgänge zur mathematischen Lösung ausreichend ist, kann häufig erst beim Rechnen erkannt werden. Bei den Überlegungen muss jeweils beachtet werden, welche Teile der Skizze für die Aufgabenbearbeitung oder die Bearbeitung von Aufgabenteilen relevant sind und – speziell in Aufgabenteil B1, B2 und B5 – wie der Ladezustand der Bauteile ist. In Aufgabe D ist eine Problemstelle die Übersetzung der Schaltungstopologie, da dabei sowohl Konzepte wie Spannungsteiler oder Brückenschaltung als auch die vorliegende Mischung aus Parallel- und Reihenschaltung korrekt mathematisiert werden müssen.

Insbesondere in Aufgabe A zeigen sich Problemstellen dadurch, dass neben den Ansätzen, welche in der SEL präsentiert wurden, auch Ansätze über die Integration von Vektorfeldern möglich sind, welche jedoch argumentativ (z. B. über die Homogenität der Felder) auf die Gleichungen aus der SEL zurückgeführt werden können, was die Studierenden auch tatsächlich leisten. In Aufgabenteil A6 zeigt sich eine Problemstelle beim Ansatz, da in diesem Aufgabenteil entweder Kenntnisse aus der Technischen Mechanik herangezogen werden müssen oder das für diese Situation spezielle Konzept des „magnetischen Drucks“ genutzt werden kann, wodurch ein Studierendenpaar zur gegenseitigen Erläuterung auf eine informative Figur zurückgreift. Bei Aufstellen der Gleichungen – insbesondere der gewöhnlichen Differentialgleichungen – müssen die Studierenden diese in eine Form bringen, welche mit ihnen bekannten Methoden lösbar ist. Dabei ergibt sich bei mehreren Studierendenpaaren die Schwierigkeit zu erkennen, ob die Anzahl der angegebenen Gleichungen ausreichend ist, wobei es dafür – vor der tatsächlichen Kombination der Gleichungen – kein Verfahren gibt, so dass teilweise Rückschritte auf die Mathematisierungsphase durchgeführt werden müssen, um aus einem unterbestimmten System ein lösbares System zu machen. Bei einer Gruppe tritt in diesem Zusammenhang noch die Problemstelle auf, dass sie die Notation der DGL aus der Elektrotechnik, bei der die gesuchte Funktion u_C heißt, auf y ändern, welche ihnen aus der Mathematik als Bezeichnung für die Lösungsfunktion für Differentialgleichungen bekannt ist. Teilweise ist den Studierenden nicht bekannt, dass das Partikulärverfahren, was üblicherweise in der Mathematik für Ingenieure eher für Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt wird, auch für Differentialgleichungen erster Ordnung anwendbar ist.

In Aufgabe C ergeben sich Problemstellen dadurch, dass in einigen Aufgabenteilen mehrere Lösungswege möglich sind und dabei die Orientierung der Flächen beachtet werden muss, was jedoch in Aufgabenteil C2 nicht möglich ist. In diesem Aufgabenteil ist eine Problemstelle, dass die zu berechnende Größe, der Effektivwert, über die vergleichsweise verschachtelte Formel $\frac{1}{T} \sqrt{\int f(x)^2 dx}$ berechnet wird und dabei $f(x)$ eine stückweise lineare Funktion ist, welche von den Studierenden anhand ihres Funktionsgraphen aufgestellt werden muss. Eine Herausforderung ist dabei auch das Aufstellen einer linearen Funktion aus zwei bekannten Punkten, bei der keiner der x -Werte 0 ist. Die Problemstellen in Aufgabe D ergeben sich durch die für Wechselstrom notwendige Verwendung komplexer Zahlen. Die Studierenden müssen Darstellungswechsel zwischen Euler-, Polar- und kartesischer Darstellung durchführen. Auch wenn in den Rechnungen ausschließlich die vier Grundrechenarten auftreten, müssen hierbei durch die verschiedenen Darstellungen Potenzgesetze beachtet werden und auch die Umformung von Brüchen mit dem Ziel, dass der Nenner eine reelle Zahl wird (dieses ist immer möglich), sorgt

für große und unübersichtliche Terme. Als Problemstelle zeigt sich noch der Zusammenhang zwischen der Scheinleistung S , der Wirkleistung P und der Blindleistung Q , welcher mittels des Satzes des Pythagoras über $S^2 = P^2 + Q^2$ beschrieben werden kann, da den Studierenden teilweise die Anordnung der drei Größen in der Formel zunächst nicht geläufig ist.

Unklarheiten treten in mehreren Aufgaben vor allem durch unklare Interpretierbarkeit der Aufgabenstellungen auf. So ist den Studierenden die in A1 verlangte Vereinfachung, die akzeptierte Argumentation zur vollständigen Lösung von A3 (Möglichkeiten sind sowohl innermathematisch als auch physikalisch) oder auch die Möglichkeit der Verwendung einer gleichgroßen magnetischen Flussdichte in A4 unklar. Bei Studierendenpaaren In Aufgabe B treten Missverständnisse im Zusammenhang mit der verwendeten Notation für links- und rechtsseitige Grenzwerte auf. In Aufgabe D ist unklar, wie sie ihre Ergebnisse aufschreiben können und z. B. Zusammenhänge mit den Winkeln verdeutlichen sollen. Bei der Bestimmung der Konstanten bei der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Aufgabenteil B7 ist den Studierenden der Weg zur Bestimmung der Konstanten unklar, wobei sie teilweise andere Wege als den in der Mathematik üblichen und den aus der Elektrotechnik wählen, welche dennoch mathematische Argumentationen korrekt einsetzen.

Die meisten der erwarteten Fehler, welche jeweils bei der Beantwortung der Forschungsfrage 1.2 auf Basis der Aufgabenanalysen und Experteninterviews genannt wurden, haben sich nicht in den Lösungsprozessen der Studierenden gezeigt. Sie traten allerdings teilweise als Problemstellen auf, über die die Studierendenpaare diskutiert haben. Ursachen für diese Unterschiede liegen wahrscheinlich in der längeren Bearbeitungszeit und in der Partnerarbeit in den Videostudien:

Gerade die Ansätze wie die Arbeit mit den gegebenen konventionalisierten Darstellungen und das Heranziehen der richtigen Formeln wurde von den Studierendenpaaren ohne auftretende Schwierigkeiten bearbeitet. Die auftretenden Schaltungstopologien wurden richtig verstanden. So wurden in Aufgabe A von allen Studierendenpaaren alle auftretenden Reluktanzen gefunden und auch die Mathematisierung in Aufgabe B letztendlich von alle Studierenden korrekt durchgeführt. Auch der Ansatz über das Kräftegleichgewicht wurde von den Studierendenpaaren richtig gefunden. Die Aufgabenabschnitte, in denen Bruchterme mit Zehnerpotenzen auftreten, wurden auch richtig bearbeitet, wodurch auch Fehler dieser Art nicht auftraten.

Dafür traten andere Problemstellen auf, die unabhängig von Flüchtigkeitsfehlern sind: So haben Studierende in Aufgabe B eine falsche Formel im Zusammenhang mit dem Kondensator herangezogen. Die Notation aus Aufgabe B zu links- und rechtsseitigen Grenzwerten, x^- und x^+ , wurde falsch interpretiert. Dafür fanden alle Studierendenpaare zweimal eine mit ihnen bekannten Methoden lösbare Differentialgleichung, wobei die Lösungsalgorithmen selbst den Studierenden teilweise nicht mehr geläufig waren. Bei einem der drei Studierendenpaare in Aufgabe C traten zahlreiche innermathematische Fehler im Zusammenhang mit Wurzeln, Aufstellen linearer Funktionen und binomischer Formeln sowie bei der Orientierung der Dreiecksflächen auf. Die Arbeit mit komplexen Zahlen mit Darstellungswechseln (kartesisch, Euler, Polar) führte – wie erwartet – zu Problemstellen genauso wie die Arbeit mit Bruchtermen, in welchen komplexe Zahlen auftraten.

2.2 Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studieren-

den rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse, welche zu den einzelnen Aufgaben präsentiert wurden, zusammengefasst dargestellt, um zu erläutern, wie Studierende in den Bearbeitungsprozessen strategisch an die Aufgaben herangehen.

{A1}: Einstieg in die Aufgabe und Verstehen der Aufgabenstellung

1. Erwartung an eine korrekte Lösung: Die Studierenden nutzen verschiedene Strategien, um zu überlegen, was der Erwartungshorizont der einzelnen Aufgabenteile ist. Dabei stützen sie sich auf z. B. auf die Begriffe in der Aufgabe, wie z. B. in A3 auf einen Unterschied zwischen „bestimmen“ und (von ihnen angeführt) „angeben“. Weitere Überlegungen beziehen hier die verwendbaren Idealisierungen mit ein, welche im Zusammenhang mit der Komplexität des mathematischen Modells wichtig sind.
2. Gegebene Daten: Die Studierenden bedenken die Größen, welche in der Aufgabe gegeben sind und deren Bedeutung für die Rechnung. Dabei unterscheiden sie, ob diese direkt am Anfang der Aufgabe oder erst für bestimmte spätere Aufgabenteile relevant sind. Für die Größen muss ebenfalls beachtet werden, ob diese sich im Laufe der Aufgabenteile verändern, z. B. zwischen den beiden Aufgabenhälften in Aufgabe B, d. h. bei den Aufgabenteilen B1 bis B4 bzw. B5 bis B7. Dabei können teilweise Missinterpretationen von Bezeichnungen der Größen auftreten oder bei Notationen wie x^- und x^+ für Grenzwerte auftreten.
3. Arbeit mit konventionalisierten Skizzen: Die Studierenden setzen sich mit der gegebenen Skizze auseinander und durchlaufen diese – teilweise sogar sichtlich mit dem Stift – um alle Bestandteile oder beispielsweise alle für die Kirchhoff-Gesetze benötigten Spannungen und Ströme auffinden zu können.
4. Strukturierung und Benennung: Bei selbstgewählten Benennungen für Größen versuchen die Studierenden möglichst klare Namen zu finden, welche über ihren Index eindeutig sind, z. B. R_δ für den Luftwiderstand in Aufgabe A. In dem Kontext wechseln die Studierenden teilweise auch die Notation aus der Aufgabe, um klarere Bezüge zu erhalten, z. B. um die Differentialgleichung zweiter Ordnung in B6 mit Hilfe ihrer mathematischen Methoden in der üblichen, aus der Mathematik für Ingenieure bekannten Notation lösen zu können, wodurch jedoch die Bezüge zum elektrotechnischen Kontext verlorengehen.
5. Schlagworte in der Bearbeitung: Die Studierenden versuchen Schlagworte zu finden, um Verbindungen zu Theorieelementen zu finden. Beispiele aus den Aufgaben sind: „Durchflutungsgesetz“ (A4), „Kräftegleichgewicht“ (A6), „Maschenumlauf“ (B2), „ungedämpfter Schwingkreis“ (B5), „Spannungsteiler“ (D1) oder „Brückenschaltung“ (D5).
6. Analogien zu bereits gelösten Aufgaben: Die Studierenden überlegen, ob sie bereits ähnliche Aufgaben gelöst haben und versuchen so, Analogien im Lösungsprozess zu nutzen. Innerhalb der Aufgabe können ebenfalls Ergebnisse (vgl. Abhängigkeitsstruktur) wie auch Zwischenergebnisse (z. B. zwischen C1 und C3) wiederverwendet werden.

