

Gestaltung von Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs und ihre empirische Untersuchung

Dissertation

Zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Laura Ostsieker

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn

2018

Danksagung

Das Verfassen dieser Dissertation wäre ohne die Unterstützung einiger Personen nicht möglich gewesen. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich dabei begleitet haben.

An erster Stelle bedanke ich mich bei Prof. Dr. Rolf Biehler für die zahlreichen Gespräche, sein Feedback und die viele Zeit, die er in die Betreuung dieser Arbeit investiert hat. Auch möchte ich mich dafür bedanken, dass er mir die Teilnahme an verschiedenen Tagungen ermöglicht hat.

Prof. Dr. Reinhard Hochmuth danke ich für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten zu übernehmen und für einige Diskussionen, die mir wertvolle Anregungen geliefert haben.

Mein Dank gilt der Arbeitsgruppe Biehler, der Fachgruppe „Didaktik der Mathematik“ und den Mitgliedern des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik für die angenehme Atmosphäre und zahlreiche Anregungen.

Bei Prof. Dr. Michael Winkler und Prof. Dr. Specovius-Neugebauer bedanke ich mich für die Möglichkeit, in ihren Vorlesungen Studien durchzuführen. Dr. Andreas Seifert danke ich dafür, dass er sich die Zeit genommen hat, mich in die Item-Response-Theorie und den Umgang mit der Software „ConQuest“ einzuführen.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danke ich Carmen, Jörg, Juliane, Lars, Lea, Lucas, Michael, Michelle und Timo.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, allen voran meinen Eltern, und meinen Freunden. Ohne eure Unterstützung und euren Glauben an mich wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik stellt für viele Studienanfängerinnen und -anfänger eine große Herausforderung dar. Für Studierende des Bachelorstudiengangs Mathematik und des gymnasialen Lehramts ist eine der ersten universitären Mathematikveranstaltungen die Veranstaltung „Analysis 1“. In dieser ist die Konvergenz von Folgen einer der zentralen Begriffe. Zu diesem bringen die Studierenden oftmals bereits ein *Concept Image* nach Tall und Vinner (1981) mit, das jedoch angepasst werden muss. Ebenso muss eine *Concept Definition* aufgebaut oder angepasst werden. Dies gelingt jedoch nicht allen Studierenden.

In dieser Arbeit werden zum einen die Vorstellungen und Kenntnisse von Mathematikstudierenden und Studierenden des gymnasialen Lehramts Mathematik bezüglich des Begriffs der Folgenkonvergenz untersucht. Dazu werden zwei Testinstrumente entwickelt, von denen eines vor der Behandlung des Themas Konvergenz in der Vorlesung eingesetzt wird und das für den Konvergenzbegriff relevante Vorwissen testet. Das andere Testinstrument wird nach Abschluss des Themas in der Vorlesung eingesetzt, um die Vorstellungen und Fähigkeiten bezüglich des Konvergenzbegriffs zu erheben. Es werden sowohl empirische Ergebnisse zu diesem zweiten Testinstruments präsentiert als auch zum Zusammenhang zwischen dem erhobenen Vorwissen und den Kenntnissen nach der Behandlung in der Vorlesung. Mit Erkenntnissen zu (Fehl-)Vorstellungen von Studierenden einer Analysis-1-Veranstaltung zum Konvergenzbegriff wird ein Beitrag zu dem Stand der mathematikdidaktischen Forschung zum Grenzwertbegriff geleistet.

Zum anderen wird in einer Design-Based-Research-Studie eine Lernumgebung zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs entwickelt. Dazu wird ein Konzept von Przenioslo (2005) adaptiert und erstmalig durch eine wissenschaftliche Studie begleitet. Basierend auf einer vorgegebenen Menge vielfältiger Beispiele und einem Nicht-Beispiel konvergenter Folgen sollen die Studierenden die Definition der Konvergenz gegen einen Grenzwert nacherfinden. Für mögliche Problemsituationen werden Unterstützungsangebote vorbereitet. Die Nacherfindungsprozesse von Teilnehmerinnen und Teilnehmern von zwei Durchführungen des Workshops werden retrospektiv analysiert. Das Ergebnis dieser Design-Based-Research-Studie ist eine lokale Instruktionstheorie zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs. Außerdem wird mit Hilfe der Testinstrumente ein – wenn auch kleiner – Effekt der Workshopteilnahme nachgewiesen.

Abstract

The transition from school to university mathematics poses a big challenge for many first-year students. For students of the bachelor programme mathematics and students who are studying to become a teacher for secondary school, one of the first mathematics courses at university is „Analysis 1“. In this class the convergence of sequences is an essential concept. The students often already have a *concept image* according to Tall und Vinner (1981), but this has to be modified. Likewise, a *concept definition* has to be built or adapted. However, not every student succeeds in doing this.

In this study, the conceptions and knowledge of mathematics students and pre-service teachers for upper secondary school of the notion of convergence of sequences will be investigated. For this purpose, two test instruments will be developed, one of which will be applied before the treatment of the subject of convergence in class and tests the previous knowledge for the concept of convergence. The other test instrument will be applied after finishing the topic in class in order to collect the conceptions and abilities for the concept of convergence. Empirical results of this second test are presented, and also empirical results concerning the correlation between prior knowledge and knowledge after the treatment in class. With findings about (mis-)conceptions of students of an Analysis-1-class regarding the concept of convergence, a contribution will be made to the state of mathematics education research regarding the concept of limit.

In addition, a learning environment for the guided reinvention of the concept of convergence will be developed in a design-based research study. For this purpose, a concept of Przenioslo (2005) will be adapted and analysed in a scientific study. Based on a given set of diverse examples and one non-example of convergent sequences, the students will reinvent the definition of the convergence of a sequence towards a limit. For possible problematic situations remedial help will be prepared. The reinvention processes from two implementations will be analysed retrospectively. The result of this design-based research study is a local instruction theory for the guided reinvention of the notion of convergence. Furthermore, by means of the test results an effect of the attendance at the workshop, although small, will be established.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	10
1.1	Einordnung des Projekts	10
1.2	Ausgangslage	10
1.3	Ziele und Forschungsfragen	12
1.4	Überblick	12
2	Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand	14
2.1	Begriffsbildung: <i>Concept Image</i> und <i>Concept Definition</i>	14
2.2	Metawissen über Definitionen	16
2.3	Relevantes Vorwissen für den Konvergenzbegriff	20
2.3.1	Unendlichkeit	21
2.3.2	Funktionsbegriff	22
2.3.3	Folgen	24
2.3.4	Variablenbegriff	27
2.3.5	Quantoren	29
2.3.6	Beträge und Ungleichungen	31
2.4	Forschung zu (Fehl-)Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	32
2.4.1	Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff	32
2.4.2	Die 0,9-Problematik	34
2.4.3	„Folgliedern kommen dem Grenzwert immer näher“	37
2.4.4	Eingeschränkte Vorstellung von monotonen, konvergenten Folgen	38
2.4.5	„Grenzwert darf nicht angenommen werden“	38
2.4.6	„Grenzwert als Schranke“	39
2.4.7	Alltagssprachliche Bedeutung des Begriffs „Grenzwert“	40
2.5	Konzepte für Interventionen	42
2.5.1	Die Behandlung des Konvergenzbegriffs im Rahmen einer üblichen Analysis-1-Veranstaltung	43
2.5.2	Motivation für alternative Konzepte zur Behandlung des Konvergenzbegriffs	44
2.5.3	Interventionsstudie von Roh	45
2.5.4	Konzept von Oehrtman, Swinyard, Martin et al.	57
2.5.5	Konzept von Przenioslo	62
2.5.6	Zusammenfassung der Konzepte in Bezug auf den zu entwickelnden Workshop	67
3	Forschungsfragen und Anlage der Studie	69
3.1	Forschungsfragen	69
3.2	Design-Based Research	70
3.3	Realistic Mathematics Education und Guided Reinvention	72

3.4	Anlage der Studie	75
4	<i>Hypothetical Learning Trajectory – Version 1</i>	78
4.1	Starting Points und End Points	78
4.1.1	Starting Points des Vorbereitungsworkshops	78
4.1.2	End Points des Vorbereitungsworkshops	79
4.1.3	Starting Points des Nachbereitungsworkshops	80
4.1.4	End Points des Nachbereitungsworkshops	81
4.2	Aktivitäten und hypothetische Erkenntnisverläufe (Version 1)	82
4.2.1	Vorbereitende Aktivitäten	82
4.2.2	Hauptaufgabe	84
4.2.3	Hypothetische Erkenntnisverläufe	87
4.2.4	Geplante Interventionen	92
4.2.5	Abschließende Aktivitäten Vorbereitungsworkshop	102
4.2.6	Aktivitäten Nachbereitungsworkshop	103
5	Quantitative Teilstudie	114
5.1	Item-Response-Theorie als Methode zur Entwicklung und Auswertung von Tests	114
5.1.1	Klassische Testtheorie	114
5.1.2	Item-Response-Theorie	116
5.2	Entwicklung und Skalierung der Testinstrumente	131
5.2.1	„Vortest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene	131
5.2.2	Skalierung des „Vortests“	164
5.2.3	„Nachtest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene	177
5.2.4	Skalierung des „Nachtests“	213
5.3	Ergebnisse der quantitativen Teilstudie	227
5.3.1	Ergebnisse in Bezug auf die Kenntnisse und Vorstellungen der Studierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen	227
5.3.2	Ergebnisse in Bezug auf den Zusammenhang zwischen dem Vorwissen und den Kenntnissen und Vorstellungen nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen	239
5.4	Ergebnisse in Bezug auf einen möglichen Zusammenhang mit der Workshopeteiligung	249
5.4.1	Skalierung des Subtests	258
5.4.2	Möglicher Effekt des Workshops auf den Subtest	262
6	Retrospektive Analyse der Design-Based-Research-Studie	265
6.1	Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse	265
6.2	Erkenntnisverläufe bei der Nacherfindung	269
6.2.1	Gruppe 1: Tatsächlicher Verlauf	269
6.2.2	Gruppe 1: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	293
6.2.3	Gruppe 2: Tatsächlicher Verlauf	303
6.2.4	Gruppe 2: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	321
6.2.5	Gruppe 3: Tatsächlicher Verlauf	330
6.2.6	Gruppe 3: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	361
6.2.7	Gruppe 4: Tatsächlicher Verlauf	371

6.2.8	Gruppe 4: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	413
6.3	Ergebnisse in Bezug auf die Leitfragen	426
6.4	Zwischenfazit	447
7	Weiterentwicklung des Konzepts	449
7.1	Veränderungen des Designs der Studie	449
7.2	<i>Hypothetical Learning Trajectory</i> – Version 2	450
7.2.1	Starting Points und End Points	450
7.2.2	Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 2	452
7.3	Retrospektive Analyse	478
7.3.1	Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse . .	479
7.3.2	Analyse in Bezug auf ausgewählte Leitfragen	480
7.4	<i>Hypothetical Learning Trajectory</i> – Version 3	503
7.4.1	Starting Points und End Points	503
7.4.2	Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 3	505
8	Zusammenfassung und Diskussion	520
8.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	520
8.1.1	Analysen der Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	521
8.1.2	Entwicklung eines theoretisch fundierten Konzepts für einen Work- shop zur angeleiteten Nacherfindung der Definition der Folgenkon- vergenz	526
8.1.3	Nachweis eines Effekts der Workshopteilnahme auf die Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	547
8.2	Beitrag dieser Arbeit für die mathematikdidaktische Forschung	548
8.3	Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse	554
8.4	Möglichkeiten für anknüpfende Forschung	555
	Literaturverzeichnis	556

1 Einleitung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit dem Verständnis des Konvergenzbegriffs von Studierenden, welche die Veranstaltung „Analysis 1“ besuchen. Es wird zum einen untersucht, wie sich die Vorstellungen der Studienanfängerinnen und -anfänger zu diesem Begriff entwickeln, als auch eine Lernumgebung entwickelt, erprobt und reflektiert.

1.1 Einordnung des Projekts

Dieses Promotionsprojekt ist im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik angesiedelt. Dabei handelt es sich um eine wissenschaftliche Einrichtung der Universitäten Hannover, Kassel und Paderborn. In den Jahren 2010 bis 2015 wurde das khdm im Rahmen der Initiative „Bologna - Zukunft der Lehre“ von der Stiftung Mercator und der Volkswagenstiftung gefördert. Die verschiedenen Projekte innerhalb des khdm haben das übergeordnete Ziel, das Lehren und Lernen von Mathematik an der Hochschule - insbesondere in der Studieneingangsphase - zu verstehen und weiterzuentwickeln. Dabei gibt es fünf Arbeitsgruppen, die sich jeweils durch die untersuchten Studiengänge unterscheiden. Die vorliegende Arbeit ist innerhalb der Arbeitsgruppe BaGym-Math entstanden, die sich auf die Studiengänge „Bachelor Mathematik“ und „Lehramt für Gymnasien und Gesamtschulen“ fokussiert.

1.2 Ausgangslage

Beim Übergang von der Schule zur Hochschule scheint sowohl auf der Seite der Lehrenden als auch auf der Seite der Lernenden vielfach Unzufriedenheit zu herrschen: Hochschullehrende klagen über mangelnde Mathematikkenntnisse der Studienanfängerinnen und -anfänger (Roppelt, 2009, S. 235), die Studierenden hingegen fühlen sich oftmals überfordert und klagen über zu hohe Anforderungen. Viele Studierende empfinden den Übergang gar als traumatisch (Engelbrecht, 2010, S. 143) und die Studienabbruch- beziehungsweise -fachwechselquoten sind verglichen mit anderen Fächern hoch (Dieter, 2012). Verschiedene Forscherinnen und Forscher haben sich mit dem Übergang zum sogenannten „Advanced Mathematical Thinking“ (Tall, 1991a) näher beschäftigt und sehen zum einen in den Unterschieden zwischen der Hochschulmathematik und Schulmathematik eine mögliche Ursache für die gravierenden Probleme und zum anderen in der Art des Lehrens und Lernens von Mathematik (Fischer et al., 2009, S. 258). Als wesentliche Unterschiede zwischen der Mathematik an der Schule und der an der Hochschule nennen sie unter anderem die in der Schule fehlende Axiomatik und die geringe Bedeutung des Beweisens im Schulunterricht. Als weiteres Problem wird von verschiedenen Autorinnen und Autoren die mathematische Kommunikation genannt. So beobachtete Nardi (2008), dass viele Studienanfänger großen Wert darauf legen, dass mathematische Texte, die sie schreiben, mathematisch aussehen,

indem sie möglichst viele mathematische Symbole und wenig Wörter verwenden. Für einige Studienanfänger hat der mathematische Inhalt weniger Bedeutung als die Form.

Der Grenzwertbegriff ist sowohl ein Inhalt in der Schule als auch in der Hochschule. An diesem konkreten Begriff lassen sich weitere Unterschiede zwischen der Schulmathematik und der Hochschulmathematik aufzeigen. In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife heißt es: „Die Schülerinnen und Schüler können [...] Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen“ (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 22). Der Grenzwertbegriff muss also nicht als eigenständiges Thema behandelt werden, sondern dient hauptsächlich als Mittel zum Zweck. Auch ist nicht als Ziel formuliert, dass die Schülerinnen und Schüler ein formales Verständnis dieses Begriffs aufbauen, sondern intuitive Vorstellungen stehen im Vordergrund. An der Hochschule hingegen ist der Grenzwertbegriff ein zentraler Inhalt der Anfängerveranstaltung „Analysis 1“, auf dem viele weitere Begriffe aufbauen. Der Begriff, zu dem die Studierenden bereits intuitive Vorstellungen mitbringen, wird noch einmal formal eingeführt, etwa in Form der folgenden ϵ - N -Definition¹:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen a , falls gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N$.

Tall und Vinner (1981) haben zum Beschreiben der kognitiven Prozesse bei der (Weiter-)Entwicklung des Begriffsverständnisses die Ausdrücke *Concept Image* und *Concept Definition* eingeführt. Unter dem *Concept Image* verstehen sie alle Vorstellungen, die jemand mit einem Begriff verbindet. Die *Concept Definition* hingegen ist die Definition, die jemand benutzt, wenn er formal mit dem Begriff arbeitet. Da eine *Concept Definition* nicht zwingend mit der Definition des Konzepts übereinstimmt, wird auch von persönlichen *Concept Definitions* gesprochen. In Bezug auf den Grenzwertbegriff hätten viele Schülerinnen und Schüler ein *Concept Image* aufgebaut, das nicht zur formalen Definition passe, da sie beispielsweise glauben, eine konvergente Folge dürfe den Grenzwert nie erreichen. Mit einer *Concept Definition* werde in der Schule in der Regel fast nie gearbeitet. Wenn nun in der Hochschule die formale Definition behandelt werde, müssten die Studienanfänger sowohl ihr *Concept Image* als auch ihre *Concept Definition* anpassen. Es komme jedoch häufig vor, dass entweder nur die *Concept Definition* angepasst wird während das *Concept Image* unverändert bleibt, oder weder *Concept Image* noch *Concept Definition* werden angepasst.

Tatsächlich gibt es bereits zahlreiche Veröffentlichungen zu Vorstellungen und Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff. Diese beschäftigen sich jedoch meist entweder mit Schülerinnen und Schülern, mit Studierenden anderer Fachrichtungen oder mit College-Studierenden. Zu deutschen Mathematikstudierenden, die in der Analysis-1-Vorlesung mit diesem Begriff konfrontiert werden, ist bislang wenig Forschung vorhanden. Diese Lücke soll durch die vorliegende Arbeit geschlossen werden.

¹Wird im weiteren Verlauf der Arbeit von „der“ formalen (ϵ - N -)Definition des Grenzwerts gesprochen, so ist stets die hier dargestellte Definition gemeint.

1.3 Ziele und Forschungsfragen

Wie sich gerade schon angedeutet hat, konzentriert sich die Arbeit auf den Themenbereich Konvergenz von Folgen mit der Zielgruppe der Studierenden einer Analysis-1-Vorlesung. Die Entscheidung für diesen Begriff wurde zum einen dadurch beeinflusst, dass es sich bei Konvergenz um einen der zentralen Begriffe der Analysis-1-Vorlesung handelt, auf dem viele weitere Begriffe aufbauen. Zum anderen ist dieser Begriff besonders interessant, da er in der Schule bereits vorkommt, in der Universität hingegen deutlich formaler eingeführt wird.

Ein Ziel der Arbeit ist es, eine Lernumgebung für die angeleitete Nacherfindung des Konvergenzbegriffs und dessen formaler Definition zu gestalten. Da eine Implementation eines neuen Konzepts zum Grenzwert in traditionellen Vorlesungen aufgrund der Dichte der zu behandelnden Inhalte oft nicht möglich ist, wurde hier ein Workshop als freiwilliges Zusatzangebot für Studierende der „Analysis 1“ ausgewählt. Ein theoretisch fundiertes Konzept für einen solchen Workshop soll ein Ergebnis dieser Arbeit sein. Dazu wird analysiert, wie die Erkenntnisprozesse von Studierenden während der Nacherfindung der Definition verlaufen und welche Konsequenzen sich daraus für das Design der Lernumgebung ergeben.

Des Weiteren sollen die Vorstellungen und Kompetenzen der Studienanfänger in Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff und deren Entwicklung genauer untersucht werden. Dabei wird der Frage nachgegangen, inwieweit (Fehl-)Vorstellungen, die aus Forschungsstudien mit Schülerinnen und Schülern oder (College-)Studierenden anderer mathematikhaltiger Fächer bekannt sind, auch bei Mathematikstudierenden nach der Behandlung des Themas in der Vorlesung auftreten. Auch wird untersucht, inwiefern die Studierenden ein adäquates Verständnis der formalen Definition aufgebaut haben. Außerdem wird erforscht, wie groß der Zusammenhang zwischen den Vorstellungen und Kenntnissen zum Konvergenzbegriff nach Abschluss des Themas und dem Vorwissen zu diesem und verwandten Begriffen ist. Zusätzlich soll analysiert werden, ob sich ein Effekt der Workshopteilnahme auf die Vorstellungen und Kenntnisse der Studierenden zum Konvergenzbegriff nachweisen lässt. In Abschnitt 3.1 werden die Forschungsfragen konkretisiert.

1.4 Überblick

In Kapitel 2 wird zunächst der theoretische Hintergrund und der Stand der Forschung zum Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen präsentiert. Außerdem werden ausgewählte Lehrkonzepte und Interventionsstudien zur Erarbeitung des Konvergenzbegriffs vorgestellt, aus denen wesentliche Elemente für die Lernumgebung übernommen werden. Anschließend werden in Kapitel 3 Forschungsfragen formuliert, der Forschungsansatz des Design-Based Research dargestellt und es wird auf die Anlage dieser Studie eingegangen. In Kapitel 4 wird eine erste Version eines Workshop-Konzepts präsentiert. Darauf folgt in Kapitel 5 die quantitative Teilstudie dieser Arbeit. Diese besteht aus einem Test zu für den Konvergenzbegriff relevantem Vorwissen und einem Test zu Kompetenzen im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff. Diese werden nach der Item-Response-Theorie ausgewer-

tet. Zum einen werden Ergebnisse aller Studierenden der Analysis-1-Vorlesung präsentiert, welche die Tests bearbeitet haben. Zum anderen werden Vergleiche zwischen den Teilnehmenden des Workshops und den übrigen Studierenden vorgenommen. Anschließend folgt in Kapitel 6 die retrospektive Analyse der ersten Durchführung des Workshops. Von den vier Studierendengruppen, die daran teilgenommen haben, werden jeweils die Erkenntnisverläufe während der Hauptaufgabe des Workshops dargestellt bevor diese in Bezug auf aufgestellte Leitfragen analysiert werden. In Kapitel 7 folgt dann die Weiterentwicklung des Workshop-Konzepts. Dazu wird eine zweite Version des Konzepts präsentiert, die auf Erfahrungen aus der ersten Erprobung basiert. Die zweite Version wurde ebenfalls erprobt und gezielte Analysen werden dargestellt. Schließlich wird als Ergebnis eine dritte überarbeitete Version des Workshop-Konzepts präsentiert. Abschließend werden in Kapitel 8 die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst, im aktuellen Forschungskontext diskutiert und darauf aufbauend wird ein Ausblick gegeben.

2 Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

Als Ziele dieser Arbeit wurde zum einen genannt, ein Konzept für einen Workshop für Mathematikstudierende und Studierende des gymnasialen Lehramts Mathematik zum Konvergenzbegriff zu entwickeln. Zum anderen sollen die Vorstellungen der Studienanfänger zum Konvergenzbegriff, wie auch deren Entwicklung im Laufe einer Analysis-1-Veranstaltung genauer untersucht werden. In diesem Kapitel werden zunächst theoretische Hintergründe und bereits vorhandene Forschung zu diesem Themenbereich präsentiert. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 ein theoretischer Ansatz zur Begriffsentwicklung in der Mathematik vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 2.2 auf mathematische Definitionen eingegangen, da diese in der Hochschulmathematik eine zentrale Rolle spielen. In Abschnitt 2.3 werden verschiedene Themen als relevant in Bezug auf den Konvergenzbegriff identifiziert und es werden jeweils Forschungsergebnisse zu diesen zusammengefasst. Auf Forschung zum Konvergenzbegriff selbst wird in Abschnitt 2.4 eingegangen. In Abschnitt 2.5 werden schließlich verschiedene Konzepte für Interventionen zur Behandlung des Konvergenzbegriffs vorgestellt.

2.1 Begriffsbildung: *Concept Image* und *Concept Definition*

Es gibt verschiedene theoretische Ansätze, die sich mit der Begriffsentwicklung beim Lernen von Mathematik beschäftigen. Ich beschränke mich hier auf die Theorie des *Concept Images* und der *Concept Definition* nach Tall und Vinner (1981). Zum einen haben die Autoren ihren Ansatz am Beispiel des Konvergenzbegriffs eingeführt, was nahelegt, dass diese Theorie für den vorliegenden Begriff gut geeignet ist. Zum anderen erscheint dieser Ansatz deshalb als besonders passend, da er genau den Fall einbezieht, dass ein Begriff bereits – aus der Schule – bekannt ist, und anschließend – an der Universität – noch einmal formaler behandelt wird. Genau diese Situation trifft bei der Thematisierung des Konvergenzbegriffs im Rahmen der Analysis-1-Vorlesung zu.

Tall und Vinner (1981) haben zum Umgang mit mathematischen Konzepten die Begriffe *Concept Image* und *Concept Definition* eingeführt. Sie argumentieren, dass Lernende einen Begriff nicht unbedingt durch eine formale Definition erlernen, sondern oft durch Anwenden dieses Konzepts. Eine formale Definition dazu wird teilweise erst später behandelt. Bezeichnet wird ein Begriff meist mit einem Namen oder einem Symbol. Die kognitive Struktur eines Individuums zu einem Begriff beinhaltet in der Regel jedoch wesentlich mehr als nur den Namen oder das Symbol. Unter der Bezeichnung *Concept Image* fassen die Autoren nun diese gesamte kognitive Struktur eines Individuums zu einem Konzept

zusammen. Sie betonen, dass sich dieses *Concept Image* verändert, wenn der Lernende neue Erfahrungen macht (Tall und Vinner, 1981, S. 151f.). In Abgrenzung dazu verwenden Tall und Vinner die Bezeichnung *Concept Definition* für die Definition, die ein Individuum für ein Konzept verwendet. Diese kann durchaus von der allgemein anerkannten Definition abweichen. Die persönliche *Concept Definition* eines Individuums beeinflusst dessen *Concept Image*, doch dieses wird auch durch andere Dinge wie Anwenden des Konzepts geprägt. So kann es auch vorkommen, dass verschiedene Teile des *Concept Images* oder *Concept Image* und *Concept Definition* eines Individuums nicht kohärent sind. Die Person erlebt allerdings lediglich dann einen Konflikt, wenn sich widersprechende Teile gleichzeitig aktiviert werden (Tall und Vinner, 1981, S. 152f.). Vinner (1991, S. 70) geht genauer darauf ein, wie *Concept Image* und *Concept Definition* gebildet werden und sich weiterentwickeln. In dem Fall, dass ein Lernender bereits einige Vorstellungen zu einem Begriff hat und später eine formale Definition dieses Begriffs kennenlernt, nennt er drei mögliche Folgerungen. Der wünschenswerte Fall wäre, dass das *Concept Image* angepasst wird und kohärent zur *Concept Definition* ist. Eine andere Möglichkeit ist, dass das *Concept Image* unverändert bleibt und die *Concept Definition* zwar eine begrenzte Zeit aus der formalen Definition besteht, diese jedoch wieder vergessen wird. Schließlich ist es auch möglich, dass *Concept Image* und *Concept Definition* beide unverändert bleiben.

Ähnliche Möglichkeiten gibt es auch, wenn Lernende ein mathematisches Konzept zuerst durch die formale Definition kennenlernen. Das *Concept Image* entwickelt sich nach und nach durch die Betrachtung von Beispielen und wird durch Theorieentwicklung weiterentwickelt. Allerdings umfasst das *Concept Image* nicht unbedingt alle Aspekte der formalen Definition, wodurch es wiederum zu Problemen kommen kann. Bei der Anwendung eines mathematischen Konzepts bei der Bearbeitung einer Aufgabe, bei einem Beweis oder ähnlichem wäre es wünschenswert, dass das Individuum auf jeden Fall seine *Concept Definition* abrufen und verwendet. Diese sollte idealerweise mit der korrekten Definition übereinstimmen, was jedoch nicht unbedingt der Fall ist. In vielen Fällen könnte tatsächlich lediglich durch Verwenden des *Concept Images* zu korrekten Ergebnissen gelangt werden, jedoch nicht in allen Fällen (Vinner, 1991, S. 70ff.). Neben vielen anderen Arbeiten zu den Begriffen *Concept Image* und *Concept Definition* gibt es eine Studie von Alcock und Simpson (2017), die am Beispiel von monoton wachsenden und monoton fallenden Folgen ebenfalls festgestellt haben, dass einige Studierende nicht auf Basis ihrer *Concept Definition* argumentieren. Sie ziehen folgende Schlussfolgerung:

„... learners must effortfully override concept-image-based reasoning in order to behave mathematically in relation to defined concepts.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 15)

Beim Grenzwertbegriff handelt es sich um ein Konzept, das in der Schule meist durch Anwendung beim Thema Ableitungen kennengelernt wird, die formale Definition wird üblicherweise erst im Studium behandelt. An diesem und weiteren Beispielen eines mathematischen Konzepts verdeutlichen Tall und Vinner einige ihrer Ausführungen. So berichten sie von einem Test, in dem Studienanfänger an einer englischen Universität unter anderem zwei Aufgaben lösen sollten, die von Experten als ähnlich eingeschätzt werden könnten. Zum einen sollte der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n}\right)$ berechnet werden und zum anderen sollte beantwortet werden, ob $0,9$ gleich 1 ist oder nicht. 14 der 36

Befragten haben zwar den Grenzwert 2 korrekt angegeben, waren jedoch der Meinung, $0,\overline{9}$ sei kleiner als 1. Tall und Vinner erklären dieses Ergebnis dadurch, dass bei den beiden unterschiedlichen Aufgaben verschiedene Teile des *Concept Images* aktiviert werden und den Studierenden dadurch, dass das nicht gleichzeitig passiert, kein Konflikt bewusst ist. In einem späteren Test sollten dieselben Studierenden die Zahlen $0,25$; $0,05$; $0,\overline{3}$ und $0,\overline{9}$ als Brüche darstellen. Von den zuvor genannten 14 Studierenden haben 13 nun $0,\overline{9} = 1$ geantwortet. Die Autoren gehen davon aus, dass beim Darstellen der (insbesondere letzten beiden) Dezimalzahlen als Brüche jeweils dieselben Teile des *Concept Images* aktiviert wurden und die Studierenden nun einen kognitiven Konflikt erlebt haben, da sie einerseits der Meinung waren, $0,\overline{9}$ sei kleiner als 1, doch andererseits könnten sie von der Darstellung $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ darauf schließen, dass $0,\overline{9} = 1$ gelten müsse (Tall und Vinner, 1981, S. 158f.).

Tall und Vinner empfehlen zur Förderung eines adäquaten *Concept Images* die Behandlung auch solcher Beispiele, die nicht den typischen eingeschränkten Vorstellungen zu diesem Konzept entsprechen, was im Falle konvergenter Folgen beispielsweise eine Folge wäre, die durch einen Term definiert ist und ihren Grenzwert nie annimmt:

„In forming the concept image it does not help when most of the examples of the limiting process consist of sequences given by regular formulae which never actually equal the limit.“ (Tall und Vinner, 1981, S.159)

Die Unterscheidung in *Concept Image* und *Concept Definition* wurde von vielen mathematikdidaktischen Forscherinnen und Forschern aufgegriffen und in zahlreichen Publikationen benutzt (z.B. Vinner und Dreyfus (1989), Moore (1994), Weber (2004), Rösken und Rolka (2007), Alcock und Simpson (2017)). In dieser Arbeit sollen diese Begriffe genutzt werden, um die Erkenntnisprozesse der Studierenden zu erklären.

2.2 Metawissen über Definitionen

Da ein großer Bestandteil des Workshops die formale Definition der Folgenkonvergenz sein wird, ist auch interessant, welches Metawissen über Definitionen bei den Workshopteilnehmenden zu erwarten ist. Darunter verstehe ich vor allem, welche Bedeutung sie Definitionen im Allgemeinen zuweisen und welche Funktionen Definitionen ihrer Meinung nach haben. Um dies beurteilen zu können wird auch darauf eingegangen, welche Funktionen formale Definitionen in den Augen von Mathematikerinnen und Mathematikern haben.

Prinzipiell sind den Studienanfängern mathematische Definitionen bereits aus der Schule bekannt. Von der Schule zur Universität verändert sich jedoch die Rolle von Definitionen fundamental. In der Schule spielen Definitionen eine eher untergeordnete Rolle und die meisten Schülerinnen und Schüler halten es für wichtiger, Aufgaben lösen zu können, für welche die Definitionen in der Regel nicht benötigt werden:

„From their experience at school, however, it is likely that they do not view these definitions as important, but still think that the essence of the course is in the problems and all they will have to do is to learn how to respond correctly when confronted with various situations.“ (Engelbrecht, 2010, S. 144)

Engelbrecht geht davon aus, dass die Studierenden zu Beginn glauben, dass Definitionen in der Hochschule eine ähnlich geringe Bedeutung haben wie in der Schule. Tall nennt die dem Definieren entsprechende Handlung in der Schule nicht Definieren, sondern Beschreiben. Die Aktivität des Definierens bildet seiner Meinung nach einen wesentlichen Schritt im Übergang von elementarer zu universitärer Mathematik:

„The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on those definitions.“ (Tall, 1991b, S. 20)

Zandieh und Rasmussen nennen als zwei zentrale Funktionen von Definitionen in der Hochschulmathematik: „single out a concept with certainty, serve as links in deductive reasoning“ (Zandieh und Rasmussen, 2010, S. 57). Definitionen sollen mathematische Konzepte also zum einen eindeutig festlegen, so dass sie benutzt werden können, um zu entscheiden, ob ein Objekt zu dem jeweiligen Konzept gehört oder nicht. Zum anderen werden Definitionen sowohl bei der Formulierung von Theoremen als auch beim Beweis dieser verwendet. Vinner fasst den deduktiven Charakter der Mathematik wie folgt zusammen:

„(...) mathematics is a deductive theory and as such, it starts with primary notions and axioms. By means of the primary notions all other notions are defined. All the theorems, which are not axioms, are proved from the axioms by means of certain rules of inference.“ (Vinner, 1991, S. 65)

Eine ähnliche Auffassung vertreten Alcock und Simpson:

„Definitions are central to contemporary formal mathematics because, in order to develop deductive arguments and to communicate clearly, mathematicians need to agree upon precise meanings for mathematical concepts.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 5)

Definitionen nehmen in der Hochschulmathematik also eine zentrale Rolle ein, doch die Studienanfänger schreiben ihnen zunächst noch eine geringe Bedeutung zu, wie sie es aus der Schule gewohnt sind. Daher sind in Bezug auf das Metawissen von Studienanfängern zu Definitionen auch Ergebnisse aus Untersuchungen mit Schülerinnen und Schülern höherer Jahrgangsstufen interessant.

Zaslavsky und Shir (2005) haben eine Studie durchgeführt, in der Schülerinnen und Schüler der zwölften Klasse sich mit Aktivitäten beschäftigt haben, in denen sie jeweils verschiedene Möglichkeiten betrachtet haben, ausgewählte mathematische Konzepte zu definieren, die teilweise äquivalent zueinander waren und teilweise nicht. Ziel der Studie war zum einen, zu untersuchen, welche Rolle und welche Funktionen Schülerinnen und Schüler mathematischen Definitionen zuweisen und wie sich dies während der Aktivitäten, auf die noch genauer eingegangen wird, entwickelt. Zum anderen sollte analysiert werden, wie sich ihre persönliche *Concept Definition* zu dem jeweiligen mathematischen Konzept, die ihnen vorher bereits bekannt war, dabei verändert. Die ausgewählten mathematischen Konzepte sind für diese Arbeit nicht von Belang. Die Ergebnisse zu den Sichtweisen der Lernenden zu Definitionen im Allgemeinen sind hingegen interessant.

Zu jedem der vier ausgewählten mathematischen Konzepte gab es drei Sitzungen, in denen die Teilnehmenden der Studie jeweils einen Fragebogen ausgefüllt haben. In diesem Fragebogen wurden den Probanden verschiedene Vorschläge für eine Definition des jeweiligen Konzepts präsentiert und sie wurden aufgefordert, zu entscheiden, ob es sich ihrer Meinung nach um eine Definition des Begriffs handelt und welche der Aussagen sie als Definition des Begriffs präferieren. Darunter war immer auch die Definition, wie sie in dem Schulbuch stand, und teilweise dazu äquivalente Definitionen. Teilweise waren auch Definitionen darunter, die im mathematischen Sinne äquivalent zur Schulbuch-Definition waren, in denen aber überflüssige Aspekte enthalten waren, und es gab Vorschläge für Definitionen, die nicht äquivalent zur üblichen Definition waren und somit ein anderes Konzept definieren. In der ersten Sitzung sollte jeder Proband diesen Fragebogen alleine ausfüllen, in der zweiten Sitzung haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer denselben Fragebogen in Form einer Gruppendiskussion behandelt und in der dritten Sitzung sollte jeder Proband den Fragebogen erneut alleine ausfüllen. Die Gruppendiskussion wurde von den Forschenden videografiert und qualitativ analysiert. Dabei hat sich gezeigt, dass die Teilnehmenden der Studie unterschiedliche Ansichten darüber hatten, welche Eigenschaften eine Definition erfüllen muss. Zum einen waren verschiedene Meinungen zu der Frage, ob eine Definition überflüssige Bedingungen beinhalten dürfe, vertreten. Weiter wurde darüber diskutiert, ob andere mathematische Begriffe in einer Definition verwendet werden dürfen beziehungsweise wie grundlegend die Begriffe sein müssten, die verwendet werden dürfen. Allgemeiner herrschte Uneinigkeit darüber, ob jede Aussage, bei der es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Konzept handelt, eine Definition für dieses Konzept sein kann. Das hängt auch eng mit der Frage zusammen, ob es für einen mathematischen Begriff mehrere Definitionen geben kann. Schließlich wurde noch über Funktionen von Definitionen diskutiert. Die Probanden haben mehrfach geäußert, dass es mit einer Definition möglich sein müsse, Objekte in Beispiele und Nicht-Beispiele zu klassifizieren. Weitere Funktionen von Definitionen, die genannt wurden, sind ihre Nutzung bei Beweisen oder beim Problemlösen und ihr Beitrag zum Verstehen der Bedeutung eines mathematischen Konzepts. Teilweise haben sich die Meinungen der Schülerinnen und Schüler zu einer Eigenschaft oder Funktion von Definitionen auch während der Gruppendiskussion verändert. Möglicherweise haben sie zuvor noch nie bewusst über mathematische Definitionen im Allgemeinen nachgedacht. Die Autoren betonen, dass das Konzept „Definition“ meist durch verschiedene Beispiele von Definitionen mathematischer Begriffe gebildet wird, aber in den seltensten Fällen diskutiert wird, was Funktionen und Eigenschaften einer mathematischen Definition sind. Auch würden selten alternative Definitionen – äquivalent oder auch nicht äquivalent zur allgemein anerkannten Definition – eines mathematischen Konzepts behandelt.

In Bezug auf die konkreten mathematischen Objekte formulieren die Forschenden als Ergebnis, dass die Beschäftigung mit verschiedenen Vorschlägen für Definitionen desselben Konzepts bei den Probanden Verbindungen zwischen dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* angeregt hat, die das Verständnis des Konzepts verbessert haben. Sie sehen eine solche Aktivität daher als lernförderndes Mittel an.

Wenn Metawissen über die Bedeutung und die Funktionen von Definitionen vermittelt werden soll, so muss dies in der Hochschule geschehen. Vinner fordert insbesondere, durch

geeignete Aufgaben, deren Bearbeitung mit einem (eingeschränkten) *Concept Image* alleine nicht möglich ist, die Funktion von Definitionen als Kriterium herauszustellen:

„not only that definitions should be given and discussed, the students should be trained to use them as an ultimate criterion in mathematical tasks. This goal can be achieved only if the students are given tasks that cannot be solved correctly by referring only to the concept image.“ (Vinner, 1991, S. 80)

Edwards und Ward (2004) gehen noch weiter und schlagen vor, dass das Konzept „Definition“ explizit im Studium behandelt werden sollte. In einer vorherigen Studie hat Edwards beobachtet, dass Studierende Schwierigkeiten mit dem Verständnis und der Anwendung von Definitionen zu Begriffen wie Grenzwert oder Stetigkeit haben. Ward, der selbst Fachmathematiker ist, hat vermutet, dass diese Schwierigkeiten damit zu tun haben könnten, dass diese Begriffe sowohl außerhalb der Mathematik verwendet als auch in einer weniger strengen Form in der Schule behandelt werden. Daher würden die Studierenden mit diesen Begriffen nicht nur die formale Definition verbinden und diese folglich bei Aufgaben nicht unbedingt verwenden. Genauer wird darauf in dem Artikel nicht eingegangen. Ward hat die Hypothese aufgestellt, dass dies bei Begriffen aus dem Gebiet der abstrakten Algebra anders wäre, da diese Begriffe weder außerhalb der Mathematik verwendet noch in der Schule behandelt werden würden (Edwards und Ward, 2004, S. 411). Die beiden Forscher haben daraufhin eine Studie durchgeführt, in der sie Studierende einer Veranstaltung zur Einführung in Gruppentheorie interviewt haben. Die Studierenden sollten dabei unter anderem Fragen zur Rolle von Definitionen beantworten und Aufgaben bearbeiten, bei denen die Anwendung einer Definition adäquat gewesen wäre. Obwohl den Studierenden die entsprechenden Definitionen in schriftlicher Form vorlagen, haben einige selbst dann überhaupt nicht oder nicht geeignet mit der Definition gearbeitet, wenn die Forscher der Meinung waren, dass sie keine Alternative dazu hätten, da die Begriffe weder durch außermathematische Bedeutungen konnotiert seien noch die Studierenden dazu weniger strenge „Definitionen“ kennengelernt hätten (Edwards und Ward, 2004, S. 417f.). In den Begriffen von Tall und Vinner würden Mathematikerinnen und Mathematiker bei der Bearbeitung einer solchen Aufgabe letztendlich stets auf Basis ihrer *Concept Definition* zu dem entsprechenden Begriff argumentieren, nachdem sie zuvor möglicherweise das *Concept Image* miteinbezogen haben (Edwards und Ward, 2004, S. 412f.). Bei den Studierenden kommt es hingegen vor, dass sie eine Aufgabe ausschließlich basierend auf ihrem *Concept Image* zu dem entsprechenden Begriff bearbeiten (Edwards und Ward, 2004, S. 416f.). Die Hypothese von Ward konnte somit nicht bestätigt werden, da im Bereich der abstrakten Algebra ähnliche Probleme bei der Anwendung von Definitionen beobachtet wurden wie bei den Begriffen aus der Analysis. Die beiden Forscher schlagen nicht nur vor, Definitionen als Konzept an sich zu behandeln, sondern auch den Studierenden Erfahrungen im Definieren zu verschaffen:

„Students should have experiences that focus on the use of mathematical definitions *and* experiences in the process of defining.“ (Edwards und Ward, 2004, S. 422)

Die verschiedenen Autorinnen und Autoren vertreten allesamt die Meinung, dass Definitionen in der Schule eine grundlegend andere Rolle spielen als an der Universität und den Studienanfängerinnen und -anfängern daher die Bedeutung und Funktionen dieser

zunächst noch nicht bewusst sind. Außerdem gibt es Forderungen, dass das Konzept „Definition“ explizit thematisiert werden sollte und dass die Studierenden auch den Prozess des Definierens kennenlernen sollten. Es gibt verschiedene Vorschläge für Interventionen, die Studierende dabei unterstützen können, die Rolle und Bedeutung von Definitionen besser zu verstehen (vgl. z.B. Dubinsky et al. (1988), Moore (1994), Fukawa-Connelly und Newton (2014), Watson und Mason (2005)). Auf diese soll hier nicht eingegangen werden. Der Fokus der Arbeit wie auch des zu entwickelnden Workshops liegt auf dem Verständnis des Konvergenzbegriffs. Für die Gestaltung des Workshops kann miteinbezogen werden, welche Sichtweisen Studienanfängerinnen und -anfänger zur Rolle und Funktionen von Definition haben. Es sollen hingegen keine Aktivitäten in den Workshop aufgenommen werden, die diese Sichtweisen zu Definitionen allgemein verbessern.

Der Philosoph Robinson (1954) hat zwischen ‚lexical definitions‘ und ‚stipulative definitions‘ unterschieden. Unter ersterem versteht er verbale Definitionen eines Begriffs, die aus der Benutzung dieses Begriffs entstanden sind. Solche Definitionen sind eher in der Alltagssprache zu finden, wenn beschrieben wird, wie eine Person einen Begriff verwendet hat. Mit ‚stipulative definitions‘ hingegen meint Robinson Definitionen, die einem Objekt einen Namen zuweisen oder umgekehrt. Diese hätten das Ziel, die Kommunikation zu erleichtern und würden die Benutzung des definierten Begriffs ermöglichen. Alcock und Simpson nennen als eine von zwei Anforderungen zum Verstehen eines definierten Konzepts, dass Studierende mathematische Definitionen als ‚stipulative definitions‘ auffassen müssen:

„The global demand is that students learn to treat definitions as stipulative criteria and to invoke and use them appropriately in respond to reasoning tasks. The local demand is that students learn to work with each particular definition and conform their concept image to it.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 16)

Es gibt verschiedene Veröffentlichungen, die vorschlagen, die Studierenden selbst Definition erfinden beziehungsweise nacherfinden zu lassen. Auf solche Vorschläge wird im Abschnitt 2.5 eingegangen.

2.3 Relevantes Vorwissen für den Konvergenzbegriff

Es stellt sich zunächst die Frage, welche anderen mathematischen Themen und Konzepte als relevant in Bezug auf den Begriff der Konvergenz von Folgen angesehen werden können. Bei Grenzwertüberlegungen müssen unendliche Prozesse betrachtet werden, somit kann eine eingeschränkte Vorstellung zur Unendlichkeit zu Problemen beim Verständnis der Konvergenz führen. Daher werden im Abschnitt 2.3.1 Vorstellungen und Schwierigkeiten mit diesem Begriff thematisiert. Fraglos ist ein Verständnis des Folgenbegriffs notwendig, um adäquates Wissen zum Begriff der Folgenkonvergenz aufbauen zu können. Auf diesen wird in Abschnitt 2.3.3 eingegangen. Da eine Folge üblicherweise als spezielle Funktion definiert wird, soll zuvor in Abschnitt 2.3.2 auf bekannte Schwierigkeiten im Zusammenhang damit eingegangen werden, da diese zumindest teilweise auch beim Folgenbegriff zu erwarten sind. Außerdem kommen in der formalen ϵ - N -Definition beziehungsweise beim Anwenden dieser Variablen, Quantoren, Beträge und Ungleichungen vor, weshalb diese

Themen ebenfalls als relevant angesehen werden können und in den Abschnitten 2.3.4, 2.3.5 und 2.3.6 behandelt werden.

2.3.1 Unendlichkeit

Seit langer Zeit beschäftigen sich Forscherinnen und Forscher bereits mit Vorstellungen und Schwierigkeiten im Zusammenhang mit Unendlichkeit. Von der umfangreichen Literatur zu Unendlichkeit wird hier insbesondere auf solche Veröffentlichungen eingegangen, bei denen explizit oder implizit ein Zusammenhang zum Grenzwertbegriff vorhanden ist.

Bereits Aristoteles verwendete die Begriffe aktual unendlich und potentiell unendlich und sie werden bis heute benutzt. Tirosh (1991, S. 199f.) beschreibt potentiell unendlich als die Vorstellung von einem Prozess, der theoretisch beliebig weit fortgeführt werden kann. Wird ein ‚Zwischenstand‘ dieses Prozesses betrachtet, so ist dieser jeweils endlich. Aktual unendlich hingegen wird als die Betrachtung der Gesamtheit beschrieben, beispielsweise die Betrachtung einer unendlichen Menge. Marx (2013, S. 77) spricht in diesem Zusammenhang von einer „Dualität des Unendlichen als Prozess und als Objekt, welche [...] auch im Denken der Lernenden zu identifizieren ist“. Die Sichtweise des aktual Unendlichen scheint für Lernende deutlich schwieriger als die des potentiell Unendlichen. Aristoteles war laut Moore (1990) der Meinung, Menschen seien überhaupt nicht in der Lage, einen unendlichen Prozess als Ganzes anzusehen. Aktuellere Forscherinnen und Forscher vertreten diese Meinung nicht in dieser extremen Form, doch es wird vielfach von Schwierigkeiten mit dieser Sichtweise berichtet. Dubinsky et al. benutzen die sogenannte APOS-Theorie als mögliche Erklärung für solche Schwierigkeiten (Dubinsky et al. (2005a), Dubinsky et al. (2005b)). Bei dieser konstruktivistischen Lerntheorie wird davon ausgegangen, dass das Verstehen eines Begriffs zunächst auf einem „Action“-Level geschieht. Auf diesem Level könnten Lernende beispielsweise bei einer durch einen Term gegebenen unendlichen Folge jeweils einzelne Werte bestimmen. Das nächste Level wird als „Process“ bezeichnet. Es ist dadurch gekennzeichnet, dass Lernende sich vorstellen können, dass diese Folge unendlich ist, ohne dass sie konkrete Handlungen durchführen müssen. Auf dieser Ebene ist die Sichtweise des potentiell Unendlichen einzuordnen. Für die Sichtweise des aktual Unendlichen ist hingegen ein noch höheres Level nötig, das „Object“-Level. Hat ein Lernender ein Verständnis einer unendlichen Folge auf diesem Level erreicht, so ist er in der Lage, die unendliche Folge als Objekt aufzufassen, mit dem operiert werden könnte. Das höchste Level laut der APOS-Theorie ist schließlich das „Schema“-Level, bei dem das Wissen mit anderen Begriffen vernetzt und zu einem mentalen Schema organisiert wird. Die Sichtweise des aktual Unendlichen erfordert also ein höheres Level des Begriffsverständnisses als die des potentiell Unendlichen. Die Autoren betonen, dass die beiden Sichtweisen sich jedoch nicht widersprechen.

Ein Aspekt, der vielfach untersucht wurde, sind unendliche Mengen, insbesondere der Vergleich verschiedener unendlicher Mengen (Tirosh und Tsamir (1996), Tirosh (1999), Tsamir und Tirosh (1999), Tsamir (2003), Brown et al. (2010)). Als eine typische Schwierigkeit dabei nennt Tirosh (1991, S. 201ff.) die Akzeptanz der Tatsache, dass zwei Mengen, von denen die eine eine echte Teilmenge der anderen ist, dieselbe Kardinalität haben können. Diese Schwierigkeit lässt sich ihrer Meinung nach auf den Versuch zurückführen, Eigen-

schaften endlicher Mengen auf unendliche Mengen zu übertragen. Zwei endliche Mengen, von denen die eine eine echte Teilmenge der anderen ist, können nämlich nicht dieselbe Kardinalität haben. Auch hat die Autorin problematische Argumentationen beobachtet, dass eine beschränkte Menge weniger Elemente hat als eine unbeschränkte Menge oder, dass eine eindimensionale Menge weniger Elemente hat als eine zweidimensionale Menge. Beides ist im Allgemeinen bei unendlichen Mengen nicht richtig.

Weitere Publikationen befassen sich mit intuitiven Vorstellungen zu Unendlichkeit (Fischbein et al. (1979), Tall und Vinner (1981), Tall (2001), Monaghan (2001), Kleiner (2001)). Diese haben gemeinsam, dass von intuitiven Vorstellungen im Zusammenhang mit unendlich berichtet wird, die zu Widersprüchen führen. Ein Beispiel ist, dass viele Lernende intuitiv davon überzeugt sind, dass $0,9$ kleiner als 1 sei. Auf diese spezielle Problematik wird in Abschnitt 2.4.2 noch genauer eingegangen. Die nicht geeigneten intuitiven Vorstellungen werden beispielsweise von Fischbein et al. (1979) dadurch erklärt, dass sie von endlichen Objekten oder Prozessen stammen und sich nicht unbedingt direkt auf unendliche Objekte oder Prozesse übertragen lassen.

Auch Dubinsky et al. (2005a) sehen es kritisch, von endlichen Prozessen auf unendliche Prozesse zu schließen: „Thinking about infinite processes in terms of processes that do have a final state, even metaphorically, can lead to problems“ (Dubinsky et al., 2005a, S. 259). Ein endlicher Prozess hat stets ein Resultat beziehungsweise eine endliche Folge hat ein letztes Folgenglied. Wird dieses fälschlicherweise auf unendliche Prozesse oder Folgen übertragen, würde ein Lernender davon ausgehen, unendliche Prozesse hätten ebenfalls ein Resultat beziehungsweise unendliche Folgen hätten ein letztes Folgenglied. Das könnte laut Dubinsky et al. (2005a) wiederum dazu führen, dass die Fehlvorstellung entstehe, der Grenzwert einer Folge sei das letzte Glied dieser Folge und es würde immer ein Folgenglied geben, das den Grenzwert annimmt.

2.3.2 Funktionsbegriff

Da Folgen oft als spezielle Funktionen definiert werden, handelt es sich auch bei dem Funktionsbegriff um relevantes Vorwissen für Folgenkonvergenz. Hier soll kein vollständiger Überblick über vorhandene Literatur zu diesem Begriff gegeben werden. Stattdessen soll auf einzelne Schwierigkeiten von Mathematikstudierenden im Umgang mit dem Funktionsbegriff eingegangen werden, die beim Folgenbegriff ebenso auftreten könnten wie beim Funktionsbegriff selbst. Das Wissen über solche Schwierigkeiten kann später auch genutzt werden, um Items für einen Test zu entwickeln, mit dem das in Bezug auf Folgen und Konvergenz relevante Vorwissen von Studienanfängerinnen und -anfängern erhoben werden kann.

Vinner und Dreyfus (1989) weisen darauf hin, dass die moderne, allgemein anerkannte Definition einer Funktion beispielsweise auch unstetige Funktionen, abschnittsweise definierte Funktionen, solche Funktionen, die für einzelne Werte anders definiert sind als für die übrigen, und durch einen Graph definierte Funktionen umfasst. Allerdings werden in der Schule hauptsächlich solche Funktionen behandelt, die durch einen einzigen Term definiert sind. In einer Studie, welche die Autoren mit College-Studierenden im ersten Studienjahr und Mathematiklehrkräften an einer Junior Highschool durchgeführt

haben, bestätigt sich die Vermutung, dass viele Studierende lediglich solche typischen Beispiele als Funktionen ansehen. Für die vorliegende Arbeit sind vor allem die Ergebnisse der 58 Mathematikstudierenden interessant. Bei einem Graph, der aus zwei Halbgeraden besteht und eine Unstetigkeitsstelle aufweist, haben immerhin 86% von ihnen richtig geantwortet, dass es eine Funktion gibt, deren Graph dem abgebildeten entspricht. Typische Begründungen für falsche Antworten beinhalteten das Argument der Unstetigkeit oder dass eine Funktion nicht durch verschiedene Formeln definiert sein dürfe. Im Falle eines Graphs ohne Unstetigkeitsstelle, der aus einer Kurve und einer Halbgeraden besteht, beträgt die Lösungsrate hingegen nur 72%. Einige Studierende sind der Meinung, eine Funktion könne zwar aus mehreren Termen zusammengesetzt sein, jedoch nur wenn die verschiedenen Termen vom selben Typ sind. Eine abschnittsweise definierte Funktion mit zwei linearen Termen wird von ihnen akzeptiert, eine abschnittsweise definierte Funktion mit einem linearen und einem höheren Term dagegen nicht. Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift verbal eindeutig beschrieben wurde und die für einen einzelnen Wert anders definiert ist als für die übrigen Werte, wurde nur von 60% der Mathematikstudierenden als Funktion akzeptiert. Sofern Begründungen für falsche Antworten gegeben wurden, bezogen sie sich in den allermeisten Fällen auf den einzelnen Wert, für den die Zuordnungsvorschrift von derjenigen der anderen Werte abwich. Weiter wurden die Probandinnen und Probanden gefragt, ob es eine Funktion geben kann, deren Funktionswerte alle gleich sind. 67% der Mathematikstudierenden haben dies bejaht. Zu dieser Frage sind auch manche Begründungen für die korrekte Antwort interessant. So haben einige Studierende einen Term wie $\frac{x}{x}$ oder x^0 als Funktionsvorschrift angegeben, was darauf hindeutet, dass ihrer Meinung nach die Variable x im Funktionsterm vorkommen muss. Mit Abstand am schlechtesten wurde jedoch die Frage beantwortet, ob es eine Funktion gebe, deren Werte für ganze Zahlen nicht-ganzzahlig und für andere Zahlen ganzzahlig seien. Nur 17% der betrachteten Studienanfängerinnen und -anfänger haben dies bejaht. Ein Grund für eine falsche Antwort war wieder, dass es nicht einen einzigen Term gibt, durch den die gesuchte Funktion definiert werden kann. Das Hauptergebnis dieser Studie ist, dass viele Studienanfänger hauptsächlich solche Funktionen als Funktionen akzeptieren, die durch einen einzigen Term definiert sind. Die Autoren plädieren dafür, dass Dozentinnen und Dozenten dies berücksichtigen sollten und versuchen sollten, die *Concept Images* der Studierenden durch die Behandlung weniger typischer Beispiele anzureichern.

Ähnliche Ergebnisse hat auch eine Studie von Beitlich et al. (2015) ergeben. Die Autorinnen und Autoren haben an zwei bayerischen Universitäten insgesamt 74 Studierende des gymnasialen Lehramts mit dem Fach Mathematik im Rahmen eines mathematischen Vorkurses einen schriftlichen Test zum Verständnis des Funktionsbegriffs bearbeiten lassen. Zu diesem Test geben sie deskriptive Ergebnisse an. Einige davon werden hier dargestellt. In der ersten Aufgabe sollten die Studienanfängerinnen und -anfänger in wenigen Sätzen, ohne Zeichnungen, möglichst genau beantworten, was in der Mathematik unter einer Funktion verstanden wird. Nur bei 5,4% der Antworten wurden der Definitions- und der Wertebereich erwähnt und 39,2% der Befragten haben die Rechtseindeutigkeit und Linkstotalität genannt. Insgesamt haben laut den Forschenden 41,9% der Studierenden Beschreibungen geliefert, die weder in der Universität noch in der Schule als korrekt und vollständig angesehen werden. Bei der zweiten Aufgabe sollte zu drei verschiedenen Aussagen jeweils angekreuzt werden, ob sie immer, manchmal oder nie zutreffen. Dabei

haben beispielsweise 63,5% der Studienanfänger geantwortet, „dass eine Funktion immer auf einem Term oder einer Gleichung beruht“ (Beitlich et al., 2015, S. 218). 87,8% der Probanden waren der Meinung, „dass eine Funktion immer einen Definitionsbereich besitzt“ (Beitlich et al., 2015, S. 218), obwohl nur 14,9% dies bei der ersten Aufgabe erwähnt haben. In Aufgabe 3 geht es um komplexere Zuordnungen, zum Beispiel die Abbildung zweier reeller Zahlen auf ihr Produkt oder die Abbildung einer natürlichen Zahl auf die Menge ihrer Teiler. Diese wurden jeweils von weniger als der Hälfte der Befragten als Funktionen erkannt. Die vierte Aufgabe, bei der verschiedene Graphen gegeben waren, bei denen jeweils entschieden werden sollte, ob es sich um Funktionsgraphen handelt, wurde verhältnismäßig gut bearbeitet. Die Autorinnen und Autoren fassen zusammen, dass viele Studienanfängerinnen und -anfänger fehlerhafte und unvollständige Vorstellungen zum Funktionsbegriff aufweisen. Insbesondere würden auch solche Fehler auftreten, „die nicht unbedingt auf einen unterschiedlichen Gebrauch von Konzepten in Schule und Universität zurückzuführen sind“ (Beitlich et al., 2015, S. 220). In Bezug auf das *Concept Image* der Studierenden sind sie der Meinung, dass dieses von typischen Beispielen von Funktionen geprägt ist, die in der Schule behandelt werden. Die Forschenden sprechen hier von einer Untergeneralisierung des Begriffs, wenn Lernende auf Basis spezieller Beispiele einen Begriff zu eng fassen. Auch in Bezug auf die *Concept Definition* sehen die Forscher Schwierigkeiten bei den Studierenden. Sie haben den Eindruck, dass viele Studierende nicht in der Lage seien, ihr Wissen zum Funktionsbegriff abzurufen und zu verbalisieren. Sie nennen auch Implikationen für die universitäre Lehre:

„Ziel des universitären Mathematiklernens muss es daher sein, unvollständige Vorstellungen bzw. Fehlvorstellungen zunächst aufzudecken, daran ansetzend gezielt die Variationsbreite an Begriffsrepräsentanten zu vergrößern, sowie eine Vorstellung passender Gegenbeispiele aufzubauen. Somit sollten sowohl *concept image* als auch *concept definition* des Funktionsbegriffs adäquat adaptiert werden.“ (Beitlich et al., 2015, S. 214)

In Ergänzung zu diesen Zielen nennen sie außerdem, dass von den Studierenden „explizite und vollständige Definitionen“ (Beitlich et al., 2015, S. 220) eingefordert werden sollten und, dass *Concept Image* und *Concept Definition* stärker verknüpft werden sollten, beispielsweise durch Aufgaben, bei denen die Definition an Beispielen angewendet werden soll.

In Bezug auf den Folgenbegriff liegt auf Basis dieser Forschungsergebnisse die Vermutung nahe, dass ähnlich wie beim Funktionsbegriff einige Studierende lediglich solche Folgen als Folgen auffassen, die durch einen einzigen Term definiert sind. Auch kann vermutet werden, dass die Vorstellung vertreten ist, dass in diesem Term eine Variable vorkommen muss. Konstante Folgen fallen somit möglicherweise nicht für alle Studierenden unter ihren Begriff von Folgen. Des Weiteren könnten Schwierigkeiten darin bestehen, zu beschreiben, was eine Folge ist.

2.3.3 Folgen

Zum Begriff der Folge wurden von verschiedenen Forscherinnen und Forschern Sichtweisen und Aspekte herausgearbeitet. Sowohl die Bezeichnungen als auch die Anzahlen unterscheiden sich je nach Autorin und Autor, hier soll ein Überblick über die wesentlichen

Sichtweisen und Aspekte gegeben werden. Generell werden in der Mathematikdidaktik häufig dynamische und statische Sichtweisen unterschieden. Eine dynamische Sichtweise zum Folgenbegriff kann durch typische Formulierungen wie „eine Folge wird durchlaufen“ oder „eine Folge strebt gegen einen Wert“ charakterisiert werden. Meist wird dabei explizit oder implizit ein zeitlicher Prozess angenommen. Diese Sichtweise hängt eng mit der Sichtweise des potentiell Unendlichen zusammen. Dem gegenüber steht die statische Sichtweise des Folgenbegriffs. Dabei wird die Folge als Ganzes betrachtet, ohne dass die Vorstellung eines zeitlichen Prozesses vorherrscht. Die Betrachtung der Folge als Ganzes oder als Objekt, das Eigenschaften besitzen kann und mit dem operiert werden kann, wird auch als Gesamtheitsaspekt oder Objektaspekt bezeichnet (vgl. Weigand (1993, S. 28ff.)). McDonald et al. (2000) betrachten zwei andere Sichtweisen von Folgen, und zwar Folgen als Listen von Zahlen und Folgen als Funktionen. Erstere wird von Weigand (1993) als Aufzählungsaspekt bezeichnet und lässt sich laut diesem der dynamischen Sichtweise zuordnen. Die einzelnen Folgenglieder können nach und nach – potentiell unendlich – aufgezählt oder aufgelistet werden. Für die Sichtweise von Folgen als Funktionen verwendet Weigand (1993) den Begriff funktionaler Aspekt. Eine Folge wird als Funktion mit speziellem Definitionsbereich angesehen, es gibt eine Beziehung zwischen der Indexmenge und den Folgengliedern. Diesen Aspekt ordnet er weder eindeutig der dynamischen noch der statischen Sichtweise zu. Funktionen selbst können ebenfalls statisch und dynamisch angesehen werden. Auf statische und dynamische Sichtweisen im Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff wird in Abschnitt 2.4.1 noch eingegangen.

McDonald et al. (2000) haben eine Studie durchgeführt, als deren Ziel sie nennen, mit Hilfe der APOS-Theorie genauer zu untersuchen, wie das Lernen des Folgenkonzepts verlaufen kann. Die Probanden sind 21 Studierende, die alle bereits einen zweisemestrigen Calculus-Kurs besucht und erfolgreich abgeschlossen haben. Ein Teil von ihnen hatte einen klassischen Calculus-Kurs belegt, die übrigen einen Kurs mit der Bezeichnung Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning (C^4L), bei dem die Studierenden in Gruppenarbeit am Computer mit der Programmiersprache ISETL mathematische Aufgaben lösen sollten. Viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie hatten davon abgesehen bereits weitere Mathematikurse belegt. Es wurden Interviews mit den Probandinnen und Probanden durchgeführt und diese wurden mit den APOS-Theorie analysiert. Während der Interviews wurden die Studierenden unter anderem dazu aufgefordert, eine Definition des Begriffs ‚Folge‘ anzugeben, Beispiele von Folgen zu nennen, spezielle Folgen zu betrachten, die Begriffe ‚Folge‘ und ‚Funktion‘ zu vergleichen, Folgen mit vorgegebenen Eigenschaften anzugeben und den Grenzwert einer Folge zu bestimmen (McDonald et al., 2000, S. 83). Die Autoren haben die Antworten jeweils dahingehend analysiert, auf welchem Level die beiden Sichtweisen von Folgen als Listen und Folgen als Funktionen bei den einzelnen Studierenden deutlich werden. Die Sichtweise von Folgen als Listen bedeutet, dass eine Folge als eine – potentiell unendliche – Auflistung von Folgengliedern angesehen wird. Bei der Sichtweise von Folgen als Funktionen werden Folgen als Funktionen mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich aufgefasst, bei der jeder natürlichen Zahl n das Folgenglied a_n zugeordnet wird. Die Level, die im Sinne der APOS-Theorie unterschieden wurden, sind bei beiden Sichtweisen jeweils ein Action-Level, Process-Level und Object-Level. Zu einem umfassenden Verständnis des Folgenbegriffs würden dann nicht nur die beiden Sichtweisen gehören, sondern auch Verbindungen zwischen ihnen, so

dass es sich um **ein** mentales Schema handelt und die beiden Sichtweisen als verschiedene Darstellungen desselben Konzepts angesehen werden. Bei der Entwicklung eines solchen Schemas unterscheiden McDonald et al. (2000, S. 92ff.) noch einmal drei verschiedene Stufen. Bei Studierenden der untersten Stufe („Intra Stage“) wären keine kognitiven Verbindungen zwischen den beiden Sichtweisen vorhanden. Bei der nächsten Stufe („Inter Stage“) sehen die Studierenden einen Zusammenhang zwischen beiden Sichtweisen, sie können beispielsweise aus einem Term eine Liste der Folgenglieder erstellen oder umgekehrt zu manchen Listen von Zahlen geeignete Terme angeben. Sie können möglicherweise auch in der jeweiligen Problemsituation flexibel zwischen den beiden Sichtweisen wechseln, die Äquivalenz von beiden ist ihnen jedoch nicht bewusst. Das ist nur bei der höchsten Stufe („Trans Stage“) der Fall, bei denen die Studierenden die beiden Sichtweisen als zwei mögliche Representationsformen des Folgenbegriffs ansehen. Ein zentrales Ergebnis der Studie ist, dass bezüglich der Sichtweise von Folgen als Listen von Zahlen bei allen Probanden das Object-Level vorhanden war. Das bedeutet, dass die Studierenden eine Folge als – potentiell unendliche – Liste nicht nur prinzipiell als Folge, sondern auch als ein Ganzes auffassen, mit dem sie operieren können. Bei der Sichtweise von Folgen als Funktionen sah das anders aus. So verneinte beispielsweise eine Studentin die Frage, ob es Sinn machen würde, über den Definitionsbereich einer Folge zu sprechen, da sie das nicht verstehen würde (McDonald et al., 2000, S. 86). Ein anderer Student antwortete wie folgt auf die Frage nach dem Unterschied zwischen einer Folge und einer Funktion:

„A function would be something like one over two to the x, and a sequence would be the terms that come out of that function. It would be a listing of these terms.“ (McDonald et al., 2000, S. 91)

Dieser Student sieht zwar einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und einer Folge, doch ihm ist anscheinend nicht bewusst, dass eine Folge auch durch einen Term dargestellt werden kann. Etwa zwei Drittel der Studierenden werden von den Autoren bezüglich der Sichtweise von Folgen als Funktionen auf dem Object-Level eingeordnet. Diese Sichtweise scheint den Studierenden also schwerer zu fallen als die andere:

„This SEQFUNC object was more difficult for students to develop partly because it is tied to their function schema, a schema which is relatively weak for many students.“ (McDonald et al., 2000, S. 97)

Mit SEQFUNC ist dabei die Sichtweise von Folgen als Funktionen gemeint. Eine typische Antwort auf die Frage nach dem Unterschied zwischen einer Folge und einer Funktion auf dem Object-Level wäre, dass es sich bei Folgen um Funktionen handelt, deren Definitionsbereich den natürlichen Zahlen entspricht. Erstaunlich fanden die Autoren, dass das *Concept Image* vieler Studierender ausschließlich die Sichtweise von Folgen als Listen beinhaltete und sie dennoch viele typische Calculus-Aufgaben erfolgreich bearbeiten konnten. Ziel eines Calculus-Kurses sollte ihrer Meinung nach dennoch sein, dass die Studierenden die höchste Stufe der Schema-Entwicklung zum Folgenbegriff erreichen, wofür das Vorhandensein des Object-Levels bei beiden Sichtweisen notwendig ist. In dieser Studie war dies allerdings lediglich bei sieben der insgesamt 21 interviewten Personen der Fall. Die Studierenden, die den C^4L -Kurs besucht hatten, in dem besonderen Wert auf den Funktionsbegriff gelegt wurde, haben tendenziell sowohl ein höheres Level bei der Sichtweise von Folgen als Funktionen als auch bei der Schema-Entwicklung erreicht, doch die Stichprobe

ist zu gering für inferenzstatistische Aussagen. Ein wesentliches Ergebnis dieser Studie ist also, dass die Sichtweise von Folgen als Funktionen den Studierenden anscheinend schwerer fällt als die Sichtweise von Folgen als Listen von Zahlen. Diese Schwierigkeit lässt sich zumindest teilweise auf eingeschränkte Vorstellungen zum Funktionsbegriff zurückführen. So wird in manchen Veröffentlichungen von Schwierigkeiten oder Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit dem Folgenbegriff berichtet, die beim Funktionsbegriff analog auftreten. Eine mögliche eingeschränkte Vorstellung wäre, dass eine Funktion oder im Speziellen eine Folge durch einen (einzigen) Term definiert werden muss und in diesem Term als Variable der Index vorkommen muss. In den von McDonald et al. (2000) geführten Interviews haben manche Studierende diese Vorstellung explizit geäußert, wie das Beispiel der folgenden Studierendenantwort zeigt:

„... but I think that it's a, has to have, um, some kind of, um, formula to it, as far as like a pattern.“ (McDonald et al., 2000, S. 84)

Des Weiteren berichten Tall und Vinner (1981, S. 159) von Studierenden, die eine Folge, die für gerade und ungerade Indizes jeweils durch verschiedene Terme definiert wurde, nicht als eine, sondern als zwei Folgen aufgefasst haben. Das kann zu fehlerhaften Bestimmungen von Grenzwerten führen. Beispielsweise wäre ein solcher Studierender bei der Folge, deren Glieder für ungerade Indizes durch den Term $\frac{1}{n}$ und für gerade Indizes durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, vermutlich der Meinung, es handele sich um zwei Folgen, von denen die eine gegen 0 und die andere gegen 1 konvergiert. Tatsächlich handelt es sich jedoch um eine Folge und diese konvergiert nicht, sondern besitzt die beiden Häufungspunkte 0 und 1. Das kann der Studierende nicht erkennen, wenn er die Folge gar nicht als eine einzige Folge auffasst. Auch Roh (2005) hat festgestellt, dass Studierende Schwierigkeiten haben, bestimmte Folgen als solche aufzufassen. In ihrer Studie, auf die im Abschnitt 2.5.3 noch genauer eingegangen wird, hat sie Studierende einerseits mit den konstanten Folgen $(0)_{n \in \mathbb{N}}$, $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{5})_{n \in \mathbb{N}}$ und andererseits mit den ebenfalls konstanten Folgen $(\frac{n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{n}{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ konfrontiert. Tatsächlich haben einige der Probandinnen und Probanden die ersten drei Folgen gar nicht als Folgen aufgefasst, die letzten beiden hingegen schon. Die Autorin erklärt dies wie folgt:

„For them, sequences required an algebraic expression including the index n that described a relationship between n and a_n .“ (Roh, 2005, S. 84)

Sofern der algebraische Ausdruck den Index n beinhaltet, haben die Studierenden korrekt erkannt, dass dadurch eine Folge definiert wird, andernfalls jedoch nicht. Es gibt also tatsächlich Hinweise darauf, dass die Schwierigkeiten, die vom Funktionsbegriff bekannt sind, zumindest teilweise auch beim Folgenbegriff auftreten.

2.3.4 Variablenbegriff

In der $\epsilon - N$ -Definition kommen neben den Variablen für die Folgenglieder und deren Index mit ϵ und N zwei Variablen vor, zwischen denen eine – wenn auch nicht funktionale – Abhängigkeit besteht. Außerdem repräsentiert N eine feste Zahl, während n und somit auch a_n unendlich viele Zahlen repräsentieren. Aufgrund dieser Eigenschaften der Grenzwertdefinition scheint ein Verständnis des Variablenbegriffs notwendig für das Verstehen

der genannten Definition zu sein, weshalb hier darauf eingegangen wird.

Auch zum Variablenbegriff gibt es zahlreiche Veröffentlichungen. Einige davon thematisieren die Bedeutungen des Variablenbegriffs (z.B. Küchemann (1978), Siebel (2005), Specht (2009)). Andere beschäftigen sich mit der Begriffsentwicklung von Schülerinnen und Schülern zum Variablenbegriff (z.B. Melzig (2010), Berlin (2010)). Wieder andere Veröffentlichungen gehen auf Schwierigkeiten im Umgang mit Variablen ein (z.B. Eisenberg (1991), Malle (1993), Mason et al. (1985), Kaput et al. (2008), Vollrath und Weigand (2007)). Für diese Arbeit ist keine vollständige Darstellung des Forschungsstandes zum Variablenbegriff nötig, sondern es sind solche Publikationen interessant, die Ergebnisse in Form von Sichtweisen oder Schwierigkeiten mit Variablen liefern, die Einfluss auf das Verständnis des Konvergenzbegriffs und insbesondere dessen Definition haben könnten. Dazu zählen vor allem Forschungen über Vorstellungen, die Studienanfängerinnen und -anfänger zum Variablenbegriff aufgebaut haben sollten oder könnten.

Damit hat sich vor allem Malle (1993) beschäftigt. Er unterscheidet zunächst verschiedene Grundvorstellungen zu Variablen in Bezug auf ihre Verwendung. Unter dem Gegenstandaspekt versteht er, dass eine Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl angesehen wird. Beim Einsetzungsaspekt wird die Variable als Platzhalter angesehen, an dessen Stelle Zahlen eingesetzt werden. Der Kalkülaspekt hingegen bezeichnet das bedeutungslose Operieren mit Zeichen. Weiter unterscheidet Malle verschiedene Aspekte des Variablenbegriffs im Hinblick darauf, auf welche Art und Weise die Variable Zahlen aus einem bestimmten Bereich repräsentiert. Beim Einzelzahlaspekt repräsentiert eine Variable eine einzelne Zahl, die innerhalb des bestimmten Bereichs beliebig aber fest ist. Der Bereichsaspekt hingegen bezeichnet die Betrachtung jeder Zahl des bestimmten Bereichs. Dabei unterscheidet Malle noch einmal zwei Aspekte. Unter dem Simultanaspekt versteht er, dass alle Zahlen des Bereichs gleichzeitig betrachtet werden. Im Gegensatz dazu steht beim Veränderlichenaspekt die Betrachtung aller Zahlen des Bereichs in einer zeitlichen Abfolge im Vordergrund (Malle, 1993, S. 79ff.).

Auch Freudenthal (1973) hat eine Unterscheidung von Sichtweisen von Variablen vorgenommen. Diese werden hier zunächst vorgestellt und anschließend mit denen von Malle (1993) in Beziehung gesetzt. Freudenthal (1973) hat zunächst zwei verschiedene Variablenauffassungen eingeführt, und zwar Variable als Unbekannte und Variable als Unbestimmte:

„The first case is in algebra that of *unknowns* in an equation, the second that of *indeterminates* in a general statement.“ (Freudenthal, 1973, S. 295)

Unter der Auffassung einer Variable als Unbekannte versteht er, dass in einer Gleichung die Variable als unbekannte Zahl verstanden wird, die meist bestimmt werden soll. Mit der Auffassung einer Variable als Unbestimmte meint er hingegen die Verwendung einer Variable in einer allgemeinen Aussage, in der die Variable für eine beliebige Zahl aus einem bestimmten Bereich steht. Schließlich hat Freudenthal (1983) später noch die Auffassung einer Variablen als Veränderliche ergänzt. Damit bezieht er sich auf die Verwendung von Variablen bei Funktionen, wo die Variable zwar ebenfalls für einen ganzen Bereich von Zahlen steht, doch hier steht die Vorstellung im Vordergrund, dass die Zahl sich verändert

und wie sich diese Veränderung auf den Funktionswert auswirkt.

Siebel (2005) ist der Meinung, dass Malle unter dem Einzelzahlaspekt das versteht, was Freudenthal mit Variable als Unbestimmte bezeichnet. Weiter entspricht der Simultanaspekt ihrer Meinung nach inhaltlich der Auffassung der Variable als Unbestimmte und schließlich der Veränderlichenaspekt der Variablenauffassung als Veränderliche. Dieser Meinung schließe ich mich an und verwende im Folgenden die Bezeichnungen von Malle, die in der Mathematikdidaktik weit verbreitet sind.

Beim Umgang mit der formalen Definition der Konvergenz einer Folge müssen von den Studierenden mehrere Variablenvorstellungen und -aspekte gleichzeitig genutzt werden. Dies kann eine mögliche Ursache für Schwierigkeiten sowohl beim Verständnis als auch bei der Anwendung der Definition sein.

2.3.5 Quantoren

Da in der formalen ϵ - N -Definition mehrere Quantoren vorkommen, ist das Verständnis von Quantoren und vor allem von Aussagen mit mehreren Quantoren bedeutsam, um die Definition der Folgenkonvergenz zu verstehen und anwenden zu können. Unter einem Quantor verstehe ich hier nicht nur das entsprechende Symbol, sondern auch die jeweilige Formulierung wie „es gibt“ oder „für alle“.

Epp (2009) präsentiert einige Beispiele fehlerhafter Beweise von Universitätsstudierenden zu Aussagen, in denen Quantoren vorkommen. Diese Beispiele selbst zeigen Schwierigkeiten auf, die sich nicht auf die Definition der Folgenkonvergenz übertragen lassen. Die Autorin geht jedoch auch auf verschiedene logische Prinzipien ein, die bei solchen Beweisen beachtet werden müssen, aber nicht unbedingt explizit behandelt werden. Dies soll eine Erklärung für die Schwierigkeiten der Studierenden sein. Ein solches Prinzip wird als *Existential Instantiation* bezeichnet: Wenn bekannt ist, dass ein Objekt existiert, dann kann es mit einem Namen bezeichnet werden. Dieser Name darf jedoch nicht gleichzeitig bereits für ein anderes Objekt verwendet worden sein. Das Prinzip *Universal Generalization* bezieht sich auf Beweise von Eigenschaften für jedes Element einer Menge. Um einen solchen Beweis zu führen, kann die Eigenschaft für ein beliebig, aber fest gewähltes Element der Menge nachgewiesen werden, anstatt ihn für jedes einzelne Objekt zu führen. Ein weiteres Prinzip ist die *Dependence Rule*. Bei einer Aussage der Form „ $\forall x \dots \exists y \dots$ “ hängt der Wert der Variable y im Allgemeinen von dem Wert der Variablen x ab. Unter dem Prinzip *Universal Instantiation* ist zu verstehen, dass wenn eine Eigenschaft für alle Elemente einer Menge wahr ist, dann ist sie auch für jedes bestimmte Element der Menge wahr. Im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff können vor allem die Prinzipien *Universal Generalization* und *Dependence Rule* als bedeutend eingeschätzt werden. Wird die Konvergenz einer Folge durch Anwenden der Definition bewiesen, so wird üblicherweise zu Beginn ein beliebiges, aber festes $\epsilon > 0$ gewählt. Indem der Nachweis für ein beliebiges $\epsilon > 0$ durchführt wird, ist gezeigt, dass die Bedingung für jedes $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Außerdem hängt der Wert der natürlichen Zahl N , für die der Abstand aller Folgenglieder, deren Index mindestens N ist, zum Grenzwert kleiner als ϵ sein soll, im Allgemeinen von dem Wert von ϵ ab. Bei Beweisen im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff sind

teilweise auch die anderen beiden Prinzipien wichtig. Somit liefert der Artikel ein theoriebasiertes Indiz dafür, dass das Vorhandensein mehrerer Quantoren in der ϵ - N -Definition der Konvergenz das Verständnis dieser Definition erschweren kann.

Am Beispiel des Begriffs der Äquivalenzrelation haben Tall und Chin (2002) das Verständnis von formalen Definitionen mit dem Quantor $\forall$ untersucht. Soll nachgewiesen werden, dass es sich bei einer vorgegebenen Relation um eine Äquivalenzrelation handelt, so muss die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bewiesen werden. Alle drei Eigenschaften werden üblicherweise mit dem Quantor $\forall$ formuliert. Während die Reflexivität wirklich für alle Elemente der entsprechenden Menge gezeigt werden muss, ist dies bei den anderen beiden Eigenschaften nicht der Fall. Sowohl bei der Symmetrie als auch bei der Transitivität muss die jeweilige Forderung nur für solche Paare von Elementen der Menge nachgewiesen werden, für die eine weitere Bedingung erfüllt ist. Bei einer Relation auf der Menge $\{a, b, c\}$, die durch $a \sim b$, $b \sim a$, $a \sim a$ und $b \sim b$ definiert ist, waren etwa 40% der Studierenden der Meinung, diese sei nicht transitiv. Die meisten davon waren der Meinung, für die Transitivität fehle $a \sim c$ oder ähnliches. Sie haben anscheinend nicht verstanden, dass die Forderung nur für solche Paare von Elementen erfüllt sein muss, für welche die Voraussetzung erfüllt ist. Die Autoren folgern, dass der Allquantor in Verbindung mit einer Voraussetzung Studienanfängern besondere Schwierigkeiten bereitet. In der formalen ϵ - N -Definition der Folgenkonvergenz kommt ebenfalls der Quantor $\forall$ in Kombination mit einer Bedingung ($n \geq N$) vor, hinzu kommen weitere Quantoren. Auch das ist ein Indiz für mögliche Schwierigkeiten mit dieser Definition aufgrund der Quantoren, die darin vorkommen.

Dubinsky und Yiparaki (2000) haben sich mit dem Verständnis mathematischer Aussagen, die Quantoren enthalten, beschäftigt und zwar solche Aussagen, in denen ein Existenz- und ein Allquantor vorkommen. Sie motivieren dies wie folgt:

„It seems that practically all interesting mathematical statements have at least one universal and at least one existential quantifier – and the order in which they appear is crucial.“ (Dubinsky und Yiparaki, 2000, S. 241)

Interessant aus dieser Studie sind vor allem die Interpretationen von College-Studierenden zu den beiden folgenden mathematischen Aussagen:

- „For every positive number a there exists a positive number b such that $b < a$.“
- „There exists a positive number b such that for every positive number a $b < a$.“

(Dubinsky und Yiparaki, 2000, S. 243)

Erstere Aussage bezeichnen die Autoren aufgrund der Reihenfolge der Quantoren als AE- und letztere als EA-Aussage. Der quantorenfreie Teil der Aussagen stimmt überein. Die erste Aussage ist korrekt wohingegen die zweite falsch ist. 39% der Studierenden, die einen entsprechenden Fragebogen bearbeitet haben, waren jedoch der Meinung, beide Aussagen hätten dieselbe Bedeutung und haben somit beide als korrekt oder beide als falsch bewertet. Außerdem haben weitere 50% der befragten Personen die Aussagen zwar als

verschieden angesehen, jedoch die erste als falsch und die zweite als richtig bewertet. Dies könnte zwar neben der Quantoren auch an den Aussagen als Ganzes liegen, dennoch scheint es massive Schwierigkeiten mit Quantoren zu geben, insbesondere mit der Bedeutung der Reihenfolge von mehreren Quantoren innerhalb einer Aussage, wie es bei der Definition der Konvergenz der Fall ist.

2.3.6 Beträge und Ungleichungen

Da in der formalen ϵ - N -Definition sowohl ein Betrag als auch eine Ungleichung vorkommen, werden diese Themen ebenfalls als relevant für den Konvergenzbegriff eingeschätzt. Auch hier wird kein vollständiger Überblick über den Forschungsstand gegeben. Beispielsweise sind Studien mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I oder Vorschläge zur Behandlung des Themenbereichs in der Schule hier nicht von Bedeutung. Stattdessen wird lediglich auf einzelne Studien, die mit Studierenden durchgeführt wurden, beziehungsweise die explizit die Schwierigkeiten durch Beträge und Ungleichungen in der Konvergenzdefinition untersuchen, eingegangen.

Herden et al. (1983) haben aus Fehleranalysen von Klausur- und Testbearbeitungen die Hypothese aufgestellt, dass Aufgaben, bei denen die Konvergenz einer Zahlenfolge durch Anwenden der Definition nachgewiesen werden sollte, „zu einem großen Teil auch deswegen als ‚nicht gelöst‘ gewertet werden mußten, weil die Probanden mit für das Lösen von Grenzwertaufgaben unverzichtbaren Voraussetzungen der Arithmetik nicht vertraut waren (Termumformungen, das Auflösen von Ungleichungen insbesondere Betragsungleichungen u.s.w.)“ (Herden et al., 1983, S. 272). Von was für Personen die Klausur- und Testbearbeitungen stammten, wird nicht berichtet. Die Hypothese haben die Autoren später in einer Studie mit Abiturienten genauer untersucht. Es hat sich gezeigt, dass das Hinzufügen von Betragsstrichen zu einer Ungleichung die Lösungsrate signifikant sinken lässt. Doch auch bei der Ungleichung ohne Beträge war die Lösungshäufigkeit schon gering: lediglich 28% der befragten Abiturientinnen und Abiturienten konnten die Lösungsmenge von $x^2 - x - 2 < 0$ bestimmen, obwohl als Hinweis noch $x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ gegeben war. Die Ungleichung $|x^2 - x - 2| < 10$ wurde nur von 8% der Probanden korrekt bearbeitet. An weiteren paarweisen Aufgaben zeigten sich ähnliche Ergebnisse. Ein weiteres interessantes Ergebnis der Studie ist, dass zwar „eine positive stochastische Abhängigkeit zwischen dem Lösungsverhalten bei den typischen Grenzwertaufgaben und dem Lösungsverhalten bei den ‚Verständnisaufgaben‘“ (Herden et al., 1983, S. 302) besteht, dennoch gebe es durchaus einige Probanden, die große Schwierigkeiten bei den rechnerischen Aufgaben haben, aber ein ausreichendes bis gutes inhaltliches Verständnis des Konvergenzbegriffs zeigen (Herden et al., 1983, S. 302ff.). In dieser Arbeit werden die rechnerischen Fähigkeiten nichtsdestotrotz als relevant in Bezug auf den Konvergenzbegriff angesehen, da zu den Lernzielen bei der Behandlung von Folgen und Konvergenz im Rahmen des Mathematikstudiums auch gehört, dass die Konvergenz einer Folge durch Anwenden der Definition nachgewiesen werden kann.

Ein typischer Fehler beim Umgang mit Beträgen ist, dass die Betragsstriche einfach ignoriert werden. Eisenberg berichtet von Studierenden in einer Calculus-Veranstaltung, von denen 90% die Betragsstriche bei der Berechnung des Integrals $\int_{-2}^2 |x| dx$ einfach wegge-

lassen haben, was zu einem falschen Ergebnis führt (Eisenberg, 1991, S. 147).

Insgesamt wurden in den letzten Abschnitten zum einen unterschiedliche Themen als relevantes Vorwissen für den Konvergenzbegriff identifiziert. Zum anderen wurden bei diesen Themen verschiedene mögliche Ursachen für Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff aufgezeigt.

2.4 Forschung zu (Fehl-)Vorstellungen zum Konvergenzbegriff

Während sich Abschnitt 2.3 mit dem relevanten Vorwissen und einzelnen Aspekten der Definition, die zu Problemen bei Lernenden führen können, beschäftigt, wird nun Forschung zum Grenzwertbegriff selbst betrachtet. Zunächst wird in Abschnitt 2.4.1 auf verschiedene Aspekte und Grundvorstellungen zu Grenzwerten eingegangen. Anschließend werden verschiedene bekannte Fehlvorstellungen zum Konvergenzbegriff dargestellt, und zwar dass – insbesondere bei periodischen Dezimalzahlen – der Grenzwert als Prozess anstatt als Objekt angesehen wird (2.4.2), dass konvergente Folgen immer monoton sind (2.4.4), dass der Grenzwert als Schranke angesehen wird, die nicht über- oder unterschritten werden darf (2.4.6), dass die Glieder einer konvergenten Folge dem Grenzwert immer näher kommen (2.4.3) und dass der Grenzwert nicht angenommen oder erreicht werden darf (2.4.5). Eine mögliche Erklärung für manche der Fehlvorstellungen sehen einige Autorinnen und Autoren in der Diskrepanz zwischen mathematischer Sprache und Alltagssprache, auf die in Abschnitt 2.4.7 eingegangen wird. Zahlreiche weitere Veröffentlichungen gibt es zu Schwierigkeiten mit dem Grenzwert von Funktionen, beispielsweise die Fehlvorstellung, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ immer dem Wert $f(a)$ entspricht (Davis und Vinner, 1986; Dubinsky und Yiparaki, 2000; Cottrill et al., 1996) oder die Schwierigkeit durch unendliche Prozesse im Zusammenhang mit kontinuierlichen Variablen (Courant und Robbins, 1963). Da in dieser Arbeit der Fokus auf dem Grenzwert von Folgen liegt, wird auf solche Veröffentlichungen nur eingegangen, wenn die berichteten Schwierigkeiten in der Form auch beim Folgengrenzwert auftreten könnten. Auch auf Forschungen über den Zusammenhang zwischen dem Verständnis des Konvergenzbegriffs und Beliefs oder Einstellungen, wie sie von Szydlik (2000) oder Sierpinska (1987) durchgeführt wurden, wird hier nicht speziell eingegangen, da bei dieser Studie Einstellungen und Beliefs nicht mit erhoben werden.

2.4.1 Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

In der Mathematikdidaktik wird häufig zwischen dynamischen und statischen Sichtweisen oder Aspekten unterschieden, für den Folgenbegriff wurde in Abschnitt 2.3.3 bereits kurz darauf eingegangen. Auch für den Grenzwertbegriff gibt es eine solche Unterscheidung.

In der historischen Entwicklung war der Grenzwertbegriff zunächst von dynamischen Vorstellungen geprägt wie in der Definition von Cauchy:

„Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem

Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die *Grenze* aller übrigen.“ (Cauchy (1828, S. 3), zitiert nach Greefrath et al. (2016, S. 77))

Es ist eine Vorstellung vom sukzessiven Durchlaufen einer Folge vorherrschend, das potentiell unendlich fortgeführt wird. Solche Vorstellungen betonen den dynamischen Aspekt des Grenzwerts. Greefrath et al. (2016) bezeichnen dabei Folgendes als zentrale Fähigkeiten:

„zum einen das Erkennen der Möglichkeit der Konstruktion einer Nullfolge, also einer Folge, deren Folgenwerte sukzessive numerisch gegen Null streben; zum anderen ist es das Erkennen einer Grenze oder eines Grenzwerts, in deren/dessen Nähe sich „fast alle“ Folgenglieder befinden.“ (Greefrath et al., 2016, S. 103)

Zu dem statischen Aspekt des Grenzwerts gehört es, dass zu einem vorgegebenen Abstand ein Folgenglied gesucht ist, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder kleiner ist als der vorgegebene Abstand. Dabei wird die Folge statisch betrachtet und laut Weigand (2016) ist eine „Umkehrung“ der Argumentation im Vergleich zum dynamischen Aspekt nötig: „Ausgehend von einem festen Wert oder einem geometrischen Objekt wird das Folgenglied gesucht, ab dem alle weiteren Folgenwerte in einer vorgegebenen Umgebung des Objekts liegen“ (Weigand, 2016, S. 143). Mit dieser „Umkehrung“ im Denken hat sich auch Roh (2005) beschäftigt, darauf wird in Abschnitt 2.5.3 genauer eingegangen.

Aufbauend auf dem dynamischen und dem statischen Aspekt des Grenzwerts unterscheiden Weigand (2016) und Greefrath et al. (2016) drei Grundvorstellungen, und zwar die Annäherungsvorstellung, die Umgebungsvorstellung und die Objektvorstellung.

Als Annäherungsvorstellung bezeichnen sie Folgendes:

„Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.“ (Greefrath et al., 2016, S. 105)

Eine solche Vorstellung äußert sich häufig in Sprechweisen wie „nähert sich“, „strebt gegen“ oder „kommt beliebig nahe“ und baut auf dem dynamischen Aspekt auf. Weigand bezeichnet diese Vorstellung als „zentrale intuitive Vorstellung vom Grenzwert“ (Weigand, 2016, S. 144).

Die Umgebungsvorstellung wird hingegen wie folgt charakterisiert:

„Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.“ (Greefrath et al., 2016, S. 105)

Bei einer solchen Vorstellung hat der Lernende die bereits angesprochene „Umkehrung“ der Denkrichtung vollzogen. Diese Vorstellung baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwerts auf.

Unter der Objektvorstellung verstehen die Autoren schließlich Folgendes:

„Grenzwerte werden als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischer Objekte – konstruiert oder definiert werden.“ (Greefrath et al., 2016, S. 106)

Diese Vorstellung betone „den symbolischen oder formalen Aspekt des Grenzwertbegriffs“ (Weigand, 2016, S. 145). Erst durch diese Vorstellung ist es möglich, mit Grenzwerten algebraisch zu rechnen wie beispielsweise im Rahmen der Grenzwertsätze.

Das Ziel beim Lehren des Konvergenzbegriffs sollte es sein, dass die Lernenden alle drei Grundvorstellungen aufbauen. Weigand (2016) und Greefrath et al. (2016) schlagen einen Zugang zum Grenzwertbegriff vor, der den Aufbau der Grundvorstellungen fördern soll. Dieser ist allerdings für den Analysisunterricht in der Schule gedacht und ist für diese Arbeit weniger von Bedeutung.

Bender (1991) hat sich mit mehreren didaktischen Problemen beim Thema Folgen und Konvergenz beschäftigt und vertritt die These, dass eine „*dynamische* Auffassung von Folgen [...] mit verantwortlich ist für verbreitete *Fehlvorstellungen und -verständnisse* vom Begriff des Grenzwertes“ (Bender, 1991, S. 239). Als Einstieg und bei Anwendungen seien dynamische Sichtweisen nützlich, aber in entscheidenden Phasen der Begriffsbildung müssten diese ausgeschaltet werden und es seien statische Sichtweisen nötig. Anstelle der üblichen formalen ϵ - N -Definition, in denen mehrere Quantoren, Ungleichungen und Beträge vorkommen, schlägt Bender eine Definition der folgenden Art vor:

„..., falls das Wesentliche der Folge in jeder, noch so kleinen, Umgebung von a liegt.“ (Bender, 1991, S. 239)

Diese Definition schrecke Lernende weniger ab, obwohl es dieselbe Definition sei. Unter dem Wesentlichen einer Folge versteht er „die Folge selbst, bei einer beliebigen Nummer anfangend“ (Bender, 1991, S. 239). Dieser Begriff wie auch der Begriff der Umgebung würde auf diese Weise aus der Definition ausgelagert werden. Bei Vorstellungen vom Durchlaufen einer Folge muss Schülerinnen und Schülern deutlich gemacht werden, dass immer noch das Wesentliche der Folge fehlen würde. Außerdem nennt Bender (1991) das Auffassen von Folgen als Abbildungen von den natürlichen Zahlen als ein Unterrichtsziel. Erst diese Auffassung mache es möglich, zu verstehen, dass man beim Durchlaufen der natürlichen Zahlen, also des Definitionsbereichs, dem Grenzwert im Allgemeinen nicht näher kommt, da er nicht unbedingt als Folgenglied vorkomme und somit kein Urbild in den natürlichen Zahlen habe. Auch könne mit dieser Auffassung erkannt werden, dass jede Folge, die durch Umordnung der Folgenglieder aus einer konvergenten Folge entsteht, gegen denselben Grenzwert konvergiert. Bender ist der Ansicht, diese Tatsache stelle „die Bedeutung der *dynamischen* [...] *Sichtweise vom Grenzwert* doch tiefgehend *in Frage*“ (Bender, 1991, S. 241). Auch Weigand (1993) schließt sich der Meinung von Bender an und formuliert, es seien Überlegungen nötig, „die den **statischen** und den **funktionalen** Aspekt stärker in den Vordergrund stellen“ (Weigand, 1993, S. 111).

2.4.2 Die $0, \bar{9}$ -Problematik

Dynamische und statische Sichtweisen und das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der Objektvorstellung werden oft im Zusammenhang mit periodischen Dezimalzahlen

deutlich, insbesondere bei der Zahl $0,\overline{9}$. Interessant für diese Arbeit ist die Thematik, da es sich bei periodischen Dezimalzahlen um Grenzwerte von Folgen beziehungsweise Reihen handelt. Aus zahlreichen Veröffentlichungen ist bekannt, dass sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Studierende vielfach Schwierigkeiten damit haben, zu akzeptieren, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt. Eine typische Argumentation dafür, dass $0,\overline{9}$ kleiner als 1 sei, berichtet Eisenmann:

„If a decimal number begins with a zero, it cannot equal one but it is smaller than one.“ (Eisenmann, 2008, S. 35)

Eine ähnliche, häufig beobachtete Aussage ist, dass die Differenz zwischen $0,\overline{9}$ und 1 zwar sehr klein ist, aber existiert (Cornu, 1991). Tall und Schwarzenberger (1978) berichten von Äußerungen, in denen $0,\overline{9}$ als letzte Zahl vor 1 bezeichnet wird. All diese Vorstellungen haben gemeinsam, dass $0,\overline{9}$ als eine Zahl, also als ein Objekt aufgefasst wird. Anders ist dies bei der Vorstellung, dass $0,\overline{9}$ der 1 immer näher kommt, diese jedoch nie erreicht (Ferrini-Mundy und Graham, 1994). Hier wird die unendliche Dezimalzahl als nie endender Prozess aufgefasst. Richman (1999) stellt hier einen Zusammenhang zu den Sichtweisen aktual unendlich und potentiell unendlich her. Bei der Sichtweise aktual unendlich wird die Gesamtheit betrachtet, das heißt $0,\overline{9}$ wird als ein Objekt aufgefasst. Bei der Sichtweise potentiell unendlich hingegen wird $0,\overline{9}$ als ein Prozess angesehen, der theoretisch unendlich fortgeführt wird.

Bender argumentiert, dass ‚ $\lim \dots$ ‘ gleichzeitig „eine Anweisung zur Durchführung eines Grenzprozesses und zugleich dessen Resultat“ (Bender, 1991, S. 240) symbolisiere. Mit ‚Resultat‘ ist hier der Grenzwert gemeint. Sind bei den Lernenden dynamische Vorstellungen vorherrschend, so sehen sie den Grenzwert – insbesondere in Form von periodischen Dezimalzahlen – nicht als eine Zahl an, sondern als den Prozess selbst. Bender findet es daher plausibel, wenn Schülerinnen und Schüler $0,\overline{9} = 1$ oder auch $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ in Frage stellen. Wird eine periodische Dezimalzahl ausschließlich als Prozess angesehen, so kann dieser niemals genau der jeweiligen Zahl entsprechen, weil es sich um einen unendlichen Prozess handelt, der nie zu einem Ende kommt. Gestützt wird seine Argumentation durch eine Studie von Fischbein (1989), in der festgestellt wurde, dass manche Schülerinnen und Schüler zwar der Meinung sind, dass $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ gilt, aber umgekehrt behaupten sie $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ sei falsch. Wird jeweils von links nach rechts gelesen, so lässt sich erstere Gleichung interpretieren als ‚Beim Prozess der Division von 1 durch 3 ist das Ergebnis $0,\overline{3}$ ‘. Bei der zweiten Gleichung hingegen wird ihrer Meinung nach der Prozess nie beendet und somit sind sie der Meinung, dass nie Gleichheit besteht. Bei dem Versuch, diese Argumentation auf $0,\overline{9}$ zu übertragen, könnte der Eindruck entstehen, dass $1 = 0,\overline{9}$ falsch sei, da Divisionsprozesse niemals Neunerperioden liefern. Natürlich ist mathematisch sowohl $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ als auch $0,\overline{9} = 1$ korrekt, da dem Symbol für die periodische Dezimalzahl die Bedeutung des Grenzwerts zugeschrieben wird.

Auch Bauer (2011) hat sich mit der $0,\overline{9}$ -Problematik beschäftigt. In einem Test, den er Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 7 bis 12 gestellt hat, haben etwa 70% angekreuzt, $0,\overline{9}$ sei kleiner als 1 und nur etwa 30% waren der Meinung, es gelte $0,\overline{9} = 1$. Als dritte Alternative hatte er noch $0,\overline{9} > 1$ zur Auswahl gestellt, das wurde nur von einzelnen Schülerinnen und Schülern angekreuzt und aus deren Begründung lässt sich

vermuten, dass sie die Symbole $, <'$ und $, >'$ verwechselt haben. Interessant ist, dass die Akzeptanz von $0, \bar{9} = 1$ mit steigender Jahrgangsstufe keineswegs zunimmt, bei den befragten Schülerinnen und Schülern der 12. Jahrgangsstufe war sie mit unter 9% sogar am niedrigsten (Bauer, 2011, S. 87f.). Werden zusätzlich die Begründungen zu den Antworten betrachtet, so fällt zum einen auf, dass einige Probanden zwar $0, \bar{9} = 1$ angekreuzt haben, ihre Begründung aber eher zur Antwort $0, \bar{9} < 1$ passt. Auch enthalten einige Begründungen der korrekten Antwort die Argumentation, dass sich $0, \bar{9}$ der Zahl 1 annähert. Die prozesshafte Sichtweise lässt sich laut dem Autor also auch dort wiederfinden. Umgekehrt gibt es seiner Meinung nach auch Begründungen für $0, \bar{9} < 1$, bei denen $0, \bar{9}$ eindeutig als Objekt angesehen wird und nicht als Prozess, wenn beispielsweise argumentiert wird, dass $0, \bar{9}$ minimal kleiner ist als 1. Die korrekte Beantwortung hängt also laut Bauer nicht ausschließlich davon ab, ob eine prozesshafte Sichtweise vorherrschend ist. Dieselbe Frage hat Bauer auch Studierenden des gymnasialen Lehramts Mathematik gestellt, welche die Veranstaltungen Analysis I und II bereits erfolgreich absolviert hatten. Bei den Studierenden war die Lösungsrate mit 50% nur etwas höher als die der Schülerinnen und Schüler und auch die Begründungen waren ähnlich.

Auch Monaghan (2001) hat die $0, \bar{9}$ -Problematik in einer Studie thematisiert. Ihm ging es dabei vor allem um den Zusammenhang zur Sprache. Die folgende Aufgabe hat er englischen Oberstufenschülerinnen und -schülern gestellt, die zum Teil Mathematik als Fach gewählt haben, wo bereits Grenzwerte behandelt wurden, und zum Teil Mathematik abgewählt haben:

„Consider the sequence 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

Which of the following sentences is true of this sequence?

i) It tends to $0.\dot{9}$	v) It converges to $0.\dot{9}$
ii) It tends to 1	vi) It converges to 1
iii) It approaches $0.\dot{9}$	vii) Its limit is $0.\dot{9}$
iv) It approaches 1	viii) Its limit is 1“

(Monaghan, 1991, S. 20)

Die ersten vier Sätze wurden jeweils von der Mehrheit der Schülerinnen und Schüler als wahr bewertet. Während die Hälfte geantwortet hat, dass Satz *v)* wahr ist, waren nur etwas mehr als ein Fünftel der Befragten der Meinung, dass Satz *vi)* wahr ist. Bei den letzten beiden Sätzen verhält es sich ähnlich, 60% waren der Ansicht, dass der Grenzwert der Folge $0, \bar{9}$ ist, aber nur zwischen einem Viertel und einem Drittel haben geantwortet, der Grenzwert ist 1 (Monaghan, 1991, S. 21). Zwischen den Schülerinnen und Schülern, die Mathematik abgewählt haben, und denjenigen, die in der Oberstufe einen Mathematikurs besucht haben, waren die Unterschiede verhältnismäßig gering. Ob die Befragten $0, \bar{9}$ als Prozess oder als Zahl ansehen, darauf können hier keine Rückschlüsse gezogen werden. Doch die Unterschiede in der Häufigkeit der Befürwortungen, ob die Folge gegen $0, \bar{9}$ oder gegen 1 konvergiert beziehungsweise den jeweiligen Grenzwert hat, lässt darauf schließen, dass für einige der Schülerinnen und Schüler $0, \bar{9}$ und 1 verschieden sind.

Mehrere Autorinnen und Autoren berichten davon, dass es nicht einfach sei, eine Person, die der Meinung ist, dass $0, \bar{9} < 1$ gilt, vom Gegenteil zu überzeugen. Ein typischer in

der Schule benutzter Nachweis, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt, beginnt mit $x = 0,\bar{9}$. Multiplikation der Gleichung mit 10 liefert $10x = 9,\bar{9}$. Wird die erste von der zweiten Gleichung subtrahiert, so ergibt sich zunächst $9x = 9$ und schließlich $x = 1$. Problematisch an diesem Nachweis ist laut Eisenmann (2008), dass dabei unendliche Dezimalzahlen multipliziert und subtrahiert werden, ohne dass gerechtfertigt wird, dass dies auf diese Weise möglich ist. Richman (1999) sieht dies ähnlich und geht außerdem auf einen ähnlichen Nachweis ein, bei dem von $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ ausgegangen wird und durch Multiplikation der Gleichung mit 3 gefolgert wird, dass $1 = 0,\bar{9}$ gilt. Auch hierbei wird eine Multiplikation unendlicher Dezimalzahlen benutzt. Beide Autoren gehen außerdem auf die oft in der Universität verwendete Begründung ein, bei der $0,\bar{9}$ als geometrische Reihe aufgefasst wird und so durch $0,9 \cdot \frac{1}{1-0,1} = 1$ berechnet wird. Eisenmann (2008) ist der Meinung, dass dieser Nachweis nicht unbedingt überzeugend ist. Einerseits werden geometrische Reihen üblicherweise erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt und andererseits wird durch deren Anwendung kein Verständnis gefördert, da der Zusammenhang zu $0,\bar{9}$ nicht deutlich wird. Dankwerts und Vogel (2006) schlagen als Alternative einen Widerspruchsbeweis vor, der direkt an der Vorstellung des Lernenden ansetzt, sofern dieser $0,\bar{9}$ denn als Zahl auffasst: Wenn $0,\bar{9}$ kleiner ist als 1, dann gibt es einen positiven Abstand $d = 1 - 0,\bar{9}$. Dies verdeutlichen sie an der Zahlengeraden. Wird ein endliches Stück von $0,\bar{9}$ betrachtet, also eine endliche Dezimalzahl mit n Nachkommastellen, so beträgt der Abstand dieses endlichen Stücks zu $1 - \frac{1}{10^n}$. Nun kann jedoch ein n gefunden werden, so dass dieser Abstand $\frac{1}{10^n}$ kleiner wird als der Abstand d . Auf der Zahlengeraden veranschaulicht bedeutet dies, dass $0,\bar{9}$ links von einem endlichen Stück seiner selbst liegt, also kleiner als ein endliches Stück seiner selbst ist. Dies ist ein Widerspruch, daher muss die ursprüngliche Annahme, dass $0,\bar{9}$ kleiner als 1 ist, verworfen werden (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 28ff.).

Insgesamt bereitet $0,\bar{9}$ also vielen Lernenden Schwierigkeiten. Um zu verstehen, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt, muss zunächst einmal $0,\bar{9}$ als Zahl aufgefasst werden, was nicht allen Lernenden gelingt. Wenn $0,\bar{9}$ als Zahl aufgefasst wird, dann muss zusätzlich erkannt werden, um welche Zahl es sich handelt. Beide Teilaspekte können zu Problemen führen.

2.4.3 ‚Folenglieder kommen dem Grenzwert immer näher‘

Eine typische problematische Formulierung von Lernenden im Zusammenhang mit der Konvergenz einer Folge ist, dass die Folenglieder dem Grenzwert mit wachsendem Index immer näher kommen.

Auf problematische Formulierungen und alltagssprachliche Bedeutungen wird in Abschnitt 2.4.7 noch eingegangen. Hier soll zunächst die Fehlvorstellung beschrieben werden. Viele Lernende scheinen eine persönliche *Concept Definition* zu haben, dass eine Folge konvergent sei, wenn sie sich einem Wert immer mehr annähert. Eine solche *Concept Definition* kann Auswirkungen darauf haben, welche Folgen für die Lernenden unter ihren Begriff von Konvergenz fallen. Zum einen würde beispielsweise eine konstante Folge nicht unter diese Formulierung fallen, da die Folenglieder dem Grenzwert ja nicht näher kommen. Zum anderen würden auch konvergente Folgen, die eine konstante Teilfolge besitzen, aber bei denen es kein Folenglied gibt, ab dem die gesamte Folge konstant ist, fälschlicherweise als nicht konvergent angesehen werden, da manche Folenglieder dem Grenzwert

entsprechen und es darauffolgende Folgenglieder gibt, die einen größeren Abstand vom Grenzwert haben. Bei der Folge, die konstant 1 ist, hat ein Proband von Roh, auf deren Studie in Abschnitt 2.5.3 noch genauer eingegangen wird, wie folgt begründet, warum sie seiner Meinung nach nicht konvergent ist:

„Because [pause] it is not approaching any number.“ (Roh, 2005, S. 105)

Hier wird deutlich, dass für den Lernenden Folgen, die keinem Wert immer näher kommen, nicht unter sein Bild von Konvergenz fallen.

2.4.4 Eingeschränkte Vorstellung von monotonen, konvergenten Folgen

Typische Beispiele konvergenter Folgen, die Lernende meist als erste Beispiele kennenlernen, sind monotone, konvergente Folgen. Problematisch wird es, wenn Lernende solche Beispiele verwenden, als seien sie prototypisch für alle konvergenten Folgen. Das nennen auch Davis und Vinner (1986) als einen der von ihnen beobachteten Fehler bei Teilnehmerinnen und Teilnehmern eines Calculus-Kurses:

„Implicit monotony for a_n – regarding the phrase ‚going toward a limit‘ as having its everyday literal meaning.“ (Davis und Vinner, 1986, S. 294)

In dem Calculus-Kurs wurde das Thema Folgen und Konvergenz inklusive der formalen Definition einige Monate zuvor behandelt. Auf die Alltagssprachliche Bedeutung verschiedener Ausdrücke wird in Abschnitt 2.4.7 noch eingegangen.

Auch Alcock und Simpson berichten von Studierenden, die diese Fehlvorstellungen aufweisen:

„students who work preferentially with an image of a monotonic convergent sequence as though this were prototypical of all convergent sequences“ (Alcock und Simpson, 2004, S. 4)

Diese Studierenden haben also eine monotone konvergente Folge als prototypisches Beispiel genutzt, was bei nicht-monotonen Folgen zu falschen Entscheidungen in Bezug auf das Konvergenzverhalten führen kann. In der Studie von Roh (2005, S. 85) haben einige Studierende tatsächlich verschiedene oszillierende konvergente Folgen als divergent angesehen. Und auch Robert hat in ihrer Arbeit eine solche Vorstellung zu konvergenten Folgen identifiziert:

„a convergent sequence is an increasing sequence bounded above (or decreasing bounded below)“ (Robert (1982) zitiert nach Cornu (1991, S. 155))

Es handelt sich also um eine eingeschränkte Vorstellung, die weit verbreitet ist.

2.4.5 ‚Grenzwert darf nicht angenommen werden‘

Eine Fehlvorstellung, die in zahlreichen Studien berichtet wurde, ist die, dass der Grenzwert einer Folge nie angenommen werden darf. Personen mit dieser Sichtweise würden beispielsweise (schließlich) konstante Folgen nicht als konvergent ansehen (Davis und Vinner, 1986, S. 294). Als schließlich konstant bezeichne ich eine Folge, wenn ein Index N

existiert, so dass die Folge ab diesem Index N konstant ist (siehe auch Zorich (2006, S. 86)). Die Autoren haben Teilnehmerinnen und Teilnehmern eines Calculus-Kurses die Aufgabe gestellt, zu beschreiben, was sie unter dem Grenzwert einer Folge verstehen und die Antworten analysiert. Die Behandlung des Themas Grenzwerte von Folgen inklusive der formalen Definition lag zu diesem Zeitpunkt bereits einige Monate zurück. Ein Ausschnitt einer Antwort, bei der die gerade beschriebene Fehlvorstellung deutlich wird, ist der folgende:

„But the limit of a sequence is never reached by that sequence.“ (Davis und Vinner, 1986, S. 296)

Auch Roh berichtet von ähnlichen Ergebnissen:

„Several students had an incorrect understanding that no term of a sequence should be equal to the limit value of the sequence.“ (Roh, 2005, S. 85)

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer ihrer Studie waren Studierende einer Calculus-Veranstaltung, die zu Beginn der Studie zwar bereits mit dem Begriff Grenzwert und der Notation „ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ “ vertraut waren, die formale Definition war jedoch noch nicht behandelt worden. In einem schriftlichen Vortest sollten die Studierenden auf Basis ihrer eher intuitiven Konzepte von Grenzwerten beantworten, ob die Folge, die durch $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$ definiert ist, konvergiert. Im Nachtest der Studie war ein ähnliches Item mit der durch $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$ definierten Folge vertreten. Laut der Autorin haben in beiden Tests viele Studierende geantwortet, dass die jeweilige Folge nicht konvergiert, da die als Grenzwert in Frage kommenden Werte 0 beziehungsweise 1 jeweils von der Folge angenommen werden. An diesen Ergebnissen wird noch deutlicher, dass bei der beschriebenen Vorstellung kein einziges Folgenglied dem Grenzwert entsprechen darf. Von ähnlichen Ergebnissen berichtet auch Szydlik (2000) aus einer Studie mit Calculus-Studierenden im Zusammenhang mit dem Grenzwert von Funktionen. In weiteren Studien von Tall und Schwarzenberger (1978), Williams (1991) gab es auch jeweils Studierende, die verbalisiert haben, dass der Grenzwert nicht erreicht werden darf beziehungsweise die Folgen, die den Grenzwert erreichen, nicht als konvergent angesehen haben.

2.4.6 ‚Grenzwert als Schranke‘

Unterschieden werden muss die gerade beschriebene Fehlvorstellung von der, dass der Grenzwert als eine Schranke angesehen wird. In diesem Fall sind die Lernenden der Meinung, dass bei einer konvergenten Folge entweder alle Folgenglieder kleiner oder alle Folgenglieder größer als der Grenzwert sein müssen. Eine durch $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definierte Folge würde bei der Sichtweise nicht als konvergent angesehen werden. In einer Antwort aus der zuvor bereits erwähnten Studie von Davis und Vinner wird genau diese Fehlvorstellung deutlich:

„The limit is the point past which the sequence does not go ... It will not reach whatever lies beyond this point.“ (Davis und Vinner, 1986, S. 296)

Und auch Robert hat eine solche Vorstellung beobachtet:

„The values cannot pass l “ (Robert (1982) zitiert nach Cornu (1991, S. 155))

Die Variable l steht in diesem Fall für den Grenzwert. Ähnliche Vorstellungen hat auch Szydlik (2000) bei Calculus-Studierenden im Zusammenhang mit dem Grenzwert von Funktionen beobachtet. Auf eine mögliche Ursache für eine solche Vorstellung wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

2.4.7 Alltagssprachliche Bedeutung des Begriffs „Grenzwert“

Schon vor der Behandlung des Themas Grenzwerte in der Schule oder der Universität verbinden Lernende Vorstellungen mit den in diesem Zusammenhang vorkommenden Begriffen wie Grenzwert, Limes, annähern oder strebt gegen:

„In the case of limits, before any teaching on this subject the student already has a certain number of ideas, intuitions, images, knowledge, which come from daily experience, such as the colloquial meaning of the terms being used. [...] When a student participates in a mathematics lesson, these ideas do not disappear – contrary to what may be imagined by most teachers. These spontaneous ideas mix with newly acquired knowledge, modified and adapted to form the students personal conceptions.“ (Cornu, 1991, S. 154)

Cornu ist also der Meinung, dass diese Vorstellungen, welche die Lernenden bereits vor der Behandlung des Themas haben, nicht von dem neu erworbenen Wissen verdrängt werden, sondern sich mit diesem vermischen. Ein Aspekt, der diese Präkonzepte beeinflusst, ist die umgangssprachliche Bedeutung der im Zusammenhang mit dem Thema Konvergenz verwendeten Begriffe. Während Cornu sich hauptsächlich auf Vorstellungen bezieht, die schon vor der Einführung des Grenzwertbegriffs bei den Lernenden vorhanden sind, beziehen sich andere Forschende wie Ferrini-Mundy und Graham (1994) explizit auch auf die Phase der Einführung des Begriffs:

„Much of the language traditionally used in introducing the concept (approaches, as near as we like, gets closer to) is natural language imbued with its own meaning. The students' understandings of the concept seem deeply intertwined with this natural language.“ (Ferrini-Mundy und Graham, 1994, S. 37)

Sie sind der Meinung, dass Ausdrücke, die von den Lehrenden typischerweise verwendet werden, durch alltagssprachliche Bedeutungen geprägt sind, die mit der mathematischen Bedeutung nicht vollständig übereinstimmen. Diese alltagssprachlichen Bedeutungen könnten das Verständnis der Lernenden beeinflussen.

Auch Monaghan hat die Vermutung aufgestellt, dass ein Grund für das Vorhandensein von Fehlvorstellungen zum Konvergenzbegriff die Diskrepanz zwischen Alltagssprache und mathematischer Sprache ist. Konkret hat er sich mit den englischen Wörtern ‚tends to‘, ‚approaches‘, ‚converges‘ und ‚limit‘ befasst, die seiner Meinung nach oft im Zusammenhang mit Konvergenz verwendet werden. In einer offenen Aufgabe sollten die von ihm befragten Schülerinnen und Schüler jeweils einen Satz formulieren, in dem das entsprechende

Wort vorkommt. Ob die Sätze einen mathematischen oder nicht-mathematischen Kontext hatten, war offen gelassen. Das Wort ‚limit‘ wurde am häufigsten im Zusammenhang mit Geschwindigkeitsbegrenzungen verwendet. Auch in den weiteren Kontexten wurden die Sätze so formuliert, dass ein ‚limit‘ etwas sei, was nicht überschritten werden dürfe (Monaghan, 1991, S. 21). Im Deutschen wäre der Kontext der Geschwindigkeitsbegrenzungen in einem Satz mit dem Wort ‚Grenzwert‘ zwar nicht zu erwarten, dennoch beinhaltet das Wort aber auch ‚Grenze‘, weswegen durch die Alltagssprache ähnliche Vorstellungen begünstigt werden könnten wie in der englischen Sprache. Das Wort ‚approaches‘ wurde in Sätzen wie zum Beispiel ‚Der Zug nähert sich dem Bahnhof‘ verwendet. Es war meist zumindest implizit eine zeitliche Komponente enthalten, was dazu führen könnte, dass die Lernenden eine Folge ebenfalls als zeitliche Abfolge auffassen. Formulierungen wie „ $0.9 + 0.99 + \dots$ approaches 1, but it will never get there“ Monaghan (1991, S. 21) bestätigen dies, da ‚niemals‘ ein zeitlicher Ausdruck ist. Bei den verschiedenen Kontexten war es teilweise wie bei dem Zug so, dass das Objekt, dem sich etwas annähert, auch erreicht werden kann, zum Zeitpunkt der Formulierung des Satzes war das Objekt jedoch noch nicht erreicht worden. Bei anderen Sätzen konnte das Objekt auch gar nicht erreicht werden. Das gerade genannte lässt sich auf die deutsche Übersetzung ‚annähern‘ sicherlich übertragen. Lediglich Sätze, in denen ‚approaches‘ im Sinne von ‚Ansätze‘ verwendet wurde, wären im Deutschen nicht zu erwarten. Das Wort ‚converges‘ wurde meist im Sinne von ‚zusammenlaufen‘ verwendet, das heißt es wurde von zwei Objekten gesprochen, die einander näher kommen und in den meisten Fällen auch aufeinandertreffen. Im Deutschen ist eine alltagssprachliche Verwendung des Wortes ‚konvergieren‘ hingegen eher unüblich. Von dem Wort ‚tends to‘ wird im Deutschen im Zusammenhang mit der Konvergenz am ehesten die Übersetzung ‚strebt gegen‘ benutzt. In der Studie von Monaghan haben die meisten Probanden ‚tends to‘ im Sinne von ‚zu etwas neigen‘ verwendet. Das würde im Deutschen nicht unter den Begriff ‚strebt gegen‘ fallen. Danckwerts und Vogel (2006, S. 26) halten die deutsche Formulierung für unproblematisch, da sie ihrer Meinung nach der formalen Definition nicht widerspricht. Sie kritisieren hingegen Formulierungen wie „kommt mit wachsendem n ... immer näher“ (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 26), womöglich noch mit dem Zusatz „ohne ... zu erreichen“ Danckwerts und Vogel (2006, S. 26). Zum einen argumentieren sie, dass beispielsweise die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ auch dem Wert -1 mit wachsendem n immer näher kommt, obwohl -1 nicht der Grenzwert dieser Folge ist. Auch sei in solchen Verbalisierungen die Monotonie unterschwellig unterstellt, die „nicht zum Wesen der Konvergenz gehört“ (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 26). Zum anderen würden beispielsweise konstante Folgen nicht unter die Verbalisierung fallen, obwohl sie konvergent sind. Laut den Autoren komme es darauf an, die Idee des Grenzwertbegriffs in natürlicher Sprache „ohne inhaltliche Verfälschung“ (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 12) auszudrücken. Die kritisierten Formulierungen könnten Fehlvorstellungen wie ‚Folnglieder kommen dem Grenzwert immer näher‘, ‚nur monotone, konvergente Folgen werden als konvergent angesehen‘, ‚der Grenzwert darf nicht angenommen werden‘ und ‚Grenzwert als Schranke‘, auf die zuvor bereits eingegangen wurde, begünstigen.

Oehrtman (2002) hat sich unter anderem mit Bedeutungen der Begriffe „arbitrarily“ und „sufficiently“ befasst. Diese werden seiner Meinung nach in folgender Weise oft von Lehrenden benutzt, um die formale Definition des Grenzwerts – hier von Funktionen – zu verbalisieren:

„The limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ means that you can make $f(x)$ arbitrarily close to L by choosing x sufficiently close to a .“ (Oehrtman, 2002, S. 202)

Ein Problem dieser Verbalisierung ist, dass sie nicht den Aspekt $\forall x$ mit $|x - a| < \delta$ beinhaltet. Oehrtman (2002) zeigt daran noch etwas anderes auf. Manche Mathematikerinnen und Mathematiker interpretieren in den Begriff „arbitrarily“ in der Verbalisierung den Ausdruck $\forall \epsilon > 0$ und in den Begriff „sufficiently“ den Ausdruck $\exists \delta > 0$. Die Studie mit Studierenden eines Calculus-Kurses, in dem unter anderem die formale $\epsilon - \delta$ -Definition für Grenzwerte von Funktionen behandelt worden war, hat ergeben, dass die meisten Studierenden die beiden Begriffe „arbitrarily“ und „sufficiently“ anders interpretieren:

„In most cases, students’ usage of „arbitrarily“ and „sufficiently“ in this study did not reflect these standard mathematical meanings. They were, however, consistent with students’ usage of more ambiguous phrases such as „infinitely close“ or „very precise“.“ (Oehrtman, 2002, S. 202f.)

Auf Nachfrage haben die Studierenden „arbitrarily small“ als „so small that it’s immeasurable“ (Oehrtman, 2002, S. 203) oder „very, very, very, very small“ (Oehrtman, 2002, S. 205) und „sufficiently small“ als „larger than arbitrarily [...] it doesn’t have to be so microscopically small, it would just be small like a decimal point number, you know? Which is sufficient“ (Oehrtman, 2002, S. 205) beschrieben. Die Interpretationen der Studierenden sind also weniger präzise als die mathematische Bedeutung. Nur einer von neun Studierenden hat die Ausdrücke in ihrer präzisen mathematischen Bedeutung verstanden. In deutscher Sprache wäre eine ähnliche Verbalisierung für den Grenzwert von Folgen:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ bedeutet, dass a_n dem Wert g beliebig nah kommt, wenn n nur groß genug gewählt wird.

Hier kommt „beliebig nah“ ähnlich vor wie oben „arbitrarily close“, doch es kommt nicht „sufficiently close“, sondern „groß genug“ vor. Dennoch ist es denkbar, dass die Ausdrücke in diesem Fall ähnlich interpretiert werden, wie es in der Studie von Oehrtman der Fall war. Davon abgesehen könnte mit der Verbalisierung auch ein Häufungspunkt charakterisiert werden, da es bei Häufungspunkten ebenfalls möglich ist, Folgenglieder zu finden, die dem Wert beliebig nah kommen, wenn n nur groß genug gewählt wird. Allerdings gibt es bei Häufungspunkten, die keine Grenzwerte sind, auch immer Folgenglieder, die dem Wert nicht beliebig nah kommen. Dennoch werden Verbalisierungen dieser Art teilweise als geeignet bezeichnet (siehe z.B. Danckwerts und Vogel (2006, S. 26)).

2.5 Konzepte für Interventionen

In der Literatur zum Konvergenzbegriff sind nicht nur Studien über die (Fehl-)Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern oder Studierenden zu finden, sondern es gibt auch von verschiedenen Autorinnen und Autoren Vorschläge für Konzepte, wie der Konvergenzbegriff eingeführt oder vertieft werden könnte. Zunächst stelle ich in Abschnitt 2.5.1 jedoch kurz dar, wie das Thema üblicherweise im Rahmen einer Analysis-1-Veranstaltung an Universitäten in Deutschland behandelt wird. Daran anschließend wird in Abschnitt 2.5.2 motiviert, weshalb der Konvergenzbegriff in dem zu entwickelnden Workshop nicht wie in solch einer üblichen Analysis-1-Veranstaltung eingeführt wird. Danach stelle ich in

den Abschnitten 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.5 Interventionen und Interventionsstudien zum Konvergenzbegriff vor, die für die Workshop-Gestaltung, die in Kapitel 4 präsentiert wird, bedeutsam sind. Abschließend wird in Abschnitt 2.5.6 formuliert, welche Bestandteile dieser Interventionen übernommen werden.

2.5.1 Die Behandlung des Konvergenzbegriffs im Rahmen einer üblichen Analysis-1-Veranstaltung

Natürlich unterscheidet sich eine Analysis-1-Vorlesung je nach Universität, Dozentin oder Dozent und genauer Zielgruppe, doch die grobe Struktur ist oft ähnlich. Hier dient als Grundlage der Theorieteil des Buchs von Forster (2011), bei dem es sich um ein Standardwerk handelt. Dort wird zunächst mit dem Prinzip der vollständigen Induktion begonnen, bevor anschließend die Körperaxiome (Axiome der Addition und der Multiplikation, das Distributivgesetz und Folgerungen) und Anordnungs-Axiome (Trichotomie, die Abgeschlossenheit der Addition und Multiplikation, das Archimedische Axiom und Folgerungen) behandelt werden. Die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen werden als Beispiele angeordneter Körper betrachtet. Eine Einführung oder Konstruktion der reellen Zahlen erfolgt hier nicht. Manche Dozierende führen an dieser Stelle auch bereits die komplexen Zahlen ein, Forster (2011) nennt diese als Beispiel eines Körpers, der nicht angeordnet ist, verweist für deren Einführung jedoch auf einen späteren Zeitpunkt. (Forster, 2011, S. 1ff.)

Das nächste Kapitel handelt bereits von Folgen und Grenzwerten. Eine Folge reeller Zahlen wird als Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und anschließend werden erste Beispiele betrachtet. Typischerweise handelt es sich dabei um eine konstante Folge, die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, die alternierende Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine unbeschränkte Folge, weitere explizit durch einen Term definierte Folgen und eine rekursiv definierte Folge. Anschließend wird der Begriff der Konvergenz einer reellen Folge mittels der formalen $\epsilon - N$ -Definition eingeführt und geometrisch mit ϵ -Umgebungen am Zahlenstrahl gedeutet. Für einige der zuvor betrachteten Beispiele von Folgen wird nun die Konvergenz beziehungsweise Divergenz durch Anwenden der Definition nachgewiesen. Als nächster Begriff wird die Beschränktheit von Folgen definiert und es wird bewiesen, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Es wird bemerkt, dass die Umkehrung nicht gilt und durch Angabe eines Gegenbeispiels begründet. Nun wird für weitere Beispiele von Folgen durch den Nachweis der Unbeschränktheit auf die Divergenz geschlossen. Per Widerspruch wird anschließend bewiesen, dass der Grenzwert eindeutig ist. Im Anschluss daran werden Sätze formuliert und bewiesen, die auch oft als Grenzwertsätze bezeichnet werden. Sie sagen aus, dass die Summe beziehungsweise das Produkt zweier konvergenter Folgen gegen die Summe beziehungsweise das Produkt der Grenzwerte konvergiert, dass jede Linearkombination von konvergenten Folgen gegen die Linearkombination der Grenzwerte konvergiert und, dass der Quotient aus einer beliebigen konvergenten Folge und einer weiteren konvergenten Folge, deren Grenzwert nicht 0 ist, gegen den Quotienten der beiden Grenzwerte konvergiert. Es folgen Sätze, mit denen der Grenzwert einer konvergenten Folge eingegrenzt werden kann. (Forster, 2011, S. 29ff.)

Forster (2011) behandelt daran anschließend zunächst unendliche Reihen, diese werden bei anderen Dozierenden erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt. Weiter wird der

Begriff der bestimmten Divergenz, auch als uneigentliche Konvergenz bezeichnet, definiert und es werden einfache Beispiele dazu betrachtet (Forster, 2011, S. 40ff.). Auch im nächsten Kapitel mit dem Titel „Das Vollständigkeits-Axiom“ geht es weiter um Folgen. So wird zunächst der Begriff der Cauchy-Folge definiert und es wird bewiesen, dass jede konvergente Folge reeller Zahlen eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung dieses Satzes wird nun als Vollständigkeits-Axiom formuliert. Die anschließende Behandlung des Intervallschachtelungs-Prinzips und b-adischer Brüche erfolgt bei anderen Dozierenden wieder nicht unbedingt oder möglicherweise zu einem anderen Zeitpunkt (Forster, 2011, S. 43ff.). Sicher behandelt werden hingegen die Definition von Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß, der aussagt, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. In dem Zusammenhang werden auch Häufungspunkte von Folgen definiert und Beispiele betrachtet. Als weitere Eigenschaft von Folgen wird die Monotonie eingeführt und es wird das Konvergenzkriterium der Monotonie und Beschränktheit bewiesen (Forster, 2011, S. 49ff.).

Der Konvergenzbegriff wird bei einem Großteil der nachfolgenden Themen benutzt, so zum Beispiel bei der Konvergenz von Reihen, bei Grenzwerten von Funktionen und Stetigkeit, bei der Differenzierbarkeit und der Integrierbarkeit von Funktionen.

2.5.2 Motivation für alternative Konzepte zur Behandlung des Konvergenzbegriffs

Allgemein sind Mathematikvorlesungen wie die „Analysis 1“ meist in einer „Definition - Satz - Beweis“-Form aufgebaut. Zunächst wird ein Konzept definiert und an Beispielen illustriert. Es folgen Sätze im Zusammenhang mit diesem Konzept, die jeweils im Anschluss bewiesen werden. Die Zielerreichung dieses Aufbaus wird in der mathematikdidaktischen Forschung von verschiedenen Autorinnen und Autoren angezweifelt, wie Alcock und Simpson zusammenfassen:

„There is general skepticism about the extent to which the stereotypical undergraduate 'definition-theorem-proof' pedagogy (cf. Weber, 2004) achieves what is required.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 6)

Speziell beziehen sie sich mit dieser Aussage auf die Frage, wie und in wieweit die Lehre die Studierenden dabei unterstützen kann, dass sie für Argumentationen die *Concept Definition* eines Begriffs nutzen und dass sie bereits vorhandene *Concept Images* derart anpassen, dass sie zur allgemein üblichen mathematischen Definition des jeweiligen Konzepts passen. Zum einen teile ich selbst diese Zweifel, zum anderen wird eine Behandlung des Konvergenzbegriffs in der „Definition - Satz - Beweis“-Form ohnehin in der Vorlesung geschehen. Daher soll das Konzept in dem zu entwickelnden Workshop grundsätzlich anders erfolgen. Alcock und Simpson (2017) haben mit einer Studie zu monoton wachsenden und monoton fallenden Folgen Belege dafür geliefert, dass eine vorherige eigenständige Formulierung der Definition oder auch Erklärung des Konzepts zu besseren Ergebnissen bei der Anwendung der Definition führt als das Lesen der formalen Definition. Sie haben eine Gruppe von Studienanfängern zuerst die formalen Definitionen lesen lassen, eine zweite Gruppe haben sie aufgefordert, die Definitionen für monoton wachsende und monoton fallende Folgen aufzuschreiben und eine dritte Gruppe sollte erklären, was es bedeutet,

dass eine Folge monoton wachsend beziehungsweise monoton fallend ist. Anschließend sollten alle genannten Gruppen dieselben Beispiele von Folgen jeweils als monoton wachsend, monoton fallend, sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend oder weder monoton wachsend noch monoton fallend klassifizieren. Ein signifikanter Unterschied ließ sich zwischen der Gruppe, welche die Definition gelesen hat, und der Gruppe, welche die Eigenschaften erklären sollte, bei der Klassifizierung der Beispielfolgen nachweisen:

„In fact, those who were asked to explain the meanings of the terms significantly outperformed those who were asked to study the provided formal definition.“
(Alcock und Simpson, 2017, S. 15f.)

Dieses Ergebnis wird als überraschend bezeichnet, da die Erklärungen der Studierenden im Gegensatz zur formalen Definition nicht unbedingt eine präzise Beschreibung des Konzepts waren. Als mögliche Erklärung wird genannt, dass die Studierenden sich beim Erklären stärker mit dem Konzept auseinandersetzen als beim Lesen der Definition:

„Our result to the contrary might indicate that the requirement to explain cues a thoughtful attempt to give a statement that is personally meaningful, while the invitation to read a definition might not engage the student in such deep consideration.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 16)

Diese Ergebnisse können ein Indiz dafür sein, dass Konzepte, bei denen sich die Studierenden intensiv mit dem jeweiligen Konzept beschäftigen und die Definition oder eine verbale Beschreibung selbst erarbeiten, zu einem besseren Verständnis des Konzepts und zu größeren Erfolgen bei der Anwendung der Definition führen können. Derartige Konzepte für die Behandlung des Konvergenzbegriffs werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt. Auch zu anderen Begriffen existieren solche Konzepte, wie etwa zu Gruppen und Isomorphismen (Larsen (2009), Larsen (2013)), zur Quotientengruppe (Larsen und Lockwood, 2013), zu ebenen Dreiecken (Zandieh und Rasmussen, 2010) und zu Steigungen (Rasmussen und Marrongelle (2006), Moore-Russo et al. (2011)). Die Autorinnen und Autoren berichten von guten Erfolgen der von ihnen implementierten Konzepte beispielsweise in Bezug auf die Verbindung von *Concept Image* und *Concept Definition*:

„While the literature often points out discontinuities between concept image and concept definition, our analysis describes a trajectory from less formal to more formal that allows students to make greater and richer connections between their concept image and concept definition.“ (Zandieh und Rasmussen, 2010, S. 72)

Da ich mit dem von mir zu entwickelnden Workshop genau eine solche stärkere Verbindung zwischen *Concept Image* und *Concept Definition* fördern möchte, erscheint mir ein derartiger Ansatz vielversprechend.

2.5.3 Interventionsstudie von Roh

Roh (2005) hat sich in ihrer Dissertation und weiteren Publikationen, auf die noch eingegangen wird, ebenfalls mit dem Verständnis des Konvergenzbegriffs beschäftigt. Dabei richtet sie den Fokus auf das sogenannte *reverse thinking*, im Folgenden mit „umgekehrtem Denken“ übersetzt. Soll die Konvergenz einer Folge gegen einen Wert durch Anwenden der

ϵ - N -Definition nachgewiesen werden, so muss zu beliebig aber fest gewähltem ϵ ein geeigneter Index N gewählt werden, so dass ab diesem Index alle weiteren Folgenglieder um weniger als ϵ von dem Wert abweichen. Studierende gehen intuitiv jedoch häufig anders vor:

„students typically first choose an index number and next determine how close the term corresponding to the index is to a certain value“ (Roh, 2005, S. 7).

Viele Studierende beginnen also mit irgendeinem Index n , bestimmen für das zugehörige Folgenglied a_n den Abstand zum (Grenz-)Wert und beobachten anschließend, wie sich dieser Abstand verändert, wenn n größer wird. Eine mögliche Erklärung sieht Roh in der symbolischen Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Da in dieser „n“ vor „ a_n “ stehe, sei es natürlich, zuerst die Indizes zu betrachten und erst danach die zugehörigen Folgenglieder beziehungsweise deren Abstand zu einem bestimmten Wert. Die Studierenden müssten also verglichen mit dieser natürlichen Herangehensweise umgekehrt vorgehen, was Roh als umgekehrtes Denken bezeichnet. Da diesem umgekehrte Denken eine bedeutende Rolle bei dem Verständnis der formalen Grenzwert-Definition zukommt und die Autorin auch untersucht hat, wie der Übergang zum umgekehrten Denken gefördert werden kann, soll auf diese Studie hier ausführlich eingegangen werden.

Ziel der Untersuchung war, den Zusammenhang zwischen dem intuitiven Verständnis des Grenzwertkonzepts von Studierenden und ihrem umgekehrten Denken zu erforschen und herauszufinden, inwiefern eine Beschäftigung mit graphischen Darstellungen von Folgen zusammen mit Aussagen über die umgekehrte Beziehung von ϵ und N die (Weiter-)Entwicklung des intuitiven Verständnisses des Grenzwertkonzeptes von Studierenden beeinflusst. Intuitives Verständnis charakterisiert die Autorin dabei wie folgt: „the term *intuitive* understanding means immediately cognizing some concepts without any rigorous proof“ (Roh, 2005, S. 9). Um das genannte Forschungsziel zu erreichen sollte zum einen die Fragen beantwortet werden, wie Studierende die Konvergenz einer Folge verbal beschreiben und wie sie die Beziehung zwischen ϵ und N schildern. Des Weiteren sollten Entwicklungsstufen der Fähigkeit zum umgekehrten Denken im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff identifiziert werden. Schließlich sollte sowohl die Entwicklung des intuitiven Verständnisses als auch die der Fähigkeit zum umgekehrten Denken von vor der Intervention, die noch genauer beschrieben wird, bis nach der Intervention untersucht werden.

Dazu hat sie mit insgesamt elf Studierenden der Fächer Biologie und Ingenieurwissenschaften einen Vortest, je drei halbstrukturierte, aufgabenbasierte Interviews und einen Nachtest durchgeführt. Die einzige Intervention zwischen dem Vor- und dem Nachtest sind die genannten Interviews. Das Vorwissen der Probanden beschreibt die Autorin wie folgt: „students who had already encountered limits through an intuitive way of reading the limit symbol but not by rigorous definition“ (Roh, 2005, S. 50). Im Vortest sollten die Teilnehmenden zu verschiedenen Folgen beantworten, ob diese konvergieren, welchen Grenzwert sie haben und ihre Antwort begründen. Unter den Folgen waren konstante Folgen, monotone konvergente Folgen, monotone divergente Folgen, nicht-monotone konvergente Folgen und nicht-monotone divergente Folgen vertreten. Des Weiteren sollten die Probanden beschreiben, was es bedeutet, dass eine Folge einen Grenzwert hat, beziehungsweise, dass eine Folge keinen Grenzwert hat, und vorgegebene Verbalisierungen zum

Konvergenzbegriff bewerten.

Die Ergebnisse des Vortests nutzte Roh dazu, mögliche Verläufe der Interviews vorherzusagen und geeignete Nachfragen vorzubereiten. Das Ziel der anschließenden Intervention hat die Autorin wie folgt formuliert: „to help students intuitively but accurately cognize the rigorous definition of the limit of a sequence“ (Roh, 2005, S. 59) In den folgenden drei Wochen wurde mit jedem einzelnen Studierenden jeweils ein einstündiges tutorielles Interview pro Woche durchgeführt. In jedem dieser Interviews wurden zwei Aktivitäten thematisiert. Bei der ersten dieser Aktivitäten sind zwei Spiegel involviert, von denen der eine eine kleine transparente Stelle besitzt. Wenn die Spiegel nun parallel zueinander ausgerichtet werden und der Studierende durch den einen Spiegel hindurchschaut, kann er eine Folge von Spiegelbildern sehen. Den möglichen Erkenntnisgewinn durch diese Aktivität beschreibt Roh wie folgt: „The mirror activity shows that an infinite number of images do not have to take up a great deal of space“ (Roh, 2005, S. 59). In den übrigen fünf Aktivitäten sollten sich die Teilnehmenden jeweils mit einer Folge beschäftigen. Im ersten Fall handelte es sich dabei um die monotone Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, im zweiten Fall um die unbeschränkte Folge $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$, im dritten Fall um die konstante Folge $(\frac{n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, im vierten Fall um die nicht-monotone Nullfolge $((-1)^n \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und im letzten Fall um die nicht-monotone, divergente Folge $((-1)^n (1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folgen wurden ausgewählt, da sie typische Fehlvorstellungen zu Konvergenz und Grenzwerten abdecken. Dabei wurde den Studierenden jeweils erst die symbolische Darstellung gezeigt, sie wurden anschließend dazu aufgefordert, einige konkrete Folgenglieder anzugeben und dann wurden sie gefragt, ob die Folge einen Grenzwert besitze. Im Anschluss wurde eine graphische Darstellung derselben Folge betrachtet und wieder sollten die Studierenden die Frage beantworten, ob die Folge einen Grenzwert besitze. Im dritten Schritt sollte vom „Forward Thinking“ zum „Reverse Thinking“ übergegangen werden. Dazu wurden zunächst transparente Streifen eingesetzt, die als „N-plane“ bezeichnet werden. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer sollten sich vorstellen, dass das Rechteck in alle Richtungen außer nach links unendlich fortgesetzt wird und sollten das Rechteck dann derart auf die graphische Darstellung der Folge legen, dass alle Punkte der Folge, deren Index größer als eine vorgegebene Zahl N ist, durch das fortgesetzte Rechteck bedeckt werden. Anschließend wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, sofern die betrachtete Folge konvergent war, dazu aufgefordert, den maximalen Abstand der Folgenglieder innerhalb des Rechtecks zum jeweiligen Grenzwert zu bestimmen. In jedem Fall sollten die Probanden Aussagen über die Anzahl der Folgenglieder innerhalb und außerhalb des Rechtecks treffen, zunächst für eine konkrete Zahl N und anschließend für wachsendes N . Außerdem wurden sie nochmals gefragt, ob die Folge einen Grenzwert habe. Auf die Intention dieses Schritts geht die Autorin nicht ein. Vermutlich soll es eine Vorbereitung auf den nächsten Schritt sein, möglicherweise soll auch die Betrachtung der Folgenglieder ab einem bestimmten N visualisiert werden. Anschließend wurden zusätzlich sogenannte ϵ -Streifen benutzt. Dabei handelt es sich um transparente Streifen verschiedener Breite, deren Mitte durch eine horizontale rote Linie markiert ist:

„The strips, named ϵ -strips, were designed for this teaching experiment and were strips of constant width 2ϵ , made of translucent paper so that the student could observe the graph of the sequence through the ϵ -strip. In the middle of each ϵ -strip, a red line was drawn so as to mark a possible limit point. These

strips were devised to represent pictorially the $\epsilon - N$ relation in the rigorous definition of limit.“ (Roh, 2005, S. 64)

Diese Linie wurde dann auf potenzielle Grenzwerte gelegt und die Studierenden sollten beantworten, wie viele Folgenglieder sich jeweils innerhalb und außerhalb der ϵ -Streifen befinden, wobei die Breite der Streifen jeweils kleiner wurde. Laut Roh können die Studierenden daran entdecken, dass sich – im Falle einer konvergenten Folge – alle bis auf endlich viele Folgenglieder innerhalb des jeweils betrachteten ϵ -Streifens befinden. Als Intention dieser Aktivität wird Folgendes genannt:

„By determining the number of points inside and outside the given ϵ -strip, the student had the opportunities to intuitively understand the $\epsilon - N$ relation in the rigorous definition of limits and to practice reverse thinking in the context of the limit of a sequence.“ (Roh, 2005, S. 65)

Bei der Folge mit zwei Häufungspunkten wurden die ϵ -Streifen jeweils einmal mit der roten Linie auf den einen und einmal auf den anderen Häufungspunkt gelegt. Hier sollte entdeckt werden, dass die ϵ -Streifen zwar derart auf dem Graphen der Folge platziert werden können, dass sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb des ϵ -Streifens befinden, doch es befinden sich immer auch unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Streifens. Die Studierenden wurden dann erneut gefragt, ob die Folge einen Grenzwert besitze. Ähnlich sollte bei der unbeschränkten Folge erkannt werden, dass sich – unabhängig davon, wie der jeweilige ϵ -Streifen auf dem Graphen platziert wird – immer unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Streifens befinden. Auch hier wurde erneut gefragt, ob die Folge einen Grenzwert besitze. Abschließend sollten jeweils zwei Aussagen zum Konvergenzverhalten der Folge bewertet werden. Dabei handelte es sich jeweils um die beiden „Definitionen“ in Tabelle 2.1.

- „ ϵ -strip definition A: A sequence has a limit when *infinitely* many points on the graph of the sequence are covered by any ϵ -strip as long as the ϵ -strip covers a certain number. Then the certain number is called a limit of the sequence.
- ϵ -strip definition B: A sequence has a limit when only *finitely* many points on the graph of the sequence are *not* covered by any ϵ -strip as long as the ϵ -strip covers a certain number. Then the certain number is called a limit of the sequence.“

Tabelle 2.1: ϵ -strip definitions (Roh, 2005, S. 68)

Bei beiden Varianten soll jeder beliebige ϵ -Streifen betrachtet werden, der so auf dem Graphen der jeweiligen Folge liegt, dass ein bestimmter Wert – der potentielle Grenzwert – innerhalb des Streifens liegt. Dass die durch den roten Streifen gekennzeichnete Mitte des ϵ -Streifens auf diesem bestimmten Wert liegt wird nicht explizit gefordert. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass bei „ ϵ -strip definition A“ lediglich auf die unendliche Anzahl Folgenglieder innerhalb jedes ϵ -Streifens eingegangen wird, weshalb sie auch von Häufungspunkten erfüllt wird. Bei „ ϵ -definition B“ hingegen handelt es sich um eine adäquate Verbalisierung der Definition der Konvergenz einer Folge. Den Studierenden gegenüber wurde nicht aufgelöst, welche der beiden „Definitionen“ konsistent zur formalen

Definition ist. Es scheint auch kein primäres Ziel der Studie gewesen zu sein, mit der Intervention möglichst gute Vorstellungen der Studierenden zum Konvergenzbegriff zu fördern, sondern eher zu analysieren, wie sich diese Vorstellungen und Konzepte verändern. In der Woche nach dem letzten Interview wurde der Nachtest durchgeführt. In diesem sollten die Probanden erneut die beiden Verbalisierungen bewerten und außerdem bei verschiedenen Folgen beantworten, ob sie einen Grenzwert besitzen und ihre Antwort begründen. Dazu lagen ihnen jeweils sowohl eine symbolische als auch eine graphische Darstellung der Folgen vor. Die Ergebnisse des Nachtests sollten genutzt werden, um die Vorstellungen der Teilnehmenden zum Konvergenzbegriff und ihre Fähigkeit zum umgekehrten Denken vor und nach der Durchführung der aufgabenbasierten Interviews vergleichen zu können. Zusätzlich wurden weitere Daten erhoben wie zum Beispiel alle Aufgabenbearbeitungen der Teilnehmenden zu regulären Hausaufgaben etc. und es wurden halbstrukturierte Interviews mit den jeweiligen Dozentinnen beziehungsweise Dozenten der Veranstaltungen geführt. Diese zusätzlichen Daten sollten lediglich Informationen darüber liefern, was die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zwischen Vor- und Nachtest abgesehen von den aufgabenbasierten Interviews im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff kennengelernt und bearbeitet haben. Zur Analyse der Daten wurde eine Variante einer Grounded Theory aus einer kollektiven Fallstudie gewählt. Es sollten Ergebnisse in Bezug auf das Verständnis des Grenzwertbegriffs, die Fähigkeit zum umgekehrten Denken im Kontext der Konvergenz und Zusammenhänge dazwischen erzielt werden. Als ein Ergebnis wurden von Roh sechs verschiedene Kriterien identifiziert, welche die Studierenden in den Tests oder den aufgabenbasierten Interviews benutzt haben, um Folgen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen (Roh, 2005, S. 91ff.):

- (I) Es wird als Kriterium für Konvergenz benutzt, ob eine Folge endlich viele oder unendliche viele Folgenglieder besitzt, unabhängig davon wie diese Folgenglieder definiert sind. Jede unendliche Folge wird als divergent angesehen, jede endliche Folge als konvergent. Konvergente Folgen werden als Folgen mit einem letzten Folgenglied beschrieben. Als Beispiel für eine konvergente Folge wird von zwei Studenten „ $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ “ genannt, mit der Begründung, dass die Folge nicht weitergehen würde, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert sei (Roh, 2005, S. 94f.).
- (II) Es wird in den Term, der die Folge definiert, für den Index „ ∞ “ eingesetzt und überprüft, ob das Ergebnis eine reelle Zahl ist. Hier ist eine statische Sichtweise vorherrschend, da nicht betrachtet wird, wie sich die Folgenglieder mit wachsendem n verändern. Beispielfür dieses Kriterium ist die Bearbeitung einer Studentin bei der Frage, ob die durch $a_n = \frac{1}{2n+5}$ definierte Folge konvergiert und was gegebenenfalls der Grenzwert ist. Sie schreibt $\frac{1}{2(\infty)+5} = \frac{1}{\infty} = 0$ (Roh, 2005, S. 101).
- (III) Es wird überprüft, ob die Folgenglieder sich einem Wert annähern ohne ihn zu erreichen. Nach diesem Kriterium werden beispielsweise konstante Folgen fälschlicherweise als divergent angesehen. Ein Student argumentiert, warum die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ seiner Meinung nach keinen Grenzwert hat: „it is not approaching any number [...] The value is just always 1“ (Roh, 2005, S. 105).
- (IV) Es wird überprüft, ob die Folgenglieder sich einem oder mehreren Werten annähern oder diese erreichen. Es wird für möglich gehalten, dass eine Folge mehrere

Grenzwerte haben kann. So werden bei diesem Kriterium beispielsweise (schließlich) konstante Folgen als konvergent angesehen, aber auch Folgen mit mehreren Häufungspunkten. So argumentiert eine Studentin zum Beispiel, warum die durch $a_n = (-1)^n \cdot (1 + \frac{1}{n})$ definierte Folge zwei Grenzwerte hat: „The all even terms of the sequence has a limit of 1, and the all odd terms of the sequence has a limit of -1 “ (Roh, 2005, S. 109).

- (V) Es wird überprüft, ob die Folgenglieder sich einem einzigen Wert annähern oder diesen erreichen. Beispielsweise antwortet eine Studentin auf die Frage, was es bedeutet, dass eine Folge einen Grenzwert hat: „In order for a sequence to have a limit, the terms of that sequence must either be converging or have converged on a real number“ (Roh, 2005, S. 111). Sie ergänzt auf Nachfrage, was „have converged“ für sie bedeutet: „Well, I would say that’s already there“ (Roh, 2005, S. 111).
- (VI) Es wird überprüft, ob die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder immer kleiner wird und sich Null annähert. Ein Beispiel, bei dem dieses Kriterium zu einem falschen Ergebnis führen würde, ist die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, welche divergiert, obwohl die Differenz aufeinanderfolgender Partialsummen immer kleiner wird. Eine Studentin begründet die Konvergenz der Folge $a_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$ wie folgt: „the distance between these terms, two consecutive terms you can see, you know, one half, if you keep getting absolute values, one fourth, one sixth, and so on and so forth. Umm. So it has to approach [pause] some number“ (Roh, 2005, S. 118).

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie haben nicht durchgängig vom Vortest über die verschiedenen Interviews bis zum Nachtest eines der Kriterien angewendet, sondern sie haben sich bei unterschiedlichen Folgen für verschiedene Kriterien entschieden. Mithilfe dieser Kriterien konnten Entwicklungen der Studierenden aufgezeigt werden.

Des Weiteren hat Roh auf Basis der Transkriptstellen, in denen die Studierenden jeweils auf die Frage nach dem Grenzwert einer bestimmten Folge antworten, eine Klassifizierung vorgenommen, wie die Teilnehmenden ihrer Studie den Grenzwert einer Folge verstehen. Aus dem Datenmaterial hat sie die folgenden drei Kategorien extrahiert, die so zu verstehen sind, dass das Verständnis eines Studierenden zu einem Zeitpunkt während der Studie einer Kategorie zugeordnet werden kann und zu anderen Zeitpunkten möglicherweise anderen Kategorien (Roh, 2005, S. 120ff.):

- (1) Der Grenzwert einer Folge wird als Asymptote angesehen. Dabei bezeichnet eine Asymptote eine waagerechte Gerade, der sich der Graph der Folge beliebig annähert, ohne sie zu überspringen oder zu schneiden. Studierende mit diesem Grenzwertkonzept gelangen zu falschen Ergebnissen, wenn sie Folgen betrachten, die konvergent, aber nicht (streng) monoton sind.
- (2) Häufungspunkte werden als Grenzwerte angesehen. Für Studierende mit diesem Konzept ist ein Wert dann Grenzwert einer Folge, wenn sich in jeder beliebigen Umgebung unendlich viele Folgenglieder befinden. Sie können bei konvergenten Folgen den Grenzwert korrekt bestimmen, doch bei Folgen mit mehreren Häufungspunkten antworten sie, es gebe mehrere Grenzwerte.

- (3) Es ist ein adäquates Grenzwertkonzept vorhanden. Die Studierenden können von Folgen aller betrachteter Typen das Konvergenzverhalten und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen.

Unter den elf Probandinnen und Probanden waren zwei, die von Anfang an ein adäquates Grenzwertkonzept besaßen. Beide haben dieses auch bei allen weiteren Aktivitäten beibehalten. Die meisten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind von ihren Konzepten während der Untersuchung nicht abgewichen. Bei einem Studenten hat sich das Konzept hingegen von der Vorstellung, Häufungspunkte seien Grenzwerte, zu einem adäquaten Konzept verbessert. Davon abgesehen hat Roh auch die Zusammenhänge zwischen den jeweils vorhandenen Konzepten und der Bewertung der beiden Verbalisierungen „ ϵ -strip definition A“ und „ ϵ -strip definition B“ untersucht. Probandinnen und Probanden mit dem Grenzwertkonzept (1) haben beide der Verbalisierungen als falsch angesehen. Diejenigen, bei denen das Grenzwertkonzept (2) vorherrschend war, haben konsequenterweise „ ϵ -strip definition A“ als korrekt und „ ϵ -strip definition B“ als falsch bewertet. Bei den Studierenden, deren Grenzwertkonzept als adäquat eingestuft worden war, gab es jedoch Unterschiede. Manche haben korrekt geantwortet, dass „ ϵ -strip definition A“ falsch und „ ϵ -strip definition B“ richtig sei. Andere hingegen haben geantwortet, beide Verbalisierungen seien korrekt. Diese Studierenden haben nicht erkannt, dass zwischen den beiden Verbalisierungen ein Unterschied besteht. Ihnen war nicht bewusst, dass wenn in jeder beliebigen Umgebung um einen Wert unendlich viele Folgenglieder liegen, trotzdem noch unendlich viele Folgenglieder außerhalb dieser Umgebung liegen können.

Ein Fokus der Studie sollte wie anfangs erwähnt das umgekehrte Denken sein. Dieses umgekehrte Denken war bei den Teilnehmenden der Studie bei den einzelnen Aktivitäten in verschiedenen Abstufungen erkennbar. Zur Entwicklung eines Modells mit solchen Abstufungen wurden aus den Interview-Transkripten zunächst Hauptkategorien gebildet, anschließend wurde die Reliabilität dieser Kategorien durch Triangulation erhöht. Details zu dem Vorgehen werden nicht genannt. Roh hat fünf verschiedene Stufen des Verständnisses der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N identifiziert, die genutzt werden sollten, um die Entwicklung des umgekehrten Denkens aufzeigen zu können (Roh, 2005, S. 136ff.):

- Stufe 0: Es ist kein umgekehrtes Denken erkennbar. Die Studierenden betrachten zu wachsendem Index den Abstand der Folgenglieder zum (potenziellen) Grenzwert.
- Stufe 1: Die Studierenden lassen auch $\epsilon = 0$ oder $\epsilon = \infty$ zu. Sie lassen den Wert von ϵ entweder immer größer oder immer kleiner werden und bestimmen dann für $\epsilon = 0$ oder $\epsilon = \infty$ einen geeigneten Index N .
- Stufe 2: Die Studierenden bestimmen für einen oder mehrere fest gewählte Werte von ϵ geeignete Indizes N , jedoch nicht für beliebiges $\epsilon > 0$.
- Stufe 3: Die Studierenden erkennen, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index N geeignet gewählt werden muss. Sie haben dabei jedoch eine statische Vorstellung der ϵ -Streifen. Sie wissen zwar, dass unendlich viele Werte für ϵ berücksichtigt werden, doch haben nicht verstanden, dass als Bedingung für das Vorhandensein eines Grenzwert auch formuliert werden kann, dass es für jeden beliebig kleinen Wert von ϵ einen geeigneten Index N geben muss.

- Stufe 4: Das umgekehrte Denken ist vollständig erkennbar. Die Studierenden haben eine dynamische Vorstellung von immer kleiner werdenden ϵ -Streifen und erkennen, dass zu beliebigem ϵ ein geeigneter Index N gewählt werden muss.

Bei diesen Stufen handelt es sich nicht nur um Kategorien, sondern um hierarchisch geordnete Stufen. Roh begründet jeweils, warum die nächste Stufe ein höheres Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N impliziert als die vorherige Stufe (Roh, 2005, S. 192f.). Tatsächlich hat sich auch ein Zusammenhang zwischen dem Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N und dem Grenzwertkonzept der Studierenden gezeigt. So war bei allen Teilnehmenden, deren Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N zur Stufe 0 zugeordnet wurde, das Grenzwertkonzept (1) (Grenzwert als Asymptote) vorherrschend. Unter den Studierenden mit Verständnis der Stufe 1 gab es ebenfalls welche mit diesem Grenzwertkonzept, es gab jedoch auch welche mit dem Grenzwertkonzept (2) (Häufungspunkte als Grenzwerte). Unter den Studierenden, deren Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N den Stufen 2, 3 oder 4 zugeordnet wurde, waren jeweils alle Grenzwertkonzepte vertreten (Roh, 2005, S. 136ff.). Werden umgekehrt alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit dem Grenzwertkonzept (1) betrachtet, so sind unter ihnen alle Stufen des Verständnisses der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N vertreten. Bei denjenigen mit dem Grenzwertkonzept (2) hingegen sind die Stufen 1 bis 4 vertreten und diejenigen mit dem Grenzwertkonzept (3) ließen sich mindestens zur Stufe 2 zuordnen (Roh, 2005, S. 196f.). Roh fasst diesen Zusammenhang wie folgt zusammen:

„The better they recognized the dynamic feature of the intuitively reverse relation between ϵ and N in the ϵ -strip definitions, the better they understood the limit of a sequence, and vice versa“ (Roh, 2005, S. 183f.).

Ein weiteres Ergebnis ist, dass sich bei den meisten Teilnehmenden das Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N im Laufe der Interviews verbessert hat (Roh, 2005, S. 198). Ein Ziel der Untersuchung war außerdem, herauszufinden, ob die beschriebenen Aktivitäten mit den ϵ -Streifen und Aussagen, welche die umgekehrte Beziehung zwischen ϵ und N beschreiben, das Verständnis des Grenzwertbegriffs beeinflussen. Als eins von drei Hauptergebnissen dazu nennt Roh, dass die Stufe der Fähigkeit zum umgekehrten Denken, auf der sich ein Studierender befindet, eng mit der Kategorie seines Grenzwertkonzepts zusammenhängt. Ein zweites Ergebnis dazu ist, dass sich bei der Entwicklung des Grenzwertkonzepts von Studierenden von Grenzwerten als Asymptoten über Häufungspunkte als Grenzwerte hin zu einem adäquaten Grenzwertkonzept auch das Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen ϵ und N verbessert. Das dritte Ergebnis dazu ist, dass die Aktivitäten mit den ϵ -Streifen zusammen mit der Behandlung unterschiedlicher Typen von Folgen Studierende bei der Entwicklung eines adäquaten Grenzwertkonzepts im Sinne der Kategorie (3) unterstützen kann (Roh, 2005, S. 201). Wie die Studierenden die formale Definition der Konvergenz einer Folge anwenden, war hingegen kein Gegenstand dieser Untersuchung.

In den Veröffentlichungen Roh (2004), Roh (2006) und Roh (2007) werden Ergebnisse derselben Studie präsentiert, weshalb hier nicht gesondert darauf eingegangen wird, ebenso wie auf den Artikel Roh (2010c), in dem die ϵ -Streifen als Aktivität vorgestellt werden.

In den bisher erwähnten Publikationen hat Roh lediglich einen Teil der im Rahmen einer größer angelegten Studie erhobenen Daten verwendet. In den Veröffentlichungen Roh (2008) und Roh (2010b) hat sie weitere Daten von Studierenden eines ingenieurwissenschaftlichen Studiengangs und Biologiestudierenden analysiert. In den Artikeln Roh (2009) und Roh (2010a) hingegen wurden die Daten von Mathematikstudierenden und Studierenden des Gymnasialen Lehramts verwendet. In all diesen Veröffentlichungen liegt der Fokus auf dem Verständnis der Beziehung zwischen ϵ und N in der formalen Definition des Grenzwerts und auf dem Einsatz der ϵ -Streifen. Auf die Artikel, die auf den Daten der Studierenden der Ingenieurwissenschaften und Biologie beruhen, wird hier nicht eingegangen, da sie im Vergleich zur Dissertationsstudie keine wesentlichen weiteren Erkenntnisse liefern, die für diese Arbeit von Bedeutung wären. Bei den Mathematikstudierenden und Studierenden des Gymnasialen Lehramts hingegen handelt es sich um die Zielgruppe meiner Untersuchung, so dass die Arbeiten hierzu vorgestellt werden.

Die Daten zu der Studie hat Roh (2009) in einer Veranstaltung zu Reeller Analysis erhoben. Es wurde ebenfalls untersucht, inwiefern den Studierenden die Abhängigkeit der Variablen N von ϵ in der formalen $\epsilon - N$ -Definition bewusst ist. Zum Zeitpunkt der Studie war die formale Definition im Gegensatz zu den bisher berichteten Studien bereits behandelt worden und die Studierenden hatten bei verschiedenen Folgen durch Anwenden der Definition die Konvergenz nachgewiesen. In Kleingruppen sollten die Studierenden in der Veranstaltung die beiden folgenden Argumentationen bezüglich der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ auf ihre Richtigkeit überprüfen:

„Argument 1: We claim that the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent to 0. Let $\epsilon = \frac{1}{N}$ for $N \in \mathbb{N}$. Then $\epsilon > 0$. For all $n > N$, $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \epsilon$. Therefore, the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0.

Argument 2: We claim that the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is not convergent to 0 because for all $N \in \mathbb{N}$, let $n = N + 1$. Then $n > N$. Choose $\epsilon = \frac{1}{(n+1)} > 0$. Then $|a_n - 0| = \frac{1}{n} > \frac{1}{(n+1)} = \epsilon$. Therefore, there exists $\epsilon > 0$ such that for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $n > N$ such that $|a_n - 0| \geq \epsilon$. Therefore, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ does not converge to 0.“ (Roh, 2009, S. 149)

Die Auswahl dieser beiden Argumentation wird nicht weiter begründet. In beiden Fällen wurde ϵ in Abhängigkeit von N gewählt, somit sind sie beide nicht vollständig korrekt. In dem Artikel wird über das Vorgehen einer Kleingruppe aus vier Studierenden berichtet. Alle vier sind sich von Anfang an sicher, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Da bei der ersten Argumentation das Ergebnis ist, dass die Folge gegen 0 konvergiert, akzeptieren sie diese laut der Autorin, ohne sie genauer zu überprüfen. Aus demselben Grund schlussfolgern sie, dass die zweite Argumentation fehlerhaft sein muss. Bei zwei der Studentinnen wird deutlich, dass sie nicht wissen, wie die Definition angewendet werden kann, um nachzuweisen, dass eine Folge nicht gegen einen Grenzwert konvergiert:

„Sophie observed that Argument 2 showed $|a_n - 0| \geq 0$, but she believed that proofs about the convergence should prove the expression „ $|a_n - 0| < 0$ “ instead of proving the expression „ $|a_n - 0| \geq \epsilon$ “. Stacy also argued that that [sic!] Argument 2 should have examined the absolute value $|a_n - 0|$ for *all* $n > N$ instead of examining $|a_n - 0|$ for *some* value of n by choosing $N + 1$ for n .“ (Roh, 2009, S. 150)

Ein anderer Student erkennt hingegen, dass in der zweiten Argumentation die Negation der Definition verwendet wurde, um nachzuweisen, dass die Folge nicht gegen 0 konvergiert. Was jedoch keiner der vier Studierenden bemerkt, ist, dass ϵ in Abhängigkeit von N gewählt wurde. Auch in dieser Studie zeigt sich also, dass die Studierenden große Schwierigkeiten mit den Quantoren in der formalen Definition und insbesondere mit deren Reihenfolge beziehungsweise der Abhängigkeit der zugehörigen Variablen haben.

Roh und Lee (2011a) haben später erneut eine Studierendengruppe aus einer Veranstaltung zur Reellen Analysis in Bezug auf die Entwicklung ihres Verständnisses der Grenzwertdefinition analysiert, denen es gelungen ist, die logische Beziehung zwischen ϵ und N adäquat zu verstehen. Als Ziel der Studie haben Roh und Lee genannt, Einblicke darin zu gewinnen, wie Studierende ein Verständnis der Logik in der ϵ - N -Definition und insbesondere der Beziehung zwischen ϵ und N aufbauen können. Die Lehrveranstaltung, in der die Studie durchgeführt wurde, wurde von Roh gehalten und die Zielgruppe bestand aus Mathematikstudierenden und Studierenden des gymnasialen Lehramts. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer hatten laut Aussage der Autorin das Konzept des Grenzwertbegriffs in einer „Calculus“-Veranstaltung bereits kennengelernt, hatten jedoch noch keine Erfahrung im Anwenden der formalen ϵ - N -Definition zum Nachweis der Konvergenz einer Folge.

Die folgenden Aktivitäten wurden im Rahmen der Studie durchgeführt: Die Studierenden wurden zunächst aufgefordert, bei einigen einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie Grenzwerte besitzen. Unter diesen Folgen befinden sich eine streng monotone, konvergente Folge, eine schließlich konstante Folge, zwei nicht-monotone, konvergente Folgen, eine alternierende, unbeschränkte Folge mit einem Häufungspunkt und zwei Folgen mit je zwei Häufungspunkten. Wie bereits in den anderen Interventionsstudien wurden den Studierenden anschließend ϵ -Streifen verschiedener Breite ausgehändigt, die sie auf die Graphen der Folgen legen sollten und sie sollten jeweils bestimmen, wie viele Folgenglieder sich innerhalb und außerhalb des ϵ -Streifens befinden. Im Anschluss wurden wieder zwei „ ϵ -strip-Definitionen“ präsentiert, die sich nur leicht in der Formulierung von denen aus der Dissertationsstudie unterscheiden:

- „ ϵ -strip definition A: a certain value L is a limit of a sequence when for any ϵ -strip centred at L , infinitely many points on the graph of the sequence are inside the ϵ -strip.
- ϵ -strip definition B: a certain value L is a limit of a sequence when for any ϵ -strip centred at L , only finitely many points on the graph of the sequence are outside the ϵ -strip.“

Tabelle 2.2: ϵ -strip definitions (Roh und Lee, 2011a, S. 58)

Die „Definition“ A trifft nicht nur auf Grenzwerte, sondern auch auf Häufungspunkte zu, wohingegen die „Definition“ B eine geeignete Charakterisierung eines Grenzwertes ist. Die Studierenden sollten diese beiden „Definitionen“ auf die Beispielfolgen anwenden, bei denen sie zuvor bereits intuitiv entschieden hatten, ob diese Grenzwerte besitzen oder nicht, und feststellen, bei welcher der beiden Varianten sie zu denselben Ergebnissen kommen wie zuvor bei ihren intuitiven Entscheidungen. Im nächsten Schritt wurden ihnen zwei fiktive Argumentationen vorgelegt, die sie auf ihre Gültigkeit untersuchen sollten:

„Ben’s argument: Choose an ϵ -strip with $\epsilon = 0.1$ and align its centre at $y = -0.05$ on the graph of this sequence $\{1/n\}$. Then infinitely many points on the graph of the sequence are inside the ϵ -strip. Hence, accepting ϵ -strip definition A as a definition of limit, we should determine the value -0.05 as a limit of the sequence $\{1/n\}$.

Emma’s argument: Choose an ϵ -strip with $\epsilon = 0.1$ and align its centre at $y = -0.05$ on the graph of this sequence $\{1/n\}$. Then only finitely many points of the sequence are outside the strip. Hence, accepting ϵ -strip definition B as a definition of limit, we should determine the value -0.05 as a limit of the sequence $\{1/n\}$.“ (Roh und Lee, 2011a, S. 58)

Der fiktive Student Ben bezieht sich in seiner Argumentation auf „Definition“ A, während die fiktive Studentin Emma sich auf die „Definition“ B bezieht. Beide Argumentationen haben gemeinsam, dass nur ein ϵ -Streifen betrachtet wird. In beiden Fällen wird argumentiert, dass $-0,05$ ein Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ sei. Die Studierenden wurden aufgefordert, die beiden „Definitionen“ A und B erneut zu überprüfen, bevor die formale ϵ - N -Definition präsentiert wurde. Abschließend sollten die Studierenden diskutieren, ob diese äquivalent zur „Definition“ B ist. Warum die einzelnen Aktivitäten ausgewählt wurden, wird in dieser Veröffentlichung nicht dargelegt. Der Fokus der Analyse liegt auf zwei Studierenden während der Beschäftigung mit den genannten Aktivitäten, wobei sie teilweise mit zwei anderen Studierenden zusammen arbeiten. Es wird vor allem untersucht, ob die Studierenden die folgenden drei Aspekte der Beziehung zwischen ϵ und N verstanden haben:

- (1) N wird in Abhängigkeit von ϵ geeignet gewählt bevor die Variation von ϵ betrachtet wird,
- (2) ϵ wird beliebig gewählt,
- (3) die Wahl eines beliebigen ϵ ’s beinhaltet, dass ϵ gegen 0 strebt.

Die meisten Teilnehmenden haben intuitiv richtig entschieden, ob die vorgegebenen Folgen jeweils konvergieren oder nicht, und haben dabei den Begriff der Annäherung verwendet. Ob das auch auf die beiden beobachteten Studierenden Alan und Oliver zutrifft wird nicht erwähnt. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden darauf aufmerksam gemacht, dass die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ sich auch dem Wert $-0,1$ annähert, jedoch nicht gegen diesen konvergiert, wodurch ihnen bewusst wurde, dass eine präzisere Definition für den Grenzwert einer Folge nötig ist. Als die beiden „ ϵ -strip-Definitionen“ präsentiert wurden, war Alan der Meinung, diese seien beide nicht als Definition des Grenzwerts geeignet. Ein weiterer Student argumentierte, dass die „Definition“ A nicht geeignet sei, da diese auch auf Folgen zutreffen würde, die „gegen zwei verschiedene Werte konvergent“ seien. Er meint hier Folgen mit zwei Häufungspunkten und sagt, solche Folgen hätten keinen Grenzwert. Für die „Definition“ B finden die Studierenden kein Gegenbeispiel. Alan interpretiert die beiden Argumentationen der fiktiven Studierenden, die anschließend präsentiert wurden, als Versuche, zu widerlegen, dass $-0,05$ Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Er ist der Ansicht, dass die Betrachtung eines ϵ -Streifens dazu ausreicht. Oliver hingegen erkennt bei der Argumentation von Ben, dass basierend auf der „Definition“ A jeder beliebige ϵ -Streifen betrachtet werden müsste, jedoch wurde lediglich ein solcher Streifen betrachtet. Ein dritter Student, Alex, bemerkt daraufhin, dass in Emmas Argumentation ebenfalls nur ein einziger

ϵ -Streifen betrachtet wurde, obwohl in der „Definition“ B, auf die Bezug genommen wird, die Bedingung für jeden beliebigen ϵ -Streifen gefordert wird. So sind die Studierenden zu der Erkenntnis gelangt, dass die Argumentationen von Ben und Emma beide nicht gültig sind. In der nächsten Phase sollten die Studierenden erneut die beiden „Definitionen“ A und B überprüfen. Durch eine weitere Studentin, Mary, kommt die Gruppe dabei auf die durch $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$ definierte Folge zu sprechen, von der Mary glaubt, dass

sie ein Gegenbeispiel für die Äquivalenz der „Definition“ B zur Grenzwertdefinition darstelle. Die Studentin hat dabei jedoch den Fehler gemacht, nur einen einzigen ϵ -Streifen zu betrachten, der so breit ist, dass sowohl 0 als auch 1 sich innerhalb des Streifens befinden und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Streifens liegen. Alan und Oliver fällt nicht nur der Fehler von Mary auf, sondern auch, dass diese Folge sich als Gegenbeispiel für die „Definition“ A eignet. Sie gelangen dann zu der Entscheidung, die beiden „Definitionen“ A und B müssten kombiniert werden. Die Studierenden versuchen weiterhin, ein Gegenbeispiel für die „Definition“ B zu finden. Alan bemerkte, wenn es kein solches Gegenbeispiel geben würde, dann wäre B alleine geeignet und müsste nicht mit A kombiniert werden. Sie sind sich allerdings nicht sicher, ob es tatsächlich kein Gegenbeispiel gibt oder ob sie lediglich keins gefunden haben. Nachdem die Lehrperson sie gefragt hat, ob bei einer Folge sowohl überprüft werden müsse, ob sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb und nur endlich viele außerhalb jedes beliebigen ϵ -Streifens befinden, stellt Oliver fest, dass sich automatisch unendlich viele Folgenglieder innerhalb eines Streifens befinden, wenn nur endlich viele außerhalb davon liegen. Daraufhin entscheiden sich die Studierenden, „Definition“ B als geeignet zu bewerten. Nachdem die formale ϵ - N -Definition präsentiert wurde, sind die Studierenden sich sofort einig, dass diese äquivalent zur „Definition“ B ist. Sie unterhalten sich noch über die Variable N in der formalen Definition, da Alex nicht weiß, wie dieses N bei einer Folge, die nicht schließlich konstant ist, gewählt werden kann. Der Grund dafür ist vermutlich, dass bei einer schließlich konstanten Folge N unabhängig von ϵ gewählt werden kann, was bei anderen Folgen nicht möglich ist.

Alan und Oliver machen in ihren Antworten deutlich, dass sie verstanden haben, dass N variabel gewählt wird: „ N is sort of arbitrary“ Roh und Lee (2011a, S. 63) und „You can say there’s still a large N where $|a_n - L| < \epsilon$ and that fits for each of these situations. [...] It could be anything because you could have, since arbitrary values of ϵ , the value of ϵ actually changes with the N we pick“ Roh und Lee (2011a, S. 63). Die Forschenden sind der Ansicht, dass die beiden Studenten alle drei Aspekte der Beziehung zwischen ϵ und N verstanden haben. Ich selbst würde die letzte Aussage nicht derart interpretieren, dass die umgekehrte Beziehung zwischen ϵ und N erkannt wurde. Dennoch stimme ich Roh und Lee zu, dass die Aktivität mit den ϵ -Streifen Lernende dabei unterstützen kann, die formale ϵ - N -Definition und insbesondere die Beziehung der beiden Variablen zu verstehen.

Über weitere Studierende aus derselben Studie berichten Roh und Lee (2017) später erneut. Da dort ähnliche Ergebnisse präsentiert werden, wird hier nicht darauf eingegangen.

In einem weiteren Artikel haben Roh und Lee (2011b) eine Aktivität vorgeschlagen, deren zentraler Bestandteil eine Geschichte eines Geistlichen und eines Steinmetzes ist. Mit der Aktivität soll erreicht werden, dass Studierende die Bedeutung der Reihenfolge der Quantoren in der formalen ϵ - N -Definition und die damit verbundene Beziehung zwischen

ϵ und N bewusst wird. Da diese Aktivität nicht in den zu entwickelnden Workshop einfließt, wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Spätere Arbeiten von Roh konnten in die Gestaltung des Workshops nicht einfließen, da sie zum Zeitpunkt der Entwicklung des Konzepts und der Durchführung des Workshops noch nicht veröffentlicht waren. In diesen befasst sich die Forscherin allerdings auch nicht hauptsächlich mit der Konvergenz von Folgen, sondern allgemeiner oder am Beispiel anderer Themen mit dem Umgang mit mathematischen Aussagen (Zandieh et al. (2014), Roh et al. (2016), Dawkins und Roh (2016)).

2.5.4 Konzept von Oehrtman, Swinyard, Martin et al.

Eine große Studie zum Grenzwertbegriff wurde von einer Forschergruppe um Michael Oehrtman, Craig Swinyard und Jason Martin durchgeführt. Diese Studie wird von den Autoren in die Theorie der RME (siehe Abschnitt 3.3) eingeordnet. An einer Teilstudie, zu der es verschiedene Veröffentlichungen gibt (Swinyard (2008), Swinyard (2011), Swinyard und Larsen (2012)), haben zwölf Studierende, welche die Vorlesungsreihe „Calculus I-III“ besucht hatten, in der lediglich ein intuitiver Grenzwertbegriff ohne formale Definition behandelt wurde, teilgenommen. Als Ziel der Studie wird genannt, zentrale Aspekte, die zum Verständnis des Konvergenzbegriffs nötig sind, zu identifizieren und Einblicke in die Argumentationen von Studierenden während der Nacherfindung der Definition des Grenzwerts zu gewinnen. Die Probandinnen und Probanden haben zunächst einen Test zu Grenzwerten von Funktionen bearbeitet. Von ihnen wurden vier Studierende ausgewählt, die bereits ein „robustes *Concept Image*“ zum Grenzwertbegriff aufgebaut hatten (Swinyard und Larsen, 2012, S. 472f.). Darunter verstehen die Forscher, dass die Studierenden sowohl erklären können, wann ein Grenzwert existiert, als auch wann kein Grenzwert existiert. Außerdem sollen die Studierenden in der Lage sein, Grenzwerte von Folgen zu bestimmen und zu vorgegebenen Bedingungen geeignete Graphen von Folgen zu skizzieren. Dann wurde zunächst mit zwei von diesen Studierenden – Amy und Mike – ein Unterrichtsexperiment durchgeführt und ausgewertet und dieses anschließend mit den anderen beiden – Chris und Jason – wiederholt. Das Unterrichtsexperiment selbst bestand aus zehn Unterrichtseinheiten, die zwischen 60 und 100 Minuten betrugen, und Ausgangsinterviews mit den einzelnen Studierenden. Das Unterrichtsexperiment ist in vier Phasen unterteilt. In der ersten Phase sollten die Studierenden vor allem bei verschiedenen Funktionen Grenzwerte an einem Punkt bestimmen und ihr Vorgehen erläutern. Die Beispiele waren so gewählt, dass mit der Strategie des „direkten Einsetzens“ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ nicht in allen Fällen korrekte Ergebnisse erzielt werden konnten. Die Studierenden sollten daran erkennen, dass diese Strategie nicht immer anwendbar ist und es sollte ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass eine präzise Definition benötigt wird. Am Anfang der zweiten Phase sollten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zunächst basierend auf ihrem *Concept Image* möglichst viele verschiedene Beispiele von Funktionen finden, die an der Stelle $x = 5$ den Grenzwert 2 haben. Diese Beispiele sollen während des weiteren Prozesses immer wieder genutzt werden, um eine „Definition“ des Grenzwerts von einer Funktion an einem Punkt nach und nach zu verbessern. Anschließend sollten sie sich Gedanken darüber machen, wie nachgewiesen werden könnte, dass eine Funktion an der Stelle $x = 5$ den Grenzwert 2 habe. Außerdem wurden auch Funktionen mit Unstetigkeitsstellen betrach-

tet. Die Charakteristika von Funktionen, die an einer Stelle einen bestimmten Grenzwert haben, sollten beschrieben werden. In der dritten Phase sollten dann möglichst verschiedene Beispiele von Funktionen, deren Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ 4 ist, gesammelt werden und wieder sollte formuliert werden, wie dies nachgewiesen werden kann. Schließlich sollten in der letzten Phase die Erkenntnisse der dritten Phase auf Grenzwerte von Funktionen an einem Punkt übertragen werden. Insgesamt wurde jeweils damit begonnen, wie ein Grenzwert nachgewiesen werden kann und erst im Anschluss wurde zu einer Definition übergegangen. Swinyard und Larsen (2012, S. 470f.) argumentieren, dass diese Überlegungen die Nacherfindung der Definition vorantreiben könne, da auch bei der historischen Entwicklung der Nachweis von Konvergenz die formale Definition beeinflusst habe:

„inspired by the historical development of analysis, we engaged the students in thinking about *how* they would verify that a number is a limit as a way to support their development of a definition of limit. [...] historically the development of suitable definitions required prior development of methods of proof. For example, inequalities did not appear first in Cauchy’s definition of limit but instead appeared first in his proofs of convergence.“ (Swinyard und Larsen, 2012, S. 470f.)

Die Definition von Cauchy, auf welche die Forscher sich beziehen, lautet wie folgt:

„Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die *Grenze* aller übrigen.“ (Cauchy (1828, S. 3), zitiert nach Greefrath et al. (2016, S. 77))

In Konvergenznachweisen wurde diese Definition mit einer Ungleichung umgesetzt. In der formalen Definition selbst wurde die Ungleichung erst später verwendet. Die Autoren bezeichnen die ϵ - δ -Definition als Formalisierung des Prozesses, nachzuweisen, dass eine gegebene Zahl der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle ist (Swinyard und Larsen, 2012, S. 471). Die Diskussionen der Studierendenpaare untereinander beziehungsweise der Studierenden und der Lehrperson wurden in drei Phasen analysiert. Zum einen gab es eine fortlaufende Analyse nach jeder einzelnen Unterrichtseinheit. Dabei handelte es sich um eine eher oberflächliche Analyse, da zwischen den einzelnen Unterrichtseinheiten jeweils nur sechs bis zehn Tage lagen. Das Hauptaugenmerk lag darauf, Äußerungen, die wichtig für die Studierenden zu sein schienen, zu identifizieren, sowie Stellen, an denen sie Probleme äußern oder einen Fortschritt bei der Nacherfindung der Definition machen. Diese fortlaufende Analyse hatte jeweils Einfluss auf die Gestaltung der nächsten Unterrichtseinheit. Zum anderen wurde jeweils am Ende des Unterrichtsexperiments eine Analyse durchgeführt, in der relevante Abschnitte gekennzeichnet und ausführliche Fallbeschreibungen angefertigt wurden. Die Analyse des Experiments mit dem ersten Studierendenpaar hat dabei das Vorgehen beim Experiment mit dem zweiten Paar beeinflusst. Nachdem das Unterrichtsexperiment mit beiden Paaren durchgeführt worden war, erfolgte eine retrospektive Analyse des gesamten Datenmaterials. Die Forschenden sind hier insgesamt im Sinne des Design-Based Research (vgl. Abschnitt 3.2) vorgegangen. Bei der retrospektiven Analyse wurden die beiden Fälle in einem zyklischen Prozess verglichen und kontrastiert.

Da in dieser Teilstudie die Definition des Grenzwerts einer Funktion an einer Stelle nacherfunden wurde und nicht die Definition der Konvergenz einer Folge, soll hier nicht auf die einzelnen Fälle eingegangen werden, sondern die zentralen Ergebnisse werden zusammengefasst. Es wurden zwei Hürden bei der Nacherfindung der ϵ - δ -Definition identifiziert. Zum einen haben die Studierenden eine sogenannte „ x -first“-Perspektive bevorzugt. Damit ist gemeint, dass die Studierenden zunächst x -Werte betrachten und anschließend die entsprechenden Funktionswerte. Die folgende Argumentation der Studentin Amy dafür, dass eine gegebene Funktion an der Stelle 5 den Grenzwert 7 hat, illustriert dies:

„I would be like, pick a point, any point. And... I'll show you that, that for any x -value you can give me, I'll give you a y -value that, that as your x -values get closer to 5, my y -values get closer to 7.“ (Swinyard, 2008, S. 147)

Die Autoren sind der Meinung, dass diese Perspektive zwar genutzt werden könnte, um einen möglichen Kandidaten für einen Grenzwert einer Funktion zu finden, doch der Nachweis eines Grenzwertes durch Anwenden der formalen Definition entspricht ihrer Meinung nach einer „ y -first“-Perspektive: Zuerst wird eine beliebige Schranke für den Abstand der y -Werte zum Grenzwert gewählt und erst im Anschluss wird in Abhängigkeit davon bestimmt, für welche x -Koordinaten diese Schranke unterschritten wird. Im Sinne von Roh (2005) ist bei einer „ x -first“-Perspektive kein umgekehrtes Denken erkennbar, auch wenn die Autoren selbst sich nicht auf diesen Begriff beziehen. Ein Ziel der Intervention ist es, die Studierenden mit einer „ x -first“-Perspektive bei dem Einnehmen einer „ y -first“-Perspektive zu unterstützen.

Die zweite zentrale Hürde, die von Swinyard und Larsen (2012) genannt wird, ist die Operationalisierung von Formulierungen der Art „unendlich nah“. So formulieren Amy und Mike als Zwischenergebnis:

„The limit L of a function at $x = a$ exists if every time we look at the function more closely as we get infinitely close to $x = a$, it bears out the same pattern of behavior, i.e., looks to be approaching some y -value l w/no vertical gaps in the graph.“ (Swinyard, 2008, S. 155f.)

Die beiden Studierenden versuchen, das, was „unendlich nah“ für sie bedeutet, präziser auszudrücken, doch ohne Unterstützung können sie dieses Problem nicht lösen. Bei dem anderen Studierendenpaar verhält es sich ähnlich.

In einer anderen Teilstudie wurde ähnlich vorgegangen, jedoch wurde von den Probanden nicht die Definition des Grenzwerts einer Funktion, sondern unter anderem die des Grenzwerts einer Folge nacherfunden. Die beiden Studierenden aus einer Calculus-Veranstaltung, Megan und Belinda, haben an dem aus sechs Unterrichtseinheiten bestehenden Experiment teilgenommen, wobei es nur in der ersten Hälfte um Folgenkonvergenz ging. Zunächst sollten sie möglichst verschiedene Beispiele von Folgen sammeln, die den Grenzwert 5 haben beziehungsweise nicht haben. Diese liegen als Graph vor, wobei jeweils die ersten 20 Folgenglieder abgebildet sind. Die Autoren gehen auf diese Folgen nicht genauer ein, doch es sind sowohl monotone als auch nicht-monotone Folgen dabei; Folgen, für die der Grenzwert keine obere oder untere Schranke ist und eine konstante Folge. Unter den Beispielen, die nicht gegen 5 konvergieren, sind Folgen mit mehreren Häufungspunkten, eine unbeschränkte Folge und Folgen mit einem von 5 verschiedenen Grenzwert (Oehrtman et al.,

2014, S. 136f.). Megan und Belinda wurden anschließend dazu aufgefordert, den Satz „A sequence converges to 5 as $n \rightarrow \infty$ provided...“ (Oehrtman et al., 2011, S. 328) derart zu vervollständigen, dass die Aussage auf alle Beispiele zutrifft und auf alle Nicht-Beispiele nicht zutrifft. Es folgte ein Prozess, in dem von den Studierenden eine Formulierung vorgeschlagen wurde, diese diskutiert und gegebenenfalls verändert wurde.

In den Formulierungen und den Diskussionsbeiträgen haben die Autoren bei der Analyse ‚Problems‘ und ‚Problematic Issues‘ unterschieden. Als ‚Problem‘ bezeichnen sie solche Aspekte, bei denen den Studierenden ein Konflikt bewusst ist und sie dies äußern. Unter ‚Problematic Issues‘ hingegen verstehen sie solche Aspekte der Formulierungen, die der formalen Definition widersprechen, wobei den Studierenden allerdings kein Konflikt bewusst ist. In so einem Fall haben die beiden anwesenden Lehrpersonen aus dem Kreis der Forschergruppe die Probandinnen und Probanden teilweise zum erneuten Nachdenken angeregt. Sofern ihnen der Konflikt bewusst geworden ist, wurde aus dem ‚Problematic Issue‘ ein ‚Problem‘.