{A2}: Arbeit mit Physik

1. Betrachtung physikalischer Mechanismen: Die Studierenden setzen qualitative Vorstellungen zur physikalischen Vorgängen ein, um die Aufgaben zu verstehen bzw. teilweise auch direkt zu lösen (beispielsweise in Aufgabenteil A3). Diese Vorgänge versuchen sie

mathematisch zu beschreiben, in dem sie z. B. allgemeine mathematische Strukturen zur Beschreibung ohne Beachtung von möglichen Vereinfachungen betrachten, um z. B. in Aufgabe A von Vektorfeldern mit Hilfe der Homogenität der Felder zu Multiplikationen der Größen zu gelangen. Ein anderes Beispiel dafür ist die Verbindung einer gleichgerichteten Größe (C3) mit dem mathematischen Betrag oder der Kompensation physikalischer Größen durch ein Minuszeichen.

2. Interpretation von Formeln und Gleichungen: Die herangezogenen Gleichungen werden von den Studierenden durchdacht, um Proportionalitäten und Antiproportionalitäten zwischen den vorkommenden Größen zu finden. Dieses schließt beispielsweise bei den Bauteilgleichungen für Kondensator und Spule die Interpretation einer Ableitung als Veränderungsrate mit ein. Diese Strategien nutzen die Studierenden auch zur Überprüfung ihrer Zwischenergebnisse, z. B. der in B3 und B6 zu lösenden Differentialgleichungen bezogen auf die einzelnen auftretenden Summanden.
3. Spezialisierung und Verallgemeinerung: Beim Durchdenken der physikalischen Mechanismen nehmen die Studierenden Veränderungen an der physikalischen Situation vor, in dem sie Bauteile hinzufügen (spezialisieren) oder welche wegnehmen (verallgemeinern).
4. Verwendung von Analogien zwischen verschiedenen Konzepten: Die Studierenden nutzen gerade in Aufgabe A Analogien zwischen physikalischen Konzepten, nämlich dort zwischen „Magnetismus“ und „Elektrizität“ und rekonstruieren so, wie entsprechende Formeln aus dem anderen Kontext aussehen müssen.
5. Rückschlüsse auf Formelbestandteile aus dem Kontext: Beim Aufstellen der Formeln überlegen die Studierende, welche Größe vor dem physikalischen Hintergrund dort vorkommen müssen. So kann beispielsweise in Aufgabe A die Relevanz der magnetischen Leitfähigkeit μ erkannt werden.
6. Mathematisierung physikalischer Vorgänge: Die Studierenden setzen Graphen von Funktionen mit bekannten Funktionswerten ein, um eine mathematische Gleichung aufzustellen, was z. B. zum Beispiel zum Erhalt von Lösungen der Differentialgleichungen in den Aufgabenteilen B4 und B7 möglich ist. In diesem Zusammenhang treten auch Spiele wie „Mapping Mathematics to Meaning“, vgl. Tuminaro und Redish (2007), auf, die Verbindungen zwischen den mathematischen und der physikalischen Anteile der Aufgabe schaffen.

{A3}: Heranziehen von Faktenwissen (Gleichungen, Sätzen) aus Autoritäten im Sinne von Bing (2008)

1. Wahl einer Formel mit anschließender Anpassung: In den Aufgaben A, C und D ziehen die Studierenden zunächst Formeln allgemein heran und passen sie dann – unter Verwendung eindeutiger Benennungen – auf die Situation an. Ein Beispiel ist die Anpassung der Reluktanzformel in A2 auf die Anwendung in Eisen und in Luft. In Aufgabe C bezieht sich dieses auf die Unterteilung des Integrationsintervalls und in Aufgabe D auf die Anpassung des Ohm'schen Gesetzes auf Wechselstrom.
2. Sammeln von Formeln: Hervorgerufen durch Unsicherheiten bei den benötigten Formeln ziehen Studierende in mehreren Aufgabenteilen sämtliche Formeln heran, die ihnen in dem Kontext relevant erscheinen.

3. Heranziehen von Merksätzen: Die Studierenden nutzen Merksätze, die ihnen im Zusammenhang mit physikalischen Vorgängen helfen und allgemeingültig sind unter Beachtung der benötigten Voraussetzungen. Beispielsweise gibt es solche Sätze für Kondensatoren und Spulen in Aufgabe B.

{A4}: Herleiten von Gleichungen und (Zwischen-)Ergebnissen unter Verwendung mathematischer Methoden

1. Nutzung innermathematischer Mathematisierungshilfsmittel: Studierende nutzen innermathematische Methoden zum Aufstellen von Gleichungen. Spezielle derartige Methoden sind die Kirchhoff-Gesetze mit Graphentheorie oder der Zusammenhang zwischen Größen S, P, Q in D6 ergibt sich über $S^2 = P^2 + Q^2$.
2. (Fächerübergreifende) Isomorphismen: Studierende verwenden direkte Verbindungen zwischen der elektrotechnischen Situation und mathematischen Ausdrücken. Der Gleichrichtwert ist so der Betrag einer Größe in C3, das Ergebnis in D1 kann direkt über einen Darstellungswechsel der komplexen Zahl bestimmt werden oder in D5 können die gesuchten Größen als Real- und Imaginärteil der vor diesem Aufgabenteil gegebenen Größe abgelesen werden.
3. Verwendung mathematischer Formeln zum Erschließen der Physik: Die Studierenden interpretieren Bestandteile ihrer mathematischen Ansätze direkt im physikalischen Kontext, z. B. das Volumenelement dV in Aufgabe A.
4. Nutzen von Begriffen aus der Aufgabenstellung zur Mathematisierung von Ausdrücken: Die Studierenden interpretieren Begriffe aus der Aufgabenstellung, um einen Ansatz zu finden. Eine „Dichte“ der Größe X ist damit das Verhältnis dieser Größe bezogen auf eine Fläche oder ein Volumen und kann so direkt mathematisiert werden kann.

{AB}: Übergang zwischen Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten

1. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Die Studierenden arbeiten innerhalb der Prozesse abwechselnd im Bereich der Mathematisierung und des mathematisch-elektrotechnischen Arbeitens. So gehen sie während der Rechnungen zurück auf die eingesetzten Größen und Formeln, sie stellen weitere Gleichungen auf (z. B. in Aufgabe B). Bei einigen Paaren gibt es mehrere Übergänge zwischen den ersten beiden Phasen Mathematisierung und mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten, da im Lösungsprozess (zunächst) eine Menge an Gleichungen entstanden war, die zu wenig Gleichungen enthielt, um eindeutig lösbar zu sein. Sie durchdenken die Einflüsse nachträglicher Veränderungen auf den Gleichungen oder bedenken Änderungen an der Mathematisierung direkt bezogen auf deren Einflüsse auf die Rechnung im mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten.

{B1}: Verringerung des mathematischen Aufwands

1. Vereinfachung des Ansatzes durch innermathematische Alternativdarstellung: Studierenden durchdenken mehrere Ansätze zur Lösung der Aufgabe, um den einfachsten, für die gegebene Situation nutzbaren Ansatz zu finden. Dabei bedenken sie auch den allgemeinsten Fall und den am einfachsten denkbaren Fall. In Aufgabe A können so Vektorfelder durch Multiplikationen ersetzt werden und in Aufgabe C statt Integrationen Flächenberechnungen durchgeführt werden.

2. Vereinfachung der zu verwendenden Formeln: Die Studierenden versuchen, die vorkommenden Formeln durch Umformungen in einer für sie möglichst einfacher Weise darzustellen. So wählen sie in Aufgabe A Zusammenfassungen der Größen, wählen andere Notationen (y statt u_C in Aufgabe B) oder versuchen die Bruchterme mit komplexen Zahlen in Aufgabe D möglichst einfach darzustellen.

{B2} Arbeit mit mathematischen Ausdrücken

1. Schnelles Einsetzen von Zahlen und Arbeit mit numerischen Variablen: Studierende nutzen beim Arbeiten eine Strategie, bei der sie bekannte Größen direkt einsetzen, ohne sie jedoch mit anderen Größen zusammenzufassen, was sich sowohl auf den Zahlenwert als auch auf die Einheit bezieht. Damit unterscheiden sie bekannte und unbekannte Größen, aber behalten eine Form bei, deren Bestandteile sofort als die eingesetzten Größen rekonstruierbar sind. Dieses führt in Aufgabe D zu einer schlechteren Übersichtlichkeit in den Rechnungen gegenüber einer symbolischen Berechnung.
2. Gleichungsmanagement: Die Studierenden kombinieren so lange relevante Formeln bis sie eine Formel erhalten, in der alles bis auf die unbekannte Größe bekannt ist und diese somit zu berechnen ist.
3. Rückwärtsarbeiten: Die Studierenden versuchen aus der ihnen bekannten Lösung einen Ansatz zu rekonstruieren. So wissen sie in Aufgabe B, dass bei der Spannung u_C in der zweiten Aufgabenhälfte eine Schwingung vorliegt und sie rekonstruieren so, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden muss, da Differentialgleichungen erster Ordnung keine Schwingungen beschreiben können.
4. Zerlegen und Zusammensetzen: Die Studierenden kombinieren Formelausdrücke in verschiedenen Weisen, um eine möglichst geschickte Darstellung zu finden. So kann in A2 sowohl über Längen als auch über Querschnittsflächen zusammengefasst werden und die Studierenden bedenken beide Wege.

{B3}: Anwendung von Methoden aus universitären Mathematikveranstaltungen, d. h. sowohl aus der „Mathematik für Ingenieure“ als auch aus mathematischen Vorkursen

1. Einsetzen von Methoden aus der Sekundarstufe 1: Die Studierenden arbeiten mit Bruchtermen und versuchen diese möglichst einfach darzustellen. Dabei setzen sie durch die auftretenden Zehnerpotenzen bei den Einheiten Potenzgesetze ein.
2. Arbeit mit komplexen Zahlen: Die Studierenden setzen Darstellungswechsel zwischen den verschiedenen Darstellungen komplexer Zahlen (kartesisch, Euler, Polar) ein und versuchen damit zu vereinfachen. Als Vereinfachung kann der Nenner beispielsweise zu einer reellen Zahl gemacht werden.
3. Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen: Die Studierenden bedenken beim Aufstellen der Differentialgleichungen schon, welche Form sie haben müssen, um mit ihnen bekannten Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen lösbar zu sein. Andererseits arbeiten sie über Rückschlüsse, die ihnen erlauben von dem bekannten physikalischen Verhalten der Lösung der Differentialgleichung auf die betrachtete Differentialgleichung zu schließen.
4. Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen: Die Studierenden überlegen, ob Ansätze über Flächenbilanzen möglich sind. Sie nutzen die Translationsinvarianz der Integrale in Aufgabe C, um deren Grenzen beim Aufstellen zu vereinfachen.

5. Mathematische Umstrukturierung: Die Studierenden formen Gleichungen so um, dass sie Problemstellen umgehen. Bei der verschachtelten Formel für den Effektivwert in C2, $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int f(x)^2 dx}$, formen sie so zu $TU^2 = \int f(x)^2 dx$ um.

{B4}: Weitere Methoden aus dem mathematischen Problemlösen

1. Einsetzen von Werten: Die Studierenden setzen in Aufgabe A und D Wertetabellen ein, um sich näher mit dem Verlauf der Funktionen auseinandersetzen zu können.
2. Extremalprinzip: Die Studierenden betrachten extreme Werte (Maxima und Minima), um qualitativ das Verhalten von Bauteilen mathematisch ergründen zu können.
3. Qualitative Betrachtungen der Formeln: Die Studierenden überlegen, unter welchen Bedingungen bestimmte Formeln gesuchte Werte annehmen. Sie überlegen die Einflüsse der Formelbestandteile bezogen auf Proportionalitäten und Antiproportionalitäten. So überlegen sie auch, welche Bestandteile der Formeln für große Werte vernachlässigt werden können.
4. Qualitative Prognose von Lösungen: Die Studierenden überlegen qualitativ, wie eine Lösung für eine Aufgabe aussehen muss. Dieses tritt zum Beispiel in Aufgabe B bezogen auf die Differentialgleichungen auf.

{BC}: Übergang zwischen mathematisch-elektrotechnischem Arbeiten und Validierung

1. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten: Die Studierenden führen abwechselnd Überlegungen aus dem mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten und der Validierung aus, um ein von der Größenordnung her realistisches Ergebnis zu erhalten.

{C1}: Validierung über Einheiten der auftretenden physikalischen Größen

1. Nutzung des SI-Basiseinheiten-System mit Einheitspräfixen: Die Studierenden notieren bei den auftretenden Größen allein die Einheiten und überprüfen, ob diese auf beiden Seiten der Gleichungen identisch sind. Dabei können Einheiten über ihre Darstellung mit den SI-Basiseinheiten ineinander überführt werden.
2. Symmetrieprinzip: Jeder Summand in einer Addition von Größen muss zur Zusammenfassung dieselbe Einheit haben. Dieses kann z. B. in C2 eingesetzt werden.

{C2}: Validierung über Größenordnungen der Ergebnisse

1. Innermathematischer Vergleich mehrerer Größen: Die Studierenden wissen Relationen zwischen unterschiedlichen Größen, also z. B. dass eine Größe immer kleiner als eine andere ist. Dieses kann z. B. in Aufgabenteil C3 eingesetzt werden.
2. Kenntnis aus Veranstaltung: Die Studierenden kennen Wertebereiche für die gesuchte Größe aus der Veranstaltung.
3. Intuitive Vorstellungen: Die Studierenden haben intuitive Vorstellungen z. B. aus Experimenten, welche Größenordnung ein Ergebnis haben kann. Auf diese Weise können allerdings eher Fehler im Bereich von Zehnerpotenzen gefunden werden anstatt beispielsweise halbierte oder doppelte Werte, vgl. Aufgabenteil A6.

{C3}: Validierungsstrategien unter Betrachtung von Realsituationen

1. Validierung nach Blum und Leiß (2007): Die Studierenden interpretieren ihr Ergebnis über dessen physikalische Implikationen in einer Realsituation.

{C4}: Validierung durch Mehrfachbearbeitung

1. Nutzen zweier Rechenwege: Die Studierenden nutzen in ihrem Lösungsprozess zwei verschiedene Rechenwege, um so zu überprüfen, ob sie dasselbe Ergebnis erhalten. Teilweise haben die Studierenden auch unabhängig voneinander die Aufgabe in derselben Weise bearbeitet und dann ihre Ergebnisse verglichen.

2.3 Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

Es zeigen sich trotz des Spektrums der Lösungsprozesse, welches bereits durch die verschiedenen Bearbeitungen der Studierendenpaare deutlich wird, Unterschiede der Studierendenbearbeitungen zu den Bearbeitungen der Experten:

Die Experten bereiten die Aufgaben stärker vor als die Studierenden und arbeiten so mit der Aufgabenstellung. So rechnet der Experte in Aufgabe A, welche in dem Fall auch der Aufgabensteller in der Klausur war, zunächst alle angegebenen Größen um, in dem er die Einheitspräfixe zu Zehnerpotenzen umformt und die Einheiten in die SI-Basiseinheiten-Darstellung bringt, vgl. die Tabellen 4.2.1 und 4.2.2. Die übrigen Aufgabenbearbeitungen der Experten zeigen Ähnliches: In der Expertenbearbeitung von Aufgabe B markiert der Experte die entscheidenden Teile des Schwingkreises und in Aufgabe C markiert der Experte die Übergänge zwischen den Teilen der abschnittsweise definierten Funktion und schraffiert die Flächen. In der Aufgabe D notiert der Experte zunächst symbolisch die Parallelschaltung durch ein $||$. Der Experte in Aufgabe B stellt zusätzlich auch Überlegungen zu dem Aufwand verschiedener Bearbeitungswege an.

Die Experten setzen sich intensiv mit der Physik auseinander und beschreiben teilweise wie in einer Geschichte mit Begriffen wie „Erregung“ die auftretenden physikalischen Mechanismen, vgl. Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008). Mit den Begriffen geht der Experte in Aufgabe A aufmerksamer um und spricht nach der Addition von den Widerständen korrekterweise von einem Ersatzwiderstand, um zu verdeutlichen, dass dieser Widerstand nur eine Zusammenfassung mehrerer tatsächlich auftretender Widerstände ist. Der Experte in Aufgabe B kritisiert einen ungenauen Umgang mit Begriffen in der Aufgabenstellung, da die Aufgabe reale Bauteile (Kondensator, Spule) nicht von idealisierten Bauteilen (Kapazitäten, Induktivitäten) unterscheidet. Die Experten nennen Argumente dafür, dass die erhaltenen Werte realistisch seien. Wie mehrere Studierendenpaare überlegen die Experten, welche Größen in den benötigten Formeln vorkommen müssen, ehe die Formeln aufgestellt werden. Sie belegen ihre Rechnung mit Schlagworten, noch an mehr Stellen als die Studierenden, z. B. „Energieberechnung“ in C4, „Phasenschieber“ in D2 oder auch „Grundformeln der Leistungsberechnung“ in D6.

Aus den Argumentationen zeigt sich, dass die Experten ein größeres Wissen zu den Aufgaben bezogen auf die Elektrotechnik haben – was angesichts ihrer Vorbildung nicht überraschend ist. Sie verschaffen sich schneller einen Überblick über die Aufgaben. In Aufgabe B rekonstruiert der Experte die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen aus seinem physikalischen Wissen und benötigt nicht den Ansatz über das Aufstellen der Differentialgleichungen, er arbeitet also rückwärts. Er erkennt auf einen Blick, dass ein „idealer Schwingkreis“ in der zweiten Aufgabenhälfte von Aufgabe B (B5 bis B7) betrachtet wird.

In den Notizen der Experten zeigen sich stärkere Strukturierungen als bei den Studierenden. Während die Studierendenpaare so in Aufgabe A zunächst die einzelnen Reluktanzen berechnet haben und am Ende aufaddieren, notiert der Experte dieses in einer geschlossenen Formel analog zu der SEL. Er verwendet bei selbstgewählten Benennungen möglichst vielsagende Indizes wie zum Beispiel $R_{\text{ges,Fe}}$ für die Gesamtreltanz im Eisen. Eine später berechnete Größe, $R(0,002\text{m})$, notiert er in seiner bei den Größen, welcher er am Anfang seiner Aufgabenbearbeitung umgerechnet hat, siehe oben. Ein falsches Zwischenergebnis markiert er zunächst, ohne die Rechnung zu revidieren.

8.3 Beantwortung der dritten Forschungsfrage

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen zu der dritten Forschungsfrage

Wie bearbeiten Studierende die exemplarischen Grundlagenaufgaben aus Elektrotechnik-Grundlagenveranstaltungen unter Klausurbedingungen?

zusammengefasst. Dieses ist in zwei Unterfragen gegliedert, welche die kommenden drei Unterabschnitte ausmachen.

3.1 Welche Fehler und Problemstellen treten in den Klausurbearbeitungen der Studierenden auf?

Allgemein ist in den Klausurbearbeitungen auffällig, dass viele Aufgaben von den einzelnen Studierenden entweder eine vollständig richtige Bearbeitung haben oder eine falsche Bearbeitung bzw. Nichtbearbeitung. Halbrichtige Lösungen (abgesehen von der Angabe richtiger Einheiten) gibt es nur in seltenen Fällen. Insbesondere in den jeweiligen späteren Aufgabenteilen, die entsprechend der Abhängigkeitsstrukturen Ergebnisse aus vorherigen Aufgabenteilen erfordern, zeigt sich, dass die Studierenden häufig nur die passende Formel angeben oder nur die richtige Einheit der gesuchten Größe. In den folgenden Absätzen gibt es konkrete Angaben zu den Fehlern und Problemstellen aus den Aufgaben.

In den Aufgaben zeigen sich die folgenden Fehler: Studierende vergessen teilweise Widerstände in A2, obwohl sie diese noch im Ersatzschaltbild beachtet haben, d. h. sie nutzen nicht das Ersatzschaltbild in seiner Rolle als Mathematisierungshilfe. Auch zuvor vorgenommene Trennungen zwischen Eisen- und Luftreluktanzen treten teilweise nicht mehr in den Rechnungen auf. Schon weniger als die Hälfte der Studierenden (38 Studierende) erhält ein richtiges Ergebnis für die Gesamtreltanz in Aufgabenteil A2, wobei sogar 20 Studierende die Skizze qualitativ richtig anfertigen, ohne ein richtiges Ergebnis in der Rechnung erzielt zu haben. In den weiteren Aufgabenteilen von Aufgabe A nimmt die Anzahl der richtigen Bearbeitungen immer weiter ab, wobei sich teilweise die Strategie zeigt, dass nur die Teilergebnisse angegeben werden. In Aufgabe B3 sind bei den Studierenden jeweils beide Bauteilgleichungen richtig und vorhanden oder beide falsch. Ähnliches gilt für die Resultate aus der Anwendung der Kirchhoff-Gesetze. Analog gilt dieses auch für Aufgabenteil B6: Die Studierenden, welche alle benötigten Gleichungen erhalten haben, machen in seltenen Fällen Fehler im Gleichungsmanagement oder beachten nicht die Ableitung. Im Zusammenhang mit den Lösungen der homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen ist auffällig, dass alle Studierenden, die die homogene

Lösung richtig bestimmt haben, auch die inhomogene Differentialgleichung richtig lösen – und das sind immerhin 56 von 92 Studierenden. Es tritt der Fall auf, dass acht Studierende nur die inhomogene Lösung richtig haben, da diese direkt aus der inhomogenen DGL als U_0 abgelesen werden kann. Fehler bei den Integrationen in Aufgabenteil C1 bis C3 entstehen durch eine falsche Beschreibung der Flächen. In Aufgabenteil C2 zeigt sich, dass trotz einer richtigen Angabe der Formel durch mehr als 85% der Studierenden einige Fehler bei der Rechnung auftreten. Als Fehlerquelle erwies sich hier ein falsches Aufstellen der linearen Funktion, die in einem Teilabschnitt notwendig ist; nur 15% der Studierenden bestimmen den Effektivwert richtig.