Insgesamt haben Megan und Belinda in den drei Unterrichtseinheiten 30 verschiedene Versionen einer ‚Definition‘ notiert. Auf einige dieser Versionen und damit verbundenen ‚Problems‘ und ‚Problematic Issues‘ wird hier eingegangen. Ihre erste Formulierung der ‚Definition‘ lautet:

„A sequence converges to 5 as $n \rightarrow \infty$ provided $n + 1$ is closer to 5 than n for any n value.“ (Oehrtman et al., 2014, S. 138)

Mit $n + 1$ und n meinen die Probanden nicht die Indizes, sondern die entsprechenden Folgenglieder a_{n+1} und a_n . Dass der Abstand aufeinanderfolgender Folgenglieder zum Grenzwert immer kleiner wird, trifft nicht auf alle ihnen vorliegenden Beispiele zu. Das fällt Megan und Belinda jedoch selbst auf, weswegen diese Situation von den Forschern als ‚Problem‘ klassifiziert wird. Eine der beiden Studentinnen schlägt dann vor, die ersten Folgenglieder außer Acht zu lassen:

„What if we were to say after some point n it... We have random stuff going on [pointing at all of the convergent graphs], but at some point it does start doing the closer and closer and closer thing.“ (Oehrtman et al., 2011, S. 329)

Ihre darauffolgende Version der Definition lautet:

„As $n \rightarrow \infty$, at some n , a_{n+1} becomes closer to (or is) 5.“ (Oehrtman et al., 2014, S. 138)

Das löst das Problem laut den Forschern jedoch nicht vollständig, da es bei einer konvergenten Folge keinen solchen Index geben muss, ab dem der Abstand aufeinanderfolgender Folgenglieder zum Grenzwert immer kleiner wird. Auch unter den Beispielen, die den Studentinnen vorlagen, befindet sich ein solches Beispiel. Die Autoren sehen hier außerdem als problematisch an, dass der Index n , ab dem ihrer Meinung nach a_{n+1} näher an 5 kommt, von der jeweiligen Folge abhängt, in ihrer Formulierung jedoch scheinbar ein fester Wert ist; dass n einerseits für diesen festen Punkt steht, ab dem sich das Verhalten ändert, andererseits aber auch den Folgenindex bezeichnet; und es wurde nicht präzise formuliert, für welche Indizes a_{n+1} näher an 5 sein soll als a_n (Oehrtman et al., 2011, S. 329). Da den Studierenden nicht bewusst war, dass ihre „Definition“ die vorliegenden Beispiele aufgrund der genannten Aspekte nicht geeignet charakterisiert, wurden diese

Aspekte als ‚Problematic Issues‘ eingestuft. Teilweise sind diese problematischen Aspekte in späteren Versionen der Definition nicht mehr vorhanden, ohne dass den Studierenden überhaupt bewusst war, dass diese problematisch waren. Die Änderungen wurden vorgenommen während sie versuchen, ein anderes, ihnen bewusstes, Problem zu lösen. Der nächste entscheidende Fortschritt ist, dass die Probanden den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert betrachten, wobei ihre Formulierung zunächst eine Zirkularität darstellt:

„As $n \rightarrow \infty$, at some n , a_{n+1} becomes closer to (or is) 5 such that $\lim_{n \rightarrow \infty} |5 - a_n| = 0$.“ (Oehrtman et al., 2014, S. 138)

Eine derartige Zirkularität taucht in den weiteren Versionen jedoch nicht noch einmal auf, stattdessen benutzen die beiden die Formulierung ‚unendlich nah‘:

„As $n \rightarrow \infty$ the terms of the sequence becomes infinitely closer to 5, or actually becomes 5“ (Oehrtman et al., 2014, S. 139)

Eine der Lehrpersonen fragt daraufhin nach, was sie unter der Formulierung ‚unendlich nah‘ verstehen. Ab hier diskutieren sie erst über einen ‚akzeptablen Fehler-Bereich‘. Eine der Versionen der ‚Definition‘ der Studierenden ist in dieser Phase die folgende:

„A sequence converges to 5 as $n \rightarrow \infty$ i.f.f. $\exists n$ such that for all a_n $|5 - a_n| \leq .01$ “ (Oehrtman et al., 2011, S. 330)

Darauf, was die Studierenden mit „ $\exists n$ such that for all a_n ...“ meinen könnten, wird von den Autoren nicht eingegangen. Sie stellen fest, dass hier zum einen der problematische Aspekt behoben ist, dass n zuvor fest gewählt wurde, obwohl es von der jeweiligen Folge abhängt. Zum anderen wurde hier spezifiziert, für welche Indizes die Ungleichung gelten soll. Allerdings wird die Variable n weiterhin doppelt verwendet. Außerdem wurde der ‚akzeptable Fehler-Bereich‘ fest als 0,01 gewählt, weswegen beispielsweise auch solche Folgen darunterfallen, die gegen 4,99999 konvergieren. Letzteres ist ihnen bewusst, weswegen es sich um ein ‚Problem‘ handelt. Sie ersetzen 0,01 zunächst durch 0,001 und fügen außerdem noch einmal die Bedingung hinzu, dass der Abstand aufeinanderfolgender Folgenglieder zum Grenzwert kleiner werden muss. Eines der vorliegenden Beispiele, eine oszillierende Folge, erfüllt diese Bedingung nicht. Die Studentinnen sind jedoch der Meinung, dass die betreffende Folge, sofern sie gegen 5 konvergiert, ab irgendeinem Punkt alternierend, monoton oder konstant sein muss. Den Forschern wurde hier bewusst, dass die Studierenden diese Folge, die durch einen Graphen gegeben ist, anders interpretieren als es intendiert war. Daher haben die Lehrpersonen ein zusätzliches Beispiel hinzugefügt, bei dem eindeutiger ist, dass es keinen Punkt gibt, ab dem der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert monoton fällt. Die Probanden zweifeln jedoch zunächst daran, dass das zusätzliche Beispiel tatsächlich ebenfalls gegen 5 konvergiert. Nachdem die beiden über eine Stunde lang über das Problem des festen akzeptablen Fehler-Bereichs diskutiert haben und keine Lösung in Sicht ist, schlägt eine der Lehrpersonen vor, ‚jeden Fehler‘ zu betrachten, wobei die Autoren selbst anmerken, dass die Formulierung ‚jede Fehler-Grenze‘ besser gewesen wäre. Megan und Belinda nehmen den Vorschlag sofort auf und gelangen so zu der nächsten Formulierung:

„A sequence converges to 5 as $n \rightarrow \infty$ only if there exists a value N after which $|5 - a_n|$ does not exceed every error after N and $|5 - a_{n+1}| < |5 - a_n|$ “ (Oehrtman et al., 2014, S. 141)

Ebenfalls durch eine Nachfrage einer Lehrperson ist hier auch keine doppelte Verwendung der Variablen n mehr vorhanden. Die Reihenfolge von N und ‚every error‘ korrigieren sie kurz danach. Anschließend lassen sich die Studentinnen von den Lehrpersonen davon überzeugen, dass das zusätzliche Beispiel ebenfalls gegen 5 konvergiert und die Bedingung $|5 - a_{n+1}| < |5 - a_n|$ daher aus ihrer Formulierung entfernt werden muss. Durch kleinere Präzisierungen gelangen sie schließlich zu ihrer finalen Formulierung, die der formalen Definition entspricht:

„A sequence converges to U when $\forall \epsilon > 0$ there exists some N , $\forall n \geq N$, $|U - a_n| < \epsilon$ “ (Oehrtman et al., 2014, S. 142)

Mit Unterstützung durch die anwesenden Lehrpersonen ist es Megan und Belinda also gelungen, die formale Definition nachzuerfinden. Das Forscherteam stellt die Hypothese auf, dass der Prozess der Nacherfindung selbst hilfreich für die Studentinnen war:

„The ideas developed by the students during the guided reinvention became useful to them and persistent in their reasoning to the extent that they were generated as solutions to cognitive challenges that they explicitly engaged and resolved.“ (Oehrtman et al., 2014, S. 144)

Sie begründen diese Hypothese unter anderem durch ein weiteres Experiment, dass sie sechs Monate später ebenfalls mit Megan und Belinda, jedoch jeweils einzeln, durchgeführt haben. Dort konnten die beiden Studentinnen die Definition des Grenzwerts einer Folge zwar nicht mehr sofort nennen, doch sie haben sie in wesentlich kürzerer Zeit erneut nacherfunden (Oehrtman et al., 2014, S.143). Schließlich haben Martin et al. (2011) noch über die Nacherfindung der Definition der Konvergenz von Reihen und der punktwisen Konvergenz berichtet. Auf diese soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden, da ich mich in meiner Arbeit auf die Konvergenz von Folgen beschränke.

Die Forscher sind der Meinung, dass die Studierenden die selbst erarbeiteten Ideen langfristig behalten, was sie unter anderem daran begründen, dass die erneute Nacherfindung ein halbes Jahr später wesentlich schneller geht und sie dort die gleichen Ideen einbringen. Daher bezeichnen sie die „Guided Reinvention“-Methode als eine vielversprechende Alternative zur klassischen Einführung von Begriffen.

2.5.5 Konzept von Przenioslo

Przenioslo (2005) schlägt ein Konzept für eine Unterrichtsreihe zur Einführung des Konvergenzbegriffs in der Schule vor. Es handelt sich dabei um keine empirische Studie. Diese Lücke in der Forschung soll durch meine Arbeit geschlossen werden, indem ein adaptiertes Konzept wissenschaftlich untersucht wird.

Als Ziel der Unterrichtsreihe nennt die Autorin, dass die Vorstellungen ihrer Schülerinnen und Schüler zum Grenzwertbegriff über die in der Literatur beschriebenen eingeschränkten oder fehlerhaften Vorstellungen hinausgehen sollen. Przenioslo geht zum einen davon aus, dass graphische Darstellungen das Lernen von Mathematik enorm unterstützen können und stützt sich dabei auf Untersuchungen von Arcavi (2003) und Tall (1991a), ohne genauer darauf einzugehen. Zum anderen schließt sie sich der Meinung von Bruner (1980, S. 156) und Sierpinska (2000, S. 222) an, dass die Vorstellungen, die Lernende zu einem

Begriff entwickeln, stark durch die ersten Beispiele geprägt sind, die sie zu diesem Begriff kennenlernen. Diese dienen oft als prototypische Beispiele. Daher sollte bei der Auswahl dieser ersten Beispiele viel Wert darauf gelegt werden, dass diese zwar einfach sind, aber möglichst vielfältig, um die Entwicklung eines breiten *Concept Images* (Tall und Vinner, 1981) zu ermöglichen und das Entstehen eingeschränkter Vorstellungen zu vermeiden (Przenioslo, 2005, S. 75). Des Weiteren schließt sich die Autorin insofern dem Konstruktivismus (Dubinsky, 1992; Davis et al., 1990; Piaget, 1973, 1977; Steffe und Gale, 1995) an, dass sie der Meinung ist, dass Lernende sich aktiv mit Konzepten beschäftigen müssen, um diese verstehen zu können. Sie weicht allerdings laut eigener Aussage auch von der konstruktivistischen Sichtweise ab, da sie sozialen Interaktionen eine hohe Bedeutung im Lernprozess zuschreibt, insbesondere hebt sie dabei die Rolle der Lehrperson hervor. Auf diesen Annahmen basiert das Konzept der Unterrichtsreihe zur Einführung des Konvergenzbegriffs. Vor Beginn dieser Unterrichtsreihe sollten die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff verstanden haben und sie sollten Folgen als spezielle Funktionen auffassen. Außerdem sollten sie bereits die Begriffe Teilfolge und Umgebung kennengelernt haben. Die Unterrichtsreihe beginnt dann damit, dass die Lehrperson die folgende Aufgabe präsentiert:

„What common property not shared by the sequence (b_n) , do the infinite sequences (a_n) mentioned below have?

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{if } n \text{ is a multiple of } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{for other natural numbers} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{for } n = 1,000,000 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{for } n \neq 1,000,000 \end{cases} \quad (1)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } 1,000,000 \leq n < 10,000,000 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{for other natural numbers} \end{cases} \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad (3)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } n < 329,587 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{for } n \geq 329,587 \end{cases} \quad (4)$$

$$a_n = 1 \quad (5)$$

$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{for } n \leq 125 \\ 1 & \text{for } n > 125 \end{cases} \quad (6)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } n < 10,000 \\ 1 & \text{for } n \geq 10,000 \end{cases} \quad (7)$$

$$a_n = \begin{cases} -3 & \text{for } 200,000 \leq n \leq 500,000 \\ 1 & \text{for other natural numbers} \end{cases} \quad (8)$$

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (9)$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is a multiple of } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{for other natural numbers} \end{cases} \quad (10)$$

$$a_n = \begin{cases} p & \text{for } n < 10 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{for } n \geq 10 \end{cases} \quad (11)$$

where p is an arbitrary real number“ (Przenioslo, 2005, S. 76f.).

Die Auswahl der einzelnen Folgen hat Przenioslo ausführlich begründet. Wie zuvor bereits erwähnt hält die Autorin es für wichtig, dass die ersten Beispiele, welche die Schülerinnen und Schüler zu dem Begriff der Konvergenz kennenlernen, möglichst vielfältig sind. Daher hat sie nicht nur Folgen ausgewählt, die durch einen einzigen Term definiert sind, sondern auch solche, die durch mehrere Terme definiert sind. Davon abgesehen hat sie gezielt Folgen benutzt, die laut der mathematischen Definition gegen 1 konvergieren, jedoch nicht zu den in Abschnitt 2.4 genannten typischen eingeschränkten Vorstellungen zum Konvergenzbegriff passen. Um der Fehlvorstellung, der Grenzwert dürfe nicht erreicht werden, entgegen zu wirken, hat Przenioslo die Folgen 5, 6, 7, 8 und 10 ausgewählt, die ihren Grenzwert zwischendurch, ab irgendeinem Index n_0 oder für jeden Index annehmen. Auch die Fehlvorstellung, konvergente Folgen seien immer monoton, wurde bei der Auswahl der Folgen berücksichtigt. Nur bei einzelnen Beispielen handelt es sich um monotone Folgen und die Folgen 9 und 10 sind nicht einmal ab irgendeinem Index n_0 monoton. Des Weiteren hat die Autorin Folgen gewählt, bei denen sich ein oder mehrere endlich viele Folgenglieder anders verhalten als die übrigen, und zwar die Folgen 1, 2, 4, 6, 7, 8 und 11. Dadurch soll den Schülerinnen und Schülern bewusst werden, dass die Eigenschaft der Konvergenz vom Verhalten der ersten Folgenglieder unabhängig ist und dabei wurden bewusst auch Folgen benutzt, bei denen sich das Verhalten der Folgenglieder erst ab einem sehr großen Index verändert, wie beispielsweise bei der Folge 4, bei der die ersten 329586 Folgenglieder durch einen Term definiert sind und alle weiteren Folgenglieder durch einen anderen Term. Auch der Wahl der Folge (b_n) hat die Autorin große Beachtung geschenkt. Sie hat sich bewusst dafür entschieden, eine Folge auszuwählen, die einigen der konvergenten Folgen sehr ähnlich ist. Dadurch, dass 1 ein Häufungspunkt von (b_n) ist, wird der eingeschränkten Vorstellung entgegengewirkt, eine Folge konvergiere, wenn sich in jeder beliebigen Umgebung um den potenziellen Grenzwert unendlich viele Folgenglieder befinden (Przenioslo, 2005, S. 77f.).

In der Unterrichtssequenz soll diese Aufgabe den Schülerinnen und Schülern präsentiert und in Form einer Diskussion der gesamten Klasse, die von der Lehrkraft geleitet wird, bearbeitet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst damit beginnen, graphische Darstellungen zu den einzelnen Folgen zu erstellen. Przenioslo ist der Ansicht, dass das Anfertigen der Graphen bereits zu ersten Erkenntnissen in Bezug auf die gesuchte

Eigenschaft führen kann. So könnte bereits entdeckt werden, dass bei den Folgen (a_n) die Folgenglieder ab einem bestimmten Index ein gewisses Verhalten aufweisen, was bei der Folge (b_n) nicht der Fall ist (Przenioslo, 2005, S. 78).

Ergänzend zu der beschriebenen Hauptaufgabe hat Przenioslo vier zusätzliche Aufgaben entwickelt. Es handelt sich dabei um Diskussionen vier fiktiver Personen zu der genannten Aufgabe, in die jeweils Aufforderungen enthalten sind, die Äußerungen der fiktiven Personen zu erklären oder zu bewerten. Diese ergänzenden Aufgaben können von der Lehrkraft je nach Bedarf eingesetzt werden, um die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf wichtige Aspekte zu lenken, sofern diese in der Diskussion nicht vorgekommen sind. Die Aussagen der fiktiven Personen sind laut Przenioslo authentisch, da sie aus tatsächlich durchgeführten Diskussionen zu der Aufgabe stammen. Einen weiteren Nutzen der ergänzenden Aufgaben sieht die Autorin darin, dass Lehrpersonen, welche die Unterrichtssequenz durchführen möchten, sich damit auf die Diskussion vorbereiten können, um zu wissen, was für Aussagen die Schülerinnen und Schüler nennen könnten (Przenioslo, 2005, S. 79).

Die Autorin geht davon aus, dass die Erarbeitung der Definition in drei Phasen erfolgt. Sie geht nicht darauf ein, wie sie diese Phasen herausgearbeitet hat. In der ersten dieser Phasen klassifizieren die Lernenden ihrer Erfahrung nach typischerweise die elf Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zunächst in drei Gruppen: Folgen, deren Glieder ab einem bestimmten n der 1 immer näher kommen ohne 1 zu erreichen; Folgen, die ab einem bestimmten n konstant 1 sind und Folgen, die Teilfolgen beider zuvor genannter Typen besitzen. Dass eine häufige eingeschränkte Vorstellung, konvergente Folgen seien immer monoton, hier eine der Klassen von Folgen bildet, ist der Autorin bewusst, aber sie sieht das nicht kritisch, solange dieser Aspekt später explizit thematisiert wird. Przenioslo erwartet, dass die gemeinsame Eigenschaft in dieser Phase zunächst in folgender Art beschrieben wird:

„starting from a certain n , something happens to their terms, namely, starting from this n , all the successive values are less and less different from 1 but they do not reach 1, or they are equal to 1, or (a_n) consists of subsequences of the two previous types.“ (Przenioslo, 2005, S. 87)

Für diese Phase hat sie zwei fiktive Diskussionen vorgesehen. In einer dieser beiden Diskussionen klassifizieren die fiktiven Charaktere die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in genau die gerade beschriebenen drei Gruppen von Folgen. Außerdem gehen sie auch darauf ein, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in keine der drei Gruppen gehört. Die Schülerinnen und Schüler sollen beim Durcharbeiten der Diskussion an verschiedenen Stellen dazu aufgefordert werden, das „bestimmte n “ für die einzelnen Folgen zu bestimmen, zu den Aussagen Stellung zu nehmen oder diese in eigenen Worten zu formulieren. In der zweiten Diskussion, die Przenioslo für diese Phase empfiehlt, versuchen die Charaktere, „annähern“ in Bezug auf die Folgen, die 1 nicht erreichen, präziser zu formulieren. Das Ergebnis der fiktiven Charaktere ist, dass die Differenz zwischen den Folgengliedern und 1 beliebig klein wird, aber nie Null. Laut der Autorin ist dieser Schritt wichtig, damit den Lernenden bewusst wird, dass die Folgenglieder der 1 nicht nur immer näher kommen, sondern beliebig nah. Auch bei dieser Diskussion werden die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, zwischendurch das Gelesene zu reflektieren und in eigenen Worten wiederzugeben. In der zweiten der drei Phasen liegt der Hauptfokus darauf, dass die drei Klassen, in welche die Folgen in der vorherigen Phase unterteilt wurden, zusammengefasst und durch eine einzige Bedingung

beschrieben werden sollen. Dies soll mithilfe des Begriffs des $(\epsilon-)$ Streifens gelingen. Falls sie nicht alleine auf diese Idee kommen, kann die dritte fiktive Diskussion sie dabei unterstützen. Die Idee der Streifen, die um die Gerade $y = 1$ gezeichnet werden, wird in der Diskussion direkt zu Beginn vorgegeben. Es folgt die Entdeckung, dass für einen vorgegebenen Streifen die Folgen aller drei Typen die Bedingung erfüllen, dass ein n_0 gefunden werden kann, so dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ innerhalb des Streifens liegen. Im weiteren Verlauf diskutieren die fiktiven Charaktere darüber, wie viele Streifen betrachtet werden müssen. Sie entdecken, dass sie Streifen, deren Breite beliebig ist, miteinbeziehen müssen. Auch bei dieser Diskussion sollen die Schülerinnen und Schüler aktiv mitdenken, was durch verschiedene Fragen und Aufforderungen erreicht werden soll. In der dritten und letzten Phase sollen die Schülerinnen und Schüler die Vorstellungen, die sie in der zweiten Phase mithilfe der $(\epsilon-)$ Streifen entwickelt haben, mit dem Begriff der Umgebung zu formulieren. Dazu kann bei Bedarf die vierte fiktive Diskussion eingesetzt werden. In dieser werden die Schülerinnen und Schüler nicht nur in Richtung der genannten Formulierung gelenkt, es wird außerdem auch thematisiert, dass es zu einer vorgegebenen ϵ -Umgebung nicht ein eindeutiges n_0 gibt, ab dem alle weiteren Folgenglieder innerhalb dieser Umgebung liegen, sondern dass, sobald ein n_0 gefunden wurde, die Bedingung auch für jede größere Zahl erfüllt ist. Auch könne im Zusammenhang mit dieser Diskussion laut der Autorin darauf eingegangen werden, was die Formulierung „fast alle“ bedeute (Przenioslo, 2005, S. 80ff.).

Im Anschluss an die Erarbeitung der Definition durch die Schülerinnen und Schüler sollte der Name und die Schreibweise für die erarbeitete „gemeinsame Eigenschaft“ eingeführt werden. Des Weiteren sollten zusätzliche Beispiele behandelt werden, insbesondere auch noch einmal solche Beispiele, die auf bekannte Fehlvorstellungen abzielen. Das einzige konkrete Beispiel, dass die Autorin an dieser Stelle nennt, ist die Folge, die durch $a_n = 1 + \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$ definiert ist und die ab keinem Index monoton ist. Diese Eigenschaft besitzen zwar auch die Folgen 9 und 10, doch Przenioslo hält es für sinnvoll, die Tatsache, dass eine konvergente Folge ab keinem Index monoton sein muss, an einem weiteren Beispiel aufzuzeigen. Anschließend sollte der Begriff der „Konvergenz gegen 1“ verallgemeinert werden zur Konvergenz gegen einen beliebigen Grenzwert. An dieser Stelle könne auch noch einmal die Folge (b_n) behandelt werden. Die Autorin schlägt vor, mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren, ob diese Folge denn zwar nicht gegen 1, aber vielleicht gegen einen anderen Grenzwert konvergiere. Weiter sollten Eigenschaften wie die Eindeutigkeit des Grenzwerts thematisiert werden und es könnte erörtert werden, wie die Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert durch Anwenden der formalen Definition nachgewiesen werden kann (Przenioslo, 2005, S. 88f.).

Die Autorin hat diese Unterrichtsreihe laut eigener Aussage mehrmals durchgeführt, aber nicht durch eine wissenschaftliche Studie begleitet. Den Erfolg der Unterrichtsreihe empirisch nachzuweisen, sei nicht ihr Ziel gewesen. Auf Erfahrungen mit der Durchführung der Unterrichtsreihe geht sie nur in Bezug auf die benötigte Zeit für die einzelnen Elemente ein. Ihrer Meinung nach handelt es sich dennoch um eine effektive Methode, um ein tiefes Verständnis des Konvergenzbegriffs zu fördern. Auch hält sie einen Einsatz der Unterrichtsreihe zu einem Zeitpunkt, zu dem die Lernenden den Konvergenzbegriff bereits kennengelernt haben, für möglich, um eingeschränkte oder fehlerhafte Vorstellungen zu korrigieren und das Verständnis zu vertiefen (Przenioslo, 2005, S. 89ff.).

2.5.6 Zusammenfassung der Konzepte in Bezug auf den zu entwickelnden Workshop

Sowohl bei dem Konzept von Przenioslo (2005) als auch bei dem der Forschergruppe um Oehrtman, Swinyard und Martin (Oehrtman et al., 2011, 2014; Martin et al., 2012) sollen die Lernenden unter Anleitung die Definition des Grenzwerts nacherfinden. Die Forschergruppe bettet ihr Konzept theoretisch in die RME (siehe Abschnitt 3.3) ein und begleitet die Durchführung im Gegensatz zu Przenioslo durch eine Forschungsstudie. Bei dem reinen Unterrichtskonzept ist ein zentraler Unterschied zu dem von Przenioslo, dass bei Oehrtman und Kollegen als Ausgangspunkt Beispiele von konvergenten Folgen verwendet wurden, welche die Studierenden vorgeschlagen haben. Przenioslo hingegen hat der Auswahl der Beispielfolgen eine große Bedeutung zugesprochen und diese daher sorgfältig selbst ausgewählt. Diese Beispiele sollten ihrer Meinung nach möglichst vielfältig sein, sie sollten aber auch typischen eingeschränkten Vorstellungen zum Konvergenzbegriff entgegenwirken. Werden die Beispiele von den Studierenden vorgeschlagen, so ist dies nicht gewährleistet. Wären unter den Ausgangsbeispielen lediglich typische konvergente Folgen, also (streng) monotone Folgen, die den Grenzwert nicht annehmen, so könnte dieses Ziel nicht direkt erreicht werden. Möglicherweise hat die Forschergruppe ebenfalls darauf geachtet, dass die Beispiele und Nicht-Beispiele möglichst vielfältig sind, sie gehen in ihren Veröffentlichungen jedoch nicht darauf ein und die Auswahl der Folgen scheint bei ihnen kein wesentlicher Teil des Konzepts zu sein. Wird die Menge der Beispiele betrachtet, mit denen die beiden Probandinnen Megan und Belinda (Oehrtman et al., 2011, 2014) arbeiten, so fällt auf, dass lediglich zwei Folgen dabei sind, die den Grenzwert annehmen. Die eine dieser beiden Folgen ist eine konstante Folge, bei der anderen Folge entspricht nur das Folgenglied mit dem Index 1 exakt dem Grenzwert. Schließlich konstante Folgen oder auch Folgen, die den Grenzwert für unendlich viele, aber nicht alle Indizes annehmen, kommen hier nicht vor.

Außerdem wird ausschließlich mit den graphischen Darstellungen der Folgen gearbeitet, in denen auch nur die ersten 20 Folgenglieder abgebildet sind. Somit sind auch keine Folgen vorhanden, deren Verhalten sich ab einem ‚großen‘ n verändert. Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass das Konzept der Gruppe um Oehrtman, Swinyard und Martin zwar durch die theoretische Einbettung und die wissenschaftliche Studie deutlich fundierter ist, die Auswahl der (Nicht-)Beispielfolgen hat Przenioslo hingegen sorgfältig vorgenommen und überzeugend begründet.

Daher übernehme ich für den Workshop, der in Abschnitt 4 präsentiert wird, das Konzept inklusive der Beispielfolgen und des Nicht-Beispiels im Wesentlichen von Przenioslo (2005) und begleite es durch eine wissenschaftliche Studie. Einzelne Veränderungen werden bei der Darstellung des Workshops begründet dargelegt. Przenioslo (2005) hat außerdem zusätzliche Aufgaben in Form von fiktiven Diskussionen vorgeschlagen, die bei Bedarf zur Unterstützung der Studierenden eingesetzt werden können. Auch diese werden – leicht angepasst – von mir übernommen. Die Autorin hat dabei allerdings nicht herausgearbeitet, in welchen genauen Situationen ein Einsatz dieser fiktiven Diskussionen jeweils sinnvoll sein kann, sondern nur grob in welcher Phase des Erkenntnisprozesses. Dies werde ich in Abschnitt 4.2.4 genauer herausarbeiten. Auch werden diese um weitere Interventionen ergänzt. Bei Przenioslo (2005) arbeiten die Lernenden mit Graphen der Folgen und werden beispielsweise durch die zusätzlichen Aufgaben dazu aufgefordert, „Streifen“ verschiedener

Breite symmetrisch um die Gerade, die den Grenzwert symbolisiert, zu zeichnen. Ich werde zusätzlich den Einsatz von ϵ -Streifen wie von Roh (2005) vorgeschlagen als Intervention aufnehmen. Die Autorin hat in verschiedenen Studien gezeigt, dass die Beschäftigung mit diesen ϵ -Streifen die Studierenden beim Verständnis des Konvergenzbegriffs unterstützen kann. Die Ergebnisse der Studien der Forschergruppe um Oehrtman, Swinyard und Martin sollen zum einen genutzt werden, um im Vorfeld hypothetische Erkenntnisverläufe der Studierenden bei der Nacherfindung der Definition antizipieren zu können. Bei der späteren Analyse der Erkenntnisverläufe soll außerdem die Unterscheidung von ‚Problems‘ und ‚Problematic Issues‘ verwendet werden.

3 Forschungsfragen und Anlage der Studie

In Abschnitt 3.1 sollen die im Abschnitt 1.3 formulierten Ziele zu Forschungsfragen präzisiert werden. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 zunächst der Forschungsansatz des Design-Based Research vorgestellt, da dieser die Struktur der Studien begründet. In Abschnitt 3.3 wird die Theorie der Realistic Mathematics Education und die dazugehörige Heuristik der Guided Reinvention vorgestellt, in der das Workshop-Konzept, das entwickelt werden soll, teilweise angesiedelt ist. Auf die Anlage der Studie wird im Anschluss daran im Abschnitt 3.4 eingegangen.

3.1 Forschungsfragen

Eines der in Abschnitt 1.3 formulierten Ziele ist die Untersuchung von Vorstellungen und Kompetenzen der Studierenden einer Analysis-1-Vorlesung zu Folgenkonvergenz und dazu verwandten Begriffen.

Die Forschungsfrage, die in Abschnitt 5.3.1 durch mehrere Unterfragen konkretisiert wird, lautet:

1. Welche Vorstellungen zum Konvergenzbegriff weisen die Studierenden nach der Behandlung des Themas auf und über welche Kenntnisse zur Folgenkonvergenz verfügen sie?

Um diese Frage beantworten zu können bedarf es eines Testinstruments, mit dem solche Kenntnisse und Vorstellungen erhoben werden können.

Es ist davon auszugehen, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger bereits Vorverständnisse zum Grenzwertbegriff und Kenntnisse zu verwandten Themen wie Funktionen, Folgen, Unendlichkeit oder Lösen von (Un-)Gleichungen mit Brüchen und Beträgen haben. Daraus ergibt sich die Frage, wie sehr dieses Vorwissen die Vorstellungen und Kenntnisse, welche die Studierenden nach der Behandlung des Themas zum Konvergenzbegriff aufweisen, beeinflusst. Dazu muss ein weiteres Testinstrument entwickelt werden, das in Bezug auf den Konvergenzbegriff relevantes Vorwissen abfragt.

Damit kann die folgende Forschungsfrage untersucht werden:

2. Wie groß ist der Zusammenhang zwischen den Vorstellungen und Kenntnissen der Studierenden zum Konvergenzbegriff nach der Behandlung des Themas in der Vorlesung und dem Vorwissen zu Folgenkonvergenz und verwandten Themengebieten vor der Behandlung in der Universität?

Ein weiteres Ziel besteht in der Entwicklung eines theoretisch fundierten Konzepts für einen Workshop, in dem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Definition der Folgenkonvergenz basierend auf vorgegebenen Beispielen und einem Nicht-Beispiel nacherfinden. Dazu soll aus den in Abschnitt 2.5 vorgestellten Konzepten für Interventionen zum Konvergenzbegriff eine erste Version eines Workshop-Konzepts erarbeitet werden, die anschließend erprobt, analysiert und optimiert werden soll. Daraus entsteht die folgende Forschungsfrage:

3. Wie verlaufen die Erkenntnisprozesse bei der angeleiteten Nacherfindung der Definition der Konvergenz einer Folge basierend auf einer vorgegebenen Menge von (Nicht-)Beispielfolgen und gegebenenfalls eingesetzten Interventionen? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das Re-Design des Workshops?

Außerdem sollen die Testinstrumente genutzt werden, um die Vorstellungen und Kenntnisse der Studierenden, die am Workshop teilnehmen, mit den übrigen Studierenden aus der „Analysis 1“ zu vergleichen.

4. Lässt sich unter Berücksichtigung des Vorwissens ein Unterschied zwischen den Kenntnissen und Vorstellungen der Workshopteilnehmenden und der übrigen Studierenden der „Analysis 1“ nach Behandlung des Themas in der Vorlesung feststellen?

Für die Beantwortung dieser Forschungsfragen wird ein Forschungsansatz benötigt, der zum einen das Design eines Workshop-Konzepts und zum anderen aber auch die Analyse von Erkenntnisprozessen während des Workshops ermöglicht. Diese Anforderungen erfüllt der Design-Based-Research-Ansatz, der nun vorgestellt wird.

3.2 Design-Based Research

Design-Based Research wird von verschiedenen Autorinnen und Autoren auch als Design Research oder Design Experiment bezeichnet. Es handelt sich um einen Forschungsansatz, bei dem Theorie und Praxis eng miteinander verbunden sind. Bakker und van Erde (2015, S. 430) charakterisieren diesen wie folgt:

„Educational design-based research (DBR) can be characterized as research in which the design of educational materials (e.g., computer tools, learning activities, or a professional development program) is a crucial part of the research. That is, the design of learning environments is interwoven with the testing or developing of theory.“

Die Entstehung dieses Ansatzes ist zurückzuführen auf die Arbeiten von Brown (1992) und Collins (1992). Letzterer hatte zwar den Fokus auf Innovationen im Zusammenhang mit neuen Technologien gelegt, aber der Forschungsansatz lässt sich auch auf andere Interventionen anwenden. Das Ziel beschreibt er wie folgt:

„Our goal then will be to construct a more systematic methodology for conducting design experiments, and ultimately to develop a design theory to guide implementation of future innovations.“ (Collins, 1992, S. 16).

Die Arbeiten von Brown (1992) und Collins (1992) haben gemeinsam, dass sie nicht mathematikspezifisch sind. Letzterer räumt außerdem selbst ein, dass es sich um erste Ansätze einer Methode handle, die noch weiterer Überarbeitung bedarf. Daher beziehe ich mich hauptsächlich auf spätere Artikel von Gravemeijer und Cobb (2006) und Bakker und van Erde (2015).

Forschungsstudien im Sinne des Design-Based Research verfolgen den Autoren nach zwei Ziele: Zum einen sollen Konzepte entwickelt werden, die in der Praxis eingesetzt werden können, zum anderen soll Theorie (weiter-)entwickelt werden, wie und unter welchen Bedingung ein bestimmtes Thema gelernt wird. Der Forschungsprozess selbst läuft in drei Phasen ab. In der ersten Phase muss das Experiment vorbereitet werden. Dazu gehört, dass basierend auf vorhandener Literatur und, falls nötig, auf eigenen Untersuchungen, festgestellt wird, welches Vorwissen die Lernenden mitbringen bevor die Intervention beginnt. Dies wird als „*Starting points*“ (Gravemeijer und Cobb, 2006, S. 48) bezeichnet. Ebenfalls expliziert werden sollen die sogenannten „*End points*“ (Gravemeijer und Cobb, 2006, S. 47), die Lernziele der Intervention. Des Weiteren gehört das Design der Aktivitäten des Experiments in diese Phase. Außerdem sollen auf Basis verschiedenster Literatur Vermutungen über den Lernprozess und mögliche Mittel, die diesen Lernprozess unterstützen können, aufgestellt werden. All das bildet zusammen eine erste Version einer „*Hypothetical Learning Trajectory*“ (Bakker und van Erde, 2015, S. 439), die im Laufe des Forschungsprozesses weiterentwickelt werden soll. Bakker und van Erde (2015, S. 439) fassen zusammen, was alles zu dieser *Hypothetical Learning Trajectory* gehört:

„An elaborated HLT thus includes mathematical learning goals, students’ starting points with information on relevant pre-knowledge, mathematical problems and assumptions about students’ potential learning processes and about how the teacher could support these processes.“

In der zweiten Phase wird die Intervention durchgeführt. Gravemeijer und Cobb (2006) betonen, dass das Ziel einer Forschungsstudie im Sinne des Design-Based Research mehr umfasst, als zu zeigen, ob eine bestimmte Intervention erfolgreich ist. Vielmehr soll die zuvor aufgestellte Theorie sowohl überprüft als auch verbessert werden. Die Intervention selbst kann sich über einen kürzeren oder längeren Zeitraum erstrecken. Sowohl während der einzelnen Unterrichtseinheiten als auch rückblickend wird der Lernprozess der Teilnehmerinnen und Teilnehmer analysiert, die aufgestellte Theorie überarbeitet und gegebenenfalls wird das Konzept für die nachfolgenden Unterrichtseinheiten angepasst. Solche Analysen während der Phase der Durchführung der Intervention bezeichnen Bakker und van Erde (2015, S. 439) als „*Analysis on the fly*“. Gravemeijer und Cobb (2006) weisen jedoch auch darauf hin, dass aus Zeitgründen in dieser Phase oftmals keine systematischen Analysen möglich sind und daher manche Entscheidungen eher pragmatisch getroffen werden müssen. In der dritten Phase findet eine retrospektive Analyse statt, wobei der Begriff hervorheben soll, dass diese Analyse im Gegensatz zu der vorherigen erst nach der Durchführung der gesamten Intervention erfolgt. Dabei wird das durchgeführte Experiment in seiner Gesamtheit systematisch analysiert. Ziel ist wieder die Überarbeitung der aufgestellten Theorie über den Lernprozess und die Mittel, die diesen unterstützen können. Möglicherweise schließt an diese Phase eine erneute Durchführung und damit verbundene Analyse der Intervention und Weiterentwicklung der Theorie an. Insgesamt

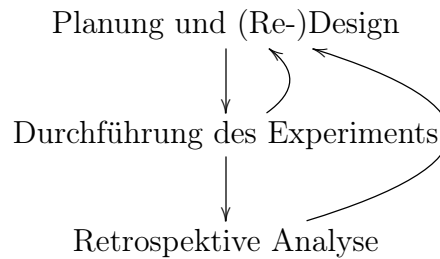


Abbildung 3.1: Zyklischer Prozess der Phasen einer DBR-Studie

handelt es sich also um einen zyklischen Prozess aus (Re-)Design und Analyse, wobei die aufgestellte Theorie das Design beeinflusst und die Ergebnisse der Analysen wiederum die aufgestellte Theorie und somit auch das Re-Design der Intervention. Dieser zyklische Prozess ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

Die Vorteile dieses Forschungsansatzes sehen die Forscher aus der Gruppe „*The Design-Based Research Collective*“ darin, dass durch die enge Verknüpfung von Theorie und Praxis die Ergebnisse auch tatsächlich angewendet werden können und nicht als bloße Theorien fern von jeglicher Praxis enden. Es solle sogenanntes anwendbares Wissen entwickelt werden. Außerdem können bestimmte Phänomene nicht ohne Intervention untersucht werden, da sie in normalen Lernsituationen ohne Intervention gar nicht vorkommen. Die Intervention im Rahmen einer Design-Based-Research-Studie findet üblicherweise jedoch nicht in einer Laborsituation statt, sondern in der gewöhnlichen Lernumgebung wie beispielsweise dem Klassenzimmer. Welche Methoden für die Analysen innerhalb des Zyklus benutzt werden, ist nicht festgelegt. Es ist üblich, verschiedene Analysemethoden zu kombinieren. Daher sprechen einige Autorinnen und Autoren auch nicht von Design-Based Research als einem einzigen Ansatz, sondern von Design-Based-Research-Methoden. In jedem Fall sollten die Analysen jedoch von den Forschungsfragen und der *Hypothetical Learning Trajectory* geleitet werden. Eine Möglichkeit, die sich dafür besonders anbietet, ist der Vergleich der hypothetischen Lernprozesse mit den tatsächlich beobachteten Lernprozessen.

Der Design-Based-Research-Ansatz eignet sich sehr gut für die Ziele und Forschungsfragen dieser Arbeit. Er verbindet das Design einer Lernumgebung mit der Untersuchung theoretischer Fragen.

3.3 Realistic Mathematics Education und Guided Reinvention

In dem zu entwickelnden Workshop sollen die Studierenden basierend auf vorgegebenen (Nicht-)Beispielen konvergenter Folgen die Definition der Folgenkonvergenz unter Anleitung nacherfinden. Zu einer solchen angeleiteten Nacherfindung gibt es eine Heuristik innerhalb der Theorie der Realistic Mathematics Education, die nun vorgestellt wird.

Die Theorie der Realistic Mathematics Education (RME) ist in den 1970er Jahren in den Niederlanden entstanden und seitdem weiterentwickelt worden. Diese ist heute auch

mit dem Forschungsansatz des Design-Based Research verknüpft. Wie der Name bereits sagt, handelt es sich um eine mathematikspezifische Theorie. Diese soll dazu dienen, das Lernen und Lehren von Mathematik zu erklären, anzuleiten und Material zum Mathematiklernen in jeglicher Form zu entwickeln. Wichtige Beiträge lieferte Freudenthal (1973). Er hat in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik zwischen vorgefertigter („*ready-made*“) und ausgeführter („*acted-out*“) Mathematik unterschieden. Unter vorgefertigter Mathematik versteht er Mathematik, die als deduktives System präsentiert wird. Die Lernenden werden dabei nicht daran teilhaben gelassen, wie beispielsweise ein mathematisches Konzept oder ein Theorem historisch entwickelt wurde, sondern es wird direkt mit der „fertigen“ Definition beziehungsweise Aussage begonnen. Mit ausgeführter Mathematik bezeichnet Freudenthal hingegen das aktive Betreiben von Mathematik und das eigenständige Konstruieren von Wissen (Freudenthal, 1973, S. 114ff.). Er ist der Meinung, dass letzteres nötig sei, um flexibles, übertragbares Wissen aufzubauen. Treffers (1987) formulierte ursprünglich fünf zentrale Prinzipien der RME, diese wurden mittlerweile umformuliert und ergänzt. Van den Heuvel-Panhuizen und Drijvers (2014, S. 522f.) nennen die folgenden sechs Prinzipien für das Lehren und Lernen von Mathematik im Sinne der RME:

- Aktivitätsprinzip: Die Lernenden haben eine aktive Rolle im Lernprozess, sie lernen Mathematik, indem sie sie betreiben.
- Realitätsprinzip: Zum einen fällt hierunter das Ziel der Mathematikausbildung, dass die Lernenden diese anwenden können, um reale Probleme zu lösen. Zum anderen gehört dazu auch, dass im Mathematikunterricht von sinnstiftenden Problemen ausgegangen werden sollte, die es den Lernenden ermöglichen, die dabei verwendeten mathematischen Konstrukte und Verfahren als bedeutungsvoll zu erfahren.
- Stufenprinzip: Das Lernen von Mathematik erfolgt in Stufen. Lernende beginnen auf einer informellen, kontext-behafteten Stufe, sollen sich dann vom Kontext lösen, verallgemeinern und gelangen so zu einer formaleren Mathematik.
- Verzahnungsprinzip: Sowohl innerhalb eines Themengebiets als auch zwischen verschiedenen Themengebieten sollten die einzelnen Inhalte nicht vollkommen isoliert voneinander betrachtet werden, sondern es sollte eine Verzahnung angestrebt werden.
- Interaktivitätsprinzip: Interaktion kann zu einem tieferen Verständnis führen, daher sollte im Unterricht in verschiedenen Sozialformen gearbeitet werden.
- Anleitungsprinzip: Die Lehrperson hat eine proaktive Rolle.

Bakker (2004) hebt als zentrale Eigenschaft das Realitätsprinzip hervor, das sich auch im Namen der Theorie wiederfindet:

„The central principle of RME is that mathematics should always be meaningful for students.“ (Bakker, 2004, S. 5)

Forschungen, die auf dieser Theorie basieren, beschäftigen sich meist damit, sinnstiftende Aufgaben zu entwickeln, die es ermöglichen, dass die Lernenden die mathematischen Inhalte und Verfahren, die sie zum Lösen dieser Aufgaben verwenden, als bedeutsam erleben. Gravemeijer et al. (2000, S. 239ff.) geben dazu drei Heuristiken an:

- Reinvention principle/Guided reinvention
- Didactical phenomenology
- Emergent models

Diese Heuristiken werden nun im Einzelnen erläutert. Bei dem „Reinvention principle“ (oder auch „Guided reinvention“) sollen Lernumgebungen derart entwickelt werden, dass den Lernenden keine vorgefertigte Mathematik präsentiert wird, sondern sie diese selbst entwickeln beziehungsweise nacherfinden. Dieser Nacherfindungsprozess kann an der jeweiligen historischen Entwicklung orientiert sein, er kann aber auch von informellen Lösungen oder Konzepten der Lernenden ausgehen:

„ ... to design, the developer takes both the history of mathematics and students' informal interpretations as sources of inspiration and tries to formulate a tentative, potentially revisable learning trajectory along which collective reinvention (as a process of progressive mathematization) might be supported.“
(Gravemeijer et al., 2000, S. 239)

Zentral dabei ist die *Learning Trajectory*, in der die Lernumgebung inklusive Kenntnisstand der Lernenden zu Beginn, Lernzielen, Aktivitäten und möglichen Unterstützungen formuliert wird. Dies wurde bereits in Abschnitt 3.2 erläutert. Der Begriff „Guided reinvention“ wurde bereits von Freudenthal (1973) verwendet. Dieser betont, dass er diese Art des Lehrens und Lernens nicht wegen des Nacherfindens an sich befürworte, sondern wegen der Lernprozesse, die dabei ermöglicht werden. Auch das Ausgehen von informellem Wissen und Weiterentwickeln dieses Wissens wird als Vorteil der Methode angesehen:

„ ... guided reinvention offers a way out of the generally perceived dilemma of how to bridge the gap between informal knowledge and formal mathematics.“
(Gravemeijer und Doorman, 1999, S. 112)

Die Autoren begründen dies damit, dass bei diesem Ansatz die kontextbezogenen Probleme, das Symbolisieren und Verallgemeinern miteinander verzahnt seien. Als weiteren Vorteil der Methode ergänzen Zandieh und Rasmussen (2010), dass das Entwickeln einer Definition auch Metawissen über Definitionen fördern könne:

„ ... engaging students in the defining process can provide opportunities for students to appreciate the arbitrariness of definitions and to make explicit characteristics of „good“ and/or useful definitions“ (Zandieh und Rasmussen, 2010, S. 59)

Die zweite Heuristik, „Didactical phenomenology“, kann genutzt werden, um Problemsituationen zu entwickeln, die als Ausgangspunkt für einen solchen Nacherfindungsprozess dienen können. Oft sind formale mathematische Konzepte dadurch entstanden, dass bestimmte Phänomene zusammengefasst, beschrieben und präzisiert wurden. Solche Phänomene können daher den Lernenden präsentiert werden um so die Nacherfindung des entsprechenden mathematischen Konzepts zu initiieren (Gravemeijer et al., 2000, S.240).

Zur Heuristik „Emergent models“ schlagen Gravemeijer et al. (2000, S. 243) vor, zunächst Aufgabenstellungen bearbeiten zu lassen, deren Beantwortung vollkommen im Kontext

möglich ist und über mehrere Level hin zu allgemeiner, formaler Argumentation, die unabhängig vom Kontext ist, zu gelangen.

Alle drei Heuristiken sollen dazu dienen, Lernmaterialien im Sinne der Theorie der RME zu designen.

Der in dieser Arbeit zu entwickelnde Workshop lässt sich der Heuristik der „Guided Reinvention“ zuordnen, da die Studierenden die Definition der Konvergenz nacherfinden sollen. Dennoch ordne ich den Workshop nicht vollständig in die Theorie der Realistic Mathematics Education ein. Das Realitätsprinzip ist meiner Meinung nach hier nicht erfüllt, da den Studierenden keine realen Probleme präsentiert werden, die es zu lösen gilt.

3.4 Anlage der Studie

Bei dieser Studie wird nun also im Sinne des Design-Based-Research-Ansatzes vorgegangen. Zunächst wird ein Konzept für einen zweiteiligen Workshop zum Thema Folgen und Konvergenz für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Veranstaltung „Analysis 1“ entwickelt. Auf dieses Konzept wird im Abschnitt 4.2 detailliert eingegangen. Im Wintersemester 2012/2013 wurde das Workshop-Konzept erstmalig in Paderborn erprobt. Die Veranstaltung „Analysis 1“ wird an der Universität Paderborn in der Regel von Studierenden der Studiengänge Bachelor Mathematik und Bachelor Technomathematik im ersten Semester parallel zur Veranstaltung „Lineare Algebra 1“ besucht. Außerdem wird dieselbe Veranstaltung von Lehramtsstudierenden für die Schulformen Gymnasium und Gesamtschule beziehungsweise Berufskolleg im dritten Semester besucht. Diese Studierenden haben zuvor in der Regel „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“, „Lineare Algebra 1“, „Grundlagen der Geometrie“ und „Didaktik der Geometrie in den Klassen 7-10“ besucht. Für die Studierenden handelte es sich bei dem Workshop um ein freiwilliges Zusatzangebot, für das sie sich bewerben mussten. Lediglich Studierende, welche die Veranstaltung „Analysis 1“ bereits in einem vorherigen Semester besucht haben, die ich im Folgenden als Wiederholer bezeichne, konnten sich nicht für die Workshopteilnahme bewerben, da sie zum einen nicht mit den übrigen Studierenden vergleichbar sind und zum anderen das Konzept des Workshops für Studierende entwickelt wurde, welche die formale Definition der Konvergenz einer Folge noch nicht kennengelernt haben. Insgesamt haben sich 32 Studierende um einen Platz beworben, von denen ich die Hälfte als Teilnehmerinnen und Teilnehmer ausgelost habe. Der erste Teil des Workshops fand am Ende der zweiten Semesterwoche statt, der zweite Teil am Ende der neunten Semesterwoche. Beim zweiten Teil waren es aufgrund von Krankheit, Studienabbruch oder anderen Gründen nur noch elf Teilnehmerinnen und Teilnehmer.

Um die Workshops analysieren und evaluieren zu können, wurden zum einen die Workshops komplett auf Video aufgezeichnet, sämtliche Diskussionen in Kleingruppen mit Audiogeräten mitgeschnitten und die schriftlichen Bearbeitungen von Aufgaben während der Workshops eingescannt. Diese erhobenen Daten sollen retrospektiv analysiert werden. Zum anderen wurden zwei Tests eingesetzt: Ein „Vortest“ und ein „Nachtest“, die im Abschnitt 5.2 vorgestellt werden. Der „Vortest“ wurde zwei Tage vor dem ersten Workshop-Teil von allen 164 anwesenden Studierenden während der Vorlesung bearbeitet. Der „Nachtest“ wurde drei Tage nach dem zweiten Teil des Workshops während der Vorlesung von

den 124 anwesenden Studierenden geschrieben. Durch die Verwendung eines Codes waren die Tests anonym und dennoch konnten „Vor-“ und „Nachtest“ derselben Person einander zugeordnet werden. Insgesamt sind von 104 Studierenden Tests zu beiden Zeitpunkten vorhanden, darunter sind jedoch auch einige Wiederholer. Von zehn Studierenden, die an beiden Teilen des Workshops teilgenommen haben, liegen Tests zu beiden Zeitpunkten vor. Diese Studierenden werden im Folgenden als Experimentalgruppe bezeichnet. Ihre Ergebnisse im „Nachtest“ sollen mit denen der übrigen Vorlesungsteilnehmenden exklusive der Wiederholer verglichen werden. Diese Gruppe bestehend aus 72 Studierenden wird im weiteren Verlauf als große Kontrollgruppe bezeichnet. Mögliche Unterschiede in Bezug auf das Vorwissen werden durch die „Vortest“-Ergebnisse berücksichtigt. Allerdings gibt es zwischen der Experimentalgruppe und der Kontrollgruppe möglicherweise auch Unterschiede in Bezug auf die Motivation, da sich die Experimentalgruppe freiwillig für die Workshopteilnahme gemeldet hat. Daher wird zusätzlich zur großen Kontrollgruppe noch eine sogenannte kleine Kontrollgruppe betrachtet, die aus den sieben Studierenden besteht, die sich ebenfalls um einen Workshop-Platz beworben haben, jedoch nicht ausgelost wurden und von denen beide Tests vorliegen. Bei einer so kleinen Stichprobengröße sind jedoch kaum statistisch signifikante Effekte zu erwarten.

Nach der ersten Erprobung wurde das Konzept des Workshops, wie in Abschnitt 7.2 beschrieben wird, auf Basis einer ersten, eher pragmatischen Analyse der ersten Erprobung, überarbeitet und im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Kassel durchgeführt. Auch dort handelte es sich um ein freiwilliges Zusatzangebot für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Veranstaltung „Analysis 1“. Es handelt sich in der Regel um Studierende der Studiengänge Bachelor Mathematik im ersten Semester, Lehramt Gymnasium im ersten Semester, Lehramt Berufliche Schulen im siebten Semester und Bachelor Physik im ersten Semester. Die Studierenden der beiden erstgenannten Studiengänge besuchen während des ersten Semesters außerdem die Veranstaltung „Algorithmische Lineare Algebra“. Die Studierenden des Lehramts für Berufliche Schulen haben in der Regel vor dieser Veranstaltung bereits „Grundzüge Mathe“, „Grundlagen der Mathedidaktik“, „Elementargeometrie“ und ein Fachseminar zur Mathematik besucht. Parallel zur Analysis-Vorlesung belegen sie normalerweise wie die zuvor genannten Studierenden die „Algorithmische Lineare Algebra“. Die Physik-Studierenden hingegen besuchen in ihrem ersten Semester abgesehen von der „Analysis 1“ in der Regel „Experimentalphysik 1“, „Rechenmethoden der Physik“, „Allgemeine Chemie“ und einen ersten Teil eines Anfängerpraktikums. Hier durften aufgrund von niedrigen Erwartungen bezüglich der Teilnehmerzahlen abgesehen von Wiederholern alle Studierenden, die wollten, an dem Workshop teilnehmen. An dem ersten Teil, der innerhalb der vierten Woche des Semesters durchgeführt wurde, haben 12 Studierende teilgenommen. Wie erwartet waren es auch bei diesem Durchlauf beim zweiten Teil des Workshops weniger Studierende. An dem zweiten Workshop-Teil während der neunten Vorlesungswoche haben noch acht Studierende teilgenommen. Auch bei dem zweiten Durchlauf sollte der Workshop erneut analysiert und evaluiert werden. Dazu wurden wieder sämtliche schriftlichen Aufgabenbearbeitungen während der Workshops eingescannt und sowohl die kompletten Workshops als auch alle Diskussionen in Kleingruppen auf Video aufgezeichnet. Das war möglich, da der Workshop zu mehreren Terminen angeboten wurde und jeweils nur eine Kleingruppe daran teilgenommen hat.

Die systematische retrospektive Analyse der Diskussionen aus der ersten Erprobung des Workshops ist letztendlich erst nach der zweiten Durchführung geschehen. Sie wird in dieser Arbeit dennoch im Anschluss an die erste Version des Workshop-Konzepts und die quantitative Teilstudie aus demselben Jahr dargestellt. Bei der zweiten Erprobung des Konzepts werden nur gezielt Analysen durchgeführt, um die vorgenommenen Veränderungen an dem Konzept zu untersuchen. Auch wenn die Workshops im Rahmen dieses Dissertationsprojektes nicht erneut durchgeführt werden, so sollen dennoch auch aus der Analyse und Evaluierung beider Durchläufe der Workshops Konsequenzen in Bezug auf das Konzept der Workshops gezogen werden, in dem eine dritte Version der *Hypothetical Learning Trajectory* präsentiert wird. Die Ergebnisse werden schließlich in Kapitel 8 in einer lokalen Instruktionstheorie verallgemeinert.

4 *Hypothetical Learning Trajectory* – Version 1

Wie in Abschnitt 3.2 bereits erläutert wurde, gehört zu einer Forschungsstudie im Sinne des Design-Based Research das Aufstellen einer sogenannten *Hypothetical Learning Trajectory*. In dieser sollen die Vorkenntnisse der Lernenden, die Lernziele, die Aktivitäten und hypothetische Lernprozesse expliziert werden. Das wird in den folgenden Abschnitten gemacht.

4.1 Starting Points und End Points

Da der Workshop aus zwei Teilen besteht, zwischen denen ein zeitlicher Abstand von mehreren Wochen besteht, gehe ich auf das Vorwissen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer und auf die Lernziele jeweils getrennt nach Vorbereitungs- und Nachbereitungsworkshop ein.

4.1.1 Starting Points des Vorbereitungsworkshops

Als relevante Themenbereiche in Bezug auf den Konvergenzbegriff wurden im Abschnitt 2.3 die Themen Funktionen und Folgen als spezielle Funktionen, unendliche Prozesse und unendliche Mengen, das Lösen von Ungleichungen - gegebenenfalls mit Beträgen - und Aussagen mit Quantoren identifiziert. Zu diesen Themen sollte daher möglichst herausgefunden werden, über welche Vorkenntnisse die Workshopteilnehmenden verfügen. Des Weiteren ist selbstverständlich auch wichtig, welche Vorverständnisse zu Folgen und Konvergenz zu erwarten sind. Darauf wird nun eingegangen.

Alle Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer besuchen die Veranstaltung „Analysis 1“. In dieser werden bis zum Zeitpunkt des Vorbereitungsworkshops am Ende der zweiten Semesterwoche lediglich Aussagenlogik, Mengenlehre und natürliche und rationale Zahlen behandelt. Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ werden als Definition eingeführt und es gibt erste Beispiele von Aussagen, die diese enthalten. In Bezug auf mathematisches Argumentieren lernen die Studierenden die Beweismethoden des Widerspruchsbeweises, Beweis durch Kontraposition, direkter Beweis, vollständige Induktion und das Prinzip der Fallunterscheidung beispielhaft kennen. Ein erstes Übungsblatt zu den behandelten Themen wird zuvor bereits ausgegeben, muss von den Studierenden jedoch erst nach dem ersten Teil des Workshops abgegeben werden und wird daher auch erst danach besprochen werden. Die Studierenden haben also bereits Aussagen, die Formulierungen wie „es gibt“ oder „für alle“ beziehungsweise die Quantorenschreibweise enthalten, kennengelernt, haben aber möglicherweise noch nicht eigenständig Aussagen mit Quantoren formuliert. Es ist zu erwarten, dass die Studierenden ähnliche Schwierigkeiten mit Aussagen, in denen Quantoren vorkommen, haben, wie die, welche in Abschnitt 2.3.5 berichtet wurden. Ähnlich verhält es

sich mit Unendlichkeit und Ungleichungen mit Beträgen. Die in den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.6 genannten Schwierigkeiten sind auch hier zu erwarten. Folgen und Konvergenz sind in der Vorlesung noch gar nicht behandelt worden. Bei einem Teil der Workshop-teilnehmenden handelt es sich um Erstsemesterstudierende, somit kann kein Vorwissen aus anderen universitären Lehrveranstaltungen vorausgesetzt werden. Da Vorkurse nicht von allen Studierenden besucht werden, können daraus ebenfalls keine Inhalte als bekannt vorausgesetzt werden, könnten aber vorhanden sein. Daher bleibt lediglich noch das relevante Vorwissen, das in der Schule erworben wurde, zu betrachten. Dazu sollen die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife als eine Informationsquelle dienen, denn diese sollen „die wesentlichen Ziele der pädagogischen Arbeit, ausgedrückt als erwünschte Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler“ (Klime et al., 2007, S.9) benennen. Sie bilden einen Orientierungsrahmen für die schulische Arbeit auf nationaler Ebene. Zum Grenzwertbegriff heißt es in den Bildungsstandards „Die Schülerinnen und Schüler können [...] Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen“ (Kultusministerkonferenz, 2012, S. 18). Nicht klar ist, was genau unter einem propädeutischen Grenzwertbegriff zu verstehen ist. Die Deutung dieses Begriffs bleibt den Lehrkräften überlassen. Es ist jedoch davon auszugehen, dass nicht erwartet wird, dass die formale Definition des Grenzwerts in der Schule behandelt wird. Auch kann die Formulierung aus den Bildungsstandards so gedeutet werden, dass Grenzwerte nicht unbedingt als eigenständiges Thema behandelt werden müssen, sondern jeweils bei den Themen Ableitung und Integral benutzt werden. Dies würde bedeuten, dass die Schülerinnen und Schüler Grenzwerte hauptsächlich im Zusammenhang mit dem Grenzverhalten von Funktionen kennengelernt haben. Wie in Abschnitt 2.3.3 bereits erläutert, werden Folgen in der Schule meist als Aufzählung oder Iteration betrachtet. Die statische Sichtweise, die für den Aufbau adäquater Vorstellungen zum Grenzwertbegriff nötig ist, fehlt den meisten Schülern vermutlich. Außerdem ist davon auszugehen, dass viele die eingeschränkte Vorstellung haben, eine Folge müsse durch einen einzigen Term definiert sein, in dem der Folgenindex als Variable vorkommt. Zur Konvergenz kennen die Studierenden aus der Schule vermutlich den Begriff Grenzwert und die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty}$. Ihr *Concept Image* beinhaltet wahrscheinlich hauptsächlich übliche Beispiele konvergenter Folgen, nämlich solche, die monoton sind und den Grenzwert nicht annehmen. Es ist davon auszugehen, dass sie die formale Definition entweder noch gar nicht kennengelernt haben oder diese zumindest nicht wiedergeben können. Allgemein haben die Studierenden zwar bereits einige formale mathematische Definitionen kennengelernt, doch sie haben sicherlich noch nie eine solche selbst entwickelt beziehungsweise nacherfunden.

4.1.2 End Points des Vorbereitungsworkshops

Am Ende des Vorbereitungsworkshops sollen die Studierenden ein breites *Concept Image* zum Begriff einer Zahlenfolge und deren Konvergenz aufgebaut haben. Das heißt zum einen soll ihnen bewusst sein, dass Folgen verschieden dargestellt werden können und insbesondere nicht unbedingt eine Darstellung durch einen Term nötig und möglich ist. Zum anderen sollen sie nicht nur typische Beispiele konvergenter Folgen als solche erkennen, sondern auch Folgen, die ihren Grenzwert annehmen; konvergente Folgen, die nicht monoton sind und Folgen, bei denen der Grenzwert weder eine obere noch untere Schranke

bildet. Auch wäre es wünschenswert, dass sie den Begriff einer konvergenten Folge direkt mit solch vielfältigen Beispielen verbinden.

Die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer sollen die formale Definition insoweit verstanden haben, dass sie wissen, dass eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn es für jeden vorgegebenen positiven Abstand einen Index gibt, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zum Grenzwert kleiner als der vorgegebene Abstand ist. Sie sollen nicht nur die formale Definition auswendig kennen, sondern vor allem eine adäquate Vorstellung dazu aufgebaut haben. Ungeeignete Formulierungen beziehungsweise Fehlvorstellungen wie „Die Folge kommt dem Grenzwert immer näher“, „Der Grenzwert darf nicht erreicht werden“ oder „Der Grenzwert ist eine Grenze, die nicht über - oder unterschritten werden darf“ sollen sie hingegen nicht mit dem Grenzwert in Verbindung bringen beziehungsweise bewusst als ungeeignet bewerten. Außerdem soll ihnen bewusst sein, dass Formulierungen wie „für große n “, „annähern“, „nah am Grenzwert“ oder „fast 0“ zu unpräzise sind. Allgemeiner soll ihnen die Funktion einer formalen Definition, eindeutig entscheiden zu können, ob ein Objekt diese erfüllt oder nicht, deutlich geworden sein. In einfachen Fällen sollen die Studierenden nach dem Vorbereitungsworkshop in der Lage sein, eine Folge durch Anwenden der Definition auf Konvergenz zu untersuchen. Darunter fallen für mich Folgen, die entweder durch einen einzigen Term definiert sind oder bei denen zumindest ein N existiert, ab dem alle weiteren Folgenglieder durch einen einzigen Term definiert sind. Beispiele dafür sind schließlich konstante Folgen oder auch Folgen wie $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

4.1.3 Starting Points des Nachbereitungswshops

Am Nachbereitungswshop nehmen nur Studierende teil, die zuvor auch am Vorbereitungsworkshop teilgenommen haben. Daher gehe ich davon aus, dass die Teilnehmenden die End Points des Vorbereitungsworkshops im Wesentlichen erreicht haben, insbesondere da die Inhalte in der Zwischenzeit auch in der Vorlesung und den Übungen behandelt wurden. Dort wurden außerdem die Begriffe Divergenz einer Folge, Beschränktheit, Monotonie, Cauchy-Folgen, Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes Superior und Limes Inferior, uneigentliche Konvergenz und uneigentliche Häufungspunkte definiert. Es wurden verschiedene Methoden, Folgen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen, behandelt und von den Studierenden in Übungsaufgaben eigenständig angewendet. Zu diesen Methoden gehören das Anwenden der Definition, die Grenzwertsätze, fehlende Beschränktheit als Ausschlusskriterium, der Vergleichssatz (auch unter dem Namen Sandwichkriterium bekannt), Monotonie und Beschränktheit, das Cauchy-Kriterium, Beschränktheit und die Übereinstimmung von Limes superior und Limes inferior und Beschränktheit und genau ein Häufungspunkt. Abgesehen von den letzten drei genannten Kriterien wurden in der Vorlesung jeweils Beispiele dazu behandelt. Außerdem wurden Eigenschaften wie die Eindeutigkeit des Grenzwerts und Zusammenhänge zu anderen Begriffen, zum Beispiel dass Konvergenz Beschränktheit impliziert, bewiesen. In den Übungsaufgaben sollten die Studierenden eigenständig Folgen auf Konvergenz untersuchen und Vorlesungsinhalte benutzen um Aussagen zu beweisen. Einzelne der Folgen waren dabei durch eine rekursive Vorschrift oder abschnittsweise definiert, die meisten hingegen waren durch einen einzigen Term angegeben. Außerdem handelte es sich bei dem überwiegenden Teil der zu untersuchenden Folgen um konvergente Folgen, was oftmals bereits durch die Aufgabenstellung

bekannt war. Von diesen konvergenten Folgen waren fast alle Beispiele monotone Folgen, so dass der Grenzwert dem Supremum oder Infimum entspricht. Außerdem wird der Grenzwert lediglich in Ausnahmefällen erreicht. In zwei Fällen war bei den Übungsaufgaben vorgegeben, dass die Konvergenz der jeweiligen Folge durch Anwenden der Definition nachgewiesen werden sollte und in einem Fall sollte gezeigt werden, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt. In den übrigen Fällen konnten und mussten die Studierenden selbst eine geeignete Methode wie das Anwenden der Definition oder der Grenzwertsätze auswählen. Dabei wurden die Folgen so gewählt, dass es sich jeweils mindestens einmal anbietet, die Grenzwertsätze, fehlende Beschränktheit, den Vergleichssatz und Monotonie und Beschränktheit zu verwenden. Die Konstruktion von Folgen mit vorgegebenen Eigenschaften war lediglich als Bonusaufgabe gestellt, weshalb davon auszugehen ist, dass die Studierenden nicht vertraut damit sind. Bei den Vorlesungsinhalten kann jedoch nicht uneingeschränkt davon ausgegangen werden, dass die Studierenden diese auch tatsächlich sicher beherrschen. Darauf deuten auch Eindrücke aus einer Vorstudie im Vorjahr hin. So hatten beispielsweise beobachtete Kleingruppen von Studierenden nach Behandlung des Themas in der Vorlesung überwiegend große Schwierigkeiten, den Grenzwert der durch $a_n = \frac{1-n}{4n-1}$ definierten Folge zu bestimmen und durch Anwenden der Definition nachzuweisen. In der Klausur am Semesterende sollte bewiesen werden, dass wenn eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, für eine weitere reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von Null verschieden sind und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt, dass dann die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a konvergiert. Diese Aufgabe sollte den sicheren Umgang mit der formalen Definition testen. Die 96 Studierenden, die an der Klausur teilgenommen haben, haben bei dieser Aufgabe durchschnittlich nur 1,06 von 4 möglichen Punkten erreicht. Eine typische Bearbeitung, die mit einem Punkt bewertet wurde, bestand darin, dass der Grenzwertsatz für Quotienten angewendet wurde, obwohl bei diesem eine Voraussetzung lautet, dass die Konvergenz der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bereits bekannt sein muss.

4.1.4 End Points des Nachbereitungswshops

Die Studierenden sollen nach dem Nachbereitungswshop (und somit nach Abschluss des Themenbereichs Folgen und Konvergenz in der Vorlesung) ihr *Concept Image* zu konvergenten Zahlen verfestigt haben. Weiter sollen sie in der Lage sein, vorgegebene Folgen auf unterschiedliche Arten auf Konvergenz zu überprüfen. Zum einen müssen sie dazu je nach vorliegender Folge entscheiden können, welche Methode zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens geeignet sein könnte, zum anderen müssen sie die verschiedenen Methoden sowohl kennen als auch umsetzen können. Für das Anwenden der formalen Definition ist entscheidend, dass die Studierenden die umgekehrte Beziehung zwischen ϵ und n_0 verstanden haben: Zu beliebigem, aber festen $\epsilon > 0$ muss ein davon abhängiges $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmt werden, und nicht für ein vorgegebenes $n_0 \in \mathbb{N}$ die Abweichung ϵ angegeben werden. Beim Anwenden der Grenzwertsätze hingegen ist es wichtig, dass die Studierenden diese nicht ausschließlich als Rechenregeln verstehen, sondern vor allem die Existenzaussage in den Sätzen beachten. Dazu gehört insbesondere, dass sie die Voraussetzungen der Sätze überprüfen. Die typischen Fehlvorstellungen wie zum Beispiel der Grenzwert wird nie erreicht, Folgen kommen ihrem Grenzwert immer näher, Grenzwert als obere oder untere Schranke und Verwechslung von Grenzwert und Häufungspunkt sollen nicht mehr auftreten. Darüber hinaus ist ein „vertieftes Verständnis“ des Konver-

genzbegriffs wünschenswert. Darunter verstehe ich, dass ihnen beispielsweise bewusst ist, dass eine Abänderung endlich vieler Folgeglieder keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten hat, oder dass n_0 von ϵ abhängt und im Allgemeinen umso größer gewählt werden muss, je kleiner das ϵ gewählt wird (Mangoldt und Knopp, 1980, S. 168). In der Analysis-1-Veranstaltung bilden Beweise einen enormen Teil der Vorlesungsinhalte. Daher ist ein weiteres Ziel, dass die Studierenden nach dem Workshop in der Lage sind, einfache Beweise im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff durchzuführen und formal aufzuschreiben. Darüber hinaus sollen die Studierenden wissen, welche Beziehungen zwischen dem Konvergenzbegriff und anderen Begriffen wie Häufungspunkten, Cauchy-Folgen, Beschränktheit und Monotonie bestehen.

Prinzipiell würde eine Analysis-1-Dozentin oder ein Dozent vermutlich alle gerade genannten Aspekte ebenfalls als Ziele seiner Vorlesung benennen. Tatsächlich soll im Nachbereitungsworkshop kein Wissen aufgebaut werden, dass explizit über den Vorlesungsstoff hinausgeht, sondern die Vorlesungsinhalte sollen gefestigt, vertieft und vernetzt werden. Wie bereits bei den Starting Points des Nachbereitungswshops begründet, gehe ich nicht davon aus, dass die genannten Ziele bei allen Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmern allein durch Vorlesung und Übung erreicht worden sind. Die Teilnahme am Nachbereitungsworkshop soll dann dazu beitragen, dass die Ziele erreicht werden.

4.2 Aktivitäten und hypothetische Erkenntnisverläufe (Version 1)

Der Workshop besteht aus zwei Teilen, einem vorbereitenden Teil, der stattfindet bevor das Thema Folgen und Konvergenz in der Vorlesung behandelt wird, und einem nachbereitenden Teil, der nach der Behandlung des Themas in Vorlesung und dazugehörigen Übungen durchgeführt wird. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf dem vorbereitenden Teil des Workshops und dabei insbesondere auf einer Aufgabe, die im folgenden als Hauptaufgabe bezeichnet wird. Daher werden die Aktivitäten und hypothetischen Erkenntnisverläufe für diese Aufgabe detaillierter präsentiert und die spätere Analyse in Kapitel 6 beschränkt sich ausschließlich auf die Hauptaufgabe.

Für den vorbereitenden Teil des Workshops habe ich das in Abschnitt 2.5 dargestellte Konzept von Przenioslo für eine Unterrichtsreihe angepasst. Ich stelle im Folgenden zunächst dar, wie dieser Vorbereitungsworkshop im WS 2012/2013, in dem er erstmalig stattfinden sollte, konzipiert war. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben zu diesem Zeitpunkt in der Vorlesung weder den Folgen- noch den Grenzwertbegriff kennengelernt. In Tabelle 4.1 wird zunächst ein Überblick über die zeitliche Planung der einzelnen Aktivitäten gegeben. Anschließend wird auf diese Aktivitäten im Einzelnen eingegangen.

4.2.1 Vorbereitende Aktivitäten

Als kurzer Einstieg in die Thematik soll zunächst die folgende Aufgabe auf Schulniveau dienen, welche die Studierenden in Gruppenarbeit erledigen sollen:

Aktivität	Sozialform	Dauer
Einführungsaufgabe	Gruppenarbeit	20 Min
Definition Folge	Vortrag/Unterrichtsgespräch	10 Min
Beispiele Folgen	Unterrichtsgespräch	15 Min
Aufgaben zu Folgen	Einzelarbeit	15 Min
Hauptaufgabe	Gruppenarbeit	90 Min
Definition Konvergenz gegen 1	Unterrichtsgespräch	30 Min
Definition Konvergenz	Unterrichtsgespräch	15 Min

Tabelle 4.1: Überblick über den zeitlichen Verlauf des Vorbereitungsworkshops

Aufgabenstellung

Eine Patientin nimmt täglich eine Tablette mit 5mg eines Medikaments ein. Im Laufe eines Tages werden im Körper 40% abgebaut und ausgeschieden. Gib in einer Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, wie viel mg des Medikaments sich unmittelbar nach der Einnahme am 1., 2., 3., ... Tag im Körper der Patientin befindet. Stelle die Zahlenfolge auch grafisch dar.

Es handelt sich um eine typische Einführungsaufgabe zum Folgenbegriff in der Schule. Auch kann diese Aufgabe zur Motivation des Grenzwertbegriffs dienen, da die Frage gestellt werden kann, wie viel mg des Medikaments auf lange Sicht im Körper verbleiben. Darauf soll jedoch erst zu einem späteren Zeitpunkt eingegangen werden. Nach der Bearbeitung der Aufgabe soll eine kurze Ergebnissicherung im Plenum stattfinden.

Anschließend soll zunächst die Frage aufgeworfen werden, was eine „Zahlenfolge“ denn überhaupt ist und es wird von der Lehrkraft die folgende Definition gegeben:

Definition

Eine reelle Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

Für die gesamte Folge sind die Schreibweisen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder auch $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ üblich.

Es handelt sich bei der Definition um genau dieselbe Formulierung, die später auch in der Vorlesung behandelt wird, weshalb ich mich für diese Variante entschieden habe. Anzumerken ist, dass diese eher statische Vorstellungen zum Folgenbegriff fördert. Der Begriff der Abbildung wird an dieser Stelle noch einmal kurz wiederholt. Um den Aufbau eines breiten, adäquaten *Concept Images* zum Folgenbegriff zu unterstützen, werden zunächst Beispiele von Folgen in verschiedenen Darstellungen von der Lehrperson präsentiert. Dabei soll auch angemerkt werden, dass durch eine Aufzählung, eine tabellarische Darstellung (ohne Angabe eines definierenden Terms) oder eine graphische Darstellung eine Folge nicht eindeutig festgelegt ist, weil bei diesen Darstellungen jeweils nur endlich viele Folgenglieder angegeben werden, die beliebig zu einer Folge fortgesetzt werden könnten. Bei der Darstellung einer Folge durch Angabe eines definierenden Terms soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass nicht jede Folge durch einen Term ausgedrückt werden kann. Abgesehen von den gerade genannten Darstellungen soll ein Beispiel einer rekursiven Folge und eine Folge, die nicht durch einen einzigen Term, sondern mithilfe einer Fallunterscheidung durch verschiedene Terme definiert ist, gegeben werden. Solche Folgen sollen hier in naheliegender Weise als abschnittsweise definierte Folgen bezeichnet werden. Laut Tall und Vinner (1981) erkennen manche Lernende derartig definierte

Folgen gar nicht als eine Folge, sondern fassen sie als mehrere verschiedene Folgen auf. Mit einer solchen Vorstellung wäre die selbständige Erarbeitung der formalen Definition der Konvergenz einer Folge anhand von Beispielen, bei denen es sich größtenteils um abschnittsweise definierte Folgen handelt, nicht möglich. Um aufzuzeigen, dass die präsentierten Darstellungen von Folgen nicht vollständig sind, soll als weiteres Beispiel die Folge thematisiert werden, deren n -tes Folgenglied jeweils durch die n -te Nachkommastelle von π definiert ist. Anschließend sollen die Studierenden aufgefordert werden, bei verschiedenen vorgegebenen Beispielen in Einzelarbeit zu entscheiden, ob es sich um eine Folge im Sinne der Definition handelt, gegebenenfalls die ersten fünf Folgenglieder angeben und in jedem Fall ihre Antwort begründen. Dabei müssen die Studierenden die Eindeutigkeit der Zuordnung überprüfen und es wird die Erkenntnis gefestigt, dass nicht jede Folge durch einen Term angegeben werden kann. Anschließend soll eine kurze Besprechung der Ergebnisse im Plenum erfolgen, bei der insbesondere auf die beiden gerade genannten Aspekte eingegangen werden soll.

4.2.2 Hauptaufgabe

An diese Aufgabe soll dann die Vorbereitung der Hauptaufgabe aus dem Konzept von Przenioslo (2005) anschließen. Bei der Autorin gab es elf Beispiele konvergenter Folgen und ein Nicht-Beispiel. Die Anzahl der Beispiele konvergenter Folgen bei dieser Aufgabe habe ich auf sechs reduziert. Grund dafür war zum einen die zeitliche Begrenzung des Workshops. Zum anderen ging es darum, dass die Studierenden meiner Meinung nach überfordert sein könnten, wenn sie sich mit zwölf verschiedenen Folgen gleichzeitig beschäftigen sollen. Gleichzeitig sollten die Beispiele jedoch möglichst vielfältig sein und nicht nur aus den typischen, zu einer eingeschränkten Vorstellung gehörenden Beispielen konvergenter Folgen bestehen, um den Aufbau eines breiten *Concept Images* zu fördern. Die folgenden sechs Beispiele gegen 1 konvergenter Folgen werden den Studierenden präsentiert:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$$

und das von Przenioslo (2005) übernommene Nicht-Beispiel:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bezeichnung der Folgen mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anstelle von (a_n) mit Nummerierung und (b_n) hat den Grund, dass es für die Studierenden so leichter ist, über die Folgen zu sprechen und für mich als Forscherin auch leichter bei der Analyse der Diskussionen ist, zu wissen, von welcher Folge gerade gesprochen wird. Die Beispiele $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurden abgesehen von der Umbenennung von Przenioslo (2005) übernommen, es handelt sich um die Beispiele 3, 6, 8 und 10. Die zusätzliche Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stimmt abgesehen von einem einzelnen Folgenglied mit dem Beispiel 9 überein. Die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen ist komplett neu. Hierzu ist anzumerken, dass diese Art der Darstellung gewählt wurde, um zusätzliche Schwierigkeiten aufgrund des Summenzeichens zu vermeiden. Die sechs ausgewählten Beispiele gegen 1 konvergenter Folgen sind immer noch sehr vielfältig und decken die gesamte von Przenioslo (2005) geforderte Breite ab. So sind nicht nur Folgen dabei, die durch einen einzigen Term definiert sind, sondern die Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind jeweils abschnittsweise definiert. Auch gibt es sowohl ein Beispiel einer konvergenten Folge, die den Grenzwert 1 zwischendurch annimmt (Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$), als auch Beispiele konvergenter Folgen, die den Grenzwert ab einem bestimmten Index annehmen (Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Dennoch sind auch noch Beispiele von Folgen vorhanden, die ihren Grenzwert nie annehmen (Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Des Weiteren sind nicht nur monotone Folgen enthalten (Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$), sondern auch nicht-monotone Folgen (Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Bei den Folgen $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es nicht einmal einen Index, ab dem die Folgen monoton sind. Auch gibt es wie bei Przenioslo Folgen, bei denen sich ein oder mehrere endlich viele Folgenglieder anders verhalten als die übrigen. Beispiele dafür sind die Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Und auch Folgen, bei denen sich das Verhalten der Folgenglieder erst ab einem sehr großen n verändert, sind vertreten - je nach Auslegung von „sehr groß“ gehört zumindest das Beispiel $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dazu.

Aus Zeitgründen müssen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Graphen der Folgen im Gegensatz zu der Unterrichtsreihe von Przenioslo nicht selbst erstellen, sondern bekommen sie ausgehändigt. Damit sie sich jedoch aktiv mit den Folgen und deren Graphen beschäftigen, müssen sie in einer Gruppenarbeitsphase selbst zuordnen, welcher Graph zu welcher Folge gehört und außerdem „charakteristische Eigenschaften“ der einzelnen Folgen notieren:

Aufgabenstellung

Ordne den Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Grafiken zu und formuliere die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Folgen.

Die Studierenden sollen sich zunächst nach und nach mit den Folgen beschäftigen und sich so mit ihnen vertraut machen. Auf diese Art werden sie nicht durch die gleichzeitige Betrachtung von sieben verschiedenen Folgen überfordert. Sie können entweder mit einer Folge beginnen und dazu die passende Grafik suchen und ihre Eigenschaften beschreiben, oder sie können mit einer Grafik beginnen und dazu die passende Folge suchen. Die Aufgabenstellung ist bewusst offen formuliert, es ist nicht genau festgelegt, was unter „charakteristischen Eigenschaften“ zu verstehen ist. Da die Studierenden noch keine Eigenschaften von Folgen kennengelernt haben, wird erwartet, dass sie umgangssprachlich beschreiben, was ihnen bei der Betrachtung der einzelnen Folgen und deren Graphen auffällt. Möglicherweise beginnen sie an dieser Stelle auch schon, über Konvergenz oder andere Eigenschaften zu reden. Ziel dieser Aufgabe ist es, dass die Studierenden anschließend bei jeder der Beispielfolgen wissen, wie diese verlaufen.

Nach Bearbeitung dieser Aufgabe sollen die Ergebnisse kurz in der gesamten Gruppe besprochen werden, um sicherzustellen, dass alle Studierenden die einzelnen Folgen ihrer Definition entsprechend aufgefasst haben. Bei der Zuordnung der Grafiken zu den Folgen gibt es eine eindeutige Lösung, die genannt werden soll. Bei den „charakteristischen Eigenschaften“ hingegen sind wie gerade erwähnt jeweils verschiedene Antworten denkbar. Daher sollen verschiedene Aspekte, die von den Studierenden genannt werden, gesammelt werden. Kritisiert werden sollen lediglich solche formulierten „charakteristischen Eigenschaften“, die überhaupt nicht zur jeweiligen Folge passen. Anschließend wird die Hauptaufgabe gestellt, die in Gruppen von je vier Studierenden bearbeitet werden soll:

Aufgabenstellung

Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden als konvergent gegen den Grenzwert 1 bezeichnet, die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen ist nicht konvergent. Versuche, die gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht hat, möglichst gut zu beschreiben.

Inhaltlich handelt es sich um die von Przenioslo (2005) vorgeschlagene Aufgabe, die Formulierung wurde jedoch verändert. Zum einen wurde der Begriff der Konvergenz bewusst in der Aufgabenstellung vorgegeben. Grund hierfür war, dass die Studierenden den Begriff möglicherweise schon kennen, wenn sie auch nicht die formale Definition kennen. In diesem Fall hätten sie bei der Aufgabenstellung von Przenioslo (2005) antworten können, die gemeinsame Eigenschaft sei, dass die Folgen gegen 1 konvergieren und sie hätten möglicherweise nicht das Bedürfnis gehabt, weiter über diese Eigenschaft nachzudenken, da die Aufgabe in ihren Augen gelöst gewesen wäre. Aus demselben Grund wurde nicht gefragt, welche gemeinsame Eigenschaft die Folgen haben, sondern die Studierenden wurden aufgefordert, diese Eigenschaft „möglichst gut zu beschreiben“. Dadurch sollte vermittelt werden, dass eine reine Nennung der Eigenschaft nicht ausreiche. Außerdem soll „möglichst gut“ andeuten, dass eine präzise Formulierung gefordert ist. Der Begriff der Definition wird hier nicht verwendet, bei Bedarf soll den einzelnen Gruppen während der Arbeitsphase kommuniziert werden, dass sie eine Definition nacherfinden sollen.

4.2.3 Hypothetische Erkenntnisverläufe

Hier soll nun dargestellt werden, wie die Bearbeitung der Hauptaufgabe idealerweise verlaufen könnte. Zunächst gehe ich dabei auf das allgemeine strategische Vorgehen ein. Dabei liegt die Annahme zugrunde, dass die Studierenden sukzessive vorgehen, um eine Eigenschaft zu formulieren, die auf alle Beispielfolgen zutrifft, auf das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Es wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Gruppen jeweils zunächst eine Charakterisierung formulieren, die auf einer Teilmenge der Beispiele basiert. Optimalerweise ziehen sie dann weitere Beispiele hinzu und evaluieren ihre Charakterisierung. Falls eins (oder mehrere) der hinzugezogenen Beispiele im Widerspruch zu der Charakterisierung steht, ergibt sich dadurch die Notwendigkeit, die Charakterisierung zu verändern. Daran anschließen würde sich dann wieder eine Phase der Überprüfung der Charakterisierung. Je nachdem, mit welchen Beispielfolgen die Studierenden beginnen, können unterschiedliche Varianten des Erkenntnisverlaufs entstehen. Bei den vorliegenden Beispielfolgen habe ich unter Berücksichtigung der von Przenioslo (2005) berichteten Erfahrungen drei mögliche Verläufe entwickelt, die vorstellbar wären und im Sinne der Aufgabenstellung zielführend sein können. Die Varianten haben das iterative Vorgehen alle gemeinsam.

Bei Oehrtman et al. (2014) ist ein ähnliches iteratives Vorgehen dargestellt, einen Über-

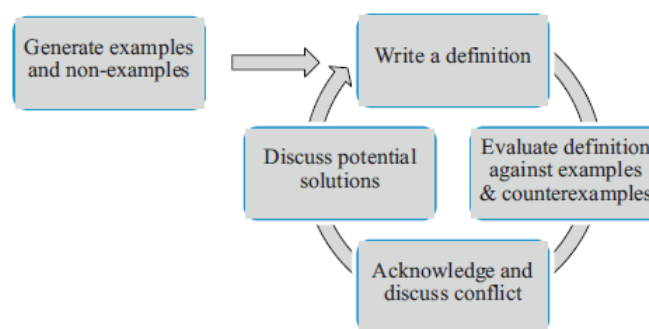


Abbildung 4.1: Iterative Verfeinerung der Formulierung

Quelle: Oehrtman et al. (2014, S. 135)

blick gibt Abbildung 4.1. Der Schritt „Generate Examples and non-examples“ entfällt hier, da die Menge der Beispiele und des Nicht-Beispiels vorgegeben ist. Die übrigen Phasen könnten idealerweise genauso durchlaufen werden, diese sind unabhängig davon, ob die Studierenden die Folgen selbst auswählen oder vorgegeben bekommen. Es ist sowohl denkbar, dass die Studierenden bewusst in der dargestellten Art und Weise vorgehen als auch dass sie dies unbewusst tun. Es werden nun die verschiedenen Varianten hypothetischer idealer Erkenntnisverläufe präsentiert. Diese Verläufe sind um mögliche Problemstellen ergänzt, die hier nur kurz angedeutet und anschließend genauer ausgeführt werden.

Hypothetischer idealer Verlauf - Variante 1

Möglicherweise benötigen die Studierenden einen Impuls, um einen Ansatz zu finden. Sie betrachten zunächst die Beispielfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Basierend auf dieser Auswahl notieren sie eine erste Charakterisierung:

(Charakterisierung 1) *Die Folgenglieder nähern sich 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Sie ziehen dann das Beispiel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hinzu und bemerken, dass es bei dieser Folge einen „Ausreißer“ bei $n = 10$ gibt. Dieses Folgenglied passt nicht zur Formulierung der Annäherung. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Ihre Lösung dieses Problems ist es, die ersten Folgenglieder außer Betracht zu lassen und sie formulieren:

(Charakterisierung 2) *Ab irgendeinem n nähern sich die Folgenglieder 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Nun wird die neue Formulierung überprüft. Dazu werden die Beispielfolgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und/oder $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hinzugezogen. Es fällt auf, dass bei diesen Folgen der Wert 1 „erreicht“ wird, es gibt jeweils ein n , ab dem die Folgen konstant 1 sind. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Daraufhin überarbeiten sie ihre Formulierung und notieren:

(Charakterisierung 3) *Ab irgendeinem n nähern sich die Folgenglieder entweder 1 an, ohne 1 zu erreichen, oder ab irgendeinem n sind die Folgenglieder konstant 1.*

Es folgt wieder eine Phase der Evaluierung dieser Charakterisierung. Dazu wird nun die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet. Die Studierenden bemerken, dass ihre Formulierung auf diese Folge nicht zutrifft, da es für die Folge, deren Glieder für jedes Vielfache von 10 genau 1 und für alle übrigen natürlichen Zahlen n durch $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, weder ein n gibt, ab dem sich die Folgenglieder 1 annähern ohne 1 zu erreichen, noch gibt es ein n , ab dem die Folgenglieder konstant 1 sind. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. An dieser Stelle wäre ein geeigneter nächster Schritt, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Mit Abstand ist hier der Begriff in seiner alltagssprachlichen Bedeutung gemeint und nicht im streng mathematischen Sinne. Sowohl bei dieser Idee als auch bei der nachfolgend beschriebenen Umsetzung könnten Interventionen erforderlich sein. Die vorherige Charakterisierung mit dem Abstand der Folgenglieder zu 1 formuliert wäre: *Ab irgendeinem n ist der Abstand der Folgenglieder zu 1 entweder sehr klein ohne genau 0 zu werden oder dieser Abstand ist ab irgendeinem n genau 0.* Die Studierenden argumentieren, dass sie die „entweder ... oder“ Formulierung vermeiden können, um die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu berücksichtigen, indem sie beide Teile der Aussage zusammenfassen:

(Charakterisierung 4) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Nun beziehen die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit ein, um zu überprüfen, ob die Charakterisierung auf diese Folge nicht zutrifft. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ individuell verschieden interpretiert werden kann. Ideal wäre es, wenn die Formulierung dann in der Form verbessert wird, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei optimalerweise auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 5) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun noch einmal an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen ihnen keine Widersprüche mehr auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten die Studierenden diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Ein solches Ergebnis wäre aus meiner Sicht zufriedenstellend. Eine mathematisch formalisierte Definition mit Quantoren ist hier nicht unbedingt gefordert, eine Verbalisierung ist ebenfalls zulässig, solange sie präzise formuliert ist.

Hypothetischer idealer Verlauf - Variante 2

Möglicherweise benötigen die Studierenden einen Impuls, um einen Ansatz zu finden. Die erste Formulierung der gemeinsamen Eigenschaft basiert auf der Betrachtung der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese lautet wie folgt:

(Charakterisierung 1) *Der Abstand der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner.*

Anschließend beziehen sie die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit ein und überprüfen, ob die Charakterisierung auch auf diese Folge zutrifft. Sie bemerken, dass diese Folge ab dem 125. Glied konstant 1 ist, der Abstand zu 1 wird in dem Fall also nicht mehr kleiner, sondern bleibt 0. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Diesen Aspekt nehmen die Studierenden dann in ihre Formulierung mit auf:

(Charakterisierung 2) *Der Abstand der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner oder bleibt 0.*

Diese Formulierung testen sie wiederum an den Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und/oder $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dabei erkennen sie, dass eine Überarbeitung der Formulierung nötig ist. Sowohl bei der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es eine Stelle, an welcher der Abstand eines Folgenglieds zu 1 im Vergleich zum Abstand des vorherigen Folgenglieds zu 1 größer ist. Werden die ersten Folgenglieder außer Acht gelassen, so trifft die Formulierung auch auf diese beiden Folgen zu:

(Charakterisierung 3) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner oder bleibt 0.*

Hier könnte sowohl bei der Entdeckung, dass die Charakterisierung 2 nicht auf alle Beispielfolgen zutrifft, als auch bei der Entwicklung der Charakterisierung 3 Unterstützung erforderlich sein. Schließlich testen sie diese Charakterisierung an der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ihnen fällt auf, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 bei jedem zehnten Folgenglied wieder größer wird, da die Folgenglieder für jedes Vielfache von 10 exakt 1 sind, für alle übrigen natürlichen Zahlen sind sie jedoch von 1 verschieden. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Die Studierenden erkennen daran, dass ihre Formulierung die vorgegebenen Folgen nicht geeignet charakterisiert. Sie beziehen das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ihre Überlegungen mit ein. Beim Vergleich der Folgen $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

erkennen sie, dass es zwar bei beiden Folgen immer wieder Stellen gibt, an denen der Abstand zu 1 größer wird, doch bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird der Bereich, in dem sich der Abstand für alle weiteren Folgenglieder befindet klein, während es bei der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer wieder Folgenglieder gibt, deren Abstand zu 1 gleich 1 ist. Sie bringen diese Erkenntnis wie folgt in ihre Formulierung ein:

(Charakterisierung 4) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Nun beziehen die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit ein, um zu überprüfen, ob die Charakterisierung auf diese Folge nicht zutrifft. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ individuell verschieden interpretiert werden kann. Ideal wäre es, wenn die Formulierung dann in der Form verbessert wird, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei optimalerweise auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 5) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun noch einmal an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen ihnen keine Widersprüche mehr auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten die Studierenden diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Hypothetischer idealer Verlauf - Variante 3

Möglicherweise benötigen die Studierenden einen Impuls, um einen Ansatz zu finden. Sie beginnen mit der Betrachtung der Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und formulieren zunächst folgendes:

(Charakterisierung 1) *Ab irgendeinem n sind die Folgenglieder konstant 1.*

Anschließend ziehen sie die Beispielfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und/oder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hinzu und stellen fest, dass diese die formulierte Eigenschaft nicht erfüllt, da kein Folgenglied dem Wert 1 entspricht. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Dann modifizieren sie die Formulierung:

(Charakterisierung 2) *Ab irgendeinem n sind die Folgenglieder entweder konstant 1 oder sie nähern sich 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Es folgt wieder eine Phase der Evaluierung dieser Charakterisierung. Dazu wird nun die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet. Die Studierenden bemerken, dass ihre Formulierung auf diese Folge nicht zutrifft, da es für die Folge, deren Glieder für jedes Vielfache von 10 genau 1 und für alle übrigen natürlichen Zahlen n durch $1 + \frac{1}{n}$ definiert ist, weder ein n gibt, ab dem sich die Folgenglieder 1 annähern ohne 1 zu erreichen, noch gibt es ein n , ab dem die Folgenglieder konstant 1 sind. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. An dieser Stelle wäre ein geeigneter nächster Schritt, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Mit Abstand ist hier der Begriff in seiner alltagssprachlichen Bedeutung gemeint und nicht im streng mathematischen Sinne. Sowohl bei dieser Idee als auch bei der nachfolgend beschriebenen Umsetzung könnten Interventionen erforderlich sein. Die vorherige Charakterisierung mit dem Abstand der Folgenglieder zu 1 formuliert wäre: *Ab irgendeinem n ist der Abstand der Folgenglieder zu 1 entweder sehr klein ohne genau 0 zu werden oder dieser Abstand ist ab irgendeinem n genau 0.* Die Studierenden argumentieren, dass sie die „entweder ... oder“ Formulierung vermeiden können, um die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu berücksichtigen, indem sie beide Teile der Aussage zusammenfassen:

(Charakterisierung 3) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Nun beziehen die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit ein, um zu überprüfen, ob die Charakterisierung auf diese Folge nicht zutrifft. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ individuell verschieden interpretiert werden kann. Ideal wäre es, wenn die Formulierung dann in der Form verbessert wird, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei optimalerweise auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 4) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun noch einmal an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen ihnen keine Widersprüche mehr auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten die Studierenden diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Diese drei Varianten sollen die Ausgangslage für die erste Durchführung des Workshops bilden. Anschließend können Überarbeitungen, Ergänzungen oder auch eine komplette Neuentwicklung der hypothetischen Erkenntnisverläufe basierend auf der Analyse der tatsächlichen Verläufe vorgenommen werden.

4.2.4 Geplante Interventionen

Die Lehrperson soll sich während der Bearbeitung der Hauptaufgabe zunächst im Hintergrund halten und sich nur bei Bedarf an den Diskussionen einzelner Gruppen beteiligt. Eine Situation, in der eine Intervention nötig ist, entsteht entweder dadurch, dass die Studierenden der Meinung sind, sie seien mit der Bearbeitung der Aufgabe fertig, oder wenn sie ihrer Ansicht nach vor einer Hürde stehen, die sie alleine nicht überwinden können. Solche möglichen Hürden können bei den verschiedenen Schritten des iterativen Vorgehens (Abbildung 4.1) auftreten.

Die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer müssten mit dem Schritt „Write a definition“ beginnen, das heißt sie müssten zunächst eine erste Version der gemeinsamen Eigenschaft formulieren. Das könnte bereits eine erste Hürde darstellen, es wäre möglich, dass die Studierenden keinen Ansatz finden. Diese Situation und die dazu vorgesehene Intervention ist in Tabelle 4.2 unter (A) zu finden.

Bei dem nächsten Schritt, „Evaluate definition against examples & counterexamples“, könnte das Problem auftreten, dass die Studierenden diesen Schritt überhaupt nicht oder nicht vollständig durchführen. Darauf wird unter (B) eingegangen. Sofern die Überprüfung vollständig und korrekt durchgeführt wird, sind im folgenden Schritt („Acknowledge and discuss conflict“) keine Hürden zu erwarten.

Der Schritt „Discuss potential solutions“ hingegen kann wiederum eine Hürde darstellen, wenn den Studierenden keine mögliche Lösung des jeweils festgestellten Problems einfällt. In zwei hypothetischen idealen Verläufen (Variante 1 und 3) wurde eine solche Situation genannt, und zwar jeweils an der Stelle, an der die Studierenden die beiden Entweder-oder-Bedingungen durch eine einzige Bedingung ausdrücken möchten. In der nachfolgenden Tabelle ist diese Situation unter (C) zu finden. Bei anderen Problemen ist zu erwarten, dass die Studierenden selbständig eine Lösung finden, solange sie das Problem bemerken.

Eine zusätzliche Hürde, die sich nicht direkt in die Schritte des iterativen Vorgehens einordnen lässt, ist, dass die Eigenschaft so genau formuliert werden soll, dass damit entschieden werden kann, ob eine Folge die Eigenschaft erfüllt oder nicht. Den Studierenden selbst fällt möglicherweise nicht auf, wenn ihre Formulierung dies nicht erfüllt, so dass eine Intervention durch die Lehrkraft notwendig sein kann. Auch wäre es möglich, dass die Studierenden, wenn ihnen der Mangel bewusst ist, an der Umsetzung einer Präzisierung scheitern. Auf beides wird unter (D) eingegangen.

Theoretisch könnte es auch noch sein, dass die Studierenden eine Eigenschaft formulieren, die auf alle Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht, die jedoch nicht zur Definition der Konvergenz gegen 1 äquivalent ist. In dem Fall würde es entweder Folgen geben, die nach der formalen Definition gegen 1 konvergieren, aber die formulierte Eigenschaft nicht erfüllen, oder umgekehrt würde es Folgen geben, welche die formulierte Eigenschaft erfüllen, aber nach der formalen Definition nicht gegen 1 konvergieren. Ziel der sorgfältigen Auswahl der Folgen war es, dies möglichst zu verhindern, doch ausgeschlossen werden kann es nicht. Ein Kritisieren einer solchen Eigenschaft wäre nicht gerechtfertigt, da die Studierenden in dem Fall die Aufgabenstellung erfüllt hätten. Die Studierenden sollten also dafür gelobt werden, dass sie eine geeignete Charakterisierung gefunden haben. Um sie dennoch in Richtung der intendierten Eigenschaft zu lenken, sollte ihnen eine geeignete weitere Folge als Beispiel oder Nicht-Beispiel gegeben werden und sie sollten als neue Aufgabe nun eine Eigenschaft finden, die auch die zusätzliche Folge einschließt

beziehungsweise ausschließt. Dass es sich hier um eine neue Aufgabe handelt, sollte den Studierenden gegenüber deutlich gemacht werden. Diese Situation ist in der tabellarischen Übersicht unter (E) eingeordnet.

Falls eine Gruppe von Studierenden die Aufgabe zufriedenstellend gelöst hat und dabei deutlich schneller gewesen ist als die übrigen Gruppen, dann könnte ihnen eine zusätzliche Aufgabe gestellt werden. Dazu ist vorgesehen, dass die selbst erarbeitete Definition der Konvergenz gegen 1 auf die sieben vorgegebenen Beispiele angewendet wird, sofern die Studierenden dies noch nicht im Rahmen der Nacherfindung der Definition durchgeführt haben.

Situation	Intervention
(A) Die Studierenden finden keinen Ansatz, sie sind möglicherweise mit der Menge an Beispielen überfordert.	strategische Intervention: Es soll der Tipp gegeben werden, erst einmal mit weniger Beispielen zu beginnen und eine gemeinsame Eigenschaft von diesen zu finden. Dann kann überprüft werden, ob die weiteren Beispiele diese Eigenschaft auch erfüllen. nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der ersten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(B) Die Studierenden formulieren eine nicht passende Eigenschaft, prüfen jedoch nicht selbständig, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht.	strategische Intervention: <i>Wendet eure Eigenschaft mal auf folgendes Beispiel an.</i> Es wird jeweils auf eine Folge verwiesen, auf welche die Eigenschaft fälschlicherweise zutrifft beziehungsweise nicht zutrifft.
(C) Es gelingt nicht, eine gemeinsame Eigenschaft zu finden. Stattdessen klassifizieren die Studierenden die Folgen in mehrere Gruppen (z.B. in die Folgen, deren Glieder sich ab irgendeinem n der 1 annähern; Folgen, die ab einem bestimmten n konstant sind; und Folgen, die aus Teilfolgen beider Typen bestehen).	strategische Intervention, falls gar nicht versucht wurde, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken: Die Studierenden sollen dazu aufgefordert werden, zu versuchen, die verschiedenen Bedingungen zusammenzufassen und die Eigenschaft so durch eine einzige Bedingung auszudrücken. nächste Intervention, falls erste Intervention nicht ausreicht: Es wird die zweite fiktive Diskussion (siehe folgende Seiten) ausgegeben, mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.

(D)	Die Formulierung der Eigenschaft ist nicht so genau formuliert, dass damit bei den vorliegenden Beispielen und dem Nicht-Beispiel eindeutig entschieden werden kann, ob sie diese Eigenschaft erfüllen oder nicht. zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung entscheiden, ob die Beispielfolgen gegen 1 konvergieren oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Es werden transparente ϵ-Streifen verschiedener Breite mit eingezeichneter horizontaler Mittellinie herausgegeben, zusammen mit der Aufforderung, diese zusammen mit den Graphen der Folgen zu verwenden und zu überlegen, ob die gesuchte Eigenschaft vielleicht mithilfe der Streifen formuliert werden kann.
(E)	Die formulierte Eigenschaft trifft auf alle vorliegenden Beispiele zu und auf das Nicht-Beispiel nicht. Die Eigenschaft ist jedoch nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1. Zunächst wird gelobt, dass die Aufgabenstellung erfüllt wurde. Dann wird ein geeignetes weiteres Beispiel oder Nicht-Beispiel einer gegen 1 konvergenten Folge genannt, und dazu aufgefordert, nun eine Eigenschaft zu finden, die auch das zusätzliche Beispiel umfasst beziehungsweise das zusätzliche Nicht-Beispiel ausschließt.

Tabelle 4.2: Übersicht über die vorgesehenen Interventionen

Nun werden die einzelnen Interventionen detaillierter beschrieben und es wird begründet, warum sie in der jeweiligen Situation eingesetzt werden sollten. Außerdem wird darauf eingegangen, inwiefern die Interventionen auch in dem Konzept von Przenioslo (2005) vorgeschlagen werden und gegebenenfalls, welche Änderungen von mir vorgenommen wurden. Anzumerken ist noch, dass der Reihenfolge der Situationen und vorgesehenen Interventionen keine zeitliche Abfolge zugrunde liegt. Insbesondere handelt es sich nicht um Phasen, die von allen Gruppen durchlaufen werden, sondern um einzelne Situationen, die auftreten können.

Situation (A)

In dieser Situation sind die Studierenden möglicherweise durch die gleichzeitige Betrachtung zu vieler Folgen kognitiv überfordert. Die kognitive Belastung könnte reduziert werden, indem zunächst lediglich zwei oder drei Folgen betrachtet werden und erst im Anschluss die übrigen Beispiele hinzugezogen werden. Falls die Studierenden dennoch nicht weiterkommen, kann ihnen die erste fiktive Diskussion ausgehändigt werden. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine Übersetzung der ersten fiktiven Diskussion von Przenioslo (2005), die genau für diese Phase entwickelt wurde. Die fiktive Diskussion wechselt sich jeweils mit Fragen an die Studierenden ab, die fett gedruckt sind. In dem Ausdruck, der den Studierenden ausgehändigt wird, ist nach jeder Frage Platz für die

Antwort freigelassen. Die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer sollen also die fiktive Diskussion bis zur ersten fett gedruckten Frage lesen, die Frage beantworten, dann die fiktive Diskussion weiter lesen bis zur nächsten Frage und so weiter.

Erste fiktive Diskussion

Anna, Eva, Michael und Peter diskutieren über die Aufgabe. Sie tauschen sich nun über ihre Beobachtungen aus. Lies ihre Diskussion und beantworte die fett gedruckten Fragen!

Michael: Schaut mal, die Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ haben etwas gemeinsam.

Was denn?

Michael: Ab einem gewissen n sind die Terme immer gleich 1.

Hat Michael Recht? Falls ja, bestimme für jede dieser Folgen das geeignete n .

Peter: Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ab $n = 500001$ immer 1.

Eva: Und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab $n = 126$.

Peter: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat diese Eigenschaft nicht, aber die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch nicht.

Anna: Ja, ja, aber ich schaue auf die Graphen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da passiert etwas mit ihnen, was mit der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht passiert.

Was glaubst du hat Anna bemerkt?

Anna: Schaut euch diese Folgen an, die weichen irgendwann kaum noch von der Geraden $y = 1$ ab, aber erreichen sie nie.

Was meint Anna mit „irgendwann“?

Michael: Stimmt, ab einem gewissen n sind die Folgenglieder ganz nah an der Geraden $y = 1$. Bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist das auch so, nur dass da die Folgenglieder auf beiden Seiten der Geraden liegen.

Eva: Und was ist mit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Anna: $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besteht aus einem Teil, der nah an der Geraden $y = 1$ liegt, und einem Teil, der gleich 1 ist.

Michael: Also haben wir die gemeinsame Eigenschaft herausgefunden.

Was ist die gemeinsame Eigenschaft?

Peter: Die gemeinsame Eigenschaft ist, dass ab einem bestimmten Index etwas mit den Folgengliedern passiert.

Anna: Ab einem bestimmten n unterscheiden sich die Werte kaum noch von 1, werden aber nie 1, oder aber sie sind gleich 1, oder die Folge besteht aus Teilfolgen der beiden Typen.

Eva: Oh, aber was ist mit der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hat die diese Eigenschaft nicht auch für sehr großes n ?

Peter: Nein, hat sie nicht, weil sie für jedes Vielfache von 10 den Wert 2 annimmt.

- Anna: Du kannst kein n_0 finden, ab dem sich alle Werte der 1 annähern oder gleich 1 sind. Wenn wir ein n_0 wählen, dann wird es immer eine natürliche Zahl n größer als n_0 geben, für die b_n 2 ist.
- Michael: Es besteht aus einer konstanten Teilfolge gleich 2 für alle Vielfachen von 10 und der Teilfolge $1 + \frac{1}{n}$ für die anderen natürlichen Zahlen.

Fasse deine Beobachtungen zusammen. In welche drei Gruppen kannst du die Folgen klassifizieren?

Die fiktiven Personen beginnen genau so, wie auch der strategische Tipp vor der Aushändigung der fiktiven Diskussion lautet, sie betrachten nicht alle Folgen gleichzeitig, sondern beginnen mit den beiden Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. An diesen entdecken sie eine Gemeinsamkeit, und zwar sind diese beiden Folgen jeweils ab einem n konstant 1. Die Studierenden sollen diese Gemeinsamkeit überprüfen und jeweils den Index bestimmen, ab dem das der Fall ist. Im weiteren Verlauf der fiktiven Diskussion werden diese Indizes auch genannt, so dass die Studierenden überprüfen können, ob ihre Überlegungen richtig waren. Die fiktiven Personen testen die Eigenschaft an den übrigen Folgen und stellen fest, dass es für das Nicht-Beispiel kein solches n gibt, für die übrigen Beispiele jedoch auch nicht. Die Aufmerksamkeit der Studierenden wird dann auf die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gelenkt. Wieder haben sie die Möglichkeit, selbst zu entdecken, was diese Folgen im Gegensatz zur Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemeinsam haben. In der fiktiven Diskussion wird diese Eigenschaft dadurch beschrieben, dass diese Folgen irgendwann kaum noch von der Geraden $y = 1$ abweichen, diese jedoch nie erreichen. Anschließend sollen die Studierenden darüber nachdenken, was „irgendwann“ hier bedeutet. Von den fiktiven Personen wird diese Formulierung durch „ab einem gewissen n “ etwas präzisiert. Es wird kurz auf die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eingegangen, die diese Eigenschaft ebenfalls besitzt. Danach stellen die fiktiven Personen fest, dass die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die einzige Folge, die zuvor noch nicht betrachtet wurde, sowohl eine Teilfolge besitzt, die von dem Typ ist, dass sie nah an der Geraden $y = 1$ liegt, als auch eine Teilfolge, die konstant 1 ist. Es wird noch einmal darauf eingegangen, warum beim Nicht-Beispiel die Werte sich weder ab irgendeinem n kaum noch von 1 unterscheiden ohne 1 zu erreichen, noch konstant 1 sind noch aus Teilfolgen dieser beiden Typen besteht. An der Stelle endet die fiktive Diskussion.

Die Intention dieser fiktiven Diskussion ist, dass Studierende, die keinen Ansatz finden, dazu angeleitet werden, systematisch vorzugehen, indem zunächst wenige Folgen betrachtet werden, eine erste Eigenschaft formuliert wird, nach und nach weitere Folgen hinzugezogen werden und die Eigenschaft an ihnen überprüft und gegebenenfalls modifiziert wird. So können die Studierenden einen Einstieg in die Aufgabe bekommen. Es handelt sich also um eine eher strategische Intervention, wobei auch inhaltliche Aspekte enthalten sind. Das Vorgehen, das durch die fiktive Diskussion angeleitet wird, ähnelt der Variante 3 der hypothetischen idealen Verläufe. Am Ende dieser fiktiven Diskussion haben die Studierenden eine ähnliche Formulierung wie „*Ab irgendeinem n sind die Folgenglieder entweder konstant 1 oder sie nähern sich 1 an ohne 1 zu erreichen*“ selbst erarbeitet oder zumindest nachvollzogen. Außerdem haben sie erkannt, dass die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine der beiden Entweder-oder-Bedingungen erfüllt, sondern eine Art Mischform bildet. Der nächste Schritt im Sinne des hypothetischen idealen Verlaufs wäre nun, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Möglicherweise können die Studierenden mit

diesem Ansatz nun selbständig weiterarbeiten. Andernfalls kann eine weitere Intervention, zum Beispiel die unter (C) beschriebene, sinnvoll sein.

Abgesehen von der Übersetzung des englischen Textes und einer Abänderung der Namen wurde die Diskussion von mir an die ausgewählten Folgen angepasst und der Aspekt, dass bei den Folgen „ab einem gewissen n “ etwas geschieht, wurde zunächst durch die Formulierung „irgendwann“ ersetzt. Es wurde dann eine Frage eingeschoben, was unter „irgendwann“ verstanden werden könne. Dadurch wurde die Möglichkeit eröffnet, trotz der Unterstützung durch die fiktive Diskussion diesen Teilaspekt der Definition selbst zu entdecken.

Situation (B)

Falls die Studierenden nicht systematisch vorgehen und ihre formulierte Eigenschaft nicht noch einmal an allen Beispielen und dem Nicht-Beispiel überprüfen, so kann es passieren, dass sie eine Eigenschaft finden, die entweder nicht auf alle der Beispielfolgen zutrifft oder die auch auf das Nicht-Beispiel zutrifft. Insbesondere könnten hier typische Fehlvorstellungen wie „Eine konvergente Folge kommt dem Grenzwert immer näher“, „Der Grenzwert wird nicht erreicht“ oder die Verwechslung (beziehungsweise fehlende Unterscheidung) von Grenzwerten und Häufungspunkten zu fehlerhaften Formulierungen führen. Typische Fehlvorstellungen wurden bereits bei der Auswahl der Folgen berücksichtigt, somit gibt es jeweils ein (Nicht-)Beispiel, an dem erkannt werden kann, dass die entsprechende Formulierung nicht geeignet ist. Falls diese Beispiele von den Studierenden zunächst vernachlässigt werden, sollen sie noch einmal auf das entsprechende Beispiel aufmerksam gemacht werden. So trifft eine Formulierung der Art „Die Folgen kommen der 1 immer näher“ nicht auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu, weswegen in dem Fall die Formulierung an dieser Folge überprüft werden sollte. Enthält die Formulierung der Eigenschaft den Aspekt „ohne 1 zu erreichen“, so kann beispielsweise auf die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufmerksam gemacht werden, die dem widerspricht. Wird hingegen eine fehlende Unterscheidung zwischen beziehungsweise Verwechslung von Grenzwert und Häufungspunkt deutlich, beispielsweise durch eine Formulierung der Art „In jeder Umgebung um 1 befinden sich unendlich viele Folgenglieder“, so trifft die Eigenschaft zwar auf alle vorgegebenen Beispiele zu, aber eben auch auf das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, auf das die Aufmerksamkeit der Studierenden daher gelenkt werden soll.

Situation (C)

Falls Situation (C) auftritt, dann sind die Studierenden den von Przenioslo (2005) erwarteten Weg eingeschlagen, indem sie die Beispielfolgen in zwei oder mehr Gruppen klassifiziert haben beziehungsweise die Eigenschaft durch mehrere Entweder-oder-Bedingungen ausgedrückt haben. Es gibt daher eine für diese Situation vorgesehene fiktive Diskussion. Da es sich dabei um eine starke inhaltliche Intervention handelt, sollen die Studierenden zunächst dazu aufgefordert werden, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Nur falls ihnen dies nicht gelingt, soll die fiktive Diskussion ausgegeben werden. Wie bereits bei der Intervention für Situation (A) ist abwechselnd ein Abschnitt aus einer fiktiven Diskussion und eine Frage, welche die Workshop-Teilnehmenden beantworten sollen, abgedruckt. Die fiktive Diskussion von Przenioslo (2005) wurde von mir übersetzt, namentlich verändert und an die veränderten Folgen angepasst.

Zweite fiktive Diskussion

Anna, Eva, Michael und Peter haben die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in drei Gruppen unterteilt: Folgen, die ab einem bestimmten n konstant 1 sind; Folgen, die ab einem bestimmten n der 1 beliebig nah kommen, diese aber nicht erreichen; und Folgen, die aus Teilen beider Typen bestehen. Sie versuchen nun, diese drei Gruppen von Folgen durch eine einzige Bedingung auszudrücken.

Anna: Ich hab eine Idee. Lasst uns Schläuche um die Gerade $y = 1$ zeichnen und schauen, ob für einen gegebenen Schlauch ab einem Punkt alle weiteren in diesem Schlauch liegen.

Was hältst du von Annas Idee? Kannst du solche Schläuche auf einen der Graphen zeichnen?

Peter: Warte mal, was für Schläuche meinst du denn?

Anna: So Streifen, die durch die Gerade $y = 1$ halbiert werden.

Michael: Und wie viele Schläuche willst du zeichnen?

Was ist deine Meinung? Wie viele und welche Schläuche sollen betrachtet werden?

Michael: Reicht ein Schlauch?

Eva: Aber für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann man auch einen Schlauch finden, zum Beispiel mit dem Radius 1,5 und alle Glieder sind in dem Schlauch.

Michael: Aber ich meine den Schlauch, so dass alle Glieder, die darin liegen, sich 1 annähern oder gleich 1 sind.

Was hältst du von Michaels Idee?

Eva: Aber das fasst nicht die einzelnen Fälle, die wir uns vorher angeschaut haben, zusammen. Die Folgen sehen immer noch unterschiedlich aus.

Peter: Egal ob da ein Schlauch ist oder nicht, du kannst das gleiche sehen, aber wir wollten die Bedingungen mithilfe von Schläuchen zusammenfassen. Da ein Schlauch nicht hilft, lasst uns doch mehrere betrachten.

Probier' das mal aus!

Peter: Wenn die Werte ab einer Zahl gleich 1 sind gibt es kein Problem, aber was ist mit den anderen Folgen?

Anna: Wenn wir Schläuche nehmen, die schmaler und schmaler sind, dann können wir zu jedem der Schläuche immer die natürliche Zahl n_0 finden, so dass ab diesem n_0 alle Glieder in dem Schlauch sind.

Michael: Erklär das bitte nochmal.

Versuche zu erklären, was Anna meint!

Anna: Wir zeichnen einen Schlauch irgendeiner Breite und finden n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder in dem Schlauch sind. Dann zeichnen wir einen schmaleren Schlauch und finden ein neues n_0 , so dass ab diesem alle Folgenglieder in diesem Schlauch sind. Und so weiter mit Schläuchen, die schmaler und schmaler werden.

Zeichne das, was Anna erklärt hat, an ein paar Graphen ein.

Peter: Verstehe, und das Gleiche kann man für alle Folgen machen.
Eva: Aber nicht für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denn wenn die Breite des Schlauchs zum Beispiel 0,5 ist, dann gibt es kein solches n_0 .
Michael: Also, wie viele Schläuche müssen betrachtet werden?

Was denkst du?

Peter: Immer schmalere und schmalere.
Eva: Sogar solche, die zu schmal zum Zeichnen sind.
Michael: Schmäler als was? Womit soll man anfangen?

Was meinst du?

Anna: Die breiten, die alle Folgenglieder enthalten, sind nicht wichtig. Sollten wir einfach alle Schläuche betrachten?

Stimmst du Anna zu?

Michael: Ja, die Schläuche, deren Breite eine beliebige Zahl ist, also jede positive reelle Zahl.

Fasse die Beobachtungen zusammen. Welche einzige Bedingung beschreibt die Eigenschaft?

Die zweite fiktive Diskussion hat als Ausgangspunkt eine ähnliche Situation wie die, in der sich die Studierenden befinden, wenn ihnen diese ausgehändigt wird. Die Studierenden haben die Beispielfolgen in mehrere Gruppen klassifiziert und es gelingt nicht, diese durch **eine** Bedingung auszudrücken. Die Idee, die ihnen fehlt, ist es, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten beziehungsweise Umgebungen um 1. Eine strategische Intervention würde an dieser Stelle vermutlich nicht weiterhelfen, daher ist eine inhaltliche Intervention sinnvoll. Der Ansatz, Umgebungen um 1 zu betrachten, wird in der fiktiven Diskussion geliefert, soll aber auch selbst nachvollzogen und weiterentwickelt werden. Die fiktiven Personen sprechen dabei umgangssprachlich von „Schläuchen“. Nach und nach werden die Studierenden dazu aufgefordert, Schläuche einzuzichnen, zu überlegen wie viele Schläuche betrachtet werden müssen und auch an Beispielen den Wert für n_0 zu bestimmen, so dass alle Folgenglieder, deren Index größer oder gleich n_0 ist, innerhalb eines konkreten Schlauchs liegen. Die Studierenden werden dazu angeleitet, zu entdecken, dass für einen Schlauch beliebiger Breite, der um die Gerade $y = 1$ gelegt wird, eine Zahl n_0 existiert, so dass alle Folgenglieder, deren Index größer oder gleich n_0 ist, innerhalb des Schlauchs liegen. So ist die Eigenschaft nun durch eine einzige Bedingung ausgedrückt.

Ein solches Ergebnis wäre meiner Ansicht nach durchaus zufriedenstellend. Im Idealfall müssen die Studierenden die Charakterisierung im Anschluss nur noch final formulieren, an den Beispielfolgen testen und aufschreiben. Es wäre jedoch auch möglich, dass sie die Eigenschaft am Ende zwar durch eine einzige Bedingung ausgedrückt haben, dass diese jedoch unpräzise formuliert ist. Sofern sie dies nicht bemerken oder es zwar bemerken, doch es nicht schaffen, ihre Formulierung zu präzisieren, könnten die unter (D) genannten Interventionen zum Einsatz kommen.

Situation (D)

Eine andere Situation, die auftreten kann, ist unter (D) beschrieben. Den Studierenden ist möglicherweise nicht bewusst, dass eine von ihnen gewählte Formulierung nicht dazu benutzt werden kann, zu entscheiden, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt oder nicht, oder es ist ihnen bewusst und sie sind dennoch mit ihrer Charakterisierung zufrieden. In diesem Fall muss motiviert werden, warum eine Präzisierung erforderlich ist. Das kann dadurch erreicht werden, dass die Studierenden gefragt werden, ob mit ihrer Formulierung für jede der Beispielfolgen entschieden werden kann, ob diese gegen 1 konvergiert oder nicht. Diese Intervention wurde von Swinyard und Larsen (2012) in ähnlicher Form eingesetzt. Die Autoren sind der Meinung, dass der Nachweis der Konvergenz einer Folge die Nacherfindung der Definition vorantreiben kann, da dies in der historischen Entwicklung der Definition ähnlich gewesen sei. So sei in der Definition von Cauchy (1828) noch keine Ungleichung vorgekommen, doch in Nachweisen habe er die Definition hingegen mit einer Ungleichung umgesetzt. Erst später wurde die Ungleichung in die Definition aufgenommen. Genauer ist dies in Abschnitt 2.5.4 nachzulesen. Sobald die Studierenden erkannt haben, dass es nicht möglich ist, ihre Formulierung als Entscheidungskriterium zu nutzen, werden sie die Notwendigkeit einer Präzisierung einsehen. Falls ihnen bewusst ist, dass ihre Formulierung diese Anforderung nicht erfüllt, sie jedoch keine Idee haben, wie sie sie verbessern können, sollen sogenannte ϵ -Streifen ausgegeben werden, wobei den Studierenden dieser Begriff nicht genannt wird. Diese wurden auch von Roh (2006) genutzt, um Studierende beim Verständnis des Konvergenzbegriffs zu unterstützen. Es handelt sich um transparente Streifen unterschiedlicher Breite, bei denen eine horizontale Mittellinie eingezeichnet ist. Diese können auf die bereits vorhandenen Graphen der einzelnen Folgen gelegt werden, idealerweise wird die Mittellinie dabei auf Höhe des y -Wertes 1 gelegt. Durch diese Veranschaulichung könnten die Studierenden auf die Idee kommen, verschiedene (ϵ -)Umgebungen um 1 zu betrachten beziehungsweise zu betrachten, welche oder wie viele Folgenglieder sich jeweils innerhalb und außerhalb der Streifen befinden. Die Breite der Streifen ist dabei derart gewählt, dass bei dem breitesten Streifen, wenn er geeignet auf den Graphen des Nicht-Beispiels gelegt wird, ebenfalls alle Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Bei den schmaleren Streifen hingegen ist dies nicht möglich. Das soll den Studierenden helfen, zu erkennen, dass es nicht genügt, einen Streifen zu betrachten. Des Weiteren kommt es bei den Kombinationen mehrerer Beispielfolgen mit mehreren ϵ -Streifen vor, dass sich nicht alle Folgenglieder innerhalb des Streifens befinden. Daran könnten die Studierenden entdecken, dass bei konvergenten Folgen nicht unbedingt alle Folgenglieder in einer vorgegebenen ϵ -Umgebung liegen müssen, sondern dass es irgendeinen Index gibt, ab dem alle weiteren Folgenglieder innerhalb der Umgebung liegen. Somit könnten die Studierenden nach der Beschäftigung mit den ϵ -Streifen zu einer Formulierung gelangen, dass für jede beliebige ϵ -Umgebung eine Zahl existiert,

so dass alle Folgenglieder, deren Index größer oder gleich dieser Zahl ist, sich innerhalb der ϵ -Umgebung befinden. Damit wäre die Hauptaufgabe zufriedenstellend gelöst.

Situation (E)

Wie bereits erwähnt könnte es trotz der sorgfältigen Auswahl der Beispiele und des Nicht-Beispiels theoretisch passieren, dass eine Studierendengruppe eine Eigenschaft formuliert, die nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen 1 ist, aber dennoch auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft. Da die Studierenden in so einem Fall die Aufgabenstellung erfüllt hätten, sollten sie dafür gelobt werden. Dennoch sollten sie dazu angeregt werden, zur eigentlich intendierten Eigenschaft zu gelangen. Das kann erreicht werden, indem den Studierenden eine weitere Folge präsentiert wird, welche die gesuchte Eigenschaft ebenfalls besitzen oder nicht besitzen soll. Diese muss je nach formulierter Eigenschaft geeignet ausgewählt werden. Falls es Folgen gibt, die laut formaler Definition gegen 1 konvergieren, die jedoch die formulierte Bedingung nicht erfüllen, so sollte den Studierenden eine solche Folge als zusätzliches Beispiel gegeben werden. Falls es umgekehrt Folgen gibt, welche die formulierte Bedingung erfüllen, jedoch nicht gegen 1 konvergieren, so sollte eine solche Folge als weiteres Nicht-Beispiel vorgegeben werden. Sollte diese Situation auftreten, so sollte bei der anschließenden Überarbeitung des Konzepts die Auswahl der Folgen überdacht werden.

Anmerkung

Zu erwähnen bleibt noch, dass zwei der vier von Przenioslo (2005) vorgeschlagenen Diskussionen von mir nicht vorgesehen waren. Auch das soll kurz begründet werden. In einem der beiden Fälle handelt es sich um eine kurze Diskussion, bei welcher der Frage nachgegangen wird, was unter „nähert sich 1 an ohne es zu erreichen“ verstanden werden kann. Diese Eigenschaft trifft jedoch gar nicht auf alle Beispiele zu, sondern nur auf einen Teil. Ich halte es für wichtiger, dass die Studierenden eben nicht auf dem Stand dieses eingeschränkten Präkonzeptes stehenbleiben und zweifle daher daran, ob diese fiktive Diskussion die Studierenden weiterbringen würde. Meiner Meinung nach sollten sie zuerst die Unterscheidung in Folgen, die sich 1 annähern ohne 1 zu erreichen, und solche Folgen, die irgendwann konstant 1 sind, überwinden, bevor die Formulierung anschließend präzisiert werden kann. Im anderen Fall handelt es sich um eine Diskussion, bei der von der Betrachtung von Punkten der Form (n, a_n) zur Betrachtung von Werten a_n übergegangen wird. Das basiert auf dem Hintergrund der Behandlung im Unterricht von Przenioslo (2005) und scheint hier nicht sinnvoll einsetzbar zu sein.

Andere Problemsituationen wurden im Vorfeld nicht erwartet. Es war jedoch eine der Forschungsfragen dieser Studie, was für Hürden auftreten und welche Interventionen jeweils hilfreich sein können. Es ist also durchaus möglich und auch von Interesse, dass weitere Problemsituationen auftreten. In so einem Fall muss die Lehrperson spontan darauf reagieren. Solche Hürden, die zuvor nicht erwartet wurden, sollen dann in die spätere Überarbeitung der *Hypothetical Learning Trajectory* einfließen.

4.2.5 Abschließende Aktivitäten Vorbereitungsworkshop

Im Anschluss an die Bearbeitung dieser Aufgabe in Kleingruppen soll eine Ergebnissicherung im Plenum stattfinden. Die Ergebnisse der einzelnen Gruppen werden verglichen. Sofern die Formulierungen nicht exakt gleich sind, soll gemeinsam entschieden werden, ob sie denn äquivalent zueinander sind. Dabei sind verschiedene Varianten denkbar. Es wäre beispielsweise möglich, dass sich die Formulierungen zweier Gruppen lediglich durch die Verwendung verschiedener Variablen unterscheiden. In dem Fall soll kurz der Hinweis gegeben werden, dass die Bezeichnung der Variablen die eigentliche Eigenschaft nicht verändert. Auch denkbar wäre, dass sich zwei Formulierungen dahingehend unterscheiden, dass in einem Fall $|a_n - a| < \epsilon$ und in einem anderen Fall $|a_n - a| \leq \epsilon$ vorkommen oder ähnlich mit $\forall n \geq n_0$ und $\forall n > n_0$. In so einem Fall soll anschaulich an einem Beispiel besprochen werden, warum beide formulierten Eigenschaften äquivalent sind, ohne dass ein mathematischer Beweis für die Äquivalenz durchgeführt werden soll. Weiter wäre es vorstellbar, dass eine Gruppe die Eigenschaft verbal formuliert während eine andere eine formale Definition mit Quantoren verwendet. Das kann als Anlass dienen, die Bedeutung der formalen Definition noch einmal verbal zu formulieren und dieses mit der anderen verbalen Formulierung zu vergleichen. Das bietet sich auch an, wenn eine Gruppe den Umgebungsbegriff in ihrer Charakterisierung benutzt und eine andere Gruppe die formale Definition notiert hat. Bei Bedarf könnten auch mathematische Äquivalenzbeweise geführt werden. Auf weitere Varianten, die hier nicht genannt wurden, muss die Lehrperson spontan reagieren. Sollte eine solche Situation auftreten, so sollte dies wiederum in die Überarbeitung des Konzepts einfließen.

Des Weiteren soll angesprochen werden, wie die Definition der Konvergenz gegen 1 zur Konvergenz gegen einen beliebigen Grenzwert verallgemeinert werden kann. Dazu sollen die Folgen $\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(-\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ als Beispiele gegeben werden. Im Unterrichtsgespräch werden die Studierenden zunächst gefragt, ob diese Folgen ebenfalls gegen 1 konvergieren. Möglicherweise kommt dann bereits von einem Studierenden der Vorschlag, dass diese zwar nicht gegen 1, aber gegen 2 beziehungsweise gegen -1 konvergieren. Falls das nicht der Fall ist, so soll die Lehrperson die Frage stellen, ob es denn jeweils eine analoge Eigenschaft geben könnte, die jeweils auf die Folge $\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise $\left(-\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ zutrifft. Falls erforderlich, sollen weitere Beispielfolgen mit verschiedenen Grenzwerten gegeben werden. Als Ergebnis soll die Definition in der Form festgehalten werden, wie die Studierenden sie später auch in der Vorlesung kennenlernen werden:

Definition

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Dabei wird die Bezeichnung der Variablen mit ϵ und n_0 vorgegeben, da dieselben Variablen auch in der Vorlesung benutzt werden. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass theoretisch auch andere Variablen verwendet werden können, wie es die Studierenden möglicherweise in ihren Formulierungen gemacht haben. Zum Abschluss soll die Definition noch auf mindestens eins der Beispiele angewendet werden. Sofern eine der Kleingruppen dies zuvor als zusätzliche Aufgabe bereits gemacht haben sollte, so soll diese Gruppe ihre

Bearbeitung den übrigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern vorstellen. Andernfalls soll die Bearbeitung von der Lehrperson geleitet gemeinsam durchgeführt werden.

4.2.6 Aktivitäten Nachbereitungsworkshop

Nachdem in der Vorlesung Folgen und die Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Beschränktheit und Monotonie von Folgen, Teilfolgen und Häufungspunkte definiert worden, die Grenzwertsätze und verschiedene andere Konvergenzkriterien behandelt worden, Sätze über die Beziehungen zwischen den einzelnen Begriffen bewiesen worden und sowohl in der Vorlesung als auch in den Übungen zahlreiche Beispiele betrachtet worden sind, findet der zweite Teil des Workshops statt, an dem nur diejenigen Studierenden teilnehmen dürfen, die bereits am Vorbereitungsworkshop teilgenommen haben. Ziel des zweiten Workshop-Teils ist es, die im ersten Workshop-Teil und der Vorlesung aufgebauten Vorstellungen zu vertiefen, das *Concept Image* durch die Betrachtung weiterer Beispiele anzureichern und gleichzeitig eventuell vorhandene Fehlvorstellungen abzubauen.

	Aktivität	Sozialform	Dauer
1	Wiederholung der Definition „Konvergenz“	Unterrichtsgespräch	10 Min
2	Beispiele konvergenter & divergenter Folgen	Einzelarbeit	15 Min
3	Überblick über verschiedene Möglichkeiten, Folgen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen	Gruppenarbeit	20 Min
4	Untersuchung von Folgen auf Konvergenz	Gruppenpuzzle	90 Min
5	$0,9$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs	Gruppenarbeit	45 Min
6	PAUL-Aufgabe	Einzel- & Gruppenarbeit	45 Min

Tabelle 4.3: Überblick über den zeitlichen Verlauf des Nachbereitungsworkshops

In Tabelle 4.3 wird ein Überblick über den Ablauf des Nachbereitungsworkshops gegeben. Nachfolgend wird auf die Aktivitäten genauer eingegangen.

Aktivität 1: Wiederholung der Definition „Konvergenz“

Zunächst soll die formale Definition der Konvergenz einer reellen Folge gegen einen Grenzwert a , welche die Teilnehmerinnen und Teilnehmer im ersten Teil des Workshops selbstständig erarbeitet haben und die anschließend in der Vorlesung behandelt wurde, noch einmal kurz wiederholt werden.

Aktivität 2: Beispiele konvergenter & divergenter Folgen

Im Anschluss sollen die Studierenden in Einzelarbeit Beispiele und Nicht-Beispiele konvergenter Folgen sammeln:

Arbeitsauftrag

Wir wollen uns ein möglichst breites Bild konvergenter und divergenter Folgen machen. Findet möglichst viele verschiedene Typen konvergenter und divergenter Folgen!

Dazu werden verschiedenfarbige Karteikarten ausgeteilt: Auf die gelben Karten sollen jeweils Typen konvergenter Folgen notiert werden und auf die roten Karten Typen divergenter Folgen. Ein Nachweis der Konvergenz beziehungsweise Divergenz ist an dieser Stelle nicht gefordert.

Die Aufgabenstellung ist mit der Formulierung „Typen konvergenter und divergenter Folgen“ bewusst offen gehalten. Grund für diese Formulierung ist, dass die Studierenden bei einer alternativen Formulierung der Art „Findet möglichst viele verschiedene Beispiele konvergenter und divergenter Folgen“ sehr viele sehr ähnliche Beispiele hätten nennen können. Beispielsweise wäre es denkbar, dass jemand viele verschiedene Beispiele monotoner beschränkter Folgen notiert, was bei der Formulierung mit den verschiedenen Typen eher nicht zu erwarten ist. Die Studierenden müssen die „Typen“ konvergenter und divergenter Folgen nicht unbedingt benennen, sie können auch jeweils ein oder mehrere Beispiele, die ihrer Meinung nach einen „Typ“ repräsentieren, auf einer Karte aufschreiben.

Anschließend werden in Form eines Unterrichtsgesprächs die Ergebnisse gesammelt. Die Karteikarten werden jeweils nach Typen sortiert an die Tafel geklebt. Dabei wird gemeinsam entschieden, welche Folgen zum selben Typ gehören und welche nicht. Den Studierenden soll dabei bewusst gemacht werden, dass es hier keine eindeutige Lösung gibt und auch eine andere Typisierung vorgenommen werden könnte. Die Typen konvergenter Folgen, die auf jeden Fall vertreten sein sollten, sind monotone und schließlich monotone Folgen, konstante und schließlich konstante Folgen und alternierende und schließlich alternierende konvergente Folgen. Unter den Typen divergenter Folgen sollten sowohl bestimmt divergente Folgen als auch Folgen mit mehreren Häufungspunkten und unbeschränkte Folgen mit einem Häufungspunkt vorhanden sein. Mit dem Vorsatz „schließlich“ ist hier jeweils gemeint, dass es einen Index N gibt, ab dem die Folge die jeweilige Eigenschaft besitzt. Falls einer dieser Typen von keinem Studierenden genannt werden sollte, so soll der entsprechende Typ von der Lehrkraft vorgegeben werden und die Studierenden werden dann dazu aufgefordert, ein Beispiel einer Folge diesen Typs zu konstruieren. Dies könnte beispielsweise durch folgende Frage der Lehrperson initiiert werden:

Ein Typ von Folgen, den ihr noch gar nicht genannt habt, sind Folgen mit mehreren Häufungspunkten. Versucht mal, eine solche Beispielfolge zu finden!

Ziel dieser ersten Arbeitsphase ist es, den Aufbau eines breiten *Concept Images* zum Folgenbegriff und insbesondere zu konvergenten Folgen zu fördern. Auch wenn die Studierenden im Vorbereitungsworkshop, der Vorlesung und den Übungen bereits mit verschiedenen Folgen gearbeitet haben, vermute ich, dass manche der Studierenden dennoch ein eingeschränktes *Concept Image* haben. In der Vorlesung und den Übungen werden die einzelnen Folgen auch eher separat voneinander betrachtet und beispielsweise auf Konvergenz untersucht. Dozentinnen und Dozenten gehen möglicherweise davon aus, dass die Studierenden ihr *Concept Image* automatisch anpassen wenn sie sich mit weiteren Beispielen beschäftigen. Im Workshop soll hingegen bewusst gemacht werden, dass es unter Folgen allgemein und im Speziellen auch unter konvergenten und divergenten Folgen vielfältige Beispiele verschiedenen Typs gibt.

Aktivität 3: Überblick über verschiedene Möglichkeiten, Folgen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen

Der nächste Abschnitt soll mit einer kurzen Gruppenarbeitsphase beginnen. Es soll die folgende Aufgabe bearbeitet werden:

Arbeitsauftrag

Wir möchten zusammenfassen, auf welche verschiedenen Arten man Folgen auf ihr Konvergenzverhalten untersuchen kann. Notiert die verschiedenen Möglichkeiten, die ihr in der Vorlesung kennengelernt habt, auf dem Arbeitsblatt!

Auch bei dieser Aufgabe ist es so, dass die Inhalte zuvor bereits in der Vorlesung behandelt wurden. Im Workshop soll eine Art Systematisierung des Wissens erfolgen, indem die verschiedenen Methoden, Folgen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen, gesammelt, auf einer Metaebene besprochen und anschließend angewendet werden.

Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung werden die Ergebnisse in einem Unterrichtsgespräch gesammelt und es soll detaillierter auf die einzelnen Möglichkeiten eingegangen werden. Insbesondere sollten von den Studierenden das Anwenden der Definition, die Grenzwertsätze, das Cauchy-Kriterium und das hinreichende Kriterium „Monotonie und Beschränktheit“ genannt werden. Falls eine dieser Möglichkeiten von niemandem genannt werden sollte, gibt die Lehrperson ein Beispiel einer Folge vor und die Studierenden sollen sich überlegen, wie sie diese Beispielfolge auf Konvergenz untersuchen würden. Da es zu diesem Zeitpunkt erst einmal darum gehen soll, die verschiedenen Möglichkeiten zu sammeln und auf einer Metaebene zu besprechen, ist die tatsächliche Untersuchung der Folgen auf Konvergenz nicht gefordert. Die folgenden Beispiele sind vorgesehen:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{(-1)^n}{n} & n \leq 100 \\ 1 & n > 100 \end{cases}$, falls das Anwenden der Definition nicht genannt wurde
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, falls die Grenzwertsätze nicht genannt wurden
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} \quad \forall n \geq 2$, falls das Cauchy-Kriterium nicht genannt wurde
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 0,6 \cdot a_n + 5 \quad \forall n \geq 1$, falls „Monotonie und Beschränktheit“ nicht genannt wurde

Das Beispiel für das Anwenden der Definition wurde ausgewählt, weil es in diesem Fall sehr leicht ist, die Definition anzuwenden. Unabhängig von $\epsilon > 0$ kann $n_0 = 101$ oder eine beliebige größere natürliche Zahl gewählt werden, und die Ungleichung $|a_n - 1| < \epsilon$ ist trivialerweise erfüllt, weshalb die Folge gegen 1 konvergiert. Sowohl das Anwenden der Grenzwertsätze als auch das Cauchy-Kriterium wären hier aufwendiger, da die Folge nicht durch einen einzigen Term definiert ist. Das hinreichende Kriterium „Monotonie und Beschränktheit“ kann bei diesem Beispiel nicht benutzt werden, da die Folge nicht monoton ist. Das Beispiel für die Grenzwertsätze wurde ausgewählt, weil die Grenzwertsätze in dem Fall die einfachste Variante darstellen, da aus der Vorlesung die Grenzwerte der Folgen $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(5)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ bekannt sind. Bei rekursiv definierten

Folgen lassen sich weder die Definition noch die Grenzwertsätze direkt benutzen. Daher wurde sowohl für das Cauchy-Kriterium als auch für „Monotonie und Beschränktheit“ eine solche Folge ausgewählt. Im ersten Fall handelt es sich um eine Folge, die nicht monoton ist, weshalb „Monotonie und Beschränktheit“ keine Anwendung findet, im zweiten Fall hingegen handelt es sich um eine monotone Folge. Falls von Teilnehmenden für eine der Beispielfolgen ein Kriterium vorgeschlagen wird, das nicht zielführend ist, so soll besprochen werden, warum das Kriterium für das jeweilige Beispiel nicht geeignet ist. Das kann je nach Beispielfolge und Kriterium entweder theoretisch erfolgen oder indem versucht wird, das Kriterium anzuwenden. Als weitere Möglichkeiten könnten von den Studierenden theoretisch noch der Vergleichssatz, „Beschränktheit und genau ein Häufungspunkt“ und „Beschränktheit und $\limsup = \liminf$ “ genannt werden. Sofern diese Möglichkeiten von keinem Teilnehmenden genannt werden, so wird nicht im einzelnen darauf eingegangen. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass es sich um keine vollständige Sammlung der verschiedenen Möglichkeiten zur Untersuchung von Folgen auf ihr Konvergenzverhalten handelt.

Die einzelnen Möglichkeiten werden dann auf einer Metaebene besprochen. So soll darauf eingegangen werden, ob sich anhand der jeweiligen Methode sowohl zeigen lässt, dass eine Folge konvergiert, als auch, dass eine Folge nicht konvergiert. Des Weiteren wird thematisiert, ob der potenzielle Grenzwert einer Folge vorher schon bekannt sein muss. Außerdem wird diskutiert, für welche Arten von Folgen sich die jeweilige Methode anbietet und es sollen typische Fehler angesprochen werden. Für das Anwenden der formalen Definition ist entscheidend, dass die Studierenden die umgekehrte Beziehung zwischen ϵ und n_0 verstanden haben: Zu beliebigem, aber festen $\epsilon > 0$ muss ein davon abhängiges $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmt werden, und nicht für ein vorgegebenes $n_0 \in \mathbb{N}$ die Abweichung ϵ angegeben werden (Roh, 2005). Beim Anwenden der Grenzwertsätze hingegen ist es wichtig, dass die Studierenden diese nicht ausschließlich als Rechenregeln verstehen, sondern vor allem die Existenzaussage in den Sätzen beachten. Dazu gehört insbesondere, dass sie die Voraussetzungen der Sätze überprüfen. Diejenigen Aspekte, die nicht von den Teilnehmenden genannt werden, sollen von der Lehrperson eingebracht werden.

Aktivität 4: Untersuchung von Folgen auf Konvergenz

Anschließend sollen die Studierenden verschiedene Folgen unter Verwendung der zuvor reflektierten Möglichkeiten auf Konvergenz untersuchen. Einerseits wäre es wünschenswert gewesen, dass jeder Studierende jede der zuvor genannten Möglichkeiten innerhalb des Workshops mindestens einmal selbst anwenden würde, im Idealfall sogar bei den meisten Möglichkeiten zweimal, nämlich einmal um die Konvergenz einer Folge zu zeigen und einmal um zu zeigen, dass eine Folge nicht konvergiert. Das ist aus Zeitgründen jedoch in dieser Form nicht möglich. Um sicherzustellen, dass die Studierenden sich dennoch mit allen der Möglichkeiten beschäftigen, wird die nächste Arbeitsphase in Form eines Gruppenpuzzles gestaltet.

In Gruppen von je drei bis vier Studierenden sollen je zwei Folgen auf Konvergenz untersucht werden. Anschließend werden die Gruppen gemischt, so dass sich jeweils Studierende zusammenfinden, die zuvor unterschiedliche Folgen untersucht haben. Diese sollen sich nun gegenseitig ihre Bearbeitungen vorstellen.

Bei 12 Teilnehmerinnen und Teilnehmern würde jeder also zwei Folgen selbst untersuchen und die Bearbeitungen vier weiterer Folgen von anderen Studierenden präsentiert

bekommen. Diese Sozialform hat auch den Vorteil, dass sich während der ersten Gruppenarbeitsphase alle Gruppenmitglieder an der Bearbeitung beteiligen müssen oder das Gruppenergebnis zumindest so gut verstehen müssen, dass sie dieses danach anderen erklären können.

Die entsprechende Aufgabenstellung lautet:

Arbeitsauftrag

Untersucht die beiden Folgen auf Konvergenz. Bestimmt gegebenenfalls auch den Grenzwert.

Jeder von euch sollte anschließend in der Lage sein, eure Lösung anderen erklären zu können!

Die ausgewählten Folgen und die dafür vorgesehenen Methoden sind die folgenden:

Folge	Methode
$a_n = \begin{cases} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right) & n \leq 1000000 \\ 2 + \frac{(-1)^n}{n} & n > 1000000 \end{cases}$	Konvergenz (gegen 2) durch Anwenden der Definition
$b_1 = \sqrt{2}, b_{n+1} = \sqrt{2b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Konvergenz (gegen 2) durch „Monotonie und Beschränktheit“
$c_n = n^2 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Divergenz durch Unbeschränktheit
$d_n = \frac{1-n}{4n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Konvergenz (gegen $-\frac{1}{4}$) durch Grenzwertsätze
$e_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Divergenz durch das Nachweisen zweier Häufungspunkte
$f_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$	Konvergenz gegen 1 durch Anwenden der Definition
$g_n = \frac{-4n^2}{-2-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$	Divergenz durch Unbeschränktheit

Tabelle 4.4: Übersicht über die zu untersuchenden Folgen

Die jeweilige Methode wird den Studierenden dabei nicht vorgegeben. Eine Gruppe soll die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die zweite Gruppe die Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die dritte Gruppe die Folgen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ untersuchen. Die letzte der Folgen soll bei Bedarf herausgegeben werden, falls eine der Gruppen deutlich schneller mit der Bearbeitung fertig ist als die übrigen Gruppen.

Es wäre natürlich auch möglich, dass die Studierenden eine andere als die von mir vorgesehene Möglichkeit zur Untersuchung der jeweiligen Folge auswählen würden. Das ließe sich lediglich vermeiden, indem die jeweilige Methode vorgegeben wäre. Das jedoch ist nicht erwünscht, da das Auswählen einer geeigneten Methode zur Untersuchung einer Folge auf Konvergenz bereits einen Teil der Bearbeitung bildet, der den Studierenden erfahrungsgemäß schwer fällt und daher in dem Workshop nicht wegfallen sollte.

Auch bei dem Gruppenpuzzle ist es vorgesehen, dass die Lehrperson lediglich bei Bedarf eingreift und unterstützt. Dazu wurde im Vorfeld zu den einzelnen Problemsituationen, die zu erwarten waren, geplant, wie jeweils interveniert werden sollte. Einen Überblick gibt die folgende Tabelle:

Situation	Intervention
(A) Die Studierenden finden keinen Ansatz.	Frage: <i>Was vermutet ihr denn, konvergiert die Folge?</i> falls keine Idee: <i>Vielleicht bekommt ihr ja eine Vermutung, indem ihr euch einmal die ersten Folgenglieder anschaut oder eine Skizze erstellt.</i>
(B) Die Studierenden haben eine Vermutung, ob die Folge konvergiert oder nicht, wissen aber nicht, welche Methode sie wählen sollen, um dies zu zeigen	Wir gehen die verschiedenen Methoden noch einmal gemeinsam durch. Frage: <i>Könnt ihr irgendeine der Methoden hier ausschließen?</i> Es kann auch der Hinweis gegeben werden, dass nicht eine Methode die richtige ist, sondern mehrere möglich sind.
(C) Die Studierenden haben sich für eine geeignete Methode entschieden, scheitern jedoch bei der Umsetzung.	Bei kleinerem Problem bei der Umsetzung erhalten sie Unterstützung durch die Lehrperson, bei größerem Problem wird eine kommentierte Untersuchung einer anderen Folge durch dieselbe Methode ausgehändigt (siehe unten und nächste Seiten)

Tabelle 4.5: Übersicht über die vorgesehenen Interventionen

Die bei Situation (C) vorgesehenen kommentierten Untersuchungen anderer Folgen sind die folgenden:

- **Anwenden der Definition:**

Konvergiert die Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

Schritt 1: Vermutung über das Konvergenzverhalten/den Grenzwert aufstellen

Betrachtung der ersten Folgenglieder $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}, \dots$ führt zur

Vermutung: $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

Schritt 2: Sei $\epsilon > 0$.

Schritt 3: Das Bestimmen eines geeigneten $n_0 \in \mathbb{N}$ im Sinne der Definition

Dieser Schritt ist das Wesentliche! Wir setzen zunächst in den Term $|a_n - a|$ ein und fassen diesen zusammen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Es gilt also $|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$.

Schritt 4: Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$

Die Wahl von n_0 ergibt sich aus dem vorherigen Schritt: Wenn wir $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ wählen, dann gilt $\forall n \geq n_0 : n > \frac{1}{\epsilon}$.

Schritt 5: Erhalten der Ungleichung $|a_n - a| < \epsilon$

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Wir haben nun bewiesen, dass die Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

- „Monotonie und Beschränktheit“:

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 5$ und $a_{n+1} = 0,6 \cdot a_n + 5 \quad \forall n \geq 1$?

Schritt 1: Monotonie

Es gilt $a_1 < a_2$. Falls die Folge monoton ist, muss sie also monoton wachsend sein.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < 0,6 \cdot a_n + 5 \Leftrightarrow 0,4 \cdot a_n < 5 \Leftrightarrow a_n < 12,5$.

Das heißt, die Folge ist genau dann monoton, wenn sie durch 12,5 nach oben beschränkt ist. Wenn wir das zeigen können, hätten wir sowohl die Monotonie als auch die Beschränktheit bewiesen.

Schritt 2: Beschränktheit

Zu zeigen: $a_n < 12,5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $a_1 = 5 < 12,5$

Induktionsschritt: Zeige $a_{n+1} < 12,5$ falls $a_n < 12,5$.

$$a_{n+1} = 0,6 \cdot a_n + 5 < 0,6 \cdot 12,5 + 5 = 7,5 + 5 = 12,5$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < 12,5$$

Die Folge ist monoton und beschränkt, daher ist sie konvergent.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, dass die Folge konvergiert, aber nicht, was ihr Grenzwert ist.

Schritt 3: Bestimmung des Grenzwerts

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, gibt es einen Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$. Durch Einsetzen, Umformen und Anwenden der Grenzwertsätze erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (0,6 \cdot a_n + 5) \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0,6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 5 \\ \Leftrightarrow 0,4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 5 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 12,5 \end{aligned}$$

- fehlende Beschränktheit:

Konvergiert die Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$?

Angenommen, die Folge ist beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt. Dann gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $n^2 \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Archimedes gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > C$ und $m > 1$. Dann folgt aber $m^2 > C$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also war die Annahme falsch, das heißt die Folge ist nicht (nach oben) beschränkt.

Da die Folge unbeschränkt ist, ist sie divergent.

- Anwenden der Grenzwertsätze:

Konvergiert die Folge $\left(\frac{n}{6n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

Man könnte auf die Idee kommen, die Folgen $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(6n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ zu betrachten und den Grenzwertsatz für Quotienten anzuwenden. Das ist allerdings nicht möglich, da weder die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ noch die Folge $(6n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Schritt 1: Umformen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{6n^2+1} = \frac{n^2 \frac{1}{n}}{n^2(6+\frac{1}{n^2})} = \frac{\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n^2}}$$

Bei Folgen, die durch einen Bruchterm definiert sind, ist es oft sinnvoll, die höchste Potenz von n auszuklammern und zu kürzen.

Schritt 2: Grenzwertsätze anwenden

Die Folgen $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gegen 0 und die Folge $(6)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 6.

Also konvergiert die Folge $(\frac{n}{6n^2+1})_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n^2}})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls und für ihren Grenzwert gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{6+0} = 0$$

Es wird den Studierenden jeweils die beispielhafte Untersuchung einer Folge auf ihr Konvergenzverhalten ausgehändigt, bei der die Methode angewendet wird, für die sich die Studierenden entschieden haben. Diese Untersuchungen sind bewusst ausführlicher formuliert, als das in einer Vorlesung üblicherweise der Fall ist. Der Grund dafür ist, dass das Vorgehen für die Studierenden nachvollziehbar sein soll, damit sie es auf die ihnen vorliegende Folge übertragen können. Beim Anwenden der Definition beispielsweise würde der Schritt 3, in dem n_0 bestimmt wird, üblicherweise lediglich als Vorüberlegung stattfinden und letztendlich nicht notiert werden. Dann wäre jedoch nicht nachvollziehbar, warum in dem Beispiel $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ gewählt wird. Zusätzliche Kommentare sind kursiv gedruckt, um deutlich zu machen, dass es sich um etwas zusätzliches handelt.

Aktivität 5: $0, \bar{9}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs

Die nächste Aufgabe soll in Gruppenarbeit bearbeitet werden:

Arbeitsauftrag

Ein Student behauptet: „Unter $0, \bar{9}$ versteht man den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$, $n \in \mathbb{N}$, und dieser ist kleiner als 1“.

1. Prüfe, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.
2. Nimm begründet Stellung zu der Behauptung des Studenten.

Wie in Abschnitt 2.4 berichtet, sind zahlreiche Studierende der Meinung, $0, \bar{9}$ sei kleiner als 1. Insbesondere wird $0, \bar{9}$ oft als Prozess betrachtet und nicht als Produkt eines Prozesses. Der Prozess wäre in diesem Fall, nach und nach immer mehr Nachkommastellen zuzulassen. Das Produkt dieses hingegen entspricht dem Grenzwert der in der Aufgabenstellung genannten Folge. Jemand, der $0, \bar{9}$ lediglich als Prozess auffasst, sieht $0, \bar{9}$ möglicherweise gar nicht als Zahl an, sondern eben als Folge, von der jedes einzelne Glied tatsächlich kleiner als 1 ist. Durch diese Aufgabe soll bei denjenigen Studierenden, die $0, \bar{9}$ ausschließlich als Prozess ansehen, ein kognitiver Konflikt erzeugt werden. Dass die

gegebene Folge gegen 1 konvergiert ist theoretisch schon aus der Hauptaufgabe des Vorbereitungsworkshops bekannt und lässt sich auch leicht nachweisen. Wenn $0,\bar{9}$ nun genau dieser Grenzwert ist, dann kann $0,\bar{9}$ nicht kleiner als 1 sein. Der Aspekt aus der fiktiven Aussage eines Studenten, dass $0,\bar{9}$ der Grenzwert der genannten Folge ist, wurde in die Aufgabenstellung mitaufgenommen, da andernfalls die Studierenden bei der Bearbeitung der ersten Teilaufgabe antworten könnten, der Grenzwert der Folge sei $0,\bar{9}$ und damit hätten sie die Aufgabe bearbeitet.

Die Ergebnisse werden anschließend in Form eines Unterrichtsgesprächs gesammelt. Sollte der Fall eintreten, dass Studierende nach der Bearbeitung dieser Aufgabe noch der Meinung sind, $0,\bar{9}$ sei kleiner als 1, so soll diese Aussage zum Widerspruch geführt werden, um die Studierenden vom Gegenteil zu überzeugen. Dabei soll ähnlich vorgegangen werden wie bei Danckwerts und Vogel (2006, S. 28 ff.):

*Angenommen $0,\bar{9} < 1$. Dann gibt es einen positiven Abstand $d := 1 - 0,\bar{9}$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 - 0,\underbrace{9\dots9}_n = 0,\underbrace{0\dots0}_{n-1}1 = \frac{1}{10^n}$. Nach dem Satz von
Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{1}{d}$ und somit $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < d$. Das
würde bedeuten, dass $0,\underbrace{9\dots9}_n < 0,\bar{9}$, was jedoch falsch ist. Daher muss die
Annahme $0,\bar{9} < 1$ verworfen werden, es gilt $0,\bar{9} = 1$.*

Laut Richman (1999, S. 396) sind alternative Begründungen wie $\frac{1}{3} = 0,\bar{3} \Rightarrow 1 = 0,\bar{9}$ oder mit Hilfe der Summenformel für die geometrische Reihe $\left(0,\bar{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1\right)$ oder indem $x = 0,\bar{9}$ gesetzt wird, diese Gleichung mit zehn multipliziert wird und anschließend beide Gleichungen voneinander subtrahiert werden, so dass zunächst $9x = 9$ resultiert und daraus dann $x = 1$ geschlussfolgert wird, nicht unbedingt geeignet, um jemanden, der an $0,\bar{9} = 1$ zweifelt, zu überzeugen. Ein Skeptiker könnte beispielsweise die Zulässigkeit von Operationen wie der Multiplikation eines unendlichen Dezimalbruchs oder der Subtraktion zweier Gleichungen mit unendlichen Dezimalbrüchen in Frage stellen oder er könnte im Fall der Summenformel für die geometrische Reihe argumentieren, dass daraus lediglich gefolgert werden kann, dass $0,\bar{9}$ gegen 1 konvergiert. Bei dem von Danckwerts und Vogel (2006) vorgeschlagenen Widerspruchsbeweis hingegen wird eher inhaltlich als durch formale Operationen argumentiert und es wird ein kognitiver Konflikt erzeugt, der schließlich zum Aufgeben der Ansicht $0,\bar{9} < 1$ führt.

Den Studierenden soll nach dieser Aktivität bewusst sein, dass $0,\bar{9}$ als Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 0,\underbrace{9\dots9}_n$, $n \in \mathbb{N}$ verstanden werden kann. Sie sollen $0,\bar{9}$ also als Produkt eines unendlichen Prozesses auffassen und somit als Zahl. Außerdem sollen sie verstehen, dass diese Zahl nicht kleiner als 1 sein kann, sondern gleich 1 sein muss.

Aktivität 6: PAUL-Aufgabe

Die letzte Aufgabe, die für den Workshop vorgesehen ist, ist die folgende:

Arbeitsauftrag

Wir sagen, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ habe die PAUL-Eigenschaft, wenn gilt:

Es gibt eine reelle Zahl a , es gibt ein $\epsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

1. Ist die Definition der PAUL-Eigenschaft äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge? Entscheide dazu, ob die folgenden Aussagen stimmen. Begründe deine Antwort!
 - a) Jede konvergente Folge hat die PAUL-Eigenschaft.
 - b) Jede Folge, die die PAUL-Eigenschaft hat, ist konvergent.
2. Gib drei verschiedene Beispiele von Folgen an, die die PAUL-Eigenschaft haben, aber nicht konvergent sind.
3. Gib mit Hilfe anderer aus der Vorlesung bekannter Eigenschaften von Folgen genau an, welche Folgen die PAUL-Eigenschaft haben.

Diese Aufgabe wurde in ähnlicher Form im Rahmen einer Vorstudie im Wintersemester 2011/12 erprobt und in der Examensarbeit von Inka Haak (2012) analysiert. Die ursprüngliche Aufgabenstellung unterscheidet sich zum einen dadurch, dass sie nicht nur für reelle, sondern für komplexe Folgen formuliert ist, weil in der entsprechenden Analysis-1-Vorlesung komplexe Folgen behandelt wurden. Die Studierenden, die an dem Workshop teilnehmen, haben in der Analysis-1-Vorlesung hingegen nur reelle Folgen behandelt. Außerdem war die ursprüngliche Aufgabe etwas offener formuliert:

„Überlege, welche Eigenschaften eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ hat, für die folgendes gilt:

$\exists a \in \mathbb{C} \exists \epsilon > 0$ und $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$

(Nennen wir diese Eigenschaft die PAUL-Eigenschaft.) Überlege dazu, ob die folgenden Aussagen gelten. Begründe deine Antwort.

- Wenn eine Folge konvergent ist, dann hat sie die PAUL-Eigenschaft.
- Wenn eine Folge die PAUL-Eigenschaft hat, dann ist sie konvergent.“

(Haak, 2012, S. 31).

Es hat sich gezeigt, dass die meisten beobachteten Studierenden den ersten Teil der Aufgabe, welche Eigenschaft eine solche Folge hat, überlesen haben und lediglich die beiden unteren Aussagen überprüft haben (Haak, 2012, S. 101). Daher werden die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer expliziter in einem separaten Aufgabenteil dazu aufgefordert, mit Hilfe anderer aus der Vorlesung bekannter Eigenschaften genau anzugeben, welche Folgen die PAUL-Eigenschaft haben. Tatsächlich ist die PAUL-Eigenschaft äquivalent zur Beschränktheit einer Folge, was jedoch nicht offensichtlich ist. Die Studierenden werden durch die drei Teilaufgaben Schritt für Schritt zu diesem Ergebnis geleitet. Die Teilaufgaben werden einzeln ausgegeben werden, da durch die Formulierung der Teilaufgabe 2 andernfalls ein Teil der Lösung von Teilaufgabe 1 bereits vorweg genommen werden würde. Die ersten beiden Teilaufgaben sollen jeweils in Einzelarbeit gelöst werden, über die dritte Teilaufgabe soll anschließend in Kleingruppen diskutiert werden. In Teilaufgabe 1 muss zunächst der Unterschied zwischen den Definitionen der Konvergenz einer Folge und der PAUL-Eigenschaft erkannt werden, was in der Vorstudie tatsächlich unerwartet große Schwierigkeiten bereitet hat (Haak, 2012, S.

60ff.). Dass die Aussage a) korrekt ist, muss anschließend erkannt und begründet werden, wobei der Nachweis verhältnismäßig simpel ist. Die Aussage b) hingegen stimmt nicht, sie muss also widerlegt werden. Da in der Vorstudie viele Studierende ihre Antwort, eine Folge, welche die PAUL-Eigenschaft besitze, sei nicht unbedingt konvergent, zumindest in den schriftlichen Ausführungen nicht durch ein Gegenbeispiel begründet haben (Haak, 2012, S. 53), werden die Teilnehmenden des Workshops in der zweiten Teilaufgabe explizit dazu aufgefordert sogar drei solche Folgen anzugeben. In diesem Fall mussten Folgen konstruiert werden, die beschränkt sind, jedoch nicht konvergieren. Passende Gegenbeispiele wären daher Folgen mit mehreren Häufungspunkten. In der Vorstudie haben alle Probanden die ihnen aus der Vorlesung bekannte Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ verwendet (Haak, 2012, S. 98f.). Wenn nur ein einziges Gegenbeispiel gefordert wäre, so könnten die Studierenden das ihnen bekannte Standardbeispiel einer nicht konvergenten Folge überprüfen und feststellen, dass dieses tatsächlich die PAUL-Eigenschaft besitzt. Dieses Vorgehen ließe sich kaum als Konstruktion eines Gegenbeispiels bezeichnen, was jedoch ein Ziel der Aufgabe ist. Außerdem können die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch eher Erkenntnisse in Bezug auf den dritten Aufgabenteil gewinnen, wenn sie mehrere Gegenbeispiele betrachten. Daher wird die Angabe von drei Gegenbeispielen gefordert. Als Voraussetzungen zum Bearbeiten der Aufgabe kennen die Studierenden sowohl die Definition der Konvergenz einer Folge als auch die der Beschränktheit. Sie haben in Übungsaufgaben zur Vorlesung bereits Beweise selbst geführt, und zwar auch aufwendigere, als die hier geforderten Beweise. Im Prinzip haben sie sogar den im ersten Aufgabenteil geforderten Beweis bereits in der Vorlesung gesehen, und zwar wurde dort bewiesen, dass die Konvergenz einer Folge deren Beschränktheit impliziert. Da die Studierenden während der Bearbeitung der ersten Teilaufgabe jedoch noch nicht unbedingt wissen, dass es sich bei der PAUL-Eigenschaft um eine zur Beschränktheit äquivalente Eigenschaft handelt, ist ihnen das in dem Moment eher nicht bewusst. Außerdem wurde die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sich als ein Beispiel für den zweiten Aufgabenteil eignet, bereits in der Vorlesung behandelt. Mit dem Generieren von Folgen mit vorgegebenen Eigenschaften sind die Studierenden noch nicht besonders vertraut, dies war lediglich Gegenstand einer Bonusaufgabe. Zu den Zielen der Aufgabe gehören zum einen die Schulung im Umgang mit neuen Definitionen und das In-Beziehung-Setzen eines neuen Begriffs zu bereits bekannten Konzepten. Des Weiteren wird das Konstruieren von Folgen mit bestimmten Eigenschaften geübt, das zu einem vertieften Begriffsverständnis gehört, wie auch die Abgrenzung des Konvergenzbegriffs von anderen Begriffen. Außerdem soll die Fähigkeit der Beweisführung gefördert werden (Haak, 2012, S. 31f.).

Sowohl für den vorbereitenden als auch für den nachbereitenden Teil des Workshops wurde nun das Konzept samt einzelnen Aktivitäten und möglichen Unterstützungsangeboten vorgestellt. Der Workshop wurde im Wintersemester 2012/13 nach diesem Konzept an der Universität Paderborn umgesetzt. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Hauptaufgabe des Vorbereitungsworkshops, in der die Studierenden die Definition der Konvergenz gegen 1 angeleitet nacherfinden sollen. In Kapitel 6 werden die Erkenntnisprozesse während dieser Nacherfindung retrospektiv analysiert. Darauf aufbauend folgt in Kapitel 7 eine Weiterentwicklung des Konzepts.

5 Quantitative Teilstudie

Wie in Kapitel 3 erwähnt soll zum einen untersucht werden, über welche Kenntnisse und Vorstellungen im Zusammenhang mit dem Begriff der Folgenkonvergenz Mathematikstudierende nach der Behandlung des Themas in der Analysis-1-Vorlesung verfügen. Zum anderen soll herausgefunden werden, ob sich unter Berücksichtigung des Vorwissens ein Unterschied in diesen Kenntnissen und Vorstellungen zwischen den Workshopteilnehmenden und den übrigen Studierenden nachweisen lässt. Dazu werden zwei verschiedene Tests benötigt: ein Test, der das Vorwissen abfragt und ein Test zur Erhebung der Vorstellungen und Kenntnisse zum Konvergenzbegriff. Dabei wird unter einem Test Folgendes verstanden:

„Ein Test ist ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Erfassung eines oder mehrerer empirisch abgrenzbarer psychologischer Merkmale mit dem Ziel einer möglichst quantitativen Aussage über den Grad der individuellen Merkmalsausprägung.“ (Moosbrugger und Kelava, 2008, S. 2)

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 auf die diesen Tests zugrunde liegende Testtheorie, die Item-Response-Theorie, eingegangen. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 erläutert, wie die Tests entwickelt wurden, aus welchen Items sie bestehen und welche Gütekennzahlen sie besitzen. In Abschnitt 5.3 werden einige Ergebnisse aller Studierenden der Veranstaltung „Analysis 1“ präsentiert. Schließlich wird in Abschnitt 5.4 untersucht, ob ein Effekt der Workshopteilnahme nachgewiesen werden kann.

5.1 Item-Response-Theorie als Methode zur Entwicklung und Auswertung von Tests

Zur Konstruktion von Tests, anhand derer Aussagen über die tatsächliche Ausprägung eines Merkmals getroffen werden können, und auch zur Auswertung dieser Tests gibt es im Wesentlichen zwei gebräuchliche Testtheorien: die klassische Testtheorie und die Item-Response-Theorie. Ich grenze beide Testtheorien kurz voneinander ab, bevor ich auf die Item-Response-Theorie, die zur Konstruktion und Auswertung meiner Tests verwendet wurde, genauer eingehe.

5.1.1 Klassische Testtheorie

Bei der klassischen Testtheorie (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 99ff.), die auch als Messfehlertheorie bezeichnet wird, ist die Grundannahme, dass sich das Testergebnis, also wie viele Items eine Person richtig oder falsch beziehungsweise mit welcher Punktzahl beantwortet hat, additiv aus dem wahren Ausprägungsgrad des untersuchten Merkmals und einem Messfehler zusammensetzt. Über den Messfehler wird weiter angenommen, dass

sein Mittelwert bei wiederholten Testanwendungen Null ist, dass er nicht mit dem wahren Wert korreliert, dass er unabhängig vom Ausprägungsgrad anderer Persönlichkeitsmerkmale ist, und, dass Fehlerwerte verschiedener Testanwendungen unkorreliert sind. Liegen die von Probanden bearbeiteten Tests vor, so muss zunächst der Testwert eines jeden Probanden ermittelt werden. Im einfachsten Fall ist dies die Anzahl der richtigen Antworten. Im Falle nicht dichotomer Antwortformate liegt für jeden Probanden pro Item eine Punktzahl vor, die als Itemwert bezeichnet wird. Dies trifft auch auf Fragebögen mit Ratingskalen zu, bei einem k-stufigen Antwortformat werden allen möglichen Antworten die Punktzahlen von 0 bis $k - 1$ zugeordnet. Wurden bei Proband v in einem Test bestehend aus den Items 1 bis m die Itemwerte $x_{v1}, \dots, x_{vm}$ gemessen, so wird der Testwert des Probanden üblicherweise als Summe der Itemwerte, also $x_v = \sum_{i=1}^m x_{vi}$, gebildet. Die Itemwerte sind dabei üblicherweise nicht negative Punktzahlen. Über diesen Testwert wird nun angenommen, dass er die Summe aus dem wahren Wert und einem Messfehler ist. Aus den weiteren genannten Annahmen lässt sich folgern, dass der Erwartungswert des Testwerts bei unendlich vielen Testanwendungen genau dem wahren Wert entspricht, da die Items wiederholte Messungen desselben wahren Wertes in einem Merkmal sind. Daher ist es plausibel, diesen Testwert als Schätzer für den wahren Wert zu nutzen. Die Hauptkriterien zur Bestimmung der Güte eines Tests sind in der klassischen Testtheorie die Reliabilität, Objektivität und Validität. Reliabilität bezeichnet die Messgenauigkeit eines Tests. Ein Test ist dann sehr reliabel, wenn die Messfehler sehr klein sind, also die gemessenen Testwerte sehr nah an den wahren Werten sind. Definiert ist die Reliabilität als Anteil der Varianz der wahren Werte an der Varianz der gemessenen Testwerte, $Rel = \frac{s_T^2}{s_X^2}$. Da die wahren Werte ja nicht gemessen werden können, kann auch die Varianz der wahren Werte nicht direkt berechnet werden. Es gibt jedoch verschiedene Möglichkeiten, diese zu schätzen. Vier übliche Methoden zur Bestimmung der Reliabilität eines Tests sind die Retestreliabilität, Paralleltestreliabilität, Testhalbierungsreliabilität und interne Konsistenz. Bei der Retestreliabilität muss derselbe Test von derselben Stichprobe zweimal mit zeitlichem Abstand dazwischen bearbeitet werden. Die Reliabilität wird dann als Korrelation beider Messwertreihen berechnet. Im Falle der Paralleltestreliabilität werden zwei Testversionen benötigt, die beide dasselbe Konstrukt messen. Beide Tests werden dann von derselben Stichprobe kurz nacheinander bearbeitet. Die Varianz der wahren Werte wird durch die Kovarianz der Testwerte beider Tests geschätzt. Die Testhalbierungsreliabilität kann als Spezialfall der Paralleltestreliabilität aufgefasst werden. Hier entstehen die beiden Testversionen, indem ein Test (zum Beispiel zufällig) in zwei Teilttests halbiert wird. Die Methode der internen Konsistenz ist eine Erweiterung der Reliabilitätsbestimmung über die Testhalbierung. Dabei wird der Test nicht in zwei Hälften unterteilt, sondern in so viele Teilttests, wie er Items enthält, das heißt jedes Item wird als einzelner Teilttest aufgefasst. Die Korrelationen zwischen den Itemwerten wird dann für die Schätzung der Varianz der wahren Werte genutzt. Als übliche Berechnung wird die Formel für Cronbach's Alpha benutzt: $\alpha = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^m s_{\text{Item } i}^2}{s_{\text{Testwert}}^2} \right)$, wobei m die Anzahl der Items bezeichnet. Unter Objektivität ist die Unabhängigkeit der Testergebnisse von der Person, die den Test durchführt, zu verstehen. Unterschieden wird in Durchführungsobjektivität, Auswertungsobjektivität und Interpretationsobjektivität. Laut Bortz und Döring (2006, S. 195f.) ist die Objektivität eines Tests relativ leicht zu erreichen, indem die Durchführung, Auswertung und Interpretation der Ergebnisse standardisiert festgelegt werden. Die Validität eines Tests ist erfüllt, wenn der Test tatsächlich das ge-

wünschte Konstrukt misst. Sie wird unterteilt in Inhaltsvalidität, Kriteriumsvalidität und Konstruktvalidität. Inhaltsvalidität ist dann gegeben, wenn alle inhaltlichen Aspekte des Konstrukts durch Items abgedeckt sind. Dieses Gütekriterium wird nicht durch einen numerischen Wert quantifiziert. Kriteriumsvalidität kann nur überprüft werden, wenn ein zu dem zu untersuchenden Merkmal passendes Außenkriterium existiert, das auch gemessen werden kann. Sollen beispielsweise mit einem Test gewisse Prognosen gemacht werden, so könnte im Nachhinein überprüft werden, inwieweit die Prognosen zutreffen. Die Kriteriumsvalidität wird dann als Korrelation zwischen den Testwerten und den Werten des Außenkriteriums berechnet. Konstruktvalidität bedeutet, dass anhand der Testergebnisse Hypothesen verifiziert werden können, die zu dem zu untersuchenden Konstrukt aus der Theorie belegt oder aus anderen empirischen Untersuchungen abgeleitet wurden. Allgemein lässt sich sagen, dass es sich bei der klassischen Testtheorie um eine Testtheorie handelt, die vielfach verwendet wird, laut Rost (1999) sind 95% der vorhandenen Tests nach klassischer Testtheorie entwickelt worden. Außerdem erfordert die klassische Testtheorie verhältnismäßig wenig Aufwand bei der Umsetzung. Kritisiert wird allerdings, dass die getroffenen Annahmen nicht empirisch überprüfbar sind. Dies ist vor allem bei der Grundannahme, der beobachtete Testwert sei die Summe aus dem wahren Wert und einem Fehlerwert, der Fall, da weder der wahre Wert noch der Fehlerwert direkt gemessen werden können. Auch kann nicht überprüft werden, ob die Testwerte tatsächlich intervallskaliert sind, was jedoch benutzt wird. Ein weiteres Problem besteht darin, dass nicht überprüft werden kann, ob die Itemhomogenität vorliegt, ob also die Items eines Tests tatsächlich dasselbe Merkmal erfassen. Die Berechnung des Testwertes eines Probanden als Summe seiner Itemwerte ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn die Items homogen sind. Auch sind die Kennwerte eines Tests wie die Itemschwierigkeit, die Trennschärfe und die Reliabilität nach der klassischen Testtheorie immer stichprobenabhängig. Würden diese Kennwerte auf Basis einer anderen Stichprobe berechnet werden, so könnten sich andere Werte ergeben. Laut Moosbrugger und Kelava (2008) ist es fraglich, ob die Ergebnisse verallgemeinerbar sind. Auch kann auf Basis des Testwertes keine Aussage darüber getroffen werden, welche Inhalte der Proband beherrscht und welche nicht, da aus der Summe der Itemwerte nicht auf einzelne Itemwerte geschlossen werden kann.

5.1.2 Item-Response-Theorie

Die Item-Response-Theorie, die auch als probabilistische Testtheorie bezeichnet wird, bietet zumindest für einige der genannten Schwächen der klassischen Testtheorie eine Lösung. Bei dieser wird zunächst einmal zwischen manifesten Variablen, nämlich dem beobachtbaren Antwortverhalten auf verschiedene Items, und latenten Variablen, den Merkmalsausprägungen in dahinter liegenden Merkmalen, unterschieden. Ziel ist nun, von den manifesten Variablen Rückschlüsse auf die latenten Variablen zu ziehen. Bortz und Döring (2006) bringen den grundlegenden Unterschied zwischen der klassischen Testtheorie und der Item-Response-Theorie auf den Punkt:

„Die klassische Testtheorie (KTT) betrachtet ein Testergebnis unmittelbar als (messfehlerbehaftete) Merkmalsausprägung, während die Item-Response-Theorie (IRT) davon ausgeht, dass Testergebnisse lediglich Indikatoren latenter Dimensionen oder Verhaltensdispositionen sind.“ (Bortz und Döring, 2006, S. 206)

Für jedes Item werden sogenannte itemcharakteristische Funktionen modelliert. Diese Funktionen geben die Wahrscheinlichkeit für das Lösen eines Items oder für das Erreichen einer bestimmten Punktzahl bei einem Item in Abhängigkeit von der Fähigkeit einer Person an. Da davon auszugehen ist, dass Personen mit höherer Fähigkeit ein bestimmtes Item mit größerer Wahrscheinlichkeit lösen als Personen mit niedrigerer Fähigkeit, sollte es sich bei den itemcharakteristischen Funktionen – zumindest im Falle dichotomer Antwortformate – um monoton steigende Funktionen handeln. Je nach Modell werden verschiedene weitere Annahmen über die itemcharakteristischen Funktionen getroffen, darauf gehe ich im Abschnitt zum jeweiligen Modell genauer ein. Allgemein lässt sich zum Vorgehen Folgendes sagen:

„Es wird bei der Analyse von Testdaten eine bestimmte Form des Funktionsverlaufs vorausgesetzt und es werden dann die Parameter dieser Funktion für jedes Item anhand der Daten *geschätzt*.“ (Rost, 2004, S. 99)

Unabhängig vom Modell ist ein großer Vorteil, dass die Itemschwierigkeit und die Personenfähigkeit auf einer gemeinsamen Skala modelliert werden. Wie genau diese Modellierung erfolgt, wird später noch erläutert. Dadurch, dass sich Itemschwierigkeiten und Personenfähigkeiten auf einer Skala befinden, sind kriteriumsorientierte Interpretationen der Testergebnisse möglich, das heißt die Fähigkeit einer Person kann mit Iteminhalten in Bezug gesetzt werden. So wird beispielsweise das Aufstellen von Kompetenzstufen erst möglich. Trotz der Kritik an der klassischen Testtheorie und den Vorteilen der Item-Response-Theorie betonen Moosbrugger und Kelava (2008, S. 216) aber, dass die Item-Response-Theorie nicht als Alternative, sondern als Ergänzung zur klassischen Testtheorie zu sehen ist. Je nach Ziel der Studie kann entschieden werden, ob der höhere Aufwand bei der Konstruktion eines Tests nach der Item-Response-Theorie nötig ist, oder ob ein nach klassischer Testtheorie konstruierter Test genügt.

Im Folgenden werden einige verschiedene Modelle für die itemcharakteristische Funktion vorgestellt. Im Anschluss wird dann darauf eingegangen, welche Aspekte bei der Wahl eines Modells berücksichtigt werden sollten.

Das Rasch-Modell für Items mit dichotomen Antwortformaten

Der einfachste Fall möglicher Antwortformate sind dichotome Antwortformate, das heißt einem Item wird entweder zugestimmt oder es wird abgelehnt, beziehungsweise das Item wird richtig oder falsch gelöst. Für Tests, die aus solchen Items bestehen, ist das dichotome Rasch-Modell, benannt nach seinem Erfinder Rasch (1960), ein mögliches Modell zur Bestimmung von itemcharakteristischen Funktionen. Dabei wird für jedes Item die itemcharakteristische Funktion als logistische Funktion modelliert, und zwar

$$P(X_{vi} = x_{vi}) = \frac{\exp(x_{vi}(\xi_v - \sigma_i))}{1 + \exp(\xi_v - \sigma_i)}, \quad (1)$$

wobei $x_{vi} \in \{0, 1\}$ das mögliche Antwortverhalten des Probanden v auf das Item i bezeichnet, $P(X_{vi} = x_{vi})$ gibt dann die Wahrscheinlichkeit an mit der das Antwortverhalten 0 oder 1 bei diesem Item vorkommt, ξ_v ist der Parameter für die Fähigkeit der Person v und σ_i bezeichnet den Schwierigkeitsparameter des Items i . Da der Itemschwierigkeitsparameter definiert ist als die Merkmalsausprägung ξ_v , für welche die Lösungswahrscheinlichkeit

des Items i genau 0,5 beträgt, befinden sich die Itemschwierigkeit und die Personenfähigkeit tatsächlich auf einer gemeinsamen Skala (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 224f.). Weil in dieser Modellgleichung lediglich ein Itemparameter vorkommt, verlaufen die itemcharakteristischen Funktionen alle parallel zueinander. Welche Bedingungen ein Test erfüllen muss, damit die Daten sich durch ein solches Modell angemessen beschreiben lassen, ist in der Literatur nicht einheitlich dargestellt. Genannte Bedingungen sind, dass der Test aus einer endlichen Menge von Items besteht, die lokale stochastische Unabhängigkeit und die spezifische Objektivität müssen gegeben sein und bei der Anzahl der gelösten Items muss es sich um eine erschöpfende Statistik für die Fähigkeit einer Person handeln. Lokale stochastische Unabhängigkeit heißt, dass wenn die latente Variable ξ auf irgendeinem Wert konstant gehalten wird, dann sind die Korrelationen zwischen den Itemwerten verschiedener Items bezogen auf alle Probanden, deren Fähigkeit gerade diesem konstanten Wert entspricht, nahe 0. Bei Personen, deren latente Variable denselben Wert annimmt, müsste bei Modellgültigkeit theoretisch der Itemwert für ein Item ebenfalls mit hoher Wahrscheinlichkeit gleich sein. Da jedoch noch unsystematische Messfehler hinzukommen, variieren diese. Werden die Itemwerte zweier Items aller dieser Personen mit demselben latenten Variablenwert betrachtet, so wäre bei Modellgültigkeit kein systematischer Zusammenhang vorhanden. Verletzt wäre diese Voraussetzung beispielsweise, wenn verschiedene Items aufeinander aufbauen, da in dem Fall auch innerhalb der Probanden mit demselben Wert der latenten Variablen ein systematischer Zusammenhang zwischen den Itemwerten zweier Items zu erwarten wäre (vgl. Strobl et al. 2010, S. 256f.). Außerdem bedeutet das, dass die Items homogen sind, da es abgesehen von dem Merkmal ξ keinen systematischen Einfluss auf die manifesten Variablen gibt (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 217). Spezifische Objektivität bezieht sich sowohl auf die Itemschwierigkeiten als auch auf die Personenfähigkeiten. Der Unterschied zwischen den Fähigkeitsparametern zweier Personen ist unabhängig davon, welche Items bearbeitet wurden. Ebenso ist der Unterschied zwischen den Schwierigkeitsparametern zweier Items unabhängig davon, welche Stichprobe den Test bearbeitet hat (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 234). Diese Bedingung impliziert auch, dass der Vergleich von zwei Items in Bezug auf ihre Schwierigkeit für alle Personen gleich ist. Diese strenge Forderung sehen Strobl et al. (2010, S. 258) jedoch nicht als Nachteil, sondern im Gegenteil als Vorteil, da die Annahme überprüft werden kann und diese somit eine objektive Messung sichert. Die Bedingung der erschöpfenden Statistik bedeutet, dass keine Information über die Fähigkeit einer Person verloren wird, wenn lediglich die Anzahl der Items betrachtet wird, die diese Person gelöst hat, und nicht, welche Items das sind. Das führt auch dazu, dass die Fähigkeit von Probanden, die dieselbe Anzahl an Items gelöst haben, durch denselben Parameter geschätzt wird. Die Fähigkeit von Personen, die entweder kein Item oder alle Items richtig gelöst haben, kann ohne weitere Annahmen nicht geschätzt werden (vgl. Rost 2004, S. 120ff.). Die gerade beschriebenen Bedingungen werden jedoch nicht einfach vorausgesetzt, sondern sie werden bei der Rasch-Analyse empirisch überprüft. Darauf gehe ich an späterer Stelle noch ein. Für $x_{vi} = 1$ ergibt sich die Funktion der Lösungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Personenfähigkeit:

$$P(X_{vi} = 1) = \frac{\exp(\xi_v - \sigma_i)}{1 + \exp(\xi_v - \sigma_i)}$$

und die Wahrscheinlichkeit, das Item i nicht zu lösen, ergibt sich als Gegenwahrscheinlichkeit der Lösungswahrscheinlichkeit (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 224f.). Die

Funktion der Lösungswahrscheinlichkeit enthält also sämtliche Informationen. An Beispielen verdeutliche ich zunächst, wie die Itemschwierigkeits- und Personenfähigkeitsparameter interpretiert werden (siehe auch Abbildung 5.1): Angenommen, Item 1 hat eine Schwierigkeit $\sigma_1 = 1,25$ und Proband 1 eine Fähigkeit $\xi_1 = 0,34$. Dann ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass Proband 1 das Item 1 löst:

$$P(X_{11} = 1) = \frac{\exp(0,34 - 1,25)}{1 + \exp(0,34 - 1,25)} \approx 0,29$$

Der Proband löst das Item also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 29%. Wird ein zweiter Proband mit einer höheren Fähigkeit von $\xi_2 = 1,69$ betrachtet, so ergibt sich für diesen die folgende Lösungswahrscheinlichkeit für Item 1:

$$P(X_{21} = 1) = \frac{\exp(1,69 - 1,25)}{1 + \exp(1,69 - 1,25)} \approx 0,61$$

Dieser Proband löst das Item also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 61%. Sind Perso-

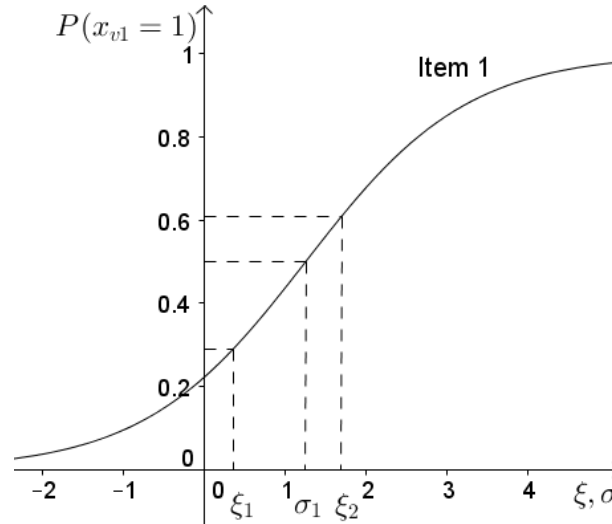


Abbildung 5.1: Itemcharakteristische Funktion für ein Item mit Schwierigkeitsparameter $\sigma_1 = 1,25$

nenfähigkeit und Itemschwierigkeit gleich, so beträgt die Lösungswahrscheinlichkeit 50%. Ist die Personenfähigkeit größer als die Itemschwierigkeit, so ist die Lösungswahrscheinlichkeit größer als 50% und ist umgekehrt die Personenfähigkeit kleiner als die Itemschwierigkeit, so ist die Lösungswahrscheinlichkeit kleiner als 50%. Die unbekannten Parameter ξ_v und σ_i müssen aber zunächst geschätzt werden. Werden die beobachteten Itemwerte x_{vi} aller Probanden $v = 1, \dots, n$ zu allen Items $i = 1, \dots, m$ als Matrix x notiert, so kann eine Likelihoodfunktion erhalten werden, welche die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Itemwerte in Abhängigkeit von ξ_v und σ_i angibt, indem die beobachteten Itemwerte in die Modellgleichung (1) eingesetzt werden (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 226):

$$P(X = x) = \prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^m P(X_{vi} = x_{vi}) = \prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^m \left(\frac{\exp(x_{vi}(\xi_v - \sigma_i))}{1 + \exp(\xi_v - \sigma_i)} \right)$$

Die erste Umformung benutzt die Annahme der lokalen stochastischen Unabhängigkeit. Die Wahrscheinlichkeit für die beobachteten Datenwerte soll nun möglichst groß werden. Die unbekannten Parameter werden systematisch variiert, um das Maximum der Funktion $P(X)$ zu finden. Je nach verwendeter Software werden verschiedene Methoden für diese Schätzung der Parameter ξ_v und σ_i benutzt. Eine Möglichkeit ist, dass die Personenfähigkeits- und Itemschwierigkeitsparameter gemeinsam geschätzt werden. Im Falle der bedingten Maximum-Likelihood-Schätzung werden zunächst die Itemschwierigkeitsparameter aus der bedingten Likelihood-Funktion der Daten unter der Bedingung der Summenscores, also der Anzahl der gelösten Items, geschätzt und anschließend die Personenfähigkeitsparameter. Die Software *ConQuest*, die ich benutzt habe, verwendet hingegen die marginale Maximum-Likelihood-Methode für die Schätzung der Itemparameter. Bei dieser werden zusätzliche Annahmen über die Verteilung der Personenfähigkeit in der Gesamtpopulation getroffen, und zwar die Annahme der Normalverteilung. Hier werden im ersten Schritt dann abgesehen von den Itemparametern nicht die Fähigkeitsparameter jedes einzelnen Probanden geschätzt, sondern die Parameter der Verteilung der Personenfähigkeitsparameter, also der Mittelwert und die Varianz. Bei der anschließenden Schätzung der einzelnen Personenparameter besteht bei ConQuest die Wahlmöglichkeit zwischen verschiedenen Methoden. Eine davon ist die gewichtete Maximum-Likelihood-Schätzung (WLE – weighted likelihood estimation), bei der es sich laut Rost (2004, S. 314) um das Standardverfahren handelt, weswegen ich mich für diese Art der Schätzung der Personenparameter entschieden habe:

„Die nach der WLE-Methode geschätzten Personenparameter sind die besten *Punktschätzer* der individuellen Messwerte.“ (Rost, 2004, S. 315)

Entwickelt wurde diese Methode von Warm (1989), sie beruht auf dem Bayes-Ansatz. Anstatt die Wahrscheinlichkeit für die beobachteten Daten unter der Bedingung der Parameter des Modells zu maximieren, wird die Wahrscheinlichkeit der Personenparameter unter der Bedingung der beobachteten Daten und der Itemparameter maximiert. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass auch für solche Probanden die Fähigkeit geschätzt werden kann, die entweder kein Item oder alle Items korrekt gelöst haben. Auf Populationsebene führen die WLE-Schätzer allerdings zu verzerrten Kennwerten, weswegen für die Bestimmung der Reliabilität (siehe unten) andere Methoden vorzuziehen sind (vgl. Rost 2004, S. 313f.).

An der Modellgleichung (1) wird deutlich, dass jeweils die Differenz aus Personenfähigkeits- und Itemschwierigkeitsparameter die Lösungswahrscheinlichkeit bestimmt. Das heißt die Parameter sind nicht eindeutig bestimmt. Würde sowohl zu den Personenfähigkeits- als auch zu den Itemschwierigkeitsparametern jeweils dieselbe Konstante c addiert, so würde sich die Lösungswahrscheinlichkeit nicht verändern:

$$P(X_{vi} = 1) = \frac{\exp((\xi_v + c) - (\sigma_i + c))}{1 + \exp((\xi_v + c) - (\sigma_i + c))} = \frac{\exp(\xi_v - \sigma_i)}{1 + \exp(\xi_v - \sigma_i)}$$

Es ist üblich, die Parameter so zu normieren, dass die Summe der Itemschwierigkeitsparameter 0 ergibt. Liegt Modellkonformität vor, so handelt es sich beim Skalenniveau der geschätzten Parameter um das Intervallskalenniveau (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 230). Zwischen Summenscores und geschätzten Personenparametern beträgt die Korrelation in der Regel zwischen $r = 0.90$ und $r = 0.95$ (vgl. Rost 2004, S. 122). Daher

könnte man sich fragen, warum so viel Aufwand nötig ist, eine Rasch-Analyse durchzuführen, und ob nicht stattdessen einfach die Summenscores verwendet werden könnten. Allerdings müsste zunächst einmal überprüft werden, ob bei dem betrachteten Test der Summenscore tatsächlich eine gute Schätzung für die Fähigkeiten der Probanden liefert. Rost schreibt dazu:

„Insofern ist das *Ziel* einer Analyse mit dem Rasch-Modell nicht primär, die Summenscores durch die Personenparameter zu ersetzen, sondern die Überprüfung, ob es überhaupt gerechtfertigt ist, mit Summenscores zu arbeiten.“
(Rost, 2004, S. 122)

Wie wird nun die Modellkonformität überprüft? Auch dazu finden sich in der Literatur keine allgemeingültigen Aussagen. Rost schreibt:

„Etwas unübersichtlich wird die Menge von Modelltests dadurch, dass es keinen festgelegten Kanon gibt, welches die Annahmen des Rasch-Modells sind. [...] Als Folge davon gibt es keine allgemein anerkannte Taxonomie von Modelltests [...].“ (Rost, 2004, S. 345)

Eine Möglichkeit, die Modellkonformität zu überprüfen, bieten die Itemfitwerte, welche die Software ConQuest berechnet. Einer dieser Itemfitwerte ist der (ungewichtete) MNSQ-Wert – wobei MNSQ die Abkürzung für *meansquare* ist – der angibt, wie weit die tatsächlich beobachteten Daten von den Daten, die auf Basis des Modells zu erwarten wären, abweichen. Es handelt sich um einen Mittelwert der quadrierten Residuen über alle Probanden. Wenn das Modell die Daten perfekt beschreibt, beträgt dieser Wert 1. Ist der Wert kleiner als 1, so bedeutet dies, dass die beobachteten Daten des jeweiligen Items steiler verlaufen als die modellierte itemcharakteristische Funktion. Ein Wert größer als 1 bedeutet umgekehrt, dass die beobachteten Daten des Items flacher verlaufen als die modellierte Funktion. Der ungewichtete MNSQ-Wert ist jedoch sehr ausreißersensibel, daher wird von ConQuest außerdem ein gewichteter MNSQ-Wert ausgegeben. Die quadrierten Residuen solcher Probanden, deren Fähigkeit stark von der Itemschwierigkeit abweicht, werden dabei weniger gewichtet als diejenigen von Probanden, deren Fähigkeit nah an der Itemschwierigkeit liegt. Auch für den gewichteten MNSQ-Wert gilt, dass er bei perfekter Modellpassung 1 beträgt. Zusätzlich zu dem gewichteten MNSQ-Wert selbst gibt ConQuest auch eine T-Statistik mit 95%-Konfidenzintervall an. Liegt der gewichtete MNSQ-Fit-Wert eines Items außerhalb des 95%-Konfidenzintervalls, so ist die Nullhypothese, dass das Modell zu den Daten passt, zu verwerfen. Der Betrag des T-Wertes ist in diesem Fall größer als 1,96. Grob stimmt diese Regel damit überein, dass der gewichtete MNSQ-Fit-Wert zwischen 0,80 und 1,20 liegen sollte. Manche Forschende sehen auch etwas größere Bereiche als akzeptabel an, beispielsweise Werte zwischen 0,7 und 1,3 (vgl. Wright und Linacre 1994, S. 370) oder sogar zwischen 0,6 und 1,4 (vgl. Joyce und Yates 2007, S. 476). In Abbildung 5.2 ist beispielhaft die von ConQuest ausgegebene T-Statistik für vier Items zu sehen. In diesem Fall liegen die gewichteten MNSQ-Werte zwischen 0,86 und 1,13; sie liegen alle innerhalb des jeweiligen 95%-Konfidenzintervalls und die T-Werte sind betragsmäßig kleiner als 1,96. Die Nullhypothese, dass das Modell die Daten angemessen beschreibt, würde also nicht verworfen werden. Ein weiterer Itemfitwert, der von ConQuest berechnet wird, ist die Trennschärfe beziehungsweise die korrigierte Trennschärfe. Die Trennschärfe ist ein Maß für den Zusammenhang zwischen den Werten aller

VARIABLES			UNWEIGHTED FIT			WEIGHTED FIT		
item	ESTIMATE	ERROR^	MNSQ	CI	T	MNSQ	CI	T
1 V1	0.454	0.174	0.96 (0.80, 1.20)	-0.4	1.13 (0.87, 1.13)	1.9		
2 V2A	-1.283	0.198	0.69 (0.80, 1.20)	-3.4	0.86 (0.78, 1.22)	-1.2		
3 V2B	0.454	0.174	0.73 (0.80, 1.20)	-3.0	0.91 (0.87, 1.13)	-1.3		
4 V2C	1.745	0.208	0.99 (0.80, 1.20)	-0.1	1.10 (0.78, 1.22)	0.9		

Abbildung 5.2: Beispielhafte Itemfitstatistik von ConQuest

Probanden für dieses Item und den Werten aller Probanden im gesamten Test. Sie gibt an, wie sehr ein Item im Vergleich zum gesamten Test Probanden mit hoher Fähigkeit von Probanden mit niedriger Fähigkeit unterscheidet. Vor allem bei wenigen Items ist die korrigierte Trennschärfe vorzuziehen, bei welcher der Zusammenhang zwischen den Werten aller Probanden für das betrachtete Item mit den Werten aller Probanden im restlichen Test bestimmt wird. Die Trennschärfe würde sonst überschätzt werden. Theoretisch kann die (korrigierte) Trennschärfe Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Wünschenswert sind hier möglichst große Werte, also (korrigierte) Trennschärfen nahe bei 1. Diese bedeuten, dass Probanden, die im (restlichen) Gesamttest ein hohes Ergebnis erzielen, dieses Item tendenziell richtig lösen und Probanden mit einem niedrigen Ergebnis eher nicht. Eine Trennschärfe nahe 0 würde bedeuten, dass kein Zusammenhang zwischen dem Ergebnis im Gesamttest und diesem Item besteht. Ist die Trennschärfe hingegen negativ, so besteht ein umgekehrter Zusammenhang: Probanden mit hohem Ergebnis im Gesamttest beantworten das Item eher falsch, solche mit niedrigem Ergebnis eher richtig (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 82ff.). Auch hier gibt es unterschiedliche Auffassungen darüber, wie hoch die (korrigierte) Trennschärfe sein sollte. Moosbrugger und Kelava (2008, S. 84) bezeichnen Trennschärfen von 0,4 bis 0,7 als gut, Bortz und Döring (2006, S. 219f.) sprechen bei Werten zwischen 0,3 und 0,5 von mittleren und bei Werten größer als 0,5 von hohen Trennschärfen. In Abbildung 5.3 ist beispielhaft die von ConQuest ausgegebene Item-

```

item:3 (N1B2)
Cases for this item      123   Item-Rest Cor.  0.42   Item-Total Cor.  0.47
Item Threshold(s):      3.99   Weighted MNSQ  1.02
Item Delta(s):          3.99

```

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
0	0.00	43	34.96	-0.42	-5.16(.000)	4.07	1.12
1	1.00	80	65.04	0.42	5.16(.000)	5.17	1.09

Abbildung 5.3: Beispielhafte Ergebnisse einer Itemanalyse von ConQuest

analyse zu einem Item zu sehen. Die korrigierte Trennschärfe ist mit „Item-Rest Cor.“ bezeichnet und beträgt in diesem Fall 0,42. Rechts daneben ist auch die unkorrigierte Trennschärfe abzulesen, die mit „Item-Total Cor.“ bezeichnet ist und mit einem Wert von 0,47 tatsächlich etwas höher ist. Wie oben erläutert, sollte hier die korrigierte Trennschärfe betrachtet werden. Je nachdem, welcher der Richtwerte als Orientierung gewählt wird, wäre diese korrigierte Trennschärfe als mittelmäßig bis gut einzuschätzen.

Eine Möglichkeit, um die Stichprobenunabhängigkeit zu überprüfen, besteht darin, die vorhandene Stichprobe nach irgendeinem Kriterium zu unterteilen und für jede Teilstichprobe eine Schätzung der Itemschwierigkeitsparameter durchzuführen. Liegt Stichprobenunabhängigkeit vor, so dürfen sich jeweils die verschiedenen Schwierigkeitsparameter pro Item nicht oder nur zufällig unterscheiden. Das lässt sich entweder graphisch untersuchen, indem die geschätzten Itemschwierigkeitsparameter in einem Streudiagramm dargestellt werden. Gibt es systematische Abweichungen von der Hauptdiagonalen, so ist das ein Anzeichen dafür, dass keine Stichprobenunabhängigkeit gegeben ist und das Modell die Daten nicht angemessen beschreibt. Abgesehen von dieser graphischen Überprüfung kann auch ein Likelihood-Quotienten-Test durchgeführt werden. Dazu müssen für die einzelnen Teilstichproben mit der bedingten Maximum-Likelihood-Methode Itemschwierigkeitsparameter geschätzt werden und es wird ein Signifikanztest durchgeführt, um zu überprüfen, ob sich die zu einem Item geschätzten Schwierigkeitsparameter jeweils signifikant voneinander unterscheiden (vgl. Moosbrugger und Kelava 2008, S. 231ff.).

Wie in der klassischen Testtheorie lässt sich auch in der Item-Response-Theorie die Reliabilität eines Tests bestimmen. Diese war definiert als der Anteil der Varianz der wahren Werte an der Varianz der beobachteten Testergebnisse. Es gibt verschiedene Methoden, diese zu berechnen. ConQuest berechnet die Varianz der latenten Variablen und die EAP/PV-Reliabilität (expected a posteriori estimation based on plausible values). Laut Rost (2004, S. 382) sollte erstere Methode nur dann benutzt werden, wenn die Personenscores normalverteilt sind. Ein Vorteil der EAP/PV-Reliabilität ist außerdem, dass dieser Wert wie Cronbachs α interpretiert werden kann. Wie wird dieser Reliabilitätswert nun berechnet? Bei der Schätzung der Itemschwierigkeitsparameter mit der marginalen Maximum-Likelihood-Methode wurden Parameter für die Verteilung der Personenfähigkeiten geschätzt. Das liefert für den Fähigkeitsparameter jedes Probanden eine sogenannte a posteriori Verteilung dieses Parameters. Nun werden aus dieser Verteilung mehrere Zufallswerte gezogen und gemittelt und das Ergebnis wird als „plausible value“ bezeichnet. Hier könnte man sich fragen, warum diese Schätzer nicht als Schätzer für die Personenfähigkeiten verwendet werden (vgl. oben). Für die einzelnen Personen ist der WLE-Schätzer ein besserer Schätzer, lediglich um die Populationsvarianz zu berechnen, sind die „plausible values“ besser geeignet, da bei den WLE-Schätzern die Varianz überschätzt werden würde. Aus den „plausible values“ kann dann der Anteil der wahren Varianz an der beobachteten Varianz berechnet werden (vgl. Rost 2004, S. 314ff., 381f.). Die Reliabilität eines Tests sollte möglichst hoch, also möglichst nah an 1 sein. Die Richtwerte variieren auch hier, Bortz und Döring (2006, S. 199) empfehlen beispielsweise Werte ab 0,8.

Das Partial-Credit-Modell

Bei dem Partial-Credit-Modell handelt es sich um eine Erweiterung des dichotomen Rasch-Modells. Entwickelt wurde es von Masters (1982). Es kann für Tests angewendet werden, bei denen die Items mehrstufige Antwortformate haben und diese dürfen innerhalb des Tests variieren, das heißt es kann beispielsweise Items mit zweistufigen, aber auch Items mit dreistufigen Antwortformaten geben. Auch können sich die Abstände zwischen den einzelnen Antwortkategorien nicht nur innerhalb eines Items, sondern auch zwischen verschiedenen Items unterscheiden. Der Name „Partial-Credit-Modell“ deutet bereits an, dass sich dieses Modell vor allem für Tests eignet, bei denen für manche oder auch alle Items Teilpunkte für Antworten vergeben werden, die nicht ganz korrekt, aber auch nicht kom-

plett falsch sind. Hier wird nun nicht mehr eine itemcharakteristische Funktion pro Item modelliert, sondern pro Item so viele Funktionen, wie das Antwortformat Stufen hat: Jeweils eine Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit, das Item mit der k -ten Kategorie zu beantworten, in Abhängigkeit von der Personenfähigkeit angibt. Diese Funktionen werden als Kategorienfunktionen bezeichnet. Dazu sind nun bei der Modellgleichung mehrere Itemparameter nötig, und zwar ein Parameter weniger als es Kategorien gibt. Bei der Herleitung werden zunächst sogenannte Schwellenfunktionen eingeführt. Diese werden definiert als Wahrscheinlichkeit einer Antwort in Kategorie x unter der Bedingung, dass die Antwort in einer der beiden Kategorien $x-1$ oder x liegt. Für diese Schwellenfunktionen wird nun dieselbe Modellgleichung verwendet wie für die itemcharakteristische Funktion beim Rasch-Modell für Items mit dichotomen Antwortformaten:

$$q_{vix} = \frac{\exp(\xi_v - \tau_{ix})}{1 + \exp(\xi_v - \tau_{ix})}, \quad x = 0, 1, \dots, m$$

wobei ξ_v wieder den Fähigkeitsparameter von Person v bezeichnet und τ_{ix} den Schwierigkeitsparameter der x -ten Schwelle von Item i . Diese Schwellenfunktionen können nun benutzt werden, um Kategorienfunktionen herzuleiten, also Funktionen, welche die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort zu Item i in Kategorie x liegt, in Abhängigkeit von der Personenfähigkeit angeben. Es ergibt sich

$$P(X_{vi} = x) = \frac{\exp(x\xi_v - \sigma_{ix})}{1 + \sum_{s=1}^m \exp(s\xi_v - \sigma_{is})},$$

wobei $\sigma_{ix} := \sum_{j=1}^x \tau_{ij}$ (vgl. Rost 2004, S. 203ff.). In Abbildung 5.4 sind beispielhaft mögliche

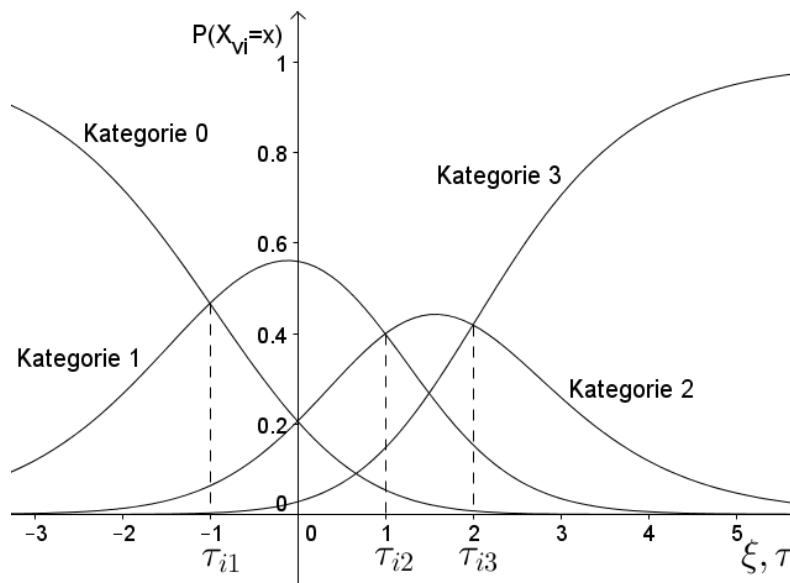


Abbildung 5.4: Kategorienfunktionen zu einem Item mit vier Antwortkategorien

Kategorienfunktionen zu einem Item i mit den vier Antwortkategorien 0, 1, 2, 3 abgebildet. Es fällt auf, dass die Kategorienfunktion für die niedrigste Kategorie monoton fällt, die für die mittleren Kategorien haben jeweils ein Maximum und die Funktion für die höchste

Kategorie verläuft wie die Lösungswahrscheinlichkeit im Falle dichotomer Items monoton steigend. Dieser Verlauf lässt sich inhaltlich begründen: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort in der niedrigsten Kategorie liegt, nimmt mit steigender Personenfähigkeit ab. Umgekehrt nimmt die Wahrscheinlichkeit für eine Antwort in der höchsten Kategorie mit steigender Fähigkeit natürlich zu. Bei den mittleren Antwortkategorien nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Antwort darin liegt, mit steigender Personenfähigkeit zunächst zu, doch ab irgendeinem Punkt nimmt sie wieder ab, da es dann wahrscheinlicher wird, dass die Antwort in einer noch höheren Kategorie liegt. Die Parameter τ_{ix} sind in Analogie zum dichotomen Fall so definiert, dass sie jeweils der Personenfähigkeit entsprechen, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort in Kategorie x liegt genauso groß ist wie die, dass sie in Kategorie $x - 1$ liegt. Somit befinden sich die Personenfähigkeitsparameter und die Itemparameter wieder auf einer gemeinsamen Skala. Liegt der Fähigkeitsparameter eines Probanden zwischen τ_{ix} und τ_{ix+1} , so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort dieses Probanden in Kategorie x liegt, größer als die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort in einer anderen Kategorie y liegt (vgl. Rost 2004, S. 206). Für das Beispiel in Abbildung 5.4 würden sich für eine Person mit der Fähigkeit $\xi_v = 0,5$ beispielsweise die folgenden Kategorienwahrscheinlichkeiten ergeben:

$$\begin{aligned}
P(X_{vi} = 1) &= \frac{\exp(1 \cdot 0,5 - (-1))}{1 + \exp(1 \cdot 0,5 - (-1)) + \exp(2 \cdot 0,5) + \exp(3 \cdot 0,5 - 2)} \approx 0,51 \\
P(X_{vi} = 2) &= \frac{\exp(2 \cdot 0,5)}{1 + \exp(1 \cdot 0,5 - (-1)) + \exp(2 \cdot 0,5) + \exp(3 \cdot 0,5 - 2)} \approx 0,31 \\
P(X_{vi} = 3) &= \frac{\exp(3 \cdot 0,5 - 2)}{1 + \exp(1 \cdot 0,5 - (-1)) + \exp(2 \cdot 0,5) + \exp(3 \cdot 0,5 - 2)} \approx 0,07
\end{aligned}$$

Und die Wahrscheinlichkeit für eine Antwort der Kategorie 0 lässt sich als Gegenwahrscheinlichkeit berechnen, $P(X_{vi} = 0) \approx 1 - (0,51 + 0,31 + 0,07) = 0,11$. Wegen $\tau_{i1} < \xi_v < \tau_{i2}$ wäre auch ohne Rechnung klar gewesen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Antwort in Kategorie 1 größer ist als für jede andere Kategorie. Wie zuvor bereits erwähnt können die Abstände zwischen den Schwellen wie in dem Beispiel variieren, in diesem Fall beträgt der Abstand zwischen τ_{i1} und τ_{i2} 2, der zwischen τ_{i2} und τ_{i3} hingegen nur 1. Für ein anderes Item desselben Tests könnten sich wiederum andere Schwellenabstände ergeben. Die Parameterschätzung erfolgt wieder analog zum Fall des Rasch-Modells für Items mit dichotomen Antwortformaten. Um die Modellkonformität zu überprüfen werden ebenfalls die gleichen Methoden benutzt wie zuvor. Es gibt nun nicht mehr nur einen gewichteten MNSQ-Wert pro Item, sondern jeweils einen für das Item insgesamt und zusätzlich einen pro Kategorie. An den Richtwerten ändert sich jedoch nichts. Lediglich bei der (korrigierten) Trennschärfe ist laut Rost (2004, S. 218) fraglich, ob hohe Werte erstrebenswert seien. Grund dafür ist, dass bei Items mit ordinalem Antwortformat eine hohe Trennschärfe bedeutet, dass die Abstände zwischen den Schwellen gering sind und die mittleren Kategorien wenig benutzt werden, was dem Sinn von polytomen Antwortformaten widerspreche. Daher plädiert Rost dafür, dass mittelgroße Trennschärfen wünschenswert sein könnten. Außerdem sollten nun zusätzlich die punktbiserialen Korrelationen der einzelnen Antwortkategorien betrachtet werden. Diese geben den Zusammenhang zwischen dem Vorliegen der jeweiligen Kategorie mit dem Ergebnis im Gesamttest an. Von der niedrigsten zur höchsten Kategorie eines Items sollten diese von negativen Werten zu positiven Werten hin ansteigen. Das bedeutet, dass die Antwort von Perso-

nen mit einem hohen Gesamtergebnis eher nicht in einer niedrigen, sondern eher in einer höheren Kategorie liegen. Außerdem berechnet ConQuest auch für jede Antwortkategorie eines Items den Mittelwert der Personenfähigkeiten aller Personen, deren Antwort in dieser Kategorie liegt. Diese sollten innerhalb eines Items ebenfalls von der niedrigsten Kategorie zur höchsten Kategorie hin ansteigen.

Das Rating-Scale-Modell

Bei dem Rating-Scale-Modell nach Andrich (1978a,b) handelt es sich ebenfalls um eine Erweiterung des dichotomen Rasch-Modells für Items, die alle dasselbe, polytome Antwortformat haben. Es bildet einen Spezialfall des Partial-Credit-Modells. Ein typisches Beispiel wäre ein Fragebogen, bei dem alle Items dieselbe Likertskala als Antwortformat haben. Die Abstände zwischen den einzelnen Schwellen des Antwortformats müssen auch hier nicht gleich sein. Sie müssen jedoch für alle Items gleich sein. Unterscheiden können sich die Items wiederum in ihrer Schwierigkeit. Das heißt alle Kategorienfunktionen eines Items würden aus denen eines zweiten Items aus demselben Test durch Verschiebung nach links oder rechts um denselben Wert hervorgehen. Das hat den Vorteil, dass insgesamt deutlich weniger Parameter geschätzt werden müssen, und zwar anstatt $n \cdot (m - 1)$ Itemparametern bei n Items mit je m Antwortkategorien nur $m + n - 2$ Itemparameter: Für ein Item müssen alle $m - 1$ Parameter geschätzt werden, für jedes weitere Item hingegen nur noch ein Parameter. Üblich ist eine Reparametrisierung der Schwellenparameter in der Modellgleichung aus dem Partial-Credit-Modell. Der Itemparameter σ_i wird als Mittelpunkt aller Schwellen definiert und wird als Itemschwierigkeit bezeichnet. Die Parameter τ_{ix} werden nun als Abstand der x -ten Schwelle von σ_i definiert. Da die Abstände zwischen den Schwellen ja in diesem Modell bei allen Items identisch sind, kann bei den Parametern τ_{ix} auf den Index für das Item verzichtet werden. Als Modellgleichung ergibt sich hier

$$P(X_{vi} = x) = \frac{\exp\left(x\xi_v - \left(x\sigma_i + \sum_{s=0}^x \tau_s\right)\right)}{\sum_{s=0}^m \exp\left(s\xi_v - \left(s\sigma_i + \sum_{j=0}^s \tau_j\right)\right)}$$

mit den Nebenbedingungen $\tau_0 = 0$ und $\sum_{x=1}^m \tau_x = 0$ (vgl. Rost 2004, S. 215ff.). In Bezug auf die Parameterschätzung selbst und die Überprüfung der Modellkonformität gibt es – abgesehen von der Anzahl der zu schätzenden Parameter – keine Unterschiede zwischen dem Partial-Credit-Modell und dem Rating-Scale-Modell.

Mehrdimensionale Modelle

Bei allen bisher beschriebenen Modellen wurde angenommen, dass die Items eindimensional sind, dass also deren Beantwortung von nur einer latenten Variablen abhängt. Innerhalb der Item-Response-Theorie sind jedoch auch mehrdimensionale Modelle möglich. In Bezug auf die klassische Testtheorie sind die mehrdimensionalen Modelle mit einer Faktorenanalyse vergleichbar. Während bei letztgenannter jedoch auch explorative Analysen möglich sind, sind die mehrdimensionalen Modelle der Item-Response-Theorie hypothesentestend, das heißt der Forschende muss festlegen, wie viele Dimensionen es

gibt und welche Items zu welcher dieser Dimensionen gehören. Die Modellgleichung des mehrdimensionalen Rasch-Modells für dichotome Items sieht wie folgt aus:

$$P(X_{vi} = 1) = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^h q_{ij}\xi_{vj} - \sigma_i\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^h q_{ij}\xi_{vj} - \sigma_i\right)},$$

wobei die Gewichte q_{ij} angeben, wie stark das Item i von der Dimension j abhängt und alle übrigen Parameter wie im eindimensionalen Rasch-Modell definiert sind. Der einfachste Fall wäre, dass pro Item einer der Werte q_{ij} gleich 1 ist und die restlichen 0, das heißt, dass jedes Item von genau einer Dimension abhängt und die einzelnen Items gleich gewichtet sind. Es gibt auch eine Verallgemeinerung für das Partial-Credit-Modell, die Modellgleichung lautet in diesem Fall

$$P(X_{vi} = 1) = \frac{\exp\left(x \sum_{j=1}^h q_{ij}\xi_{vj} - \sigma_{ix}\right)}{1 + \sum_{s=1}^m \exp\left(s \sum_{j=1}^h q_{ij}\xi_{vj} - \sigma_{is}\right)}$$

(vgl. Rost 2004, S. 259ff.). Die Parameterschätzung erfolgt wieder analog zu den bereits geschilderten Modellen. Auch für die Itemfitwerte gelten dieselben Richtwerte wie zuvor. Bei den (korrigierten) Trennschärfen berechnet ConQuest jedoch beim mehrdimensionalen Modell dieselben Werte wie im eindimensionalen Fall, also die Korrelationen je eines Items mit allen übrigen Items des gesamten Tests. Um die Korrelationen je eines Items mit den restlichen Items derselben Dimension zu erhalten, muss ein eindimensionales Modell lediglich für die Items dieser Dimension berechnet werden. Man könnte sich die Frage stellen, ob dann nicht direkt nur eindimensionale Modelle für die einzelnen Dimensionen verwendet werden könnten, anstatt ein mehrdimensionales Modell für den gesamten Tests. Ein Vorteil des mehrdimensionalen Modells ist jedoch, dass dabei auch Korrelationen zwischen den Dimensionen geschätzt werden, die andernfalls nur messfehlerbehaftet bestimmt werden könnten (vgl. Rost 2006, S. 268). Als Vorgehen empfiehlt sich also, zunächst für den gesamten Test ein mehrdimensionales Modell zu verwenden und anschließend lediglich für die Berechnung der (korrigierten) Trennschärfen die einzelnen eindimensionalen Modelle zu nutzen.

Weitere Modelle

Außer den bereits genannten Modellen gibt es zahlreiche weitere Modelle. Eine Darstellung aller Modelle würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Van der Linden und Hambleton (1997) beschreiben insgesamt 27 verschiedene Modelle. Auf einzelne Modelle gehe ich hier noch kurz ein. Bei allen zuvor genannten Modellen gab es einen Schwierigkeitsparameter pro Item beziehungsweise einen Parameter pro Schwelle jedes Items. Das führt dazu, dass die itemcharakteristischen Funktionen beziehungsweise die Kategorienfunktionen zu verschiedenen Items alle parallel zueinander verlaufen. Es gibt jedoch auch Modelle, die

einen weiteren Parameter pro Item beinhalten, und zwar einen sogenannten Trennschärfeparameter, der für unterschiedliche Steigungen der itemcharakteristischen Kurven sorgt. Das ist beim Birnbaum-Modell (benannt nach Birnbaum (1968)), einem eindimensionalen Modell für Items mit dichotomen Antwortformaten, der Fall. Die Modellgleichung hier lautet:

$$P(X_{vi} = 1) = \frac{\exp(\beta_i (\xi_v - \sigma_i))}{1 + \exp(\beta_i (\xi_v - \sigma_i))}$$

wobei β_i eben diesen Trennschärfeparameter bezeichnet. Eine Konsequenz der unterschiedlichen Steigungen ist, dass die Itemcharakteristischen Kurven zweier Items sich schneiden können. In Abbildung 5.5 sind die Itemcharakteristischen Funktionen zu zwei Items mit

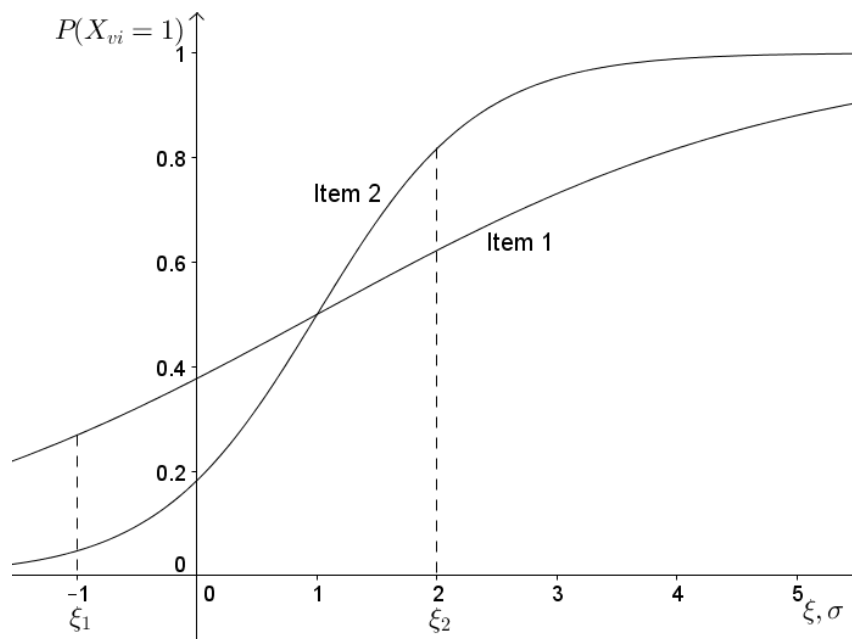


Abbildung 5.5: Itemcharakteristische Funktionen zu zwei Items mit verschiedenen Trennschärfeparametern

derselben Schwierigkeit, aber unterschiedlichen Trennschärfeparametern zu sehen. Es lässt sich erkennen, dass beispielsweise ein Proband mit der Fähigkeit $\xi_1 = -1$ das Item 1 mit einer höheren Wahrscheinlichkeit korrekt lösen würde als das Item 2. Bei einem Probanden mit der Fähigkeit $\xi_2 = 2$ wäre es hingegen umgekehrt, für ihn wäre die Lösungswahrscheinlichkeit für Item 2 höher als die für Item 1. Die spezifische Objektivität ist hier also verletzt. Auch handelt es sich bei den Summenscores nicht mehr um eine erschöpfende Statistik für die Personenfähigkeit und die Personenfähigkeitsparameter sind nicht mehr unabhängig von den Items. Kriteriumsorientierte Interpretationen der Testwerte sind nicht mehr möglich.

Das Rate-Modell beinhaltet noch einen weiteren Parameter pro Item, und zwar einen Rate-Parameter. Dieser Rate-Parameter liefert eine untere Asymptote für die Itemcharakteristische Funktion, siehe Abbildung 5.6. Sinnvoll erscheint das bei Multiple-Choice-Items. Hier würde davon ausgegangen werden, dass auch Personen mit sehr niedriger Fähigkeit ein solches Item nicht mit einer Wahrscheinlichkeit nahe 0 korrekt lösen, son-

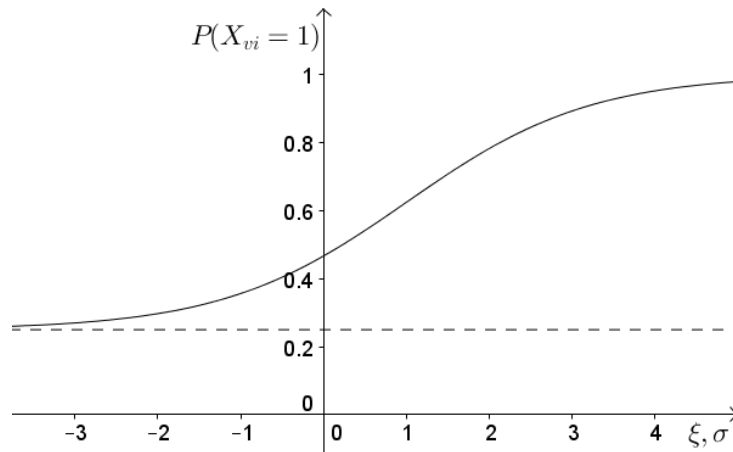


Abbildung 5.6: Itemcharakteristische Funktionen zu einem Item mit Rate-Parameter $\gamma = 0.25$

dern eben mit einer Rate-Wahrscheinlichkeit, die von der Anzahl der möglichen Antworten abhängt. Die Modellgleichung lautet dann wie folgt:

$$P(X_{vi} = 1) = \gamma_i + (1 - \gamma_i) \frac{\exp(\beta_i(\xi_v - \sigma_i))}{1 + \exp(\beta_i(\xi_v - \sigma_i))},$$

wobei γ_i den Rate-Parameter bezeichnet. Die Nachteile, die schon das Birnbaum-Modell hat, hat auch das Rate-Modell.

Es steht außer Frage, dass sich viele Daten durch diese komplexeren Modelle besser beschreiben lassen. Damit geht jedoch einher, dass nützliche Eigenschaften des Rasch-Modells verloren gehen (vgl. Rost 2004, S. 133ff.).

Auswahl eines IRT-Modells

Da es zahlreiche verschiedene Modelle gibt, stellt sich natürlicherweise die Frage, wie das Modell gefunden wird, das die vorhandenen Daten am besten beschreibt. Zunächst können anhand der Antwortformate der Items des Tests bereits Modelle ausgeschlossen werden. Danach wird es schwieriger:

„Darüber hinaus gibt es aber kein automatisches Verfahren, das für einen Test genau das richtige Testmodell anzeigt. Das Vorgehen besteht vielmehr darin, dass man mit einem theoretisch plausiblen Modell anfängt und danach verschiedene alternative Modelle ausprobiert, um zu sehen, welches am besten auf die Daten passt.“ (Rost, 2004, S. 89)

Es sollte also mit Modellen begonnen werden, die aufgrund der Antwortformate der Items in Frage kommen, die verschiedenen Modellfitwerte sollten berechnet und anschließend verglichen werden. Zu diesen Modellfitwerten gehören die Itemfitwerte, auf die zuvor bereits eingegangen wurde, die Reliabilität und die Varianz. Es wäre das Modell zu bevorzugen, bei dem die gewichteten MNSQ-Werte für die einzelnen Items näher an 1 liegen und bei dem die EAP/PV-Reliabilität und die Varianz größer sind. Außerdem kann die Güte zweier Modelle mittels eines χ^2 -Tests verglichen werden. Dazu werden die Werte der Likelihoodfunktion verwendet, die Auskunft darüber geben, wie wahrscheinlich die beobachteten Daten unter Annahme des verwendeten Modells sind. Liegen diese Werte L_0

und L_1 von zwei verschiedenen Modellen zu denselben Daten vor, wobei das eine – dessen Likelihoodwert mit L_1 bezeichnet ist – ein echtes Obermodell des anderen ist, dessen Likelihoodwert mit L_0 bezeichnet ist; das restriktivere Modell darf nicht durch Null-Setzen einzelner Parameter aus dem Obermodell hervorgehen und für das Obermodell muss die Modellgültigkeit nachgewiesen sein, so können diese wie folgt verglichen werden: Wird der Quotient $LR = \frac{L_0}{L_1}$ gebildet, logarithmiert und mit -2 multipliziert, so ergibt dies – bei genügend großer Stichprobe – eine Prüfgröße, die anhand der χ^2 -Verteilung überprüft werden kann, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade der Differenz der geschätzten Parameter im Obermodell und der geschätzten Parameter im Untermodell entspricht (vgl. Rost 2004, S. 331ff.). Umformen liefert

$$\begin{aligned} -2 \cdot \log(LR) &= -2 \cdot \log\left(\frac{L_0}{L_1}\right) \\ &= -2 \cdot (\log(L_0) - \log(L_1)) \\ &= -2 \cdot \log(L_0) - (-2) \cdot \log(L_1) \end{aligned}$$

ConQuest gibt für jedes berechnete Modell direkt das -2 -fache des logarithmierten Likelihoodwertes als „Final Deviance“ an, so dass lediglich die Differenz gebildet und die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt werden muss. Anschließend kann anhand einer χ^2 -Tabelle entschieden werden, ob die Differenz statistisch signifikant ist. Als Signifikanzniveau wird in der Regel $p = 0,05$ verwendet. Ist die Differenz statistisch signifikant, so erklärt das Modell, dessen „Final Deviance“ kleiner ist, die beobachteten Daten besser. Sind die Voraussetzungen des gerade beschriebenen Likelihoodquotienten-Tests nicht (alle) erfüllt, so gibt es weitere Methoden, um zumindest festzustellen, welches Modell aus mehreren Alternativen die Daten am besten beschreibt. Dies liefert jedoch keine Information darüber, wie gut dieses Modell tatsächlich zu den Daten passt. Die einzige Voraussetzung, die bei den sogenannten informationstheoretischen Maßen zum Modellvergleich erfüllt sein muss, ist, dass sich die zu vergleichenden Modelle auf dieselben Daten beziehen. Eines dieser informationstheoretischen Maße ist der AIC-Index (Akaike's information criterion). Er berechnet sich für jedes Modell jeweils wie folgt aus der Anzahl der geschätzten Parameter n_p und dem Likelihoodwert L :

$$AIC = 2 \cdot (n_P - \log(L))$$

Das Modell mit dem kleineren AIC-Index passt besser zu den Daten. Der BIC-Index (Bayes information criterion) hingegen gewichtet die Anzahl der geschätzten Parameter gegenüber dem Likelihoodwert stärker:

$$BIC = -2 \cdot \log(L) + (\log(N)) \cdot n_P,$$

wobei N die Stichprobengröße bezeichnet. Bei diesem Index wird das sogenannte Einfachheitskriterium stärker berücksichtigt, das besagt, dass eine gute Übereinstimmung der beobachteten Daten mit dem Modell „mit möglichst *wenigen* und *einfachen Annahmen* zu erreichen“ (Rost, 2004, S.330) ist. Einfachheit würde hier bedeuten, dass die Anzahl der geschätzten Parameter möglichst gering ist. Auch für den BIC-Index gilt, dass das Modell, das den vergleichsweise kleineren Wert aufweist, die Daten besser beschreibt. Das dritte informationstheoretische Maß ist der CAIC-Index (consistent Akaike's information

criterion). Im Vergleich zum AIC soll dieser Index auch bei größeren Stichprobenumfängen konsistent sein. Definiert ist er wie folgt:

$$CAIC = -2 \cdot \log(L) + (\log N) \cdot n_P + n_P.$$

Auch hier wäre das Modell, das den kleineren Index aufweist, zu bevorzugen. Diese Maße sollten jedoch nicht als alleinige Grundlage für die Wahl eines Modells stehen, sie geben lediglich Hinweise darauf, welches Modell für die Daten besser geeignet sein könnte (vgl. Rost 2004, S. 339ff.). Außerdem ist es natürlich auch möglich, einzelne Items aus dem Test zu eliminieren, um so zu Daten zu gelangen, die besser durch ein Modell beschrieben werden. Dazu könnten erneut die Itemfitwerte verwendet werden. Es sollten allerdings immer auch inhaltliche Überlegungen miteinbezogen werden.

Das Vorgehen, das ich gewählt habe, beinhaltet alle zuvor genannten Schritte. Zunächst habe ich aufgrund der Antwortformate der Items theoretisch plausible Modelle ausgewählt, diese habe ich anhand der Itemfitwerte, der Reliabilität, der Varianz und mithilfe von χ^2 -Tests und den informationstheoretischen Maßen miteinander verglichen. Nach Wahl eines Modells habe ich anschließend einzelne Items aufgrund ihrer Itemfitwerte eliminiert. Schließlich habe ich nach der Elimination dieser Items das Modell noch einmal mit den anderen zunächst in Frage kommenden Modellen verglichen.

5.2 Entwicklung und Skalierung der Testinstrumente

Zum Zeitpunkt der Entwicklung wurden in der Literatur keine Testinstrumente gefunden, die sich als Ganzes für den Einsatz im Rahmen dieser Studie geeignet hätten. Zudem werden in vielen Veröffentlichungen lediglich einzelne Items und keine vollständigen Testinstrumente präsentiert. Daher wurden die Tests selbst entwickelt und es sind nur einzelne Items aus anderen Studien übernommen worden. Da es sich um kein Vortest-Nachtest-Design im eigentlichen Sinne handelt, schreibe ich „Vortest“ und „Nachtest“ jeweils in Anführungszeichen und meine damit den Test zum ersten beziehungsweise zweiten Zeitpunkt. Da die Tests während der Vorlesung geschrieben wurden und vom Dozenten jeweils maximal 30 Minuten zur Verfügung gestellt wurden, konnten nur solche Items eingesetzt werden, die sich in kurzer Zeit beantworten lassen. Daher wurden einige Multiple-Choice-Items gestellt. Um jedoch etwas mehr Informationen zu erhalten, wurde in den meisten Fällen eine kurze Begründung oder ein (Gegen-)Beispiel verlangt. Sofern ein Proband eine Begründung beziehungsweise ein (Gegen-)Beispiel angegeben hat, kann ausgeschlossen werden, dass seine Antwort lediglich geraten ist.

5.2.1 „Vortest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene

Die einzelnen Items werden nun der Reihe nach begründet vorgestellt und es wird auf ihre Bewertung eingegangen. Diese Bewertung erfolgte zweistufig. Für alle Items, bei denen verbale Antworten wie Begründungen oder Beschreibungen gefragt waren, wurde jeweils eine Kategorisierung vorgenommen. Zunächst wurden dazu jeweils deduktiv inhaltlich verschiedene Kategorien entwickelt. Anschließend wurden diese Kategorien induktiv ergänzt. Im nächsten Schritt wurden den einzelnen Kategorien Bewertungen in Form von Punkten zugeordnet. Dabei wurden in manchen Fällen die Kategorien

weiter verfeinert, um ihnen verschiedene Punktzahlen zuordnen zu können. Auch wurde teilweise mehreren Kategorien dieselbe Punktzahl zugeordnet. Bei den Items, bei denen keine verbalen Antworten gefordert waren, wurde ebenfalls festgelegt, in welchen Fällen wie viele Punkte vergeben werden sollten. Alle Items mit verbalen Antworten wurden anhand der jeweiligen Kodieranleitung nicht nur von mir, sondern zusätzlich von einer studentischen Hilfskraft kodiert. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei den fünf Items aus dem „Vortest“, die von zwei Personen bewertet wurden, Cohens-Kappa als Maß für die Interrater-Reliabilität zwischen 0,706 und 0,851 liegt. Nur bei einem Item ist Cohens-Kappa kleiner als 0,75. Die Übereinstimmung der Kategorisierung durch die beiden verschiedenen Personen ist somit als akzeptabel bis gut zusammenzufassen. Die Fälle, bei denen zunächst verschiedene Kodierungen vorgenommen wurden, sind von mir noch einmal genauer betrachtet worden und ich habe letztendlich eine Entscheidung für eine der beiden Kodierungen getroffen. Auch werden in diesem Abschnitt jeweils einige deskriptive Ergebnisse auf Basis einer Stichprobe von 164 Studierenden der Analysis-1-Vorlesung im Wintersemester 2012/13 an der Universität Paderborn dargestellt. Diese werden hauptsächlich auf Ebene der Kategorien dargestellt. Auf Kategorien, die häufig beobachtet wurden, oder die besonders interessant sind, wird genauer eingegangen.

Der „Vortest“ hat das Ziel, Experimentalgruppe und Kontrollgruppe auf Unterschiede in Bezug auf das Vorwissen zu untersuchen. Daher soll in dem Test dasjenige Vorwissen abgefragt werden, das in Bezug auf das Thema Folgen und Konvergenz relevant ist. In Abschnitt 2.3 wurden die Themen Unendlichkeit, Funktionen, Folgen, Variablen, Quantoren, Beträge und Ungleichungen als derartiges Vorwissen identifiziert. Diese Themen sollen also durch den „Vortest“ abgedeckt werden. Außerdem soll auch allgemeiner die Argumentationsfähigkeit getestet werden. Da der Test bereits in der zweiten Vorlesungswoche geschrieben wurde, konnte lediglich der Schulstoff vorausgesetzt werden.

Sowohl bei der Kategorisierung als auch bei der Bewertung mit Punkten wurde berücksichtigt, dass die Studienanfänger, die den „Vortest“ bearbeitet haben, noch fast keine Erfahrung mit Mathematik auf Hochschulebene haben. So wurden teilweise auch Bearbeitungen mit der höchsten Punktzahl bewertet, die aus Mathematikersicht Mängel aufweisen.

Items zu Gleichungen, Ungleichungen und Beträgen

Wenn eine Folge mit Hilfe der formalen Definition auf ihr Konvergenzverhalten untersucht werden soll, muss in den meisten Fällen der Term $|a_n - a|$ umgeformt werden. Da in diesem Term Betragsstriche vorkommen, ist das Beherrschen des Umgangs mit Beträgen nötig, um eine solche Konvergenzuntersuchung durchführen zu können. Außerdem muss mit Ungleichungen umgegangen werden können, denn auch diese kommen in der formalen Definition der Konvergenz vor. Da Folgen oftmals durch Bruchterme definiert sind, ist für die Termumformungen auch Bruchrechnung nötig. Das Rechnen mit Brüchen, Beträgen und Ungleichungen wird in fünf selbstentwickelten Items (siehe Abbildung 5.7) abgefragt. Hier wurden bewusst auch einfachere Terme und (Un-)Gleichungen verwendet, als sie üblicherweise beim Nachprüfen der Konvergenz einer Folge auftreten, um feststellen zu können, ob dabei bereits Schwierigkeiten auftreten. So wurde bei Item V1 zunächst nur ein Term ohne Betragsstriche gegeben, der zusammengefasst werden sollte. Bei den Items

V1 1. Fassen Sie den Term soweit wie möglich zusammen:

$$\frac{3x+1}{2x+5} - \frac{3}{2} = \underline{\hspace{4cm}}$$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der (Un-) Gleichung:

V2A $|3x| = 4$ $\mathbb{L} = \underline{\hspace{2cm}}$

V2B $|2x - 3| = 2$ $\mathbb{L} = \underline{\hspace{2cm}}$

V2C $\frac{2-x}{3} + 5 > \frac{x}{2}$ $\mathbb{L} = \underline{\hspace{2cm}}$

V3 3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left| \frac{3}{16n-4} \right| < \frac{1}{10}$?

$$\mathbb{L} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Abbildung 5.7: Items V1, V2A-V2C und V3

V2A und V2B kommen Betragsstriche, aber keine Brüche vor und es handelt sich nicht um Ungleichungen, sondern um Gleichungen. Bei der ersten dieser beiden Gleichungen ist es noch möglich, durch Anwenden der Strategie „Löse zunächst die entsprechende Gleichung ohne Betragsstriche und gebe als Lösungsmenge die erhaltene Lösung und das (-1) -fache dieser Lösung an“ die korrekte Lösungsmenge zu erhalten. Bei der zweiten Gleichung hingegen würde dies zu einem falschen Ergebnis führen. Bei Item V2C soll dann die Lösungsmenge einer Ungleichung bestimmt werden, in der keine Beträge vorkommen. Item V3 könnte tatsächlich beim Anwenden der Definition der Konvergenz auf eine Folge auftreten, einzig wurde zur Vereinfachung kein beliebiges ϵ , sondern eine konkrete Zahl vorgegeben.

Bei diesen Items wurde lediglich eine Bewertung mit Punkten vorgenommen. Die Kriterien für die jeweiligen Punktzahlen sind in Tabelle 5.1 zu finden. Dass bei diesen Items jeweils nur 0 oder 1 Punkte vergeben wurden, hängt zum einen damit zusammen, dass jeweils nur nach Endergebnissen gefragt war und somit keine Teilpunkte für richtige Ansätze oder Ähnliches vergeben werden konnten. Bei den Items V2A und V2B, bei denen es jeweils zwei Lösungen gab, hätte theoretisch pro Lösung ein Teilpunkt gegeben werden können. Allerdings sollte mit diesen Items der Umgang mit Beträgen getestet werden und wenn jemand nur eine korrekte Lösung angibt, dann ist davon auszugehen, dass er nicht in der Lage ist, geeignet mit Beträgen umzugehen.

In Tabelle 5.2 ist abgebildet, wie oft die verschiedenen Punktzahlen bei den jeweiligen Items vergeben wurde. Wie im gesamten Abschnitt sind zum einen die absoluten Häufigkeiten angegeben und zum anderen die prozentualen Anteile an der Gesamtstichprobe von 164 Studierenden. Auf die einzelnen Items wird nun kurz eingegangen.

Item V1 hat eine Lösungsrate von 45%, was angesichts der Tatsache, dass es sich um Inhalte der Sekundarstufe I handelt, eher schlecht ist. Unter den falschen Antworten ließ

Item	Beschreibung	Punkte
V1	Das Endergebnis ist ein einziger Bruch, der äquivalent zu dem vorgegebenen Term ist, z.B. $-\frac{13}{4x+10}$ oder $-\frac{13}{2(2x+5)}$	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V2A	Die angegebene Lösungsmenge entspricht $\{\pm\frac{4}{3}\}$ (bzw. Schreibweise mit gemischten Brüchen oder Dezimalbrüchen)	1 Punkt
	Andernfalls (insbesondere wenn nur eine Lösung angegeben ist)	0 Punkte
V2B	Die angegebene Lösungsmenge entspricht $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$ (bzw. Schreibweise mit gemischten Brüchen oder Dezimalbrüchen)	1 Punkt
	Andernfalls (insbesondere wenn nur eine Lösung angegeben ist)	0 Punkte
V2C	Es ist die Bedingung $x < \frac{34}{5}$ beziehungsweise $\frac{34}{5} > x$ formuliert (bzw. Schreibweise mit gemischten Brüchen oder Dezimalbrüchen)	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V3	Es ist als Bedingung $n > 2$ beziehungsweise $n \geq 3$ angegeben oder $\{n \in \mathbb{N} n > \frac{17}{8}\}$	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.1: Bewertung der Items V1, V2A, V2B, V2C, V3 mit Punkten

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
V1	74 (45%)	72 (44%)	18 (11%)	0,45
V2A	128 (78%)	27 (16%)	9 (5%)	0,78
V2B	74 (45%)	80 (49%)	10 (6%)	0,45
V2C	37 (23%)	80 (49%)	47 (29%)	0,23
V3	47 (29%)	78 (48%)	39 (24%)	0,29

Tabelle 5.2: Punkteverteilung der Items V1, V2A, V2B, V2C, V3

sich kein häufiger Fehler beziehungsweise kein häufig angegebenes falsches Ergebnis feststellen, sondern es gab viele verschiedene Fehler, die teilweise auch in unterschiedlichen Kombinationen aufgetreten sind. So wurden beispielsweise Brüche falsch erweitert oder gekürzt, es traten Vorzeichenfehler auf, die Brüche wurden zusammengefasst ohne sie zuvor auf denselben Nenner zu bringen oder die Brüche wurden gar nicht zu einem Bruch zusammengefasst.

Das Item V2A wurde mit 78% relativ gut gelöst. Das könnte damit zusammenhängen, dass sich hier mit der Strategie, zuerst die Gleichung ohne Betragsstriche aufzulösen und als Lösungsmenge die so erhaltene(n) Lösung(en) und zusätzlich das Negative der Lösung(en) anzugeben, tatsächlich die korrekten beiden Lösungen ergeben. Unter den 27 falschen Ergebnissen war es in 22 Bearbeitungen der Fall, dass lediglich die korrekte Lösung $\frac{4}{3}$ angegeben wurde und die Lösung $-\frac{4}{3}$ fehlte. In diesen Fällen haben die Studierenden vermutlich ebenfalls die Gleichung ohne Betragsstriche gelöst und haben dann nur die eine auf diese Art erhaltene Lösung angegeben.

Bei Item V2B war die Lösungsrate mit 45% im Vergleich zu dem vorherigen Item deutlich

schlechter. Eine korrekte Lösung, und zwar 2, 5, haben die meisten Studierenden gefunden. Diese ergibt sich nicht nur bei der richtigen Vorgehensweise, sondern auch, indem die Gleichung ohne Betragsstriche gelöst wird. 34 Studierende haben nur diese eine Lösung angegeben. 30 Studierende haben anscheinend die bei dem vorherigen Item bereits an-

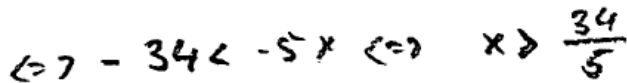


$$|2x - 3| = 2 \quad \mathbb{L} = \underline{+\frac{5}{2}}$$

Abbildung 5.8: Fehlerhafte Bearbeitung zu Item V2B

gesprochene Strategie, zuerst die Gleichung ohne Beträge zu lösen und anschließend die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse zusammen mit dem Negativen der Ergebnisse als Lösungen anzugeben, angewendet und haben $\{\pm 2, 5\}$ als Lösungsmenge angegeben, ein Beispiel für eine solche Bearbeitung ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Das waren bei diesem Item die mit Abstand am häufigsten aufgetretenen Fehler.

Item V2C, bei dem eine Bruchungleichung gelöst werden sollte, hat mit 23% eine noch schlechtere Lösungsrate als das vorherige Item. Hier ließen sich nicht derart häufige Fehler identifizieren wie zuvor. Je nachdem wie beim Umformen der Ungleichung vorgegangen wird, kann es sein, dass die Äquivalenzumformung, die gesamte Ungleichung durch eine negative Zahl zu teilen, angewendet wird. Dabei könnte der Fehler erwartet werden, dass vergessen wird, das „<“-Symbol dabei zum „>“-Symbol zu verändern, wie in dem Ausschnitt aus einer Nebenrechnung in Abbildung 5.9. Dass als Ergebnis die Bedingung



$$x > -34 < -5 \quad x < -34 \quad x > \frac{34}{5}$$

Abbildung 5.9: Ausschnitt einer fehlerhaften Nebenrechnung zu Item V2C

$x > \frac{34}{5}$ statt $x < \frac{34}{5}$ angegeben wurde, ist jedoch lediglich fünfmal aufgetreten. Bei 12 Bearbeitungen war hingegen ausschließlich die Zahl $\frac{34}{5}$ als Lösung angegeben. Entweder haben diese Studierenden anstelle der Ungleichung die entsprechende Gleichung gelöst und am Ende nicht von der Lösung der Gleichung auf die Lösungsmenge der Ungleichung geschlossen oder sie haben zwar die Ungleichung korrekt gelöst und haben anschließend die Lösungsmenge falsch angegeben. Die Betrachtung der teilweise vorhandenen Nebenrechnungen hat ergeben, dass beide Fälle aufgetreten sind. Weitere häufige Fehler ließen sich bei diesem Item nicht finden.

Item V3 wurde mit einer Lösungsrate von 29% ebenfalls relativ schlecht bearbeitet. Oft hat anscheinend eine Kombination mehrerer Fehler zu den falschen Ergebnissen geführt. Die nachfolgend berichteten häufigen Fehler sind daher nicht als disjunkt zu verstehen, manche Bearbeitungen wurden bei mehreren Fehlern mitgezählt. Insgesamt 46 Studierende haben missachtet, dass nach natürlichen Zahlen gefragt war. Ein weiterer Fehler, der darin bestand, dass in der Lösungsmenge $n < \dots$ oder $n \leq \dots$ statt $n > 2$ angegeben wurde, ist insgesamt 26 mal aufgetreten. Dazu zähle ich auch die Fälle, in denen die Lösungsmenge wie in Beispiel 5.10 als $\{1, 2\}$ angegeben wurde. Dieser Fehler könnte wie bei dem vorherigen Item dadurch entstanden sein, dass bei einer Division durch eine negative Zahl das „<“-Symbol nicht zu einem „>“-Symbol verändert wurde. Wird berücksichtigt, dass nach natürlichen Zahlen gesucht war, so würde dies zu der Lösungsmenge

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left| \frac{3}{16n-4} \right| < \frac{1}{10}$?

$$\mathbb{L} = \underline{\{1, 2\}}$$

Abbildung 5.10: falsche Antwort zu Item V3

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left| \frac{3}{16n-4} \right| < \frac{1}{10}$?

$$\mathbb{L} = \underline{\left\{ \frac{17}{8} \right\}}$$

Abbildung 5.11: Beispiel einer einelementigen Lösungsmenge zu Item V3

$\{1, 2\}$ führen. Insgesamt elfmal ist es vorgekommen, dass wie in dem Beispiel in Abbildung 5.11 ein oder zwei einzelne Lösungen angegeben wurde. Hier wurden die Fälle, in denen als Lösungsmenge $\{1, 2\}$ notiert war, nicht mitgezählt, da dieser Fehler vermutlich einen anderen Grund hat. Die ein oder zwei einzelnen Lösungen haben die Studierenden wahrscheinlich ermittelt, in dem sie die zugehörige Gleichung betrachtet und aufgelöst haben. Je nachdem, wie sie mit dem Betragszeichen umgegangen sind und ob sie berücksichtigt haben, dass nach natürlichen Zahlen gefragt war, sind auf diese Art ein oder zwei Lösungen entstanden.

Insgesamt waren in diesem Themenbereich große Schwierigkeiten zu sehen.

Item zu „infinitesimal klein“

Eine weitere Aufgabe (siehe Abbildung 5.12) wurde von Nardi und Iannone (2005) übernommen. Es ist im Prinzip das Infimum einer unendlichen Menge gesucht, ohne dass der Begriff explizit benutzt wird. Da in diesem Test zusätzlich eine Begründung gefordert wird, wird auch die Argumentationsfähigkeit im Zusammenhang mit reellen Zahlen geprüft.

Zunächst ist die Antwort $x = 0$ gefordert und anschließend eine Begründung. Hierzu

V4 4. Sei x eine reelle Zahl mit $x \geq 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie x . Begründen Sie Ihre Antwort.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Begründung:

Abbildung 5.12: Item V4

wurde ein Kategoriensystem entwickelt. Für den Fall, dass die korrekte Lösung $x = 0$ angegeben wird, sind die in Tabelle 5.3 dargestellten inhaltlichen Kategorien deduktiv-induktiv entstanden. In dieser wie auch in allen weiteren Kategoriensystemen sind die Ankerbeispiele wörtliche Zitate und lediglich der besseren Lesbarkeit halber abgetippt.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K1	„vollständiger Widerspruchsbeweis“	Es wird sowohl darauf eingegangen, dass $x = 0$ die geforderte Eigenschaft besitzt (also dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n}$), als auch gesagt, dass $x > 0$ zum Widerspruch führt (also dass es für $x > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x > \frac{1}{n}$).	1. <i>Beispiel:</i> Für jedes x kann ich ein n finden, so dass $\frac{1}{n}$ kleiner ist. $\frac{1}{n}$ kann aber niemals 0 erreichen	2 Punkte
K2	„Konvergenz ohne den Grenzwert zu erreichen“	Es wird gesagt, dass $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert beziehungsweise sich beliebig nah 0 annähert, 0 jedoch nicht erreicht und daher $x = 0$ die geforderte Eigenschaft besitzt, aber sie für jedes $x > 0$ falsch wäre	1. <i>Beispiel:</i> der Ausdruck $\frac{1}{n}$ nähert sich von oben beliebig nah an 0 an erreicht es aber nie also muss $x \leq 0$ sein da jede größere Zahl erreicht wird	2 Punkte
K3	„unvollständiger Widerspruchsbeweis“	Es wird gesagt, dass $x > 0$ zum Widerspruch führt (also dass es für $x > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x > \frac{1}{n}$). Es wird nicht explizit erwähnt, dass $x = 0$ die geforderte Eigenschaft besitzt (also dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n}$).	1. <i>Beispiel:</i> Sonst findet man für jedes x ein n , so dass die Gleichung nicht erfüllt ist 2. <i>Beispiel:</i> $\forall x > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : x > \frac{1}{n}$	2 Punkte

K4	„Näherung an 0 ohne 0 zu erreichen“	Es wird gesagt, dass sich $\frac{1}{n}$ der 0 annähert, sie aber nicht erreicht. Es wird jedoch nicht gesagt, dass $\frac{1}{n}$ der 0 beliebig nah kommt beziehungsweise gegen 0 konvergiert.	1. <i>Beispiel:</i> $\frac{1}{n}$ nähert sich 0 an, je größer n ist, wird aber nie 0, daher ist 0 immer kleiner	2 Punkte
K5	„Konvergenz“	Es wird lediglich ausgesagt, dass $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert beziehungsweise sich 0 beliebig annähert. Es wird nicht gesagt, dass 0 nicht erreicht wird.	1. <i>Beispiel:</i> $\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0 2. <i>Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$	2 Punkte
K6	„Nachprüfen von $x = 0$ “	Es wird begründet, dass $x = 0$ die geforderte Eigenschaft besitzt (also dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n}$). Es wird nicht begründet, warum x nicht größer als 0 sein kann.	1. <i>Beispiel:</i> $n \in \mathbb{N}$, man darf auch nicht durch 0 teilen, somit ist $\frac{1}{n}$ immer größer als 0 2. <i>Beispiel:</i> Da $\frac{1}{n}$ nie Null werden kann 3. <i>Beispiel:</i> Da n eine natürliche Zahl ist kann $\frac{1}{n}$ weder < 0 noch $= 0$ sein. 0 muss also kleiner bleiben $\forall n \in \mathbb{N}$ 4. <i>Beispiel:</i> $\forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} > 0$	2 Punkte
K7	„Näherung an 0“	Es wird lediglich ausgesagt, dass $\frac{1}{n}$ sich 0 annähert. Es wird weder gesagt, dass $\frac{1}{n}$ der 0 beliebig nahe kommt beziehungsweise gegen 0 konvergiert, noch dass 0 nicht erreicht wird.	1. <i>Beispiel:</i> Mit größer werdendem n nähert sich $\frac{1}{n}$ 0, somit kann x nur $= 0$ sein	1 Punkt

K8	„ $x < 1$ “	Es wird lediglich begründet, dass $x < 1$ gelten muss.	1. <i>Beispiel:</i> Da schon bei dem Fall $x = 1$ und $n = 1$ ein Widerspruch vorliegt, kann x nur 0 sein	1 Punkt
K9	„quasi keine Begründung“	Begründung, in der schon der Ansatz fehlerhaft ist, oder in der nichts in Bezug auf die zu begründende Lösung ausgesagt wird	1. <i>Beispiel:</i> für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $\epsilon > 0$ so dass $\epsilon > \frac{1}{n}$ 2. <i>Beispiel:</i> Da $x = 0$ und $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots n\}$ ist und somit $1 + n < 0$ 3. <i>Beispiel:</i> jede reelle Zahl hat Form $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ um kleiner als jedes $\frac{1}{n}$ zu sein müsste q größer sein als jedes n oder $p = 0$	1 Punkt
K10	keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		1 Punkt

Tabelle 5.3: Kategoriensystem für das Item V4 für den Fall, dass die korrekte Lösung $x = 0$ angegeben ist.

Zu dem Namen der Kategorie K1, „vollständiger Widerspruchsbeweis“, ist anzumerken, dass die in diese Kategorie eingeordneten Bearbeitungen im streng mathematischen Sinne keine vollständigen Widerspruchsbeweise darstellen. Unter Berücksichtigung des Kenntnisstands der Studienanfänger wurden zu dieser Kategorie solche Bearbeitungen zusammengefasst, in denen sowohl begründet wird, dass $x = 0$ die geforderte Eigenschaft erfüllt, als auch, dass $x > 0$ zum Widerspruch führt. Für jede der Kategorien K1 bis K10 wird mindestens ein Punkt vergeben, da allen diesen Kategorien zunächst einmal die korrekte Antwort $x = 0$ zugrunde liegt. Je nach Begründung wurde ein weiterer Punkt vergeben oder nicht. Da durch die Aufgabenstellung nicht explizit vorgegeben ist, ob begründet werden soll, dass $x = 0$ die geforderte Bedingung erfüllt, dass es keine andere Zahl $x \geq 0$ gibt, welche die Bedingung erfüllt, oder beides, wurde hier der zusätzliche Punkt für die Begründung vergeben, sobald einer der Aspekte begründet wurde.

Auch wenn die Studierenden ein anderes Ergebnis als $x = 0$ angegeben haben, haben sie dieses meist begründet. Bei der Kategorisierung dieser Begründungen sind lediglich die beiden Kategorien in Tabelle 5.4 entstanden. Da bei Vorliegen einer dieser beiden Kategorien eine andere Antwort als $x = 0$ gegeben wurde, wird die Bearbeitung unabhängig von der Begründung mit 0 Punkten bewertet. Zu diesem Item ist zum einen in Tabelle 5.5 die Verteilung der Punkte dargestellt und zum anderen in Tabelle 5.6 die Verteilung der Bearbeitungen auf die zwölf vorgestellten Kategorien. Als „nicht bearbeitet“ wird nur gewertet, wenn weder eine Lösung für x angegeben wurde noch eine Begründung. Sofern lediglich die Begründung fehlt, ist die Bearbeitung in Kategorie K10 beziehungsweise K12 eingeordnet.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K11	Begründung für falsches Ergebnis	Eine Begründung für ein anderes Ergebnis als $x = 0$	1. <i>Beispiel:</i> für $n \rightarrow \infty$ wird $\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow x$ nicht definiert/kann nicht erfüllt werden 2. <i>Beispiel:</i> 1 ist die größte Zahl, die bei $\frac{1}{n}$ herauskommen kann. Also muss x diejenige Zahl sein, die größer als 1 ist (2)	0 Punkte
K12	keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		0 Punkte

Tabelle 5.4: Kategoriensystem für das Item V4 für den Fall, dass eine falsche Lösung angegeben ist.

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
59 (36%)	50 (30%)	32 (20%)	23 (14%)	1,02

Tabelle 5.5: Punkteverteilung des Items V4

Zunächst einmal haben 66% der Studierenden korrekt geantwortet, dass $x = 0$ gelten muss. Dass die Qualität der Begründungen weniger hoch ist, verwundert nicht, wie oben bereits erwähnt. Es fällt auf, dass in mehr als der Hälfte der Begründungen für die Antwort

Begründung:

Die Folge $\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, aber sie das heißt, dass sie 0 nie erreichen wird.

Abbildung 5.13: Begründung zu Item V4 mit Verwendung des Begriffs „Konvergenz“

$x = 0$ über die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ argumentiert wurde (Kategorien K2, K4, K5, K7). Diese sind meist von dynamischen Sichtweisen einer Näherung an 0 geprägt. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.13 zu sehen. Ein relativ häufiger Mangel bei der Begründung war, dass zwar

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11	K12	n.b.
4	10	2	13	18	12	17	7	13	13	24	8	23
2%	6%	1%	8%	11%	7%	10%	4%	8%	8%	15%	5%	14%

Tabelle 5.6: Verteilung auf die Kategorien des Items V4

Begründung:

un-gerade natürliche Zahl: 1 Folglich: $x < \frac{1}{1} = 1$

Abbildung 5.14: unzureichende Begründung zu Item V4

die korrekte Lösung $x = 0$ angegeben wurde, dass jedoch lediglich begründet wurde, dass $x < 1$ gelten muss. Bei zwölf Studierenden war das der Fall, wie auch in dem Beispiel in Abbildung 5.14. Möglicherweise haben diese Studierenden irrtümlicherweise geglaubt, es sei vorgegeben, dass x eine ganze Zahl mit $x \geq 0$ sei. Weitere typische Fehler bei den Begründungen gab es nicht. Ein Fehler, der nicht bei der Begründung, sondern bereits bei der Angabe des Ergebnisses mehrfach aufgetreten ist, war ein von n abhängiger Term wie zum Beispiel in Abbildung 5.15. Insgesamt haben zehn Studierende ein Ergebnis dieser Art angegeben. Für jede natürliche Zahl n gilt zwar $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, doch es war eben nach einer reellen Zahl gefragt, die kleiner als jeder Bruch $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Andere falsche Ergebnisse sind nur vereinzelt aufgetreten.

4. Sei x eine reelle Zahl mit $x \geq 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie x . Begründen Sie Ihre Antwort.

$$x = \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leq x < \frac{1}{n}$$

Begründung:

trivial

Abbildung 5.15: ein von n abhängiger Term als Ergebnis zu Item V4

Items zu unendlichen Mengen

Folgen mit einem Grenzwert können dadurch charakterisiert werden, dass sich außerhalb jeder beliebigen Umgebung des Grenzwerts nur endlich viele Folgenglieder befinden. Die Eigenschaft, dass sich in jeder beliebigen Umgebung um einen festen Wert unendlich viele Folgenglieder befinden, trifft hingegen auch auf Häufungspunkte zu. In Kapitel 2 wurde von einer Studie berichtet, in der Studierende diese beiden Verbalisierungen dahingehend bewerten sollten, ob sie zur Charakterisierung konvergenter Folgen geeignet sind. Dabei waren manche Studierende der Meinung, dass beide Verbalisierungen geeignet seien. Ihnen war anscheinend nicht bewusst, dass das Komplement einer endlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen immer unendlich ist, dass das Komplement einer unendlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen aber endlich oder unendlich sein kann. In den beiden Items V5A (siehe Abbildung 5.16) und V5B (siehe Abbildung 5.17) wird daher genau das abgefragt. Zu Item V5A wurden zwei Aussagen, bei denen jeweils entschieden werden musste, ob

5. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- V5A ☐ Sei A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann ist es möglich, dass $\mathbb{N} \setminus A$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.
☐ Sei A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann muss $\mathbb{N} \setminus A$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ sein.

Abbildung 5.16: Item V5A

sie richtig sind, zusammengefasst, da diese beiden Aussagen nicht als unabhängig voneinander bezeichnet werden können. Für dieses Item wird eine Bewertung mit 0, 1 oder 2 Punkten vorgenommen. Als richtige Lösung, die mit 2 Punkten bewertet wird, zählt hier eine Bearbeitung, bei der nur die zweite und nicht die erste Aussage angekreuzt wurde. Für Bearbeitungen, bei denen entweder beide oder keine der beiden Aussagen angekreuzt

wurden, wird 1 Punkt vergeben. Letzteres ist nur dann nicht der Fall, falls bei der kompletten Aufgabe 5, die aus weiteren Aussagen besteht, keine Aussage angekreuzt wurde. In diesem Fall zählt das Item als nicht bearbeitet und wird mit 0 Punkten bewertet. Auch wenn nur die erste Aussage angekreuzt wurde, so wird die Bearbeitung mit 0 Punkten bewertet.¹

Bei Item V5B wird analog vorgegangen. Es werden 2 Punkte vergeben, wenn lediglich

- V5B**
- ☐ Sei A eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann ist es möglich, dass $\mathbb{N} \setminus A$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.
 - ☐ Sei A eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann muss $\mathbb{N} \setminus A$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ sein.

Abbildung 5.17: Item V5B

die erste der beiden Aussagen angekreuzt wurde. Falls beide oder keine Aussage angekreuzt wurde, so wird 1 Punkt vergeben. Wieder wird von Letzterem abgewichen, falls bei der kompletten Aufgabe 5, die aus weiteren Aussagen besteht, keine Aussage angekreuzt wurde. Dann wird die Bearbeitung mit 0 Punkten bewertet, wie auch Bearbeitungen, bei denen lediglich die zweite Aussage angekreuzt wurde.

In Tabelle 5.7 sind die Punkteverteilungen beider Items dargestellt. Bei beiden Items ist

Item	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
V5A	40 (24%)	81 (49%)	28 (17%)	15 (9%)	0,98
V5B	51 (31%)	83 (51%)	15 (9%)		1,13

Tabelle 5.7: Punkteverteilung der Items V5A und V5B

jeweils die zweite Aussage die interessantere, da diese jeweils genau das abfragt, was die Ziele dieser Items waren. Daher werden hier zusätzlich die Antworten auf die zweite Aussage des Items V5A in Tabelle 5.8 und auf die zweite Aussage des Items V5B in Tabelle 5.9 präsentiert. 102 Studierende haben korrekterweise angekreuzt, dass das Komplement

richtig beantwortet (Aussage angekreuzt)	falsch beantwortet (Aussage nicht angekreuzt)	nicht beantwortet
102 (62%)	47 (29%)	15 (9%)

Tabelle 5.8: Antworten auf die zweite Aussage des Items V5A

richtig beantwortet (Aussage nicht angekreuzt)	falsch beantwortet (Aussage angekreuzt)	nicht beantwortet
128 (78%)	21 (13%)	15 (9%)

Tabelle 5.9: Antworten auf die zweite Aussage des Items V5B

einer Teilmenge der natürlichen Zahlen eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Noch mehr Studierende, und zwar 128, haben erkannt, dass das Komplement einer unendlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen nicht unbedingt eine endliche Menge ist. Die beiden Items sind besser ausgefallen, als aufgrund der erwähnten Studie zu erwarten war.

¹Bei der Skalierung des „Vortests“ wird auf Seite 172 nachträglich Kritik an diesem Item beziehungsweise der Bewertung geübt.

Item zu (periodischen) Dezimalbrüchen

Eine häufige eingeschränkte Vorstellung zum Grenzwert ist, wie in Abschnitt 2.4.2 dargestellt, dass dieser als unendlicher Prozess aufgefasst wird und nicht als Objekt. Aus dieser Vorstellung kann der Fehler $0, \bar{9} < 1$ resultieren. In einer Untersuchung von Tall und Vinner (1981) wurde Befragten zuerst die Aufgabe gestellt, zu entscheiden, ob $0, \bar{9} = 1$ gilt. Später wurde in derselben Befragung dazu aufgefordert, unter anderem die Zahlen $0, \bar{3}$ und $0, \bar{9}$ als Bruch darzustellen. Viele der Befragten haben zunächst geantwortet, $0, \bar{9}$ sei kleiner als 1. Bei der späteren Aufgabe hätten sie sich dann jedoch umentschieden. In diesem Test werden ebenfalls beide Aufgaben abgefragt. Dass die Studierenden nach der Bearbeitung der zweiten genannten Aufgabe ihre Antwort zur ersten noch einmal verändern, lässt sich im Rahmen dieses Tests nicht ausschließen. Es wurde zumindest darauf geachtet, dass sich noch einige andere Items zwischen diesen beiden befinden und dass sie auf unterschiedlichen Seiten abgedruckt sind. Hier wird nun zuerst auf Item V6 (siehe Ab-

V6 6. Ist $0, \bar{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ☐ Ja, es gilt $0, \bar{9} = 1$.
- ☐ Nein, es gilt $0, \bar{9} < 1$.
- ☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

Abbildung 5.18: Item V6

Abbildung 5.18) eingegangen. Die Studierenden sollen ihre Antwort auf die Frage, ob $0, \bar{9} = 1$ gilt, auch begründen. Dadurch lässt sich nachvollziehen, aus welchem Grund sie sich für die richtige oder falsche Lösung entschieden haben. Außerdem hatten die Studierenden bei diesem Item die Möglichkeit, auf die Frage, ob $0, \bar{9} = 1$ sei, mit „Weiß ich nicht“ zu antworten. Das hat den Vorteil, dass jemand, der sich mit seiner Antwort unsicher ist, in der Begründung darlegen kann, warum er sich unsicher ist.

Korrekterweise würde auf die erste Frage mit „Ja, es gilt $0, \bar{9} = 1$ “ geantwortet werden. In diesem Fall wird die nachfolgende Begründung einer der inhaltlichen Kategorien, die zunächst deduktiv entwickelt und anschließend induktiv ergänzt wurden, in Tabelle 5.10 zugeordnet. Manche der inhaltlichen Kategorien wurden für die Zuordnung von Punkten weiter verfeinert, in den Fällen sind die Kategorien mit „(+)“, „(o)“ oder „(-)“ versehen.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Grenzwert einer Folge“	Es wurde explizit eine Folge angegeben, die gegen $0, \bar{9}$ konvergiert.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1$ 2. <i>Beispiel:</i> Die Folge	Die Folge wurde korrekt angegeben und es wurde gesagt, dass sie gegen 1 konvergiert.	3 Punkte

K1(o)			$(\sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1	Die Folge wurde nicht korrekt ange- geben oder es wurde nicht erwähnt, dass sie gegen 1 konvergiert.	2 Punkte
K1(-)				Die Folge ist ungeeignet.	1 Punkt
K2(+)	„Keine Zahl dazwischen“	Es wurde geschrieben, dass es keine reelle Zahl zwischen $0, \overline{9}$ und 1 geben kann.	1. <i>Beispiel:</i> $\exists$ keine Zahl dazwischen	Dabei wurde erwähnt, dass $\mathbb{R}$ dicht ist.	3 Punkte
K2(o)				Dabei wurde nicht er- wähnt, dass $\mathbb{R}$ dicht ist.	2 Punkte
K3(+)	„Brüche“	Die Gleichheit wurde über Brüche begründet.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \overline{1} =$ $\frac{1}{9}, \dots, 0, \overline{9} = \frac{9}{9} =$ 1 2. <i>Beispiel:</i> $\frac{1}{3} =$ $0, \overline{3}$ $0, \overline{3} + 0, \overline{3} + 0, \overline{3} =$ $0, \overline{9}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$	Begründung mit korrekten Umformun- gen	3 Punkte
K3(o)				Begründung mit kleineren Mängeln	2 Punkte
K3(-)				Argumentation ist inhaltlich falsch oder enthält große Mängel	1 Punkt
K4	„Folge“	$0, \overline{9}$ wurde als Folge aufgefasst, die gegen 1 konvergiert.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \overline{9}$ konvergiert ge- gen 1 2. <i>Beispiel:</i> gegen ∞ wird $0, \overline{9} = 1$ 3. <i>Beispiel:</i> Rechnet man mit dem Grenzwert, nähert sich $0, \overline{9}$ immer mehr der 1 an		1 Punkt

K5	„quasi keine Begründung“	Begründung, in der schon der Ansatz fehlerhaft ist oder in der nichts in Bezug auf die zu begründende Lösung ausgesagt wird	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{9}$ ist eben 1. Es handelt sich um unterschiedliche Schreibweisen 2. <i>Beispiel:</i> laut Vorkurs 3. <i>Beispiel:</i> kein Beweis fürs Gegenteil		1 Punkt
K6	keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.			1 Punkt

Tabelle 5.10: Kategoriensystem für das Item V6 für den Fall, dass mit „Ja“ geantwortet wurde.

Alle Antworten, die in eine der Kategorien K1 bis K6 eingeordnet wurden, werden mit mindestens einem Punkt bewertet, da in diesen Fällen korrekt angekreuzt wurde, dass $0, \bar{9} = 1$ gilt. Je nach der Qualität der Begründung werden bis zu zwei weitere Punkte vergeben.

Sofern „Nein, es gilt $0, \bar{9} < 1$ “ oder „Weiß ich nicht“ geantwortet wird, wird die Bearbeitung in jedem Fall mit 0 Punkten bewertet. Dennoch sind auch hier die unterschiedlichen Begründungen interessant, weshalb auch für diese eine Kategorisierung vorgenommen wird. In Tabelle 5.11 sind diese Kategorien für die Antwort, dass $0, \bar{9} < 1$ gelte, dargestellt.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K7	„fast 1“	Es wurde beschrieben, dass $0, \bar{9}$ nur fast 1 sei. Dabei wurde $0, \bar{9}$ nicht als Folge aufgefasst.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{9}$ ist nur aufgerundet 1 berührt sie aber bis ins unendliche nie 2. <i>Beispiel:</i> Auch, wenn nur minimal ist $0, \bar{9}$ immer noch kleiner als 1 3. <i>Beispiel:</i> Nein, da es nicht genau 1 ist, was besonders bei Grenzwerten wichtig ist die bis 1 laufen, $0, \bar{9}$ ist die Zahl die genau vor der 1 kommt	0 Punkte
K8	„Folge, die 1 nicht erreicht“	$0, \bar{9}$ wurde als Folge aufgefasst, die 1 nie erreicht.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{9}$ geht gegen 1, wird aber nie $= 1$ 2. <i>Beispiel:</i> Weil $0, \bar{9}$ sich der 1 nur annähert, sie aber nie erreicht	0 Punkte

K9	„Differenz größer 0“	Die Differenz von $0,\overline{9}$ zu 1 wurde explizit angegeben oder als größer 0 beschrieben.	1. <i>Beispiel:</i> Weil $0,\overline{9}$ um $0,\overline{01}$ von 1 abweicht 2. <i>Beispiel:</i> Nein, da $1 = 0,\overline{9} + 0,\overline{1}$ und $0,\overline{1} \neq 0$ 3. <i>Beispiel:</i> $0,\overline{9} = 1 - 0,\overline{1}$, also $0,\overline{9} < 1$ 4. <i>Beispiel:</i> Es fehlt ein unendlich kleiner Teil bis 1	0 Punkte
K10	„Dezimaldarstellung“	Es wurde über die Dezimaldarstellung der beiden Zahlen begründet, dass $0,\overline{9}$ und 1 verschieden seien.	1. <i>Beispiel:</i> $0,\overline{9} = 0,9999\dots$ damit ist $0,\overline{9} < 1$ 2. <i>Beispiel:</i> Auch wenn $0,\overline{9}$ unendlich viele Nachkommastellen besitzt, wird niemals eine 1 vor dem Komma stehen. Also muss $0,\overline{9} < 1$ sein.	0 Punkte
K11	Sonstiges	Begründung, in der etwas geschrieben wurde, dass sich in keine der anderen Kategorien einordnen lässt.	1. <i>Beispiel:</i> trivial 2. <i>Beispiel:</i> Streng genommen ist $0,\overline{9} < 1$. Jedoch gibt es einen Beweis in Mathe der das Gegenteil ausdrückt. 3. <i>Beispiel:</i> $0,\overline{9}$ ist immer kleiner als 1	0 Punkte
K12	keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		0 Punkte

Tabelle 5.11: Kategoriensystem für das Item V6 für den Fall, dass mit „Nein“ geantwortet wurde.

Für Begründungen der Antwort „Weiß ich nicht“ haben sich lediglich zwei Kategorien ergeben, die in Tabelle 5.12 zu sehen sind.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K13	Sonstiges	Alle Begründungen, bei denen etwas aufgeschrieben wurde.		0 Punkte
K14	keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		0 Punkte

Tabelle 5.12: Kategoriensystem für das Item V6 für den Fall, dass mit „Weiß ich nicht“ geantwortet wurde.

Es gibt bei diesem Item keine Bearbeitung, die mit 3 Punkten bewertet wurde. Da dasselbe Item auch im „Nachtest“ eingesetzt wird und dort möglicherweise qualitativ bessere Begründungen zu finden sind, wird das Kategoriensystem inklusive der Bewertungen beibehalten, um ein einheitliches Kategorien- und Bewertungssystem für das Item bei beiden Tests zu verwenden. In Tabelle 5.13 ist dargestellt, welcher Anteil der Studierenden auf

$0, \bar{9} = 1$	$0, \bar{9} < 1$	Weiß ich nicht	nicht bearbeitet
63 (38%)	87 (53%)	9 (5%)	5 (3%)

Tabelle 5.13: Antworten auf das Item V6

die Frage, ob $0, \bar{9} = 1$ sei, wie geantwortet hat. Die Mehrheit, und zwar 96 Studierende, hat entweder angekreuzt, dass $0, \bar{9}$ kleiner als 1 sei oder, dass sie es nicht wissen. In Tabelle

3 Punkte	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
0 (0%)	43 (26%)	20 (12%)	96 (59%)	5 (3%)	0,65

Tabelle 5.14: Punkteverteilung des Items V6

5.14 ist die Punkteverteilung zu sehen. 20 Studierende haben zwar korrekt geantwortet, dass $0, \bar{9} = 1$ gilt, doch sie haben diese Antwort nicht oder nicht korrekt begründet. Interessante Einblicke gibt die Verteilung auf die einzelnen Kategorien, die in den Tabellen 5.15 und 5.16 zu sehen sind.

K1(+)/(o)/(-)	K2(+)	K2(o)	K3(+)	K3(o)	K3(-)	K4	K5	K6
0 0%	0 0%	6 4%	0 0%	37 23%	0 0%	7 4%	6 4%	7 4%

Tabelle 5.15: Verteilung auf die Kategorien des Items V6 - Teil 1

K7	K8	K9	K10	K11	K12	K13	K14	n.b.
18 11%	20 12%	10 6%	8 5%	16 10%	15 9%	3 2%	6 4%	5 3%

Tabelle 5.16: Verteilung auf die Kategorien des Items V6 - Teil 2

- ☒ Ja, es gilt $0, \bar{9} = 1$.
☐ Nein, es gilt $0, \bar{9} < 1$.
☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

$$\frac{1}{3} = 0, \bar{3} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 3 \cdot 0, \bar{3} = 0, \bar{9}$$

Abbildung 5.19: Begründung für richtige Antwort zu Item V6 über Brüche

Die meisten der Studierenden, welche die richtige Antwort auch begründet haben, hat dazu Brüche genutzt. Es gibt davon zwar etwas unterschiedliche Varianten, doch sie alle

vereint die Tatsache, dass an einer Stelle eine Rechenoperation mit unendlichen Dezimalbrüchen durchgeführt wird. In der Bearbeitung in Abbildung 5.19 ist das der Schritt „ $3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9}$ “. An der Stelle ist streng genommen eine Lücke in der Argumentation vorhanden.

- ☐ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
- ☒ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
- ☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

$0,\bar{9}$ geht gegen 1, wird aber nie = 1

Abbildung 5.20: Begründung für falsche Antwort zu Item V6, in der $0,\bar{9}$ als Folge aufgefasst wird

Sowohl unter den richtigen als auch unter den falschen Antworten lassen sich einige Begründungen finden, in denen $0,\bar{9}$ also Folge aufgefasst wurde. Bei den falschen Antworten wurde meist noch hinzugefügt, dass der Grenzwert jedoch nicht erreicht werde, daher sei $0,\bar{9} < 1$. Bei der Bearbeitung in Abbildung 5.20 ist dies der Fall. Die

- ☒ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
- ☐ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
- ☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

Da ~~es~~ Rechnet man mit dem Grenzwert, nähert sich $0,\bar{9}$ immer mehr der 1 an

Abbildung 5.21: Begründung für richtige Antwort zu Item V6, in der $0,\bar{9}$ als Folge aufgefasst wird

Bearbeitung in Abbildung 5.21 zeigt, dass es auch Studierende gab, die $0,\bar{9}$ als Folge aufgefasst haben und sich dennoch für die korrekte Antwort entschieden haben. Auf Basis von sehr ähnlichen Vorstellungen kommen die Studierenden also zu verschiedenen Schlussfolgerungen. Zusammengefasst sind es 27 Probanden, in deren Begründung deutlich wird, dass sie $0,\bar{9}$ als Folge auffassen. Sieben davon haben $0,\bar{9} = 1$ geantwortet, die übrigen 20 haben sich für $0,\bar{9} < 1$ entschieden.

Andere Studierende wollten die Differenz von $0,\bar{9}$ und 1 explizit angeben und haben durch Fehler bei dem Bilden der Differenz fälschlicherweise geschlossen, dass $0,\bar{9} < 1$ sei. In der Bearbeitung in Abbildung 5.22 ist diese Differenz als $0,\bar{1}$ angegeben worden, in Abbildung 5.23 als $0,\bar{0}1$.

Wie bereits erwähnt wurden zusätzlich Items eingesetzt, in denen neben anderen Dezimalzahlen die periodischen Dezimalzahlen $0,\bar{3}$ und $0,\bar{9}$ als Bruch dargestellt werden sollen.

- ☐ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
☒ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

Nein, da $0,1 = 0,\bar{9} + 0,\bar{1}$ und $0,\bar{1} \neq 0$.

Abbildung 5.22: Fehlerhafte Bearbeitung zu Item V6

- ☐ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
☒ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

weil $0,\bar{9}$ um $0,\bar{1}$ von 1 abweicht.

Abbildung 5.23: Fehlerhafte Bearbeitung zu Item V6

9. Stellen Sie die folgenden Zahlen als Bruch dar.

$0,25 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ $0,05 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ $0,3 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ $0,\bar{3} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ $0,\bar{9} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$
 V9A V9B V9C V9D V9E

Abbildung 5.24: Items V9A - V9E

Die Items V9A, V9B und V9C sollten von der eigentlichen Intention der Items V9D und V9E ablenken. Es sollte untersucht werden, ob nach der Darstellung von $0,\bar{3}$ als Bruch mehr Studierende erkennen, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt als bei Item V6.

Item	Beschreibung	Punkte
V9A	Der Bruch ist äquivalent zu $\frac{1}{4}$, Zähler und Nenner sind ganzzahlig	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V9B	Der Bruch ist äquivalent zu $\frac{1}{20}$, Zähler und Nenner sind ganzzahlig	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V9C	Der Bruch ist äquivalent zu $\frac{3}{10}$, Zähler und Nenner sind ganzzahlig	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V9D	Der Bruch ist äquivalent zu $\frac{1}{3}$, Zähler und Nenner sind ganzzahlig	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V9E	Zähler und Nenner sind ganzzahlig und identisch	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.17: Bewertung der Items V9A - V9E mit Punkten

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
V9A	161 (98%)	0 (0%)	3 (2%)	0,98
V9B	151 (92%)	5 (3%)	8 (5%)	0,92
V9C	141 (86%)	11 (7%)	12 (7%)	0,86
V9D	153 (93%)	5 (3%)	6 (4%)	0,93
V9E	71 (43%)	44 (27%)	49 (30%)	0,43

Tabelle 5.18: Punkteverteilung der Items V9A - V9E

Das Bewertungsschema zu den Items V9A bis V9E ist in Tabelle 5.17 dargestellt und in Tabelle 5.18 sind die Punkteverteilungen zu sehen. In den ersten beiden Fällen sind die Lösungsraten mit 0,98 beziehungsweise 0,92 auch zufriedenstellend. Dass nur 86% der Studierenden 0,3 korrekt als Bruch darstellen konnten, ist allerdings verwunderlich. Ein Fehler, der dabei mehrmals aufgetreten ist, war $0,3 = \frac{1}{3}$, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.25. Interessant an diesem Beispiel ist auch, dass der Studierende nicht nur 0,3 fälschli-

9. Stellen Sie die folgenden Zahlen als Bruch dar.

$$0,25 = \frac{1}{4} \quad 0,05 = \frac{1}{20} \quad 0,3 = \frac{1}{3} \quad 0,\bar{3} = \frac{1}{3} \quad 0,\bar{9} = \frac{\quad}{\quad}$$

Abbildung 5.25: falsche Bearbeitung zu Item V9C

cherweise als $\frac{1}{3}$ dargestellt hat, sondern $0,\bar{3}$ ebenfalls als $\frac{1}{3}$ dargestellt hat. Hier stellt sich die Frage, warum dem Probanden nicht aufgefallen ist, dass die beiden Antworten sich widersprechen und somit eine von beiden falsch sein muss.

Die Zahl $0,\bar{3}$ als Bruch darzustellen ist dann wieder mehr Studierenden gelungen, die Lösungsrate beträgt 0,93. Das Item V9E wurde – wie zu erwarten war – am schlechtesten dieser fünf Items bearbeitet. Unter den falschen Antworten waren viele Studierende,

$$0,\bar{9} = \frac{8}{9}$$

Abbildung 5.26: Fehlerhafte Bearbeitung zu Item V9E

die der Meinung waren, $0,\bar{9}$ könne nicht als Bruch dargestellt werden. Andere hingegen haben $0,\bar{9}$ falsch als Bruch dargestellt, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.26. Wie der Studierende auf $0,\bar{9} = \frac{8}{9}$ gekommen ist, mag einen zunächst verwundern. Wird der Bezug zu Item V6 hergestellt, so zeigt sich, dass dort die Differenz von $0,\bar{9}$ zu 1 fälschlicherweise als $0,\bar{1} = \frac{1}{9}$ berechnet wurde. Ausgehend von dieser Differenz würde tatsächlich $0,\bar{9} = \frac{8}{9}$ folgen. Soll die Frage beantwortet werden, wie viele Studierende von $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$ auf $0,\bar{9} = 1$ schließen, so kann zum einen die Kreuztabelle zu den Items V9D und V9E in Abbildung 5.27 betrachtet werden. Dort lässt sich ablesen, dass von den 153 Studierenden, die $0,\bar{3}$ korrekt als Bruch dargestellt haben, weniger als die Hälfte, nämlich 70 Studierende auch $0,\bar{9}$ als Bruch darstellen konnten. Allerdings sagen diese Zahlen nicht aus, ob diese Studierenden von Item V9D auf Item V9E geschlossen haben oder ob sie nicht sowieso schon wussten, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt. Dazu kann das Item V6 miteinbezogen

		V9e		Gesamtsumme
		0	1	
V9d	0	10	1	11
	1	83	70	153
Gesamtsumme		93	71	164

Abbildung 5.27: Kreuztabelle zu den Items V9D und V9E

werden. Insgesamt haben 43% der Studierenden $0,\bar{9}$ korrekt als Bruch dargestellt. Dieser Prozentsatz ist tatsächlich etwas höher als der Anteil der Studierenden, die bei Item V6 angekreuzt haben, es gelte $0,\bar{9} = 1$. Möglicherweise wäre der Unterschied sogar noch grö-

- ☒ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
☐ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

$0,\bar{9}$ kommt zwar nahe an 1 heran, bleibt aber
 immer kurz unter 1.
 siehe Aufgabe 9

Abbildung 5.28: Bearbeitung zu Item V6, bei der die Antwort nach der Bearbeitung von Item V9D und V9E verändert wurde

ßer gewesen, wenn nicht die Möglichkeit bestanden hätte, nach der Bearbeitung von Item V9E die Antwort zu Item V6 noch einmal zu verändern. Bei der Bearbeitung in Abbildung 5.28 ist dies sicherlich so geschehen, da der Studierende zuerst angekreuzt hatte, es gelte $0,\bar{9} < 1$ und dies damit begründet hatte, dass $0,\bar{9}$ zwar nahe an 1 heran komme, aber immer kurz unter 1 bleibe. Die Antwort wurde dann verändert zu $0,\bar{9} = 1$ und in der Begründung wird auf Aufgabe 9 verwiesen. Den Zusammenhang zwischen den Bearbei-

		V9e		Gesamtsumme
		0	1	
V6a	0	82	19	101
	1	11	52	63
Gesamtsumme		93	71	164

Abbildung 5.29: Kreuztabelle zu den Items V6 und V9E, wobei die Begründung bei V6 nicht berücksichtigt wurde

tungen zu Item V6 und V9E wollen wir nun noch einmal genauer betrachten. Dazu ist die Kreuztabelle in Abbildung 5.29 nützlich. Die 82 Studierenden, die bei V6 nicht $0,\bar{9} = 1$ angekreuzt haben und bei V9E $0,\bar{9}$ nicht korrekt als Bruch dargestellt haben, waren in

ihrem Antwortverhalten konsistent. Die 52 Studierenden, die beides korrekt beantwortet haben, waren ebenso konsistent. Die 19 Studierenden, die bei der Bearbeitung von Item V6 nicht der Meinung waren, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt, aber bei Item V9E $0,\bar{9}$ korrekt als Bruch dargestellt haben, wurden zuvor bereits erwähnt, sie haben vermutlich durch die Bearbeitung des Items V9D, in dem sie $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$ als Ergebnis hatten, ihre Meinung geändert. Die elf Studierenden, die bei Item V6 noch angekreuzt haben, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt, aber bei Item V9E diese Zahl nicht als Bruch darstellen konnten, verwundern zunächst. Dass diese Studierenden 1 nicht als Bruch darstellen konnten erscheint eher unwahrscheinlich. Drei von ihnen haben bei Item V9E einen falschen Bruch notiert. In zwei dieser Fälle, wo $0,\bar{9} = \frac{1}{10}$ beziehungsweise $0,\bar{9} = \frac{1}{9}$ geschrieben wurde, haben sich die Studierenden möglicherweise verschrieben. Der dritte von ihnen hat $0,\bar{9}$ durch $\frac{9}{10}$ als Bruch dargestellt. Diese Darstellung ist nicht korrekt, steht aber auch nicht im Widerspruch zu der Antwort $0,\bar{9} = 1$. Ein weiterer Studierender ist der Meinung, dass es keinen Bruch gibt, der $0,\bar{9}$ ergibt und folgert daraus, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt. Diese Schlussfolgerung ist nicht nachvollziehbar, aber in gewissem Sinne ist diese Begründung zu Item V6 somit auch konsistent zu seiner Bearbeitung von Item V9E, in der er $0,\bar{9}$ eben nicht als Bruch dargestellt hat. Bei den meisten übrigen Studierenden ist bei Item V6 zwar die richtige Antwort angekreuzt, doch es ist keine Begründung vorhanden. Möglicherweise haben sie an der Stelle einfach nur geraten und ihnen war bei der Bearbeitung von Item V9E dann nicht mehr bewusst, dass sie zuvor $0,\bar{9} = 1$ geantwortet haben. Lediglich ein Studierender hat bei Item V6 seine Antwort korrekt über Brüche begründet und dennoch bei Item V9E $0,\bar{9}$ nicht als Bruch dargestellt.

Items zu Funktionen

Eine Folge wird in der Vorlesung definiert als eine Abbildung von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen. Um ein adäquates Konzept zum Folgenbegriff aufbauen zu können, müssen die Studierenden also den Abbildungsbegriff verstanden haben. Dies wird in fünf selbstentwickelten Items abgefragt (siehe Abbildung 5.30). Um unterscheiden zu können, ob ein Studierender der Meinung ist, dass durch einen Term keine Abbildung definiert wird, oder ob er keine Antwort gegeben hat, musste jeweils „Ja“ oder „Nein“ angekreuzt werden. Bewusst wurden hier auch einige abschnittsweise definierte Abbildungen ausgewählt. In Kapitel 2 wurde dargelegt, dass einige Schülerinnen und Schüler oder Studierende abschnittsweise definierte Funktionen beziehungsweise abschnittsweise definierte Folgen nicht als eine einzige Funktion beziehungsweise eine einzige Folge auffassen. Es liegt die Vermutung nahe, dass Lernende, die diese Vorstellung zu Funktionen aufweisen, dies bei Folgen ähnlich sehen.

In Tabelle 5.19 ist dargestellt, wie die Antworten auf die Items V7A bis V7E bewertet werden und in Tabelle 5.20 sind die Punkteverteilungen abgebildet. Bei Item V7A handelt es sich um keine Abbildung, da eine Definitionslücke an der Stelle $x = 100$ vorliegt und für $x < 0$ keine Abbildungsvorschrift gegeben ist. Nur 72 Studierende haben dies erkannt. Möglicherweise haben von den übrigen Studierenden einige überlesen, dass der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ vorgegeben war. Wäre der Definitionsbereich auf $[0, 100) \cup (100, \infty)$ eingeschränkt, so würde es sich tatsächlich um eine Abbildung handeln.

Durch die Vorschrift in Item V7B ist ebenfalls keine Abbildung definiert, da jeder natürlichen Zahl sowohl 1 als auch 0 zugeordnet wird. 129 Studierende haben dies erkannt,

7. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um eine Abbildung handelt.

		Ja	Nein
V7A	$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 100 \\ -2x & x > 100 \end{cases}$	☐	☐
V7B	$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$	☐	☐
V7C	$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \forall x \in \mathbb{R}$	☐	☐
V7D	$f(x) = \frac{1}{x-4} \forall x \in \mathbb{R}$	☐	☐
V7E	$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$	☐	☐

Abbildung 5.30: Items V7A - V7E

Item	Beschreibung	Punkte
V7A	„Nein“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V7B	„Nein“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V7C	„Ja“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V7D	„Nein“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
V7E	„Ja“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.19: Bewertung der Items V7A - V7E mit Punkten

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
V7A	72 (44%)	74 (45%)	18 (11%)	0,44
V7B	129 (79%)	24 (15%)	11 (7%)	0,79
V7C	126 (77%)	25 (15%)	13 (8%)	0,77
V7D	105 (64%)	46 (28%)	13 (8%)	0,64
V7E	132 (81%)	18 (11%)	14 (9%)	0,80

Tabelle 5.20: Punkteverteilung der Items V7A - V7E

dieses Item wurde also gut gelöst.

Die Vorschrift in Item V7C hingegen liefert eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Von 126 Studienanfängern wurde dies korrekt beantwortet. Über die Gründe für falsche Antworten lässt sich hier nur mutmaßen.

Die in Item V7D gegebene Vorschrift definiert wiederum keine Abbildung auf den reellen Zahlen, da der Term für $x = 4$ nicht definiert ist. Das wurde von 105 Studierenden erkannt.

Bei der in Item V7E gegebenen Vorschrift handelt es sich schließlich um eine Abbildung, die allerdings abschnittsweise definiert ist. Das hat den Studierenden anscheinend wenig Probleme bereitet, 132 von ihnen haben dieses Item gelöst.

Items zu Folgen

Aus der Schule und dem Alltag kennen die Studienanfänger und -anfängerinnen Folgen und Grenzwerte bereits, sie sind allerdings nicht unbedingt mit den formalen Definitionen vertraut. Dennoch können sie intuitiv etwas über das Verhalten der Folgenglieder für große n sagen. Dies wird in drei selbstentwickelten Items (siehe Abbildung 5.31) abgefragt. Die erste Beispielfolge ist dabei ein eher typisches Beispiel einer konvergenten

8. Wir betrachten verschiedene Zahlenfolgen. Versuchen Sie möglichst genau auszudrücken, was jeweils mit a_n passiert, wenn n beliebig groß wird.

V8A

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...

Beschreibung:

V8B

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{6}{5}$	...

Beschreibung:

V8C

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	...

Beschreibung:

Abbildung 5.31: Items V8A - V8C

Folge, denn sie ist streng monoton wachsend und keins der Folgenglieder entspricht dem Grenzwert. Die zweite Beispielfolge hingegen ist nicht konvergent, sondern hat zwei Häufungspunkte. Dieses Item zielt also auch auf die Unterscheidung zwischen Grenzwert und Häufungspunkten ab. Die dritte Beispielfolge ist streng monoton wachsend und keins der

Folgenglieder nimmt den Grenzwert an, was diese Folge ebenfalls zu einem typischen Beispiel einer konvergenten Folge macht. Allerdings werden hier die einzelnen Folgenglieder als Summe notiert, wobei mit jedem Schritt ein Summand hinzukommt. Hier könnte die Fehlvorstellung auftreten, dass eine Summe, bei der immer noch etwas positives hinzu addiert wird, nicht durch einen endlichen Wert beschränkt sein kann. Die drei Beispielfolgen weisen somit eine gewisse Vielfalt auf.

Für die verbale Beschreibung in Item V8A wurde zunächst ein Kategoriensystem mit inhaltlichen Kategorien entwickelt, das in Tabelle 5.21 zu sehen ist.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Symbolisch“	Es wurde in Symbolen ausgedrückt, dass die Folge gegen 1 konvergiert.	<i>1. Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ <i>2. Beispiel:</i> $a_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ <i>3. Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$	Die symbolische Darstellung ist formal korrekt.	2 Punkte
K1(-)				Die symbolische Darstellung enthält Mängel.	1 Punkte
K2(+)	„Verbal“	Es wurde in Worten beschrieben, dass die Folge gegen 1 konvergiert.	<i>1. Beispiel:</i> Für beliebig große n nähert sich die von links (auf dem Zahlenstrahl) 1 an	Die Beschreibung ist präzise	2 Punkte
K2(-)				Die Beschreibung ist korrekt aber unpräzise.	1 Punkt
K3	„Verbal unvollständig“	Es wurde etwas verbal beschrieben. Alles, was ausgesagt wird, ist korrekt, aber die Beschreibung ist unvollständig. Der Grenzwert 1 wird nicht genannt.	<i>1. Beispiel:</i> a_n wird immer größer je größer n wird		0 Punkte

K4	„Term“	Es wurde lediglich der Term beschrieben und nichts dazu gesagt, was passiert wenn n beliebig groß wird.	1. <i>Beispiel:</i> für a_n gilt im Zähler $n - 1$, im Nenner n $\Rightarrow a_n = \frac{n-1}{n}$ 2. <i>Beispiel:</i> Bei dieser Zahlenfolge geht es darum, dass sich durch $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ jeweils der Zähler um eine natürliche Zahl ergänzt und der Nenner sich um das n ergänzt. Dieses kann man genau nach Rechnung sehen. 3. <i>Beispiel:</i> $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ die Zahl 1 wird um $\frac{1}{n}$ subtrahiert		0 Punkte
K5	„Falsch“	Die Beschreibung enthält falsche Aspekte	1. <i>Beispiel:</i> je größer n wird, desto kleiner wird a_n $n \rightarrow \infty \quad a_n \rightarrow 0$ 2. <i>Beispiel:</i> Wir erhalten den Bruch der Form $\frac{n-1}{n}$. Er geht gegen ∞ 3. <i>Beispiel:</i> Je größer n, desto kleiner a_n		0 Punkte
K6	Keine Beschreibung	Es wurde nichts geschrieben.			0 Punkte

Tabelle 5.21: Kategoriensystem für das Item V8A

Es handelt sich um eine monoton wachsende Folge, die gegen 1 konvergiert. Die Studierenden hatten die Begriffe Monotonie und Konvergenz in der Vorlesung jedoch

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
28 (17%)	105 (64%)	21 (13%)	10 (6%)	0,98

Tabelle 5.22: Punkteverteilung des Items V8A

K1(+)	K1(-)	K2(+)	K2(-)	K3	K4	K5	K6/n.b.
17 10%	9 5%	11 7%	96 59%	1 1%	8 5%	12 7%	10 6%

Tabelle 5.23: Verteilung auf die Kategorien des Items V8A

noch nicht kennengelernt. Die meisten Studierenden, und zwar insgesamt 108, haben das Konvergenzverhalten der Folge verbal beschrieben (Kategorien K2(+), K2(-), K3), wie in dem Beispiel in Abbildung 5.32. Dazu haben sie Ausdrücke wie „*nähert sich 1*

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	...

Beschreibung:

wenn n beliebig groß wird dann wird auch a_n näher sich, an 1 immer weiter 1, wenn n größer wird.

Abbildung 5.32: verbale Beschreibung zu Item V8A

an“, „geht gegen 1“ oder „strebt gegen 1“ benutzt oder manche – und zwar nicht nur Wiederholer der Vorlesung – auch die Begriffe „konvergiert“, „Grenzwert“ oder „Limes“. Einige haben auch erwähnt, dass 1 nicht erreicht wird. Da das auf die gegebene Folge zutrifft, kann das an dieser Stelle nicht kritisiert werden, auch wenn zu einem adäquaten *Concept Image* natürlich auch solche konvergenten Folgen gehören sollten, die ihren Grenzwert erreichen. Ob das bei den Studienanfängern jeweils der Fall ist, kann mit diesen Items nicht herausgefunden werden. Davon abgesehen haben 26 Studierende das Konvergenzverhalten der gegebenen Folge symbolisch ausgedrückt (K1(+), K1(-)). Dass die Notation nicht unbedingt mathematisch korrekt war, ist nicht weiter verwunderlich. Acht Studierende haben lediglich den Term beschrieben, sich jedoch nicht

Beschreibung:

Es ergibt sich ein Bruch mit $\frac{n-1}{n}$.

Abbildung 5.33: Bearbeitung zu Item V8A, in der nicht auf das Konvergenzverhalten der Folge eingegangen wird

über das Konvergenzverhalten der Folge geäußert. Ein Beispiel dazu ist in Abbildung 5.33 zu sehen. Es wurde nichts falsches geschrieben, doch die Aufgabenstellung, zu beschreiben, „was jeweils mit a_n passiert, wenn n beliebig groß wird“ wurde nicht treffend bearbeitet. Es gab auch 12 Bearbeitungen, in denen das Konvergenzverhalten falsch beschrieben wurde. Darunter lassen sich jedoch keine typischen Fehler identifizieren.

Bei Item V8B soll das Verhalten im Unendlichen einer Folge, welche die beiden Häufungspunkte 1 und -1 besitzt, beschrieben werden. Zunächst wird in Tabelle 5.24 das Kategoriensystem präsentiert, das für die Kodierung der Antworten genutzt wird.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K1	„korrekt und präzise“	Es wurden die beiden Häufungspunkte genannt oder die zwei Teilfolgen beschrieben.	<i>1. Beispiel:</i> Es bilden sich 2 Häufungspunkte, nämlich -1 und 1 <i>2. Beispiel:</i> Sei n gerade. Dann läuft a_n gegen 1 . Sei n ungerade. Dann läuft a_n gegen -1 .	2 Punkte
K2	„Unpräzise“	Die beiden Werte 1 und -1 wurden genannt, aber nicht explizit als Häufungspunkte beschrieben und es wurde nicht auf die beiden Teilfolgen eingegangen.	<i>1. Beispiel:</i> Die Werte der Zahlenfolge nähern sich ± 1 an	1 Punkt
K3	„Zwei Grenzwerte“	In der Beschreibung werden 1 und -1 explizit als zwei Grenzwerte bezeichnet.	<i>1. Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm 1$ <i>2. Beispiel:</i> konvergiert einmal gegen 1 und einmal gegen -1	1 Punkt
K4	„Unvollständig“	Alles, was ausgesagt wird, ist korrekt, aber die Beschreibung ist unvollständig.	<i>1. Beispiel:</i> alternierend <i>2. Beispiel:</i> divergiert, da wechselt immer zwischen $-$ und $+$	0 Punkte
K5	„Term“	Es wurde lediglich der Term beschrieben und nichts über die Häufungspunkte ausgesagt.	<i>1. Beispiel:</i> n steht immer im Nenner, bei ungeraden Zahlen Minus, der Zähler wird immer 1 kleiner, dann 3 höher <i>2. Beispiel:</i> a_n tauscht immer das Vorzeichen und Nenner und Zähler von $n - 1$, für $\forall n \in \mathbb{N} : 2 n$. Die ungeraden Zahlen bringen immer neue Brüche $-\left(\frac{n+1}{n}\right)$.	0 Punkte

K6	„falsch“	Die Beschreibung enthält falsche Aspekte.	1. <i>Beispiel:</i> a_n nähert sich 0 von beiden Seiten an. 2. <i>Beispiel:</i> a_n ist alternierend und nähert sich 1 und $-\infty$ an	0 Punkte
K7	keine Beschreibung	Es wurde nichts geschrieben.		0 Punkte

Tabelle 5.24: Kategoriensystem für das Item V8B

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
47 (29%)	32 (20%)	60 (37%)	25 (15%)	0,77

Tabelle 5.25: Punkteverteilung des Items V8B

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
47	23	9	18	8	34	25
29%	14%	5%	11%	5%	21%	15%

Tabelle 5.26: Verteilung auf die Kategorien des Items V8B

Auch der Begriff des Häufungspunktes war den Studierenden jedoch aus der Vorlesung noch nicht bekannt. 47 von den 164 Studierenden gelingt es, das Verhalten der Folge korrekt und präzise zu beschreiben. Entweder benennen sie 1 und -1 als Häufungspunkte, wobei dies ausschließlich bei Wiederholern der Vorlesung vorgekommen ist, oder sie gehen auf die beiden Teilfolgen ein, von denen die eine gegen 1 und die andere gegen -1 konvergiert, wie in Abbildung 5.34. Bei den 23 unpräziseren Beschreibungen werden die

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{6}{5}$	...

Beschreibung:

ähnliches Schema wie oben, bei n ungerade Annäherung an -1 , bei n gerade an 1

Abbildung 5.34: korrekte Beschreibung der Folge in Item V8B

Werte 1 und -1 zwar genannt, sie werden jedoch weder als Häufungspunkte bezeichnet noch wird auf die beiden Teilfolgen eingegangen. Neun Studierende sprechen explizit davon, dass die Folge zwei Grenzwerte hat. Diese Studierenden haben das Verhalten der Folge korrekt erfasst, doch ihr Begriffsbild zu Grenzwerten ist insofern nicht mit der formalen Definition des Grenzwertes verträglich, als es auch das Besitzen mehrerer Grenzwerte zulässt. Außerdem gibt es auch hier wieder Studierendenbearbeitungen, bei denen lediglich der Term beschrieben wird oder in denen das Verhalten der Folge falsch beschrieben wird. Mehrfach wird von einer Annäherung an 0, wie in dem Beispiel in

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$	...

Beschreibung:

Hier ist a_n negativ bei ungeraden Zahlen und positiv bei geraden Zahlen. Je größer n wird, ~~umso~~ näher wird a_n und nähert sich der 0.

Abbildung 5.35: fehlerhafte Beschreibung zu Item V8B

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$	...

Beschreibung:

a_n geht gegen 1, da $(-1)^n$ gegen 1 geht und $\frac{1}{n}$ gegen 0

Abbildung 5.36: weitere fehlerhafte Beschreibung zu Item V8B

Abbildung 5.35, oder einer Annäherung an 1, wie in Beispiel 5.36 gesprochen.

Die in Item V8C gegebene Folge konvergiert gegen den Wert 2. Hier können für die Kodierung die gleichen Kategorien verwendet werden wie bei Item V8A. Da bei den Erklärungen der Kategorien aufgrund des anderen Grenzwerts Unterschiede bestehen und die Ankerbeispiele verschieden sind, wird das Kategoriensystem in Tabelle 5.27 dargestellt.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Symbolisch“	Es wurde in Symbolen ausgedrückt, dass die Folge gegen 2 konvergiert.	1. <i>Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 2. <i>Beispiel:</i> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 2$	Die symbolische Darstellung ist formal korrekt.	2 Punkte
K1(-)				Die symbolische Darstellung enthält Mängel.	1 Punkt
K2(+)	„Verbal“	Es wurde in Worten beschrieben, dass die Folge gegen 2 konvergiert.	1. <i>Beispiel:</i> Die Folge nähert sich von links der Zahl 2 an 2. <i>Beispiel:</i> a_n konvergiert gegen 2	Die Beschreibung ist präzise.	2 Punkte
K2(-)				Die Beschreibung ist korrekt aber unpräzise.	1 Punkt

K3	„Verbal unvollständig“	Es wurde etwas verbal beschrieben. Alles, was ausgesagt wird, ist korrekt, aber die Beschreibung ist unvollständig. Der Grenzwert 2 wird nicht genannt.	1. <i>Beispiel:</i> a_n wird immer langsamer größer 2. <i>Beispiel:</i> a_n bleibt $\forall n$ zwischen 1,5 und 2 3. <i>Beispiel:</i> a_n nähert sich einem Grenzwert an		0 Punkte
K4	„Term“	Es wurde lediglich der Term beschrieben und nichts über das Konvergenzverhalten ausgesagt.	1. <i>Beispiel:</i> Wenn n beliebig groß wird Nenner: verdoppelt sich Zähler: Der Zähler des vorherigen Bruches wird verdoppelt +1 2. <i>Beispiel:</i> Zähler immer mit 2 multiplizieren und 1 addieren Nenner immer mit 2 multiplizieren		0 Punkte
K5	„Falsch“	Die Beschreibung enthält falsche Aspekte	1. <i>Beispiel:</i> a_n geht gegen unendlich, da die einzelnen Summanden niemals 0 sein werden 2. <i>Beispiel:</i> geht Richtung $1\frac{1}{2}$ 3. <i>Beispiel:</i> $a_n = 1 + \frac{1}{2^n} \rightarrow$ geht gegen 1		0 Punkte

K6	Keine Beschreibung	Es wurde nichts geschrieben.			0 Punkte

Tabelle 5.27: Kategoriensystem für das Item V8C

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
14 (9%)	60 (37%)	51 (31%)	39 (24%)	0,54

Tabelle 5.28: Punkteverteilung des Items V8C

K1(+)	K1(-)	K2(+)	K2(-)	K3	K4	K5	K6/n.b.
8	5	6	55	9	11	31	39
5%	3%	4%	34%	5%	7%	19%	24%

Tabelle 5.29: Verteilung auf die Kategorien des Items V8C

Item V8C ist den Studierenden erwartungsgemäß noch schwerer gefallen als die beiden Items zuvor. Viele haben Schwierigkeiten zu erkennen, dass eine Folge, bei der bei jedem Folgenglied noch ein positiver Summand hinzu addiert wird, dennoch konvergieren kann. Es handelt sich um genau so einen Fall einer monoton wachsenden Folge mit Grenzwert 2. Es haben 74 Studierende, also weniger als die Hälfte, in ihrer Beschreibung genannt, dass die Folge gegen 2 konvergiert, wobei ich dazu auch wieder diejenigen Bearbeitungen zähle, in denen der Begriff „konvergiert“ umgangssprachlich umschrieben wurde, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.37. Darunter waren 13 symbolische Antworten (K1(+),

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	...

Beschreibung:

a_n nähert sich von unten an 2 an.

Abbildung 5.37: Beispiel einer korrekten Beschreibung zu Item V8C

K1(-)) und 61 verbale Beschreibungen (K2(+), K2(-)). Auch hier gibt es außerdem wieder Bearbeitungen, in denen der wesentliche Aspekt fehlt, oder in denen etwas falsches geschrieben wurde. Bei diesem Item ist es noch einmal interessant, die falschen Antworten etwas genauer zu betrachten. Zwei falsche Ergebnisse sind dabei häufiger aufgetreten. Zum einen handelt es sich um die Antwort, die Folge würde bestimmt gegen

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	...

Beschreibung:

ausgeht gegen ∞

Abbildung 5.38: falsche Beschreibung zu Item V8C

∞ divergieren, wie in Abbildung 5.38 zu sehen. Das entspricht genau der zuvor bereits vermuteten Schwierigkeit, zu erkennen, dass eine Folge, bei der immer noch ein positiver Summand hinzu addiert wird, dennoch beschränkt und eben auch konvergent sein kann. In zehn Bearbeitungen lässt sich dieser Fehler eindeutig erkennen. In einigen weiteren

n	1	2	3	4	5	...
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	...

Beschreibung:

a_n wird mit steigendem n immer größer.

Abbildung 5.39: ungenaue Beschreibung zu Item V8C

Bearbeitungen, wie in Abbildung 5.39, lässt sich nur mutmaßen, ob beispielsweise mit „immer größer werden“ lediglich die Monotonie zum Ausdruck gebracht werden sollte, oder ob damit ein Wachsen über jede beliebige Grenze hinaus gemeint war, weil eben auch kein Grenzwert genannt wurde.

Mit acht Bearbeitungen ebenfalls noch relativ häufig genannt wurde das Ergebnis, die Folge konvergiere gegen 1. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die Studierenden den ersten Summanden 1 übersehen oder vergessen haben und den Grenzwert der restlichen Summanden korrekt bestimmt haben. In manchen Bearbeitungen wird jedoch eine

Beschreibung:

$a_n = 1 + \frac{1}{2^n} \rightarrow$ geht gegen 1

Abbildung 5.40: fehlerhafte Bearbeitung zu Item V8C

andere Ursache ersichtlich. Beispielsweise in der Bearbeitung in Abbildung 5.40 ist klar zu erkennen, dass der Studierende die Folge als $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ anstatt, wie explizit angegeben, als $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ interpretiert hat. Von dieser Folge wiederum hat er den Grenzwert dann korrekt als 1 bestimmt.

Die Themenbereiche, die durch diesen Test abgefragt werden sollen, sind nun alle durch Items abgedeckt, wenn auch nicht immer ein Item vorhanden ist, dass ausschließlich den einen Themenbereich prüft. Eine Mischung verschiedener Themenbereiche ist teilweise unumgänglich. Unendlichkeit ist in den Items 5A und 5B zentral und spielt auch bei den Items 8A, 8B und 8C eine Rolle. Funktionen werden in den Items 7A bis 7E geprüft. Folgen sind wesentlicher Bestandteil der Items 8A, 8B und 8C. Variablen kommen in den Items 1, 2A, 2B, 2C, 3, 4, 8A, 8B und 8C vor. Quantoren kommen zwar nicht als Symbol im Test vor, doch in Item 4 kommt mit „für jedes $n \in \mathbb{N}$ “ ein verbaler Ausdruck vor, der inhaltlich dem Quantor „ $\forall$ “ entspricht. Beträge wiederum kommen in den Items 2A, 2B und 3 vor und Ungleichungen in den Items 2C, 3 und 4. Argumentationen sind sowohl in Item 4 als auch in Item 6 gefordert.

Zuletzt wird die Verteilung des Summenscores im „Vortest“ betrachtet. In Abbildung 5.41 ist diese als Boxplot dargestellt und in Abbildung 5.42 als Histogramm. Die Gesamtpunktzahl beträgt 27 Punkte. Die Summenscores der 164 Studierenden liegen zwischen 0 und

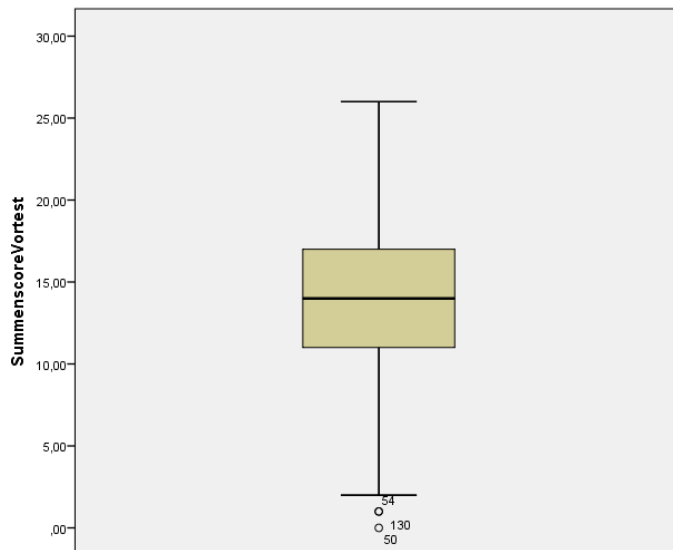


Abbildung 5.41: Boxplot der Verteilung des Summenscores im „Vortest“

26 Punkten, die Spannbreite beträgt also 26. Die Hälfte der Studierenden liegt mit einer Punktzahl zwischen 11 und 17 Punkten jedoch relativ nah zusammen. Der Median liegt bei 14 Punkten.

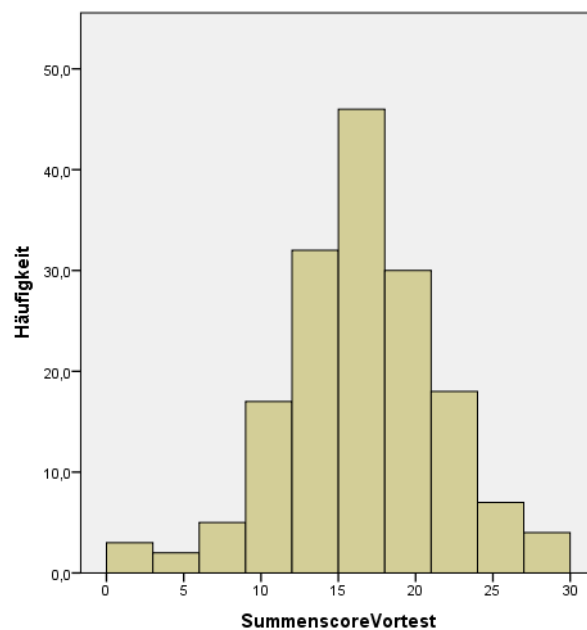


Abbildung 5.42: Histogramm der Summenscores im „Vortest“

5.2.2 Skalierung des „Vortests“

Bei der Auswertung der Tests habe ich mich aus verschiedenen Gründen für die Item-Response-Theorie entschieden. In Abschnitt 5.1 habe ich bereits die Vorteile dieser Testtheorie gegenüber der klassischen Testtheorie dargelegt. Außerdem sollte die Möglichkeit

offen gehalten werden, den „Nachtest“ dafür zu nutzen, ein Kompetenzmodell zum Konvergenzbegriff zu entwickeln. Dazu sind kriteriumsorientierte Interpretationen der Ergebnisse notwendig und diese wiederum sind lediglich auf Basis der Item-Response-Theorie möglich. Der „Vortest“ sollte dann selbstverständlich anhand derselben Testtheorie ausgewertet werden.

Bei der Skalierung bin ich in vier Schritten vorgegangen: Zunächst habe ich verschiedene theoretisch plausible Modelle der Item-Response-Theorie anhand des gesamten Datensatzes bestehend aus den Testwerten aller 164 Probanden zu allen 22 Items miteinander verglichen. In der zweiten Phase habe ich nur noch das Modell betrachtet, das am besten zu dem gesamten Datensatz passt und aufgrund der Itemfitwerte unter Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen einzelne Items eliminiert. Anschließend habe ich für den reduzierten Datensatz noch einmal überprüft, ob das ausgewählte Modell auch hier besser ist als die übrigen anfangs betrachteten Modelle. Nach dieser Überprüfung habe ich auf Basis des endgültigen Modells die Personenfähigkeiten geschätzt. Diese Schritte werden nun im einzelnen beschrieben.

Phase 1: Vergleich verschiedener Modelle

Da im Test nicht nur Items mit dichotomem Antwortformat vorkommen, kommt das einfachste Modell, das dichotome Rasch-Modell, schon einmal nicht in Frage. Sowohl beim Rating-Scale- als auch beim Partial-Credit-Modell handelt es sich um Modelle für Items mit polytomen Antwortformaten. Da die Anzahl der Antwortkategorien über die Items variiert, ist davon auszugehen, dass das Partial-Credit-Modell besser zu den Daten passt als das Rating-Scale-Modell. Dennoch soll diese Vermutung empirisch überprüft werden, da ja auch immer das Einfachheitskriterium berücksichtigt werden sollte. Beim Rating-Scale-Modell werden in diesem Fall dichotome Items so behandelt, als hätten sie drei Antwortkategorien, wobei jeweils die höchste Kategorie von keinem Probanden erreicht wurde. Es soll also nun das eindimensionale Partial-Credit-Modell mit dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell verglichen werden. Dazu werden für beide Modelle zunächst die Itemschwierigkeiten geschätzt und die Item- und Modellfitwerte berechnet. Da es sich bei dem Partial-Credit-Modell um ein echtes Obermodell des Rating-Scale-Modells handelt und das Rating-Scale-Modell nicht durch Nullsetzen von Parametern aus dem Partial-Credit-Modell entsteht, kann der Likelihoodquotiententest zum Vergleich genutzt werden, sofern die Modellkonformität für das Obermodell nachgewiesen wird.

Nachweis der Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells

Dazu werden zunächst die Itemfitwerte des Partial-Credit-Modells betrachtet. Die gewichteten MNSQ-Fit-Werte liegen zwischen 0,86 und 1,21 und befinden sich somit in einem akzeptablen bis guten Bereich. Die korrigierten Trennschärfen liegen zwischen 0,11 und 0,47. Sie sind für einzelne Items etwas zu niedrig, doch sie werden akzeptiert. Dies wird an späterer Stelle in der Phase der Itemselektion noch einmal begründet. Die EAP/PV-Reliabilität ist mit 0,800 gut. Nun soll noch die Stichprobenunabhängigkeit untersucht werden. Dazu wird die Stichprobe nach verschiedenen Kriterien unterteilt, für die Teilgruppen werden einzeln die Itemschwierigkeiten geschätzt und dann werden die auf diese Art erhaltenen Parameter in einem Scatterplot dargestellt. Die Abweichung von der Hauptdiagonalen sollte dabei möglichst gering beziehungsweise nur zufällig sein. Das erste

Kriterium, nach dem ich die Gesamtstichprobe unterteile, ist das Geschlecht. In Abbildung

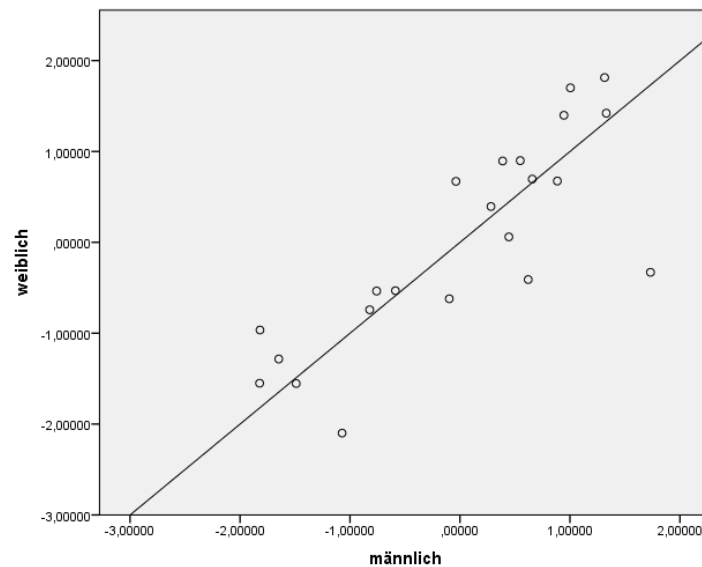


Abbildung 5.43: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Geschlecht

5.43 ist der entsprechende Scatterplot zu sehen. Bei einem Item (V6) ist die Abweichung von der Hauptdiagonalen etwas größer, das heißt für dieses Item unterscheiden sich die Itemschwierigkeit die auf Basis der Frauen-Daten geschätzt wurde von der, die auf Basis der Männer-Daten geschätzt wurde. Im Wesentlichen sind die Abweichungen aber noch akzeptabel. Weiterhin wird die Gesamtstichprobe unterteilt nach dem Studiengang. Hier werden, um in beiden Teilstichproben noch einigermaßen große Stichprobengrößen zu haben, die Studierenden des gymnasialen Lehramts von den übrigen Studiengängen unterschieden. Der Scatterplot dazu ist in Abbildung 5.44 zu sehen. Hier fällt ebenfalls lediglich ein Item (V9C) auf, dass weiter von der Hauptdiagonalen abweicht als die übrigen. Wieder sind die Abweichungen akzeptabel. Zuletzt wird die Stichprobe noch in Wiederholer und Nicht-Wiederholer der Analysis-1-Veranstaltung unterteilt. Wieder gibt es ein Item (V9D) dessen Schwierigkeit sich für Wiederholer und Nicht-Wiederholer etwas stärker unterscheidet. Doch auch hier sind die Unterschiede akzeptabel. Da nach einer Unterteilung der Gesamtstichprobe anhand verschiedener Kriterien keine wesentlichen Unterschiede in den geschätzten Schwierigkeiten der Items festgestellt wurden, kann angenommen werden, dass die Stichprobenunabhängigkeit erfüllt ist.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Nun kann also der Likelihoodquotiententest durchgeführt werden. Dazu werden die von ConQuest berechneten „Final Deviance“-Werte der beiden Modelle voneinander abgezogen und für die Freiheitsgrade wird die Differenz der Anzahlen der geschätzten Parameter gebildet. Die entsprechenden Ausgaben von ConQuest sind in Abbildung 5.46 und 5.47 zu sehen. Als Prüfgröße ergibt sich $-2 \cdot \log(LR) = -2 \cdot \log(L_0) - (-2) \cdot \log(L_1) = 5381,05015 - 4414,95386 = 966,09629$ und als Anzahl der Freiheitsgrade $df = 31 - 24 = 7$. Bei der χ^2 -Verteilung ist der kritische Wert für sieben Freiheitsgrade und $p = 0,001$ kleiner

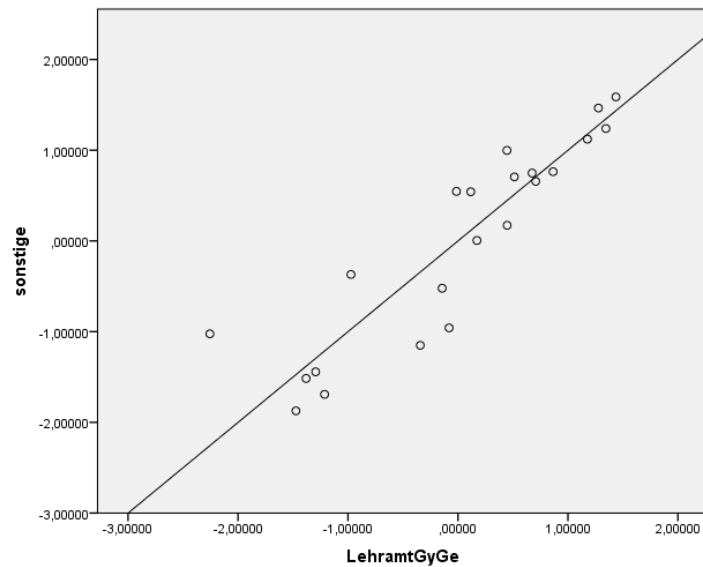


Abbildung 5.44: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Studiengang

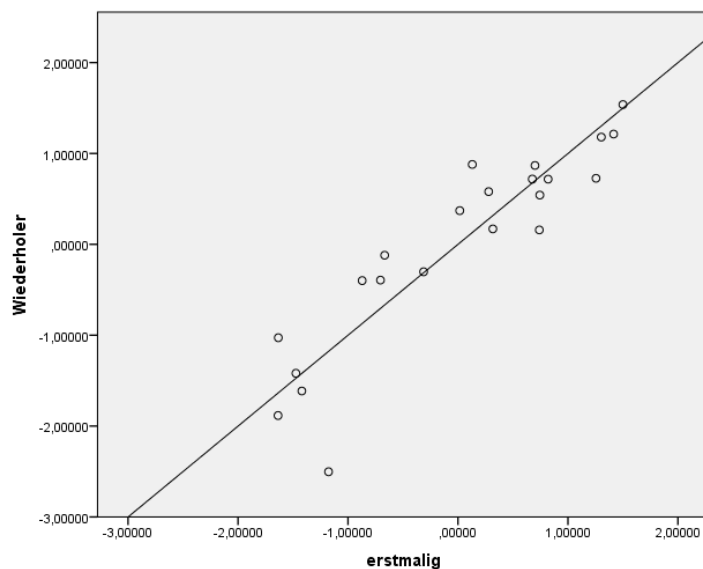


Abbildung 5.45: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach (Nicht-) Wiederholer

als die Prüfgröße, also beschreibt das Modell mit dem kleineren „Final Deviance“-Wert, das Partial-Credit-Modell, die vorliegenden Daten besser. Anhand der informationstheoretischen Maße gelangt man zur selben Entscheidung: Der AIC des Rating-Scale-Modells ist mit 5429,05 größer als der des Partial-Credit-Modells (4476,95). Beim BIC beziehungsweise CAIC sieht das ähnlich aus, für das Rating-Scale-Modell ergibt sich 5503,45 beziehungsweise 5527,45 und für das Partial-Credit-Modell 4573,05 beziehungsweise 4604,05. Auch die etwas höhere Reliabilität von 0,800 beim Partial-Credit-Modell im Vergleich zu 0,758 beim Rating-Scale-Modell und die besseren Itemfitwerte sprechen für das Partial-

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012===

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: NONE
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4414.95386
Total number of estimated parameters: 31

```

Abbildung 5.46: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Partial-Credit-Modell

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012===

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      5381.05015
Total number of estimated parameters: 24

```

Abbildung 5.47: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Credit-Modell gegenüber des Rating-Scale-Modells. Wie zuvor bereits begründet, entspricht dieses Ergebnis den Erwartungen.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit verschiedenen mehrdimensionalen Partial-Credit-Modellen

Abgesehen von den bisher betrachteten Modellen wären jedoch auch mehrdimensionale Modelle denkbar. Im Folgenden werde ich drei verschiedene zweidimensionale und ein dreidimensionales Partial-Credit-Modell mit dem eindimensionalen Partial-Credit-Modell vergleichen. Da in diesen Fällen die Bedingungen für den Likelihoodquotiententest nicht erfüllt sind, werden die Entscheidungen auf Basis der informationstheoretischen Maße, der Reliabilitäten und der Itemfitwerte getroffen. Für das erste zweidimensionale Modell wurden die Items nach dem Kriterium unterschieden, ob in irgendeiner Form „unendlich“ darin vorkommt oder nicht. Die erste Dimension besteht somit aus den Items V4, V5A, V5B, V6, V8A, V8B und V8C und die zweite Dimension aus den übrigen Items. Für die Berechnung der informationstheoretischen Maße werden wieder der „Finals Deviance“-

Wert und die Anzahl der geschätzten Parameter benötigt. Diese sind in Abbildung 5.48

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4533.19412
Total number of estimated parameters: 33
```

Abbildung 5.48: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „unendlich“

abzulesen. Es ergeben sich $AIC = 4599,19$, $BIC = 4701,49$ und $CAIC = 4734,49$. Auch in diesem Fall sind alle drei Werte größer als die entsprechenden Werte des eindimensionalen Partial-Credit-Modells. Die EAP/PV-Reliabilitäten für die beiden Dimensionen betragen 0,739 und 0,741 und sind somit beide ebenfalls schlechter als die Reliabilität im eindimensionalen Fall. Auch wenn die Unterscheidung in die beiden Dimensionen inhaltlich plausibel scheint, ist aufgrund der Modellwerte eindeutig das eindimensionale Partial-Credit-Modell diesem zweidimensionalen Modell vorzuziehen. Eine andere Unterteilung der Items in zwei Dimensionen wurde nach dem Kriterium „Rechnen mit Brüchen/Beträgen“ vorgenommen. Für die erste Dimension wurden demnach die Items V1, V2A, V2B, V2C, V3, V4, V9A, V9B, V9C, V9D und V9E gewählt und für die zweite Dimension alle übrigen Items. Zum Vergleich werden wieder aus der „Final Deviance“

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4529.52438
Total number of estimated parameters: 33
```

Abbildung 5.49: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „Brüche/Beträge“

und der Anzahl der geschätzten Parameter (siehe Abbildung 5.49) die informationstheoretischen Maße berechnet. Diese betragen hier $AIC = 4595,52$, $BIC = 4697,82$ und $CAIC = 4730,82$ und sind somit ebenfalls größer als die des eindimensionalen Partial-Credit-Modells. Auch die EAP/PV-Reliabilitäten sind mit 0,792 und 0,790 ein wenig schlechter. Das eindimensionale Partial-Credit-Modell ist also weiterhin von den bisher untersuchten Modellen dasjenige, das die beobachteten Daten am besten beschreibt. Das letzte zweidimensionale Modell, das getestet wurde, enthält als eine Dimension alle Items, bei deren Bearbeitung Begründen oder Argumentieren notwendig war und als zweite Dimension diejenigen Items, bei denen das nicht der Fall ist. Dementsprechend besteht die erste Dimension aus den Items V4, V6, V8A, V8B und V8C und die zweite Dimension aus allen restlichen Items. Das Vorgehen bleibt dasselbe wie schon in den beiden vorherigen Fällen. In Abbildung 5.50 sind die „Final Deviance“ und die Anzahl der geschätzten

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4537.30853
Total number of estimated parameters: 33
```

Abbildung 5.50: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „Begründen/Argumentieren“

Parameter abzulesen. Einsetzen in die Formeln für die informationstheoretischen Maße ergibt $AIC = 4603,31$, $BIC = 4705,60$ und $CAIC = 4738,60$. Wieder konnte also kein besseres Modell als das eindimensionale Partial-Credit-Modell gefunden werden, die Werte sind noch schlechter als die der beiden zuvor betrachteten zweidimensionalen Modelle. Zuletzt wurde noch ein dreidimensionales Partial-Credit-Modell dem eindimensionalen Modell gegenübergestellt. Die erste Dimension beinhaltet die Items, in denen mit Brüchen und/oder Beträgen gerechnet wird, ohne dass unendlich vorkommt (Items V1, V2A, V2B, V2C, V3, V9A, V9B, V9C, V9D, V9E), die zweite Dimension beinhaltet alle Items zum Funktionsbegriff (V7A, V7B, V7C, V7D, V7E) und die dritte Dimension die restlichen Items, bei denen jeweils in irgendeiner Form unendlich vorkommt. Hier ist bereits kritisch anzumerken, dass die einzelnen Dimensionen aus verhältnismäßig wenigen Items bestehen, wodurch eine zuverlässige Schätzung der Itemschwierigkeiten und Personenfähigkeiten gefährdet ist. Dennoch soll dieses Modell mit dem bisher passendsten Modell verglichen werden. Aus der von ConQuest berechneten „Final Deviance“ und der Anzahl der geschätzten Parameter (siehe Abbildung 5.51) ergeben sich die drei informationstheoretischen Maße $AIC = 4575,85$, $BIC = 4687,45$ und $CAIC = 4723,45$. Diese sind zwar geringer als die der zweidimensionalen Modell, doch immer noch größer als die des

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012===

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 3375 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4503.85282
Total number of estimated parameters: 36

```

Abbildung 5.51: Ausgabe von ConQuest zum dreidimensionalen Partial-Credit-Modell

eindimensionalen Modells. Hinzu kommt, dass insbesondere für die zweite Dimension die EAP/PV-Reliabilität mit 0,554 einen zu niedrigen Wert aufweist, was an der geringen Anzahl an Items liegen könnte. Weitere mehrdimensionale Modelle wurden nicht betrachtet, da sich zum einen keine weitere Unterteilung anhand inhaltlicher Überlegungen angeboten hat und zum anderen bei mehr als zwei Dimensionen die Anzahl der Items in mindestens einer Dimension zu gering wird.

Abschließende Bemerkungen

Modelle mit mehr als einem Parameter pro Item und Kategorie wie das Birnbaum- oder das Rate-Modell kommen nicht in Frage, da in dem Fall keine kriteriumsorientierten Interpretationen der Ergebnisse mehr möglich wären. Ich entscheide mich also für das eindimensionale Partial-Credit-Modell als das relativ beste Modell.

Phase 2: Itemselektion

Durch die Elimination von einzelnen Items soll nun versucht werden, die Modellgüte noch zu verbessern. Dazu werden die Itemfitwerte des ausgewählten Modells noch einmal genauer betrachtet. Ich nenne hier alle Werte, die außerhalb des jeweiligen akzeptablen Bereichs liegen. Bei den gewichteten MNSQ-Werten liegt nur für eine Kategorie eines Items der Wert außerhalb des akzeptablen Bereichs von 0,8 bis 1,2. Es handelt sich um die Kategorie 2 des Items V5A. Allerdings liegt der Wert mit 1,21 nur sehr knapp außerhalb des akzeptablen Bereichs und mit einem T-Wert von 2,0 ist diese Abweichung auch nur gerade so statistisch signifikant. Bei Item V2B liegt der gewichtete MNSQ-Wert mit 0,88 zwar innerhalb des akzeptablen Bereichs, allerdings ist diese Abweichung mit einem T-Wert in Höhe von -2,3 statistisch signifikant. Weitere Itemfitwerte sind die Trennschärfen. Wie schon in Abschnitt 5.1 begründet, sind die korrigierten Trennschärfen vorzuziehen, die von ConQuest ebenso wie die nicht-korrigierten Trennschärfen berechnet werden. Prinzipiell sind hohe Trennschärfen wünschenswert. Allerdings könnte ein Eliminieren von Items mit geringer Trennschärfe dazu führen, dass die Inhaltsvalidität des Tests nicht mehr sichergestellt ist, wenn nicht mehr alle relevanten Inhalte im Test abgedeckt sind. Hier werden daher korrigierte Trennschärfen ab 0,2 als akzeptabel angesehen und

inhaltliche Überlegungen einbezogen. Die Items V3 und V7B liegen mit Werten von 0,19 und 0,11 etwas beziehungsweise deutlich unter dieser Grenze. Weiter wurden die punkt-biserialen Korrelationen bei allen Items mit mehr als zwei Antwortkategorien untersucht. In einem Fall steigen diese von der niedrigsten zur höchsten Kategorie nicht sukzessive

item:15 (V8A)							
Cases for this item	164	Item-Rest Cor.	0.47	Item-Total Cor.	0.56		
Item Threshold(s):	-1.02 2.23	Weighted MNSQ	0.94				
Item Delta(s):	-0.98 2.19						

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1

0	0.00	31	18.90	-0.51	-7.61 (.000)	-0.42	0.91
1	1.00	105	64.02	0.25	3.30 (.001)	0.63	0.73
2	2.00	28	17.07	0.21	2.79 (.006)	1.11	0.80

Abbildung 5.52: Itemanalyse von ConQuest zu Item V8A

an, und zwar bei Item V8A (siehe Abbildung 5.52). Hier ist der Wert bei der Kategorie 1 ein wenig höher als der bei der Kategorie 2. Das bedeutet, dass diejenigen Personen, deren Antwort bei diesem Item in Kategorie 1 liegt, verglichen mit denen, deren Antwort in Kategorie 2 liegt, im Gesamttest ein tendenziell etwas besseres Ergebnis erreichen. Von all diesen Misfits ist die korrigierte Trennschärfe des Items V7B am weitesten vom akzeptablen Bereich entfernt. Die Unterscheidung dieses Items zwischen Personen mit niedriger und Personen mit hoher Fähigkeit korreliert zu gering mit der des Gesamttests.

Bei diesem Item sollte beantwortet werden, ob durch $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$ eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist. Möglicherweise haben hier manche Studierenden einfach übersehen, dass jeder natürlichen Zahl zwei verschiedene Werte zugeordnet werden, und haben daher fälschlicherweise geantwortet, es handle sich um eine Abbildung. Solche Personen hätten auf jeden Fall verstanden, dass Funktionen nicht unbedingt durch einen einzigen Term definiert werden können. Umgekehrt könnte es auch sein, dass manche Studierenden geantwortet haben, dass es sich um keine Abbildung handelt, weil sie der Meinung sind, es müsse einen einzigen Funktionsterm geben und nicht, weil sie das Problem der Uneindeutigkeit erkannt haben. Aus diesen Gründen wird dieses Item aus dem Test entfernt. Auf die so erhaltenen reduzierten Daten wird nun ebenfalls das eindimensionale Partial-Credit-Modell angepasst. Die EAP/PV-Reliabilität sinkt dabei etwas auf nun 0,777. Außerdem werden wieder die Itemfitwerte untersucht. Bei den gewichteten MNSQ-Werten liegt der Wert der Kategorie 2 von Item V5A mit 1,30 nun deutlicher außerhalb des akzeptablen Bereichs als zuvor und mit einem T-Wert von 2,7 ist diese Abweichung auch statistisch signifikant. Weitere signifikante Abweichungen gibt es hier nicht. Die korrigierten Trennschärfen betragen nun alle mindestens 0,20 und sind somit innerhalb des von mir als akzeptabel gewählten Bereichs. Bei den punkt-biserialen Korrelationen weisen nun zwei Items Misfits auf. Dabei handelt es sich zum einen – wie bereits zuvor – um das Item V8A, bei dem sich diese Werte nur geringfügig geändert haben. Zum anderen handelt es sich um das Item V5A (siehe Abbildung 5.53). Hier ist der Wert der Kategorie 2 mit 0,06 doch deutlich geringer als der Wert der Kategorie 1, der 0,26 beträgt. Da das Item V5A zwei deutliche Misfits aufweist, wird auch dieses Item aus dem Test ausgeschlossen. Eine

5. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- V5A ☐ Sei A eine endliche Teilmenge von N . Dann ist es möglich, dass $N \setminus A$ eine unendliche Teilmenge von N ist.
- ☐ Sei A eine endliche Teilmenge von N . Dann muss $N \setminus A$ eine unendliche Teilmenge von N sein.

Abbildung 5.53: Item V5A

```

item:7 (V5A)
Cases for this item      164  Item-Rest Cor.  0.26  Item-Total Cor.  0.39
Item Threshold(s):      -0.47  1.71  Weighted MNSQ  1.19
Item Delta(s):          -0.36  1.59

```

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
0	0.00	43	26.22	-0.35	-4.81 (.000)	0.00	0.00
1	1.00	81	49.39	0.26	3.39 (.001)	0.00	0.00
2	2.00	40	24.39	0.06	0.79 (.429)	0.00	0.00

Abbildung 5.54: Itemanalyse von ConQuest zu Item V5A

mögliche Erklärung für die schlechten Werte dieses Items könnte sein, dass die Probanden die Formulierung des ersten Teils des Items unterschiedlich interpretiert haben könnten. Es könnte sein, dass manche Testpersonen „Dann ist es möglich, dass...“ gedeutet haben als „Etwas ist nur dann als möglich zu bezeichnen, wenn es nicht zwingend der Fall ist“, andere hingegen als „Etwas ist auch dann als möglich zu bezeichnen, wenn es zwingend der Fall ist“. Da bei diesem Item die zugehörige Aussage zwingend eintreffen muss, würde man sich im Falle der ersten Deutung richtigerweise für das Nichtankreuzen, im Falle der zweiten Deutung hingegen für das Ankreuzen entscheiden. Diese Formulierung sollte bei einer möglichen Überarbeitung des Tests unbedingt vermieden werden. Das Item V5B, das ebenfalls diese Formulierung enthält, ist von den verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten nicht betroffen, da beide Deutungen zur selben Entscheidung führen würden. Wird nun das eindimensionale Partial-Credit-Modell an die weiter reduzierten Daten angepasst, so erhöht sich die EAP/PV-Reliabilität wieder etwas auf 0,798. Dieser Wert ist als akzeptabel einzuschätzen. Es gibt nun weder Items, die signifikante Abweichungen bei den gewichteten MNSQ-Werten aufweisen, noch gibt es korrigierte Trennschärfen kleiner als 0,20. Der einzige noch vorhandene Misfit ist weiterhin der nicht sukzessive Anstieg

```

item:13 (V8A)
Cases for this item      164  Item-Rest Cor.  0.47  Item-Total Cor.  0.57
Item Threshold(s):      -1.00  2.33  Weighted MNSQ  0.94
Item Delta(s):          -0.97  2.29

```

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
0	0.00	31	18.90	-0.52	-7.68 (.000)	0.00	0.00
1	1.00	105	64.02	0.26	3.36 (.001)	0.00	0.00
2	2.00	28	17.07	0.21	2.76 (.006)	0.00	0.00

Abbildung 5.55: Itemanalyse von ConQuest zu Item V8A

der punktbiserialen Korrelationen von Item V8A (siehe Abbildung 5.55). Dieses Item soll jedoch aus inhaltlichen Gründen erhalten bleiben, da es eines der wenigen Items ist, bei denen (ohne die Verwendung der Fachbegriffe) nach dem Konvergenzverhalten einer Folge gefragt wird. Da der Test insbesondere das Vorwissen zu diesem Thema erfassen soll, wird dieses Item also trotz des Misfits nicht aus dem Test ausgeschlossen. Bei einer möglichen Überarbeitung des Tests sollte versucht werden, mehr Items zu diesem Themengebiet in den Test aufzunehmen. Der finale Datensatz besteht nun also aus den Testwerten aller Probanden zu allen Items außer den Items V5A und V7B.

Phase 3: Überprüfung des Modells

Das eindimensionale Partial-Credit-Modell soll nun am finalen Datensatz noch einmal allen zuvor getesteten Modellen gegenübergestellt werden. Das Vorgehen ist wieder dasselbe wie in der ersten Phase der Modellauswahl. Soll das Partial-Credit-Modell mit dem Rating-Scale-Modell verglichen werden, so können dazu der Likelihoodquotiententest, die informationstheoretischen Maße, die Reliabilität und bei Bedarf zusätzlich die Itemfitwerte genutzt werden.

Nachweis der Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells

Für den Likelihoodquotiententest muss zunächst wieder die Modellkonformität des Obermodells, also des eindimensionalen Partial-Credit-Modells, nachgewiesen werden. Für den Nachweis der Stichprobenunabhängigkeit wurde die Gesamtstichprobe wieder nach denselben Kriterien unterteilt wie anfangs. In den Abbildungen 5.56, 5.57 und 5.58 sind

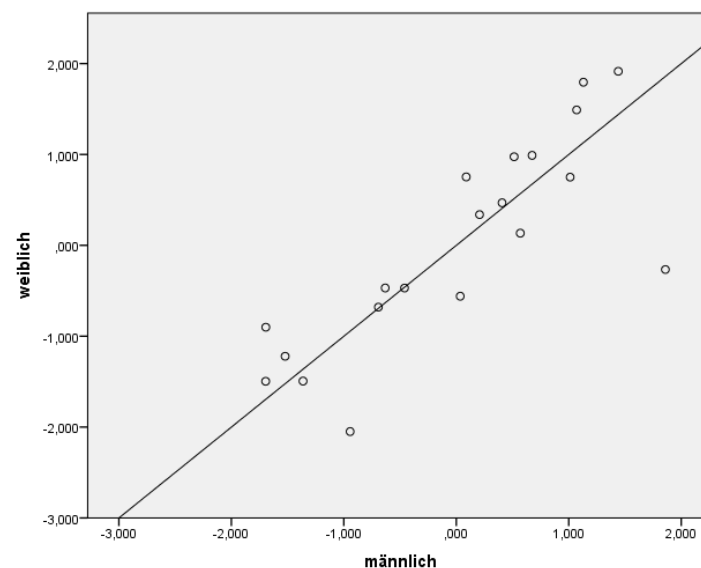


Abbildung 5.56: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Geschlecht

die jeweiligen Scatterplots zu sehen. Wie zuvor befinden sich die Datenpunkte der Items überwiegend nah an der Hauptdiagonalen. Es kann daher von Stichprobenunabhängigkeit ausgegangen werden. Auf die Itemfitwerte wurde bereits eingegangen, diese sind nach Ausschluss einzelner Items nun alle akzeptabel. Die EAP/PV-Reliabilität liegt mit 0,798

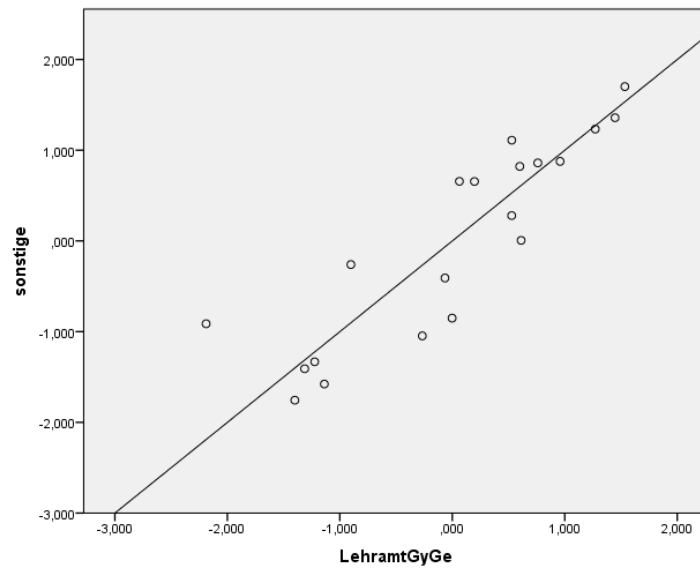


Abbildung 5.57: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Studien-
gang

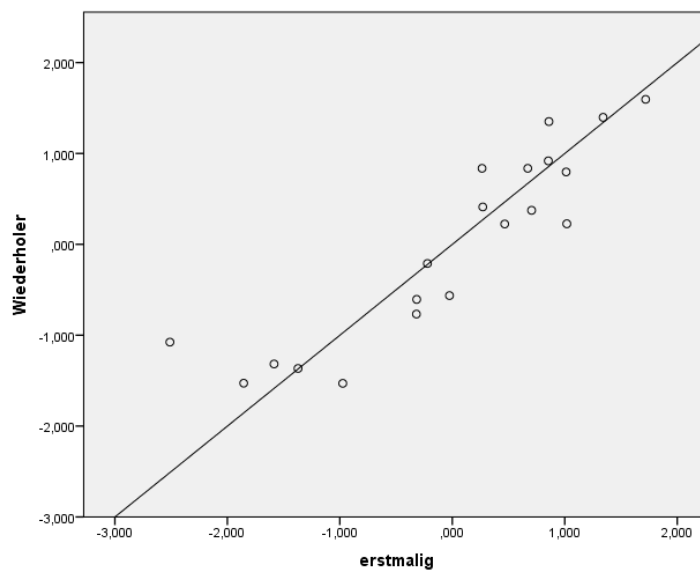


Abbildung 5.58: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach (Nicht-)
Wiederholer

so knapp unter dem Richtwert in Höhe von 0,8, dass auch diese in Ordnung ist. Somit kann nun der Likelihoodquotiententest durchgeführt werden.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Die Differenz der „Final Deviance“-Werte in Höhe von 910,01515 ist bei 5 Freiheitsgraden signifikant mit $p < 0,001$ (siehe auch Abbildung 5.59 und 5.60). Zusätzlich werden auch noch die informationstheoretischen Maße verglichen. Der AIC ist beim Partial-Credit-Modell mit 3955,34 niedriger als der des Rating-Scale-Modells, der 4855,35 beträgt. Ebenso verhält es sich mit den anderen beiden informationstheoretischen Maßen: Beim Partial-Credit-Modell ergibt sich $BIC = 4039,03$ und $CAIC = 4066,03$, beim Rating-Scale-Modell hingegen $BIC = 4923,55$ und $CAIC = 4945,55$. Auch die mit 0,798 im Vergleich zu 0,758 etwas höhere Reliabilität spricht für das Partial-Credit-Modell. Außerdem sind wieder die Itemfitwerte schlechter. Die Entscheidung fällt also auch bei dem reduzierten Datensatz klar für das Partial-Credit-Modell gegenüber dem Rating-Scale-Modell aus.

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-12,14-16,18-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      3901.33612
Total number of estimated parameters: 27
```

Abbildung 5.59: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Partial-Credit-Modell

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: Vortest_Speed_Final.dat
The format: id 1-6 responses 7-12,14-16,18-28
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+step
Slopes are fixed
Sample size: 164
Final Deviance:      4811.35127
Total number of estimated parameters: 22
```

Abbildung 5.60: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit verschiedenen mehrdimensionalen Partial-Credit-Modellen

Nun wird das eindimensionale Partial-Credit-Modell wieder mit den verschiedenen mehrdimensionalen Partial-Credit-Modellen verglichen. Wie zuvor kann der Likelihoodquotiententest aufgrund nicht erfüllter Voraussetzungen nicht verwendet werden. Der folgenden Übersicht ist zu entnehmen, dass wie zuvor das eindimensionale Partial-Credit-Modell in allen Fällen bei den drei informationstheoretischen Maßen besser abschneidet als die mehrdimensionalen Modelle:

Eindimensionales Partial-Credit-Modell

$AIC = 3955,34$

$BIC = 4039,03$

$CAIC = 4066,03$

Zweidimensionales Partial-Credit-Modell „unendlich“

$AIC = 4092,48$

$BIC = 4185,48$

$CAIC = 4215,48$

Zweidimensionales Partial-Credit-Modell „Brüche/Beträge“

$AIC = 4088,73$

$BIC = 4181,73$

$CAIC = 4211,73$

Zweidimensionales Partial-Credit-Modell „Begründen/Argumentieren“

$AIC = 4094,09$

$BIC = 4187,09$

$CAIC = 4217,09$

Dreidimensionales Partial-Credit-Modell

$AIC = 4081,41$

$BIC = 4183,71$

$CAIC = 4216,71$

Somit wurde die Modellwahl am reduzierten Datensatz noch einmal abgesichert.

Phase 4: Schätzung der Personenfähigkeiten

Nach endgültiger Festlegung dieses Modells können nun die Personenfähigkeitsparameter geschätzt werden. Wie schon in Abschnitt 5.1 begründet, verwende ich hierfür die WLE-Schätzer. Es liegen nun also nicht nur die Itemschwierigkeitsparameter, sondern auch die Personenfähigkeitsparameter vor. Die Skalierung des „Vortests“ ist damit abgeschlossen.

5.2.3 „Nachtest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene

Wie zuvor bereits für den „Vortest“ werden in den folgenden Abschnitten zunächst alle Items des „Nachtests“ vorgestellt und deren Auswahl wird begründet. Außerdem

wird jeweils auf die Kodierung und Bewertung eingegangen und es werden deskriptive Ergebnisse – hauptsächlich basierend auf der Kategorisierung – präsentiert.

Wie schon beim „Vortest“ wurden auch beim „Nachtest“ alle offenen Items durch zwei Personen bewertet. Es handelte sich hier um acht Items, bei denen nach Begründungen oder Gegenbeispielen gefragt war. Cohens-Kappa liegt bei diesen Items zwischen 0,617 und 1,000. Wieder handelt es sich lediglich um ein Item, bei dem Cohens-Kappa kleiner als 0,75 ist. Daher ist die Übereinstimmung der beiden Kodierer als akzeptabel bis vollkommen zu bezeichnen. Im Falle abweichender Kodierungen wurde die Bearbeitung noch einmal genauer betrachtet und es wurde von mir eine Entscheidung getroffen.

Mithilfe des „Nachtests“ soll unter anderem untersucht werden, ob die Workshopteilnahme einen signifikanten Effekt auf das Verständnis des Konvergenzbegriffs hat. Insbesondere soll geprüft werden, ob die einzelnen Ziele des Workshops erreicht werden konnten. Diese sind in Abschnitt 4.1.4 als End Points des Nachbereitungsworkshops formuliert.

Items zu Folgen in verschiedenen Darstellungen

Ein Ziel des Workshops war es, dass die Studierenden Folgen in verschiedenen Darstellungen als Folgen erkennen. Dazu wurde eine selbstentwickelte Aufgabe bestehend aus sieben Items eingesetzt (siehe Abbildung 5.61). Sofern die Antwort lautet, dass es sich nicht um eine Folge handelt, ist zusätzlich eine Begründung gefordert.

Insbesondere sollen auch solche Folgen als eine Folge aufgefasst werden, die nicht durch einen einzigen Term angegeben sind. Das Item N1A prüft genau das ab. Eine andere mögliche Darstellung einer Folge ist eine rekursive Definition wie in Item N1C. Ein weiteres Problem kann wie in Abschnitt 2.4 berichtet, darin bestehen, konstante Folgen als Folgen aufzufassen, da in dem Term keine Variable vorkommt. Daher wurde das Item N1G ausgewählt. Ein eher typisches Beispiel einer Folge, die durch einen einzigen Term definiert ist, ist durch Item N1D ebenfalls vertreten wie auch mehrere Nicht-Beispiele in den Items N1B, N1E und N1F.

Bei den Items, bei denen es sich um Folgen handelt und daher keine Begründung gefor-

Beschreibung	Punkte
„Ja“ angekreuzt	1 Punkt
Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.30: Bewertung der Items N1A, N1C, N1D, N1G mit Punkten

dert war, ist die Bewertung in Tabelle 5.30 zu sehen und bedarf keiner weiteren Erklärung. Auf die Ergebnisse dieser vier Items wird nun zuerst eingegangen. In Tabelle 5.31 ist dargestellt, wie oft welche Punktzahl jeweils vergeben wurde. Wie bei allen weiteren Punkteverteilungen in diesem Abschnitt sind sowohl die absoluten Häufigkeiten als auch prozentuale Anteile bezogen auf die 124 Studierenden, die am „Nachtest“ teilgenommen haben, angegeben. Die Items N1A, N1C und N1D haben sehr gute Lösungsraten. Die große Mehrheit der Studierenden war in der Lage, nicht nur durch einen einzigen Term definierte Folgen als solche zu erkennen, sondern auch rekursiv definierte Folgen und abschnittsweise definierte Folgen. Das Item N1G, in dem eine konstante Folge gegeben war,

1. Handelt es sich bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Folge? Falls nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

N1A $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1B $a_n = \begin{cases} 0 & n < 5 \\ \frac{1}{n} & n > 10 \end{cases}$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1C $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \forall n \geq 1$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1D $a_n = \frac{2n+1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1E $(1, 2, 3, \dots, 99, 100, 101)$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1F $a_n = \begin{cases} 1 & n \leq 20 \\ -1 & n \geq 20 \end{cases}$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

N1G $a_n = 5 \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

Abbildung 5.61: „Nachtest“-Items N1A - N1G

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
N1A	115 (93%)	7 (6%)	2 (2%)	0,93
N1C	118 (95%)	6 (5%)	0 (0%)	0,95
N1D	118 (95%)	2 (2%)	4 (3%)	0,95
N1G	107 (86%)	14 (11%)	3 (2%)	0,86

Tabelle 5.31: Punkteverteilungen der Items N1A, N1C, N1D, N1G

wurde mit 86% etwas schlechter gelöst. Von den 14 Studierenden, die geantwortet haben, es handele sich nicht um eine Folge, hat etwas mehr als die Hälfte keine Begründung für die Antwort angegeben. Fast alle angegebenen Begründungen waren sehr ähnlich, wie in Abbildung 5.62 wurde ausgesagt, dass es sich lediglich um eine Zahl handele und nicht um eine Folge.

Nun wird auf die Items eingegangen, bei denen die richtige Antwort lautet, dass es sich

$a_n = 5 \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja ☒ Nein, weil 5 nur Zahl, keine Folge

Abbildung 5.62: Begründung einer falschen Antwort zu Item N1G

nicht um eine Folge handelt, und bei denen zusätzlich eine Begründung gefordert war. Für

die Begründungen wurde zunächst das Kategorien- und Bewertungsschema entwickelt, das in Tabelle 5.32 für das Item N1B dargestellt ist.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K1	„Richtige Begründung“	Die Begründung enthält den Aspekt, dass für manche natürlichen Zahlen keine Folgenglieder definiert sind. Die formale Schreibweise oder sprachliche Ausdrucksweise muss nicht korrekt bzw. präzise sein.	<i>1. Beispiel:</i> für $n = 6$, a_6 nicht definiert <i>2. Beispiel:</i> $5 < n < 10$ nicht definiert <i>3. Beispiel:</i> nicht für alle n <i>4. Beispiel:</i> es einen Sprung gibt	2 Punkte
K2	„Falsche Begründung“	Bei der Begründung wurde etwas geschrieben, doch der unter K1 genannte Aspekt ist nicht enthalten.	<i>1. Beispiel:</i> $\exists n_0 \geq n$ mit $ a_n - a < \epsilon \forall n \geq n_0$ <i>2. Beispiel:</i> es keinen Sinn ergibt	1 Punkt
K3	Keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		1 Punkt
Falls „Nein“ nicht angekreuzt wurde				0 Punkte

Tabelle 5.32: Kategoriensystem für das Item N1B

Der Grund, warum es sich nicht um eine Folge handelt, ist, dass für die Zahlen $5, \dots, 10$ keine Folgenglieder definiert sind. Eine Begründung, in der nur auf eine dieser Zahlen eingegangen wurde oder in der allgemeiner gesagt wurde, dass es natürliche Zahlen gibt, für die keine Folgenglieder definiert sind, ist natürlich ebenfalls korrekt. Neben der Kategorie der Begründungen, die diesen Aspekt enthalten, haben sich lediglich zwei weitere Kategorien ergeben, nämlich „falsche Begründung“ und „keine Begründung“. Ein Punkt wurde bei diesem Item für das Ankreuzen der Antwort „Nein“ gegeben, ein weiterer Punkt, falls die Begründung geeignet war.

In Tabelle 5.33 ist zunächst die Punkteverteilung zu sehen. Die meisten Studierenden,

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
81 (65%)	17 (14%)	22 (18%)	4 (3%)	1,44

Tabelle 5.33: Punkteverteilung des Items N1B

und zwar 79%, haben erkannt, dass es sich nicht um eine Folge handelt. Bei Betrachtung der Verteilung der Antworten auf die einzelnen Kategorien ist zu sehen, dass die Mehrheit der Studierenden in der Lage war, die richtige Antwort geeignet zu begründen (Kategorie K1). Nur einzelne Studierende haben die korrekte Antwort falsch begründet (Kategorie

K1	K2	K3	falsch	nicht bearbeitet
81 (65%)	5 (4%)	12 (10%)	22 (18%)	4 (3%)

Tabelle 5.34: Verteilung auf die Kategorien des Items N1B

K2). Über die Gründe, die dazu geführt haben, dass 18% der Studierenden der Meinung waren, es handele sich um eine Folge, kann nichts ausgesagt werden, da in diesem Fall laut Aufgabenstellung keine Begründung der Antwort gefordert war. Möglicherweise haben sie die Definitionslücke schlichtweg übersehen.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K1	„Richtige Begründung“	Die Begründung enthält den Aspekt, dass für manche natürlichen Zahlen keine Folgenglieder definiert sind. Die formale Schreibweise oder sprachliche Ausdrucksweise muss nicht korrekt bzw. präzise sein.	1. <i>Beispiel:</i> endlich 2. <i>Beispiel:</i> bei 101 Schluss ist	2 Punkte
K2	„Falsche Begründung“	Bei der Begründung wurde etwas geschrieben, doch der unter K1 genannte Aspekt ist nicht enthalten.	1. <i>Beispiel:</i> keine Monotonie 2. <i>Beispiel:</i> kein n vorhanden	1 Punkt
K3	Keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		1 Punkt
Falls „Nein“ nicht angekreuzt wurde				0 Punkte

Tabelle 5.35: Kategoriensystem für das Item N1E

Bei der in Item N1E gegebenen endlichen Liste von Zahlen handelt es sich ebenfalls um keine Folge, da für die natürlichen Zahlen ab 102 keine Folgenglieder definiert sind. Für die Begründungen hat sich dasselbe Kategorien- und Bewertungsschema ergeben wie bei Item N1B. Lediglich die Ankerbeispiele weichen von denen des anderen Items ab, weshalb dieses in Tabelle 5.35 dargestellt ist.

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
56 (42%)	28 (23%)	47 (38%)	3 (2%)	1,13

Tabelle 5.36: Punkteverteilung des Items N1E

Aus der Punkteverteilung, die in Tabelle 5.36 zu sehen ist, lässt sich entnehmen, dass 65% der Studierenden erkannt haben, dass es sich nicht um eine Folge handelt, also etwas weniger als bei dem Item N1B. Die Begründungen sind ebenfalls schlechter ausgefallen. In Tabelle 5.37 ist die Verteilung der Antworten auf die Kategorien abgebildet.

K1	K2	K3	falsch	nicht bearbeitet
56 (42%)	12 (10%)	16 (13%)	47 (38%)	3 (2%)

Tabelle 5.37: Verteilung auf die Kategorien des Items N1E

42% der Studierenden konnten die Frage korrekt beantworten und dies auch geeignet begründen (Kategorie K1). Unter den 12 falschen Begründungen (Kategorie K2) ließen sich keine typischen Antworten finden. 38% der Studierenden waren der Meinung, die endliche Liste von Zahlen sei eine Folge. Theoretisch könnten zwar auch endliche Folgen definiert werden, doch in der Vorlesung wurden Folgen als Abbildungen der natürlichen Zahlen definiert, worum es sich bei der endlichen Liste von Zahlen nicht handelt.

In Item N1F war eine nicht-eindeutige Zuordnung gegeben, da der natürlichen Zahl 20 sowohl 1 als auch -1 zugeordnet wird. Somit war auch hier die korrekte Antwort, dass es sich nicht um eine Folge handelt und es war eine Begründung gefordert, in der genannt wird, dass die Zuordnung nicht für alle natürlichen Zahlen eindeutig ist. Dafür wurde das Kategorien- und Bewertungsschema in Tabelle 5.40 entwickelt. Wie bei den zuvor

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
79 (64%)	11 (9%)	30 (24%)	4 (3%)	1,36

Tabelle 5.38: Punkteverteilung des Items N1F

K1	K2	K3	falsch	nicht bearbeitet
79 (64%)	1 (1%)	10 (8%)	30 (24%)	4 (3%)

Tabelle 5.39: Verteilung auf die Kategorien des Items N1F

beschriebenen Items wurde ein Punkt für die korrekte Antwort, dass es sich nicht um eine Folge handelt, vergeben und ein weiterer für eine angemessene Begründung.

In Tabelle 5.38 ist zu sehen, wie oft welche Punktzahl vergeben wurde. Insgesamt haben 73% der Studierenden zunächst einmal korrekterweise angekreuzt, dass es sich nicht um eine Folge handelt. 64% konnten dies auch geeignet begründen.

Tabelle 5.39 zeigt die Verteilung der Bearbeitungen auf die einzelnen Kategorien. Es ist zu sehen, dass lediglich ein Studierender zu der korrekten Antwort eine falsche Begründung geliefert hat (Kategorie K2). Eine mögliche Erklärung für die 24% falschen Antworten könnte ähnlich wie bei Item N1B sein, dass die Studierenden übersehen haben, dass das zwanzigste Folgenglied nicht eindeutig definiert ist.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte
K1	„Richtige Begründung“	Die Begründung enthält den Aspekt, dass für eine natürliche Zahl kein eindeutiges Folgenglied definiert ist. Die formale Schreibweise oder sprachliche Ausdrucksweise muss nicht korrekt bzw. präzise sein.	1. <i>Beispiel:</i> $a_{20} = 1 \wedge a_{20} = -1$ 2. <i>Beispiel:</i> $n = 20$ sowohl 1 als auch -1 3. <i>Beispiel:</i> nicht wohldefiniert	2 Punkte
K2	„Falsche Begründung“	Bei der Begründung wurde etwas geschrieben, doch der unter K1 genannte Aspekt ist nicht enthalten.	1. <i>Beispiel:</i> $\exists n_0 \geq n$ mit $ a_n - a < \epsilon \forall n \geq n_0$ 2. <i>Beispiel:</i> ich mir keine Gleichung ausdenken kann, die es beschreibt	1 Punkt
K3	Keine Begründung	Bei der Begründung wurde nichts geschrieben.		1 Punkt
Falls „Nein“ nicht angekreuzt wurde				0 Punkte

Tabelle 5.40: Kategoriensystem für das Item N1F

Insgesamt haben die Studierenden die Items zu Folgen in verschiedenen Darstellungen verhältnismäßig gut gelöst.

Items zum Bestimmen von Grenzwerten

Als weiteres Ziel wurde formuliert, dass nicht nur typische Beispielfolgen, die monoton sind und ihren Grenzwert nicht erreichen, als konvergent erkannt werden. Dazu wurde die Items N3A bis N3G (siehe Abbildung 5.63) in den Test aufgenommen, die größtenteils selbst entwickelt wurden. Bei den sieben vorgegebenen Folgen soll jeweils entschieden werden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls soll der Grenzwert angegeben werden. Mit der durch den Term $a_n = \frac{5}{n}$ definierten Folge ist zunächst ein typisches Beispiel einer konvergenten Folge vertreten. Außerdem wurden einige eher untypische Beispielfolgen ausgewählt, um die in Abschnitt 2.4 berichteten Fehlvorstellungen zum Konvergenzbegriff zu untersuchen. Darunter ist eine schließlich konstante Folge, da eine bekannte eingeschränkte Vorstellung ist, dass Folgen, die einen Wert „erreichen“, nicht gegen diesen konvergieren. Bei der konstanten Folge kann eine zusätzliche Schwierigkeit dadurch entstehen, dass in dem definierenden Term dieser Folge keine Variable vorkommt. Mit der durch den Term

3. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, geben Sie ihren Grenzwert an.

- N3A $a_n = \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3B $a_n = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ 100 & n > 100 \end{cases}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3C $a_n = 2n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3D $a_n = 0,5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3E $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3F $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein
- N3G $a_n = 1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ☐ Nein

Abbildung 5.63: „Nachtest“-Items Nr. 3A-3G

$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ festgelegten Folge ist außerdem ein Beispiel einer konvergenten Folge vertreten, die nicht monoton ist und für die der Grenzwert weder eine obere noch eine untere Schranke bildet.

Item	Beschreibung	Punkte
N3A	„Ja“ angekreuzt und Grenzwert 0 eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3B	„Ja“ angekreuzt und Grenzwert 100 eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3C	„Nein“ angekreuzt oder „Ja“ angekreuzt und „Grenzwert“ ∞ eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3D	„Ja“ angekreuzt und Grenzwert 0,5 eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3E	„Nein“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3F	„Ja“ angekreuzt und Grenzwert 2 eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N3G	„Ja“ angekreuzt und Grenzwert 2 eingetragen	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.41: Bewertung der Items N3A - N3G mit Punkten

Als Nicht-Beispiele konvergenter Folgen ist sowohl eine unbeschränkte Folge vorhanden als auch eine Folge mit zwei Häufungspunkten. Mit letzterer kann überprüft werden, ob verstanden wurde, dass eine Folge nicht mehrere Grenzwerte besitzen kann. Die Folge $(1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist von Tall und Vinner (1981) übernommen und wurde von den Autoren ebenfalls in Kombination mit einer Aufgabe wie dem Item N2 gestellt, auf das später noch eingegangen wird.

Da bei diesen Items keine Begründungen gefordert sind, sondern nur „Ja“ oder „Nein“ angekreuzt werden sollte und gegebenenfalls ein Grenzwert angegeben werden sollte, ist hier keine Kategorisierung nötig, sondern es kann, wie in Tabelle 5.41 dargestellt, direkt festgelegt werden, wie die Punkte vergeben werden. Bei korrekten Lösungen wurde jeweils 1 Punkt vergeben und bei nicht vollständig korrekten Lösungen 0 Punkte. Es wäre auch denkbar gewesen, bei den konvergenten Folgen jeweils einen Punkt für die Antwort, dass die Folge konvergiert, und einen weiteren Punkt für den korrekten Grenzwert zu vergeben. Allerdings war es mit Ausnahme von Item N3G jeweils nur eine Person, die zwar erkannt hat, dass die jeweilige Folge konvergiert, aber nicht den korrekten Grenzwert angegeben hat. Dies hätte zu Problemen bei der anschließenden Skalierung des Tests geführt. Damit die Items aus diesem Block alle einheitlich bewertet werden, wurde das Item N3G ebenfalls lediglich mit 0 oder einem Punkt bewertet. Bei Item N3C geht es um eine Folge, die bestimmt divergent ist. Hier wurde sowohl als richtig gewertet, wenn geantwortet wurde, dass die Folge nicht konvergiert, als auch, wenn angekreuzt wurde, dass die Folge konvergiert und als (uneigentlicher) Grenzwert ∞ angegeben wurde, da in beiden Fällen das Verhalten der Folge richtig erkannt wurde.

In Tabelle 5.42 sind die Punkteverteilungen zu den Items N3A bis N3G, dargestellt. Im

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
N3A	116 (94%)	7 (6%)	1 (1%)	0,94
N3B	98 (79%)	23 (19%)	3 (2%)	0,79
N3C	121 (98%)	1 (1%)	2 (2%)	0,98
N3D	112 (90%)	10 (8%)	2 (2%)	0,90
N3E	107 (86%)	13 (10%)	4 (3%)	0,86
N3F	100 (81%)	20 (16%)	4 (3%)	0,81
N3G	71 (57%)	42 (34%)	11 (9%)	0,57

Tabelle 5.42: Punkteverteilungen der Items N3A bis N3G

Fall des Items N3A, in dem mit $a_n = \frac{5}{n}$ ein eher typisches Beispiel einer konvergenten Folge gegeben war, war die Lösungsrate für den korrekten Grenzwert 0 mit 94% ziemlich hoch.

Die schließlich konstante Folge in Item N3B wurde hingegen schlechter gelöst. Hier waren 19% der Studierenden der Meinung, die Folge konvergiere nicht. Über die Gründe können höchstens Vermutungen angestellt werden. Es könnte sein, dass manche Personen ein Bild von konvergenten Folgen haben, das nur solche Folgen umfasst, die den Grenzwert nicht annehmen. Es wäre auch möglich, dass manche übersehen haben, dass die Folgenglieder nur bis $n = 100$ durch den Term $a_n = n$ definiert sind. Wären unendlich viele Folgenglieder durch diesen Term definiert, dann würde die Folge in der Tat nicht konvergieren.

Bei der durch $a_n = 2n^2$ definierten, bestimmt divergenten Folge haben 98% der Studie-

renden erkannt, dass diese nicht beziehungsweise uneigentlich konvergiert.

Das Item N3D, in dem eine konstante Folge gegeben war, wurde von 90% der Studierenden richtig bearbeitet. Bei diesen Personen liegt somit nicht die eingeschränkte Vorstellung, nur Folgen, die den Grenzwert nicht annehmen, seien konvergent, vor.

Bei der Folge, die durch $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ angegeben ist und zwei Häufungspunkte besitzt, ist die Lösungsrate mit 86% etwas niedriger. Hier ist interessant, was die Personen, die angekreuzt haben die Folge konvergiere, als Grenzwert angegeben haben. In einem Fall wurde $|2|$ als Grenzwert eingetragen. Vermutlich meint derjenige, dass der Betrag der Folgenglieder gegen 2 konvergiert. In fünf weiteren Fällen wurde 2 als Grenzwert genannt und in vier Fällen 0. Die übrigen Studierenden haben keinen Grenzwert angegeben.

Die Folge in Item N3F, die durch den Term $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ gegeben ist, konvergiert gegen 2. Das haben 81% der Probanden erkannt. Ein falscher Grenzwert wurde nur vereinzelt genannt. Einige der Studierenden waren jedoch der Meinung, die Folge konvergiere nicht. Eine mögliche Erklärung für diese Ansicht könnte die in Abschnitt 2.4 berichtete eingeschränkte Vorstellung vom Grenzwert als obere oder untere Schranke sein. Bei der hier vorliegenden Folge ist der Grenzwert weder eine obere noch eine untere Schranke, weshalb Personen mit dieser eingeschränkten Vorstellung in diesem Fall entscheiden würden, die Folge konvergiere nicht.

Das Item N3G wurde am schlechtesten von den Items zum Bestimmen von Grenzwerten gelöst. Nur 57% der Studierenden haben sowohl erkannt, dass die durch den Term $a_n = 1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n}$ definierte Folge konvergiert, als auch, dass der Grenzwert 2 ist. Bei diesem Item gab es einige Bearbeitungen, in denen zwar erkannt wurde, dass die Folge konvergiert, doch ein falscher Grenzwert angegeben wurde. Darunter waren acht Bearbeitungen, in denen die Zahl 1 als Grenzwert genannt wurde. Davon abgesehen wurde mehrmals kein Grenzwert angegeben. Außerdem waren 21% der Studierenden der Meinung, die Folge konvergiere nicht. Möglicherweise sind diese Personen zu dieser Entscheidung gelangt, da bei jedem Folgenglied im Vergleich zum vorherigen Folgenglied noch ein positiver Wert hinzu addiert wird.

Items zu periodischen Dezimalzahlen

Wie bereits im „Vortest“ wird erneut das Item eingesetzt, in dem entschieden werden soll, ob $0,\overline{9} = 1$ gilt. Zu sehen ist es in Abbildung 5.64. Zum einen ist dieses Item interessant,

N2 2. Ist $0,\overline{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ☐ Ja, es gilt $0,\overline{9} = 1$.
- ☐ Nein, es gilt $0,\overline{9} < 1$.
- ☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

Abbildung 5.64: Item N2

um Vergleiche zum „Vortest“ ziehen zu können. Zum anderen wurde ein ähnliches Item auch in einer Studie von Tall und Vinner (1981) in Kombination mit dem Item N3G eingesetzt. In ihrer Untersuchung hat fast die Hälfte der befragten Studierenden an einer englischen Universität zwar geantwortet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n}\right) = 2$ gelte, doch sie waren der Meinung, dass $0,\bar{9}$ kleiner als 1 sei. Das verwundert zunächst, da die beiden Aufgaben laut Tall und Vinner (1981) aus Mathematikersicht gleich eingestuft werden könnten. Aus Sicht eines Mathematikdidaktikers ist dies anders. Die Autoren erklären die Ergebnisse dadurch, dass durch die beiden Aufgaben verschiedene Teile des *Concept Images* zu Grenzwerten aktiviert wurden. Daher erscheint es sinnvoll, beide Items in den Test aufzunehmen.

Um eine Vergleichbarkeit der Bearbeitungen im „Vor-“ und im „Nachtest“ zu ermöglichen, wurde sowohl die inhaltliche Kategorisierung als auch die Bewertung beibehalten. Für Begründungen für die korrekte Antwort „Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$ “ ist das Kategoriensystem in Tabelle 5.10 zu finden, für Begründungen für die falsche Antwort „Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$ “ in Tabelle 5.11 und für Begründungen der Antwort „Weiß ich nicht“ in Tabelle 5.12.

In Tabelle 5.43 ist dargestellt, wie die Studierenden zunächst auf die Frage, ob $0,\bar{9} = 1$

$0,\bar{9} = 1$	$0,\bar{9} < 1$	Weiß ich nicht	nicht bearbeitet
102 (82%)	15 (12%)	3 (2%)	4 (3%)

Tabelle 5.43: Antworten auf das Item N2

gilt, geantwortet haben. Nun haben 82% der Studierenden sich korrekterweise für die Antwort „Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$ “ entschieden, während dieser Anteil beim „Vortest“ nur 38% betrug (vgl. Tabelle 5.13). Die Anteile derjenigen, die mit „Weiß ich nicht“ geantwortet haben oder dieses Item nicht bearbeitet haben, sind sehr gering. 12% der Studierenden sind nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen in der Vorlesung der Meinung, $0,\bar{9}$ sei kleiner als 1. Im Vortest lag dieser Anteil noch bei 53%. Hier zeigt sich schon einmal, dass die Antworten sich seit dem ersten Test deutlich verbessert haben. In

3 Punkte	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
36 (29%)	18 (15%)	48 (39%)	18 (15%)	4 (3%)	1,55

Tabelle 5.44: Punkteverteilung des Items N2

Tabelle 5.44 ist zu sehen, wie oft die einzelnen Punktzahlen vergeben wurden und in den Tabellen 5.45 und 5.46 die Verteilung der Begründungen auf die einzelnen Kategorien. Auch bei den Punkten zeigt sich eine deutliche Verbesserung zum „Vortest“. Während der Mittelwert der erreichten Punktzahl des „Vortest“-Items V6 noch 0,65 Punkte betrug, so liegt er nun bei 1,55 Punkten. In den meisten Begründungen für die richtige Antwort

K1			K2		K3					
(+)	(o)	(-)	(+)	(o)	(+)	(o)	(-)	K4	K5	K6
6	5	0	0	5	30	8	0	7	16	25
5%	4%	0%	0%	4%	24%	6%	0%	6%	13%	20%

Tabelle 5.45: Verteilung auf die Kategorien des Items N2 - Teil 1

wird über Brüche argumentiert (Kategorien K3(+), K3(o), K3(-)). Auch im „Vortest“

waren in diesen Kategorien die meisten Bearbeitungen eingeordnet. Im Gegensatz zum ersten Test haben bei dem Item N2 insgesamt 9% der Studierenden die Gleichheit begründet, in dem sie eine Folge angegeben habe, die gegen $0,\bar{9}$ konvergiert (Kategorien K1(+), K1(o), K1(-)). Ein solches Beispiel ist in Abbildung 5.65 zu sehen. Es sind

2. Ist $0,\bar{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ☒ Ja, es gilt $0,\bar{9} = 1$.
☐ Nein, es gilt $0,\bar{9} < 1$.
☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

$0,\bar{9}$ ist definiert als Grenzwert von $0,9999\dots$ und
 der ist 1.
 also $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{10^n}$

Abbildung 5.65: Beispiel für eine korrekte Begründung des Items N2

jedoch auch in 13% der Fälle Antworten gegeben worden, in denen die Gleichheit nicht ansatzweise begründet wird (Kategorie K5) und in weiteren 20% der Fälle wurde die korrekte Antwort gar nicht begründet (Kategorie K6). $0,\bar{9}$ als Folge aufgefasst haben bei dem Item N2 insgesamt 12% der Studierenden, wobei jeweils etwa die Hälfte von ihnen angekreuzt hat, $0,\bar{9}$ sei 1 (Kategorie K4) und $0,\bar{9}$ sei kleiner als 1 (Kategorie K8). In den übrigen Kategorien sind jeweils nur einzelne Bearbeitungen eingeordnet. Außerdem

K7	K8	K9	K10	K11	K12	K13	K14	n.b.
2	8	0	0	1	4	2	1	4
(2%)	(6%)	(0%)	(0%)	(1%)	(3%)	(2%)	(1%)	(3%)

Tabelle 5.46: Verteilung auf die Kategorien des Items N2 - Teil 2

sollen nun die Antworten zu den Items N2 und N3G verglichen werden. In der Studie von Tall und Vinner (1981) hatte fast die Hälfte der Studierenden zwar den Grenzwert der Folge, die in Item N3G gegeben ist, korrekt bestimmt, doch sie waren der Meinung, $0,\bar{9}$ sei kleiner als 1. Hier ist dies jedoch nicht der Fall. Mit 82% der Studierenden hat sogar ein größerer Anteil geantwortet, $0,\bar{9} = 1$ gelte, als der Anteil an Studierenden betrug, die den Grenzwert von der durch $a_n = 1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n}$ definierten Folge korrekt bestimmt haben. Die Erklärung von Tall und Vinner (1981), dass die beiden Aufgaben verschiedene Teile des *Concept Images* zu Grenzwerten aktivieren, lässt sich auch auf diesen Fall anwenden.

Es wurde noch ein weiteres Item zu periodischen Dezimalbrüchen eingesetzt, das in Abbildung 5.66 zu sehen ist. Dieses erfordert nun zusätzlich eine Übertragung auf einen leicht anderen Sachverhalt, nämlich auf $0,\bar{3}$. In diesem Fall ist den Studierenden vermutlich klar, dass $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$ gilt, doch es ist explizit vorgegeben, dass der Folgen- und Grenzwertbegriff zur Erklärung der Bedeutung genutzt werden soll. Argumentationen mit Hilfe von Brüchen, wie sie bei der Begründung in Item N2 möglich wären, können hier nicht genutzt werden.

N9 9. Erklären Sie die Bedeutung von $0, \overline{3}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs.

Abbildung 5.66: „Nachtest“-Item Nr. 9

Da eine verbale Erklärung gefordert ist, wurde auch hier ein Kategoriensystem deduktiv-induktiv entwickelt. Dieses ist in Tabelle 5.47 dargestellt.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Vollständig“	Die Erklärung ist richtig und vollständig.	1. <i>Beispiel:</i> $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$, dann gilt $a_n \rightarrow 0, \overline{3}$ für $n \rightarrow \infty$	Schreibweise formal korrekt	2 Punkte
K1(-)		Es wurde eine geeignete Folge bzw. Reihe angegeben, in der Form $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{3}{10^i}$ oder $a_n = 0, \underbrace{3 \dots 3}_n$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ oder ähnlich. Es wurde außerdem gesagt, dass der Grenzwert dieser Folge bzw. Reihe $0, \overline{3}$ ist.	2. <i>Beispiel:</i> $0, \overline{3}$ ist der Grenzwert der Folge $\left(\sum_{i=1}^n \frac{3}{10^i}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ 3. <i>Beispiel:</i> $0, \overline{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ 4. <i>Beispiel:</i> $0, \overline{3}$ kann als Reihe dargestellt werden: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ 5. <i>Beispiel:</i> $a_n = \frac{3}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = 0, \overline{3} = \frac{1}{3}$	Die Schreibweise enthält formale Mängel	1 Punkt

K2	„Unvollständig“	Alles was geschrieben wurde ist richtig, es ist jedoch unvollständig. Entweder wurde keine Folge angegeben oder es wurde nicht gesagt, dass der Grenzwert $0, \bar{3}$ ist.	1. <i>Beispiel:</i> $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n}$ 2. <i>Beispiel:</i> Die Folge konvergiert gegen $\frac{1}{3}$ 3. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3}$ ist der Grenzwert einer Folge reeller Zahlen 4. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3}$ ist definiert als GW einer Reihe, die gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert		1 Punkt
K3	„Falsch“	Das Geschriebene enthält falsche Aspekte.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3}$ ist eine Folge von Zahlen, die sich immer mehr dem Grenzwert $0,4$ nähert 2. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3}$ ist der Grenzwert einer Folge, die gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert; $a_n = \frac{n-1}{3n}$ mit steigendem n nähert sich die Folge 3. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3} = \frac{1}{3}$ konvergiert gegen $0,3$		0 Punkte
K4	„Ohne Folge und Grenzwert“	In der Erklärung wird weder eine Folge noch der Grenzwert genannt.	1. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{3} = \frac{1,0}{3}$ 2. <i>Beispiel:</i> siehe b-adische Darstellung von Zahlen		0 Punkte
K5	Keine Erklärung	Bei der Erklärung wurde nichts geschrieben.			0 Punkte

Tabelle 5.47: Kategoriensystem für das Item N9

Hier haben sich weniger Kategorien ergeben als für das Item N2, was auch damit zusammenhängt, dass dieses Item von deutlich weniger Studierenden überhaupt bearbeitet wurde. Da in der Aufgabenstellung explizit vorgegeben war, dass der Folgen- und

Grenzwertbegriff benutzt werden sollte, wurden nur solche Bearbeitungen mit 2 Punkten bewertet, in denen sowohl eine Folge als auch der Grenzwert genannt wurden. Für unvollständige Erklärungen wurde ein Teilpunkt vergeben.