Als Problemstellen ergeben sich folgende: Den Studierenden ist in Aufgabe A1 unklar, wie eine „Vereinfachung“ aussehen soll, da verschiedene Vereinfachungen angegeben werden bzw. teilweise eine vollständige Zusammenfassung aller Reluktanzen vorgenommen wird. Häufig zeigt sich, dass das Ersatzschaltbild nur eingeschränkt zur Mathematisierung eingesetzt wird. Aufgrund der weitgehend fehlenden Begründungen können wenig Rückschlüsse auf die Hintergründe zur Angabe des Ergebnisses $d = 0$ in A3 gezogen werden. Bei den Studierenden, die begründen, kommen aber Begründungen mit mathematischen oder physikalischen Argumenten gleichhäufig vor. Die in Aufgabenteil B1 erfragten Werte können fast 90% richtig beantworten, jedoch treten häufig bereits Fehler bei der Betrachtung der Werte nach dem Schließen von Schalter S1 auf, deren Ursachen nicht rekonstruierbar sind, aber u. U. mit dem erwähnten Notationsproblem mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten zusammenhängen. Bei der Lösung der Aufgabe ist auffällig, dass die Studierenden in der Klausur ausschließlich das Partikulärverfahren aus der Elektrotechnik-Veranstaltung verwenden und nicht die Kombination aus „Trennung der Veränderlichen“ und „Variation der Konstanten“, die aus der Mathematikveranstaltung bekannt ist und in zwei der fünf Videostudien von den Studierenden verwendet wurde. Während in B7 56 der 92 Studierenden die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung richtig lösen, zeigen sich verschiedene Schwierigkeiten bei dem Bestimmen der beiden Konstanten. In dem letzten Aufgabenteil von Aufgabe C, also C4, geben 80% der Studierenden die Formel für die innere Energie richtig an, aber nur 18% bestimmen diese korrekt mit Einheit, während 40% zumindest noch die richtige Einheit haben, was wieder auf die Ergebnisse von oben hindeutet.

3.2 Wie verbreitet sind die in den qualitativen Studien gefundenen Fehler und Problemstellen? Wie häufig treten sie auf?

Die Bearbeitungsprozesse in den Videostudien und die Bearbeitungsprodukte in den Klausuren sind unter sehr unterschiedlichen Bedingungen entstanden. Zum einen haben die Studierenden teilweise mehr als eine Stunde in den Videostudien an einer Aufgabe gearbeitet, da es keine zeitlichen Beschränkungen gab, während in der Klausur zwei Stunden Zeit für sämtliche Aufgaben war. Des Weiteren liefern die Studierenden in den Videostudien – insbesondere durch das laute Denken – Begründungen dafür, warum sie so vorgehen. In den Klausurbearbeitungen müssen hingegen keine Begründungen angegeben werden, um eine volle Punktzahl zu erreichen, so dass häufig nur Endergebnisse mit kurzen Rechenwegen sichtbar sind. Dieses erschwert die Vergleiche, wobei sich dennoch einige Gemeinsamkeiten zeigen. Zusätzlich können in den Videostudien durch die Diskussion bei der Bearbeitung weitere Fehler vermieden werden. Dennoch zeigen sich Gemeinsamkeiten, gerade im Bereich der genannten Unklarheiten:

Bei der Bearbeitung von A1 und A2 zeigt sich in den Videostudien wie in den Klausurbearbeitungen, dass den Studierenden unklar ist, wie eine Vereinfachung des Ersatzschaltbilds

zu verstehen ist und so gibt es ähnliche Lösungsvarianten in den Lösungsprozessen und -produkten bzgl. der Zusammenfassungen bis hin zu einer Zusammenfassung aller Reluktanzen zu einer einzigen. Ebenfalls zeigen sich Gemeinsamkeiten, dass das Ersatzschaltbild, was eigentlich als Mathematisierungshilfe dient, nicht bei der Bearbeitung von A2 als solche verwendet wird. Der korrekte Übergang von Ersatzschaltbild zu einem Rechenansatz wird von 58 von 92 Studierenden richtig durchgeführt, aber ein richtiges Ergebnis erzielen nur 38 Studierende, während in den Videostudien letztendlich alle Gruppen ein richtiges Ergebnis hatten. Daher ist keine Aussage dazu zu machen, ob in den Videostudien auch ohne ein richtiges Ergebnis für die Gesamtreluktanz die Skizze qualitativ richtig wäre. Zwölf Studierende in den Klausuren und ein Studierendenpaar haben keine Skizze erstellt, wobei zumindest in der Videostudie dieser Aufgabenteil wohl übersehen wurde, da keinerlei Aussagen hierzu gemacht werden. Die unterschiedlichen Begründungen in Aufgabe A3 für den Wert $d = 0$ traten in beiden in den Videostudien gefundenen Formen auf, jedoch haben die meisten Studierenden kein Argument dafür in der Klausur angegeben. Auch bzgl. der in den Videostudien unklaren Erwartung an die Lösung können keine Aussagen gemacht werden, wobei eben in den Videostudien die Studierenden eine Begründung für $d = 0$ liefern wollten. Die Verwendung einer falschen Reluktanz in A4 konnte in den Klausuren nicht nachgewiesen werden, aber nur 20 Studierende in der Klausur haben den Aufgabenteil richtig bearbeitet, während ihn alle Studierendenteams in den Videostudien richtig bearbeitet haben. Ansonsten zeigt sich in diesem wie in den weiteren Aufgabenteilen, dass die Studierenden häufig nur die richtige Einheit angeben. Der letzte Aufgabenteil, also A6, wurde von allen Studierendenpaaren richtig bearbeitet, wobei diese Bearbeitung teilweise sehr lange dauerte; in der Klausur gab es nur 14 richtige Bearbeitungen, wobei zusätzlich viele nur die richtige Formel und die richtige Einheit (Kilogramm) angegeben haben.

Bei Aufgabe B ist es wieder so, dass die Bearbeitungen in den Videostudien erstens deutlich höhere richtige Anteile hatten und zweitens spätere Aufgabenteile überhaupt „ernsthaft“ (also ohne eine pure Angabe der Formeln oder Einheiten) bearbeitet wurden. Schwierigkeiten in der Notation für die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, welche auch in B5 auftraten, zeigen sich jedoch auch in den Klausurbearbeitungen: Die Werte jeweils nach dem Schließen werden nur noch von 60% der Studierenden in der Klausur richtig angegeben, während es 90% bei den Werten vor dem Schließen waren. Die Studierenden bestimmen letztendlich in den Videostudien alle relevanten Gleichungen in B3 und B6 richtig, während in den Klausuren sowohl für Bauteilgleichungen als auch für die Gleichungen aus den Kirchhoff-Gesetzen gilt, dass entweder beide vorhanden und richtig sind oder beide falsch bzw. nicht vorhanden. Ein Studierendenpaar in den Videostudien hatte jeweils eine richtig, aber konnte das in dem mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten korrigieren, was wahrscheinlich aufgrund in einer Klausursituation nicht möglich gewesen wäre. Während sich in den Videostudien in B4 jedoch zeigte, dass es teilweise trotz Bestimmen einer richtigen Lösung der homogenisierten Differentialgleichung Fehler bei der inhomogenen Differentialgleichung gab, was in den Klausuren in der Form nicht auftrat. Jedoch bei B7 traten deutliche Unterschiede in der Klausur dabei auf, von wievielen die homogene DGL gelöst wurde (56 Studierende) und von deutlich weniger Studierenden (38 Studierenden) die Konstanten korrekt bestimmt wurden. Diese Problemstelle bestätigt sich, wobei in den Videostudien hier aufgrund der Zeit ausführlichere Überlegungen durchgeführt werden konnten.

In den Aufgabenteilen C1 und C3 zeigen sich aufgrund der richtigen Bearbeitungen in den Videostudien kaum Fehler, die aus den Klausurbearbeitungen erklärt werden können. Auffällig ist in den Klausurbearbeitungen jedoch, dass bereits Aufgabenteil C1 nur von etwas mehr als

der Hälfte der Studierenden korrekt bearbeitet wurde. In Aufgabenteil C2 haben in der Klausur nur 15% ein richtiges Ergebnis erzielt, während noch 85% die richtige Formel angegeben haben. Schwierigkeiten wie in den Klausuren, dass z. B. die lineare Funktion im dritten Teilintervall falsch aufgestellt wurde, haben sich bei einem Studierendenpaar gezeigt. Ein weiteres hat jedoch eine Strategie gezeigt, wie sie mit der verschachtelten Formel für den Effektivwert umgehen kann, nämlich durch eine Umformung im ersten Schritt, die den Integranden auf der rechten Seite isoliert. In Aufgabenteil C4, der von allen Studierendenpaar korrekt bearbeitet wurde, traten in den Klausurbearbeitungen wieder häufig die Punkte auf, dass nur richtige Formeln und richtige Einheiten angegeben wurden.

8.4 Gegenüberstellung zu den Ergebnissen aus der vorgestellten Theorien und Ansätze für Folgeuntersuchungen

Dieser Abschnitt beschreibt Zusammenhänge der Ergebnisse zu den Theorien, welche in Kapitel 2 näher vorgestellt wurden, und dabei soll die Frage geklärt werden, an welchen Stellen sich Unterschiede zu den dargestellten Ergebnissen zeigen. Darüber hinaus werden mögliche Erklärungen für die Unterschiede erörtert.

8.4.1 Beschreibung der Unterschiede zu Ergebnissen vergleichbarer Untersuchungen

Zum Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) ergeben sich folgende Unterschiede: Es gibt bei der Mathematisierung keine Verwendung von Realmodellen oder freien Modellierungsansätzen, bei denen die Studierenden die Idealisierungen selbst vornehmen müssen. Stattdessen können prototypische Ansätze aus Ankerbeispielen für bestimmte Situationen übernommen werden, welche jedoch Freiheitsgrade in den vorgegebenen Elementen (Bauteilen, Schaltungstopologie, Umschalter) haben. In mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten werden Größen (Zahlen mit Einheiten) statt bloßen Zahlen verwendet und in den Bearbeitungsprozessen sind mathematische Überlegungen mit physikalischen bzw. elektrotechnischen Überlegungen verwoben, d. h. es gibt keine Trennung in zwei Welten, der Mathematischen und dem „Rest der Welt“. Auch Zwischenergebnisse innerhalb der Rechnungen werden mit Hilfe physikalischer Überlegungen überprüft. Validierungen dienen hier nicht zur Überprüfung und einem eventuellen Verwerfen des Ansatzes, sondern der Überprüfung der erhaltenen Ergebnisse, vgl. Biehler et al. (2015).

Im Vergleich zu Riebel (2010) zeigt sich, dass die Studierenden in den Studien überhaupt und in vielfältiger Weise validieren. Eine Ursache könnte in den laut den Experteninterviews realistischen Werten liegen, so dass eine Validierung vor den realen Hintergründen hier Sinn ergibt.