Wie in Tabelle 5.48 zu sehen ist, wurde dieses Item verhältnismäßig schlecht gelöst, im

2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
35 (28%)	15 (12%)	22 (18%)	52 (42%)	0,69

Tabelle 5.48: Punkteverteilung des Items N9

Mittel wurden nur 0,69 von 2 Punkten erreicht. Wird dies mit den Ergebnissen von Item N2 verglichen, so ist letzteres in Bezug auf die Punkte deutlich besser ausgefallen. Allerdings haben viele Studierende bei Item N2 die Gleichheit $0,\bar{9} = 1$ mit einer Argumentation über Brüche begründet, was bei Item N9 nicht möglich war. Als Grenzwert einer Folge wurde auch die periodische Dezimalzahl $0,\bar{9}$ nur von wenigen Studierenden beschrieben. In Tabelle 5.49 ist die Verteilung der Bearbeitungen auf die einzelnen Kategorien darge-

K1(+)	K1(-)	K2	K3	K4	K5 (n.b.)
35 28%	0 0%	15 12%	18 15%	4 3%	52 42%

Tabelle 5.49: Verteilung auf die Kategorien des Items N9

stellt. Nur 28% der Befragten haben sowohl eine Folge beziehungsweise Reihe angegeben, die gegen $0,\bar{3}$ konvergiert, als auch erwähnt, dass $0,\bar{3}$ der Grenzwert ist, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.67. In 12% der Bearbeitungen wurde entweder keine konkrete Folge

9. Erklären Sie die Bedeutung von $0,\bar{3}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs.

$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k}$, Die Folge a_n ~~0,333~~ strebt gegen den Wert $0,\bar{3}$

Abbildung 5.67: korrekte Bearbeitung von Item N9

angegeben, die gegen $0,\bar{3}$ konvergiert, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.68, oder der Grenzwert wurde nicht angegeben. 15% der Studierenden haben in ihrer Erklärung etwas

9. Erklären Sie die Bedeutung von $0,\bar{3}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs.

$0,\bar{3}$ ist der Grenzwert einer Folge reeller Zahlen.

Abbildung 5.68: unvollständige Bearbeitung von Item N9

falsches geschrieben. In einigen dieser Fälle wurde $0,\bar{3}$ selbst als Folge beschrieben, wie in dem Beispiel, das in Abbildung 5.69 zu sehen ist. Weitere 3% der Befragten sind in ihrer Erklärung weder auf Folgen noch auf Grenzwerte eingegangen. Die übrigen 42% der Studierenden haben bei diesem Item nichts geschrieben.

9. Erklären Sie die Bedeutung von $0, \bar{3}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs.

$0, \bar{3}$ ist konvergiert gegen $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
 $\downarrow$
ist eine Folge

Abbildung 5.69: Beispiel für eine fehlerhafte Bearbeitung zu Item N9

Items zum Verständnis der Definition

Ein weiteres Workshopziel bestand in dem Aufbau eines vertieften Verständnisses der Definition der Konvergenz einer Folge. Dazu wurden die vier Items N4A, N4B, N5 und N6 eingesetzt, die in Abbildung 5.70 zu sehen sind.

4. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Wie viele Folgenglieder befinden sich innerhalb beziehungsweise außerhalb des Intervalls $[a - \epsilon, a + \epsilon]$?
- N4A ☐ Es befinden sich nur endlich viele Folgenglieder innerhalb des Intervalls.
☐ Es befinden sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb des Intervalls.
☐ Man kann keine Aussage darüber treffen, wie viele Folgenglieder sich innerhalb des Intervalls befinden.
- N4B ☐ Es befinden sich nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls.
☐ Es befinden sich unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls.
☐ Man kann keine Aussage darüber treffen, wie viele Folgenglieder sich außerhalb des Intervalls befinden.
- N5 5. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere reelle Folge mit $a'_n \neq a_n$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Was können Sie über das Konvergenzverhalten von $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sagen?
- ☐ $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a .
☐ $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls, aber möglicherweise gegen einen anderen Grenzwert.
☐ $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht.
☐ Man kann keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ treffen.
- N6 6. Angenommen, wir haben für ein festes $\epsilon > 0$ ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ im Sinne der Definition der Konvergenz für eine gegebene Folge gefunden. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.
- ☐ Jedes größere $N \in \mathbb{N}$ wäre für dasselbe $\epsilon > 0$ ebenfalls geeignet.
☐ Jedes kleinere $N \in \mathbb{N}$ wäre für dasselbe $\epsilon > 0$ ebenfalls geeignet.
☐ Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Abbildung 5.70: Items N4A, N4B, N5, N6

Das Item N4A besteht aus den drei oberen Aussagen in der Abbildung, in denen es darum geht, ob sich bei einer konvergenten Folge endlich viele oder unendlich viele Folgenglieder innerhalb eines beliebigen Intervalls um den Grenzwert befinden. Würden die Aussagen

als einzelne Items betrachtet werden, so wäre die Forderung der Unabhängigkeit der Items verletzt. Aus demselben Grund wurden die nächsten drei Aussagen, in denen dann danach gefragt ist, ob sich endlich viele oder unendlich viele Folgenglieder außerhalb eines solchen Intervalls befinden, zum Item N4B zusammengefasst. Konvergente Folgen lassen sich dadurch charakterisieren, dass sich außerhalb jeder beliebigen ϵ -Umgebung nur endlich viele Folgenglieder befinden, woraus automatisch folgt, dass sich jeweils unendlich viele Folgenglieder innerhalb der Umgebung befinden. In Abschnitt 2.5.3 wurde von einer Studie berichtet, in der Studierende ähnliche Charakterisierungen als geeignet oder ungeeignet für konvergente Folgen bewerten sollten und Schwierigkeiten damit hatten. Manche Studierenden waren der Meinung, es müsse lediglich formuliert werden, dass sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb jeder Umgebung befinden. Dies trifft jedoch nicht nur auf Grenzwerte, sondern auch auf Häufungspunkte zu.

Vollständig korrekt wäre das Item N4A beantwortet, wenn ausschließlich die Aussage „Es befinden sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb des Intervalls“ angekreuzt wurde. Tatsächlich ist es auch vorgekommen, dass mehrere dieser drei Aussagen angekreuzt wurden. Um die Möglichkeit offen zu halten, Analysen bezüglich der einzelnen Aussagen durchführen zu können, wurden die drei Aussagen zunächst einzeln bewertet. Für die erste Aussage wurde 1 Punkt vergeben, sofern sie nicht angekreuzt wurde und 0 Punkte, falls sie fälschlicherweise angekreuzt wurde. Bei der zweiten Aussage wurde 1 Punkt für das Ankreuzen vergeben und 0 Punkte, wenn die Aussage nicht angekreuzt war. Bei der dritten Aussage wurde wiederum 1 Punkt vergeben, wenn diese nicht angekreuzt wurde und andernfalls 0 Punkte. Anschließend wurde die Summe aus den Bewertungen für die drei einzelnen Aussagen gebildet, wodurch das Item N4A theoretisch die Ausprägungen 0, 1, 2 und 3 Punkte besitzt. Nun war es jedoch so, dass die Bewertung von 0 Punkten für das gesamte Item kein einziges Mal vergeben wurde, was bei der anschließenden Skalierung zu Problemen geführt hätte. Daher wurde hier eine Umkodierung vorgenommen, die in Tabelle 5.50 dargestellt ist. Die Bewertungen 0 Punkte und 1 Punkt wurden zusammengefasst zu 0 Punkten und die höheren Punktzahlen wurden jeweils um eins herabgesetzt. Somit hat das Item nach der Umkodierung die Ausprägungen 0, 1 und 2 Punkte.

ursprüngliche Bewertung	neue Bewertung
0 Punkte	0 Punkte
1 Punkt	0 Punkte
2 Punkte	1 Punkt
3 Punkte	2 Punkte

Tabelle 5.50: Umkodierung von Item N4A und N4B

Bei Item N4B wurde analog vorgegangen. Das Item ist korrekt gelöst, wenn ausschließlich die Aussage „Es befinden sich nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls“ angekreuzt wurde. Wieder wurde zunächst für die erste Aussage 1 Punkt vergeben, sofern diese angekreuzt war und 0 Punkte, falls sie nicht angekreuzt war. Bei der zweiten und dritten Aussage wurde jeweils 1 Punkt vergeben, wenn die Aussage nicht angekreuzt wurde und andernfalls wurden jeweils 0 Punkte vergeben. Für die Punktzahl des Items N4B wurde dann die Summe der drei einzelnen Bewertungen gebildet. Auch hier ist keine einzige Bearbeitung mit 0 Punkten bewertet worden, weshalb dieselbe Umkodierung

vorgenommen wurde wie schon bei Item N4A (siehe Tabelle 5.50). Dadurch ist wieder eine Bewertung mit 0, 1 und 2 Punkten entstanden.

In Tabelle 5.51 sind die Punkteverteilungen zu beiden Items N4A und N4B dargestellt.

Item	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
N4A	101 (82%)	8 (7%)	11 (9%)	3 (2%)	1,69
N4B	76 (61%)	26 (21%)	19 (15%)	3 (2%)	1,44

Tabelle 5.51: Punkteverteilung der Items N4A, N4B

Item N4A wurde von 82% der Probanden vollständig richtig gelöst. Unter den falschen Antworten war am häufigsten vertreten, dass die Aussage „Es befinden sich nur endlich viele Folgenglieder innerhalb des Intervalls“ angekreuzt wurde. Eine Erklärung dafür konnte ich nicht finden.

Item N4B wurde mit 61% deutlich schlechter gelöst. Von denjenigen, die sich für eine falsche Antwort entschieden haben, hat etwa die Hälfte angekreuzt, es würden sich unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls befinden und die andere Hälfte, es könne keine Aussage darüber getroffen werden, wie viele Folgenglieder sich außerhalb des Intervalls befinden. Letzteres passt zu den Ergebnissen der Studie von Roh (2005). Wenn jemand der Meinung ist, die Aussage, es befänden sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb einer beliebigen Umgebung um den Grenzwert, sei als Charakterisierung von Folgen mit einem Grenzwert geeignet, wäre es konsistent, wenn er antworten würde, es könne keine Aussage über die Anzahl der Folgenglieder außerhalb der Umgebung getroffen werden. Warum Studierende der Ansicht sind, bei einer konvergenten Folge befänden sich unendlich viele Folgenglieder außerhalb einer Umgebung um den Grenzwert, lässt sich damit nicht erklären.

Mit der Tatsache, dass konvergente Folgen dadurch charakterisiert werden können, dass sich außerhalb jeder beliebigen Umgebung um den Grenzwert nur endlich viele Folgenglieder befinden, hängt eng zusammen, dass eine Folge, die durch Abänderung endlich vieler Folgenglieder aus einer konvergenten Folge entsteht, ebenfalls konvergent ist und denselben Grenzwert besitzt. Das wird in Item N5 (siehe Abbildung 5.70) abgefragt. Dieses besteht ebenfalls aus mehreren Aussagen, die zusammengefasst wurden. Wieder dient die Zusammenfassung zu einem einzigen Item zur Sicherstellung der Itemunabhängigkeit. Korrekterweise müsste ausschließlich die Aussage angekreuzt werden, $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere ebenfalls gegen a . Im Vergleich zu den Items N4A und N4B muss bei Item N5 die genannte Charakterisierung angewendet werden, was das Item möglicherweise etwas schwieriger macht.

Item N6 (siehe Abbildung 5.70) prüft einen weiteren Aspekt der Definition ab. Zu einem festen $\epsilon > 0$ gibt es kein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$, so dass ab diesem N alle weiteren Folgenglieder innerhalb der ϵ -Umgebung liegen, sondern es gibt unendlich viele. Oft die kleinste natürliche Zahl, für welche die Bedingung erfüllt ist, als N gewählt, doch es könnte auch jede größere natürliche Zahl gewählt werden. In diesem Item wird geprüft, ob die Studierenden diesen Aspekt verstanden haben. Wieder wurden Aussagen zusammengefasst, um die Itemunabhängigkeit nicht zu gefährden. Die Aussage dass jedes größere $N \in \mathbb{N}$ für dasselbe

$\epsilon > 0$ ebenfalls geeignet wäre ist richtig, während die anderen beiden Aussagen falsch sind.

Item	Beschreibung	Punkte
N5	Es wurde ausschließlich die Aussage „ $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a “ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte
N6	Es wurde ausschließlich die Aussage „Jedes größere $N \in \mathbb{N}$ wäre für dasselbe $\epsilon > 0$ ebenfalls geeignet“ angekreuzt	1 Punkt
	Andernfalls	0 Punkte

Tabelle 5.52: Bewertung der Items N5, N6 mit Punkten

Da es bei beiden Items N5 und N6 nicht vorgekommen ist, dass ein Studierender mehrere der zu einem Item gehörenden Aussagen angekreuzt hat, werden hier jeweils nur 0 oder ein Punkt vergeben, wie in Tabelle 5.52 dargestellt. Bei Item N5 hätte eventuell auch ein Teilpunkt vergeben werden können, wenn anstelle der richtigen Antwortmöglichkeit die Aussage, $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere ebenfalls, aber möglicherweise gegen einen anderen Grenzwert, angekreuzt wurde, da immerhin erkannt wurde, dass $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Ich bin jedoch der Meinung, dass in dem Fall der Aspekt, der mit diesem Item abgefragt werden soll, nicht verstanden wurde, weshalb ich mich für die 0-1-Bewertung entschieden habe.

In Tabelle 5.53 sind die Punkteverteilungen beider Items zu sehen. Item N5 wurde

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
N5	79 (64%)	39 (31%)	6 (5%)	0,64
N6	87 (70%)	32 (26%)	5 (4%)	0,70

Tabelle 5.53: Punkteverteilung der Items N5, N6

von 64% der Studierenden korrekt gelöst. Hier ist es auch interessant, die insgesamt 39 falschen Antworten genauer zu betrachten. Unter ihnen waren fünf Bearbeitungen, in denen angekreuzt wurde, die Folge konvergiere nicht. Dabei handelt es sich also eher um Einzelfälle. Die übrigen 34 falschen Antworten verteilen sich gleichmäßig auf die Antwortmöglichkeiten, die Folge konvergiere, aber der Grenzwert sei möglicherweise ein anderer, und es sei keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Folge möglich. Bei beiden Antwortmöglichkeiten ist zumindest nicht ausgeschlossen, dass eine solche Folge $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert. Es wurde aber nicht erkannt, dass dies für jede solche Folge $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Fall ist. Es war aber zuvor bereits vermutet worden, dass dieses Item den Studierenden Schwierigkeiten bereitet, insofern sind die Ergebnisse nicht verwunderlich.

Item N6 ist mit einer Lösungsrate von 70% etwas besser ausgefallen als das vorherige Item. Die Mehrheit der Studierenden hat verstanden, dass mit jedem geeigneten N im Sinne der Definition auch jede größere natürliche Zahl als N gewählt werden könnte. Unter den falschen Antworten haben etwas mehr Studierende angekreuzt, dass jedes kleinere $N \in \mathbb{N}$ ebenfalls geeignet wäre, als angekreuzt haben, keine der beiden Aussagen sei richtig. Bei letzteren ist nicht klar, ob sie gedacht haben, zu jedem $\epsilon > 0$ gebe es eine eindeutige

Zahl $N \in \mathbb{N}$ im Sinne der Definition, oder ob sie lediglich die Aussagen „**jedes größere**“ beziehungsweise „**jedes kleinere**“ $N \in \mathbb{N}$ sei ebenfalls geeignet, als falsch einschätzen, was nicht ausschließt, dass es zu einem $\epsilon > 0$ mehrere geeignete Zahlen $N \in \mathbb{N}$ geben kann.

Insgesamt haben sich bei den Items zum Verständnis der Definition der Folgenkonvergenz einige Schwierigkeiten gezeigt. Auch wenn die Studierenden bei den meisten einfachen Folgen entscheiden können, ob eine Folge konvergiert oder nicht, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert, so haben sie die formale Definition dennoch nicht unbedingt durchdrungen.

Items zu Beziehungen zwischen Konvergenz und anderen Begriffen

Ein weiteres Ziel sowohl der Vorlesung als auch des Workshops war es, dass die Studierenden verstehen, welche Beziehungen zwischen Konvergenz und dazu verwandten Begriffen wie Monotonie, Beschränktheit, Häufungspunkten und Cauchy-Folgen gelten. Dazu wurden die Items N7A bis N7J (siehe Abbildung 5.71) in den Test aufgenommen.

7. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für reelle Folgen richtig sind.

- N7A ☐ Jede Cauchy-Folge konvergiert.
- N7B ☐ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- N7C ☐ Jede monotone Folge konvergiert.
- N7D ☐ Jede konvergente Folge ist monoton.
- N7E ☐ Jede beschränkte Folge konvergiert.
- N7F ☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- N7G ☐ Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert.
- N7H ☐ Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.
- N7I ☐ Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.
- N7J ☐ Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
- ☐ Keine der obigen Aussagen stimmt.

Abbildung 5.71: „Nachtest“-Items Nr. 7A-7J

Zu jeder Aussage, die abgefragt wird, ist auch die Umkehraussage vorhanden. Die einzelnen Aussagen können dennoch als voneinander unabhängige Items angesehen werden, da es sowohl vorkommt, dass sowohl eine Aussage als auch ihre Umkehraussage korrekt sind, als auch, dass beide falsch sind, und es ist auch der Fall vertreten, dass eine der beiden Aussagen richtig und die andere falsch ist. Daher kann von der Antwort auf eine Aussage nicht auf die Antwort der Umkehraussage geschlossen werden. Die letzte Antwortmöglichkeit „Keine der obigen Aussagen stimmt“ dient lediglich der Unterscheidung, ob bewusst keine Aussage angekreuzt wurde, da jemand der Meinung ist, dass sie nicht stimmen, oder ob die Aufgabe gar nicht bearbeitet wurde. Daher wurde diese letzte Aussage lediglich benutzt, um zu bestimmen, in wie vielen Fällen die Items N7A bis N7G nicht bearbeitet wurden. Neben den Beziehungen zu anderen Begriffen wird mit Item N7D auch noch einmal das Vorliegen der eingeschränkten Vorstellung, konvergente Folgen seien alle monoton, untersucht. Gleichzeitig kann mit einigen der Items überprüft werden, ob verschiedene Methoden zur Untersuchung von Folgen auf Konvergenz bekannt sind: Falls Item N7A korrekt gelöst wird, so ist die Eigenschaft „Cauchy-Folge“ als hinreichende Bedingung im Fall reeller Folgen bekannt; in Item

N7F wird die notwendige Bedingung der Beschränktheit abgefragt und in Item N7I die hinreichende Bedingung „Monotonie und Beschränktheit“.

Item	Beschreibung	Punkte
Falls keine einzige Aussage angekreuzt wurde, so werden alle Items N7A - N7G als nicht bearbeitet gewertet		
N7A	Die Aussage „Jede Cauchy-Folge konvergiert“ wurde angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede Cauchy-Folge konvergiert“ wurde nicht angekreuzt	0 Punkte
N7B	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge“ wurde angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge“ wurde nicht angekreuzt	0 Punkte
N7C	Die Aussage „Jede monotone Folge konvergiert“ wurde nicht angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede monotone Folge konvergiert“ wurde angekreuzt	0 Punkte
N7D	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist monoton“ wurde nicht angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist monoton“ wurde angekreuzt	0 Punkte
N7E	Die Aussage „Jede beschränkte Folge konvergiert“ wurde nicht angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede beschränkte Folge konvergiert“ wurde angekreuzt	0 Punkte
N7F	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist beschränkt“ wurde angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist beschränkt“ wurde nicht angekreuzt	0 Punkte
N7G	Die Aussage „Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert“ wurde nicht angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert“ wurde angekreuzt	0 Punkte
N7H	Die Aussage „Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt“ wurde angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt“ wurde nicht angekreuzt	0 Punkte
N7I	Die Aussage „Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert“ wurde angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert“ wurde nicht angekreuzt	0 Punkte
N7J	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt“ wurde nicht angekreuzt	1 Punkt
	Die Aussage „Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt“ wurde angekreuzt	0 Punkte

Tabelle 5.54: Bewertung der Items N7A - N7J mit Punkten

In Tabelle 5.54 ist dargelegt, wie die Punkte für die einzelnen Items vergeben wurden. Da es jeweils eine eindeutige richtige Antwort gab, die aus dem Ankreuzen oder Nicht-Ankreuzen der jeweiligen Aussage bestand, wurde pro Item ein Punkt vergeben, wenn richtig entschieden wurde, und 0 Punkte, wenn falsch entschieden wurde.

Item	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
N7A	100 (81%)	24 (19%)	0 (0%)	0,81
N7B	80 (65%)	44 (35%)		0,65
N7C	113 (91%)	11 (9%)		0,91
N7D	96 (77%)	28 (23%)		0,77
N7E	107 (86%)	17 (14%)		0,86
N7F	97 (78%)	27 (22%)		0,78
N7G	40 (32%)	84 (68%)		0,32
N7H	98 (79%)	26 (21%)		0,79
N7I	102 (82%)	22 (18%)		0,82
N7J	101 (82%)	23 (18%)		0,82

Tabelle 5.55: Punkteverteilung der Items N7A - N7J

In Tabelle 5.55 sind die Punkteverteilungen aller Items N7A bis N7J zu finden. Auf diese wird nun der Reihe nach eingegangen.

Bei den Items N7A und N7B, in denen es um die Beziehung zwischen reellen Cauchy-Folgen und konvergenten Folgen geht, hätte ich erwartet, dass das erste schlechter gelöst wird, da es nur in vollständigen metrischen Räumen der Fall ist, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, während die Umkehrung immer gilt. Tatsächlich wurde jedoch das Item N7A von 81% der Studierenden korrekt beantwortet, wohingegen das Item N7B nur eine Lösungsrate von 65% hat. Eine Erklärung für dieses Ergebnis finde ich nicht.

Dass nicht jede monotone Folge konvergiert, haben 91% der Studierenden gewusst. Für diese Aussage lässt sich leicht ein Gegenbeispiel wie die monotone, divergente Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, was die Beantwortung relativ einfach macht. Bei der Umkehraussage, jede konvergente Folge sei monoton, ist dies anders. 23% der Studierenden haben diese Aussage für korrekt gehalten. Folgen, die hier als Gegenbeispiel dienen können, kommen im *Concept Image* dieser Studierenden zu konvergenten Folgen möglicherweise nicht vor. Die eingeschränkte Vorstellung, konvergente Folgen seien immer monoton, von der in der Literatur berichtet wird (vgl. Abschnitt 2.4), ist also auch bei einigen Mathematikstudierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz in der Vorlesung zu finden.

In den Items N7E und N7F wurde der Zusammenhang zwischen Konvergenz und Beschränktheit abgefragt. 86% der Studierenden haben korrekt geantwortet, dass nicht jede beschränkte Folge konvergiert. Hier eignet sich eine Folge wie $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in der Vorlesung mehrfach behandelt wurde und ein typisches Beispiel divergenter Folgen darstellt, als Gegenbeispiel. Die Umkehraussage, jede konvergente Folge sei beschränkt, wurde von 78% der Studierenden als richtig bewertet. Hier hätte ich eine höhere Lösungsrate erwartet. Eine Erklärung könnte allerdings sein, dass manche Studierenden zu konvergenten Folgen möglicherweise auch uneigentlich konvergente Folgen zählen, die natürlich nicht beschränkt sind.

Die Items N7G und N7H prüfen ab, ob die Beziehungen zwischen konvergenten Folgen und

Häufungspunkten verstanden wurde. Dass nicht jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert, wurde nur von 32% der Studierenden erkannt. Hier könnte wieder eine mögliche Erklärung sein, dass Folgen, die sich als Gegenbeispiel für diese Aussage eignen, eher untypische Beispiele divergenter Folgen sind, die nicht unbedingt im *Concept Image* der Studierenden vorhanden sind. Ein mögliches Gegenbeispiel wäre die Folge, die durch $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$ definiert ist. Dass die Umkehraussage, jede konvergente Folge habe genau einen Häufungspunkt, richtig ist, haben mit 79% wiederum mehr Studierende gewusst. Ein Studierender, der dieses Item falsch beantwortet hat, fasst Grenzwerte möglicherweise nicht als Spezialfall von Häufungspunkten auf.

In den Items N7I und N7J geht es schließlich um Monotonie und Beschränktheit als Kriterium für Konvergenz und die dazugehörige Umkehraussage. 82% der Studierenden haben das genannte Kriterium als richtig bewertet. Hier kann ich keine Erklärung für die falschen Antworten finden. Dass nicht jede konvergente Folge monoton und beschränkt ist, haben ebenfalls 82% der Studierenden gewusst. Konvergente Folgen sind zwar beschränkt, aber nicht unbedingt monoton. Im Vergleich mit Item N7D ist interessant, dass weniger Studierende wissen, dass nicht jede konvergente Folge monoton ist, als der Anteil der Studierenden, die wissen, dass nicht jede konvergente Folge monoton und beschränkt ist.

Insgesamt wurden die Items zu den Beziehungen zwischen Konvergenz und verwandten Begriffen relativ gut gelöst, wobei das Item N7G eine Ausnahme bildet. Eine mögliche Erklärung dafür wurde bereits genannt.

Items zu Verbalisierungen

Auch der Aufbau der Fähigkeit, ungeeignete Verbalisierungen zur Folgenkonvergenz als solche zu bewerten, ist ein Ziel des Workshops. Um dieses abzutesten sind die Items N8A, N8B und N8C (siehe Abbildung 5.72) im Test vorhanden. Die drei vorgegebenen

8. Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- N8A** Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.
☐ Äquivalent ☐ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: _____
- N8B** Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder mit wachsendem n diesem Wert immer näher kommen, ohne ihn je zu erreichen.
☐ Äquivalent ☐ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: _____
- N8C** Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen.
☐ Äquivalent ☐ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: _____

Abbildung 5.72: „Nachtest“-Items Nr. 8A-8C

Verbalisierungen sind tatsächlich alle ungeeignet. Zusätzlich ist jeweils die Angabe eines

Gegenbeispiels gefordert. In der Lage zu sein, zu einer Situation eine geeignete (Gegen-) Beispielfolge auszuwählen beziehungsweise zu konstruieren, ist ebenfalls ein Ziel, das überprüft werden soll. Außerdem kann bei den Probanden, die ein Gegenbeispiel angegeben haben, ausgeschlossen werden, dass sie bei der Beantwortung der Frage, ob die jeweilige Verbalisierung äquivalent zur Definition ist, lediglich geraten haben. Gleichzeitig kann mit den einzelnen Verbalisierungen jeweils das Vorhandensein bestimmter eingeschränkter Vorstellungen untersucht werden. Sowohl bei Item N8A als auch bei Item N8B würde eine falsche Antwort darauf hinweisen, dass der Proband die eingeschränkte Vorstellung hat, dass eine Folge, die einem Wert nicht in jedem Schritt näher kommt, nicht gegen diesen konvergieren kann. Bei jemandem, der die Verbalisierung in Item N8B fälschlicherweise als äquivalent zur Definition bewertet, wäre außerdem die Vorstellung vorhanden, dass eine Folge, die einen Wert „erreicht“, nicht gegen diesen konvergieren kann. Item N8C kann ein Indiz dafür sein, ob die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt korrekt unterschieden werden.

Die angegebenen Gegenbeispiele wiesen – sofern überhaupt erkannt wurde, dass die Verbalisierung nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen einen Wert ist – große Unterschiede auf. Daher wurde zu jedem der drei Items ein Kategorien- und Bewertungsschema entwickelt. Das für Item N8A ist in Tabelle 5.56 dargestellt. Für die Verbalisierung, die Folgenglieder kommen dem Wert mit wachsendem n immer näher, wurden drei verschiedene Typen geeigneter Gegenbeispiele gefunden.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Nicht monoton“	Es wurde ein Beispiel einer nicht streng monotonen, konvergenten Folge angegeben. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	1. <i>Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$	Es sind so- wohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die for- male Schreib- weise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K1(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenz- wert ange- geben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte

K2(+)	„Konstant“	Es wurde ein Beispiel einer konstanten Folge angegeben. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$ <i>2. Beispiel:</i> konstante Folge	Es sind sowohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K2(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenzwert angegeben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte
K3(+)	„Schließlich konstant“	Es wurde ein Beispiel einer Folge angegeben, die ab irgendeinem n_0 konstant ist. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ 100 & n > 100 \end{cases}$	Es sind sowohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K3(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenzwert angegeben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte

K4(+)	„Anderer Wert“	Es wurde ein Beispiel einer monotonen konvergenten Folge angegeben, die sich dem angegebenen Wert immer weiter annähert, bei dem es sich nicht um den Grenzwert	1. <i>Beispiel:</i> $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ nähert sich immer weiter -1 an, aber $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0	Es wurde sowohl eine geeignete Folge als auch ein geeigneter Wert (der nicht der Grenzwert ist) angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K4(-)		handelt.		Es wurde lediglich eine geeignete Folge ohne einen geeigneten Wert angegeben oder die formale Schreibweise enthält Mängel.	2 Punkte
K5	„Falsch“	Das angegebene Beispiel ist kein Gegenbeispiel oder es fehlen Angaben, um entscheiden zu können, ob es sich um ein Gegenbeispiel handelt.	1. <i>Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$		1 Punkt
K6	Nichts	Es wurde kein Gegenbeispiel angegeben.			1 Punkt

Tabelle 5.56: Kategoriensystem für das Item N8A

Zum einen wären hier konvergente Folgen geeignet, die nicht streng monoton sind und für die der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nicht monoton fallend ist. Des Weiteren wären auch konstante oder schließlich konstante Folgen geeignet, da sie zwar konvergieren, aber dem Grenzwert nicht „immer näher kommen“, jedenfalls wenn

letzteres derart gedeutet wird, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert streng monoton fallend ist. Eine andere Möglichkeit wäre die Angabe einer Folge, die einem anderen Wert als dem Grenzwert „immer näher kommt“. Davon abgesehen gab es auch als Gegenbeispiel ungeeignete Folgen oder es wurde gar kein Gegenbeispiel angegeben. Sobald angekreuzt war, dass die Verbalisierung nicht äquivalent zur Definition ist, wurde ein Punkt vergeben. Wenn zudem noch ein geeignetes Gegenbeispiel angegeben wurde, wurden – je nachdem wie korrekt das Gegenbeispiel notiert war – ein oder zwei weitere Punkte vergeben.

In Tabelle 5.57 ist zu sehen, wie viele Studierende die jeweilige Punktzahl erreicht

3 Punkte	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
13 (11%)	14 (11%)	9 (7%)	82 (66%)	6 (5%)	0,61

Tabelle 5.57: Punkteverteilung des Items N8A

haben. Hier fällt auf, dass mit 66% die Mehrheit der Studierenden die Verbalisierung fälschlicherweise für äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen einen Grenzwert gehalten hat. Eine Möglichkeit wäre, dass Studierende mit dieser Antwort den Ausdruck „immer näher“ als „beliebig nah“ interpretieren und auf diese Weise zu ihrer Entscheidung kommen. Es wäre auch möglich, dass sie eine eingeschränkte Vorstellung zu konvergenten Folgen haben und nur solche Folgen als konvergent auffassen, bei denen der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert monoton fallend ist. Über die angegebenen Gegenbeispiele derjenigen, die richtig erkannt haben, dass die Verbalisierung nicht äquivalent ist, gibt die Verteilung auf die einzelnen Kategorien in Tabelle 5.58 mehr Aufschluss. Die meisten

K1(+)	K1(-)	K2(+)	K2(-)	K3(+)	K3(-)	K4(+)	K4(-)	K5	K6
0	6	1	8	1	0	11	0	6	3
0%	5%	1%	6%	1%	0%	9%	0%	5%	2%

Tabelle 5.58: Verteilung auf die Kategorien des Items N8A

angegebenen Gegenbeispiele finden sich in den Kategorien K1(-), K2(-), K4(+) und K5. Im Fall der Kategorie K1(-) handelte es sich meist um Folgen, für die der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nur an einer einzigen Stelle nicht monoton fallend ist, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.73. Nicht erwähnt wurde, dass die angegebene Folge gegen

8. Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.

☐ Äquivalent ☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \forall n \neq 1020 \\ 3790 & \text{für } n = 1020 \end{cases}$

Abbildung 5.73: Gegenbeispiel der Kategorie K1(-)

0 konvergiert, aber 0 nicht „immer näher kommt“. Bei den Gegenbeispielen der Kategorie K2(-) ist dies ähnlich. Wie in Abbildung 5.74 kann den Gegenbeispielen zwar entnommen werden, dass konstante Folgen gemeint sind, doch es wurde nicht geschrieben, dass diese einen Grenzwert haben und dass sie diesem nicht „immer näher kommen“. Haben

8. Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.

☒ Äquivalent ☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: konstante Folge

Abbildung 5.74: Gegenbeispiel der Kategorie K2(-)

Studierende hingegen eine Folge angegeben, die einem anderen Wert als dem Grenzwert „immer näher kommt“, so haben sie stets sowohl den Grenzwert als auch den davon verschiedenen Wert angegeben, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.75. Möglicherweise

8. Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.

☒ Äquivalent ☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: Wert: -1
 $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konv nicht gegen -1,
kommt ihr aber immer näher

Abbildung 5.75: Gegenbeispiel der Kategorie K4(+)

waren die Studierenden bei Beispielen der Kategorien K1 und K2 der Meinung, es sei ohne weitere Erklärung klar, warum es sich um Gegenbeispiele handle, weil der Grenzwert eindeutig ist und erkannt werden kann, dass die jeweilige Folge diesem nicht „immer näher kommt“. Bei Folgen der Kategorie K4 hingegen gibt es mehrere Möglichkeiten, was der vom Grenzwert verschiedene Wert ist, dem die Folge „immer näher kommt“, so dass die Studierenden es für nötig halten, diese Information anzugeben. Unter den nicht als Gegenbeispiel geeigneten Folgen (Kategorie K5) lassen sich keine Gemeinsamkeiten feststellen. Teilweise wurden Folgen angegeben, die sowohl gegen einen Wert konvergieren als auch diesem mit wachsendem n „immer näher kommen“, teilweise Folgen, die weder konvergieren noch einem Wert mit wachsendem n „immer näher kommen“.

Insgesamt lässt sich bei diesem Item feststellen, dass viele Studierende die gegebene Aussage als geeignete Verbalisierung für konvergente Folgen angesehen haben. Wenn erkannt wurde, dass dies nicht der Fall ist, so konnte meist auch ein geeignetes Gegenbeispiel genannt werden, wenn auch nicht unbedingt formal korrekt und mit allen nötigen Informationen.

Bei Item N8B hat die angegebene Verbalisierung im Vergleich zu der aus Item N8A den Zusatz „ohne ihn je zu erreichen“. Alle für N8A geeigneten Gegenbeispiele sind hier ebenfalls adäquat. Daher ist das gleiche Kodierungs- und Bewertungsschema wie für das vorige Item entstanden, lediglich die Ankerbeispiele unterscheiden sich teilweise.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Nicht monoton“	Es wurde ein Beispiel einer nicht streng monotonen konvergenten Folge angegeben. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$	Es sind so- wohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die for- male Schreib- weise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K1(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenz- wert ange- geben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte
K2(+)	„Konstant“	Es wurde ein Beispiel einer konstanten Folge angegeben. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = 2, n \in \mathbb{N}$ <i>2. Beispiel:</i> $a_n = \frac{1}{2}$ <i>3. Beispiel:</i> konstante Folge	Es sind so- wohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die for- male Schreib- weise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K2(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenz- wert ange- geben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte

K3(+)	„Schließlich konstant“	Es wurde ein Beispiel einer Folge angegeben, die ab irgendeinem n_0 konstant ist. Der Grenzwert muss nicht mit angegeben sein.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ 100 & n > 100 \end{cases}$	Es sind sowohl eine geeignete Folge als auch der Grenzwert angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K3(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne den Grenzwert angegeben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte
K4(+)	„Anderer Wert“	Es wurde ein Beispiel einer monotonen konvergenten Folge angegeben, die sich dem angegebenen Wert immer weiter annähert, bei dem es sich nicht um den Grenzwert	<i>1. Beispiel:</i> $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ nähert sich immer weiter -1 an, aber $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0	Es wurde sowohl eine geeignete Folge als auch ein geeigneter Wert (der nicht der Grenzwert ist) angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte

K4(-)		handelt.		Es wurde lediglich eine geeignete Folge ohne einen geeigneten Wert angegeben oder die formale Schreibweise enthält Mängel.	2 Punkte
K5	„Falsch“	Das angegebene Beispiel ist kein Gegenbeispiel oder es fehlen Angaben, um entscheiden zu können, ob es sich um ein Gegenbeispiel handelt.	1. <i>Beispiel:</i> $n \rightarrow 1$ 2. <i>Beispiel:</i> $\frac{1}{n}$ 3. <i>Beispiel:</i> $0, \bar{9} = 1$ 4. <i>Beispiel:</i> Nullfolge		1 Punkt
K6	Nichts	Es wurde kein Gegenbeispiel angegeben.			1 Punkt

Tabelle 5.59: Kategoriensystem für das Item N8B

3 Punkte	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
21 (17%)	37 (30%)	20 (16%)	37 (30%)	9 (7%)	1,27

Tabelle 5.60: Punkteverteilung des Items N8B

K1(+)	K1(-)	K2(+)	K2(-)	K3(+)	K3(-)	K4(+)	K4(-)	K5	K6
0	2	12	34	0	1	9	0	7	13
0%	2%	10%	27%	0%	1%	7%	0%	6%	10%

Tabelle 5.61: Verteilung auf die Kategorien des Items N8B

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder mit wachsendem n diesem Wert immer näher kommen, ohne ihn je zu erreichen.

☐ Äquivalent

☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel:

$a_n = 1$ konv. gegen 1 und 1 wird erreicht

Abbildung 5.76: Gegenbeispiel der Kategorie K2(+)

Die Tatsache, dass jedes Gegenbeispiel, das bei Item N8A angegeben wurde und dort geeignet war, für dieses Item ebenfalls geeignet ist, lässt vermuten, dass die durchschnittlich erreichte Punktzahl hier nicht schlechter ist, als die in Item N8A. Ein Blick in Tabelle 5.60 bestätigt dies, das arithmetische Mittel beträgt hier 1,27 Punkte im Vergleich zu 0,61 Punkten bei Item N8A. Dennoch ist mit 30% der Studierenden ein beträchtlicher Anteil der Meinung, konvergente Folgen können dadurch charakterisiert werden, sie würden ihrem Grenzwert immer näher kommen ohne ihn je zu erreichen.

Bei der Betrachtung der Tabelle 5.61, in der dargestellt ist, wie oft die einzelnen Kategorien von Gegenbeispielen vorgekommen sind, fällt auf, dass es sich in den meisten Fällen um konstante Folgen handelt (Kategorien K2(+) und K2(-)). Dies ist nicht weiter verwunderlich, bei dem Zusatz „ohne ihn je zu erreichen“ liegt es nahe, ein solches Gegenbeispiel zu wählen. Hier wurde nun in einigen Fällen der Grenzwert genannt und es wurde explizit erwähnt, dass dieser „erreicht“ werde, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.76.

In Item N8C wurde eine Verbalisierung eingesetzt, die ähnlich in einer Studie von Roh (2005) (vgl. Abschnitt 2.5.3) verwendet wurde. Es handelt sich um die Verbalisierung, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen. Diese Eigenschaft trifft nicht nur auf Grenzwerte, sondern allgemeiner auf Häufungspunkte zu. Da geeignete Gegenbeispiele hier von anderer Art sind als bei den Items N8A und N8B, hat sich ein etwas anderes Kategoriensystem ergeben. Es wurden zwei Typen geeigneter Gegenbeispiele identifiziert, und zwar Folgen mit mehreren Häufungspunkten und Folgen, die einen Häufungspunkt besitzen und unbeschränkt sind. Theoretisch wären auch noch unbeschränkte Folgen mit mehr als einem Häufungspunkt möglich, ein solches Beispiel wurde allerdings nicht angegeben. Folgen, die konvergent sind, aber auf welche die Verbalisierung nicht zutrifft, kann es nicht geben.

Die Gegenbeispiele der übrigen Kategorien sind ähnlich wie die, welche bereits bei Item N8A präsentiert wurden.

Kürzel	Name	Erklärung	Ankerbeispiele	Punkte	
K1(+)	„Mehrere Häufungspunkte“	Es wurde ein Beispiel einer Folge mit mindestens zwei Häufungspunkten angegeben. Es wurde nicht unbedingt ein Wert	1. <i>Beispiel:</i> $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ 2. <i>Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$	Es sind sowohl eine geeignete Folge als auch ein geeigneter Wert angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte

K1(-)		angegeben, für den unendlich viele Folgenglieder in jeder beliebigen Umgebung liegen.		Es ist nur eine geeignete Folge ohne einen geeigneten Wert angegeben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte
K2(+)	„Unbeschränkt“	Es wurde ein Beispiel einer unbeschränkten Folge mit mindestens einem Häufungspunkt angegeben. Es wurde nicht unbedingt ein Wert angegeben, für den unendlich viele Folgenglieder in jeder beliebigen Umgebung liegen.	<i>1. Beispiel:</i> $a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$	Es sind sowohl eine geeignete Folge als auch ein geeigneter Wert angegeben und die formale Schreibweise ist größtenteils korrekt.	3 Punkte
K2(-)				Es ist nur eine geeignete Folge ohne einen geeigneten Wert angegeben oder die formale Schreibweise weist Mängel auf.	2 Punkte
K3	„Falsch“	Das angegebene Beispiel ist kein Gegenbeispiel oder es fehlen Angaben, um entscheiden zu können, ob es sich um ein Gegenbeispiel handelt.	<i>1. Beispiel:</i> $\left(\frac{5}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ <i>2. Beispiel:</i> $a_n = 3$ <i>3. Beispiel:</i> Wert: 0 Umgebung $[-1, +1]$ Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$		1 Punkt

K4	Nichts	Es wurde kein Gegenbeispiel angegeben.			1 Punkt

Tabelle 5.62: Kategoriensystem für das Item N8C

Bei der Bewertung der einzelnen Kategorien wurde ähnlich vorgegangen wie bei den Items N8A und N8B. Insgesamt ist das in Tabelle 5.62 dargestellte Kodierungs- und Bewertungsschema entstanden.

Dieses Item wurde ähnlich schlecht gelöst wie das Item N8A, wie in Tabelle 5.63 zu sehen ist wurden durchschnittlich nur 0,61 von 3 Punkten erreicht. 66% der Studierenden waren der Meinung, die angegebene Verbalisierung sei eine geeignete Charakterisierung konvergenter Folgen. Entweder ist diesen Personen nicht bewusst, dass diese Verbalisierung nicht ausschließt, dass es mehrere Häufungspunkte gibt oder die Folge unbeschränkt ist, oder es ist ihnen bewusst und ihr persönliches Konzept von Grenzwerten entspricht dem, was als Häufungspunkt definiert ist. Ein Blick auf die Häufigkeiten der einzelnen

3 Punkte	2 Punkte	1 Punkt	0 Punkte	nicht bearbeitet	arith. Mittel
4 (3%)	27 (22%)	19 (15%)	65 (52%)	9 (7%)	0,69

Tabelle 5.63: Punkteverteilung des Items N8C

Kategorien, die in Tabelle 5.64 dargestellt sind, zeigt, dass die geeigneten Gegenbeispiele fast ausschließlich Folgen mit mehreren Häufungspunkten waren (Kategorien K1(+) und K1(-)). Meist wurde dabei lediglich eine solche Folge angegeben, wie in dem Beispiel in Abbildung 5.77, und es wurde nicht explizit ein Wert genannt, auf den die Verbalisierung zutrifft, der jedoch kein Grenzwert der Folge ist. Nur in vier Fällen wurde Letzteres

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen.

☐ Äquivalent ☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$

Abbildung 5.77: Gegenbeispiel der Kategorie K1(-)

erwähnt, ein Beispiel dazu ist in Abbildung 5.78 zu sehen. Des Weiteren fällt bei der genaueren Betrachtung der Gegenbeispiele der Kategorien K1(+) und K1(-) auf, dass es sich fast immer um die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ handelt. Das ist nicht verwunderlich, da dies ein sehr typisches, einfaches Beispiel einer Folge mit zwei Häufungspunkten ist. Unter den neun falschen Gegenbeispielen (Kategorie K3) ließen sich auch bei diesem Item keine häufigen Fehler identifizieren.

K1(+)	K1(-)	K2(+)	K2(-)	K3	K4
4	26	0	1	9	10
3%	21%	0%	1%	7%	8%

Tabelle 5.64: Verteilung auf die Kategorien des Items N8C

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen.

☐ Äquivalent

☒ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ sowohl in jeder Umgebung um 1 als auch um -1 liegen unendlich viele Folgenglieder.

Abbildung 5.78: Gegenbeispiel der Kategorie K1(+)

Insgesamt hat sich gezeigt, dass es den Studierenden schwer fällt, ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff als solche zu identifizieren.

Aus zeitlichen Gründen konnten keine Items in den Test aufgenommen werden, in denen Folgen mit den genannten und weiteren Methoden auf Konvergenz untersucht werden, da dies zu lange dauern würde, auch wenn es sich dabei um ein Ziel des Workshops handelt. Ebenso verhält es sich mit Beweisen im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff. Der überwiegende Teil der Workshopziele ist aber durch Items im Test vertreten.

Neben den verschiedenen inhaltlichen Facetten sollte der Test möglichst auch aus Items verschiedener Schwierigkeit bestehen. Wären alle Items etwa gleich schwer, so würde es vermutlich einige Studierende geben, die entweder gar kein Item oder alle Items korrekt lösen. Der Test könnte in einem solchen Fall zwischen verschiedenen Personen, die kein Item beziehungsweise alle Items lösen konnten, nicht unterscheiden, obwohl deren tatsächliche Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff sich sehr wohl unterscheiden können. Daher sollen Items verschiedener Schwierigkeit vertreten sein. In Anlehnung an Vollrath (1984) hat Hayen (1988) fünf hierarchische Stufen des Begriffsverständnisses des Grenzwerts entwickelt: (1) Intuitive Kenntnis, (2) Inhaltliche Kenntnis, (3) Formale Kenntnis, (4) Integrierte Kenntnis und (5) Kritische Kenntnis (Hayen, 1988, S. 81f.). Die erste Stufe liege schwerpunktmäßig in der Schule, daher wurde bereits im „Vortest“ eine Aufgabe (Items V8A bis V8C) auf diesem Niveau eingesetzt. Zu allen übrigen vier Stufen gibt es Aufgaben im „Nachtest“. Zur inhaltlichen Kenntnis zählt Hayen das Erkennen des Konvergenzverhaltens einfacher Folgen, das in den sieben Items N3A bis N3G getestet wird (siehe Abbildung 5.63), und das Benutzen anschaulicher Definitionen wie „In jeder Umgebung des Grenzwerts liegen unendlich viele Glieder der Folge, außerhalb nur endlich viele“, die in Aufgabe N4A und N4B abgefragt wird (siehe Abbildung 5.70). Unter der formalen Kenntnis fasst Hayen die Kenntnis und das Anwenden der formalen Definition der Konvergenz zusammen. Auch zu dieser Stufe sind Items im Test vorhanden, und zwar die Items N5 und N6 (siehe Abbildung 5.70). Zur integrierten Kenntnis gehören unter anderem das Untersuchen von komplexeren Folgen auf Konvergenz, die Kenntnis von Sätzen zur Konvergenz und von Zusammenhängen zwischen dem Konvergenzbegriff und anderen Begriffen. Sätze und Zusammenhänge sind durch die zehn Items N7A bis N7J abgedeckt (siehe Abbildung 5.71). Ein Item lässt sich in die Stufe der kritischen Kenntnis einordnen, und zwar das Item N9 (siehe Abbildung 5.66). Zu dieser Stufe zählt Hayen die Erkenntnis, dass manche Begriffe nur durch Verwendung des Grenzwertbegriffs präzise gefasst werden können. Hier sind zwar nicht alle Items des „Nachtests“ in die Stufen des Begriffsverständnisses des Konvergenzbegriffs nach Hayen eingeordnet, dennoch wird deutlich, dass zu jeder der vier Stufen, die auf Hochschulebene relevant sind, jeweils mindestens

ein Item vorhanden ist. Somit kann davon ausgegangen werden, dass der Test aus Items verschiedener Schwierigkeiten besteht.

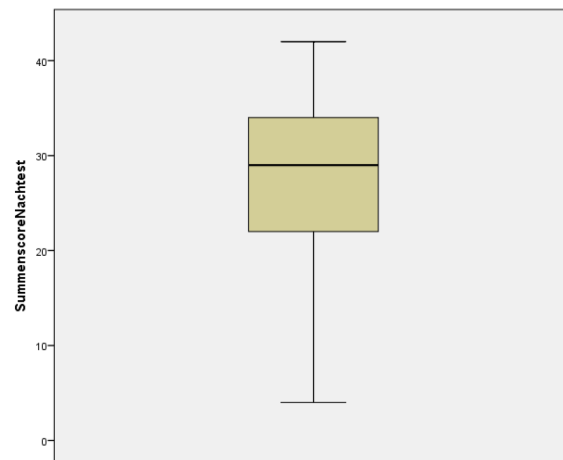


Abbildung 5.79: Boxplot der Verteilung des Summenscores im „Nachttest“

Außerdem wird betrachtet, wie die Summenscores der Studierenden verteilt sind. In Abbildung 5.79 ist dies als Boxplot dargestellt und in Abbildung 5.80 als Histogramm. Die zu erreichende Gesamtpunktzahl in diesem Test beträgt 47 Punkte. Das Minimum der erreichten Punktzahl beträgt 4 Punkte und das Maximum 42 Punkte. Die Hälfte der Studierenden hat zwischen 22 und 34 Punkten erreicht.

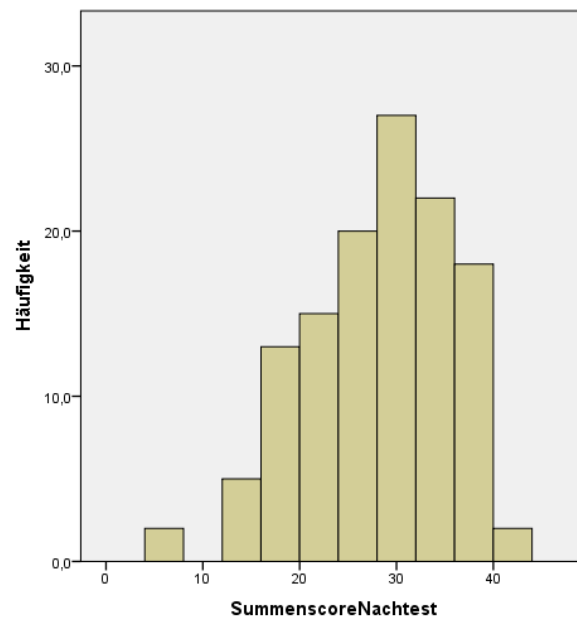


Abbildung 5.80: Histogramm der Summenscores im „Nachttest“

5.2.4 Skalierung des „Nachtests“

Wie zuvor bereits begründet wurde, wird der „Nachtest“ ebenfalls anhand der Item-Response-Theorie ausgewertet. Die Skalierung erfolgt in denselben vier Schritten wie zuvor die Skalierung des „Vortests“. Hier besteht der Gesamtdatensatz aus den Testwerten von 124 Probanden zu 33 Items.

Phase 1: Vergleich verschiedener Modelle

Da im „Nachtest“ ebenfalls Items mit polytomen Antwortformaten vorhanden sind, kommt das dichotome Rasch-Modell auch hier nicht in Frage. Zwei theoretisch plausible Modelle wären wieder das Partial-Credit-Modell und das Rating-Scale-Modell. Wie zuvor ist aufgrund der unterschiedlichen Anzahlen der Antwortkategorien davon auszugehen, dass das Partial-Credit-Modell die Daten besser beschreibt. Dies soll empirisch überprüft werden. Um dafür den Likelihoodquotiententest nutzen zu können, muss zunächst die Modellkonformität für das Partial-Credit-Modell, das ein Obermodell des Rating-Scale-Modells darstellt, nachgewiesen werden.

Nachweis der Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells

Es werden zunächst die Fitwerte des Partial-Credit-Modells berechnet. Die gewichteten MNSQ-Fit-Werte befinden sich in einem Bereich von 0,77 und 1,29 mit dem arithmetischen Mittel 0,9852 und der Standardabweichung 0,11614. Die Werte sind überwiegend gut, lediglich für drei Items liegt der gewichtete MNSQ-Fit-Wert außerhalb des wünschenswerten Bereichs von 0,80 bis 1,20. Auf diese Items müsste in der Phase der Itemselektion noch einmal eingegangen werden, sofern dieses Modell sich als das relativ beste erweisen sollte. Die korrigierten Trennschärfen haben als arithmetisches Mittel den Wert 0,3664 und als Standardabweichung 0,13133. Vier Items weisen hier mit einem kleineren Wert als 0,20 einen Misfit auf. Auch diese Items müssten bei der Itemselektion genauer betrachtet werden. Die Mehrzahl der Items hat aber akzeptable korrigierte Trennschärfen. Des Weiteren ist die EAP/PV-Reliabilität in Höhe von 0,868 als gut zu bezeichnen. Um außerdem die Stichprobenunabhängigkeit zu hinterfragen, wurde die Gesamtstichprobe auch hier auf verschiedene Arten in jeweils zwei Teilstichproben aufgeteilt. Da demografische Daten nicht von allen 124 Probanden vorliegen, konnten diese nicht zur Unterteilung genutzt werden. Zunächst habe ich die Daten der Gesamtstichprobe nach ihrem Code sortiert und dann halbiert. Für die beiden Teilgruppen habe ich jeweils einzeln die Itemschwierigkeiten geschätzt und in dem Scatterplot in Abbildung 5.81 dargestellt. Für ein Item (N1C) war nur für eine der beiden Teilstichproben eine Schätzung der Itemschwierigkeit möglich, weshalb sich die folgende Beurteilung lediglich auf die übrigen Items bezieht. Es ist deutlich erkennbar, dass sich die Datenpunkte der Items verhältnismäßig nah an der Hauptdiagonalen befinden, was für die Stichprobenunabhängigkeit spricht. Weiter habe ich die Gesamtstichprobe nach ihrem Summenscore in zwei etwa gleich große Teilstichproben unterteilt und auch für diese jeweils die Schätzung der Itemschwierigkeiten durchgeführt. Auch bei dieser Unterteilung war nicht für alle Items die Schwierigkeitsparameter-Schätzung für beide Teilstichproben möglich, die Items N1D, N1G, N3C und N3D sind ausgenommen. Im Scatterplot in Abbildung 5.82 ist zu sehen, dass bei einem Item (N3B) die Abweichung von der Hauptdiagonalen etwas größer ist, ansonsten ist die Abweichung überwiegend akzeptabel. Des Weiteren habe ich für eine zufällige Halbierung der Gesamtstichprobe die

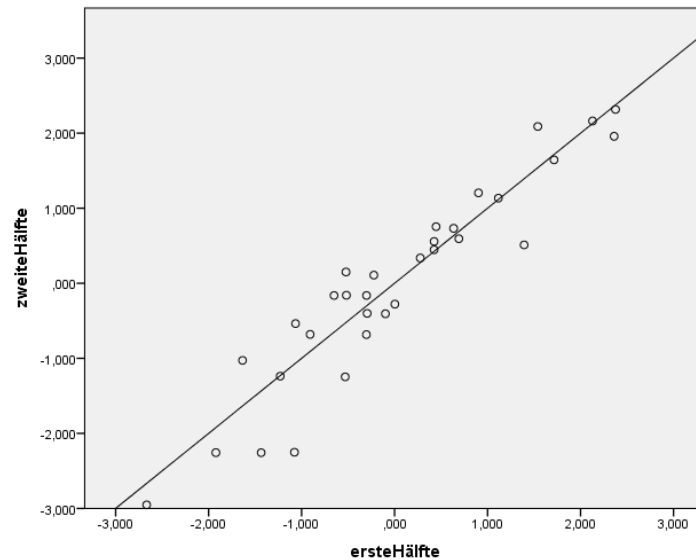


Abbildung 5.81: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Code

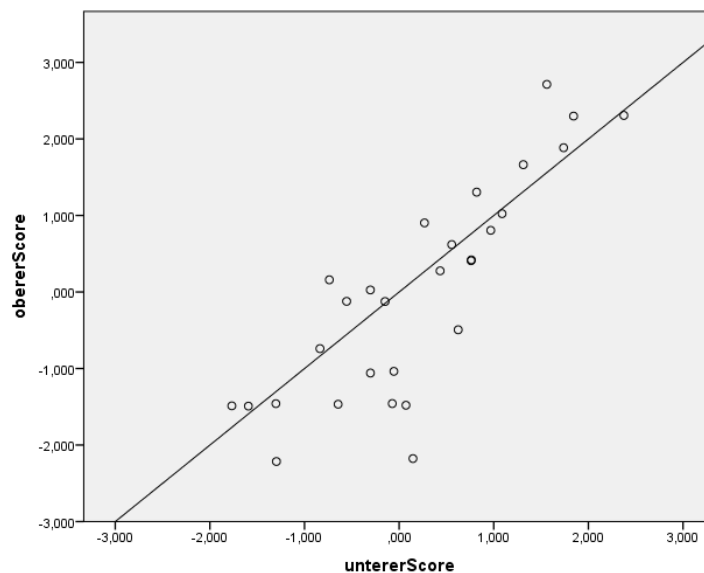


Abbildung 5.82: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Score

Schätzungen der Itemschwierigkeiten vorgenommen und in Abbildung 5.83 als Scatterplot dargestellt. In diesem Fall konnten für beide Teilstichproben die Parameter für alle Items geschätzt werden und die so erhaltenen Datenpunkte befinden sich nah an der Hauptdiagonalen. Es wird daher davon ausgegangen, dass die Stichprobenunabhängigkeit gegeben ist.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Da die Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells nun nachgewiesen wurde, kann der Likelihoodquotiententest verwendet werden, um die Güte dieses Modells mit der des eindimensionalen Rating-Scale-Modells zu vergleichen. Dazu werden

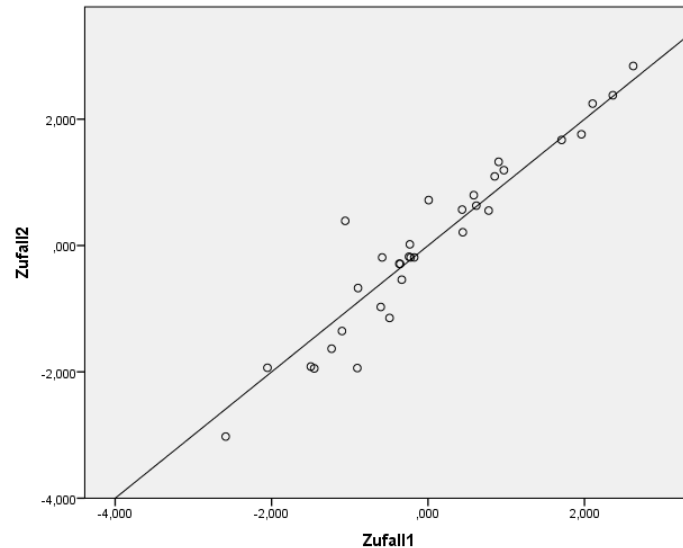


Abbildung 5.83: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten nach zufälliger Halbierung

die „Final Deviance“-Werte und die Anzahl der geschätzten Parameter beider Modelle benötigt. Diese finden sich in den in Abbildung 5.84 und 5.85 zu sehenden ConQuest-

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4525.76558
Total number of estimated parameters: 48

```

Abbildung 5.84: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Partial-Credit-Modell

Ausgaben. Als Prüfgröße ergibt sich hier $-2 \cdot \log(LR) = -2 \cdot \log(L_0) - (-2) \cdot \log(L_1) = 7419,01897 - 4525,76558 = 2893,25$ und diese ist größer als der kritische Wert der χ^2 -Verteilung mit $df = 48 - 36 = 12$ Freiheitsgraden für $p = 0,001$. Somit ist das eindimensionale Partial-Credit-Modell dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell vorzuziehen. Auch die informationstheoretischen Maße zeigen eine deutlich bessere Passung des Partial-Credit-Modells zu den vorliegenden Daten. So beträgt der AIC des Partial-Credit-Modells 4429,77 im Gegensatz zu 7347,02 beim Rating-Scale-Modell, der BIC liegt für ersteres Modell bei 4757,14 und für zweiteres bei 7592,55 und auch der CAIC ist mit 4805,14 für das Partial-Credit-Modell deutlich niedriger als beim Rating-Scale-Modell, bei dem dieser Wert 7628,55 beträgt. Zudem sind die Itemfitwerte beim Partial-Credit-

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      7419.01897
Total number of estimated parameters: 36

```

Abbildung 5.85: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Rating-Scale-Modell

Modell wesentlich besser als die des Rating-Scale-Modells. Die EAP/PV-Reliabilitäten hingegen weisen mit 0,868 und 0,865 kaum einen Unterschied auf. Insgesamt führt der Vergleich zu einer klar besseren Passung der Daten zum eindimensionalen Partial-Credit-Modell, was ja auch zu erwarten war.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit verschiedenen mehrdimensionalen Partial-Credit-Modellen

Nun soll untersucht werden, ob möglicherweise ein zweidimensionales Partial-Credit-Modell die vorliegenden Daten noch besser beschreibt als das eindimensionale. Als Vergleichskriterien können die informationstheoretischen Maße und die Reliabilitäten genutzt werden. Eine Möglichkeit, die Items auf zwei Dimensionen aufzuteilen, besteht aus der Dimension „tiefes Verständnis der Definition“, welche die Items N4A, N4B, N5, N6, N8A, N8B und N8C beinhaltet, und aus der Dimension „Anwendungen und Eigenschaften“, welche die restlichen Items umfasst. Aus der in Abbildung 5.86 zu sehenden Ausgabe von ConQuest werden wieder der Wert „Final Deviance“ und die Anzahl der geschätzten Parameter benötigt, um die informationstheoretischen Maße zu berechnen. Es ergeben sich $AIC = 4422,67$, $BIC = 4763,69$ und $CAIC = 4813,69$. Der erste Wert ist somit niedriger als der des eindimensionalen Partial-Credit-Modells (4429,77), die anderen beiden hingegen sind höher als die entsprechenden Werte des eindimensionalen Modells ($BIC = 4757,14$ und $CAIC = 4805,14$). Hier kann aufgrund der informationstheoretischen Maße also keine klare Entscheidung getroffen werden. Das zweidimensionale Modell beschreibt die Daten zwar etwas besser, jedoch benötigt es dafür auch mehr Parameter. Je nachdem wie stark die Parameteranzahl berücksichtigt wird, fällt die Entscheidung entweder für das eindimensionale oder das betrachtete zweidimensionale Modell aus. Die EAP/PV-Reliabilitäten sind mit 0,819 für die erste und 0,846 für die zweite Dimension zwar etwas niedriger als 0,868 beim eindimensionalen Modell, dennoch sind beide Werte gut. Es werden nun zunächst andere zweidimensionale Modelle getestet. Falls kein eindeutig besseres Modell gefunden wird, muss eine Entscheidung zwischen den beiden genannten Modellen auch unter Berücksichtigung der einzelnen Itemfitwerte getroffen werden. Eine weitere inhaltlich plausible Aufteilung der Items besteht aus der ersten Dimension, zu der


```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4522.67346
Total number of estimated parameters: 50

```

Abbildung 5.86: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „Definition vs. Anwendungen/Eigenschaften“

alle Items gehören, bei denen konkrete (Nicht-)Beispiele von (konvergenten) Folgen gegeben sind beziehungsweise konstruiert werden müssen (Items N1A-N1G, N3A-N3G und N8A-N8C), und der zweiten Dimension, bestehend aus den restlichen Items, in denen es abstrakter um die Definition oder Eigenschaften geht. Auch für dieses zweidimensionale Partial-Credit-Modell erfolgte eine Parameterschätzung. Die „Final Deviance“ und die

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4502.44690
Total number of estimated parameters: 50

```

Abbildung 5.87: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“

Anzahl der geschätzten Parameter können aus Abbildung 5.87 abgelesen werden. Dar- aus berechnen sich die informationstheoretischen Maße $AIC = 4402,45$, $BIC = 4743,46$ und $CAIC = 4793,46$. Hier fällt die Entscheidung nun klarer aus, denn diese drei Werte sind alle drei sowohl kleiner als die entsprechenden Werte des eindimensionalen Partial-Credit-Modells als auch kleiner als die des zuvor betrachteten zweidimensionalen Partial-Credit-Modells. Mit Werten von 0,845 für die erste Dimension und 0,801 für die zweite Dimension sind die EAP/PV-Reliabilitäten ebenfalls gut. Die Korrelation zwischen den

beiden Dimensionen beträgt 0,793. Somit ist das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ das beste unter den bisher betrachteten Modellen und eine Entscheidung zwischen dem eindimensionalen Partial-Credit-Modell und dem zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „Definition vs. Anwendungen/Eigenschaften“ ist nicht mehr nötig. Es könnte aber dennoch ein anderes Modell geben, das die Daten noch besser beschreibt. Ein weiteres zweidimensionales Modell soll getestet werden. Die Aufteilung der Items auf die beiden Dimensionen habe ich hier nach dem Kriterium vorgenommen, ob lediglich der Folgen- und Grenzwertbegriff vorkommen oder ob es um Zusammenhänge zu anderen Begriffen geht. So bilden die Items N1A-N1G, N3A-N3G, N4A, N4B, N5, N6 und N8A-N8C die erste Dimension und die übrigen Items die zweite. Der „Final Deviance“-Wert und

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4515.50417
Total number of estimated parameters: 50
```

Abbildung 5.88: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „ausschließlich Folgen und Konvergenz vs. Zusammenhänge zu anderen Begriffen“

die Anzahl der geschätzten Parameter für dieses Modell sind in Abbildung 5.88 zu sehen. Daraus ergeben sich als informationstheoretische Maße $AIC = 4415,50$, $BIC = 4756,52$ und $CAIC = 4806,52$. Diese sind allesamt größer als die entsprechenden Werte des zuvor betrachteten zweidimensionalen Modells. Auch ist die EAP/PV-Reliabilität der ersten Dimension in Höhe von 0,847 zwar gut, die der zweiten Dimension ist mit 0,767 jedoch unterhalb des gewünschten Wertes von 0,8.

Abschließende Bemerkungen

Als relativ bestes unter den betrachteten Modellen hat sich das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ erwiesen. Dies verdeutlicht noch einmal die Tabelle 5.65. Dabei steht PC für das eindimensionale Partial-Credit-Modell, RS für das eindimensionale Rating-Scale-Modell, „Def.“ für das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „Definition vs. Anwendungen/Eigenschaften“, „konkret“ für das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ und „nur Konv.“ für das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „ausschließlich Folgen und Konvergenz vs. Zusammenhänge zu anderen Begriffen“. Andere Unterteilungen der Items in zwei oder mehr Dimensionen erschienen mir inhaltlich nicht plausibel. Modelle mit mehr als einem Parameter pro Item und Kategorie kommen wie schon beim „Vortest“ nicht in Frage. Daher habe ich keine weiteren

	PC	RS	„Def.“	„konkret“	„nur Konv.“
Final Deviance	4525,76558	7419,01897	4522,67346	4502,44690	4515,50417
Parameter	48	36	50	50	50
AIC	4429,77	7347,02	4422,67	4402,45	4415,50
BIC	4757,14	7592,55	4763,69	4743,46	4756,52
CAIC	4805,14	7628,55	4813,69	4793,46	4806,52
EAP/PV	0,868	0,865			
1. Dim.			0,819	0,845	0,847
2. Dim.			0,846	0,801	0,767

Tabelle 5.65: Überblick über den Modellvergleich

Modelle betrachtet. Mit dem genannten Modell wird nun weiter gearbeitet.

Phase 2: Itemselektion

Nach der Auswahl des Modells soll im nächsten Schritt wieder versucht werden, die Modellgüte durch die Elimination einzelner Items noch zu verbessern. Dazu werden die Itemfitwerte betrachtet. Dazu zähle ich die gewichteten MNSQ-Fitwerte, die korrigierten Trennschärfen und die punktbiserialen Korrelationen bei den Items mit mehr als zwei Antwortkategorien. Ich gehe auf alle Items ein, die Misfits bei einem oder mehreren dieser Werte aufweisen. Bei Item N1B liegt zwar der gewichtete MNSQ-Fitwert für die Kategorie 0 mit 1,24 außerhalb des gewünschten Bereichs von 0,80 bis 1,20, doch da $T = 1,6$ kleiner als 1,96 ist, liegt der Wert noch innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls. Ähnlich verhält es sich mit Item N1G. Der gewichtete MNSQ-Fitwert ist mit 0,78 zwar etwas zu klein, liegt aber, da $T = -1,3$ betragsmäßig kleiner als 1,96 ist, ebenfalls noch innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls. Es liegt also kein Grund vor, diese Items aus dem Test zu eliminieren. Bei Item N2 (siehe Abbildung 5.89) liegt der gewichtete MNSQ-Fitwert mit 1,26

N2 2. Ist $0, \bar{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ☐ Ja, es gilt $0, \bar{9} = 1$.
- ☐ Nein, es gilt $0, \bar{9} < 1$.
- ☐ Weiß ich nicht.

Begründung:

Abbildung 5.89: Item N2

außerhalb des wünschenswerten Bereichs von 0,80 bis 1,20 und mit einem T-Wert in Höhe von 2,2 liegt er außerhalb des 95%-Konfidenzintervalls. Auch der gewichtete MNSQ-Wert

für die Kategorie 3 desselben Items ist mit 1,21 etwas zu hoch, doch diese Abweichung vom optimalen Wert 1 ist mit $T = 1,8$ statistisch nicht signifikant. Dieses Item ist jedoch das einzige, das bereits im „Vortest“ eingesetzt wurde und soll daher erhalten bleiben. Die inhaltlichen Gründe überwiegen hier gegenüber den Misfits. Ebenfalls Misfits bei den

8. Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen.

☐ Äquivalent ☐ Nicht äquivalent, Gegenbeispiel: _____

Abbildung 5.90: Item N8C

gewichteten MNSQ-Werten weist das Item N8C (siehe Abbildung 5.90) auf. Sein Wert ist mit 1,37 zu hoch und diese Abweichung ist mit $T = 2,6$ statistisch signifikant. Weitere Misfits sind bei demselben Items sowohl für die Kategorie 0 (gewichteter MNSQ-Fitwert 1,45 ist mit $T = 4,0$ statistisch signifikant größer als 1) als auch für die Kategorie 2 (gewichteter MNSQ-Wert 1,23 ist mit $T = 1,8$ größer als 1,20, jedoch nicht statistisch signifikant größer) vorhanden. Dieses Item weist auch noch einen weiteren Misfit auf. Die

item:32 (N8C)										
Cases for this item		124	Item-Rest Cor.		0.26	Item-Total Cor.		0.37		
Item Threshold(s):		1.94	2.45	4.55	Weighted MNSQ		1.37			
Item Delta(s):		2.80	1.69	4.49						
Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1	PV1Avg:2	PV1 SD:2	
0	0.00	74	59.68	-0.14	-1.55 (.124)	1.33	1.10	0.99	0.85	
1	1.00	19	15.32	-0.17	-1.89 (.062)	1.18	0.89	0.89	0.82	
2	2.00	27	21.77	0.20	2.26 (.026)	2.04	0.80	1.35	0.81	
3	3.00	4	3.23	0.26	2.97 (.004)	3.34	0.80	2.69	1.04	

Abbildung 5.91: Itemanalyse von ConQuest zum Item N8C

punktbiserialen Korrelationen, die in Abbildung 5.91 abgelesen werden können, steigen von der Kategorie 0 bis zur Kategorie 3 nicht sukzessive an. Da dieses Item jedoch das einzige ist, das eine mögliche Verwechslung von Grenzwerten und Häufungspunkten abfragt, die von anderen Forscherinnen und Forschern bei manchen Studierenden beobachtet wurde, soll auch dieses Item trotz der Misfits aus inhaltlichen Gründen nicht verworfen werden. Bei den korrigierten Trennschärfen weisen vier Items Werte auf, die kleiner als 0,2 sind. Zum einen gehört dazu das Item N1C, das in Abbildung 5.92 zu sehen ist. Da

1. Handelt es sich bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Folge? Falls nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \forall n \geq 1$ ☐ Ja ☐ Nein, weil _____

Abbildung 5.92: Item N1C

rekursiven Folgen in der Vorlesung keine besondere Beachtung geschenkt wurde, halte ich es für legitim, dieses Item zu verworfen. Des Weiteren handelt es sich um das Item

3. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, geben Sie ihren Grenzwert an.

$$a_n = \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

☐ Ja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ☐ Nein

Abbildung 5.93: Item N3A

N3A (siehe Abbildung 5.93), dessen korrigierte Trennschärfe 0,10 beträgt. Erklärt werden könnte dieser Misfit möglicherweise dadurch, dass dieses Item sehr leicht ist und daher wenig Informationen über die Fähigkeiten der Testpersonen liefert. Das Item wird aufgrund des Misfits aus dem Test eliminiert. Zum anderen sind das die Items N7G und N7J (siehe

7. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für reelle Folgen richtig sind.

- ☐ Jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert.
- ☐ Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.

Abbildung 5.94: Items N7G und N7J (von oben nach unten)

Abbildung 5.94) mit korrigierten Trennschärfen von 0,17 beziehungsweise 0,10. Bei Item N7G lässt sich eine mögliche Erklärung für die geringe korrigierte Trennschärfe finden. In der Vorlesung wurden nicht nur Häufungspunkte behandelt, sondern auch uneigentliche Häufungspunkte. Wenn ein Proband die uneigentlichen Häufungspunkte mit zu den Häufungspunkten zählt, dann wäre diese Aussage, die eigentlich falsch ist, plötzlich richtig. Daher sollte auch dieses Item entfernt werden. Bei Item N7J ist es schließlich so, dass ich keine Information verliere, wenn ich dieses Item weglasse, da die Items N7D („Jede konvergente Folge ist monoton“) und N7F („Jede konvergente Folge ist beschränkt“) zusammen auch diese Information enthalten. Hier könnte sogar davon ausgegangen werden, dass die Prämisse der Unabhängigkeit der Items verletzt wäre. Das Item wird also aus dem Test eliminiert.

Für die verbleibenden Items wird nun erneut die Parameterschätzung durchgeführt. Die EAP/PV-Reliabilität beträgt nun 0,837 für die erste und 0,801 für die zweite Dimension und ist somit in beiden Fällen gut. Die beiden Items N2 und N8C weisen ähnliche Misfits auf wie zuvor, sollen jedoch wie zuvor begründet weiterhin Bestandteil des Tests bleiben. Außerdem ist die korrigierte Trennschärfe des Items N7D mit 0,16 etwas zu klein. Dieses Item soll jedoch erhalten bleiben, da der Zusammenhang zwischen Konvergenz und Monotonie wichtig ist und unbedingt abgefragt werden sollte. Auch wurde in manchen Publikationen zu Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff berichtet, dass manche Lernende fälschlicherweise der Meinung seien, konvergente Folgen seien immer monoton. Weitere Misfits liegen nicht vor. Somit ist die Phase der Itemselektion nun abgeschlossen.

Phase 3: Überprüfung des Modells

Da der Datensatz durch das Entfernen einzelner Items verändert wurde, ist es theoretisch möglich, dass das zuvor auf dem Gesamtdatensatz relativ beste Modell die Daten nun nicht mehr am besten von den betrachteten Modellen beschreibt. Um dies zu untersuchen, werden nun erneut alle in Phase 1 betrachteten Modelle in Bezug auf ihre Güte bei der Beschreibung des reduzierten Datensatzes verglichen. Das Vorgehen weicht

leicht von dem in Phase 1 ab, da die Vermutung nahe liegt, dass das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „abstrakt vs. konkret“ die beste Modellgüte aufweist. Daher wird mit diesem Modell begonnen und es wird nacheinander mit anderen Modellen verglichen.

Nachweis der Modellkonformität des ausgewählten zweidimensionalen Partial-Credit-Modells

Auf die einzelnen Itemfitwerte bin ich in Phase 2 bereits eingegangen. Die EAP/PV-

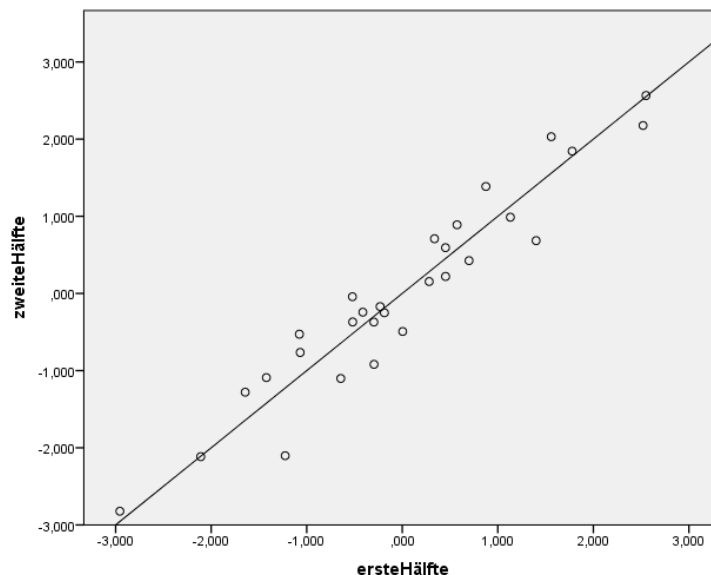


Abbildung 5.95: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Code

Reliabilität beträgt 0,837 für die erste Dimension und 0,801 für die zweite Dimension und ist somit in beiden Fällen gut. Nun soll wieder die Stichprobenunabhängigkeit untersucht werden. Dazu wurde die Gesamtstichprobe nach denselben Kriterien unterteilt wie schon in Phase 1.

In dem Scatterplot in Abbildung 5.95 sind die Datenpunkte jeweils durch die geschätzten Itemschwierigkeiten einmal basierend auf dem Datensatz bestehend aus der ersten Hälfte der Probanden bei Sortierung nach Code und basierend auf dem Datensatz, den die zweite Hälfte der Probanden liefert, entstanden. Die Abweichungen von der Hauptdiagonalen sind verhältnismäßig gering, was die These der Modellkonformität stützt.

Bei der Halbierung der Gesamtstichprobe anhand des Summenscores war für die Items N1D, N1G, N3C und N3D lediglich bei einer der beiden Teilstichproben eine Schätzung der Itemschwierigkeiten möglich, daher gibt es für diese Items keinen Datenpunkt im Scatterplot in Abbildung 5.96. Die meisten der übrigen Items sind auch hier nah an der Hauptdiagonalen, was bedeutet, dass sich ähnliche Itemschwierigkeitsparameter ergeben, egal auf Basis welcher der beiden Teilstichproben die Schätzung durchgeführt wird. Lediglich bei Item N3B ist die Abweichung von der Hauptdiagonalen und somit der Unterschied in den Schwierigkeitsparametern etwas größer.

Zuletzt wurde die Gesamtstichprobe wieder zufällig halbiert und für beide Hälften jeweils eine Parameterschätzung vorgenommen. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.97 als Scatterplot dargestellt. Die Abweichungen von der Hauptdiagonalen sind für alle Items relativ gering. Daher wird nun davon ausgegangen, dass die Stichprobenunabhängigkeit und so-

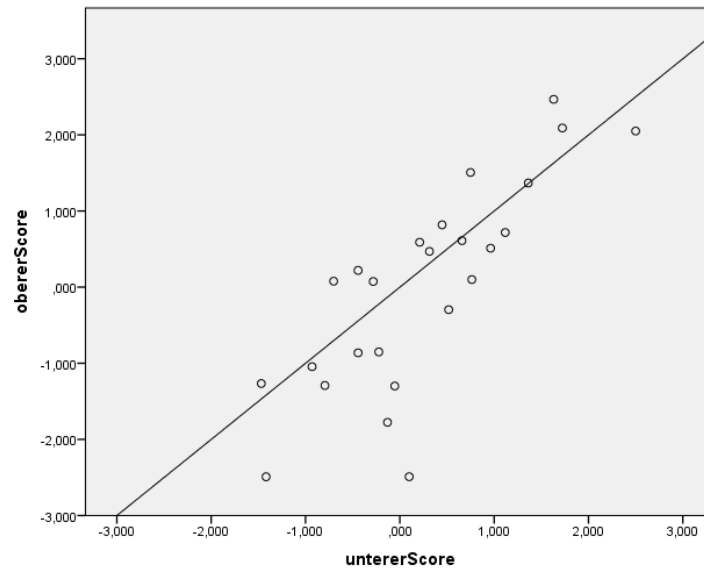


Abbildung 5.96: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Score

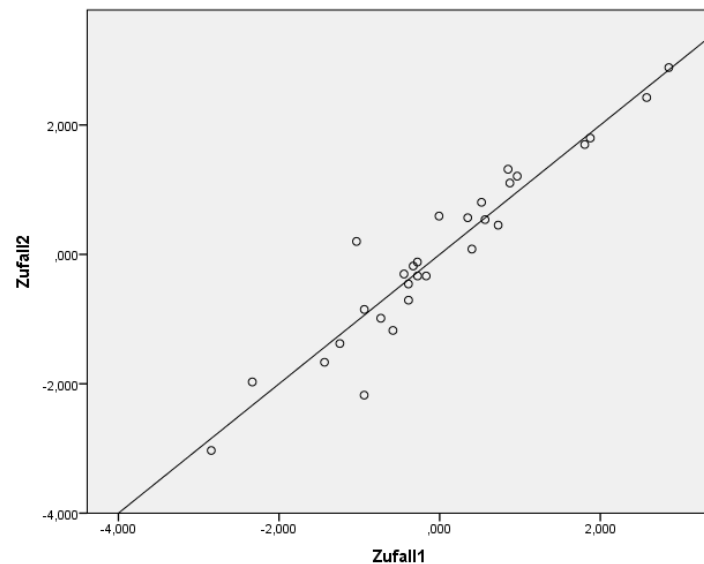


Abbildung 5.97: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten nach zufälliger Halbierung

mit auch die Modellkonformität des zweidimensionalen Partial-Credit-Modells „konkret vs. abstrakt“ in Bezug auf den reduzierten Datensatz gegeben ist.

Vergleich des ausgewählten zweidimensionalen Partial-Credit-Modells mit zweidimensionalem Rating-Scale-Modell

Bei Beibehaltung der beiden Dimensionen „konkret vs. abstrakt“ wäre ein anderes Modell das zweidimensionale Rating-Scale-Modell. Da das ausgewählte zweidimensionale Partial-Credit-Modell ein echtes Obermodell davon ist, für das die Modellkonformität bereits überprüft wurde, können nicht nur die informationstheoretischen Maße und die Reliabilitäten für den Modellvergleich genutzt werden, sondern auch der Likelihoodquotiententest. Die benötigten ConQuest-Ausgaben sind in Abbildung 5.98 für das Partial-

SUMMARY OF THE ESTIMATION

=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
 Assumed population distribution was: Gaussian
 Constraint was: DEFAULT
 The Data File: NachtestSpeed.dat
 The format: id 1-6 responses 7,8,10-14,16-31,33,34,36-39
 No case weights
 The regression model: Not applicable
 Grouping Variables:
 The item model: item+item*step
 Slopes are fixed
 Sample size: 124
 Final Deviance: 4111.51912
 Total number of estimated parameters: 46

Abbildung 5.98: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ basierend auf reduziertem Datensatz

SUMMARY OF THE ESTIMATION

=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
 Assumed population distribution was: Gaussian
 Constraint was: DEFAULT
 The Data File: NachtestSpeed.dat
 The format: id 1-6 responses 7,8,10-14,16-31,33,34,36-39
 No case weights
 The regression model: Not applicable
 Grouping Variables:
 The item model: item+step
 Slopes are fixed
 Sample size: 124
 Final Deviance: 6217.82303
 Total number of estimated parameters: 34

Abbildung 5.99: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Rating-Scale-Modell „konkret vs. abstrakt“ basierend auf reduziertem Datensatz

Credit- und in Abbildung 5.99 für das Rating-Scale-Modell zu sehen. Die Prüfgröße berechnet sich wieder als Differenz der beiden „Final Deviance“-Werte, $-2 \cdot \log(LR) = -2 \cdot \log(L_0) - (-2) \cdot \log(L_1) = 6217,82303 - 4111,51912 = 2106,30391$ und dieser Wert ist größer als der kritische Wert der χ^2 -Verteilung mit $df = 46 - 34 = 12$ Freiheitsgraden und $p = 0,001$. Somit passt das zweidimensionale Partial-Credit-Modell laut Likelihoodquotiententest signifikant besser zu den Daten als das zweidimensionale Rating-Scale-Modell. Die informationstheoretischen Maße führen zu derselben Entscheidung. Für das Partial-Credit-Modell betragen diese $AIC = 4203,52$; $BIC = 4333,25$ und $CAIC = 4379,25$; für das Rating-Scale-Modell hingegen $AIC = 6285,82$; $BIC = 6381,71$ und $CAIC = 6415,71$.

Vergleich des ausgewählten zweidimensionalen Partial-Credit-Modells mit anderen zweidimensionalen Partial-Credit-Modellen

Nun soll das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ mit den anderen beiden zweidimensionalen Partial-Credit-Modellen aus Phase 1 verglichen werden. Zunächst betrachte ich das zweidimensionale Modell „Definition vs. Anwendungen/Eigenschaften“. Bei der Parameterschätzung basierend auf dem reduzierten Daten-

```
SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012=====

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7,8,10-14,16-31,33,34,36-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4131.46634
Total number of estimated parameters: 46
```

Abbildung 5.100: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „Definition vs. Anwendungen/Eigenschaften“ basierend auf reduziertem Datensatz

satz liefert ConQuest die Ausgabe in Abbildung 5.100. Aus dem Wert „Final Deviance“ und der Anzahl der geschätzten Parameter lassen sich wieder die drei informationstheoretischen Maße berechnen und mit denen des anderen Modells vergleichen. Hier ergeben sich $AIC = 4223,47$; $BIC = 4353,20$ und $CAIC = 4399,20$. Da diese Werte jeweils größer sind als die des zweidimensionalen Partial-Credit-Modells „konkret vs. abstrakt“ ($AIC = 4203,52$; $BIC = 4333,25$ und $CAIC = 4379,25$), ist das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „Definitionen vs. Anwendungen/Eigenschaften“ auf dem reduzierten Datensatz ebenfalls schlechter geeignet. Als weiteres zweidimensionales Partial-Credit-Modell soll nun erneut das Modell „ausschließlich Folgen und Konvergenz vs. Zusammenhänge zu anderen Begriffen“ getestet werden. Dazu werden auch hierfür die entsprechenden Berechnungen auf Basis des reduzierten Datensatzes durchgeführt. Die benötigten Werte sind aus der ConQuest-Ausgabe in Abbildung 5.101 abzulesen. Die resultierenden informationstheoretischen Maße sind mit $AIC = 4222,53$; $BIC = 4352,26$ und $CAIC = 4398,26$ auch in diesem Fall jeweils größer als die des Modells „konkret vs. abstrakt“. Somit bleibt das ausgewählte Modell das beste aus den betrachteten zweidimensionalen Partial-Credit-Modellen.

Vergleich des ausgewählten zweidimensionalen Partial-Credit-Modells mit dem eindimensionalen Partial-Credit-Modell

Das ausgewählte Modell wurde nun gegen alle weiteren theoretisch plausiblen zweidimensionalen Modelle getestet. Es soll nun noch überprüft werden, ob es auch weiterhin die bessere Modellgüte aufweist als das eindimensionale Partial-Credit-Modell. Dazu wurde

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012===

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 225 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7,8,10-14,16-31,33,34,36-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4130.52597
Total number of estimated parameters: 46

```

Abbildung 5.101: Ausgabe von ConQuest zum zweidimensionalen Partial-Credit-Modell „ausschließlich Folgen und Konvergenz vs. Zusammenhänge zu anderen Begriffen“ basierend auf reduziertem Datensatz

wieder eine Parameterschätzung durchgeführt. Als informationstheoretische Maße ergeben

```

SUMMARY OF THE ESTIMATION
=====Build: Dec 21 2012===

Estimation method was: Gauss-Hermite Quadrature with 15 nodes
Assumed population distribution was: Gaussian
Constraint was: DEFAULT
The Data File: NachtestSpeed.dat
The format: id 1-6 responses 7,8,10-14,16-31,33,34,36-39
No case weights
The regression model: Not applicable
Grouping Variables:
The item model: item+item*step
Slopes are fixed
Sample size: 124
Final Deviance:      4136.03520
Total number of estimated parameters: 44

```

Abbildung 5.102: Ausgabe von ConQuest zum eindimensionalen Partial-Credit-Modell basierend auf dem reduzierten Datensatz

sich aus den in Abbildung 5.102 zu sehenden Werten der „Final Deviance“ und der Anzahl der geschätzten Parameter $AIC = 4224,04$; $BIC = 4348,13$ und $CAIC = 4392,13$. Da die Maße jeweils größer sind als die des ausgewählten zweidimensionalen Modells, ist das zweidimensionale Modell gegenüber dem eindimensionalen Modell zu bevorzugen. Es hat sich also bestätigt, dass das zweidimensionale Partial-Credit-Modell „konkret vs. abstrakt“ auch für den reduzierten Datensatz, der durch das Eliminieren einzelner Items entstanden ist, das relativ beste unter den betrachteten Modellen ist.

Phase 4: Schätzung der Personenfähigkeiten

Abschließend können nun die Personenfähigkeiten mit der WLE-Methode geschätzt werden. Dadurch wurden sowohl die Itemschwierigkeits- als auch die Personenfähigkeitsparameter geschätzt und die Skalierung des Nachtests ist somit abgeschlossen.

5.3 Ergebnisse der quantitativen Teilstudie

Dieser Abschnitt wird von den folgenden Forschungsfragen geleitet, die in Kapitel 3 formuliert wurden:

1. Welche Vorstellungen zum Konvergenzbegriff weisen die Studierenden nach der Behandlung des Themas auf und über welche Kenntnisse zur Folgenkonvergenz verfügen sie?
2. Wie groß ist der Zusammenhang zwischen den Vorstellungen und Kenntnissen der Studierenden zum Konvergenzbegriff nach der Behandlung des Themas in der Vorlesung und dem Vorwissen zu Folgenkonvergenz und verwandten Themengebieten vor der Behandlung in der Universität?

Auf diese Forschungsfragen wird nun nacheinander eingegangen.

5.3.1 Ergebnisse in Bezug auf die Kenntnisse und Vorstellungen der Studierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen

In Tabelle 5.66 sind alle Items des „Nachtests“, welche nicht in der Phase der Itemselektion aus dem Test eliminiert wurden, nach ihren Schwierigkeitsparameteren angeordnet. In Abbildung 5.103 ist dies grafisch dargestellt, wobei alle Items der Dimension „konkret“ links und alle Items der Dimension „abstrakt“ rechts abgebildet sind. Es ist zu sehen, dass es keine größeren Lücken auf der Schwierigkeitsskala gibt. Das ist als ein Qualitätsmerkmal des Tests zu bewerten. Außerdem fällt auf, dass sich im mittleren Schwierigkeitsbereich etwa von -1 bis $1,1$ verhältnismäßig viele Items befinden, während es weniger Items mit niedrigen oder hohen Schwierigkeiten gibt. Dies kann angemessen sein, wenn sich in diesem mittleren Bereich auch die Personenfähigkeiten vieler Probanden befinden. Die Verteilung dieser Personenfähigkeiten ist in Abbildung 5.104 für die Dimension „konkret“ als Histogramm und in Abbildung 5.105 als Boxplot dargestellt. In den Abbildungen 5.106 und 5.107 sind die entsprechenden Darstellungen der Verteilungen der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ zu finden. Es lässt sich erkennen, dass die mittleren Personenfähigkeiten in beiden Dimensionen höher sind als das arithmetische Mittel der Itemschwierigkeiten, das 0 beträgt. Mit etwas schwierigeren Items hätte der Test daher noch bessere Informationen über die Fähigkeiten der Studierenden geliefert. Dennoch lassen sich einige Erkenntnisse zu der Forschungsfrage, welche Vorstellungen zum Konvergenzbegriff die Studierenden nach der Behandlung des Themas aufweisen und über welche Kenntnisse zur Folgenkonvergenz sie verfügen, gewinnen.

Bei beiden Dimensionen des „Nachtests“ lassen sich mehrere Schwierigkeitsstufen iden-

Item	Schwierigkeit
N8C	2,680
N8A	2,365
N9	1,823
N8B	1,633
N2	1,069
N1E	0,998
N3G	0,895
N1F	0,597
N7B	0,592
N5	0,573
N1B	0,388
N4B	0,334
N6	0,227
N7D	-0,131
N7F	-0,183
N4A	-0,196
N7H	-0,237
N3B	-0,317
N7A	-0,350
N3F	-0,438
N7I	-0,468
N7E	-0,806
N1G	-0,900
N3E	-0,906
N7C	-1,335
N3D	-1,342
N1A	-1,565
N1D	-2,143
N3C	-2,885

Tabelle 5.66: Überblick über die Schwierigkeitsparameter der Items des „Nachtests“

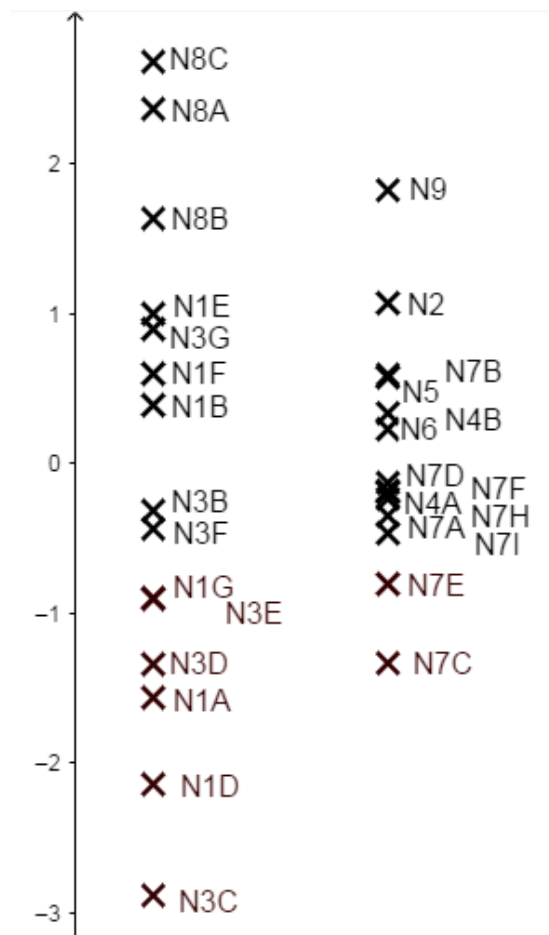


Abbildung 5.103: Graphische Darstellung der „Nachtest“-Items anhand ihrer Schwierigkeitsparameter

tifizieren. Dazu wurden Items, die ähnliche Schwierigkeitsparameter aufweisen, zu einer Stufe zusammengefasst. Für die Wahl der Grenzen zwischen den einzelnen Stufen gab es jeweils inhaltliche Gründe. Für die Dimension „konkret“ haben sich drei Stufen ergeben, die in Tabelle 5.67 dargestellt sind. Studierende, deren Personenfähigkeit mindestens der oberen Grenze der Stufe entspricht, können die Items in diesem Bereich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% korrekt lösen. Da eine Lösungswahrscheinlichkeit von 50% zu niedrig ist, um davon sprechen zu können, dass Studierende den jeweiligen Anforderungen hinreichend sicher gerecht werden, wurde zu jeder Stufe mittels einer linearen Transformation die 65%-Schwelle bestimmt. Diese Schwelle wurde auch in einigen anderen Studien verwendet (vgl. Moosbrugger und Kelava (2008, S. 243)). Personen, deren Fähigkeitsparameter den entsprechenden Schwellenwert erreicht, können die Items mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 65% lösen. Die Anteile der Studierenden, auf die

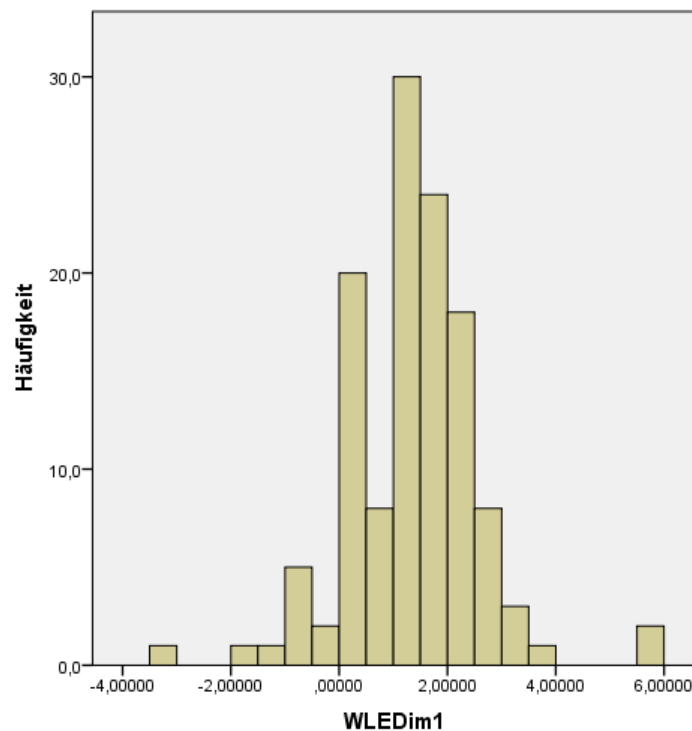


Abbildung 5.104: Histogramm der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

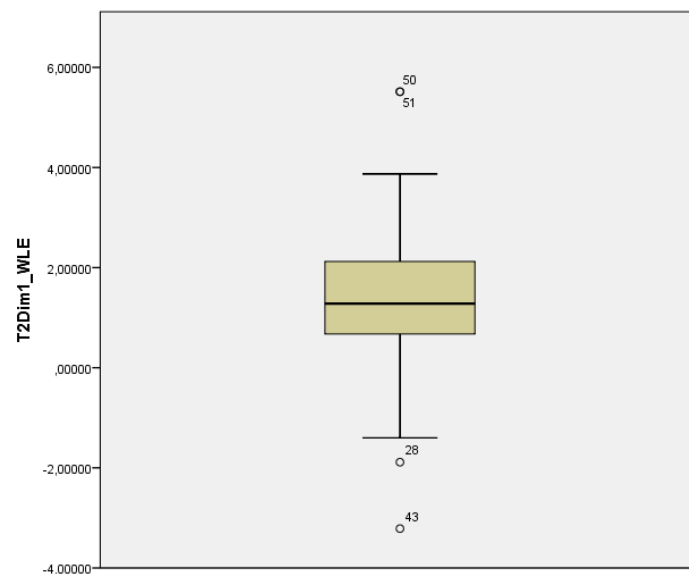


Abbildung 5.105: Boxplot der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

das bei den einzelnen Stufen zutrifft, sind ebenfalls in der Tabelle zu finden. Für Stufe I beträgt der Anteil der Studierenden oberhalb der 65%-Schwelle 81%. Diese Personen sind somit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 65% dazu in der Lage, Folgen in verschiedenen Darstellungen zu erkennen und in einfachen Fällen die Konvergenz oder Divergenz und gegebenenfalls den Grenzwert zu bestimmen. Dabei handelt es

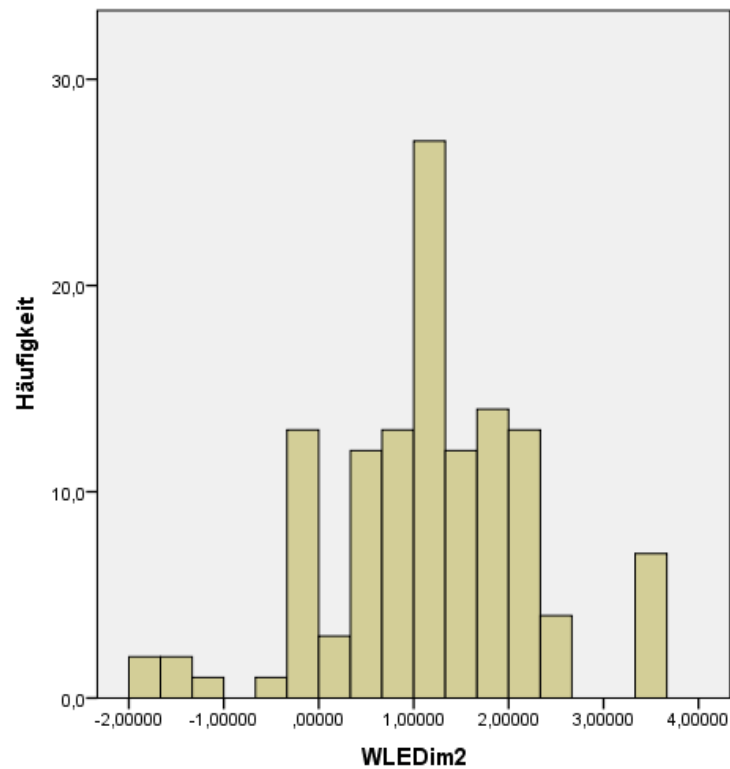


Abbildung 5.106: Histogramm der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“

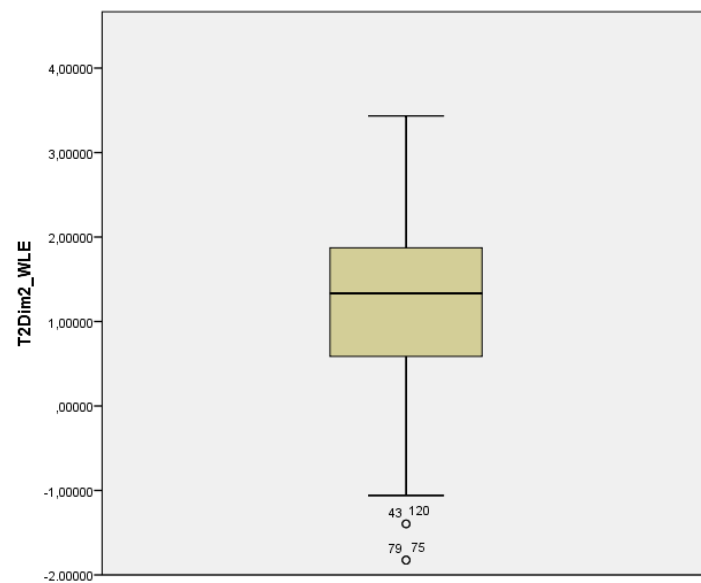


Abbildung 5.107: Boxplot der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“

sich um solche Aspekte des Themenbereichs Folgen und Konvergenz, die in der Vorlesung behandelt wurden. Bei Stufe II sind es 45% der Studierenden, deren Fähigkeit über der 65%-Schwelle liegt. Nicht-Beispiele von Folgen wurden in der Vorlesung gar nicht thematisiert.

Stufe	Item-schwierigkeiten	Beschreibung	65%-Schwelle	Anteil Studierender
I	unter $-0,3$	Die Studierenden können verschiedene Beispiele von Folgen als solche erkennen und sie sind in der Lage, bei einfachen Folgen zu bestimmen, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert.	0,319	81%
II	$-0,3$ bis 1	Die Studierenden erkennen Nicht-Beispiele von Folgen und können die Konvergenz und den Grenzwert von Folgen von Partialsummen einfacher, konvergenter Reihen bestimmen.	1,619	45%
III	1 bis 2,7	Die Studierenden sind in der Lage, ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff zu erkennen und dies durch ein Gegenbeispiel zu begründen.	3,319	2%

Tabelle 5.67: Stufen der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

tisiert und die Konvergenz von Reihen folgte erst nach dem Einsatz des Testinstruments. Ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 65% zu erkennen und dies durch Gegenbeispiele zu begründen, können lediglich 2% der Studierenden. Auch dabei handelt es sich um Aspekte des Themas Folgenkonvergenz, die in der Vorlesung nicht explizit thematisiert wurden. Da sich die Entscheidung, ob eine Verbalisierung geeignet ist, jedoch aus der formalen Definition ableiten lässt, und die Studierenden sich in der Vorlesung und den Übungen bereits mit Folgen beschäftigt haben, die als Gegenbeispiele zu derartigen Verbalisierungen dienen können, ist der Anteil von 2% der Studierenden oberhalb der 65%-Schwelle dennoch als sehr niedrig zu bewerten.

In Tabelle 5.68 sind die beiden Schwierigkeitsstufen, die sich für die Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ identifiziert wurden. Auch hier sind die angegebenen Anteile der Studierenden derart zu deuten, dass dieser Anteil die Items der entsprechenden Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 65% lösen kann. Auch in dieser Dimension ist bei den Anforderungen, bei denen Inhalte der Vorlesung reproduziert werden, der Anteil der Studierenden oberhalb der 65%-Schwelle relativ hoch. Dies trifft auf die Bewertung einfacher Aussagen, die direkt aus der Grenzwertdefinition folgen, wie auch auf Beziehungen zwischen dem Konvergenzbegriff und Monotonie, Beschränktheit und Häufungspunkte zu, wo dieser Anteil 78% beträgt. Die Anforderungen der Stufe II gehen hingegen über die Reproduktion von Vorlesungsinhalten hinaus. Auf die Zusammenhänge zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen trifft das allerdings nicht zu, diese wurden explizit in der Vorlesung behandelt. 52% der Studierenden

Stufe	Item-schwierigkeiten	Beschreibung	65%-Schwelle	Anteil Studierender
I	unter $-0,1$	Die Studierenden wissen, dass sich in jeder beliebigen Umgebung um den Grenzwert einer Folge unendlich viele ihrer Folgenglieder befinden und sie kennen die Beziehungen zwischen der Konvergenz von Folgen und den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Häufungspunkten	0,519	78%
II	$-0,1$ bis $0,6$	Die Studierenden kennen die Beziehung zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen und sie weisen ein vertieftes Verständnis der formalen Definition auf.	1,219	52%

Tabelle 5.68: Stufen der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“

erfüllen die Anforderungen der Stufe II mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 65%.

Nach diesen allgemeineren Ergebnissen soll die oben genannte Forschungsfrage nun in mehrere Leitfragen spezifiziert werden. Zum einen soll untersucht werden, ob die Studierenden über ein angemessenes *Concept Image* zum Folgenbegriff verfügen. Dazu würde gehören, dass nicht nur Folgen unter ihr *Concept Image* fallen, die explizit durch einen einzigen Term angegeben sind, der vom Index der Folge abhängt. Stattdessen sollte es auch Folgen umfassen, deren definierender Term nicht vom Folgenindex abhängt, sowie abschnittsweise definierte Folgen und rekursiv definierte Folgen. Außerdem sollten die Studierenden auch in der Lage sein, Nicht-Beispiele von Folgen als solche zu erkennen.

Zum anderen soll der Frage nachgegangen werden, ob die Studienanfängerinnen und -anfänger bei einfachen Folgen korrekt entscheiden können, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. In Abschnitt 2.4 wurden verschiedene eingeschränkte Vorstellungen zum Konvergenzbegriff vorgestellt, die in anderen Studien nachgewiesen wurden. Daher soll insbesondere untersucht werden, ob die Studierenden ebenfalls über derartige eingeschränkte Vorstellungen verfügen.

Zu einem adäquaten *Concept Image* zur Folgenkonvergenz gehört auch, ungeeignete Verbalisierungen zu erkennen. Es stellt sich die Frage, ob die Studierenden dazu in der Lage sind. Außerdem soll untersucht werden, ob sie dies durch die Konstruktion von Gegenbeispielen begründen können.

Neben einem breiten *Concept Image* ist ein Ziel des Workshops, und vermutlich auch der Vorlesung, dass ein vertieftes Verständnis der formalen Definition aufgebaut wird. Daher soll untersucht werden, inwiefern dieses Ziel erreicht wurde.

Des Weiteren soll der Frage nachgegangen werden, über welche Kenntnisse zu den Beziehungen zwischen der Eigenschaft Konvergenz und anderen Eigenschaften wie Monotonie,

Beschränktheit, Cauchy-Folgen und Häufungspunkten die Studierenden verfügen. Auch dieses Wissen gehört zu einem umfassenden Begriffsverständnis.

Nach der Untersuchung der genannten Fragen soll darauf eingegangen werden, ob es Hinweise auf sich widersprechende Anteile innerhalb des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der *Concept Definition* einer Person gibt. Dazu werden Ergebnisse der vorherigen Leitfragen miteinander in Verbindung gesetzt.

Insgesamt sollen also zu den folgenden sechs Leitfragen Ergebnisse präsentiert werden:

1. a) Verfügen die Studierenden über ein angemessenes *Concept Image* zum Folgenbegriff?
1. b) Sind die Studierenden in der Lage, bei einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert?
1. c) Können die Studierenden ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff erkennen und dies durch die Konstruktion von Gegenbeispielen begründen?
1. d) Wie tief ist das Verständnis der formalen Definition der Folgenkonvergenz, das die Studierenden aufgebaut haben?
1. e) Über welche Kenntnisse zu Zusammenhängen zwischen dem Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen verfügen die Studierenden?
1. f) Inwiefern sind Konflikte zwischen verschiedenen Anteilen des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* von Studierenden zum Konvergenzbegriff vorhanden?

1. a) Verfügen die Studierenden über ein angemessenes *Concept Image* zum Folgenbegriff?

In verschiedenen Studien zum Folgenbegriff wurden teilweise eingeschränkte Vorstellungen aufgedeckt. Einige Lernende erkennen Folgen lediglich dann als solche, wenn sie durch einen einzigen Term definiert sind, der von dem Folgenindex abhängt. Vor allem abschnittsweise definierte Folgen und konstante Folgen fallen nicht unter eine solche eingeschränkte Vorstellung (vgl. Abschnitt 2.3.3). Die Skalierung des „Nachtests“ hat für alle Items, bei denen Beispiele von Folgen erkannt werden sollten, relativ niedrige Schwierigkeitsparameter zwischen $-2,143$ und $-0,900$ ergeben. Das *Concept Image* der meisten Studierenden aus dieser Untersuchung umfasst also nicht nur Folgen, die durch einen einzigen Term definiert sind, der vom Folgenindex abhängt. Auch abschnittsweise definierte und konstante Folgen fallen unter ihr persönliches Bild von Folgen. Ein Studierender mit einer mittleren Personenfähigkeit erkennt derartige Folgen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% bis 97%.

Bei den Nicht-Beispielen von Folgen sind die Schwierigkeiten mit $0,388$ bis $0,998$ deutlich höher. Diesbezüglich könnte das *Concept Image* vieler Studierender also Schwächen aufweisen. Eine andere Möglichkeit ist jedoch, dass die vorgegebenen Zuordnungen lediglich nicht genau genug betrachtet wurden und die Studierenden nicht bemerkt haben, dass diese nicht eindeutig sind oder nicht jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zuordnen. In diesem Fall könnten die Studierenden dennoch über ein angemessenes *Concept Image* zum

Folgenbegriff verfügen. Anders ist dies bei einer endlichen Aufzählung von Zahlen. In der Vorlesung wurden Folgen als Abbildungen der natürlichen Zahlen definiert, so dass endliche Aufzählungen von Zahlen nicht darunter fallen. Ein durchschnittlicher Studierender erkennt in diesem Fall lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 57%, dass es sich um keine Folge handelt und kann dies begründen. In Bezug auf diesen Aspekt scheint das *Concept Image* einiger Studierender somit nicht dem definierten Begriff zu entsprechen. Dass die Nicht-Beispiele alle höhere Schwierigkeitsparameter haben als die Beispiele, könnte auch daran liegen, dass in der Vorlesung keine Nicht-Beispiele von Folgen behandelt wurden.

1. b) Sind die Studierenden in der Lage, bei einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert?

Den Studierenden wurden mehrere Folgen vorgelegt, bei denen ohne aufwendige Untersuchungen erkannt werden konnte, ob diese konvergieren und falls ja, gegen welchen Grenzwert. Der Fokus dieser Fragestellung liegt also nicht darauf, ob die Probanden in der Lage sind, die Konvergenz oder Divergenz einer Folge nachzuweisen. Stattdessen soll herausgefunden werden, was für Typen konvergenter Folgen unter ihr *Concept Image* fallen und ebenso, welche Typen divergenter Folgen für sie nicht darunter fallen. In der Analysis-1-Vorlesung lag der Schwerpunkt hingegen eher auf den Nachweisen der Konvergenz oder Divergenz. Aus der Literatur sind verschiedene typische eingeschränkte Vorstellungen zum Konvergenzbegriff bekannt. Dazu gehört, die Folgenglieder konvergenter Folgen würden ihrem Grenzwert immer näher kommen, nur monotone, konvergente Folgen seien konvergent, der Grenzwert dürfe von der Folge nicht angenommen werden und der Grenzwert sei eine obere oder untere Schranke (vgl. Abschnitt 2.4). Diese eingeschränkten Vorstellungen zeigen sich in dieser Studie nur in geringem Ausmaß. Die Items, in denen die Konvergenz und der Grenzwert von einer schließlich konstanten, einer konstanten und einer alternierenden, konvergenten Folge beziehungsweise die Divergenz einer bestimmt divergenten Folge und einer Folge mit zwei Häufungspunkten erkannt werden sollte, haben eher niedrige Schwierigkeiten zwischen $-2,885$ und $-0,317$. Ein Studierender, dessen Personenfähigkeit dem arithmetischen Mittel der Personenfähigkeiten in dieser Dimension entspricht, löst diese Items mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 84% und 99%. Dies spricht dafür, dass die Studierenden größtenteils in der Lage sind, bei einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. Auf bestimmt divergente Folgen trifft dies jedoch nicht vollständig zu. Zwar hat das entsprechende Item mit $-2,885$ einen sehr niedrigen Schwierigkeitsparameter, doch bei der Kodierung dieses Items wurden nicht nur die Antworten, in denen angekreuzt wurde, dass die Folge nicht konvergiert, als korrekt bewertet. Stattdessen wurde es auch als richtig angesehen, wenn ein Studierender geantwortet hat, die Folge konvergiere gegen ∞ . Dies war bei 38% der Studierenden der Fall. Wäre dies als falsch bewertet worden, so hätte die Skalierung also einen deutlich höheren Schwierigkeitsparameter ergeben. Hat jemand diese Antwort gegeben, so hat er das Verhalten der Folge im Unendlichen korrekt erfasst. Allerdings umfasst sein *Concept Image* zu konvergenten Folgen in diesem Fall auch uneigentlich konvergente Folgen. In dieser Hinsicht weicht es also vom üblichen Begriffsumfang ab. Ein Grund dafür könnte die Verwendung des Begriffs „uneigentliche Konvergenz“ in der Vorlesung sein. Diese Bezeichnung könnte von Studierenden derart interpretiert werden, dass es sich um einen Spezialfall von Konvergenz handelt. Möglicherweise wäre dieses Phänomen nicht oder

nicht in diesem Umfang aufgetreten, wenn in der Vorlesung stattdessen die Bezeichnung „bestimmte Divergenz“ verwendet worden wäre.

Eine deutlich höhere Schwierigkeit von 0,895 hat ein Item, in dem es sich um eine Folge von Partialsummen einer konvergenten Reihe handelt. Das Thema Reihen war zum Testzeitpunkt noch nicht in der Vorlesung behandelt worden. Das erklärt die höhere Schwierigkeit. Die Tatsache, dass bei dieser Folge bei jedem Folgenglied im Vergleich zum vorherigen Folgenglied ein echt positiver Wert hinzuaddiert wird und die Folge dennoch nicht unbeschränkt ist, widerspricht vermutlich der Intuition vieler Studierender. Ein Studierender mit durchschnittlicher Personenfähigkeit löst dieses Item mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.

1. c) Können die Studierenden ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff erkennen und dies durch die Konstruktion von Gegenbeispielen begründen?

Weder geeignete noch ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff wurden in der Vorlesung explizit behandelt. Dennoch könnte das *Concept Image* von Studierenden solche Verbalisierungen beinhalten. Handelt es sich um ungeeignete Verbalisierungen, so kann dies Hinweise auf eingeschränkte Vorstellungen zur Konvergenz von Folgen liefern. Die Items, in denen drei Verbalisierungen bewertet werden sollten, die ungeeignet sind, haben mit 1,633 bis 2,680 alle sehr hohe Itemschwierigkeiten. Hier werden also Schwächen im *Concept Image* vieler Studierender deutlich. Sie sind der Meinung, eine konvergente Folge müsse ihrem Grenzwert mit wachsendem Index immer näher kommen, zusätzlich dürfe der Grenzwert nicht erreicht werden. Auch halten viele die Forderung, dass sich in jeder beliebigen Umgebung um einen Wert unendlich viele Folgenglieder befinden, für eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge gegen diesen Wert. Falls ein Studierender mit einer solchen Verbalisierung wie mit einer Definition arbeitet, sie also seine persönliche *Concept Definition* bildet, so würde dies bei vielen Folgen zu falschen Entscheidungen bezüglich ihrer Konvergenz oder Divergenz führen. So würden, je nach Verbalisierung, beispielsweise konstante und schließlich konstante Folgen nicht als konvergent angesehen oder Folgen mit mehreren Häufungspunkten und unbeschränkte Folgen mit einem Häufungspunkt für konvergente Folgen gehalten. Es ist jedoch auch möglich, dass eine derartige Verbalisierung zwar Teil des *Concept Images* eines Studierenden ist, dass dieser jedoch gleichzeitig über eine angemessene *Concept Definition* verfügt. Ihm ist eventuell gar nicht bewusst, dass ein Konflikt zwischen seiner *Concept Definition* und einer solchen Verbalisierung besteht. Auf mögliche widersprüchliche Anteile innerhalb des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der *Concept Definition* einer Person wird unter der Leitfrage 1. f) eingegangen. An dieser Stelle kann als Ergebnis festgehalten werden, dass bei vielen Probanden ungeeignete Verbalisierungen Teil des *Concept Images* zu konvergenten Folgen sind. Ein durchschnittlicher Studierender kann die entsprechenden Items lediglich mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 20% und 42% korrekt bearbeiten.

1. d) Wie tief ist das Verständnis der formalen Definition der Folgenkonvergenz, das die Studierenden aufgebaut haben?

Ein vertieftes Verständnis der Definition wurde im „Nachtest“ durch einige Items geprüft, in denen verschiedene Aussagen bewertet werden sollten. Diese beziehen sich auf die Anzahl der Folgenglieder inner- und außerhalb einer beliebigen Umgebung um den Grenzwert, um die Konvergenz und den Grenzwert einer Folge, die durch eine Veränderung endlich vieler Folgenglieder aus einer konvergenten Folge entsteht und um die Tatsache, dass mit jedem N , das im Sinne der Definition zu einem festen ϵ geeignet ist, auch jede größere natürliche Zahl geeignet ist. Nicht alle dieser Aussagen wurden in der Vorlesung explizit behandelt, sie lassen sich jedoch relativ direkt aus der formalen Definition ableiten. Es geht dabei ausschließlich um die Bewertung der Aussagen, nicht um den Nachweis. Für die meisten dieser Items hat die Skalierung mit Werten zwischen 0,227 und 0,573 mittlere Schwierigkeiten ergeben. Ein Studierender, dessen Personenfähigkeit dem arithmetischen Mittel der Personenfähigkeiten in dieser Dimension des „Nachtests“ entspricht, bewertet die Aussagen mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 65% und 72% korrekt. Das schwierigste unter diesen Items war dasjenige, bei dem erkannt werden sollte, dass eine Folge, die durch Abänderung von endlich vielen Folgengliedern aus einer konvergenten Folge entsteht, gegen denselben Grenzwert konvergiert. Diese Schwierigkeit lässt sich dadurch erklären, dass diese Aussage in der Vorlesung und den Übungen weder explizit noch implizit thematisiert wurde. Eine niedrigere Schwierigkeit als die übrigen drei weist das Item auf, in dem gefragt war, wie viele Folgenglieder sich innerhalb eines beliebigen Intervalls um den Grenzwert einer konvergenten Folge befinden. Diese Itemschwierigkeit beträgt $-0,196$ und ein Studierender mit einer durchschnittlichen Fähigkeit beantwortet dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% richtig. Das durch dieses Item abgefragte Wissen ist bei vielen Studierenden vermutlich ohnehin im *Concept Image* zur Folgenkonvergenz enthalten, so dass sie dieses lediglich abrufen mussten. Insgesamt zeigt sich in Bezug auf ein vertieftes Verständnis der formalen Definition, dass die Studierenden keine großen Defizite aufweisen. Je direkter eine Aussage aus der formalen Definition folgt und je expliziter sie in der Vorlesung oder den Übungen thematisiert wurde, desto niedriger ist die Schwierigkeit des entsprechenden Items tendenziell.

1. e) Über welche Kenntnisse zu Zusammenhängen zwischen dem Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen verfügen die Studierenden?

In der Analysis-1-Vorlesung wurden die meisten Beziehungen zwischen den Begriffen der Konvergenz einer Folge und der Monotonie, Beschränktheit, Cauchy-Folgen und Häufungspunkten nicht nur formuliert, sondern auch bewiesen. Daher waren in diesem Bereich niedrige Schwierigkeitsparameter zu erwarten. Auf die meisten Items trifft dies mit Schwierigkeiten zwischen $-1,335$ und $-0,131$ auch zu. Ein durchschnittlicher Studierender löst diese mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 79% und 93%. Ein Großteil der Studierenden kennt somit die meisten Zusammenhänge zwischen der Konvergenz von Folgen und verwandten Begriffen. Innerhalb dieser Items hat dasjenige die höchste Schwierigkeit, bei dem erkannt werden muss, dass die Aussage, jede konvergente Folge sei monoton, nicht gültig ist. Von der eingeschränkten Vorstellung von monotonen, konvergenten Folgen als Prototypen konvergenter Folgen wurde bereits in anderen Studien berichtet (vgl. Abschnitt 2.4). Diese eingeschränkte Vorstellung zeigt sich somit auch bei

den hier untersuchten Studierenden, allerdings in geringem Ausmaß. Die Schwierigkeit dieses Items ist zwar etwas höher als die der meisten übrigen Items in diesem Bereich, mit $-0,131$ befindet sie sich dennoch im unteren Bereich.

Eine Ausnahme bildet lediglich die Aussage, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Dieses weist mit $0,592$ einen deutlich höheren Schwierigkeitsparameter auf. Die Aussage wurde in der Vorlesung als Proposition formuliert und auch bewiesen. Bezüglich der Beziehung zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen sind bisher keine Fehlvorstellungen bekannt, die dies erklären würden. Die hohe Schwierigkeit dieses Items ist sehr verwunderlich und es konnte keine Erklärung dafür gefunden werden.

1. f) Inwiefern sind Konflikte zwischen verschiedenen Anteilen des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* von Studierenden zum Konvergenzbegriff vorhanden?

Bei den vorherigen Leitfragen wurden verschiedene Ergebnisse zu einzelnen Anteilen des *Concept Images* oder zum Teil auch der persönlichen *Concept Definition* der Studierenden formuliert. Nun sollen Ergebnisse zu verschiedenen Fragen verglichen werden. Dabei soll untersucht werden, ob es Hinweise auf verschiedene, sich widersprechende Anteile innerhalb des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* einer Person gibt.

Dies ist zum einen in Bezug auf konstante Folgen der Fall. Einerseits gab es ein Item, in dem die Studierenden eine konstante Folge als Folge erkennen sollten (Item N1G). In einem anderen Item (N3D) wurden die Studierenden gefragt, ob eine konstante Folge konvergiert und falls ja, gegen welchen Grenzwert. Es wäre plausibel, wenn lediglich Studierende, die eine konstante Folge überhaupt als Folge erkennen, die Konvergenz und den Grenzwert dieser korrekt bestimmen können. Das würde bedeuten, dass die Schwierigkeit des Items N3D höher sein müsste als die des Items N1G. Das ist jedoch nicht der Fall. Mit einem Parameter von $-0,900$ ist die Schwierigkeit, eine konstante Folge als Folge aufzufassen, höher, als die Konvergenz und den Grenzwert einer solchen Folge zu bestimmen, wofür die Schwierigkeit $-1,342$ beträgt. Es stellt sich die Frage, warum manche Studierende die Konvergenz einer konstanten Folge erkannt haben und dennoch geantwortet haben, durch einen anderen konstanten Term werde keine Folge definiert. Es wäre möglich, dass die Studierenden das eine Item basierend auf ihrem *Concept Image* zum Folgen- und das andere auf Basis des *Concept Images* zum Konvergenzbegriff beantwortet haben. In dem Fall wäre ihnen selbst kein Konflikt bewusst.

Zum anderen gibt es mehrere Widersprüche zwischen Bewertungen von Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff einerseits und Antworten in Bezug auf die Konvergenz und die Grenzwerte von konkreten Folgen andererseits.

So hat das Item, in dem die Verbalisierung, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen, als ungeeignet bewertet werden sollte (Item N8A), eine hohe Schwierigkeit von $2,365$. Viele Studierende haben diese Verbalisierung also fälschlicherweise als geeignet angesehen. Konstante oder schließlich konstante Folgen würden, je nach Auffassung der ungenauen Formulierung, nicht unbedingt unter diese Verbalisierung fallen. Die Verbalisierung,

eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert immer näher kommen, ohne ihn zu erreichen, trifft definitiv nicht auf sie zu. Das Erkennen der Konvergenz und des Grenzwerts sowohl einer schließlich konstanten Folge (Item N3B) als auch einer konstanten Folge (Item N3D) ist den Studierenden hingegen deutlich leichter gefallen. Die entsprechenden Schwierigkeitsparameter betragen $-0,317$ und $-1,342$. Es hat somit einige Studierende gegeben, welche einerseits eine oder beide genannten Verbalisierungen als geeignet bewertet haben, und andererseits die Konvergenz der schließlich konstanten und/oder konstanten Folge korrekt erkannt haben.

Ähnlich verhält es sich mit dem Bewerten der Verbalisierung, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn sich in jeder Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder befinden (Item N8C). Mit einem Wert von $2,680$ hat dieses Item eine hohe Schwierigkeit, was bedeutet, dass viele Studierende die Verbalisierung für geeignet gehalten haben. Diese trifft jedoch auch auf Häufungspunkte zu. Demnach wäre es konsistent, wenn diese Studierenden geantwortet hätten, dass eine Folge mit zwei Häufungspunkten (Item N3E) konvergiert und zwei Grenzwerte besitzt. Dieses Item hat jedoch einen deutlich niedrigeren Schwierigkeitsparameter in Höhe von $-0,906$. Somit gibt es einige Studierende, die einerseits die genannte Verbalisierung für geeignet halten, und die andererseits wussten, dass eine Folge mit zwei Häufungspunkten nicht konvergent ist. Eine mögliche Erklärung wäre, dass den Studierenden nicht bewusst war, dass aus der Forderung, dass sich innerhalb jeder Umgebung um den Grenzwert unendlich viele Folgenglieder befinden, nicht folgt, dass außerhalb der Umgebung nur endlich viele Folgenglieder liegen. Eine andere Erklärung wäre, dass bei der Beantwortung der beiden Items verschiedene Anteile des *Concept Images* aktiviert werden oder eins von beiden auf Basis des *Concept Images* und das andere auf Basis der persönlichen *Concept Definition* beantwortet wurde. In diesen Fällen wäre den Studierenden selbst kein Konflikt bewusst.

Bei zwei weiteren Items lassen sich ebenfalls widersprüchliche Antworten finden. Bei dem Item, bei dem erkannt werden sollte, dass nicht jede konvergente Folge monoton ist (Item N7D), beträgt der Schwierigkeitsparameter $-0,131$. Bei einem Studierenden, der geantwortet hat, jede konvergente Folge sei monoton, wäre zu erwarten, dass er bei Folgen, die nicht monoton sind, der Meinung ist, sie seien nicht konvergent. Ein Item, in dem nach der Konvergenz und dem Grenzwert einer alternierenden, konvergenten Folge gefragt ist (Item N3F) weist jedoch mit $-0,438$ eine etwas niedrigere Schwierigkeit auf. Es gibt also Personen, die zwar die Konvergenz der alternierenden Folge erkannt haben, jedoch andererseits geantwortet haben, jede konvergente Folge sei monoton. Auch in diesem Fall ist eine mögliche Erklärung, dass bei der Bearbeitung verschiedene Anteile des *Concept Images* oder des *Concept Images* und der *Concept Definition* aktiviert wurden.

Es konnten somit mehrere Konflikte zwischen verschiedenen Anteilen des *Concept Images* oder zwischen dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* von Studierenden aufgezeigt werden. Den Studierenden müssen diese Konflikte nicht bewusst sein. Tall und Vinner (1981) bezeichnen solche Konflikte als „potential conflict factors“. Die Autoren halten es für möglich, dass derartige widersprüchlichen Anteile niemals zu einem tatsächlichen kognitiven Konflikt führen. Ein solcher Konflikt entstehe nur, wenn

diese Anteile gleichzeitig aktiviert werden.

Insgesamt hat die Analyse des „Nachtests“ ergeben, dass die Studierenden solche Aspekte des Konvergenzbegriffs, die explizit in der Vorlesung behandelt wurden, größtenteils reproduzieren können. Bei Items, die über eine Reproduktion der Vorlesungsinhalte hinausgehen, zeigen sich bei vielen Studierenden Schwächen. In Bezug auf den Folgenbegriff erkennen die meisten Studierenden zwar Folgen in verschiedenen Darstellungen als Folgen, doch beim Erkennen von Nicht-Beispielen haben viele Probleme. Bei einfachen Folgen sind die Studierenden außerdem größtenteils in der Lage, zu entscheiden, ob diese konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. Eine Ausnahme bilden Folgen von Partialsummen konvergenter Reihen, die noch nicht in der Vorlesung behandelt wurden. Außerdem fällt für einige Studierende uneigentliche Konvergenz mit unter ihr Bild von Konvergenz. Die größten Probleme sind beim Erkennen und widerlegen ungeeigneter Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff aufgetreten. Auch hat sich gezeigt, dass es bei manchen Studierenden verschiedene Anteile des *Concept Images* gibt, die sich widersprechen. Dies hat sich vor allem dadurch gezeigt, dass manche Personen einerseits eine Verbalisierung für geeignet gehalten haben und andererseits Folgen, auf die diese Verbalisierung nicht zutrifft, als konvergent erkannt haben. In Bezug auf ein vertieftes Verständnis der formalen Definition haben sich ebenfalls bei einigen Studierenden Schwächen gezeigt. Die Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen hingegen kennen die meisten der Studierenden, wobei die Beziehung zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen eine Ausnahme bildet.

5.3.2 Ergebnisse in Bezug auf den Zusammenhang zwischen dem Vorwissen und den Kenntnissen und Vorstellungen nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen

Zunächst werden einige Ergebnisse des „Vortests“ präsentiert, bevor auf den Zusammenhang zwischen „Vortest“ und „Nachtest“ eingegangen wird.

Ergebnisse in Bezug auf das Vorwissen der Studierenden

In Abschnitt 5.2.1 wurden bislang lediglich deskriptive Ergebnisse auf Itemebene präsentiert. Hier sollen nun die Items verglichen und globalere Ergebnisse formuliert werden.

Bei der Skalierung des „Vortests“ wurden für alle Items, die nicht in der Phase der Itemselektion aus dem Test entfernt wurden, Schwierigkeitsparameter geschätzt. In Tabelle 5.69 und Abbildung 5.108 sind diese – der Schwierigkeit nach angeordnet – dargestellt.

Die niedrigste Schwierigkeit hat sich für die Items N9A bis N9D ergeben, bei denen die Dezimalzahlen 0,25; 0,05; 0,3 und $0,\bar{3}$ jeweils als Bruch dargestellt werden sollten. Dass diese Items von den Studierenden am besten gelöst wurden, ist nicht verwunderlich. Allerdings waren die Reihenfolge der Items untereinander und die Abstände zwischen ihren Schwierigkeiten teilweise nicht derart zu erwarten. Das Item, in dem 0,25 als Bruch dargestellt werden sollte, ist den Studierenden am leichtesten gefallen, was nicht verwunderlich ist. Zu den nächsten beiden Items, in denen $0,\bar{3}$ und 0,05 jeweils in Brüche umgewandelt werden sollten, besteht bereits ein deutlicher Unterschied bezüglich der Schwierigkeit. Möglicher-

Item	Schwierigkeit
V2C	2,051
V8C	1,852
V3	1,680
V6	1,245
V8B	1,044
V9E	0,926
V7A	0,899
V2B	0,839
V1	0,838
V4	0,732
V8A	0,664
V5B	0,250
V7D	-0,075
V7C	-0,809
V2A	-0,894
V7E	-1,064
V9C	-1,529
V9B	-2,259
V9D	-2,462
V9A	-3,929

Tabelle 5.69: Überblick über die Schwierigkeitsparameter der Items aus dem „Vortest“

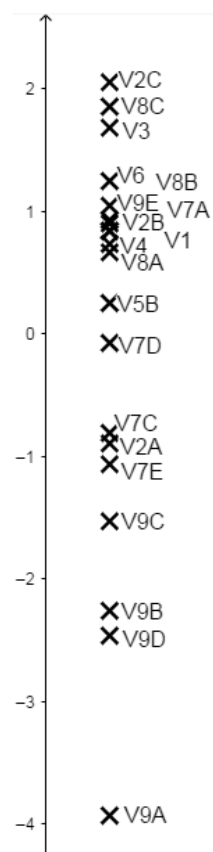


Abbildung 5.108: Graphische Darstellung der „Vortest“-Items anhand ihrer Schwierigkeitsparameter

weise hängt dies damit zusammen, dass der Bruch $\frac{1}{4}$ sehr häufig im Alltag vorkommt, so dass dieses Item beantwortet werden könnte, selbst wenn jemand im Allgemeinen nicht weiß, wie Dezimalbrüche in Brüche umgewandelt werden. Das Item, in dem 0,3 als Bruch dargestellt werden sollte, hat eine noch höhere Schwierigkeit als alle drei bisher genannten Items. Das war nicht zu erwarten und lässt sich ebenfalls höchstens dadurch erklären, dass die Dezimalzahl 0,3 und der Bruch $\frac{1}{3}$ im Alltag nicht so häufig vorkommen.

Als nächstes folgen drei Items, in denen erkannt werden sollte, ob durch vorgegebene Vorschriften jeweils eine Abbildung definiert ist, und ein Item, in dem eine einfache Betragsgleichung gelöst werden sollte. Dass das Lösen der Gleichung $|3x| = 4$ den Studierenden wenig Schwierigkeiten bereitet, war zu erwarten. Bei den Items, bei denen jeweils zu entscheiden war, ob es sich um eine Abbildung handelt, ist es wieder die Reihenfolge der Items untereinander, die teilweise etwas verwundert. Die niedrigste Schwierigkeit liegt hier bei dem Item vor, bei dem erkannt werden sollte, dass durch $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist. Dass diese abschnittsweise definierte Funktion einen niedrigeren Schwierigkeitsparameter aufweist als die durch einen einzigen Term $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ definierte Funktion, verwundert, da andere Studien ergeben haben, dass abschnittsweise definierte Funktionen bei manchen Lernenden zu Schwierigkeiten führen,

da sie nicht als eine Funktion aufgefasst werden, sondern als mehrere Funktionen (vgl. Abschnitt 2.3). Die etwas höhere Schwierigkeit des Items, in dem erkannt werden musste, dass durch $f(x) = \frac{1}{x-4}$ keine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist, hängt vermutlich damit zusammen, dass die Definitionslücke von manchen Studierenden einfach übersehen wurde, und damit, dass die Antwort begründet werden sollte.

Mit nächsthöheren Schwierigkeitsparametern folgen drei Items, bei denen jeweils in irgendeiner Form infinitäres Denken nötig ist. In einem Fall sollte erkannt werden, dass das Komplement einer unendlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen ebenfalls eine unendliche Menge sein kann. Hier ist eine statische Sichtweise von Unendlich nötig, so dass es nicht verwundert, dass dieses Item eine höhere Schwierigkeit aufweist als die bisher genannten Items. Wiederum etwas schwieriger war das Item, in dem möglichst genau ausgedrückt werden sollte, was mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ passiert, wenn n beliebig groß wird, und mit ähnlichem Schwierigkeitsparameter das Item, in dem eine reelle Zahl $x \geq 0$ bestimmt werden sollte, so dass für jede natürliche Zahl n die Ungleichung $x < \frac{1}{n}$ gilt, und es war eine Begründung der Antwort gefordert. Insgesamt sind Items, in denen verbale Beschreibungen oder Begründungen formuliert werden sollten, tendenziell schlechter gelöst worden, als Items in denen lediglich eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden sollte oder eine Lösung angegeben werden sollte.

Eine noch höhere Schwierigkeit haben jedoch zwei Items aufgewiesen, in denen der Bruchterm $\frac{3x+1}{2x+5} - \frac{3}{2}$ zusammengefasst beziehungsweise die Betragsgleichung $|2x - 3| = 2$ gelöst werden sollte. Hier sind zahlreiche Fehler aufgetreten. Dass das Item, in dem erkannt werden sollte, dass durch $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 100 \\ -2x & x > 100 \end{cases}$ keine Abbildung auf der Menge der reellen Zahlen definiert ist, schlechter gelöst wurde, lässt sich wiederum dadurch erklären, dass die Definitionslücke schnell übersehen werden kann und zusätzlich eine Begründung gefordert war.

Im nächsthöheren Schwierigkeitsbereich befinden sich die beiden Items, in denen $0,\overline{9}$ thematisiert wurde, und ein Item, in dem erläutert werden sollte, was mit $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$ passiert, wenn n beliebig groß wird. $0,\overline{9}$ als Bruch darzustellen ist den Studierenden etwas leichter gefallen, als zu entscheiden, ob $0,\overline{9} = 1$ gilt und dies zu begründen. Das könnte zum einen daran liegen, dass bei dem Item zur Darstellung als Bruch zuvor $0,\overline{3}$ ebenfalls als Bruch dargestellt werden sollte, wodurch manchen Studierenden möglicherweise bewusst geworden ist, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt. Zum anderen könnte auch die geforderte Begründung bei dem anderen der beiden Items zu einer höheren Schwierigkeit geführt haben.

Die drei Items mit den höchsten Schwierigkeiten sind die Beschreibung des Verhaltens der Folge $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ und das Lösen von zwei Bruchungleichungen. Bei der Folge lässt sich das dadurch erklären, dass es schwierig sein kann, zu akzeptieren, dass eine Folge, bei der immer noch etwas positives zum vorherigen Folgenglied hinzuaddiert wird, dennoch einen Grenzwert hat. Bei den beiden Ungleichungen war zwar davon auszugehen, dass manche Studierenden beispielsweise ignorieren, dass bei der Division durch eine negative Zahl das Ungleichungssymbol umgekehrt wird, doch dass sie derart schlecht gelöst werden, erstaunt doch. Die Ungleichung $\frac{2-x}{3} + 5 > \frac{x}{2}$ bildete das schwierigste Item des gesamten Tests.

Bei der Betrachtung der Verteilung aller Items auf der Schwierigkeitsskala fällt zum einen auf, dass das Item V9A einen sehr viel niedrigeren Schwierigkeitsparameter aufweist als alle anderen Items. Es gibt kein Testitem, dessen Schwierigkeit sich zwischen $-3,929$

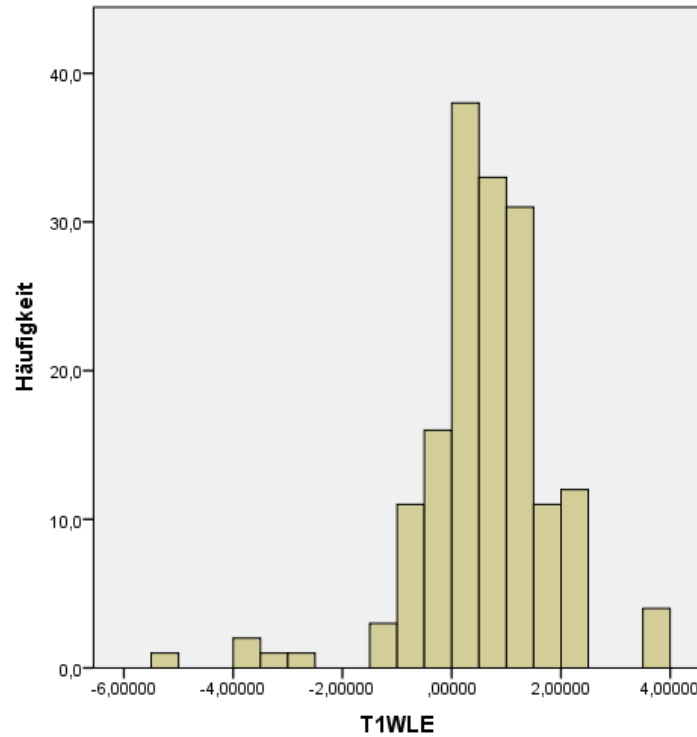


Abbildung 5.109: Histogramm der Personenfähigkeiten im „Vortest“

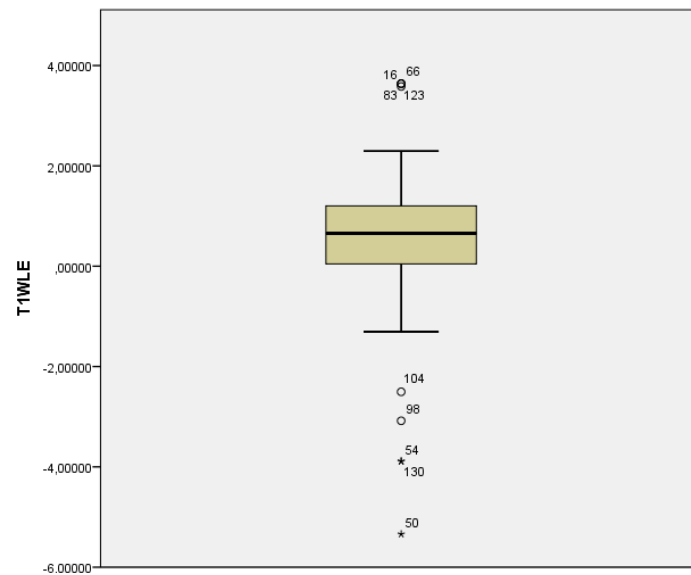


Abbildung 5.110: Boxplot der Personenfähigkeiten im „Vortest“

und $-2,462$ befindet. Das bedeutet jedoch nicht automatisch, dass das Testinstrument schlechter ist, als wenn in diesem Bereich der Schwierigkeitsskala Items vorhanden wären. Das Item V9A ist derart leicht, dass es kaum Informationen über die Fähigkeit eines Probanden liefert. Auch Items mit einem etwas höheren Schwierigkeitsparameter hätten nur wenig Informationen dazu geliefert. Insbesondere haben nur fünf der insgesamt 164 eine Personenfähigkeit, die kleiner als $-1,306$ ist (vgl. Abbildung 5.109). Insofern ist es

nicht schlimm, dass es keine Items in diesem Bereich gegeben hat. Des Weiteren fällt auf, dass viele Items eine Schwierigkeit zwischen 0,664 und 1,245 aufweisen. Da allerdings die Fähigkeit vieler Studierender in diesem Bereich liegt (vgl. Abbildungen 5.109 und 5.110), ist es angemessen, dass es dort einige Items gibt, die in ihrer Schwierigkeit nur wenig voneinander abweichen. Davon abgesehen gibt es nur kleinere Lücken auf der Schwierigkeitsskala und insgesamt kann die Verteilung der Items als gut geeignet für die untersuchte Zielgruppe bewertet werden.

Zusammenhang zwischen den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und im „Nachtest“

Da davon auszugehen ist, dass sowohl das Vorwissen als auch der Zusammenhang zwischen dem Vorwissen und den Vorstellungen und Kenntnissen zum Konvergenzbegriff bei Studierenden, welche die Veranstaltung „Analysis 1“ bereits in einem vorherigen Semester besucht haben, deutlich anders ausfallen als bei Studierenden, die diese Veranstaltung zum ersten Mal besuchen, werden für die folgenden Untersuchungen lediglich die Daten der Nicht-Wiederholerinnen und -Wiederholer verwendet. In Tabelle 5.70 sind für diese Stichprobe einige deskriptive Daten zu den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und in den beiden Dimensionen des „Nachtests“ dargestellt.

Test	N	arith. Mittel	SD	Median	Minimum	Maximum
T1	82	0,893	0,775	0,841	−0,703	3,638
T2 Dim. „konkret“	82	1,459	0,951	1,383	−0,975	3,872
T2 Dim. „abstrakt“	82	1,309	1,156	1,333	−1,825	3,433

Tabelle 5.70: Deskriptive Statistiken zu den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und den beiden Dimensionen des „Nachtests“

Für die beiden Dimensionen des Nachtests soll jeweils eine lineare Regression mit den bei der Raschskalierung geschätzten Personenfähigkeiten des „Vortest“ als Kovariate und den Personenfähigkeiten in der jeweiligen Dimension des „Nachtests“ durchgeführt werden. Dadurch soll bestimmt werden, welcher Anteil der Varianz der Ergebnisse der beiden Dimensionen des „Nachtests“ durch die Ergebnisse im „Vortest“ erklärt werden kann.

Zusammenhang zwischen den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

Begonnen wird mit der Dimension „konkret“ des „Nachtests“. Zuerst soll graphisch überprüft werden, ob zumindest näherungsweise ein linearer Zusammenhang besteht.

In Abbildung 5.111 ist dazu ein Streudiagramm zwischen der Personenfähigkeit im „Vortest“ und der Personenfähigkeit in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ zu sehen. Hier kann von einem positiven, näherungsweise linearen Zusammenhang ausgegangen werden. In Abbildung 5.112 ist ein Streudiagramm zwischen den standardisierten, geschätzten Werten der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und den standardisierten Residuen zu sehen. Hieran soll überprüft werden, ob die Voraussetzung, dass der Mittelwert der standardisierten Residuen etwa bei 0 liegt, erfüllt ist. Dies ist hier der Fall. Außerdem wird an demselben Streudiagramm überprüft, ob die Varianz der Residuen für die verschiedenen standardisierten, geschätzten Werten etwa gleich groß ist. Das

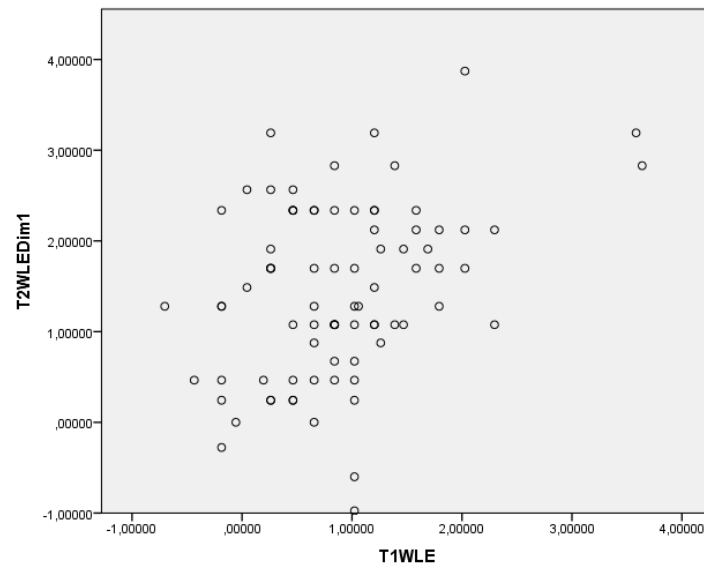


Abbildung 5.111: Streudiagramm zwischen der Personenfähigkeit im „Vortest“ und in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

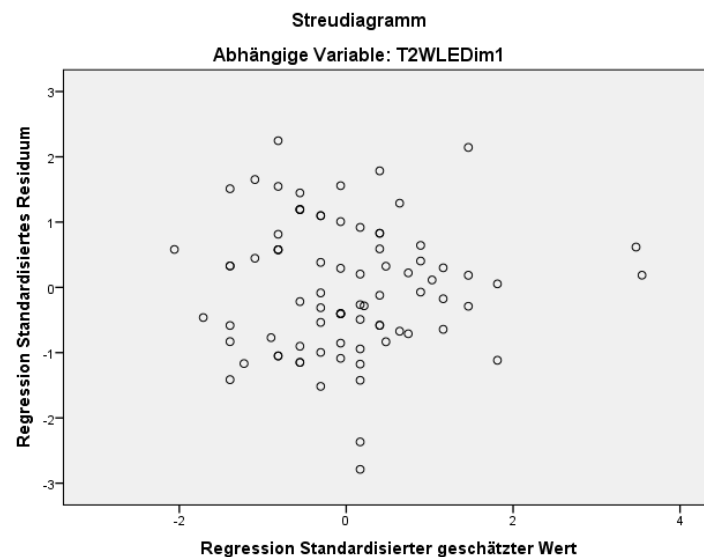


Abbildung 5.112: Streudiagramm der Fehlerwerte

ist hier ebenfalls zumindest annähernd erfüllt, wie auch die Unabhängigkeit der standardisierten Residuen voneinander.

Eine weitere Voraussetzung ist, dass die standardisierten Residuen annähernd normalverteilt sind. Wie in dem Histogramm in Abbildung 5.113 zu sehen ist, ist auch dies erfüllt.

Da die Voraussetzungen zumindest akzeptabel erfüllt sind, wird nun das Regressionsmodell betrachtet. In Tabelle 5.71 ist dazu die Varianzanalyse (ANOVA) zu sehen. Dieser lässt sich entnehmen, dass das Modell als Ganzes mit $p = 0,001$ statistisch signifikant ist. Daher werden die Regressionskoeffizienten bestimmt und es wird überprüft, ob diese ebenfalls statistisch signifikant sind. Dies ist in Tabelle 5.72 dargestellt. Die t-Tests zeigen,

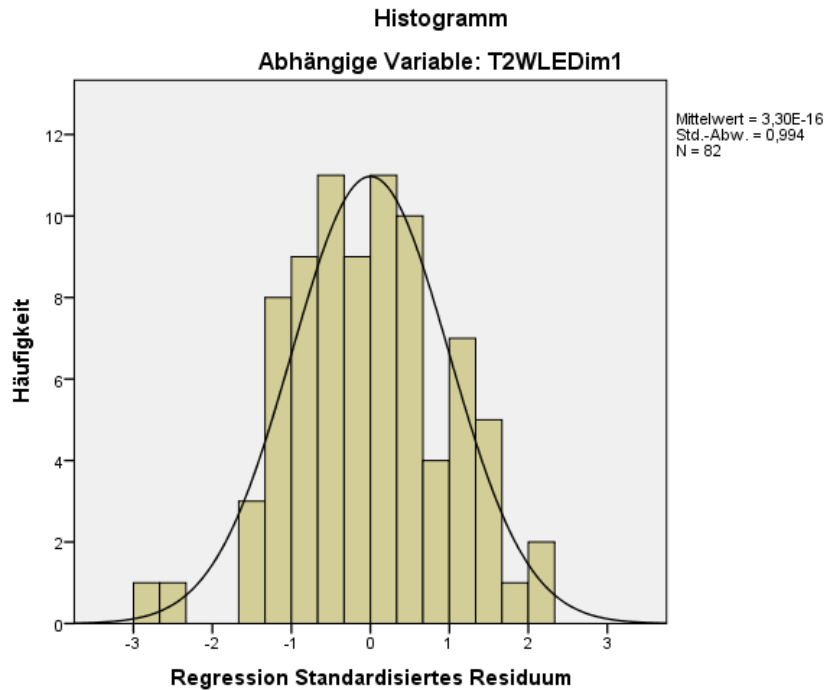


Abbildung 5.113: Histogramm der standardisierten Residuen

dass sowohl die Konstante mit $p < 0,001$ als auch der Koeffizient der Personenfähigkeit im „Vortest“ mit $p = 0,001$ signifikant sind. Das bedeutet, dass die Personenfähigkeit im „Vortest“ einen signifikanten Einfluss auf die Personenfähigkeit in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ hat. Als Gleichung für die Regressionsgerade ergibt sich:

$$T2WLEDim1 = 0,438 \cdot T1WLE + 1,068$$

ANOVA

Modell		Quadrat- summe	df	Mittel der Quadrate	F	Sig.
1	Regression	9,337	1	9,337	11,691	,001
	Nicht standardi- sierte Residuen	63,893	80	,799		
	Gesamt	73,230	81			

Tabelle 5.71: Varianzanalyse für die lineare Regression mit dem Ergebnis der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

Koeffizienten

Modell	Nicht standardisierte Koeffizienten		Stand. Koeff.	T	Sig.
	Regressionskoeffizient B	Standardfehler	Beta		
1 (Konstante)	1,068	,151		7,069	,000
T1WLE	,438	,128	,357	3,419	,001

Tabelle 5.72: Regressionskoeffizienten der linearen Regression mit dem Ergebnis der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

Modellzusammenfassung

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,357	,128	,117	,89368166

Tabelle 5.73: Modellzusammenfassung für die lineare Regression mit dem Ergebnis der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

Der Modellzusammenfassung für die lineare Regression mit dem Ergebnis der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate in Tabelle 5.73 ist der Korrelationskoeffizient 0,357 zu entnehmen. Dies ist als mittlerer Zusammenhang zu bewerten. Das korrigierte R-Quadrat beträgt 0,117, was bedeutet, dass 11,7% der Varianz der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ durch die Personenfähigkeit im „Vortest“ erklärt werden kann.

Zusammenhang zwischen den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“

Für die zweite Dimension des „Nachtests“ wird nun analog vorgegangen.

Ein Streudiagramm zwischen der Personenfähigkeit im „Vortest“ und der Personenfähigkeit in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ ist in Abbildung 5.114 dargestellt. Auch hier ist ein positiver, annähernd linearer Zusammenhang erkennbar.

Anschließend wird das Streudiagramm zwischen den standardisierten, geschätzten Werten der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und den standardisierten Residuen in Abbildung 5.115 betrachtet. Zum einen lässt sich erkennen, dass der Mittelwert der standardisierten Residuen etwa bei 0 liegt. Zum anderen sind die Varianzen der standardisierten Residuen für die verschiedenen standardisierten, geschätzten Werte zumindest annähernd gleich. Zusätzlich scheinen die standardisierten Residuen unabhängig voneinander zu sein.

In dem Histogramm der standardisierten Residuen in Abbildung 5.116 ist zu sehen, dass annähernd eine Normalverteilung vorliegt.

Auch in diesem Fall sind die Voraussetzungen für ein lineares Modell also zumindest akzeptabel erfüllt. Daher wird das Regressionsmodell betrachtet. Die Varianzanalyse (ANOVA) ist in Tabelle 5.74 dargestellt. Das Modell als Ganzes ist mit $p = 0,034$

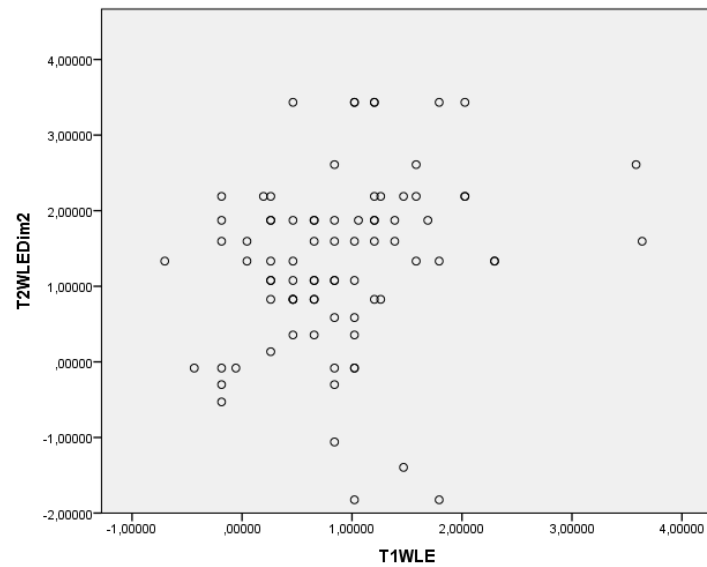


Abbildung 5.114: Streudiagramm zwischen der Personenfähigkeit im „Vortest“ und in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“

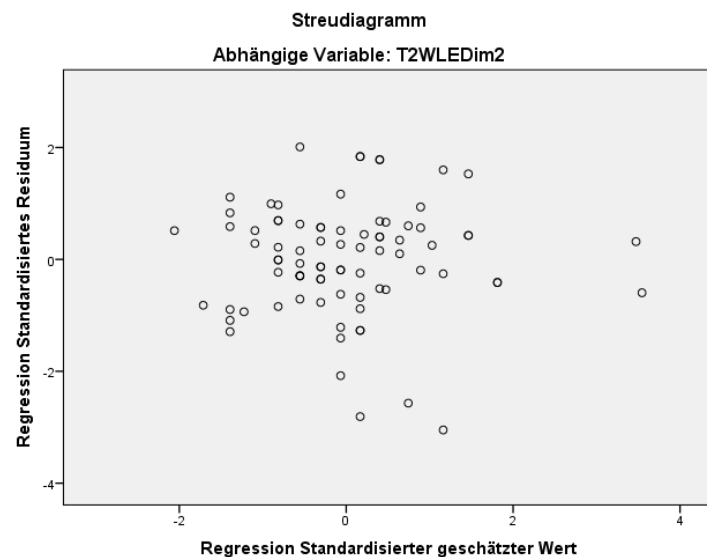


Abbildung 5.115: Streudiagramm der Fehlerwerte

signifikant.

Also werden die Regressionskoeffizienten berechnet und auf Signifikanz überprüft. Dies ist in Tabelle 5.76 zu sehen. Die t-Tests ergeben, dass sowohl die Konstante mit $p < 0,001$ signifikant ist als auch der Koeffizient der Personenfähigkeit im „Vortest“ mit $p = 0,034$. Die Personenfähigkeit im „Vortest“ hat somit auch einen signifikanten Einfluss auf die Personenfähigkeit in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“. Die Gleichung der Regressionsgeraden ist die Folgende:

$$T2WLEDim2 = 0,350 \cdot T1WLE + 0,997$$

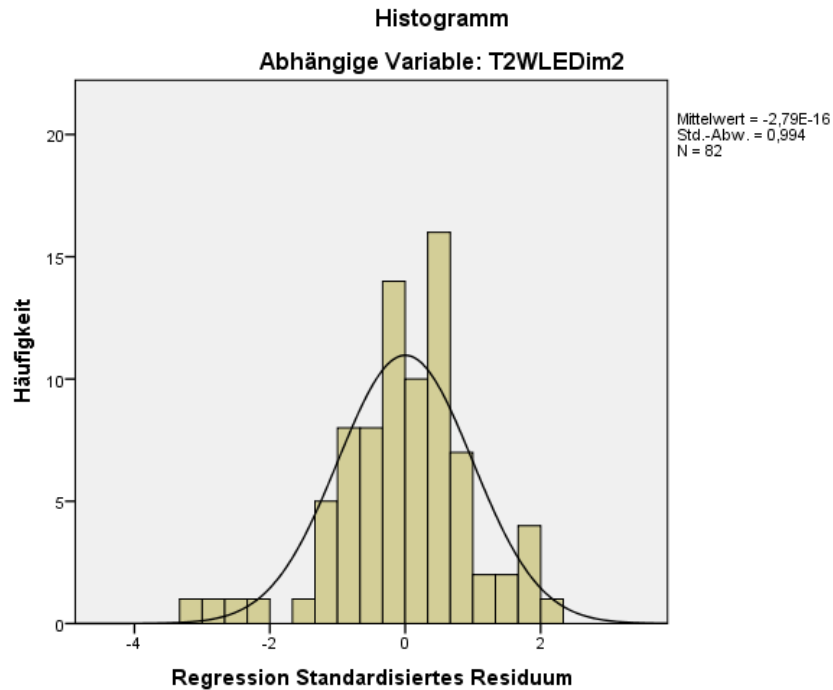


Abbildung 5.116: Histogramm der standardisierten Residuen

ANOVA

Modell	Quadrat-summe	df	Mittel der Quadrate	F	Sig.
1 Regression	5,941	1	5,941	4,644	,034
Nicht standardisierte Residuen	102,340	80	1,279		
Gesamt	108,281	81			

Tabelle 5.74: Varianzanalyse für die lineare Regression mit dem Ergebnis der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

Die Modellzusammenfassung ist in Tabelle 5.75 abgebildet. Der Korrelationskoeffizient beträgt 0,234, was einen schwachen bis mittleren Zusammenhang darstellt. Außerdem ist dieser Tabelle zu entnehmen, dass das korrigierte R-Quadrat 0,0434 beträgt. Somit können 4,3% der Varianz der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ durch die Personenfähigkeiten des „Vortests“ erklärt werden.

Modellzusammenfassung

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,234	,055	,043	1,13103725

Tabelle 5.75: Modellzusammenfassung für die lineare Regression mit dem Ergebnis der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

Insgesamt lässt sich nun also feststellen, dass die Personenfähigkeiten zum ersten Testzeitpunkt einen statistisch signifikanten Einfluss auf die Personenfähigkeiten beider Dimensionen des „Nachtests“ hat. Dabei ist dieser Einfluss auf die Dimension „konkret“ mit 11,7% aufgeklärter Varianz deutlich größer als auf die Dimension „abstrakt“ mit 4,3% aufgeklärter Varianz. Das Vorwissen der Studierenden wirkt sich also stärker auf die Fähigkeiten bezüglich der Konvergenz konkreter Beispielfolgen aus als auf das vertiefte Verständnis der formalen Definition und die Kenntnisse von Zusammenhängen zwischen Konvergenz und anderen Begriffen. Vermutlich werden bei konkreten Beispielen eher Anteile des *Concept Images* aktiviert, über welche die Studierenden bereits vor der Behandlung des Themas Konvergenz in der Vorlesung verfügten. Wenn es um die formale Definition oder Zusammenhänge zu verwandten Begriffen geht, antworten die Studierenden hingegen möglicherweise auf Basis ihrer *Concept Definition* oder solcher Anteile des *Concept Images*, die neu entwickelt wurden.

Koeffizienten

Modell	Nicht standardisierte Koeffizienten		Stand. Koeff.	T	Sig.
	Regressionskoeffizient B	Standardfehler	Beta		
1 (Konstante)	,997	,191		5,213	,000
T1WLE	,350	,162	,234	2,155	,034

Tabelle 5.76: Regressionskoeffizienten der linearen Regression mit dem Ergebnis der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ als abhängige Variable und dem „Vortest“-Ergebnis als Kovariate

5.4 Ergebnisse in Bezug auf einen möglichen Zusammenhang mit der Workshopteilnahme

In diesem Abschnitt soll der Frage nachgegangen werden, ob sich ein Effekt der Workshopteilnahme in Bezug auf das „Nachtest“-Ergebnis nachweisen lässt, wobei das Vorwissen in Form der „Vortest“-Ergebnisse berücksichtigt werden soll. Da der „Nachtest“ durch ein zweidimensionales Partial-Credit-Modell skaliert wurde, wird diese Untersuchung für beide Dimensionen durchgeführt. Wie zuvor bereits beschrieben soll die Experimentalgruppe bestehend aus den zehn Studierenden, die an beiden Teilen des Workshops teilgenommen und beide Tests bearbeitet haben, mit zwei verschiedenen Kontrollgruppen verglichen werden. Die kleine Experimentalgruppe besteht aus sieben Studierenden, die sich ebenfalls freiwillig für den Workshop gemeldet haben, jedoch nicht zur Teilnahme ausgelost wurden, und die an beiden Tests teilgenommen haben. Die große Kontrollgruppe besteht aus 72 Studierenden, welche die Vorlesung erstmalig besucht haben und zu beiden Testzeitpunkten anwesend waren.

Zunächst wurden jeweils Differenzen zwischen der Personenfähigkeit in den beiden Dimensionen des „Nachtests“ und der Personenfähigkeit im „Vortest“ gebildet. Dadurch wird bei den anschließenden Vergleichen zwischen der Experimental- und den Kontrollgruppen das Vorwissen berücksichtigt. Von diesen Differenzen, bei denen jeweils die Personenfähigkeit des ersten Tests von der zum zweiten Testzeitpunkt abgezogen wurde, werden zunächst einige deskriptive Daten präsentiert.

Gruppe	N	arith. Mittel	SD	Median	Min	Max
Gesamt	82	0,567	0,989	0,306	−2	2,93
EG	10	0,785	1,032	0,546	−0,81	2,52
kleine KG	7	0,581	0,906	0,613	−0,655	1,845
große KG	72	0,537	0,987	0,082	−2	2,93

Tabelle 5.77: Deskriptive Statistiken der Differenzen zwischen den Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“

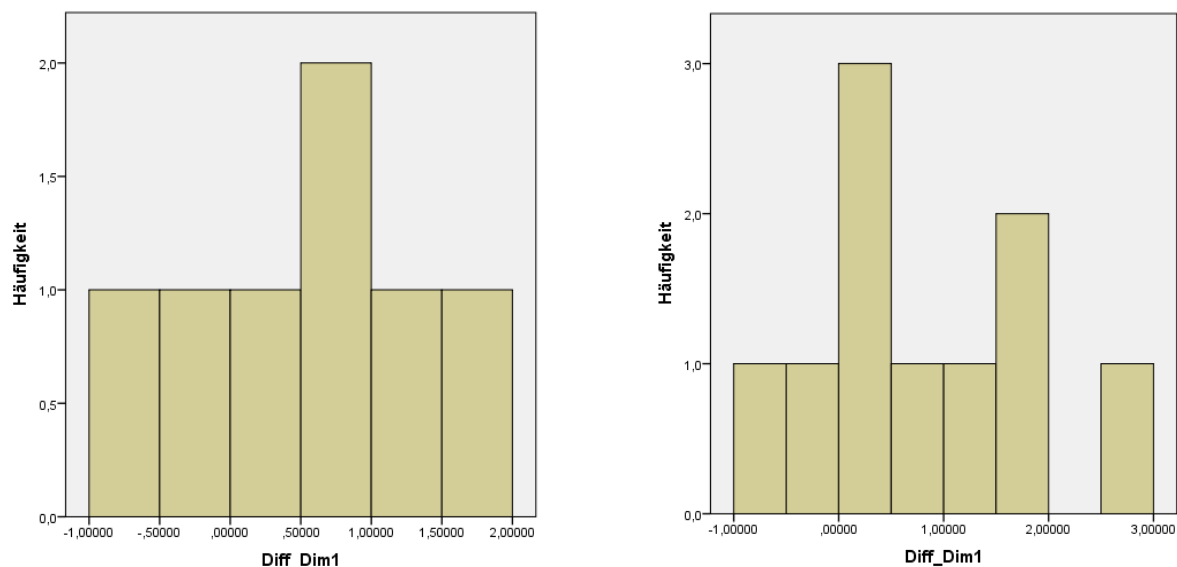


Abbildung 5.117: Histogramme der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die kleine Kontrollgruppe (links) und die Experimentalgruppe (rechts)

In Tabelle 5.77 sind sowohl für die gesamte Gruppe als auch für die Experimental- und die beiden Kontrollgruppen das arithmetische Mittel, die Standardabweichung (SD), der Median, das Minimum und das Maximum der Differenzen aus den Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“ dargestellt. In Abbildung 5.117 sind die Histogramme derselben Differenzen für die kleine Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe dargestellt und in Abbildung 5.118 die Boxplots. In Abbildung 5.119 sind die Histogramme und in Abbildung 5.120 die Boxplots derselben Differenzen für die große Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe gegenübergestellt. Die verschiedenen Darstellungen zeigen, dass das arithmetische Mittel der Differenzen aus der Personenfähigkeit in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“

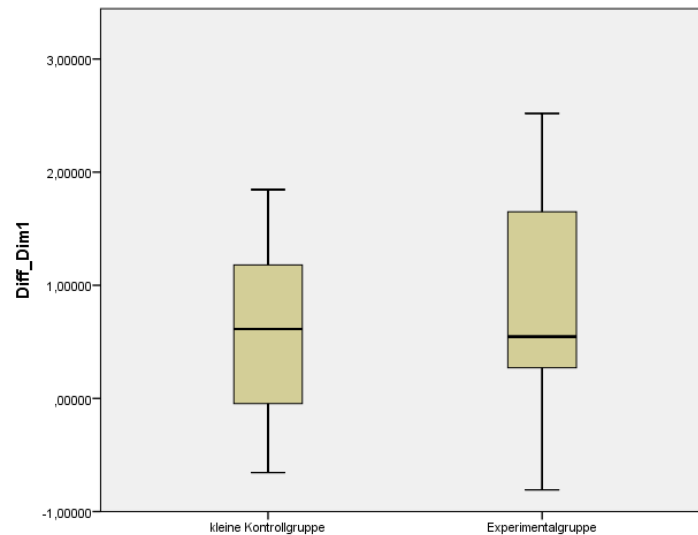


Abbildung 5.118: Boxplots der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die kleine Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe

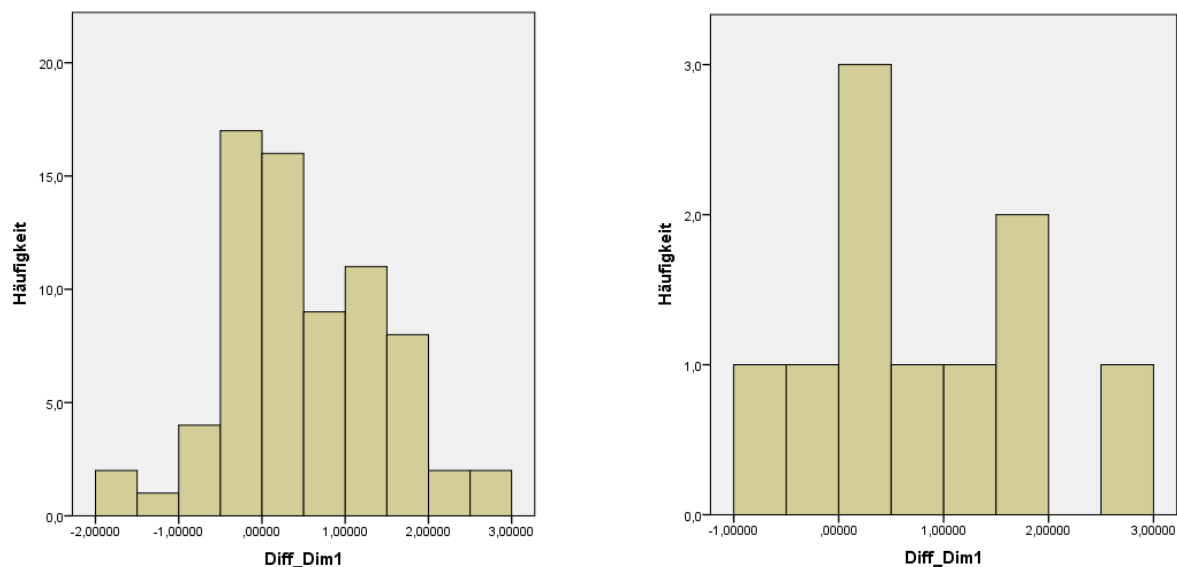


Abbildung 5.119: Histogramme der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die große Kontrollgruppe (links) und die Experimentalgruppe (rechts)

und der im „Vortest“ bei der Experimentalgruppe etwas größer ist als bei den beiden Kontrollgruppen. Ob es sich um signifikante Unterschiede handelt, wird im Anschluss getestet.

In Tabelle 5.78 sind die deskriptiven Daten für die Differenzen aus den Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“ sowohl für die gesamte Gruppe als auch für die Experimental- und die beiden Kontrollgruppen zu finden. In Tabelle 5.121 sind die Histogramme und in Abbildung 5.122 die Boxplots derselben Differenzen für die kleine Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe gegenübergestellt.

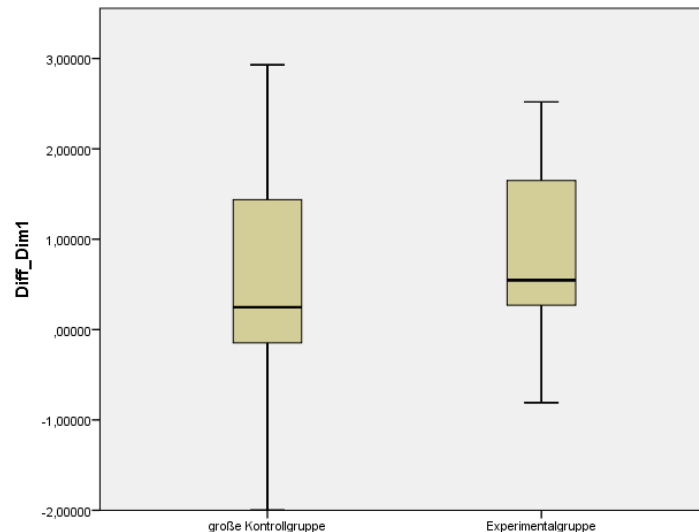


Abbildung 5.120: Boxplots der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die große Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe

Gruppe	N	arith. Mittel	SD	Median	Min	Max
Gesamt	82 0, 416	1, 231	0, 421	−3, 62	2, 97	
EG	10	0, 358	1, 242	0, 446	−2, 04	1, 99
kleine KG	7	0, 414	0, 932	0, 363	−0, 922	2, 230
große KG	72	0, 425	1, 239	0, 421	−3, 62	2, 97

Tabelle 5.78: Deskriptive Statistiken der Differenzen zwischen den Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“

In Abbildung 5.123 sind die entsprechenden Histogramme für die große Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe zu finden und in Abbildung 5.124 die Boxplots. Für diese Dimension des „Nachtests“ ist das arithmetische Mittel in der Experimentalgruppe leicht kleiner als in den beiden Kontrollgruppen.

Die Unterschiede zwischen den Gruppen sollen nun auf Signifikanz untersucht werden. Sowohl bei der Experimentalgruppe als auch bei der kleinen Kontrollgruppe sind die Daten aufgrund kleiner Stichproben nicht normalverteilt, daher sind die Voraussetzungen für einen t-Test nicht erfüllt. Stattdessen wird der Mann-Whitney-U-Test verwendet. Mit diesem können ebenfalls die Differenzen der Personenfähigkeiten auf signifikante Unterschiede zwischen den verschiedenen Gruppen untersucht werden. Voraussetzungen für diesen Test sind lediglich eine ordinalskalierte abhängige Variable und eine unabhängige Variable, durch welche die beiden Gruppen gebildet werden. Als erstes werden jeweils die Daten beider zu vergleichender Gruppen beginnend mit den kleinsten Werten der Größe nach angeordnet. Basierend auf dieser Anordnung wird jedem Datenwert ein Rang zugeordnet. Anschließend wird für jede Gruppe die Summe der Ränge aller Datenwerte gebildet. Diese

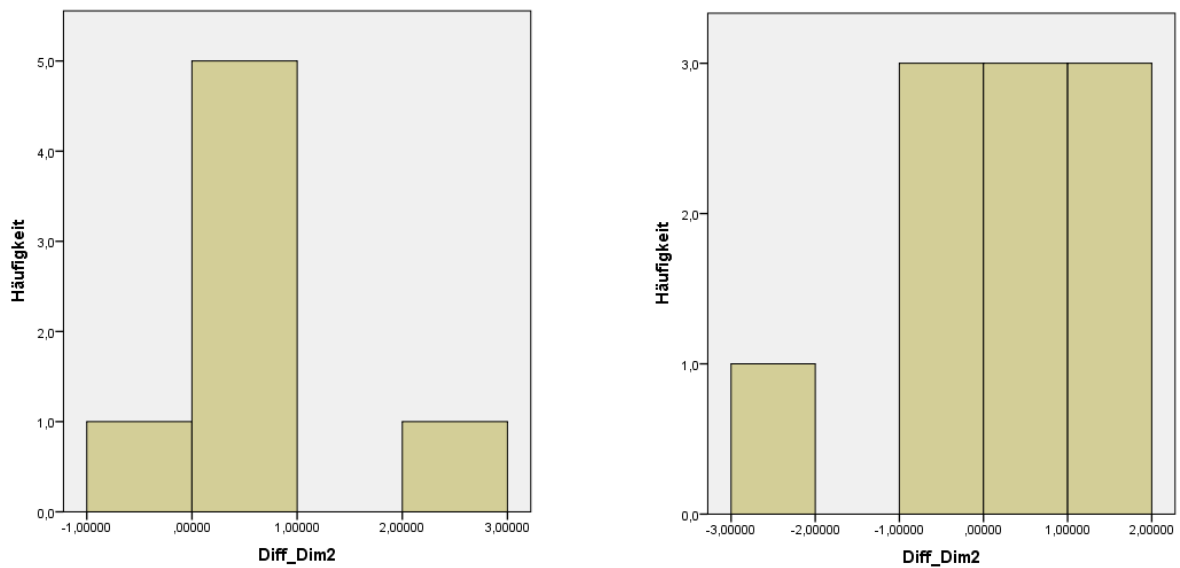


Abbildung 5.121: Histogramme der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die kleine Kontrollgruppe (links) und die Experimentalgruppe (rechts)

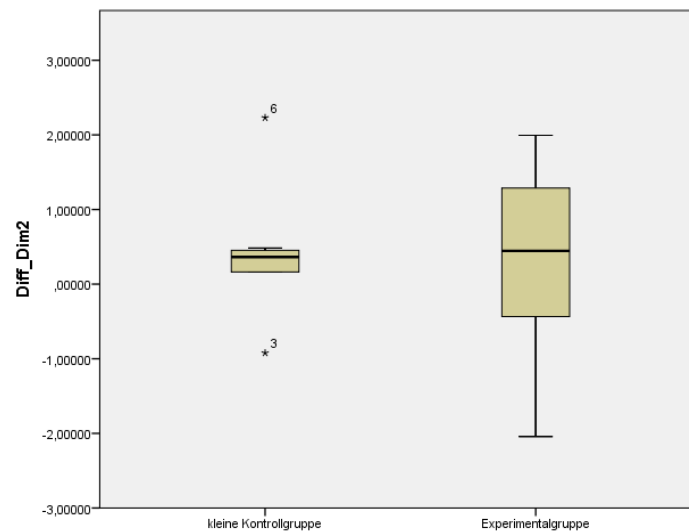


Abbildung 5.122: Boxplots der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die kleine Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe

Rangsummen werden auf Unterschiede untersucht. Dazu wird die Teststatistik U wie folgt gebildet:

$$U = n_1 n_2 \frac{n_1 + 1}{2} - R_1$$

Dabei bezeichnet R_1 die größere der beiden Rangsummen, n_1 die Stichprobengröße dieser Gruppe und n_2 die Stichprobengröße der anderen Gruppe. Falls die gesamte Stichprobe größer als 30 ist, wird der U-Wert anschließend z-standardisiert. Dieser wird mit dem kritischen Wert der z-Verteilung verglichen. Ist der z-Wert signifikant, so kann

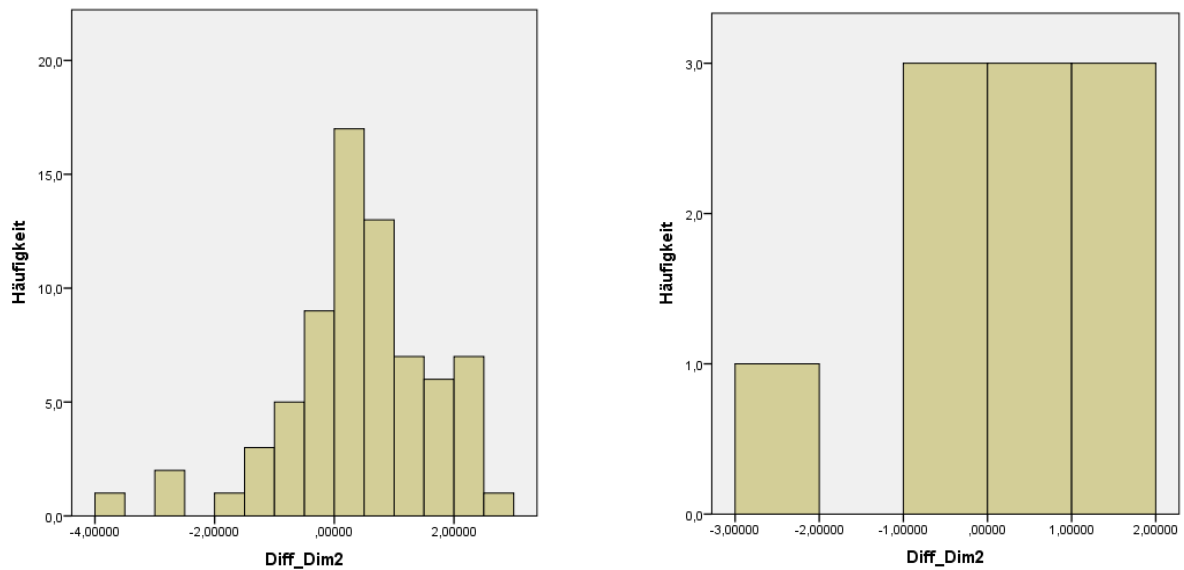


Abbildung 5.123: Histogramme der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die große Kontrollgruppe (links) und die Experimentalgruppe (rechts)

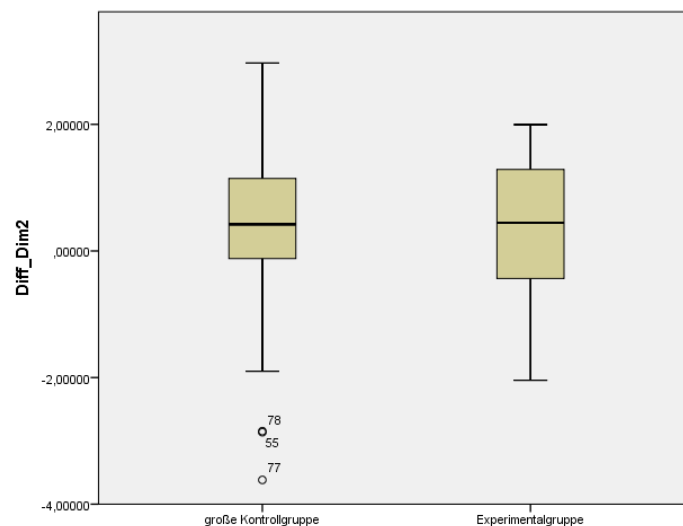


Abbildung 5.124: Boxplots der Differenz der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und dem „Vortest“ für die große Kontrollgruppe und die Experimentalgruppe

die Nullhypothese gleicher zentraler Tendenzen beider Gruppen verworfen werden. In dem Fall sollte zusätzlich die Effektstärke berechnet werden, um die Bedeutsamkeit des Unterschiedes beurteilen zu können.

Dieser Test wird zunächst verwendet, um die Differenzen von den Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“ zwischen der Experimentalgruppe und der kleinen Kontrollgruppe auf Unterschiede zu untersuchen. Die mittlere Rangsumme der Experimentalgruppe ist mit 9,40 deskriptiv etwas größer als die der klei-

nen Kontrollgruppe, die 0,843 beträgt. Aufgrund der kleinen Stichprobengröße wird der U-Wert 31 nicht z-standardisiert. Mit $p = 0,740$ ist dieser Wert nicht signifikant. Die Ausgabe von SPSS ist in Abbildung 5.125 dargestellt.

Ränge				
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Dim1	1	10	9,40	94,00
	2	7	8,43	59,00
	Gesamt	17		

Statistik für Test ^a	
	Diff_Dim1
Mann-Whitney-U	31,000
Wilcoxon-W	59,000
Z	-,390
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,696
Exakte Signifikanz [2*(1-seitige Sig.)]	,740 ^b

a. Gruppenvariable: Workshop
b. Nicht für Bindungen korrigiert.

Abbildung 5.125: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der kleinen Kontrollgruppe

Für die Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und im „Vortest“ wird analog vorgegangen. Die Ausgabe von SPSS ist in Abbildung 5.126 dargestellt. In diesem Fall betragen die mittleren Rangsummen 9,10 für die Experimentalgruppe und 8,86 für die kleine Kontrollgruppe. Der U-Wert in Höhe von 34 ist mit $p = 0,962$ ebenfalls nicht signifikant. Im Vergleich mit der kleinen Kontrollgruppe konnten somit keine Unterschiede festgestellt werden.

Bei dem Vergleich der Experimentalgruppe mit der großen Kontrollgruppe lässt sich ebenfalls kein signifikanter Unterschied feststellen. Für die Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachtests“ und denen im „Vortest“ beträgt die mittlere Rangsumme 47,65 für die Experimental- und 40,65 für die Kontrollgruppe. Da die Stichprobengröße größer als 30 ist, wird die z-standardisierte Teststatistik betrachtet. Diese beträgt $z = -0,872$ und ist mit $p = 0,383$ nicht signifikant. Die SPSS-Ausgabe hierzu ist in Abbildung 5.127 dargestellt.

Die gleiche Statistik für die Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ ist in Abbildung 5.128 zu finden. Die mittlere Rangsumme der Experimentalgruppe beträgt 39,45 und die der großen Kontrollgruppe 41,78. Als standardisierte Teststatistik ergibt sich $z = -0,291$. Mit $p = 0,771$ ist dieser Wert ebenfalls nicht signifikant.

Ränge				
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Dim2	1	10	9,10	91,00
	2	7	8,86	62,00
	Gesamt	17		

Statistik für Test^a

	Diff_Dim2
Mann-Whitney-U	34,000
Wilcoxon-W	62,000
Z	-,098
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,922
Exakte Signifikanz [2*(1-seitige Sig.)]	,962 ^b

a. Gruppenvariable: Workshop

b. Nicht für Bindungen korrigiert.

Abbildung 5.126: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachttests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der kleinen Kontrollgruppe

Ränge				
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Dim1	Kontrollgruppe	72	40,65	2926,50
	Experimentalgruppe	10	47,65	476,50
	Gesamt	82		

Statistik für Test^a

	Diff_Dim1
Mann-Whitney-U	298,500
Wilcoxon-W	2926,500
Z	-,872
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,383

a. Gruppenvariable: Workshop

Abbildung 5.127: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „konkret“ des „Nachttests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der großen Kontrollgruppe

In allen betrachteten Fällen kann die Nullhypothese, in der Experimentalgruppe und einer Kontrollgruppe seien die zentralen Tendenzen gleich, nicht verworfen werden. Erklären lassen sich diese Ergebnisse durch die geringen Fallzahlen vor allem in der Experimentalgruppe ($n = 10$) und der kleinen Kontrollgruppe ($n = 7$).

Um möglicherweise dennoch einen Effekt nachweisen zu können, wird ein Subtest des „Nachttests“ betrachtet. Dieser setzt sich aus denjenigen Items zusammen, in denen expli-

		Ränge		
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Dim2	Kontrollgruppe	72	41,78	3008,50
	Experimentalgruppe	10	39,45	394,50
	Gesamt	82		

Statistik für Test ^a	
	Diff_Dim2
Mann-Whitney-U	339,500
Wilcoxon-W	394,500
Z	-,291
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,771

a. Gruppenvariable: Workshop

Abbildung 5.128: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten in der Dimension „abstrakt“ des „Nachtests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der großen Kontrollgruppe

zit Ziele des Workshops getestet werden. Dazu zählen das Item N1A, bei dem geprüft wird, ob die Studierenden auch eine Folge als solche auffassen, die nicht durch einen einzigen Term definiert ist, und Item N1G, bei dem die Probanden eine konstante Folge als Folge erkennen mussten. Bei Item N1E hingegen wird geprüft, ob die Studierenden wissen, dass Folgen unendlich sind. Des Weiteren wird auch das Item N2 in den Subtest aufgenommen, da das Auffassen von $0, \bar{9}$ als Grenzwert einer Folge zu den Zielen des Workshops gehört. Übertragen werden soll dieses Wissen in Item N9 auf $0, \bar{3}$, weswegen dieses Item ebenfalls zum Subtest hinzugezogen wird. Außerdem zählt es zu den Zielen des Workshops, typische Fehlvorstellungen zu verringern. Daher werden einige weitere Items in den Subtest aufgenommen. So wird die Fehlvorstellung, konvergente Folgen dürfen ihren Grenzwert nicht erreichen, in den Items N3B und N8B geprüft. Item N3D testet diese Fehlvorstellung ebenfalls, dabei ist zusätzlich erforderlich, dass die Probanden eine konstante Folge überhaupt als Folge auffassen. Eine weitere typische Fehlvorstellung ist, konvergente Folgen müssten immer monoton sein. In den Items N3F, N7D, N7F und N7I werden die Zusammenhänge zwischen Konvergenz, Beschränktheit und Monotonie getestet. Des Weiteren wird das Item N7B in den Subtest aufgenommen, das den Zusammenhang zwischen Konvergenz und Cauchy-Folgen beinhaltet. Mit dem Item N8A kann überprüft werden, ob die Probanden der Meinung sind, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert monoton fallend ist. Schließlich werden die Items N3E, N7H und N8C genutzt, um herauszufinden, ob korrekt zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten unterschieden wird. Zusätzlich zu den bereits genannten Zielen kann mit den Items N8A, N8B und N8C außerdem getestet werden, inwiefern die Studierenden in der Lage sind, Folgen mit gegebenen Eigenschaften zu konstruieren. Der Subtest besteht aus den gerade genannten 17 Items. Ähnlich wie zuvor für den gesamten „Nachtest“ wird eine Skalierung des Subtests vorgenommen.

5.4.1 Skalierung des Subtests

Prinzipiell wird hierbei wieder in vier Phasen vorgegangen: Vergleich verschiedener Modelle, Itemselektion, Überprüfung des Modells und Schätzung der Personenparameter.

Phase 1: Vergleich verschiedener Modelle

Wie bereits beim gesamten „Nachtest“ kommen als eindimensionale Modelle theoretisch das Partial-Credit-Modell und das Rating-Scale-Modell in Frage. Es ist zu erwarten, dass auch für die getroffene Auswahl der Items das Partial-Credit-Modell eine bessere Passung aufweist, diese Vermutung soll empirisch überprüft werden. Dazu wird zunächst die Modellkonformität des Partial-Credit-Modells nachgewiesen.

Nachweis der Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells Zunächst werden die gewichteten MNSQ-Fit-Werte betrachtet. Diese liegen zwischen 0,85 und 1,35 mit dem arithmetischen Mittel 0,9924 und der Standardabweichung 0,13222. Lediglich für zwei Items liegen die Werte außerhalb des wünschenswerten Bereichs von 0,80 bis 1,20. Auf diese Items wird in der Phase der Itemselektion noch einmal eingegangen. Die korrigierten Trennschärfen sind für alle Items größer als 0,20, sie haben einen Mittelwert von 0,3941 bei einer Standardabweichung von 0,10943. Mit einem Wert in Höhe von 0,813 ist die EAP/PV-Reliabilität als gut zu bezeichnen. Für den Nachweis der Stichprobenunabhängigkeit wird die Gesamtstichprobe jeweils in zwei Teilstichproben unterteilt und die Itemschwierigkeiten werden jeweils basierend auf den Daten der Teilstichproben geschätzt. In Abbildung 5.129 ist ein Scatterplot auf Basis der Unterteilung

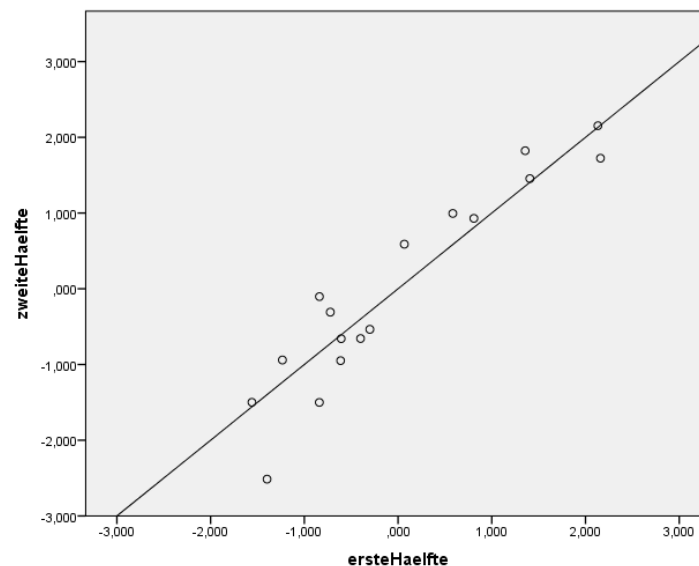


Abbildung 5.129: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Codes

der Gesamtstichprobe in die erste und zweite Hälfte bei Sortierung nach Codes zu sehen. Die Abweichung von der Hauptdiagonalen ist eher gering, was für die Stichprobenunabhängigkeit spricht. Außerdem wird die Gesamtstichprobe anhand der Scores halbiert. Der so entstandene Scatterplot ist in Abbildung 5.130 zu sehen, wobei für Item N1G lediglich

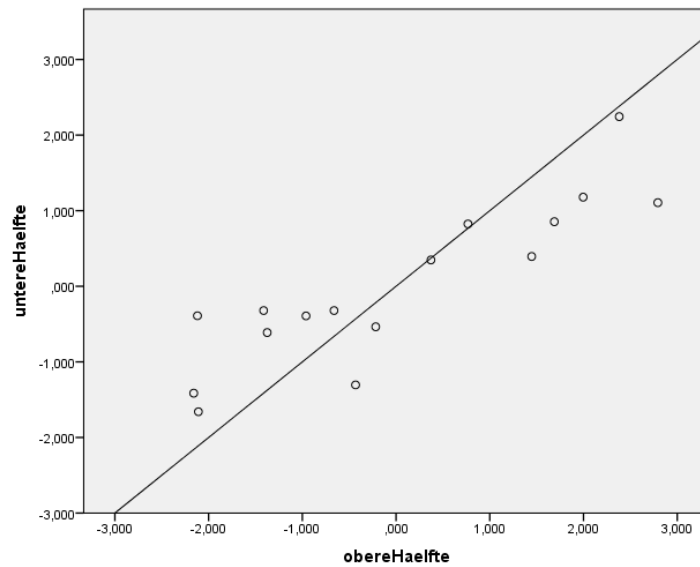


Abbildung 5.130: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten unterteilt nach Score

auf Basis der Daten von einer der beiden Teilstichproben eine Parameterschätzung möglich ist, weshalb es für dieses Item keinen Datenpunkt gibt. Auch bei einer Unterteilung nach diesem Kriterium ist die Abweichung der Datenpunkte von der Hauptdiagonalen überwiegend gut bis akzeptabel. Schließlich wurde die Gesamtstichprobe noch zufällig in

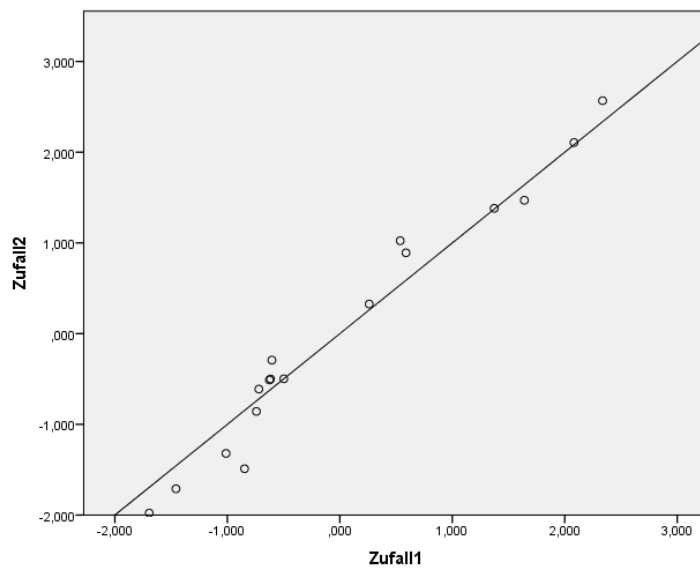


Abbildung 5.131: Scatterplot der geschätzten Itemschwierigkeiten nach zufälliger Halbierung

zwei Teilstichproben halbiert und auf Basis dieser beiden Teilstichproben wurden jeweils die Itemschwierigkeiten geschätzt. Die Ergebnisse sind in dem Scatterplot in Abbildung 5.131 zu sehen. Die Abweichungen der einzelnen Datenpunkte von der Hauptdiagonalen sind sehr gering. Es wird somit davon ausgegangen, dass die Stichprobenunabhängigkeit erfüllt ist und die Modellkonformität des eindimensionalen Partial-Credit-Modells gegeben ist.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit dem eindimensionalen Rating-Scale-Modell Zum Vergleich der beiden eindimensionalen Modelle sollen sowohl der Likelihoodquotiententest und die informationstheoretischen Maße als auch die Reliabilität und die Itemfitwerte herangezogen werden. Bei dem eindimensionalen Partial-Credit-Modell berechnet ConQuest den „Final Deviance“-Wert als 2656,72416 und die Anzahl der geschätzten Parameter beträgt 28. Beim eindimensionalen Rating-Scale-Modell hingegen wird der „Final Deviance“-Wert von ConQuest als 3787,88980 ausgegeben und die Anzahl der geschätzten Parameter bei diesem Modell ist mit 20 geringer. Als Prüfgröße für den Likelihoodquotiententest ergibt sich $-2 \cdot \log(LR) = 3787,88980 - 2656,72416 = 1131,16564$ mit $df = 28 - 20 = 8$ Freiheitsgraden. Die Prüfgröße ist größer als der kritische Wert der χ^2 -Verteilung für 8 Freiheitsgrade und $p = 0,001$, weshalb das Partial-Credit-Modell auf Basis dieses Kriteriums zu bevorzugen ist. Werden die informationstheoretischen Maße benutzt, so führt dies zu derselben Entscheidung. Der AIC des Partial-Credit-Modells ist mit 2712,72 deutlich kleiner als beim Rating-Scale-Modell, bei dem dieser 3827,89 beträgt. Beim BIC betragen die Werte 2791,69 beim Partial-Credit- und 3884,30 beim Rating-Scale-Modell und der CAIC-Wert des Partial-Credit-Modells ist mit 2819,69 im Vergleich zu 3904,30 beim Rating-Scale-Modell ebenfalls geringer. Die EAP/PV-Reliabilität des Partial-Credit-Modells beträgt 0,813, die des Rating-Scale-Modells hingegen ist mit 0,785 etwas geringer. Außerdem sind die einzelnen Itemfitwerte des Partial-Credit-Modells wie zu erwarten war deutlich besser als die des Rating-Scale-Modells. Die Entscheidung fällt also eindeutig zugunsten des Partial-Credit-Modells aus.

Vergleich des eindimensionalen Partial-Credit-Modells mit einem zweidimensionalen Partial-Credit-Modell Nun sollen auch mehrdimensionale Partial-Credit-Modelle mit in Betracht gezogen werden. Da es sich um eine Teilmenge der Items des gesamten „Nachtests“ handelt, sind inhaltlich die gleichen Aufteilungen in mehrere Dimensionen plausibel, wie schon bei dem gesamten „Nachtest“. Die erste mögliche Aufteilung der gesamten „Nachtest“-Items in zwei inhaltliche Dimensionen bestand aus der Dimension „tiefes Verständnis der Definition“ und der Dimension „Anwendungen und Eigenschaften“. Von den Items des Subtests lassen sich allerdings lediglich drei Items zu der erstgenannten Dimension zuordnen, weswegen eine zuverlässige Parameterschätzung in dem Fall gefährdet wäre. Daher wird dieses zweidimensionale Modell nicht betrachtet. Die anderen beiden für den gesamten „Nachtest“ untersuchten zweidimensionalen Modelle liefern auf der Menge der Subtest-Items dieselbe Aufteilung der Items in zwei Dimensionen. Die erste Dimension besteht aus denjenigen Items des Subtests, bei denen konkrete (Gegen-) Beispiele von (konvergenten) Folgen gegeben sind beziehungsweise konstruiert werden müssen (Items N1A, N1E, N1G, N3B, N3D, N3E, N3F, N8A, N8B und N8C). Das sind genau die Items des Subtests, in denen es ausschließlich um den Folgen- und Grenzwertbegriff geht und nicht um Zusammenhänge zu anderen Begriffen. Die restlichen Items des Subtests bilden die zweite Dimension, bei deren Items es abstrakter um die Definition oder Eigenschaften beziehungsweise um Zusammenhänge des Grenzwertbegriffs zu anderen Begriffen geht. Dieses zweidimensionale Partial-Credit-Modell soll nun mit dem eindimensionalen Partial-Credit-Modell verglichen werden. Als Kriterien können die informationstheoretischen Maße, die EAP/PV-Reliabilität und die Itemfitwerte dienen. Erstere berechnen sich aus dem „Final Deviance“-Wert, der für das betrachtete zweidimensionale Modell 2651,61906 beträgt, und der Anzahl der geschätzten Parameter, was in diesem

Fall 30 sind. Daraus ergibt sich als AIC der Wert 2711,62, der ein wenig kleiner ist als der entsprechende Wert des eindimensionalen Modells. Die Werte des BIC mit 2796,23 und des CAIC in Höhe von 2826,23 sind hingegen etwas größer als die jeweiligen Werte des eindimensionalen Modells. Aus den informationstheoretischen Maßen ergibt sich also keine eindeutige Entscheidung. Die EAP/PV-Reliabilitäten betragen 0,810 für die erste und 0,776 für die zweite Dimension und sind somit beide etwas kleiner als die Reliabilität des eindimensionalen Modells, wobei die für die zweite Dimension unterhalb des wünschenswerten Wertes in Höhe von 0,8 liegt. Auf Basis dieses Kriteriums wäre also eher das eindimensionale Modell zu bevorzugen. Werden die Itemfitwerte herangezogen, so kann ebenfalls keine eindeutige Entscheidung getroffen werden. Bei den gewichteten MNSQ-Fitwerten gibt es bei beiden Modellen Misfits bei den Items N2 und N8C. Während dieser Misfit beim Item N2 mit 1,27 im Vergleich zu 1,35 beim zweidimensionalen Modell geringer ausfällt, ist er beim Item N8C mit 1,36 größer als beim eindimensionalen Modell, wo dieser 1,22 beträgt. Insgesamt entscheide ich mich nun vor allem aufgrund der Reliabilitäten für das eindimensionale Partial-Credit-Modell.

Phase 2: Itemselektion

Im nächsten Schritt wird nun überprüft, ob einzelne Items aus dem Test eliminiert werden sollten, um die Modellgüte noch zu verbessern. Es muss jedoch gleichzeitig berücksichtigt werden, dass die Itemanzahl nicht besonders groß ist, da es sich bereits um eine Auswahl von Items handelt. Außerdem wurde für den gesamten „Nachtest“ bereits eine Itemselektion durchgeführt und bei den Items des Subtests handelt es sich allesamt um solche Items, die bei der Selektion beibehalten wurden. Dennoch soll noch einmal auf die Items eingegangen werden, die bei der Skalierung des Subtests Misfits aufweisen. Dabei handelt es sich zum einen um das Item N2. Der gewichtete MNSQ-Fitwert für das gesamte Item befindet sich mit 1,35 außerhalb des wünschenswerten Bereichs von 0,80 bis 1,20 und mit einem T-Wert in Höhe von 2,9 ist diese Abweichung statistisch signifikant. Auch bei den gewichteten MNSQ-Fitwerten der einzelnen Stufen dieses Items treten Misfits auf. Für die Stufe 0 liegt der Wert 1,28 zwar überhalb von 1,20, doch da der T-Wert 1,8 beträgt, ist diese Abweichung bei einem 5%-Niveau nicht signifikant. Für die Stufe 3 hingegen beträgt der gewichtete MNSQ-Fitwert 1,29 und mit einem T-Wert von 2,5 ist die Abweichung statistisch signifikant. Des Weiteren steigen bei diesem Item die punkt-biserialen Korrelationen der einzelnen Stufen nicht sukzessive an. Dennoch soll das Item – wie schon bei der Itemselektion des „Nachtests“ begründet – beibehalten werden, es handelt sich bei der 0,9-Problematik um eines der Workshopziele. Des Weiteren weist das Item N8C Misfits auf. Der gewichtete MNSQ-Fitwert für das Item insgesamt beträgt 1,22, doch da der T-Wert 1,7 entspricht, ist die Abweichung vom idealen Wert 1 nicht statistisch signifikant. Der gewichtete MNSQ-Fitwert für die 0. Stufe dieses Items beträgt 1,28 und diese Abweichung ist mit einem T-Wert in Höhe von 2,9 statistisch signifikant. Dennoch soll auch dieses Item aus inhaltlichen Gründen nicht verworfen werden, da die Unterscheidung zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten ebenfalls ein wesentliches Ziel des Workshops darstellt. Weitere Misfits sind bei der Skalierung des Subtests nicht aufgetreten.

Phase 3: Überprüfung des Modells

Da in der vorangegangenen Phase der Itemselektion kein Item eliminiert wurde, hat sich der Datensatz nicht verändert. Somit muss das gewählte Modell nicht noch einmal überprüft werden, da es auf Basis des finalen Datensatzes ausgewählt wurde.

Phase 4: Schätzung der Personenfähigkeiten

Abschließend können die Personenfähigkeiten auf Basis des Subtests geschätzt werden. Wie bereits bei den zuvor skalierten Tests wird auch hier die WLE-Methode verwendet. Damit ist die Skalierung des Subtests nun vollständig durchgeführt.

5.4.2 Möglicher Effekt des Workshops auf den Subtest

Nun soll erneut der Frage nachgegangen werden, ob ein Effekt der Workshopteilnahme nachgewiesen werden kann, dieses Mal nicht in Bezug auf das Ergebnis im gesamten „Nachtest“ beziehungsweise auf dessen Dimensionen, sondern in Bezug auf das Ergebnis im gerade skalierten Subtest. Um das Vorwissen der Studierenden zu berücksichtigen, werden die Differenzen aus den Personenfähigkeiten im Subtest des „Nachtests“ und denen im „Vortest“ gebildet. Wieder soll die Experimentalgruppe sowohl mit der kleinen als auch mit der großen Kontrollgruppe verglichen werden.

Gruppe	N	arith. Mittel	SD	Median	Min	Max
Gesamt	82	0,198	0,917	0,228	−2,69	2,34
EG	10	0,661	0,951	0,746	−1,47	1,71
kleine KG	7	0,401	0,599	0,602	−0,499	1,021
große KG	72	0,134	0,900	0,082	−2,69	2,34

Tabelle 5.79: Deskriptive Statistiken der Differenzen zwischen den Personenfähigkeiten im Subtest des „Nachtests“ und denen im „Vortest“

In Tabelle 5.79 sind sowohl für die gesamte Gruppe als auch für die Experimental- und die beiden Kontrollgruppen das arithmetische Mittel, die Standardabweichung (SD), der Median, das Minimum und das Maximum der Differenzen der Personenfähigkeiten dargestellt. Bei der Anwendung des Mann-Whitney-U-Tests für den Vergleich der Experimentalgruppe mit der kleinen Kontrollgruppe werden zunächst die Differenzen der Personenfähigkeiten aus dem Subtest des „Nachtests“ und denen aus dem „Vortest“ beginnend mit der kleinsten der Größe nach sortiert. Anschließend werden die Daten mit Rängen versehen und diese Ränge werden gruppenweise aufsummiert. Für die Experimentalgruppe ergibt sich als mittlere Rangsumme 9,90 und für die kleine Kontrollgruppe 7,71. Aus diesen Werten lässt sich die Teststatistik $U = 26$ berechnen. Mit $p = 0,417$ ist diese nicht signifikant. Daher kann die Nullhypothese, dass die beiden Gruppen in den zentralen Tendenzen übereinstimmen, nicht verworfen werden.

Werden mit dem Mann-Whitney-U-Test Experimental- und die große Kontrollgruppe verglichen, so lauten die mittleren Rangsummen 55,25 für die Experimental- und

Ränge				
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Sub	1	10	9,90	99,00
	2	7	7,71	54,00
	Gesamt	17		

Statistik für Test^a

	Diff_Sub
Mann-Whitney-U	26,000
Wilcoxon-W	54,000
Z	-,878
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,380
Exakte Signifikanz [2*(1-seitige Sig.)]	,417 ^b

a. Gruppenvariable: Workshop

b. Nicht für Bindungen korrigiert.

Abbildung 5.132: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten im Subtest des „Nachtests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der kleinen Kontrollgruppe

Ränge				
	Workshop	N	Mittlerer Rang	Rangsumme
Diff_Sub	Kontrollgruppe	72	39,59	2850,50
	Experimentalgruppe	10	55,25	552,50
	Gesamt	82		

Statistik für Test^a

	Diff_Sub
Mann-Whitney-U	222,500
Wilcoxon-W	2850,500
Z	-1,949
Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	,051

a. Gruppenvariable: Workshop

Abbildung 5.133: Teststatistik zum Mann-Whitney-U-Test für den Vergleich der Differenzen der Personenfähigkeiten im Subtest des „Nachtests“ und im „Vortest“ zwischen der Experimental- und der großen Kontrollgruppe

39,59 für die große Kontrollgruppe. Als Teststatistik ergibt sich zunächst $U = 222,5$. Da die Gesamtstichprobengröße mit $n = 82$ größer als 30 ist, wird der U-Wert zu $z = -1,919$ z-standardisiert. Bei leichter Abschwächung des Signifikanzniveaus von 5% zeigt sich mit $p = 0,051$ ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Die Nullhypothese, dass die zentralen Tendenzen in beiden Gruppen gleich sind, kann

somit verworfen werden. Um die Bedeutsamkeit dieses Unterschieds zu beurteilen, wird die Effektstärke berechnet. Mit $r = -0,215$ handelt es sich nach Cohen (1988) um einen kleinen bis mittleren Effekt.

Abgesehen von der geringen Experimentalgruppengröße ist eine weitere mögliche Erklärung dafür, dass der Effekt nicht größer ausfällt, dass zwischen den beiden Testzeitpunkten mehrere Wochen vergangen sind und abgesehen von dem Workshop viele andere Dinge geschehen sind, die Einfluss auf die Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff haben. Unter diesen Bedingungen ist es als Erfolg des Workshops zu werten, dass überhaupt ein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen nachgewiesen werden konnte.

Nach diesem Vergleich der Workshopteilnehmenden mit den übrigen Studierenden der Analysis-1-Vorlesung soll im nächsten Kapitel die retrospektive Analyse der Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz durchgeführt werden. Dazu sollen die Erkenntnisprozesse während dieser Nacherfindung analysiert werden. Ziel dieser Untersuchung ist der Gewinn von Erkenntnissen darüber, welche Veränderungen an dem Workshop-Konzept vorgenommen werden sollten, um die Erkenntnisprozesse besser zu fördern.

6 Retrospektive Analyse der Design-Based-Research-Studie

Die selbständige Erarbeitung der Definition der Konvergenz einer Folge in Kleingruppen bildet den Hauptteil des Vorbereitungsworkshops. Die dabei geführten Diskussionen der einzelnen Kleingruppen sollen nun analysiert werden. In Abschnitt 6.1 werden die Fragestellungen konkretisiert, die durch die Analyse der Diskussionen beantwortet werden sollen, und es wird dargestellt, wie bei der Analyse methodisch vorgegangen wird. Anschließend folgen in Abschnitt 6.2 Fallzusammenfassungen aller vier Kleingruppen und zu jeder Kleingruppe wird ein Vergleich des tatsächlichen Verlaufs mit dem hypothetischen Verlauf vorgenommen. Die Ergebnisse aller Gruppen werden in Abschnitt 6.3 zusammengefasst und das Kapitel endet mit einem Zwischenfazit in Abschnitt 6.4.

6.1 Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse

Die Fragestellungen, welche die retrospektive Analyse leiten, ergeben sich aus einer der in Abschnitt 3.1 formulierten Forschungsfragen:

3. Wie verlaufen die Erkenntnisprozesse bei der angeleiteten Nacherfindung der Definition der Konvergenz einer Folge basierend auf einer vorgegebenen Menge von (Nicht-)Beispielfolgen und gegebenenfalls eingesetzten Interventionen? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das Re-Design des Workshops?

Die Nacherfindungsprozesse sollen in Bezug auf verschiedene Aspekte analysiert werden. Zum einen soll untersucht werden, welche Vorverständnisse zu Konvergenz und angrenzenden Begriffen die Studierenden aufweisen und ob sie ihr Vorwissen produktiv einsetzen können. Unter Vorverständnissen beziehungsweise Vorwissen verstehe ich die Vorstellungen und die Kenntnisse zum Konvergenzbegriff, über welche die Studierenden zu Beginn der Aufgabenbearbeitung verfügen. Vorverständnisse könnten auf verschiedene Arten deutlich werden. Die Studierenden könnten äußern, welche Folgen unter ihr Bild konvergenter Folgen fallen und welche nicht. Des Weiteren könnten sich Strategien zeigen, wie sie entscheiden, ob eine Folge konvergiert und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. Außerdem könnten Vorverständnisse in Form verbaler Beschreibungen deutlich werden. Es stellt sich die Frage, wie sich das Vorwissen auf die Nacherfindungsprozesse auswirkt. Es wäre denkbar, dass Studierende auf ihrem Vorwissen aufbauen, sie während der Aufgabenbearbeitung feststellen, dass ihr Vorverständnis unzureichend ist und sie dieses anpassen. Es könnte jedoch auch sein, dass sich ungeeignete Vorverständnisse hinderlich auswirken. Daran schließt sich die Frage an, ob durch eine Veränderung des Workshop-Konzepts erreicht werden kann, dass das Vorwissen besser berücksichtigt wird.

und die Studierenden dieses produktiver einsetzen können.

Zu der *Hypothetical Learning Trajectory*, die in Kapitel 4 dargestellt wurde, gehören auch hypothetische Erkenntnisverläufe. Es wurden verschiedene Versionen antizipiert, wie die Nacherfindungsprozesse verlaufen könnten, welche charakteristischen Merkmale die Studierenden an den Beispielfolgen erkennen und an welchen Stellen Unterstützungsbedarf bestehen könnte.

Da eine generische Auffassung der Beispielfolgen nötig ist, um die Aufgabenstellung so zu bearbeiten, wie sie gedacht ist, soll untersucht werden, inwiefern dies der Fall ist. Jedes vorgegebene Beispiel steht stellvertretend für eine ganze Klasse von Folgen. Würden die Studierenden die Beispiele nicht generisch auffassen, so würden sie lediglich versuchen, eine Eigenschaft zu finden, welche die explizit vorgegebenen Beispielfolgen charakterisiert, anstatt die durch die Beispiele repräsentierten Klassen von Folgen. In dem Fall könnte eine Charakterisierung gefunden werden, die jeweils einen festen Wert anstelle der Variablen ϵ und n_0 enthält.

Für die erwarteten Problemsituationen wurden Unterstützungsangebote vorbereitet. Dazu soll analysiert werden, inwiefern die antizipierten Prozesse tatsächlich zu beobachten waren. Bei Abweichungen soll der Frage nachgegangen werden, ob Veränderungen der Aufgabenstellung, der Menge der (Nicht-)Beispielfolgen oder der Unterstützungsangebote nötig sind. Dabei könnte es sich nicht nur um Veränderungen bereits vorhandener Unterstützungsangebote handeln, sondern auch um die Ergänzung von Unterstützungsangeboten zu Problemsituationen, die im Vorfeld nicht erwartet wurden.

Des Weiteren ist davon auszugehen, dass die Studierenden unterschiedliche Voraussetzungen nicht nur in Bezug auf das Vorwissen zum Konvergenzbegriff, sondern auch in Bezug auf allgemeinere mathematische Kompetenzen und Einstellungen mitbringen. Daher soll ein Vergleich der Erkenntnisprozesse der verschiedenen Gruppen vorgenommen werden, um zu untersuchen, ob sich aus solchen unterschiedlichen Voraussetzungen Konsequenzen auf das Workshop-Konzept ergeben.

Abschließend soll untersucht werden, welche Definitionen die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten können. Diese könnten der üblichen formalen Definition entsprechen, könnten aber möglicherweise auch deutlich weniger formal sein. Auch wäre es möglich, dass es Studierendengruppen gibt, denen es nicht gelingt, eine Definition der Konvergenz nachzuerfinden.

Konkret ergeben sich daraus die folgenden Leitfragen:

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?
3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote

notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

- i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?
 - ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?
 - iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?
 - iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?
 - v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?
 - vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?
3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?
3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Nun wird die Methode dargestellt, mit der diese Fragen beantwortet werden sollen.

Um zum einen die Kompetenzen und Fehlvorstellungen von Studierenden zum Konvergenzbegriff tiefergehend analysieren und andererseits den Workshop evaluieren zu können, sollen die Diskussionen der Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer qualitativ analysiert werden. Dazu wurden die entsprechenden Diskussionen zunächst transkribiert.

Bei der Analyse der Transkripte bin ich angelehnt an die Methode der interpretativen Unterrichtsforschung nach Krummheuer und Naujok (1999) vorgegangen, um die Erkenntnisprozesse der einzelnen Kleingruppen zu rekonstruieren. Im Allgemeinen fokussiert sich die interpretative Unterrichtsforschung zwar eher auf die Untersuchung alltäglicher Unterrichtsprozesse, doch es finden sich auch Projekte wie das von Wood et al. (1993), bei dem ein „teaching experiment“ den Ausgangspunkt bildet.

Kern dieser Analysemethode ist die Interaktionsanalyse, bei der für die einzelnen Äußerungen möglichst vielfältige Deutungen dafür gefunden werden, wie die Interakteure die Äußerung interpretiert haben könnten. Krummheuer und Naujok (1999) schlagen dabei die folgenden Grundsätze vor, die erfüllt werden sollten:

- 1) „Gliederung der Interaktionseinheit
- 2) Allgemeine Beschreibung
- 3) Ausführliche Analyse der Einzeläußerungen – Interpretationsalternativen (re-)konstruieren
- 4) Turn-by-Turn-Analyse
- 5) Zusammenfassende Interpretation“ (Krummheuer und Naujok, 1999, S. 68)

Eine Interaktionseinheit besteht in diesem Fall aus der Bearbeitung der Hauptaufgabe von einer Kleingruppe. Diese Interaktionseinheit habe ich in kleinere Einheiten unterteilt. Die Kriterien für die Gliederung können je nach Forschungsinteresse gewählt werden. Ich habe immer dann eine neue Einheit festgelegt, wenn eine Gruppe ein Zwischenergebnis formuliert hat, wenn ich als Lehrperson interveniert habe und wenn eine Gruppe über einen anderen Aspekt zu diskutieren beginnt. Begonnen habe ich dann mit einer eher oberflächlichen allgemeinen Beschreibung. Anschließend habe ich alle für die Rekonstruktion des Erkenntnisprozesses relevanten Einzeläußerungen in ihrer Reihenfolge ausführlich analysiert. Dazu wurde jeweils versucht, verschiedene Interpretationsalternativen zu finden. Weniger relevante Äußerungen wurden aufgrund des Umfangs des Datenmaterials ausgelassen. In der anschließenden Turn-by-Turn-Analyse sind manche der Interpretationsalternativen wieder eliminiert worden, da sie sich im weiteren Verlauf der Diskussion nicht bewährt haben. Die Hauptfrage dabei sollte sein: „Wie reagieren andere Interaktanten auf eine Äußerung, wie scheinen sie die Äußerung zu interpretieren, was wird gemeinsam aus der Situation gemacht?“ (Krummheuer und Naujok, 1999, S. 70). Es werden also zu einer Einzeläußerung, zu der bereits Deutungsalternativen generiert wurden, die nachfolgenden Äußerungen betrachtet und es wird überprüft, ob es Hinweise darauf gibt, wie die Äußerung von den anderen Personen gedeutet wird. Der abschließende Schritt ist die zusammenfassende Interpretation, in der lediglich die Interpretationen wiedergegeben werden, die sich in der Turn-by-Turn-Analyse bewährt haben. Im Folgenden werde ich nur die zusammenfassende Interpretation darstellen, wie es auch von anderen Forschenden gemacht wird:

„Wichtig ist u.E. jedoch, daß die Darstellung die Forschungsarbeit mit ihren Ergebnissen nachvollziehbar macht. Dem ist es mitunter abträglich, die Analyse eines Transkriptes in allen Einzelschritten [...] vorzuführen, weil in der Vielfalt der Interpretationsalternativen der Überblick verloren gehen kann. Daher beschränken wir uns in der Darstellung oft auf den u.E. am besten zu plausibilisierenden Interpretationsstrang.“ (Krummheuer und Naujok, 1999, S. 58).

Um dem Leser den Überblick zu vereinfachen wird zu Beginn jeder Phase eine kurze Zusammenfassung dessen gegeben, was innerhalb der Phase diskutiert wird. Am Ende jeder Phase wird außerdem rekonstruiert, wie der Erkenntniszustand der gesamten Gruppe oder auch einzelner Gruppenmitglieder aussieht. Erkenntniszuwächse können dabei nicht nur auf der Ebene der formulierten Charakterisierung zu finden sein, sondern sie können auch auf der Ebene des *Concept Images* geschehen.

An die gerade beschriebene Argumentationsanalyse können sich laut Krummheuer und Naujok (1999) je nach Forschungsinteresse weitere Analysen anschließen. In diesem Fall soll auf die Leitfragen Bezug genommen werden. Dazu werden zunächst alle Textstellen, die für die jeweilige Leitfrage relevant sind, identifiziert und anschließend im Hinblick auf die Leitfrage analysiert und zusammengefasst.

Zunächst werden die Nacherfindungsprozesse der einzelnen Gruppen dargestellt und analysiert. Anschließend werden die Ergebnisse der vier Gruppen zusammengefasst und verallgemeinert, die Erkenntnisverläufe werden miteinander verglichen und es werden Konsequenzen in Bezug auf das Re-Design des Workshop-Konzepts formuliert.

6.2 Erkenntnisverläufe bei der Nacherfindung

Nun folgen nacheinander jeweils die Erkenntnisverläufe und die Analysen in Bezug auf die Leitfragen aller vier Gruppen. Äußerungen von mir als Lehrperson sind jeweils mit L bezeichnet.

6.2.1 Gruppe 1: Tatsächlicher Verlauf

Die Gruppe besteht aus den vier Studentinnen Steffi (S), Julia (J), Marie (M) und Katharina (K), welche die Analysis-1-Veranstaltung alle zum ersten Mal besuchen und sich freiwillig für den Workshop angemeldet haben.

Phase 1: Abgrenzung des Nicht-Beispiels von den übrigen Folgen über Anzahl und Art der „Sprünge“

In der ersten Phase betrachten die Studierenden als erstes das vorgegebene Nicht-Beispiel und versuchen, einen Unterschied zu den Beispielfolgen zu finden. Sie erkennen einen Unterschied in Bezug auf die Anzahl und Art der „Sprünge“ der Folgen.

Zunächst beginnt eine der Studentinnen, über das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ zu sprechen.

1 M: *Also bei der Abbildung x n war das ja so, dass man ... wenn man, äh ... die Abbildung gegen Unendlich betrachtet, sieht man immer wieder diese Sprünge*

Der Kern von Maries Aussage ist, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer wieder „Sprünge“ hat. Sie meint damit sicherlich, dass jedes zehnte Folgenglied den Wert 2 hat, während alle übrigen Folgenglieder durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind. Sie hat damit direkt zu Beginn einen wesentlichen Aspekt genannt. Katharina knüpft nun daran an:

7 K: *Und ich war-, wir hatten auch bei andern auch diese Sprünge drin, aber die waren ja nur klein, ne (fragend)?!*

8 M: *Ja, genau*

9 J: *((U)) sie beziehungsweise wir gehen eh zu eins, wo du ja eh hin wolltest*

Katharinas Aussage beinhaltet, dass es bei manchen der Beispielfolgen ebenfalls Sprünge gibt. Diese Sprünge seien aber „klein“ oder es handle sich um Sprünge zur 1. Vermutlich denken die Studentinnen dabei an $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ oder $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$. Die Gruppe versucht hier einen Unterschied zwischen dem Nicht-Beispiel und den Beispielen auszumachen, was eine sehr gute Strategie ist. Die Gruppe kommt anschließend darauf zu sprechen, dass es auch unter den Beispielfolgen größere Sprünge gibt, davon allerdings nur endlich viele:

10 M: *Ja, außer bei fünf*

11 S: *Ja, ja genau*

12 M: *Da ist ein Sp-*

13 J: *Ja, genau, bei fünf ist nur ein Sprung*

14 M: *Ja, bei sechs meine ich*

15 J: *Sechs, ja, aber der kann eigentlich auch weg ((U))*

16 S: *Ja, aber das is-, wenns-, gegen Unendlich betrachtest*

17 J: *Kann weg*

18 S: *Und das hier ... das bleibt auch da wo ((U)) ne (fragend)?!*

19 J: *Genau. Das bleibt ja erst-*

20 M: *Das bleibt bei eins*

21 S: *Okay*

22 J: *Ja, ab der 500000 ist ja nur noch eins*

23 M: *Genau ... so wurd's ja definiert*

Marie wirft ein, dass der Sprung bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ nicht „klein“ sei. Julia und Steffi entgegnen, dass das egal sei, da es nur einen Sprung gebe und sie würden die Folge „gegen Unendlich“ betrachten. Mit der Aussage, der eine Sprung „kann eigentlich auch weg“ könnte Julia meinen, dass die Folge ab irgendeinem Index keine Sprünge mehr hat. Es wird allerdings nicht klar, ob Marie verstanden hat, was Steffi und Julia versucht haben zu erklären. Im Anschluss spricht Steffi die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die für $200000 \leq n \leq 500000$ durch -3 und für alle übrigen natürlichen Zahlen durch 1 definiert ist. Ihre Kommilitoninnen antworten, die Folge „bleibt bei eins“ beziehungsweise „ab der 500000 ist ja nur noch eins“.

Zwischenstand:

Eine Charakterisierung hat die Gruppe zu diesem Zeitpunkt noch nicht formuliert. Sie haben aber einen Unterschied zwischen dem Nicht-Beispiel und den Beispielfolgen erkannt: Das Nicht-Beispiel hat „immer wieder“ Sprünge, während die Beispiele wenn überhaupt nur einzelne oder kleine „Sprünge“ haben. Sie haben hier auch erkannt, dass es sich bei der gemeinsamen Eigenschaft um eine von Mangoldt und Knopp (1980) als infinitär bezeichnete Eigenschaft handelt, die „völlig unabhängig von dem Wert irgendeines speziellen Gliedes“ (Mangoldt und Knopp, 1980, S. 458) ist. Unterschiede zwischen den einzelnen Gruppenmitgliedern lassen sich hier nicht feststellen.

Phase 2: Vorläufige Festlegung einer Charakterisierung unter Verwendung des Schulbegriffs „Grenzwert“

Katharina bringt den Vorschlag ein, an den Termen abzulesen, dass die Beispielfolgen gegen 1 verlaufen. Dann lesen sie sich die Aufgabenstellung noch einmal durch und formulieren eine erste Charakterisierung.

Da die Studierenden vermuten, dass ihre bisherige Argumentation noch nicht ausreicht, schlägt Katharina vor, anhand der Formeln zu begründen:

25 S: *Okay, ich glaub, es reicht nicht, wenn wir sagen: Wir haben es anhand der Abbildung erkannt*

26 *(Lachen)*

27 J: *Bestimmt nicht*

28 K: *Aber du kannst doch auch mit den Formeln, ne (Floskel), in der Schule hatten wir zum Beispiel, wenn du halt die Formeln hast, eins plus eins durch n, dieses eins durch n verläuft ja gegen null und dann haste am Ende nur noch die Eins übrig. So haben wir das anhand der Formeln begründet*

29 S: *[Ja]*

30 M: *[Ja]*

31 K: *Wenn wir das jetzt bei allen machen reicht es eigentlich, oder?*

Katharina bezieht sich hier explizit auf Vorerfahrungen aus der Schule. Am Beispiel des Folgenterms $1 + \frac{1}{n}$ begründet sie, warum dieser gegen 1 „verläuft“. Da $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 „verläuft“, bleibt von dem gesamten Term „am Ende nur noch die Eins übrig“. Kurz danach liest sich Katharina den Arbeitsauftrag noch einmal durch:

33 K: *Okay, die, die gemeinsame Eigenschaft der Folgen-*

34 J: *Ich mein, die Eigenschaft ist ja eigentlich, dass für n gegen Unendlich die Formel dann gegen Unendlich läuft.*

Julia knüpft mit ihrer Aussage nicht an die Beobachtungen, welche die Gruppe zuvor bereits gemacht hatte, an, da sie nicht von „Sprüngen“ spricht. Ob es sich bei „läuft

gegen Unendlich“ anstatt „läuft gegen 1“ lediglich um einen Versprecher handelt, kann nicht geklärt werden. Der Rest der Gruppe geht nicht auf diesen Aspekt ein. Die Gruppe scheint jedenfalls zu versuchen, den neuen Begriff „Konvergenz“ mithilfe ihnen bekannter Begriffe zu beschreiben, insbesondere durch den Ausdruck „verläuft gegen...“.

37 J: *Zum Beispiel hast du bei der ersten Formel ja auch im Nenner das n verläuft gegen Unendlich, im Zähler die Eins wird nicht betrachtet, weil n gegen Unendlich läuft und dann größer ist, dann biste wieder bei ein-, Unendlich durch Unendlich, also wieder bei eins*

Die Gruppe betrachtet erneut die erste Beispielfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{n}$. Julia versucht, den Grenzwert an der Formel abzulesen. Dabei betrachtet sie anstelle des Grenzwertes des gesamten Bruchs den Grenzwert des Zählers und den Grenzwert des Nenners einzeln. „ $\frac{\infty}{\infty} = 1$ “ stellt ihrer Meinung nach kein Problem dar. Anscheinend hat die Studentin bereits Vorerfahrung darin, an Termen von Folgen den Grenzwert „abzulesen“. Diese Strategie in Kombination mit ihrer Ansicht, dass $\frac{\infty}{\infty} = 1$ gilt, würde jedoch im Allgemeinen nicht unbedingt zu korrekten Ergebnissen führen. Insbesondere erlaubt ihre Strategie ihr lediglich Folgen mit geschlossenen Termen ohne Sonderteilfolgen zu analysieren.

Steffi kommt wieder zurück zur Formulierung der gemeinsamen Eigenschaft:

39 S: *Also sagen wir jetzt die, die gemeinsame Eigenschaft ist, dass es einen Grenzwert hat?*

40 M: *Ja, würd ich sagen ... dass sie alle gegen die Eins verlaufen*

Auch der Ausdruck „Grenzwert“ scheint den Probandinnen bekannt zu sein und sie verwenden ihn, um die Eigenschaft zu formulieren. Die einzelnen Gruppenmitglieder schlagen zwar etwas unterschiedliche Formulierungen vor, doch sie selbst äußern sich nicht über etwaige Unterschiede. Sie sind mit ihrer Formulierung zunächst zufrieden.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 1) *Die gemeinsame Eigenschaft ist, dass sie alle gegen 1 verlaufen.*

Ein Erkenntnisfortschritt innerhalb dieser Phase ist, dass die Studierenden erkennen, dass die Formulierung einer gemeinsamen Eigenschaft von ihnen gefordert ist. Zumindest mündlich machen sie dies. Dabei gibt es Unterschiede zwischen den Gruppenmitgliedern. Bei Julia ist nicht klar, ob ihre Formulierung, dass die Formel für n gegen Unendlich gegen Unendlich läuft, ein Versprecher ist oder ob sie dies tatsächlich meint. Steffi spricht allgemeiner davon, dass die Folgen alle einen Grenzwert haben. Tatsächlich müsste, um eine gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen zu finden, die das Nicht-Beispiel nicht besitzt, der konkrete Grenzwert 1 nicht unbedingt berücksichtigt werden. Marie hingegen macht dies, von ihr stammt die Charakterisierung 1.

Phase 3: Überprüfen der vorläufigen Charakterisierung an den Beispielfolgen

Die Studierenden gehen in dieser Phase alle gegebenen Folgen einzeln durch und versuchen jeweils, auf Basis ihrer Schulstrategie zu begründen, dass alle Beispiele die Charakterisierung erfüllen, das Nicht-Beispiel hingegen nicht.

Sie beginnen mit der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$:

44 J: *Ja, können wa ja eben durchgehn... weil die Zweite ist eh klar. Ab 125 haste eh nur noch die Eins*

Julia hat richtig erkannt, wie die Folge sich verhält. Möglicherweise ist ihr auch klar, dass die Folge gegen 1 konvergiert, auch wenn sie dies nicht explizit äußert. Zwei der übrigen Studierenden stimmen zu, nur Steffi äußert sich nicht. Bemerkenswert ist auch, dass Julia die Definition für b_n für $n \leq 125$ gar nicht erwähnt. Anscheinend ist ihr klar, dass die Werte der ersten endlich-vielen Folgenglieder nicht relevant sind. Bei der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ argumentiert Steffi ähnlich wie zuvor Julia, als Grenzwert ergebe sich „Unendlich durch Unendlich, also Eins“. Auch an dieser Stelle der Diskussion widerspricht keiner der Studierenden. Als nächstes sprechen sie über die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

52 M: *Genau ... bei c n ist ja auch klar, dass nur zwischen, äh ... 200000 und 500000, dass man dann minus drei hat und ab dann biste ja auch eins, quasi davor noch und danach*

Marie sagt, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ „auch klar ist“. Ob ihr lediglich klar ist, wie die Folge definiert ist, oder ob ihr auch die Konvergenz gegen 1 klar ist, wird wie schon zuvor nicht ganz deutlich. Von den übrigen Studierenden kommen keine inhaltlichen Nachfragen und

sie gehen zur Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ über.

61 J: *Ich mein, mit dem Vielfachen ist bei d ja eh klar. Ist ja eh immer eins*

62 K: *Genau, aber das, das Vielfache ist bei eins und das andere nähert sich auch der eins an, ne, deswegen*

Die Folge ist für Vielfache von 10 anders definiert als für die übrigen natürlichen Zahlen.

Der Unterschied zur Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ besteht darin,

dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für Vielfache von 10 den Wert 1 annimmt, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen den Wert 2. Die Studierenden sprechen zumindest nicht explizit über den Vergleich dieser beiden Folgen. Katharina nennt in ihrer Aussage jedoch genau den wesentlichen Aspekt, weswegen die Konvergenz gegen 1 bei der betrachteten Folge erfüllt ist. Außerdem ist hervorzuheben, dass sie bei dieser Folge auf beide Terme, durch welche die Folge definiert ist, eingeht. Das ist hier wichtig, weil durch beide Terme jeweils unendlich viele Folgenglieder definiert sind. Bei der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bei der nur durch einen der beiden Terme unendlich viele Folgenglieder definiert sind, hatte die Gruppe hingegen lediglich diesen Term erwähnt. Das deutet erneut darauf hin, dass sie erkannt haben, dass die gemeinsame Eigenschaft eine infinitäre Eigenschaft ist. Anschließend sprechen die Studierenden über die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$.

67 M: *e n gleich eins*

Es lässt sich nicht eindeutig feststellen, was Marie mit ihrer Aussage meint. Die anderen Studierenden gehen nicht direkt auf ihre Aussage ein.

68 J: *G-, g ist jetzt sowieso offensichtlich, aber ich wüsste jetzt nicht, wie ich das begründen sollte*

69 K: *Bei e?*

70 J: *Ja*

71 M: *Ja, gut, wenn du null Komma, ne (verneinend), quatsch*

Marie scheint sich unsicher zu sein. Julia hat sich am Anfang anscheinend versprochen und meint die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wenn sie g sagt. Sie behauptet zwar, es sei offensichtlich, doch sie sagt nicht explizit, was offensichtlich ist. Möglich wäre, dass sie meint, dass der Grenzwert der Folge 1 sei. Eine Begründung kann sie jedoch nicht geben. Steffi hingegen scheint die Folge korrekt aufzufassen:

72 S: *Naja, wenn du jetzt n un-, gegen Unendlich laufen lässt, hast du null Komma Periode neun*

73 M: *Ja, und wir wissen ja-*

74 K: *Dass das eins ist*

Steffi sagt, dass die Folge den Grenzwert $0, \overline{9}$ hat und Katharina ergänzt, dass $0, \overline{9} = 1$ gilt. Anschließend besprechen sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$.

79 J: *Ich mein, die Zwei interessiert nicht, weil sie eh nur einmal ist*

80 M: *Genau*

81 S: *Genau, das ist ja-, wenn man das gegen Unendlich betrachtet-*

Da sie die Folge „gegen Unendlich“ betrachten und durch den Term 2 nur ein einziges Folgenglied definiert ist, betrachten sie den Term, durch den die übrigen Folgenglieder festgelegt sind. Hier zeigt sich erneut, dass sie erkannt haben, dass es sich um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Sie diskutieren nun über den hinteren Summanden des Terms $1 + (-\frac{1}{2})^n$ und kommen zu dem folgenden Ergebnis:

88 J: *Naja, okay. Dann wird das auch beliebig klein und fällt weg*

89 M: *Ja, dann haben wir es ja*

Die Gruppe ist nun der Meinung, sie sei mit der Aufgabe fertig. Sie sind die Beispielfolgen einzeln durchgegangen und haben jeweils anhand der Terme versucht zu begründen, dass sie alle „gegen die Eins verlaufen“. In den Turns 92 bis 101 sprechen sie darüber, ob sie nun etwas aufschreiben. Eine Studentin entscheidet sich dafür, das aufzuschreiben, was sie zuvor zu den einzelnen Folgen gesagt haben. Bei der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bei der sie zunächst schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty}{\infty} = 1$ kommen bei ihr Zweifel auf:

105 J: *Kann man das schreiben: Unendlich durch Unendlich? Sieht scheiße aus, oder?*

Die Fehlvorstellung $\frac{\infty}{\infty} = 1$ wurde zuvor bereits mündlich geäußert, dabei hat sich keins der Gruppenmitglieder daran gestört. Nun sind sie sich einig, „Unendlich durch Unendlich“ dürfe nicht geschrieben werden. Es lässt sich jedoch nicht zweifelsfrei feststellen, ob sie an dem Argument an sich zweifeln. Eigentlich würden sie gerne einen „Zwischenschritt“ hinzufügen:

110 J: *Wenn aber-, wir haben in der Schule immer einen Zwischenschritt gemacht, wo wir für die n's dann irgendwie was eingesetzt haben. Ich mein, wir haben nicht geschrieben: Unendlich, das ist ja-*

und kurz darauf:

115 J: *Ich mein, das plus eins fällt ja eh weg ... ne (verneinend), dann haben-, wir haben das immer noch-, weil du kannst ja, da-, wir haben immer noch einen Zwischenschritt dazwischen gehabt, das zwischen dem und dem, wo du geschrieben hast, dass die beiden gegen Unendlich sind und die Eins ist dann weggefallen, weil sie dann-*

Die Studentin bezieht sich hier explizit auf eine Strategie aus der Schule. Sie kann sich allerdings nicht mehr genau daran erinnern oder sie kann ihre Strategie nicht genauso auf die hier vorliegende Folge anwenden.

Da sie nicht wissen, was sie als „Zwischenschritt“ schreiben können und $\frac{\infty}{\infty}$ nicht schreiben wollen, notieren sie lediglich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Sie sind damit jedoch nicht zufrieden:

121 J: *Also, äh ... ja, ich mein, sonst bräucht ich nichts aufschreiben, hätte ich jedes Mal da stehen: a n gleich eins (lacht) ... bei n gegen Unendlich*

Steffi schlägt nun vor, sich mit der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

zu beschäftigen:

123 S: *Vielleicht sollten wir uns mal x n angucken und aufschreiben, warum das nicht so ist*

124 K: *Richtig*

125 J: *Ja, weil du einfach dieses zwei immer dabei behältst, ne?!*

126 M: *Ja, genau und weils immer dabei-*

127 K: *Jaja, genau*

128 J: *Nicht wegfällt*

129 K: *Richtig*

130 S: *Dass man eben auch bei Unendlich, sobald man da wieder bei dem Vielfachen von zehn angekommen ist-*

Umgangssprachlich formulieren die Studierenden, dass unendlich viele Folgenglieder den Wert 2 annehmen. Anschließend bemerken sie noch, dass die Folgenglieder, die durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, sich nicht dem Wert 2 annähern:

140 K: *Beziehungsweise, man muss zeigen, dass sich das hier nicht zwei annähert, ne (fragend)?!*

141 J: *Was jetzt?*

142 K: *Ja, das, äh ... für die Nicht-Vielfachen*

143 J: *Achso, ja stimmt, ja, genau. Ja das ne-, eben sagen, dass das sich Eins annähert, anders wären es verschiedene Werte, ja, genau. Stimmt ... (atmet laut aus)*

Zwischenstand:

Eine neue Charakterisierung wird in dieser Phase nicht formuliert. Die Studierenden versuchen für jede Beispielfolge die Schulstrategie „Ablesen am Folgenterm“ zu verwenden. Dabei zeigt sich die Fehlvorstellung $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Die Studierenden wollen den Bruch zwar nicht derart aufschreiben, dass sie an dem Argument selbst zweifeln wird jedoch nicht deutlich. Ein Erkenntnisfortschritt zeigt sich bei der Beschäftigung mit dem Nicht-Beispiel. Im Prinzip erkennen sie hier, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte besitzt, ohne dass sie diesen Begriff überhaupt kennen. Auf der Ebene des *Concept Images* stellen sie also fest, dass eine Folge, deren Folgenglieder sich verschiedenen Werten annähern, nicht unter die gesuchte Eigenschaft fallen.

Phase 4: Festlegung einer neuen Charakterisierung unter Verwendung des Ausdrucks „Annähern“

Die Gruppe berichtet mir hier, was sie bereits erarbeitet haben. Dabei nennen sie mir eine neue Formulierung der Charakterisierung.

Nachdem die Gruppe sich kurz über private Dinge unterhält, komme ich dazu und frage sie nach dem Zwischenstand. Sie antworten:

212 J: *Für n gegen Unendlich, wie die Formeln dann aussehen, zum Beispiel, dass eins durch eins plus n zu eins durch null und dann eins wird und dann*

213 K: *Also, wir haben halt erst mal gesagt, dass eben die haben alle das gemeinsam, dass sie sich irgendeinem Wert an-, annähern und dann haben wa-*

214 M: *((U))*

215 J: *Also alle bei der Eins, ja*

216 M: *Genau*

217 K: *Haben wa das-, haben wa das eben immer ... für die Einzelnen bestimmt und hier eben gezeigt, dass es ... ja, hier eben immer für die Vielfachen von zehn bei zwei ist und für die anderen bei eins und das wird immer so ... keinen-, nicht einen Wert gibt, an den er sich annähert*

Bei der Zusammenfassung der Studierenden fällt zunächst auf, dass Julia, als sie zu Beginn anscheinend über den Folgenterm $1 + \frac{1}{n}$ spricht, einen Fehler macht. Bei Übergang zum Grenzwert wird der Bruch natürlich nicht zu $\frac{1}{0}$, sie meint möglicherweise $1 + 0$. Da

die Studierenden diesen Fehler nicht gemacht haben, als sie zuvor über diese Folge gesprochen haben, ist davon auszugehen, dass es sich lediglich um einen Versprecher handelt.

Zwischenstand:

Werden die Aussagen von Katharina und Julia zusammengefasst, so ergibt sich als formulierte gemeinsame Eigenschaft:

(Charakterisierung 2) *Die Folgen haben alle gemeinsam, dass sie sich dem Wert 1 annähern und bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es keinen Wert, dem sich die Folge annähert.*

Die Ergänzung, dass es bei dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Wert gibt, dem sich die Folge nähert, bringt nun den Erkenntnisfortschritt, der in Phase 3 auf Ebene des *Concept Images* zu verzeichnen war, in die Charakterisierung. Marie scheint einverstanden zu sein, Steffi hingegen äußert sich hier nicht.

Phase 5: Aufforderung durch die Lehrperson, den Ausdruck „Annähern“ zu präzisieren

Ich versuche in dieser Phase, den Studierenden deutlich zu machen, dass ihre Charakterisierung noch zu unpräzise ist. Die Studierenden untersuchen schließlich auf Grundlage der vorgegebenen Beispielfolgen, was für Folgen die gesuchte Eigenschaft besitzen.

Da die Formulierung mit dem Begriff „Annähern“ noch unpräzise ist, gebe ich als Impuls, diese zu verbessern.

218 L: *Hmhm (bejahend) ... und, kann man das vielleicht auch-, versucht mal das ein bisschen, ähm, noch genauer auszudrücken, was jetzt dieses Annähern heißt*

219 J: *Kann man das nicht einfach so in Formeln schreiben, so für Limes n gegen Unendlich, wenn man dann eins plus eins durch n zum Beispiel hat, verläuft das gegen eins plus null, also eins oder so*

220 L: *Okay, aber was-, was genau heißt denn Limes?*

221 M: *Eins- pfff (unsicher)*

222 K: *Ne, dass man für-, dass man für n ... einen sehr großen Wert einsetzt, also ... ne (Floskel), Richtung Unendlich halt ... und guckt, wie sich das entwickelt, also wohin das läuft*

223 L: *Hmhm (bejahend)*

224 K: *Oder ... oder was-*

225 L: *Ja?!*

(M lacht)

226 L: *Also ... ich mein, wir möchten so ein bisschen das so entwickeln, dass wir dann irgendwie die Eigenschaft so ausdrücken können, dass wir, wenn wir so ne Folge haben, irgendeine, damit entscheiden können, ob sie diese Eigenschaft hat, oder nicht*

Die Studierenden bringen nun wieder ihre Strategie des Ablesens des Grenzwerts an den Termen ein. Sie schlagen auch vor, für n „einen sehr großen Wert“ einzusetzen. Da sie möglicherweise der Ansicht sind, dass sie mit ihrer Formulierung und den ihnen bekannten Verfahren bei einer beliebigen Folge entscheiden können, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht, bringt meine letzte Aussage ihren Prozess nicht voran. Ich mache sie daher anschließend erneut darauf aufmerksam, dass die Formulierung „annähern“ zu unpräzise ist und konkretisiere dies an verschiedenen Aspekten.

228 L: *Wenn wir jetzt einfach nur sagen: Sie nähern sich der Eins an ... ist das vielleicht manchmal noch ein bisschen schwierig bei manchen Folgen zu entscheiden. Nähern die sich jetzt eins an oder nicht? Was genau heißt es, dass sie sich eins annähern? Würd ich zum Beispiel denken: Hmm, heißt das ... dass sie die Eins erreichen dürfen oder nicht? ... Wüsst ich jetzt nicht sofort daraus. Heißt es, dass sie mit jedem Schritt näher rankommen ... oder vielleicht auch das nicht*

Offen bleibt, ob die Teilnehmerinnen eine Verbesserung der Formulierung nun als notwendig erachten. Zumindest diskutieren sie nun über die Aspekte, auf die ich sie aufmerksam gemacht habe:

230 J: *Also, in diesem Fall wäre ja zum Beispiel ... für ... n Vielfaches von zehn wäre es eins, aber für das andere nähert es sich an, also, ne (Floskel)*

231 L: *Hmhm (bejahend)*

232 J: *Das heißt, was du jetzt als erstes gesagt hast, das würde ja schon stimmen, also es darf auch den Wert erreichen*

Julia bezieht sich in ihrer Argumentation auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$, bei der jedes zehnte Folgenglied exakt dem Wert 1 entspricht. Sie argumentiert auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen, dass auch unter die gesuchte Eigenschaft fällt, wenn eine Folge den Wert „erreicht“. Anschließend betrachten die Studierenden geeignete Folgen, um weiter zu untersuchen, was alles darunter fällt:

237 K: *Wir hatten nachher auch den anderen Fall, wo das immer so-*

238 J: *Immer hoch und rüber, so, eben*

239 K: *Genau*

240 M: *Ja*

241 K: *Und sich dann dadurch auch angenähert hat, also es muss jetzt nicht ... sich gleichmäßig von einer Seite annähern*

242 J: *Ja*

243 L: *Hmhm (bejahend)*

244 K: *Vor allem ist es hier ja auch so, dass sie zwischendurch wieder weiter weg ist und trotzdem ((U)) eins kommst*

245 J: *Ja*

246 M: *Ja*

247 J: *Und das passt dann trotzdem*

Vermutlich sprechen die Studierenden zunächst von der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$, da diese die einzige unter den vorgegebenen Beispielfolgen ist, deren Folgenglieder den Grenzwert 1 sowohl über- als auch unterschreiten. Unter den Begriff des Annäherns fassen sie nun auch Folgen, die sich nicht „gleichmäßig von einer Seite annähern“. Anschließend kommen sie auf den zweiten von mir genannten problematischen Aspekt zu sprechen. Sie argumentieren auf Basis einer der Folgen, bei denen der Abstand der Folgenglieder zur 1 nicht monoton fallend ist. Es könnte sich um die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ handeln, aber auch um $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ oder $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$. Das lässt sich aus der Audioaufnahme nicht feststellen. Sie bemerken jedenfalls, dass auch Folgen, bei denen Folgenglieder „zwischendurch wieder weiter weg“ sind, auch unter den Begriff des „Annäherns“ fallen können.

Zwischenstand:

Hier ist der Erkenntniszuwachs nun wieder auf der Ebene der *Concept Images* zu verzeichnen. Angeregt durch meine Aussage in Turn 228 untersuchen sie, was für Folgen unter die gesuchte gemeinsame Eigenschaft fallen. Sie argumentieren hier ganz klar auf Basis der gegebenen Beispielfolgen. Sie erkennen, dass „der Wert“ auch erreicht werden darf, dass die Annäherung nicht „gleichmäßig von einer Seite“ geschehen muss und dass die Folgenglieder auch „zwischendurch wieder weiter weg“ sein dürfen. Da niemand widerspricht scheinen alle Gruppenmitglieder dies so zu sehen.

Phase 6: Versuch der Präzisierung der Charakterisierung durch die Betrachtung von Abständen

Die Gruppe versucht in dieser Phase, eine neue Charakterisierung zu finden. Sie kommen auf die Idee, den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert zu betrachten.

Auf meine Nachfrage, ob sie all diese gesammelten Aspekte unter ihrer Formulierung „Annähern“ verstehen würden, antwortet Julia:

249 J: *Letztendlich ist es ja nicht annähern, aber halt ... wenn man beliebig weit, also das n beliebig groß wird, dann kommt man ja trotzdem näher an die Eins*

Diese Aussage lässt vermuten, dass diese Studentin einsieht, dass das Wort „Annähern“ die gemeinsame Eigenschaft nicht oder nicht präzise genug beschreibt. Außerdem wird hier

zum ersten Mal „ n beliebig groß“ anstelle von Formulierungen wie „ n gegen Unendlich“ verwendet. Da die Gruppe nun über konkrete Formulierungen der Eigenschaft diskutiert und somit im Sinne der Aufgabenstellung vorangekommen ist, lasse ich sie nun unter sich weiter diskutieren. Marie bringt folgenden Vorschlag ein:

257 M: *Wenn man sagt, dass man ab einem ... dass für großes n ... der Abstand aller aufeinanderfolgenden Werte ... zu dem Grenzwert ... ziemlich nah an g kommt ... oder sich nur $((U))$*

Zunächst einmal ist mit g vermutlich der Grenzwert gemeint. Erst scheint Marie etwas wie „ab einem n “ oder „ab einem bestimmten n “ sagen zu wollen, korrigiert ihre Formulierung dann jedoch zu „für große n “. Möglicherweise sind diese Ausdrücke für sie synonym. Außerdem spricht die Studentin davon, dass „der Abstand aller aufeinanderfolgenden Werte zum Grenzwert nah an g kommt“. Hier ist nicht ganz klar was genau die Studentin meint. Vermutlich meint sie jeweils den Abstand eines Folgenglieds zum Grenzwert. Ob sie aussagen möchte, dass dieser Abstand für große n kleiner wird oder ob er eine Grenze unterschreitet, lässt sich hier nicht feststellen. Einen problematischen Aspekt enthält ihre Formulierung auf jeden Fall, der Abstand kommt nicht „ziemlich nah an“ den Grenzwert g , sondern „ziemlich nah an“ 0. Julia hat hingegen einen anderen Einwand:

258 J: *Ich find, diese f widerspricht dem ja eigentlich $((U))$ ja gut, aber, ich mein, theoretisch könntest auch zwischendurch auch einen Wert haben, dass bei n gleich, weiß ich nicht, 17000, das dann wieder bei sieben ist und trotzdem ist es immer im Unendlichen bei n -, bei eins oder so*

Dass die Formulierung von Marie nicht zur Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ passt, scheint zunächst nicht nachvollziehbar. Dass der Wert eines einzelnen Folgenglieds, egal das wievielte es ist, das Verhalten der Folge „im Unendlichen“ nicht beeinflusst, ist hingegen richtig. Möglicherweise meint Julia, dass bei einem einzelnen „großen n “ der Abstand dieses Wertes zum Folgenglied nicht unbedingt nahe 0 sein muss. In dem Fall könnte ihr Einwand als Kritik an der Formulierung „große n “ aufgefasst werden. Katharina schlägt schließlich eine neue Charakterisierung vor:

264 K: *Ja, aber, was ist denn, wenn man das sagt, dass es für große n der Abstand von aufeinanderfolgenden ... Folgegliedern zu dem Grenzwert ... immer kleiner wird. Ist das wenn-*

Zwischenstand:

(Charakterisierung 3) *Die Folgen haben alle gemeinsam, dass für große n der Abstand von aufeinanderfolgenden Folgegliedern zu dem Grenzwert immer kleiner wird.*

Der wesentliche Erkenntnisfortschritt in dieser Phase besteht darin, dass die Studierenden begonnen haben, den Abstand von Folgegliedern zum Grenzwert zu betrachten. Die konkrete Formulierung der Charakterisierung 3 ist erst einmal ein Vorschlag von Katharina. Marie hatte zuvor ebenfalls eine Charakterisierung vorgeschlagen, in welcher der Abstand der Folgeglieder zum Grenzwert verwendet wurde. Lediglich Julia scheint Zweifel an der Verwendung dieses Abstands in der Charakterisierung zu haben. Ihr Erkenntnisgewinn liegt darin, dass sie erkannt hat, dass auch Folgen unter die gesuchte Eigenschaft fallen,

bei denen für ein einzelnes – möglicherweise großes – n der Abstand des entsprechenden Folgenglieds zum Grenzwert groß sein kann. Über den Erkenntnisstand von Steffi kann nichts ausgesagt werden.

Phase 7: Verwerfen der Charakterisierung 3, aber Festhalten an der Betrachtung von Abständen

In dieser Phase hinterfragen die Studierenden zum einen, was „große n “ sind. Sie sind sich einig, dass keine konkrete Zahl festgelegt werden kann, ab welcher der Abstand betrachtet werden soll. Außerdem bemerken sie, dass die Charakterisierung 3 nicht geeignet ist, da sie nicht auf alle der vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft.

Julia fragt zu dem Vorschlag von Katharina nach:

265 J: *Aber was, was wären denn dann für dich große n ? Ab wann beginnt ein großes n ?*

266 K: *Ja, gegen Unendlich*

267 J: *Weiß nicht, ob man das sagen kann ... ich mein, das ist das Einzige, was ich sonst noch wüsste ... von daher ... weil ich dann immer denke: Theoretisch kannst auch sagen, du hast die Zahl, weiß ich nicht, neun Milliarden und die ist dann wieder bei ... zwei oder was auch immer*

Julia macht hier noch einmal deutlich, dass die Formulierung „für große n “ ungeeignet ist, da auch eine Folge, bei der ein einzelnes Folgenglied „für große n “ nicht nah am Grenzwert liegt, dennoch die gesuchte Eigenschaft erfüllt. Sie hat jedoch auch keinen anderen Vorschlag für eine Formulierung.

Die Gruppe beschäftigt sich weiter mit der „für große n “-Problematik:

268 K: *Ja, ja, klar ... ja, aber du kannst nicht festlegen: Ab der und der Zahl*

269 J: *Ne, ne (beides verneinend), das sowieso nicht*

270 M: *Also deswegen musste irgendwie, musste irgendwas mit Unendlich oder-*

271 J: *Ja*

Katharina und vermutlich auch ihren Partnerinnen ist bewusst, dass nicht eine feste Zahl angegeben werden kann, so dass sich ab diesem Index alle weiteren Folgenglieder auf irgendeine Art und Weise nah am Grenzwert befinden.

Letztendlich fällt einer Studentin noch ein zuvor unbemerkter Fehler auf:

276 J: *Obwohl, das passt hier auch wieder nicht, weil, ich mein, du hast ja immerhin alle zehn Schritte, dass du genau die Eins bist und dann wird der Abstand doch wieder größer und nicht kleiner ... dann würde diese Idee dem ja widersprechen (...) von daher passt das dann ja nicht*

Julia wendet die Charakterisierung 3 auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ an und überprüft diese. Sie stellt fest, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert 1 nicht immer kleiner wird. Auf der Ebene der Beispiele hatte die Gruppe schon zu einem früheren Zeitpunkt festgestellt, dass der genannte Abstand nicht immer kleiner werden muss. Jetzt stellt Julia fest, dass die Formulierung das nicht mit einschließt. Die Studierenden haben zunächst keine neue Idee, wie sie ihre Formulierung verbessern können. An der Betrachtung von Abständen wollen sie festhalten:

282 K: *Aber ich dachte, man muss irgendwie, man muss irgendwie mit dem, mit dem Abstand ... argumentieren*

283 J: *Ja, würd i-, aber mir fällt da auch nichts anderes ein, aber*

284 M: *Ja, aber-*

285 K: *Also weil mit dem Abstand da ha- ... sind wir dann weg von diesem annähern*

Katharinas letzte Aussage könnte bedeuten, dass sie erkannt hat, dass dynamisches Annähern etwas anderes ist als die (statische) Betrachtung von Abständen.

Zwischenstand:

Eine neugewonnene Erkenntnis in dieser Phase ist, dass die Formulierung „große n “ zu ungenau ist, dass allerdings auch keine konkrete Zahl fest gewählt werden kann. Des Weiteren bemerken sie, dass der Aspekt, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert immer kleiner wird, nicht geeignet ist, da dies auf die Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft. Die Gruppe hat hier also, wie es wünschenswert ist, die eigene Charakterisierung kritisch hinterfragt. Eine neue Charakterisierung formulieren die Studierenden in dieser Phase nicht.

Phase 8: Idee, einen größeren Bereich von Folgengliedern zu betrachten und Versuch der Präzisierung der Charakterisierung durch Verwendung der Variable ϵ

In dieser Phase bringen die Studierenden verschiedene eher bruchstückhafte Ideen ein, um die Charakterisierung zu formulieren. Dazu zählt vor allem die Variable ϵ , die sie verwenden möchten. Julia äußert außerdem die Idee, den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nicht für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder zu betrachten, sondern für einen größeren Bereich. Eine neue Charakterisierung finden sie hier nicht.

Marie und Julia bringen anschließend eine neue Idee ein.

287 K: *Wenn wir sagen ... oder die Differenz zwischen dem Grenzwert und den ... a n*

288 M: *Kleiner gleich oder größer gleich Epsilon*

289 J: *Kann man nicht irgendwie sagen, dass, ähm, Epsilon, habe ich auch schonmal dran gedacht irgendwas war doch mit Epsilon, ne?! Kann man nicht sagen, dass da über einen größeren Zeitraum von Zahlen insgesamt kleiner wird und nicht anhand*

von zwei Zahlen die hintereinander sind? ... Weil, ich mein, zwei Zahlen widerspricht dem, aber wenn du einfach sagst: Insgesamt, dass-, ich weiß zwar nicht, wie man das dann formuliert, aber dass die Zahlen insgesamt immer näher werden

Die beiden Studentinnen schlagen die Verwendung der Variable ϵ vor. Wie sie auf diese Idee kommen äußern sie nicht. Es kann vermutet werden, dass sie schon einmal eine ähnliche Definition gesehen haben, in der die Variable ebenfalls verwendet wurde. Wofür genau sie das ϵ verwenden möchten, ist hier noch nicht klar, zeigt sich aber im weiteren Verlauf der Diskussion. Julia hat in jedem Fall verstanden, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nicht für aufeinanderfolgende Folgenglieder verglichen werden sollte. Sie möchte dennoch weiterhin den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert betrachten. Ihre Formulierung „über einen größeren Zeitraum von Zahlen insgesamt kleiner“ ist zwar auch noch zu unpräzise, doch die Idee ist sehr gut und bringt die Gruppe einen großen Schritt voran.

290 M: *Es gibt einen irgendwas ... ne (verneinend), keine Ahnung*
((U))

291 J: *Ein beliebig kleines Epsilon und sowas, jaja*

Die Studierenden möchten anscheinend die zuvor umgangssprachlich ausgedrückte Idee in mathematischer Sprache formulieren. Sie scheinen einzelne Teile einzuwerfen, an die sie sich möglicherweise von anderen Definitionen erinnern. ϵ soll dabei für eine beliebig kleine Größe stehen, wie es auch allgemein üblich ist. Die Vermutung, dass sie schon einmal eine Definition gesehen haben, in der die Variable ϵ vorkommt, wird durch die folgende Aussage bestärkt:

293 J: *Aber ich weiß auch nicht mehr, wie das ging. Das konnt ich früher sonst*

Die Gruppe schaut in den Turns 294 bis 306 kurz in ein Buch, findet dort jedoch nicht die gesuchte Definition. Anschließend legen sie das Buch wieder weg, diskutieren weiter und bringen die Differenz wieder mit ein:

308 M: *Ja, die Differenz geht gegen null, oder nicht? ... Äh, gegen ... gegen keinen Wert ... zwischen den einzelnen Punkten*

309 K: *Und das nennen wir Epsilon*

Die Studierenden bezeichnen eine Differenz mit ϵ . Es ist nicht eindeutig erkennbar, welche Differenz sie in diesem Moment meinen. Das kommt anschließend zur Sprache:

311 J: *Aber, ich mein, du kannst nicht die Differenz zwischen zwei Punkten nehmen*

312 M: *Ne (verneinend), musste die Differenz von dem Grenzwert ... den Einzelnen nicht um den Punkt legen?*

313 J: *Ich würd-, ich glaube nicht, weil das ändert, das wird ja zwischendurch wieder größer, deswegen würde ich nicht von einem festen Wert die Differenz nehmen*

314 M: *Von einem beliebigen x ... oder was?*

315 J: *Ich weiß es nicht, weil ich mein, wenn du ein beliebiges x nimmst, dann hast du nachher den Punkt und da ist der Abstand wieder ganz hoch*

Die Gruppe ist sich unsicher, welchen Abstand sie betrachten sollen. In der letzten Äußerung bezieht sich Julia wieder auf eine Folge, bei der ein einzelnes Folgenglied weit entfernt vom Grenzwert ist. Nach dieser Äußerung folgt eine längere Pause, in der die Studierenden nachdenken. Da sie nicht weiterzukommen scheinen, frage ich erneut nach ihrem Zwischenstand. Sie fassen ihn wie folgt zusammen:

320 J: *Ja, also, wirklich ganz sind wir nicht weiter, also wir haben halt gedacht, eben mit dem Abstand halt geguckt, den Abstand zum Grenzwert ... aber ich hab halt auch gedacht, man kann schlecht von zwei benachbarten Zahlen einfach gucken, ob der Abstand zumindest kleiner wird, weil es gibt ja zum Beispiel bei der Funktion immer Werte, wo dann der Abstand doch wieder größer wird. Also müsste man da schon einen größeren Bereich gucken, ob der insgesamt kleiner wird*

Die Studierenden selbst haben den Eindruck, sie seien nicht viel weiter gekommen. Wird ihr jetziger Stand jedoch mit dem vorherigen Zwischenstand verglichen, so lässt sich ein deutlicher Erkenntnisfortschritt feststellen. Die Vorstellung von einem „größeren Bereich“, in dem der Abstand „insgesamt kleiner wird“ ist gut, es gelingt ihnen jedoch noch nicht, diese in einer Formulierung der Eigenschaft zum Ausdruck zu bringen. Sie wiederholen in den folgenden Turns ihre Überlegungen zum Abstand noch einmal, dabei werden keine neuen Erkenntnisse deutlich.

333 K: *Aber dann sind wir jetzt wieder dabei: Ja, er nähert sich der Null an und das ist ja wieder ... nicht so (lacht) ... praktisch ausgedrückt*

Außerdem nennen sie mir auch noch ihre Idee, ϵ zu verwenden:

336 M: *n ist größer als die kleinste Zahl Epsilon ... oder-*

337 J: *Irgendwie sowas mit Epsilon*

Zwischenstand:

Der Vorschlag von Julia, den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert „über einen größeren Zeitraum von Zahlen insgesamt“ zu betrachten ist ein großer Fortschritt, auch wenn sie diesen noch nicht in Form einer Charakterisierung formulieren kann. Ein weiterer zusätzlicher Aspekt ist die Verwendung der Variablen ϵ , worauf die Studierenden vermutlich aufgrund bruchstückhafter Erinnerungen einer ähnlichen Definition kommen. Sie sind sich noch unsicher und nicht einig, wie genau sie die Variable verwenden können.

Phase 9: Intervention durch Lehrperson: Beschäftigung mit ϵ -Streifen und Formulierung einer neuen Charakterisierung

In der folgenden Phase beschäftigen sich die Studierenden mit den ϵ -Streifen, die ich ihnen als Hilfsmittel gebe. Sie kommen dabei auf die Idee, als Charakterisierung den Abstand zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt zu betrachten, der immer geringer wird.

Um der Gruppe eine Hilfestellung dafür zu geben, zu erkennen, dass der Abstand jede beliebige Grenze unterschreiten muss und sie möglicherweise auch auf die Idee zu bringen, den Abstand erst ab einem bestimmten Folgenglied zu betrachten, händige ich ihnen an dieser Stelle die transparenten ϵ -Streifen zu den vorhandenen Grafiken der einzelnen Folgen aus. Ihre Aussagen, dass der Abstand „insgesamt kleiner wird“ und „er nähert sich der Null an“ sind noch unpräzise, von den erwarteten Situationen, in denen eine Intervention nötig sein könnte, handelt es sich also um die in Tabelle 4.2 unter (D) beschriebene Situation. Da ihnen selbst bewusst ist, dass ihre Formulierung unpräzise ist, stelle ich die vorgesehene Frage „Kann man mit eurer Formulierung entscheiden, ob die Beispielfolgen gegen 1 konvergieren oder nicht?“ an dieser Stelle nicht, sondern setze direkt die nächste vorgesehene Intervention ein. Ich stelle ihnen zu den ϵ -Streifen keinen expliziten Arbeitsauftrag, sondern sage ihnen, sie können schauen, ob ihnen die Streifen zusammen mit den Grafiken weiterhelfen:

343 L: *Da könnt ihr jetzt mal schauen ... mit den Grafiken ... sind da ja jetzt irgendwie so Streifen, die unterschiedlich breit sind*

344 K: *Ja*

345 L: *Da ist einer relativ breit, schmaler ... der ist so dazwischen ... so ein ganz schmaler*

346 M: *Hmhm (verstanden)*

347 L: *Vielleicht hilft euch das weiter*

Die Gruppe beginnt unmittelbar, die transparenten Streifen auf die Grafiken einzelner Folgen zu legen. Tatsächlich überlegen sie dabei auch direkt weiter, wie sie die gemeinsame Eigenschaft formulieren können:

353 K: *Vielleicht wenn man sich das-, die-, die Werte halt in so nem Abstand und in einem bestimmten Intervall hiervon bewegen ... weißte, wenn man das hier zum Beispiel ziemlich klein macht, ne (Floskel), wenn man erstmal diesen Streifen hier nimmt, dann machen diese Sprünge nichts mehr aus*

354 M: *Stimmt*

355 K: *Man muss nur festlegen, wie das sein muss*

356 M: *Stimmt, die liegen nur in dem-*

357 J: *Kann man da nicht sagen, dass der Intervall immer kleiner wird? ... weil ich mein, das wird der ja bei allen ... weil das haste ja auch bei denen, ich mein, bei denen funktioniert das ja nicht ... der bringt sowieso nichts, den haben wir eh ... der passt ja eigentlich eh nicht, ne!?*

Zunächst einmal fällt auf, dass die Gruppe, nachdem zuvor für eine kurze Zeit keine Diskussion mehr statt fand, da sie nicht weiter wussten, nun wieder aktiv weiterarbeitet. Insofern kann das Austeilen der ϵ -Streifen schon einmal als Erfolg gewertet werden. Es stellt sich natürlich die Frage, ob die Studierenden inhaltlich auch tatsächlich vorankommen. Da aus der Audioaufzeichnung nicht immer deutlich wird, über welche Folge die

Studierenden gerade sprechen, wie sie den ϵ -Streifen darauf platziert haben und worauf sie zeigen, lassen sich ihre Aussagen nicht immer eindeutig interpretieren. So ist bei der ersten Aussage von Katharina nicht klar, was mit dem Intervall gemeint ist. Der Abstand bezieht sich vermutlich auf die Werte der Folgenglieder, wobei auch hier nicht gesagt wird, zu welchem Wert der Abstand betrachtet wird. Die Studierenden betrachten in diesem Moment zunächst einen einzigen Streifen. In den folgenden Turns probieren sie verschiedene Streifen an verschiedenen Graphen aus. Welchen Abstand sie betrachten, wird an einer späteren Stelle der Diskussion deutlich:

388 K: *Ja, aber der Abstand zwischen den-, zwischen dem ... also*

389 M: *Zwischen einem beliebigen Punkt und dem Grenzwert, äh*

390 J: *((U)) Intervall*

391 K: *Ne (verneinend), eben nicht*

392 J: *Das Intervall wird kleiner, aber, ich mein-*

393 K: *Also, wir müssen-, wir müssen mal sagen, wie wir das Intervall jetzt, weil hier ist es ja nicht der Grenzwert. Da liegen die ja noch da drüber und da drunter*

394 M: *Ja*

395 K: *Und das s-, sehen wir als Intervall an*

396 J: *Jaja, eben ((U))*

397 K: *Und nicht den Abstand von einem Punkt bis zum Grenzwert*

398 J: *Eben. Der Abstand zwischen höchsten und tiefsten Punkt*

399 K: *Ja*

400 M: *Ja*

401 J: *Und der wird immer geringer (...) da passt das auch mit denen, die die Sprünge machen. Da ist der Abstand ja immer noch ... vergleichst ja nicht nur zwei Punkte, von daher. Intervall meine ich, nicht Abstand*

Die Studierenden hatten zuvor bereits festgestellt, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert mit wachsendem n nicht immer kleiner wird und sie hatten die Idee geäußert, stattdessen für „einen größeren Bereich [zu] gucken, ob der [Abstand] insgesamt kleiner wird“. Um dies umzusetzen möchten sie nun ein Intervall betrachten. Der Grenzwert selbst kann dabei ihrer Meinung nach keine Intervallgrenze sein, da der Grenzwert keine obere oder untere Schranke der Folge sein muss. Daher wählen sie als Intervallgrenzen den „höchsten und tiefsten Punkt“. Damit meinen sie vermutlich das Intervall $[\min_{n \geq n_0} a_n, \max_{n \geq n_0} a_n]$. Anzumerken ist, dass das Minimum und das Maximum nicht unbedingt existieren müssen, was den Studierenden jedoch nicht bewusst ist. Im Gegensatz zu dem Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert ist der Abstand der beiden Intervallgrenzen – vorausgesetzt sie existieren – für wachsendes n beziehungsweise

n_0 tatsächlich monoton fallend. Julia verwendet erst den Ausdruck „Abstand“, korrigiert sich dann selbst und benutzt stattdessen den Ausdruck „Intervall“. Sie betont außerdem, dass „nicht nur zwei Punkte“ verglichen werden. Möglicherweise bezieht sie sich dabei auf die vorherige Idee, die Abstände von je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern zu betrachten.

Im Anschluss sprechen die Studierenden in den Turns 402-409 kurz darüber, dass bald Pause ist, und sie versuchen, der Diskussion einer benachbarten Gruppe zuzuhören.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 4) *Das Intervall vom höchsten bis zum tiefsten Punkt wird immer geringer.*

Die Gruppe hat nun einen Weg gefunden, Julias Idee aus Phase 8 in eine Charakterisierung umzusetzen. Im Vergleich zur Charakterisierung 3 handelt es sich um einen Fortschritt, da die neue Formulierung – wird sie wie oben dargestellt interpretiert – tatsächlich auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und von dem Nicht-Beispiel nicht erfüllt wird. Die Studierenden scheinen zunächst alle damit zufrieden zu sein. Problematisch an der Charakterisierung ist wie bereits erwähnt, dass das entsprechende Minimum und Maximum nicht immer existieren müssen. Außerdem ist die Eigenschaft, dass ein solches Intervall immer geringer wird, nicht hinreichend für die Konvergenz einer Folge.

Phase 10: Versuch der Präzisierung der Charakterisierung durch Verwendung des Ausdrucks „ ϵ beliebig klein“ und Verbindung aller Aspekte zur Charakterisierung 5

In dieser Phase bringen sie die Variable ϵ wieder mit ein und haben die Idee, dass diese beliebig klein, nur nicht 0 sein soll. Diesen Teil verbinden sie mit den vorherigen Erkenntnissen und so gelangen sie mündlich zur endgültigen Charakterisierung.

Sie kommen wieder auf die Variable ϵ zu sprechen, die sie verwenden wollten:

410 M: *Ja, Epsilon muss sich ja in diesen Intervallen bewegen oder nicht? (...) er muss in diesem Streifen sein*

411 M: *((U)) aber das Epsilon muss doch in diesem Intervall liegen und aber*

412 J: *Ja*

413 M: *Es muss trotzdem ... also, dieser Abstand-*

414 J: *Aber wie groß ist denn jetzt Epsilon?*

415 M: *Beliebig klein, aber*

416 J: *Ja, was heißt denn beliebig klein?*

Zumindest Marie ist bewusst, dass sie nicht ein bestimmtes ϵ betrachten, sondern ein beliebig kleines ϵ , auch wenn die Gruppe selbst mit der Formulierung „beliebig klein“ noch nicht zufrieden ist. Aus der Audioaufnahme wird nicht deutlich, ob sie selbst eine Verbindung zwischen der Variablen ϵ und der Breite der transparenten Streifen herstellen.

Die Variable taucht auf den Streifen selbst nicht auf. Die Gruppe verwendet die Streifen in der verbleibenden Zeit nicht mehr. Sie überlegen in den Turns 417 bis 439 zunächst ohne nennenswerte Fortschritte eine Weile weiter, was „beliebig klein“ heißt, bis Katharina plötzlich in meiner Gegenwart einen Einfall hat:

440 K: *Achso, man kann Epsilon so klein machen, wie man will, nur nicht null?!*

441 L: *Hmhm (bejahend)*

442 K: *Und irgendwann muss-, irgendwann muss das halt diesen Punkt erreichen ... also*

443 L: *Muss es den Punkt erreichen oder was-*

444 K: *Nein, muss-*

445 J: *Die Punkte müssen in dem Bereich liegen, würd ich sagen, oder?*

446 K: *Genau, irgendwann muss, also für irgendein n , für irgendein großes n , erreicht dann, äh ... ja, der Graph im Grunde dieses Epsilon*

447 J: *Ja*

448 K: *Als Abstand*

Hier ist zum ersten Mal ein umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) erkennbar. Die Studierenden gehen von einem beliebigen ϵ aus, das der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert irgendwann unterschreitet.

Da die Gruppe bislang alles lediglich mündlich diskutiert hat, fordere ich sie nun dazu auf, etwas aufzuschreiben:

451 L: *Versucht das mal vielleicht aufzuschreiben*

Sie beginnen noch nicht sofort mit dem Aufschreiben, sondern klären noch einmal, was „beliebig klein“ heißt:

452 J: *Dann ist es doch eigentlich egal, wie g -, kann doch eigentlich Epsilon so klein sein, wie mans-*

453 L: *Ja*

454 J: *Irgendwie möchte $((U))$ oder?*

455 M: *Ja*

456 L: *Ja, genau*

457 K: *Also, dass eben für Epsilon im Grunde jeden Wert einsetzen kannst, nur eben nicht null, aber so nah wie möglich. Und irgendwann wird eben dieses Intervall-*

458 J: *Liegen alle Punkte halt in dem Epsilon-Intervall*

An dieser Stelle ist die Gruppe mit ihrer Formulierung so zufrieden, dass sie sich nun dem Aufschreiben widmen.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 5) *Für jedes ϵ größer als Null müssen irgendwann die Punkte alle in dem ϵ -Intervall liegen.*

In dieser Phase ist der wesentliche Fortschritt, dass die Studierenden umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) entwickeln. Erst wird ϵ beliebig, aber größer als 0 gewählt und dann liegen irgendwann alle Punkte in dem ϵ -Intervall. Diesen Fortschritt scheinen mindestens Katharina und Julia gemacht zu haben, bei Marie ist es nicht eindeutig erkennbar. Über den Erkenntnisstand von Steffi kann nichts ausgesagt werden.

Phase 11: Aufschreiben der endgültigen Charakterisierung in formaler Sprache

In dieser Phase widmen sich die Studierenden dem Aufschreiben der Charakterisierung 5, die sie bislang lediglich mündlich formuliert hatten. Sie verwenden dabei mathematische Sprache mit Quantoren und gelangen zu der allgemein üblichen $\epsilon - N$ -Definition.

Julia schlägt zunächst den Anfang der zu notierenden Eigenschaft vor:

461 J: *Es gibt ein Epsilon, würd ich sagen*

462 K: *Für, für jedes*

463 M: *((U)) muss Intervall größer oder gleich-*

464 K: *Für jedes beliebige Epsilon größer null*

Sie wird von einer Kommilitonin direkt korrigiert. Sie gehen dann direkt zum nächsten Teil weiter:

466 J: *Ja ... also für alle Epsilon größer null ... Für alle Epsilon größer null ... gibt es ein (lacht)*

467 M: *Es gibt ein*

468 K: *x*

469 J: *Gibt es da eigentlich ein n ... Element n ... bei dem alle-*

470 M: *a n meinst du oder was?*

471 J: *Ne (verneinend), erstmal gibts da ein n, für das alle a n ... mit-*

Sie sind sich anscheinend einig, dass sie als nächstes „gibt es ein“ schreiben, doch ab dann sind sie sich unsicher und uneinig. Katharina schlägt vor „gibt es ein x“. Diese Variable wurde zuvor noch nicht verwendet, wofür sie stehen soll wird nicht geäußert. Julia hingegen würde schreiben „gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ “. Marie fragt nach, ob sie a_n meint, doch Julia bleibt bei ihrem Vorschlag. Nun wird über den nächsten Aspekt gesprochen:

474 K: *Ne (verneinend), dass alle a von n größer ... ne (verneinend), a*

475 J: *Für alle ... ja, ich mein, alle a von n größer als das a von n , ne (fragend)?!*

476 M: *Ja*

477 J: *In dem Intervall liegen, aber wie schreibt man das jetzt? ... Da braucht man ja eigentlich eine andere Konstante, wir können ja nicht zwei n nehmen*

478 K: *Kann man nicht, ähm ... a von n größer ... achso*

479 J: *Wir können das eine n von- ... wir können doch schreiben: Für alle n von n gibt es ein a von k mit der Bedingung k größer als n , und dass die eben in diesem Intervall liegen ... so würd ich das jetzt formulieren, dass wir eine andere Konstante da drin haben (...) oder wir können auch anders herum: Gibt es ein k Element n , für das alle a von k ... mit der Bedingung k größer gleich n ... ne (verneinend), andersrum wieder*

Julia versucht auszudrücken, dass ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren in dem Intervall liegen. Zunächst sagt sie „alle a von n größer als das a von n “. Mit „ a von n “ meint sie jeweils a_n . Sie verwendet hier also zunächst eine Variable für verschiedene Dinge, zum einen für einen ganzen Bereich von Zahlen (bzw. eine Menge von Folgengliedern) und zum anderen für eine feste Zahl (bzw. ein festes Folgenglied). Im Sinne der Variablenaspekte nach Malle (1993) wird hier zum einen der Simultan- oder Veränderlichenaspekt deutlich. Die Variable n steht für verschiedene Zahlen eines Bereichs, und zwar für alle natürlichen Zahlen, die größer oder gleich einer festen Zahl sind. Auch möglich ist die Auffassung von n als Veränderliche, welche die entsprechenden Zahlen nacheinander durchläuft. Zum anderen wird die Verwendung von n bei „das a von n “ mit dem Charakter einer Einzelzahl im Sinne von Malle (1993) deutlich. Sie wird von Julia als feste Zahl angesehen. Die Studentin bemerkt dann, dass sie eine zweite „Konstante“ benötigt, womit sie vermutlich eine zweite Variable meint. Zusätzlich zur Variablen n verwendet sie dann die Variable k . In Turn 479 weicht ihre Formulierung mit „Für alle n von n gibt es ein...“ von dem ab, was sie zuvor bereits festgelegt hatten, nämlich dass sie mit „Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein n “ beginnen. Da sie das kurz darauf schon nicht mehr sagt, handelt es sich möglicherweise um einen Versprecher. Die Studentin bemerkt, dass die Variablen n und k auch umgekehrt verwendet werden könnten und entscheidet sich für eine Variante. Bei der notierten Eigenschaft fehlt ihnen nun noch der Aspekt, dass die Folgenglieder sich in „diesem Intervall“ befinden.

484 J: *k ... ne (verneinend), ich mein, da müssen wir wieder Abstand haben, oder? ... d von ... a von ... ach, wie schreib ich jetzt den Abstand?*

Die Studentin schlägt vor, einen Abstand zu betrachten, ist sich jedoch selbst unsicher. Die Gruppe überlegt gemeinsam weiter:

487 K: *Ja, a von-, a von n plus*

488 J: *k minus*

489 M: *Minus*

490 K: *Äh (nachdenkend) n*

491 J: *Minus ... wie nen-, schreiben wir Grenzwert oder nennen wir den irgendwie? Grenzwert ist jetzt für einen Buchstaben für den Grenzwert eingeben*

Sie kommen darauf, den Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert zu betrachten. Darüber diskutieren sie dann noch einmal:

497 K: *Ja, ne (verneinend), Moment, Moment, jetzt machen wirs doch wieder mit dem-, mit dem Grenzwert. Wir müssen doch jetzt irgendwie ... ähm (nachdenkend) ... das Intervall nicht, ähm ... von dem Punkt bis zum Grenzwert machen, sondern von dem Punkt bis zu dem andern Punkt der-*

498 J: *Ja, aber wenn du schreibst: Den Betrag von dem Punkt minus den Grenzwert, dann hast du ja den Abstand dazu. Du musst den Abstand-, ob du von oben oder von unten ist dann ja egal, wenn du Betrag machst ... oder wie willst du sonst den, äh, das Intervall definieren? Ich mein, du musst halt das Intervall von dem Grenzwert aus nach oben und unten definieren*

Katharina ist sich zunächst nicht sicher, ob die Betrachtung des Abstands $|a_k - g|$ dem widerspricht, was im Vorfeld diskutiert wurde. Da waren sie der Meinung, der Grenzwert könne nicht als Intervallgrenze gewählt werden, weil es bei manchen Folgen sowohl Folgenglieder gibt, die größer als der Grenzwert sind, als auch Folgenglieder, die kleiner als der Grenzwert sind. Julia antwortet, dass dies durch die Verwendung des Betrags kein Problem sei.

500 J: *Und das dann für alle*

501 M: *Das passt aber*

502 J: *k größer gleich n, würd ich sagen, irgendwie sowas*

503 M: *Du musst aber noch g und ... a k definieren*

504 J: *Ja, a k ist ja hier das Dingens ... von k und g ist ist gleich Grenzwert*

Mit der Bedingung $k \geq n$ haben sie die Charakterisierung nun vervollständigt. Auf die Bedeutung von n beziehungsweise a_n kommen sie anschließend noch einmal zu sprechen:

512 J: *Mit der ((U)) Bedingung gesagt, dass das n aber größer als ... größer gleich als ... weil, ich mein ja, wir brauchen ((U))*

513 K: *Mit k größer n, ja*

514 J: *Wir brauchen ja eh-, wir brauchen ja eh irgendeinen Startpunkt ab dem-, irgendeinen Startpunkt n, a n ab dem dann halt die alle da drin liegen*

Julia spricht die Bedingung an dieser Stelle nicht komplett aus. Zuvor hatte sie bereits $k \geq n$ genannt, hier beginnt sie erst mit $n > ...$ und dann mit $n \geq ...$. Möglicherweise kommt sie hier durcheinander, weil sie zuvor auch schon vorgeschlagen hatte, die Variablen genau umgekehrt zu verwenden und dies doch wieder verworfen hatte. Katharina korrigiert sie mit $k \geq n$. Julia erläutert dann, dass n beziehungsweise a_n der „Startpunkt“ sein soll, ab dem die Folgenglieder alle im Intervall liegen. Die Studentin ist sich allerdings noch unsicher, ob $|a_k - g|$ das gewünschte „Intervall“ beschreibt:

519 J: *Ich muss erstmal gucken, ob mein Intervall-, passt das ((U)) mit dem Intervall so ausgedrückt?*

520 M: *Glaube ja*

521 J: *Wir haben a k ((U)) ... was ist das?*

522 M: *Ja, das ist doch-*

523 J: *Haben wir den Abstand ... ja, ne?!*

524 M: *Ja, ja, klar*

525 J: *Und wenn wir jetzt von hier nach unten gehn, wir müssten dann ((U)) haben*

526 K: *Das Minus das*

527 J: *Ja, müsste passen*

Die notierte Eigenschaft lautet:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n, \text{ wobei } g \text{ der Grenzwert ist.}$$

Gemeinsam betrachten sie diese noch einmal und sie sind der Meinung, dass sie das gewünschte ausdrückt. Marie ergänzt noch, dass auch andere Variablen verwendet werden könnten:

530 M: *Ja, wir können ... wir können auch f von m-, muss-, man muss ja wahrscheinlich nicht a k minus g, ist ja beliebig, du kannst ja irgendwie, äh-*

Die Studierenden warten nun kurz darauf, dass ich zu ihnen komme und ihnen Rückmeldung gebe:

534 K: *Ich möchte gern wissen, ob das richtig ist*

535 J: *Ich auch, ich ((U)) (lacht)*

Während der folgenden Äußerungen komme ich zu den Studierenden:

545 M: *Und das ist jetzt die Definition für eine Konvergenz*

546 S: *Wieso ((U)) genau konvergent?*

547 K: *Naja, konvergent heißt ja, dass es einen Grenzwert gibt, dem sich das ((U))*

548 M: *Nja, okay*

L kommt dazu

549 L: *Ja, das sieht doch super aus (...) ja, super! ... genau*

Es ist der Gruppe gelungen, mit meiner Unterstützung die Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge nachzuerfinden. Mündlich formuliert Katharina sogar noch eine Verallgemeinerung der Definition von „Konvergenz gegen g “ zu „Konvergenz“.

Ergebnis:

(Finale Charakterisierung) $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n$, wobei g der Grenzwert ist.

Den Studierenden ist es in der letzten Phase gelungen, die Charakterisierung in formal-mathematische Sprache mit Verwendung von Quantoren zu übersetzen. Lediglich bei Steffi ist es weder möglich, ihren Erkenntnisstand einzuschätzen, noch wird deutlich, ob sie mit dem Ergebnis einverstanden ist.

6.2.2 Gruppe 1: Analyse in Bezug auf die Leitfragen

Nachdem der Erkenntnisverlauf der ersten Gruppe nun dargestellt wurde, soll auf die zuvor aufgestellten Leitfragen eingegangen werden. An dieser Stelle wird dies für diese eine Gruppe durchgeführt. Auf allgemeinere Ergebnisse, den Vergleich der vier Gruppen und mögliche Konsequenzen für das Re-Design des Workshop-Konzepts wird in Abschnitt 6.3 eingegangen.

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Bei dieser Gruppe wird ab Turn 28 ein Vorverständnis in Form einer Strategie, wie sie begründen würden, dass eine Folge gegen einen Wert verläuft, deutlich. Sie würden dies anhand der Formeln begründen. Als Beispiel nennen sie die Formel $1 + \frac{1}{n}$, bei der $\frac{1}{n}$ gegen 0 verläuft und daher 1 übrig bleibt. Sie versuchen anscheinend, die Formel in einzelne Teile zu zerlegen, von denen sie wissen, gegen welchen Wert diese verlaufen, um dann entscheiden zu können, gegen welchen Wert die gesamte Formel verläuft. Die Folge $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gehört nicht zu den vorgegebenen Beispielen. Diese scheint also bereits vor der Aufgabebearbeitung zu dem *Concept Image* der Studierenden zum Grenzwertbegriff zu gehören. In Turn 37 schlagen sie vor, ihre Strategie auf die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anzuwenden, die durch $a_n = \frac{n+1}{n}$ definiert ist. Sie argumentieren, dass $n+1$ gegen Unendlich verläuft und n ebenfalls gegen Unendlich verläuft, somit würde $\frac{\infty}{\infty}$ entstehen, wovon sie der Meinung sind, dass es 1 sei. Zum einen würde die Strategie der Studierenden, vor allem in Kombination mit der Fehlvorstellung „ $\frac{\infty}{\infty} = 1$ “ nicht immer zu korrekten Ergebnissen führen. Zum anderen können sie damit lediglich solche Folgen analysieren, die durch einen geschlossenen Term ohne Sonderteilfolgen definiert sind.

Bei der durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierten Folge bemerken sie eigenständig, dass ihre Strategie Grenzen hat. Bei dieser Beispielfolge wissen sie nicht, wie sie die Strategie anwenden können. An dieser Stelle fällt ihnen somit auf, dass ihr Vorwissen unzureichend für den „neuen“ Begriff ist. Die Gruppe äußert weder verbale Beschreibungen des Konvergenzbegriffes, die ihrem Vorwissen zugeordnet werden können, noch sagen sie über irgendeine der vorgegebenen Beispielfolgen, ob diese unter ihr bereits bestehendes Bild konvergenter

Folgen fällt. Es zeigen sich somit keine Konflikte zwischen dem Vorverständnis der Studierenden und dem durch die Beispielfolgen festgelegten Begriff. Es gibt keine Hinweise darauf, dass sich ihr Vorwissen hinderlich auf den Nacherfindungsprozess auswirkt.

3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

Um den tatsächlichen Erkenntnisverlauf mit den hypothetischen Verläufen vergleichen zu können, wird der Verlauf der ersten Gruppe zunächst schematisch dargestellt. Darin finden sich insbesondere die wichtigsten formulierten Charakterisierungen und alle wesentlichen Diskussionspunkte und Erkenntnisse der Gruppe wieder. Dabei wird der Prozess der Gruppe als Ganzes betrachtet, es wird nicht zwischen den einzelnen Gruppenmitgliedern unterschieden. Auch sind die einzelnen Beispielfolgen, mit denen sich die Gruppe jeweils beschäftigt, hier nicht dargestellt, sondern auf diese wird separat eingegangen.

I Korrekte Abgrenzung der Beispiele und des Nicht-Beispiels über

Die Folgen haben alle gemeinsam, dass sie sich dem Wert 1 annähern und bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es keinen Wert, dem sich die Folge annähert.

Kriterium für Annähern: Betrachtung der Formel für $n \rightarrow \infty$
 Ausschluss von Ausnahmen im Anfangsbereich

II Impuls: „Annähern“ präzisieren

wird als Aufforderung zur inhaltlichen Klärung von „Annähern“ verstanden, nicht als Aufforderung zur Formulierung einer Entscheidungsregel

(a) Resultat:

- Annähern schließt erreichen ein
- Annäherung kann von beiden Seiten geschehen
- Annäherung muss nicht monoton sein

(b) Wie kann

- ab einem n
- beliebig groß
- n gegen Unendlich

ausgedrückt werden?

(c) Wie kann „Annähern“ über den Abstandsbegriff ausgedrückt werden?

- „insgesamt kleiner“
- Was ist groß?

III Intervention: ϵ -Streifen

- (a) Betrachtung von Intervallen: Intervall vom höchsten bis zum tiefsten Punkt wird immer kleiner
- (b) Umgekehrtes Denken führt zur Charakterisierung

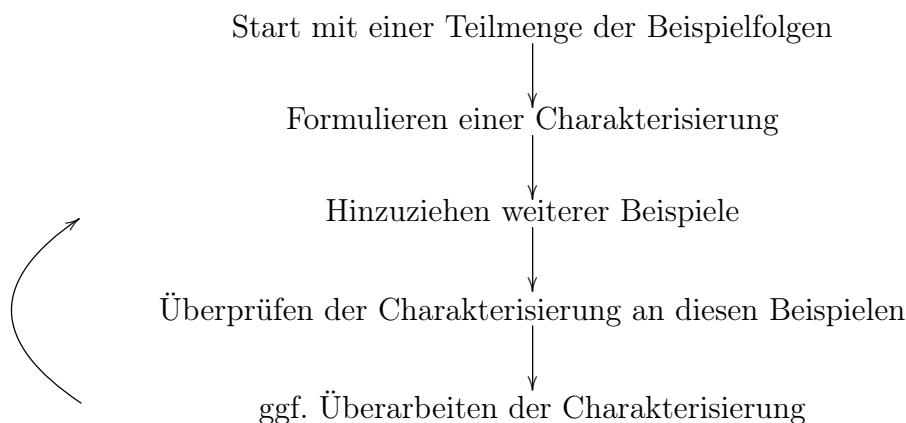
Für jedes ϵ größer als Null müssen irgendwann die Punkte alle in dem ϵ -Intervall liegen.

IV Impuls: Charakterisierung aufschreiben

- $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$
- Verwendung einer zusätzlichen Variablen für den Folgenindex: a_k mit $k \geq n$
- Folgenglieder liegen im ϵ -Intervall: $|a_k - g| < \epsilon$

Ergebnis: $\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n}$

Die verschiedenen Varianten der hypothetischen Erkenntnisverläufe haben hingegen alle die folgende Struktur gemeinsam:



i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

Ein großer Unterschied zwischen dem hypothetischen Verlauf und dem tatsächlichen Verlauf von Gruppe 1 besteht darin, dass die Studierenden nicht mit einer Teilmenge an Beispielfolgen beginnen, dazu eine Charakterisierung formulieren und anschließend weitere Beispiele hinzuziehen. Stattdessen beziehen sie von Anfang an alle Beispielfolgen mit ein. Sie bilden sich auf Basis der Beispiele eine geeignete Vorstellung davon, was für Folgen die Eigenschaft „Konvergenz gegen 1“ umfasst. Erst dann beschäftigen sie sich näher mit der Formulierung der Eigenschaft.

In Turn 264 schlagen sie die folgende Charakterisierung vor:

„(…) dass es für große n der Abstand von aufeinander folgenden ... Folgengliedern zu dem Grenzwert ... immer kleiner wird.“

Auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für Vielfache von zehn konstant 1 ist und für alle anderen natürlichen Zahlen durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert ist, trifft diese Eigenschaft nicht zu. Ihnen ist zunächst nicht bewusst, dass diese Charakterisierung nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Im Sinne von Oehrtman et al. (2011) handelt es sich somit um ein *Problematic Issue*. Dieser Fall gehört zu einer im Vorfeld erwarteten Problemstelle, in der Tabelle 4.2 ist er unter Situation (B) zu finden: Die Studierenden formulieren eine nicht

passende Eigenschaft, prüfen jedoch nicht selbständig, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht. Weder diese Formulierung noch andere Vorschläge für die gesuchte Eigenschaft testen die Studierenden systematisch an den vorgegebenen Beispielen. Dennoch fällt ihnen kurz darauf auf, dass die vorgeschlagene Charakterisierung ungeeignet ist:

„Obwohl, das passt hier auch wieder nicht, weil ich mein, du hast ja immerhin alle zehn Schritte, dass du genau die Eins bist und dann wird der Abstand doch wieder größer und nicht kleiner (...)“

Den Studierenden scheint dies eher zufällig aufgefallen zu sein. Ein systematisches Vorgehen ist bei dieser Gruppe nicht erkennbar.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Phase	Folge
1	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
2	$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$
3	$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
4	$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

5	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$
6	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
7	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
8	?
9	-
10	-

Tabelle 6.1: Übersicht über die verwendeten Folgen bei Gruppe 1

Ein Überblick über die in der Diskussion verwendeten Folgen ist in Tabelle 6.1 zu finden. Dabei sind die Folgen nur dann eingetragen, wenn aus der Audioaufnahme eindeutig erkennbar ist, dass über die jeweilige Folge gesprochen wird. Insbesondere in Phase 8, in der diese Gruppe mit den ϵ -Streifen arbeitet und diese auf die Graphen der Folgen legt, lässt sich leider nicht feststellen, mit welcher Folge sie sich jeweils beschäftigen.

Zunächst einmal lässt sich festhalten, dass die Gruppe in ihrer Diskussion auf jede der gegebenen Beispielfolgen und auf das Nicht-Beispiel jeweils mindestens einmal explizit eingeht. Es gibt jedoch Unterschiede, wie oft sie die einzelnen Folgen thematisieren und in welcher Art. In Phase 3 gehen die Studierenden alle Beispiele und anschließend auch das Nicht-Beispiel einmal durch. Sie versuchen jeweils, an den Termen „abzulesen“, dass die Beispiele den Grenzwert 1 haben und das Nicht-Beispiel nicht. In dieser Phase werden die einzelnen Folgen also alle in ähnlicher Weise in der Diskussion behandelt. Auf die beiden Beispielfolgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird außerhalb der genannten Phase keinmal eindeutig Bezug genommen. Das deutet darauf hin, dass diese beiden Folgen für den Erkenntnisprozess dieser Gruppe weniger wichtig waren als die übrigen Folgen. Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $n \leq 125$ durch $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ definiert und alle übrigen Folgenglieder sind konstant 1. Diese Folge wurde von mir ausgewählt, da es sich um eine schließlich konstante Folge handelt. Dass eine Folge auch dann konvergent sein kann, wenn es Folgenglieder gibt, die gleich dem Grenzwert sind, erkennen die hier beobachteten Studierenden an einer anderen Beispielfolge, und zwar der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Bei der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definiert ist, handelt es sich um eine streng monoton wachsende Folge, die

den Grenzwert nicht annimmt. Zum einen ist diese Folge damit ein eher typisches Beispiel einer konvergenten Folge. Zum anderen gibt es unter den vorgegebenen Beispielen mit der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere streng monotone Folge, die den Grenzwert nicht annimmt. Das könnte erklären, weshalb die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht erneut in der Diskussion dieser

Studierenden thematisiert wurde. Eine andere mögliche Erklärung wäre, dass diese Folge im Gegensatz zu den übrigen Beispielfolgen nicht (abschnittsweise) durch einen oder zwei Terme definiert ist. Auch die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ scheint für den Erkenntnisprozess verglichen mit den übrigen Folgen verhältnismäßig unbedeutsam gewesen zu sein. Auf diese Folge wurde außerhalb der Phase 3 lediglich zweimal explizit Bezug genommen, als die Studierenden beispielhaft den Term betrachten und den Grenzwert daran erkennen möchten. Eine weitere Folge, die in der Diskussion dieser Gruppe verhältnismäßig wenig zu finden ist, ist die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge nimmt lediglich zwei Werte an, und zwar -3 für $200000 \leq n \leq 500000$ und 1 für alle anderen natürlichen Zahlen. Über diese Folge sprechen die Studierenden ab Turn 18 kurz. Dabei reden sie eher darüber, wie diese Folge definiert ist, ob sie daraus Erkenntnisse über die Eigenschaft „Konvergenz“ ziehen, wird nicht deutlich. Deutlich häufiger thematisiert wurde die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für Vielfache von 10 entsprechen die Folgenglieder exakt 1, für die übrigen natürlichen Zahlen sind sie durch den Term $d_n = 1 + \frac{1}{n}$ definiert. Auf diese Folge nehmen die Studierenden ab Turn 230 Bezug, als sie argumentieren, dass eine konvergente Folge den Grenzwert „erreichen“ darf. Außerdem stellen sie in Turn 276 anhand dieses Beispiels fest, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nicht in jedem Schritt kleiner wird, nicht einmal „für große n “. In Turn 320 beziehen sie sich erneut auf dieses Beispiel, als sie mir ihren Zwischenstand präsentieren. Dabei geht es um denselben Aspekt wie schon zuvor. Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ scheint bei dieser Gruppe also für zwei wesentliche Erkenntnisse zentral gewesen zu sein, zum einen dafür, dass konvergente Folgen ihren Grenzwert annehmen können und zum anderen dafür, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert nicht immer kleiner wird. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich ebenso häufig in der Diskussion finden. Zu Beginn, als sie versuchen die Eigenschaft über „Sprünge“ zu formulieren, stellen sie ab Turn 10 fest, dass diese Folge nur einen Sprung hat, und zwar ist das zehnte Folgenglied durch den Wert 2 definiert und alle übrigen durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Hieran erkennen sie, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Ab Turn 236 beziehen sie sich außerdem auf diese Folge, um zu erläutern, dass konvergente Folgen sich dem Grenzwert nicht „gleichmäßig von einer Seite annähern“ müssen. In Turn 258 sprechen die Studierenden erneut explizit von dieser Folge, dort wird jedoch nicht ganz klar, was sie meinen und inwiefern das Beispiel an dieser Stelle ihren Erkenntnisprozess beeinflusst. Auch diese Folge ist also an mindestens zwei Stellen bedeutend für den Erkenntnisprozess der Studierenden. Da lediglich ein Nicht-Beispiel vorgegeben war, war zu erwarten, dass diesem ebenfalls eine hohe Bedeutung zukommt. Tatsächlich nutzen die Studierenden die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für Vielfache von 10 dem Wert 2 entspricht und ansonsten durch den Term $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ definiert ist, an drei Stellen in der Diskussion explizit. Dabei grenzen sie die Beispielfolgen jeweils von dem Nicht-Beispiel ab oder argumentieren, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die jeweils formulierte Eigenschaft nicht erfüllt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass für die Gruppe 1 vor allem die Beispielfolgen $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bedeutend für den Erkenntnisprozess waren. Bei dieser Gruppe lassen sich keine Anzeichen dafür finden, dass weitere Beispielfolgen nötig gewesen wären. Es hat hingegen den Anschein, als hätten sie gar nicht alle der Beispielfolgen unbedingt benötigt. So hätte eine der beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vermutlich ausgereicht, da diese ohnehin dieselbe Klasse von Folgen repräsentieren und beide nicht oft in der Diskussion dieser Gruppe identifiziert werden konnten. Die Folgen

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurden zwar auch nur selten explizit in der Diskussion thematisiert, doch bei diesen sind unter den Beispielfolgen jeweils keine weiteren vorhanden, die dieselbe Klasse von Folgen repräsentieren, weshalb diese Beispielfolgen beibehalten werden sollten. Entscheidungen über Veränderungen des Konzepts sollen erst nach der Analyse aller vier Gruppen vorgenommen werden.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Hier soll untersucht werden, ob die Studierenden eine Eigenschaft formulieren, die lediglich auf die konkret angegebenen Beispielfolgen zutrifft, oder ob sie die Menge der Beispielfolgen als generisch auffassen und eine Eigenschaft formulieren, die nicht nur für die Beispielfolgen selbst, sondern allgemeiner geeignet ist. Zunächst wurden dazu alle Textstellen kodiert, in denen eine generische Betrachtung explizit deutlich wird oder in denen sich umgekehrt Anzeichen dafür finden, dass eine Eigenschaft formuliert wird, die lediglich auf die vorgegebene Menge an Beispielen zutrifft und nicht auf weitere.

In Gruppe 1 findet sich eine solche Äußerung in Turn 258. Ein Studierender bringt hier eine Folge mit in die Argumentation ein, die nicht vorgegeben war: „(...) *theoretisch könntest auch zwischendurch auch einen Wert haben, dass bei n gleich, weiß ich nicht, 17000, das dann wieder bei sieben ist und trotzdem ist es immer im Unendlichen bei n -, bei eins*

oder so“. Zuvor wurde die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ thematisiert,

die für $n = 10$ einen Ausreißer hat. Der Studierende macht durch die Einbeziehung des Beispiels, das für einen anderen Index einen anderen Wert als Ausreißer hat, deutlich, dass er die Beispiele generisch auffasst. Der Ausdruck „weiß ich nicht“ deutet an dieser Stelle darauf hin, dass ihm bewusst ist, dass er irgendeine beliebige Zahl für n angeben könnte. Verstärkt wird dies noch durch ein weiteres zusätzliches Beispiel desselben Studierenden kurz darauf (Turn 267): „(...) *Theoretisch kannst auch sagen, du hast die Zahl, weiß ich nicht, neun Milliarden und die ist dann wieder bei zwei oder was auch immer*“. Wieder wird vor der Nennung eines konkreten Werts für n „weiß ich nicht“ eingefügt. Außerdem wird hinter dem Wert des Ausreißers durch „oder was auch immer“ deutlich, dass auch dieser Wert beliebig ist. Ein anderer Studierender antwortet daraufhin „(...) *du kannst nicht festlegen: Ab der und der Zahl*“. Ohne dass der Studierende an dieser Stelle schon weiß, wie die Eigenschaft allgemein formuliert werden kann, macht er jedoch deutlich, dass keine feste Zahl verwendet werden kann, ab der die Bedingung erfüllt sein muss. Durch diese Aussagen und die Tatsache, dass es ihnen schließlich gelingt, eine allgemeine Charakterisierung zu finden, die nicht nur auf die vorgegebenen Beispiele zutrifft, lässt sich darauf schließen, dass die erste Gruppe die Beispiele als generisch ansieht.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Ein Klassifizieren der Folgen in mehrere Gruppen ließ sich bei dieser Gruppe nicht auffinden.

v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Ab Phase 4 formulieren die Studierenden die Eigenschaften immer wieder auf verschiedene Weise, wobei verschiedene unpräzise Aspekte enthalten sind. Zu diesen Aspekten gehört der Begriff des Annäherns, die Ausdrücke „große n “, „beliebig groß“, „ n gegen Unendlich“, „irgendwann“ und „insgesamt kleiner“. Zu Beginn ist den Studierenden nicht bewusst, dass ihre Formulierung unpräzise ist, was die Hürde zu einem *Problematic Issue* macht. Ich weise sie in Form einer Intervention darauf hin, wodurch es dann zu einem *Problem* wird. Allerdings entsteht bei dieser Gruppe zunächst kein Bedürfnis, die Eigenschaft so präzise zu formulieren, dass damit bei einer beliebigen Folge entschieden werden könnte, ob sie die Eigenschaft erfüllt oder nicht. Als ich sie in Turn 218 auffordere, genauer auszudrücken, was „Annähern“ bedeute, verstehen sie den Impuls eher so, dass sie erklären, welche Folgen alle unter diesen Begriff des „Annäherns“ fallen. An der Formulierung selbst halten sie fest. In Turn 226 sage ich dann explizit, dass die Eigenschaft so ausgedrückt werden soll, dass damit entschieden werden kann, ob irgendeine Folge diese Eigenschaft hat oder nicht. In diesem Fall bringt der Impuls die Gruppe auch nicht voran, da sie anscheinend der Meinung sind, dass ihre Formulierung in Kombination mit den ihnen bekannten Verfahren geeignet ist, um bei beliebigen Folgen entscheiden zu können, ob eine beliebige Folge die Eigenschaft erfüllt oder nicht. Dennoch kann die Tatsache, dass diese Gruppe die Eigenschaft nicht derart formuliert, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden kann, ein Indiz dafür sein, dass die Aufgabenstellung verändert werden sollte, um die Studierenden dazu anzuregen, dass sie selbstregulativ die Definition der Konvergenz einer Folge formulieren.

Auch als ihnen bewusst ist, dass die Formulierung präzisiert werden muss, haben sie Schwierigkeiten bei der Umsetzung. Prinzipiell handelt es sich um eine Problemstelle, die im Vorhinein erwartet wurde, sie ist in Tabelle 4.2 unter Situation (D) zu finden. Nicht erwartet war hingegen, dass die Präzisierung eine derart große Hürde darstellt, dass die Studierenden derart lange damit beschäftigt sind. Zur Unterstützung wurden Interventionen eingesetzt.

Ich habe mich entschieden, wie es auch im Vorfeld vorgesehen war, als nächste Intervention die ϵ -Streifen einzusetzen. Die Studierenden sind zu diesem Zeitpunkt bereits auf die Idee gekommen, Abstände zu betrachten. Allerdings wollten sie zunächst formulieren, dass die Abstände der Folgenglieder zum Grenzwert mit wachsendem n immer kleiner werden. Ihnen fällt selbst auf, dass dies nicht bei allen Folgen der Fall ist, bei manchen Folgen wird der Abstand „zwischendurch wieder größer“. Sie haben jedoch keine Idee, wie sie dieses Problem lösen können. Sie betrachten die Abstände eher in einer zeitlichen Abfolge, für wachsendes n . Ihnen fehlt an dieser Stelle die Sichtweise, dass die Abstände jede beliebige Schranke nicht mehr überschreiten, wenn das n nur groß genug gewählt wird. Außerdem ist das von Roh (2005) bezeichnete umgekehrte Denken notwendig, indem zuerst eine (beliebige) Schranke für den Abstand zum Grenzwert fixiert wird und anschließend betrachtet wird, wie groß n_0 zu der jeweiligen Schranke gewählt werden muss, so dass der Abstand aller Folgenglieder, deren Index größer oder gleich

n_0 ist, kleiner als die fixierte Schranke ist. Um auf diese Idee zu kommen, könnten die ϵ -Streifen helfen. Die transparenten Streifen mit einer horizontalen Linie in der Mitte können auf die Grafiken der Folgen gelegt werden, so dass die Mittellinie auf der Höhe des Grenzwerts liegt. In dem Fall stellt der Streifen die beliebige Umgebung um den Grenzwert dar, in der die Folgenglieder für genügend großes n liegen. Die Anweisung, die ich den Studierenden zu dieser Veranschaulichung gebe, ist sehr offen gehalten. Ich sage lediglich, dass sie die verschieden breiten Streifen, die ich ihnen aushändige, zusammen mit den Graphen der Folgen verwenden können. Die Studierenden beginnen direkt damit, einzelne der ϵ -Streifen auf Graphen von Folgen zu platzieren. Da lediglich Audioaufnahmen vorliegen, ist leider nicht immer eindeutig erkennbar, was genau die Gruppe gerade macht. Als ein positiver Effekt des Einsatzes der ϵ -Streifen kann schon einmal festgehalten werden, dass die Studierenden sich nun wieder aktiv mit den Folgen und der Formulierung der Eigenschaft beschäftigen, nachdem sie zuvor kurze Zeit nicht mehr diskutiert hatten, da sie keine Ideen mehr hatten. Auffällig ist außerdem, dass sie in Turn 353 kurz nach dem Austeilen der ϵ -Streifen beginnen, den Begriff „Intervall“ zu verwenden: *„Vielleicht wenn man sich das-, die-, die Werte halt in so nem Abstand und in einem bestimmten Intervall hiervon bewegen ... weißte, wenn man das hier zum Beispiel klein macht, ne (Floskel), wenn man erstmal diesen Streifen hier nimmt, dann machen diese Sprünge nichts mehr aus“*. Es könnte sein, dass sie den Begriff „Abstand“ für den Abstand konkreter Folgenglieder zum Grenzwert verwenden und den Begriff „Intervall“ für den Bereich, auf dem der ϵ -Streifen liegt. Der letzte Teil der zitierten Aussage könnte dann so interpretiert werden, dass die Sprünge innerhalb des ϵ -Streifens bleiben und deshalb machen sie „nichts mehr aus“. Wäre die Interpretation richtig, so wäre der Gruppe ein großer Fortschritt gelungen. Eindeutig feststellbar ist dies jedoch nicht. Eine weitere Aussage kurz darauf deutet darauf hin, dass weiterhin eine dynamische Sichtweise vorherrschend ist: *„Kann man da nicht sagen, dass der Intervall immer kleiner wird?“*. Die Studierenden versuchen nun, die Eigenschaft darüber zu charakterisieren, dass der Abstand zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Folge immer geringer wird. Umgekehrtes Denken ist bei diesem Vorgehen nicht erkennbar. Dies ändert sich in Phase 9 des Erkenntnisverlaufs. Dort bringt eine der Studentinnen die Variable ϵ , die zu einem früheren Zeitpunkt der Diskussion bereits thematisiert wurde, wieder zur Sprache. Die Streifen verwenden sie da zumindest nicht mehr explizit. Sie scheinen jedoch ihre Vorstellung auf den Graphen aufzubauen: *„Die Punkte müssen in dem Bereich liegen (...)“* und *„(...) irgendwann, also für irgendein n , für irgendein großes n , erreicht dann, äh ... ja, der Graph im Grunde dieses Epsilon (...) als Abstand“*. Anschließend formulieren sie dies noch einmal mit anderen Worten: *„Also, dass eben für Epsilon im Grunde jeden Wert einsetzen kannst, nur eben nicht null, aber so nah wie möglich. Und irgendwann wird eben dieses Intervall-“* „Liegen alle Punkte halt in dem Epsilon-Intervall“. Hier verwenden die Studierenden wieder den Begriff „Intervall“, den sie bei der Beschäftigung mit den ϵ -Streifen erstmals benutzt hatten. Möglicherweise haben sie das Bild eines solchen Streifens in Kombination mit der Grafik einer Folge auch nun dazu vor Augen. Ob die Beschäftigung mit den ϵ -Streifen tatsächlich zu der entscheidenden Idee beigetragen hat, lässt sich nicht eindeutig sagen. Es ist jedoch auch nicht auszuschließen. In jedem Fall hat die Visualisierung dazu geführt, dass die Gruppe sich überhaupt wieder aktiv mit der Aufgabe beschäftigt hat.

Auf eventuelle Veränderungen der Interventionen wird eingegangen, wenn die eingesetzten Intervention aller vier Gruppen analysiert wurden und sich gezeigt hat, ob diese Problemstelle lediglich ein Einzelfall war oder ob sie sich bei mehreren Gruppen beobachten ließ.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

In den hypothetischen Erkenntnisverläufen war davon ausgegangen worden, dass die Studierenden während ihrer Diskussion immer wieder verschiedene Versionen der Formulierung aufschreiben. Das ist bei dieser Gruppe nicht der Fall. Stattdessen bildet das Aufschreiben am Ende eine eigene Phase. Ich wäre mit dem Ergebnis bereits zufrieden gewesen, wenn die Studierenden die am Ende von Phase 10 mündlich formulierte Eigenschaft „Für jedes ϵ größer als Null müssen irgendwann die Punkte alle in dem ϵ -Intervall liegen“ genau so aufgeschrieben hätten. Das haben sie jedoch nicht getan, stattdessen haben sie beim Aufschreiben formal-mathematische Sprache verwendet. Ihnen scheint bewusst zu sein, dass an eine schriftliche Definition andere Anforderungen gestellt werden als an eine verbal formulierte Eigenschaft. Es gelingt ihnen, die Eigenschaft formal-mathematisch aufzuschreiben. Impulse sind dazu nicht nötig. Bei dieser Gruppe hat das Verschriftlichen somit einen Beitrag zum Nacherfindungsprozess geleistet, denn die Studierenden haben die Charakterisierung in dieser Phase optimiert.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

Diese Frage ist hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, darauf wird nach der Analyse der Erkenntnisverläufe aller vier Gruppen eingegangen.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Um den Erfolg der Nacherfindung der Definition dieser Gruppe zu beurteilen, sollen alle vorherigen Leitfragen miteinbezogen werden. Zunächst einmal gelingt es den Studierenden, auf Basis der vorgegebenen Beispiele und des Nicht-Beispiels eine adäquate Vorstellung davon aufzubauen, welche Folgen die Eigenschaft „Konvergenz gegen 1“ umfasst. Die einzelnen Folgen haben für diese Vorstellung eine unterschiedliche Bedeutung, in ihrer Gesamtheit scheinen sie für diese Gruppe passend gewesen zu sein. Auch haben sie diese generisch angesehen. Bei der Formulierung der Eigenschaft war den Studierenden alleine durch die Aufgabenstellung möglicherweise nicht bewusst, dass sie diese so präzise formulieren sollten, dass sie als Entscheidungsregel dienen kann. Davon ließen sie sich jedoch durch geeignete Impulse überzeugen. Außerdem war bei dieser Präzisierung auch eine inhaltliche Intervention in Form von ϵ -Streifen notwendig. Dass Interventionen eingesetzt werden mussten, ist nicht als Misserfolg zu werten, da diese Teil des Konzepts sind und von vornherein eingeplant war, dass diese eingesetzt werden. Mit Hilfe der Interventionen

ist es den Studierenden schlussendlich tatsächlich gelungen, die Definition der Konvergenz einer Folge angeleitet nachzuerfinden. Als finales Ergebnis haben sie Folgendes notiert:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n, \text{ wobei } g \text{ der Grenzwert ist.}$$

Dies entspricht exakt der üblichen formalen Definition der Konvergenz gegen einen Grenzwert.

6.2.3 Gruppe 2: Tatsächlicher Verlauf

Gruppe 2 setzt sich aus zwei männlichen und zwei weiblichen Studierenden zusammen: Sebastian (S), Karl (K), Jana (J) und Pia (P).

Phase 1: Erste Charakterisierung über den Ausdruck ab einem Punkt „immer näher ran“

Sebastian beginnt in dieser Phase direkt damit, eine Charakterisierung zu formulieren. Die beiden Studentinnen stellen erst einmal Fragen zu einzelnen Beispielfolgen.

Sebastian fasst die Folgen direkt zu Beginn zusammen:

3 S: *Ja, egal wie weit du jetzt bist, ((U)) alle anderen, die sind ab einem bestimmten Punkt immer ein-, also... fast... eins, also*

Der Student verwendet hier sofort den Ausdruck „ab einem Punkt“. Das deutet darauf hin, dass ihm von Anfang an bewusst ist, dass es sich um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Mit „alle anderen“ meint er alle Folgen außer dem Nicht-Beispiel. Zu dem Nicht-Beispiel fragt Jana nach:

6 J: *Hier, bei-, bei x ... das ist doch, aua, jetzt wieder zwischen eins und zwei hier*

7 S: *Ja*

8 J: *Ne (fragend)?!*

9 S: *Ja*

10 J: *Das ist ja eins Komma irgendwas bis eins Komma neun bla bla bla*

11 S: *Ne (verneinend), genau zwei, wenn du dir das anguckst*

Die Studentin fragt zu den Werten der Folgenglieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ nach. Möglicherweise betrachtet sie in dem Moment die Grafik dieser Folge und erkennt daran nicht genau, dass die Werte für die Vielfachen von 10 exakt 2 entsprechen. Sebastian weist sie darauf hin. Pia und Jana haben bei einem der Beispiele zunächst Zweifel, dass die Folge „gegen 1 geht“.

14 P: *Aber wo geht denn das hier gegen eins?*

15 J: *Äh, das da... nicht*

16 S: *Ne, das ganze Ding geht gegen eins. Das ganze Ding ist ab einem bestimmten Punkt immer nur noch eins, egal wie weit du gehst*

Auf welche Folge Pia zeigt ist aus der Audioaufnahme nicht erkennbar, aber Sebastians Aussage lässt darauf schließen, dass die Gruppe sich über eine der schließlich konstanten Folgen unterhält. Im Verlauf der Diskussion wird deutlich, dass sie über die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reden, deren Folgenglieder für $200000 \leq n \leq 500000$ als -3 definiert sind und alle übrigen Folgenglieder sind 1.

19 J: *Dat da?! Ist ja sieben hier*

Die Grafiken der Folgen waren auf dem Arbeitsblatt von (1) bis (7) durchnummeriert und in Grafik (7) ist die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgebildet. Pia hat also vermutlich zuerst auf die algebraische Definition dieser Folge gezeigt und Jana ergänzt nun, welches die entsprechende Grafik ist. Eine mögliche Interpretation von Pias Aussage in Turn 14 wäre, dass die Studentin nicht die gesamte abschnittsweise definierte Folge betrachtet hat, sondern nur den Abschnitt, für den die Folgenglieder konstant -3 sind. Ob sie tatsächlich die definierenden Terme als zwei Folgen anstatt als eine Folge aufgefasst hat, lässt sich hier nicht eindeutig feststellen. Die nachfolgende Äußerung von Sebastian, wo er gleich zweimal „das ganze Ding“ sagt, würde dazu passen. Und auch im weiteren Gesprächsverlauf scheint sich das zu bestätigen:

20 P: *Ach so! Klar! Das wird ja auch $((U))$ abgebildet. Okay*

21 J: *Wegen des eins hier*

Nachdem sie die Grafik hinzugenommen haben, scheinen sie die gesamte Folge zu betrachten. Jana fragt dann noch einmal nach:

24 J: *Aber der-, und das Zwischending hierbei ist-, fällt raus?*

25 P: *Egal*

26 S: *Bei ner Konvergenz ist das ja egal, was du-, was das Ding vorher gemacht hat, ist uns völlig egal, Hauptsache ab einem bestimmten Punkt*

27 P: *Ist ja gegen Unendlich, ne (fragend)?!*

28 J: *Ja*

29 S: *Darf es sich nur noch der Eins annähern (...) Konvergenz heißt es gibt*

Mit „Zwischending“ ist vermutlich der Abschnitt $20000 \leq n \leq 50000$ gemeint, für den die Folgenglieder nicht 1, sondern -3 sind. Sebastian argumentiert, dass dieser Abschnitt für die Konvergenz keine Rolle spielt. An dieser Stelle ist nicht klar, ob er auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen oder auf Basis seines Vorverständnisses argumentiert. Hier scheinen auch die beiden Studentinnen zu erkennen, dass es sich um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Sebastian benutzt erneut die Formulierung „ab einem bestimmten Punkt“. An dieser Stelle endet er den Satz nicht zuvor mit „immer fast eins“, sondern er benutzt den Ausdruck „der Eins annähern“. Anschließend führt er noch einmal explizit aus, was Konvergenz seiner Meinung nach bedeutet:

31 S: *Konvergenz heißt im Prinzip: Es gibt einen Punkt, ähm (nachdenkend)... ab einer bestimmten Stelle nähern-, äh, wird diese Funktion-, geht die immer näher an diesen Wert ran, in diesem Fall eins*

32 J: *Hmhm (verstanden)*

33 S: *Und er geht nie wieder weiter weg, aber er geht höchstens noch näher ran oder hat sie schon erreicht*

Sebastian bezieht mit der Aussage in Turn 33 explizit die schließlich konstanten Folgen mit ein.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 1) *Ab einer bestimmten Stelle geht die Funktion immer näher an den Wert 1 ran und geht nie wieder weiter weg, er geht höchstens noch näher ran oder hat sie schon erreicht.*

Sebastian formuliert diese Charakterisierung, die bereits wichtige Aspekte enthält. Zum einen benutzt er von Beginn an den Ausdruck „ab einem bestimmten Punkt“. Zum anderen bezieht er auch die schließlich konstanten Beispielfolgen in seiner Charakterisierung mit ein. Problematisch an dieser Charakterisierung ist lediglich der Aspekt „immer näher ran“, was nicht auf alle vorgegebenen Beispiele zutrifft. Möglicherweise meint er eigentlich etwas wie „beliebig nah“, aber er sagt es nicht.

Jana und Pia scheinen Sebastian zumindest folgen zu können, auch wenn sie selbst in dieser Phase nicht in der Lage gewesen wären, eine derartige Charakterisierung zu formulieren. Über den Erkenntnisstand von Karl kann nichts ausgesagt werden.

Phase 2: Diskussion über die Frage des Erreichens

In dieser Phase wird hauptsächlich darüber diskutiert, ob eine konvergente Folge den Grenzwert erreichen darf. Sebastian beantwortet die Frage auf Basis der als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen. Jana grenzt für sich den Begriff Konvergenz von dem Begriff der Asymptote ab.

Über diese Formulierung diskutiert die Gruppe kurz darauf noch einmal, zunächst schlägt Karl vor, etwas aufzuschreiben:

34 K: *Also kann man jetzt gleich aufschreiben: Limes von n gegen Unendlich ist gleich eins, oder?*

35 S: *Ja, ich weiß nicht ob man das schreiben kann bei Folgen*

36 K: *Aber theoretisch ist es so, ne (fragend)?*

Die Studierenden scheinen den Begriff ‚Limes‘ beziehungsweise die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty}$ bereits zu kennen. Sie sind sich nur nicht sicher, ob dieser auch für Folgen verwendet werden kann. Anscheinend haben sie ihn nicht mit Folgen kennengelernt, sondern möglicherweise mit Funktionen. Karls Aussage könnte als Vorschlag verstanden werden, die gesuchte Eigenschaft mittels des ihm bekannten Begriffs ‚Limes‘ zu formulieren. Das wäre eher eine Scheinlösung, da er damit nicht nach einer Definition sucht. Sebastian setzt sich jedoch durch und formuliert ähnlich wie zuvor:

- 37 S: *Ja. Im Prinzip ist es das, ja (...) Also e-, ist es egal, was vorher passiert, aber es gibt irgendwo einen Punkt in dieser Folge, ab da kommt man nicht mehr weiter von diesem Fel-, Wert weg. Man hat ihn entweder erreicht und bleibt da oder man nähert sich dem immer noch ein bisschen weiter an die letzte Zeit*

Pia fragt zum „Erreichen“ des Wertes nach:

- 39 P: *Aber is konvergieren denn auch, dass es eins erreicht dann?*

Hier wird ein Konflikt mit dem Vorverständnis zu Konvergenz deutlich. Es ist nicht ganz klar, ob die Studentin wissen möchte, ob eine konvergente Folge den Grenzwert erreichen darf oder ob sie wissen möchte, ob eine konvergente Folge den Grenzwert annehmen muss. Ihre Mitstudenten gehen zunächst nicht direkt darauf ein.

- 40 J: *Dass das Eins die Asymptote ist oder sowas, heißt das dann konvergieren, ja, ne!?*

- 41 K: *Joa, muss sie ja eigentlich, ne (Floskel)*

- 42 S: *Ja, anscheinend ... ja*

Jana versucht, den neuen Begriff „konvergieren“ mithilfe des ihr anscheinend aus der Schule bekannten Begriffs „Asymptote“ auszudrücken. Was genau sie unter einer Asymptote versteht, wird hier nicht deutlich, möglicherweise etwas wie „beliebig nahe kommen“.

Pia fragt anschließend erneut nach:

- 43 P: *Also, es kann auch eins werden, ne?!*

- 44 S: *Joa, joa, so wie es da steht, so wie es da steht, sind a bis f ja konvergent und das schließt auch diesen hier mit ein*

Dieses Mal ist die Frage der Studentin präziser, sie möchte wissen, ob eine konvergente Folge den Grenzwert erreichen kann. Die Frage wird von einem anderen Gruppenmitglied bejaht, mit der Begründung, dass unter den als konvergent vorgegebenen Folgen ein solches Beispiel vertreten ist. Sebastian argumentiert hier eindeutig auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen, nicht auf Basis seines Vorverständnisses. Auf welches Beispiel genau er sich in diesem Moment bezieht, ist nicht klar. Kurz darauf fügt der Student noch hinzu:

- 52 S: *Es kann eins sein, aber-, aber ab dem Punkt darfs natürlich nicht mehr davon weggeh*

Sebastian ist also anscheinend der Ansicht, dass bei einer konvergenten Folge, bei der ein Folgenglied dem Grenzwert entspricht, alle darauffolgenden Folgenglieder ebenfalls dem Grenzwert entsprechen müssen. Er betrachtet hier vermutlich weiterhin eine von den schließlich konstanten Folgen, für die das tatsächlich zutrifft. Zwei der übrigen Gruppenmitglieder nennen nun explizit Beispielfolgen, bei denen der Wert 1 erreicht wird:

- 53 K: *Zum Beispiel bei b ist es doch eins ab 125, da ist es wirklich gleich eins*

- 54 S: *Ja*

- 55 P: *Bei sieben ja auch, ne!?*

56 K: *Ja*

Mit „sieben“ ist hier vermutlich wieder die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemeint, deren Graph mit (7) bezeichnet ist. Beide der genannten Beispiele sind ab irgendeinem Index konstant 1. Jana bezieht sich anschließend noch einmal auf ihre Äußerung von zuvor, in der sie „Konvergenz“ und „Asymptote“ in Verbindung gebracht hatte:

57 J: *Weil da ist ein Unterschied zwischen Asymptote und Konvergenz ... merken (schmunzelt)*

Hier zeigt sich nun, dass sie unter „Asymptote“ anscheinend „beliebig nahe Annähern ohne zu erreichen“ versteht und bei Konvergenz hat die Gruppe gerade auf Grundlage der Beispielfolgen herausgearbeitet, dass der Grenzwert erreicht werden darf. Die Beispielfolgen haben also dahingehend ein Ziel erreicht.

Zwischenstand:

Eine neue Charakterisierung wird in dieser Phase nicht formuliert. Bei Sebastian sind in dieser Phase keine Erkenntnisfortschritte erkennbar, seine Argumentationen sind ähnlich wie in der vorherigen Phase. Die übrigen drei Studierenden erkennen auf Grundlage der vorgegebenen Beispielfolgen, dass bei der gesuchten Eigenschaft der Wert 1 auch erreicht werden darf. Jana grenzt daraufhin den Begriff der Konvergenz für sich von dem Begriff der Asymptote ab.

Phase 3: Diskussion über die Aufgabenstellung

Die Studierenden sprechen darüber, was sie machen sollen. Sie lesen sich die Aufgabenstellung noch einmal durch und interpretieren sie derart, dass sie einen Unterschied zwischen den Beispielfolgen und dem Nicht-Beispiel finden sollen.

Die Studierenden beraten sich nun kurz darüber, was laut Aufgabenstellung von ihnen gefordert wird.

58 P: *Ja, und was sollen wir jetzt dazu machen?*

59 J: *Eigenschaften raussuchen*

Karl ist sich ebenfalls unsicher, macht aber Vorschläge, wie vorgegangen werden könnte und auch, was seiner Meinung nach nicht gefordert ist:

61 K: *Sollen wir jetzt nur die fünf aufschreiben oder mit Quantoren arbeiten oder wie sollen wirs machen?*

62 P: *Weiß ich nicht*

63 J: *a: versuche die gemeinsamen Eigenschaften der Folgen*

64 K: *Ich glaube, die Definition sollten wir nicht schreiben*

Was genau Karl mit „die fünf aufschreiben“ meint, wird nicht klar. Es könnte sein, dass er zu den als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen jeweils etwas aufschreiben möchte, es sind jedoch sechs Beispiele und nicht fünf. Er versteht die Aufgabenstellung jedenfalls

nicht so, dass die Definition aufgeschrieben werden soll.

Jana stimmt zu und macht anschließend einen Vorschlag, den die Gruppe dann auch umsetzt:

65 J: *Ne, also ich denke mal, wir sollen jetzt gucken, wo der Unterschied halt ist dabei, ne (Floskel)?!*

Zwischenstand:

In dieser Phase fand die Diskussion der Studierenden auf einer anderen Ebene statt. Sie haben weder über die vorgegebenen Folgen noch über die gesuchte Eigenschaft gesprochen, sondern sie tauschen sich darüber aus, was ihrer Meinung nach laut Aufgabenstellung von ihnen gefordert ist. Sowohl Karl als auch Jana sind der Meinung, dass nicht die Definition gefordert ist. Pia weiß nicht, was sie machen sollen. Wie Sebastian darüber denkt wird nicht deutlich, da er sich in dieser Phase nicht äußert.

Phase 4: Abgrenzung des Nicht-Beispiels

Die Gruppe setzt nun den Vorschlag von Jana um und versucht einen Unterschied zwischen den Beispielfolgen und dem Nicht-Beispiel zu finden. Sie erkennen, dass das Nicht-Beispiel immer noch Folgenglieder hat, die dem Wert 2 entsprechen, egal wie weit man geht, während es bei den Beispielfolgen jeweils einen Punkt gibt, ab dem es keine „Ausfälle“ mehr gibt.

Pia sieht zunächst keinen Unterschied zwischen dem Nicht-Beispiel und den Beispielen.

68 P: *Und, ähm ... wobei ist da jetzt der Unterschied? ... im Vergleich zu den andern ... weil da is-, da-, hier das nähert sich ja auch ... eins an ... und hier auch*

Die „Annäherung an 1“, über die zuvor bereits gesprochen wurde, sieht sie auch bei dem Nicht-Beispiel. Einer ihre Mitstudenten hingegen erkennt einen Unterschied:

69 S: *Aber egal wie weit du gehst, du wirst-, egal wie weit du gehst, du wirst immer noch Punkte finden, wo es zwei ist*

Sebastian macht darauf aufmerksam, dass bei der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ immer wieder Folgenglieder gleich 2 sind. Da er dies auf die Frage nach dem Unterschied aussagt, sieht er diesen Aspekt wahrscheinlich als Unterschied zu den Beispielfolgen an.

Jana scheint den Unterschied daraufhin auch zu erkennen:

72 J: *Achso, weil-, wei-, achso, weil es hier bei dieser Ausf- ((U))*

Pia betrachtet dann noch einmal eine der Beispielfolgen und stellt dazu eine Nachfrage.

74 P: *Hier ist es auch nur einmal, ne (fragend)?!*

75 S: *Genau*

76 P: *Es trifft einmal die Zehn ((U))*

Zunächst ist nicht ganz klar, auf welche der Beispielfolgen sie sich bezieht. Aufgrund der letzten Aussage kann jedoch vermutet werden, dass sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ betrachtet, die nur für $n = 10$ den Wert 2 annimmt. So lässt sich auch Pias erste Aussage deuten, bei dieser Folge wird der Wert 2 also „nur einmal“ angenommen, während dieser beim Nicht-Beispiel laut Sebastian „immer noch“ angenommen wird, „egal wie weit du gehst“. Sebastian bringt anschließend erneut seine Formulierung „ab einem Punkt“ ein:

77 S: *Es gibt einen Punkt, das kann zum Beispiel sein: Ab hier gehen wir nur noch näher an die Eins ran. Und das kannst du machen. Das kriegst du hier nicht hin, weil du kannst immer noch welche finden, die rausfallen*

Zuvor hatte der Student diese Formulierung benutzt, wenn er über die Beispielfolgen gesprochen hat. Nun argumentiert er auch, dass das Nicht-Beispiel die von ihm genannte Eigenschaft nicht besitzt. Jana stimmt ihm zu und geht die Beispiele noch einmal einzeln durch:

78 J: *Stimmt. Und bei eins ist es auch auf jeden Fall so ... bei drei ist es irgendwie, achja, das war mit diesem null Komma neun neun neun*

Die Gruppe scheint hier weiter mit den Grafiken zu arbeiten, da Jana die Folgen mit der Nummer der jeweiligen Grafik bezeichnet. Über die erste Grafik, die zur schließlich konstanten Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ gehört, reden sie nicht weiter. Die Grafik Nummer 2, in der das Nicht-Beispiel abgebildet ist, spricht Jana in dem Moment gar nicht an. Bei der dritten Grafik, in der die Folge dargestellt ist, die durch den Term $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definiert ist, stellt die Studentin kurz die Verbindung zur algebraischen Definition dieser Folge her. Anschließend geht sie zu den nächsten Grafiken über:

80 J: *Bei vier ist es auch, bei fünf ... ist der bei allen zehn Punkten genau gleich eins, auch wieder*

81 P: *Genau*

82 S: *Es ist ja nicht weiter schlimm*

Über die durch den Term $a_n = \frac{n+1}{n}$ definierte Folge, die in Grafik 4 zu sehen ist, geht sie auch schnell hinweg. Bei der in Grafik 5 abgebildeten Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ bemerkt sie, dass jedes zehnte Folgenglied exakt dem Wert 1 entspricht. Die Studierenden sind jedoch der Meinung, dass das ihrer Formulierung der gemeinsamen Eigenschaft nicht widerspricht.

83 J: *Ne, das-, das passt. Ja, sechs hat halt diesen einen Ausfall, aber sonst auch. Und hier ist es auch nur ein Ausfall bei sieben*

84 P: *Das ist ja egal*

85 S: *Ja, haben wir gesagt*

Bei den Grafiken 6 und 7 spricht Jana jeweils von einem „Ausfall“. Bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Grafik 6) meint sie damit vermutlich das zehnte Folgenglied, das dem Wert 2 entspricht, während alle übrigen Folgenglieder durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert sind. Bei der Folge

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ hingegen ist nicht ganz klar, was sie mit

„ein Ausfall“ meint. Diese Folge ist nicht für ein einzelnes Folgenglied durch einen anderen Term definiert als für die übrigen Folgenglieder. Es kann nur vermutet werden, dass Jana den Abschnitt $200000 \leq n \leq 500000$, für den die Folge konstant -3 ist, als einen Ausfall bezeichnet, während alle übrigen Folgenglieder konstant 1 sind. Auch hier sind sich die Studierenden einig, dass die Beispielfolgen zu ihrer Formulierung der Eigenschaft passen. Nun sind die Studierenden alle Beispielfolgen kurz durchgegangen.

86 J: *Das ist dann doch der einzige Unterschied dabei, oder?*

87 S: *Ja*

88 J: *Oder? Also der Aussagekräftigste*

89 S: *Würd ich sagen ... ja, ((U)) du setzt irgendwo seine Grenze. Hier sagste ab hier, pff, passt*

90 J: *Ja ... das ist der aussagekräftigste Unterschied*

91 P: *Und das ist jetzt alles dann? ja, ne (fragend)?!*

92 J: *Jo*

93 P: *Eigentlich doch schon*

94 S: *Mehr wüsst ich nicht (lacht)*

Sie sind der Meinung, dass sie mit der von ihnen formulierten Eigenschaft einen Unterschied zwischen den Beispielen und dem Nicht-Beispiel gefunden haben und die Aufgabe somit gelöst haben.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 2) *Es gibt einen Punkt, ab dem gehen wir nur noch näher an die Eins ran. Das kriegste hier [bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$] nicht hin, weil du kannst immer noch welche finden, die rausfallen.*

Verglichen mit der Charakterisierung 1 ist bei dieser Charakterisierung im Wesentlichen der letzte Satz hinzugekommen, in dem das Nicht-Beispiel abgegrenzt wird. Vorgeschlagen wurde diese Formulierung wieder von Sebastian. Jana und Pia stimmen dem zu und scheinen nachvollziehen zu können, dass diese Eigenschaft einen Unterschied zwischen den Beispielen und dem Nicht-Beispiel ausmacht. Über den Erkenntnisstand von Karl kann an dieser Stelle nichts ausgesagt werden.

Phase 5: Erkenntnis, dass die Beispielfolgen 1 nicht unbedingt „immer näher“ kommen und Betrachtung von Intervallen um den Wert 1

In dieser Phase bemerkt die Gruppe, dass die von ihnen formulierte Eigenschaft nicht auf die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zutrifft. Sie überarbeiten daraufhin ihre Charakterisierung indem sie beliebig kleine Intervalle um den Wert 1 betrachten und fordern, dass es immer einen Punkt gibt, ab dem die Folge aus dem Intervall nicht mehr heraus springt.

Ich komme anschließend hinzu und frage, ob sie schon etwas aufgeschrieben haben. Sie antworten, dass sie als Gruppe noch nichts zur Aufgabenstellung aufgeschrieben haben. Daher lasse ich mir die Ergebnisse mündlich berichten.

- 105 S: *Also ich hab gesagt: Das muss irgendwo einen Punkt geben, ab dem geht man nur noch näher an diese Eins ran und nicht mehr weg. Diese hier hat das nicht, weil egal wie weit man geht, man würde immer noch diese Ausrutscher finden ... ((U))*

Sebastian formuliert die Eigenschaft noch einmal ähnlich, wie er es zuvor bereits getan hat. Jana ergänzt:

- 108 J: *Ja, und wir haben halt, ob es jetzt gleich ist, dass der auch, ja, der darf ja auch eins sein, also, es nähert sich ja nicht der Eins an und dann hier in dem Fall und auch hier, das ist dann ja wirklich-, die Werte sind dann ja auch eins*

Die Studentin betont mit Verweis auf zwei Beispiele, dass der Wert 1 auch angenommen werden darf. Das fällt für sie anscheinend nicht unter die Formulierung „annähern“. Ich gehe noch einmal auf die Formulierung von Sebastian ein.

- 111 L: *Genau. Also ... da habt ihr ja gesagt: Hier ... die Folgen a_n bis f_n , die sollen eben diese gemeinsame Eigenschaft haben und das versucht ihr zu formulieren. Jetzt hast du eben gesagt, also, ab einem-, ab einer bestimmten Stelle ... müssen sie immer*

- 112 S: *Dürfen sie nicht mehr ... sag ich mal, wesentlich davon weggehen ... okay, davon weggehen ist jetzt hier die Sache, weil-*

- 113 P: *Ja, also ... der Abstand zu eins immer kleiner oder gleich sein halt, ne?!*

Was genau der Student unter „wesentlich davon weggehen“ versteht beziehungsweise was er noch ergänzen wollte und auf welches Beispiel er dabei zeigt wird hier nicht deutlich, da er von seiner Kommilitonin unterbrochen wird. Diese ist zunächst der Meinung, ab der bestimmten Stelle dürfe der Abstand der Folgenglieder zum Wert 1 nicht mehr größer werden. Sie meint damit vermutlich, dass der Abstand eines Folgenglieds zum Wert 1 nicht größer sein darf als der des vorherigen Folgenglieds zur 1. Sie korrigiert sich jedoch anschließend:

- 115 P: *Obwohl, hier nicht. Da gehts ja immer wieder nochmal-, obwohl, doch, irgendwann ist dann aber-*

Auf welches der Beispiele Pia sich dabei bezieht, kann aus der Audioaufnahme nicht festgestellt werden. Da ich daneben stand, weiß ich jedoch, dass die Studentin auf die

Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ gezeigt hat, die auch unter den

Beispielen die einzige Folge ist, bei der es keine Stelle gibt, ab welcher der Abstand zu 1 immer kleiner wird oder gleich bleibt. Den Studierenden fällt hier selbst auf, dass ihre Formulierung der Eigenschaft auf dieses Beispiel so nicht zutrifft:

118 S: *Ja, hier-*

119 P: *Da ist das nicht richtig, ne (fragend)?! Ja*

120 L: *((U)) habt ihr schon bemerkt, ein bisschen springts schon immer wieder auch nochmal, ne (Floskel)!?*

121 P: *Ja*

Jana macht auf Folgendes aufmerksam:

124 J: *((U)) springt doch auf die-, auf die Eins*

Ihr Einwurf, dass die Folge auf den Wert 1 springt, wird von ihren Gruppenmitgliedern jedoch nicht beachtet. Pia betrachtet zunächst die Folgenglieder, bei denen es keine Sprünge gibt:

125 P: *Innerhalb diesem Intervall wird es immer näher an die Eins, ne (fragend)*

Das Intervall, von dem sie spricht, ist ein Abschnitt der natürlichen Zahlen zwischen zwei Vielfachen von 10.

129 P: *Kann man das denn auf-, auf diesen Zwischenraum beziehen? Also zwischen den Vielfachen von zehn und wird dann-, nähert sich ja immer-, also es wird ja hier immer wieder ((U)) an die Eins ran, also- ... versteht man das, wie ich das gerade meinte?*

Die Studentin schlägt hier vor, jeweils nur solche zuvor beschriebenen Abschnitte zu betrachten, für welche die Formulierung der Eigenschaft tatsächlich zutrifft. Ich antworte jedoch, dass eine einheitliche Formulierung für alle Folgen benötigt wird. Jana bringt daraufhin noch einmal ihren Vorschlag ein, den Begriff „Asymptote“ zu verwenden:

134 J: *Was ich hier nochmal hatte. Weil an der Schule hat man das mit der Asymptote gehabt, dass man so ne Gerade zum Beispiel hat und, äh, da nähert sich dann so ein Graph an ... und, ähm, das ist ja dann auch im Prinzip am Anfang dieses Konvergierens ist dann, sich an diese Gerade annähert, die dann da so ... ist. Aber im Endeffekt ka-, keine komplette Asymptote, weil es kann ja nicht eins werden oder nie diesen Wert annehmen, bei einer Asymptote*

135 L: *Hmhm (bejahend)*

136 J: *Das ist dann-*

137 L: *Und wie ist es hier?*

138 S: *Ich würd jetzt-*

139 J: *Alle Werte, die nicht eins sind, nähern sich, glaube eins an, oder!?*

Hier sagt sie explizit, dass ihrer Meinung nach bei einer Asymptote der Wert nicht angenommen werden darf, bei einer konvergenten Folge hingegen schon. Die übrigen Gruppenmitglieder gehen nicht auf ihre Äußerung ein.

Sebastian hat einen neuen Vorschlag:

- 140 S: *Wenn man jetzt irgendein Intervall sagt, dann kann man auf jeden Fall in dieser Folge ... einen Punkt finden, ab dem ... springts aus diesem Intervall nicht mehr raus, also hier können beliebig kleine Sprünge nur noch in die falsche Richtung haben ... Wenn wir jetzt sagen, äh, wir finden jetzt zum Beispiel einen Punkt, ab dem es null Komma-, nur noch um null Komma null eins in die falsche Richtung springt und egal, wie klein wir dieses null Komma null eins oder sonst was machen, wir finden immer einen Punkt ab der Folge, ab der das auf jeden Fall gilt, da ... sind die Abschnitte dann, ja irgendwann gehen die auf die Null, auf diese Abstände, auch bei diesen Ausrutschern bei zehn, allen zehn*

Sebastian argumentiert, dass bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

für irgendein Intervall, womit er vermutlich eine Umgebung um den Wert 1 meint, ein Punkt gefunden werden kann, ab dem die Folgenglieder nicht mehr aus diesem Intervall raus springen. Dass er tatsächlich Umgebungen um den Wert 1 meint, wird dadurch bestätigt, dass er von Sprüngen „in die falsche Richtung“ und anschließend auch von Abständen spricht. Mit „egal, wie klein wir dieses null Komma null eins oder sonst was machen“ hebt er hervor, dass die Umgebung beliebig klein gewählt werden kann und immer ein solcher Punkt gefunden werden kann.

Nachdem er hier ausschließlich die eine Beispielfolge betrachtet hat, geht er noch auf das Nicht-Beispiel ein:

- 142 S: *Das schafft man-, das schafft man hier nicht, weil man jetzt sagt: Den Punkt, ab dem es nicht mehr um null Komma fünf springt, findet man nicht, weil es wird immer noch um eins springen ... deshalb geht das hier nicht*

- 143 P: *Bei den Zehnerschritten, ja*

Er gibt einen konkreten Wert für den Abstand an, nämlich 0,5, für den es bei der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Punkt gibt, ab dem der Abstand zum Wert 1 für alle weiteren Folgenglieder maximal 0,5 beträgt, weil der Abstand für alle Vielfachen von 10 immer 1 beträgt. Er hat hier also argumentiert, warum die von ihm formulierte Eigenschaft auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 3) *Wenn man irgendein Intervall sagt, dann kann man einen Punkt finden, ab dem springt's aus diesem Intervall nicht mehr raus. Und egal wie klein wir dieses 0,01 oder sonst was machen, wir finden immer einen Punkt ab der Folge, ab der das auf jeden Fall gilt. Das schafft man hier [bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$] nicht, weil wenn man den Punkt, ab dem es nicht mehr um 0,5 springt, findet man nicht, weil es wird immer noch um 1 springen.*

Die Gruppe hat in dieser Phase einen großen Erkenntnisfortschritt gemacht. Sie haben

nicht nur eigenständig erkannt, dass ihre vorherige Charakterisierung nicht auf alle Beispielfolgen zutrifft, sondern es ist ihnen auch gelungen, eine neue Charakterisierung zu formulieren, welche die entsprechende Beispielfolge einschließt. Dabei ist zum ersten Mal umgekehrtes Denken erkennbar. Sebastian spricht zuerst von irgendeinem Intervall und sagt, dass dann ein Punkt der Folge gefunden werden kann, ab dem die Folgenglieder innerhalb dieses Intervalls liegen. Diese Charakterisierung ist bereits so gut, dass ich sie als Endergebnis akzeptieren würde. Wieder ist es der gleiche Student, der die neue Idee eingebracht hat. Pia scheint ihm zumindest folgen zu können. Jana hingegen äußert sich zwar, doch sie bezieht sich nicht auf die Aussagen der anderen Gruppenmitglieder und diese gehen auch nicht auf ihren Vorschlag ein. Karl äußert sich überhaupt nicht.

Phase 6: Aufschreiben der zuvor mündlich formulierten Charakterisierung

In dieser Phase versucht hauptsächlich Sebastian, die zuvor nur mündlich formulierte Charakterisierung formal aufzuschreiben. Die anderen Gruppenmitglieder diskutieren noch über die Charakterisierung an sich. Sebastian schlägt schließlich eine formal-mathematische Definition vor und erläutert sie seinen Kommilitonen.

Ich fordere die Gruppe dazu auf, das Ergebnis nun noch aufzuschreiben. Sebastian fragt nach:

145 S: *Mit Quantoren?*

146 L: *Zum Beispiel ... du kannst auch in Worten schreiben*

147 S: *Also, sozusagen eine Definition versuchen*

148 P: *Aber das hier war nochmal dann so-*

149 S: *Für Konvergenz*

Beim Thema Aufschreiben denkt der Student sofort an Quantoren. In einer vorherigen Phase der Diskussion über die Aufgabenstellung hat die Gruppe vermutet, dass nicht nach der Definition gefragt ist. Nun erkennt der Student hier, dass doch eine Definition gefordert ist.

Jana beschäftigt sich immer noch mit dem Begriff „Asymptote“:

150 J: *Der Unterschied, ne (Floskel), bei Asymptote und Konvergenz, was ich gesagt hatte ... das war dann der Unterschied, dass es einmal das annimmt und einmal nicht?!*

Die Studentin grenzt für sich „Asymptote“ und „Konvergenz“ voneinander ab. Der Unterschied besteht ihrer Meinung nach in der Frage des Erreichens des (Grenz-)Werts.

Sie merkt anschließend an, dass sie das Wort „konvergieren“ noch nicht kannte. Ich antworte, dass das auch nicht vorausgesetzt war, sondern selbst erarbeitet werden soll:

156 J: *Okay ... das Wort konvergieren habe ich irgendwo noch nicht ((U)) aufm Schirm*

157 L: *Ja, das, äh, war ja auch nicht irgendwie vorausgesetzt oder so*

158 J: *Gut (schmunzelt)*

159 L: *Hattet ihr auch in der Vorlesung noch nicht*

160 J: *Okay*

161 L: *Das wollen wir heute schon mal gemeinsam erarbeiten, dann habt ihr den Begriff schon mal einmal ... gehört*

162 J: *Ja*

163 L: *Wenn das dann in der Vorlesung kommt-*

164 J: *Fällts einem leichter ... oder-*

165 L: *Genau ((U))*

166 J: *((U)) (lacht) ... ja schön ... find ich gut, dass wir so nen Workshop machen*

Möglicherweise hat die Verwendung des Ausdrucks „konvergent“ in der Aufgabenstellung die Studentin in die Irre geführt, weil sie gedacht hat, sie müsste den Begriff eigentlich schon kennen. Nachdem ich ihr den vorbereitenden Charakter des Workshops erkläre, äußert sie sich positiv darüber, dass es einen solchen Workshop gibt.

An dieser Stelle entferne ich mich von der Gruppe. Sebastian versucht für sich alleine, eine Definition aufzuschreiben, während die übrigen drei Gruppenmitglieder weiter diskutieren.

167 J: *((U)) dann können wir ja etwas aufschreiben ... also wir können festhalten: Wenn halt dieses n immer größer wird ... gegen Unendlich läuft ... dass es sich dann halt immer mehr der Eins annähert ... bei a n gleich eins*

Jana spricht hier weiterhin von „annähern“, sie bezieht sich nicht auf die Argumentation von Sebastian. Umgekehrtes Denken ist in ihrer Aussage nicht erkennbar. Pia äußert Zweifel:

170 P: *Ja, weiß ich nicht ... weil es gibt ja auch welche, wo-, hier ist es ja nicht richtig, ne (fragend)*

171 J: *Obwohl, wenn du ganz ins Unendliche gehst, dann haste halt zum Beispiel eins Komma null, null, null, null, null eins oder so. Da ist der Sprung ja so minimal, also er sich trotzdem der Eins annähert*

Pia ist der Meinung, dass die Formulierung „annähern“ nicht auf alle Beispiele zutrifft. Janas Ansicht nach können minimale Sprünge jedoch auch unter den Begriff „annähern“ fallen. Pia präzisiert noch einmal, weshalb sie die Formulierung für ungeeignet hält:

174 P: *Ja, dann nähert es sich ja trotzdem nicht an die Eins an, es wird ja auch die Eins werden*

Für sie heißt „annähern“, dass der Wert nicht erreicht werden darf, was allerdings bei dem Beispiel, das sie gerade betrachtet, der Fall ist. Die Diskussion darüber wird von Sebastian unterbrochen, der in der Zwischenzeit seine Formulierung verschriftlicht hat.

178 S: *Ach so, ich glaub, das müsste es sein*

Er hat zunächst Folgendes notiert:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : z - a_m < x \forall m \leq n$

Die übrigen Gruppenmitglieder lesen sich das Geschriebene durch und nachdem Karl eine Frage stellt, erläutert Sebastian die von ihm notierte Definition:

179 K: *Warum fängst du denn mit x an, es ist doch ein n gesucht?*

180 S: *Also ... ja, ähm, hier können wir, ähm, was war den-, also ich hab jetzt, äh, ich hab jetzt zu ihr gesagt, ich hab ja gesagt: Egal, wie klein wir das Intervall nehmen, ne (Floskel), man- ab einer bestimmten Stelle bei-, wegen was sonst, so habe ich jetzt gesagt ... es ist konvergent, wenn für jedes x aus den positiven, reellen Zahlen, also egal-, das ist dann völlig egal, wie klein das wird, gibt es auf jeden Fall ein n ... ab dem gilt, dass, äh ... dass die, äh, Differenz der Folge ab der Stelle, also sagen wir mal die Differenz zu dem Wert, gegen die das konvergiert. In diesem Fall ist es eins. Die Differenz davon geht ja dann auch gegen null, ne (Floskel), dass diese Differenz auf jeden Fall k -, echt kleiner als dieses x bleibt ... für alle m -, ah, Moment ... ((U)) ne (verneinend), äh, ich hab es falsch rum, n kleiner gleich m ... und zwar ab da für alle weiteren n 's, die in der Folge noch kommen ... genau*

Die Frage von Karl, warum Sebastian mit x anfängt und nicht mit n , zeigt, dass bei ersterem der Schritt zum umgekehrten Denken noch fehlt, während letzterer ihn vollzogen hat. Sebastian geht nicht direkt auf die Frage ein. Er erklärt aber, wie das, was er aufgeschrieben hat, zu verstehen ist: Für jede noch so kleine positive reelle Zahl x lässt sich eine Stelle finden, ab welcher der Abstand aller weiteren Folgenglieder zum (Grenz-)Wert jeweils kleiner als x ist. Während seiner Erläuterung fällt dem Studenten auf, dass in seiner notierten Definition noch ein Fehler vorhanden ist, es muss $n \leq m$ heißen statt $m \leq n$. Die korrigierte Definition lautet nun also wie folgt:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : z - a_m < x \forall n \leq m$

Sebastian ergänzt seine mündliche Erläuterung noch:

184 S: *z ist das, gegen was es konvergiert, einfach*

185 J: *Okay*

186 S: *Weil diese Differenz geht ja dann ... eh ab einer bestimmten Stelle gegen null ex-, extrem*

187 J: *Ja*

188 S: *Und es ist ganz egal, wie klein wir unser x machen, wir finden eine Stelle an der Folge, ab der es auf jeden Fall kleiner bleibt*

189 P: *Hmhm (verstanden)*

190 J: *Ja, ist logisch*

Zwischenstand:

(Charakterisierung 4) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : z - a_m < x \forall n \leq m$

Erneut hat Sebastian den Erkenntnisprozess größtenteils alleine vorangetrieben. Er hat die zuvor mündlich formulierte Charakterisierung formal-mathematisch notiert, ihm ist eigenständig ein Fehler darin aufgefallen und er hat diesen auch korrigiert. Zumindest die beiden Studentinnen scheinen die Definition mit der Erläuterung verstanden zu haben. Tatsächlich entspricht die in formal-mathematischer Sprache notierte Charakterisierung streng genommen nicht exakt dem, was Sebastian mündlich erläutert hat: Er hat aufgeschrieben, dass die Differenz $z - a_m$ kleiner als x sein soll, zuvor hatte er hingegen von dem Abstand gesprochen, der $|z - a_m|$ entsprechen würde.

Phase 7: Testen der Definition an einigen Beispielfolgen

Die Gruppe geht in dieser Phase noch einmal einige der Beispielfolgen durch. Sebastian wendet klar die von ihm formulierte Charakterisierung an. Die anderen argumentieren eher anschaulich.

Jana kommt noch einmal auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ zu sprechen.

193 J: *Ähm ... da springt das ja immer in all diesen Zehnerschritten*

194 S: *Jap*

195 J: *Und, wenn man das sich jetzt vorstellt, dass das irgendwann mal 1000 oder sowas ist, dann springt das ja nur noch um null Komma null, null, null, null, null*

Sie sagt, dass bei jedem zehnten Folgenglied ein Sprung ist, dass diese Sprünge jedoch für großes n sehr klein sind.

198 S: *Es ist ganz egal, wie klein wir dieses x machen, lassen-, wir finden irgendwo, irgendwann in der Folge, finden wir eine Stelle, ab der es auf jeden Fall um weniger springt als das*

Sebastian begründet, warum diese Folge zu seiner Definition passt. Jana betont, dass der Wert 1 von der Folge angenommen wird:

199 J: *Aber dann kommts doch nie, also diese-, diese Sprung-, ja, diese Springer, sag ich mal, die auf den Zehnerschritten sind, die sind ja immer direkt auf eins*

200 S: *Hmhm (bejahend)*

201 J: *Und die anderen Sachen sind ja nie auf eins*

202 S: *Kommen aber immer näher ran*

203 J: *Das is- ... kommen aber immer näher ran, aber wir werden nie*

204 S: *Hmhm (verstanden)*

205 J: *Nie, nie, nie ... (lacht) auf eins, einen, weil das hier ist ja zum Beispiel direkt auf eins bei sieben*

Die Studentin kommt anschließend auf die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ zu sprechen, die in Grafik 7 abgebildet ist. Sebastian begründet auch hier, warum die Folge seiner Definition entspricht:

209 P: *Weil dann wäre ja hier bei sieben ... wenn man das vergleicht ... aber das ist doch jetzt echt cool*

210 J: *Eins minus ... eins*

211 P: *Aber das ist ja dann gleich*

212 S: *Das ist ja nicht schlimm*

213 J: *Das ((U)) oder?*

214 S: *Das ist ja nicht schlimm. Das ist ja trotzdem auf jeden Fall kleiner als dieses x. Weil dann ist-*

215 P: *Aber wenn-, wenns kleiner ist, darfs auch kleiner gleich sein?*

216 S: *Ja, nene, Moment, wir-, ich hab hier ja die Differenz zu dem Konvergenten, zu diesem Wert ((U)). Dieses konvergiert gegen eins*

217 P: *Hmhm (verstanden)*

218 S: *So, und wir sagen, wir gucken ab dieser Stelle, dann ist diese Differenz immer null, bei der ((U))*

219 P: *Ja*

220 S: *So, und null ist auf jeden Fall kleiner als jedes x, das, was in den positiven reellen Zahlen liegt*

Ab welcher Stelle der Student die Differenz betrachtet, kann lediglich vermutet werden. Dass die Differenz immer Null ist, wie er sagt, ist ab 500001 korrekt. Sie wollen kurz warten bis ich zu ihnen komme. Dann kommt Jana erst noch einmal auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ zurück:

234 J: *Aber auch wenn-, also wenn du diese Zehnersprünge rausnimmst, ne!?*

235 S: *Hmhm (bejahend)*

236 J: *Dann nähert es sich auf jeden Fall eins an*

237 S: *Ja*

238 J: *Wenn man jetzt hier die Sprünge wieder mit da rein nimmt, ist das irgendwie ausschlaggebend, dass es dann keine Folge mehr ist oder irgendwie ne spezielle Folge?!*

239 S: *Das- ... keine Ahnung (lacht)*

240 J: *Ne (verneinend), ne (fragend)?!*

241 S: *Sie ist auf jeden Fall immer noch konvergent, das haben wir ja gesagt*

242 P: *Eine Folge ist sie noch auf jeden Fall, ja*

243 S: *Ne Folge bleibt es, ja ... also, wenn du $((U))$ nicht raus nimmst, sondern einfach einordnest, wie die andern ... dann bleibt es ne Folge, klar*

244 J: *Ja, rausnehmen kannst du nicht, da hast du keine Folge mehr, stimmt*

Sie scheint sich bezüglich $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noch unsicher zu sein, ihre Äußerungen sind für die anderen Studierenden teilweise nicht verständlich. Sie entgegnet, dass das Beispiel konvergent ist und dass es auch tatsächlich eine Folge ist. In ihrer letzten Äußerung stimmt Jana dem zu.

Zwischenstand:

Eine neue Charakterisierung wurde in dieser Phase nicht formuliert. Sebastian hat bei zwei der Beispielfolgen begründet, dass sie die formulierte Charakterisierung erfüllen. Die übrigen Gruppenmitglieder argumentieren eher anschaulich auf Basis von Verbalisierungen und sie scheinen teilweise etwas abgehängt worden zu sein.

Phase 8: Ergänzen von Betragsstrichen ergibt die finale Version der Charakterisierung

Jana und Pia unterhalten sich über eine weitere Beispielfolge, an der Sebastian dann eigenständig auffällt, dass in seiner Charakterisierung Betragsstriche fehlen. Nachdem er diese ergänzt hat, präsentiert er mir das Ergebnis, welches der formalen ϵ - N -Definition entspricht. Die Nacherfindung der Definition ist damit beendet.

Die Studentin kommt dann noch einmal auf eins der anderen Beispiele zu sprechen:

248 J: *Ja, und das hier ist immer auf eins*

249 P: *Ne (verneinend), das nähert sich an*

250 J: *Ach, von hier oben, ne!?*

251 P: *Jo ... ne (verneinend), immer so abwechselnd: das, das, das, das und immer-*

252 J: *Deshalb sind hier auch immer so komische Sprünge*

Zunächst ist nicht klar, über welche Folge hier gesprochen wird. Pias Aussage „immer so abwechselnd“ deutet jedoch darauf hin, dass es sich um die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ handelt, die für $n \neq 10$ durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert ist. Es ist die einzige unter den Beispielfolgen,

bei der die Folgenglieder jeweils im Wechsel größer und kleiner als der Wert 1 sind. Jana glaubt also anscheinend erst, dass diese Folge konstant ist, dann glaubt sie, dass sich die Folge der 1 von oben annähert. Pia zeigt während ihrer Erläuterung vermutlich auf die Grafik der Folge, um zu verdeutlichen, wie die Folge sich verhält. Sebastian bemerkt – vermutlich anhand der von den beiden Studentinnen betrachteten Folge – dass er noch eine Änderung an der Definition vornehmen muss:

258 S: *Aber man sollte mal Betragsstriche setzen, fällt mir grad auf*

In seiner notierten Definition waren zuvor keine Betragsstriche um die Differenz $z - a_m$ gesetzt worden, diese ergänzt er nun. So lautet die finale Version der Definition:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_m| < x \forall n \leq m$

Während die Gruppe kurz auf mich wartet sprechen sie noch einmal über die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$:

267 J: *Das hier heißt doch einfach nur: Wenn du jetzt auf Graph eins guckst ... n größer 125, ne?! Dann muss ja a von n immer gleich eins sein, für n größer-, also maximale n's, sondern größer als 125 und immer höher, und dann ist es immer n-, äh, immer eins*

268 S: *Hmhm (bejahend)*

269 J: *Und dann ist ja auch nur eine Gra-, ja, nicht ne Gerade, aber die Punkte liegen alle auf einer*

270 S: *Wenn du das auf die Definition anwendest, dann ist ab da diese Differenz immer null, weil du es auf jeden Fall kleiner als jedes x, das du*

271 J: *Ja*

272 S: *Finden kannst*

273 J: *Das passt gut*

Jana wendet nicht die formulierte Charakterisierung an, sondern sie argumentiert auf einer anschaulichen Ebene. Sebastian hingegen argumentiert auf Basis der Definition. Der Student ist der Meinung, dass es auf alle gegebenen Beispielfolgen zutrifft, er ist sich allerdings nicht sicher, ob es allgemein stimmt:

275 S: *Es passt zumindest für all diese Ver-, nichts ((U)) ich wollte keinen ((U)) ich wollte nur zeigen. Das passt auf jeden Fall für all diese Fälle. Ich weiß jetzt nicht, obs allgemein für alles funktioniert*

Vermutlich meint der Student mit der Aussage „das passt auf jeden Fall für all diese Fälle“, dass die von ihnen formulierte Eigenschaft für die vorgegebenen Beispielfolgen stimmt. Dass er sich nicht sicher ist, „obs allgemein für alles funktioniert“, könnte bedeuten, dass ihm bewusst ist, dass nach einer allgemeinen Definition von Konvergenz gefragt ist und

er sich nicht sicher ist, ob die Charakterisierung tatsächlich auf jede Folge, die im Sinne der hochschulmathematischen Definition konvergent ist, zutrifft.

Anschließend komme ich zu ihnen und sie zeigen und erläutern mir ihr Endergebnis:

277 S: *Hier, Laura ... können wir mal ... also ich hab das jetzt, versuchen da runterzuschreiben ... also es passt zumindest für all diese Fälle. Also wirds-, es konvergiert gegen irgendein z , das heißt, egal welches x wir nehmen aus den positiven reellen Zahlen, wir finden auf jeden Fall ne Stelle, ab der die Folge ... so ist, dass die Differenz zwischen jedem Wert, den es annimmt und diesen konvergent wird, kleiner ist als dieses x ... also es passt zumindest für all diese Fälle. Hier haben wir durchgesehen, aber*

278 L: *Ja, habt ihr schon ... das hört sich gut an. [...]*

Ich bestätige den Studierenden, dass sie eine geeignete Charakterisierung gefunden haben. Sie sind nun also mit der Bearbeitung der Aufgabe fertig.

Ergebnis:

(Finale Charakterisierung) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_n| < x \forall n \geq n$

Jana wendet beim Überprüfen nie die Charakterisierung an, sie bleibt auf einer anschaulichen Ebene.

6.2.4 Gruppe 2: Analyse in Bezug auf die Leitfragen

Nun soll für die gerade dargestellte zweite Gruppe auf die Leitfragen eingegangen werden.

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Hier wird auf alle Textstellen eingegangen, in denen deutlich wird, dass die Studierenden Vorverständnisse zum Konvergenzbegriff oder ähnlichen Begriffen in die Diskussion einbringen. Zunächst einmal argumentieren die Studierenden dieser Gruppe von Anfang an auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen. Ab Turn 26 scheint einer der Studenten sein Vorverständnis zu Konvergenz einfließen zu lassen. Eine seiner Kommilitoninnen hat zuvor gefragt, ob „das Zwischending“ bei der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{raus falle. Damit meint sie wohl die Folgenglieder}$$

$c_{200000}, \dots, c_{500000}$, die dem Wert -3 entsprechen. Der Student antwortet daraufhin, bei Konvergenz sei es egal, was vorher passiert, Hauptsache ab einem bestimmten Punkt nähert es sich nur noch der Eins an. Hier argumentiert der Student nicht, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Aufgabenstellung als konvergent vorgegeben ist und deshalb dieser Aspekt unter die Eigenschaft Konvergenz fällt, sondern er begründet, warum seiner Meinung nach diese Folge konvergent ist. In der Charakterisierung 1, die kurz darauf von ihm

vorgeschlagen wird, scheint er sowohl sein Vorverständnis als auch die vorgegebenen Beispielfolgen einzubeziehen. Diese Charakterisierung lautet:

„Ab einer bestimmten Stelle geht die Funktion immer näher an den Wert 1 ran und geht nie wieder weiter weg, er geht höchstens noch näher ran oder hat sie schon erreicht.“

In Turn 34 schlägt ein anderer Student vor, es könne $\lim_{n \rightarrow \infty} = 1$ geschrieben werden. Was genau er unter dieser Schreibweise versteht, wird aus der Diskussion nicht deutlich. Sein Kommilitone ist sich unsicher, ob diese Schreibweise bei Folgen zulässig sei. Möglicherweise kennt er die Schreibweise aus der Schule eher im Zusammenhang mit Funktionen. Solche Vorerfahrungen waren bei den Starting Points des Vorbereitungsworkshops vermutet worden.

Außerdem bringt eine der Studentinnen ab Turn 40 ein Vorverständnis zu dem Begriff Asymptote in die Diskussion ein. Im weiteren Verlauf wird deutlich, dass sie unter einer Asymptote etwas versteht, dem sich eine Funktion annähert ohne es zu erreichen. Es gelingt der Studentin, den Begriff Konvergenz von diesem Begriff abzugrenzen.

Ein weiteres Vorverständnis wird nur implizit deutlich. Eine Studentin fragt ab Turn 39 mehrmals nach, ob konvergieren auch bedeute, dass der Wert 1 erreicht werden könne. Möglicherweise gehören zu ihrem *Concept Image* zum Konvergenzbegriff bis zu dem Zeitpunkt lediglich solche Folgen, die den Grenzwert nicht erreichen. Auch dies gehört zu den bei den Starting Points des Vorbereitungsworkshops vermuteten Vorverständnissen. Ein Problem scheint dieses Vorverständnis aber nicht darzustellen.

Insbesondere dem Studenten, der den größten Beitrag zum Nacherfindungsprozess dieser Gruppe geleistet hat, gelingt es, sein Vorwissen produktiv einzubringen. Anhand der vorgegebenen Beispielfolgen stellt er eigenständig fest, dass sein Vorverständnis weiterentwickelt werden muss. Dies akzeptiert er und die Anpassung seines *Concept Images* gelingt. Bei den übrigen Gruppenmitgliedern scheint sich das Vorwissen ebenfalls nicht hinderlich auszuwirken. Auch sie stellen Diskrepanzen zwischen ihren Vorverständnissen und dem „neuen“ Begriff fest. Teilweise grenzen sie den zu entwickelnden Begriff explizit von ihrem Vorverständnis ab.

3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

Auch hier soll der Erkenntnisverlauf der Gruppe zunächst einmal schematisch dargestellt werden. Darin finden sich insbesondere die wichtigsten formulierten Charakterisierungen und alle wesentlichen Diskussionspunkte und Erkenntnisse der Gruppe wieder. Dabei wird der Prozess der Gruppe als Ganzes betrachtet, es wird nicht zwischen den einzelnen Gruppenmitgliedern unterschieden. Auch sind die einzelnen Beispielfolgen, mit denen sich die

Gruppe jeweils beschäftigt, hier nicht dargestellt, sondern auf diese wird später eingegangen.

I Abgrenzung der Beispiele und des Nicht-Beispiels über die Formulierung

Bei den Beispielen gibt es einen Punkt, ab dem sie nur noch näher an 1 gehen und bei dem Nicht-Beispiel gibt es keinen solchen Punkt.

Nebenbei Feststellung: Grenzwert kann auch erreicht werden

II Erkenntnis, dass die Beispielfolgen 1 nicht unbedingt immer näher kommen Umgekehrtes Denken führt zur folgenden Charakterisierung:

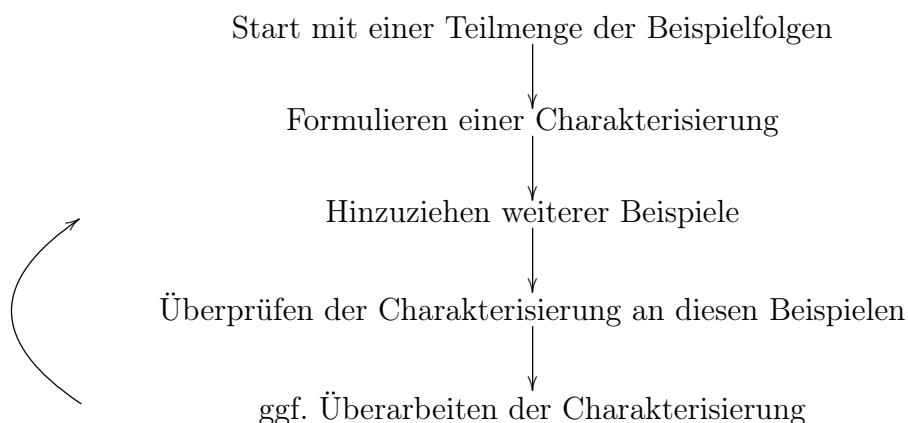
Für irgendein Intervall kann man immer einen Punkt in der Folge finden, ab dem springt's aus diesem Intervall nicht mehr raus.

III Impuls: Charakterisierung aufschreiben

zuerst vergessen sie die Betragsstriche, nach selbständiger Ergänzung lautet das Ergebnis:

*Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_m| < x \forall n \leq m$*

Die verschiedenen Varianten der hypothetischen Erkenntnisverläufe haben hingegen alle die folgende Struktur gemeinsam:



i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

Auch bei dieser Gruppe besteht ein großer Unterschied zwischen tatsächlichem und hypothetischem Erkenntnisverlauf darin, dass die Studierenden von Anfang an alle vorgegebenen Folgen berücksichtigt haben und nicht von einer Teilmenge der Folgen ausgegangen sind und anschließend weitere Folgen hinzugezogen haben.

Eine beobachtete Problemstelle besteht darin, dass die Studierenden zunächst der Meinung sind, bei den Beispielfolgen würde es jeweils einen Punkt geben, ab dem die Folgenglieder nur noch näher an 1 gehen und nicht mehr weiter weggehen. In den Turns 31 und 105 äußern sie dies explizit. Ihnen ist zu dem Zeitpunkt nicht bewusst, dass dies auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bei der jedes zehnte Folgenglied exakt dem Wert 1 entspricht und alle übrigen Folgenglieder durch $d_n = 1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, nicht zutrifft. Es handelt sich also um ein *Problematic Issue*. Im Sinne der erwarteten Problemstellen in Tabelle

4.2 lässt sich dieser Fall unter Situation (B) einordnen, die dadurch gekennzeichnet ist, dass die Studierenden eine nicht passende Eigenschaft formulieren und nicht selbständig prüfen, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft. Ein kleiner Unterschied zur erwarteten Situation lässt sich feststellen, da die Studierenden tatsächlich alle Beispielfolgen systematisch durchgehen, doch ihnen fällt an der Stelle das Problem einfach nicht auf. Ab Turn 112 bemerken sie dann doch eigenständig, dass ihre Charakterisierung für die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ungeeignet ist. Somit wird das *Problematic Issue* in dem Moment zum *Problem*, da es ihnen nun bewusst ist. Tatsächlich gelingt es ihnen kurz darauf in Turn 140 auch, eine Lösung für das Problem zu finden.

Die Studierenden dieser Gruppe sind somit zumindest teilweise systematisch vorgegangen. Sie haben eine formulierte Eigenschaft mündlich an allen vorgegebenen Beispielfolgen getestet. Dies haben sie jedoch nicht sorgfältig genug gemacht, denn sie haben dabei nicht bemerkt, dass die Eigenschaft auf eine der Beispielfolgen nicht zutrifft. Am Ende des Nacherfindungsprozesses sagen sie, dass sie ihre finale Formulierung an allen vorgegebenen Folgen überprüft haben. Dieser Gruppe ist also bewusst, dass das Testen der Charakterisierungen wichtig ist, um eine geeignete Eigenschaft zu formulieren.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

In Tabelle 6.2 ist ein Überblick zu finden, in welchen Phasen die Studierenden der Gruppe 2 welche der vorgegebenen Folgen in ihren Argumentationen explizit verwendet haben. Dabei wurde jede Beispielfolge pro Phase maximal einmal aufgeführt.

Phase	Folge
1	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$
2	-
3	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \binom{n+1}{n}_{n \in \mathbb{N}}$

	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
	$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
4	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
5	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
6	-
7	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
	$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
8	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$
	$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$

Tabelle 6.2: Übersicht über die verwendeten Folgen bei Gruppe 2

Auch Gruppe 2 geht auf jede der gegebenen Folgen mindestens einmal ein. In Phase 3 gehen sie alle Beispielfolgen systematisch in der Reihenfolge, wie die zugehörigen Graphen nummeriert sind, durch, um ihre erste Charakterisierung zu überprüfen. Die beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(0, \underbrace{9 \dots 9}_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ werden außerhalb dieser Phase nicht explizit thematisiert. Es handelt sich um zwei monotone Folgen, die den Grenzwert jeweils nicht annehmen. Die Folgen sind also zum einen vom selben Typ und zum anderen handelt es sich eher um typische Beispiele konvergenter Folgen. Diese waren anscheinend für den Erkenntnisprozess der Studierenden nicht so wichtig. Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für $n \leq 125$ durch den Term $1 - \frac{1}{n}$ definiert ist und für alle anderen natürlichen Zahlen konstant 1 ist, wurde von den Studierenden abgesehen von der systematischen Überprüfung in Phase 3 noch zwei weitere Male verwendet. In Phase 1 nutzen sie diese Folge, um zu argumentieren, dass konvergente Folgen den Grenzwert auch annehmen dürfen. In Phase 8 überprüfen sie ihre finale Charakterisierung schließlich noch einmal an dieser Folge. Hauptsächlich scheint das Beispiel also wichtig gewesen zu sein, um zu erkennen, dass konvergente Folgen den Grenzwert annehmen dürfen. Auch die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nimmt den Grenzwert an, sie ist für $200000 \leq n \leq 500000$ durch -3 definiert und alle anderen Folgenglieder entsprechen dem Wert 1. Diese Folge

lässt sich insgesamt viermal in der Diskussion der Studierenden eindeutig identifizieren. Zu Beginn in Phase 1 sprechen sie ab Turn 14 über diese Folge, da zwei Studentinnen zunächst daran zweifeln, dass die Folge „gegen eins geht“. Bei der einen Studentin kamen die Zweifel vermutlich daher, dass sie nicht die gesamte Folge betrachtet hat, sondern lediglich einen Ausschnitt. Sie argumentieren in dieser Phase aber auch, dass für die Eigenschaft Konvergenz egal ist, was am Anfang passiert. Sie erkennen hieran also, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt. In Turn 55 ergänzen sie, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie auch die zuvor erwähnte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert annimmt. Bei dem systematischen Überprüfen aller Folgen in Phase 3 gehen sie nur ganz kurz auf dieses Beispiel ein, ebenso in Phase 7, wenn sie den zu dem Zeitpunkt aktuellen Stand der Definition testen. Somit scheint diese Folge zum einen in Bezug auf den Aspekt, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt, und zum anderen in Bezug auf den Aspekt, dass konvergente Folgen den Grenzwert annehmen dürfen, von Bedeutung gewesen zu sein. Die Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht für $n = 10$ dem Wert 2 und ist ansonsten durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert. Erstmalig gehen die Studierenden in Phase 3 ab Turn 72 auf diese Folge ein, als sie das Nicht-Beispiel von den Beispielen abgrenzen. Als Unterschied zwischen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ benennen sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur einen „Ausfall“ hat, wohingegen es bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer wieder „Ausfälle“ gibt. Hier geht es erneut darum, dass Konvergenz eine infinitäre Eigenschaft ist. Bei dem Beispiel gibt es einen Punkt, ab dem die Folge nur noch näher an die Eins geht, während es bei dem Nicht-Beispiel keinen solchen Punkt gibt. Beim systematischen Überprüfen aller Folgen gehen sie in Phase 3 noch einmal kurz auf dieses Beispiel ein. In Phase 8 ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noch einmal von Bedeutung. Die zwei Studentinnen unterhalten sich ab Turn 248 darüber, wie genau die Folge verläuft, als Sebastian plötzlich auffällt, dass er bei der aufgeschriebenen Definition Betragsstriche ergänzen muss. Er hatte zuvor zwar vermutlich schon die korrekte Vorstellung dazu aufgebaut, doch in seiner formal aufgeschriebenen Definition war dieser Aspekt fehlerhaft. Die Beispielfolge, bei der die Folgenglieder abwechselnd kleiner und größer als der Grenzwert sind, hat ihn anscheinend darauf aufmerksam werden lassen. Diese Beispielfolge scheint also an zwei Stellen im Erkenntnisverlauf wichtig gewesen zu sein, zum einen bei der Erkenntnis, dass Konvergenz eine infinitäre Eigenschaft ist und zum anderen, um beim Aufschreiben der Definition in formal-mathematischer Sprache an die Betragsstriche zu denken. Am meisten hat die Gruppe die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ihren Argumentationen benutzt. Zunächst wurde die erste Charakterisierung in Phase 3 wie an allen anderen Beispielen auch an dieser Folge scheinbar getestet. In Phase 4 stellen sie dann jedoch fest, dass ihre erste Charakterisierung auf diese Folge doch nicht zutrifft, weil es keinen Punkt gibt, ab dem die Folge nur noch näher an die Folge geht und nicht mehr weiter weg. Bei dem nächsten Vorschlag einer Charakterisierung in Turn 140 bezieht sich Sebastian dann auch explizit auf diese Beispielfolge. Es scheint, als hätte der Student nicht nur das Problem der vorherigen Version der Charakterisierung anhand dieses Beispiels erkannt, sondern als hätte er das Beispiel auch für die Überarbeitung der Charakterisierung genutzt. Nachdem sie die Charakterisierung aufgeschrieben haben, möchte eine Studentin in Phase 7 noch einmal auf diese Folge eingehen. Sebastian erklärt, wieso die Charakterisierung darauf zutrifft. Am Ende von Phase 7 sprechen sie erneut über diese Folge. Dabei geht es jedoch nur darum, was passieren würde, wenn die Folge verändert werden würde. Die größte Bedeutung hatte die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ daher vermutlich für die Feststellung, dass es

bei konvergenten Folgen keinen Punkt geben muss, ab der die Folgenglieder sich dem Grenzwert nur noch weiter annähern und für die Verbesserung der Charakterisierung unter Verwendung von Intervallen um den Grenzwert. Das Nicht-Beispiel, das für Vielfache von 10 den Wert 2 annimmt und ansonsten durch $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ definiert ist, wird insgesamt dreimal explizit thematisiert. Zu Beginn diskutieren die Studierenden in Phase 1 darüber, wie die Folgenglieder sich verhalten. In Phase 3 wird das Nicht-Beispiel dann von den Beispielfolgen abgegrenzt. In Phase 5 wird schließlich argumentiert, weshalb die formulierte Eigenschaft auf diese Folge nicht zutrifft. Als einziges Nicht-Beispiel scheint diese Folge ebenfalls wichtig für den Erkenntnisprozess der Studierenden gewesen zu sein.

Auf Basis der vorgegebenen Folgen waren die Studierenden in der Lage, alle wichtigen Aspekte zu entdecken. Das spricht dafür, dass die Menge der Beispiele als Ganzes gut geeignet ist. Bei einzelnen Folgen könnten dennoch Änderungen sinnvoll sein. Da die beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für den Prozess anscheinend keine große Bedeutung hatten und diese beiden Beispiele die selbe Klasse von Folgen repräsentieren, könnte auf eine der beiden Folgen verzichtet werden. Alle anderen Folgen waren wichtig für bestimmte Erkenntnisse und sollten wenn überhaupt höchstens durch einen anderen Repräsentanten derselben Klasse ersetzt werden. Bei dieser Gruppe gibt es jedoch keine Indizien dafür, dass eine solche Ersetzung sinnvoll sein könnte.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Zunächst einmal wurden zur Beantwortung dieser Fragestellung Textstellen gesucht, in denen die Studierenden weitere, nicht vorgegebene Folgen hinzuziehen oder in denen auf andere Weise deutlich wird, dass sie die Menge der Folgen als generisch ansehen. Die Gruppe formuliert von Beginn an eine allgemeine Eigenschaft und ist dabei sehr erfolgreich. In Turn 140 wird dies beispielsweise sehr deutlich: „(...) wir finden jetzt zum Beispiel einen Punkt, ab dem es null Komma-, nur noch um null Komma null eins in die falsche Richtung springt und egal, wie klein wir dieses null Komma null eins oder sonst was machen, wir finden immer einen Punkt ab der Folge, ab der das auf jeden Fall gilt (...)“. Der Studierende beginnt zwar mit einem festen Wert anstelle der Variablen ϵ , er stellt aber selbst klar, dass er diesen Wert als variabel ansieht, indem er „egal wie klein wir dieses null Komma null eins oder sonst was machen“ hinzufügt. Dadurch handelt es sich eindeutig um eine allgemeine Charakterisierung, die nicht nur auf die vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Weitere Folgen werden von der Gruppe nicht explizit hinzugezogen. Lediglich in Turn 234 sprechen sie einmal darüber, was passieren würde, wenn bei einer der Beispielfolgen die „Zehnersprünge“ entfernt werden würden. Am Ende der Diskussion macht ein Student seine generische Sichtweise der Menge der Folgen jedoch noch einmal sehr deutlich, als er in Turn 275 sagt, dass die erarbeitete Charakterisierung auf jeden Fall für alle vorgegebenen Beispiele passen würde, dass er sich aber nicht sicher sei, ob es allgemein passen würde. Mit „allgemein“ scheint er hier beliebige andere Folgen zu meinen. Ihm ist also klar, dass das Ziel nicht darin besteht, eine Charakterisierung zu finden, die nur für die gegebenen Beispiele passt, sondern dass eine allgemeine Charakterisierung gesucht ist. Die Gruppe hat außerdem zu keinem Zeitpunkt eine Eigenschaft formuliert, die lediglich für die vorgegebenen Beispiele zutreffend ist, und nicht für den allgemeinen Fall. Somit kann davon ausgegangen werden, dass die Studierenden die Menge der gegebenen Folgen als generisch angesehen haben.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Diese Gruppe drückt die Eigenschaft zu keinem Zeitpunkt der Diskussion durch zwei Bedingungen aus. Ein Übergang zu einer Formulierung mit einer einzigen Bedingung ist somit nicht nötig.

v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

In Phase 2 diskutiert diese Gruppe explizit darüber, was in der Aufgabenstellung steht und dass sie sich nicht sicher sind, was sie machen sollen. Ein Student sagt in Turn 64 sogar, dass er glaubt, dass sie nicht die Definition aufschreiben sollen. Das ist eindeutig ein Indiz dafür, dass eine Überarbeitung der Aufgabenstellung sinnvoll sein könnte. Nichtsdestotrotz arbeitet die Gruppe in die gewünschte Richtung indem sie versucht, den Unterschied zwischen dem Nicht-Beispiel und den Beispielen herauszuarbeiten. Nachdem ich in Turn 144 den Impuls gebe, die mündliche Formulierung aufzuschreiben, fragen die Studierenden nach, ob sie „sozusagen eine Definition“ aufschreiben sollen, was sie anschließend auch machen. Die Aufgabenstellung hat sie also auch nicht komplett fehlgeleitet, es war lediglich ein kleiner Impuls nötig, damit sie ihr Ergebnis in der entsprechenden Form schriftlich notiert haben.

Davon abgesehen waren keinerlei Unterstützungen nötig. Den Studierenden ist es gelungen, alleine auf Basis der Aufgabenstellung und der Menge der vorgegebenen (Nicht-) Beispiele die Definition in der Art nachzuerfinden, dass sie den heutigen Ansprüchen an eine mathematische Definition genügt. Zwischenzeitlich gibt es zwar Formulierungen, auf die letzteres nicht zutrifft, doch dies erkennt die Gruppe jeweils eigenständig und es gelingt ihnen, die Charakterisierung geeignet zu überarbeiten.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

Ein weiterer Unterschied zwischen dem tatsächlichen Verlauf und allen drei Versionen des hypothetischen Verlaufs besteht darin, dass die Studierenden die Charakterisierung erst ganz am Ende aufschreiben und diese dabei noch formalisieren.

Die mündliche Charakterisierung war – soweit dies erkennbar war – korrekt: „Für irgendein Intervall kann man immer einen Punkt in der Folge finden, ab dem springt's aus diesem Intervall nicht mehr raus.“

In diesem Moment gebe ich den Impuls, die Charakterisierung aufzuschreiben. Die Studierenden schreiben die Eigenschaft nicht in der Art auf, wie sie diese zuvor mündlich formuliert haben, sondern sie verwenden formal-mathematische Sprache. Der Impuls zum

Verschriftlichen hat somit eine Optimierung der „Definition“ bewirkt.

Bei dem Versuch des Aufschreibens passiert zunächst ein Fehler. Die Studierenden verwenden keine Betragsstriche und fordern lediglich, dass die Differenz aus Grenzwert und Folgenglied ab irgendeinem n kleiner als jedes beliebige x ist und nicht der Betrag dieser Differenz. Es handelt sich um ein *Problematic Issue*, da die Studierenden davon ausgehen, dass ihre notierte Charakterisierung korrekt ist. In der Tabelle 4.2 könnte dieser Fall unter Situation (B) eingeordnet werden, da die aufgeschriebene Charakterisierung fälschlicherweise auch auf das Nicht-Beispiel zutrifft, was die Gruppe an dieser Stelle nicht überprüft. In Turn 258 bemerken sie wiederum eigenständig, dass sie die Betragsstriche vergessen haben und ergänzen diese sofort, wodurch das Problem gelöst wird und die Charakterisierung schließlich korrekt ist. Interessanterweise fällt ihnen dies nicht bei der Betrachtung des Nicht-Beispiels auf, sondern allem Anschein nach anhand der Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die für $n \neq 2$ durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert ist. Das ist deshalb zunächst verwunderlich, da diese Beispielfolge sowohl die Bedingung mit Verwendung von Betragsstrichen als auch die Bedingung ohne Verwendung von Betragsstrichen erfüllt. Eine mögliche Erklärung könnte jedoch sein, dass bei dieser Folge die Folgenglieder abwechselnd größer und kleiner als der Grenzwert 1 sind. Vermutlich ist ihnen klar, dass der Abstand von 1 zu Folgengliedern, die größer sind als der Grenzwert, ebenso in die Bedingung einfließen sollte wie der Abstand von 1 zu Folgengliedern, die kleiner sind als der Grenzwert.

Die notierte Formulierung entspricht letztlich der formalen ϵ - N -Definition, die Studierenden haben lediglich andere Variablen verwendet. In der Phase des Aufschreibens ist die Gruppe somit von einer verbalen Beschreibung zu einer formalen Definition übergegangen. Das heißt in Bezug auf die Präzision der Formulierung leistet das Verschriftlichen einen wichtigen Beitrag.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

Auf den Vergleich der einzelnen Gruppen wird erst am Ende eingegangen, wenn alle vier Erkenntnisverläufe präsentiert worden sind.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Hier sollen wiederum alle Leitfragen berücksichtigt werden. Im Fall von Gruppe 2 lautet die Antwort ganz klar, dass es ihnen definitiv gelungen ist, die Definition der Konvergenz einer Folge nachzuerfinden. Die Studierenden waren sich zwar nicht ganz sicher, was von ihnen gefordert war, doch sie haben die Aufgabe so bearbeitet, wie sie gedacht war. Die verschiedenen Beispielfolgen haben sie unterschiedlich intensiv genutzt. In ihrer Gesamtheit waren die Folgen anscheinend passend gewählt, so dass die Studierenden in der Lage waren, adäquate Vorstellungen aufzubauen. Die Hürden, die sich im Erkenntnisverlauf dieser Gruppe identifizieren ließen, konnten sie eigenständig überwinden. Auch dabei waren die vorgegebenen Beispiele von großer Bedeutung. Abgesehen von einem kleinen

Impuls, die Charakterisierung aufzuschreiben, waren keinerlei Interventionen nötig. Als Ergebnis schreiben sie schließlich Folgendes auf:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_m| < x \forall n \leq m$

In Bezug auf die Nacherfindung der Definition war die Gruppe als Ganzes somit überaus erfolgreich. Anzumerken ist allerdings, dass der Prozess hauptsächlich von einem Studenten vorangetrieben wurde. Ob die anderen Gruppenmitglieder ohne ihn erfolgreich gewesen wären, lässt sich nicht beantworten.

6.2.5 Gruppe 3: Tatsächlicher Verlauf

Diese Gruppe setzt sich aus den drei Studentinnen Denise (D), Sophie (S) und Natalie (N) und dem Studenten Markus (M) zusammen. Bei der Anmeldung für den Workshop haben sie alle angegeben, dass sie die Analysis-1-Veranstaltung zum ersten Mal besuchen. Im Verlauf der Diskussion stellt sich heraus, dass Natalie in einem früheren Semester bereits ein paar Wochen lang die Analysis-1-Vorlesung besucht hat.

Phase 1: Erste Charakterisierung über den Ausdruck „läuft im Unendlichen gegen x“

Die Gruppe beginnt schon zu diskutieren während das Aufnahmegerät gerade erst gestartet wird. Eine Studentin schlägt dann vor, direkt etwas aufzuschreiben:

6 S: *Wollen wir das erst mal so aufschreiben?*

Die übrigen Gruppenmitglieder stimmen zu und sie einigen sich auf Folgendes:

11 N: *Wir wollen-, eine Folge heißt konvergent-*

12 S: *Gegen einen Wert. Wollen wir das noch so schreiben? Gegen den Wert x, wenn es im Unendlichen gegen x läuft*

Das Gesagte schreiben sie gleichzeitig auf.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 1) *Eine Folge heißt konvergent gegen den Wert x, wenn es im Unendlichen gegen x läuft.*

Die Studierenden haben in dieser Phase nicht mit den vorgegebenen Beispielen gearbeitet. Unerwartet wird die Bedeutung von „konvergent“ auf Basis des bisherigen Gebrauchs dieses Begriffs formuliert. Niemand von ihnen äußert Kritik an der Charakterisierung 1.

Phase 2: Diskussion über „Erreichen“ führt zu zweiter Charakterisierung über den Ausdruck „irgendwann nimmt es nur noch einen Wert an oder es nähert sich einem Wert an“

In dieser Phase diskutieren die Studierenden darüber, ob eine Folge auch dann konvergent sein kann, wenn sie den Grenzwert erreicht. Manche der Gruppenmitglieder argumentieren auf Basis ihres Vorverständnisses, dass konvergente Folgen den Grenzwert

nie erreichen. Andere beziehen sich auf die als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen und schlussfolgern, dass es für die gesuchte Eigenschaft egal ist, ob der Grenzwert erreicht wird oder nicht. In ihrer nächsten Version der Charakterisierung verbinden die Studierenden beide Fälle – das Erreichen des Grenzwerts und eine Annäherung ohne Erreichen – durch „oder“ zu einer Eigenschaft.

Natalie zeigt auf eine der Beispielfolgen, wobei nicht ganz deutlich wird auf welche, und fragt nach:

13 N: *Und das hier? Das bleibt auch ... dann bei eins, ne (fragend)?!*

Vermutlich spricht sie von einer der schließlich konstanten Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ oder $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$. Möglicherweise hat sie Zweifel daran, dass das von ihr betrachtete Beispiel die formulierte Bedingung erfüllt.

16 D: *Genau. Du kannst ja auch ne Folge wäre doch auch konvergent, wenn ... du jetzt sagst, äh ... a von n gleich eins für alle n Element n. Dann hast du zwar keinen Startwert, aber konvergent ist es ja trotzdem*

Denise sagt aus, dass auch konstante Folgen konvergent sind. Es ist nicht klar, ob sie auf Basis ihres Vorverständnisses oder auf Basis der als konvergent vorgegebenen Beispiele argumentiert. Im ersten Fall würde eine Begründung fehlen. Im zweiten Fall wäre verwunderlich, dass sie sich nicht auf eine der als konvergent vorgegebenen schließlich konstanten Beispielfolgen bezieht, sondern die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ hinzuzieht. Was genau sie hier unter „Startwert“ versteht, wird nicht klar. Ihre Kommilitonen gehen nicht darauf ein. Markus und Natalie sind jedoch anderer Meinung was die Konvergenz einer thematisierten Folge angeht:

17 M: *((U)) ist sie nicht konvergent*

18 D: *Nicht?*

19 N: *Ne (verneinend), konvergent ist sie ja nur, wenn es gegen den Wert anläuft oder wenns niemals den Wert erreicht*

Zunächst ist nicht klar, von welcher Folge Markus spricht. Natalies Reaktion darauf lässt vermuten, dass es um eine Folge geht, die „den Wert“ erreicht. Ihr Vorverständnis schließt den Aspekt ein, dass eine konvergente Folge den Grenzwert niemals erreicht.

22 D: *Die ist konvergent ... die Einzige, die nicht konvergent ist, ist die*

Denise bezieht sich in ihrer Antwort vermutlich auf die Angabe in der Aufgabenstellung, in der vorgegeben ist, dass es sich bei den Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um konvergente Folgen handelt, wohingegen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

26 D: *Die ist konvergent, weil die im Unendlichen immer noch gegen, äh, eins läuft ... und was da zwischendurch passiert ist egal*

27 N: *Okay, und da ist es wirklich eins, ja*

28 M: *Da-, die ist nicht konvergent*

29 D: *Doch, steht doch da, danke*

30 N: *Ja- ... danach schon*

31 D: *Die ist konvergent, weils gegen Unendliche- ... was davor passiert, ist egal. Es muss nur gegen Unendlich einen Wert annehmen ... und hier ist im Unendlichen ja immer noch die ... Zahlen von zehn, die Vielfachen immer noch ((U)) und hier gegen Unendlich sind sie ja gleich ... ich glaub deswegen sind die Startwerte wirklich egal*

Denise thematisiert den Aspekt, dass es unerheblich ist, welche Werte die ersten Folgenglieder annehmen. Entscheidend ist ihrer Meinung nach das Verhalten „im Unendlichen“. Sie argumentiert hier also, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt. In Turn 26 begründet sie dies nicht auf Basis der vorgegebenen Beispiele, sondern vermutlich basierend auf ihrem Vorverständnis. In Turn 29 bezieht sie sich dann auf die Aufgabenstellung, welche die Beispielfolgen als konvergent vorgibt. Mit „danach“ meint Natalie in Turn 30 vermutlich die als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen. Hier wird die Differenz zwischen dem Vorverständnis zu Konvergenz und der gesuchten Eigenschaft explizit. Markus hingegen hatte zuvor als Grund seiner Zweifel genannt, dass die betrachtete Folge den Wert 1 erreicht. Natalie geht auf diesen Aspekt ein:

32 N: *Ja ... weil das-, genau, bei der Siebten ist es ja auch genau eins*

Die Studentin spricht hier von der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$, deren Grafik mit der Nummer 7 bezeichnet ist. Das legt die Vermutung nahe, dass zuvor die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ betrachtet wurde. Markus ist noch nicht überzeugt:

37 M: *Das gefällt mir aber nicht*

Er wiederholt anschließend seine zuvor gegebene Begründung.

40 M: *Dass es niemals den Wert erreicht, das-, das heißt eben Grenzwert*

Der Student akzeptiert die als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen nicht. Daraufhin bringt Denise für die Vorstellung, die Markus hat, einen anderen Begriff ein:

42 D: *Aber ist das nicht asymptotisch annähern, wenn es das nicht erreicht? (lacht)*

43 S: *Ob es das erreicht oder annähert, ist glaub ich egal, wa-, bei diesen egal würd ich jetzt so sagen*

Sophie ist der Meinung, dass es bei der gesuchten gemeinsamen Eigenschaft unerheblich ist, ob die Folge den Grenzwert erreicht oder annähert. Unter „annähern“ versteht sie vermutlich „annähern ohne zu erreichen“. Um diese Aussage zu unterstützen gibt sie im Anschluss zwei Beispiele:

45 S: *Weil bei dieser einen Funktion, die ist null Komma neun, neun, neun, neun, das wird ja nie eins, aber läuft ja auch gegen eins*

Das erste Beispiel ist die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die den Wert 1 niemals annimmt.

49 S: *Da ist sie ja auch genau eins, ist ja bei ganz vielen genau eins*

Anschließend zeigt sie noch einmal auf eine der Folgen, die den Wert 1 annehmen. Basierend auf den Beispielfolgen kommt sie also zu dem Schluss, dass es für die gesuchte Eigenschaft Beispielfolgen gibt, die den Grenzwert annehmen, dass es aber auch Beispielfolgen gibt, die den Grenzwert niemals annehmen. Daraufhin formuliert die Gruppe als gemeinsame Eigenschaft zunächst Folgendes:

54 M: *Sozusagen, die Eigenschaft ist, dass es irgendwann-*

55 S: *Nur noch einen Wert annimmt*

und Sophie ergänzt anschließend:

59 S: *Oder sich einem Wert annähert*

Die Gruppenmitglieder notieren dies zunächst jeder für sich in ähnlicher Form und unterhalten sich dabei weiter:

63 N: *$((U))$ heißt konvergent gegen einen Wert x Komma ... n ... die im Unendlichen, oder wie $((U))$?*

64 D: *Wenn für ... hier $((U))$ für n gegen Unendlich*

Natalie spricht kurz von Funktionen, wird aber sofort verbessert:

67 N: *Oder die Funktion gegen einen-, gegen x läuft oder gleich $((U))$ ist*

68 S: *Die Folge, die Folge, oder?*

69 N: *Ja, genau, okay, ja*

Die Studentin ist mit der Verbesserung direkt einverstanden.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 2) *Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge gegen x läuft oder gleich x ist.*

Denise und Sophie beziehen sich in ihren Argumentationen jeweils auf die vorgegebenen Folgen, machen Vorschläge für die konkrete Formulierung und scheinen damit einverstanden zu sein. Natalie bezieht sich zwar zu Beginn der Phase auf ihr Vorverständnis und ist bei einer der vorgegebenen Folgen, die den Wert 1 erreichen, zunächst der Meinung, dass diese nicht konvergent sei. Es scheint aber so, als ob sie sich von ihren Kommilitoninnen davon überzeugen lässt, die gesuchte Eigenschaft auf Basis der vorgegebenen Folgen zu formulieren. Sie arbeitet schließlich an dieser Formulierung mit und macht deutlich, dass sie mit dem Ergebnis einverstanden ist. Markus hingegen lässt sich nicht auf die Aufgabe ein. Er äußert sein Missfallen an der Charakterisierung 2 und an der konkreten Formulierung beteiligt er sich bis zu diesem Zeitpunkt kaum.

Phase 3: Diskussion über „Ausnahmen“

Als nächstes überlegen die Studierenden, in ihrer Charakterisierung mit aufzunehmen, dass „Ausnahmen“ erlaubt sind. Darunter verstehen sie einzelne oder mehrere Folgenglieder, deren Definition von der Definition der übrigen Folgenglieder abweicht. Sie schauen sich die vorgegebenen Folgen genauer an und kommen zu dem Ergebnis, dass es am Anfang „Ausnahmen“ geben darf. Ihre schriftlich formulierte Charakterisierung verändern sie in dieser Phase nicht.

Markus schlägt noch eine Ergänzung der formulierten Eigenschaft vor:

70 M: *Dann kann man vielleicht noch irgendwie einbringen, dass es ... auch so Ausnahmen geben kann, wie hier zum Beispiel bei zwei*

Wie anschließend deutlich wird, spricht er hier von der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$, die laut Aufgabenstellung nicht konvergent ist, worauf seine Kommilitoninnen ihn auch hinweisen. Ob er sich mit „zwei“ auf die Folge an sich bezieht, weil diese bei den Grafiken mit (2) bezeichnet ist, oder ob er mit „zwei“ die Folgenglieder meint, die bei dieser Folge dem Wert 2 entsprechen und die er als „Ausnahmen“ bezeichnet, lässt sich nicht eindeutig feststellen.

72 S: *Ja, die ist ja nicht konvergent*

Daraufhin betrachtet Markus eine andere Beispielfolge, bei der es seiner Meinung nach „Ausnahmen“ gibt:

76 M: *Ja, aber hier*

77 D: *Ja, das ist ja nur ein einziges Mal. Das ist ja wirklich nur bei n gleich zehn und das ist ja am Anfang und am Anfang ist es ja egal. Es muss sich ja nur am Ende gegen eins annähern*

Aus der Antwort von Denise wird deutlich, dass sie von der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sprechen, die für $n = 10$ den Wert 2 annimmt und für die alle übrigen Folgenglieder durch den Term $1 + (-\frac{1}{2})^n$ definiert sind. Mit „Ausnahme“ bezeichnen sie hier das Folgenglied $f_{10} = 2$. Die Studentin bringt hier erneut ihr Argument ein, dass es egal sei, was am Anfang passiere. Schließlich deutet Markus erneut auf eine weitere Beispielfolge:

78 M: *Hier auch*

79 D: *Ja, aber diese Punkte sind eins, also sozusagen ... nähert es sich das ja auch eins an*

Hier kann nicht eindeutig festgestellt werden, von welcher Folge die Rede ist. Es könnte sich um die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ handeln, deren Folgenglieder für Vielfache von zehn exakt den Wert 1 annehmen und ansonsten durch $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind. Zuvor hatte er auf eine Beispielfolge verwiesen, bei der seine Kommilitonin eingebracht hatte, dass es nur eine einzige „Ausnahme“ gebe und diese am Anfang sei. Möglicherweise bezieht er sich nun auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da bei dieser Folge die Definition für jedes zehnte Folgenglied von der

Definition der übrigen Folgenglieder abweicht, also nicht nur für ein einziges Folgenglied und auch nicht nur am Anfang. Denise deutet den umgangssprachlichen Begriff „näher“ zu „sozusagen nähern“ um. Mit der Äußerung, dass diese Punkte eins sind, meint sie vermutlich, dass die Folgenglieder, die der Student hier als „Ausnahmen“ ansieht, dem Wert 1 entsprechen. Markus interpretiert die Aussagen von Denise wie folgt:

80 M: *Aber so-, also ein Punkt darf die Ausnahme sein, aber mehrere dann nicht, oder?*

Möglicherweise sieht er bei der zuletzt betrachteten Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgenglieder, deren Index ein Vielfaches von zehn ist, nach der Argumentation von Denise nun nicht mehr als „Ausnahmen“ an. In dem Fall wäre seine als Frage formulierte Aussage konsistent mit der vorherigen Diskussion, da es sich bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$, bei der es nur eine „Ausnahme“ gibt, um eine Folge mit der gesuchten Eigenschaft handelt, während die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$, bei der mehrere „Ausnahmen“ vorkommen, die Eigenschaft nicht besitzt. Auf den Unterschied zwischen endlich vielen und unendlich vielen „Ausnahmen“ geht er nicht ein. Seine drei Kommilitoninnen antworten wie folgt auf seine Frage:

84 D: *Das ist ja noch am Anfang*

85 S: *Ja*

86 N: *Das ist ja nicht im Unendlichen zehn ... es gibt ja noch ein paar größere n's*

87 S: *Also am Anfang dürfte das jetzt auch so ... hin- und herlaufen*

Sie scheinen sich einig zu sein, dass die Werte „am Anfang“ keinen Einfluss darauf haben, ob eine Folge die gesuchte Eigenschaft besitzt oder nicht. Sophie liest den anderen noch einmal vor, was sie aufgeschrieben hatte:

94 S: *Weil ich habe jetzt geschrieben: Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge x annimmt oder sich x annähert*

Zwischenstand:

An der notierten Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert. Dennoch haben die Studierenden Erkenntnisfortschritte gemacht. Sie haben sich mit den Beispielen auseinandergesetzt und Besonderheiten der Beispiele wahrgenommen. Anscheinend sind sich alle Gruppenmitglieder darüber einig, dass Folgen, deren Glieder in endlichen Abschnitten anderen Regeln folgen, auch unter die gesuchte Eigenschaft fallen können.

Phase 4: Diskussion über die Bedeutung von „Annähern“

Ein Student fragt in dieser Phase nach, was annähern denn bedeute und schlägt vor, die Formulierung zu präzisieren. Hier ist die erwünschte Eigendynamik in Bezug auf eine Verbesserung der Charakterisierung zu beobachten. Im Verlauf der Phase zeigt sich, dass er die vorgegebenen Beispielfolgen klar in zwei Klassen unterteilen möchte: solche, die sich dem Grenzwert annähern ohne ihn zu erreichen und solche, die den Grenzwert erreichen.

Die Gruppe bleibt mangels Alternativen dennoch bei ihrer vorherigen Formulierung der gesuchten Eigenschaft.

Zu der Formulierung von Sophie fragt Markus nach:

97 M: *Was heißt denn annähert?*

98 D: *Null Komma neun neun neun neun neun neun neun*

Wie genau Denise das meint wird auch im weiteren Verlauf nicht klar. Markus scheint die Aussage derart aufzufassen, dass der Wert, dem sich die Folge annähert, niemals erreicht wird.

99 M: *Ja, das muss man vielleicht noch ein wenig genauer definieren, das heißt, es ... wird oder dass man irgendwie reinbringt, dass es niemals diesen Wert ... dann annimmt. Es wird niemals dieser Wert $((U))$ immer sozusagen-*

100 S: *Ja, aber das kann es ja annim-, annehmen*

Sophie fasst die Äußerung von Markus zunächst so auf, dass seiner Meinung nach bei der gesuchten Eigenschaft der Wert niemals angenommen werden darf. Sie widerspricht ihm daher. Danach gibt es jedoch Anzeichen dafür, dass er die Eigenschaft durch eine Entweder-oder-Aussage formulieren möchte und lediglich bei der „Annähern“-Bedingung ausschließen möchte, dass der Grenzwert erreicht wird:

103 S: *Also du möchtest jetzt noch die Definition haben, dass wir sagen, so, wenn, eh-, äh, wenn die Folge x nicht annimmt, dann ... wird x nie erreicht, sondern, ähm-*

104 M: *$((U))$ nähert sich an*

Sie stellen fest, dass sie wieder bei der Formulierung sind, die sie bereits notiert hatten und entscheiden sich dazu, diese beizubehalten:

106 N: *Ja (lacht) nähert sich an, das ist das Problem (lacht) $((U))$*

107 D: *Ich werd das glaub ich so lassen, oder?*

Zwischenstand:

Die notierte Charakterisierung 2 wird weiterhin beibehalten. Vor allem Markus hat sich in dieser Phase mit der umgangssprachlichen Bedeutung von „Annähern“ auseinandergesetzt: Eine Folge, die sich einem Wert nähert, erreicht diesen niemals. Bei Denise gibt es Hinweise darauf, dass sie derselben Meinung sein könnte. Die anderen beiden Studierenden äußern ihre Meinung dazu nicht direkt, sie widersprechen auch nicht.

Phase 5: Überprüfen, ob $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht unter die Charakterisierung 2 fällt

In dieser Phase betrachtet die Gruppe das vorgegebene Nicht-Beispiel und argumentiert, warum auf diese Folge die erarbeitete Charakterisierung nicht zutrifft. Anschließend sprechen sie darüber, ob sie mit der Bearbeitung der Aufgabe nun fertig sind. Markus äußert, dass er mit dem Ergebnis nicht zufrieden ist. Er ist weiterhin der Meinung, dass konvergente Folgen den Grenzwert nicht annehmen und bezieht sich dabei deutlich auf

sein Vorverständnis aus der Schule.

Sie beginnen mit der Betrachtung der als Nicht-Beispiel vorgegebenen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}.$$

113 N: *((U)) sagen, dann ... und daraus folgt, dass hier, welcher ist das?*

114 S: *x*

115 N: *Keine, äh, konvergente Folge ist da, wie du gesagt hast, da im Unendlichen ja immer noch-, dass jede ze-, Vielfache von zehn zwei ist und der Rest sich ja gegen eins halt annähert und deswegen kein x-Wert zu bestimmen ist, wo sich die ganze Funktion annähert*

116 D: *Ja*

117 N: *Und dass man aber nur einmal kurz erklärt, wieso das nicht ist, dann hat man sie abgegrenzt und dann-*

Natalie begründet hier, warum die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die von ihnen formulierte Eigenschaft nicht erfüllt. Es gibt keinen Wert, dem sich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ annähert, deshalb fällt diese Folge nicht unter die Charakterisierung 2. Ihre Aussage in Turn 117 deutet an, dass sie der Meinung ist, sie wären anschließend mit der Bearbeitung der Aufgabe fertig. Die anderen scheinen sie ebenfalls so zu verstehen, denn ein Student fragt nach der Aufgabenstellung:

120 M: *War das die Aufgabe?*

Und auch eine seiner Kommilitoninnen fragt nach:

124 S: *Mussten wir denn etwas aufschreiben?*

Die Mehrheit der Gruppe ist an dieser Stelle der Meinung, sie seien fertig:

129 D: *Also sind wir jetzt fertig?*

130 N: *Jap, oder?*

131 S: *Ja*

132 M: *Ich bin noch nicht hundertprozentig zufriedengestellt*

133 S: *(lacht) Ja, weil du es immer noch doof findest, dass es bei konvergent auch genau eins angenommen werden kann, ne (fragend)?*

134 M: *Ja*

Der Student stört sich weiterhin daran, dass Folgen, welche die gesuchte Eigenschaft besitzen, den Grenzwert annehmen können. Sophies Lösung für dieses Problem ist, dass die Eigenschaft, die sie in der Schule kennengelernt haben, möglicherweise etwas anderes ist als die hier gesuchte Eigenschaft.

138 S: *Aber das haben wir auch nicht konvergiert ge-, also wir haben das in der Schule auch nicht konvergieren genannt*

144 S: *Vielleicht sind es unterschiedliche Begriffe*

Auf die letzte Äußerung geht keiner ihrer Kommilitonen direkt ein. Stattdessen schlägt Markus vor, die Formulierung noch einmal zu verändern.

145 M: *Ja, aber dass wir vielleicht noch irgendwie reinbringen in den Satz, dass es auch konvergiert, wenn es den Wert ... niemals erreicht*

Das eigentliche Problem ist die präzisere Formulierung des Aspekts „Annähern ohne zu erreichen“. Überlagert wird dieses Problem durch die Schwierigkeit, beide Aspekte zu einem Begriff zusammenzufassen.

Ähnlich wie zuvor wird die Formulierung jedoch mangels konkreter Verbesserungsvorschläge beibehalten:

150 M: *Ja, konvergent heißt, wenn es ... sozusagen im Unendlichen irgendwann einen Wert annimmt oder sich-*

151 S: *Ja, aber das haben wir geschrieben*

152 D: *Ja, mit annähert (lacht)*

Zwischenstand:

Auch in dieser Phase haben die Studierenden an der notierten Formulierung der gesuchten Eigenschaft keine Veränderung vorgenommen. Denise, Sophie und Natalie scheinen damit zufrieden zu sein. Sie haben akzeptiert, dass die gesuchte Eigenschaft etwas anderes ist, als das, was sie aus ihren Vorerfahrungen kennen. Bei Markus ist dies anders. Er ist mit der Formulierung unzufrieden und möchte expliziter aufnehmen, dass auch Folgen unter die gesuchte Eigenschaft fallen, die den (Grenz-)Wert nicht erreichen.

Phase 6: Finden einer weiteren gemeinsamen Eigenschaft

Durch eine andere Gruppe kommen die Studierenden auf die Idee, die Differenz von Folgengliedern zu betrachten. Sie finden es interessant, dass bei den vorgegebenen Beispielfolgen diese Differenz gegen 0 konvergiert. In ihrer schriftlichen Charakterisierung schreiben sie das für den Fall, dass der Grenzwert nicht erreicht wird, zusätzlich mit auf.

Die Studierenden schweigen kurz und schnappen dabei etwas aus der Diskussion einer anderen Gruppe auf:

156 M: *Der eine hat noch irgendwie was gesagt, was interessant ist, dass der Unterschied zwischen den Zahlen ebenfalls konvergiert und zwar gegen null ... und zwar immer*

157 D: *Das ist ja, wenns gegens ((U)) läuft, oder?*

An dieser Stelle wird erstmals eine Differenz betrachtet. Welche Differenz genau betrachtet wird, wird aus „der Unterschied zwischen den Zahlen“ nicht ganz deutlich, es könnte die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgender Folgenglieder oder die Differenz zwischen je einem Folgenglied und dem Grenzwert gemeint sein. In einer der nächsten Äußerungen wird dies ein wenig deutlicher:

- 163 M: *Also, es gibt sozusagen bei jeder konvergenten Folge, gibt es zwei ... Werte, gegen die konvergiert wird. Einmal gegen das x , gegen das die Folge läuft und einmal konvergieren die Differenzen, die Differenzen der einzelnen Glieder gegen null*

Da Markus von den „Differenzen der einzelnen Glieder“ spricht, meint er vermutlich die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder. An den Beispielfolgen wird dies jedoch nicht untersucht. Natalie ergänzt diesen Aspekt dennoch in ihrer Formulierung der Eigenschaft:

- 168 N: *Da hab ich jetzt noch hinzugeschrieben $((U))$ für den Fall, dass, ähm ... es läuft, also nicht gleich wird, die Differenz ebenfalls läuft und zwar gegen null ... ja, kannst du ja noch dazu schreiben*

Sie schreibt nur für den Fall, dass der Grenzwert nicht erreicht wird, hinzu, dass die Differenz gegen Null „läuft“.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 3) *Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge gegen x läuft oder gleich x ist.*

Für den Fall, dass die Folge gegen x läuft, also nicht gleich x wird, läuft die Differenz ebenfalls und zwar gegen 0.

Lediglich Natalie hat die notierte Formulierung ergänzt, Denise und Sophie sind bei ihren vorherigen Formulierungen geblieben und Markus hat zu diesem Zeitpunkt noch nichts schriftlich fixiert. Ob der Student mit der von Natalie vorgenommenen Ergänzung einverstanden ist, macht er nicht deutlich. Möglicherweise hatte er versucht, eine alternative Formulierung zu finden, anstatt die vorhandene Formulierung zu ergänzen. Tatsächlich wäre die Eigenschaft, dass für eine reelle Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Differenz $|g_{n+1} - g_n|$ für n gegen Unendlich gegen 0 konvergiert, eine gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen, die das Nicht-Beispiel nicht erfüllt. Dann müsste allerdings definiert werden, wann die Differenz konvergiert. Zur eigentlich intendierten gemeinsamen Eigenschaft ist diese Eigenschaft nicht äquivalent. Natalie scheint eher zu versuchen, möglichst viele gemeinsame Eigenschaften der vorgegebenen Beispielfolgen zu finden, ohne sich darum zu kümmern, welche Eigenschaft minimal in dem Sinne ist, dass sie die übrigen Eigenschaften impliziert.

Phase 7: Impuls: Charakterisierung durch eine einzige Bedingung ausdrücken

In dieser Phase befinde ich mich bei der Gruppe. Ich rege dazu an, eine einzige Bedingung zu finden, durch welche die Eigenschaft ausgedrückt werden kann. Natalie möchte den Aspekt, dass der Grenzwert auch angenommen werden kann, beibehalten, da die Gruppe lange darüber diskutiert hat. Markus bringt dann erneut die Idee ein, die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder zu betrachten.

Da die Gruppe ein Ergebnis notiert hat, komme ich als Lehrperson hinzu und lese mir dieses zunächst durch.

- 174 D: *Ja, wir haben das alle so zusammen formuliert, also es müsste hier ungefähr das Gleiche stehn*

175 L: *Okay, also ... die Folge gegen x läuft oder gleich x ist*

176 N: *Nähert sich x an*

Bis auf Markus hat jedes Gruppenmitglied etwas aufgeschrieben, Denise weist darauf hin, dass die Formulierungen alle ähnlich sind. Die Version, die ich in dem Moment lese, lautet „Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge gegen x läuft oder gleich x ist“. Da die Formulierung nicht eine Eigenschaft enthält, sondern zwei Eigenschaften, die durch „oder“ verbunden sind und die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ keine der beiden einzelnen Bedingungen erfüllt, entscheide ich mich dazu, zunächst auf diese Folge aufmerksam zu machen:

180 L: *Ja, okay ... Kann man das jetzt vielleicht nochn bisschen, ähm ... erst mal vielleicht zusammenfassen. Das sind ja jetzt ja zwei Sachen, wenns gegen ... x läuft oder gleich x ist ... vielleicht guckt ihr auch nochmal-, die Eine ist ja so ein bisschen ... die d_n , was ist mit der?*

Die Studierenden erkennen schnell, dass es sich bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Art Mischform aus den beiden von ihnen genannten Typen handelt:

186 N: *In diesem Fall trifft beides zu, also das sich gleich x annähern und x ist bei jedem Vielfachen von zehn*

187 D: *kein ausschließendes oder*

188 L: *Okay (lacht)*

189 S: *Ja ... das Mathe-oder*

Die Studierenden rechtfertigen ihre Formulierung, indem sie das von ihnen benutzte „oder“ nicht als „entweder ... oder ...“, sondern als „und/oder“ interpretieren. Daher fordere ich nun dazu auf, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken:

191 L: *Versucht es mal, ob ihr da irgendwie ne Idee habt, wie man das vielleicht ein bisschen ... ja, durch eine einzige, also- ... als eine einzige Eigenschaft formulieren könnt*

Denise schlägt daraufhin Folgendes vor:

192 D: *Einfach nur läuft gegen (lacht)*

193 N: *Ja, aber das haben wir schon so lange diskutiert ... ob das ... deswegen haben wir da ja jetzt extra noch zugeschrieben, dass es genau auch eins annehmen kann, weil darüber haben wir in der Gruppe jetzt stark diskutiert, ob das konvergent ist, wenn da irgendwann gleich eins steht*

194 L: *Hmhm (verstanden)*

195 D: *Und deswegen haben wir das extra dazugeschrieben (lacht)*

Für die Studentin beinhaltet die „läuft gegen“-Bedingung anscheinend auch den Fall des Erreichens des Grenzwertes, sie schlägt vor, die Eigenschaft nur durch diese Bedingung zu formulieren. Möglicherweise hat sie den umgangssprachlichen Begriff „läuft gegen“ nun umgedeutet. Natalie hingegen argumentiert dagegen. Markus schlägt anschließend erneut vor, Differenzen in der Formulierung der Eigenschaft zu verwenden:

198 M: *Ja, man könnte jetzt sagen, aber dann ist auch wieder ein oder drinne, wenn, dass die, ähm ... ja ... ja, x_n und x_n plus eins ((U)) Unendliche sozusagen auch gegen Null konvergieren oder eben Null werden ... oder, oder, dass die-, dass der Unterschied eben dass die gleich werden ... wenn ... also da ist auch wieder ein oder drinne, aber ich weiß nicht ... ob du das meintest, dass man das so umformuliert über die*

199 L: *Differenzen*

200 M: *Folgeglieder. Genau, über die Differenzen*

201 L: *Ja, Differenzen ist schon mal gar nicht so schlecht, das zu betrachten*

Mir gegenüber sprechen die Studierenden in diesem Moment zum ersten Mal von Differenzen. In der in Turn 198 formulierten Eigenschaft sind weiterhin zwei Bedingungen enthalten, die durch „oder“ miteinander verbunden sind. Markus ist dies auch bewusst. Da die Betrachtung von Differenzen jedoch tatsächlich eine Möglichkeit ist, von einer Formulierung mit mehreren Bedingungen zu einer einzigen Bedingung zu gelangen, befürworte ich diesen Vorschlag, auch wenn sie von der Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder und nicht von der Differenz aus Folgengliedern und dem Grenzwert sprechen. Ich lasse die Gruppe zunächst noch einmal eigenständig weiterarbeiten.

Zwischenstand:

Diese Phase besteht hauptsächlich aus meiner Intervention, die nicht sofort zu neuen Erkenntnissen bei den Studierenden führt.

Phase 8: Versuch, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken

Die Studierenden sammeln nun verschiedene Ideen, wie sie die Charakterisierung umformulieren könnten, so dass nur eine einzige Bedingung vorkommt. Sie sind selbst mit keiner Idee zufrieden: Entweder handelt es sich nicht um eine einzige Bedingung oder die Formulierung ist zu unpräzise.

Markus schlägt vor, mit Negationen zu arbeiten:

210 M: *Ne (verneinend), das ist auch wieder, hier ist auch wieder ein und dann, ne (fragend) ... wenn wir jetzt sagen: Nicht a oder nicht b ... dann a oder b ist äquivalent, semantisch äquivalent oder wie das heißt, zu nicht a und ... b*

Er bemerkt jedoch selbst, dass dann zwar kein „oder“ mehr in der Aussage vorkommt, doch es würde ein „und“ vorkommen. Daher wird dieser Vorschlag verworfen.

213 N: *Ne (verneinend), ich glaub, wenn wir bei diesen Sachen bleiben, dann kommt immer ein oder. Vielleicht müssen wir eine ganz andere Bedingung jetzt nehmen ((U))*

214 D: *Können wir sagen, dass, ähm ... für große n gelten muss a_n ist ungefähr a_n plus eins*

215 S: *Ja, würd ich sagen, das wär ein-*

216 D: *Das wär nur eine Bedingung irgendwie mit Differenzen*

Natalie hat zwar in dem Moment keinen alternativen Vorschlag, sie bemerkt aber, dass sie eine ganz andere Bedingung benutzen sollten. Der Vorschlag von Denise ist, die Eigenschaft durch die einzige Bedingung auszudrücken, dass a_n und a_{n+1} ungefähr gleich sind. Differenzen erwähnt sie in dieser Bedingung nicht explizit, möglicherweise verbindet sie die Bedingung aber gedanklich damit, dass die Differenz von a_n und a_{n+1} fast Null ist. Anschließend fällt der Studentin selbst ein Problem dieser Formulierung auf:

218 D: *Dann ist nur die Frage: Wie groß ist ungefähr?*

Bei dem Versuch, „ungefähr“ zu definieren, sprechen die Studierenden dann wieder explizit von Differenzen:

228 M: *Also Differenz ist, Differenz ist fast null oder null*

229 N: *Oder null*

230 S: *Ja (lacht)*

Aus dem Kontext ist klar, dass hier die Differenz von a_n und a_{n+1} gemeint ist. Die Gruppe bemerkt selbst, dass sie in dieser „Definition“ nun wieder zwei Bedingungen benutzt haben und diese durch „oder“ verbunden haben. Natalie macht einen weiteren Vorschlag:

232 N: *Oder die stehen in Relation zueinander*

233 M: *Was ist denn Relation jetzt? Musste auch wieder sagen*

Sie bezieht sich vermutlich noch auf den Vorschlag von Denise und will die Eigenschaft dadurch festlegen, dass a_n und a_{n+1} in Relation zueinander stehen. Dieser Vorschlag wird jedoch von Markus dadurch abgelehnt, dass dann das Problem sei, dass „Relation“ definiert werden müsste. Ob er damit meint, dass der Begriff „Relation“ definiert werden muss, oder ob seiner Meinung nach eine spezielle Relation definiert werden muss, lässt sich hier nicht eindeutig feststellen. Auf diesen Vorschlag wird nicht weiter eingegangen. Denise hält weiter an ihrem Vorschlag fest:

243 D: *Das ist das Einzige, das mir einfällt, dass a_n ungefähr ... a_n plus eins werden muss*

Natalie bringt kurz darauf plötzlich den Begriff der Steigung in die Diskussion ein:

248 N: *Weil es der Graph keine Steigung nach hinten mehr haben soll*

249 S: *Aber dann ist entweder die Steigung gleich null oder die Steigung gleich null Komma null null eins, also sie nähert sich entweder null an oder-*

Die Studentin spricht hier von der Steigung des Graphen, die „nach hinten“, also vermutlich für große n , verschwinden soll. Denise fällt auf, dass bei dem Graph einer Folge nicht ohne Weiteres von einer Steigung gesprochen werden kann:

250 D: *((U)) dann haste keinen verbundenen Graphen*

251 N: *Oder man sagt-*

252 S: *Stimmt*

253 D: *Also kannst du den nicht auch einfach ableiten*

Somit wird dieser Vorschlag ebenfalls verworfen. Natalie macht daraufhin einen weiteren Vorschlag:

255 N: *Wenn man sie rundet, sind die Zahlen gleich*

(Lachen)

256 D: *Das wäre das mit dem ungefähr*

Denise erkennt, dass die Bedingung, dass a_n und a_{n+1} gerundet gleich sind, dem entspricht, dass sie ungefähr gleich sind, und dass diese Formulierung somit ebenfalls das Problem aufwirft, dass nicht klar ist, wann das der Fall ist:

257 D: *Wie rundest du? ... Weil je nachdem wie du rundest, kannst du jetzt auch sagen ... ja, dann ist ja eigentlich auch, äh ... 80 und 120, wenn du nur auf Hundert rundest, sind die ja auch ungefähr gleich*

Zwischenstand:

Die Gruppe versucht in dieser Phase, die Formulierung derart zu verändern, dass die gesuchte Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass sie meine Kritik aus der vorherigen Phase angenommen haben. Sie sammeln zwar einige Ideen zu alternativen Formulierungen, doch sie kommen zu keiner neuen Charakterisierung, die sie auch notieren. Positiv hervorzuheben ist hier, dass sie selbst bemerken, dass die Formulierungsvorschläge die Eigenschaft nicht durch eine einzige Bedingung ausdrücken beziehungsweise zu unpräzise sind. Insofern ist in dieser Phase eine Eigendynamik zu beobachten, die Studierenden kritisieren selbständig ihre Vorschläge und versuchen, diese zu verbessern.

Phase 9: Intervention: zweite fiktive Diskussion führt zur nächsten Charakterisierung

Ich interveniere und gebe der Gruppe die zweite fiktive Diskussion. Sie lesen den Anfang und als sie etwas über Schläuche lesen erinnern sie sich an einen Exkurs aus einer anderen Vorlesung und bringen dieses Wissen mit ein. Sophie hingegen liest in der Zwischenzeit die fiktive Diskussion weiter. Am Schluss gehen sie noch einmal die fiktive Diskussion inklusive der Arbeitsaufträge gemeinsam durch. Sie entwickeln in dieser Phase viele adäquate Vorstellungen und ihre anschließende Charakterisierung entspricht bis auf einen Aspekt bereits der üblichen Definition.

Da sich die Gruppe verhältnismäßig lange mit dieser Intervention beschäftigt, ist diese Phase zusätzlich in Unterphasen unterteilt.

Phase 9.1: Beschäftigung mit dem 1. Absatz der fiktiven Diskussion bis hin zum Zeichnen von ϵ -Schläuchen Da ich den Eindruck habe, dass die Studierenden bei dem Versuch, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken, nicht weiterkommen, händige ich ihnen die zweite fiktive Diskussion aus. Eine mögliche einzige Bedingung könnte sein, dass es für jede beliebige ϵ -Umgebung einen Index der Folge gibt, ab dem alle weiteren Folgenglieder innerhalb dieser Umgebung liegen oder, dass für jede beliebige ϵ -Umgebung nur endlich viele Folgenglieder außerhalb dieser Umgebung liegen.

261 L: *Das ist jetzt so ne Diskussion von Studenten auch über die Aufgabe die ungefähr an so nem Punkt sind ... sie haben ja gesagt: Es sind Folgen dabei, die ab einem bestimmten n konstant eins sind, Folgen, die ab einem bestimmten n der eins beliebig nahe kommen, diese aber nicht erreichen und Folgen, die aus Teilen beider Typen bestehen, $((U))$ so ungefähr, was ihr auch habt und die versuchen das jetzt auch irgendwie das durch eine Bedingung auszudrücken ... und ... dann lest ihr jetzt da einfach mal und jeweils was Fettgedrucktes ist da könnt ihr dann ... da sollt ihr dann jeweils erst mal selber nachdenken und gucken, ein bisschen ausprobieren und dann wieder weiterlesen*

Die Gruppe beginnt, die fiktive Diskussion durchzulesen:

Anna, Eva, Michael und Peter haben die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in drei Gruppen unterteilt: Folgen, die ab einem bestimmten n konstant 1 sind; Folgen, die ab einem bestimmten n der 1 beliebig nah kommen, diese aber nicht erreichen; und Folgen, die aus Teilen beider Typen bestehen. Sie versuchen nun, diese drei Gruppen von Folgen durch eine einzige Bedingung auszudrücken.

Anna: Ich hab eine Idee. Lasst uns Schläuche um die Gerade $y = 1$ zeichnen und schauen, ob für einen gegebenen Schlauch ab einem Punkt alle weiteren in diesem Schlauch liegen.

Was hältst du von Annas Idee? Kannst du solche Schläuche auf einen der Graphen zeichnen?

Direkt nach dem Lesen dieses ersten Abschnitts beginnen sie, über das Gelesene zu diskutieren.

265 S: *Aber warum muss denn-, reden die hier immer von eins?*

266 N: *Ja, eigentlich Grenzwert*

267 M: *Ja, in diesen Beispielen war jetzt $((U))$ war jetzt eins der Grenzwert*

Sophie wundert sich zunächst darüber, dass die fiktiven Studierenden von der Zahl 1 reden. Die anderen machen sie darauf aufmerksam, dass 1 der Grenzwert ist. In der fiktiven Diskussion ist von sogenannten Schläuchen die Rede. Die Studierenden assoziieren damit sehr schnell ϵ -Umgebungen:

270 D: *Ist es nicht ... das, was (Name eines Dozenten) dabei erklärt hat in Geo in einem ... Exkurs, von wegen man ((U)) drüber drum ... genau, dieses Epsilon Delta-*

271 N: *In der Epsilonumgebung ... dass man, ja, für beliebig kleine Epsilon ist es dann immer noch in diesem Schlauch*

Anscheinend hatten die Lehramtsstudierenden in der Veranstaltung „Grundlagen der Geometrie“ in einem Exkurs ϵ -Umgebungen kennengelernt.

275 N: *Dass man so ne Epsilonumgebung macht und dieses Epsilon gegen null laufen lässt auch, dann wird ja auch immer kleiner dieser Schlauch ((U))*

276 D: *Achso und trotzdem sind alle Werte-*

277 N: *Und alle bleiben aber immer in diesem Schlauch drin*

Teilweise bringt Natalie hier auch Wissen mit ein, das ihr aus der Analysis-1-Vorlesung, die sie im Jahr zuvor bereits ein paar Wochen lang besucht hat, in Erinnerung geblieben ist:

283 N: *Also ich weiß, dass wir in Ana immer dieses Epsilon genommen haben zu diesen Beweisen, weil die sind-, ist meistens ja ((U)) der ganz klein wird*

„Ana“ ist unter den Studierenden eine gängige Abkürzung für Analysis. Die Studentin verbindet mit der Variablen ϵ einen Wert, „der ganz klein wird“. Gemeinsam mit Denise rekonstruiert sie:

285 D: *War das, ähm ... irgendwie, dass ein Schlauch in die Breite bei-*

286 N: *Von der Breite zwei Epsilon*

287 D: *Ja ... und dann haste ja aber den Punkt und der Punkt muss, ähm ... muss näher an eins liegen als der Schlauch quasi ... und das kannst du immer machen*

Mit „der Punkt“ könnte hier möglicherweise ein Folgenglied gemeint sein. Was die Studentin mit „das kannst du immer machen“ aussagen möchte, wird nicht deutlich. Die intendierte Bedeutung könnte beispielsweise sein, dass das für jedes Folgenglied möglich ist, oder für jeden Schlauch oder für jede der Beispielfolgen. Die beiden Studentinnen beginnen dann, einen Schlauch zu zeichnen:

289 D: *Warte mal. Lass u-, lass uns das mal malen (lacht) ... also-*

290 N: *Erst mal so nen Graphen, ne (fragend)*

291 D: *Ich mal jetzt einfach nen Wert bei eins ... so ... und ... wir haben jetzt hier ... hier haben wir jetzt den Schlauch ... und hier haben wir den Punkt ... dann muss jetzt-*

Anstatt bei einem der vorhandenen Graphen der Beispielfolgen einen Schlauch einzuzichnen, zeichnen die beiden ein einzelnes Folgenglied, das ungefähr den Wert 1 hat, und eine Umgebung um den Wert 1. Nun mischt sich Sophie ein und es wird deutlich, dass sie in der Zwischenzeit die fiktive Diskussion weiter gelesen hat:

294 S: *Also im Text steht, dass die Schläuche jede beliebige Zahl annehmen sollen*

295 D: *Ja und das ist jetzt unser Epsilon, das dann immer kleiner wird, also ich-*

296 N: *Ja, also, wir müssen ja ... generell*

297 M: *((U)) schon weitergelesen?*

298 S: *Ja, weil ich da nicht mitmachen kann*

Denise und Natalie gehen zunächst nicht darauf ein, sondern beschäftigen sich weiter mit ihrer Zeichnung.

299 D: *Ist Schlauch minus eins auf jeden Fall größer als Punkt minus eins*

300 N: *Schlauch minus-*

301 D: *Also, der Abstand ist größer als der Abstand. Und das kannst du immer ((U))*

302 N: *Aber was nimmst du denn? Welchen Schlauch nimmst du? Die obere oder untere Kante?*

303 M: *Müssen beide nehmen. Es muss ja für beide gelten*

304 D: *Das obere, je nachdem*

305 N: *Okay, gut*

306 D: *Je nachdem wo der Punkt liegt*

307 N: *Hmhm (verstanden)*

308 S: *Ja*

309 M: *Weil einfach der Betrag, dann machst du es mit Betrag*

Denise spricht zunächst davon, dass „Schlauch minus eins“ größer ist als „Punkt minus eins“. Durch ihre nachfolgende Äußerung wird etwas klarer, was sie damit meint. Der Abstand von einer Schlauch-Kante zu 1 soll größer sein als der Abstand des Punktes zu 1. Dabei will sie vermutlich die obere Schlauch-Kante nehmen, falls der Punkt oberhalb von 1 liegt und die untere, falls der Punkt unterhalb von 1 liegt. Markus hingegen schlägt vor, beide Schlauch-Kanten zu betrachten und den Betrag zu verwenden. Anschließend wollen die Studentinnen die Verbindung zu der zuvor bereits genannten Variablen ϵ herstellen:

312 D: *Ähm ... ja okay, jetzt müssen wir nur noch wissen, was-, we-, w-, was ... welches davon das Epsilon ist, ist doch Delta*

Denise bringt dabei auch die Variable δ mit ein. Natalie geht in ihrer Antwort lediglich auf ϵ ein:

316 N: *Ich würd jetzt einfach Epsilon sagen, dass das ist der Abstand von-, dieser Abstand ist*

317 D: *Und dann ist Delta der Abstand, dann ist Delta immer kleiner Epsilon*

In der ersten Aussage wird aus der Audio-Aufnahme nicht deutlich, welchen der beiden Abstände Natalie mit ϵ bezeichnen will. Da Denise dann davon spricht, dass δ der andere Abstand ist und dann δ kleiner als ϵ ist, wählen sie vermutlich den Abstand der Schlauch-Kanten zu 1 als ϵ und den Abstand des Punktes zu 1 als δ . Diese Interpretation wäre konsistent zu den vorherigen Äußerungen. Die Studentin ergänzt kurz darauf:

322 D: *So ... das können wir machen ... und dann müssen wir halt quasi ... y größer-, ach, $((U))$ konzentrieren, wenn sich schon Buchstaben- ... Epsilon ist größer Delta und dann halt-, dann müssen wir nur noch sagen, dass ... ne (ihr fällt das Wort nicht ein)!? Dass beliebig*

Sie bringt hier das Wort „beliebig“ mit ein. Was genau beliebig sein soll, wird aus ihrer Äußerung jedoch nicht deutlich, möglicherweise bezieht sie sich dabei auf die Variable ϵ . Darauf gehen ihre Kommilitonen nicht ein. Insgesamt bringt sie hier Bruchstücke aus der anderen Vorlesung ein, die scheinbar relevant sind.

Zwischenstand:

Durch den Begriff „Schlauch“ wurden bei Denise und Natalie Vorerfahrungen aus anderen universitären Veranstaltungen aktiviert. Sie schreiben an dieser Stelle noch keine neue Formulierung der gesuchten Eigenschaft auf, doch mündlich machen sie große Fortschritte. Sie erläutern, dass man eine ϵ -Umgebung betrachtet, dieses ϵ gegen 0 laufen lässt und die Folgenglieder dennoch innerhalb der ϵ -Umgebung liegen. Sophie hat sich an dieser Diskussion nicht beteiligt, da ihr die entsprechenden Vorerfahrungen fehlen. Sie liest stattdessen die fiktive Diskussion weiter. Markus scheint der Argumentation von seinen beiden Kommilitoninnen folgen zu können und damit einverstanden zu sein, gegen Ende der Phase beteiligt er sich daran. Die Gruppe zeichnet außerdem – wie durch die fiktive Diskussion gefordert – solche ϵ -Schläuche und sie stellen einen Bezug zwischen ihrer Zeichnung und den von ihnen verwendeten Variablen her.

Phase 9.2: Beschäftigung mit dem 2. Absatz der fiktiven Diskussion ohne zu einer Einigung zu gelangen, wie viele Schläuche betrachtet werden müssen Die Gruppe kehrt nun dazu zurück, sich gemeinsam mit der fiktiven Diskussion zu beschäftigen und sie lesen weiter:

Peter: Warte mal, was für Schläuche meinst du denn?

Anna: So Streifen, die durch die Gerade $y = 1$ halbiert werden.

Michael: Und wie viele Schläuche willst du zeichnen?

Was ist deine Meinung? Wie viele und welche Schläuche sollten betrachtet werden?

323 N: *Ja hier steht dann, guck, hier gehts ja weiter und ähm ... dieser $((U))$ -Dialog*

324 S: *Hier kann man jetzt sagen, dass man dieses Epsilon gegen null laufen lässt ... weil dann alles man beliebig viele macht unendlich viele, dann wirds halt immer kleiner und das heißt, es läuft immer näher gegen den-*

325 M: *Hier steht jetzt-, wir sind jetzt ungefähr hier, glaub ich, schon*

326 S: *Weil der Schlauch dann immer kleiner wird*

Sophie hatte bereits weiter gelesen, die anderen schauen erst einmal, an welcher Stelle der fiktiven Diskussion sie sich eigentlich befinden. Der ersten fettgedruckten Aufforderung sind die Studierenden bereits nachgekommen, indem sie einen Schlauch gezeichnet haben. Die nächste Frage ist nun, wie viele und welche Schläuche betrachtet werden sollten. Sophie spricht davon, dass unendlich viele Schläuche und ein immer kleineres ϵ betrachtet werden. Ihre Kommilitonen sind verschiedener Meinung:

327 M: *Hier steht jetzt nämlich ... also ein Schlauch, der von der Geraden y gleich eins geteilt wird, das ist klar. Das haben wir schon gezeichnet, so, wie viele Schläuche, wie viele und welche Schläuche sollten betrachtet werden? Oder wie viele Schläuche willst du zeichnen? Ja*

328 D: *Ja, beliebig ((U))*

329 M: *Einen Schlauch, oder? Der dann aber unendlich lang ist*

330 N: *Ne (verneinend), der wird quasi schmaler*

Denise ist möglicherweise der Meinung, dass beliebig viele Schläuche betrachtet werden müssen, während Markus nur einen einzigen Schlauch für nötig hält. Natalie hingegen geht von einem immer schmaler werdenden Schlauch aus. Parallel dazu wird diskutiert, ob die Punkte „am Anfang“ auch in den Schläuchen liegen müssen oder nicht:

336 M: *Wenn man, wenn am Anfang ... die Punkte hier sind, das ist ja scheißegal. Wir wollen ja nur ganz am Ende sein*

337 D: *Ja, aber die, die kannst du ja trotzdem in einen Schlauch zeichnen ... die könntest du trotzdem*

338 M: *Ja, aber die, ja, aber das Ding ist-*

339 D: *In einen Schlauch zeichnen, der dieses Kriterium erfüllt*

340 N: *Ja, aber trotzdem. Das ist ja eigentlich unwichtig, weil die, wenn ihr das so macht, dass die Punkte auch wichtig sind, kann man theoretisch ja jede Funktion als konvergent sehn, da man ja immer irgendeinen Schlauch finden kann, wo-*

341 M: *Also praktisch-*

342 D: *Ja, aber es geht ja nicht für jeden-, es gilt nicht für jede Funktion und jeden Schlauch, dass, ähm-*

Markus argumentiert, dass es nur um die Punkte „ganz am Ende“ geht. Was für ein Kriterium Denise meint, wird aus ihrer Aussage nicht klar. Hier wird zunächst keine Einigung erzielt, wie viele Schläuche betrachtet werden müssen.

Zwischenstand:

Am Ende dieser Phase ist der Zwischenstand der einzelnen Gruppenmitglieder sehr verschieden. Markus vertritt klar seine Meinung, dass nur ein Schlauch betrachtet werden muss, und dass es egal ist, ob die ersten Folgenglieder sich darin befinden. Möglicherweise hat er eine Vorstellung von einem kleinsten Schlauch, den er als Kriterium nutzen möchte. Natalie ist anderer Ansicht, sie hat eine dynamische Vorstellung von immer kleiner werdenden Schläuchen. Es deutet sich bereits an, dass sie begründen kann, dass die Existenz eines Schlauchs, in dem sich alle Folgenglieder befinden, nicht als Kriterium geeignet ist, da immer ein solcher Schlauch gefunden werden könne. Auf unbeschränkte Folgen trifft dies zwar nicht zu, doch die Erkenntnis ist sehr gut, da das Kriterium auf die als Nicht-Beispiel vorgegebene Folge fälschlicherweise auch zutreffen würde. Sophie spricht direkt zu Beginn der Phase von „beliebig vielen“ und „unendlich vielen“ Schläuchen. Ähnlich wie Natalie scheint bei ihr eine dynamische Vorstellung vorherrschend zu sein. Gegen Ende der Phase beteiligt sie sich nicht an der Diskussion der anderen. Der Erkenntnisstand von Denise lässt sich an dieser Stelle nicht eindeutig rekonstruieren. Die Studentin sagt zu Beginn „beliebig“, es wird jedoch nicht klar, ob sie einen beliebigen Schlauch oder beliebig viele Schläuche beziehungsweise jeden beliebigen Schlauch meint. Auf die Frage, ob die ersten Folgenglieder auch in dem Schlauch liegen sollen, ist ihre Meinung, dass jeweils ein Schlauch gefunden werden kann, so dass auch die ersten Folgenglieder darin liegen. Das könnte dafür sprechen, dass sie die Existenz nur eines Schlauchs als Bedingung formulieren möchte.

Phase 9.3: Beschäftigung mit dem 3. Absatz der fiktiven Diskussion und weiterhin keine Einigkeit, wie viele Schläuche betrachtet werden müssen Ohne die Frage geklärt zu haben, kommt die Gruppe dann wieder zur fiktiven Diskussion zurück und liest zunächst lediglich die erste Aussage des folgenden Absatzes:

Michael: *Reicht ein Schlauch?*

Eva: *Aber für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann man auch einen Schlauch finden, zum Beispiel mit dem Radius 1,5 und alle Glieder sind in dem Schlauch.*

Michael: *Aber ich meine den Schläuche, so dass alle Glieder, die darin liegen, sich 1 annähern oder gleich 1 sind.*

Was hältst du von Michaels Idee?

343 S: *Ja, ne (verneinend), das ist das Nächste. Reicht ein Schlauch, weil für x*

344 M: *Ich wollt grad sagen, es reicht ein Schlauch*

345 N: *Ne (verneinend)*

346 M: *Doch*

347 N: *Weil für die kannst du ja, du kannst die auch in einen Riesenschlauch machen, dann sind alle drinne, kannst du auch sagen, die sind alle konvergent ... weil es müssen alle am Ende, also am Ende muss es gegen Null laufen lassen, dann müssen die hinten alle drin sein und das geht bei x nicht. Du kannst y, ist hier-, hier ist Epsilon fest ... weil die immer so bleiben*

Hier argumentiert Natalie schlüssig, dass ein Schlauch nicht ausreicht, weil bei dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ auch ein Schlauch gefunden werden kann, in dem sich alle hinteren Folgenglieder befinden. Die Gruppe ist sich noch nicht einig darüber, wie viele Schläuche nötig sind:

353 S: *Ja, am Ende reicht der Kleine ((U)) damit die ganze Funktion drin ist musst du kleiner werden*

354 M: *Nene (verneinend), was wir eigentlich zeigen müssten, ist, dass es, wenn die Folge konvergent sein soll, dann gibt es*

355 D: *Unendlich viele Schläuche*

356 M: *Ne (verneinend), dann gibt es einen Schlauch ... der, sagen wa mal ... minimal groß ist ... oder ((U)) eine bestimmte Größe hat ... und, äh, dass die Werte dann irgendwann nicht mehr da rausfallen, dass die dazwischen sind*

Markus ist zwar der Meinung, dass nur ein Schlauch ausreicht, dass dieser aber „minimal groß“ sein soll.

Er schlägt erneut vor, die Folgenglieder am Anfang zu ignorieren:

360 M: *((U)) Sozusagen dann, dass wir sagen n, also für n, die, die gegen Unendlich ... dass wir die einfach ignorieren ... dass wir sagen, wenn die am Anfang rausspringen-*

Denise äußert sich kurz darauf ähnlich wie zuvor Natalie mit Bezug auf das Nicht-Beispiel:

365 D: *Ja, hier könnte man ja auch am Ende einen Schlauch machen, der dann so groß ist, kann man ja sagen ((U)) und dann liegen alle drin, dann wäre es ja konvergent, aber das Ding ist nicht konvergent. Das heißt du musst beliebig, du musst immer kleinere Schläuche machen und am Ende müssen die immer drin sein ... Selbst wenn du nur einen Schlauch findest mit einer bestimmten Größe und dann alle drin sind, das ist nicht das Kriterium für konvergent ... würd ich sagen*

Zwischenstand:

Sowohl Natalie als auch Denise argumentieren in dieser Phase, dass die Betrachtung eines einzigen Schlauchs als Kriterium nicht geeignet ist, da auch für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, auf welche die gesuchte Eigenschaft nicht zutreffen soll, ein Schlauch gefunden werden könnte, in dem sich alle Folgenglieder befinden. Bei Natalie war dies in der vorherigen Phase bereits erkennbar, doch nun bezieht sie sich expliziter auf das Nicht-Beispiel. Bei Denise ist dieser Erkenntnisstand neu hinzugekommen. Bei Markus ist nun noch deutlicher erkennbar, dass er an einen minimalen Schlauch denkt, der als Kriterium dienen kann. Sophie hat weiter

die dynamische Vorstellungen von immer kleiner werdenden Schläuchen, stimmt Markus aber insoweit zu, dass „der Kleine“ reicht. Damit könnte sie meinen, dass wenn sich alle Folgenglieder in einem kleinen Schlauch befinden, dass sie sich dann automatisch auch in den größeren Schläuchen befinden.

Phase 9.4: Blick auf den Endsatz, Beschäftigung mit dem 4. Absatz der fiktiven Diskussion und Erkenntnis, dass mehrere Schläuche betrachtet werden müssen
Anschließend widmet die Gruppe sich wieder der fiktiven Diskussion:

370 N: *Ja, halt der Endsatz ist ja, dass alle Schläuche betrachtet werden müssen, deren Breite-*

371 M: *Immer schmalere und schmalere, oh, sorry*

372 N: *Eine beliebige Zahl ist, also jede positive reelle Zahl*

Dass nicht nur ein Schlauch betrachtet werden muss, sondern unendlich viele, das hatte zumindest ein Teil der Gruppenmitglieder selbst erarbeitet. Die Formulierung, dass die Breite der Schläuche eine beliebige positive reelle Zahl ist, haben sie hingegen aus der fiktiven Diskussion entnommen. Sie gehen nun die einzelnen Fragen aus der fiktiven Diskussion noch einmal durch. Über die Fragen, die sie zuvor bereits diskutiert haben, gehen sie schnell hinweg:

Eva: Aber das fasst nicht die einzelnen Fälle, die wir uns vorher angeschaut haben, zusammen. Die Folgen sehen immer noch unterschiedlich aus.

Peter: Egal ob da ein Schlauch ist oder nicht, du kannst das gleiche sehen, aber wir wollten die Bedingungen mithilfe von Schläuchen zusammenfassen. Da ein Schlauch nicht hilft, lasst uns doch mehrere betrachten.

Probier' das mal aus!

387 N: *Also ein Schlauch reicht nicht, ne (fragend)?!*

388 D: *Ja*

Zwischenstand:

Nachdem sie sich das Ende der fiktiven Diskussion durchgelesen haben, scheinen nun alle Gruppenmitglieder davon auszugehen, dass die Betrachtung eines einzigen Schlauchs nicht genügt.

Phase 9.5: Beschäftigung mit dem 5. Absatz der fiktiven Diskussion und Verstehen der Variablen n_0 als Startpunkt, ab dem sich alle weiteren Folgenglieder innerhalb eines Schlauchs befinden Die Gruppe liest direkt weiter:

Peter: Wenn die Werte ab einer Zahl gleich 1 sind gibt es kein Problem, aber was ist mit den anderen Folgen?

Anna: Wenn wir Schläuche nehmen, die schmaler und schmaler sind, dann können wir zu jedem der Schläuche immer die natürliche Zahl n_0 finden, so dass ab diesem n_0 alle Glieder in dem Schlauch sind.

Michael: Erklär' das bitte noch mal.

Versuche zu erklären, was Anna meint!

Markus ist zunächst der Meinung, dass sie diesen Teil bereits erledigt haben:

389 M: *Eigentlich kommt jetzt hier ... unten, was ihr hier schon gemacht habt ... oder wir ... ich hab's ja nicht mitgezeichnet ... also das, was du da gezeichnet hast*

Über die natürliche Zahl n_0 , so dass ab dieser Zahl alle Folgenglieder in einem Schlauch liegen, hatten sie allerdings noch nicht gesprochen. Denise und Sophie versuchen dies nachzuvollziehen:

397 D: *Ja, aber was meint Anna denn? Wenn wir Schläuche nehmen, die schmaler und schmaler sind, dann können wir zu jedem der Schläuche immer die natürliche Zahl n null finden, so dass ab diesem n null alle Glieder im Schlauch sind!?*

398 S: *Ja, das ist zum Beispiel ab hier, ja ... sind dann alle Punkte drin*

399 D: *Achso! Also das hier wäre dann in diesem Moment n null*

400 S: *Genau*

401 D: *Für den da*

402 S: *Genau. N null für diesen Schlauch*

Da die Studierenden bei ihrer Argumentation auf Graphen zeigen, ist eine zweifelsfreie Interpretation aus der Audioaufnahme nicht möglich. Vermutlich betrachten sie einen der Graphen, zu dem sie bereits einen Schlauch gezeichnet hatten. Sophie scheint auf eine Stelle der Grafik zu zeigen, sodass rechts davon alle Folgenglieder innerhalb des Schlauchs liegen. Denise kann das nachvollziehen. Sie haben anscheinend beide verstanden, dass n_0 von dem jeweiligen Schlauch abhängt. Ab jetzt lässt sich das umgekehrte Denken in ihren Formulierungen finden. Sie betrachten erst einen konkreten Schlauch und wählen anschließend zu diesem Schlauch ein n_0 . Natalie kommt dann wieder auf die Variable ϵ zu sprechen:

403 N: *Aber man findet einen beliebig, ein möglichst kleines Epsilon, äh ... möglichst $((U))$*

404 M: *Ich würd nicht mit diesem Epsilon oder was auch immer $((U))$ aus der Geometrie heraus, können wir nicht wissen, also ich weiß es nicht und ich glaub nicht, dass $((U))$*

405 N: *Ist einfach nur ein Buchstabe. Du kannst ja auch ... x nehmen*

406 M: *Achso*

Markus ist zunächst dagegen, ϵ zu verwenden, da er es noch nicht kennt. Vielleicht ist er der Meinung, dass es nicht benutzt werden darf, weil es aus der Analysis-Vorlesung noch nicht bekannt ist. Entweder ist ihm nicht bekannt, dass eine Variablenbezeichnung frei gewählt werden darf oder er erkennt ϵ gar nicht als Variable. Natalie antwortet darauf, dass es ja nur ein Buchstabe sei und statt ϵ auch ein anderer Buchstabe verwendet werden könne.

Ich komme kurz hinzu, um festzustellen, ob Unterstützungsbedarf besteht, was jedoch nicht der Fall ist.

410 L: *Sagt nur, wenn ihr noch Fragen habt oder nicht weiter kommt oder so*

411 D: *Nö ... also wir haben uns überlegt, dass wir den Schlauch immer schmaler werden lassen und wir aber den Schlauch immer so machen, dass ja die Punkte drin liegen und dann gilt immer ... dass der Abstand zwischen eins und Schlauch größer ist als der Abstand zwischen eins und Punkt ... und wenn der Schlauch immer kleiner wird, muss auch der Abstand immer kleiner werden ... ja. Und das versuchen wir-*

412 N: *Dass das Epsi-, ah, dass der Abstand möglichst klein sein muss (...) Also das n null entspricht sozusagen dem kleinstmöglichen Schlauch*

413 D: *Ne (verneinend), warte mal. Ist, ne (verneinend), ist n , n null ist der Punkt ab dem die Elemente im Schlauch sind*

414 S: *Hä? Nein, n null ist der Startpunkt*

415 N: *Achso*

416 D: *N ist ja auf deiner ... n ist auf der x -Achse*

417 N: *Ach, stimmt. Ja, okay*

Natalie ist erst der Meinung, dass die Variable n_0 dem kleinstmöglichen Schlauch entspricht. Wie sie darauf kommt ist nicht nachvollziehbar. Ihre Kommilitoninnen überzeugen sie davon, dass n_0 den „Startpunkt“ bezeichnet, ab dem die Folgenglieder innerhalb des Schlauchs liegen, und dass n_0 sich auf der x -Achse befindet. Die Studentin lässt sich von ihnen überzeugen.

Zwischenstand:

Denise und Sophie beschäftigen sich mit der Aussage, dass es zu jedem Schlauch eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass alle Folgenglieder ab diesem n_0 innerhalb des Schlauchs liegen. Sie erklären sich dies anhand eines Graphen. Ihnen wird klar, dass die Zahl n_0 auf der x -Achse ist und dass n_0 von dem jeweiligen Schlauch abhängt. Hier ist bei ihnen das umgekehrte Denken erkennbar. Ob es tatsächlich möglich ist, für jeden Schlauch eine solche Zahl zu finden, wird nicht thematisiert. Gegen Ende der Phase erkennt auch Natalie, dass n_0 den „Startpunkt“ bezeichnet, ab dem sich alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Schlauchs befinden. Markus beteiligt sich kaum, bei ihm ist in dieser Phase lediglich der Erkenntnisfortschritt festzustellen, dass es sich bei ϵ um eine Variable handelt und stattdessen auch ein anderer Buchstabe verwendet werden könnte.

Phase 9.6: Beschäftigung mit dem 6. Absatz der fiktiven Diskussion, wobei es keine neuen Erkenntnisse gibt Daraufhin beschließt die Studentin, an dem Graphen einer der Beispielfolgen mehrere Schläuche und jeweils geeignete „Startpunkte“ einzuzichnen, was dem nächsten Arbeitsauftrag der fiktiven Diskussion entspricht:

Anna: Wir zeichnen einen Schlauch irgendeiner Breite und finden n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder in dem Schlauch sind. Dann zeichnen wir einen schmaleren Schlauch und finden ein neues n_0 , so dass ab diesem alle Folgenglieder in diesem Schlauch sind. Und so weiter mit Schläuchen, die schmäler und schmäler werden.

Zeichne das, was Anna erklärt hat, an ein paar Graphen ein.

418 D: *Ach, komm, ich mal das nochmal so wie du das gemeint hast, das ist am leichtesten*

Sie markiert in den Zeichnungen von zuvor jeweils auf der x-Achse ein n_0 .

421 D: *Hmm, toll. Jetzt hab ich das, was Anna erklärt hat an einem Graphen eingezeichnet*

Den Arbeitsauftrag hat sie somit erfüllt. Neue Erkenntnisse scheint sie dabei nicht zu machen, was auch damit zusammenhängen könnte, dass sie in der vorherigen Phase bereits Graphen mit Schläuchen betrachtet hatte.

Zwischenstand:

Denise kommt dem Arbeitsauftrag der fiktiven Diskussion nach. Erkenntnisfortschritte sind in dieser Phase nicht erkennbar.

Phase 9.7: Beschäftigung mit dem 7. Absatz der fiktiven Diskussion und Einigung, dass unendlich viele Schläuche betrachtet werden müssen Die Studierenden lesen nun weiter:

Peter: Verstehe, und das gleiche kann man für alle Folgen machen.

Eva: Aber nicht für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denn wenn die Breite des Schlauchs zum Beispiel 0,5 ist, dann gibt es kein solches n_0 .

Michael: Also, wie viele Schläuche müssen betrachtet werden?

Was denkst du?

Auf die fiktiven Aussagen, dass dies bei jeder Folge gemacht werden könne, bei dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ hingegen nicht, geht die Gruppe nicht ein. Sie widmen sich lediglich dem expliziten Arbeitsauftrag:

423 S: *Unendlich viele Schläuche, oder?*

424 D: *Ja, finde auch, unendlich*

425 N: *Ja*

An dieser Stelle ist die Gruppe sich einig, dass unendlich viele Schläuche betrachtet werden müssen.

Zwischenstand:

Am Ende von Phase 9.4 waren die Studierenden bereits der Meinung, dass es nicht ausreichte, einen Schlauch zu betrachten, es müssten mehrere betrachtet werden. Nun sagen die drei Studentinnen explizit, dass es unendlich viele Schläuche sein müssen. Markus beteiligt sich wiederum nicht, über seinen Erkenntnisstand kann daher nichts gesagt werden.

Phase 9.8: Beschäftigung mit dem 8. Absatz der fiktiven Diskussion und Diskussion darüber, mit welchem Schlauch begonnen wird Die Gruppe geht zur nächsten Frage in der fiktiven Diskussion über:

Peter: Immer schmalere und schmalere.

Eva: Sogar solche, die zu schmal zum Zeichnen sind.

Michael: Schmäler als was? Womit soll man anfangen?

Was meinst du?

Die Frage, womit angefangen werden soll, führt zu einer Diskussion:

426 D: *Okay ... womit soll man anfangen? Was meinst du? Äh ... ja ... größer als der größte Absta-, ... größer als der*

427 N: *Der am weitesten entfernte Punkt, mit dem-*

428 D: *entfernte Wert ... ne (verneinend), warte mal, größer als der Abstand des am weitesten entferntesten Punktes von eins*

429 N: *Ja*

Die Studierenden wollen jeweils mit einem Schlauch beginnen, der so breit ist, dass er alle Folgenglieder enthält, auch das Folgenglied, das am weitesten vom Grenzwert entfernt ist. Sie schauen sich das an einem Beispiel an:

432 M: *Hier zum Beispiel ... so, dann würden wir hier anfangen irgendwo*

433 S: *Hmhm*

434 M: *Weil das der Punkt ist, der am weitesten entfernt ist*

435 S: *Achso*

436 M: *((U)) und wahrscheinlich auf die andere Seite auch nochmal am besten ((U))*

437 S: *Achso ... ja, okay, gut*

438 D: *Warte mal, doppelt so groß, oder?*

439 N: *Mehr als, mehr als doppelt so-*

440 D: *Ja*

441 S: *Und wie schreibt man das jetzt auf?*

Bei der Grafik einer Beispielfolge wählen sie das Folgenglied aus, das am weitesten von 1 entfernt ist. Eine Begrenzungslinie des Schlauches soll dann so verlaufen, dass dieses Folgenglied sich gerade innerhalb des Schlauchs befindet. Sie ergänzen dann, dass die andere Begrenzungslinie des Schlauchs auf der anderen Seite des Grenzwerts verläuft. Da sie davon sprechen, dass die Breite des Schlauchs dann doppelt so groß beziehungsweise mehr als doppelt so groß wie der Abstand des am weitesten vom Grenzwert entfernten Folgenglieds zum Grenzwert ist, kann davon ausgegangen werden, dass sie den Schlauch symmetrisch um die Gerade $y = 1$ legen wollen. Sie wollen nun ihre Antwort auf die Frage aufschreiben. In den Turns 442 bis 454 diskutieren sie lediglich darüber, wem welches Arbeitsblatt gehört.

455 S: *Also, was schreibt ihr jetzt?*

456 N: *Mehr als doppelt so groß Komma ... wie der Abstand*

Zwischenstand:

Echte Erkenntnisfortschritte lassen sich in dieser Phase nicht erkennen. Sie beschäftigen sich lediglich mit der Frage, mit welchem Schlauch jeweils angefangen werden solle. Sie einigen sich darauf, mit dem Schlauch anzufangen, der gerade alle Folgenglieder enthält.

Phase 9.9: Beschäftigung mit dem 9. Absatz der fiktiven Diskussion ohne neue Erkenntnisse Markus bezieht sich anschließend auf den nächsten Absatz:

Anna: Die breiten, die alle Folgenglieder enthalten, sind nicht wichtig. Sollten wir einfach alle Schläuche betrachten?

Stimmst du Anna zu?

457 M: *Hier steht dann aber gleich die breiten ... die alle Folgenglieder enthalten, sind nicht wichtig, das ist das, was ich eben gesagt habe. Praktisch brauchen wir nur einen zu betrachten ... nämlich den, ab dem Zeitpunkt, dem alle Folgenglieder nur noch dazwischen liegen, das, wenn das, wenn es sowas gibt, wenn es diese Zahl existiert, dann ist es konvergent ... das ist praktisch die Eigenschaft*

458 D: *Ja, ab-*

459 M: *Es muss diesen einen Schlauch geben-*

460 D: *Ja, natürlich sind die jetzt nicht so megaentscheidend für den Beweis, man muss ja damit irgendwie anfangen und wenn du sagst, du arbeitest mit Schläuchen, dann musst du auch die ganze Zeit mit Schläuchen arbeiten, kannst du doch nicht sagen ... okay, ab jetzt (lacht)*

Markus nimmt die Aussage aus der fiktiven Diskussion zum Anlass dafür zu argumentieren, dass nicht unendlich viele solcher Schläuche betrachtet werden müssen, sondern dass es „diesen einen“ geben muss. Möglicherweise denkt er dabei weiterhin an einen Schlauch minimaler Breite. Nicht ganz deutlich wird in seiner Aussage, was er mit „die Zahl“ meint, die existieren soll. Er könnte sich auf den Zeitpunkt beziehen, ab dem alle Folgenglieder innerhalb des Schlauchs liegen sollen, oder auf die Breite des Schlauchs. Denise hingegen ist der Meinung, es müsse die ganze Zeit mit Schläuchen gearbeitet werden, womit sie vermutlich meint, dass alle Schläuche betrachtet werden müssen. In den folgenden Turns zeigt sich, dass die Studierenden die Aussage aus der fiktiven Diskussion verwirrend finden:

462 S: *Was meint die da?*

463 N: *Ja, das versteh ich auch nicht, weil erst sagt die, dass man welche außer Acht lassen kann, aber dann sagt die, sollen wir alle betrachten*

464 S: *Ist irgendwie unlogisch*

465 D: *Man muss jetzt nicht für jeden Punkt machen, für den Nächsten, wo man den nächsten Schlauch erst wieder machen kann, oder? ... Ich mein, die ((U)) Folge, die enthalten sind ((U)) weiß gar nicht, was die da genau meint*

466 S: *Das versteh ich auch nicht, wenn ich ehrlich bin*

Sie drücken ihre dynamische Vorstellung von immer schmaler werdenden Schläuchen noch einmal deutlich aus:

467 N: *Weil, wir wollen doch auf so ein dynamisches, oder? Also, so, die sagen, dass, der Schlauch wird immer kleiner ... und, genau*

468 S: *Es gibt immer einen neueren Schlauch*

469 N: *Aber der wird sozusagen fließend immer kleiner und die Elemente sind trotzdem drin und am Ende*

470 S: *Ja, genau*

471 N: *Ist halt, es ist quasi unendlich klein, die sind trotzdem drin*

472 S: *Ja*

473 M: *Es steht hier auch ganz am Ende ... die Breite ist eine positive reelle Zahl*

In Turn 471 spricht Natalie von einem abgeschlossenen Prozess. Sie spricht dort nicht mehr von immer kleiner werdenden Schläuchen, sondern von einem Schlauch, der „unendlich klein“ ist.

An dieser Stelle des Durcharbeitens der fiktiven Diskussion kommen die Studierenden nicht weiter:

476 D: *Ja, aber trotzdem. Was ist jetzt bei Anna gemeint? Also, sagt die jetzt einfach nur, dass die gewisse-, also die erstere-, die ersten Schläuche weglassen kann oder wie?*

Daher macht ein Studierender den Vorschlag, diese Frage zu überspringen und zum letzten Teil der fiktiven Diskussion zu kommen:

483 D: *Man muss ja einen Anfang machen ... wollen wir nicht einfach das zusammenfassen am Ende? Weil wenn wir jeden einzelnen nehmen ((U))*

Zwischenstand:

Hier zeigt sich deutlich, dass die Studierenden die Aussagen aus der fiktiven Diskussion verwirrend finden und sie keine Erkenntnisfortschritte machen.

Phase 9.10: Beschäftigung mit dem 10. Absatz der fiktiven Diskussion bis zur Formulierung der Charakterisierung 4 Sie widmen sich also nun der letzten Aussage in der fiktiven Diskussion:

Michael: Ja, die Schläuche, deren Breite eine beliebige Zahl ist, also jede positive reelle Zahl.

Fasse die Beobachtungen zusammen. Welche einzige Bedingung beschreibt die Eigenschaft?

488 D: *Ja, fasse die Beobachtungen zusammen. Welche einzige Bedingung beschreibt die Eigenschaft?*

489 N: *Du musst halt erst mal ((U))*

490 S: *Also, man findet immer einen kleineren ... Schlauch, für den gilt: Für den man ein n null findet, für den alle weiteren Nachfolger wieder im Schlauch sind ... ja, oder, irgendwie so ähnlich*

491 D: *Man findet immer-, also wir sagen jetzt, Epsilon ist der Abstand. Man findet immer ein kleineres Epsilon, so dass es-, man ein n null hat, für den alle Nachfolger, also alle weiteren Punkte, in diesem Schlauch drin sind*

Sie scheinen sich vorzustellen, dass mit irgendeinem Schlauch begonnen wird und dann immer schmalere Schläuche gefunden werden, so dass es jeweils ein n_0 gibt, ab dem alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Schlauchs liegen. Die Studierenden notieren diese Formulierung jeweils für sich und sind somit mit dem Durcharbeiten der fiktiven

Diskussion fertig.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 4) *Man findet immer ein kleineres ϵ , so dass es ein n_0 gibt, für das alle weiteren Punkte im Schlauch der Breite 2ϵ liegen.*

Da die Studierenden jeweils für sich das Ergebnis aufschreiben, weichen die notierten Formulierungen teilweise voneinander ab, wie sich später zeigt. Dies ist jedoch das Ergebnis, das sie mir präsentieren.

Der Erkenntnisfortschritt in dieser Phase besteht hauptsächlich darin, dass sie die in den Phasen 9.1 bis 9.9 gesammelten Erkenntnisse zusammenfassen und daraus eine Charakterisierung formulieren, was noch einmal ein wichtiger Schritt ist.

Phase 9.11: Bewertung der Intervention Sie unterhalten sich im Anschluss noch darüber, dass sie die fiktive Diskussion hilfreich fanden:

501 N: *((U)) haben die das Arbeitsblatt bekommen? Hat jeder da was anderes?*

502 M: *Die anderen sind wohl nicht so weit, wahrscheinlich*

503 D: *Ja, wir haben alle unterschiedliche Hilfsmittel gekriegt ... also wir waren die Einzigen, mein ich, die dieses ((U)) gekriegt haben, andere haben halt diese Folien mit diesen Schläuchen gekriegt*

504 M: *Achso, okay*

505 S: *Da war unseres am Hilfreichsten*

506 D: *Ich fand unseres auch gut*

Sie äußern außerdem, welcher Teil der fiktiven Diskussion ihnen hauptsächlich geholfen hat und bemerken, dass sie ihr Wissen aus der Geometrie-Vorlesung auch mit eingebracht haben:

514 D: *Eigentlich hätte man mal die erste Bemerkung von Anna haben müssen*

515 S: *Ja, aber okay*

516 D: *((U)) mit Schläuchen*

517 S: *Ja, gut, aber das ja auch nur, weil ((U)) in einem Exkurs in der Geometrievorlesung zufällig dieses Kriterium gemacht hat ... oder zufällig das mal so angemalt hat, diese Idee*

Denise ist der Meinung, dass möglicherweise die erste Aussage aus der fiktiven Diskussion als Hilfestellung genügt hätte. Sophie relativiert diese Aussage. Sie ist der Ansicht, dass dies nur deshalb der Fall war, weil manche von ihnen aus einer anderen Vorlesung bereits etwas ähnliches kannten.

Phase 10: Überarbeitung der Charakterisierung gemeinsam mit der Lehrperson zum finalen Ergebnis

In der letzten Phase befinde ich mich wieder bei dieser Gruppe. Gemeinsam überarbeiten wir die Formulierung zum finalen Ergebnis.

Ich als Lehrperson komme kurz darauf hinzu und lese mir die Formulierung der Eigenschaft durch. Ich rege an, die Formulierung „Man findet immer ein kleineres Epsilon“ noch einmal zu überarbeiten:

521 L: *Genau, wie kann man ... das mit dem Epsilon jetzt noch so ein bisschen sagen, also irgendwie ein immer kleineres Epsilon-*

Sie bleiben daraufhin bei ihrer dynamischen Vorstellung von immer schmaler werdenden Schläuchen:

522 D: *Dass es gegen null läuft, aber nicht null wird*

523 S: *Ja*

524 N: *Epsilon gegen null mit Epsilon größer null*

Denise macht folgenden Vorschlag:

526 D: *Also, ich hab gesagt, dass das einfach, ähm, R ohne null ist, damit ist ja jede Zahl gemeint ... also positiv R ohne null*

Die übrigen Gruppenmitglieder gehen nicht darauf ein. Die Gruppe begründet kurz darauf, warum das Nicht-Beispiel nicht unter die von ihnen formulierte Eigenschaft fällt:

533 D: *Dann findet man ja nicht immer ein Kleineres, weil wenn man hier ist und hier, dann gehts ja nicht kleiner. Man muss ja immer ein Kleineres finden, weils ja unendlich viele gibt $((U))$ muss ja immer eins finden und ab hier findet man ja kein kleineres Epsilon mehr, wo dann alle drin sind $((U))$*

534 N: *Oder man sieht, dass so, es kann zwar kleiner werden, aber es wird danach wieder groß ... das können wir auch sagen*

535 L: *Okay, das heißt, also hier gibt es irgendwie, wenn ich ... wenn ich einen Schlauch noch kleiner wähle $((U))$*

536 N: *Dann sind nicht, gibt es kein n null mehr, für die alle Nachfolger im $((U))$ wenn man so nen kleinen macht, ist ja hier der Nachfolger von diesem hier wieder nicht drin und das ist dann ja nicht erfüllt. Man muss halt immer einen Kleinen finden, so dass alle Nachfolger von ihnen drin sind ... das-, ab hier gehts ja nicht mehr, weil ab hier sind ja-*

An dieser Erläuterung zeigt sich, dass sie verstanden haben, dass die Existenz eines Schlauchs beziehungsweise eines Wertes von ϵ nicht hinreichend ist, weil dies auch auf das Nicht-Beispiel zutreffen würde. Ich rege daher an, diese noch zu verbessern:

537 L: *Okay, ((U)) so wie sie es gerade erklärt hat, ist es genau richtig ... ich würd es hier dann ein bisschen anders formulieren, also ihr habt es genau richtig erklärt, ähm ... aber hier würd ich dann, äh, vielleicht sagen ... also fü- ... für jedes solche Epsilon-*

538 S: *Ist okay*

539 L: *Gibt es ein n null. Ja, weil wenn man sagt, man findet ein Epsilon, hier kann ich auch irgendein Epsilon finden, so dass die dann alle da drin sind*

540 N: *Ja, okay*

Im Nachhinein betrachtet ist meine Intervention an dieser Stelle möglicherweise zu stark, da ich ihnen die Formulierung vorschlage. Die Studierenden sind mit diesem Vorschlag einverstanden.

Denise schlägt schließlich zum Aufschreiben folgende Formulierung vor:

550 D: *Joa, ich würd jetzt einfach schreiben: für jedes Epsilon existiert ein-*

Den Rest der Formulierung äußert sie nicht mehr mündlich, sondern sie schreibt weiter auf „... n_0 , für das alle weiteren Punkte in dem Schlauch der Breite 2ϵ liegen“.

Ergebnis:

(Finale Charakterisierung) *Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ existiert ein n_0 , für das alle weiteren Punkte in dem Schlauch der Breite 2ϵ liegen.*

Diese letzte Phase hat für die Studierenden keine neuen Erkenntnisse geliefert, doch sie haben ihre formulierte Eigenschaft mit mir gemeinsam verbessert. Denise hat den Ausdruck „ $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ “ bereits in Turn 526 genannt und auch in ihrer notierten Charakterisierung verwendet, die anderen Gruppenmitglieder hingegen nicht. Zumindest Sophie und Natalie äußern letztendlich ihr Einverständnis mit dem Vorschlag, den ich basierend auf Denises Formulierung mache. Ob sie den Unterschied zu der von ihnen notierten Eigenschaft erkannt haben, wird nicht klar.

6.2.6 Gruppe 3: Analyse in Bezug auf die Leitfragen

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Zur Beantwortung dieser Analysefrage werden zunächst alle Textstellen, in denen die Studierenden ihr Vorverständnis zu Konvergenz oder verwandten Begriffen explizieren, identifiziert. Eine solche Textpassage findet sich relativ zu Beginn ab Turn 16. Die Gruppe betrachtet in dem Moment eine der schließlich konstanten Beispielfolgen und diskutiert darüber, ob konvergente Folgen den Grenzwert erreichen dürfen. Denise scheint als Vorverständnis mitzubringen, dass konvergente Folgen den Grenzwert sehr wohl erreichen dürfen. Sie ist der Meinung, dass auch die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert. Diese Folge war nicht unter den vorgegebenen Beispielen, die Studentin zieht sie in dem Moment selbst hinzu. Ohne ein Vorverständnis konvergenter Folgen

könnte sie zu diesem Zeitpunkt kein Beispiel ergänzen. Markus und Natalie zeigen ebenfalls ein Vorverständnis zum Konvergenzbegriff, das sich jedoch von dem von Denise unterscheidet. Sie sind der Meinung, dass eine Folge nur dann konvergent sein kann, „wenns niemals den Wert erreicht“. Sowohl die Aussage „*konvergent ist sie ja nur, wenn es gegen den Wert anläuft oder wenns niemals den Wert erreicht*“ von Natalie in Turn 19 als auch die Äußerung „*Dass es niemals den Wert erreicht, das-, das heißt eben Grenzwert*“ von Markus in Turn 40 trifft auf einige der vorgegebenen Beispielfolgen nicht zu. Somit lässt sich diese Problemstelle der Situation (B) aus Tabelle 4.2 zuordnen. Hier ist den Studierenden jedoch bewusst, dass die Formulierung nicht auf alle Folgen zutrifft. Das Problem liegt also nicht in einer fehlenden Überprüfung. Es scheint eher so zu sein, dass die als konvergent vorgegebenen Folgen nicht zum Vorverständnis der Studierenden passen und so ein Konflikt entsteht. Die Äußerung „*Das gefällt mir aber nicht*“ in Turn 37 passt dazu. Es handelt sich also um eine Problemstelle, die den Studierenden bewusst ist und die sich daher im Sinne von Oehrtman et al. (2011) als *Problem* klassifizieren lässt. Vor allem bei Markus ist dieses Vorverständnis sehr dominant. Dass die als konvergent vorgegebenen Beispielfolgen zu einem Konflikt mit seinem Vorverständnis führen, ist ihm bewusst. Denise bringt dann in Turn 42 noch ihr Vorverständnis zu einem anderen Begriff ein. Die Eigenschaft, die Markus beschreibt, ist ihrer Meinung nach nicht Konvergenz, sondern „asymptotisch annähern“. Das heißt, für diese Studentin bedeutet asymptotisch annähern, dass der entsprechende Wert nicht erreicht wird, bei Konvergenz hingegen kann der Wert erreicht werden. Ab Turn 132 kommt das Thema noch einmal zur Sprache, da Markus weiterhin an seinem Vorverständnis festhält: „*Ich bin noch nicht hundertprozentig zufriedengestellt*“. Sophie nennt den Grund für seine Unzufriedenheit: „Ja, weil du es immer noch doof findest, dass es bei konvergent auch genau eins angenommen werden kann, ne (fragend)?“. Die Studentin bietet ihrem Kommilitonen eine Lösung seines Konflikts an. Sie sagt, dass in der Schule nicht der Begriff konvergieren verwendet wurde und es sich möglicherweise um einen anderen Begriff handelt, als der, zu dem Markus ein Vorverständnis hat. Die beiden Studentinnen erkennen, dass die vorgegebenen Beispielfolgen nicht alle die Eigenschaft besitzen, dass sie sich dem Wert 1 annähern ohne diesen zu erreichen. Das nehmen sie zum Anlass, die Eigenschaft „Annähern ohne zu erreichen“ mit dem Begriff „asymptotisch annähern“ zu bezeichnen und die gesuchte Eigenschaft als neuen Begriff aufzufassen, den sie von dem Begriff „asymptotisch annähern“ abgrenzen. Markus hingegen beteiligt sich zwar weiterhin an der Nacherfindung, dennoch lässt sich nicht feststellen, dass er die Konvergenz der schließlich konstanten Folge akzeptiert.

Dass bei den Studierenden ein Vorverständnis zum Konvergenzbegriff vorhanden ist, war bereits im Vorfeld erwartet worden. In den Starting Points des Vorbereitungsworkshops war formuliert worden, dass das *Concept Image* der Studierenden zum Konvergenzbegriff wahrscheinlich überwiegend aus monotonen Folgen besteht, die den Grenzwert nicht annehmen. Dass dieses Vorverständnis derart dominant sein kann wie im Fall des Studenten Markus, der sich nicht darauf einlässt, einen neuen Begriff auf Basis der vorgegebenen Beispiele zu definieren, war hingegen nicht erwartet worden. Die beiden Studentinnen zeigen, wie eine erfolgreiche Weiterentwicklung der Vorverständnisse zum Konvergenzbegriff verlaufen kann.

3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

Um den Vergleich vornehmen zu können wird zunächst der tatsächliche Verlauf dieser Gruppe schematisch dargestellt. Darin finden sich insbesondere die wichtigsten formulierten Charakterisierungen und alle wesentlichen Diskussionspunkte und Erkenntnisse der Gruppe wieder. Dabei wird der Prozess der Gruppe als Ganzes betrachtet, es wird nicht zwischen den einzelnen Gruppenmitgliedern unterschieden. Auch sind die einzelnen Beispielfolgen, mit denen sich die Gruppe jeweils beschäftigt, hier nicht dargestellt, sondern auf diese wird separat eingegangen.

I Erste Charakterisierung:

Eine Folge heißt konvergent gegen den Wert x , wenn es im Unendlichen gegen x läuft.

II Erkenntnis, dass unter den Beispielen auch Folgen sind, die den Grenzwert erreichen zunächst Diskussion darüber, ob der Grenzwert tatsächlich erreicht werden darf, schließlich Formulierung einer neuen Charakterisierung:

Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge gegen x läuft oder gleich x ist.

Nebenbei werden die folgenden Aspekte festgestellt beziehungsweise diskutiert:

- Erkenntnis: Am Anfang darf es „Ausnahmen“ geben
- Diskussion über die Frage: Was heißt „Annähern“?
- Erkenntnis: Die Differenz der Folgenglieder konvergiert ebenfalls, und zwar gegen 0, daher Ergänzung der Charakterisierung um den folgenden Satz:

Für den Fall, dass die Folge gegen x läuft, also nicht gleich x wird, läuft die Differenz ebenfalls und zwar gegen 0.

III Impuls: Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausdrücken

Resultat:

- Betrachtung von Differenzen
- Vorschlag einer neuen Charakterisierung: Für große n ist a_n ungefähr gleich a_{n+1}
- Diskussion der Frage: Was ist „ungefähr gleich“?

IV Intervention: 2. fiktive Diskussion

Resultat:

- Betrachtung von Schläuchen der Breite 2ϵ um 1
- Betrachtung von unendlich vielen dieser Schläuche

- Formulierung, dass ab einem n_0 alle Punkte im Schlauch sein müssen

Diese Erkenntnisse werden verbunden zu der Formulierung:

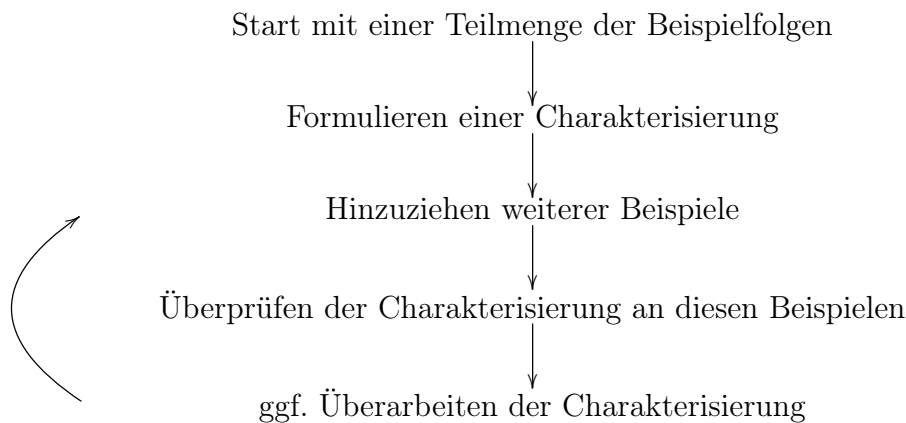
Man findet immer ein kleineres ϵ , so dass es ein n_0 gibt, für das alle weiteren Punkte im Schlauch der Breite 2ϵ liegen.

V Überarbeitung der Charakterisierung gemeinsam mit der Lehrperson

Resultat:

Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ existiert ein n_0 , für das alle weiteren Punkte in dem Schlauch der Breite 2ϵ liegen.

Die drei Varianten des hypothetischen Verlaufs haben die folgende Struktur gemeinsam:



i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

Auch diese Gruppe beginnt – anders als in den hypothetischen Verläufen formuliert – direkt mit der Betrachtung aller vorgegebener Folgen. Sie versuchen, diese von Anfang an alle in ihrer Formulierung zu berücksichtigen. Ein systematisches Überprüfen der verschiedenen Charakterisierungen an allen vorgegebenen Folgen wird nicht deutlich. Es wäre höchstens möglich, dass manche der Studierenden dies gedanklich gemacht haben, ohne darüber zu sprechen.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Eine Übersicht darüber, welche der vorgegebenen Folgen die Studierenden jeweils in welchen Phasen in ihren Argumentationen verwendet haben, ist in Tabelle 6.3 zu finden.

Bei dieser Gruppe fällt auf, dass sie sich in ihrer Diskussion nur wenig auf die vorgegebenen Folgen beziehen. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erwähnen sie kein einziges Mal explizit. Das lässt sich dadurch erklären, dass es sich um eine eher typische konvergente Folge handelt. Außerdem ist mit der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definiert ist, eine weitere

streng monotone Folge, die den Grenzwert nicht annimmt, unter den vorgegebenen Beispielen. Auf diese bezieht sich die Gruppe einmal in Phase 2, als eine Studentin argumentiert, dass es bei der Eigenschaft „Konvergenz“ nicht darauf ankommt, ob der Grenzwert angenommen wird oder nicht. Diese Folge wird als Beispiel dafür herangezogen, dass der Grenzwert nie angenommen werden muss. Die Studierenden stellen auch

Phase	Folge
1	-
2	$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases} ?$ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$
3	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases} ?$
4	-
5	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
6	-
7	$\left((d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases} \right)$
8	-
9	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
10	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

Tabelle 6.3: Übersicht über die verwendeten Folgen bei Gruppe 3

fest, dass der Grenzwert angenommen werden darf. Sie beziehen sich dabei definitiv auf die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für $200000 \leq n \leq 500000$ -3 entspricht und sonst konstant 1 ist, und vermutlich auf die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für $n \leq 125$ durch den Term $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ und ansonsten durch $b_n = 1$ definiert ist. Davon abgesehen haben sie diese beiden Folgen nicht erwähnt. Auch auf die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehen sie lediglich einmal ein. Das geschieht in Phase 3, als sie über „Ausnahmen“ sprechen. Diese Folge, deren zehntes Folgenglied 2 entspricht und die ansonsten durch $f_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert ist, hat lediglich eine „Ausnahme“, die „am Anfang“ ist. Sie argumentieren sinngemäß in ihren Worten, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt. In diesem Zusammenhang gehen sie sehr wahrscheinlich auch auf die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein. Die Folgenglieder sind für Vielfache von 10 exakt 1 und für alle anderen Zahlen entsprechen sie $1 + \frac{1}{n}$. Die Studierenden argumentieren, dass in diesem Fall die Folgenglieder, für welche die

Definition nicht durch denselben Term gegeben ist wie für die übrigen Folgenglieder, 1 entsprechen und daher könne dennoch von einer Annäherung an 1 gesprochen werden. Außerdem benutze ich selbst diese Folge, um die Studierenden dazu anzuregen, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Auf diese Intervention wird bei der Leitfrage 3. b) v. noch eingegangen. Als einziges vorgegebenes Nicht-Beispiel wurde die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mehrfach explizit erwähnt, und zwar, um das Nicht-Beispiel von den Beispielfolgen abzugrenzen.

Von der Quantität abgesehen kann noch mehr über die Bedeutung der einzelnen Folgen für den Erkenntnisprozess vermutet werden. Es war sicherlich wichtig, dass mindestens eine schließlich konstante Folge dabei war, da das „Erreichen“ des Grenzwerts ein Aspekt war, über den sie länger diskutiert haben. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ war von Bedeutung für die Erkenntnis, dass es sich bei Konvergenz um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Das Vorhandensein (mindestens) eines Nicht-Beispiels war selbstverständlich auch wichtig, um überhaupt eine Abgrenzung vornehmen zu können. Weiterhin ist noch zu erwähnen, dass die Studierenden selbst ein weiteres Beispiel in den Nacherfindungsprozess eingebracht, und zwar die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Die Menge der Folgen als Ganzes hat bei dieser Gruppe dafür gesorgt, dass die gewünschten Vorstellungen zu konvergenten Folgen entwickelt wurden. Das Konzept wäre möglicherweise auch dann erfolgreich gewesen, wenn auf einzelne Folgen verzichtet worden wäre. Unbedingt beibehalten werden sollten die Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Außerdem sollte zu jeder der folgenden Klasse konvergenter Folgen weiterhin ein Beispiel vorhanden sein, das die jeweilige Klasse repräsentiert: Folgen, die nicht durch einen einzigen Term definiert sind; Folgen, die den Grenzwert zwischendurch annehmen; schließlich konstante Folgen; Folgen, die den Grenzwert nie annehmen; monotone Folgen; nicht-monotone Folgen; Folgen, bei denen es keinen Index gibt, ab dem sie monoton sind; Folgen, bei denen sich ein oder mehrere endlich viele Folgenglieder anders verhalten als die übrigen und Folgen, bei denen sich das Verhalten der Folgenglieder erst ab einem verhältnismäßig großen n verändert. Des Weiteren ist zu überlegen, ob die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, welche die Studierenden selbst hinzugezogen haben, in die Menge der Beispielfolgen aufgenommen werden sollte.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Wie gerade bei der vorherigen Leitfrage bereits erwähnt beziehen die Studierenden eine zusätzliche Folge in ihre Diskussion mit ein: die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ in Turn 16. Das kann ein Hinweis darauf sein, dass den Studierenden bewusst ist, dass es nicht darum geht, eine Eigenschaft zu formulieren, die lediglich für die vorgegebenen Folgen geeignet ist, sondern dass eine allgemeinere Charakterisierung gesucht ist. Diese These lässt sich dadurch stützen, dass die Gruppe auch zu keinem Zeitpunkt etwas formuliert, was nicht allgemein ist. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Studierenden die Beispiele tatsächlich generisch auffassen.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Ab Turn 54 formuliert die Gruppe die Eigenschaft nicht durch eine einzige Bedingung, sondern durch zwei Bedingungen, die sie durch „oder“ verbinden:

Die Eigenschaft ist, dass es irgendwann nur noch einen Wert annimmt oder sich einem Wert annähert.

Dabei handelt es sich ebenfalls um eine im Vorfeld erwartete Problemstelle, die in Tabelle 4.2 unter Situation (C) beschrieben ist. Da die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – je nachdem was unter „annähern“ verstanden wird – streng genommen die formulierte Eigenschaft nicht erfüllt, da sie keine der beiden einzelnen Bedingungen, die durch „oder“ verbunden sind, erfüllt, könnte diese Problemstelle alternativ auch unter Situation (B) eingeordnet werden. Den Studierenden ist bei dieser Formulierung in jedem Fall nicht bewusst, dass sie problematisch ist. Es handelt sich somit um ein *Problematic Issue*.

Zunächst entscheide ich mich dazu, sie in Turn 180 auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{aufmerksam zu machen, da die formulierte Eigen-}$$

schaft auf diese Folge nicht zutrifft. Eine derartige Intervention war für Situation (B), die dadurch gekennzeichnet ist, dass eine formulierte Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft, vorgesehen. Sie antworten darauf, dass bei dieser Folge beides zutrifft, „also das sich gleich x annähern und x ist bei jedem Vielfachen von zehn“ und eine andere Studentin ergänzt „kein ausschließendes oder“. Streng genommen löst dieser Vorschlag das Problem nicht direkt, da die Studierenden unter „annähern“ verstehen, dass der Wert 1 nie erreicht wird, und die Folge somit nicht beide Bedingungen erfüllt, sondern keine der beiden. Eine Formulierung, die auf dem Vorschlag der Studierenden aufbaut und die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit einschließt, könnte beispielsweise sein, dass die Folgen irgendwann nur noch einen Wert annehmen oder sie sich einem Wert annähern oder dass es sich bei den Folgen um eine Mischform beider genannter Typen handelt. Da ein solcher Impuls, dass die Formulierung auf $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft, nicht zielführend gewesen wäre, bin ich nicht weiter darauf eingegangen.

Stattdessen habe ich die für Situation (C) vorgesehene Intervention eingesetzt, indem ich die Gruppe in Turn 191 aufgefordert habe, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. In diesem Moment wird aus dem *Problematic Issue* ein *Problem*. In Phase 9 versuchen sie, dieser Aufforderung nachzukommen. Die Gruppe scheint also zu akzeptieren, dass ihre Formulierung noch verbessert werden soll, was als Erfolg der Intervention gewertet werden kann. Um zu einer Lösung zu gelangen reicht die Intervention bei diesen Studierenden jedoch nicht aus. Daher habe ich in Turn 261 als nächste für diese Situation vorgesehene Intervention die 2. fiktive Diskussion ausgegeben.

2. fiktive Diskussion

Die fiktive Diskussion wird hier nicht noch einmal dargestellt, sie ist in Abschnitt 4.2.4 zu finden. Ziel dieser Intervention ist, dass die Studierenden Abstände der Folgenglieder zum Wert 1 beziehungsweise Umgebungen um 1 betrachten und auf diese Weise eine Charakterisierung mit nur einer einzigen Bedingung formulieren.

Zu dem Zeitpunkt, zu dem ich der Gruppe die zweite fiktive Diskussion aushändige, haben die Studierenden die Eigenschaft in der Art „Eine Folge heißt konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge x annimmt oder sich x annähert.“ notiert. Die Formulierungen der einzelnen Gruppenmitglieder weichen dabei leicht voneinander ab. Die Studierenden haben vergeblich versucht, „annähern“ genauer zu definieren und die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Eine zusätzliche Intervention scheint an dieser Stelle sinnvoll zu sein. Bei der fiktiven Diskussion war vorgesehen, dass die Studierenden jeweils einen Abschnitt lesen bis eine fettgedruckte Frage auftaucht. Über diese Frage sollten sie diskutieren, ihre Antwort notieren und dann weiterlesen.

Gruppe 3 hat auch tatsächlich so begonnen, sie haben den ersten Abschnitt, der nach einer kurzen Einführung aus einer einzigen Aussage besteht, gelesen. Ob sie auch die erste Frage gelesen haben, ist nicht ganz klar. Anschließend hat ein Großteil der Gruppe ab Turn 265 sehr lange diskutiert. Die fiktive Aussage über „Schläuche“ hat bei den Studierenden anscheinend Erinnerungen an Vorlesungsinhalte hervorgerufen. Insbesondere sprechen sie plötzlich von ϵ -Umgebungen. Sie formulieren mündlich, dass der Abstand der Schlauchkante(n) zu 1 größer sein muss als der Abstand des Punktes zu 1 und irgendetwas soll dabei beliebig sein. Lediglich eine Studentin liest währenddessen alleine die fiktive Diskussion weiter, da sie zu den Aussagen ihrer Kommilitonen nichts beisteuern kann. Ob sie diese lediglich durchliest oder sich auch Gedanken über die Fragen macht, wird nicht deutlich. Ab Turn 323 beschäftigen sie sich wieder alle mit der fiktiven Diskussion. Sie gehen die einzelnen Fragen durch und stellen dabei fest, dass sie einiges davon bereits durchgeführt beziehungsweise diskutiert haben. Über die übrigen Fragen denken sie nun nach. Dazu gehört insbesondere die Frage, wie viele „Schläuche“ betrachtet werden müssen. Außerdem entnehmen die Studierenden der fiktiven Diskussion die Idee, die Variable n_0 einzuführen, so dass zu einem festen ϵ alle Folgenglieder, deren Index mindestens so groß ist wie n_0 , sich innerhalb der ϵ -Umgebung befinden.

Manche der Abschnitte aus der fiktiven Diskussion finden die Studierenden allerdings laut eigener Aussage verwirrend. Dazu zählt insbesondere die fiktive Aussage im neunten Abschnitt: „Die breiten, die alle Folgenglieder enthalten, sind nicht wichtig. Sollten wir einfach alle Schläuche betrachten?“. Die Studierenden finden es unlogisch, dass einerseits gesagt wird, dass die breiten Streifen nicht wichtig seien und andererseits vorgeschlagen wird, alle Streifen zu betrachten. Dies widerspricht sich ihrer Meinung nach. Diesen Abschnitt überspringen sie daher.

Nachdem sie die fiktive Diskussion bis zum Ende durchgearbeitet haben, sind die Studierenden der Definition der Konvergenz gegen 1 schon sehr nah. Lediglich die Formulierung „Man findet immer ein kleineres ϵ “ entspricht nicht ganz der üblichen formalen $\epsilon - N$ -Definition. Aus den mündlichen Äußerungen lässt sich diese Formulierung deuten: Die Studierenden haben eine dynamische Vorstellung von immer schmaler werdenden ϵ -Schläuchen. Sie hatten zuvor auch erkannt, dass unendlich viele Schläuche betrachtet werden müssen. Diese Vorstellung scheint nicht hinderlich zu sein.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die fiktive Diskussion zu neuen Erkenntnissen bei der Gruppe geführt hat, auch wenn sie nicht immer strikt so vorgegangen sind, wie es vorgesehen war. Außerdem haben die Studierenden selbst die fiktive Diskussion in Turn 501-506 als hilfreich bewertet. Nach dem Durcharbeiten war lediglich eine kleinere Umformulierung nötig, bis die gesuchte Eigenschaft adäquat formuliert war. Somit kann der Einsatz dieser Hilfestellung insgesamt als erfolgreich bewertet werden. Offen ist jedoch, wie der Erkenntnisprozess ohne Vorkenntnisse zu ϵ -Umgebungen verlaufen wäre. Außerdem sollten insbesondere an der Stelle, die von den Studierenden als verwirrend bezeichnet wurde, Überarbeitungen vorgenommen werden.

v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Wie bei der vorherigen Leitfrage bereits berichtet, haben die Studierenden als zweite Version der Charakterisierung formuliert, eine Folge heiße konvergent gegen einen Wert x , wenn für n gegen Unendlich die Folge gegen x laufe oder gleich x sei. Abgesehen von den zuvor bereits beschriebenen Schwächen ist diese Formulierung nicht genau genug, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können. Das ist den Studierenden jedoch nicht bewusst. In Phase 5 wollen sie das Nicht-Beispiel noch von den übrigen vorgegebenen Folgen abgrenzen. Ein Student fragt in Turn 120, ob das die Aufgabenstellung gewesen sei und eine Kommilitonin fragt nach, ob sie denn etwas aufschreiben müssten. Die Mehrheit der Gruppe ist dann der Meinung, dass sie fertig seien. Sie haben die Aufgabenstellung vermutlich nicht derart aufgefasst, dass die formulierte Eigenschaft als Entscheidungsregel dienen können soll. An dieser Stelle habe ich keine Intervention eingesetzt, die für die Situation einer ungenauen Formulierung vorgesehen war, sondern ich habe wie bereits beschrieben Unterstützungsangebote ausgewählt, die für die übrigen Mängel der Charakterisierung geplant waren.

Nach dem Durcharbeiten der zweiten fiktiven Diskussion zeigt sich noch eine weitere Problemstelle. Die Studierenden formulieren Folgendes:

„Man findet immer ein kleineres Epsilon, so dass man ein n_0 hat, für den alle Nachfolger, also alle weiteren Punkte, in diesem Schlauch drin sind.“

Diese Problemstelle lässt sich nicht eindeutig einer der im Vorfeld erwarteten Situationen zuordnen. Die Schwierigkeit scheint an dieser Stelle bei der Präzision der Formulierung zu liegen. Erklären lässt sich diese Problematik auch mit den Variablenaspekten nach Malle (1993, S. 79ff.). Die Studierenden scheinen die Variable ϵ als beliebige Zahl größer als Null in Form des Veränderlichenaspekts aufzufassen. Sie betrachten verschiedene Werte von ϵ in einer zeitlichen Abfolge und gehen dabei auf die Veränderung ein. Bei der üblichen $\epsilon - N$ -Definition hingegen repräsentiert ϵ in Form des Simultanaspekts alle Zahlen größer als Null gleichzeitig. Den Studierenden ist nicht bewusst, dass an ihrer Formulierung noch Änderungsbedarf besteht. Daher lässt sich diese Problemstelle als *Problematic Issue* einordnen. Es ist aber auch anzumerken, dass diese Formulierung nicht hinderlich in Bezug auf den Aufbau adäquater Vorstellungen zu sein scheint.

Für eine derartige Situation war keine Intervention vorgesehen. Durch Nachfragen habe ich den Eindruck bekommen, dass die Vorstellungen, welche die Studierenden entwickelt haben, adäquat sind, und sie lediglich an der Ausformulierung scheitern. Ich entscheide mich schließlich dazu, ihnen eine Umformulierung vorzuschlagen. Mit dieser Umformulierung sind die Studierenden sofort einverstanden, was darauf hindeutet, dass diese zu den aufgebauten Vorstellungen passt.

Bei dieser Gruppe gibt es somit Hinweise darauf, dass die Aufgabenstellung und die vorbereiteten Unterstützungsangebote optimiert werden könnten. Zum einen ist den Studierenden nicht bewusst geworden, welchen Anforderungen die von ihnen formulierte Eigenschaft genügen soll. Zum anderen ist eine Problemsituation aufgetreten, für die kein Unterstützungsangebot vorbereitet war. Auf mögliche Veränderungen wird nach der Analyse der Erkenntnisverläufe aller vier Gruppen eingegangen.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

Diese Gruppe notiert von Beginn an ihre vorgeschlagenen Charakterisierungen schriftlich. Es war somit keine Aufforderung zum Verschriftlichen nötig. Außerdem bildet das Aufschreiben keine eigene Phase innerhalb des Nacherfindungsprozesses. In Bezug auf diesen Aspekt sind die Studierenden somit derart vorgegangen, wie es in den hypothetischen Verläufen formuliert wurde.

Zu einer Optimierung der ersten notierten Charakterisierungen musste die Gruppe aufgefordert werden, wie bereits bei der vorherigen Leitfrage berichtet wurde. Sie selbst haben die aufgeschriebene Formulierung nicht als Zwischenergebnis, sondern als Endergebnis angesehen. Beim Verschriftlichen selbst haben die Studierenden die mündlich formulierte Eigenschaft nicht verändert. Bei dieser Gruppe kommt dem Aufschreiben daher keine große Bedeutung zu.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

Auf diese Leitfrage wird erst eingegangen, wenn die Erkenntnisverläufe aller vier beobachteter Gruppen dargestellt wurden.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Die bisherigen Analysen zu dieser Gruppe sollen nun berücksichtigt werden, um den Erfolg der Nacherfindung der Definition einzuschätzen. Ohne Interventionen wären die Studierenden dieser Gruppe vermutlich nicht zu einer Charakterisierung gelangt, die mich

zufriedengestellt hätte. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Nacherfindung nicht erfolgreich war, denn die Interventionen waren im Vorfeld geplant und bilden einen Teil des Gesamtkonzepts. Die Menge der vorgegebenen Folgen als Ganzes und die eingesetzten Interventionen haben den Aufbau adäquater Vorstellungen gefördert und Fehlvorstellungen entgegengewirkt. Ihr eigenes Ergebnis lautet wie folgt:

Man findet immer ein kleineres ϵ , so dass es ein n_0 gibt, für das alle weiteren Punkte im Schlauch der Breite 2ϵ liegen.

Diese Charakterisierung ist im Vergleich zur üblichen Definition deutlich weniger formal, weist jedoch keine expliziten Widersprüche zu dieser auf. Somit kann auch bei dieser Gruppe die Nacherfindung insgesamt als erfolgreich bewertet werden. Ich mache ihnen im Anschluss den Vorschlag, den Ausdruck „man findet immer ein kleineres ϵ “ durch „für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ “ zu ersetzen. Diesen Vorschlag nehmen sie sofort an.

6.2.7 Gruppe 4: Tatsächlicher Verlauf

Diese Gruppe besteht lediglich aus drei Personen, und zwar aus Tim (T), Doreen (D) und Merle (M). Zwischendurch mischen sich außerdem Personen aus anderen Gruppen mit ein, diese sind mit X bezeichnet. Da sich die Stimmen der beiden Studentinnen sehr ähneln, war es nicht immer möglich, aus den Audioaufnahmen zweifelsfrei festzustellen, von wem die Äußerung stammt. Auf Analysen auf der Ebene des Ergebnisses der Gruppe als Ganzes hat dies keinen Einfluss.

Phase 1: Entwicklung einer ersten Charakterisierung

In der ersten Phase argumentieren die beiden Studentinnen von Anfang an auf Basis der vorgegebenen Folgen während Tim zunächst seine Vorkenntnisse zu Konvergenz aktiviert. Gemeinsam entdecken sie dann erste Gemeinsamkeiten und notieren eine erste Version der Charakterisierung.

Zu Beginn der Diskussion betrachtet Doreen zunächst die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ und das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$.

2 D: *Aber es ist komisch irgendwie, ne (fragend)?! Weil hier, die haben die gleichen, ähm ... Bedingungen ... d und x*

Unter „gleichen Bedingungen“ könnte sie verstehen, dass beide Folgen für Vielfache von 10 konstant sind und für alle übrigen natürlichen Zahlen durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind. Sie wundert sich anscheinend darüber, dass von den beiden Folgen, die für sie so ähnlich aussehen, die eine konvergent gegen 1 ist und die andere nicht. Ihr fällt kurz darauf selbst eine Erklärung ein:

6 D: *Achso, aber weil der Grenzwert von dem eins plus eins durch n ist eins und nicht zwei*

Die Studentin könnte mit dieser Aussage darauf hinaus wollen, dass bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ der Wert, dem die Folgenglieder für Vielfache der 10 entsprechen, mit dem Grenzwert der Teilfolge für die übrigen natürlichen Zahlen übereinstimmt, während das bei der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ nicht der Fall ist.

Anschließend diskutiert die Gruppe darüber, welche der Beispielfolgen als konvergent vorgegeben sind und welche nicht:

15 T: *Genau (...) Moment ... sieben ... sieben konvergiert doch nicht, oder?*

16 M: *Ja, aber zwei auch nicht ... das ist auch ausgeklammert*

17 D: *Ne (verneinend), aber, aber sie sagt, dass alle konvergieren bis auf die Letzte*

18 T: *Alle konvergieren?! Auch diese hier?*

19 D: *Alle ... ja*

20 M: *Zwei ja nicht*

Da die Studierenden die Folgen mit den Nummern bezeichnen, mit denen die entsprechenden Grafiken durchnummeriert sind, ist davon auszugehen, dass sie in dem Moment die Grafiken der Folgen betrachten. Bei der Grafik mit der Nummer 2 handelt es sich um das Nicht-Beispiel. Tim scheint an dieser Stelle seine Vorkenntnisse zu Konvergenz abzurufen. Darauf basierend hat er Zweifel daran, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in der siebten Grafik abgebildet ist, konvergiert. Dabei handelt es sich um die Folge, die für $200000 \leq n \leq 500000$ durch -3 und für alle übrigen natürlichen Zahlen durch 1 definiert ist. Eine Begründung für seine Zweifel nennt der Student nicht. Seine Kommilitoninnen reagieren darauf:

22 M: *Ja zum Schluss bleibt sie ja auf eins*

23 D: *Ja, für n gegen Unendlich konvergierts schon*

24 M: *Es bleibt dann ja nur noch bei eins*

25 T: *Achso*

26 D: *Oder? Es ist immer nur spannend was passiert, wenn n ganz groß wird*

Doreen ist anderer Meinung als Tim und auch Merle unterstützt Doreen, auch wenn sie sich nicht ganz sicher zu sein scheint. Mit ihrer Aussage, dass nur „spannend“ ist, was für große n passiert, will sie bezogen auf die gerade betrachtete Beispielfolge vermutlich aussagen, dass die Folgenglieder für $200000 \leq n \leq 500000$ in Bezug auf die gesuchte Eigenschaft nicht wichtig sind. Doreen scheint bereits erkannt zu haben, dass es sich um eine infinitäre Eigenschaft im Sinne von Mangoldt und Knopp (1980) handelt. Ob Tim die Argumente tatsächlich überzeugt haben, wird nicht ganz deutlich:

27 T: *Wie sieht denn nochmal sieben aus... Minus eins drei... ((U))*

28 D: *Bitte?*

29 T: *Warum k dahinter?*

30 D: *Konvergiert*

31 T: *Achso ... okay*

32 M: *Was sollen wir jetzt machen?*

Tim betrachtet erneut die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Grafik mit der Zahl sieben nummeriert ist. Möglicherweise schaut er auch auf die algebraische Definition dieser Folge. Anscheinend blickt er dabei auf den Ausdruck von Doreen, die sich alle Beispielfolgen, die als konvergent vorgegeben sind, mit dem Buchstaben „k“ dahinter markiert hat, was Tim erst irritiert. Merle weiß nicht, was sie machen sollen. Sie bekommt keine explizite Antwort auf diese Frage. Es folgt eine erste mündliche Formulierung:

34 T: *Ja, das konvergiert heißt sozusagen, irgendwas, so-*

35 M: *So wie der Grenzwert*

36 T: *...dass sich das daran anschmiegt. Weil hier ist das dann fast eins ... und wird dann ja-*

Bei dieser Charakterisierung scheint sich Tim erneut auf seine Vorkenntnisse zu beziehen. Für den Studenten konvergiert eine Folge, wenn sich die Folgenglieder einem Wert „anschmiegen“. Möglicherweise hat er deshalb an der Konvergenz der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gezweifelt, weil diese sich der 1 nicht anschmiegt, sondern irgendwann konstant 1 ist. Die Gruppe vermutet, dass sie nun herausfinden sollen, was die Eigenschaft Konvergenz bedeutet:

38 T: *Und wir haben den Grenzwert noch gar nicht definiert*

39 D: *Ja, wir wissen auch noch nicht, was Konvergenz ist, oder?*

40 T: *Ja, das stimmt*

41 M: *Aber vielleicht sollten wir jetzt, ähm ... quasi-*

42 D: *Herauskriegen*

43 M: *Ja*

Sie scheinen sich an dieser Stelle darüber einig zu sein, dass sie herausfinden sollen, was Konvergenz beziehungsweise Grenzwert bedeutet.

Anschließend formulieren die Studierenden die gesuchte Eigenschaft erneut mündlich:

44 D: *Das hat irgendetwas damit zu tun ... für großes n, oder nicht?*

45 T: *Genau*

46 D: *Ein riesengroßes n*

47 T: *Geht die Folge gegen einen Wert oder ist ein Wert*

Hier ist nicht ganz klar, ob die Gruppe wie zuvor auf Basis ihrer Vorkenntnisse eine Charakterisierung formuliert oder ob sie tatsächlich eine gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen formuliert.

Doreen stellt dann noch einmal heraus, warum der letzte Teil der Formulierung („oder ist ein Wert“) ihrer Meinung nach wichtig ist:

51 D: *Weil mit diesem ist hast du nämlich auch diese fünf da drin*

52 M: *Ja*

53 D: *Weil da ist es ja immer schon auf eins*

54 T: *Genau ... das wäre auch hier dieses, äh*

55 D: *Ja*

56 M: *Ja (lacht)*

57 D: *Oder das*

Sie und ihre Kommilitonen beziehen sich dabei vermutlich auf die drei Beispielfolgen

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ und

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$, die den Wert 1 annehmen. Auf jeden Fall

argumentiert die Gruppe hier auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen.

Dann kommen sie auf das Nicht-Beispiel zu sprechen:

58 T: *Und was müssen wir bei zwei? Da würds ja immer gegen ... für ein endliches n, auch ein unendliches, also auch irgendwann wieder zwei geben*

59 D: *Ja*

Vermutlich möchte Tim hier deutlich machen, warum diese Folge die von ihnen formulierte Eigenschaft nicht erfüllt.

Die Gruppe ist der Meinung, dass sie nun fertig ist:

60 M: *Sind wa fertig, erst mal nen Keks*

(lachen)

61 T: *Halten wir erst mal unser Ergebnis fest. Was habe ich nochmal gesagt?*

Sie diskutieren und schreiben nun gleichzeitig:

62 D: *Für große n (...) ist oder bleibt*

63 T: *Geht oder-?*

64 M: *Geht, geht*

- 65 T: *Geht gegen*
- 66 D: *Oder ist*
- 67 T: *Oder ist*
- 68 D: *Oder hat*
- 69 M: *Oder bleibt gleich*
- 70 T: *Also du musst ja jetzt-*
- 71 M: *Dass es ist*
- 72 T: $((U))$
- 73 M: *Also entweder ... geht es gegen oder es ist ... oder?*
- 74 D: *Ja*
- 75 T: *Geht gegen ... oder ist*
- 76 M: *Ein Wert*
- 77 T: *Ja*
- 78 M: *Ein fester Wert, ja*
- 79 T: *Geht... $((U))$... oder ist*
- 80 M: *Oder $((U))$... ist ein Wert*
- 81 T: *Ein fester Wert*

Sie stimmen sich über einzelne Formulierungen ab und schreiben ihr erstes Ergebnis auf.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 1) *Für große n geht a_n gegen einen festen Wert oder ist ein fester Wert.*

Die gesamte Gruppe scheint mit dieser Formulierung einverstanden zu sein. Merle und Do-reen beziehen sich von Beginn an auf die gegebenen Beispielfolgen während Tim zunächst auf Basis seiner Vorkenntnisse argumentiert. Zum einen entdecken die Studierenden in dieser Phase, dass es sich bei der gesuchten Eigenschaft um eine infinitäre Eigenschaft handelt. Zum anderen bemerken sie, dass der feste Wert 1 erreicht werden kann, aber nicht erreicht werden muss.

Phase 2: Eigenständige Überarbeitung und Ergänzung der Charakterisierung

Nun entsteht eine Eigendynamik, die Studierenden versuchen, ihre Charakterisierung eigenständig zu verbessern. Manche Gruppenmitglieder scheinen außerdem zu versuchen, möglichst viele gemeinsame Eigenschaften der vorgegebenen Folgen zu finden.

Doreen hat einen Einwand bezüglich der Charakterisierung 1:

82 D: *Für große n ist ein bisschen-*

(lachen)

83 T: *Wie bitte? Habe ich das geschrieben?*

84 D: *Ja, eigentlich müsste man schreiben: Für n gegen Unendlich*

Was genau sie an der Formulierung „für große n “ stört äußert sie nicht, doch sie schlägt vor, stattdessen „für n gegen Unendlich“ zu schreiben. Merle bringt eine weitere Änderung oder Ergänzung ein:

86 M: *Die Folge von allen n Elementen aus N*

87 D: *Was?*

88 M: *Oder? Für Folgen aus allen n Elementen N ... also n , klein n , egal*

89 T: *Ja, $((U))$ istn Mathematiker, ja, unsere Grammatik ist nicht so wild (lacht) Jeder weiß, was gemeint ist*

Möglicherweise möchte Merle in der Formulierung der Eigenschaft a_n ersetzen durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie kann jedoch nicht präzise genug ausdrücken was sie meint, Doreen versteht sie anscheinend nicht. Bei Tims Äußerung lässt sich nicht feststellen, ob sie sich noch auf Doreens vorige Kritik des Ausdrucks „für große n “ oder auf Merles Vorschlag bezieht. Vermutlich möchte er sagen, dass die grammatikalische Korrektheit der Formulierung nicht so wichtig ist. Dann scheint er seine Meinung jedoch zu ändern:

92 T: *Ich will das fast nochmal anders schreiben ... $((U))$ das geht gegen ... einen festen Wert oder ist ein fester Wert? $((U))$ auf Deutsch korrekt*

Anschließend zeigt sich, dass Merle noch mit einem vorherigen Schritt beschäftigt ist:

93 M: *Kann man da nicht noch, ähm ... differenzieren, in manchen Feldern-, Fällen erreicht er diesen Wert und bei manchen nicht. Oder meintest du das eben grad und ich hab's einfach so wiederholt und als meine Idee verkauft?*

94 T: *Richtig*

(lachen)

Die Studentin spricht hier explizit von einer Differenzierung. Die Folgen, die den Grenzwert erreichen und solche, die das nicht tun, werden von ihr als verschiedene Fälle angesehen.

Sie diskutieren erneut über einzelne Fragmente der Formulierung:

96 T: *Oder wird ein fester Wert, halt ist-*

97 M: *Oder bleibt*

98 T: *Oder bleibt, oder?*

99 D: *Ist oder bleibt oder hat oder ((U)) oder möchte
(lachen)*

100 T: *Bleibt ... ist ... ((U)) der Wert (...) oder bleibt auf*

101 M: *Wird zu oder*

102 T: *Wird zu ... ja, eine Folge wird zu einem Wert*

103 M: *Ist doch so*

104 T: *Die bleibt auf einem Wert ((U))*

Sie sind sich anscheinend nicht sicher, welcher der Ausdrücke für eine Folge adäquat ist. Tim bringt anschließend einen neuen anderen Vorschlag ein:

105 T: *Wir könntens, ähm ... was wir ja schon kennengelernt haben ist die Umgebung.
Vielleicht mit der Umgebung, ähm, argumentieren*

106 D: *Ich habe keine Umgebung kennengelernt*

107 M: *Ich auch nicht*

(lachen)

108 T: *Epsilon, äh, Epsilon ist Umgebung von-, das hatten wir zum Beispiel in Grundlagen der Geometrie kennengelernt. Zum Beispiel bei der Stetigkeit. Das war ein Exkurs*

Der Student hat in einer anderen Vorlesung, die seine beiden Kommilitoninnen nicht besucht haben, den Begriff der ϵ -Umgebung kennengelernt. Auf diesen Vorschlag gehen die anderen Gruppenmitglieder jedoch nicht direkt ein. In den Turns 109 bis 119 unterhalten sie sich darüber, wer von ihnen welchen Studiengang studiert.

Dann komme ich kurz hinzu:

Lehrperson kommt hinzu

120 D: *Wir haben die Gemeinsamkeiten noch nicht*

Doreen ist an dieser Stelle der Meinung, dass sie mit der Bearbeitung der Aufgabe noch nicht fertig sind.

Tim fragt nach, ob sie auch Begriffe einführen dürfen, die sie aus der Vorlesung noch nicht kennen:

121 T: *Laura, dürfen wir, ähm, den Grenzwert, beziehungsweise das Grenzwertverhalten Limes einführen oder dürfen wir nicht, weil wirs noch nicht kennen?*

Ich bejahe dies. Doreen lehnt dies jedoch ab:

124 D: *Ich schreib für große n ... ich habe keine Ahnung was der Limes ist*

Da ich den Eindruck habe, dass die Gruppe eigenständig weiterarbeitet, wende ich mich wieder von ihnen ab.

128 D: *Wenn n gegen Unendlich läuft, ist es ja definitiv ein fester Wert, also-*

129 M: *Nja, ein fester Wert ist er ja immer*

130 D: *Ja, jetzt noch nicht am Anfang, zum Beispiel für n gleich eins nicht*

Sie bleiben bei ihrer zuvor notierten Formulierung, verschärfen das „oder“ nun aber mündlich zu „entweder... oder“:

132 T: *Also, entweder es geht gegen einen festen Wert oder es ist ein fester Wert*

133 M: *Genau, ja*

134 T: *Und nicht beides, so-*

Sie schließen an dieser Stelle explizit aus, dass beide Bedingungen zutreffen. Das revidieren sie jedoch kurz darauf:

139 T: *Bei manchen Aufgaben ist es ja sogar beides, wie zum Beispiel bei d. Da schmiedet es sich sowohl an, als auch, äh, wird erreicht ... also ... ganz komisch*

140 M: *Bei fünf*

141 D: *Jaja, eben. Da ist es ja schon drauf oder es geht dahin. Und deshalb brauchen wir dieses ist oder*

142 T: *Es ist ein einschließendes oder, oder?*

Sie erkennen hier, dass die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$

keine der beiden einzelnen Bedingungen erfüllt, sondern es sich um eine Art Mischform handelt. In der schriftlichen Formulierung der Eigenschaft hatten sie den Ausdruck „entweder... oder“ gar nicht mit aufgenommen. Dort ergänzen sie jedoch noch etwas anderes:

146 D: *Dass es dann vielleicht eben dann auch noch immer bei eins anfängt wegen den natürlichen Zahlen?*

147 M: *Ne (verneinend), aber am Anfang wärs egal wo, oder?*

148 D: *Ja, aber wir sollen die Gemeinsamkeiten doch rausschreiben*

149 M: *Gemeinsamkeiten aller konvergenter Folgen*

150 D: *Ja, die hier abgebildet sind, ne (fragend)?!*

151 T: *Dachte wir müssen die Definition schreiben*

152 M: *Ja, da ist der Limes immer eins, oder? Weil ((U))*

153 D: *Dass der feste Wert immer eins ist*

154 M: *Ja, in dem Fall, aber das muss ja nicht immer eins sein*

155 D: *Aber wir sollen ja jetzt auch diese Gemeinsamkeiten, oder?*

156 M: *Okay, dann können wir ja auch schreiben*

Doreen möchte zunächst ergänzen, dass etwas immer bei 1 anfängt, was genau wird aus ihrer Äußerung nicht klar. Möglicherweise meint sie, dass die Indizes der Folgen jeweils bei 1 beginnen, da es sich um die natürlichen Zahlen handelt. Merle scheint sie eher so zu verstehen, dass das erste Folgenglied dem Wert 1 entspricht, was ihrer Meinung nach nicht der Fall sein muss. Unabhängig davon, was genau bei 1 anfängt, scheint Doreen zu versuchen, möglichst viele gemeinsame Eigenschaften zu finden. Sie bezieht sich dabei auf die vorgegebenen Beispielfolgen während Merle an alle konvergenten Folgen denkt. Tim hingegen deutet die Aufgabenstellung so, dass die Definition gefragt ist. Anscheinend gehört für ihn zu einer Definition nicht dazu, möglichst viele gemeinsame Eigenschaften zu finden.

Doreen schlägt anschließend noch vor, zu ergänzen, dass der „feste Wert“ 1 ist. Merle lehnt das zunächst ab, weil sie der Meinung ist, dass das nicht allgemein der Fall ist. Doreen weist jedoch darauf hin, dass laut Aufgabenstellung die gemeinsame Eigenschaft der vorliegenden Beispielfolgen formuliert werden soll, woraufhin Merle einverstanden ist, diesen Aspekt mit aufzunehmen.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 2) *Für n gegen Unendlich geht a_n gegen einen festen Wert oder ist ein fester Wert, in diesem Fall 1.*

In der gesamten Phase versucht die Gruppe eigenständig die Charakterisierung zu verbessern. Doreen schlägt vor, den Aspekt „für große n “ durch „für n gegen Unendlich“ zu ersetzen. Sie begründet dies nicht, doch die anderen scheinen einverstanden zu sein und es wird in der schriftlichen Formulierung verändert. Eine weitere Entdeckung, welche die Studierenden in dieser Phase machen, ist, dass es auch Beispielfolgen gibt, bei denen die Folge sich dem Wert 1 sowohl anschmiegt als auch diesen Wert annimmt. Ihrer Meinung nach sind in diesem Fall beide einzelnen Bedingungen aus ihrer Charakterisierung erfüllt. Diese Erkenntnis zeigt sich nicht in einer Veränderung der Charakterisierung, sie sehen diese dadurch eher bestätigt. Außerdem versuchen zumindest manche der Gruppenmitglieder, die Formulierung noch durch weitere gemeinsame Eigenschaften der Beispielfolgen zu ergänzen. Der Aspekt, den sie in ihrer schriftlichen Charakterisierung ergänzen, ist, dass es sich bei dem festen Wert hier immer um 1 handelt.

Phase 3: Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken

In dieser Phase zeigen Merle und Tim, dass sie weder das Bedürfnis verspüren, ihre Charakterisierung zu verändern, noch haben sie Ideen, wie sie dies tun könnten. Doreen hingegen kommt auf die Idee, die Differenz der Folgenglieder zum Wert 1 zu betrachten.

Ich komme hinzu und lese mir zunächst durch, was die Gruppe notiert hat:

- 159 L: *Okay, also ihr habt jetzt vorher hier gesagt, also ... im Prinzip son bisschen verschiedene Fälle ... euch angeguckt, ne (fragend)?! Und ihr habt gesagt entweder ... also es kann gegen diesen festen Wert, hier eins, gehen oder ... es bleibt ein fester Wert oder ihr habt-*

Da die Studierenden die Eigenschaft durch zwei Bedingungen, die durch „oder“ miteinander verbunden sind, ausgedrückt haben, fordere ich sie dazu auf, diese durch eine einzige Bedingung auszudrücken:

- 161 L: *Da ist irgendwie beides dabei ... kann man das vielleicht irgendwie-, durch eine Bedingung ausdrücken? Diese verschiedenen Sachen, die ihr jetzt -, diese verschiedenen Fälle?*

- 162 M: *Deswegen haben wir dieses oder, dieses mathematische oder, weil es dann und oder sein könnte*

- 163 D: *Ja, weil es wird ja manchmal erreicht oder nicht*

Zunächst haben die Studierenden weder das Bedürfnis, etwas zu ändern, noch eine Idee, wie sie die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausdrücken können, da es für sie zwei verschiedene Eigenschaften sind.

- 168 T: *Deswegen wie soll man das als eins ausdrücken ... außer vielleicht Limes, das ist halt ja-, ja ... Limes gegen-, von eins ist eins ((U)) ne (verneinend)*

- 169 M: *Das sind ja zwei unter-, also, was heißt unterschiedliche, aber einmal kommts wirklich an bei der eins ... und das ((U)) jetzt bei hier, ist es schon angekommen bei aufer eins ... und das andere Mal kommts ja eigentlich nie ganz an, ne (fragend), also bei-*

Sie sammeln gemeinsam Ideen:

- 174 M: *Sie brauchen mindestens den Wert, wo ... die restliche Folge gegen läuft, also-*

- 175 T: *Wir können ja sagen, dass-*

- 176 M: *Ausnahmen ... oder höchstens-*

- 177 T: *Die Folge-*

- 178 M: *Tschuldigung*

(lachen)

- 179 T: *Einen bestimmten Wert wieder sich wieder ((U))*

Dann kommt eine Studentin auf die Idee, Differenzen zu betrachten:

- 180 D: *Aber wir können mit ner Differenz irgendwie arbeiten. Dass die Differenz von, von der eins zu denen, die da vorkommen, immer kleiner wird ... dann ist es nämlich und dann kanns ja auch null sein*

Doreen bemerkt, dass in der Aussage, dass die Differenz der Folgenglieder zu 1 immer kleiner wird, der Fall enthalten ist, dass die Folgenglieder den Wert 1 erreichen, indem die Differenz den Wert 0 annimmt. Ihre Kommilitonen gehen zunächst nicht darauf ein.

Zwischenstand:

An der schriftlichen Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert. Merle und Tim scheinen auch weiterhin an der Charakterisierung 2 festzuhalten. Doreen hingegen hat den Vorschlag, die Differenz der Folgenglieder zu dem Wert 1 zu betrachten, die ihrer Meinung nach immer kleiner wird. Es handelt sich um eine einzige Bedingung, von der sie glaubt, dass sie beide zuvor betrachteten Bedingungen enthält.

Phase 4: Intervention: Wird die Differenz der Folgenglieder zu 1 bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wirklich immer kleiner?

Zu Beginn dieser Phase mache ich die Gruppe auf eine der Beispielfolgen aufmerksam, welche die von ihnen mündlich formulierte Charakterisierung nicht erfüllt. Sie bemerken, dass dies nicht nur bei dieser einen, sondern bei mehreren Beispielfolgen der Fall ist.

189 L: *Geht schon in eine ganz gute Richtung ... aber guckt nochmal, ob zum Beispiel bei dieser Folge wirklich die Differenz immer kleiner wird*

Ich bestärke die Gruppe in der Idee, die Differenz der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Allerdings wird diese Differenz nicht immer kleiner. Ich weise die Studierenden daher auf die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ hin, bei der das nicht der Fall ist.

190 M: *Von da, von da nach da wirds nicht kleiner, sondern erst wieder größer*

Merle erkennt an der Grafik, dass es bei dieser Folge Stellen gibt, an denen die Differenz zu 1 größer wird. Sie zeigt dabei auf eine Stelle, wo ein Folgenglied dem Wert 1 entspricht und das nächste Folgenglied durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert ist und somit größer als 1 ist.

193 D: *Aber diese Differenzen werden ja auch immer kleiner*

Doreen weist darauf hin, dass die Differenzen derjenigen Folgenglieder, die durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, zu 1 immer kleiner werden. Zunächst widmen sich die Studierenden nun der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$.

195 T: *Ja, aber das zum Beispiel ist ja dann ... fällt ja total aus der Reihe, also wenn man sich nur das betrachten würde*

Hier ist nicht ganz klar, wegen welchem Aspekt Tim der Meinung ist, dass diese Beispielfolge oder ein Teil dieser Folge aus der Reihe fällt. Seine Kommilitoninnen gehen in ihren Antworten auf zwei verschiedene Aspekte ein:

196 M: *Ja, aber wir gucken ja für große n*

197 D: *Ja, aber auch da würds ja eigentlich stimmen, ne (fragend) ... also ich meine ... hier das ist größer als das, ist größer als das, ist größer als das, ist-*

198 M: *Hier gegen Unendlich schon*

199 D: *Also der Betrag*

200 T: *Vielleicht, ja-*

Merle bezieht sich vermutlich auf den Aspekt, dass vom neunten zum zehnten Folgenglied der Abstand zu 1 nicht kleiner, sondern größer wird, aber ihrer Meinung nach erfüllt die Folge dennoch die Eigenschaft, weil diese nur für große n gelten muss. Doreen hingegen scheint zu glauben, dass ihr Kommilitone darauf hinaus wollte, dass alle Folgenglieder abgesehen von dem zehnten Folgenglied immer abwechselnd größer und kleiner als 1 sind. Das stellt ihrer Meinung nach kein Problem dar, da sie den Betrag der Differenzen betrachten würde und dieser dann in jedem Schritt kleiner wird. Im Anschluss kommt auch Doreen auf das zehnte Folgenglied dieser Folge zu sprechen:

201 D: *Aber was ist mit dem?*

Merle antwortet darauf:

204 M: *Das ist ja kein n was groß ist*

Der Aspekt, dass die Folgenglieder abwechselnd größer und kleiner als 1 sind, scheint geklärt zu sein. Nun befassen sich beide Studentinnen mit dem zehnten Folgenglied, dessen Abstand zu 1 größer ist als der des neunten Folgenglieds. Mit ihrer Aussage in Turn 204 meint Merle, dass der Wert 10 kein großes n sei. Aus diesem Grund scheint diese Beispielfolge die Charakterisierung ihrer Meinung nach zu erfüllen.

Zwischenstand:

Auch wenn die Gruppe hier keine neue Charakterisierung entwickelt hat, so haben sie in dieser Phase dennoch Erkenntnisfortschritte gemacht. Sie haben erkannt, dass bei mehreren der Beispielfolgen der Abstand zu 1 nicht in jedem Schritt kleiner wird. Das scheint hier auf alle Gruppenmitglieder zuzutreffen.

Phase 5: Diskussion darüber, was „große n “ sind

Es folgt eine Diskussion darüber, welche Zahlen „groß“ sind. Die Meinungen dazu sind unterschiedlich und es kommt zu keiner Einigung. Tim verwendet diesen Ausdruck weiterhin.

207 D: *Aber es könnte da auch stehn statt, äh, was ist denn das? Sechs? ... n gleich 7000000 ist es gleich zwei und dann wäre es 7000000 großes n ?!*

Die Studentin fragt, was wäre, wenn die Folge statt für $n = 10$ für $n = 7000000$ den Wert 2 annehmen würde. Für Merle scheint 7000000 nicht „groß“ zu sein:

208 M: *Ja, aber es gibt ja noch größere*

Kurz darauf ergänzen sie noch:

211 D: *Jaja, klar gibts immer größere, aber-*

212 M: *Ist ja nicht so wie hier, dass du jedes zehnte quasi-*

213 D: *Ja ... ja, nur für einen*

Der Unterschied, den die Studentinnen zur Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ feststellen, ist, dass bei dem Nicht-Beispiel nicht nur einmal der Wert 2 angenommen wird, sondern von jedem zehnten Folgenglied.

215 T: *Ja, aber was ist denn hier ran falsch wenn ich jetzt sag für große n Element N geht eine konvergente Folge gegen einen festen Wert oder bleibt auf einem festen Wert*

Tim hat kein Bedürfnis, an der Charakterisierung 2 etwas zu verändern. Da er den Ausdruck „für große n “ darin verwendet, über den seine Kommilitoninnen gerade diskutieren, greife ich diesen auf:

220 L: *Naja ... hier ist halt jetzt das Problem: wenn du ne Folge hast ... kannst du das damit überprüfen, ob die die Eigenschaft hat, weil da ist zum Beispiel, die eine Frage habt ihr jetzt auch grad diskutiert: was sind jetzt große n ? Wenn da zum Beispiel hier irgendwo steht 7000000, ist das ein großes n ?*

221 M: *Ne (verneinend)*

222 D: *Für alle nicht, für mich schon (lacht)*

Merle scheint sich sicher zu sein, dass 7000000 kein großes n ist, Doreen hingegen ist anderer Meinung.

Zwischenstand:

An der schriftlichen Charakterisierung hat sich auch in dieser Phase nichts geändert. Tim befürwortet weiterhin die Charakterisierung 2. Doreen scheint etwas zwiegespalten zu sein. Einerseits ist ihrer Meinung nach 7000000 ein großes n . Andererseits erkennt sie den Unterschied zum Nicht-Beispiel, bei dem immer wieder der Wert 2 angenommen wird und nicht nur ein einziges Mal. Merle hingegen scheint eine klare Vorstellung davon zu haben, was große n sind. Ein einzelner (endlicher) Wert ist kein großes n , weil es noch größere Werte gibt. Wird jeder zehnte Wert betrachtet, so ist dies etwas anderes. Möglicherweise meint sie damit, dass in dem Fall kein konkreter Wert angegeben werden kann, der größer ist als alle betrachteten Werte.

Phase 6: Erneute Betrachtung von Differenzen und Entwicklung der Charakterisierung 3

In dieser Phase erarbeitet die Gruppe als neue Charakterisierung, dass die Differenz der Folgenglieder zum Grenzwert gegen 0 geht. Über die genaue Formulierung wird eine Weile diskutiert.

Die Gruppe beschäftigt sich nun wieder mit den Differenzen der Folgenglieder zu 1:

227 M: *Die Differenz geht auch gegen null*

Dieser Vorschlag stößt bei den anderen beiden Gruppenmitgliedern auf Zustimmung.

232 D: *Also sie wird nicht einheitlich kleiner, also das is-, das ist ja, hmm ... zeigt ja diese Grafik, aber dass sie-, das war doch ganz gut, dass sie, dass die Differenz irgendwann mal gegen null geht... Und was meintest du dagegen?*

233 T: *Gar nichts ... du sagtestest was dagegen*

234 D: *Ich hab nichts dagegen gesagt (lacht) ... glaub ich ((U))*

Doreen meint mit ihrer Aussage vermutlich, dass die Differenz der Folgenglieder zu 1 nicht in jedem Schritt kleiner wird. Die von Merle vorgeschlagene Formulierung findet sie gut, Tim hat ebenfalls keine Einwände.

239 M: *Aber wenn wir sagen die Differenz geht gegen null*

240 D: *Genau. Also immer die Differenz vom Limes*

241 M: *Die Differenz von-*

242 D: *Von den anschmiegenden ... Folgen*

243 M: *Von den Werten zu dem Grenzwert ... weil wir gehe-, wenns gegen null geht, hier gehts ja gegen null, und bei den Punkten ist es schon null ... ((U))*

244 D: *Ja, zwischen der Folge, zwischen der Folge sozusagen, die gegen ... feste Zahl geht und die feste Zahl ist*

245 M: *Oder ist ein ((U)) ... ja, der Limes ist ja ne eins ... also, wir können ja sagen: weißte?! ... ähm*

246 D: *Ja, der Grenzwert zwischen Limes und-*

247 M: *Limes und Limes?*

248 D: *Und ... den Werten quasi*

Merle und Doreen sind sich einig, dass eine Differenz betrachtet werden soll und unterhalten sich darüber, welche Differenz dies sein soll. An dieser Stelle scheint es Schwierigkeiten in der Kommunikation zu geben. Möglicherweise bezeichnet Doreen mit den Begriffen „Limes“ und „Grenzwert“ verschiedene Dinge, während Merle die Begriffe synonym verwendet. Doreen bezeichnet mit „Limes“ die feste Zahl, gegen welche die Folge „geht“ beziehungsweise welche die Folge erreicht. Unter „Grenzwert“ scheint sie hingegen den Grenzprozess zu verstehen, bei dem die Differenz „gegen 0 geht“. Dass sie den Grenzwert der Differenz vom Limes und den Folgengliedern betrachten möchte verwirrt ihre Kommilitonin, da diese die Unterscheidung zwischen Grenzwert und Limes vermutlich nicht bemerkt. In ihrer Nachfrage in Turn 247 verändert sie den von Doreen verwendeten Begriff „Grenzwert“ zu „Limes“. Ihr ist außerdem aufgefallen, dass der Limes aller Beispielfolgen 1 beträgt, vermutlich möchte sie in Turn 245 vorschlagen, die Differenz der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Dass der Ausdruck „ $\lim_{n \rightarrow \infty} \dots$ “ gleichzeitig für zwei verschiedene Dinge

steht, und zwar einerseits für die Durchführung eines Grenzprozesses und andererseits für dessen Resultat, ist auch aus der fachdidaktischen Forschung bekannt. Blum und Törner sprechen diesbezüglich von einer „Doppelgesichtigkeit“ (Blum und Törner, 1983, S. 79), Bender von einer „Doppelnatur“ (Bender, 1991, S. 240). Doreen löst für sich diese doppelte Bedeutung durch die Benutzung zwei verschiedener Begriffe während Merle die Begriffe synonym verwendet und aber möglicherweise lediglich mit einer der beiden Bedeutungen, nämlich dem Grenzprozess, verbindet.

Merle möchte nun etwas aufschreiben und ist weiterhin etwas verwirrt über Doreens Vorschlag:

251 M: *Aber ... ähm ... f von n ... gegen Unendlich ... aber das ist ja blöd, wenn ich vom Gleichen das Gleiche abziehe*

und kurz darauf:

255 D: *Ich würd sagen: die Differenz*

256 M: *Ja, aber wie-, was ist der erste Wert von der Differenz?*

257 D: *Die Werte ... der Folge*

258 T: *Ah, ja, also (...) ein (lacht) ... alles mit a n machen*

259 M: *Ich weiß nicht wie ich das aufschreiben, aber-*

Ein Aspekt in diesem Ausschnitt ist, dass Merle eine Formulierung vorschlagen möchte, in der sie als Bezeichnung der (beliebigen) Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verwenden möchte, während Tim stattdessen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vorschlägt. Darauf geht zunächst keine seiner Kommilitoninnen ein. Was genau Merle mit „vom Gleichen das Gleiche“ abziehen meint, lässt sich auch aus den Reaktionen der anderen Gruppenmitglieder nicht eindeutig feststellen. Möglicherweise denkt sie bei Doreens Vorschlag an eine Schreibweise wie $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n)$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Sie scheint weder an dem vorderen $\lim_{n \rightarrow \infty}$ noch an der Differenz zu zweifeln, doch sie weiß nicht, welche Differenz sie notieren soll.

Tim wirft einen anderen Vorschlag ein:

260 T: *a n plus a n plus eins*

261 M: *Ist das das ((U))? ... Oder? Ja*

262 D: *Ja*

Die beiden Studentinnen gehen erneut nicht auf die Äusserung ihres Kommilitonen ein. Tim scheint bei der Diskussion zu diesem Zeitpunkt außen vor zu sein.

Merle geht erneut darauf ein, welche Differenz ihrer Meinung nach betrachtet werden soll:

269 D: *Aber wir können ja sagen: a n minus ... dem Limes ((U)) ja*

270 M: *Ja, das ist ja das-, das ist ja das, was ich schreibe ... also, ob jetzt a n oder f n oder g n oder h n oder-*

271 D: *Ja, man kann ja ... man kann ja jetzt d definieren und kann sagen: d ist gleich Differenz und dann kann ich dort sagen: d läuft gegen Unendlich und dann hab ich ja ... äh, also, das, ähm ... die Differenz zwischen einem festen Wert und n , äh, nähert sich an ... dem festen Wert an, läuft gegen null*

Als ihre Kommilitonin die Verwendung einer anderen Variablen für die Folgenglieder vorschlägt antwortet Doreen plötzlich, dass es egal sei, wie genau die Folgenglieder bezeichnet werden, während sie bei Tim überhaupt nicht darauf geantwortet hatte. Merle macht außerdem einen neuen Formulierungsvorschlag, möglicherweise weil sie merkt, dass Doreen noch nicht zufrieden ist. Sie schlägt vor, für die zu betrachtende Differenz die Variable d einzuführen. Doreen scheint zu verstehen, wie sie das meint:

272 M: *Ja, das ist ja das, was ich aufgeschrieben habe oder versucht hab zu schreiben ... das ist ja der feste Wert ... und ich will ja, dass dieser feste Wert-*

273 D: *Aber du hast ja nur n gegen Unendlich ist gleich null und das ist ja dann-*

274 M: *Minus ... minus den Grenzwert*

275 D: *Achso*

276 M: *Ich habe-, der, der feste-, das, was du aufgeschrieben hast, nur mit ... $((U))$ also, ne (Floskel), da nen fester Wert, das ist das hier*

277 D: *Hmhm (verstanden)*

Doreen ist zunächst der Meinung, dass ihr Vorschlag etwas anderes ist als das, was Merle notiert hat, doch ihre Kommilitonin meint, es sei das gleiche. Sie erläutert, welcher Teil ihrer Version welchem Teil von Doreens Version entspricht. Entweder hatte diese in Merles Formulierung den Teil „minus den Grenzwert“ überlesen oder Merle hat diesen erst nachträglich ergänzt.

Mindestens Doreen ist mit ihrem Ergebnis zufrieden:

284 D: *Ich find es gut so ... mit der Differenz*

Zwischenstand:

(Charakterisierung 3) *Für n gegen Unendlich geht $a_n - g$ gegen 0*