Wie im mathematischen Problemlösen nach Polya (1949) zeigt sich in vielen Fällen ein Strukturierung der Prozesse in Phasen und die Studierenden beantworten auch für sich selbst die Hilfsfragen nach Polya (1949) wie z. B. nach gegebenen („Was ist gegeben?“) und gesuchten Daten („Was ist gesucht?“). Es zeigen sich auch Parallelen zu dem Vorgehen bei Anwendungsaufgaben, wie es Polya (1949) anhand einer Anwendungsaufgabe zu dem Bau eines Damms beschreibt, also einer Aufgabe aus dem Bereich des Bauingenieurwesens. Unterschiede gibt es jedoch darin, dass die Menge an Daten und zu erfüllenden Bedingungen durch die Form

der Aufgabe bei den vier vorliegenden Aufgaben überschaubar sind und keine Idealisierungen von den Studierenden vorgenommen werden, die bei der von ihm vorgestellten Aufgabe einen großen Teil der Überlegungen ausmachen. Dieses wird begünstigt durch die konventionalisierten Skizzen, welche durch zuvor bearbeitete analoge Aufgaben eingeführt wurden, mit ihren impliziten Validierungen und einen Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung und Bearbeitung liefern.

Es zeigen sich auch Gemeinsamkeiten zu den Arbeiten aus der amerikanischen Physikdidaktik zum Einsatz von Mathematik in physikalischen Grundlagenveranstaltungen, d. h. Tuminaro und Redish (2007) bzw. Bing (2008). Die erkenntnistheoretischen Spiele nach Tuminaro und Redish (2007) werden von den Studierenden zum Ergründen der physikalischen Situation verwendet, wobei – wie auch von Bing (2008) kritisiert wurde – viele Schritte in den Ausführungen der Studierenden implizit bleiben. Eine „Pictorial Analysis“ wird an verschiedenen Stellen von Studierenden eingesetzt, um dem Teampartner bei der Aufgabenbearbeitung das Vorgehen zu erläutern. Bing (2008) hilft allgemein bei der Unterteilung der grundsätzlichen Vorgehensweisen und Rechtfertigungen, wobei als zwei Hauptpunkte „Calculation“ und „Physical Mechanism“ auftreten, aber in vielen Fällen kombiniert bei denselben Aufgaben auftreten. Ein bloßes „Berufen auf Autorität“ durch Heranziehen von Faktenwissen aus dem Skript tritt ohne eine Kombination mit einer der beiden genannten Hauptpunkte nicht auf.

8.4.2 Optimierungen für die Analyse verwandter Fragestellungen

Zur Analyse der Forschungsfragen, vgl. Seite 72, wurden folgende Studien durchgeführt:

Zu jeder Aufgabe wurde ein Wissenschaftlicher Mitarbeiter aus der Elektrotechnik als Experte interviewt. Bei der Aufgabe A war dieser Experte der Mitarbeiter, der die analysierten Klausuraufgaben gestellt hat und die Korrektur koordiniert hat. Bei den übrigen drei Aufgaben, d. h. Aufgabe B, C und D, waren es andere Wissenschaftliche Mitarbeiter aus dem Elektrotechnik-Institut, welches die Klausur gestellt und die an der Korrektur beteiligt waren, vgl. Abschnitt 3.2. Des Weiteren wurden Videostudien mit vierzehn Studierendenpaaren sowie einem Studierendentrio durchgeführt, um Bearbeitungsprozesse von Studierenden erfassen zu können, in dem sie bei der Bearbeitung laut dachten, vgl. Abschnitt 3.4. Darüberhinaus lagen Bearbeitungen von 90 Studierenden zu den Aufgaben vor, die unter Klausurbedingungen entstanden waren, vgl. Abschnitt 3.5.

Nach der Auswertung der Studien ergaben sich mögliche Verbesserungen für die weitere Untersuchung verwandter Themen:

1. Experteninterviews:

Bei den Experteninterviews könnten als Optimierung zwei Elektrotechnik-Experten miteinander diskutieren und auf diese Weise deren Expertenwissen einerseits vereinigt und andererseits kritischer beleuchtet werden. Dabei wäre insbesondere interessant, ein Paar aus einerseits dem Aufgabensteller und andererseits einem weiteren Experten zu bilden. Ersterer kann mehr zu den Motiven für das Stellen einer solchen Aufgabe sagen, während zweiterer die Aufgabenstellung kritischer betrachten und mögliche Unklarheiten besser aufdecken kann.

2. Studierendenpaare:

Bei den Studierendenpaaren könnte es interessant sein, dasselbe Paar für unterschied-

liche Aufgaben heranzuziehen. Dadurch könnten Fragen geklärt werden, ob die Vorgehensweise bei der Bearbeitung eines Aufgabentyps bei einem Paar abhängig oder unabhängig von der Aufgabe geschieht und es gewisse „Vorlieben“ der Paare gibt, die für Ungenauigkeiten beim Vergleich der Bearbeitungsprozesse sorgen.

3. Auswahl der Studierendenpaare:

Fast alle Paare haben sich mathematisch stark erwiesen und es wäre interessant, auch schwächere Studierende und deren Formen der Bearbeitung erfassen zu können, um auch deren Strategien erfassen zu können.

4. Analyse der Klausurbearbeitungen:

Die Klausurbearbeitungen enthielten häufig nur die Endergebnisse zu den Aufgaben und kurze Rechenwege, ohne nähere Begründungen zu liefern. Derartige Begründungen werden in Klausuren aus der GET-B auch nicht von den Studierenden verlangt.

8.4.3 Übergeordnete Fragen für weitere Untersuchungen

Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit dargestellt, ist eine der größten Herausforderungen bei dieser Arbeit, dass eine Kompetenzentwicklung in zwei verschiedenen Fächern stattfindet, nämlich einerseits in der „Mathematik für Ingenieure“ und andererseits in den „Grundlagen der Elektrotechnik“. Im folgenden werden diese beiden Veranstaltungen und mögliche Implikationen für die Lehre dort zunächst separat und dann Ansätze zur integrierten Behandlung von mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Inhalten zur Verknüpfung vorgestellt:

Es zeigt sich in den Aufgaben eine Vielzahl mathematischer Themen, welche die thematische Breite in den Mathematik-Grundveranstaltungen für Elektrotechnik-Studierende rechtfertigt. Zusätzlich zu den Themen der vier in dieser Arbeit betrachteten Aufgaben werden auch Integralsätze aus der Vektoranalysis herangezogen, um Werte in der „GET-A“ berechnen zu können bzw. allgemeinere Vorgehensweise ohne Homogenitätsüberlegungen in Aufgabe A verwenden zu können. Darüber hinaus wurden von den Experten aus der Elektrotechnik immer wieder Schwierigkeiten bei den mathematischen Grundlagen wie Potenzgesetzen erwähnt, welche ausschließlich in mathematischen Vorkursen behandelt werden. Bezogen auf die Elektrotechnik kann eine Behandlung der drei Elemente der Lösungsprozesse in den Elektrotechnik-Veranstaltungen nützlich sein, um den Studierenden einen Anhalt für die Strukturierung ihrer Lösungsprozesse zu geben, und gerade in dem Kontext auch die Bedeutung der Mathematik in den drei Phasen hinzuweisen. Hierbei ist ein interessanter Punkt, dass vier der fünf Studierendenpaare in Aufgabe B einen Algorithmus zur – bis auf die Verwendung von Größen – innermathematischen Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung verwendet haben, den sie in den universitären Mathematik-Veranstaltungen für Differentialgleichungen dieser Ordnung nicht kennengelernt hatten, auch wenn sie teilweise hinterfragten, ob die verwendeten mathematischen Methoden überhaupt anwendbar sind. Die Anteile der beiden Fächer bei den drei Phasen sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

	Physikalischer/ Elektrotechnischer Kontext	Mathematischer Kontext
Mathematisierung	Verstehen einer über eine konventionalisierte Skizze gegebenen physikalischen Situation	Einsetzen von Überführungsregeln häufig mit Mitteln der Graphentheorie, Interpretation von Gleichungen wie beispielsweise den Bauteilgleichungen
Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten	Bedenken der physikalischen Implikationen der Rechnungen, Finden von konkreten Werten (wie Anfangswerten einer Differentialgleichung) bei den betrachteten Funktionen	Verwenden von den jeweiligen mathematischen Methoden zur Lösung der Aufgabe
Validierung	Bedenken der physikalischen Implikationen, Größenordnung mittels physikalischer Plausibilität	Verrechnen der Einheiten auf Basis der SI-Einheiten, Untersuchung der Größenordnung durch Vergleich mathematischer Formeln

Daraus ergibt sich die Frage, wie eine gute Abstimmung zwischen den beiden, zeitlich parallel stattfindenden Vorlesungen zur Mathematik und Elektrotechnik aussehen und den Studierenden beim Umgang mit dieser Schnittstelle geholfen werden kann. Für Anwendungsaufgaben legt Wolf (2017) sechs Gütekriterien fest, die sich auf Anwendungsaufgaben in der „Mathematik für Maschinenbauer“ beziehen, vgl. Seite 31:

- Mathematik-Themenorientiert
- Maschinenbau-Authentisch
- Modellierungsorientiert
- Übersichtlich und kognitiv angemessen
- Abgeschlossen bzgl. Maschinenbauwissen
- Prototyp- und Ankerbeispielaufgabe für Mathematik und / oder Maschinenbau

Für Aufgaben, die in Grundlagen der Elektrotechnik eingesetzt werden, wird in diesem Absatz untersucht, ob man die Kriterien übertragen kann:

Die Aufgaben haben keine mathematische Themenorientierung, da sie Teil einer Elektrotechnik-Veranstaltung sind und die Mathematik hier nur als „Mittel zum Zweck“ dient, welche zur Lösung benötigt wird. Die Aufgaben haben nicht das Ziel, Mathematik zu vermitteln. Die Aufgaben sind bezogen auf die Elektrotechnik authentisch; dieser Punkt wurde von den Experten geäußert und die Studierenden setzen die Authentizität auch ein, um z. B. ihre Ergebnisse validieren zu können. Die Modellierungsorientierung, d. h. ein stetiger Wechsel zwischen mathematischem Vorgehen und physikalischer Interpretation, war keine Vorgabe an den Steller der Aufgabe und die Studierenden, aber wurde zumindest in den studentischen Bearbeitungsprozessen immer wieder eingesetzt, um den Lösungsweg entwickeln zu können. Die übrigen drei Punkte ergeben sich dadurch, wie die Elektrotechnik-Aufgaben üblicherweise aufgebaut sind: Zur Übersichtlichkeit der gestellten Aufgabe wird Aufgabe A bis D eine Skizze eingesetzt (Kriterium

4) und diese Skizzen sind konventionalisiert, wodurch die Aufgaben mit Variationsmöglichkeiten (Ändern der Schaltungstopologie oder der Bauteile) auch prototypisch und Ankerbeispiele für Elektrotechnik-Aufgaben (Kriterium 6). Prototypische Ankerbeispiele z. B. für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen unterschiedlicher Formen (verschiedene Ordnung, homogen bzw. inhomogen) wurden in der Mathematik geliefert. Die Elektrotechnik-Aufgaben sind auch weitestgehend abgeschlossen bezogen auf das Elektrotechnikwissen, wobei es bei den vier Aufgaben einzelne Ausnahmen gibt: Die Aufgabe A6, in der die Masse über ein Kräftegleichgewicht berechnet werden musste, setzt neben einem bisher unbekannten Aufgabentypen auch Wissen aus der Technischen Mechanik, nämlich zu Kräftegleichgewichten, ein, d. h. in dem Fall sogar Maschinenbauwissen.

Ein weiterer zentraler Punkt ist, in welcher Weise die Ergebnisse dieser Arbeit auf verwandte Fächer übertragen werden können und die Aufteilung in drei Phasen (Mathematisierung, mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten, Validierung) auch dort erkennbar ist. Mögliche solche Fächer sind:

- die „Technische Mechanik“ oder die „Baumechanik“, welche im Grundlagenstudium des Maschinenbaus bzw. des Bauingenieurwesens eine ähnliche Rolle wie die „Grundlagen der Elektrotechnik“ für Studierende der Elektrotechnik spielen
- fortgeschrittene Bachelor- wie auch Masterveranstaltungen in den Ingenieurwissenschaften
- universitäre Fächer im Bereich der Informatik oder der Naturwissenschaften, die Mathematik einsetzen

8.5 Schlusswort – Implikationen für Lehre und Forschung

In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wie die Ergebnisse dieser Arbeit in der Lehre für Elektrotechnik-Studierende eingesetzt werden können. Dabei sollen zwei unterschiedliche Schwerpunkte gelegt werden:

- der erste Unterabschnitt richtet sich an die Lehrenden in den Grundlagenveranstaltungen im Bereich der Elektrotechnik, sowohl in elektrotechnischen Grundlagenfächern als auch in der „Mathematik für Ingenieure“
- der zweite Unterabschnitt enthält ein Schema für die Lernenden, die sich mit ähnlichen Aufgaben wie Aufgabe A bis D auseinandersetzen
- in dem dritten Unterabschnitt werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie und wo die theoretischen Ergebnisse zur Forschung eingesetzt werden können

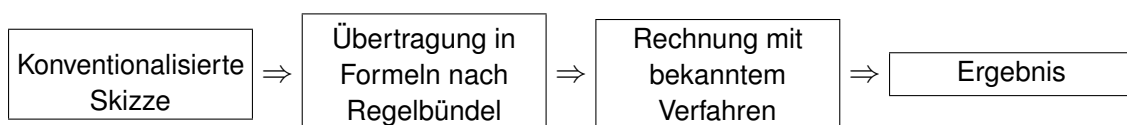
8.5.1 Implikationen für Dozenten

In diesem Unterabschnitt werden Implikationen für Dozenten vorgestellt. Eine zentrale Frage ist dabei, was eine Mathematik-Veranstaltung leisten soll, um den mathematischen Anforderungen in der Elektrotechnik gerecht zu werden. So sollen Vorschläge für die Gestaltung der jeweiligen Veranstaltungen gegeben werden:

In den Bearbeitungen der Studierenden haben sich Schwierigkeiten in grundlegenden Themen der Mathematik gezeigt, welche üblicherweise nicht in den regulären Mathematik-Veranstaltungen, sondern höchstens in mathematischen Vorkursen behandelt werden. Hierzu zählen beispielsweise die für Einheitenrechnungen relevanten Potenz- und Wurzelgesetze, Trigonometrie oder das Aufstellen linearer Gleichungen. Aufgrund der hohen Themenvielfalt der Grundlagenveranstaltungen in Mathematik und Elektrotechnik, wie sie in Kapitel 1 näher erläutert wurde, ist eine explizite Behandlung derartiger Themen häufig allein aus zeitlichen Gründen jedoch nicht möglich, auch wenn sie eine häufige Fehlerquelle gerade in den universitären Mathematik-Veranstaltungen sind. Es kann in diesem Fall dadurch Abhilfe geschaffen werden, dass bereits in mathematischen Übungsaufgaben eben solche Werte verwendet werden, die die Anwendung von grundlegenden mathematischen Methoden erfordern. So kann im Rahmen der Integralrechnung in einer Veränderlichen sogar die Addition von Brüchen oder die Anwendung von Potenzgesetzen abgefragt werden, ohne dass sich thematische Kürzungen bezogen auf das Thema „Integralrechnung“ selbst ergeben. Eine weitere mögliche Herangehensweise wäre Aufgaben der Form „Bestimmen Sie eine Tangente so, dass sie zu der Gerade durch zwei vorgegebene Punkte parallel ist“ zu stellen, da auch das Aufstellen von Geradengleichungen, das höchstens im Vorkurs behandelt wird, kombiniert mit Differentialrechnung, also einem Thema aus den mathematischen Grundlagenveranstaltungen, wiederholt wird. Falls die Studierenden nicht am Vorkurs teilgenommen haben, erhalten sie so die Information, dass diese Inhalte erstens relevant sind, aber zweitens ohne weitere Thematisierung in den Grundlagenveranstaltungen vorausgesetzt werden.

Wenn Verbindungen zu dem Anwendungsfach, hier Elektrotechnik, aufgezeigt werden sollen, kann dieses auf einer niedrigen Ebene schon allein dadurch geschehen, dass entsprechende Themengebiete aus der Elektrotechnik im Rahmen der Mathematik-Veranstaltung genannt werden. Beispielsweise kann dieses explizit bezogen auf Aufgabe B geschehen, in dem gesagt wird, dass gewöhnliche Differentialgleichungen bei der Betrachtung von Schwingkreisen auftreten. Die Studierenden sollten nicht durch offene Modellierungsaufgaben, welche ohnehin zumindest in der Elektrotechnik nicht auftreten, überfordert werden oder durch unauthentische Aufgaben in künstlichen Anwendungskontexten dazu verleitet werden, die zugrundeliegende Physik zu ignorieren. Andererseits sollte jedoch eine Redundanz zu der Elektrotechnik vermieden werden, da in der Mathematik eine hohe Themenvielfalt herrscht und die Erwartung der Lehrenden aus der Elektrotechnik eine korrekte Vermittlung der dort benötigten mathematischen Inhalte ist. Beispielsweise könnten die Aufgabengabenteile C1 bis C3 ohne eine tiefere Einführung in die Elektrotechnik bearbeitet werden (sofern die Formeln vorgegeben sind), jedoch soll die Aufgabe eben nicht dazu dienen, Mathematik zu üben, sondern sich mit Signalanalyse auseinanderzusetzen, was das Durchdenken physikalischen Vorgänge sowie Plausibilitäts- und Überprüfungsüberlegungen miteinschließt, was in dieser Form tiefere elektrotechnische Kenntnisse voraussetzt.

Bezogen auf die Elektrotechnik sollte stärker darauf Bezug genommen werden, welche Struktur die Lösungsprozesse von Elektrotechnik-Aufgaben haben. Gerade durch die konventionalisierten Skizzen, welche nach festgelegten (teilweise graphentheoretischen) Regeln übersetzt werden, kann auch der Aspekt betont werden, dass hier – neben den verwendeten Rechenverfahren – auch die Mathematik als Strukturwissenschaft eingesetzt wird. Es ergeben sich üblicherweise folgende Schritte:



Diese sollten einerseits thematisiert werden, andererseits aber auch betont werden, dass immer wieder physikalische Argumentationen und Implikationen parallel bedacht werden müssen.

In den Veranstaltungen aus der Elektrotechnik sollte auf eine genaue mathematische Argumentation geachtet werden, beispielsweise in der Unterscheidung von Gleichheiten und Annäherungen an eine Asymptote. So ist die Argumentation über eine Asymptote in B4 sowohl bezogen auf Mathematik als auch auf Physik genauer als die Betrachtung eines Funktionswerts bei ∞ , um über Gleichheit anstatt einer Konvergenz mittels eines Limes (vgl. B4) argumentieren zu können. Damit sollte verhindert werden können, dass Studierende zu Aussagen wie der zitierten „In Elektrotechnik darfst das, in Mathematik nicht“ kommen.

Ein letzter Punkt ist hier eine gute Abstimmung zwischen der Mathematik- und der Elektrotechnik-Veranstaltungen bezogen auf die an die Studierenden gestellten Anforderungen. In Aufgabe B sind solche Überlegungen in B5 bis B7 des Aufgabenstellers erkennbar, da dort durch die Verschiebung der Zeitachse statt einer inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachtet wird, wodurch die Studierenden keine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels eines sogenannten „Ansatzes vom Typ der rechten Seite“ finden müssen. Jedoch wurde bei Aufgabe D der mathematische Aufwand nicht in dem Maße betrachtet, da dort mehrfach Doppelbrüche komplexer Zahlen in verschiedenen Darstellungen verlangt sind, die viele Fehlerquellen enthalten und zu einem sehr schlechten Ausfall dieser Klausuraufgabe führten.

Dieses Nebeneinander von Mathematik und Elektrotechnik zeigte verschiedene Auswirkungen in den Analysen in dieser Arbeit:

- Bereich Differentialgleichungen: Die Studierenden in Mathematik und Elektrotechnik hatten verschiedene Verfahren zur Lösung kennengelernt – einerseits Partikuläransatz in der Elektrotechnik und andererseits Trennung der Veränderlichen sowie Variation der Konstanten in der Mathematik –, nutzten aber zur Lösung fast ausschließlich das Verfahren aus der Elektrotechnik, jedoch weitgehend ohne Überlegungen zu der Anwendbarkeit der mathematischen Methoden zu artikulieren.
- Bereich Vektoranalysis: In „GET-A“ wird im Zusammenhang mit elektrotechnischen Feldern direkt am Anfang des ersten Semesters Vektoranalysis behandelt. Die benötigte Theorie, die zu einem Verständnis der eingesetzten Integralsätze von Gauss und Stokes benötigt wird, wird aufgrund des großen theoretischen Fundaments jedoch erst deutlich später in der Mathematik behandelt, vgl. „Karte der Lernvoraussetzungen beim Thema mehrdimensionale Integration“, vgl. Abbildung 1.2.1 auf Seite 14.

Gerade bei Studierenden, von denen eine integrierte Verwendung von mathematischen und elektrotechnischen Inhalten erwartet wird, sollten hier Missverständnisse vermieden werden.

8.5.2 Implikationen für Studierende

Es zeigen sich in den Analysen drei unabhängige Phasen, welche teilweise mehrfach innerhalb derselben Aufgabe durchlaufen werden. Im folgenden wird ein Schema vorgestellt, welches auf den theoretischen Ansätzen aus Kapitel 2, konkreter Blum und Leiß (2007), Polya (1949) sowie Tuminaro und Redish (2007) und Bing (2008) aufbaut. Dieses Schema soll Studierenden bei der Aufgabenbearbeitung helfen, gerade wenn sie noch keine oder kaum Erfahrung mit derartigen

Aufgaben haben. Damit werden die Strategien aus der Beantwortung von Forschungsfrage 2.2 operationalisiert.