Merle hat die Charakterisierung 3 notiert. Doreen hingegen hat eine Variable d für die Differenz zwischen den Folgengliedern und dem Limes der Folge definiert. Die Variable d ist nicht mit einem Index versehen. Sie schreibt d geht gegen 0. Beide Studentinnen sind aber anscheinend der Meinung, dass ihre verschiedenen Formulierungen dieselbe Bedeutung haben. Über den Erkenntnisstand von Tim kann nichts gesagt werden, da dieser sich in dieser Phase fast gar nicht an der Diskussion beteiligt und wenn doch, dann gehen die beiden Studentinnen nicht darauf ein. Möglicherweise ist er weiterhin von der Charakterisierung 2 überzeugt.

Phase 7: Verwendung eines Buchs zur Überprüfung und Verbesserung der Charakterisierung

In dieser Phase vergleicht die Gruppe ihre erarbeitete Charakterisierung mit dem, was sie in einem Buch finden. Sie sind zunächst der Meinung, dass es fast dasselbe sei, ergänzen

dann Betragsstriche und ersetzen „geht gegen 0“ durch „wird beliebig klein“.

Sie haben ein Analysis-Buch dabei, in dem sie nun die Definition der Konvergenz einer Folge nachschlagen, um diese mit ihrer Formulierung zu vergleichen:

289 T: *Das heißt, meine Definition ... ((U)) irgendwas vergessen ... aber bestimmt gibts irgendeine Folge, die das nicht beschreibt ... obwohl ((U))*

290 M: *Können ja in deinem Buch gucken*

291 T: *Das ist (Name eines Studenten) Buch ((U))*

292 D: *Steht bestimmt irgendwann konvergent drin*

293 T: *Nein (lacht)*

294 M: *Ich habe auch ein Buch dabei, da ist's auch drin*

Tim scheint sich nicht ganz sicher zu sein und auch seine beiden Kommilitoninnen sind nicht abgeneigt, ihr Ergebnis mit der Definition aus dem Buch zu vergleichen. Sie finden schließlich eine Definition:

298 M: *Was steht denn da? Nicht konvergent, also ist jede konvergent... Hier*

299 D: *Hmhm*

300 M: *Ja, aber da waren wir gar nicht so schlecht*

Merle bewertet die eigenständig erarbeitete Charakterisierung als „gar nicht so schlecht“, das, was sie in dem Buch sieht, scheint für sie ähnlich zu sein. Tim kann anscheinend nicht sehen, was in dem Buch steht, und fragt nach:

303 T: *Ja (...) und, was sagt das schlaue Buch?*

304 D: *Ja, das sagt, dass der Betrag von-, eigentlich das, was wir geschrieben haben, nur da kommt der Betrag noch dazu ... der Betrag von ... von, äh, der Differenz ... a n minus a wird beliebig klein ... falls das n nur groß genug ist*

305 M: *((U)) von unten und oben kommen kann*

306 D: *Ja*

Ihnen fällt auf, dass im Buch der Betrag der Differenz betrachtet wird. Das ergänzen sie bei ihrer Formulierung. Merle scheint zu verstehen, warum die Betragsstriche verwendet werden und Doreen stimmt ihr zu. Davon abgesehen sind sie zunächst der Meinung, dass die Definition im Buch mit ihrer Formulierung übereinstimmt. Kurz darauf fällt ihnen, während sie schreiben, doch noch ein Unterschied auf:

310 T: *a n*

311 M: *Minus a*

312 D: *Minus*

313 T: *Minus ... dem komischen Wert, nennen wir ihn mal x*

314 D: *Der Grenzwert ist es*

315 T: *x Grenzwert*

316 D: *Geht gegen Une-*

317 T: *Geht gegen null*

318 D: *Beliebig klein, steht da*

Nun ersetzen sie in ihrer schriftlichen Formulierung den Ausdruck „geht gegen 0“ durch „wird beliebig klein“. Ob sie in der Bedeutung der beiden Ausdrücke tatsächlich einen Unterschied sehen, lässt sich hier nicht feststellen.

323 M: *Ja, hier steht aber, ähm, also a_n minus a , weil du hast ja dann Index n , das ist ja dann so gegen Unendlich ... wenn du den groß genug w -, w -, wirst, läuft's gegen ... gegen null*

324 D: *Ach, die machen das übern Index*

325 M: *Ja $((U))$*

326 T: *Was für'n Index?*

327 M: *Gegen Unendlich, also ... umso größer da unten die Zahl wird, umso kleiner wird-*

328 T: *Ah, ja*

Merle weist ihre Kommilitonen noch darauf hin, dass im Buch – wie auch in ihrer eigenen Formulierung – der Index n verwendet wird. Denise hatte bei ihrer notierten Definition die Variable d , die sie für die Differenz der Folgenglieder und deren Limes eingeführt hatte, nicht mit einem Index versehen. Tim weiß zuerst nicht, was damit gemeint ist, doch nach Merles Erläuterung scheint er es zu verstehen.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 4) *Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a|$ beliebig klein*

Die Erkenntnisse in dieser Phase haben die Studierenden nicht selbst erarbeitet, sondern aus einem Buch übernommen. Warum Betragsstriche verwendet werden, können sie sich erklären. Ob sie den Ausdruck „beliebig klein“ einfach nur übernommen haben, weil sie den Inhalten eines Buchs mehr vertrauen als dem, was sie selbst erarbeitet haben, oder ob sie diesen Ausdruck tatsächlich als Verbesserung gegenüber ihrer vorherigen Formulierung ansehen, wird hier nicht deutlich. Zwischen den einzelnen Gruppenmitgliedern herrscht nun mehr Übereinstimmung, sie verwenden lediglich verschiedene Variablen für den Grenzwert.

Phase 8: Intervention: Was heißt beliebig klein?

Die Studierenden präsentieren mir nun ihre Charakterisierung und ich frage nach, was „beliebig klein“ bedeutet. Sie können mir keine Antwort geben, die mich zufrieden stellt.

Ich komme kurz darauf zu der Gruppe, lese mir ihre Formulierung durch und fordere sie auf, mir ihr Ergebnis zu erläutern:

334 D: *Wir hatten eigentlich ... das schon richtig, nur den Betrag haben wir vergessen*

Doreen ist bewusst, dass ich gesehen habe, dass sie ein Buch zur Hilfe genommen haben. Sie stellt klar, dass sie zuvor eigenständig etwas erarbeitet haben, was der Definition aus dem Buch ihrer Meinung nach bis auf einen Aspekt entsprach.

340 L: *Okay. Vielleicht erklärt ihr mir das einfach nochmal, was ihr da jetzt ... euch überlegt haben-, habt*

341 T: *Dieses es geht gegen*

342 L: *Ja*

343 T: *Das musste man halt nur noch ein bisschen mathematisieren ... und dann haben wa halt gesagt der Betrag ... von a_n ... minus dem Grenzwert, wobei wir noch nicht wissen, was der Grenzwert ist, wird beliebig klein*

Rückblickend scheint Tim der Meinung zu sein, dass der Ausdruck „geht gegen“ nicht mathematisch genug ist. Er könnte darunter verstehen, dass dieser Ausdruck zu unpräzise ist. Daraufhin frage ich nach:

345 L: *Jetzt ist son bisschen noch die Frage, ja, was heißt jetzt beliebig klein?*

346 M: *Das ist ne-*

347 T: *Geht gegen null*

348 M: *Dass es immer eine ... Zahl gibt ... für, wenn man n jetzt einsetzt ... jetzt müssen wa dies mit den Indizes machen*

349 T: *Ja, und n geht ja auch gegen Unendlich*

Tim bringt nun wieder die „geht gegen“-Formulierung ein, um die Bedeutung von „beliebig klein“ zu erläutern. Merle hingegen möchte irgendwas mit den Indizes machen, doch sie erklärt nicht, was genau.

352 T: *n gegen Unendlich ... wird beliebig klein ... also null ... nicht null, gegen null, ach, was weiß ich ... ich weiß es auch nicht*

Zwischenstand:

An der notierten Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert. Bei Tim zeigt sich jetzt deutlicher, dass der Ausdruck „beliebig klein“ für ihn dieselbe Bedeutung hat wie „geht gegen 0“. Da Merle ihre Erläuterung nicht zu Ende führt, lässt sich ihr Erkenntnisstand nicht eindeutig feststellen. Denise äußert sich in dieser Phase kaum.

Phase 9: Intervention: ϵ -Streifen und erneutes Nachschlagen in einem Buch

Als Hilfsmittel händige ich der Gruppe ϵ -Streifen aus, mit denen sie sich kurz beschäftigen. Dann ziehen sie wieder ein Buch hinzu und finden dort eine ϵ -N-Definition. Tim ersetzt seine Charakterisierung durch diese, die beiden Studentinnen behalten ihre vorherigen Charakterisierungen bei.

Die Studierenden kommen hier nicht richtig weiter. Daher entschliefte ich mich, eine der Interventionen einzusetzen. Da ich die formulierte Eigenschaft als unpräzise bewerte, wähle ich die ϵ -Streifen aus.

356 L: *Ihr habt die Grafiken ja noch, ne (fragend)?! Vielleicht ... arbeitet ihr damit mal noch. Ich hab hier mal so Streifen vorbereitet. Also ihr habt ... ja irgendwie dass es das beliebig ... dass diese Differenz zu dem Grenzwert beliebig klein wird ... vielleicht guckt ihr mal mit den Grafiken ... ob ihr mit diesen Streifen da irgendwie ein bisschen was anfangen könnt ... ich hab hier einfach mal ein paar die verschieden breit sind, hier kann man ja natürlich nicht mehr ... viel erkennen, aber-*

Die Studierenden beginnen, die Streifen auf die Graphen der Folgen zu legen.

361 M: *Also wir sollen das jetzt da drauf legen, irgendwie so, ne (fragend)?!*

362 D: *Achso*

363 M: *So ist das gedacht, glaube ich*

364 D: *Ja, da ist ja der Abstand so ungefähr wie hier ((U)) bei zwei ... ne (verneinend), noch weiter*

Sie legen einen der Streifen auf den Graphen der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$, so dass das zehnte Folgenglied, das dem Wert 2 entspricht, außerhalb des Streifens liegt und sich alle übrigen Folgenglieder innerhalb des Streifens befinden. Dazu frage ich nach:

368 L: *Ja, da würd ich jetzt hier zum Beispiel-, erst mal würd mir auffallen ... hier sind die meisten, da irgendwie drin, aber der Eine zum Beispiel nicht*

369 M: *Ja, aber n geht ja gegen Unendlich, das was davor ist, interessiert uns eigentlich nicht*

Merle antwortet, dass es nicht interessiert, dass das eine Folgenglied außerhalb des Streifens liegt. Ich versuche, mit den Studierenden gemeinsam zu erarbeiten, dass es für einen vorgegebenen Streifen jeweils eine Zahl gibt, ab der alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen:

371 L: *Ab wann interessiert es uns denn?*

372 M: *Wo wir keine Ausreißer haben*

373 D: *Wenns größer als 7000000 ist*

Merle spricht von Ausreißern, Doreen hingegen nennt eine konkrete Zahl. Zu dieser konkreten Zahl frage ich nach:

374 L: *Immer bei 7000000?*

375 M: *Nein, wenn da noch bei 7000000 ein Ausreißer ist, so*

Zumindest Merle ist klar, dass nicht grundsätzlich entscheidend ist, ob ab dem 7000000. Folgenglied alle weiteren innerhalb des Streifens liegen. Kurz darauf äußert Doreen sich ähnlich:

382 L: *Muss es unbedingt 7000000 sein?*

383 D: *Nein*

384 M: *Nö, es kann auch mehr sein*

385 L: *Hmhm (verstanden)*

386 M: *Oder weniger (lacht)*

Da die Studierenden anscheinend verstanden haben, dass keine feste Zahl bestimmt werden kann, und es lediglich daran scheitert, dies geeignet auszudrücken, mache ich einen Vorschlag:

388 L: *Das heißt man könnte vielleicht sagen, ab ... irgendeiner Zahl?*

389 M: *Ja*

390 L: *Und was passiert dann, wenn wir uns das hier mal mit diesem-*

391 M: *Es wird immer kleiner ... ((U))*

392 L: *Und was passiert mit den Folgengliedern?*

393 D: *Die rücken immer näher ran*

394 L: *Die sind dann?*

395 D: *Und irgendwann liegen sie drauf, und dann ists null ... also die Differenz ... (lachen) okay, nicht*

Da ich von einer anderen Gruppe gerufen werde, lasse ich die Studierenden nun zunächst eigenständig weiter arbeiten.

399 D: *Der Abstand wird quasi unendlich klein ((U))*

400 M: *Naja da is-, da ist er ja- ... ((U))*

Doreen spricht davon, dass der Abstand „quasi unendlich klein“ wird. Was genau sie darunter versteht wird nicht deutlich. Merle scheint damit nicht ganz einverstanden zu sein.

Sie beginnen dann über die e-Funktion zu sprechen:

401 D: *Das dürfte ja nicht dasselbe sein, das- ... sonst wäre ja der Limes zum Beispiel von so ner e-Funktion nicht-, er würde ja nicht gegen null laufen, dann wäre ja vorher, vorher ist ja auch irgendwas vorhanden ... also kann das-, ach, egal*

Doreens Aussage lässt sich nicht eindeutig interpretieren. Möglicherweise ist sie der Meinung, dass die Bedingung nicht lauten darf, dass die Differenz 0 werden muss.

Merle ist mit der von ihnen notierten Charakterisierung zufrieden und hat kein Bedürfnis, etwas daran zu ändern:

403 M: *Weiß jetzt nicht, was bei uns jetzt noch falsch sein soll*

404 T: *Ne (bestätigend) ... geht die e-Funkti-, die e-Funktion geht doch so, oder nicht? ... geht doch durch eins, aber erst ab hier ist sie doch definiert, deswegen ((U)) eine natürliche Zahl*

(lachen)

405 D: *Ja, aber wenn du das jetzt zum Beispiel umdrehst und du hast, ähm ... hast es einfach so rum und du definierst das hier vorne ... zwischen null und Unendlich ... läuft es gegen null*

406 T: *Ja, das stimmt*

407 M: *Ja, obwohl hier vorne was vorhanden ist, wenn ich hier das separat auswerte ... wenn ich jetzt sage von null bis fünf hab ich was vorhanden und hier läuft das aber gegen ... null, aber das heißt ... dann ist gleich null*

408 T: *Da ist immer was vorhanden*

409 M: *Was?*

410 T: *Ja, ja ja*

411 M: *Ach, ich weiß auch nicht*

Die Gruppe spricht wieder über die e-Funktion und eine „umgedrehte“ e-Funktion, womit sie möglicherweise die Funktion zu dem an der Geraden $x = 1$ gespiegelten Graphen der e-Funktion meinen. Sie scheinen jedenfalls von einer Funktion zu sprechen, die für n gegen Unendlich gegen 0 läuft. Merle meint, dass die Funktionswerte oder die Differenz der Funktionswerte zum Grenzwert „dann“ – vermutlich für n gegen Unendlich – gleich 0 sind. Tim ist anderer Meinung, er antwortet, dass „immer was vorhanden“ sei. Ob er in der Aussage die Funktionswerte selbst meint oder deren Differenz zum Grenzwert spielt hier keine große Rolle. Er erkennt auf jeden Fall, dass bei dieser Funktion die Funktionswerte den Grenzwert nie erreichen. Schließlich zeigt sich etwas Resignation bei den Studierenden.

418 D: *Ich fand unsere Lösung gut*

419 M: *Ja, das ist das Problem. Ich sehe es jetzt auch nicht was-, was-*

420 T: *Ja, aber wie sollen wir denn, wenn wir jetzt irgendeine Folge haben, brauch jetzt einen Rechenvorschrift, um jetzt irgendwie kurz zu sagen, ob das, ob die irgendwo gegen konvergiert ... ob man nicht einfach ... ich weiß nicht, wie man das nachweisen kann*

421 M: *Ja, und dann nehmen wir ein n ... und gucken ... wenn wir den Grenzwert haben, gucken wir, ob das n minus dem Grenzwert, nein, der Gren-, ja*

Sobald ich nicht mehr bei dieser Gruppe stehe, äußern die beiden Studentinnen, dass sie eigentlich mit ihrer Formulierung zufrieden sind. Tim hingegen hat einen Einwand. Er weiß nicht, wie er anhand der Formulierung entscheiden soll, ob irgendeine Folge konvergiert. Für ihn soll die Charakterisierung also als Entscheidungsregel dienen können. Zunächst kommt ein Studierender einer anderen Gruppe hinzu, sie unterhalten sich in Turn 424-444 jedoch nicht inhaltlich über die Definition. Anschließend schauen die Studierenden erneut in einem Buch nach.

445 M: *Komm, wir gucken nochmal in dem Buch*

(lachen)

446 M: *Ich versteh ja nicht mal wie-, wo der Unterschied zwischen unserer Antwort und dem Buch ist, weil wir ((U))*

447 D: *Wir haben doch die Antwort vom Buch*

448 M: *Ja, eben*

449 ?: *((U))*

450 D: *Kann doch ((nicht)) total falsch sein*

Die Studierenden sind irritiert, weil sie keinen Unterschied zwischen ihrer Formulierung und der, die in dem betrachteten Buch steht, erkennen, und ich ihre Formulierung nicht als Endergebnis akzeptiert habe. Die Formulierung aus dem Buch stellen sie nicht in Frage. Anschließend finden sie noch eine andere Formulierung, entweder im selben Buch oder in einem weiteren Buch und wenden sich damit zunächst an den Studenten aus der anderen Gruppe:

457 M: *Hier, les-, habt ihr es schon gelesen? ((U)) vielleicht versteht er das*

458 X: *Das ist-, das ist verbotene Hilfe. Das mach ich nicht*

459 D: *Wir habens doch aufgezeichnet, dass wir da schon-*

Der andere Student möchte kein Buch zur Hilfe nehmen, er geht davon aus, dass die Aufgabe ohne zusätzliche Hilfsmittel erledigt werden soll. Doreen scheint der Meinung zu sein, dass es in Ordnung sei, solange es für mich erkennbar ist, dass sie Hilfsmittel hinzugezogen haben.

460 T: *Ist Epsilon kleiner null, ne (fragend)?!*

461 M: *Was?*

462 T: *Ach, größer null, verdammt. Der Witz ist Epsilon kleiner null*

(lachen)

463 M: *Achso, das war-, ja, der Witz*

464 T: *Ja*

465 D: *Da haben aber alle gelacht*

466 T: *Ja, was ist dieses Epsilon-*

467 M: *Guck mal, hier ist es kleiner Epsilon*

468 D: *Ja, das fehlt uns noch wahrscheinlich*

Vermutlich haben sie nun eine $\epsilon - N$ -Definition der Konvergenz gefunden. Der Witz „sei $\epsilon < 0$ “ ist den Studierenden anscheinend bekannt. Merle deutet auf etwas, das laut ihrer Aussage kleiner als ϵ ist. Vermutlich bezieht sie sich dabei auf die Differenz $|a_n - a|$.

Tim ersetzt seine vorherige Charakterisierung durch die $\epsilon - N$ -Definition aus dem Buch. Doreen entscheidet sich dagegen:

470 D: *Das ist mir zu hoch*

(lachen)

471 D: *Geht um zu viele Ecken*

Die Studentin scheint die formale Definition aus dem Buch nicht nachvollziehen zu können.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 5) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N$

Tim hat die Charakterisierung 5 aus einem Buch übernommen. Inwiefern er die Bedeutung verstanden hat lässt sich hier nicht sagen. Merle ersetzt lediglich „ $|a_n - a|$ wird beliebig klein“ durch „ $|a_n - a| < \epsilon$ “, den Rest der Charakterisierung 4 lässt sie unverändert. Das heißt in ihrer Formulierung gibt es keine Angabe darüber, für welche(s) ϵ die Ungleichung erfüllt sein soll. Doreen bleibt hingegen bei der Charakterisierung 4. Sie hat kein Bedürfnis, etwas zu ändern.

Phase 10: Intervention: Motivation, warum „beliebig klein“ präzisiert werden soll

Doreen äußert mir gegenüber, dass sie mit der Charakterisierung 4 zufrieden ist. Ich versuche der Gruppe gegenüber in dieser Phase noch einmal zu motivieren, warum der Ausdruck „beliebig klein“ unpräzise ist.

Ich komme wieder zu der Gruppe zurück.

475 D: *Wir wissen nicht genau wo wir hin sollen ... mit ... unserm-*

476 L: *Ah*

477 D: *Aber wir sind so zufrieden mit unserer-*

(lachen)

478 T: *Was sollen wir denn-*

479 D: *Dass wir gar keine Bedürfnisse haben das zu optimieren*

(lachen)

Doreen erklärt, dass sie keinen Grund sieht, an ihrer Charakterisierung, dass $|a_n - a|$ beliebig klein wird, etwas zu ändern.

Auf meine Nachfrage bringt Tim die Variable ϵ mit ein:

480 L: *Okay, also ... ihr habt gesagt: a n minus der Grenzwert wird-, davon der Betrag wird beliebig klein ... das ist beliebig klein-*

481 T: *Das haben wir doch-, also, wir haben so Geschichten gehört, aus der Analysis eins sollte, irgend so ein Epsilon kleiner null wählen, und dann funktioniert, aber ... ((U)) Epsilon kleiner null ist*

(lachen)

482 T: *Größer null, tut mir Leid, ach (stöhnt entnervt)*

Tim äußert in diesem Moment weder explizit, dass er eine andere Charakterisierung notiert hat, noch dass er diese aus einem Buch übernommen hat. Möglicherweise versucht er hier, sich herauszureden, wie er auf die Idee gekommen sein könnte, die Variable ϵ zu verwenden.

486 L: *Das geht ja schon in eine ganz gut Richtung, also, dieses beliebig klein müssen wir noch ein bisschen ... präziser machen, damit-, weil ... sonst ... ist wieder die Frage-*

487 D: *Warum ist eine Million klein?*

488 L: *Warum- wie eben mit einem großen n, ist 7000000 n-, 7000000. Ist das ein großes n oder nicht?*

489 T: *Okay*

490 D: *((Groß statt klein))*

491 L: *Genauso ists bei beliebig klein, wenn der Abstand jetzt null Komma eins ist, ist das schon beliebig klein oder nicht? ... Oder wenn er null Komma null eins ist?*

Da ich lediglich die Charakterisierung von Doreen gesehen habe, in welcher der Ausdruck „beliebig klein“ benutzt wird, beziehe ich mich weiter darauf. Ich versuche, ihnen zu vermitteln, warum „beliebig klein“ unpräzise ist.

494 T: *Also, wir können jetzt nichts irgendwie wählen, was beliebig klein ist, damit vergleichen. Ne (verneinend), ne (fragend)?! ... Also ist das-*

495 L: *Was-, was verstehst du denn unter etwas, was beliebig klein ist?*

(lachen)

496 T: *Weiß es nicht genau (...) ihr habts richtig?*

Tim hat verstanden, dass keine feste Zahl für ϵ gewählt werden kann. Mit seiner Frage in Turn 496 wendet er sich wieder an einen Studenten einer anderen Gruppe.

Ich sehe dann die von Merle notierte Charakterisierung, in der anstelle von „ $|a_n - a|$ wird beliebig klein“ der Ausdruck „ $|a_n - a| < \epsilon$ “ steht.

498 L: *Also ... mal schauen, ihr habt jetzt ... hier geschrieben ... der Abstand soll kleiner als Epsilon sein*

499 T: *Genau ... und dann haben wir ein ganz kleines Epsilon größer als null gewählt*

Tim, sagt nun, dass sie ein ganz kleines $\epsilon > 0$ gewählt haben. Möglicherweise denkt er an einen Ausdruck der Art „sei $\epsilon > 0$ “.

Zwischenstand:

Hauptsächlich lässt sich etwas über den Erkenntniszuwachs von Tim aussagen. Er scheint zu verstehen, dass kein fester Abstand gewählt werden kann, so dass als Bedingung formuliert wird, dass der Abstand der Folgenglieder zur 1 kleiner sein soll als der feste Abstand. Allerdings sagt er anschließend, dass sie ein ganz kleines $\epsilon > 0$ gewählt haben. Das scheint dem vorherigen zu widersprechen. Es wäre möglich, dass er sich noch nicht sicher ist und sich daher seine Aussagen widersprechen. Es wäre jedoch auch möglich, dass er bei der Wahl eines $\epsilon > 0$ an den Nachweis der Bedingung denkt, der tatsächlich mit „Sei $\epsilon > 0$ “ beginnen würde.

Phase 11: Klärung der Frage, für welche(s) ϵ die Bedingung gefordert werden soll

Es bedarf noch einiger Diskussion, Interventionen und erneutem Nachschlagen in Büchern, bis die Gruppe gemeinsam mit mir herausfindet, für welche(s) ϵ die Bedingung gefordert werden soll. Da diese Phase sehr lang ist, wird sie noch in mehrere Phasen unterteilt.

Phase 11.1: Intervention: Herstellen einer Verbindung zwischen der Charakterisierung und den ϵ -Streifen Ich versuche in dieser Phase, mit den Studierenden zusammen zunächst eine Verbindung zwischen dieser Formulierung und den Streifen herzustellen, um herauszufinden, für welche ϵ die Bedingung gefordert werden muss.

502 L: *Ich hab ja hier ... das wir jetzt mal in Verbindung bringen ... könnte man sagen-*

503 T: *((Strichdicke))*

504 L: *Ja, beziehungsweise die Streifen-*

505 T: *Ja, mein ich doch, Strich- Streifendicke*

506 L: *Dicke, genau ... Dieser Strich ist ja einfach nur in der Mitte, damit man das ganz gut hinlegen kann, genau. Das wär diese Streifendicke, beziehungsweise wenn wir hier den Betrag nehmen wäre ... die Hälfte davon ja das Epsilon*

507 T: *Hmhm (verstanden)*

Zumindest Tim scheint zu verstehen, wie ϵ mit der Breite der Streifen zusammenhängt.

508 L: *Das ist in beide Richtungen diese Differenz kleiner als Epsilon ist ... Jetzt ist aber genau die Frage: Für was für ein Epsilon? Also: Wie ... breit oder schmal müssen diese Streifen sein? ... Dass dieser Betrag kleiner ist als Epsilon, das heißt, dass ihr hier mit dem Streifen und den ... Grafiken-*

509 T: *Dass der Streifen dünn wird ... oder schmal ... immer schmaler*

Doreen erkennt die Bedeutung der Bedingung $|a_n - g| < \epsilon$ dann auch anhand der Grafik:

511 D: *Also müsste das das Maximum, muss sein von dem Epsilon*

512 M: *Dann hier-, hier ist das Epsilon dann*

513 T: *Bitte? ... Das habe ich nicht verstanden*

(lachen)

514 D: *Ja, wenn das der Rand hier das Epsilon ist, dann muss es kleiner sein als das Epsilon, dann muss es da drin sein*

Sie möchte vermutlich aussagen, dass die Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen müssen. Ich mache die Studierenden auf einen Aspekt aufmerksam, der in ihrer Formulierung noch fehlt und stelle gleichzeitig eine weitere Nachfrage:

517 L: *Ja, wenn wir das hier legen, ist es-, ist da eins erst mal nicht da drin, ne (fragend)?! ... Das ist erst mal ein Punkt. Das heißt irgendwie ... irgendwie fehlt da vielleicht noch irgendwas, was man dazu sagen muss?! Und die andere Frage ist: ... ich hab euch jetzt mal ein paar verschiedene Streifen gegeben, für welchen Streifen muss es denn jetzt da drin sein? (...) Reicht es, wenns in diesem Streifen drin ist? ... oder ist es-*

Ich lege in dem Moment einen ϵ -Streifen derart auf die Grafik der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$, dass das zehnte Folgenglied mit dem Wert 2 außerhalb des

Streifens liegt während sich alle anderen Folgenglieder innerhalb des Streifens befinden. Damit möchte ich darauf aufmerksam machen, dass sich nicht alle Folgenglieder innerhalb der ϵ -Streifen befinden müssen und dieser Aspekt in der Charakterisierung noch fehlt. Das zweite, worauf ich eingehe, ist die Frage, welche ϵ -Streifen betrachtet werden müssen. Die Studierenden können die Fragen nicht auf Anhieb beantworten:

518 M: *Nein, weil ... in diesem Fall*

519 L: *Oder muss es in dem Streifen drin sein?*

520 M: *Wenns so, dann wärs ja auch*

521 L: *Da wäre es auch drin, dann wären alle drin*

522 M: *Also ist das schon mal schlecht*

523 D: *Schlechter Streifen*

Merle erkennt hier, dass es als Bedingung nicht ausreicht, dass sich alle Folgenglieder in irgendeinem ϵ -Streifen befinden, da dies auch auf das Nicht-Beispiel zutreffen würde.

525 L: *Und die Breite von dem Streifen ist ja hier so dieses-*

526 M: *Epsilon*

527 L: *Dieses Epsilon*

528 M: *Also ist das Epsilon da auf jeden Fall zu groß*

(lachen)

529 D: *Ein kleineres Epsilon, aber das hattest du ja vorher gesagt*

530 M: *Ja, aber wie können wir ... klein-*

531 D: *((U))... winzig*

(lachen)

532 L: *Wie klein ist genau die Frage (...) überlegt nochmal ein bisschen, vielleicht habt ihr ja noch ne Idee*

Ich weise noch einmal auf den Zusammenhang zwischen den Streifen und der Variablen ϵ in ihrer notierten Charakterisierung hin, damit die Studierenden erkennen, dass die Frage, welche Streifen betrachtet werden müssen, der Frage entspricht, welche Werte für ϵ berücksichtigt werden müssen. Anschließend gebe ich ihnen noch einmal etwas Zeit, in der sie ohne mich diskutieren sollen.

535 M: *Für kleines Epsilon*

536 D: *Wenn wir hier gucken-*

537 M: *Aber wenn wir das hierhin legen, dann sind die ja gar nicht mit drin*

538 T: *Ach, na dann*

539 D: *Ja, wir gucken für große n , müssen wir wahrscheinlich dazu sagen wieder, dass n gegen Unendlich, weil dann ist es uns egal, was hier vorne passiert ... aber wenn die-, wir müssen irgendwie das Epsilon muss so klein sein, dass diese nicht mit drin sind*

Doreen bezieht sich in ihrer Aussage auf beide von mir angesprochenen Aspekte. Zum einen sagt sie, dass die vorderen Folgenglieder nicht interessieren und zum anderen spricht sie über die Wahl von ϵ . Möglicherweise ist sie der Meinung, dass die Bedingung für eine einzige Zahl ϵ erfüllt sein muss, sie scheint allerdings nicht zu wissen, wie genau diese Zahl gewählt wird. Wenn diese eine Zahl zu groß ist, dann würde auch das Nicht-Beispiel die Eigenschaft erfüllen. Darauf will sie vermutlich im letzten Teil ihrer Aussage hinaus. Die Folgenglieder, die nicht innerhalb des Streifens liegen sollen, sind diejenigen, die bei dem Nicht-Beispiel dem Wert 2 entsprechen.

In den folgenden Turns machen sie eine kurze Pause und essen Kekse.

Zwischenstand:

In dieser Phase haben die Studierenden mit mir gemeinsam eine Verbindung zwischen ihrer notierten Charakterisierung und den ϵ -Streifen hergestellt. Da sie die Charakterisierung zumindest teilweise aus einem Buch übernommen hatten, kann das Durchdringen dieser Charakterisierung durchaus als Fortschritt gewertet werden. An der formulierten Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert.

Phase 11.2: Erneutes Nachschlagen in einem Buch In dieser Phase nimmt die Gruppe erneut ein Buch zur Hilfe und findet dort eine etwas andere Variante einer Definition als zuvor. Nach und nach verstehen sie die Bedeutung von dem Gelesenen.

Merle liest aus dem Buch vor:

564 M: *Aber ich glaub, das ist es, ne (fragend)?! ... a minus Epsilon muss kleiner sein als a n muss kleiner sein als a plus Epsilon*

Merle ist der Meinung, dass sie eine geeignete Formulierung gefunden hat. Bislang hat sie notiert, dass für n gegen Unendlich $|a_n - a| < \epsilon$ gilt, nun möchte sie aus dem Buch die Bedingung $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ übernehmen. Doreen hat dazu eine Frage:

565 D: *Ja, gut, aber wie klein ist Epsilon dann?*

566 M: *Das hei-, das sagt ja eigentlich nur, dass es halt, dass die, die ... a ns ins diesem Bereich liegen müssen*

567 D: *Das kann ja nur das sein*

568 M: *Aber da wissen wir ja noch nicht wie klein das Epsilon ist*

Zuvor haben die Studierenden über die Frage diskutiert, wie klein ϵ sein muss. Die Antwort haben sie anscheinend nicht in dem Buch gefunden. Diese Frage taucht nun immer wieder auf, während die Gruppe gleichzeitig versucht, den Ausdruck $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ zu verstehen und mit den Graphen und Streifen in Verbindung zu bringen. Doreen scheint den Ausdruck nicht sofort zu durchdringen:

569 D: *Kann-, kannst du das nochmal kurz sagen, was da stand?*

570 M: *((U)) das Epsilon*

571 D: *a n minus Epsilon?*

572 M: *Ne (verneinend), a n minus Epsilon ist kleiner als a*

573 D: *Aber dann wissen wir immer noch nicht wie klein das Epsilon sein muss (lacht)*

574 M: *Ist kleiner*

575 D: *a n?*

576 M: *a plus y*

577 D: *Also, da jetzt a n ... und dann wieder*

578 T: *Ist doch bescheuert*

579 M: *Ja, äh, a plus Epsilon*

580 D: *Ich weiß gar nicht ((U))*

Merle hat hier noch einmal den Ausdruck $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ nach und nach wiederholt. Gemeinsam füllen die beiden Studentinnen anschließend die einzelnen Elemente des Ausdrucks mit Bedeutung:

583 M: *Das wäre ja hier. Das ist a n und dann ist dieser Bereich, ähm ... was ist denn a, a-*

584 D: *Ja, aber a ist ((U))*

585 M: *Ist der Grenzwert*

586 D: *Und das musst du drunter legen schon mal, dieses a minus Epsilon*

587 M: *Ja, hier steht der Grenzwert minus Epsilon*

588 D: *Das sind eigentlich, das ist ja-*

589 M: *Das ist der Grenzwert*

590 D: *Minus Epsilon, minus das hier ... ist kleiner*

591 M: *Als unsere Werte*

592 D: *Das ist der Wert*

(lachen)

593 D: *Ist kleiner ... als a plus Epsilon*

Hier lässt sich aus der Audioaufnahme nicht alles interpretieren, da die Studierenden auf Grafiken zeigen und nicht immer klar ist, worauf genau sie jeweils zeigen. Auf jeden Fall ist ihnen klar, dass a den Grenzwert bezeichnet. Vermutlich haben sie auch erkannt, dass a_n die Werte der Folgenglieder bezeichnet, da sie dabei von „unsere Werte“ sprechen. Worauf sie zeigen, als sie von ϵ sprechen, lässt sich hier nicht feststellen.

In den Turns 595 bis 606 dreht sich das Gespräch lediglich um einen Tacker.

Dann scheinen sie den Ausdruck als Ganzes zu verstehen:

611 T: *Die sind gar nicht mal so dumm in diesem Buch*

612 D: *Ja, dann erklär*

613 M: *Das hier beschreibt doch den Bereich, in dem a n gegen ((U))*

614 D: *Ja, würd ich auch sagen. Aber vermutlich ist das richtig*

615 M: *Hä (fragend)?*

616 D: *Vermutlich ist das richtig (lacht)*

617 M: *Das? ... Ja, vermutlich*

Merle spricht hier von einem Bereich, möglicherweise meint sie den Bereich von $a - \epsilon$ bis $a + \epsilon$, in dem sich die Folgenglieder befinden sollen. Das bestätigt sich anschließend:

619 M: *Wir nehmen ... unseren Grenzwert-, ja, weiß ich nicht ... aber, das ist ja eigentlich ((U)) Grenzwert plus Epsilon und Grenzwert minus Epsilon und dazwischen liegt ... a n*

Die Studentin hat nun also die Bedingung als Ganzes korrekt aufgefasst.

Zwischenstand:

Die Studierenden haben eine andere Definition in einem Buch gefunden und es ist ihnen gelungen, die Bedeutung dieser Definition nachzuvollziehen. Doreen ist bewusst, dass ihnen weiterhin der Aspekt fehlt, wie die Variable ϵ gewählt wird. An der notierten Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert.

Phase 11.3: Erneute Beschäftigung mit den ϵ -Streifen gemeinsam mit der Lehrperson Der Ausgangspunkt in dieser Phase ist die Feststellung, dass bei dem Nicht-Beispiel ebenfalls ein ϵ existiert, für das die Bedingung erfüllt ist. Ich entscheide mich dazu, dieses Problem an den ϵ -Streifen zu diskutieren. Dabei stellen sie fest, dass bei einem schmalen Streifen für die Beispielfolgen jeweils ein n existiert, so dass ab diesem n alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen, bei dem Nicht-Beispiel hingegen nicht.

623 M: *Ja ... aber es hilft uns ja nicht weiter ... weil so ist das immer noch konvergent (lacht)*

Merle stellt fest, dass die Bedingung $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ anstelle von $|a_n - g| < \epsilon$ das Problem nicht löst, dass auch das Nicht-Beispiel die Bedingung erfüllt.

In dem Moment komme ich wieder hinzu. Gemeinsam mit den Studierenden beschäftige ich mich mit dem Nicht-Beispiel:

628 L: *Wenn wir jetzt hier irgendwie-, wenn wir zum Beispiel den Streifen nehmen würden, würds da ja-*

629 D: *Gehn*

Ich zeige zunächst noch einmal, dass mit einem schmaleren Streifen das Nicht-Beispiel die formulierte Bedingung nicht erfüllt.

635 L: *Aber ... wir können ja jetzt nicht irgendwie sagen wir suchen uns jeweils einfach irgendwie den Streifen raus, der uns grad gefällt*

Merle antwortet Folgendes:

641 M: *Aber je kleiner der Streifen, desto besser ist die Aussage ... wir wollen ganz winzig kleine Streifen*

Ich bin damit noch nicht vollständig zufrieden.

652 L: *Ja, die Frage ist wie drücken wir das aus, dass es eben auch für winzig kleines Epsilon ... da drin sein soll? ... Und die andere Frage ist ja noch ... wenn wir hier nochmal bei irgendwelchen Folgen gucken, zum Beispiel bei dieser hier-*

653 T: *((U)) diese Differenz ... Differenz-*

654 L: *Ist ja noch der eine Punkt da raus, auf jeden Fall, egal welchen von den Streifen wir nehmen*

Ich weise die Studierenden hier auf zwei Aspekte hin, die sie an ihrer Formulierung noch überarbeiten sollen.

657 T: *Dieser Streifen ist dann halt dieser-*

658 M: *Das Epsilon*

659 T: *Ist doch diese ... also, von da nach da ist jetzt Epsilon? Ist das jetzt richtig? Dieser Abstand?*

660 M: *Ja, hier ... plus Epsilon, hier ist minus Epsilon. Wir sagen a_n muss dazwischen sein*

661 T: *Ja*

Tim fragt nun explizit nach, ob sie ϵ graphisch korrekt interpretiert haben, und zwar als Abstand zwischen dem Grenzwert, der auf dem ϵ -Streifen durch einen waagerechten Strich dargestellt ist, und dem Rand des Streifens. Merle bestätigt dies.

Für den zuletzt von mir genannten Aspekt bringt Tim kurz darauf einen Vorschlag ein:

665 T: *Und irgendwo haben wir ein $((U))$ so ein-*

666 M: *x ist kleiner als a_n ist kleiner als x , also-*

667 T: *Irgend so ein n , wo das halt zutrifft ... irgendwann*

Der Student sagt, dass es irgendwann ein n gibt, so dass die Bedingung erfüllt ist. Er geht anschließend auf die als Nicht-Beispiel vorgegebene Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein und erläutert, dass es dort nicht der Fall ist:

671 T: *Da haben wir es nie*

672 L: *Haben wir es nie, genau*

673 D: *Bei welchem haben wirs-*

674 T: *Deswegen ist die Bedingung nicht erfüllt*

675 L: *Bei diesem hier ... also, er hat gerade gesagt bei den anderen Folgen haben wir irgendwann ein n , wo das zutrifft, also, wo die dann da drin liegen-*

676 T: *Das ist aber auch nur so-*

677 L: *In den Streifen, auch wenn der sehr klein ist. Bei diesem hier ... haben wir das nie ... weil die hier ja immer wieder ... auch bei zwei ist*

678 T: *Genau*

Zusammengefasst hat Tim nun also erläutert, dass es bei den Beispielen jeweils irgendein n gibt, so dass die Bedingung erfüllt ist, während es bei dem Nicht-Beispiel – zumindest bei schmalen Streifen – kein solches n gibt.

Da mir nicht eindeutig klar ist, ob er meint, dass dieses eine Folgenglied dann die Bedingung erfüllen muss oder auf welche Folgenglieder das zutreffen soll, frage ich nach:

681 L: *Muss ein Wert da drin sein?*

682 T: *Ne (verneinend), die Restlichen da alle*

Zumindest Tim hat also verstanden, dass ab dem erwähnten n alle weiteren Folgenglieder die Bedingung erfüllen müssen.

Dann mischt sich auch Doreen mit ein:

685 D: *Also n plus eins ... und so*

686 T: *Jaja ... es muss halt dazwischen liegen*

687 L: *Genau und das ist-*

688 T: *Und wenn das zutrifft, dann konvergiert die dagegen ... und wenn nicht, dann nicht*

Auch die Studentin scheint dies verstanden zu haben. Tim äußert noch einmal explizit, dass dies das Kriterium für Konvergenz sei.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 6) *Für einen winzig kleine Streifen muss es ein n geben, so dass ab diesem n alle Folgenglieder in dem ϵ -Streifen liegen, dann heißt die Folge konvergent. Wenn es das nicht gibt, dann ist sie nicht konvergent.*

Mündlich lassen sich die Äußerungen der Gruppe zur Charakterisierung 6 zusammenfassen. An der notierten Charakterisierung hat sich in dieser Phase nichts geändert.

In dieser Phase besteht der Erkenntniszuwachs zum einen darin, dass sie – abgesehen von der aus dem Buch abgeschriebenen Definition – zum ersten Mal in der Bedingung formuliert haben, dass bei den Beispielen ein n existiert, ab dem sich alle weiteren Folgenglieder innerhalb des ϵ -Streifens befinden. Zum anderen haben sie das Nicht-Beispiel nun deutlicher abgegrenzt indem sie sagen, dass bei diesem kein solches n existiert.

Phase 11.4: „Das kleinste“ Epsilon soll als Bedingung verwendet werden Gemeinsam mit mir wird in dieser Phase weiter über die Frage diskutiert, für welchen oder welche Wert(e) von ϵ die Bedingung erfüllt sein soll. Die Studierenden sprechen immer wieder von kleiner werdenden ϵ -Streifen und sagen schließlich, dass sie die Bedingung mit „dem kleinsten“ ϵ -Streifen überprüfen würden.

Ich bin zu diesem Zeitpunkt der Meinung, dass es lediglich noch einen Aspekt gibt, der geklärt werden muss:

690 L: *Und jetzt ist nur noch das Problem mit dem Epsilon*

(lachen)

691 T: *Ja, es is-, es ist mir auch noch so ein bisschen schleierhaft ... es soll ja sehr klein sein*

Unter dem „Problem mit dem Epsilon“ verstehe ich, dass die Gruppe nicht festgelegt hat, für welche Werte von ϵ die Bedingung erfüllt sein muss. Im weiteren Verlauf der Diskussion deutet sich an, dass die Studierenden eine dynamische Vorstellung von einem immer kleiner zu wählenden ϵ haben:

696 T: *Wenn wir was kleines haben, was noch kleineres gefunden haben, dann ist das kleine wiederum größer null, ist eben egal*

697 L: *Ja*

698 T: *Das denk ich mir so, ansonsten macht es ja keinen Sinn, dass man sowas überhaupt wählt und dann verwirft man es ja wieder, und nimmt was noch kleineres*

Die Aussagen von Tim lassen sich nicht zweifelsfrei interpretieren. Er spricht auf jeden Fall davon, dass man ein ϵ hat und wieder noch ein kleineres findet, das auch noch größer als Null ist. Andererseits sagt er auch, dass es „keinen Sinn“ macht, wenn zunächst ein Wert gewählt und dieser anschließend wieder verworfen wird. Möglicherweise spiegelt das seine Verwirrung wieder.

700 T: *Und dann kann man -, ich weiß nicht, wie ich da jetzt weiter argumentieren soll*

701 L: *Können wir irgendeinen bestimmten, irgendeine bestimmte Zahl für dieses Epsilon angeben?*

702 T: *Nein*

Der Student ist sich hingegen sicher, dass für ϵ keine konkrete Zahl angegeben werden kann.

707 L: *Aber wie kann man das denn irgendwie ausdrücken? (...) Wenn die ... wenn das jetzt zum Beispiel mit diesem Streifen hier, okay da bei der Folge natürlich nicht, aber wenn wir sagen, okay, mit diesem Streifen funktioniert das hier schonmal ... also mit dem Epsilon*

708 T: *Genau*

709 L: *Was ist dann, wenn wir den größeren Streifen nehmen?*

710 T: *Ja, dann funktioniert es auch*

711 M: *Ja*

712 L: *Damit funktioniert dann auf jeden Fall auch (...) Wenns mit kleinen Streifen funktioniert, funktioniert mit den größeren erst recht*

713 T: *[Ja]*

714 M: *[Ja]*

Als ich nachfrage, ob aus der Gültigkeit der Bedingung für einen schmalen Streifen automatisch auch die Gültigkeit der Bedingung für einen breiteren Streifen folgt sind sich Tim und Merle sofort einig, dass dies der Fall ist.

717 M: *Ihr müsst genau, also das Epsilon muss genauso kleiner werden*

718 T: *Ja*

719 L: *Ich hab euch hier jetzt nur so ein paar Streifen gegeben, aber man könnte ja unendlich viele Streifen sich angucken ... theoretisch*

720 M: *Ja, man könnte ja gucken, welche ... der-, also der größte ist jetzt irgendwie also jetzt hier zum Beispiel ... und dann nach nem Streifen, der so dick ist ... wie der größte Wert ... ne (resigniert)*

Nun spricht Merle von einem Streifen, „der so dick ist wie der größte Wert“, womit sie vermutlich einen Streifen meint, der so breit ist, dass er das Folgenglied, das den Wert mit dem größten Abstand von 1 gerade enthält, wenn der Streifen mit der Mittellinie auf die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ gelegt wird. Ich verstehe das in dem Moment so, dass die Studentin als Bedingung diesen einen Streifen betrachten möchte:

721 L: *Aber dann könnten wir das hier ja auch machen und dann würd das-*

722 M: *Ja, aber dann wärs ((U))*

723 D: *Aber das war ja das, was er gesagt hat, mit diesem n, dass-, dass man das, äh, ausschließen kann, wenn das nicht dazu führt, dass es, ähm, in den kleineren Streifen genauso rein*

Ich versuche an dieser Stelle zu begründen, warum die Betrachtung eines einzigen Streifens als Bedingung nicht geeignet ist, da dann auch die als Nicht-Beispiel vorgegebene Folge die Bedingung erfüllen würde. Möglicherweise hat Merle dies anders gemeint, sie wird bei ihrer Antwort allerdings unterbrochen. Bei Doreens Aussage ist nicht klar, was ausgeschlossen werden kann wenn es in den kleineren Streifen nicht genauso reinpasst.

726 L: *Eine Frage, wenn ihr euch jetzt mal überlegt, wenn ich euch jetzt noch viel viel mehr von diesen Streifen gegeben hätte ... unendlich viele*

727 M: *[Geht nicht (lacht)]*

728 L: *[In welchen-] geht nicht, aber- (lacht) so lange wollte ich auch nicht basteln ... aber in welchen Streifen müsste es dann irgendwann drin sein?*

729 M: *Ja, wo alle Werte drin sind, also ... wir können ja*

730 D: *Ja, dann können wir immer so nen großen Streifen nehmen, wo alle drin liegen ... wenn wir unendlich viele haben. Dann passt es irgendwann immer*

731 M: *Ja*

Merle und Doreen antworten ähnlich auf meine Frage, sie wollen einen großen Streifen nehmen, in dem alle Folgenglieder enthalten sind. Nur Tim ist anderer Meinung:

733 T: *((U)) immer kleiner*

Der Anfang seiner Aussage ist hier nicht verständlich, vermutlich wiederholt er seine Aussage, dass ϵ immer kleiner werden soll.

740 L: *Ich hab eben gesagt, also, eigentlich ((U)) winzig klein werden ... es muss ... also es reicht nicht, dass es in diesem breiten Streifen drin ist, es muss auch in dem kleineren Streifen drin sein*

741 T: *Ähm-*

742 L: *Wie klein dürfen die werden?*

743 T: *Dann die Differenz (...) ach, Moment*

744 L: *Wenn ich euch jetzt diese unendlich vielen Streifen geben würde, mit welchem würdet ihr das überprüfen?*

745 D: *[Mit dem kleinsten]*

746 M: *[Mit dem kleinsten]*

Plötzlich sind die beiden Studentinnen der Meinung, dass der kleinste Streifen als Bedingung verwendet werden sollte.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 7) *Für den kleinsten ϵ -Streifen muss es ein n geben, so dass ab diesem n alle Folgenglieder in dem ϵ -Streifen liegen, dann heißt die Folge konvergent. Wenn es das nicht gibt, dann ist sie nicht konvergent.*

Mündlich haben die Studierenden nun gesagt, dass sie Bedingung mit dem kleinsten Streifen überprüfen würden. An der schriftlichen Charakterisierung hat sich erneut nichts geändert.

Sowohl Tim als auch Merle äußern hier ihre dynamische Vorstellung von immer kleiner werdenden ϵ -Streifen. Tim scheint eine robuste Vorstellung aufgebaut zu haben. Die beiden Studentinnen hingegen sagen teilweise, dass sie einen großen Streifen verwenden würden, in dem alle Werte liegen, wohingegen sie am Ende der Phase vorschlagen, den kleinsten ϵ -Streifen zu verwenden.

Phase 11.5: Mündliche Entwicklung der finalen Charakterisierung gemeinsam mit der Lehrperson In dieser Phase diskutiere ich weiter mit den Studierenden darüber, welcher oder welche Wert(e) für ϵ betrachtet werden sollen. Tim bringt zwar kurz die Idee ein, alle Werte für ϵ zu betrachten, doch direkt im Anschluss weiß er schon nicht mehr, was er gesagt hat. Letztendlich bringe ich die Idee noch einmal ein, woraufhin die Studierenden sie annehmen.

747 L: *Okay, aber wenns unendlich viele sind? Vielleicht gibt es gar keinen kleinsten ... könnt ihr einfach ((U)) irgendwann zu klein zum Basteln natürlich, aber ich könnte ja, wenn ich irgendwie ein Epsilon hab, kann ich ja immer noch ein kleineres finden*

748 T: *Dann können wir ja eben ... das ist ja auch halt die Sache, die son bisschen Kopfschmerzen bereitet*

Tim scheint mein Argument, dass es bei unendlich vielen Streifen nicht unbedingt einen kleinsten geben muss, nachvollziehen zu können, doch ihm fällt keine Lösung des Problems ein.

Merle kommt auf eine der schließlich konstanten Beispielfolgen zu sprechen:

755 M: *Aber ist ja ... wo hab ich denn das? Ich hab ja zum Beispiel diese eine Abbildung, wo ich den nur-, nur den festen Wert habe, da ist es ja einfach eindeutig eins, weils da keinen-, also ich hab hier vorne diese Ausnahme gegen, gegen Unendlich hab ich dann eins ... und da ist ja gar keine Differenz vorhanden*

756 L: *Das heißt diese hier wären dann eigentlich in jedem Streifen mit drin, oder? ... Ab hier irgendwo*

757 M: *Ja*

758 L: *Könnt ich den Streifen so klein wählen, wie ich will*

759 T: *[Ja]*

760 D: *[Ja]*

761 L: *Sind auf jeden Fall drin*

762 T: *Das ginge da*

Merle sagt, dass bei dieser Beispielfolge gegen Unendlich „keine Differenz vorhanden“ ist. Um den Erkenntnisprozess der Gruppe voranzutreiben bringe ich in die Diskussion ein, dass bei der betrachteten Beispielfolge also bei jedem noch so kleinen Streifen die Folgenlieder ab irgendeiner Stelle alle innerhalb des Streifens liegen würden. Diese Aspekte haben die Studierenden zuvor auch bereits selbst geäußert. Sie sind an dieser Stelle auch alle drei einverstanden.

763 L: *Und bei den anderen?*

764 M: *Ja, da ist es ja auch so, weil ich guck ja nur auf das Ende, also-. Was heißt aufs Ende? Ich gucke ja irgendwohin ... wo ich nichts mehr erkennen kann, dass da ein Unterschied ist*

765 L: *Hmhm (verstanden)*

766 M: *Also, das davor, das interessiert mich ja eigentlich relativ wenig bei ner Konvergenz, weil es ja nur darum geht, dass die Differenz null ist ... ist zwar nicht wirklich null, aber es soll ja null sein und das hier gegen eins läuft, also laufen die unterschiedlichen Zahlen und die feste Zahl gegen eins ... also interessiert mich doch nur der Grenzwert, oder?*

767 L: *Ist schon richtig, genau. Es interessiert einen nicht das, was am Anfang passiert, sondern, so wie er gesagt hat, irgendwie ab irgendeinem n*

768 T: *Ja, das ist lustig*

Mit meiner Frage nach den anderen Beispielfolgen ziele ich eigentlich darauf ab, dass die Studierenden darauf antworten, bei welchen der Streifen die Bedingung erfüllt ist, dass jeweils ab einem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Merle geht in ihren Antworten jedoch auf einen anderen Aspekt ein, und zwar darauf, dass nicht alle Folgenglieder in dem oder den Streifen liegen müssen, sondern nur die „am Ende“.

769 L: *Aber die Frage ist noch welche ... welches oder welche Epsilon wir jetzt irgendwie nehmen (...) und das Problem war ja eben, wenn wir irgendein Epsilon wählen, können wir immer noch ein Kleineres finden*

770 T: *Achso, also macht das keinen Sinn (...) nja (bejahend) und was ist jetzt die Lösung?*

Ich bringe erneut selbst ein Argument in die Diskussion ein, das die Studierenden vorher jedoch auch bereits genannt hatten. Tim sieht das Problem ein, scheint aber ratlos.

772 L: *Wenn wir nicht sagen können, welches das Kleinste ist-*

773 T: *Dann nehmen wir halt alles ... wenn wir kein kleines haben ... was das Kleinste ist ... dann gucken wa mal*

Anscheinend macht Tim hier den Vorschlag, jeden möglichen Streifen zu betrachten. Er weiß jedoch direkt im Anschluss bereits nicht mehr, was er gesagt hat:

774 L: *Du hast eben gesagt wir nehmen alles*

775 M: *Das war schon mal gut*

(lachen)

776 T: *Was habe ich vorhin gesagt?*

Ich versuche daraufhin, diesen Aspekt gemeinsam mit den Studierenden noch einmal zu wiederholen:

777 L: *Also, wir können, wir können kein kleinstes-*

778 D: *Definieren*

779 L: *Kein Kleinstes irgendwie auswählen, weil dann finden wir ja immer noch nochmal ein Kleineres*

780 T: *((U)) nehmen wir ein kleines einfach*

781 L: *Aber dann ist wieder die Frage welches ist kleines? Das hier ist schon mal klein-*

782 M: *Wir müssen halt zeigen, dass das danach kommt immer noch kleiner ist*

783 T: *Ja*

Sie nennen nun wieder andere Aspekte, die zuvor bereits diskutiert und zumindest teilweise verworfen wurden. Tim schlägt vor, einen kleinen Wert zu wählen und Merle redet von kleiner werdenden Werten für ϵ .

Da Tim bereits den Vorschlag gemacht hat, alle Werte für ϵ zu betrachten und ich an dieser Stelle keine weiteren Fortschritte mehr erwarte, bringe ich selbst noch einen Aspekt ein:

786 L: *Überlegt mal, was ... was passiert, wenn man einfach-, wenn man nicht sagt wir nehmen ein Epsilon, sondern wir nehmen mehrere ... die Frage ist jetzt wie viele?*

787 M: *Unendlich*

788 T: *Jetzt sag nicht Unendlich*
(lachen)

789 M: *Ist aber so*

790 L: *Welche, welche würdest du dann nehmen, wenn du sagst Unendlich? ... Wie würdest du das sagen? Was muss für das Epsilon gelten?*

791 M: *Ja, ich würde beim-*

792 D: *Es muss immer kleiner werden*

Ich schlage vor, nicht nur einen Wert für ϵ zu betrachten, sondern mehrere. Merle antwortet, dass unendlich viele Werte betrachtet werden sollten. Denise spricht dann erneut von „immer kleiner“, was sich hier vermutlich auf ϵ bezieht.

Kurz darauf redet sie dann von Abständen:

803 D: *Ja, wir haben auch schon gesagt, dass der Abstand immer kleiner werden muss, aber der-, der maximale Abstand ist ja hier eins*

804 M: *Aber das stimmt doch nicht, weil hier immer ((U))*

805 L: *Genau. Da wird er nicht immer kleiner ... aber wenn wir hier jetzt ... son Streifen ... drauflegen (...) sind die hier ja drin*

806 M: *Ja*

807 L: *Also der Abstand muss nicht immer kleiner werden*

808 D: *Kann auch wieder größer werden, also-, dann kriegt jedes n seinen eigenen Abstand ... bis kein Abstand mehr vorhanden ist*

809 L: *Kann auch wieder größer werden-*

810 D: *Oder es muss dazu führen, dass kein Abstand mehr vorhanden ist ... ach, ich weiß es nicht*

Der Aussage, dass der Abstand immer kleiner wird, widerspricht Merle direkt.

Schließlich nenne ich ihnen den noch fehlenden Aspekt, da die Diskussion schon recht lange andauert und sie mehrmals eine Idee geäußert haben, die diesem nahe kommt, und diese lediglich nicht weitergeführt und präzise formuliert haben:

811 L: *Versucht einfach mal zu überlegen jetzt mit dem-, mit dem Epsilon war ja noch das Problem ... mit der Frage wie wählen wir das? ... und der-, damits beliebig ... klein irgendwie wird und ein Kleinstes kann man nicht wählen ... was da der Trick ist: man sagt ... man nimmt einfach alle Epsilon, die größer null sind. Dann ist auf jeden Fall das beliebig kleine mit dabei. Dann hat man diese beliebig kleinen mit da drin*

Die Studierenden machen mich darauf aufmerksam, dass einer von ihnen zuvor bereits $\forall \epsilon > 0$ notiert hatte.

812 T: *Das haben wir uns schon so gedacht*
(lachen)

813 T: *Was denn?*

814 D: *Das hast du sogar aufgeschrieben*

Tatsächlich hatte Tim $\forall \epsilon > 0$ aufgeschrieben, jedoch hatte es keine seiner Kommilitoninnen in der Formulierung verwendet und Tim hatte mir weder seine Formulierung gezeigt noch diesen Aspekt in meiner Anwesenheit in die Diskussion eingebracht.

Zwischenstand:

(Charakterisierung 8) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n , so dass ab diesem n alle weiteren Folgenglieder in dem ϵ -Streifen liegen.*

Wieder geschieht die Veränderung der Charakterisierung mündlich.

Hier lässt sich nicht ganz eindeutig sagen, ob die Studierenden selbst die Erkenntnis gemacht haben, dass die Bedingung für alle $\epsilon > 0$ erfüllt sein soll oder ob ich diesen Aspekt eingebracht habe. Erstmals hat Tim die Idee geäußert, auch wenn er sich direkt im Anschluss bereits nicht mehr daran erinnern kann, was er vorgeschlagen hat. Im Vergleich zu der von Tim aus einem Buch abgeschrieben Definition handelt es sich definitiv um einen Erkenntnisfortschritt, da der Student die abgeschriebene Definition vermutlich nicht verstanden hatte.

Phase 12: Aufschreiben der finalen Charakterisierung

Die Studierenden widmen sich in der kommenden Phase nun dem Aufschreiben der finalen Charakterisierung. Dies gelingt ihnen ohne meine Unterstützung.

826 X: *Macht euch mal Stichpunkte. Dann könnt ihr die Stichpunkte besser ... in die logische Reihenfolge bringen*

827 T: *Okay, also, wir nehmen alle Epsilon null*
(lachen)

828 T: *Äh, Epsilon*

829 D: *Größer null*

830 T: *Alle Epsilon ... so*

831 D: *Größer null*

Ein Student einer anderen Gruppe macht den Vorschlag, dass sie sich Stichpunkte machen sollen. Die Gruppe ist sich einig, dass die Charakterisierung damit beginnt, alle $\epsilon > 0$ zu betrachten.

834 M: *Epsilon größer null und dann dieses*

835 D: *Und dann muss der Abstand-*

836 M: *a n minus-*

837 T: *a n minus x muss kleiner als Epsilon sein ... also es liegt-, es liegt zwischen, warte ... wollt ich jetzt gesagt haben*

838 D: *Liegt zwischen Epsilon plus x und Epsilon minus x*

839 T: *Dankeschön ... Epsilon ... hä? Ergibt das Sinn?*

840 D: *Ne (verneinend), einmal nach unten und einmal nach Hause, äh, nach oben*

Doreen hatte auch im Vorfeld schon die Bedingung $x - \epsilon < a_n < x + \epsilon$ verwendet. Vermutlich verspricht sie sich in Turn 838 und meint dies. Tim kann ihre Aussage „liegt zwischen $\epsilon + x$ und $\epsilon - x$ nicht nachvollziehen. Er spricht von der Bedingung $a_n - x < \epsilon$.

842 D: *Und jetzt müssen wir nur noch, dass wir für-, ab einem bestimmten n (...) kein großer Ausreißer*

Doreen erkennt hier, welcher Aspekt nun in der schriftlich formulierten Charakterisierung noch fehlt.

Sie lauschen kurz der Diskussion einer Nachbargruppe:

847 M: *Das habe ich jetzt gar nicht verstanden. Was haben-, was haben die gesagt?*

848 D: *n größer als Epsilon vielleicht?*

Die Studentin glaubt, bei der anderen Gruppe die Bedingung $n > \epsilon$ verstanden zu haben. Ob sie das selbst für sinnvoll hält und wie die Meinung ihrer Gruppenmitglieder dazu ist wird im weiteren Verlauf nicht deutlich.

849 T: *Ich habe keine Lust irgendwas zu folgern. Ich weiß was ein Grenzwert ist*

Tim äußert hier, dass er keine Lust mehr hat. Ich komme noch einmal dazu und unterstütze sie dabei, die Charakterisierung aufzuschreiben:

850 L: *Das einzige, was jetzt bei euch jetzt noch fehlt, ist dieses, was du gesagt hast mit ab irgendeinem n*

851 T: *Ja ... ab irgendeinem n liegen halt alle ... ah, alle ... ähm-*

854 D: *Für a n-*

855 T: *n, m, n-*

856 D: *Plus eins ist größer als dieses ((U))*

857 T: *Ist ... a n plus x kleiner als Epsilon ... nicht?*

858 L: *Ähm ... a n plus x?*

859 T: *Oder minus?*

860 L: *Ihr habt ja hier immer von-*

861 T: *Warte, es muss größer sein, ne (fragend)*

Tim schwankt zwischen „Ab irgendeinem n ist $a_n + x < \epsilon$ “, „Ab irgendeinem n ist $a_n - x < \epsilon$ “ und „Ab irgendeinem n ist $a_n - x > \epsilon$ “. Da Doreen unterbrochen wird, ist ihre Aussage unvollständig. Sie scheint a_{n+1} in die Bedingung aufnehmen zu wollen.

862 M: *Ich mach einfach hier den Betrag, dann ... das dahin, oder?*

863 T: *Ah, ja, ja, mein ich doch*

864 M: *So und dann ((U))*

865 L: *Genau*

Merle hat zunächst „ $\forall \epsilon > 0$ gilt ab irgendeinem n $a_n - x < \epsilon$ “ notiert. Sie ergänzt dann Betragsstriche um $a_n - x$. Tim stimmt ihr direkt zu und übernimmt ihren Vorschlag.

868 T: *Aber da muss man doch auch wieder fordern, dass das so ist, oder nicht? Das ist doch irgendwie-*

869 L: *Was muss man fordern, dass das so ist?*

870 T: *Ob wir jetzt-, ob wir sagen okay ... ach, ich weiß es nicht. Das ist- (...) bin irgendwie nur unzufrieden*

871 L: *Noch unzufrieden mit eurer Definition?*

872 T: *Ja*

873 L: *Was stört dich denn daran?*

874 T: *Dass die Ursprungsdefinition schöner war*

(lachen)

875 T: *Ich glaube, ich habe noch zu wenig mit der Unendlichkeit philosophiert*

Tim äußert seine Unzufriedenheit mit der notierten Definition. Er ist sich zum einen nicht sicher, ob sie in dieser Form nun vollständig ist und zum anderen findet er „die Ursprungsdefinition“, womit er vermutlich eine vorherige Version der Charakterisierung meint, schöner.

Ergebnis:

(Finale Charakterisierung) $\forall \epsilon > 0$ gilt ab irgendeinem n $|a_n - x| < \epsilon$

Diese finale Charakterisierung notiert die Gruppe schriftlich als gemeinsames Endergebnis.

In dieser Phase ist es der Gruppe gelungen, das zuvor mündlich erarbeitete formal-mathematisch zu einer Definition zusammenzufügen. Zu erwähnen ist allerdings, dass Tim mit diesem Ergebnis nicht ganz zufrieden ist.

6.2.8 Gruppe 4: Analyse in Bezug auf die Leitfragen

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Hier wird auf alle Textstellen eingegangen, in denen die Studierenden Vorverständnisse zu Konvergenz oder dazu verwandten Begriffen in die Diskussion einbringen. Bei Tim ist dies relativ zu Beginn der Fall. Während seine beiden Kommilitoninnen direkt auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen argumentieren, bringt der Student sein Vorverständnis ein. So zweifelt er ab Turn 15 daran, dass die als konvergent vorgegebene Beispielfolge

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ tatsächlich konvergiert. Anscheinend passt

diese Folge nicht zu seinem Vorverständnis konvergenter Folgen. Ab Turn 34 formuliert er dann als Charakterisierung, Konvergenz heiße, „dass sich das daran anschmiegt“. Diese Formulierung scheint ebenfalls auf seinem Vorverständnis zu beruhen. Dies könnte erklären, warum die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zu seinem Vorverständnis passt. Bei dieser Beispielfolge schmiegen sich die Folgenglieder dem Wert 1 nicht an, sondern ab $n = 50001$ sind die Folgenglieder konstant 1. Seine Kommilitoninnen weisen ihn darauf hin, dass abgesehen von dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle vorgegebenen Folgen laut Aufgabenstellung konvergent sind. Insofern ist den Studierenden dieser Konflikt bewusst, weshalb es sich nach der Einteilung von Oehrtman et al. (2011) um ein *Problem* handelt. Der Student lässt sich dann nach kurzer Zeit von seinen beiden Kommilitoninnen überzeugen und eine Intervention ist nicht nötig.

Kurz darauf gibt es in Turn 44 eine Äußerung von Doreen, bei der nicht ganz deutlich wird, ob diese auf einem Vorverständnis basiert oder ob die Studentin auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen argumentiert. Die Aussage lautet: „Das hat irgendetwas damit zu tun ... für großes n, oder nicht?“. Die Gruppe hat sich zu diesem Zeitpunkt gerade überlegt, dass sie möglicherweise herauskriegen sollen, was Konvergenz bedeutet. Das könnte dazu geführt haben, dass die Studentin ihr Vorverständnis zu Konvergenz abgerufen hat. Kurz darauf bezieht sie sich in Turn 51 dann wieder eindeutig auf die Beispielfolgen, als sie begründet, dass bei der Charakterisierung „Für großes n geht die Folge gegen einen Wert oder ist ein Wert“ der Teil „oder ist ein Wert“ wichtig sei, weil dadurch auch eine der Beispielfolgen, die den Wert 1 annehmen, inbegriffen sei. Es lässt sich also nicht eindeutig feststellen, ob Doreen ihr Vorverständnis einbezieht oder nicht.

Ab Turn 105 bringt Tim Vorwissen, das er laut eigener Aussage in der Veranstaltung „Grundlagen der Geometrie“ in einem Exkurs zum Thema Stetigkeit erworben hat, in

die Diskussion ein. Er schlägt vor, den Begriff der Umgebung für die Formulierung der gesuchten Eigenschaft zu verwenden. Da seine Kommilitoninnen diese Veranstaltung nicht besucht haben, wird sein Vorschlag jedoch verworfen und dieses Wissen geht somit nicht direkt in den Erkenntnisverlauf ein.

Insgesamt entsprechen die Vorverständnisse, die bei dieser Gruppe sichtbar wurden, etwa den erwarteten Vorverständnissen. Insbesondere wurde im Abschnitt 4.1.1 zu den Starting Points des Vorbereitungsworkshops vermutet, dass das *Concept Image* der Workshopteilnehmenden hauptsächlich übliche Beispiele konvergenter Folgen beinhaltet, die monoton sind und den Grenzwert nicht erreichen. Auch wurde in dem Abschnitt die Vermutung aufgestellt, dass vorwiegend Grenzwerte von Funktionen betrachtet wurden. Dass aus der Geometrie-Veranstaltung bei manchen Studierenden Vorwissen zu Stetigkeit und vor allem ϵ -Umgebungen vorhanden ist, ist hingegen unerwartet.

Bei Tim hätte sich das Vorverständnis, das Widersprüche zu dem durch die Beispielfolgen festgelegten Begriff aufweist, hinderlich auf den Erkenntnisprozess auswirken können. Er lässt sich jedoch von seinen Kommilitoninnen davon überzeugen, dass sein Vorverständnis weiterentwickelt werden muss. Dadurch hat das Vorverständnis des Studenten höchstens zu einer Verzögerung des Nacherfindungsprozesses geführt.

3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

Für den Vergleich des tatsächlichen Verlaufs mit dem hypothetischen Verlauf werden beide Verläufe erst einmal schematisch dargestellt. In der schematischen Darstellung des Erkenntnisverlaufs der Gruppe 4 sind alle wichtigen formulierten Charakterisierungen enthalten und alle wesentlichen Aspekte der Diskussion und Erkenntnisse. Dabei wird nicht zwischen den einzelnen Studierenden unterschieden, sondern es wird der Erkenntnisprozess der Gruppe als Ganzes betrachtet. Auf die einzelnen Beispielfolgen, mit denen sich die Gruppe jeweils beschäftigt, wird an dieser Stelle nicht eingegangen, sondern dies geschieht unter der Leitfrage 3. b) ii.

I Charakterisierung über zwei Bedingungen, die durch „oder“ verbunden werden:

Für n gegen Unendlich geht a_n gegen einen festen Wert oder ist ein fester Wert.

Weitere Eigenschaften: Fängt immer bei 1 an
 Der Limes/feste Wert ist 1

II Interventionen

- Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken
 → Idee: Differenz von Folgengliedern zu 1 wird immer kleiner

- Wird die Differenz der Folgenglieder zu 1 bei $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wirklich immer kleiner?
 → Differenz der Folgenglieder zu 1 wird nicht immer kleiner
 → Am Anfang ist das egal

Für n gegen Unendlich geht $a_n - g$ gegen 0

III Überarbeitung der Charakterisierung mithilfe eines Buchs

Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a|$ beliebig klein.

IV Interventionen:

- Was heißt beliebig klein?
 → geht gegen 0 / wird 0 / nicht 0
- ϵ -Streifen

V Erneutes Nachschlagen in einem Buch

Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a| < \epsilon$.

VI Beschäftigung mit der Frage, für welche(n) Wert(e) von ϵ die Bedingung gefordert werden soll mit Unterstützung durch die Lehrperson

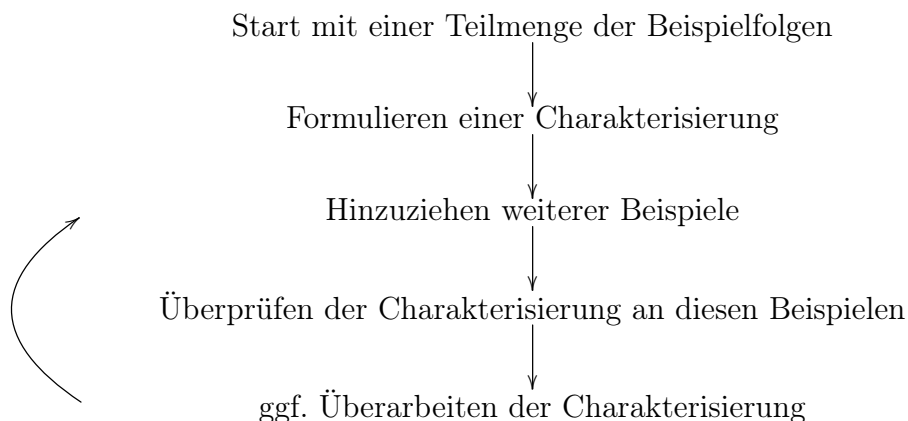
von der Mitte der Streifen bis zum Rand entspricht ϵ
 irgendwo haben wir ein n , wo die Restlichen alle dazwischen liegen
 nebenbei: bei dem Nicht-Beispiel haben wir es nie

- winzig kleiner Streifen
- immer kleiner werdende ϵ
- Bedingung am „kleinsten“ Streifen überprüfen
- $\forall \epsilon > 0$

VII Aufschreiben der finalen Charakterisierung

$\forall \epsilon > 0$ gilt ab irgendeinem n $|a_n - x| < \epsilon$

Die verschiedenen Varianten der hypothetischen Erkenntnisverläufe haben hingegen alle die folgende Struktur gemeinsam:



i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

Auch bei dieser Gruppe zeigt sich direkt zu Beginn ein großer Unterschied zwischen dem tatsächlichen und den hypothetischen Erkenntnisverläufen. In allen drei Varianten des hypothetischen Verlaufs war vermutet worden, dass die Studierenden zunächst eine Teilmenge der vorgegebenen Beispielfolgen betrachten und eine Charakterisierung basierend auf dieser Teilmenge von Beispielen formulieren. Tatsächlich haben die Studierenden jedoch von Anfang an alle der Beispielfolgen betrachtet und in ihrer Charakterisierung miteinbezogen.

Ein weiterer Unterschied zu den hypothetischen Verläufen besteht darin, dass bei den Studierenden kein systematisches Überprüfen der von ihnen formulierten Charakterisierungen an den vorgegebenen Folgen erkennbar ist. In Turn 180 macht eine Studentin den Vorschlag, die gesuchte Eigenschaft dadurch zu charakterisieren, dass die Differenz der Folgenglieder zum Wert 1 immer kleiner wird. Diese Eigenschaft trifft auf mehrere der vorgegebenen Beispielfolgen nicht zu. Insbesondere gibt es bei der Beispielfolge

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ auch kein N , ab dem für alle weiteren

Folgenglieder gilt, dass ihre Differenz zum Wert 1 immer kleiner wird. Diese Problemstelle fällt somit unter Situation (B) aus Tabelle 4.2. Da sie den Studierenden nicht bewusst ist, lässt sie sich als *Problematic Issue* einordnen. Hier wäre es jedoch möglich, dass den Studierenden das Problem noch selbst aufgefallen wäre, wenn ich nicht so schnell mit einer Intervention eingegriffen hätte. Ich habe sie in Turn 189 dazu aufgefordert, nochmal zu gucken, ob bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die betrachtete Differenz wirklich immer kleiner wird. Die Studierenden erkennen daraufhin sofort, dass dies nicht der Fall ist. Insofern kann die Intervention schon einmal als erfolgreich bewertet werden. Aus dem *Problematic Issue* wird dadurch ein *Problem*. Es gelingt den Studierenden zwar nicht, das Problem auch unmittelbar zu lösen, doch das liegt auch daran, dass sie selbst die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einbeziehen und sich zunächst darauf fokussieren. Schließlich gelingt ihnen dann auch eine Lösung des Problems, indem sie formulieren, dass die Differenz der Folgenglieder zu 1 gegen 0 geht. Diese Charakterisierung erfüllt zwar noch nicht die Anforderungen an eine präzise mathematische Definition, doch das Problem, dass die Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, wurde gelöst. Die Studierenden wurden also nicht nur auf die Problematik aufmerksam, sondern sie konnten diese auch bewältigen.

Auch die späteren Charakterisierungsversuche testen die Studierenden nicht systematisch an den vorgegebenen Beispielfolgen sowie dem Nicht-Beispiel.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Eine Übersicht darüber, welche der vorgegebenen Folgen die Studierenden jeweils in welchen Phasen in ihren Argumentationen verwendet haben, ist in Tabelle 6.4 zu finden. Pro Phase ist jede Beispielfolge höchstens einmal aufgeführt, auch wenn sie möglicherweise an mehreren Stellen in der Diskussion zu finden war.

Bei dieser Gruppe fällt auf, dass es deutliche Unterschiede in der Quantität und

Phase	Folge
1	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$
2	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
3	-
4	$\left((d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases} \right)$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$
5	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
6	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
7	-
8	-
9	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$
10	-
11	$\left((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases} \right)$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$
12	-

Tabelle 6.4: Übersicht über die verwendeten Folgen bei Gruppe 4

Intensität, in der sie auf die einzelnen Beispielfolgen eingehen, gibt. Auf die beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind die Studierenden kein einziges Mal eingegangen. Das könnte daran liegen, dass es sich bei diesen beiden Folgen um eher typische Beispiele gegen 1 konvergenter Folgen handelt. Vermutlich bestand das *Concept Image* der Studierenden zu konvergenten Folgen vor dem Workshop überwiegend aus genau solchen prototypischen

Folgen, die monoton sind und den Grenzwert nie annehmen. Daher gab es möglicherweise keinen Bedarf, über diese Beispielfolgen zu diskutieren. Die Beispielfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurde vermutlich einmal kurz von den Studierenden erwähnt, und zwar gemeinsam mit den beiden Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die alle drei Folgenglieder enthalten, die dem Wert 1 entsprechen. Die Studierenden begründen daran, dass bei der Charakterisierung „für große n geht die Folge gegen einen Wert oder ist ein Wert“ der Aspekt „oder ist ein Wert“ wichtig sei. Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurde in der selben Phase ein weiteres Mal von der Gruppe diskutiert. Ein Studierender zweifelt, wie bereits erwähnt, zunächst daran, dass es sich bei dieser Beispielfolge um eine konvergente Folge handelt. Dabei wird nicht ganz klar, weshalb er daran zweifelt. Er spricht aber kurze Zeit später davon, Konvergenz heiße, „dass sich das daran anschmiegt“. Möglicherweise passt die Beispielfolge nicht zu dieser persönlichen *Concept Definition* des Studierenden, da sich die Folgenglieder eben nicht anschmiegen, sondern ab 500001 konstant 1 sind. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird von den Studierenden selbst einmal in die Diskussion eingebracht. Es wird nicht ganz klar, aus welchem Grund der betreffende Studierende der Meinung ist, dass diese Folge „total aus der Reihe“ fällt. Seine Kommilitoninnen gehen in ihren Antworten auf zwei verschiedene Aspekte ein. Zum einen sind sie der Meinung, dass die Tatsache, dass das zehnte Folgenglied dem Wert 2 entspricht, der zu dem Zeitpunkt aktuellen Charakterisierung nicht widerspreche, da zehn kein großes n sei. Zum anderen erläutern sie, dass die Abstände der Folgenglieder zu 1 sehr wohl kleiner werden würden, obwohl die Folgenglieder abwechselnd kleiner und größer als 1 sind, da der Betrag genommen würde. Außerdem habe ich zu einem späteren Zeitpunkt anhand Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und verschiedenen ϵ -Streifen Fragen an die Studierenden gestellt, in welchen der Streifen die Folgenglieder enthalten sein müssen und ob alle Folgenglieder enthalten sein müssen. An dieser Stelle hätte ich jedoch auch eine andere Beispielfolge verwenden können. Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich am häufigsten von allen Beispielfolgen in der Diskussion wiederfinden. Die Studierenden bringen diese Folge von sich aus in drei verschiedenen Phasen ein und ein weiteres Mal mache ich sie auf diese Folge aufmerksam, da die von ihnen formulierte Charakterisierung, der Abstand der Folgenglieder zu 1 werde immer kleiner, auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft. Auf diese Intervention wird noch bei der Beantwortung der Leitfrage 3. b) v. eingegangen. In der ersten Phase spricht eine Studentin zunächst über die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Vergleich zu dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie wundert sich im ersten Moment darüber, dass es sich bei der einen Folge um ein Beispiel und bei der anderen um ein Nicht-Beispiel handelt, wo doch beide „die gleichen Bedingungen“ haben. Damit meint sie vermutlich, dass beide Folgen für Vielfache von 10 konstant sind und für die übrigen natürlichen Zahlen durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind. Ihr fällt dann kurz darauf selbst ein Unterschied zwischen diesen beiden Folgen auf. In derselben Phase erwähnen die Studierenden die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vermutlich noch einmal, und zwar wie oben bereits erwähnt als eine Folge, die Folgenglieder enthält, die dem Wert 1 entsprechen. In Phase 2 kommen sie erneut auf diese Beispielfolge zu sprechen. Einem Studenten fällt auf, dass diese Folge sich dem Wert 1 sowohl anschmiegt als auch diesen erreicht. Sie schlussfolgern, dass in ihrer Charakterisierung „Für große n geht a_n gegen einen festen Wert oder ist ein fester Wert“ auch beide einzelnen Bedingungen erfüllt sein können, dass es sich also um ein einschließendes oder handeln müsse. In Phase 6 betrachten die Studierenden erneut Differenzen der Folgenglieder zum Wert 1. Dabei ist ihnen die Tatsache, dass bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht

immer kleiner wird, bewusst und sie bemühen sich um eine andere Charakterisierung. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als einziges Nicht-Beispiel lässt sich in drei verschiedenen Phasen des Erkenntnisverlaufs identifizieren. Abgesehen von dem zuvor bereits erwähnten Vergleich mit der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehen die Studierenden in der ersten Phase noch ein weiteres Mal kurz auf diese Folge ein. Dort argumentiert ein Student – wenn auch sehr knapp – warum die von ihnen formulierte Eigenschaft auf diese Folge nicht zutrifft. In Phase 5 grenzen sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insofern von dem Nicht-Beispiel ab, dass bei ersterer lediglich für ein einziges Folgenglied der Wert 2 angenommen wird, während es bei dem Nicht-Beispiel bei jedem zehnten Folgenglied der Fall sei. In Phase 11 erwähnen die Studierenden die Folge noch einmal kurz im Zusammenhang mit den ϵ -Streifen. Eine Studentin sagt, dass der Wert von ϵ , der beim Überprüfen der Bedingung verwendet wird, so klein sein muss, dass die Folgenglieder, die dem Wert 2 entsprechen, außerhalb des ϵ -Streifens liegen. Damit wollen sie sicherstellen, dass die Charakterisierung auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass vor allem die Beispielfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für den Erkenntnisprozess der Studierenden von Bedeutung waren. So haben sie an ersterer Folge unter anderem erkannt, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht bei jeder Beispielfolge immer kleiner wird. Auch ist diese Folge als eine von denjenigen Beispielen, bei denen der Grenzwert 1 angenommen wird, wichtig für genau diese Erkenntnis, dass unter die gesuchte Eigenschaft auch solche Folgen fallen können, bei denen es Folgenglieder gibt, die dem Wert 1 entsprechen. Das Nicht-Beispiel hingegen war im wesentlichen zum Vergleich beziehungsweise zur Abgrenzung bedeutsam. Als zusätzliche Folge haben die Studierenden an einer Stelle darüber gesprochen, statt der Folge

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ die Folge zu betrachten, die für $n = 7000000$ dem

Wert 2 entspricht und für alle übrigen natürlichen Zahlen durch den Term $1 + (-\frac{1}{2})^n$ definiert ist. Sie diskutieren zu dem Zeitpunkt über den Ausdruck „für große n “. Zumindest manche der Studierenden scheinen an dieser zusätzlichen Folge zu argumentieren, dass nicht klar ist, was „große n “ sind. Dieser Aspekt hätte theoretisch auch an der Beispielfolge

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ diskutiert werden können, daher ist

es gut vertretbar, die von den Studierenden eingebrachte Folge nicht unbedingt als zusätzliche Beispielfolge in das Konzept des Workshops aufzunehmen. Da die Studierenden nicht alle vorhandenen Beispielfolgen überhaupt genutzt haben, könnte darüber nachgedacht werden, zumindest eine der beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu streichen oder zu ersetzen. Unbedingt beibehalten sollten auf Basis dieses Erkenntnisprozesses das Beispiel $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein Nicht-Beispiel.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Hier soll untersucht werden, ob im Fall der betrachteten Gruppe 4 die Aufgabe derart aufgefasst wurde, dass eine gemeinsame Eigenschaft lediglich für die explizit vorgegebenen Beispielfolgen gefunden werden sollte oder ob eine Eigenschaft allgemeinerer Form gefunden werden sollte, die insbesondere auch auf die vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Dazu wird auf alle Textstellen eingegangen, in denen es Hinweise auf die generische oder

nicht-generische Betrachtung der Beispielfolgen gibt.

Ab Turn 148 sprechen die Studierenden direkt über diesen Aspekt. Eine Studentin ist der Meinung, dass sie die Gemeinsamkeiten aller konvergenter Folgen aufschreiben sollen, während ihre Kommilitonin der Ansicht ist, dass sie Gemeinsamkeiten aller hier abgebildeter Folgen aufschreiben sollen. Die Gruppe einigt sich an dieser Stelle lediglich darauf, dass sie notieren, dass der „feste Wert“ in diesem Fall 1 ist. Mindestens eine Studentin sieht die Beispiele also hier als generisch an. Eine andere Studentin spricht wie bereits erwähnt in Turn 207 über eine etwas abgewandelte Beispielfolge. Diese Abänderung spricht ebenfalls für eine generische Betrachtung der Beispielfolgen. Der Studentin scheint klar zu sein, dass die zu formulierende Eigenschaft auch auf die abgeänderte Folge zutreffen soll und nicht ausschließlich auf die vorgegebenen Beispielfolgen. Eine weitere in Bezug auf diese Leitfrage interessante Textstelle findet sich ab Turn 371. Die Studierenden haben zuvor gesagt, dass es nicht schlimm sei, dass bei einer der Beispielfolgen ein Folgenglied außerhalb eines konkreten ϵ -Streifens liegen würde, denn „ n geht ja gegen Unendlich, das was davor ist, interessiert uns eigentlich nicht“. Auf meine Nachfrage, ab wann es uns denn interessiere, antwortet eine Studentin „Wenns größer als 7000000 ist“. Das erweckt zunächst den Eindruck, dass die Studentin die Beispielfolgen hier nicht als generisch auffasst. Kurz darauf wird dieser Eindruck jedoch revidiert. Meine Rückfrage, ob es unbedingt 7000000 sein müsse, verneinen sowohl diese Studentin als auch ihre Kommilitonin, es könne auch mehr oder weniger sein und würde davon abhängen, wo noch ein Ausreißer sei. Abgesehen von der gerade erwähnten Textstelle haben die Studierenden dieser Gruppe in keiner ihrer mündlichen oder schriftlichen Charakterisierungen eine Eigenschaft formuliert, die lediglich auf die konkret vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, sondern es handelt sich immer um allgemeine Eigenschaften. Alles in allem ist davon auszugehen, dass die Gruppe die Beispielfolgen als generisch aufgefasst hat.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Ab Turn 47 wird deutlich, dass die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen in zwei Gruppen klassifizieren. Bei dem Formulierungsvorschlag „geht die Folge gegen einen Wert oder ist ein Wert“ wird die gesuchte Eigenschaft durch zwei Bedingungen ausgedrückt, die durch „oder“ miteinander verbunden sind. Es handelt sich dabei um eine erwartete Problemstelle, die in Tabelle 4.2 unter Situation (C) aufgeführt ist. Zunächst ist den Studierenden die Problematik nicht bewusst, weswegen es sich im Sinne von Oehrtman et al. (2011) um ein *Problematic Issue* handelt. Wie in Tabelle 4.2 für Situation (C) vorgesehen habe ich die Studierenden dazu aufgefordert, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Die Studierenden äußern zunächst, dass sie kein Bedürfnis haben, etwas an der Charakterisierung zu verändern. Sie kommen meiner Aufforderung schließlich dennoch nach und versuchen, eine einzige geeignete Bedingung zu finden. Sie haben zunächst keine Idee, was eine solche Bedingung sein könnte. Dann bringt jedoch eine Studentin den Vorschlag ein, die Differenz der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Auch wenn ihr erster Formulierungsvorschlag „die Differenz der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner“ nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, so hat sie dennoch Recht, dass

es sich nur noch um eine einzige Bedingung handelt und auch der Fall mit inbegriffen ist, dass der Wert 1 erreicht wird. Die Betrachtung dieser Differenz ist auch eine sehr gute Idee, insofern kann die Intervention als Erfolg gewertet werden. Anschließend formulieren die Studierenden die Eigenschaft immer nur noch durch eine einzige Bedingung. Daher ist es nicht nötig, für diese Situation eine weitere Intervention einzusetzen.

Insgesamt gibt es bei dieser Gruppe zwei Hinweise darauf, dass Veränderungen der Aufgabenstellung und der Unterstützungsangebote sinnvoll sein könnten. Zum einen haben sie die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in zwei Gruppen klassifiziert. Zum anderen haben sie auch nach der Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken, kein Bedürfnis, ihre Formulierung zu überarbeiten. Die Veränderungen werden in Abschnitt 6.3 präsentiert.

v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Zu Beginn kommt bei den Studierenden die Frage auf, was sie machen sollen. Ein Studierender beginnt daraufhin mit „konvergiert heißt...“. Das bedeutet, dieser Studierende versteht die Aufgabenstellung mit großer Wahrscheinlichkeit so, dass sie formulieren sollen, was Konvergenz heißt. Kurz darauf wird dies als Vermutung auch noch explizit geäußert. Anschließend formuliert die Gruppe eine erste Version der Charakterisierung. Ab Turn 146 sprechen die Studierenden über weitere Gemeinsamkeiten der Beispielfolgen. Teilweise scheinen sie zu versuchen, möglichst viele Gemeinsamkeiten der Folgen herauszufinden. Sie äußern alle noch einmal ihre Meinung dazu, was hier gefordert ist. Eine Meinung ist, dass sie Gemeinsamkeiten aller konvergenter Folgen finden sollen. Ein anderer Studierender ist der Ansicht, sie sollen Gemeinsamkeiten aller hier abgebildeter Folgen finden. Der dritte Studierende hingegen denkt, dass sie die Definition notieren sollen. Das, was sie zwischendurch jeweils aufschreiben, ist auf jeden Fall im Sinne der intendierten Aufgabenstellung. In Turn 420 merkt ein Gruppenmitglied an, dass die zu dem Zeitpunkt aktuelle Charakterisierung seiner Meinung nach noch nicht ausreicht, da sie keine „Rechenvorschrift“ enthält, mit der bei irgendeiner Folge herausgefunden werden kann, ob sie konvergiert. All diese Textstellen sprechen dafür, dass die Gruppe die Aufgabenstellung in der Art verstanden hat, wie sie gemeint war.

Nach der Formulierung einer ersten Charakterisierung beginnt die Gruppe eigenständig damit, diese zu verbessern. Dort ist eine Eigendynamik zu beobachten. Kurz darauf versuchen sie auch nach einer Intervention noch einmal, ihr Zwischenergebnis zu überarbeiten. Irgendwann kommen die Studierenden dieser Gruppe jedoch an einen Punkt, wo sie mit ihrer Charakterisierung zufrieden sind und kein Bedürfnis mehr haben, noch etwas daran zu verändern. Das könnte auch daran liegen, dass sie ihre Charakterisierung zumindest teilweise aus Büchern abgeschrieben haben. Sie sehen keinen Unterschied zwischen ihrer Charakterisierung und der Definition aus dem Buch, sie zweifeln nicht daran, dass die Definition aus dem Buch korrekt ist und somit besteht für sie auch kein Anlass, an ihrer Charakterisierung etwas zu ändern. Diese Problematik lässt sich aber nicht unbedingt auf die Aufgabenstellung an sich zurückführen, auch eine anders

formulierte Aufgabenstellung hätte bei dieser Gruppe vermutlich nicht zu einem anderen Verlauf des Erkenntnisprozesses geführt.

Auf die angedeuteten Problemsituationen und die eingesetzten Unterstützungen wird nun genauer eingegangen. Ab Turn 22 benutzen die Studierenden sowohl in ihrer Diskussion als auch bei mündlich oder schriftlich formulierten Charakterisierungen immer wieder die Ausdrücke „für große n “ oder „für n gegen Unendlich“. Hierbei handelt es sich um eine zu unpräzise Formulierung. Dies gehört zu den im Vorfeld erwarteten Problemstellen und lässt sich in Tabelle 4.2 unter Situation (D) einordnen. Bei dem erstgenannten Ausdruck wird den Studierenden ab Turn 82 eigenständig bewusst, dass dieser unpräzise ist. Somit handelt es sich nach Oehrtman et al. (2011) um ein *Problem*. Sie ersetzen ihn dann durch „für n gegen Unendlich“. Dennoch sprechen sie auch zu späteren Zeitpunkten immer mal wieder von „großen n “. Daher interveniere ich diesbezüglich. Wie geplant frage ich, ob mit der Charakterisierung der Studierenden für irgendeine Folge überprüft werden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Da die Studierenden diesen Aspekt bereits selbst diskutiert haben, und ein Student diesen dennoch beibehalten möchte, konkretisiere ich meine Frage noch. Ich frage nach, was „große n “ sind und ob 7000000 ein „großes n “ ist. Tatsächlich sind die beiden Studentinnen unterschiedlicher Ansicht, ob 7000000 ein großes n ist oder nicht, was im Sinne der Intervention positiv ist. Die Studierenden finden zwar an dieser Stelle keine Lösung des Problems, doch zumindest scheint ihnen bewusst zu werden, dass „für große n “ unterschiedlich interpretiert werden kann.

Die letzte Problemstelle ist diejenige, mit der die Studierenden am meisten Zeit verbringen. Zwischen den Studierenden sind dabei zwischendurch Unterschiede vorhanden. Ab Turn 227 sind zunächst alle Gruppenmitglieder mit der Charakterisierung einverstanden, dass für n gegen Unendlich $a_n - g$ gegen 0 geht. Diese Charakterisierung ist nicht so präzise, dass damit für jede beliebige Folge eindeutig entschieden werden könnte, ob sie die Bedingung erfüllt oder nicht. Somit fällt diese Problemstelle unter Situation (D) aus Tabelle 4.2. Zusätzlich besteht noch das Problem, dass sie beim Notieren der Differenz $a_n - g$ keine Betragsstriche verwendet haben. Da den Studierenden beides in dem Moment nicht bewusst ist, handelt es sich in jedem Fall um ein *Problematic Issue*. Auf die fehlenden Betragsstriche werden sie dann aufmerksam, als sie in einem Analysis-Buch nachschlagen. Gleichzeitig übernehmen sie aus dem Buch auch den Ausdruck „wird beliebig klein“ anstelle von „geht gegen 0“. Auch dieser Ausdruck ist in gewissem Sinne noch unpräzise, was den meisten Studierenden wieder nicht bewusst ist. Lediglich ein Studierender äußert in Turn 420, dass er eine „Rechenvorschrift“ bräuchte, um bei irgendeiner Folge nachweisen zu können, ob sie konvergiert.

Etwas später hat die Gruppe als Charakterisierung „Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a|$ beliebig klein“ aus einem Buch übernommen. Zum einen weil sie diese Formulierung nicht eigenständig entwickelt haben und zum anderen weil die Formulierung auch unterschiedlich interpretiert werden könnte, setze ich hier eine ähnliche Intervention ein und frage in Turn 345 nach, was „beliebig klein“ heißt. An dieser Stelle scheinen die Studierenden etwas ratlos zu sein und es wird nicht deutlich, ob ihnen einleuchtet, dass die Formulierung noch verbessert werden soll. Das lässt sich sicherlich zumindest zum Teil darauf zurückführen, dass die Gruppe die genannte Charakterisierung aus einem Buch übernommen haben. Vermutlich stellen sie das, was in einem Buch steht, nicht in

Frage und gehen daher auch davon aus, dass ihre Charakterisierung geeignet ist. Die Intervention führt hier also nicht zum gewünschten Ziel, weshalb die nächste für diese Situation vorgesehene Intervention eingesetzt wird.

Diese besteht aus dem Austeilen der ϵ -Streifen. Die Studierenden haben zuvor bereits die Idee, die Differenz der Folgenglieder zu 1 zu betrachten, doch sie haben festgestellt, dass die darauf aufbauende Formulierung „die Differenz der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner“ nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Dann haben sie die Eigenschaft kurzzeitig durch „für n gegen Unendlich geht $a_n - g$ gegen 0“ charakterisiert, diese Formulierung jedoch zugunsten der aus einem Buch übernommenen Formulierung „Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a|$ beliebig klein“ wieder verworfen. Ziel der Intervention war nun, dass dieser Ausdruck mathematisch präzisiert wird. Die Studierenden scheinen eine Vorstellung von einer Art zeitlichen Abfolge zu haben, in welcher der Index n größer wird und jeweils die Differenz $|a_n - a|$ und deren Veränderung betrachtet wird. Es fehlt noch der Schritt zum umgekehrten Denken nach Roh (2005). Dazu würde formuliert werden, dass zu jedem beliebigen positiven Abstand ein Index existiert, so dass der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand. Auch bei dieser Gruppe leite ich die Beschäftigung mit den ϵ -Streifen in Turn 356 bewusst offen ein: *Ihr habt die Grafiken ja noch, ne (fragend)?! Vielleicht ... arbeitet ihr damit mal noch. Ich hab hier mal so Streifen vorbereitet. Also ihr habt ... ja irgendwie dass es das beliebig ... dass diese Differenz zu dem Grenzwert beliebig klein wird ... vielleicht guckt ihr mal mit den Grafiken ... ob ihr mit diesen Streifen da irgendwie ein bisschen was anfangen könnt ... ich hab hier einfach mal ein paar die verschieden breit sind, hier kann man ja natürlich nicht mehr ... viel erkennen, aber-.* Die Gruppe beginnt daraufhin, die Streifen auf die Graphen der Folgen zu legen. Sie legen einen Streifen derart auf den Graphen

der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$, dass die horizontale Linie in der Mitte

des Streifens auf Höhe des Wertes 1 liegt und das zehnte Folgenglied sich außerhalb des Streifens befindet, während alle übrigen Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Ich mache sie darauf aufmerksam, dass sich das eine Folgenglied außerhalb des ϵ -Streifens befindet. Sie antworten zunächst: *Ja, aber n geht ja gegen Unendlich, das was davor ist, interessiert uns eigentlich nicht* und es interessiert uns erst *wo wir keine Ausreißer haben beziehungsweise wenns größer als 7000000 ist*. Hier hat es zunächst den Anschein, als ob die eine Studentin der Meinung ist, dass grundsätzlich als Kriterium genommen wird, dass für $n > 7000000$ der Abstand beliebig klein sein soll. Im weiteren Verlauf zeigt sich jedoch, dass dies nicht der Fall ist. Sowohl sie selbst als auch ihre Kommilitonin verneinen meine Frage, ob es unbedingt 7000000 sein müsse und sie antworten *Nö, es kann auch mehr sein und oder weniger*. Sie scheinen zu diesem Aspekt eine geeignete Vorstellung zu haben, doch es gelingt ihnen nicht, diese geeignet auszudrücken. Daher mache ich an der Stelle den Vorschlag *Das heißt man könnte vielleicht sagen, ab ... irgendeiner Zahl?*. Dieser Vorschlag wird von den Studierenden angenommen. Bei der Formulierung „wird beliebig klein“ haben sie hingegen kein Bedürfnis, etwas zu verändern. Sie sagen selbst, dass sie nicht verstehen *wo der Unterschied zwischen unserer Antwort und dem Buch ist, denn wir haben doch die Antwort vom Buch und das kann doch ((nicht)) total falsch sein*. Sie beschäftigen sich nicht weiter mit den ϵ -Streifen, sondern schlagen die Definition in einem weiteren Buch nach. Die Intervention der ϵ -Streifen ist bei dieser Gruppe in

Bezug auf das Ziel, sie bei dem Schritt zum umgekehrten Denken zu unterstützen, daher nicht erfolgreich verlaufen.

Da die Studierenden ihre Charakterisierung zumindest teilweise aus einem Buch übernommen haben und diese auch bei manchen Studierenden unvollständig ist, entscheide ich mich anschließend spontan für eine Intervention, die im Vorfeld nicht geplant war. Ein Student hat die übliche $\epsilon - N$ -Definition komplett aus dem Buch abgeschrieben, wobei ich Zweifel habe, ob er sie auch verstanden hat. Eine andere Studentin hat hingegen lediglich den Aspekt „ $|a_n - a| < \epsilon$ “ übernommen. Ihre Charakterisierung enthält keine Angabe darüber, für welche(s) ϵ diese Bedingung erfüllt sein soll. Hier lässt sich nicht so eindeutig sagen, ob dies als unpräzise Formulierung eingestuft werden kann. Treffender wäre die Bezeichnung „unvollständige Bedingung“. Zunächst handelt es sich um ein *Problematic Issue*, später wird den Studierenden bewusst, dass sie angeben müssen, für welche(s) ϵ die Bedingung gefordert wird. Es gelingt ihnen jedoch nicht eigenständig, weshalb daraus im Sinne von Oehrtman et al. (2011) ein *Problem* wird. Ich versuche ab Turn 502, die Studierenden dazu anzuregen, eine Verbindung zwischen den ϵ -Streifen und der von ihnen notierten Charakterisierung herzustellen. Ziel dieser Intervention war es, dass die Studierenden zunächst herausfinden, für welche der verschiedenen Streifen die Bedingung erfüllt sein soll, dass ab irgendeinem n alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen und dass sie diese Erkenntnis anschließend auf ihre notierte Charakterisierung übertragen. Bei dieser erneuten Beschäftigung mit den ϵ -Streifen machen sie auf jeden Fall die Erkenntnis, dass wenn sie einen Wert für ϵ betrachten und dieser „zu groß“ ist, dass dann auch das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ die Bedingung erfüllen würde. Somit haben die Studierenden mit Hilfe dieser Intervention durchaus einen Fortschritt erzielt.

Zumindest Teile der Gruppe äußern im weiteren Verlauf Vorstellungen von immer kleiner werdenden ϵ -Streifen, für die es immer ein n gibt, so dass ab da alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Wie bereits bei Gruppe 3 lässt sich dies mit den Variablenaspekten nach Malle (1993, S. 79ff.) erklären. Die Studierenden fassen ϵ im Sinne des Veränderlichenaspekts auf, indem sie von einer zeitlichen Abfolge ausgehen, in der sie verschiedene, immer kleiner werdende Werte für ϵ betrachten und dabei die Veränderung beschreiben. Bei der üblichen $\epsilon - N$ -Definition werden hingegen im Sinne des Simultanaspekts alle positiven Zahlen gleichzeitig durch ϵ repräsentiert. Wie bereits bei der vorherigen Gruppe argumentiert wurde scheint dieser Aspekt jedoch nicht hinderlich für den Aufbau adäquater Vorstellungen zum Konvergenzbegriff zu sein.

Spätestens ab diesem Zeitpunkt des Nacherfindungsprozesses lässt sich nicht mehr von einzelnen Interventionen meinerseits sprechen. Stattdessen habe ich die noch zu erarbeitenden Aspekte gemeinsam mit der Gruppe entwickelt, wobei an mehreren Stellen Input von mir kam. Ein derartiges Eingreifen war im Vorfeld nicht geplant. Es bleibt zu überlegen, ob eine andere Intervention konzipiert werden kann, die den Studierenden dieser Gruppe geholfen hätte, so dass die gemeinsame Arbeit mit mir nicht nötig gewesen wäre.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

Die Studierenden dieser Gruppe schreiben mehrmals Zwischenergebnisse der Charakterisierung auf. Auffallend ist, dass es zu mehreren Zeitpunkten deutliche Unterschiede in den notierten Formulierungen der einzelnen Gruppenmitglieder gibt. Außerdem haben sie manche Fragmente der notierten Eigenschaften haben sie ohnehin aus Büchern abgeschrieben.

Dennoch gibt es am Ende des Nacherfindungsprozesses eine Phase, in der sich die Studierenden dem Aufschreiben der finalen Charakterisierung widmen. Mündlich haben sie zuvor – mit meiner Unterstützung – als Eigenschaft formuliert, für jedes ϵ größer als Null gebe es ein n , so dass ab diesem n alle weiteren Folgenglieder in dem ϵ -Streifen liegen. Beim Verschriftlichen nehmen sie eine kleine Optimierung vor. Den Aspekt, dass sich die entsprechenden Folgenglieder in den ϵ -Streifen befinden, operationalisieren sie formal-mathematisch durch $|a_n - x| < \epsilon$. Insgesamt scheint das Verschriftlichen bei dieser Gruppe keine große Bedeutung zu haben.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

Auf diese Leitfrage wird im Abschnitt 6.3 für alle vier Gruppen eingegangen.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Abschließend soll zusammenfassend beantwortet werden, ob der Nacherfindungsprozess der Studierenden als erfolgreich bewertet werden kann. In den ersten sechs Phasen verläuft der Prozess positiv, die Studierenden haben wichtige Aspekte entdeckt, eine erste Charakterisierung entwickelt und diese sowohl eigendynamisch als auch aufgrund von Interventionen meinerseits überarbeitet. Diese lautet wie folgt:

Für n gegen Unendlich geht $a_n - g$ gegen 0.

Sobald sie in Phase 7 ein Buch zur Hilfe genommen haben und daraus Aspekte übernommen haben, gibt es zum einen Aspekte, die sie nicht selbst entdeckt haben und die sie auch im Anschluss nicht mehr selbst entdecken können, weil sie diese nun bereits kennen. Zum anderen haben sie ab diesem Moment kaum noch das Bedürfnis, etwas an ihrer Charakterisierung zu verändern. Sie stellen nicht in Frage, dass das, was in dem Analysis-Buch steht, richtig ist, und da sie das – zumindest teilweise – übernommen haben, haben sie auch keinen Grund, an ihrer Charakterisierung zu zweifeln. Das ist zumindest ein Grund dafür, dass die anschließenden Interventionen wenig erfolgreich sind. Ohne intensive Unterstützung meinerseits wären die Studierenden vermutlich nicht weiter als bis zu dem

Zwischenstand nach Phase 9 gekommen. Ein Student hat in dem Moment zwar die übliche $\epsilon - N$ -Definition notiert, doch er hat diese zu dem Zeitpunkt wahrscheinlich nicht verstanden. Die beiden Studentinnen haben zu dem Zeitpunkt „Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a|$ beliebig klein“ beziehungsweise „Für n gegen Unendlich wird $|a_n - a| < \epsilon$ “ aufgeschrieben. Ersteres erfüllt nicht die heutigen Standards an eine präzise mathematische Definition, während bei letzterem vor allem eine Angabe über ϵ fehlt. Außerdem stellt sich auch hier die Frage, inwieweit die Studentinnen das Notierte verstanden haben. Die finale Definition, welche die Gruppe aufschreibt, lautet wie folgt:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ gilt ab irgendeinem } n \quad |a_n - x| < \epsilon$$

Diese haben die Studierenden jedoch, wie bereits erwähnt, nicht eigenständig nacherfunden. Im Vergleich zu den anderen Gruppen ist der Nacherfindungsprozess der Gruppe 4 als deutlich weniger erfolgreich zu bewerten. Von einer vollständigen Nacherfindung der Definition kann hier nicht gesprochen werden. Dennoch haben die Studierenden während des Prozesses einige wichtige Aspekte entdeckt und andere Aspekte nachvollzogen und verstanden. Insofern haben sie vermutlich trotzdem einiges gelernt.

6.3 Ergebnisse in Bezug auf die Leitfragen

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse bezogen auf die zuvor bereits genannten Leitfragen zusammengefasst werden.

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Bei den einzelnen Gruppen sind Vorverständnisse zu Konvergenz auf verschiedenen Ebenen sichtbar geworden. Zum einen hat sich ein Vorverständnis bei manchen Studierenden dadurch gezeigt, dass für sie bestimmte Folgen unter den Begriff der Konvergenz fallen, bevor sie sich mit den vorgegebenen Beispielfolgen befassen haben, und andere Folgen nicht darunter fallen. Zum anderen haben einige Workshopteilnehmenden ihr Vorverständnis in Form von verbalen Beschreibungen, was Konvergenz ihrer Meinung nach bedeutet, geäußert. Schließlich gibt es auch noch Studierende, bei denen Vorgehensweisen deutlich geworden sind, wie sie untersuchen, ob eine Folge konvergiert und gegebenenfalls welchen Grenzwert sie hat. Nach diesen drei Aspekten wird hier nun unterschieden.

Welche Beispiele fallen für die Studierenden unter ihren Begriff von Konvergenz?

Bei einigen Studierenden wird deutlich, dass bestimmte der vorgegebenen Beispielfolgen unter ihr Vorverständnis zu konvergenten Folgen, bei anderen zeigt sich hingegen, dass manche vorgegebenen Beispielfolgen nicht unter ihren Begriff von Konvergenz fallen. Fast immer geht es dabei um den Aspekt des Erreichens des Grenzwerts. Bei zwei Studentinnen kann festgestellt werden, dass ihr Vorverständnis zu Konvergenz auch solche Folgen umfasst, die den Grenzwert erreichen. Zum einen handelt es sich um Julia

aus Gruppe 1. Sie geht direkt zu Beginn alle Beispielfolgen durch. Über die vorgegebene schließlich konstante Folge sagt sie, diese sei „eh klar“. Zum anderen trifft dies auch auf die Studentin Denise aus Gruppe 3 zu. Sie argumentiert, dass auch Folgen konvergent genannt werden, die den Grenzwert erreichen, da eine konstante Folge ebenfalls konvergent sei. Die konstante Folge war keins der vorgegebenen Beispiele, sondern die Studentin hat diese selbst in die Diskussion eingebracht.

Bei mindestens drei Studierenden beinhaltet das Vorverständnis zu Konvergenz hingegen ausschließlich solche Folgen, die den Grenzwert nicht erreichen. Eine davon ist Natalie aus Gruppe 3. Diese akzeptiert sehr schnell, dass ihr Vorverständnis nicht mit dem zu entdeckenden Begriff übereinstimmt und sie dieses weiterentwickeln muss. Tim aus Gruppe 4 zweifelt zu Beginn daran, dass die vorgegebene Beispielfolge, die durch $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ definiert ist, konvergiert. Eine Kommilitonin überzeugt ihn jedoch, indem sie ihn darauf aufmerksam macht, dass diese Folge durch die Aufgabenstellung als konvergent vorgegeben ist. Sowohl Natalie als auch Tim erkennen somit, dass ihr Vorverständnis unzureichend für die neue Begriffsbildung ist und sie entwickeln dieses weiter.

Bei dem Studenten Markus aus Gruppe 3 ist dies anders. Er beharrt auf seinem Vorverständnis. Es gefällt ihm nicht, dass durch die Aufgabenstellung Folgen als konvergent vorgegeben sind, die nicht unter seinen Begriff von Konvergenz fallen. Bei dem Beispiel der schließlich konstanten Folge ist dies der Fall. Dadurch lässt er sich nicht auf die Aufgabenstellung ein. Bei ihm wirkt sich das Vorverständnis also hinderlich auf die Nacherfindung der Definition aus.

Bei den übrigen Studierenden lässt sich nicht feststellen, ob unter ihr Vorverständnis von Konvergenz auch Folgen fallen, die den Grenzwert annehmen. In jedem Fall akzeptieren sie, dass der Begriff, der nacherfunden werden soll, solche Folgen umfasst.

Die Analyse dieses Aspekts des Vorverständnisses zeigt, dass eine Veränderung der Aufgabenstellung sinnvoll sein könnte. Im Prinzip setzt das Konzept der Hauptaufgabe implizit voraus, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer entweder noch gar kein *Concept Image* und keine *Concept Definition* zum Konvergenzbegriff aufgebaut haben oder dass sie sich darauf einlassen, ein vorhandenes *Concept Image* und eine vorhandene persönliche *Concept Definition* bei der Bearbeitung der Hauptaufgabe auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen anzupassen, den Beispielen also die Priorität einzuräumen, dass die *Concept Definition* sich an ihnen bewähren muss. Wie in Abbildung 6.1 idealisiert dargestellt würden die Workshopteilnehmenden zunächst ihr *Concept Image* basierend auf den Beispielen und dem Nicht-Beispiel bilden und anschließend eine dazu passende *Concept Definition* entwickeln, die möglicherweise auch das *Concept Image* beeinflusst. Die Analyse der tatsächlichen Erkenntnisverläufe hat jedoch gezeigt, dass dies nicht unbedingt der Fall ist. Bei manchen Studierenden scheint die Verwendung des Begriffs „konvergent“ in der Aufgabenstellung dazu zu führen, dass sie ihr vorhandenes *Concept Image* und ihre vorhandene persönliche *Concept Definition* zu dem Begriff abrufen. Die Gruppe arbeitet somit eher auf Basis ihres Vorverständnisses als auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen, wie es eigentlich intendiert war. Problematisch kann es

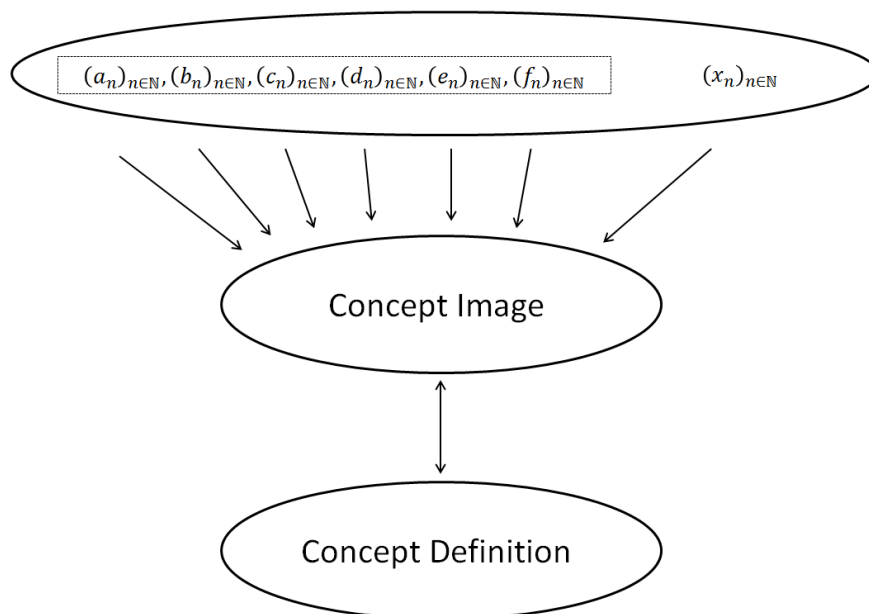


Abbildung 6.1: Idealisierte Entwicklung von *Concept Image* und *Concept Definition* ausschließlich auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen und des Nicht-Beispiels

dann werden, wenn die vorgegebenen Beispielfolgen oder das Nicht-Beispiel nicht mit dem bereits vorhandenen *Concept Image* oder der vorhandenen persönlichen *Concept Definition* vereinbar sind. In Abbildung 6.2 ist dies schematisch dargestellt. Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, wie mit einem solchen Konflikt umgegangen werden kann. Zum einen ist es möglich, dass die Studierenden akzeptieren, dass sie ihr *Concept Image* und ihre *Concept Definition* anpassen müssen. Dieser Fall ließ sich in den tatsächlichen Erkenntnisverläufen bei manchen Studierenden der Gruppe 3 beobachten. Eine Studentin hat vorgeschlagen, dass es sich möglicherweise um einen anderen Begriff handelt als das, wozu sie bereits ein *Concept Image* und eine *Concept Definition* aufgebaut haben, die nicht zu den vorgegebenen Folgen passen. Dieser Fall hat einer erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe nicht im Weg gestanden. Zum anderen ist es jedoch auch möglich, an dem vorhandenen *Concept Image* und der *Concept Definition* festzuhalten und daher in Frage zu stellen, ob die durch die Aufgabenstellung als konvergent vorgegebenen Folgen tatsächlich alle konvergent im Sinne des eigenen Konvergenzbegriffs sind. Dieser Fall ließ sich ebenfalls bei einem Studierenden aus Gruppe 3 beobachten, der sich überhaupt nicht auf die Aufgabe eingelassen hat. Auch bei anderen Gruppen sind teilweise Vorverständnisse zu Konvergenz in die Argumentationen eingeflossen, wie bereits dargelegt wurde. Eine mögliche Lösung könnte sein, den Begriff „konvergent“ in der Aufgabenstellung gar nicht zu verwenden. Dann könnten die Studierenden jedoch als Antwort geben, die gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht hat, ist Konvergenz gegen 1. Gerade um diese Scheinlösung zu vermeiden wurde der Begriff „konvergent“ in der Aufgabenstellung verwendet. Eine andere mögliche Lösung dieses Problems könnte sein, von dem „hochschulmathematischen Begriff Konvergenz“ zu sprechen. Möglicherweise würde dies dazu führen, dass die Studierenden davon ausgehen, dass sie einen Begriff entdecken sollen, der für sie neu ist und der nicht

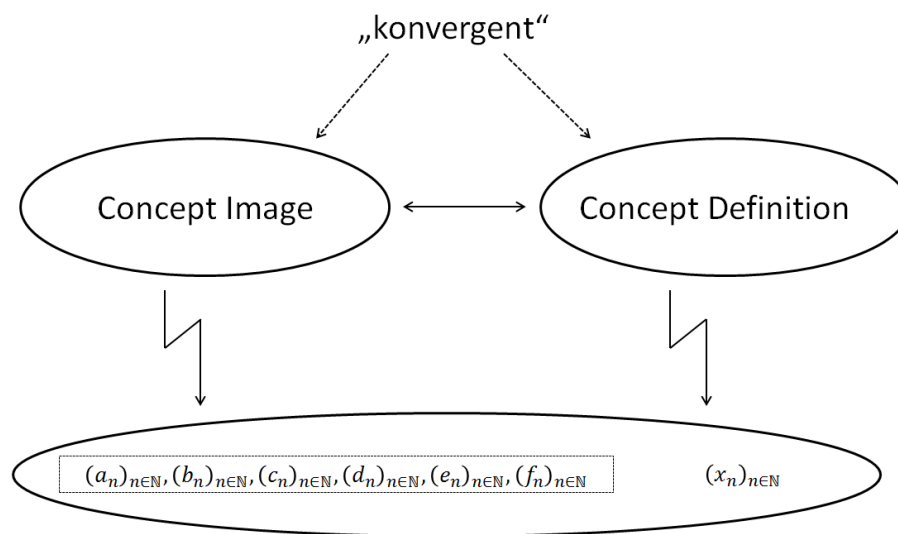


Abbildung 6.2: Mögliche Konflikte bei Nicht-Passung der vorgegebenen Folgen zu vorhandenem *Concept Image* und *Concept Definition*

unbedingt dieselbe Bedeutung hat, wie das, was ihrem Vorverständnis zu Konvergenz entspricht. Ein eventuell vorhandenes *Concept Image* beziehungsweise eine *Concept Definition* können die Erkenntnisverläufe dennoch beeinflussen, was jedoch auch nicht per se problematisch ist. Es soll lediglich vermieden werden, dass eine Anpassung von *Concept Image* und *Concept Definition* aufgrund der vorgegebenen Folgen von den Studierenden komplett abgelehnt wird. In Abbildung 6.3 ist schematisch dargestellt, wie die Entwicklung von *Concept Image* und *Concept Definition* bei veränderter Aufgabenstellung und eventuell vorhandenem *Concept Image* und *Concept Definition* ablaufen könnte.

Die konkreten veränderten Aufgabenstellungen werden in Abschnitt 7.2 beziehungsweise 7.4 präsentiert.

Wie beschreiben sie konvergente Folgen verbal?

Bei einigen Studierenden werden auch Vorverständnisse in Form verbaler Beschreibungen deutlich. Bei Markus und Tim passen diese verbalen Beschreibungen dazu, dass Folgen, die den Grenzwert annehmen, nicht unter ihr Vorverständnis von Konvergenz fallen. Sie formulieren, „dass es niemals den Wert erreicht, das-, das heißt eben Grenzwert“ beziehungsweise sprechen davon, „dass sich das daran anschmiegt“. Wie bereits bei der vorherigen Leitfrage berichtet wurde, hat Tim schließlich akzeptiert, dass er sein Vorverständnis weiterentwickeln muss, während Markus an seinem Vorverständnis festhält.

In Gruppe 2 gibt es mehrere Äußerungen des Studenten Sebastian, in denen er verbal beschreibt, was Konvergenz seiner Meinung nach bedeutet. Er versteht unter Konvergenz das Folgende: „Es gibt einen Punkt, ähm (nachdenkend)... ab einer bestimmten Stelle nähern-, äh, wird diese Funktion-, geht die immer näher an diesen Wert ran, in diesem

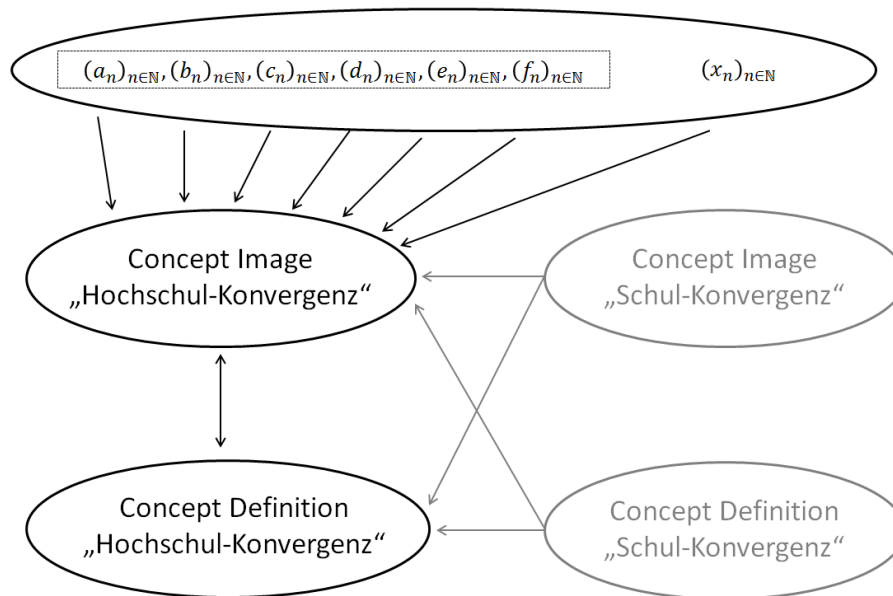


Abbildung 6.3: Mögliche Entwicklung von *Concept Image* und *Concept Definition* bei veränderter Aufgabenstellung

Fall eins. Und er geht nie wieder weiter weg, aber er geht höchstens noch näher ran oder hat sie schon erreicht.“ Für ihn fallen also sowohl Folgen, die den Grenzwert nicht annehmen, unter seinen Begriff von Konvergenz, als auch Folgen, auf die dies nicht zutrifft. Auch wenn diese verbale Beschreibung nicht auf alle durch die Aufgabenstellung vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, ist das Vorverständnis von Sebastian äußerst förderlich für die Bearbeitung der Aufgabe. Der Student erkennt, dass sein Bild von Konvergenz unzureichend für den „neuen“ Begriff ist. Es gelingt ihm eigenständig, dieses Vorverständnis derart zu erweitern, dass anschließend auch alle der vorgegebenen Beispielfolgen unter seinen Begriff von Konvergenz fallen.

Außerdem gibt es mehrere Studierenden, bei denen deutlich wird, dass sie den durch die Menge der vorgegebenen (Nicht-)Beispiele festgelegten Begriff von ihren Vorverständnissen angrenzen. Bei Jana aus Gruppe 2 wird deutlich, dass sie den Begriff Asymptote kennt und diesen zunächst nutzen möchte, um den neuen Begriff der Konvergenz damit zu beschreiben: „dass das Eins die Asymptote ist oder sowas, heißt das dann konvergieren, ja, ne!?“ . Kurz darauf grenzt sie die beiden Begriffe voneinander ab, nachdem die Gruppe herausgearbeitet hat, dass unter den vorgegebenen Beispielfolgen auch solche sind, die den Grenzwert erreichen: „weil da ist ein Unterschied zwischen Asymptote und Konvergenz ... merken“ . Jana hat ein Vorverständnis zu dem Begriff Asymptote, der für sie eine Annäherung ohne Erreichen des jeweiligen Werts bedeutet. Sie akzeptiert, dass Konvergenz ein anderer Begriff ist. Auf den Nacherfindungsprozess wirkt sich Janas Vorwissen positiv aus, denn es gelingt ihr, die Begriffe voneinander abzugrenzen und sie lässt sich vollkommen auf die Aufgabenstellung ein.

Die Studentin Sophie aus Gruppe 3 reagiert auf die Unzufriedenheit von Markus bezüglich des Erreichens des Grenzwertes: „aber das haben wir auch nicht konvergiert ge-, also wir haben das in der Schule auch nicht konvergieren genannt“ und kurz darauf

sagt sie „vielleicht sind es unterschiedliche Begriffe“ . Diese Studentin scheint zu dem Begriff Konvergenz noch kein Vorverständnis zu haben. Sie hat zwar möglicherweise in der Schule etwas ähnliches kennengelernt, doch sie verbindet damit nicht den Begriff konvergieren. Das wirkt sich insofern förderlich auf die Aufgabenbearbeitung aus, als dass Sophie ohne weiteres akzeptiert, dass es sich bei Konvergenz um einen neuen Begriff handelt, der für sie dadurch charakterisiert wird, dass die vorgegebenen Beispielfolgen diese Eigenschaft haben und das Nicht-Beispiel nicht.

Doreen aus Gruppe 4 sagt explizit, dass sie den Begriff Konvergenz noch nicht kennt: „ja, wir wissen auch noch nicht, was Konvergenz ist, oder?“ . Entweder hat sie tatsächlich kein Vorverständnis zu Konvergenz oder ihr ist sofort bewusst, dass ein für sie neuer Begriff entwickelt werden soll und sie ihr Vorverständnis erweitern muss. In jedem Fall gibt es bei ihr keine Hinweise darauf, dass sich ihr Vorwissen hinderlich auf die Nacherfindung auswirkt.

Aus der Analyse in Bezug auf die Vorverständnisse in Form verbaler Beschreibungen ergeben sich keine Hinweise auf sinnvolle Veränderungen der Aufgabenstellung, die über die zuvor bereits vorgeschlagene Veränderung hinausgehen.

Wie entscheiden sie basierend auf ihrem Vorverständnis, ob eine Folge konvergiert und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert?

Bei Gruppe 1 ist das Vorverständnis stark von einer Strategie geprägt, wie sie untersuchen, ob eine Folge konvergiert. Sie betrachten den Term, durch den eine Folge definiert ist, und versuchen, diesen in einzelne Teile zu zerlegen, von denen sie wissen, gegen welchen Wert diese verlaufen. Diese Strategie wenden sie beispielsweise auf die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die durch $a_n = \frac{n+1}{n}$ definiert ist:

37 J: *Zum Beispiel hast du bei der ersten Formel ja auch im Nenner das n verläuft gegen Unendlich, im Zähler die Eins wird nicht betrachtet, weil n gegen Unendlich läuft und dann größer ist, dann biste wieder bei ein-, Unendlich durch Unendlich, also wieder bei eins*

Diese Strategie führt teilweise auch tatsächlich zu richtigen Ergebnissen. Allerdings ist diese Strategie zum einen nur bei solchen Folgen anwendbar, die durch einen einzigen geschlossenen Term definiert sind. Zum anderen kann sie zu falschen Ergebnissen führen, da die Studierenden auch solche einzelne Teile eines Terms betrachten, die bestimmt divergieren. Hier zeigt sich zusätzlich die Fehlvorstellung „ $\frac{\infty}{\infty} = 1$ “. Möglicherweise haben die Studierenden zuvor lediglich solche Folgen oder Funktionen betrachtet, wo ihre Vorgehensweise angewendet werden konnte und auch zu richtigen Ergebnissen geführt hat. Obwohl die Strategie also nicht immer zu korrekten Ergebnissen führen würde, wirkt sie sich hier nicht hinderlich auf den Nacherfindungsprozess aus, da die Studierenden weder zu der Entscheidung kommen, dass eine der vorgegebenen Beispielfolgen nicht konvergiert, noch glauben sie, dass das vorgegebene Nicht-Beispiel konvergiert.

Bei den übrigen drei Gruppen lassen sich keine Informationen über derartige Strategien finden.

Zusammenfassung

Insgesamt ist bei allen vier Gruppen jeweils irgendeine Art von Vorverständnis zu Konvergenz in die Nacherfindung eingeflossen. In einigen Fällen umfassen die Vorverständnisse lediglich solche konvergenten Folgen, die den Grenzwert nicht annehmen. Die meisten dieser Studierenden erkennen, dass ein solches Konzept für den neuen Begriff ungeeignet ist und entwickeln ihr Vorverständnis weiter. Lediglich ein Student hält an seinem Bild konvergenter Folgen fest und lässt sich daher nicht richtig auf die Aufgabe ein. Bei ihm wirkt sich das Vorwissen somit hinderlich auf die Nacherfindung aus. Daraus ergeben sich Konsequenzen auf das Re-Design des Workshop-Konzepts.

Einige Studierende haben auch explizit ihre Vorverständnisse von dem durch die vorgegebenen (Nicht-)Beispielfolgen festgelegten Begriff abgegrenzt. Diese haben den zu entdeckenden Begriff als neuen Begriff aufgefasst, was sich förderlich auf die Nacherfindung ausgewirkt hat.

In den meisten Fällen hat das Workshop-Konzept den Studierenden ermöglicht, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist.

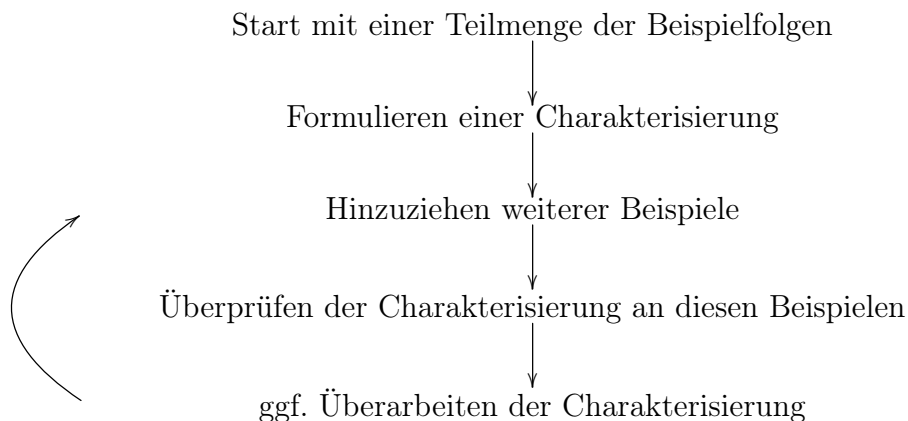
3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

Für die einzelnen Gruppen wurden bereits die tatsächlichen Erkenntnisverläufe in schematischer Form herausgearbeitet und mit den hypothetischen Verläufen verglichen. Nun sollen die Ergebnisse verallgemeinert werden. Zuerst wird darauf eingegangen, wie systematisch die Studierenden bei der tatsächlichen Nacherfindung im Vergleich zu den hypothetischen Erkenntnisverläufen vorgehen.

i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

Den verschiedenen Varianten der hypothetischen Erkenntnisverläufe, die in Abschnitt 4.2.3 vorgestellt wurden, liegt allen ein systematisches, iteratives Vorgehen zu Grunde.

Zusammengefasst wird dieses Vorgehen durch das folgende Schema, das sich an einem Schema von Oehrtman et al. (2014, S. 135) orientiert:



In den tatsächlichen Verläufen der vier beobachteten Gruppen lässt sich ein systematisches Vorgehen dieser Art nicht finden.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den tatsächlichen und den hypothetischen Erkenntnisverläufen besteht darin, dass keine der vier Gruppen zunächst mit einer Teilmenge der Beispielfolgen begonnen hat, für diese eine Eigenschaft formuliert hat und anschließend weitere Folgen hinzugezogen hat. Vielmehr haben die Studierenden zumindest versucht, von Anfang an eine Eigenschaft zu finden, die von allen Beispielfolgen erfüllt wird. Teilweise haben sie auch das Nicht-Beispiel von Beginn an berücksichtigt, teilweise haben sie dieses später hinzugezogen.

Bei jeder Gruppe gab es aber zwischendurch Charakterisierungen, die nicht auf alle Beispielfolgen zutreffen. Dabei zeigt sich ein weiterer Unterschied zu den hypothetischen Verläufen. Es gibt keine Gruppe, die jede ihrer Charakterisierungen systematisch an allen Beispielfolgen überprüft hat.

Die erste Gruppe geht relativ zu Beginn einmal alle vorgegebenen Folgen systematisch durch. Spätere Definitionsversuche überprüfen die Studierenden nicht systematisch. Sie scheinen eher zufällig zu bemerken, dass eine von ihnen formulierte Charakterisierung nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft.

Gruppe 2 testet ein Zwischenergebnis ihrer Charakterisierung an allen Beispielen. Dabei gehen sie jedoch oberflächlich vor. So fällt ihnen dabei nicht auf, dass ihre Formulierung ungeeignet ist. Dies fällt ihnen zu einem späteren Zeitpunkt ebenfalls eher zufällig auf. Von ihrem Endergebnis behaupten sie, dass sie es ebenfalls an allen vorgegebenen Folgen überprüft haben. Schriftlich oder mündlich machen sie dies nicht, möglicherweise testen sie die Formulierung jedoch gedanklich.

Bei der dritten Gruppe ist zu keinem Zeitpunkt erkennbar, dass sie einen Definitionsversuch an den vorgegebenen Beispielen überprüfen.

Ähnlich ist dies bei der vierten Gruppe. Sie formulieren zwischendurch eine Eigenschaft, die nicht auf alle Beispielfolgen zutrifft. Dies stellen sie nicht eigenständig fest, sondern ich weise sie auf die entsprechende Folge hin. Auch die weiteren Versionen ihrer Formulierung testen sie nicht systematisch.

Die Aufgabenstellung mit der Menge von (Nicht-)Beispielen hat somit nicht dazu geführt, dass eine Eigendynamik entsteht und die Studierenden ihre Charakterisierungen kritisch hinterfragen und systematisch überprüfen. Um zu erreichen, dass mit der gewünschten Systematik vorgegangen wird, müssen die Studierenden dazu angeleitet werden. Dies könnte dadurch umgesetzt werden, dass in der Aufgabenstellung die Aufforderung ergänzt wird, formulierte Eigenschaften jeweils an allen vorgegebenen Folgen zu testen.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Die Beispielfolgen und das Nicht-Beispiel wurden unter der Annahme ausgewählt, dass die Studierenden daran bestimmte charakteristische Merkmale entdecken. Hier wird zusammengefasst, inwiefern dies bei den tatsächlichen Erkenntnisverläufen der Fall ist.

Eines dieser charakteristischen Merkmale besteht darin, dass es Ausnahmen von der Gesetzmäßigkeit der Annäherung geben kann. Alle vier Gruppen entdecken, dass manche Folgen dieser Art konvergent genannt werden. Die erste Gruppe bemerkt dies relativ zu Beginn des Nacherfindungsprozesses anhand der Folge, deren zehntes Folgenglied 2 ist und die für alle anderen natürlichen Zahlen durch $f_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert ist. Auch die zweite Gruppe stellt dieses Merkmal fest, noch bevor sie eine erste Charakterisierung formuliert. Ihnen fällt dies an der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf, die für $200000 \leq n \leq 500000$ dem Wert -3 entspricht und für alle übrigen natürlichen Zahlen dem Wert 1. Gruppe 3 entdeckt dasselbe Merkmal wie auch Gruppe 4 an der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Letztere Gruppe sagt über das zehnte Folgenglied dieser Folge, es falle „ja total aus der Reihe“. Alle Gruppen stellen dieses Merkmal eigenständig fest, ohne dass Impulse gegeben werden mussten.

Ein weiteres Merkmal, das ebenfalls alle vier Gruppen ohne Unterstützung entdeckt haben, besteht darin, dass auch Folgen als konvergent bezeichnet werden, die den Grenzwert annehmen. Die erste Gruppe bemerkt dies anhand der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und alle übrigen Gruppen an der schließlich konstanten Folge, die für $n \leq 125$ durch $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ definiert ist. Alle beobachteten Gruppen erkennen das Merkmal ebenfalls eigenständig, und zwar zu Beginn der Nacherfindung.

Das Merkmal, dass auch Folgen konvergent genannt werden, die zwischendurch wieder einen größeren Abstand zum Grenzwert aufweisen, haben lediglich die ersten beiden Gruppen ohne Impulse entdeckt. Beide bemerken dies an der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}. \text{ Die erste Gruppe äußert dies, als sie versuchen, den}$$

Ausdruck Annähern inhaltlich zu klären. Die Gruppe 2 ist hingegen eine ganze Weile der Meinung, dass es bei jeder Beispielfolge einen Punkt gibt, ab dem die Folgenglieder nur noch näher an 1 kommen und nicht mehr weiter weg gehen. Erst später stellen sie fest, dass dies auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft. Die dritte Gruppe nennt dieses Merkmal nicht explizit, sie formulieren jedoch auch keine Eigenschaft, die auf konvergente Folgen, welche zwischendurch wieder einen größeren Abstand zum Grenzwert haben, nicht

zutrifft. Möglicherweise ist ihnen das Merkmal bewusst und sie haben es lediglich nicht gesagt. Die Gruppe 4 hingegen hat eine solche ungeeignete Charakterisierung formuliert und dies ist ihnen nicht aufgefallen. Sie haben das Merkmal erst entdeckt, als ich sie auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aufmerksam gemacht habe.

Das Merkmal, dass auch Folgen konvergent genannt werden, die sich nicht von einer Seite an den Grenzwert annähern, sondern von beiden Seiten, hat nur die erste Gruppe explizit erwähnt. Wie bei dem zuvor genannten Merkmal war dies der Fall, als sie versucht haben, den Begriff Annähern inhaltlich zu klären. Die Beispielfolge, an der sie dies entdecken, ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die anderen Gruppen haben dieses Merkmal zwar nicht explizit genannt, doch ihre formulierten Eigenschaften schließen solche Folgen mit ein.

Außerdem wurde analysiert, welche der Beispielfolgen die einzelnen Gruppen jeweils explizit in ihren Argumentationen benutzt haben. Eine kurze Übersicht ist in Tabelle 6.5 zu sehen. Dort ist in den einzelnen Feldern jeweils eingetragen, in welchen Turns die entsprechende Gruppe explizit von der jeweiligen Folge gesprochen hat. Eingeklammerte Turns bedeuten, dass nicht die Studierenden von selbst auf die Folge zu sprechen gekommen sind, sondern ich sie auf das entsprechende Beispiel hingewiesen habe beziehungsweise eine Frage dazu gestellt habe. Ich gehe auf die einzelnen Folgen noch einmal ein. Selbstverständlich kann diese Analyse lediglich Hinweise darauf geben, wie wichtig die einzelnen Folgen tatsächlich für die Erkenntnisprozesse der Studierenden waren. Die theoretischen Überlegungen, die zur Auswahl der Beispiele geführt haben, sollten weiter berücksichtigt werden.

Folge Gruppe	$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
1	28ff. 48ff. 212	44ff.	18ff. 52ff.	59ff. 230ff. 276ff. 320ff.	67ff.	10ff. 79ff. 236ff. 258	1 123ff. 217
2	80	53f. 78 267ff.	14ff. 55f. 83ff. 205ff.	80ff. 115ff. 140 191ff. 234ff.	78	74ff. 83ff. 248ff.	1ff. 66ff. 105 142f.
3		49ff.	32ff. 49ff.	13ff. 49ff. 78f. (180ff.)	45	76f. 82ff.	31 70ff. 113ff. 179 365ff. 536

4		54ff.	15ff. 54ff.	2ff. 14 51ff. 139ff. 171 (189ff.) 232		195ff. 364ff. (517ff.)	2ff. 16ff. 58f. 212 671ff. (721ff.)

Tabelle 6.5: Übersicht über die Verwendung der (Nicht-)Beispiele der einzelnen Gruppen

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch den Term $a_n = \frac{n+1}{n}$ definiert ist, lässt sich nur verhältnismäßig selten in den Argumentationen eindeutig identifizieren, die Gruppen 3 und 4 haben sich überhaupt nicht auf diese Folge bezogen. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass es sich um eine eher typische konvergente Folge handelt, die streng monoton ist und den Grenzwert nicht annimmt. Eine solche typische konvergente Folge gehörte vermutlich bereits zuvor zum *Concept Image* der Studierenden und es wurde nie eine Formulierung vorgeschlagen, die auf dieses Beispiel nicht zutrifft. Bei den Textstellen, in denen diese Folge thematisiert wurde, ließ sich kein wesentlicher Aspekt finden, den die Studierenden an dieser Beispielfolge entdeckt haben. Somit scheint diese Beispielfolge insgesamt eher unwichtig für die Erkenntnisse der Studierenden gewesen zu sein. Andererseits ist es jedoch die Beispielfolge, die für die Studierenden an Bekanntem anknüpft.

Die beiden schließlich konstanten Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit $c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ hingegen wurden jeweils von allen Gruppen

mindestens einmal explizit in Argumentationen benutzt. Einige der Studierenden waren zunächst der Meinung, dass eine konvergente Folge den Grenzwert nicht annehmen beziehungsweise erreichen darf, durch diese beiden Folgen haben sie dann erkannt, dass dieser Aspekt auch unter die gesuchte Eigenschaft fällt. Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurde außerdem in dem Zusammenhang genannt, dass das Verhalten der Folge „für große n “ entscheidend sei.

Auch das Beispiel $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ war in den Diskussionen

aller vier Gruppen zu finden, und zwar jeweils mindestens dreimal. Zusätzlich habe ich in zwei Gruppen, die diese Folge zuvor selbst bereits miteinbezogen hatten, noch einmal explizit auf diese Beispielfolge hingewiesen. Das war jeweils der Fall, wenn die Studierenden die Eigenschaft durch zwei Bedingungen ausgedrückt haben, die sie durch „oder“ verbunden haben. Da $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils keine der beiden einzelnen Bedingungen erfüllt hat, habe ich dieses Beispiel zum Anlass genommen, die Studierenden dazu aufzufordern, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Außerdem konnte dieses Beispiel verwendet werden, um darauf aufmerksam zu machen, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht in jedem Schritt kleiner wird, und zwar nicht mal ab irgendeinem n . Teilweise haben die Studierenden diesen Aspekt auch eigenständig an dieser Beispielfolge entdeckt. Wie schon die beiden zuvor genannten Beispielfolgen wurde

außerdem auch an dieser Folge argumentiert, dass auch solche Folgen unter die gesuchte Eigenschaft fallen, die den Grenzwert annehmen.

Die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ist wie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton und nimmt den Grenzwert nicht an. Diese wurde bewusst etwas ungewöhnlich definiert, da die Verwendung des Summenzeichens in der üblichen Definition $e_n = \sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i}$ möglicherweise für zusätzliche Schwierigkeiten gesorgt hätte, die hier vermieden werden sollten. Drei der vier Gruppen haben diese Folge lediglich einmal eindeutig verwendet, die andere Gruppe überhaupt nicht. Hier kommt abgesehen von der ungewöhnlichen Definition dieselbe Erklärung in Frage wie bereits bei dem ersten Beispiel. Der einzige Aspekt, der wenn überhaupt an dieser Beispielfolge entdeckt wurde, ist, dass auch solche Folgen die gesuchte Eigenschaft besitzen, die den Grenzwert nie annehmen.

Die letzte Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ ließ sich wiederum in den Argumentationen aller vier Gruppen mindestens einmal identifizieren. Zum einen wurde dabei angesprochen, dass diese Folge bei $n = 10$ einen „Ausreißer“ hat, und dass es bei dem Konvergenzverhalten auf „große n “ ankomme. Zum anderen wurde teilweise anhand dieses Beispiels erkannt, dass bei der Differenz aus den Folgengliedern und dem Wert 1 Betragsstriche verwendet werden müssen. Ein ähnlicher Aspekt, der an dieser Beispielfolge entdeckt wurde, ist, dass unter die gesuchte Eigenschaft auch Folgen fallen, deren Glieder abwechselnd größer und kleiner als der Grenzwert sind.

Als Nicht-Beispiel war lediglich eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ vorgegeben. Diese wurde von allen vier Gruppen mehrmals verwendet und zwar jeweils zur Abgrenzung. Wenn ein direkter Vergleich zwischen dem Nicht-Beispiel und einer der vorgegebenen Beispielfolgen vorgenommen wurde, dann war dies meist die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Das könnte daran liegen, dass die Definitionen dieser beiden Beispielfolgen auf den ersten Blick Gemeinsamkeiten mit der des Nicht-Beispiels aufweisen. Bei $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besteht diese Gemeinsamkeit darin, dass beide Folgen für Vielfache von 10 konstant sind und für alle anderen natürlichen Zahlen durch den Term $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ haben hingegen gemeinsam, dass es bei beiden Folgengliedern gibt, die dem Wert 2 entsprechen und die übrigen Folgenglieder sind durch einen geschlossenen Term definiert. Es erscheint sinnvoll, dass es derartige Ähnlichkeiten zwischen dem Nicht-Beispiel und manchen Beispielfolgen gibt, da auf diese Weise auf die Feinheiten, bei denen es Unterschiede gibt, aufmerksam gemacht wird. Besonders deutlich wurde dies bei Gruppe 4, in der eine Studentin zu Beginn verwundert darüber war, dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gleichen „Bedingungen“ hätten und eine der beiden Folgen als Beispiel, die andere hingegen als Nicht-Beispiel vorgegeben war.

Insgesamt hat sich die Menge der Beispielfolgen und das Nicht-Beispiel bewährt. Die meisten Studierenden haben alle Aspekte entdeckt, die zur Auswahl der Folgen geführt haben. Auch gibt es in den Erkenntnisverläufen keine Hinweise auf ein charakteristisches Merkmal, das im Vorfeld nicht berücksichtigt wurde. Sowohl die Häufigkeiten der Verwen-

dung der Beispiele durch die einzelnen Gruppen als auch die an den einzelnen Beispielen entdeckten Aspekte legen nahe, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Vergleich zu den anderen Folgen nicht so wichtig für die Erkenntnisprozesse sind. Hinzu kommt, dass beide Folgen einem ähnlichen Typ von Folgen angehören. Daher scheint es gerechtfertigt, auf eine dieser beiden Folgen zu verzichten. Die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist zum einen in eher unüblicher Form angegeben und zum anderen könnte sie zusätzliche Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der 0, $\bar{9}$ -Problematik verursachen. Des Weiteren wäre es möglich, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die vermutlich bei den meisten Studierenden zu den Vorverständnissen konvergenter Folgen passt, die ersten Formulierungen des Annäherns stark beeinflusst hat, auch wenn die Studierenden sich dabei in ihren Äußerungen nicht explizit auf diese Folge bezogen haben. Somit sollte auf die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verzichtet werden, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soll hingegen beibehalten werden.

Zusätzlich ist noch erwähnenswert, dass von mir im Laufe der Diskussionen kein zusätzliches Beispiel oder Nicht-Beispiel eingebracht wurde. Die Studierenden selbst haben in Einzelfällen auch Folgen in ihre Überlegungen mit einbezogen, die nicht durch mich vorgegeben waren. Gruppe 3 spricht in Turn 16 von der konstanten Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Das könnte ein Indiz dafür sein, diese Folge bei der Überarbeitung des Konzepts in die Menge der Beispielfolgen mitaufzunehmen, da der Typ „konstante Folge“ noch nicht vertreten ist. Die weiteren Folgen, welche die Studierenden von sich aus mit einbezogen haben, ähneln jeweils einer bereits in der Beispielmenge vertretenen Folge. Ihre Verwendung deutet darauf hin, dass diese Studierenden die Beispiele generisch betrachten. Darauf gehe ich nun genauer ein.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Die Frage, die hier untersucht werden soll, ist ob die Studierenden die Aufgabe inklusive der vorgegebenen Folgen derart auffassen, dass sie eine Eigenschaft finden sollen, die lediglich auf die vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht, oder ob ihnen bewusst ist, dass eine allgemeine Eigenschaft gesucht ist und die einzelnen Beispielfolgen in gewissem Sinne Klassen von Folgen repräsentieren. Eine nicht-generische Betrachtung der Beispiele könnte zur Folge haben, dass in der Formulierung der Eigenschaft anstelle der Variablen ϵ und N konkrete Zahlen gewählt werden. Beispielsweise würde die folgende Eigenschaft auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutreffen, auf das Nicht-Beispiel hingegen nicht:

$$|a_n - 1| < 0,1 \quad \forall n \geq 500001$$

Diese Eigenschaft trifft aber zum einen nicht auf jede beliebige gegen 1 konvergente Folge zu und zum anderen könnten auch Folgen konstruiert werden, die nicht gegen 1 konvergieren, aber dennoch die hier formulierte Eigenschaft erfüllen. Eine derartige Eigenschaft wurde von keiner der beobachteten Gruppen formuliert. Lediglich in Gruppe 4 wird von einer Studentin während der Diskussion gesagt, ob die Folgenglieder innerhalb eines ϵ -Streifens liegen interessiert erst „wenns größer als 7000000 ist“. Im weiteren Verlauf der Diskussion zeigt sich jedoch, dass sowohl dieser Studentin als auch ihren Kommilitonen bewusst ist, dass dieser Wert von der jeweiligen Folge abhängt und auch größer oder kleiner sein kann. Die erste Gruppe hingegen sagt sogar ganz explizit, dass kein fester Wert für N gewählt werden kann. Bei Gruppe 2 lässt sich eine interessante

Textstelle zur Wahl von ϵ finden. Die Studierenden benutzen zwar nicht explizit eine Variable, doch sie sprechen zunächst von dem Wert 0,01 und sagen anschließend, egal wie klein sie „dieses 0,01 oder sonst was machen“, sie würden immer einen Punkt finden, ab dem die Bedingung erfüllt sei. Diese Aussage spricht dafür, dass die Studierenden die Beispielfolgen als generisch auffassen.

Des Weiteren haben alle vier Gruppen in irgendeiner Form weitere Beispiele in ihre Diskussion einbezogen. Teilweise haben sie ein vollkommen neues Beispiel hinzugezogen, wie Gruppe 1, welche die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ für Argumentationen nutzt. Für eine Studentin aus dieser Gruppe fällt die konstante Folge unter ihr *Concept Image* zu konvergenten Folgen und daraus folgert sie, dass auch solche Folgen zu den konvergenten Folgen gehören, die den Grenzwert erreichen. Andere Gruppen haben über Folgen gesprochen, die durch Abänderung einzelner Folgenglieder aus vorgegebenen Beispielfolgen entstehen. Dies ist beispielsweise bei Gruppe 4 der Fall, als sie über ihre Formulierung „für große n “ diskutieren. Anhand einer Folge, die für $n = 7000000$ den Wert 2 annimmt und ansonsten durch den Term $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ definiert ist, macht eine Studentin deutlich, dass subjektiv unterschiedlich entschieden werden könnte, ob 7000000 ein großes n sei oder nicht. Das ist ein weiterer Hinweis darauf, dass die Studierenden die Beispielfolgen generisch betrachten.

Die zweite Gruppe macht gegen Ende ihres Nacherfindungsprozesses noch einmal ganz deutlich, dass sie die Beispiele generisch auffassen. Sie haben eine allgemeine Charakterisierung gefunden und diese an den vorgegebenen Beispielfolgen überprüft. Als sie mir ihr Ergebnis präsentieren sagen sie dazu, dass dieses eigentlich allgemein passen müsste, sie es aber nur an den vorliegenden Beispielen überprüfen konnten und nicht an jedem beliebigen Beispiel. Sie sprechen in dieser Situation nicht nur von den vorgegebenen Folgen, sondern auch von anderen möglichen Folgen, ohne näher auf diese einzugehen. Ihnen scheint bewusst zu sein, dass sie nicht eine Charakterisierung finden sollten, die ausschließlich für die vorgegebenen Folgen geeignet ist, sondern dass eine allgemeine Definition entwickelt werden soll. Überprüfen können sie ihre Formulierung natürlich nicht an jeder beliebigen Folge.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich in allen vier Gruppen Hinweise darauf finden, dass die vorgegebenen Beispiele als generisch angesehen werden. Möglicherweise hat die Verwendung des Begriffs „Konvergenz“ in der Aufgabenstellung dies unterstützt. Dadurch könnte eine Richtung der Begriffsbildung vorgegeben worden sein.

Aus den Ergebnisse zu dieser Leitfrage ergeben sich keine Konsequenzen in Bezug auf das Re-Design des Workshop-Konzepts.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

In den verschiedenen Varianten des hypothetischen Erkenntnisverlaufs wurde antizipiert, dass die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen klassifizieren und anschließend zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung übergehen. Es wurde erwartet, dass dieser Übergang zu einer einzigen Bedingung bei

manchen Studierenden eine Hürde darstellt. Daher wurden für diese mögliche Problemstelle Unterstützungsangebote vorbereitet. Für den Fall, dass die Studierenden noch gar nicht versucht haben, zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung überzugehen, sollten sie durch einen verbalen Impuls dazu aufgefordert werden. Falls sie es bereits versucht haben, sie jedoch an der Umsetzung scheitern, so sollte eine der fiktiven Diskussionen eingesetzt werden. Nun wird zusammengefasst, ob eine Klassifizierung der Beispiele in mehrere Gruppen überhaupt vorkommt, wie gegebenenfalls zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung übergegangen wird und wie dieser Übergang gelingt.

Bei den Gruppen 1 und 2 lassen sich keine Äußerungen oder Charakterisierungen finden, die darauf hindeuten, dass die Beispielfolgen in mehrere Gruppen von Folgen klassifiziert wurden. Bei den Gruppen 3 und 4 ist dies anders.

Gruppe 3 hat sich zunächst einige Merkmale der Beispielfolgen bewusst gemacht und formuliert anschließend als Charakterisierung, dass eine Folge konvergent heiße, wenn sie für n gegen Unendlich gegen x laufe oder gleich x sei. Hier wird deutlich, dass sie die Beispiele in zwei Gruppen klassifiziert haben: in diejenigen, die sich dem Grenzwert annähern, ohne ihn zu erreichen, und in diejenigen, die ihn erreichen. Zu welcher dieser

beiden Gruppen sie die durch $d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Folge zählen,

wird nicht deutlich. Die Studierenden sind mit dieser Formulierung zufrieden und hätten von sich aus nichts daran geändert. Daher interveniere ich, indem ich sie auffordere, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Die Gruppe versucht dies umzusetzen, es werden verschiedene Ideen gesammelt. Es gelingt ihnen jedoch nicht, eigenständig zu einer neuen Formulierung zu gelangen, mit der sie selbst zufrieden sind. Daher gebe ich ihnen als Hilfestellung die zweite fiktive Diskussion (siehe 4.2.4). Diese hat genau das Ziel, die Studierenden dabei zu unterstützen, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Dieses Ziel wird von der Gruppe erreicht, nachdem sie die fiktive Diskussion durchgearbeitet haben, lautet ihre nächste Charakterisierung, man finde immer ein kleineres ϵ , so dass es ein n_0 gebe, für das alle weiteren Punkte im Schlauch der Breite 2ϵ liegen. Im Anschluss wird diese Charakterisierung noch ein wenig umformuliert, alle weiteren Charakterisierungen bestehen aber ebenfalls aus einer einzigen Bedingung.

Auch Gruppe 4 formuliert, nachdem sie einige Aspekte der vorgegebenen Beispielfolgen entdeckt hat, eine Charakterisierung durch zwei Bedingungen, die mit „oder“ miteinander verbunden sind. Diese lautet, a_n gehe für n gegen Unendlich gegen einen festen Wert oder sei ein fester Wert, wobei der feste Wert in diesem Fall 1 sei. Es handelt sich somit um eine Klassifizierung in die gleichen Gruppen wie bereits bei der vorherigen Gruppe. Außerdem sehen die Studierenden – ebenfalls wie die der Gruppe 3 – zunächst keine Notwendigkeit, an dieser Charakterisierung etwas zu verändern. Daher gebe ich auch hier den Impuls, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Die Studierenden möchten jedoch zunächst ihre Formulierung mit zwei Bedingungen beibehalten, da sie der Meinung sind, dass es sich um zwei voneinander verschiedene Fälle handle. Anschließend beginnen sie dennoch, gemeinsam Ideen für eine einzige Bedingung zu sammeln. Darunter ist auch die Idee, die Differenz der Folgenglieder zum Grenzwert zu betrachten. Eine

Studentin argumentiert, dass bei der Formulierung, die Differenz der Folgenglieder zu 1 werde immer kleiner, keine zwei Bedingungen nötig seien, da darin auch inbegriffen sei, dass die Differenz verschwinden könne. Diese Eigenschaft trifft zwar nicht auf alle vorgegebenen Beispiele vor, doch es handelt sich tatsächlich um eine einzige Bedingung. Ab diesem Moment bestehen alle weiteren Formulierungen lediglich aus einer Eigenschaft.

Zum einen hat die Analyse somit ergeben, dass es tatsächlich Studierende gibt, welche die Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen klassifizieren. Diese sind mit ihren Formulierungen zufrieden und haben kein Bedürfnis, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Das deutet darauf hin, dass eine Veränderung der Aufgabenstellung sinnvoll sein könnte. In dieser könnte explizit vorgegeben werden, dass die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird.

Zum anderen möchte eine Studierendengruppe ihre Formulierung durch zwei Bedingungen auch dann noch beibehalten, als ich sie auffordere, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Hier stellt sich die Frage, ob die Interventionen verändert werden sollten. In beiden Fällen, in denen die Eigenschaft zunächst durch zwei Bedingungen ausgedrückt wurde, weist die Formulierung zusätzlich die Schwäche auf, dass sie nicht genau genug ist, um als Entscheidungsregel genutzt werden zu können. Anstatt eine Intervention für die Situation auszuwählen, dass die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt ist, hätte somit auch eine Intervention für die Situation einer unpräzisen Formulierung eingesetzt werden können. Wenn die Studierenden ihre Charakterisierung präzisieren, gehen sie möglicherweise automatisch zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung über. In dem Fall wäre es nicht mehr nötig, sie dazu aufzufordern, eine einzige Bedingung zu finden. Daher soll bei der Überarbeitung des Konzepts für die Problemsituation, dass die gesuchte Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wird und die Formulierung ungenau ist, eine Intervention mit dem Ziel der Präzisierung eingesetzt werden.

v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Zunächst stellt sich die Frage, ob die Studierenden die Aufgabenstellung als Aufforderung verstanden haben, die Definition der Konvergenz zu entdecken. Tatsächlich haben zwei Gruppen explizit darüber diskutiert, was ihrer Meinung nach von ihnen gefordert ist. Die zweite Gruppe glaubt in Turn 58 bis 65, dass sie nicht die Definition entwickeln sollen, sondern einen Unterschied zwischen den Beispielen und dem Nicht-Beispiel finden sollen. Später fragen sie mich in Turn 147, ob sie die Definition formulieren sollen. In Gruppe 4 sagt eine Studentin relativ zu Beginn, dass sie ja noch gar nicht wüssten, was Konvergenz sei. Daraufhin stellt die Gruppe in Turn 41 bis 43 die Vermutung auf, dass sie das herauskriegen sollen. Beiden Gruppen scheint also nicht eindeutig klar zu sein, was genau die Aufgabenstellung verlangt. Bei den anderen beiden Gruppen lassen sich keine Textstellen identifizieren, in denen die Studierenden explizit über die Aufgabenstellung und ihr Verständnis dieser sprechen.

Des Weiteren soll zusammengefasst werden, inwiefern es den Studierenden gelingt, ihre Definition derart präzise zu formulieren, dass sie üblichen Ansprüchen an eine hochschulmathematische Definition genügt. Bei allen vier Gruppen gibt es zu verschiedenen Zeitpunkten Formulierungen, die diesen Ansprüchen nicht gerecht werden. Die Studierenden aus Gruppe 2 bemerken dies eigenständig und verbessern ihre Definition eigendynamisch, bis sie die erforderliche Präzision aufweist. Bei den anderen drei Gruppen ist dies hingegen nicht der Fall. Sie verwenden in ihren Definitionsversuchen Ausdrücke wie „nähert sich an“, „geht gegen“ und „für große n “. In den Charakterisierungen fehlt dabei jeweils der Schritt zum umgekehrten Denken nach Roh (2005). Die Studierenden selbst sind mit Formulierungen, die derartige Ausdrücke enthalten, zufrieden und haben kein Bedürfnis, diese zu präzisieren. Ihnen scheint die Anforderung, dass die Charakterisierung so präzise formuliert werden soll, dass sie als Entscheidungskriterium genutzt werden kann, nicht bewusst zu sein. Bei der vierten Gruppe hängt das nicht vorhandene Bedürfnis, die Charakterisierung zu überarbeiten, vermutlich auch damit zusammen, dass sie diese zumindest teilweise aus einem Buch übernommen haben und daher nicht an der Richtigkeit zweifeln. Tatsächlich ist die Formulierung „ $|a_n - a|$ wird beliebig klein falls n nur groß genug ist“, die sie aus dem Buch vorlesen, jedoch umstritten.

Ich habe mich mehrfach dazu entschieden, die Studierenden zu fragen, ob man mit ihrer Formulierung für eine vorgegebene Folge entscheiden könnte, ob sie die Eigenschaft erfüllt oder nicht. Dies war für derartige Situationen vorgesehen. Dieser Impuls hat jedoch nicht zu dem gewünschten Ergebnis geführt. Die Studierenden scheinen der Meinung zu sein, dass dies mit ihrer Formulierung möglich sei. Dadurch bringt der Impuls ihren Erkenntnisprozess nicht voran. Möglicherweise wären die Studierenden selbst sogar tatsächlich in der Lage, ihre formulierte Eigenschaft für sich selbst als Entscheidungskriterium zu nutzen. Allerdings wäre zu erwarten, dass es Folgen gibt, bei denen verschiedene Personen mit der Formulierung zu verschiedenen Entscheidungen bezüglich der Konvergenz gelangen würden.

Bei zwei Gruppen werden anschließend als Unterstützungsangebot die ϵ -Streifen eingesetzt. Bei Gruppe 1 hat die eigenständige Beschäftigung mit diesem Hilfsmittel tatsächlich dazu geführt, dass sie die Eigenschaft schließlich geeignet formuliert haben. Die letzte Gruppe hingegen hat die ϵ -Streifen nicht als hinreichende Unterstützung angesehen, sie haben zusätzlich in einem oder mehreren Büchern nachgesehen und benötigten bei der Beschäftigung mit den ϵ -Streifen meine Unterstützung. Für einen solchen Fall sollte eine weitere Intervention vorbereitet werden, welche die Beschäftigung mit den ϵ -Streifen stärker anleitet. Möglicherweise hätte die Gruppe 4 dann keine Bücher hinzugenommen.

Nicht erwartete Problemstellen Bei den Gruppen 3 und 4 ließ sich jeweils eine ähnliche Problemstelle beobachten, die im Vorfeld nicht erwartet wurde. In beiden Gruppen scheinen die Studierenden gegen Ende des Nacherfindungsprozesses die Variable ϵ im Sinne des Veränderlichenaspekts nach Malle (1993, S. 79ff.) aufzufassen, das heißt sie haben eine Vorstellung, dass sie in einer zeitlichen Abfolge verschiedene, immer kleiner werdende, Werte von ϵ betrachten und dabei jeweils beobachten, welche Folgenglieder einer konkreten Folge sich innerhalb der ϵ -Umgebung befinden. Es handelt sich um eine dynamische Sichtweise. Sie haben hingegen keine Vorstellung im Sinne des Simultanaspekts, was bedeuten würde, dass ϵ alle positiven Zahlen gleichzeitig

repräsentiert. Bei Gruppe 3 äußert sich dies beispielsweise durch die Charakterisierung in Turn 491: „man findet immer ein kleineres Epsilon, so dass man ein n_0 hat, für den alle Nachfolger, also alle weiteren Punkte, in diesem Schlauch drin sind“. Bei Gruppe 4 hingegen wird diese Vorstellung deutlich, als sie darüber diskutiert haben, für welche ϵ -Streifen die Bedingung erfüllt sein soll, dass ab irgendeinem n alle Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Ab Turn 509 sprechen sie immer wieder von Streifen, die „immer schmaler“ werden. In Abschnitt 2.4.1 wurde berichtet, dass manche Forschende der Meinung sind, dynamische Sichtweisen könnten sich teilweise hinderlich auf das Verständnis des Konvergenzbegriffs auswirken. Dabei beziehen sie sich jedoch auf eine dynamische Vorstellung von einem immer größer werdenden n . Bei derartigen Vorstellungen ist in der Regel kein umgekehrtes Denken in Bezug auf diese Definition vorhanden. In dem hier vorliegenden Fall ist dies anders. Die Studierenden haben keine dynamische Vorstellung von n , sondern von ϵ . Den Schritt zum umgekehrten Denken haben sie vollzogen. Insofern könnte diese dynamische Sichtweise als kompatibel mit der formalen Definition eingeschätzt werden. Bei der Überarbeitung des Workshop-Konzepts sollten für diese Situation dennoch Unterstützungsangebote vorbereitet werden.

Insgesamt haben sich einige nötige Veränderungen und Ergänzungen sowohl der Aufgabenstellung als auch der Unterstützungsangebote ergeben. Zum einen ist nicht allen Studierenden aus der Aufgabenstellung deutlich geworden, was von ihnen verlangt ist. Es sollte in die Aufgabenstellung aufgenommen werden, dass die Definition der Konvergenz gegen 1 entdeckt werden soll. Zum anderen hat sich gezeigt, dass die Eigendynamik, welche die Aufgabenstellung gemeinsam mit den vorgegebenen (Nicht-)Beispielen erzeugen soll, bei den meisten Gruppen nicht zu beobachten ist. Der selbstkritische Umgang mit der Formulierung und die Präzisierung dieser erfordern andere Maßnahmen, als bisher vorgesehen. Rückblickend betrachtet ist es verständlich, dass die Studierenden die Anforderung, dass die formulierte Eigenschaft als Entscheidungskriterium dienen soll, nicht ohne weitere Hinweise erfüllt haben, da dies in der Aufgabenstellung nicht offengelegt wird. Den Studierenden ist diese Anforderung an eine Definition nicht bewusst. Diese sollte in der Aufgabenstellung expliziert werden. Dabei sollte auch der Zusatz aufgenommen werden, dass jede Person auf Basis der formulierten Eigenschaft zu denselben Entscheidungen bezüglich der Konvergenz von Folgen gelangen soll. Die Studierenden könnten möglicherweise auch unpräzise Formulierungen als Entscheidungskriterium nutzen. Ohne den Zusatz würden sie daher in dem Fall keine Notwendigkeit sehen, die Formulierung zu präzisieren.

Bei den ϵ -Streifen als Unterstützungsangebot bei der Präzisierung der Charakterisierung hat sich gezeigt, dass die Studierenden während der Beschäftigung mit diesem Hilfsmittel zum Teil weitere Unterstützung durch die Lehrperson benötigen. Hier könnte eine weitere vorbereitete Intervention in Form einer Anleitung der Beschäftigung mit den ϵ -Streifen nützlich sein.

Trotz der Hinweise auf nötige Überarbeitungen lässt sich festhalten, dass die Aufgabenstellung nie vollkommen verfehlt wurde. Die Studierenden haben sich alle damit beschäftigt, eine gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen zu finden und zu formulieren. Bis auf einer Gruppe ist ihnen dies auf Basis der Aufgabenstellung, der vorgegebenen Folgen und gegebenenfalls eingesetzter Interventionen auch tatsächlich gelungen.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

Im hypothetischen Verlauf war davon ausgegangen worden, dass die Studierenden die verschiedenen Versionen ihrer Charakterisierung jeweils direkt aufschreiben. Dies ist nicht bei allen vier Gruppen der Fall.

Die Gruppe 3 schreibt immer wieder Zwischenergebnisse auf. Sie halten diese jedoch anscheinend für Endergebnisse. Diese Studierenden notieren die Eigenschaft dabei jeweils genauso, wie sie diese zuvor mündlich formuliert haben. Bei dieser Gruppe sind daher keine Schwierigkeiten beim Aufschreiben festzustellen. Das Verschriftlichen hat in diesem Fall keine erkennbare Bedeutung für den Nacherfindungsprozess.

Die ersten beiden Gruppen diskutieren zunächst lediglich mündlich und notieren keine Zwischenergebnisse. Das Aufschreiben bildet jeweils eine eigene Phase am Ende des Erkenntnisprozesses. Bei beiden Gruppen ist ein kleiner Impuls nötig, damit sie sich dem Verschriftlichen widmen. Außerdem wird in beiden Fällen beim Aufschreiben von einer verbal formulierten Eigenschaft zu einer Eigenschaft in formal-mathematischer Sprache übergegangen. Bei beiden Gruppen leistet das Verschriftlichen somit einen Beitrag zur Nacherfindung der Definition. Bei dem Übergang gibt es drei Aspekte, die operationalisiert werden müssen, um die Eigenschaft vollständig durch formal-mathematische Sprache auszudrücken. Erstens muss die beliebige Wahl der Variablen ϵ (oder einer anderen Variablen, welche die entsprechende Rolle einnimmt) durch „ $\forall \epsilon > 0$ “ ausgedrückt werden. Zweitens muss von einer Bedingung wie etwa, die Folgenglieder befinden sich in (beliebigen) Umgebungen um den Grenzwert, zu einem Ausdruck der Art „ $|a_n - a| < \epsilon$ “ oder „ $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ “ übergegangen werden. Drittens muss der Aspekt „ab irgendeinem n “ durch „ $\forall n \geq N$ “ operationalisiert werden, wozu die Einführung einer zusätzlichen Variable nötig ist. Schwierigkeiten mit diesen verschiedenen Aspekten lassen sich nicht unbedingt eindeutig der Phase des Aufschreibens zuordnen, sie wurden zum Teil bereits bei der vorherigen Leitfrage berichtet. Lediglich bei Gruppe 2 gibt es eine Schwierigkeit, die über die bereits dargestellten Problemsituationen hinausgeht. Bei der Operationalisierung des Ausdrucks, die Folgenglieder würden sich innerhalb von Intervallen um den Grenzwert befinden, schreiben sie zunächst $a_k - g < \epsilon$, das heißt es fehlen die Betragsstriche. Dies fällt ihnen jedoch kurz darauf eigenständig auf und sie ergänzen diese.

Die vierte Gruppe notiert zwischendurch Definitionsversuche und das Aufschreiben bildet zusätzlich eine Phase am Ende der Nacherfindung. Zwischendurch kommt dem Aufschreiben anscheinend keine große Bedeutung zu. Am Ende hingegen sortieren sie alle einzelnen Aspekte, die sie zuvor mündlich formuliert haben, und verbinden diese zu einer Definition. Außerdem ersetzen sie dabei den Ausdruck „innerhalb der ϵ -Streifen“ durch „ $|a_n - x| < \epsilon$ “. Anzumerken ist allerdings, dass die Studierenden diesen Aspekt zuvor vermutlich bereits in einem Analysis-Buch gesehen haben, das sie mehrfach verwendet haben. Wie groß der Beitrag des Verschriftlichen bei dieser Gruppe tatsächlich ist, lässt sich daher nicht sagen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass zumindest in zwei Fällen der Impuls zum Verschriftlichen dazu führt, dass die formulierte Eigenschaft weiter optimiert wird. Diesen Studieren-

den scheint bewusst zu sein, dass an eine schriftlich notierte Definition andere Anforderungen gestellt werden als an eine mündlich formulierte Eigenschaft. Dies könnte bei weiteren Durchführungen des Workshops genutzt werden. Der Impuls zum Verschriftlichen, der in den genannten Fällen spontan gegeben wurde, soll in das Konzept aufgenommen werden.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

Werden die Erkenntnisverläufe der einzelnen Gruppen miteinander verglichen, so lassen sich sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede finden. Bei der Beantwortung der vorherigen Leitfragen wurden die Erkenntnisprozesse der Studierenden in Bezug auf verschiedene Aspekte untersucht. Dabei wurden bereits einige Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede zwischen den Teilnehmenden festgestellt. Es gibt Studierende mit unterschiedlichem Vorwissen und die Gruppen weisen Unterschiede in der Benutzung der Beispielfolgen auf. Eine Gruppe geht zumindest ansatzweise systematisch vor und testet zwei Versionen ihrer Definitionsversuche an allen vorgegebenen Folgen, bei den übrigen Folgen ist dies nicht der Fall. Manche Studierenden klassifizieren die Beispiele zunächst in mehrere Gruppen von Folgen, manche Gruppen formulieren die Eigenschaft stets durch eine einzige Bedingung. Teilweise notieren die Studierenden jeweils ihre Zwischenergebnisse, teilweise bildet das Verschriftlichen eine einzelne Phase, in der die Formulierung weiter optimiert wird. Deutliche Unterschiede haben sich auch in Bezug auf die Frage gezeigt, ob und mit Hilfe welcher Interventionen die Gruppen ihre Definitionen derart formulieren, dass sie heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügen. Einen Überblick über alle bei den einzelnen Gruppen eingesetzten Unterstützungsangebote gibt die Tabelle 6.6.

Intervention Gruppe	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1				228ff. 339ff.	
2					
3		180	191 261ff.		
4		189	159ff.	220 356ff.	
Σ	0	2	1	2	0

Tabelle 6.6: Überblick über den Einsatz von Interventionen zu den beobachteten Problemstellen bei den einzelnen Gruppen

Die Zahlen in den Feldern der Tabelle stehen jeweils für die Turns, in denen die entsprechende Intervention eingesetzt wurde. Die Tabelle zeigt, dass die Anzahl und Art

der eingesetzten Interventionen zwischen den Gruppen stark variiert.

Es gibt somit einige Unterschiede zwischen den teilnehmenden Studierenden. Das Workshop-Konzept hat es fast allen Gruppen ermöglicht, die Definition der Konvergenz einer Folge angeleitet nachzuerfinden. Damit Studierende mit unterschiedlichen Vorverständnissen zum Konvergenzbegriff sich auf die Aufgabe einlassen, sollte in der Aufgabenstellung deutlich gemacht werden, dass ein „neuer“ Begriff entwickelt wird, der möglicherweise von den Vorverständnissen abweicht. Außerdem sollten nicht nur zu den im Vorfeld antizipierten möglichen Problemstellen, sondern auch zu den weiteren aufgetretenen Schwierigkeiten Interventionen vorbereitet sein, um die Studierenden unterstützen zu können. Wird dies im Konzept berücksichtigt, so kann fast allen Studierenden die Nacherfindung gelingen. Es hat sich jedoch auch gezeigt, dass es Studierende gibt, die nicht bereit sind, sich über einen längeren Zeitraum eigenständig mit einem Problem zu beschäftigen, und die stattdessen hauptsächlich an dem Endergebnis interessiert sind. Für solche Personen ist das Konzept der angeleiteten Nacherfindung unabhängig von der genauen Umsetzung nicht geeignet.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Die abschließende Leitfrage ist, ob die Nacherfindungen erfolgreich verlaufen und welche Definitionen die Studierenden erarbeiten können. Bei Gruppe 2 ist die Nacherfindung ganz klar erfolgreich verlaufen. Es waren keine Interventionen meinerseits nötig und den Studierenden ist es gelungen, eine Charakterisierung zu formulieren, die der üblichen formalen Definition entspricht:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_m| < x \forall n \leq m$

Bei Gruppe 1 wurden geplante Interventionen in Form von einzelnen Fragen und ϵ -Streifen eingesetzt, mit deren Hilfe es den Studierenden ebenfalls möglich war, die Definition der Konvergenz nachzuerfinden. Da diese Interventionen ein Teil des Konzepts sind, kann der Erkenntnisprozess dieser Gruppe ebenfalls als erfolgreich bewertet werden. Auch in diesem Fall entspricht die entwickelte Charakterisierung der üblichen formalen Definition:

$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n$, wobei g der Grenzwert ist.

Auch bei Gruppe 3 sind Interventionen eingesetzt worden. Neben Fragen handelt es sich dabei um die zweite fiktive Diskussion. Durch diese werden die Studierenden stark angeleitet. Doch auch das spricht nicht gegen eine positive Bewertung, da diese ebenfalls zum Konzept gehört. Das Endergebnis dieser Gruppe ist etwas weniger formal als die übliche Definition, da sie von Schläuchen sprechen:

Man findet immer ein kleineres ϵ , so dass es ein n_0 gibt, für das alle weiteren Punkte im Schlauch der Breite 2ϵ liegen.

Den Ausdruck „Man findet immer ein kleineres ϵ “ ersetzen sie auf meinen Vorschlag hin durch „für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ “. Da die Grundidee der üblichen Definition in ihrer

entwickelten Eigenschaft vorhanden ist und sie auch sofort der Meinung waren, dass die formale Definition genau das beschreibt, was sie mit ihrer Formulierung ausdrücken wollten, kann auch der Verlauf dieser Gruppe als erfolgreich eingeschätzt werden.

Etwas anders verhält es sich bei Gruppe 4. Die Studierenden haben zum einen mehrfach in Büchern nachgeschlagen und somit manche Aspekte nicht eigenständig entwickelt, zum anderen benötigten sie abgesehen von den geplanten Interventionen am Ende meine Unterstützung bei der präzisen Formulierung. Dennoch hat auch diese Gruppe während der Beschäftigung mit der Aufgabe sicherlich neue Erkenntnisse gewonnen. So haben sie, bevor sie das erste Mal in einem Buch nachgeschlagen haben, bereits entdeckt, dass die Beispielfolgen für n gegen Unendlich gegen den Wert 1 „gehen“ oder ein fester Wert sind, dass das Verhalten „am Anfang“ egal ist, dass die Differenz der Folgenglieder zu 1 nicht bei allen Beispielfolgen immer kleiner wird und, dass die Folgenglieder teilweise auch hin und her springen. Ihre Charakterisierung lautet zu diesem Zeitpunkt wie folgt:

Für n gegen Unendlich geht $a_n - g$ gegen 0.

Diese genügt nicht den Anforderungen an eine mathematische Definition. Im weiteren Verlauf wird die Charakterisierung zwar noch weiterentwickelt, doch da die Studierenden Bücher zur Hilfe genommen haben und ich sie über die geplanten Interventionen hinaus unterstützt habe, kann bei den weiteren Versionen jedoch nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die Studierenden diese selbst entwickelt haben.

Insgesamt kann festgehalten, dass die Nacherfindung der Definition der Konvergenz bei drei von vier Gruppen mit dem vorgestellten Konzept als Ganzes erfolgreich verlaufen ist. An einzelnen Stellen des Konzepts sollen aber wie in den vorherigen Leitfragen bereits erwähnt für Version 2 beziehungsweise Version 3 noch Überarbeitungen vorgenommen werden, um das Konzept noch zu verbessern.

6.4 Zwischenfazit

Nach der ersten Erprobung des Workshop-Konzepts und dessen Analyse kann ein Zwischenfazit gezogen werden. Die Hauptaufgabe als Ganzes und die Analysemethode scheinen geeignet zu sein, um die Studierenden zur Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz anzuleiten. Bei drei von vier beobachteten Gruppen wurde der Nacherfindungsprozess insgesamt als erfolgreich bewertet und auch die vierte Gruppe hat einige zentrale Aspekte entdeckt.

Aus den Ergebnissen der Analysen der Erkenntnisprozesse haben sich einige Veränderungen und Ergänzungen des Konzepts ergeben. In der Aufgabenstellung sollte deutlich gemacht werden, dass eine Definition entwickelt werden soll, die möglicherweise von den Vorverständnissen der Studierenden abweicht. Dazu soll in der Aufgabenstellung ergänzt werden, dass die hochschulmathematische Definition der Konvergenz entdeckt werden soll. Des Weiteren sollen die Studierenden in der Aufgabenstellung dazu angeleitet werden, die von ihnen formulierten Eigenschaften jeweils an allen vorgegebenen Folgen zu überprüfen und die Formulierung bei Bedarf zu überarbeiten. Ohne eine solche Anleitung haben die meisten Studierenden dies überhaupt nicht oder nur oberflächlich gemacht. Außerdem

sollen in der Aufgabenstellung die Anforderungen, denen die Formulierung genügen soll, expliziert werden. Dazu soll ergänzt werden, dass die Eigenschaft so präzise formuliert werden soll, dass man mit ihr eindeutig entscheiden kann, ob eine Folge gegen 1 konvergiert oder nicht, und dass jede Person damit zu derselben Entscheidung gelangt.

In Bezug auf die Menge der vorgegebenen (Nicht-)Beispiele wurde lediglich eine sinnvolle Veränderung herausgearbeitet. Die durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierte Folge soll entfernt

werden. Sie scheint nicht von Bedeutung für die Nacherfindungen gewesen zu sein und zusätzlich könnte sie weitere Schwierigkeiten herbeiführen.

Bei den vorbereiteten Unterstützungsangeboten sollen ebenfalls Veränderungen und Ergänzungen vorgenommen werden. Erstens sollen die fiktiven Diskussionen überarbeitet werden, da einzelne Abschnitte von den Studierenden als nicht verständlich bewertet wurden. Eine zweite Veränderung betrifft die Problemsituation, dass die Studierenden die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt haben und es ihnen nicht gelingt, diese zu einer Bedingung zu verbinden. In diesem Fall sollen die Interventionen eingesetzt werden, die zur Unterstützung bei der Präzisierung der Formulierung vorgesehen sind. Die bisher vorgesehenen Unterstützungsangebote wurden von den Studierenden nicht so gut angenommen. Da der Einsatz der ϵ -Streifen teilweise als Intervention nicht ausreichend war, besteht die dritte Veränderung aus einer Ergänzung um eine Anleitung zur Beschäftigung mit den ϵ -Streifen. Die vierte Veränderung der Interventionen, die sinnvoll erscheint, ist der Impuls zum Verschriftlichen der formulierten Definition. Bei manchen Gruppen hat dies zur weiteren Optimierung der Formulierung geführt.

Durch diese Veränderungen und Ergänzungen kann der Erfolg des Konzepts möglicherweise noch erhöht werden.

7 Weiterentwicklung des Konzepts

Im Wintersemester 2013/2014 wurde das Workshop-Konzept in überarbeiteter Form an der Universität Kassel erprobt und erneut durch eine wissenschaftliche Studie begleitet. Auf die Veränderungen des Designs der Studie wird in Abschnitt 7.1 eingegangen. In Abschnitt 7.2 wird anschließend die modifizierte Version der *Hypothetical Learning Trajectory* präsentiert. Dabei ist anzumerken, dass die in Kapitel 6 dargestellte retrospektive Analyse zum Zeitpunkt der Überarbeitung der *Hypothetical Learning Trajectory* noch nicht vollständig und systematisch erfolgt war. Version 2 der *Hypothetical Learning Trajectory* basiert daher eher pragmatisch auf Erfahrungen aus dem ersten Durchgang und ersten Analyseergebnissen. Die vollständige retrospektive Analyse des ersten Durchgangs fließt gemeinsam mit den gezielten Analysen des zweiten Durchgangs, die in Abschnitt 7.3 durchgeführt werden, in die Version 3 der *Hypothetical Learning Trajectory* ein, die in Abschnitt 7.4 präsentiert wird, ein. Diese wurde im Rahmen des Promotionsvorhabens nicht noch einmal erprobt, sondern bildet ein Ergebnis des Forschungsprojekts.

7.1 Veränderungen des Designs der Studie

Zum einen weil die zweite Durchführung der Studie an der Universität Kassel stattfand, wo beispielsweise die erwartete Teilnehmerzahl in der Veranstaltung „Analysis 1“ deutlich geringer war als im Vorjahr an der Universität Paderborn, zum anderen aufgrund von Erfahrungen bei der ersten Durchführung der Studie wurden an dem Design der Studie einzelne Veränderungen vorgenommen. Um eine akzeptable Anzahl an Workshopteilnehmenden zu erhalten, wurden nicht wie im Vorjahr die Hälfte der Bewerber für den Workshop als Teilnehmerinnen und Teilnehmer ausgelost, sondern jeder Bewerber, der die Veranstaltung „Analysis 1“ nicht bereits in einem früheren Semester besucht hatte, durfte am Workshop teilnehmen. Es waren letztendlich zwölf Studierende, die am Vorbereitungsworkshop teilgenommen haben, von denen noch acht Studierende beim Nachbereitungsworkshop anwesend waren. Ein Vergleich dieser Experimentalgruppe mit einer kleinen Vergleichsgruppe, bestehend aus den Bewerbern für den Workshop, die keinen Platz zugelost bekommen haben, war somit nicht möglich. Überarbeitete Versionen der beiden Tests wurden zwar kurz vor dem Vorbereitungsworkshop beziehungsweise kurz nach dem Nachbereitungsworkshop von allen Studierenden der Analysis-1-Vorlesung bearbeitet, doch aufgrund der geringen Stichprobenumfänge wurde auf die Auswertung verzichtet. Es ist nicht zu erwarten, dass bei noch geringeren Fallzahlen als im Vorjahr statistisch signifikante Effekte nachweisbar wären.

Bei der Analyse der Diskussionen während der Nacherfindung der Definition der Konvergenz aus dem Vorjahr waren an verschiedenen Stellen die Interpretationen von Aussagen schwierig, weil die Studierenden beispielsweise auf Grafiken oder ähnliches gezeigt haben, was aus den Audioaufnahmen nicht immer erkennbar war. Die einzelnen Kleingruppen

konnten dabei nicht gefilmt werden, da nicht genug Videokameras zur Verfügung standen. Außerdem haben die Studierenden dadurch, dass sich alle Kleingruppen gleichzeitig in einem Raum befanden, teilweise den Diskussionen anderer Gruppen zugehört und auch Erkenntnisse übernommen. Für mich als Lehrperson war es zudem zu manchen Zeitpunkten schwierig, alle Gruppen optimal zu unterstützen. All das hat zu der Entscheidung geführt, bei der zweiten Durchführung den Workshop an verschiedenen Terminen stattfinden zu lassen, so dass jeweils nur eine Kleingruppe teilnimmt, die besser beobachtet und unterstützt werden kann.

Schließlich gibt es noch eine Änderung des Designs, welche die retrospektive Analyse der Studierendendiskussionen während der Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz betrifft. Es werden von diesem Durchgang keine vollständigen Analysen der Erkenntnisverläufe der einzelnen Gruppen durchgeführt, sondern es werden lediglich gezielt die veränderten Aspekte der Hauptaufgabe analysiert. Ein Grund für diese Entscheidung ist der Umfang des Datenmaterials. Zum anderen war zum Zeitpunkt der Durchführung des überarbeiteten Konzepts der erste Durchgang auch noch nicht vollständig und systematisch ausgewertet, weswegen nicht alle Ergebnisse des ersten Durchgangs für die Überarbeitung genutzt wurden. Somit ist es im Nachhinein betrachtet wenig verwunderlich, dass an manchen Stellen die Veränderungen anscheinend nicht ausreichend waren.

7.2 *Hypothetical Learning Trajectory* – Version 2

Nun soll dargelegt werden, welche Veränderungen an der *Hypothetical Learning Trajectory* im Einzelnen vorgenommen wurden und warum. Unveränderte Elemente des Konzepts werden lediglich kurz zusammengefasst. Die ausführlichen Darstellungen sind an der entsprechenden Stelle im Kapitel 4 zu finden. Die Struktur der zweiten Version der *Hypothetical Learning Trajectory* entspricht jener der ersten Version, es wird also zuerst auf die erwarteten Starting Points und angestrebten End Points von Vor- und Nachbereitungsworkshop eingegangen und im Anschluss werden die einzelnen Aktivitäten mit vorbereiteten Interventionen und hypothetischen Erkenntnisverläufen präsentiert. Der Fokus liegt wie bereits bei der ersten Version der *Hypothetical Learning Trajectory* auf der Hauptaufgabe des Vorbereitungswshops. Die einzelnen Veränderungen dieser Aktivität werden jeweils mit (Ä ...) bezeichnet, in der späteren retrospektiven Analyse in Abschnitt 7.3 wird darauf Bezug genommen.

7.2.1 Starting Points und End Points

Auch bei der zweiten Durchführung liegt zwischen dem ersten und dem zweiten Teil des Workshops ein zeitlicher Abstand von mehreren Wochen, so dass es sinnvoll erscheint, das erwartete Vorwissen der Teilnehmenden und die Lernziele jeweils für Vorbereitungs- und Nachbereitungsworkshop einzeln zu präsentieren.

Starting Points des Vorbereitungswshops

Da sich die Starting Points des Vorbereitungswshops bei der ersten Durchführung bestätigt haben und der Workshop zu einem ähnlichen Zeitpunkt der Vorlesung stattfindet,

gibt es hier kaum Änderungsbedarf. Diese Starting Points werden hier kurz zusammengefasst, genauer können sie in Abschnitt 4.1.1 nachgelesen werden.

In der Analysis-1-Vorlesung sind bis zum Zeitpunkt des Vorbereitungsworkshops metrische Räume und insbesondere $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ behandelt worden. Die reellen Zahlen sind axiomatisch eingeführt worden inklusive des Archimedischen Axioms und des Intervallschachtelungsaxioms. Es wird wieder davon ausgegangen, dass die Studierenden zwar schon Aussagen, die Ausdrücke wie „es gibt“ und „für alle“ beziehungsweise die entsprechenden Quantoren enthalten, kennengelernt haben, doch über keine Routine im Umgang mit diesen verfügen. Zu den Themen Unendlichkeit und Ungleichungen mit Beträgen verfügen die Workshopteilnehmenden im Wesentlichen über das Vorwissen, das sie in der Schule erworben haben. Schwierigkeiten wie die in den Abschnitten 2.3.5, 2.3.1 und 2.3.6 genannten sind zu erwarten. Zu Folgen haben die Studierenden vermutlich eher dynamische Vorstellungen, da sie diese als Aufzählung oder Iteration kennengelernt haben. Auch gehen sie möglicherweise davon aus, dass Folgen durch einen einzigen Term definiert werden, in dem der Folgenindex als Variable vorkommt. Konvergenz kennen die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer hauptsächlich im Zusammenhang mit dem Grenzwertverhalten von Funktionen. Ihr *Concept Image* zu konvergenten Folgen beinhaltet überwiegend typische konvergente Folgen, und zwar solche, die monoton sind und den Grenzwert nicht erreichen. Die in Abschnitt 2.4 berichteten eingeschränkten Vorstellungen sind zu erwarten. Insbesondere ist hier die Vorstellung, dass konvergente Folgen den Grenzwert nicht erreichen, hervorzuheben, die im ersten Durchgang des Workshops bei einigen Teilnehmenden zu beobachten war. Die formale Definition der Konvergenz einer Folge haben die Studierenden teilweise zwar schon einmal gesehen, können sie jedoch nicht wiedergeben. Sie haben ein paar andere formale mathematische Definitionen kennengelernt, aber noch keine Definition eigenständig nacherfunden.

End Points des Vorbereitungsworkshops

Auch die End Points des Vorbereitungsworkshops aus Abschnitt 4.1.2 werden beibehalten. Die Workshopteilnehmenden sollen am Ende des vorbereitenden Teils des Workshops ein breites *Concept Image* zum Folgen- und Konvergenzbegriff aufgebaut haben, das jeweils nicht nur aus typischen Beispielen besteht. Die formale Definition der Folgenkonvergenz sollen sie kennen, verstanden und mit geeigneten Vorstellungen verknüpft haben und in einfachen Fällen anwenden können. Auch sollen die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer erkannt haben, dass eine Definition unter anderem die Funktion hat, dass eindeutig entschieden werden kann, ob ein Objekt diese erfüllt oder nicht.

Starting Points des Nachbereitungsworkshops

Da auch bei diesem Durchgang alle Studierenden, die am Nachbereitungsworkshop teilnehmen, bereits am Vorbereitungsworkshop teilgenommen haben, wird davon ausgegangen, dass dessen End Points erreicht wurden. Es wird zum einen davon ausgegangen, dass die Workshopteilnehmenden die Begriffe Teilfolge, Cauchy-Folge, Vollständigkeit von metrischen Räumen, die Sprechweise „für fast alle“, (strenge) Monotonie, bestimmte Divergenz, Limes Inferior, Limes Superior und Häufungswert kennen. Zum anderen haben sie verschiedene Methoden, Konvergenz oder Divergenz einer Folge nachzuweisen, kennengelernt. Dazu gehört die Eigenschaft Cauchy-Folge als notwendiges Konvergenzkriterium, Cauchy-

Folge mit beschränkter Teilfolge, in vollständigen Räumen Cauchy-Folge als hinreichendes Konvergenzkriterium, Rechenregeln, Quetschlemma, Monotonie und Beschränktheit und für reelle Folgen die Gleichheit von Limes Inferior und Limes Superior. Außerdem wurden verschiedene Beispiele behandelt und Eigenschaften konvergenter Folgen sowie Zusammenhänge zwischen Konvergenz und anderen Eigenschaften behandelt. Auch haben die Studierenden eigenständig sowohl Konvergenznachweise als auch Beweise durchgeführt. Dennoch kann wie bereits im Vorjahr nicht davon ausgegangen werden, dass die Workshopteilnehmenden tatsächlich über all das Wissen verfügen, das in Vorlesung und Übungen behandelt wurde.

End Points des Nachbereitungsworkshops

Bei den End Points des Nachbereitungsworkshops gibt es keinen Bedarf, Änderungen an der Version des Vorjahres vorzunehmen. Diese werden hier noch einmal kurz zusammengefasst. Ausführlicher sind sie in Abschnitt 4.1.4 zu finden.

Die Workshopteilnehmenden sollen nach der Teilnahme an beiden Teilen des Workshops und der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen in Vorlesung und Übungen ihr *Concept Image* zu dem Begriff verfestigt haben. Sie sollen bei verschiedenartigen Folgen entscheiden können, welche Methode geeignet ist, um bei der jeweiligen Folge die Konvergenz nachzuweisen beziehungsweise zu widerlegen und sie sollen diese Methoden auch korrekt anwenden können. Sie sollen adäquate Vorstellungen zum Konvergenzbegriff aufgebaut haben und ein „vertieftes Verständnis“ erworben haben. Außerdem sollen die Studierenden in der Lage sein, einfache Beweise im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff sowohl eigenständig durchzuführen als auch formal aufzuschreiben und sie sollen Beziehungen zwischen dem Konvergenzbegriff und Begriffen wie Häufungswerte, Cauchy-Folgen, Beschränktheit und Monotonie kennen.

7.2.2 Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 2

In Tabelle 7.1 ist ein Überblick über die einzelnen Aktivitäten des Vorbereitungsworkshops jeweils mit vorgesehener Sozialform und geschätzter Dauer zu sehen. Auf Veränderungen bei den einzelnen Aktivitäten selbst wird im Folgenden noch eingegangen. Die geschätzte Dauer wurde im Vergleich zum Vorjahr teilweise angepasst, wenn die tatsächliche Dauer bei der ersten Erprobung von der im Vorfeld geschätzten Dauer abgewichen ist. Außerdem wurde eine fest geplante Pause ergänzt, da sich gezeigt hat, dass eine Pause nur an einer Stelle sinnvoll ist, und zwar vor der Bearbeitung der Hauptaufgabe. Noch früher ist eine Pause erfahrungsgemäß nicht nötig, der Nacherfindungsprozess sollte möglichst nicht unterbrochen werden und im Anschluss folgt nicht mehr viel, so dass sich eine Pause nicht mehr lohnen würde.

Vorbereitende Aktivitäten

Die im Vorjahr verwendete Einstiegsaufgabe zum Thema Folgen aus einem Schulbuch wurde für diesen Durchgang weggelassen. Der Grund dafür ist, dass diese Aufgabe keinen nennenswerten Mehrwert bildet und der zeitliche Umfang des Workshops insgesamt etwas reduziert werden sollte, da die Studierenden sich ansonsten gegen Ende nicht mehr konzentrieren können. Nach einer Begrüßung wird nun also direkt mit der Definition von

Aktivität	Sozialform	Dauer
Begrüßung		10 Min
Definition Folge	Vortrag/Unterrichtsgespräch	10 Min
Begriffsumfang Folge	Unterrichtsgespräch	15 Min
Aufgaben zu Folgen	Einzelarbeit	15 Min
Erste Betrachtung der Folgen	Einzelarbeit	20 Min
PAUSE		15 Min
Nacherfindung	Gruppenarbeit	90 Min
Besprechung der Ergebnisse	Unterrichtsgespräch	15 Min
Definition Konvergenz	Unterrichtsgespräch	5 Min

Tabelle 7.1: Überblick über den zeitlichen Verlauf des Vorbereitungsworkshops

Folgen begonnen. Die Definition selbst wurde in genau der Art formuliert, wie sie auch in der zugehörigen Analysis-1-Vorlesung behandelt werden soll:

Definition

Eine reelle Folge ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

Für die gesamte Folge ist die Schreibweise $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ üblich.

Wie im Vorjahr soll der Begriff der Abbildung kurz wiederholt werden und anschließend werden verschiedene mögliche Darstellungen von Folgen jeweils mit Beispielen präsentiert. Dabei gibt es keine Veränderungen im Vergleich zum Vorjahr. Wieder soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass eine Folge durch Aufzählung endlich vieler Folgenglieder, eine tabellarische Darstellung oder eine grafische Darstellung nicht eindeutig festgelegt ist. Auch soll angemerkt werden, dass nicht jede Folge durch einen Term definiert werden kann. Abgesehen von den bereits genannten Darstellungsformen werden noch die rekursive Definition und abschnittsweise Definitionen thematisiert und es wird darauf hingewiesen, dass es sich nicht um eine vollständige Liste aller Darstellungsformen handelt. Im Anschluss folgt wie im Vorjahr eine Arbeitsphase, in der die Studierenden in Einzelarbeit bei verschiedenen Beispielen entscheiden sollen, ob es sich um eine Folge handelt oder nicht, gegebenenfalls die ersten fünf Folgenglieder angeben und die Antwort in jedem Fall begründen. Die einzige Änderung besteht darin, dass eins der Beispiele ausgetauscht wurde und zusätzlich die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ergänzt wurde. Dies erscheint sinnvoll, da diese Folge nun auch in der Hauptaufgabe verwendet wird. Wie in Abschnitt 2.3.3 dargelegt wurde, fassen manche Lernende eine konstante Folge überhaupt nicht als Folge auf. Ein Grund dafür kann sein, dass sie der Meinung sind, eine Folge müsse durch einen algebraischen Term definiert werden, in dem der Index n vorkomme. Derartige Probleme sollten möglichst bereits an dieser Stelle behoben werden, bevor später bei der Betrachtung des Grenzwertens der konstanten Folge weitere Pro-

bleme hinzukommen könnten. Im Anschluss an die Bearbeitung soll eine Besprechung der Ergebnisse im Plenum stattfinden, bevor zu der Hauptaufgabe übergegangen wird.

Hauptaufgabe

Die Hauptaufgabe soll im Wesentlichen beibehalten werden. Bei der Auswahl der sechs gegen 1 konvergenten Folgen für die Erarbeitung der Definition wurde eine Veränderung vorgenommen: Die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ wurde ersetzt durch die konstante

Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Dass die ursprünglich gewählte Folge ausgetauscht werden sollte, hatte vor allem den Grund, dass bei der Analyse der Diskussionen aus der Erarbeitung der Definition ein Ergebnis war, dass die Studierenden die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ am seltensten in ihren Argumentationen benutzt haben. Tatsächlich handelt es sich um eher typische Beispiele von Folgen mit Grenzwert 1, da sie beide monoton und beschränkt sind. Das erklärt somit, warum die Studierenden gerade diese beiden Beispiele kaum benutzt haben. Zum anderen ist es dadurch, dass die beiden Folgen von derselben Art sind, vertretbar, nur eine von ihnen beizubehalten. Des Weiteren hat die ursprüngliche Folge den Nachteil, dass sie in der Form $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ eher ungewöhnlich

definiert ist. Diese Definition war bewusst gewählt worden, um durch die Verwendung des Summenzeichens keine zusätzlichen Schwierigkeiten zu erzeugen. Dennoch ist die hier gewählte Definition eher unüblich. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen ist in einer Form definiert, die den Studierenden am ehesten bekannt ist. Das spricht also dafür, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beizubehalten und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu streichen oder auszutauschen. Die konstante Folge wurde auch in dem Konzept von Przenioslo (2005) vorgeschlagen. Bei der ersten Erprobung waren lediglich schließlich konstante Folgen vertreten, die Menge der Folgen wird also durch die konstante Folge um einen weiteren Typ von Folge ergänzt. Diese Änderung des Konzepts wird im Folgenden mit (Ä1) bezeichnet. Die folgenden sechs Beispiele wurden den Studierenden des zweiten Workshops also vorgegeben:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{n+1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } e_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$$

und das von Przenioslo (2005) übernommene Nicht-Beispiel:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Beispielfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wurde im Vergleich zum Vorjahr etwas anders notiert. Damit die Definition für alle Beispielfolgen einheitlich ist, wurde die Schreibweise $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ anstelle von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gewählt. Aus diesem Grund wurde die konstante Folge auch in der Form $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ definiert.

Die erste Beschäftigung mit diesen Beispielen durch das Zuordnen der Grafiken und das Formulieren charakteristischer Eigenschaften wurde beibehalten:

Aufgabenstellung

Ordne den Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Grafiken zu und formuliere die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Folgen.

Die Formulierung der Hauptaufgabe wurde hingegen angepasst:

Arbeitsauftrag

Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden als konvergent gegen den Grenzwert 1 bezeichnet, die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hingegen ist nicht konvergent.

Versuche, eine gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, die die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht besitzt.

Diese Eigenschaft muss so gut formuliert werden, dass man für jede beliebige Folge entscheiden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht.

Der erste Satz der Aufgabenstellung wurde unverändert übernommen. Anstelle der Anforderung, „die“ gemeinsame Eigenschaft möglichst gut zu beschreiben, sollten die Studierenden also nun „eine“ gemeinsame Eigenschaft finden, da es theoretisch auch eine andere Eigenschaft als die Konvergenz gegen 1 geben könnte, welche die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Gegensatz zur Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzen. Außerdem wurde präziser formuliert, wie diese Eigenschaft beschrieben werden sollte: „möglichst gut“ wurde ersetzt durch den Zusatz, dass man anhand der Formulierung der Eigenschaft für jede beliebige Folge entscheiden können sollte, ob sie diese Eigenschaft besitze. Das war bei der ersten Erprobung lediglich als möglicher Impuls vorgesehen, falls die Formulierung der Studierenden diese Anforderung nicht erfüllt hat, sie jedoch mit dieser zufrieden waren. Da dieser Fall häufig eingetreten ist, wurde dieser Impuls direkt mit in die Aufgabenstellung aufgenommen. Die Änderung der Aufgabenstellung wird mit (Ä2) bezeichnet.

Hypothetische Erkenntnisverläufe

Die hypothetischen Erkenntnisverläufe sind im Vergleich zu Version 1 der *Hypothetical Learning Trajectory*, nachzulesen in Abschnitt 4.2.3, nur leicht verändert. Auch wenn die beobachteten Studierenden bei der ersten Durchführung des Workshops nicht bewusst mit einer Teilmenge der Beispielfolgen begonnen haben, so wurden dennoch oft Eigenschaften formuliert, die lediglich auf einen Teil der Beispielfolgen zutreffen. Daher wird dieses Vorgehen in den hypothetischen Verläufen beibehalten und auch die drei Varianten des hypothetischen Verlaufs bleiben bestehen. Es wird nun in den verschiedenen Varianten des hypothetischen Verlaufs aber nicht mehr explizit davon gesprochen, dass die Studierenden sich zunächst mit einer Teilmenge der Beispielfolgen beschäftigen und anschließend weitere Beispielfolgen hinzugezogen werden. Außerdem wurde an manchen Stellen ergänzt, dass bestimmte Schritte mögliche Hürden im Erkenntnisverlauf darstellen können. Dabei handelt es sich um solche Schritte, die bei der ersten Durchführung des Workshops für manche Studierende eine Problemstelle gebildet haben. Da die Veränderungen der hypothetischen Erkenntnisverläufe keinen direkten Einfluss auf die Durchführung des Workshops haben, sondern es sich um eine Veränderung der Analyseperspektive handelt, werden diese im Gegensatz zu den Änderungen der Hauptaufgabe selbst nicht mit „Ä ...“ bezeichnet, da sie später nicht analysiert werden.

Hypothetischer idealer Verlauf – Variante 1

Die Studierenden formulieren als erste Charakterisierung:

(Charakterisierung 1) *Die Folgenglieder nähern sich 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Sie bemerken dann, dass es bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen „Ausreißer“ bei $n = 10$ gibt. Dieses Folgenglied passt nicht zur Formulierung der Annäherung. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Ihre Lösung des Problems ist es, die ersten Folgenglieder außer Betracht zu lassen und sie formulieren:

(Charakterisierung 2) *Ab irgendeinem n nähern sich die Folgenglieder 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Im Anschluss fällt auf, dass bei den Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und/oder $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Wert 1 „erreicht“ wird, es gibt jeweils ein n , ab dem die Folgen konstant 1 sind. Sofern die Studierenden das nicht selbständig bemerken, ist eine Intervention nötig. Daraufhin überarbeiten sie ihre Formulierung und notieren:

(Charakterisierung 3) *Ab irgendeinem n nähern sich die Folgenglieder entweder 1 an, ohne 1 zu erreichen, oder ab irgendeinem n sind die Folgenglieder konstant 1.*

Die Studierenden bemerken schließlich, dass ihre Formulierung auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft, da es für die Folge, deren Glieder für jedes Vielfache von 10 genau 1 und für alle übrigen natürlichen Zahlen n durch $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, weder ein n gibt, ab dem sich die Folgenglieder 1 annähern, ohne 1 zu erreichen, noch gibt es ein n , ab dem die Folgenglieder konstant 1 sind. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist eine Intervention nötig. Idealerweise kommen die Studierenden auf die Idee, den Abstand der Folgenglieder

zu 1 zu betrachten. Sowohl bei dieser Idee als auch bei der nachfolgend beschriebenen Umsetzung könnten Interventionen erforderlich sein. Die vorherige Charakterisierung mit dem Abstand der Folgenglieder zu 1 formuliert wäre: *Ab irgendeinem n ist der Abstand der Folgenglieder zu 1 entweder sehr klein, ohne genau 0 zu werden, oder dieser Abstand ist ab irgendeinem n genau 0.* Die Studierenden argumentieren, dass sie die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einbeziehen können, indem sie beide Teile der Aussage zusammenfassen:

(Charakterisierung 4) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Nun betrachten die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ subjektiv verschieden interpretiert werden kann. Somit kann mit dieser Formulierung nicht für jede Folge eindeutig entschieden werden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Sie verbessern ihre Formulierung daher um den Aspekt, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 5) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun im Idealfall an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen den Studierenden keine Widersprüche auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten sie diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Ein solches Ergebnis wäre aus meiner Sicht zufriedenstellend. Eine mathematisch formalisierte Definition mit Quantoren ist hier nicht unbedingt gefordert, eine Verbalisierung ist ebenfalls zulässig, solange sie präzise formuliert ist.

Hypothetischer idealer Verlauf – Variante 2

Die erste Formulierung der gemeinsamen Eigenschaft lautet wie folgt:

(Charakterisierung 1) *Der Abstand der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner.*

Anschließend bemerken die Studierenden, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab dem 125. Glied konstant 1 ist, der Abstand zu 1 wird in dem Falls also nicht mehr kleiner, sondern bleibt 0. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist ein Impuls nötig. Diesen Aspekt nehmen die Studierenden in ihre Formulierung mit auf:

(Charakterisierung 2) *Der Abstand der Folgenglieder zu 1 wird immer kleiner oder bleibt 0.*

Dann erkennen die Studierenden, dass es sowohl bei der Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch bei der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Stelle gibt, an welcher der Abstand eines Folgenglieds zu 1 im Vergleich zum Abstand des vorherigen Folgenglieds zu 1 größer ist. Werden die ersten Folgenglieder außer Acht gelassen, so trifft die Formulierung auch auf diese beiden Folgen zu:

(Charakterisierung 3) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner oder bleibt 0.*

Hier könnte sowohl bei der Entdeckung, dass die Charakterisierung 2 nicht auf alle Beispielfolgen zutrifft, als auch bei der Entwicklung der Charakterisierung 3 Unterstützung erforderlich sein. Schließlich fällt ihnen auf, dass bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Abstand der Folgenglieder zu 1 bei jedem zehnten Folgenglied wieder größer wird, da die Folgenglieder für jedes Vielfache von 10 exakt 1 sind, für alle übrigen natürlichen Zahlen sind sie jedoch von 1 verschieden. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist eine Intervention nötig. Die Studierenden erkennen daran idealerweise, dass ihre Formulierung die vorgegebenen Folgen nicht angemessen charakterisiert. Im Anschluss beziehen die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ihre Überlegungen mit ein. Beim Vergleich der Folgen $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erkennen sie, dass es zwar bei beiden Folgen immer wieder Stellen gibt, an denen der Abstand zu 1 größer wird, doch bei der Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird der Bereich, in dem sich der Abstand für alle weiteren Folgenglieder befindet, klein, während es bei der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer wieder Folgenglieder gibt, deren Abstand zu 1 gleich 1 ist. Sie bringen diese Erkenntnis wie folgt in ihre Formulierung ein:

(Charakterisierung 4) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Die Studierenden beschäftigen sich weiter mit dem Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ subjektiv verschieden interpretiert werden kann. Somit kann mit dieser Formulierung nicht für jede Folge eindeutig entschieden werden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Sie verbessern ihre Formulierung daher um den Aspekt, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 5) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun im Idealfall an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen den Studierenden keine Widersprüche auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten die Studierenden diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Hypothetischer idealer Verlauf – Variante 3

Die Studierenden beginnen mit der folgenden Formulierung:

(Charakterisierung 1) *Ab irgendeinem n sind die Folgenglieder konstant 1.*

Anschließend stellen sie fest, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und/oder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die formulierte Eigenschaft nicht erfüllen, da kein Folgenglied dem Wert 1 entspricht. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist eine Intervention nötig. Dann modifizieren sie die Formulierung:

(Charakterisierung 2) *Ab irgendeinem n sind die Folgenglieder entweder konstant 1 oder sie nähern sich 1 an, ohne 1 zu erreichen.*

Die Studierenden bemerken schließlich, dass ihre Formulierung auf die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft, da es für die Folge, deren Glieder für jedes Vielfache von 10 genau 1 und für alle übrigen natürlichen Zahlen n durch $1 + \frac{1}{n}$ definiert sind, weder ein n gibt, ab dem sich die Folgenglieder 1 annähern, ohne 1 zu erreichen, noch gibt es ein n , ab dem die Folgenglieder konstant 1 sind. Sofern sie das nicht selbständig bemerken, ist eine Intervention nötig. Idealerweise kommen die Studierenden auf die Idee, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten. Sowohl bei dieser Idee als auch bei der nachfolgend beschriebenen Umsetzung könnten Interventionen erforderlich sein. Die vorherige Charakterisierung mit dem Abstand der Folgenglieder zu 1 formuliert wäre: *Ab irgendeinem n ist der Abstand der Folgenglieder zu 1 entweder fast 0, ohne genau 0 zu werden, oder dieser Abstand ist ab irgendeinem n genau 0.* Die Studierenden argumentieren, dass sie die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einbeziehen können, indem sie beide Teile der Aussage zusammenfassen:

(Charakterisierung 4) *Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein.*