Phase 1: MATHEMATISIERUNG

1. Welche Form der Lösung wird erwartet? Müssen mathematischen Methoden eingesetzt werden oder ist die Lösung zum Beispiel durch Überlegungen zu der betrachteten physikalischen Situation zu erhalten?
2. Welche Größen sind in der Aufgabe gegeben? Forme sie geeignet um:
 - Übersetze die Einheiten in ihre Darstellung in den SI-Basiseinheiten Meter (m), Kilogramm (kg), Sekunde (s), Ampere (A), Kelvin (K), Mol (mol) und Candela (cd)
 - Übersetze die Einheitenpräfixe (... , nano, mikro, milli, kilo, mega, giga, ...) in Zehnerpotenzen (... , 10^{-9} , 10^{-6} , 10^{-3} , 10^{+3} , 10^{+6} , 10^{+9} , ...)

Ziehe die Einheit der Zielgröße heran und stelle sie ebenfalls in SI-Basiseinheiten dar. Bei Unklarheiten bzgl. der Einheiten erschließe sie über Dimensionsüberprüfungen aus den bekannten Einheiten der übrigen Größen.
3. Überlege, ob du ähnliche Aufgaben in den Elektrotechnik-Vorlesungen oder -Übungen gesehen hast und versuche das Verfahren zu übernehmen. Welche Variationen und Veränderungen gibt es zu den gefundenen, ähnlichen Aufgaben?
4. Sammele Gleichungen unter Verwendung der Skizze in der Aufgabe. Betrachte dabei:
 - die vorhandenen Bauteile wie Ohm'sche Widerstände, Kondensatoren bzw. Kapazitäten, Spulen bzw. Induktivitäten
 - die Schaltungstopologie, d. h. den Aufbau des Netzwerks, sowohl bezogen auf Reihen- und Parallelschaltungen als auch bezogen auf die Anwendung elektrotechnischer Gesetze (z. B. Kirchhoff).
 - führe gegebenenfalls zum besseren Verständnis Veränderungen an der Situation durch.
 - wenn du eigene Bezeichnungen für Variablen wählen musst, wähle diese möglichst eindeutig, so dass aus ihrem Index die Bedeutung für die Rechnung klar wird
 - interpretiere die Formeln, die du verwendest, anstatt sie einfach heranzuziehen
5. Bedenke die physikalischen Hintergründe der zugrundeliegenden Aufgabe:
 - Was passiert, wenn Bauteile ergänzt oder weggelassen werden oder die Schaltungstopologie verändert wird?
 - Welche physikalischen Vorgänge treten in den verschiedenen Situationen auf? Kennst du Begriffe, die sie beschreiben?
 - Welche Größen und Merksätze sind relevant in dem Kontext?
6. Überführe gegebenenfalls in vereinfachte, in den Veranstaltungen eingeführte elektrotechnische Darstellungen wie Ersatzschaltbilder



Phase 2: MATHEMATISCH-ELEKTROTECHNISCHES ARBEITEN

1. Kannst du die auftretenden mathematischen Ausdrücke vereinfachen?
 - Gibt es ein alternatives, einfacheres Verfahren, was du zur Rechnung einsetzen kannst?
 - Kannst du die Form der Gleichungen durch Umformungen vereinfachen?
2. Betreibe Gleichungsmanagement, d. h.
 - kombiniere die vorliegenden Gleichungen, so dass gesuchte Größen aus den Gleichungen, die du im Rahmen der Mathematisierung erhalten hast, bestimmt werden können
 - unterscheide bekannte und unbekannte Größen
 - falls ein über- oder unterbestimmtes System entsteht, gehe zum Schritt der Mathematisierung zurück
3. Wende ein passendes mathematisches Verfahren zur Lösung an. Überlege vor der Rechnung, welche Form das Ergebnis haben kann. Bedenke Einschränkungen der Verfahren, welche in den Mathematik-Veranstaltungen gelehrt wurden.
4. Kannst du durch Betrachtung der Formeln z. B. im Sinne vom Einsetzen extremer Werte qualitativ Aussagen über die Ergebnisse machen? Welche Proportionalitäten treten auf?



Phase 3: VALIDIERUNG

1. Nutze Strategien zur Überprüfung der Ergebnisse. Hierzu zählen:
 - Kontrolliere die Einheiten (gegebenenfalls in ihrer Darstellung in SI-Basiseinheiten) auf beiden Seiten der Gleichung. Stimmen diese überein?
 - Überprüfe, ob die Größenordnung des Ergebnisses sich aus den Zehnerpotenzen der eingesetzten Größen ergibt oder aus dem Vergleich mit anderen errechneten Ergebnissen durch innermathematischen Vergleich ergibt. Sind Wertbereiche bekannt, in denen die Werte liegen können?
2. Bedenke die physikalischen Implikationen der Ergebnisse:
Ist das errechnete Ergebnis entsprechend Messergebnissen aus z. B. in Grundlagenlaboren durchgeführten Versuchen oder mit dem Wissen aus der Elektrotechnik-Veranstaltung plausibel?

8.5.3 Implikationen für die Forschung

Diese Arbeit stellt einen neuen Ansatz vor, wie die Mathematikverwendung in Anwendungsfächern und die dabei von Studierenden bei der Aufgabenbearbeitung erwarteten und tatsächlich auftretenden mathematik-bezogenen Kompetenzen untersucht werden können. Dabei werden im Rahmen der Forschungsfrage 2.2,

Welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Studierendenbearbeitungen und zu den Expertenbearbeitungen der Aufgaben?

auch Strategien beschrieben, welche die Studierenden an der Schnittstelle von Mathematik und einem Anwendungsfach nutzen. Beides kann insbesondere durch die Kombination von vier verschiedenen Studien (Studi-Expert-Lösung, Experteninterviews, Prozessanalysen aus Videostudien zur Aufgabenbearbeitung, Produktanalysen aus Klausurbearbeitungen zur Aufgabenbearbeitung) die Grundlage für weitere Untersuchungen bilden und so einen Beitrag zu der Beschreibung weiterer derartige Schnittstellen bilden, z. B. in Grundlagenfächern aus weiteren Ingenieurwissenschaften, Naturwissenschaften (insbesondere Physik), Wirtschaftswissenschaften oder der Informatik genauso wie bei Fächern aus höheren Semestern in den genannten Studienfächern. In diesem Zusammenhang können die vier Formen von Studien bei verschiedenen Aufgaben aus dem Anwendungsfach folgendermaßen eingesetzt werden:

1. Die Studi-Expert-Lösung, welche das normative Fundament für die weiteren Analysen bilden und von einem Mathematiker unter Verwendung der Materialien aus der Anwendungsveranstaltung erstellt werden, welche den Studierenden zur Verfügung stehen.
2. Die teilstrukturierte Experteninterview mit einem Experten aus dem Anwendungsfach aufbauend auf der PARI-Methodik, welches aus drei Phasen besteht:
 - (a) Aufgabenbearbeitung durch den Experten mit lautem Denken
 - (b) Durchgehen der Aufgabenbearbeitung mit gezielten Rückfragen
 - (c) didaktische Rekonstruktion typischer Fehler, Alternativlösungen, Validierungsmöglichkeiten sowie erwartete Kompetenzen bei Studierenden sowie Alternativaufgaben zu demselben Themengebiet

Die Expertenbearbeitung aus der ersten Phase kann darüber hinaus zum Vergleich mit den Bearbeitungen der Studierenden herangezogen, um Kompetenzentwicklungen beschreiben zu können.

3. Prozessanalysen von Bearbeitungsprozessen von Studierenden mit lautem Denken, in denen die Studierenden selbstständig die Aufgaben bearbeiten (mit einer vorher entschiedenen Auswahl an Hilfsmitteln) und dabei typische Strategien bei der Bearbeitung zeigen, welche sich durch die Bearbeitung zahlreicher Aufgaben aus dem Anwendungsfach entwickelt haben.
4. Produktanalysen von Studierendenbearbeitungen z. B. aus Klausuren, welche über Kategorisierungen analysiert werden. Dieses kann als Ergänzung für die Ergebnisse aus den anderen Formen der Studien eingesetzt werden, wobei beachtet werden muss, welche Erwartungen an die Bearbeitung der Klausuraufgaben der Studierenden seitens des Anwendungsfachs gestellt werden, z. B. bezogen auf die notwendigen Begründungen zum Erhalt einer vollen Punktzahl auf die Bearbeitung

Bei der Analyse der Bearbeitungsprozesse der Studierenden können die Strategien, welche als Beantwortung der Forschungsfrage 2.2

Welche über die in der SEL beschriebenen, hinausgehenden aufgabenübergreifenden Strategien und Aspekte lassen sich in den Bearbeitungsprozessen der Studierenden rekonstruieren? Die Unterteilung beruht auf Abschnitt 3.4.4.

beschrieben wurden, als Basis für Strategien in anderen Anwendungsfächern eingesetzt werden und so erweitert werden.

Abbildungsverzeichnis

1.2.1	Deduktiver Aufbau der Mathematik für Ingenieure bis zum Thema „Mehrdimensionale Integration“	14
1.2.2	Abiturschnitt sowie letzte Mathematiknote in der Schule	26
1.2.3	Relevanz der Inhalte aus der Mathematikveranstaltung, n=400	27
1.2.4	Relevanz einzelner Themen aus der Mathematikveranstaltung	27
1.2.5	Faktorenanalyse zur Dimensionsreduktion bei den Themen der Mathematik- Veranstaltung	28
1.3.1	Struktur des Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) . . .	31
2.1.1	Modellierungskreislauf nach Ortlieb (2004, S. 23)	36
2.1.2	Modellierungskreislauf nach Blum (1985, S. 200)	37
2.1.3	Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007, S. 225)	38
2.1.4	Bearbeitungsprozess einer Modellierungsaufgabe nach Burkhardt (2006, S. 181)	41
2.1.5	Aufbau einer Praxeologie	43
2.2.1	Heurismen nach Bruder und Collet (2011, S. 45)	54
2.3.1	Grundstruktur erkenntnistheoretischer Spiele nach Tuminaro und Redish (2007, S. 5)	62
2.3.2	Skizze zu dem Drei-Ladungen-Problem	63
2.3.3	Skizze des 2-Ladungs-Problems (mit der richtigen Antwort), siehe Tuminaro und Redish (2007, S. 19)	68
3.0.1	Gesamtdarstellung des theoretischen Ansatzes der Untersuchungen	74
3.2.1	PARI-Interviewstruktur nach (Hall et al., 1995, S. 47)	82
3.2.2	PARI-Rekapitulationsphase nach (Hall et al., 1995, S. 49)	82
3.2.3	Einsatz des Visualizers bei Experteninterviews	89
3.4.1	Aufbau der zwei Kameras: Zu sehen ist eine Aufnahme von der Frontkamera sowie die Kamera zum Filmen der Niederschrift im Hintergrund	103
3.4.2	Aufnahme der Kamera, welche hinter den Studierenden positioniert ist . . .	103
3.4.3	Bild des Visualizers mit Gesten des Bearbeiters	103
3.5.1	Evaluative, qualitative Inhaltsanalyse nach (Kuckartz, 2012, S. 100)	117
3.6.1	Gesamter Forschungsansatz	122
4.3.1	Skizze des Magnetischen Kreises	140
4.3.2	„Vereinfachtes“ Ersatzschaltbild zu dem Magnetischen Kreis. Hierbei stehen die R_i für die Reluktanzen, wobei eine genauere Erläuterung in Aufgabenteil A2 stattfindet.	142
4.3.3	Graphische Darstellung des Verlaufs der Gesamtrelektanz in Abhängigkeit der Luftspaltbreite d	146
4.4.1	Übersetzung von Magnetischem Kreis in Ersatzschaltbild	162
4.4.2	Berechnung der gesamten Eisenreluktanz in beiden Eisenkernen	163

4.5.1	Skizze von Gruppe 4 für die Gesamtrelektanz	169
4.5.2	Berechnung von G_4 für die magnetische Energie im Eisen, eigentlich W_{Fe} , bereits ergänzt um die Einheit Joule	187
4.5.3	Skizze der Gruppe 3 zu Aufgabe A6	192
5.2.1	Anwendungen der Knotenregel, siehe (Böcker, 2012, S. 4)	239
5.2.2	Masche nach Schließen der Schalter	239
5.2.3	Schaltsymbol des Kondensators	241
5.2.4	Schaltsymbol der Spule	242
5.2.5	Verläufe der Lösungen in den drei Fällen	243
5.3.1	Skizze des Schwingkreises	250
5.3.2	Skizze des linken Teils des Schwingkreises	250
5.3.3	Rechter Teil des Schwingkreises	265
5.5.1	Skizze von P2 zu dem Verlauf von $u_C(t)$	297
6.3.1	Spannungsverlauf der Spulenspannung $u_L(t)$	357
7.3.1	Skizze des Wechselstromkreises	412
7.3.2	Skizze des Wechselstromkreises mit realer Spule	421
7.5.1	Skizze zur Phasenverschiebung in Aufgabe D3 von Gruppe 2	440
7.5.2	Skizze von Gruppe 3 zum Aufgabenteil D6 - Berechnung von S, P, Q	452

Tabellenverzeichnis

1.2.1	Themen aus dem Bereich VK2 des Vorkurses	12
1.2.4	Leistungskurse der Ingenieurstudierenden	26
2.3.1	Mathematische Rechtfertigungen nach Bing und Redish (2009, Seite 8) . . .	69
3.2.1	Phasen in der angepassten Variante der PARI-Methodik	85
3.5.2	Beispiel für die Kodierung der Daten (aus Aufgabe A)	119
4.2.1	SI-Basiseinheiten nach Hagmann (2013, S. 2)	132
4.2.2	Einheitspräfixe nach Hagmann (2013, S. 4)	133
4.2.3	Analogien zwischen elektrischen und magnetischen Größen	136
4.7.2	[A1, A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Ersatzschaltbild und dem Formelaufstellen bei der Reluktanz	214
4.7.3	[A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der Reluktanz und ihrer Berechnung	214
4.7.4	[A2] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und ihrer Skizzierung	215
4.7.5	[A2,A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und des Maximalwerts der Induktion	216
4.7.6	[A2,A4] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der Flussdichte	216
4.7.7	[A2,A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der magnetischen Energie des Eisens . . .	217
4.7.8	[A2,A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Reluktanz und der Berechnung der magnetischen Energie in der Luft	217
4.7.9	[A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Induktivitätsformel und dem Erkennen, dass das Maximum bei $d = 0$ vorliegt	219
4.7.10	[A3] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Erkennen, dass das Maximum bei $d = 0$ vorliegt, und der Berechnung des Maximalwerts . .	219
4.7.11	[A4] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die Flussdichte und ihrer Berechnung	221
4.7.12	[A4,A6] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der Flussdichte und dem Berechnen der Masse	222
4.7.13	[A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie im Eisen und ihrer Berechnung	224
4.7.14	[A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie in der Luft und ihrer Berechnung	224
4.7.15	[A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die magnetische Energie im Eisen und dem Formelaufstellen bei der magnetischen Energie in der Luft	225

4.7.16	[A5] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen der Berechnung der magnetischen Energie im Eisen und der Berechnung der magnetischen Energie in der Luft	225
4.7.17	[A6] Kreuztabelle zu dem Zusammenhang zwischen dem Formelaufstellen für die Masse und ihrer Berechnung	226
5.7.2	Kategorisierung von B1 und B2. Abkürzung: W=Wert, B=Begründung, r=richtig, f=falsch, mE=mit Einheit, oE=ohne Einheit	344
5.7.3	Zusammenhang zwischen homogener und inhomogener Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung	345
5.7.4	Kategorisierung von B5. Abkürzung: W=Wert, B=Begründung, r=richtig, f=falsch, mE=mit Einheit, oE=ohne Einheit	345
7.4.1	Übersetzung der konventionalisierten Darstellungen in mathematische Ausdrücke	429

Literaturverzeichnis

- Alpers, B. (2017). Differences between the usage of mathematical concepts in engineering statics and engineering mathematics education. *khdm-Report*, 16-5:138–142.
- Altieri, M. und Prediger, S. (2017). Unpacking procedural knowledge in mathematics for first-year engineering students. *khdm-Report*, 16-5:142–147.
- Barquero, B., Bosch, M., und Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(3):307–338.
- Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G., Göller, R., Hoppenbrock, A., Liebendörfer, M., und Püschl, J. (2016). Research in University Mathematics Education: The khdm. *EMS Newsletter*, 12(102):49–50.
- Biehler, R., Kortemeyer, J., und Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Seiten 2060–2066, Prag.
- Bing, T. J. (2008). *An epistemic framing analysis of upper level physics students' use of mathematics*. Dissertation, University of Maryland, Baltimore.
- Bing, T. J. und Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 5(2):020108–1–020108–15.
- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In Kahle, Herausgeber, *Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität*, Band 32 in *Mathematische Semesterberichte*, Seiten 195–232. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- Blum, W. und Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., und Khan, S., Herausgeber, *Mathematical modelling: Education, engineering, and economics*, Seiten 222–231, Chichester. Horwood.
- Böcker, J. (2012). Grundlagen der Elektrotechnik B. <https://ei.uni-paderborn.de/fileadmin/elektrotechnik/fg/lea/Lehre/GET-B/Dokumente/Skript-GET-B.pdf>. Vorlesungsskript, Stand vom 22.06.2012.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2):86–95.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics*, Seiten 260–270.

- Borromeo-Ferri, R. (2011). Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens - Analysen und empirische Rekonstruktionen. In *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens*, Seiten 101–167. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- Bosch, M. und Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58:51–65.
- Bruder, R. und Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor, Berlin.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, 38(2):178–195.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*, Band 95. Pensée sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers*, Seiten 131–167.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2):221–265.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M., Herausgeber, *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, Seiten 21–30, Sant Feliu de Gu'xols, Spain.
- Cramer, E., Walcher, S., und Wittich, O. (2015). Mathematik und die INT-Fächer. In Roth, J., Bauer, T., Koch, H., und Prediger, S., Herausgeber, *Übergänge konstruktiv gestalten. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, Seiten 51–68. Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Douglas, M. (1986). *How institutions think*. Syracuse University Press, Syracuse.
- Fettweis, A. (1996). *Elemente nachrichtentechnischer Systeme*. Teubner Studienbücher Technik. Vieweg+Teubner Verlag, Stuttgart.
- Geng, W. (2003). „How to Model Mathematically“– Table and its Applications. *Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA 10*, Seite 67.
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., und Ferri, R. B. (2013). Mathematisches Modellieren – eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In Borromeo-Ferri, R., Greefrath, G., und Kaiser, G., Herausgeber, *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht*, Seiten 11–37. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Hagmann, G. (2013). *Grundlagen der Elektrotechnik: das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester*. Aula-Verlag, Wiebelsheim.
- Hall, E. P., Gott, S. P., und Pokorny, R. A. (1995). A procedural guide to cognitive task analysis: The PARI Methodology (No. AL/HR-TR-1995-0108). <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a303654.pdf>. Armstrong Lab Brooks AFB TX Human Resources Directorate.

- Henn, H.-W. (1998). Mathematik und „der Rest der Welt“- fachübergreifende Aktivitäten in Deutschland. *ZDM*, 30(4):119–124.
- Hennig, M. und Mertsching, B. (2013). Einsatz eines Wikis zur Vermittlung von Mathematikkenntnissen in den Grundlagen der Elektrotechnik. *khdm-Report*, 13-1:83–84.
- Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., und Besuch, G. (2010). Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. In *HIS:Forum Hochschule*, Band 2, Hannover. HIS Hochschul-Informationssystem GmbH.
- Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., und Sommer, D. (2012). Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. In *HIS: Forum Hochschule*, Band 3, Hannover. HIS Hochschul-Informationssystem GmbH.
- Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Hochmuth, R. und Schreiber, S. (2016). Überlegungen zur Konzeptualisierung mathematischer Kompetenzen im fortgeschrittenen Ingenieurwissenschaftsstudium am Beispiel der Signaltheorie. In *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*, Seiten 549–566. Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz Juventa, Weinheim, Basel.
- Lewis, D. (2008). *Convention: A Philosophical Study*.
- Maaß, K. (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(2):114–142.
- Masters, G. N. und Wright, B. D. (1997). The partial credit model. *Handbook of modern item response theory*, Seiten 101–121.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz, Wiesbaden.
- Mei, R. I. und Heitzer, J. (2017). Didactics of mathematics in higher education, a service to science or a science in itself? Experiences made with tree-structured online exercises. *khdm-Report*, 16-5:486–492.
- Meyberg, K. und Vachenauer, P. (2013). *Höhere Mathematik 1: Differential- und Integralrechnung Vektor- und Matrizenrechnung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Neunzert, H. und Rosenberger, B. (1991). *Schlüssel zur Mathematik*. Econ-Verlag, Düsseldorf.
- Ortlieb, C. (2004). Mathematische Modelle und Naturerkenntnis. *Mathematica Didactica*, 27(1):23–40.
- Papula, L. (2001). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (Band 1)*. Viewegs Fachbücher der Technik, Braunschweig, Wiesbaden.
- Polya, G. (1949). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Polya, G. (1951). *Schule des Denkens*. Francke, Bern.

- Quade, W. (1937). Mathematische Begründung der komplexen Wechselstromrechnung. *Deutsche Mathematik*, 2:18–31.
- Quéré, P.-V. (2017). French engineers' training and their mathematical needs in the workplace: interlinking tools and reasoning. *Proceedings of CERME 10*.
- Redish, E. F. (2005). Problem solving and the use of math in physics courses. In *Focusing on Change*, Seiten 1–10. <http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaMath.pdf>.
- Riebel, J. (2010). *Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen. Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums*. Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau.
- Schnell, W., Gross, D., und Hauger, W. (2013). *Technische Mechanik: Band 2: Elastostatik*, Band 216. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Orlando, Florida.
- Schukajlow-Wasjutinski, S. (2011). *Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik*. Waxmann Verlag, Münster.
- Stephenson, F. H. (2005). *Mathematik im Labor*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Tuminaro, J. und Redish, E. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 3(020201):1–21. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.3.020101>.
- Voigt, J. (2013). Eine Alternative zum Modellierungskreislauf. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Seiten 1046–1049.
- Winsløw, C., Barquero, B., Vleeschouwer, M. D., und Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education*, 16(2):95–111.
- Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge – Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik. Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Wolf, P. und Biehler, R. (2016). Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium. *khdm-Report*, 16-4.