Nun betrachten die Studierenden das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie erkennen, dass bei dieser Folge sehr wohl ein n gefunden werden kann, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 höchstens 1 beträgt. Es kann hingegen kein n gefunden werden, ab dem der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als 1 ist. Das wirft die Frage auf, was denn „sehr klein“ bedeutet und sie kommen zu der Erkenntnis, dass „sehr klein“ subjektiv verschieden interpretiert werden kann. Somit kann mit dieser Formulierung nicht für jede Folge eindeutig entschieden werden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Sie verbessern ihre Formulierung daher um den Aspekt, dass ein beliebiger vorgegebener Abstand unterschritten werden soll. Zusätzlich fällt ihnen dabei auf, dass der Index, ab dem der jeweils vorgegebene Abstand unterschritten werden soll, sowohl von der jeweiligen Folge abhängt als auch vom vorgegebenen Abstand. Aufgrund dieser Erkenntnis präzisieren sie die Charakterisierung optimalerweise, wobei auch hier sowohl bei der Erkenntnis selbst als auch bei der Umsetzung der Präzisierung Unterstützung nötig sein kann:

(Charakterisierung 5) *Zu jedem vorgegebenen, positiven Abstand gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner ist als der vorgegebene Abstand.*

Diese Charakterisierung wird nun im Idealfall an allen Beispielen überprüft. Dabei fallen ihnen keine Widersprüche auf. Für jede der vorgegebenen Beispielfolgen ist diese Aussage korrekt, für das Nicht-Beispiel hingegen nicht. Daher behalten die Studierenden diese Charakterisierung als finales Ergebnis bei.

Geplante Interventionen

Wie bereits bei der ersten Version des Konzepts ist geplant, dass ich als Lehrperson mich im Hintergrund halte und nur dann interveniere, falls die Studierenden der Meinung sind, sie seien fertig, oder falls sie um Unterstützung bitten, da sie alleine nicht weiterkommen. Dafür wurden die erwarteten Situationen und dazu geplanten Interventionen des Vorjahres überarbeitet. Die erwarteten Situationen wurden prinzipiell beibehalten, teilweise jedoch in speziellere Situationen, die bei der ersten Durchführung aufgetreten sind, unterteilt. Diese Unterteilung der Problemstellen wird mit (Ä 3) bezeichnet. Dadurch können noch gezieltere Interventionen eingesetzt werden. Diese Veränderung der Interventionen wird mit (Ä 4) bezeichnet. Außerdem wurde versucht, die fiktiven Diskussionen verständlicher und authentischer zu gestalten, indem Aussagen von Studierenden aus der ersten Durchführung des Workshops verwendet werden. Meist wurde kein Ausschnitt einer Diskussion gefunden, der komplett als fiktive Diskussion benutzt werden könnte. Daher wurden einzelne Äußerungen, die teilweise auch aus den Diskussionen verschiedener Gruppen stammen, verwendet, bei Bedarf leicht verändert und durch geeignete fiktive Äußerungen ergänzt. Insgesamt ist dadurch die Sprache, die in den fiktiven Diskussionen vorkommt, näher an der Sprache, welche die Studierenden in Diskussionen untereinander verwenden. Dies steigert vermutlich die Authentizität und kann außerdem zu einer besseren Verständlichkeit der Aussagen führen. Die Überarbeitung der fiktiven Diskussionen in Bezug auf die Sprache wird mit (Ä 5) bezeichnet. Eine Übersicht über alle erwarteten Situationen und dazu vorbereiteten Interventionen ist in Tabelle 7.2 zu sehen. Auf die einzelnen Situationen und Interventionen wird nun detaillierter eingegangen, sofern sie nicht unverändert beibehalten wurden.

Situation	Intervention
(A) Die Studierenden finden keinen Ansatz, sie sind möglicherweise mit der Menge an Beispielen überfordert.	strategische Intervention: Es soll der Tipp gegeben werden, erst einmal mit weniger Beispielen zu beginnen und eine gemeinsame Eigenschaft von diesen zu finden. Dann kann überprüft werden, ob die weiteren Beispiele diese Eigenschaft auch erfüllen. nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der ersten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.

(B) Die Studierenden formulieren eine nicht passende Eigenschaft, prüfen jedoch nicht selbständig, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht.	strategische Intervention: <i>Überprüft mal, ob eure Eigenschaft auf alle Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht.</i> Falls das nicht ausreicht: Hinweis auf die Beispielfolge, für welche die Eigenschaft nicht zutrifft bzw. auf das Nicht-Beispiel, falls die Eigenschaft auf dieses zutrifft
(C1) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass die Folgenglieder sich 1 annähern oder 1 erreichen.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der zweiten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(C2) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird oder 0 bleibt.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der dritten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(C3) Es gelingt nicht, eine gemeinsame Eigenschaft zu finden. Stattdessen klassifizieren die Studierenden die Folgen in mehrere Gruppen, wobei sich die Charakterisierung unter keine der Situationen (C1) und (C2) einordnen lässt.	strategische Intervention, falls gar nicht versucht wurde, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken: Die Studierenden sollen dazu aufgefordert werden, zu versuchen, die verschiedenen Bedingungen zusammenzufassen und die Eigenschaft so durch eine einzige Bedingung auszudrücken.

(D1) Die Eigenschaft wird als Annäherung an 1 beschrieben.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der vierten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(D2) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der fünften fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(D3) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 für große n beliebig klein wird.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der sechsten fiktiven Diskussion (siehe folgende Seiten) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.
(D4) Die Formulierung der Eigenschaft ist nicht so genau formuliert, dass damit bei jeder beliebigen Folge eindeutig entschieden werden kann, ob sie diese Eigenschaft erfüllt oder nicht, und die Formulierung lässt sich unter keine der Situationen (D1), (D2) und (D3) einordnen.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge entscheiden, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben von transparenten ϵ-Streifen verschiedener Breite mit eingezeichneter horizontaler Mittellinie zusammen mit der Aufforderung, diese zusammen mit den Graphen der Folgen zu verwenden und zu überlegen, ob die gesuchte Eigenschaft vielleicht mithilfe der Streifen formuliert werden kann.

(E) Die formulierte Eigenschaft trifft auf alle vorliegenden Beispiele zu und auf das Nicht-Beispiel nicht. Die Eigenschaft ist jedoch nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1.	zunächst Lob dafür, dass sie die Aufgabenstellung erfüllt haben, dann Nennen eines geeigneten weiteren (Nicht-)Beispiels einer gegen 1 konvergenten Folge, und Aufforderung, nun eine Eigenschaft zu finden, die auch das zusätzliche Beispiel umfasst bzw. das zusätzliche Nicht-Beispiel ausschließt.

Tabelle 7.2: Übersicht über die vorgesehenen Interventionen

Situation (A) Für die Situation, dass die Studierenden keinen Ansatz finden, wurden die vorgesehenen Interventionen im Vergleich zur ersten Version nicht verändert. Zunächst soll den Studierenden vorgeschlagen werden, mit weniger Beispielfolgen zu beginnen, eine gemeinsame Eigenschaft dieser zu finden und anschließend weitere Beispiele hinzuzuziehen. Für den Fall, dass diese strategische Intervention nicht genügt, soll die erste fiktive Diskussion ausgegeben werden, in der die Studierenden angeleitet werden, zunächst eine gemeinsame Eigenschaft von zwei der Beispielfolgen zu entdecken, diese an den weiteren Beispielfolgen zu testen und die Eigenschaft daraufhin anzupassen. Die vollständige erste fiktive Diskussion ist bei Version 1 der *Hypothetical Learning Trajectory* in Abschnitt 4.2.4 unter Situation (A) nachzulesen.

Situation (B) Die Intervention zu Situation (B) wird nur leicht verändert. In der ersten Version des Konzepts sollten die Studierenden auf ein konkretes Beispiel beziehungsweise auf das Nicht-Beispiel aufmerksam gemacht werden, sofern sie eine Eigenschaft formuliert haben, die nicht auf alle Beispielfolgen zutrifft, oder die auf das Nicht-Beispiel zutrifft. Die Intervention soll nun etwas allgemeiner erfolgen, die Studierenden sollen lediglich dazu aufgefordert werden, ihre Eigenschaft an den Beispielfolgen und dem Nicht-Beispiel zu überprüfen. Dadurch wird einerseits durch die Intervention weniger vorweggenommen, und andererseits lernen die Studierenden möglicherweise, dass sie die formulierten Eigenschaften jeweils noch an den Beispielen und dem Nicht-Beispiel überprüfen müssen. Erst wenn diese allgemeinere Intervention nicht ausreicht, sollen die Studierenden auf eine konkrete Beispielfolge oder das Nicht-Beispiel aufmerksam gemacht werden. Genauer und mit Beispielen ist das in Abschnitt 4.2.4 unter Situation (B) beschrieben.

Situation (C1) Diese Situation ist dadurch gekennzeichnet, dass formuliert wird, dass die Folgenglieder sich 1 annähern oder sie 1 erreichen. Abgesehen von der Tatsache, dass die Eigenschaft nicht durch eine einzige Bedingung ausgedrückt ist, ist diese Charakterisierung nicht genau genug, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können. Da diese Anforderung explizit in der Aufgabenstellung steht, das Ausdrücken durch eine einzige Bedingung hingegen nicht, soll in dieser Situation auf das Problem der ungenauen Formulierung eingegangen werden. Möglicherweise führt eine Überarbeitung bezüglich dieses Aspekts auch dazu, dass die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird. Sofern die Studierenden noch gar nicht versucht haben, die Eigenschaft so genau auszudrücken, dass damit entschieden werden kann, ob eine beliebige Folge gegen 1 konvergiert,

sollen sie gefragt werden, ob dies mit ihrer Formulierung möglich ist. Falls sie dies hingegen bereits versucht haben, aber eigenständig keine Lösung finden, so soll die folgende zweite fiktive Diskussion ausgegeben werden. Wie in den fiktiven Diskussionen aus dem ersten Durchgang wechseln sich Passagen, in denen die fiktiven Charaktere diskutieren, mit Fragen an die Studierenden ab. Auf dem Ausdruck, den die Studenten bekommen, ist nach jeder Frage Platz für die Antwort freigelassen. Die Studierenden bekommen den Auftrag, den Text bis zur ersten fett gedruckten Frage zu lesen und erst nach der Beantwortung der Frage weiterzulesen bis zur nächsten fett gedruckten Frage. Dadurch ist diese Intervention kein reines Lesen der fiktiven Diskussion, sondern die Studierenden werden immer wieder aufgefordert, sich selbst Gedanken zu machen.

zweite fiktive Diskussion

Anna, Timo, Lisa und Max bearbeiten dieselbe Aufgabe wie ihr. Lest euch ihre Diskussion durch und beantwortet jeweils die fett gedruckten Fragen!

- Anna: Also eigentlich ist das doch ganz einfach, die nähern sich alle der 1 an oder sie sind ab irgendeinem Punkt nur noch 1.
- Timo: Und die letzte nicht?
- Lisa: Die letzte springt ja immer wieder zwischendurch auf 2. Egal wie weit du nach rechts gehst, du findest immer wieder ein Vielfaches von 10 und da ist es dann wieder 2.
- Max: Dass die letzte immer wieder auf 2 springt, versteh ich. Aber was genau heißt denn für euch „annähern“?

Was versteht ihr unter „annähern“?

- Lisa: Mir ist das auch zu ungenau mit dem „annähern“. Im Endeffekt will ich doch eine Bedingung haben, bei der ich ganz klar entscheiden kann, diese Folgen erfüllen die Bedingung und die andere erfüllt die Bedingung nicht. Vom Gefühl her würd ich das zwar auch so sagen, dass die ersten sich 1 annähern oder irgendwann nur noch 1 sind und die letzte nicht, aber ich würde das gerne eindeutiger entscheiden können... versteht ihr was ich meine?
- Timo: Ja... aber ich weiß nicht, wie wir das eindeutiger formulieren können.
- Max: Wenn mich jetzt vorher einer gefragt hätte, was „annähern“ bedeutet, dann hätte ich gesagt, dass es immer näher herankommt. Aber das passt ja hier gar nicht. Weil bei der $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ springt's ja zwischendurch immer von der 1 wieder weiter weg und dann wieder näher ran.
- Anna: Ok, ihr habt mich überzeugt, also nichts mit „annähern“.
- Timo: Vielleicht könnten wir ja irgendwie den Abstand betrachten.
- Anna: Was für einen Abstand?

Welchen Abstand könnte Timo meinen?

- Timo: Ich hätte jetzt gesagt den Abstand von den einzelnen Folgengliedern zu 1. Dass der klein werden muss...

Versucht noch einmal, die gemeinsame Eigenschaft mit euren Worten aufzuschreiben. Habt ihr jetzt eine Eigenschaft gefunden, bei der ihr eindeutig entscheiden könnt, ob eine Folge diese erfüllt oder nicht?

Die fiktiven Charaktere beginnen mit einer ähnlichen Charakterisierung, wie die Studierenden formuliert haben, wenn sie diese fiktive Diskussion bekommen. Es wird dann die Frage aufgeworfen, was „annähern“ bedeutet. Die Studierenden sollen darauf aufmerksam werden, dass dieser Begriff subjektiv verschieden interpretiert werden kann. Ein fiktiver Student bringt dann die Idee ein, Abstände zu betrachten. Bewusst wird zunächst nicht davon gesprochen, welche Abstände betrachtet werden, die Studierenden sollen die Möglichkeit haben, sich das selbst zu überlegen. Anschließend wird noch aufgelöst, welche Abstände betrachtet werden könnten. Die fiktive Diskussion endet dann, die Studierenden sollen mit der Idee, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten, wieder versuchen, eigenständig weiterzuarbeiten. Verglichen mit der ersten Variante des hypothetischen Verlaufs werden die Studierenden durch diese Intervention etwa dazu angeleitet, von der Charakterisierung 3 (*Ab irgendeinem n nähern sich die Folgenglieder entweder 1 an, ohne 1 zu erreichen, oder ab irgendeinem n sind die Folgenglieder konstant 1*) zur Charakterisierung 4 (*Ab irgendeinem n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 sehr klein*). Da in der fiktiven Diskussion implizit auch thematisiert wird, dass die Formulierung so genau sein soll, dass eindeutig entschieden werden kann, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt oder nicht, bemerken die Studierenden im Anschluss möglicherweise selbst, dass der Begriff „klein“ in der letzten Aussage der fiktiven Diskussion ebenfalls ungenau ist. Sofern sie dies nicht bemerken oder sie bei der Präzisierung Unterstützung benötigen, kann gegebenenfalls eine weitere Intervention eingesetzt werden.

Situation (C2) Ähnlich wie bei der vorherigen Situation ist es auch hier der Fall, dass die Studierenden die Eigenschaft nicht so genau formuliert haben, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte, und die Eigenschaft nicht durch eine einzige Bedingung ausgedrückt ist. Stattdessen haben die Studierenden formuliert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird oder 0 bleibt. Wieder soll auf das Problem, dass die Charakterisierung nicht genau genug ist, um damit bei einer beliebigen Folge entscheiden zu können, ob sie gegen 1 konvergiert, eingegangen werden. Sofern die Studierenden noch nicht versucht haben, diese Anforderung zu erfüllen, so sollen sie gefragt werden, ob dies mit der von ihnen formulierten Eigenschaft möglich ist. Falls sie es bereits versucht haben und dabei zu keiner Lösung gekommen sind, so wird die dritte fiktive Diskussion eingesetzt. Auch hier wechseln sich Abschnitte einer Diskussion der fiktiven Charaktere mit Fragen an die Studierenden ab. Auch der Auftrag entspricht dem der zweiten fiktiven Diskussion.

dritte fiktive Diskussion

Anna, Timo, Lisa und Max bearbeiten dieselbe Aufgabe wie ihr. Lest euch ihre Diskussion durch und beantwortet jeweils die fett gedruckten Fragen!

- Anna: Also die Differenz von den Folgengliedern zu 1 wird klein oder 0.
Timo: Und was genau ist klein?

Lisa: Ich könnte zum Beispiel sagen, für mich ist 1 schon klein, dann wäre ja aber bei der letzten Folge die Differenz auch klein. Also ist 1 wohl nicht klein, sonst passt das nicht.

Anna: Nee, 1 ist für mich nicht klein.

Timo: Aber was ist dann klein? Ist 0,5 klein? Oder 0,1?

Max: Man kann nicht irgendeine konkrete Zahl angeben und sagen, die ist jetzt klein und Zahlen, die größer sind, sind nicht klein. Das geht nicht. Die Differenz muss halt fast 0 werden.

Was meint ihr? Ist die Formulierung „fast 0“ besser als „klein“?

Lisa: Aber fast 0 ist doch auch nicht präziser. Da könnte doch auch wieder einer sagen, für ihn ist 0,1 fast 0 und jemand anderes sagt, für ihn ist erst 0,01 fast 0.

Anna: Genau 0 können wir aber auch nicht sagen, weil ja bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Differenz zu 1 niemals genau 0 wird.

Max: Stimmt, das geht nicht. Deswegen hab ich ja gesagt fast 0.

Timo: Wie wäre es denn mit beliebig klein?

Lisa: Da würd ich jetzt auch wieder fragen, was ist beliebig klein?

Was versteht ihr unter „beliebig klein“?

Timo: Also 0,1 wäre nicht beliebig klein, weil ich eine Zahl angeben kann, die noch kleiner ist.

Lisa: Aber dann ist 0,00001 auch nicht beliebig klein, weil da kann ich doch auch eine noch kleinere Zahl finden. Das kann ich doch immer.

Anna: Außer für 0. Aber ich hab ja eben schon gesagt, dass ja bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Differenz zu 1 niemals genau 0 wird.

Max: Also ist keine Zahl beliebig klein, weil man immer noch eine kleinere Zahl finden kann?

Timo: Eine feste Zahl nicht. Aber wir haben hier ja auch gar keine feste Zahl, die beliebig klein sein soll. Der Abstand von den Folgengliedern zu 1 verändert sich ja, wenn n größer wird.

Lisa: Stimmt! Und wenn irgendeine beliebige Zahl vorgegeben ist, muss ich nur das n groß genug wählen, dann wird der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als die vorgegebene Zahl, solange sie größer als 0 ist.

Was haltet ihr von Lisas Idee?

Anna: Ist das jetzt die gemeinsame Eigenschaft der ersten Folgen, die die letzte Folge nicht hat?

Was meint ihr, hat die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch die von Lisa beschriebene Eigenschaft?

Lisa: Bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geht das nicht, weil wenn zum Beispiel 0,5 vorgegeben ist, dann kannst du kein n finden, ab dem der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner als 0,5 ist. Es wird ja immer noch alle zehn Schritte auf 2 springen, also ist der Abstand immer noch mal größer als 0,5, egal wie weit du nach rechts gehst.

Versucht noch einmal, die gemeinsame Eigenschaft mit euren Worten aufzuschreiben.

Die fiktive Diskussion beginnt an der Stelle, an der sich auch die Studierenden befinden, wenn sie diese Hilfestellung bekommen. Zunächst diskutieren die fiktiven Charaktere, was „klein“ bedeutet und sie stellen fest, dass das subjektiv verschieden interpretiert werden kann. Von einer fiktiven Person wird dann der Vorschlag eingebracht, von „beliebig klein“ zu sprechen. Die Studierenden sollen zunächst selbst diskutieren, was dieser Ausdruck bedeutet, bevor das in der fiktiven Diskussion aufgelöst wird. Anschließend sollen sie eigenständig überprüfen, ob bei dem vorgegebenen Nicht-Beispiel der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht beliebig klein wird. Schließlich sollen sie die Eigenschaft am Ende der fiktiven Diskussion noch einmal selbst formulieren. Diese Formulierung sollte als verbale Charakterisierung geeignet sein, so dass die Studierenden sich anschließend höchstens noch dem Aufschreiben der Charakterisierung – gegebenenfalls formal-mathematisch – widmen müssen. Andernfalls könnte eine weitere Intervention eingesetzt werden.

Situation (C3) Diese Situation liegt vor, wenn die Studierenden nicht eine einzige Bedingung formuliert haben, welche die Beispielfolgen charakterisiert, sondern die Folgen in mehrere Gruppen klassifiziert haben. Diese Klassifizierung entspricht weder der in (C1) noch der in (C2) genannten Formulierung. Zu erwähnen ist, dass diese Situation bei der ersten Durchführung nicht aufgetreten ist. Falls die Studierenden in dieser Situation noch gar nicht versucht haben, die Bedingungen zusammenzufassen und die Eigenschaft so durch eine einzige Bedingung auszudrücken, so sollen sie nun dazu aufgefordert werden. Für den Fall, dass sie dies bereits versucht haben, bei der Umsetzung jedoch Unterstützung benötigen, so muss spontan reagiert werden.

Situation (D1) Diese Situation liegt vor, wenn die Studierenden die gemeinsame Eigenschaft der Beispielfolgen als Annäherung an 1 beschreiben. Der Unterschied zur Situation (C1) besteht darin, dass hier die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung formuliert wird. Davon abgesehen ähneln sich die Situationen sehr, da in beiden Fällen von einer „Annäherung an 1“ die Rede ist. Zunächst sollen die Studierenden in dieser Situation gefragt werden, ob ihre Charakterisierung als Entscheidungsregel genutzt werden könnte. Sie sollen dann feststellen, dass dies nicht möglich ist, da „annähern“ verschieden interpretiert werden kann. Wenn den Studierenden zwar bewusst ist, dass ihre Formulierung nicht als Entscheidungsregel dienen kann, sie aber daran scheitern, die Formulierung dahingehend zu verbessern, so soll die vierte fiktive Diskussion eingesetzt werden.

vierte fiktive Diskussion

Anna, Timo, Lisa und Max bearbeiten dieselbe Aufgabe wie ihr. Lest euch ihre Diskussion durch und beantwortet jeweils die fett gedruckten Fragen!

Anna: Also eigentlich ist das doch ganz einfach, die nähern sich alle der 1 an.
 Timo: Und die letzte nicht?
 Lisa: Die letzte springt ja immer wieder zwischendurch auf 2. Egal wie weit du nach rechts gehst, du findest immer wieder ein Vielfaches von 10 und da ist es dann wieder 2.
 Max: Dass die letzte immer wieder auf 2 springt, versteh ich. Aber was genau heißt denn für euch „annähern“?

Was versteht ihr unter „annähern“?

Lisa: Mir ist das auch zu ungenau mit dem „annähern“. Im Endeffekt will ich doch eine Bedingung haben, bei der ich ganz klar entscheiden kann, diese Folgen erfüllen die Bedingung und die andere erfüllt die Bedingung nicht. Vom Gefühl her würd ich das zwar auch so sagen, dass die ersten sich 1 annähern und die letzte nicht, aber ich würde das gerne eindeutiger entscheiden können... versteht ihr, was ich meine?
 Timo: Ja... aber ich weiß nicht, wie wir das eindeutiger formulieren können.
 Max: Wenn mich jetzt vorher einer gefragt hätte, was „annähern“ bedeutet, dann hätte ich gesagt, dass es immer näher herankommt. Aber das passt ja hier gar nicht. Weil bei der $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ springt's ja zwischendurch immer von der 1 wieder weiter weg und dann wieder näher ran.
 Anna: Ok, ihr habt mich überzeugt, also nichts mit „annähern“.
 Timo: Vielleicht können wir ja irgendwie den Abstand betrachten.
 Anna: Was für einen Abstand?

Welchen Abstand könnte Timo meinen?

Timo: Ich hätte jetzt gesagt, den Abstand von den einzelnen Folgengliedern zu 1. Dass der klein werden muss...

Versucht noch einmal, die gemeinsame Eigenschaft mit euren Worten aufzuschreiben. Habt ihr jetzt eine Eigenschaft gefunden, bei der ihr eindeutig entscheiden könnt, ob eine Folge diese erfüllt oder nicht?

Diese fiktive Diskussion entspricht fast komplett der zweiten fiktiven Diskussion. Das ist möglich, weil nicht davon auszugehen ist, dass bei derselben Gruppe von Studierenden nacheinander die Situationen (C1) und (D1) auftreten. Außerdem beschäftigt sich schon die zweite fiktive Diskussion mit der Formulierung des Annäherns und wie diese verbessert werden kann. Daher ist dieses Hilfsmittel auch für die Situation (D1) geeignet.

Situation (D2) Situation (D2) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Studierenden als gemeinsame Eigenschaft der Beispielfolgen formuliert haben, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird. Diese Situation ist ähnlich wie die in (C2), der Unterschied ist wiederum, dass hier die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung formuliert wurde. Zuerst sollen die Studierenden gefragt werden, ob mit ihrer Formulierung entschieden werden könnte, ob eine beliebige Folge gegen 1 konvergiert oder nicht. Ziel dieser Frage ist, dass

die Studierenden erkennen, dass dies nicht möglich ist, da „klein“ subjektiv unterschiedlich interpretiert werden kann. Sofern den Studierenden das bewusst ist und sie jedoch daran scheitern, ihre Charakterisierung so zu verbessern, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte, so soll die fünfte fiktive Diskussion ausgegeben werden.

fünfte fiktive Diskussion

Anna, Timo, Lisa und Max bearbeiten dieselbe Aufgabe wie ihr. Lest euch ihre Diskussion durch und beantwortet jeweils die fett gedruckten Fragen!

- Anna: Also die Differenz von den Folgengliedern zu 1 wird klein.
Timo: Und was genau ist klein?
Lisa: Ich könnte zum Beispiel sagen, für mich ist 1 schon klein, dann wäre ja aber bei der letzten Folge die Differenz auch klein. Also ist 1 wohl nicht klein, sonst passt das nicht.
Anna: Nee, 1 ist für mich nicht klein.
Timo: Aber was ist dann klein? Ist 0,5 klein? Oder 0,1?
Max: Man kann nicht irgendeine konkrete Zahl angeben und sagen, die ist jetzt klein und Zahlen, die größer sind, sind nicht klein. Das geht nicht. Die Differenz muss halt fast 0 werden.

Was meint ihr? Ist die Formulierung „fast 0“ besser als „klein“?

- Lisa: Aber fast 0 ist doch auch nicht präziser. Da könnte doch auch wieder einer sagen, für ihn ist 0,1 fast 0 und jemand anderes sagt, für ihn ist erst 0,01 fast 0.
Anna: Genau 0 können wir aber auch nicht sagen, weil ja bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Differenz zu 1 niemals genau 0 wird.
Max: Stimmt, das geht nicht. Deswegen hab ich ja gesagt fast 0.
Timo: Wie wäre es denn mit beliebig klein?
Lisa: Da würd ich jetzt auch wieder fragen, was ist beliebig klein?

Was versteht ihr unter „beliebig klein“?

- Timo: Also 0,1 wäre nicht beliebig klein, weil ich eine Zahl angeben kann, die noch kleiner ist.
Lisa: Aber dann ist 0,00001 auch nicht beliebig klein, weil da kann ich doch auch eine noch kleinere Zahl finden. Das kann ich doch immer.
Anna: Außer für 0. Aber ich hab ja eben schon gesagt, dass ja bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Differenz zu 1 niemals genau 0 wird.
Max: Also ist außer 0 keine Zahl beliebig klein, weil man immer noch eine kleinere Zahl finden kann?
Timo: Eine feste Zahl nicht. Aber wir haben hier ja auch gar keine feste Zahl, die beliebig klein sein soll. Der Abstand von den Folgengliedern zu 1 verändert sich ja, wenn n größer wird.

Lisa: Stimmt! Und wenn irgendeine beliebige Zahl vorgegeben ist, muss ich nur das n groß genug wählen, dann wird der Abstand aller weiteren Folgenglieder zu 1 kleiner als die vorgegebene Zahl, solange sie größer als 0 ist.

Was haltet ihr von Lisas Idee?

Anna: Ist das jetzt die gemeinsame Eigenschaft der ersten Folgen, die die letzte Folge nicht hat?

Was meint ihr, hat die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch die von Lisa beschriebene Eigenschaft?

Lisa: Bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geht das nicht, weil wenn zum Beispiel 0,5 vorgegeben ist, dann kannst du kein n finden, ab dem der Abstand aller Folgenglieder zu 1 immer kleiner als 0,5 ist. Es wird ja immer noch alle zehn Schritte auf 2 springen, also ist der Abstand immer noch mal größer als 0,5, egal wie weit du auch nach rechts gehst.

Versucht noch einmal, die gemeinsame Eigenschaft mit euren Worten aufzuschreiben.

Abgesehen von der ersten Aussage entspricht diese fiktive Diskussion der dritten fiktiven Diskussion, die für Situation (C2) vorgesehen ist. Auch hier ist nicht davon auszugehen, dass bei einer Studierendengruppe beide Situationen (C2) und (D2) auftreten. In dieser fiktiven Diskussion wird thematisiert, dass der Ausdruck „klein“ verschieden interpretiert werden kann und somit nicht für eine Entscheidungsregel geeignet ist. Da der Ausdruck „klein“ auch in der Situation (D2) in der Charakterisierung der Studierenden verwendet wurde, ist die fiktive Diskussion auch hier geeignet.

Situation (D3) Situation (D3) liegt vor, wenn die Studierenden die gemeinsame Eigenschaft der Beispielfolgen dadurch beschreiben, dass der Abstand der Folgenglieder für große n beliebig klein wird. Zuerst sollen die Studierenden gefragt werden, ob sie mit ihrer Charakterisierung entscheiden können, ob eine beliebige Folge gegen 1 konvergiert oder nicht. Mit der genannten Charakterisierung ist das schwierig, da nicht ohne weiteres klar ist, wie überprüft wird, ob ein Abstand „beliebig klein“ ist. Falls es den Studierenden nicht eigenständig gelingt, ihre Charakterisierung derart zu verbessern, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden kann, so soll ihnen die folgende fiktive Diskussion gegeben werden. Wieder wechseln sich Passagen, in denen die fiktiven Charaktere diskutieren, mit Fragen an die Studierenden ab und wieder ist bei dem Ausdruck, den die Studierenden erhalten, jeweils im Anschluss an die Fragen Platz für die Antworten frei gelassen.

sechste fiktive Diskussion

Anna, Timo, Lisa und Max bearbeiten dieselbe Aufgabe wie ihr. Lest euch den Ausschnitt aus ihrer Diskussion durch und beantwortet jeweils die fett gedruckten Fragen!

Anna: Also ich würd jetzt schreiben für große n wird der Abstand der Folgenglieder zu 1 beliebig klein.

Timo: Aber wann ist ein n denn für dich ein großes n ?

Wann ist eurer Meinung nach ein n ein großes n ?

Lisa: Bei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ könnte ja statt $n = 10$ zum Beispiel auch $n = 7000000$ stehen, wäre das dann ein großes n ?

Was sagt ihr, ist $n = 7000000$ ein großes n ?

Anna: Es gibt ja noch größere...

Max: Ja klar, aber es gibt doch immer noch größere.

Anna: Ja schon, aber es ist was anderes als bei der letzten Folge, da springt es ja immer wieder auf die 2 und nicht nur einmal.

Max: Also einen Ausreißer darf es geben, aber nicht mehrere?

Stimmt ihr Max zu?

Lisa: Es darf schon mehrere Ausreißer geben, aber nicht unendlich viele. Du musst irgendeinen Punkt finden können, ab dem es nicht mehr weiter weg springt als irgendein Wert.

Könnt ihr für die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils ein n angeben, ab dem die nachfolgenden Folgenglieder höchstens den Abstand 0,5 zu 1 haben?

Kann man für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch ein solches n finden?

Wie auch bei den anderen fiktiven Diskussionen ist die erste Aussage etwa das, was die Studierenden in Situation (D3) als Charakterisierung formuliert haben. Es wird dann die Frage aufgeworfen, wann eine Zahl n denn „groß“ sei. In dieser Diskussion werden die Studierenden zum sogenannten umgekehrten Denken angeleitet. Es wird ein Wert – hier 0,5 – vorgegeben und zu diesem Wert wird eine natürliche Zahl n gesucht, so dass der Abstand der nachfolgenden Folgenglieder zu 1 kleiner ist als der vorgegebene Wert. Die Studierenden sollen diese natürliche Zahl – zum vorgegebenen Wert 0,5 – für jede der Beispielfolgen angeben. Anschließend sollen sie die Frage beantworten, ob bei dem Nicht-Beispiel auch eine solche Zahl gefunden werden kann. Dabei sollen die Studierenden erkennen, dass bei den einzelnen Beispielfolgen verschiedene Zahlen geeignet sind und es bei dem Nicht-Beispiel keine solche Zahl gibt. Bewusst wurde hier erst einmal nur ein einziger Wert, nämlich 0,5, betrachtet und es wurde noch nicht darauf eingegangen, dass jeder beliebige positive Wert betrachtet wird. Die Studierenden sollen die Chance bekommen, dies wieder eigenständig nachzuerfinden. Falls ihnen das nicht gelingt und sie davon ausgehen, dass immer der Wert 0,5 betrachtet wird, so kann als nächste Intervention ein zusätzliches Nicht-Beispiel gegeben werden, bei dem eine natürliche Zahl existiert, so dass der Abstand von dem Wert 1 zu allen Folgengliedern mit größerem Index als diese Zahl kleiner als 0,5 ist.

Situation (D4) Falls die Studierenden eine andere Charakterisierung als die in den Situationen (D1), (D2) und (D3) genannten formuliert haben, die nicht genau genug ist, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können, so soll ebenfalls zunächst gefragt werden, ob sie mit ihrer Charakterisierung entscheiden können, ob eine beliebige Folge gegen 1 konvergiert. Falls ihnen bewusst ist, dass dies nicht möglich ist, sie jedoch Unterstützung dabei benötigen, die Charakterisierung dahingehend zu verbessern, so sollen die ϵ -Streifen ausgegeben werden, die bereits bei der ersten Durchführung eingesetzt wurden. Genaueres dazu ist in Abschnitt 4.2.4 unter Situation (D) nachzulesen.

Situation (E) Die für Situation (E) vorbereitete Intervention wird aus Version 1 der *Hypothetical Learning Trajectory* übernommen. Sollten Studierende eine Charakterisierung formulieren, die nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen 1 oder allgemeiner der Konvergenz gegen einen beliebigen Grenzwert ist, aber dennoch auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft, so sollen sie zunächst dafür gelobt werden, dass sie eine geeignete Charakterisierung gefunden haben. Um sie dazu anzuregen, zur eigentlich intendierten Charakterisierung zu gelangen, soll je nach formulierter Charakterisierung eine weitere Beispielfolge oder ein weiteres Nicht-Beispiel vorgegeben werden. Genauer ist dies in Abschnitt 4.2.4 unter Situation (E) ausgeführt.

Abschließende Aktivitäten Vorbereitungsworkshop

Die Aktivitäten im Anschluss an die Bearbeitung der Hauptaufgabe sind im Wesentlichen mit denen des Vorjahres identisch. Nachzulesen sind diese in Abschnitt 4.2.5, hier werden diese nur kurz zusammengefasst und es wird auf Veränderungen eingegangen. Ein Unterschied besteht darin, dass bei der ersten Durchführung des Workshops mehrere Studierendengruppen gleichzeitig teilgenommen haben, während bei der zweiten Durchführung der Workshop mehrfach stattgefunden hat und jeweils nur eine Studierendengruppe daran teilgenommen hat. Somit entfällt der Aspekt, dass die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen im Plenum verglichen werden. Die Definition der Konvergenz gegen 1 wird zur Definition der Konvergenz verallgemeinert. Es wird die folgende formale Definition präsentiert, die in dieser Form anschließend auch in der Vorlesung behandelt wird:

Definition

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Anschließend wird diese Definition auf mindestens eine Beispielfolge angewendet werden, sofern dies während der Bearbeitung der Hauptaufgabe noch nicht geschehen ist.

Aktivitäten Nachbereitungsworkshop

Der nachbereitende Teil des Workshops findet einige Wochen nach dem vorbereitenden Teil statt. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer des zweiten Teils haben auch am ersten Workshop teilgenommen. Zwischen den beiden Teilen des Workshops wurde in Vorlesung und Übungen das Thema Konvergenz von Folgen vollständig behandelt.

Da der Fokus dieser Studie weiterhin auf dem vorbereitenden Teil des Workshops liegt, werden die Aktivitäten und hypothetischen Erkenntnisverläufe für den nachbereitenden Teil des Workshops weniger detailliert dargestellt. Außerdem werden die Aktivitäten, die sich im Vergleich zum Vorjahr nicht geändert haben, lediglich kurz zusammengefasst, detaillierter sind sie in Abschnitt 4.2.6 nachzulesen. In Tabelle 7.3 ist ein Überblick über die Aktivitäten mit der zeitlichen Planung zu sehen.

Aktivität	Sozialform	Dauer
Wiederholung der Definition „Konvergenz“	Unterrichtsgespräch	10 Min
Sammeln verschiedener Beispiele konvergenter und divergenter Folgen	Einzelarbeit	15 Min
Überblick über verschiedene Möglichkeiten, eine Folge auf Konvergenz zu untersuchen	Einzelarbeit	20 Min
Kritische Betrachtung von Ausschnitten aus „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“	Gruppenarbeit	30 Min
PAUSE		15 Min
Aufgaben zur Untersuchung von Folgen auf Konvergenz	Gruppenarbeit	60 Min
$0, \bar{9}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs	Gruppenarbeit	45 Min

Tabelle 7.3: Überblick über den zeitlichen Verlauf des Nachbereitungsworkshops

Aktivität: Wiederholung der Definition „Konvergenz“

Wie bereits bei der ersten Durchführung soll zu Beginn die formale Definition der Konvergenz einer Folge kurz wiederholt werden. Diese kennen die Studierenden sowohl aus dem Vorbereitungsworkshop als auch aus der Vorlesung.

Aktivität: Sammeln verschiedener Beispiele konvergenter und divergenter Folgen

Auch die nächste Aktivität wird aus dem Vorjahr übernommen. In Einzelarbeit sollen die Studierenden die folgende Aufgabe bearbeiten:

Arbeitsauftrag

Wir wollen uns ein möglichst breites Bild konvergenter und divergenter Folgen machen. Findet möglichst viele verschiedene Typen konvergenter und divergenter Folgen!

Die verschiedenen Beispiele werden anschließend gemeinsam gesammelt. Unter den Beispielen konvergenter Folgen sollten auf jeden Fall monotone und schließlich monotone, konstante und schließlich konstante und alternierende und schließlich alternierende Folgen vertreten sein, ohne dass die Typen in irgendeiner Form bezeichnet werden müssen. Bei den divergenten Folgen sollen sich sowohl bestimmt divergente Folgen als auch Folgen mit mehreren Häufungspunkten und unbeschränkte Folgen mit einem Häufungspunkt unter den Beispielen befinden. Sollte irgendeiner der hier genannten Typen von Folgen

nicht unter den von den Studierenden gesammelten Beispielen vorhanden sein, so werden die Studierenden dazu aufgefordert, eine Beispielfolge dieses Typs anzugeben. Insgesamt soll mit dieser Aufgabe der Aufbau eines breiten *Concept Images* zu konvergenten und divergenten Folgen gefördert werden.

Aktivität: Überblick über verschiedene Möglichkeiten, eine Folge auf Konvergenz zu untersuchen

In der nächsten Aufgabe sollen die Studierenden zunächst in Einzelarbeit verschiedene Möglichkeiten, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, sammeln:

Arbeitsauftrag

Wir möchten zusammenfassen, auf welche verschiedenen Arten man Folgen auf ihr Konvergenzverhalten untersuchen kann. Notiert die verschiedenen Möglichkeiten, die ihr in der Vorlesung kennengelernt habt, auf dem Arbeitsblatt!

Diese Aufgabe wurde ebenfalls bereits bei der ersten Durchführung eingesetzt. Nachdem die Studierenden sich zunächst selbst Gedanken gemacht haben, werden die Ergebnisse gesammelt. Die Möglichkeiten, die auf jeden Fall genannt werden sollten, sind das Anwenden der Definition, die Grenzwertsätze, das Cauchy-Kriterium und das hinreichende Kriterium „Monotonie und Beschränktheit“. Falls eine dieser Möglichkeiten von keinem Studierenden genannt wird, dann soll eine Beispielfolge vorgegeben werden, bei der sich die jeweilige Möglichkeit zur Untersuchung auf Konvergenz anbieten würde, und die Studierenden werden gefragt, wie sie diese Folge auf Konvergenz untersuchen würden. Sobald mindestens die vier genannten Möglichkeiten zusammengetragen wurden, sollen diese auf einer Metaebene besprochen werden. Es soll thematisiert werden, ob sich die jeweilige Möglichkeit sowohl dazu eignet, zu zeigen, dass eine Folge konvergiert, als auch, dass eine Folge nicht konvergiert. Auch soll angesprochen werden, ob bei der jeweiligen Art der Untersuchung der potentielle Grenzwert im Vorfeld bereits bekannt sein muss. Des Weiteren wird auf typische Fehler eingegangen und es wird diskutiert, für welche Arten von Folgen sich die jeweilige Möglichkeit eignet.

Aktivität: Kritische Betrachtung von Ausschnitten aus „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“

In der nachfolgenden Aktivität bekommen die Studierenden zwei kurze Ausschnitte aus dem Buch „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“ von Modler und Kreh (2011), in denen jeweils die Konvergenz einer Folge nachgewiesen wird, wobei allerdings Argumentationslücken vorhanden sind. Der Arbeitsauftrag dazu lautet wie folgt:

Arbeitsauftrag

Arbeitet die Ausschnitte aus „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“ (Modler und Kreh, 2011) durch und hinterfragt die Argumentationen kritisch. Versucht gegebenenfalls, Argumentationslücken zu schließen.

Bei den Ausschnitten handelt es sich zum einen um die folgende Anwendung der Grenzwertsätze:

„Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist diese Folge konvergent?

Angenommen, die Folge wäre konvergent. Dann können wir mittels der Grenzwertsätze den Grenzwert sofort ohne Probleme bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 \cdot \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nun wissen wir also, dass die Folge gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert.“ (Modler und Kreh, 2011, S. 119)

Problematisch an diesem Ausschnitt ist vor allem, dass die Argumente dafür, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, fehlen. Dennoch wird suggeriert, nach dem Anwenden der Grenzwertsätze sei die Existenz des Grenzwerts nachgewiesen worden. Warum am Anfang der Argumentation angenommen wird, dass die Folge konvergent sei, ist nicht nachvollziehbar. Außerdem wird nicht begründet, warum die Grenzwertsätze überhaupt angewendet werden dürfen. Für eine vollständige Argumentation müsste zuerst ausgesagt werden, dass für jedes Folgenglied gilt $a_n = \frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1} = \frac{n^2 \cdot \left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$.

Anschließend müsste argumentiert werden, dass die Folgen $(2)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{3}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $(3)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren und dass daher auch die Folgen $\left(2 - \frac{3}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren. Erst dann werden die Grenzwertsätze angewendet, woraus zunächst folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und dann der Grenzwert, wie in dem Ausschnitt dargestellt, bestimmt werden kann. Diese Argumentationslücken sollen von den Studierenden in Gruppenarbeit erkannt und geschlossen werden. Falls das den Studierenden nicht eigenständig gelingt, so wird das gemeinsam im Unterrichtsgespräch erarbeitet. Dabei soll deutlich herausgestellt werden, dass vor der Anwendung eines Satzes dessen Voraussetzungen überprüft werden müssen.

Bei dem zweiten Ausschnitt handelt es sich um den Beginn der Untersuchung einer rekursiv definierten Folge:

„Zeige, dass die durch

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + 1$$

rekursiv definierte Folge mit Anfangswert $a_0 = 1$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Wir stellen uns einfach erst einmal blöd und gehen davon aus, dass die Folge

gegen den Grenzwert a konvergiere. Dann gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ bzw. auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) = a$.

Insgesamt erhalten wir also eine einfache Gleichung, indem man einfach alle Indizes streicht, und können so den möglichen Grenzwert bestimmen:

$$a = \frac{a}{2} + 1 \Leftrightarrow 2a = a + 2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Wenn die Folge konvergiert, dann also gegen 2.“ (Modler und Kreh, 2011, S. 122)

Die Studierenden werden darauf hingewiesen, dass der Nachweis der Konvergenz in dem Buch noch weitergeführt wird, dass sie sich hier jedoch auf diesen Teil beschränken sollen. An diesem Ausschnitt ist vor allem der Satz „Insgesamt erhalten wir also eine einfache Gleichung, indem man einfach alle Indizes streicht, und können so den möglichen Grenzwert bestimmen“ (Modler und Kreh, 2011, S. 122) problematisch. Hier wird nicht erwähnt, dass zum Grenzwert übergegangen wird und wie die Gleichung $a = \frac{a}{2} + 1$ zustande kommt. Ein unbedarfter Leser könnte auf den Gedanken kommen, es sei eine geeignete Strategie zur Bestimmung von Grenzwerten, einfach alle Indizes zu streichen. Zum einen müsste für eine vollständige Argumentation zunächst aus der Annahme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gefolgert werden, dass die Folge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ konvergiert und für den Grenzwert gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{2} + 1 = \frac{a}{2} + 1$. Zusammen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ folgt dann die Gleichung $a = \frac{a}{2} + 1$ und a kann bestimmt werden. Auch hier soll die Argumentationslücke im Unterrichtsgespräch festgestellt und geschlossen werden, sofern den Studierenden dies nicht ohne Unterstützung gelingt.

Aktivität: Aufgaben zur Untersuchung von Folgen auf Konvergenz

Nach einer Pause sollen die Studierenden dann selbst mehrere Folgen auf Konvergenz untersuchen. Prinzipiell war die gleiche Aufgabe auch schon bei der ersten Durchführung Bestandteil des Workshops. Dort wurde sie allerdings in Form eines Gruppenpuzzles durchgeführt, was bei der zweiten Durchführung nicht möglich ist, da jeweils nur eine Gruppe an einem Workshoptermin teilnimmt. Stattdessen sollen die Studierenden die Folgen in Gruppenarbeit auf Konvergenz untersuchen. Das hat den Vorteil, dass sie mehr Folgen selbst untersuchen und somit mehr verschiedene Methoden selbst anwenden. Der Nachteil ist, dass die Bearbeitung etwas länger dauert. Daher wurde im Vergleich zur ersten Version des Workshops eine Folge gestrichen. Zuvor gab es zwei Folgen, bei denen aufgrund der Unbeschränktheit gefolgert werden sollte, dass sie divergent sind. Da eine dieser beiden Folgen gestrichen wurde, sind dennoch genauso viele verschiedene Methoden, die sich jeweils zur Untersuchung auf Konvergenz eignen, vertreten wie zuvor. Die Aufgabenstellung, welche die Studierenden bekommen, lautet wie folgt:

Arbeitsauftrag

Untersucht die Folgen auf Konvergenz. Gebt bei den konvergenten Folgen den Grenzwert begründet an.

Die zu untersuchenden Folgen und dafür vorgesehen Methoden sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

Folge	Methode
$a_n = \begin{cases} (-1)^n (2 + \frac{1}{n}) & n \leq 1000000 \\ 2 + \frac{(-1)^n}{n} & n > 1000000 \end{cases}$	Konvergenz (gegen 2) durch Anwenden der Definition
$b_1 = \sqrt{2}, b_{n+1} = \sqrt{2b_n} \forall n \in \mathbb{N}$	Konvergenz (gegen 2) durch „Monotonie und Beschränktheit“
$c_n = n^2 - n \forall n \in \mathbb{N}$	Divergenz durch Unbeschränktheit
$d_n = \frac{1-n}{4n-1} \forall n \in \mathbb{N}$	Konvergenz (gegen $-\frac{1}{4}$) durch Grenzwertsätze
$e_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$	Divergenz durch das Nachweisen zweier Häufungspunkte
$f_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$	Konvergenz gegen 1 durch Anwenden der Definition

Tabelle 7.4: Übersicht über die zu untersuchenden Folgen

Wie im Vorjahr wird die jeweilige Methode nicht vorgegeben, da die Studierenden auch üben sollen, eine geeignete Methode auszuwählen. Falls bei der Bearbeitung Unterstützung nötig ist, so soll je nach Situation eine der Interventionen aus Tabelle 7.5 eingesetzt werden, wie bereits im Vorjahr.

Situation	Intervention
(A) fehlender Ansatz	Frage: <i>Was vermutet ihr denn, konvergiert die Folge?</i> falls keine Idee: <i>Vielleicht bekommt ihr ja eine Vermutung, indem ihr euch einmal die ersten Folgenglieder anschaut oder eine Skizze erstellt.</i>
(B) Die Studierenden haben eine Vermutung, ob die Folge konvergiert oder nicht, wissen aber nicht, welche Methode sie wählen sollen, um dies zu zeigen	Wir gehen die verschiedenen Methoden noch einmal gemeinsam durch. Frage: <i>Könnt ihr irgendeine der Methoden hier ausschließen?</i> Es kann auch der Hinweis gegeben werden, dass nicht eine Methode die richtige ist, sondern mehrere möglich sind.

(C) Die Studierenden haben sich für eine geeignete Methode entschieden, scheitern jedoch bei der Umsetzung.	bei kleinerem Problem in der Umsetzung Unterstützung durch die Lehrperson, bei größerem Problem Aushändigen einer kommentierten Untersuchung einer anderen Folge durch dieselbe Methode

Tabelle 7.5: Übersicht über die vorgesehenen Interventionen

Die kommentierten Untersuchungen sind in Abschnitt 4.2.6 nachzulesen. Nach der Bearbeitung wird die Aufgabe erneut mit der Lehrperson besprochen.

Aktivität: $0, \overline{9}$ mit Hilfe des Folgen- und Grenzwertbegriffs

Die letzte Aufgabe, die im Workshop behandelt werden soll, beschäftigt sich mit $0, \overline{9}$. In Gruppenarbeit sollen die Studierenden die folgende Aufgabe bearbeiten:

Arbeitsauftrag

Ein Student behauptet: „Unter $0, \overline{9}$ versteht man den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$, $n \in \mathbb{N}$, und dieser ist kleiner als 1“.

1. Prüfe, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.
2. Zeige durch einen Widerspruchsbeweis, dass $0, \overline{9} = 1$ gilt.

Im Vergleich zur ersten Version des Workshop-Konzepts sind die fiktive Studierendenaussage und der erste Aufgabenteil unverändert übernommen worden, während der zweite Aufgabenteil etwas verändert wurde. Die vorherige Aufgabenstellung „Nimm begründet Stellung zu der Behauptung des Studenten“ war von den Workshopeteilnehmenden eher knapp beantwortet worden: Sie haben hauptsächlich gesagt, dass der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$, $n \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $0, \overline{9}$ nicht kleiner als 1 ist und die Aus-

sage des Studenten daher nicht stimmt. Daran anschließend sollen die Studierenden explizit aufgefordert werden, einen Widerspruchsbeweis durchzuführen. Dieser könnte ähnlich aussehen wie in Abschnitt 4.2.6 bei der entsprechenden Aktivität dargestellt. Ziel dieser Aufgabe ist es, dass die Workshopeteilnehmerinnen und -teilnehmer $0, \overline{9}$ als Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$, $n \in \mathbb{N}$ auffassen und dass sie keinen Zweifel daran haben,

dass $0, \overline{9} = 1$ gilt. Wieder soll die Aufgabe anschließend mit der Lehrperson besprochen werden. Nach einer letzten Möglichkeit, Fragen zu stellen, endet der Workshop.

7.3 Retrospektive Analyse

Auch bei der zweiten Durchführung des Workshops soll die Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz analysiert werden. In Abschnitt 7.3.1 wird zunächst auf das me-

thodische Vorgehen eingegangen und die Leitfragen der retrospektiven Analyse werden vorgestellt. In Abschnitt 7.3.2 folgt dann die Analyse selbst.

7.3.1 Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse

Die Diskussionen zur Bearbeitung der Hauptaufgabe aus der ersten Durchführung des vorbereitenden Workshopteils wurden angelehnt an die Methode der interpretativen Unterrichtsforschung nach Krummheuer und Naujok (1999) sehr ausführlich analysiert. Eine ebenso ausführliche Analyse der Diskussionen zur Hauptaufgabe aus der zweiten Durchführung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Außerdem wurde, wie bereits erwähnt, die systematische Analyse der ersten Durchführung des Workshops erst nach dem zweiten Workshop durchgeführt. Dadurch handelt es sich bei der zweiten Version des Konzepts um eine eher pragmatische Überarbeitung der ersten Version des Konzepts und die Veränderungen fallen eher gering aus. Daher sind keine wesentlich verschiedenen Ergebnisse zu erwarten, die eine aufwendige Analyse rechtfertigen würden. Auf die Argumentationsanalysen der einzelnen Gruppen, wie sie bei der ersten Durchführung erfolgten, wird hier also verzichtet. Es sollen aber gezielt Analysen in Bezug auf die Veränderungen des Konzepts durchgeführt werden. Dazu sollen jeweils die Leitfragen aus der ersten Analyse betrachtet werden, bei denen aufgrund der Überarbeitung des Konzepts andere Ergebnisse zu erwarten sind. Außerdem wird auf Aspekte eingegangen, die bei der zweiten Durchführung des Workshops aufgetreten sind, bei der ersten hingegen nicht.

Bei der Hauptaufgabe ist die Änderung (Ä 1), dass anstelle der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n \forall n \in \mathbb{N}$ nun die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ vorgegeben wird. Mit den Beispielfolgen und deren Rolle für den Erkenntnisprozess befasst sich die folgende Leitfrage:

- 3.b)ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Diese Frage soll insbesondere für die neu in das Konzept aufgenommene Beispielfolge beantwortet werden.

Eine weitere Veränderung, bezeichnet mit (Ä 2), besteht darin, dass die Aufgabenstellung um den Satz „Diese Eigenschaft muss so gut formuliert werden, dass man für jede beliebige Folge entscheiden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht“ ergänzt wurde. Das könnte sich auf die Analyse in Bezug auf folgende Leitfrage auswirken:

- 3.b)v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Die Veränderung wurde vorgenommen, weil bei der ersten Durchführung die meisten Gruppen dazu aufgefordert werden mussten, die Eigenschaft so genau zu formulieren,

dass die Formulierung als Entscheidungskriterium genutzt werden könnte. Der Fokus soll bei der Analyse darauf gelegt werden, ob die Studierenden nun eigenständig erkennen, wenn ihre Formulierungen dieses Kriterium nicht erfüllen.

Schließlich wurden auch Veränderungen bei den erwarteten Problemstellen vorgenommen, welche daraus bestehen, dass einzelne von ihnen in mehrere aufgeteilt oder sie klarer voneinander abgegrenzt wurden. Die Veränderung der Problemstellen wurde mit (Ä 3) bezeichnet. Mit den erwarteten Problemstellen hängen auch die vorbereiteten Interventionen zusammen, die an die überarbeiteten Problemstellen angepasst wurden. Die Veränderungen in Bezug auf diesen Aspekt wurden mit (Ä 4) bezeichnet. Zum anderen wurden die fiktiven Diskussionen authentischer gestaltet, was die Änderung (Ä 5) bildet. Mit den Problemstellen und Interventionen beschäftigen sich zum einen die bereits genannte Leitfrage 3. b) v. und zum anderen die folgende Leitfrage:

- 3.b)iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Der Fokus soll auch hier auf die Veränderungen gelegt werden, das heißt, es sollen die Problemstellen (C1), (C2), (C3), (D1), (D2), (D3) und (D4) und die zu (C1), (C2), (D1), (D2) und (D3) vorgesehenen Interventionen analysiert werden, sofern sie denn zum Einsatz gekommen sind.

Für die Beantwortung der ausgewählten Leitfragen werden, wie bei der retrospektiven Analyse der ersten Workshopdurchführung, alle Textstellen, die für die jeweilige Leitfrage relevant sind, identifiziert, in Bezug auf die Leitfrage analysiert und zusammengefasst.

7.3.2 Analyse in Bezug auf ausgewählte Leitfragen

Nachdem nun begründet wurde, dass sich die Auswirkungen der Veränderungen (Ä 1), (Ä 2), (Ä 3), (Ä 4) und (Ä 5) in der Beantwortung der Leitfragen 3.b)ii., 3.b)iv. und 3.b)v. zeigen könnten, soll auf diese ausgewählten Leitfragen eingegangen werden.

3. b) ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Zunächst einmal wird in Tabelle 7.6 ein Überblick darüber gegeben, wie oft auf die einzelnen vorgegebenen Folgen in den drei Gruppen jeweils in den Diskussionen explizit Bezug genommen wurde. Die Zahlen in den Feldern der Tabelle stehen dabei jeweils für die Turns, in denen explizit über die Folge gesprochen wurde. Stehen Turns in Klammern, so bedeutet das, dass ich als Lehrperson die Aufmerksamkeit der Studierenden auf die jeweilige Beispielfolge gerichtet habe.

Über die konstante Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, die im Vergleich zur ersten Version des Workshop-Konzepts neu hinzugekommen ist, wurde in jeder Gruppe explizit

gesprochen. In welchen Situationen das jeweils der Fall war und inwiefern das den Erkenntnisverlauf beeinflusst hat, darauf wird nun für jede der drei Gruppen eingegangen.

Folge Gruppe	$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
1				33ff. 47ff. (130ff.) 215ff.	29ff.	5ff. 118ff.	1ff. (44ff.) 109ff. (370ff.)
2	(447ff.)		72 (109ff.) 269ff.	2ff. 70 87ff. 178ff. 254ff.	173ff. 375f. 386ff.	70	2ff. 31ff. 234ff.
3	32ff.	30ff.	8ff. 48ff. 79ff.	22ff. 209ff.	4ff. 22 24ff.	8ff. (210ff.) 265ff.	8ff. 21ff. 36ff. (224ff.) (262ff.)

Tabelle 7.6: Übersicht über die Verwendung der (Nicht-)Beispiele der einzelnen Gruppen

Gruppe 1

In dem Moment, in dem diese Folge in der Diskussion der Gruppe 1 thematisiert wird, äußern die Studierenden, dass diese Beispielfolge nicht unter ihr Vorverständnis von konvergenten Folgen fällt:

29 D: *Auch die e_n hätte ich in dem Fall keine Konvergenz*

Sie zählen weitere der vorgegebenen Beispielfolgen auf, bei denen das ebenfalls der Fall ist und begründen auch kurz, warum diese Folgen nicht unter ihr Bild von Konvergenz fallen:

33 P: *Und die a_n auch net. Weil die erreicht ja auch eins, obwohls*

Hier wird die Vorstellung deutlich, der Grenzwert dürfe nicht erreicht werden, weshalb die konstante Folge nicht dazu passt. Kurz darauf begründet derselbe Studierende dies noch einmal etwas anders:

52 P: *Warum ... konvergiert zum Beispiel das hier? Warum ist das konvergent? ... Oder das hier? ... Das nähert sich ja nirgendwo an das hier*

Nun wird von einer Annäherung gesprochen, die bei der konstanten Folge nicht vorhanden ist. Die Studierenden stellen hier unter anderem aufgrund der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fest, dass ihr Vorverständnis, das anscheinend durch „Annähern ohne erreichen“ geprägt ist, nicht zu dem durch die vorgegebenen Folgen festgelegten Begriff passt und somit weiterentwickelt werden muss. Kurz darauf kommen sie dann auf die Idee, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten:

73 B: *Es darf dann einfach net ehm ... mit, wenn ich mit den n's weitergeh, immer größer, immer größer ... darf der Abstand zwischen eins und diesem ... Graph dann halt net auf einmal plötzlich wieder größer werden, der muss dann entweder nur kleiner werden, kleiner, kleiner, kleiner*

Auch wenn diese formulierte Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, so kann dennoch ein großer Fortschritt im Lernprozess der Studierenden festgestellt werden, der auch mit der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammenhängt.

Gruppe 2

Bei Gruppe 2 ist die Situation, in der sie erstmalig explizit über die konstante Folge sprechen, die, in der sie als Charakterisierung formuliert haben, der Abstand der Folgenglieder zu 1 werde immer kleiner. Den Studierenden fällt anhand der Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eigenständig auf, dass diese Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft:

173 J: *Ja aber das würde ja für die hier nicht gehen, weil hier ist ja, da wird ja der Abstand nicht immer kleiner, sondern er bleibt ja*

Die konstante Folge trägt hier dazu bei, zu erkennen, dass auch manche Folgen unter den „neuen“ Begriff fallen, bei denen der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht immer kleiner wird.

An einer späteren Stelle im Erkenntnisverlauf betrachten die Studierenden „Epsilonschläuche“ um den Wert 1 und haben bereits erarbeitet, dass sich bei konvergenten Folgen unendliche viele Folgenglieder innerhalb und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb des Epsilonschlauchs befinden. Sie diskutieren nun darüber, wie die Breite dieses Epsilonschlauchs gewählt wird. Ein Vorschlag lautet wie folgt:

373 J: *Oder wie war das? ... Also muss Epsilon so liegen, dass mindestens ein Wert außerhalb liegt. ... Wir müssen Epsilon so wählen, dass mindestens ein Wert draußen ist. ... Nee*

Auch hier stellen die Studierenden anhand der konstanten Folge eigenständig fest, dass dieser Vorschlag nicht geeignet ist:

375 T: *Genau, weil hier, hier würde es dann nicht gehen*

376 J: *Stimmt*

Dass tatsächlich die konstante Folge gemeint ist, lässt sich in der Videoaufnahme erkennen, da der Studierende an dieser Stelle auf die Grafik dieser Folge zeigt. Die Studierenden bemerken hier, dass bei dieser Folge kein Epsilonschlauch um 1 gefunden werden kann, bei dem mindestens ein Folgenglied außerhalb des Schlauchs liegt, und dass sie ihre Formulierung daher noch überarbeiten müssen.

Kurz darauf sprechen sie in ihrer Charakterisierung dann von einem „unendlich kleinen“ Epsilonschlauch, für den sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb des Schlauchs befinden sollen und nur endlich viele außerhalb. Ein Studierender fragt zur konstanten Folge nach:

386 C: *Ja ich mein, wie is es bei der, dem Beispiel da? Da liegt ja gar keins [außerhalb]*

Hier ist der Studierende sich möglicherweise nicht sicher, ob bei dieser Folge, bei der sich kein Folgenglied außerhalb eines „unendlich kleinen“ Epsilonschlauchs befindet, gesagt werden kann, dass sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb und nur endlich viele außerhalb des Schlauchs befinden. Ein anderer Studierender beantwortet dies:

388 J: *Ja gut, null ist auch endlich oder? Also wenn nix außerhalb liegt, ... ist es ne endlich Zahl, die außerhalb liegt*

Dieser Studierende erläutert, dass die Zahl Null auch eine endliche Zahl ist. Somit hat die Gruppe sich hier klar gemacht, dass die formulierte Eigenschaft auf die konstante Folge zutrifft.

Gruppe 3

In Gruppe 3 beziehen sich die Studierenden direkt zu Beginn auf die konstante Folge, deren Graph mit der Nummer (3) bezeichnet ist:

4 C: *Ja man sieht ja eigentlich schon bei jeden Graphen, dass sie irgendwie immer gegen die Eins gehen. Also entweder nähern sie sich von unten an oder von oben oder treffen die Eins halt direkt, wie bei dem Graph drei*

Die Studentin stellt hier fest, dass unter den Beispielfolgen neben Folgen, die sich dem Wert 1 „annähern“, auch solche sind, die den Wert 1 „treffen“. Das ist in diesem Moment noch nicht allen Gruppenmitgliedern bewusst, wie sich kurz darauf zeigt:

19 S: *Sie nähert sich eins beliebig an, erreicht diese aber nie*

20 C: *Nein nicht bei jeder oder? Bei*

21 S: *Außer bei x_n*

22 C: *Ja bei e_n ist es ja schon gleich eins. ... Da erreicht sie die Eins ja und bei dem fünften Graphen ist es ja auch so, dass wenn n ein Vielfaches von äh zehn, dann ist es ja auch genau eins. ... Jetzt mit dem erreicht nie, würd ich nicht sagen, dass das für jede, jeden Graph oder jede Folge gilt [...]*

Ein Student schlägt hier – vermutlich basierend auf seinem Vorverständnis zu Konvergenz – als Formulierung vor, dass die Folgen sich 1 beliebig annähern, ohne 1 zu erreichen. Chrissy bezieht sich unter anderem auf die konstante Beispielfolge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, um ihren Kommilitonen davon zu überzeugen, dass der Teil „erreicht diese aber nie“ aus seiner Formulierung nicht geeignet ist, um die vorgegebenen Beispielfolgen zu charakterisieren.

Von einem anderen Gruppenmitglied wird direkt der nächste Vorschlag für eine Formulierung der gesuchten Eigenschaft gemacht:

23 H: *Vielleicht kann man's so definieren ... also mit dem Abstand argumentieren der Folgenglieder, also des Wertes des Folgenglieds zur eins. ... Eijei also ... nee der, der Abstand wird ja ... kleiner ... ((U)) oder*

24 S: *Bei e_n wird er net kleiner*

25 H: *Da wird er nicht kleiner, da ist es gleich*

Der Vorschlag lautet, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner wird. An der konstanten Beispielfolge erkennen die Studierenden hier, dass der zu entwickelnde Begriff auch manche Folgen umfasst, bei denen dieser Abstand gleich bleibt. Daraufhin verändern sie die Formulierung der gesuchten Eigenschaft:

32 H: *Also ich denke die einfachsten Beispiele sind a_n und e_n ... Wenn wir nur mal den Abstand betrachten, a_n kann man ja auch anders schreiben als eh n plus eins durch n und da wird der Abstand das, also die Differenz von dem Wert des Folgenglieds zu eins immer echt kleiner also wenn man a_n und a_n plus eins vergleicht, dann ist der Abstand des Werts von a_n größer als- zu eins, als der Abstand von a_n plus eins zu eins. Und bei e_n ist es halt immer gleich. Da bleibt der Abstand gleich. Deswegen könnte man für, wenn man erstmal nur für a_n und e_n ne Definition macht, schreiben, dass der immer kleiner oder gleich dem Abstand des vorigen Fo- Folgenglieds zum Grenzwert ist. ... Nur find ich's dann schwierig, wenn da eine Fallunterscheidung ist, da kann man ja dann nicht mehr sagen, dass immer der Abstand kleiner ist als zu dem Grenzwert, als der Abstand des vorigen Folgenglieds, wenn das vorige Folgenglied schon eins ist*

Zunächst einmal bezeichnet der Student die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als die einfachsten Beispiele. Erstere ist durch den Term $a_n = \frac{n+1}{n}$ definiert und letztere durch $e_n = 1$. Diese beiden Beispielfolgen sind also jeweils durch einen einzigen Term definiert, während alle anderen vorgegebenen Folgen durch zwei Terme definiert sind. Die Aussage, dass er es schwierig findet, wenn da eine Fallunterscheidung ist, stützt die Vermutung, dass dies der Grund dafür ist, warum er $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher findet. Es ist hier allerdings nicht unbedingt der Fall, dass er die Folgen selbst einfacher beziehungsweise schwieriger findet, sondern vermutlich findet er es einfacher beziehungsweise schwieriger, die Charakterisierung derart zu formulieren, dass die Beispielfolgen darunter fallen. Für die beiden „einfachsten“ Folgen formuliert der Student korrekterweise, dass der Abstand jedes Folgenglieds zu 1 kleiner oder gleich dem Abstand des vorigen Folgenglieds zu 1 ist.

Zusammenfassung

Wird für alle drei Gruppen zusammengefasst, in welchen Situationen sie explizit über die konstante Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gesprochen haben und welche Merkmale sie an dieser Beispielfolge erkannt haben, so ist zu erwähnen, dass teilweise deutlich geworden ist, dass diese Folge nicht unbedingt zu dem Bild passt, das die Studierenden basierend auf ihrem Vorverständnis zu Konvergenz hatten. Das hängt eng mit den Eigenschaften zusammen, die sie an dieser Folge entdecken. Dabei handelt es sich darum, dass die Folgenglieder sich dem Wert 1 nicht „annähern“, sondern diesen Wert „erreichen“ und dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht kleiner wird, sondern gleich bleibt. Auch gab es mehrfach Situationen, in denen anhand der Beispielfolge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erkannt wurde, dass eine Formulierung nicht als Charakterisierung der Beispielfolgen geeignet ist. Die konstante Beispielfolge war insgesamt bedeutsam für den Nacherfindungsprozess und wie im Vorfeld bereits dargelegt wurde, deckt sie eine Klasse konvergenter Folgen ab, die zuvor nicht unter den Beispielen

vertreten war. Gegenüber den meisten anderen vorgegebenen Beispielfolgen hat die konstante Folge außerdem den Vorteil, dass sie relativ einfach ist, da sie durch einen einzigen Term definiert ist.

Zusätzliche (Nicht-)Beispielfolgen

Bei zusätzlich verwendeten Beispiel- beziehungsweise Nicht-Beispielfolgen handelt es sich zwar nicht um eine Veränderung des Konzepts im Vergleich zur ersten Version, dennoch soll darauf eingegangen werden. Bei der ersten Durchführung habe ich keiner Studierendengruppe eine zusätzliche Folge gegeben, bei der zweiten Durchführung hingegen schon. Hier ist es insgesamt dreimal vorgekommen, dass ich einer Studierendengruppe eine weitere (Nicht-)Beispielfolge gegeben habe.

In einem Fall habe ich mich zu einer solchen Intervention entschlossen, da die Studierenden eine Eigenschaft formuliert haben, welche im Sinne der Aufgabenstellung geeignet ist, doch nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen 1 ist. Zwar wurde diese Problemstelle im Vergleich zur ersten Version des Konzepts nicht verändert, doch da eine solche Situation bei der ersten Durchführung nicht aufgetreten ist, und sie zudem Hinweise auf sinnvolle Überarbeitungen geben kann, soll hier dennoch darauf eingegangen werden. Die Gruppe 3 hat zunächst festgestellt, dass bei einigen der Beispielfolgen der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner wird oder gleich bleibt, und dass dies bei manchen Beispielfolgen ab einem bestimmten „Zeitpunkt“ der Fall ist. Sie bemerken auch, dass dies auf die durch $d_n =$

$$\begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$
 definierte Beispielfolge nicht zutrifft. Daher versuchen

sie, die Formulierung anzupassen. In der folgenden Äußerung erläutert einer der Studenten seine Idee:

97 H: [...] Also es muss gelten für, für ein Folgenglied muss einfach ab einem bestimmten n gelten, dass der Abstand entweder kleiner ist als der des vorherigen Folgenglieds, wenn das vorige Folgenglied nicht, nicht gleich dem Grenzwert ist. Oder man nimmt halt eins davor. Also der Abstand eines Folgenglieds muss immer kleiner als der Abstand des letzten vorigen Folgenglieds sein, das nicht der Grenzwert war. Oder es ist halt einfach der Grenzwert. Der Wert des Folgenglieds. ... So würd ich das formulieren

Tatsächlich trifft diese verbal formulierte Charakterisierung auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zu und auf das Nicht-Beispiel nicht, wobei die Studierenden nicht auf den Nachweis eingehen. Somit haben die Studierenden es geschafft, eigenständig eine Eigenschaft zu formulieren, welche die Beispielfolgen charakterisiert. Gleichzeitig ist diese Charakterisierung nicht äquivalent zur Definition, was die Teilnehmenden natürlich nicht wissen können. Die von dieser Gruppe formulierte Eigenschaft kommt ohne umgekehrtes Denken nach Roh (2005) aus. Der Abstand eines Folgenglieds zu 1 wird jeweils mit dem Abstand eines vorherigen Folgenglieds verglichen und es wird nicht damit begonnen, einen beliebigen Abstand zu wählen und anschließend zu betrachten, welche Folgenglieder diesen Abstand zur 1 unterschreiten. Die Studierenden selbst haben diese Charakterisierung zwar nicht formalisiert, Folgendes wäre aber eine Formalisierung:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ a_{n+1} = g \text{ oder } |a_{n+1} - g| < |a_k - g| \\ \text{wobei } k := \max \{m \in \mathbb{N} | m \leq n \text{ und } a_m \neq g\} \end{aligned} \quad (2)$$

Abgesehen davon, dass diese Charakterisierung die vorgegebenen Beispielfolgen von dem Nicht-Beispiel abgrenzt, könnte hier auch gesagt werden, dass die Formulierung genau genug ist, um damit bei einer beliebigen Folge zu entscheiden, ob sie diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Es ist den Studierenden also eigenständig gelungen, eine geeignete Eigenschaft im Sinne der Aufgabenstellung zu formulieren. Dass diese Eigenschaft nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1 ist, kann den Studierenden nicht vorgeworfen werden. Beim Vergleich der Eigenschaft (2) mit der formalen Definition der Konvergenz gegen g , lässt sich zeigen, dass weder die Eigenschaft (2) Konvergenz impliziert noch umgekehrt. Bei Folgen, welche die Eigenschaft (2) erfüllen, wird der Abstand der vom Grenzwert verschiedenen Folgenglieder zum Grenzwert immer kleiner, aber nicht unbedingt beliebig klein. So trifft die Eigenschaft (2) für $g = 1$ beispielsweise auf die Folge $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ zu, die nicht gegen 1, sondern gegen 0 konvergiert.

Auch fallen Folgen wie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ 2 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \end{cases}$, die zwei Grenzwerte besitzt, unter die Eigenschaft (2). Umgekehrt erfüllen Folgen, für die der Abstand der vom Grenzwert verschiedenen Folgenglieder zum Grenzwert beliebig klein wird, aber im Vergleich zum letzten vom Grenzwert verschiedenen Folgenglied immer nochmal größer wird, nicht die Eigenschaft (2). Ein derartiges Beispiel ist die durch

$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \end{cases}$ definierte Folge, die gegen 1 konvergiert. Hier zeigt sich eine

Schwäche der Aufgabe, denn obwohl die Studierenden dieser Gruppe die vorgegebenen Beispielfolgen generisch aufgefasst haben, haben sie eine andere Eigenschaft als die Konvergenz gegen 1 formuliert, die auf die vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und auf das vorgegebene Nicht-Beispiel nicht zutrifft. Das Konzept sollte daher überarbeitet werden, so dass eine Folge unter den vorgegebenen Beispielen vertreten ist, auf welche die Eigenschaft (2) nicht zutrifft.

Damit die Studierenden im Sinne der intendierten Aufgabenstellung daran weiterarbeiten, die Definition der Konvergenz nachzuerfinden, ist eine Intervention nötig. Ich habe mich dafür entschieden, den Studierenden die durch $g_n = 2 + \frac{1}{n}$ definierte Folge zu geben. Diese konvergiert nicht gegen den Grenzwert 1, doch die von den Studierenden formulierte Eigenschaft umfasst diese Folge. Ich habe die Gruppe gefragt, ob sie mit ihrer Formulierung eindeutig entscheiden können, ob diese zusätzliche Folge gegen 1 konvergiert oder nicht. Die Studierenden sind sofort der Meinung, dass diese Beispielfolge nicht unter ihr Bild einer Folge mit dem Grenzwert 1 fällt:

110 C: *Die konvergiert gegen zwei oder? ... Ich mein egal was jetzt für, also es war ja zwei plus eins durch n*

Nachdem ich sie noch einmal aufgefordert habe, ihre formulierte Eigenschaft auf diese Folge anzuwenden, bemerken sie, dass diese Folge im Sinne ihrer Charakterisierung gegen 1 konvergieren würde:

128 H: *Ehm. ... Eine ... eine gegen g konvergierende Folge heißt ... naja oder das gilt dann, wenn für alle n über einem bestimmten n für die gilt n ist Element der natürlichen Zahlen und das bestimmte n ist Element der natürlichen Zahlen, muss gelten ... a n plus eins ist gleich dem Grenzwert oder der Abstand von diesem Wert des Folgenglieds zu g ist kleiner als der Abstand des letzten Folgenglieds, welches un-*

gleich g. ... Das trifft ja auch für g gleich eins zu ... tja, haste schon Recht. ... Ist ja doof

...

- 132 H: *Nach der Definition würde es auch gegen null und gegen minus eins und minus zwei alles was kleiner ist als zwei konvergieren*

Hannes stellt korrekterweise fest, dass die von mir gegebene Folge im Sinne ihrer „Definition“ auch gegen jeden Wert, der kleiner als 2 ist, konvergieren würde. Die Studierenden denken daraufhin direkt darüber nach, wie sie ihre Formulierung verändern können, damit die zusätzliche Folge diese nicht erfüllt:

- 134 H: *Müssen wir also das kleinste g finden, für das das gilt, oder das Größte. Hmm. ... Wenn man da jetzt noch ... Naja g ist die, die größte unterste oder kleinste oberste Schranke, so ähnlich wie Supremum und Infimum einer Menge*

Der Student hat hier direkt erkannt, was an der Formulierung geändert werden muss, damit die betrachtete Folge nach der formulierten Eigenschaft nur einen Grenzwert hat. Die Intervention ist als absolut erfolgreich zu bewerten. Den Studierenden ist sehr schnell klar geworden, dass die von ihnen formulierte Eigenschaft auch Folgen umfassen würde, die üblicherweise nicht unter die Eigenschaft „Konvergenz gegen 1“ fallen. Außerdem gelingt es ihnen auch direkt, an der Formulierung weiterzuarbeiten und diese so zu verändern, dass dies nicht mehr der Fall ist, auch wenn dies letztendlich nicht ihre finale Charakterisierung ist. Die zusätzliche Folge hat den Erkenntnisprozess der Studierenden definitiv vorangetrieben.

Ein Student der Gruppe 3 bringt selbst auch noch eine zusätzliche Beispielfolge in die Diskussion ein, und zwar die Folge $(1 + (\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Eine Kommilitonin hat zuvor vorgeschlagen, $\frac{1}{n}$ als Grenze für den Abstand der Folgenglieder zu 1 oder möglicherweise als Abstand selbst zu fordern, genau lässt sich aus ihren Äußerungen nicht erkennen, was sie meint. Der Student Hannes möchte „ $\frac{1}{n}$ “ nicht in der Charakterisierung verwenden und zieht zur Begründung die genannte Folge hinzu:

- 95 H: *Ja wir müssen auf jeden Fall formulieren, von der Formulierung eins durch n weg, denn es gibt Folgen, bei denen es dieses eins durch n nicht gibt zum Beispiel wenn man den, den Term der Folge eins plus ein Halb hoch n formuliert, dann dieses ein Halb das wird auch immer kleiner, wenn's hoch n genommen wird. Also ein Halb, ein Viertel dann- Ja Moment, ich muss kurz nachdenken. Doch, ein Halb, ein Viertel und dann-*

- 96 C: *Ist das nicht eins durch n?*

- 97 H: *Ein Achtel. ... Nee eins durch n ist ja, eins durch eins, eins durch zwei, eins durch drei, eins durch vier. ... Und es gibt genug andere Folgen die gegen eins konvergieren [...]*

Er nutzt die Folge $(1 + (\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Beispiel für eine Folge, die unter sein Konzept von Folgen mit dem Grenzwert 1 fällt und in der $\frac{1}{n}$ nicht im definierenden Term vorkommt.

Theoretisch hätte er dazu keine zusätzliche Folge hinzuziehen müssen, denn auch bei der vorgegebenen Beispielfolge, die durch $f_n = \begin{cases} 2, & n = 10 \\ 1 + (-\frac{1}{2})^n & \text{sonst} \end{cases}$ definiert ist, ist $\frac{1}{n}$ nicht in den definierenden Termen vorhanden. Streng genommen lässt der Studierende sich hier nicht vollständig auf die Aufgabenstellung ein, denn er argumentiert nicht nur auf Basis der vorgegebenen Folgen, sondern auch auf Basis seines Konzepts von konvergenten Folgen. Dennoch ist das in diesem Fall nicht hinderlich für den Erkenntnisprozess, sondern sogar förderlich.

Es ist zu überlegen, ob eine oder beide der zusätzlichen Folgen bei der überarbeiteten Version von vornherein in das Konzept aufgenommen werden sollten. Bei der Beispielfolge $(1 + (\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ entscheide ich mich dagegen, da der Student, der diese Folge in die Diskussion eingebracht hat, sich genauso gut auf die vorgegebene Beispielfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hätte beziehen können. Ich kann bei dieser zusätzlichen Folge keine wichtigen Eigenschaften finden, die nicht auch eine der vorhandenen Beispielfolgen aufweist.

Bei dem Nicht-Beispiel $(2 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ handelt es sich um eine Folge mit einem von 1 verschiedenen Grenzwert, was unter den vorgegebenen Folgen ebenfalls nicht vertreten war. Bei den Nicht-Beispielen war bisher allerdings auch gar nicht versucht worden, möglichst verschiedene Typen von Folgen zu verwenden. Würde man dies versuchen, so müsste abgesehen von einer Folge mit einem anderen Grenzwert auf jeden Fall auch noch eine unbeschränkte Folge aufgenommen werden, möglicherweise auch weitere Variationen wie eine unbeschränkte Folge mit einem Häufungspunkt oder ähnliches. Das würde die Anzahl der vorgegebenen Folgen deutlich erhöhen und es könnte dazu führen, dass die Studierenden mit der Betrachtung so vieler verschiedener Folgen gleichzeitig überfordert wären. In der Situation, in der ich dieses zusätzliche Nicht-Beispiel eingesetzt habe, hätte ich stattdessen auch eine Beispielfolge wie die durch $g_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \end{cases}$ definierte Folge

auswählen können, wie bereits erläutert wurde. Wäre diese Folge unter den vorgegebenen Beispielen gewesen, so wäre die von der dritten Gruppe formulierte Eigenschaft, die nicht äquivalent zur Definition gegen 1 ist, nicht als Charakterisierung geeignet gewesen. Unter den bisherigen Beispielfolgen ist keine, für die der Abstand der Folgenglieder zu 1 ab keinem n monoton fallend und für kein n genau 0 ist. Dies könnte als ein weiterer Typ von Folgen mit dem Grenzwert 1 aufgefasst werden, der bisher in der Menge der Beispielfolgen nicht war, was dafür spricht, diese Folge in der nächsten Version des Workshop-Konzepts als weitere Beispielfolge vorzugeben.

3. b) iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Bei dieser Durchführung ist bei einer der drei Studierendengruppen der Fall aufgetreten, dass sie die Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen klassifiziert haben. Es handelt sich um Gruppe 1.

Die Studierenden formulieren Folgendes:

152 P: [*Ja also müssen*] *wir halt ne Fallunterscheidung machen*

153 B: *Ja... [((U)) einfach aus]*

154 P: [*Ja dann stimmt das ja*] *einmal und dann halt für ... ehm ... für n gleich ... wenn n gleich eins ist dann ... oder wenn a n gleich eins ist dann ... is es gleich null der Abstand. ... ((und falls)) der Abstand gleich- und wenn ... a n eben ni- noch nicht eins ist, dann nähert sich halt an*

Es wird explizit von einer Fallunterscheidung gesprochen, die Eigenschaft wird durch zwei Bedingungen, die durch „oder“ miteinander verbunden werden, charakterisiert. Auch wenn die Äußerung der Studentin etwas durcheinander ist, scheint sie als eine der Bedingungen zu meinen, dass die Folgenglieder dem Wert 1 entsprechen beziehungsweise der Abstand der Folgenglieder zu 1 gleich 0 ist, und als zweite Bedingung eine Annäherung an 1. Eine Formulierung durch eine einzige Bedingung liegt hier nicht vor. Außerdem ist die Eigenschaft nicht genau genug formuliert, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können, denn „Annähern“ kann subjektiv verschieden interpretiert werden. Auf die Idee, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten, sind die Studierenden eigenständig gekommen. Umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) ist hier allerdings nicht erkennbar, denn es wird nicht zu (beliebig) vorgegebenem Abstand betrachtet, welche Folgenglieder weniger von 1 abweichen als der vorgegebene Abstand. Auch wenn die Studierenden im Anschluss selbst sagen, dass dies „komisch zu formulieren“ sei, so versuchen sie dennoch nicht, die Eigenschaft zu überarbeiten. Stattdessen würde zumindest ein Gruppenmitglied lieber die „richtige“ Definition präsentiert bekommen:

158 P: *So und jetzt sagst du wie's richtig ist*

An dieser Stelle ist eine Intervention nötig, andernfalls hätten die Studierenden sich vermutlich nicht weiter mit der Aufgabe beschäftigt.

Für eine solche Situation war als erste Intervention vorgesehen, die Studierenden zu fragen, ob sie mit dieser Formulierung eindeutig entscheiden können, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt oder nicht. Das ist wie folgt geschehen:

168 L: *Also ich würd jetzt hier, also es war ja, wir sollten das so formulieren, dass man das am Ende für jede beliebige Folge entscheiden könnte, ob sie die Eigenschaft hat oder nicht. ... Könntet ihr das damit?*

Diese Intervention zeigt nicht den gewünschten Erfolg:

169 P: *Ja ... (lacht)*

...

171 P: *Ja. ... Ich hab halt gesagt, das ist formal nicht richtig, aber vom Sinn her schon*

Die Studentin bejaht die Frage, das heißt, sie scheint der Meinung zu sein, dass die von ihnen formulierte Eigenschaft als Entscheidungskriterium genutzt werden kann, auch wenn sie einräumt, dass die Formulierung „formal nicht richtig“ sei. In einem solchen Fall kann

die von mir gestellte Frage die Studierenden nicht in ihrem Erkenntnisprozess unterstützen, weshalb eine weitere Intervention nötig ist. Dazu war die zweite fiktive Diskussion vorgesehen, welche den Studierenden nun mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die fett gedruckten Fragen zu beantworten, ausgegeben wurde. In dieser fiktiven Diskussion wird problematisiert, dass „Annähern“ ungenau ist und subjektiv unterschiedlich interpretiert werden kann. Der Vorschlag, der dann in der fiktiven Diskussion gemacht wird, ist die Betrachtung des Abstands der Folgenglieder zum Wert 1. Die Studierenden beginnen gemeinsam zu lesen und beantworten die Frage, was sie unter „annähern“ verstehen:

186 P: *Annähern heißt konvergiert (lacht) ... ((U))*

187 D: *Es geht in die Nähe aber es er- [erreicht nie] ... den Wert*

188 P: *[Erreicht das nie]*

189 B: *Ja*

190 P: *Gut*

Hier wird noch einmal deutlich, dass „Annähern“ für sie bedeutet, dass der Wert nicht erreicht wird. Anschließend lesen sie weiter und sind der Meinung, dass die fiktive Diskussion ihnen keine neuen Erkenntnisse gebracht hat:

205 P: *Ja beim Abstand waren wir doch vorher auch schon*

206 B: *Hmm*

207 P: *Oder? ... Soweit waren wir doch schon*

Tatsächlich hatten die Studierenden zuvor bereits die Idee, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten, doch in der Formulierung unmittelbar vor dem Einsatz der Intervention spielt dieser Abstand kaum eine Rolle. Dennoch ist die Betrachtung dieses Abstands für sie an dieser Stelle keine neue Idee, weshalb es im Nachhinein betrachtet nicht verwunderlich ist, dass die Intervention sie nicht in ihrem Erkenntnisverlauf voranbringt. Das liegt nicht an der Intervention an sich, sondern daran, dass sie in dieser Situation nicht geeignet war. Im Konzept des Workshops sollte in Zukunft deutlich gemacht werden, dass diese Intervention nur dann zum Einsatz kommen sollte, wenn die Studierenden bis zu dem Zeitpunkt noch nicht selbst auf die Idee gekommen sind, den Abstand der Folgenglieder zu 1 zu betrachten.

Zu einem späteren Zeitpunkt betrachten die Studierenden weiterhin den Abstand der Folgenglieder zu 1. Sie haben bereits festgestellt, dass dieser bei manchen der vorgegebenen Beispielfolgen nicht immer kleiner wird. Da dies nur bei solchen Beispielfolgen der Fall ist, die durch zwei Terme definiert sind, schlagen sie vor, dies für die einzelnen Terme zu formulieren. Auch haben sie bereits festgestellt, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 bei manchen der vorgegebenen Beispielfolgen 0 wird. Außerdem haben sie an einem zusätzlichen Nicht-Beispiel entdeckt, dass es auch Folgen gibt, die nicht gegen 1 konvergieren und für die der Abstand der Folgenglieder zu 1 dennoch mit wachsendem n immer kleiner wird. Sie haben keine Idee, wie sie die Eigenschaft, welche die vorgegebenen Beispielfolgen besitzen, formulieren können, so dass diese auf Folgen wie $(2 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft:

330 P: *Man kann ja auch hier nicht sagen, k kleiner als eins oder so, weil das könnte ja auch gegen eins Komma fünf konvergieren oder so, also das kann nicht*

331 B: *Hmm*

332 P: *Wir können auch net sagen k kleiner als null Komma eins weil es könnte auch gegen null Komma eins eins- eins Komma null null eins konvergieren. ... Keine Ahnung*

Mit k haben sie den Abstand der Folgenglieder zu 1 bezeichnet. Sie scheinen hier nicht nur die konkrete Folge $(2 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen 2 konvergiert, ausschließen zu wollen, sondern auch Folgen mit anderen von 1 verschiedenen Grenzwerten wie zum Beispiel dem Grenzwert 1,5 oder dem Grenzwert 1,001. Sie schlussfolgern korrekterweise, dass die zusätzliche Bedingung, der Abstand der Folgenglieder zu 1 müsse kleiner als eine feste Zahl sein, nicht jede Folge mit einem von 1 verschiedenen Grenzwert ausschließt. Was ihnen jedoch nicht gelingt, ist es, eine neue Formulierung der Eigenschaft zu finden und sie scheinen an dieser Stelle nicht weiterzukommen. Von den erwarteten Problemstellen lässt sich dieser Fall am ehesten unter Situation (C2) einordnen. In dieser Situation wird die gesuchte Eigenschaft dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird oder 0 bleibt. Die Gruppe betrachtet tatsächlich den Abstand der Folgenglieder zu 1 und sie hat die Bedingungen, dass dieser Abstand kleiner wird und dass er 0 werden kann, bislang noch nicht zu einer durch eine einzigen Bedingung ausgedrückten Eigenschaft verbunden. Die Präzision der Formulierung kann an dieser Stelle nicht diskutiert werden, weil die Gruppe hier gar nicht explizit eine Eigenschaft formuliert. Umgekehrtes Denken nach Roh (2005) ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht zu sehen. Es ist zwar die Überlegung vorhanden, einen Abstand vorzugeben, doch abgesehen davon, dass sie sagen, das sei mit einem festen Abstand nicht möglich, machen sie nicht die Überlegung, ab welchem n die restlichen Folgenglieder weniger von 1 abweichen als der vorgegebene Abstand. Die Studierenden benötigen in diesem Moment erneut Unterstützung.

Für die Situation (C2) war als erste Intervention vorgesehen, die Studierenden zu fragen, ob sie mit ihrer Formulierung bei einer beliebigen Folge entscheiden können, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Da diese Intervention bei derselben Gruppe allerdings schon zuvor zum Einsatz gekommen ist, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet. Stattdessen wurde den Studierenden die dritte fiktive Diskussion ausgehändigt, die als nächste Intervention für diese Situation geplant war. In dieser fiktiven Diskussion ist der wesentliche Schritt der Übergang von der Formulierung, dass der Abstand der Folgenglieder klein oder 0 wird zu der Formulierung, dass dieser Abstand beliebig klein wird. Am Ende der fiktiven Diskussion wird genauer erläutert, was unter „beliebig klein“ zu verstehen ist. Die Studierenden wurden aufgefordert, die fiktive Diskussion jeweils bis zu einer fett gedruckten Frage zu lesen, dann zunächst zu versuchen, die Frage zu beantworten, und erst dann bis zur nächsten Frage weiterzulesen. Der Grund dafür ist, dass die Studierenden selbst nachdenken sollen und die Möglichkeit haben sollen, zwar Unterstützung zu bekommen, aber dennoch einiges selbst zu entdecken. Darauf lässt sich die Gruppe nicht richtig ein, sie überspringen die Fragen teilweise und lesen direkt weiter. Dadurch können sie in dieser Phase nichts selbst entdecken. Vor allem eine Studentin dieser Gruppe ist hauptsächlich

an der „richtigen“ Definition interessiert und lässt sich insgesamt kaum auf die Aufgabe ein. Im Anschluss an das Durchlesen der fiktiven Diskussion war den Studierenden noch nicht ganz klar, wie „beliebig klein“ aufzufassen ist beziehungsweise wie die gesuchte Eigenschaft geeignet formuliert werden kann. Ich habe sie daher zunächst für den Wert 0,5 aufgefordert, bei jeder der Beispielfolgen herauszufinden, ab welchem Folgenglied alle weiteren Folgenglieder um weniger als 0,5 von 1 abweichen. Das gelingt ihnen und ihnen ist auch klar, dass dies bei dem Nicht-Beispiel nicht möglich ist. Anschließend frage ich sie, wie das bei anderen Werten als 0,5 wäre:

411 L: [...] *Was wäre jetzt, wenn ich null Komma eins vorgeben würde? ... Könntet ihr dann bei den Folgen a_n bis f_n wieder irgendeinen Punkt finden?*

412 P: *Ja*

413 L: *Hmm. Wenn ich null Komma null eins vorgeben würde?*

414 P: *Ja auch*

Die Studierenden überprüfen dies nicht mehr an den einzelnen Beispielfolgen, sondern es ist ihnen direkt klar, dass es bei jeder Beispielfolge ein Folgenglied gibt, ab dem alle weiteren um weniger als 0,1 oder 0,01 von 1 abweichen. Schließlich frage ich, ob das auch so ist, wenn der Wert 0 vorgegeben ist:

421 L: *Was wäre wenn ich null vorgebe?*

422 P: *Nein*

Auch hier können sie die Frage direkt beantworten. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Studierenden verstanden haben, dass bei den Beispielfolgen zu jedem positiven, vorgegebenen Wert jeweils ein Folgenglied gefunden werden kann, so dass ab diesem alle weiteren Folgenglieder um weniger als den vorgegebenen Wert von 1 abweichen, während dies bei dem Nicht-Beispiel nicht für jeden positiven, vorgegebenen Wert möglich ist. Den Erkenntnisprozess der Studierenden hat diese Intervention daher in jedem Fall vorangetrieben, auch wenn sie in dieser Phase wenig selbst entdeckt haben. Das hätte sich vermutlich auch mit anderen Interventionen nicht ändern lassen, weil insbesondere die eine Studentin sich nicht richtig auf die Aufgabe eingelassen hat.

Wie bereits bei zwei Gruppen aus dem ersten Workshop ist es diesen Studierenden schwer gefallen, von einer Klassifizierung der Beispielfolgen in zwei Gruppen zu einer einzigen Bedingung überzugehen. In Bezug auf mögliche Konsequenzen für das Re-Design des Workshop-Konzepts lässt sich bei dieser Gruppe feststellen, dass die Frage, ob mit einer formulierten Eigenschaft entschieden werden könnte, ob eine Folge diese Eigenschaft besitzt oder nicht, nicht unbedingt hilfreich ist. Wie bereits bei Studierenden aus der ersten Durchführung des Workshops scheint es auch bei der hier betrachteten Gruppe so zu sein, dass sie der Meinung sind, sie könnten ihre Formulierung als Entscheidungskriterium nutzen. Daher ist die Frage wirkungslos. Das zeigt also erneut, dass zusätzlich in die Aufgabenstellung aufgenommen werden sollte, dass die Formulierung der Anforderung genügen soll, dass jede Person mit ihr zu derselben Entscheidung bezüglich der Konvergenz einer Folge gelangt.

3. b) v. Reichen die Aufgabenstellung, die Beispiele und die Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Bevor hier auf die einzelnen Gruppen eingegangen wird, kann schon einmal gesagt werden, dass die Studierenden im Vergleich zu denen im Vorjahr häufiger Fragen an die Lehrperson gerichtet haben. Das lässt sich dadurch erklären, dass sich bei dieser Durchführung immer nur eine Studierendengruppe im Raum befand und die Lehrperson daher die gesamte Zeit verfügbar war. Dadurch haben die Studierenden sicherlich auch Fragen gestellt, die sie sich nach etwas Nachdenken oder Diskutieren alleine hätten beantworten können. Bei der ersten Durchführung hingegen befanden sich vier Studierendengruppen gleichzeitig im Raum und wenn die Lehrperson gerade mit einer der Gruppen beschäftigt war, konnten die anderen Gruppen sie nicht sofort ansprechen. Dass insgesamt mehr Fragen gestellt wurden, ist also nicht auf die veränderte Aufgabenstellung zurückzuführen.

Gruppe 1

Bei Gruppe 1 reichen die Aufgabenstellung, die Menge der vorgegebenen Folgen und die Unterstützungsangebote nicht aus, damit sie die Definition nacherfinden. Insbesondere eine Studentin gibt sehr schnell auf und ist hauptsächlich daran interessiert, die „richtige“ Definition zu erhalten. Nachdem die Gruppe festgestellt hat, dass manche der Beispielfolgen nicht zu ihrem Vorverständnis von konvergenten Folgen passen, äußert diese Studentin schon nach wenigen Minuten, dass sie zu keinem Ergebnis kommen werden:

39 P: *So ich glaub wir können hier noch stundenlang sitzen und wir werden trotzdem zu keinem Ergebnis kommen*

40 B: *Hmm*

41 P: *Wir sind fertig*

(lachen)

42 B: *Mehr oder weniger*

43 P: *Wir kommen zu dem Ergebnis, dass wir auch in Stunden kein Ergebnis haben werden*

Bei dieser Gruppe ist nur vereinzelt ein selbstregulativer Prozess erkennbar. An mehreren Stellen, an denen die Gruppe nicht sofort eine Idee hat, wendet sich diese Studentin an die Lehrperson und möchte aufgeben beziehungsweise die Lösung von der Lehrperson präsentiert bekommen. So auch an einer späteren Stelle:

158 P: *So und jetzt sagst du wie's richtig ist*

Diese Studentin lässt sich kaum auf die Aufgabenstellung ein. Möglicherweise hatte sie zuvor noch nie mathematische Aufgaben zu bearbeiten, bei denen sie nicht weiterwusste, oder sie hat die Erfahrung gemacht, dass sie entweder schnell weiß, wie eine Aufgabe zu lösen ist, oder auch nach langer Bearbeitungszeit zu keiner Lösung gelangt. Das hängt

vermutlich nicht mit der genauen Formulierung der Aufgabenstellung zusammen.

Insgesamt wurde die Diskussion dieser Gruppe mehrmals nur fortgeführt, weil ich auf verschiedene Arten interveniert habe. Der Präzisierungsgrad ihrer Formulierungen war außerdem nicht so hoch, dass die Charakterisierung als Entscheidungsregel genutzt werden könnte, doch die Studierenden waren teilweise trotzdem mit diesen zufrieden. Darauf wurde bereits bei der vorherigen Leitfrage eingegangen. Bei dieser Gruppe scheint der zusätzliche Satz in der Aufgabenstellung, dass die Eigenschaft so genau formuliert werden muss, dass damit bei einer beliebigen Folge entschieden werden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht, also nicht den gewünschten Erfolg gebracht zu haben. Dadurch, dass dieser Satz in der Aufgabenstellung stand, konnte ich allerdings besser rechtfertigen, sie zu fragen, ob ihre Formulierung dieses Kriterium erfüllt beziehungsweise sie aufzufordern, die Eigenschaft genauer zu formulieren.

Gruppe 2

Bei der zweiten Gruppe ist deutlich mehr Eigendynamik erkennbar. So fällt den Studierenden zumindest in manchen Fällen eigenständig auf, dass eine von ihnen formulierte Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Auch bei ihnen treten jedoch Problemstellen auf, in denen Unterstützungsangebote eingesetzt werden.

Die Problemstelle (D3) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Studierenden formulieren, der Abstand der Folgenglieder zu 1 werde beliebig klein. Die Studierenden der zweiten Gruppe formulieren etwas Ähnliches:

27 T: *Würd da mit Limes argumentieren. Also dass wenn ich n gegen unendlich laufen lasse, dass es sich unendlich nah an den Grenzwert annähert*

Für eine erste Version ist diese Formulierung sehr gut, die Gruppe hat den wesentlichen Unterschied zwischen den vorgegebenen Beispielfolgen und dem Nicht-Beispiel sehr schnell erkannt. Sie bleiben bei dieser Formulierung jedoch erst einmal stehen und scheinen diese nicht als zu ungenau einzuschätzen. Tatsächlich ist aber nicht eindeutig, was „unendlich nah annähern“ bedeutet und wie bei einer beliebigen Folge überprüft werden könnte, ob sie diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Eigenständig erkennen die Studierenden das hier nicht, daher ist eine Intervention nötig, um sie dazu zu bringen, dass sie die Formulierung präzisieren. Abgesehen von der ungenauen Formulierung ist hier auch noch kein umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) vorhanden. Es wird davon gesprochen, dass sie n gegen Unendlich laufen lassen und dann betrachten, wie sich die Folgenglieder verhalten und nicht erst ein beliebiger Abstand gewählt wird und dann dazu ein n , ab dem alle restlichen Folgenglieder weniger von 1 abweichen als der vorgegebene Abstand.

Für die Situation (D3) war als erste Intervention vorgesehen, die Studierenden zu fragen, ob mit ihrer Formulierung für eine beliebige Folge entschieden werden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Das wurde in ähnlicher Form umgesetzt:

41 L: *Okay und könntet ihr das jetzt, also wenn man euch ... ganz viele verschiedene Folgen geben würde. Findet ihr, dass das schon so eindeutig oder präzise formuliert*

ist, dass das eh, dass man das immer entscheiden kann? Wenn man jetzt sagt, für große n ... nähern sich die oder kommen die Folgenglieder unendlich nah an eins ran

Die Studierenden scheinen eher der Meinung zu sein, dass dies möglich sei:

44 T: *Die Frage war jetzt, ob das eindeutig erkennbar ist oder?*

45 L: *Genau. ... Also ist das schon so gut formuliert, dass man das immer eindeutig entscheiden kann. Ob eine Folge, ob das auf eine Folge zutrifft oder nicht*

46 T: *Meistens schon*

Möglicherweise können sie sich in dem Moment keine Folge vorstellen, bei der sie das nicht entscheiden könnten. Ich habe mich dann dazu entschieden, genauer nachzufragen:

52 L: *Und wie würdet ihr das jetzt überprüfen, wenn ich euch irgendeine Folge gebe, ob die jetzt für große n ... unendlich nah an eins rankommt?*

53 A: *Ja wir prüfen halt, also [setzen ein n ein und dann setzen wir ein anderes n ein]*

54 C: *[((U))]*

55 A: *Und dann*

56 J: *Jetzt setzen wir hundert ein und dann mal tausend und*

57 A: *Bis-, bis wir vier Stunden rum haben und dann*

58 J: *Bis der Taschenrechner Error sagt und dann sagen wir, gut der Taschenrechner kann das auch nicht besser*

59 A: *Keine Ahnung sonst*

Die Studierenden schlagen vor, Werte für n einzusetzen. Die Aussagen, dass sie so lange weitermachen, bis vier Stunden um sind beziehungsweise bis der Taschenrechner „Error“ anzeigt, klingen, als wären sie nicht ganz ernst gemeint. Ihnen scheint bewusst zu sein, dass sie mit dem Einsetzen eigentlich nicht bei irgendeinem Wert aufhören dürften und dass dieses Vorgehen daher nicht praktikabel ist. Im Anschluss schlagen sie eine neue Formulierung vor, das heißt, die Intervention hat auf jeden Fall bewirkt, dass die Studierenden weiter an der Charakterisierung arbeiten. Außerdem haben sie sich bewusst gemacht, dass nicht durch eine feste Zahl ausgedrückt werden kann, was „große n “ sind:

50 J: *Ganz viel. ... Immer noch eins dazu. ... Ja große n kann man nicht fest machen, große n sind immer weiter quasi. Also man kann jetzt nicht sagen, Quadrillionen sind große n , sondern es geht halt immer ... noch ein größeres wie das Große quasi schon*

Die Gruppe hat nach der Intervention also auf jeden Fall Fortschritte gemacht und der Einsatz dieser kann als erfolgreich bewertet werden, auch wenn die Nacherfindung danach noch lange nicht abgeschlossen ist.

Später tritt bei dieser Gruppe noch eine Problemstelle auf, die sich unter die Situation (D4) einordnen lässt. Das bedeutet, die formulierte Eigenschaft ist nicht so genau, dass damit eindeutig entschieden werden kann, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt oder nicht und gleichzeitig liegt keine der Situationen (D1), (D2) oder (D3) vor. Die Studierenden haben sich daran erinnert, dass im Vorkurs im Zusammenhang mit der Definition der Stetigkeit ϵ -Schläuche betrachtet wurden, und sind auf die Idee gekommen, dass sie auch hier solche Schläuche um den Wert 1 betrachten könnten. Sie formulieren die Eigenschaft wie folgt:

247 J: [*Wir schreiben jetzt was mit Epsilonschlauch*]

248 C: [*Wird der Schlauch hinten kleiner,] dann ist sie konvergent. ... Das ist die Lösung*

Hier ist nicht ganz klar, ob die Studierenden von einem einzigen Schlauch ausgehen, der für größer werdende n schmaler wird, oder ob sie an mehrere Schläuche denken, die schmaler werden, je weiter „hinten“ sie angelegt werden. Umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) ist hier weiterhin nicht erkennbar. Die Studierenden scheinen eher zu beobachten, wie der Abstand der Folgenglieder zu 1 sich mit größer werdendem n verändert und sie beginnen nicht mit einem (beliebigen) ϵ -Streifen und finden dazu eine Stelle der Folge, ab der alle weiteren Folgenglieder innerhalb des Streifens liegen. Im weiteren Verlauf der Diskussion zeigt sich, dass die Gruppe mit dieser Formulierung selbst nicht bei allen Beispielfolgen eindeutig entscheiden kann, ob die Eigenschaft zutrifft oder nicht, wie beispielsweise im folgenden Ausschnitt deutlich wird:

267 J: *Hmm. ... Ich würd einfach sagen, wir setzen den Epsilonschlauch an der breitesten Stelle an. ... Gut, die müssen wir erst finden. ... Oder wir setzen, wir suchen quasi die breiteste Stelle und setzen da an irgendwie oder keine Ahnung*

268 C: *Hmm*

269 A: *Aber bei der siebten wird er ja auch nicht kleiner*

270 C: *Doch wenn wir hier den ansetzen, wird er ja nach hier wieder*

271 T: *Du hast [ja] dann eins*

272 C: [*So*]

273 A: *Ach so*

274 C: *Kleiner*

275 A: *Ja stimmt*

276 J: *Also hi- hier wird er ja größer werden und hier wieder kleiner*

277 C: *Hmm*

278 T: *Ja aber so geht das nicht. Nein, vielleicht können wir ja irgendwie*

Die Studierenden sind sich unsicher, wo der ϵ -Schlauch angesetzt werden soll und bei einer der Beispielfolgen sind sie sich nicht einig, ob der Schlauch „kleiner“ wird oder nicht. Sie scheinen sich darüber bewusst zu sein, dass diese Formulierung noch überarbeitet werden muss. Ohne Unterstützung kommen sie jedoch nicht weiter.

Die vorgesehene Intervention für diese Situation war der Einsatz von ϵ -Streifen. Da die Studierenden hier jedoch bereits selbst die Idee hatten, ϵ -Schläuche zu betrachten, habe ich mich gegen diese vorbereitete Intervention entschieden und spontan interveniert:

293 L: [...] *Also ... ihr habt vorgeschlagen, jetzt so-, so nen Epsilonschlauch euch anzugucken*

294 C: *Ja*

295 L: *Dann würde ich jetzt erstmal nochmal überlegen, ... wo soll der Epsilonschlauch liegen? Warum? Und ... wie breit soll der sein? ... Oder guckt man sich mehrere Epsilonschläuche an? Nur einen?*

Aus den Formulierungen der Studierenden war mir zunächst nicht klar, ob sie einen einzigen Schlauch betrachten, der „nach hinten“ schmaler wird, oder ob sie mehrere Schläuche betrachten, die schmaler werden, je weiter hinten sie angelegt werden. Nach dieser Nachfrage haben die Studierenden direkt weiter diskutiert, ohne dass ich in der nächsten Zeit etwas gefragt oder gesagt habe.

296 C: *So breit wie das, ... der größte Abstand von der Eins. Zu Beginn doch oder ... da soll doch beginnen oder?*

297 J: *Also ich würde sagen, alle Werte sollen im Schlauch liegen*

298 C: *Alle?*

299 T: *Aber nur am Anfang, oder? Weil ja sonst*

300 J: *Insgesamt alle Werte sollen im Schlauch liegen. Und am Ende soll der Schlauch n- äh*

301 T: *Aber der [Schlauch bleibt] ja immer gleich.*

302 J: *[Klein sein]*

303 T: *[Der bleibt ja so.] Du kannst ja nicht sagen, du ((U))*

304 J: *[Ach so.] Ja. ... Also*

Hier zeigt sich, dass die Studierenden sich weder darüber einig sind, wie viele Folgenglieder sich innerhalb des Schlauchs befinden sollen, noch hatten sie alle dieselbe Vorstellung davon, wie dieser Schlauch aussieht. Mindestens ein Studierender schien davon auszugehen, dass der eine Schlauch an verschiedenen Stellen unterschiedlich breit ist. Hier einigen sie sich zunächst darauf, dass ein Schlauch überall dieselbe Breite

hat. Dabei handelt es sich bereits um eine wichtige Erkenntnis, zu der die Intervention beigetragen hat.

Anschließend widmen sie sich der Frage, wie viele Folgenglieder sich innerhalb eines ϵ -Schlauchs befinden:

308 T: *Zumindest je kleiner der Epsilonschlauch wird, desto mehr wird das dann hier am Anfang raus. Die liegen dann nicht mehr im Epsilonschlauch*

309 J: *Liegt dann irgendwann überhaupt noch ein Wert im Epsilonschlauch?*

310 C: *Müssen wir den Epsilonschlauch dann irgendwann, den müssen wir ganz klein wählen und dann zum Sch- zum Ende hin liegen dann ehm liegen dann wieder Werte drinne*

311 J: *Ja liegt dann noch ein Wert im Epsilonschlauch [oder wenn,] wenn wir den um Eins legen und ganz klein machen, unendlich klein*

312 C: *[Ja wenn]*

313 C: *Ja dann liegt, ja dann liegt irgendwann ganz hinten liegt dann einer drinne oder mehrere dann*

314 J: *Ja weiß ich ja nicht*

315 T: *Ja wenn Epsilon größer null ist muss irgendwas drin liegen, weil [eins durch n oder so]*

In diesem Abschnitt folgen direkt die nächsten wichtigen Erkenntnisse. Die Studierenden sprechen davon, dass der ϵ -Schlauch um 1 „unendlich klein“ gewählt werden muss und dass sich bei den Beispielfolgen immer Folgenglieder innerhalb des ϵ -Schlauchs befinden, wenn ϵ größer als Null ist. Wie viele Folgenglieder sich innerhalb des Schlauchs befinden, darauf wird an dieser Stelle noch nicht eingegangen. Doch auch das folgt kurz darauf:

327 C: *Nein, ein Epsilon haben wir dann gewählt. Wir haben ja Epsilon fest gewählt. ... Der ist ja gleich der Schlauch ((U)) also von der, wenn wir Epsilon halt ganz, ganz klein wählen, ist am Anfang, was weiß ich, die ersten fünf Millionen Werte nicht drinne und dann die restlichen sind drin aber die*

328 J: *Ja die restlichen sind ja auch nochmal unendlich viele quasi, die drin liegen dann. Also die ersten fünf Millionen liegen net drin oder die ersten bestimmte Anzahl liegt nicht drin aber die, die letztlichen unendlichen, die liegen drin*

329 T: *Ja. ... Dann ist konvergent*

330 A: *Ja aber dann haben wir immer noch nicht da, dass da nicht irgendwelche ausbrechen können. Da liegen dann zwar ganz viele drinne, aber wenn dann immer welche, dann müsste man sagen, dass dann alle da drinne liegen, die ab da kommen*

331 T: *Ja*

332 J: *Es dürfen nur, ne endliche Anzahl darf nicht drinne liegen*

333 C: *Ja*

334 T: *Genau*

335 J: *Wenn unendliche nicht drin liegen, dann ist murks. Aber es darf nur ne endliche Menge außerhalb des Schlauchs liegen*

Direkt zu Beginn dieses Ausschnitts ist erstmalig umgekehrtes Denken im Sinne von Roh (2005) erkennbar, denn der Studierende spricht explizit davon, dass ϵ gewählt ist und sich dann irgendeine Anzahl von Folgengliedern außerhalb des Schlauchs befindet und ab einer Stelle die restlichen Folgenglieder innerhalb des Schlauchs liegen. Hier ist den Studierenden somit ein weiterer wesentlicher Schritt gelungen. Auch scheinen sich die Gruppenmitglieder nun einig darüber zu sein, dass sich nur endlich viele Folgenglieder außerhalb und unendlich viele Folgenglieder innerhalb des ϵ -Schlauchs befinden sollen. Hier fehlt nur noch eine genauere Aussage darüber, dass $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wird beziehungsweise dass es für jedes $\epsilon > 0$ möglich ist, eine Stelle zu finden, ab der alle weiteren Folgenglieder innerhalb des ϵ -Schlauchs liegen. Durch eine kleine Intervention, in der die Studierenden lediglich durch eine Frage darauf aufmerksam gemacht wurden, was sie noch genauer formulieren müssen, hat die Gruppe hier enorme Fortschritte gemacht und ist der Definition nun bereits sehr nahe.

Im Anschluss daran habe ich erneut versucht, durch eine gezielte Frage die Aufmerksamkeit der Studierenden auf den Aspekt ihrer Charakterisierung zu lenken, der noch genauer formuliert werden sollte:

336 L: *Das hört sich schon super an. Jetzt nur [noch die Frage.] Für welchen Schlauch?*

...

339 L: *Also ihr habt äh, gesagt, Epsilon ist größer als null*

340 T: *Hmm*

341 C: *Hmm. ... Aber halt sehr, sehr klein. So. ... So*

Die Studierenden wollen einen einzigen, sehr kleinen ϵ -Schlauch betrachten. Sie überlegen noch eine ganze Weile weiter und kommen zu keinen neuen Erkenntnissen:

390 J: *Keine Ahnung. ... Ja doch, das ist eigentlich gar nicht so, wenn Epsilon unendlich klein, da liegen unendlich viele Werte in Epsilon*

391 C: *Unendlich viele*

392 J: *Und endlich viele ... außerhalb*

393 C: *Das haben wir schon vor drei Minuten gesagt*

394 J: *Ja das ist es, fertig. Das*

Ich habe mich daher entschieden, erneut durch eine Frage zu intervenieren, da die Studierenden an dieser Stelle etwas zu resignieren scheinen.

398 L: *Nein, es ist nur noch einfach dieses, was ist unendlich klein. Also wenn ich euch irgendeine ... Man hat ja auch nicht jede Folge unbedingt so mit ner Grafik und man kann das nicht bei allen Folgen vielleicht- sofort sehen und die Frage ist dann, wie können wir das wirklich nachprüfen, ob das also ob unendlich viele Folgenglieder in einem unendlichen kleinen Epsilonschlauch ... um eins liegen?*

399 C: *Keine Ahnung*

Die Frage, wie geprüft werden kann, ob unendlich viele Folgenglieder innerhalb eines „unendlich kleinen“ ϵ -Schlauchs liegen (und nur endlich viele außerhalb) habe ich gewählt, da genau das eben nicht möglich ist. Darauf haben die Studierenden keine Antwort. Sie stellen daraufhin noch einmal fest, dass sie nicht eine feste Zahl für ϵ angeben können:

427 T: *Dann, dann würde null Komma null eins nicht gehen, weil ich könnte ja auch sagen, irgendwie [a von n ist gleich null Komma null null eins] für alle graden n und minus null Komma null null eins für alle ungraden*

428 C: *[Wenn's fast null ist. Es liegt immer noch was drin]*

429 T: *Dann wär's wieder nicht konvergent*

...

435 J: *Ja wir- wir können ja Epsilon nie irgendwie festschießen, weil's ja dann immer, wir können's ja immer ein Beispiel ausdenken, wo es dann nicht so ist*

436 L: *Mhm*

437 J: *Also wenn wir, sobald wir Epsilon fest wählen, können wir uns immer ein Beispiel ausdenken, wo das dann wieder falsch ist. ... Also Epsilon kann bei uns nicht fest sein, sondern irgendwie unendlich klein eben*

An dieser Stelle kommt die Gruppe auch mit den gezielten Nachfragen nicht mehr weiter. Ihnen ist bewusst, dass ϵ nicht ein fester Wert ist, sie haben aber keine Idee, wie sie ihre Vorstellung eines „unendlich kleinen“ Werts für ϵ formalisieren können. Die Gruppe hatte zu diesem Zeitpunkt schon eine ganze Weile an dieser Frage diskutiert, ohne Fortschritte zu machen. Weitere vorbereitete Interventionen gab es für diese Situation nicht und spontan sind mir auch keine eingefallen. Da ich der Meinung war, dass es den Studierenden bereits gelungen war, genau die richtigen Vorstellungen zu entwickeln, habe ich ihnen den letzten noch fehlenden Aspekt schließlich selbst genannt:

451 L: *[...] Also ihr habt genau die richtigen Ideen. ... Der Trick ist einfach, dass man, damit man dieses unendlich kleine Epsilon irgendwie ... ehm ja, damit man das mit rein bekommt, sagt man einfach, man nimmt nicht, man nimmt nicht ein Epsilon, ... sondern man sagt, das muss für jedes Epsilon, was größer als null ist ... muss das ganze funktionieren*

Die Studierenden nehmen diesen Vorschlag sofort an und beginnen ihre schriftlich notierte Formulierung schließlich mit „für alle $\epsilon > 0$ “.

Insgesamt haben sich die gezielten Nachfragen bei dieser Gruppe an einigen Stellen als sehr nützlich erwiesen, denn sie haben zu enormen Erkenntnisfortschritten geführt, ohne dass ihnen etwas vorweggenommen wurde. Auf Basis der Aufgabenstellung, der vorgegebenen Folgen und verschiedener Unterstützungsangebote entwickeln die Studierenden eine Definition, die den hochschulmathematischen Ansprüchen fast genügt. Lediglich der Schritt von der Formulierung „für einen unendlich kleinen ϵ -Schlauch“ zur Formulierung „für jedes $\epsilon > 0$ “ ist damit nicht gelungen. Bei der Überarbeitung des Konzepts wäre zu überlegen, ob für diese Situation eine geeignete Intervention vorgesehen werden kann.

Gruppe 3

Bei Gruppe 3 ist deutlich eine selbstregulative Nacherfindung der Definition zu erkennen. Abgesehen von kleineren Zwischenfragen gelingt es dieser Gruppe, eigenständig nach und nach eine Eigenschaft zu formulieren, die auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht. Diese Eigenschaft ist zwar nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen 1, doch das können die Studierenden nicht wissen. Wie bereits bei einer vorherigen Leitfrage erwähnt, sollte eine zusätzliche Beispielfolge in das Konzept aufgenommen werden, um diese Schwäche des Konzepts zu beheben. Durch eine Intervention in Form eines zusätzlichen Nicht-Beispiels wird schließlich erreicht, dass die Studierenden eine Charakterisierung formulieren, die äquivalent zur üblichen Definition ist und den Anforderung an eine mathematische Definition genügt.

Zusammenfassung

Insgesamt zeigen sich zum einen deutliche Unterschiede in Bezug auf die Selbstregulation bei der Optimierung der Definitionsversuche zwischen den einzelnen Gruppen. In Situationen, in denen eine vorgeschlagene Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft, ist in einigen Fällen zu beobachten, dass die Studierenden dies eigenständig bemerken und sie die Eigenschaft dementsprechend überarbeiten. In Bezug auf den Präzisierungsgrad ist das seltener der Fall. Den Studierenden fällt oftmals nicht auf, dass von ihnen formulierte Charakterisierungen nicht genau genug sind, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können. Wenn sie der Meinung sind, dass ihre Formulierung so genau ist, dass damit bei jeder beliebigen Folge entschieden werden könnte, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht, dann hilft der in der Aufgabenstellung ergänzte Satz, dass die Formulierung so genau sein muss, dass dies möglich ist, nicht weiter.

Der zusätzliche Satz in der Aufgabenstellung soll dennoch beibehalten werden. Zum einen lässt sich dadurch den Studierenden gegenüber leichter rechtfertigen, genauere Begründungen einzufordern. Zum anderen haben die Studierenden es auch akzeptiert, wenn ich ihnen eine zusätzliche Beispielfolge oder Nicht-Beispielfolge mit der Aufforderung, bei dieser zu überprüfen, ob die von ihnen formulierte Eigenschaft als Entscheidungsregel genutzt werden kann, gegeben habe. Zusätzlich sollte die Aufgabenstellung um einen weiteren Satz ergänzt werden. Da die Studierenden teilweise bei ungenauen Formulierungen der Ansicht sind, sie selbst könnten diese als Entscheidungsregel nutzen, soll herausgestellt werden,

dass diese Entscheidungsregel objektiv sein soll. Verschiedene Personen sollen damit bei derselben Folge zu derselben Entscheidung bezüglich der Konvergenz gelangen.

Fazit

Als Abschluss der retrospektiven Analyse der Diskussionen des zweiten Durchgangs soll nun zu den einzelnen Veränderungen des Designs der Hauptaufgabe Stellung genommen werden.

Die Änderung (Ä1) bestand aus dem Austausch einer der vorgegebenen Beispielfolgen. Anstelle der durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierten Folge wurde im zweiten Durchgang die kon-

stante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ vorgegeben. Während die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bei der ersten Durchführung als nicht bedeutsam für den Erkenntnisprozess der Studierenden bewertet wurde, so hat sich die konstante Folge als nützlich erwiesen. Die Studierenden haben verschiedene Aspekte der Definition unter anderem anhand dieser Folge entdeckt. Die Folge hat außerdem den Vorteil, dass sie verhältnismäßig einfach definiert ist, da sie im Gegensatz zu den meisten übrigen vorgegebenen Beispielfolgen durch einen einzigen Term definiert ist. Es gibt also mehrere Gründe, die dafür sprechen, die konstante Folge beizubehalten.

Mit (Ä2) ist die Ergänzung der Aufgabenstellung der Hauptaufgabe um den folgenden Satz bezeichnet:

Diese Eigenschaft muss so gut formuliert werden, dass man für jede beliebige Folge entscheiden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht.

Das Ziel dieser Veränderung war, dass die Studierenden die Formulierung der Eigenschaft selbstregulativ nach und nach verbessern, so dass diese letztlich als Entscheidungskriterium genutzt werden kann. Dieses Ziel konnte durch die Veränderung nicht erreicht werden. Wie bereits bei der ersten Durchführung war eine Selbstregulation während der Erkenntnisprozesse zwar häufig erkennbar, wenn eine formulierte Eigenschaft nicht auf alle vorgegebenen Beispiele zutraf oder auf das Nicht-Beispiel zutraf, doch in Bezug auf die Genauigkeit der Formulierung war dies selten der Fall. Im Nachhinein betrachtet erscheint dies nicht verwunderlich. Die Studierenden sind oftmals der Meinung, von ihnen formulierte Eigenschaften wären als Entscheidungskriterium geeignet, auch wenn dies nicht zutreffend ist. In einem solchen Fall kann der zusätzliche Satz in der Aufgabenstellung keine Wirkung zeigen, denn sie sind der Ansicht, dass ihre Formulierung diese Anforderung erfüllt. Die Änderung (Ä2) war also nicht ausreichend, um das genannte Ziel zu erreichen. Für weitere Durchführungen des Workshops sollte die Formulierung der Aufgabenstellung erneut überarbeitet werden.

Auf die beiden Veränderungen (Ä3) und (Ä4) wird gemeinsam eingegangen, da sie eng miteinander verbunden sind. Es handelt sich zum einen um eine Überarbeitung der erwarteten Problemstellen und zum anderen um eine Überarbeitung der dafür vorgesehenen Interventionen. Die Problemstellen wurden im Vergleich zur ersten Version teilweise in mehrere Problemstellen aufgeteilt und klarer voneinander abgegrenzt. Die vorgesehenen Interventionen wurden an die veränderten Problemstellen angepasst. Bei der ersten Durchführung des Workshops sind mehrmals Situationen aufgetreten, die in

zwei der erwarteten Problemstellen eingeordnet werden konnten, für die verschiedene Interventionen vorgesehen waren. In diesen Fällen musste ich als Lehrperson spontan entscheiden, welche der Interventionen ich einsetze. Durch die Abgrenzung der Problemstellen sollten solche Situationen nicht mehr auftreten. In der Tat ist es bei der zweiten Durchführung nicht vorgekommen, dass eine Situation zu zwei verschiedenen Problemstellen zugeordnet werden konnte. In dieser Hinsicht hat sich die Änderung (Ä3) also bewährt. Durch die Aufteilung einiger Problemstellen sollte erreicht werden, dass die Interventionen noch gezielter und passgenauer eingesetzt werden können. Die bei der zweiten Durchführung aufgetretenen Situationen, in denen die Studierenden Unterstützung benötigten, ließen sich gut in die erwarteten Problemstellen einordnen. Die meisten der eingesetzten Interventionen haben die Workshopteilnehmenden in ihrem Erkenntnisprozess geeignet unterstützt. Es gab jedoch auch einen Fall, in dem eine Studiengruppe geäußert hat, dass ein eingesetztes Unterstützungsangebot ihnen nicht geholfen hat. Dies ist jedoch nicht auf die Intervention an sich zurückzuführen, sondern darauf, dass ich in der Situation vermutlich eine falsche Intervention ausgewählt habe.

Die Veränderung (Ä5) bezieht sich ebenfalls auf die vorgesehenen Interventionen. Es wurde versucht, die fiktiven Diskussionen authentischer und für die Studierenden verständlicher zu gestalten, indem Äußerungen aus den Diskussionen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer der ersten Durchführung des Workshops eingebaut wurden. Da sich bei der ersten Durchführung keine Hinweise finden ließen, dass die fiktiven Diskussionen von den Studierenden als nicht authentisch angesehen wurden, hat sich in Bezug auf diesen Aspekt keine Verbesserung zeigen können. Hingegen wurde ein Teil einer fiktiven Diskussion in der ersten Version von einer Studiengruppe als unverständlich bezeichnet. Sie haben diesen Teil der fiktiven Diskussion beim Durcharbeiten daraufhin übersprungen. Ein solches Problem ist bei der zweiten Durchführung nicht aufgetreten, es hat keine Hinweise darauf gegeben, dass Teile der fiktiven Diskussionen für die Studierenden nicht verständlich waren. Das könnte an der Überarbeitung der fiktiven Diskussionen liegen, da die Äußerungen von anderen Studierenden vermutlich näher an der Sprache der Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer sind und somit für sie leichter verständlich sind als fiktive Aussagen.

7.4 *Hypothetical Learning Trajectory* – Version 3

Auf Basis der Analysen der ersten beiden Durchführungen des Workshops wird das Konzept nun erneut überarbeitet. Unveränderte Elemente des Konzepts werden nur kurz zusammengefasst, alle neuen oder veränderten Teile werden detailliert dargestellt und begründet. Wie in der gesamten Arbeit liegt der Fokus auf dem vorbereitenden Teil des Workshops.

7.4.1 Starting Points und End Points

Die dritte Version des Workshop-Konzepts wird im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt, daher gibt es keine konkreten Workshopteilnehmenden, über deren zu erwartendes Vorwissen etwas ausgesagt werden könnte. Stattdessen kann aber formuliert werden, über welches Vorwissen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer verfügen sollten. Da der Work-

shop so konzipiert wird, dass zwischen dem vorbereitenden und dem nachbereitenden Teil mehrere Wochen Abstand liegen, wird dies für beide Workshop-Teile separat formuliert. Außerdem werden jeweils die Lernziele des Vorbereitungs- und des Nachbereitungsworkshops dargestellt.

Starting Points des Vorbereitungsworkshops

Die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer sollten Studierende einer Analysis-1-Veranstaltung sein. Vor dem vorbereitenden Teil des Workshops sollten in der Vorlesung bereits Aussagen mit den Ausdrücken „es gibt“ und „für alle“ vorgekommen sein. Außerdem sollten die Studierenden in der Vorlesung erste Definitionen kennengelernt haben. Das Thema Konvergenz und insbesondere die formale $\epsilon - N$ -Definition der Konvergenz einer Folge sollte in der Veranstaltung noch nicht behandelt worden sein. Allgemein wird davon ausgegangen, dass Studienanfänger in der Schule Folgen als Aufzählung oder Iteration kennengelernt haben. Grenzwerte sind zwar prinzipiell auch aus der Schule bekannt, jedoch im Wesentlichen im Zusammenhang mit dem Grenzverhalten von Funktionen und nicht als eigenständiges Thema. Auch sind die Beispiele konvergenter Folgen oder Funktionen hauptsächlich typische Beispiele, also solche, die monoton sind und den Grenzwert nicht annehmen. Genauer ist dies in Abschnitt 4.1.1 beschrieben.

End Points des Vorbereitungsworkshops

Die End Points des Vorbereitungsworkshops bleiben wie in den ersten beiden Versionen des Workshop-Konzepts. Wie in Abschnitt 4.1.2 detaillierter dargestellt sollen die Studienanfänger nach dem Vorbereitungsworkshop ein breites Bild konvergenter Folgen aufgebaut haben, zu dem neben typischen Beispielen monotoner Folgen, die den Grenzwert nicht annehmen, auch solche gehören, die den Grenzwert annehmen, solche, für die der Grenzwert weder eine obere noch eine untere Schranke ist, solche, die sich dem Grenzwert nicht monoton annähern und konstante Folgen. Zu dem Begriff Konvergenz sollen die Studierenden geeignete Vorstellungen aufgebaut haben wie beispielsweise, dass in jeder beliebigen Umgebung um den Grenzwert alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Die formale $\epsilon - N$ -Definition sollen die Workshopteilnehmenden kennen und in einfachen Fällen anwenden können. Abgesehen von dem Wissen zu dem konkreten Begriff sollen die Studierenden erkannt haben, dass eine mathematische Definition dazu genutzt werden kann, um zu entscheiden, ob ein Objekt die jeweilige Eigenschaft besitzt oder nicht.

Starting Points des Nachbereitungsworkshops

Am Nachbereitungsworkshop sollen nur Studierende teilnehmen, die auch am Vorbereitungsworkshop teilgenommen haben. Die End Points des Vorbereitungsworkshops sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer daher erreicht haben. Außerdem sollte in der Analysis-Vorlesung zwischen den beiden Teilen des Workshops das Thema Konvergenz von Folgen behandelt worden sein. Neben der formalen Definition der Folgenkonvergenz und verschiedenen Beispielen und Nicht-Beispielen konvergenter Folgen sollen die Studierenden die Begriffe Teilfolge, Häufungspunkte, Cauchy-Folgen, bestimmte Divergenz und Monotonie kennengelernt und verstanden haben. Verschiedene Möglichkeiten, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, wie das Anwenden der Definition, die Grenzwertsätze und

Monotonie und Beschränktheit als hinreichendes Kriterium sollten die Studierenden nicht nur in der Vorlesung gesehen, sondern auch selbst angewendet haben. Zusätzlich sollten sie auch erste Beweise im Zusammenhang mit Konvergenz gesehen haben wie beispielsweise zur Eindeutigkeit des Grenzwerts.

End Points des Nachbereitungsworkshops

Die Lernziele des Workshops bleiben wie in den beiden ersten Versionen des Workshop-Konzepts. Detailliert sind diese in Abschnitt 4.1.4 nachzulesen. Die Workshopteilnehmenden sollen ihr breites *Concept Image* zu konvergenten Folgen weiter verfestigt haben. Auch sollen sie geeignete Vorstellungen zu dem Begriff aufgebaut haben. Sie sollen verschiedene Folgen auf Konvergenz untersuchen können, das heißt sie sollen verschiedene Methoden für solche Untersuchungen kennen und auch jeweils eine geeignete Methode auswählen können. Sie sollen Beziehungen zwischen Konvergenz und anderen Begriffen kennen. Einfache Beweise im Zusammenhang mit dem Thema sollen sie sowohl nachvollziehen als auch eigenständig durchführen können, wozu auch das formale Aufschreiben gehört.

7.4.2 Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 3

Ein Überblick über die einzelnen Aktivitäten des Vorbereitungsworkshops mit der jeweiligen Sozialform und eingeplanter Zeit ist in Tabelle 7.7 zu sehen. Dieser hat sich im Vergleich zur zweiten Version des Konzepts, das in Abschnitt 7.2.2 dargestellt wurde, nicht verändert. Manche der einzelnen Aktivitäten wurden hingegen überarbeitet, darauf wird nun im Einzelnen eingegangen.

Aktivität	Sozialform	Dauer
Begrüßung		10 Min
Definition Folge	Vortrag/Unterrichtsgespräch	10 Min
Begriffsumfang Folge	Unterrichtsgespräch	15 Min
Aufgaben zu Folgen	Einzelarbeit	15 Min
Erste Betrachtung der Folgen	Einzelarbeit	20 Min
PAUSE		15 Min
Nacherfindung	Gruppenarbeit	90 Min
Besprechung der Ergebnisse	Unterrichtsgespräch	15 Min
Definition Konvergenz	Unterrichtsgespräch	5 Min

Tabelle 7.7: Überblick über den zeitlichen Verlauf des Vorbereitungsworkshops

Da es bei den vorbereitenden Aktivitäten keine Veränderungen im Vergleich zur vorherigen Version gibt, wird auf diese nicht erneut eingegangen.

Hauptaufgabe

Bei der Hauptaufgabe des Vorbereitungsworkshops schlage ich im Vergleich zur zweiten Version ein paar Veränderungen vor. Diese Veränderungen betreffen sowohl die vorge-

gebenen Beispielfolgen, die Formulierung der Aufgabenstellung als auch die erwarteten Problemsituationen und dazu vorbereiteten Unterstützungsangebote.

Veränderungen auf der Ebene der vorgegebenen Beispielfolgen

Ich schlage vor, die vorgegebenen Beispielfolgen um die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
$$g_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$
 zu ergänzen. Wie in Abschnitt 7.3.2 dargestellt, hat eine Gruppe eine Eigenschaft formuliert, die auf die Beispielfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zutrifft und auf das Nicht-Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht zutrifft, die jedoch nicht äquivalent zu der Eigenschaft Konvergenz gegen 1 ist. Diese Eigenschaft lautet, dass ab einem bestimmten n gilt, dass jedes Folgenglied entweder genau dem Grenzwert 1 entspricht oder dass der Abstand des Folgenglieds zum Grenzwert 1 kleiner ist als der Abstand des letzten Folgenglieds, das nicht gleich dem Grenzwert war. Diese Eigenschaft ist nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1, denn sie trifft auf die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen 1 konvergiert, nicht zu. Auch gibt es umgekehrt Folgen, auf welche die Eigenschaft zutrifft, die jedoch nicht gegen 1 konvergieren. Daher sollte die Menge der Beispielfolgen ergänzt werden, damit die von den Studierenden formulierte Eigenschaft nicht mehr auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. In Abschnitt 4.2.2 wurde dargestellt, welche verschiedenen Typen gegen 1 konvergenter Folgen die Menge der vorgegebenen Beispielfolgen der ersten Version des Konzepts abdeckt. Durch die Hinzunahme der Beispielfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es nun einen weiteren Typ, der unter den Folgen vertreten ist, und zwar eine Folge, für die auch für die Teilfolge der von 1 verschiedenen Folgenglieder der Abstand der Folgenglieder zu 1 ab keinem N monoton fallend ist. In dem von Przenioslo (2005) vorgeschlagenen Konzept gab es keine Beispielfolge dieses Typs. Somit gibt es mehrere Gründe, die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu ergänzen.

Insgesamt sollen den Studierenden nun also die folgenden sieben Beispiele gegen 1 konvergenter Folgen präsentiert werden:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{n+1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } b_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n \leq 125 \\ 1 & n > 125 \end{cases}$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } c_n = \begin{cases} -3 & 200000 \leq n \leq 500000 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } e_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_n = \begin{cases} 2 & n = 10 \\ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } g_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

und das von Przenioslo (2005) übernommene Nicht-Beispiel:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \begin{cases} 2 & n \text{ Vielfaches von } 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veränderungen auf der Ebene der Aufgabenstellung

Für die Aufgabe, die zum Ziel hat, dass sich die Studierenden mit den Beispielfolgen vertraut machen, schlage ich keine Veränderung der Aufgabenstellung vor. Der Vollständigkeit halber wird diese noch einmal dargestellt:

Aufgabenstellung

Ordne den Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Grafiken zu und formuliere die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Folgen.

Bei der Aufgabenstellung der eigentlichen Hauptaufgabe schlage ich hingegen mehrere Änderungen vor.

Zum einen soll nun explizit gemacht werden, dass eine Definition formuliert werden soll. Dadurch soll erreicht werden, dass die Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer die gesuchte Eigenschaft genauer formulieren. Dabei stütze ich mich auf die folgende Aussage von Alcock und Simpson (2017):

„We suggest that responses might be influenced by the prompt type: we might expect, for instance, that a request to explain would result in more idiosyncratic and imprecise responses than a request to define.“ (Alcock und Simpson, 2017, S. 8)

Die Verwendung des Begriffs „Definition“ könnte also zu präziseren Formulierungen der Eigenschaft führen. Dennoch ist einigen Studierenden vermutlich nicht bewusst, dass eine Definition derart präzise formuliert sein soll, dass sie als objektives Entscheidungskriterium genutzt werden kann. Einige Studierende der beiden Durchführungen des Workshops haben zwischenzeitlich Eigenschaften formuliert, von denen sie selbst der Meinung waren, dass sie diese als Entscheidungskriterium nutzen könnten. Eine andere Person wäre mit derselben Formulierung der Eigenschaft jedoch möglicherweise zu anderen Entscheidungen bezüglich der Konvergenz einer Folge gegen 1 gelangt. Daher sollte die Anforderung, dass irgendjemand, dem die Formulierung der Eigenschaft gegeben wird, diese als objektives

Entscheidungskriterium benutzen kann, in der Aufgabenstellung explizit gemacht werden.

Des Weiteren schlage ich vor, zu ergänzen, dass die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt werden soll. Die beobachteten Studierenden haben vielfach Eigenschaften formuliert, in denen mehrere Bedingungen durch „oder“ miteinander verbunden wurden. Da die Definition, welche die Teilnehmenden nacherfinden sollen, kein „oder“ enthält, und es auch schwieriger wäre, eine solche Definition als Entscheidungskriterium zu verwenden, soll nun direkt vorgegeben werden, dass die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt werden soll.

Außerdem schlage ich vor, zu ergänzen, dass die hochschulmathematische Definition gesucht ist, um den Studierenden deutlich zu machen, dass die Definition, die sie möglicherweise in der Schule kennengelernt haben, angepasst werden muss, wie auch ihr *Concept Image* zu konvergenten Folgen. Der Grund für diese vorgeschlagene Veränderung ist, dass es bei den ersten Durchführungen des Workshops einzelne Studierende gab, die sich nicht auf die Aufgabenstellung eingelassen haben. Diese haben an ihrem zuvor bereits vorhandenen *Concept Image* zu konvergenten Folgen festgehalten, das nicht alle der hier vorgegebenen Beispielfolgen umfasst hat. Dadurch haben sie gar nicht versucht, eine gemeinsame Eigenschaft aller vorgegebenen Beispielfolgen zu formulieren, weil sie überhaupt nicht akzeptiert haben, dass es sich bei allen vorgegebenen Beispielfolgen tatsächlich um Beispiele gegen 1 konvergenter Folgen handelt. Einzelne Studierende der ersten Durchführung des Workshops haben den Konflikt für sich gelöst, indem sie davon ausgegangen sind, dass es sich bei dem Begriff, den sie nacherfinden sollten, und dem Begriff, zu dem sie ein Vorverständnis besaßen, um zwei verschiedene Begriffe handelt. So fiel es ihnen leichter, zu akzeptieren, dass die Beispielfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als gegen 1 konvergent vorgegeben waren.

Ein weiteres Ergebnis der Analysen der Nacherfindungsprozesse ist, dass die Studierenden nicht unbedingt selbstregulativ vorgegangen sind. Wenn sie eine Eigenschaft formuliert haben, dann haben sie in den seltensten Fällen systematisch überprüft, ob diese auf alle vorgegebenen Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht zutrifft. Dadurch haben sie manchmal gar nicht bemerkt, dass sie eine Eigenschaft formuliert haben, die nicht als Charakterisierung geeignet war. Ich schlage vor, dass sie dazu nun explizit angeleitet werden. So sollen sie sowohl überprüfen, ob alle vorgegebenen Beispielfolgen die jeweils formulierte Eigenschaft besitzen als auch, ob das Nicht-Beispiel die Eigenschaft nicht besitzt. Es soll also explizit gemacht werden, dass das systematische Überprüfen der formulierten Eigenschaft Teil der Aufgabe ist. Außerdem wird vorgegeben, dass sie, wenn sie beim Überprüfen feststellen, dass ihre Formulierung nicht geeignet ist, diese überarbeiten sollen.

All diese Veränderungen sind in der folgenden Formulierung der Aufgabenstellung berücksichtigt:

Arbeitsauftrag

Wir wollen die hochschulmathematische Definition der Konvergenz einer Folge gegen 1 entdecken. Der Begriff soll dabei so definiert werden, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen den Grenzwert 1 sind und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

Versucht, eine gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht besitzt, durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Diese Bedingung muss so gut formuliert werden, dass jemand, dem diese Formulierung gegeben wird, für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Jeder, dem diese Formulierung gegeben wird, soll damit zu derselben Entscheidung gelangen, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt.

Wenn ihr der Meinung seid, eine geeignete Eigenschaft formuliert zu haben, prüft für alle vorgegebenen Beispielfolgen, ob sie die formulierte Eigenschaft besitzen. Prüft auch, ob die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft nicht besitzt. Falls etwas davon nicht der Fall ist, überarbeitet die formulierte Eigenschaft.

Hypothetischer Erkenntnisverlauf

Auch der hypothetische Erkenntnisverlauf wird in einer dritten Version hier präsentiert, um darauf aufbauend die erwarteten Problemstellen und vorgesehenen Interventionen darzustellen. Dieser wurde verglichen mit den ersten beiden Versionen ebenfalls überarbeitet, da die Studierenden teilweise anders vorgegangen sind, als vor der Durchführung des Workshops antizipiert wurde. Es hat sich vor allem die grundlegende Struktur des hypothetischen Erkenntnisverlaufs verändert. Diese Überarbeitung ergibt sich überwiegend aus der Analyse der Erkenntnisverläufe der ersten Durchführung des Workshops. Es hat sich gezeigt, dass die beobachteten Studierenden nicht bewusst mit einer Teilmenge der Beispielfolgen begonnen haben, für diese eine gemeinsame Eigenschaft formuliert haben, dann weitere Beispiele hinzugezogen und die formulierte Eigenschaft daran getestet haben. Stattdessen haben die Studierenden versucht, von Anfang an alle vorgegebenen Beispielfolgen einzubeziehen und im weiteren Verlauf ging es zum einen darum, die formulierte Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken und zum anderen, die Formulierung zu präzisieren. Hier wird darüber zunächst ein Überblick gegeben, auf die zu erwartenden Problemsituationen und dafür vorgesehenen Unterstützungsangebote wird im Anschluss genauer eingegangen.

1. Phase: Auseinandersetzen mit den Beispielen und begriffliche Fassung charakteristischer Merkmale

Die Studierenden beschäftigen sich mit den Beispielfolgen. Dabei entdecken sie, dass einige der Folgen sich dem Wert 1 annähern ohne ihn zu erreichen, andere Folgen erreichen den Wert 1 und bei einer Folge handelt es sich um eine Art Mischform, da diese aus zwei Teilfolgen besteht, von denen die Folgenglieder der einen sich asymptotisch annähern und die der anderen 1 erreichen. Außerdem bemerken sie, dass das Verhalten am Anfang irrelevant dafür ist, ob eine Folge konvergent genannt wird, es ist entscheidend, ob die Folge ab einer bestimmten Stelle gewisse Eigenschaften besitzt. Die Studierenden stellen weiter fest, dass der Abstand der

Folgenglieder zum Wert 1 mit wachsendem n nicht bei allen Beispielfolgen monoton fallend ist. Sie entdecken außerdem, dass manche Beispielfolgen sich dem Wert 1 von unten annähern, andere nähern sich von oben an und bei einer Beispielfolge sind die Folgenglieder immer abwechselnd kleiner und größer als der Wert 1. Nicht immer werden alle genannten Aspekte eigenständig entdeckt, in manchen Fällen sind Interventionen nötig. Dazu genügt es meist, die Studierenden aufzufordern, eine bestimmte Beispielfolge zu betrachten. Das Resultat dieser Phase ist häufig eine Charakterisierung, in der die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wird, die durch „oder“ miteinander verbunden sind. Mit einer solchen Charakterisierung sind die Studierenden teilweise zufrieden. Damit sie zur nächsten Phase übergehen ist dann ein Impuls nötig, der aus einer Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken, bestehen kann.

2. Phase: *Finden einer einzigen Charakterisierung, die auf alle Beispiele zutrifft*

Der Übergang zu einer einzigen Eigenschaft, welche die Beispielfolgen charakterisiert, kann durch die Betrachtung des Abstands der Folgenglieder zu 1 oder Umgebungen um 1 gelingen. Bei diesem Schritt ist oft eine Intervention notwendig. Dazu eignet sich die zweite fiktive Diskussion. Das Resultat dieser Phase ist meist eine Charakterisierung, die nicht so genau formuliert ist, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte. Auch hier kommt es vor, dass die Studierenden mit dem Resultat zufrieden sind und ein Impuls gegeben werden muss, damit zur nächsten Phase übergegangen wird. Das kann eine Aufforderung sein, die Eigenschaft so genau zu formulieren, dass damit entschieden werden kann, ob eine Folge gegen 1 konvergiert oder nicht.

3. Phase: *Optimierung der Formulierung, so dass diese so genau ist, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte*

Zunächst ist zu erwähnen, dass diese Phase sich teilweise mit der vorherigen Phase vermischt. Ein großer Schritt in dieser Phase ist der Übergang zum sogenannten umgekehrten Denken nach Roh (2005). Das bedeutet, dass die Studierenden erkennen, dass zuerst ein beliebiger Wert für ϵ gewählt wird und erst im Anschluss – in Abhängigkeit von ϵ – eine natürliche Zahl N , so dass für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ eine bestimmte Bedingung erfüllt ist. Damit hängt eng zusammen, dass jedes beliebige $\epsilon > 0$ berücksichtigt wird. Sofern das in den vorherigen Phasen noch nicht geschehen ist, wird hier außerdem formuliert, dass die Bedingung ab einem N gefordert wird. Die Bedingung wird ebenfalls in dieser Phase formuliert, und zwar sollen sich die Folgenglieder innerhalb der ϵ -Umgebung befinden beziehungsweise es soll gelten $|a_n - a| < \epsilon$. Bei all diesen Aspekten benötigen die Studierenden vielfach Unterstützung. Diese kann daraus bestehen, dass ihnen zu den Graphen aller vorgegebener Folgen sogenannte ϵ -Streifen ausgehändigt werden. Schließlich werden alle genannten Aspekte zu einer Charakterisierung verbunden. Das Resultat dieser Phase lautet etwa, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Folgenglieder ab irgendeinem N alle innerhalb der ϵ -Umgebung liegen. Häufig wird bis zu diesem Punkt alles mündlich diskutiert und die Studierenden haben noch nichts aufgeschrieben. Dann ist meist ein Impuls nötig, dass sie die Eigenschaft nun aufschreiben sollen, damit sie zur nächsten Phase übergehen.

4. Phase: *Aufschreiben der finalen Charakterisierung (in formal-mathematischer Sprache)*

Die Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben, führt häufig zu einer Präzisierung der Formulierung, selbst wenn nicht vorgegeben wird, dass diese formal-mathematisch aufgeschrieben werden soll. Ein Aspekt, der teilweise in dieser Phase noch präzisiert wird, ist der Übergang von der Formulierung, dass die Folgenglieder innerhalb der ϵ -Umgebung liegen zur Bedingung $|a_n - 1| < \epsilon$. Eine weitere mögliche Präzisierung in dieser Phase ist „ $\exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N \dots$ “ anstelle des Ausdrucks „ab einem N “. Dazu gehört auch, dass zwei verschiedene Variablen für die natürliche Zahl N und den variablen Index der Folge verwendet werden. Auch hier können Interventionen nötig sein. Das finale Ergebnis entspricht meist der üblichen formalen $\epsilon - N$ -Definition.

Diese Phasen sind nicht strikt als Reihenfolge aufzufassen. Es ist damit zu rechnen, dass sich Phasen vermischen, dass zwischen den Phasen hin und her gesprungen wird und dass Phasen mehrfach durchlaufen werden oder übersprungen werden. Dadurch können sich verschiedene Erkenntnisverläufe ergeben, die alle in dieses Phasenmodell eingeordnet werden können. An verschiedenen Stellen können Interventionen nötig sein, auf die im nächsten Abschnitt genauer eingegangen wird. Es wäre auch denkbar, dass aufgrund der überarbeiteten Aufgabenstellung in Zukunft manche Problemstellen nicht mehr oder zumindest seltener auftreten, wie beispielsweise, dass gar nicht versucht wird, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken oder, dass die Eigenschaft nicht so genau formuliert wird, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte.

Veränderungen bezüglich der Problemsituationen und Unterstützungsangebote

In dem hypothetischen Erkenntnisverlauf wurde in jeder der vier Phasen bereits angemerkt, dass es Problemstellen geben kann, bei denen die Studierenden Unterstützung benötigen. Diese erwarteten Problemstellen und die dazu vorgesehenen Unterstützungsangebote werden nun nach den Phasen angeordnet zunächst in Tabelle 7.8 als Übersicht dargestellt und im Anschluss wird jeweils genauer auf die einzelnen Veränderungen eingegangen.

Situation	Intervention
(1.1) Die Studierenden finden keinen Ansatz, sie sind möglicherweise mit der Menge an Beispielen überfordert.	strategische Intervention: Es soll der Tipp gegeben werden, erst einmal mit weniger Beispielen zu beginnen und eine gemeinsame Eigenschaft von diesen zu finden. Dann kann überprüft werden, ob die weiteren Beispiele diese Eigenschaft auch erfüllen. <i>nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht:</i> Ausgeben der ersten fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten.

(1.2) Die Studierenden formulieren eine nicht passende Eigenschaft, prüfen jedoch nicht selbständig, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht.	strategische Intervention: <i>Überprüft mal, ob eure Eigenschaft auf alle Beispielfolgen zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht.</i> Falls das nicht ausreicht: Hinweis auf die Beispielfolge, auf welche die Eigenschaft nicht zutrifft bzw. auf das Nicht-Beispiel, falls die Eigenschaft auf dieses zutrifft
(2.1) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass die Folgenglieder sich 1 annähern oder 1 erreichen.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention, falls die vorherige Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der zweiten fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten. nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben
(2.2) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird oder 0 bleibt.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls die strategische Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention, falls die vorherige Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der dritten fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten. nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben

(2.3) Es gelingt nicht, eine gemeinsame Eigenschaft zu finden. Stattdessen klassifizieren die Studierenden die Folgen in mehrere Gruppen, wobei sie sich unter keine der Situationen (2.1) und (2.2) einordnen lässt.	Hier muss je nach genauer Situation spontan interveniert werden Falls die Formulierung ungenau ist zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben
(3.1) Die Eigenschaft wird als Annäherung an 1 beschrieben.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention, falls die vorherige Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der vierten fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten. nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben
(3.2) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention, falls die vorherige Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der fünften fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten. nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben

(3.3) Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 für große n beliebig klein wird.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben der ϵ-Streifen nächste Intervention, falls die vorherige Intervention nicht ausreicht: Ausgeben der sechsten fiktiven Diskussion (siehe Abschnitt 7.2.2) mit der Aufforderung, diese durchzuarbeiten und jeweils die Fragen zu beantworten. nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben
(3.4) Die Eigenschaft ist nicht so genau formuliert, dass damit bei jeder beliebigen Folge eindeutig entschieden werden kann, ob sie diese Eigenschaft erfüllt oder nicht, und die Formulierung lässt sich unter keine der Situationen (3.1), (3.2) und (3.3) einordnen.	zunächst Frage: <i>Kann man mit eurer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht?</i> nächste Intervention, falls Frage nicht ausreicht: Ausgeben von ϵ-Streifen nächste Intervention: Aufforderung, die Eigenschaft aufzuschreiben
(4.1) Die Studierenden haben (mündlich) formuliert, dass die Bedingung für immer kleiner werden des oder „unendlich kleines“ ϵ gelten soll und es gelingt ihnen nicht, diesen Aspekt formal-mathematisch durch $\forall \epsilon > 0$ auszudrücken.	Frage: <i>Wie würdet ihr nachweisen, dass eine Folge die von euch formulierte Eigenschaft besitzt?</i>
(4.2) Die Studierenden haben (mündlich) formuliert, dass die Bedingung ab einem n gelten soll und es gelingt ihnen nicht, diesen Aspekt formal-mathematisch durch $\exists n_0 \in \mathbb{N} \dots \forall n \geq n_0$ auszudrücken.	Nachfragen: <i>Muss die Bedingung für jeden Streifen bzw. jedes ϵ ab demselben n gelten? Muss die Bedingung für jede Folge ab demselben n gelten?</i>

(0)	Die formulierte Eigenschaft trifft auf alle vorliegenden Beispiele zu und auf das Nicht-Beispiel nicht. Die Eigenschaft ist jedoch nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1.	zunächst Lob dafür, dass sie die Aufgabenstellung erfüllt haben, dann Nennen eines geeigneten weiteren (Nicht-)Beispiels einer gegen 1 konvergenten Folge, und Aufforderung, nun eine Eigenschaft zu finden, die auch das zusätzliche Beispiel umfasst bzw. das zusätzliche Nicht-Beispiel ausschließt.

Tabelle 7.8: Übersicht über die vorgesehenen Interventionen

Die Situationen mit den Nummerierungen (1.x) sind in der ersten Phase des hypothetischen Erkenntnisverlaufs zu erwarten, die mit den Bezeichnungen (2.x) in der zweiten Phase und so weiter. Die Situation (0) lässt sich keiner der vier Phasen zuordnen.

Die Situationen (1.1), (1.2) und (0) samt den dazu vorgesehenen Unterstützungsangeboten wurden unverändert übernommen, weshalb an dieser Stelle nicht noch einmal darauf eingegangen wird.

Situation (2.1)

Die Situation (2.1) war bereits in der zweiten Version des Konzepts vorhanden, und zwar unter der Bezeichnung (C1). Ich schlage jedoch Veränderungen bei den Unterstützungsangeboten für diese Situation vor. Eine Problemstelle wird hierunter eingeordnet, falls die Studierenden formulieren, dass die Folgenglieder sich 1 annähern oder 1 erreichen, und sie entweder mit dieser Formulierung zufrieden sind oder sie zwar verbessern möchten, aber keine Idee haben, wie sie das machen können. Bei einer solchen Formulierung fällt zum einen auf, dass die Eigenschaft nicht durch eine einzige Bedingung ausgedrückt ist und zum anderen, dass sie nicht genau genug formuliert ist, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können. Zuvor wurden die Studierenden in einer solchen Situation zunächst dazu aufgefordert, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Diese Aufforderung haben sie jedoch in Frage gestellt. Sie selbst haben die Tatsache, dass die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen formuliert war, nicht als Mangel angesehen. Dieser Impuls hat sich also nicht als zielführend erwiesen. Wenn die Studierenden die Eigenschaft derart überarbeiten würden, dass sie genau genug wäre, um damit objektiv entscheiden zu können, ob eine Folge diese besitzt oder nicht, würden sie möglicherweise automatisch zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung übergehen oder es wäre anschließend zumindest einfacher, die beiden Bedingungen zu einer zu verbinden. Daher soll, sofern die Studierenden mit einer solchen Formulierung zufrieden sind, die Frage gestellt werden, ob damit bei jeder beliebigen Folge objektiv entschieden und nachgewiesen werden kann, ob die Eigenschaft auf sie zutrifft oder nicht. Falls dieser Impuls nicht ausreicht oder die Studierenden mit ihrer Formulierung ohnehin nicht zufrieden sind, aber keine Idee haben, wie sie diese verbessern können, so sollen als nächstes Unterstützungsangebot die sogenannten ϵ -Streifen ausgegeben werden. Auf Veränderungen des Einsatzes der ϵ -Streifen wird eingegangen, nachdem die weiteren Unterstützungsangebote für diese Situation thematisiert wurden.

Als weitere Intervention kann den Studierenden bei Bedarf die zweite fiktive Diskussion gegeben werden, die bereits in der zweiten Version des Workshop-Konzepts vorgesehen war. Auf diese wird hier nicht noch einmal eingegangen.

Falls die Studierenden die Eigenschaft im Anschluss weiterhin nicht genau genug formuliert haben, um sie als Entscheidungskriterium nutzen zu können, so sollen sie dazu aufgefordert werden, die Eigenschaft aufzuschreiben. Ein solcher Impuls, der bei der ersten Durchführung des Workshops spontan eingesetzt wurde, hat stets zu einer Präzisierung der Formulierung geführt. Daher schlage ich vor, diesen Impuls von nun an als Unterstützungsangebot vorzusehen.

Veränderung des Unterstützungsangebots der ϵ -Streifen

Prinzipiell waren die ϵ -Streifen bereits in den ersten beiden Versionen des Workshop-Konzepts als Intervention vorgesehen. Den Studierenden wurde bei der Ausgabe der Streifen lediglich gesagt, dass sie diese zusammen mit den Graphen der Beispielfolgen benutzen können und schauen sollen, ob ihnen das weiterhilft. Diese Intervention hat teilweise nicht ausgereicht, um die Studierenden auf neue Ideen zu bringen. Daher soll nun zusammen mit den ϵ -Streifen ein Zettel mit Anweisungen und Fragen ausgegeben werden. Mit den ϵ -Streifen können prinzipiell verschiedene Ziele verfolgt werden. Zum einen könnten die Studierenden durch die Streifen auf die Idee kommen, den Abstand der Folgenglieder zu 1 oder Umgebungen um 1 zu betrachten. Das wäre bei Situation (2.1) und Situation (3.1) ein sinnvoller nächster Schritt. Ein weiteres Ziel des Einsatzes der ϵ -Streifen kann die Entdeckung sein, dass bei den vorgegebenen Beispielen im Gegensatz zu dem Nicht-Beispiel ab einem n jeweils alle Folgenglieder innerhalb der ϵ -Streifen liegen. Gleichzeitig könnten die Studierenden dabei bemerken, dass es sowohl von der jeweiligen Folge als auch von der Breite des Streifens abhängt, ab welchem n das der Fall ist. Eine alternative, ähnliche Entdeckung wäre, dass sich bei den Beispielfolgen jeweils nur endlich viele Folgenglieder außerhalb jedes ϵ -Streifens befinden, während bei dem Nicht-Beispiel bei manchen ϵ -Streifen unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Streifens befinden. Mit dieser Erkenntnis eng verbunden ist der Schritt zum umgekehrten Denken (Roh, 2005). Es werden nicht (mehr) für wachsendes n die Folgenglieder betrachtet und wie sich deren Abstand zum Grenzwert 1 verändert, sondern zu einer ϵ -Umgebung wird betrachtet, ob es einen Index n_0 gibt, ab dem sich alle weiteren Folgenglieder innerhalb der ϵ -Umgebung befinden. Dieses umgekehrte Denken ist bei allen Situationen (2.1), (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.3) und (3.4) noch nicht vorhanden. Der Schritt zum umgekehrten Denken ist also ein weiteres Ziel dieser Intervention.

Die folgenden Anweisungen und Fragen sollen den Studierenden zu den ϵ -Streifen gegeben werden:

Ihr habt transparente Streifen verschiedener Breite bekommen, die ihr auf die Graphen der Folgen legen könnt. Überlegt euch als erstes, wo ihr die eingezeichnete Mittellinie der Streifen hinlegt.

Nehmt euch erst einmal einen der transparenten Streifen. Legt diesen Streifen nacheinander auf die Graphen der Beispielfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Der Streifen sollte dabei jeweils so auf dem Graphen platziert werden, dass die Mittellinie auf Höhe des Wertes 1 verläuft. Fallen euch Unterschiede zwischen den Beispielfolgen und der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf?

Wie ist es, wenn ihr das gleiche mit den anderen Streifen macht?

Wenn ihr die Streifen auf die Beispielfolgen und auf die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ legt, gibt es dann jeweils Folgenglieder, die außerhalb des Streifens liegen? Um wie viele Folgenglieder handelt es sich dabei?

Diese vier Anweisungen und Fragen zu den ϵ -Streifen sollen auf einzelnen Karten stehen. Die Studierenden sollen mit der ersten Karte beginnen und die anderen Karten zunächst nicht betrachten. Falls es ihnen danach bereits gelingt, die gesuchte Eigenschaft zu formulieren, dann sollen sie die weiteren Karten nicht benutzen. Falls ihnen das noch nicht gelingt, dann können sie sich die nächste Karte durchlesen und wieder versuchen, die Eigenschaft zu formulieren.

Die ϵ -Streifen als Intervention haben auch Grenzen, die hier nicht unerwähnt bleiben soll. Da immer nur endlich viele ϵ -Streifen betrachtet werden können, gibt es einen kleinsten beziehungsweise schmalsten der betrachteten ϵ -Streifen. Die Studierenden könnten daher glauben, dass die gesuchte Eigenschaft dadurch definiert werden kann, dass es einen Index N gibt, so dass alle weiteren Folgenglieder sich innerhalb des kleinsten ϵ -Streifens befinden. Bei einer generischen Betrachtung der vorgegebenen Beispielfolgen tritt dieser Fall jedoch nicht ein.

Eine weitere Formulierung, die aus der Betrachtung der ϵ -Streifen resultieren könnte, wäre, dass für immer kleiner werdende Streifen jeweils ein n_0 existiert, so dass ab diesem n_0 alle weiteren Folgenglieder innerhalb des jeweiligen ϵ -Streifens liegen. Dieser Fall ist unter Situation (4.1) beschrieben. Die Vorstellungen, welche die Studierenden in einem solchen Fall aufgebaut haben, sind absolut adäquate Vorstellungen zu konvergenten Folgen, es stellt sich lediglich die Frage, wie die derart formulierte Eigenschaft nachgewiesen werden sollte.

Situation (2.2)

Die Situation (2.2) war in der zweiten Version des Workshop-Konzepts unter der Bezeichnung Situation (C2) bereits vorhanden. Wie schon bei der Situation (2.1) ist die Eigenschaft zum einen nicht durch eine einzige Bedingung ausgedrückt und zum anderen ist sie nicht genau genug formuliert. Die vorgesehenen Interventionen sind daher ähnlich wie bei Situation (2.1) und weichen zum Teil von denen aus der zweiten Version des Workshop-Konzepts ab. Wie bei Situation (2.1) soll die Intervention nun darauf abzielen, dass die Eigenschaft genauer formuliert wird, anstatt anzuregen, dass die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird. Die Gründe dafür wurden bereits bei Situation (2.1) dargelegt. Falls die Studierenden noch gar nicht versucht haben, die Eigenschaft so genau zu formulieren, dass sie als objektives Entscheidungskriterium genutzt werden kann, so sollen sie zunächst gefragt werden, ob dies möglich ist. Mit der ungenauen Formulierung „klein“ ist dies nicht der Fall. Sollten die Studierenden keine Idee haben, wie sie die Eigenschaft genauer formulieren können, so sollen die ϵ -Streifen mit der zuvor

beschriebenen Veränderung eingesetzt werden. Das Ziel dieser Intervention wäre hier der Schritt zum umgekehrten Denken. Falls die ϵ -Streifen dazu nicht ausreichen, so kann zusätzlich die dritte fiktive Diskussion eingesetzt werden, die in Abschnitt 7.2.2 zu finden ist und nicht verändert wird. Ist die Formulierung nach der Durcharbeitung dieser fiktiven Diskussion weiterhin ungenau, so sollen die Studierenden dazu aufgefordert werden, die von ihnen formulierte Eigenschaft aufzuschreiben. Auch für diesen Impuls wurden bereits bei Situation (2.1) die Gründe dargelegt.

Situation (2.3)

Situation (2.3) war unter der Bezeichnung (C3) bereits in der zweiten Version der *Hypothetical Learning Trajectory* formuliert. Bei den Unterstützungsangeboten schlage ich die gleichen Veränderungen vor wie schon bei den Situationen (2.1) und (2.2).

Situation (3.1) bis (3.4)

Die Situationen (3.1) bis (3.4) wurden ebenfalls unverändert übernommen, doch ich schlage jeweils Veränderungen bei den Unterstützungsangeboten vor. Der veränderte Einsatz der ϵ -Streifen wurde bereits dargestellt. Die vierte, fünfte und sechste fiktive Diskussion werden als mögliche weitere Unterstützungsangebote beibehalten. Ist die Formulierung anschließend weiterhin zu ungenau, um als Entscheidungskriterium dienen zu können, so sollen die Studierenden dazu aufgefordert werden, die Eigenschaft aufzuschreiben.

Situation (4.1)

Diese Situation wurde im Vergleich zu der vorherigen Version der *Hypothetical Learning Trajectory* ergänzt. Unter diese Situation soll einsortiert werden, wenn die Studierenden als Eigenschaft formuliert haben, dass eine geeignete Bedingung für immer kleiner werdendes oder „beliebig kleines“ ϵ beziehungsweise ϵ -Streifen gelten soll. Als Unterstützungsangebot schlage ich vor, den Studierenden die Frage zu stellen, wie sie nachweisen würden, dass eine Folge diese Eigenschaft besitzt. Es ist nicht möglich, ein einziges beliebig kleines ϵ wählen, um die so formulierte Eigenschaft zu überprüfen. Würde man versuchen, die Bedingung für immer kleiner werdendes ϵ nachzuweisen, so würde man vermutlich mit irgendeinem Wert für ϵ beginnen, sukzessive immer kleiner werdende Werte wählen und jeweils die Bedingung überprüfen. Das müsste theoretisch unendlich fortgeführt werden. Durch die Nachfrage, wie sie die Eigenschaft nachweisen würden, soll erreicht werden, dass den Studierenden auffällt, dass ihre Formulierung für den Nachweis nicht gut geeignet ist und sie diese präzisieren beziehungsweise formal-mathematisch operationalisieren.

Situation (4.2)

Auch die Situation (4.2) wurde ergänzt. Diese liegt vor, wenn eine Studentengruppe formuliert hat, dass eine geeignete Bedingung ab einem n gelten soll und es ihnen lediglich nicht gelingt, dies formal durch „ $\exists N \in \mathbb{N} \dots \forall n \geq N$ “ auszudrücken. Wie schon bei der zuvor genannten Situation schlage ich hier vor, die Studierenden zu fragen, wie sie die Eigenschaft bei einer beliebigen Folge nachweisen würden. Für einen solchen Nachweis ist es nötig, zu zeigen, dass es für jeden Wert von ϵ eine solche natürliche Zahl N gibt. Wenn die Studierenden dies erkannt haben, gelingt es ihnen möglicherweise, die Operationalisierung in der Definition vorzunehmen.

Da weder bei den abschließenden Aktivitäten des Vorbereitungsworkshops noch bei den Aktivitäten des Nachbereitungsworkshops Veränderungen im Vergleich zur zweiten Version des Konzepts vorgeschlagen werden, werden diese nicht noch einmal dargestellt, sondern sind in Abschnitt 7.2.2 nachzulesen.

8 Zusammenfassung und Diskussion

In Abschnitt 8.1 werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Bezug auf die formulierten Ziele und Forschungsfragen zusammengefasst. Anschließend wird in Abschnitt 8.2 thematisiert, welchen Beitrag diese Arbeit zur mathematikdidaktischen Forschung leistet. In Abschnitt 8.3 wird die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse diskutiert. Die Arbeit schließt mit Abschnitt 8.4, in dem Möglichkeiten für anknüpfende Forschungsstudien aufgezeigt werden.

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Zu Beginn der Arbeit wurde festgestellt, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule für viele Mathematikstudierende problematisch ist, was sich unter anderem in hohen Studienabbruch- und -fachwechselquoten widerspiegelt. Bei dem Begriff des Grenzwerts von Folgen kommt hinzu, dass in der Schule eher intuitive Vorstellungen aufgebaut werden, und der Begriff an der Universität formal eingeführt wird, so dass *Concept Image* und – sofern vorhanden – *Concept Definition* der Studienanfängerinnen und -anfänger angepasst werden müssen. Forscherinnen und Forscher wie Alcock und Simpson (2017) haben Zweifel daran, dass eine Vorlesung in der „Definition - Satz - Beweis“-Form erreicht, dass vorhandene *Concept Images* derart angepasst werden, dass sie zur allgemein üblichen Definition des Konzepts passen.

Ein Ziel dieser Arbeit war es, die Vorstellungen und Kenntnisse zum Begriff der Folgenkonvergenz von Mathematikstudierenden nach der Behandlung des Themas in der Analysis-1-Vorlesung zu analysieren. Dabei sollte ein Fokus der Untersuchung sein, inwiefern Fehlvorstellungen, die aus der Forschung von Schülerinnen und Schülern, College-Studierenden aus den USA oder Studierenden anderer mathemathikhaltiger Fächer zu Folgen und Konvergenz bekannt sind, bei den Mathematikstudierenden ebenfalls aufzufinden sind. Außerdem sollte der Frage nachgegangen werden, inwiefern die Studierenden ein Verständnis der formalen Definition der Konvergenz aufgebaut haben. Des Weiteren sollte herausgefunden werden, wie groß der Zusammenhang zwischen den Vorstellungen und Kenntnissen nach der Behandlung des Themas in der Vorlesung und dem Vorwissen zu Folgenkonvergenz und dafür relevanten Themengebieten wie Funktionen oder Unendlichkeit ist. Zur Beantwortung dieser Fragen wurde eine quantitative Teilstudie durchgeführt. Zum einen wurde eine Art „Vortest“ entwickelt, in dem das Vorwissen der Studienanfängerinnen und -anfänger vor der Behandlung von Folgen und Konvergenz in der Analysis-1-Vorlesung erhoben wurde. In einem ebenfalls selbst entwickelten „Nachtest“ wurden nach der Behandlung des Themenbereichs die Vorstellungen und Kompetenzen zum Konvergenzbegriff erfasst. Die Ergebnisse dieser Teilstudie werden in Abschnitt 8.1.1 zusammengefasst.

Ein weiteres Ziel der Arbeit bestand in der Entwicklung eines theoretisch fundierten Konzepts für einen Workshop, in dem Studierende angeleitet werden, die Definition der Konvergenz nachzuerfinden. Dazu wurden verschiedene vorhandene Interventionskonzepte aufgearbeitet, aus denen jeweils Elemente übernommen, gegebenenfalls angepasst und zu einer ersten Version eines Workshop-Konzepts zusammengefügt wurden. Dieses entwickelte Konzept sieht vor, dass den Studierenden eine Menge von Beispielen konvergenter Folgen und ein Nicht-Beispiel vorgegeben wird, dass sie durch eine Aufgabenstellung dazu aufgefordert werden, die Eigenschaft der Konvergenz basierend auf den vorgegebenen Beispielen nachzuerfinden, und dass sie bei Bedarf vorbereitete Unterstützungsangebote erhalten. Ein wesentlicher Teil des Konzepts wurde von Przenioslo (2005) übernommen, die eine solche Aufgabe laut eigenen Angaben mehrfach durchgeführt, jedoch nie durch eine wissenschaftliche Studie begleitet hat. Nach dem Design-Based-Research-Ansatz wurden im Rahmen dieser Arbeit hypothetische Erkenntnisprozesse antizipiert, bevor die erste Version des Workshop-Konzepts erprobt wurde. Basierend auf den Erfahrungen der ersten Durchführung wurden zunächst eher pragmatisch einige Veränderungen am Konzept vorgenommen, bevor diese zweite Version ebenfalls erprobt wurde. Anschließend wurde eine retrospektive Analyse durchgeführt, um zu untersuchen, ob das Konzept geeignet ist, Studierende zur Nacherfindung der Definition anzuleiten, und ob gegebenenfalls Modifikationen sinnvoll sind. Diese Modifikationen resultierten in der dritten Version des Workshop-Konzepts. Die Ergebnisse dazu werden in Abschnitt 8.1.2 zusammengefasst.

Schließlich wurden die bereits erwähnten Testinstrumente ebenfalls genutzt, um den Workshop zu evaluieren. An der ersten Durchführung des Workshops hat ein Teil der Studierenden aus einer Analysis-1-Vorlesung teilgenommen. Den „Vortest“ vor der Behandlung des Themenbereichs Folgen und Konvergenz und den „Nachtest“ nach der Behandlung des Themas und der Durchführung des Workshops haben nicht nur die Teilnehmenden des Workshops bearbeitet, sondern alle Studierenden aus der Vorlesung. So wurde untersucht, ob sich unter Berücksichtigung des Vorwissens in Form der Fähigkeiten im „Vortest“ ein Unterschied zwischen den Fähigkeiten der Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer und den übrigen Studierenden im „Nachtest“ nachweisen lässt. Auf die Ergebnisse dieser Analyse wird in Abschnitt 8.1.3 eingegangen.

8.1.1 Analysen der Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff

Ein Ziel dieser Arbeit bestand darin, dass die Kenntnisse und Vorstellungen der Studierenden im Anschluss an die Behandlung dieses Themas in der Vorlesung analysiert werden sollten. Umgesetzt wurde dies durch einen Test zur Konvergenz von Folgen, der von allen anwesenden Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Analysis-1-Vorlesung nach Abschluss des Themas bearbeitet wurde. Dazu wurde in Abschnitt 5.2.3 ein Testinstrument entwickelt. Dieses besteht teilweise aus Multiple-Choice-Items, zum Teil waren zusätzlich Begründungen gefordert und zusätzlich gab es Items, in denen nach verbalen Beschreibungen gefragt war. Die Bewertung der Items erfolgte zweischrittig. Zu allen (halb-)offenen Items wurden deduktiv Kategorien entwickelt, die gegebenenfalls induktiv ergänzt wurden. Die Kodierung wurde von mir und zusätzlich von einer studentischen Hilfskraft vorgenommen, wobei Cohens-Kappa als Maß für die Interraterreliabilität mit Werten zwischen 0,617 und

1,000 akzeptabel bis vollkommen ist. Die Kategorisierung wurde genutzt, um die Vorstellungen der Studierenden detailliert zu untersuchen. In einem zweiten Schritt wurde eine Zuordnung mit Punkten vorgenommen. Basierend auf den vergebenen Punkten wurde der Test nach der Item-Response-Theorie skaliert. Unter verschiedenen getesteten Modellen hat sich ein zweidimensionales Partial-Credit-Modell als am besten für die Modellierung der vorliegenden Daten erwiesen. Die erste der beiden Dimensionen beinhaltet ein breites *Concept Image* sowohl zum Folgen- als auch zum Grenzwertbegriff. Dazu gehört, dass Folgen in verschiedenen Darstellungen als solche erkannt werden und dass bei Folgen untersucht werden kann, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. Des Weiteren zählt das Erkennen von ungeeigneten Verbalisierungen zum Grenzwertbegriff ebenfalls zu einem breiten *Concept Image*. Die zweite Dimension hingegen besteht aus einem vertieften Verständnis der formalen Definition und Zusammenhängen zwischen Konvergenz und anderen Begriffen. Die Reliabilitäten beider Dimensionen sind mit 0,837 und 0,801 gut. Bei der Skalierung des Tests wurden sowohl die Schwierigkeiten der einzelnen Items als auch die Fähigkeiten der Personen geschätzt. Diese Werte sowie die Lösungshäufigkeiten und die Verteilungen der Antworten auf die Kategorien der Items, in denen Begründungen oder Beschreibungen gefordert waren, wurden genutzt, um die Leitfragen zu beantworten, auf die nun nacheinander eingegangen wird.

Verfügen die Studierenden über ein angemessenes *Concept Image* zum Folgenbegriff?

In der Vorlesung wurden nicht nur Beispiele von Folgen behandelt, die explizit durch einen einzigen Term definiert waren, der von dem Folgenindex abhängt, sondern auch konstante Folgen, abschnittsweise definierte Folgen und rekursiv definierte Folgen. Es hat sich gezeigt, dass die *Concept Images* eines überwiegenden Anteils der Studierenden nach der Behandlung des Themas Folgen und Konvergenz all diese verschiedenen Typen von Folgen umfasst. Zu einem adäquaten *Concept Image* gehört auch, dass Nicht-Beispiele von Folgen als solche erkannt werden. Die Studierenden haben Items, bei denen eine vorgegebene Zuordnung nicht eindeutig war oder bei denen nicht jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zugeordnet wurde, deutlich schlechter gelöst. Ein Grund könnte sein, dass in der Vorlesung keine Nicht-Beispiele von Folgen behandelt wurden. Außerdem musste bei diesen Items sehr genau darauf geachtet werden, ob für jede natürliche Zahl genau ein Folgenglied definiert ist, denn teilweise war die Bedingung der eindeutigen Zuordnung lediglich für eine einzige natürliche Zahl nicht erfüllt. Gründe für falsche Antworten können sein, dass jemandem nicht bewusst ist, dass es sich bei Folgen um eineindeutige Zuordnungen handelt, oder, dass jemandem lediglich nicht aufgefallen ist, dass dies bei den entsprechenden Items nicht erfüllt ist. Dies muss somit nicht mit einem ungeeigneten *Concept Image* zusammenhängen. Bei einer endlichen Auflistung von Zahlen ist dies anders. Bei den 38% der Studierenden, die dies für eine Folge gehalten haben, scheint eine Vorstellung vorhanden zu sein, die nicht mit dem Begriff einer Folge, wie er in der Vorlesung definiert wurde, übereinstimmt. Davon abgesehen verfügen die Studierenden überwiegend über ein angemessenes *Concept Image* zum Folgenbegriff.

Sind die Studierenden in der Lage, bei einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert?

Die Studierenden haben in der Vorlesung hauptsächlich monotone, konvergente Folgen,

die den Grenzwert nicht annehmen, als Beispiele konvergenter Folgen kennengelernt. Bei den Folgen, die sie in den Hausaufgaben auf Konvergenz untersuchen sollten, war meist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, ob sie konvergieren, ob sie monoton sind, ob sie gegebenenfalls den Grenzwert annehmen oder ähnliches. Im Fokus stand der Nachweis der Konvergenz oder Divergenz. In dem Test wurden den Studierenden einfachere Folgen vorgelegt, bei denen das Verhalten leicht ersichtlich war. Hier lag der Fokus darauf, ob die jeweilige Folge unter das *Concept Image* der Studierenden fällt oder nicht. Größtenteils haben sich die *Concept Images* als angemessen erwiesen. Diese umfassen bei den meisten Studierenden nicht nur monotone, konvergente Folgen, sondern auch konstante, schließlich konstante und alternierende, konvergente Folgen. Ebenso wurden die Grenzwerte meist korrekt bestimmt. Lediglich ein solches Item, bei dem nach der durch $a_n = 1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n}$ definierten Folge gefragt ist, hat eine deutlich geringere Lösungsrate von 57%. Die Tatsache, dass jeweils im Vergleich zum vorherigen Folgenglied ein positiver Summand hinzu addiert wird, und die Folge dennoch konvergiert, hat den Studierenden Probleme bereitet. Reihen waren zum Testzeitpunkt noch nicht behandelt worden, so dass die Probanden mit diesem Phänomen noch nicht vertraut waren.

Zu den in der Vorlesung betrachteten Nicht-Beispielen zählen Folgen mit zwei Häufungspunkten, uneigentlich konvergente Folgen und unbeschränkte Folgen mit einem Häufungspunkt. Solche Folgen wurden von den Studierenden auch im Test in den meisten Fällen als divergent erkannt. Einzig bei der bestimmt divergenten Folge $(2n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ haben einige Probanden geantwortet, die Folge sei konvergent und der Grenzwert sei ∞ . Diese Studierenden haben das Verhalten der Folge im Unendlichen korrekt erfasst. Sie scheinen allerdings unter ihren Begriff von Konvergenz auch uneigentliche Konvergenz zu fassen.

Mit einzelnen Ausnahmen sind die meisten Studierenden somit in der Lage, bei einfachen Folgen zu entscheiden, ob sie konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert.

Können die Studierenden ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff erkennen und dies durch die Konstruktion von Gegenbeispielen begründen?

Ungeeignete Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff als solche zu erkennen und dies gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel zu begründen, war für die Studierenden besonders schwierig. Den höchsten Schwierigkeitsparameter unter diesen Items hat dasjenige, bei dem die Verbalisierung, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen, gegeben war. Die Mehrheit der Studierenden hat diese als geeignet bewertet. Dies deutet darauf hin, dass das *Concept Image* dieser Probanden lediglich solche konvergenten Folgen umfasst, für die der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert in jedem Schritt kleiner wird. Ähnlich hoch ist die Schwierigkeit bei einem Item zur Bewertung einer weiteren Verbalisierung. Diese lautet, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder befinden. Studierende, die diese Verbalisierung für geeignet halten, sehen möglicherweise Häufungspunkte als Grenzwerte an. Das würde bedeuten, dass sie der Ansicht sind, eine Folge könne mehrere Grenzwerte besitzen. Es ist jedoch auch möglich, dass den Studierenden nicht bewusst war, dass unendlich viele Folgenglieder außerhalb einer Umgebung liegen können, wenn lediglich gefordert wird, dass sich unendlich viele Folgenglieder innerhalb jeder Umgebung um einen Wert

liegen. Sie könnten in diesem Fall also durchaus wissen, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzt.

Beim Erkennen ungeeigneter Verbalisierungen zum Konvergenzbegriff haben sich also insgesamt große Schwierigkeiten gezeigt. Dies lässt sich teilweise dadurch erklären, dass derartige Verbalisierungen nicht in der Vorlesung behandelt wurden.

Wie tief ist das Verständnis der formalen Definition der Folgenkonvergenz, das die Studierenden aufgebaut haben?

Auch wenn ein vertieftes Verständnis des Konvergenzbegriffs zu den Zielen der Analysis-1-Vorlesung gehört, wurden einige Aspekte, die dazu zählen, in der Vorlesung nicht explizit thematisiert. Im Test wurde dieses vertiefte Verständnis durch verschiedene Items abgefragt. Es wurde danach gefragt, wie viele Folgenglieder einer konvergenten Folge sich jeweils innerhalb und außerhalb einer beliebigen Umgebung um den Grenzwert befinden und es sollten die Aussagen bewertet werden, dass mit jedem N , das im Sinne der Definition für ein festes ϵ geeignet ist, auch jede kleinere beziehungsweise jede größere natürliche Zahl geeignet sei. Diese Items weisen mittlere Schwierigkeitsparameter auf. Eine höhere Schwierigkeit hat das Item dargestellt, in dem erkannt werden musste, dass eine Veränderung endlich vieler Folgenglieder sich nicht auf die Konvergenz und den Grenzwert einer Folge auswirkt. Dabei handelt es sich um einen Aspekt, der nicht in der Vorlesung behandelt wurde. Die Tatsache lässt sich zwar direkt aus der formalen Definition folgern, doch vielen Studierenden ist diese Folgerung nicht gelungen.

Über welche Kenntnisse zu Zusammenhängen zwischen dem Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen verfügen die Studierenden?

Im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff sind die Eigenschaften Monotonie, Beschränktheit, Cauchy-Folgen und Häufungspunkte von Bedeutung. Einige der Beziehungen zwischen diesen Begriffen und Konvergenz wurden explizit in der Vorlesung behandelt. Im Test sollten die Studierenden von verschiedenen möglichen Zusammenhängen die korrekten auswählen. Abgesehen von zwei Beziehungen ist ihnen dies relativ gut gelungen. Wesentlich schlechter gelöst wurde zum einen das Item, in dem die Aussage, jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiere, als falsch bewertet werden sollte. Dafür wurden zwei mögliche Erklärungen geliefert. Es könnte sein, dass manche Studierende uneigentliche Häufungspunkte einbezogen haben. Die Aussage, dass jede Folge mit genau einem eigentlichen oder uneigentlichen Häufungspunkt eigentlich oder uneigentlich konvergiert, wäre tatsächlich korrekt. Außerdem handelt es sich um einen Zusammenhang, der im Gegensatz zu den meisten anderen nicht explizit in der Vorlesung oder den Übungen behandelt wurde. Zum anderen hat das Item mit der Aussage, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, eine hohe Schwierigkeit. Dies ist verwunderlich, da dies in der Vorlesung als Proposition formuliert und bewiesen wurde. Hierfür konnte keine Begründung gefunden werden.

Sind Konflikte zwischen verschiedenen Anteilen eines *Concept Images* oder zwischen einem *Concept Image* und einer persönlichen *Concept Definition* von Studierenden zum Konvergenzbegriff vorhanden?

Beim Vergleich verschiedener Items des „Nachtests“ ist ein zentrales Ergebnis, dass einige

Studierende zu verschiedenen Items Antworten gegeben haben, die sich widersprechen. So gibt es beispielsweise einige Studierende, die zwar einerseits korrekt erkannt haben, dass eine schließlich konstante Folge konvergiert, jedoch andererseits die Verbalisierung, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert immer näher kommen, ohne ihn je zu erreichen, als geeignet bewertet haben. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass diese Personen bei der Beantwortung der verschiedenen Items entweder bei einem Item auf Basis der persönlichen *Concept Definition* und bei einem anderen Item auf Basis des *Concept Images* entschieden haben, oder dass durch die Items verschiedene Teile des *Concept Images* aktiviert wurden, wodurch es bei den Studierenden zu keinem bewussten Konflikt gekommen ist.

Wie groß ist der Zusammenhang zwischen den Vorstellungen und Kenntnissen der Studierenden zum Konvergenzbegriff nach der Behandlung des Themas in der Vorlesung und dem Vorwissen zu Folgenkonvergenz und dazu verwandten Themengebieten vor der Behandlung des Themas in der Universität?

Des Weiteren wurde untersucht, wie groß der Zusammenhang zwischen dem Vorwissen der Studierenden und den Vorstellungen und Kenntnissen zum Konvergenzbegriff nach Abschluss des Themas in der Vorlesung ist. Es wäre denkbar, dass Defizite im Vorwissen teilweise die Unterschiede im „Nachtest“ erklären. Als hierfür relevantes Vorwissen wurden die Themenbereiche Rechnen mit Brüchen, Beträge, Gleichungen und Ungleichungen, der Umgang mit Variablen und Quantoren und Unendlichkeit, Funktionen und Folgen identifiziert und in einem selbst entwickelten „Vortest“ abgefragt. Bei der Kodierung und Bepunktung wurde ähnlich vorgegangen wie bei dem „Nachtest“ und basierend auf 164 Bearbeitungen wurde ebenfalls eine Rasch-Skalierung vorgenommen. In diesem Fall hat sich ein eindimensionales Partial-Credit-Modell als das beste unter den getesteten Modellen erwiesen. Die Reliabilität liegt mit 0,798 nur ganz knapp unter dem Richtwert in Höhe von 0,8 und ist daher als akzeptabel zu bewerten. Um nun den Zusammenhang zwischen den Ergebnissen im „Vortest“ und in den beiden Dimensionen des „Nachtests“ zu bestimmen, wurde untersucht, ob ein linearer Zusammenhang besteht, wie hoch die Korrelation ist und welcher Anteil der Varianz in den beiden Dimensionen des „Nachtests“ durch die Ergebnisse im „Vortest“ aufgeklärt werden können. Diese Berechnungen basieren auf allen 82 Personen, die Erstteilnehmende der „Analysis 1“ sind und zu beiden Testzeitpunkten anwesend waren. Zwischen der Personenfähigkeit im „Vortest“ und der in der ersten Dimension des „Nachtests“ besteht ein linearer Zusammenhang. Der Korrelationskoeffizient beträgt 0,357, wobei es sich um einen mittleren Zusammenhang handelt. Mit $p = 0,001$ ist die Korrelation signifikant von 0 verschieden. Es werden 11,7% der Varianz in den Personenfähigkeiten dieser Dimension des „Nachtests“ durch die Personenfähigkeiten im „Vortest“ aufgeklärt. Diese Dimension des „Nachtests“ beinhaltet alle Items, in denen bei konkreten (Nicht-)Beispielen von Folgen entschieden werden sollte, ob es sich um Folgen handelt oder nicht, beziehungsweise, ob die Folgen konvergieren und gegebenenfalls gegen welchen Grenzwert. Auch gehören Items zu dieser Dimension, in denen zu verschiedenen Aussagen Gegenbeispiele konstruiert werden mussten. Die zweite Dimension des „Nachtest“ prüft hingegen das Verständnis der formalen Definition und die Zusammenhänge zwischen Konvergenz und verwandten Begriffen. Der Zusammenhang zwischen den Personenfähigkeiten im „Vortest“ und denen in dieser zweiten Dimension des „Nachtests“ ist ebenfalls linear. Mit einem Korrelationskoeffizienten in Höhe von

0,234 ist der Zusammenhang niedriger, mit $p = 0,034$ aber ebenfalls signifikant. Hier beträgt die aufgeklärte Varianz 4,3%. Dass die Korrelationen und die jeweils aufgeklärte Varianz nicht höher sind, lässt sich dadurch erklären, dass die beiden Tests verschiedene Themengebiete abfragen.

Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass das Vorwissen der Studierenden zum Teil die Unterschiede im „Nachtest“ erklärt. Auf den Umgang mit konkreten (Nicht-)Beispielen von Folgen beziehungsweise konvergenten Folgen hat das Vorwissen einen stärkeren Einfluss als auf ihr Verständnis der formalen Definition und auf die Kenntnis von Zusammenhängen zwischen dem Konvergenzbegriff und verwandten Begriffen. Beschäftigen sich die Studierenden mit konkreten (Nicht-)Beispielen, so werden vermutlich eher Anteile des *Concept Images* aktiviert, über die sie bereits vorher verfügten. Eine *Concept Definition* und Anteile des *Concept Images* zu der formalen Definition und zu Zusammenhängen mit anderen Begriffen besaßen sie hingegen zuvor möglicherweise noch nicht.

8.1.2 Entwicklung eines theoretisch fundierten Konzepts für einen Workshop zur angeleiteten Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz

Im Rahmen dieser Arbeit wurde nach dem Design-Based-Research-Ansatz ein Konzept für einen Workshop zur angeleiteten Nacherfindung der Konvergenzdefinition auf Basis vorgegebener Beispielfolgen (weiter-)entwickelt. In Abschnitt 2.5 wurden zunächst verschiedene vorhandene Konzepte für Interventionen zum Konvergenzbegriff präsentiert. Aus den vorhandenen Konzepten wurden verschiedene Elemente übernommen und teilweise überarbeitet. Der wesentliche Teil des Konzepts wurde von Przenioslo (2005) übernommen, die sowohl eine Menge von Beispielen sowie einem Nicht-Beispiel konvergenter Folgen als auch mehrere fiktive Diskussionen als Hilfestellung bei der Nacherfindung der Definition vorgeschlagen hat. In Kapitel 4 wurde darauf aufbauend eine erste Version des Workshop-Konzepts dargestellt, welches aus drei Elementen besteht: einer Menge von Beispielen sowie einem Nicht-Beispiel, einer Aufgabenstellung, durch welche die Studierenden zur Nacherfindung auf Basis der Beispielmenge aufgefordert werden, und zu verschiedenen erwarteten Problemstellen vorbereiteten Unterstützungsangeboten. Diese erste Version des Workshops wurde im Wintersemester 2012/13 an der Universität Paderborn erprobt. Nach einer ersten Analyse dieser Durchführung wurde das Konzept des Workshops überarbeitet, was in Abschnitt 7.2 beschrieben und begründet wurde. Diese zweite Version des Workshops wurde im Wintersemester 2013/14 an der Universität Kassel durchgeführt. Die systematische retrospektive Analyse der Diskussionen während der Nacherfindung der Definition aus der ersten Durchführung erfolgte erst im Anschluss. Diese ist in Kapitel 6 zu finden. Außerdem wurden die Diskussionen aus der zweiten Durchführung gezielt im Hinblick auf die vorgenommenen Veränderungen des Workshop-Konzepts analysiert, was in Abschnitt 7.3 dargestellt ist. Die Ergebnisse der Analysen der Erkenntnisprozesse während der Nacherfindung der Definition werden hier nun zunächst zusammengefasst, bevor darauf eingegangen wird, welche Konsequenzen sich daraus für die Gestaltung des Workshops ergeben.

3. Wie verlaufen die Erkenntnisprozesse bei der angeleiteten Nacherfindung der Definition der Konvergenz einer Folge basierend auf einer vorgegebenen Menge von (Nicht-)Beispielfolgen und gegebenenfalls eingesetzten Interventionen? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das Re-Design des Workshops?

Diese Forschungsfrage wurde bei der retrospektiven Analyse in Kapitel 6 in die folgenden vier Leitfragen spezifiziert:

- 3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?
- 3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?
- 3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?
- 3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Im Folgenden werden die Ergebnisse nun bezogen auf diese vier Leitfragen präsentiert.

3. a) Berücksichtigt das Workshop-Konzept in angemessener Weise das Vorwissen und bietet es Möglichkeiten, dass die Studierenden ihr Vorwissen produktiv einsetzen oder erkennen, dass es unzureichend für die neue Begriffsbildung ist?

Durch die Aufgabenstellung wird den Studierenden auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen ein für sie neuer Konvergenzbegriff vorgegeben. Sofern die Studierenden zuvor bereits ein *Concept Image* oder auch eine *Concept Definition* zum Konvergenzbegriff aufweisen, die nicht mit dem neu vorgegebenen Begriff übereinstimmen, kann dies zu Konflikten führen.

Bei der retrospektiven Analyse der zweiten Durchführung des Workshops wurde diese Frage nicht untersucht, daher wird hier lediglich auf die Studierenden aus dem ersten Durchgang eingegangen. Die Analysen der Erkenntnisverläufe dieser vier Studierendengruppen haben ergeben, dass bei allen Gruppen bereits *Concept Images* und möglicherweise persönliche *Concept Definitions* zum Konvergenzbegriff vorhanden waren und sich auch auf die Erkenntnisprozesse ausgewirkt haben. In keinem Fall entsprach die persönliche *Concept Definition* bereits der formalen Definition der Konvergenz einer Folge und in keinem Fall hat das *Concept Image* die komplette Vielfalt konvergenter Folgen abgedeckt.

Ein bereits vorhandenes *Concept Image* konnte zum einen dadurch deutlich werden, dass Studierende geäußert haben, welche Folgen unter ihren Begriff von Konvergenz fallen oder nicht. Möglicherweise sind unter den vorgegebenen Beispielfolgen manche, die auch unter das *Concept Image* der Studierenden fallen, aber vielleicht müssen sie bei anderen Beispielfolgen erkennen, dass diese unter den neuen Begriff fallen, während sie diese bislang als Nicht-Beispiel angesehen haben. Des Weiteren könnten die Studierenden verbale Beschreibungen von ihrem eigenen Konzept konvergenter Folgen nennen. Sofern sie mit einer verbalen Beschreibung als Definition arbeiten, handelt es sich um eine *Concept Definition*. Eine verbale Beschreibung kann hingegen auch Teil des *Concept Images* sein. Verfügen die Studierenden bereits zuvor über eine *Concept Definition* oder enthält ihr *Concept Image* verbale Beschreibungen von ihrem eigenen Konzept konvergenter Folgen, so müssen sie bei der Beschäftigung mit den Beispielfolgen möglicherweise erkennen, dass ihre verbale Beschreibung nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft. Eine solche verbale Beschreibung lässt sich aber eventuell weiterentwickeln, so dass sie zu dem „neuen“ Konvergenzbegriff passt. Zum anderen kann das zuvor vorhandene *Concept Image* auch Strategien umfassen, wie die Studierenden entscheiden, ob eine Folge unter ihren Begriff von Konvergenz fällt oder nicht. Möglicherweise würden sie bei manchen der vorgegebenen Beispielfolgen durch Anwenden ihrer Strategie zu der Entscheidung gelangen, es handele sich um ein Nicht-Beispiel. Sie müssen in diesem Fall erkennen, dass die Strategie für den „neuen“ Begriff von Konvergenz nicht geeignet ist.

Zu den Fragen, die sich nun stellen, gehört einerseits, was für Beispiele, verbale Beschreibungen und Strategien die *Concept Images* der Studierenden umfassen. Andererseits gehört dazu auch die Frage, inwiefern sich die vorhandenen *Concept Images* auf die Nacherfindungsprozesse auswirken. Eine Möglichkeit wäre, dass die Studierenden auf ihr vorhandenes *Concept Image* aufbauen und sie dies weiterentwickeln, so dass es zu dem „neuen“ Begriff passt, was ein produktiver Einsatz des Vorwissens wäre. Hinderlich würde sich das Vorwissen hingegen auswirken, wenn die Studierenden an ihrem vorhandenen *Concept Image* festhalten und dieses nicht anpassen. Als dritte Möglichkeit wäre auch denkbar, dass Studierende über ein *Concept Image* verfügen, sie dann bei der Beschäftigung mit den Beispielfolgen feststellen, dass dieses nicht für den „neuen“ Begriff geeignet ist, und sie es für die Nacherfindung nicht weiter berücksichtigen. In einem solchen Fall würde sich das Vorwissen weder förderlich noch hinderlich auswirken.

Die bereits vorhandenen *Concept Images* der Studierenden aus dem ersten Workshop wurden rekonstruiert, so weit dies aus den Studierendenäußerungen möglich war.

Die erste Gruppe stellt keinen Widerspruch zwischen ihrem vorhandenen *Concept Image* und dem „neuen“ Begriff fest. Sie sehen das durch die vorgegebenen Beispielfolgen festgelegte Konzept somit als kein neues Konzept an. Ihr vorhandenes *Concept Image* konvergenter Folgen umfasst auf jeden Fall die Folge $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge gehört nicht zu den vorgegebenen Beispielen, sondern die Studierenden haben sie selbst eingebracht. An dieser erläutern sie, wie sie bislang entschieden haben, ob eine Folge unter ihren Begriff von Konvergenz fällt und was gegebenenfalls der Grenzwert ist. Sie versuchen, den Folgenterm in einzelne Teile zu zerlegen, von denen sie jeweils wissen, was der Grenzwert ist. Diese Strategie ist also ebenfalls ein Teil des vorhandenen *Concept Images*.

der Studierenden. Während der Nacherfindung der Definition wenden sie diese Strategie an, um sich davon zu überzeugen, dass die gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen der Grenzwert 1 ist. Bei der durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierten Folge bemerken sie die Grenzen ihrer Strategie. Sie wissen nicht, wie sie bei dieser Folge begründen können, dass sie den Grenzwert 1 hat. An dieser Stelle bemerken sie somit, dass sie ihr Vorwissen weiterentwickeln müssen. Verbale Beschreibungen, die möglicherweise zu dem vorhandenen *Concept Image* der Studierenden gehören, werden von ihnen nicht genannt. Bei dieser Gruppe gab es keine Hinweise darauf, dass sich das Vorwissen in irgendeiner Art hinderlich auf den Erkenntnisprozess ausgewirkt hat. Die Studierenden haben keine expliziten Widersprüche zwischen ihrem bisherigen Konzept von Konvergenz und dem durch die Beispielfolgen festgelegten Konzept festgestellt. Sie haben dennoch bemerkt, dass sie ihr Vorwissen weiterentwickeln müssen und dies ist ihnen – mit Unterstützung – letztlich auch gelungen.

In der zweiten Gruppe unterscheiden sich die *Concept Images* und *Concept Definitions* der einzelnen Gruppenmitglieder. Ein Student äußert relativ zu Beginn des Nacherfindungsprozesses eine verbale Beschreibung, die lautet, dass die Funktion ab einer bestimmten Stelle immer näher an den Wert 1 gehe und nie wieder weiter weg gehe. Da der Student zu dem Zeitpunkt bereits die Beispielfolgen betrachtet hat, kann nicht ausgeschlossen werden, dass diese die verbale Beschreibung bereits beeinflusst haben. Dieser Student treibt den Nacherfindungsprozess der gesamten Gruppe enorm voran. Er bemerkt eigenständig, dass sein *Concept Image* angepasst werden muss und es gelingt ihm, eine geeignete Formulierung der Definition zu entwickeln. Er konnte sein Vorwissen somit produktiv nutzen.

Eine Studentin aus dieser Gruppe bringt ihr *Concept Image* zu dem Begriff der Asymptote in die Diskussion ein. Darunter versteht sie eine Annäherung, ohne dass der entsprechende Wert erreicht wird. Sie stellt eigenständig fest, dass dies nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft und sie grenzt daraufhin die Begriffe Asymptote und den „neuen“ Begriff der Konvergenz voneinander ab. Dadurch wirkt sich ihr Vorwissen keinesfalls hinderlich aus.

Bei einer weiteren Studentin scheint das *Concept Image* zu Konvergenz zu Beginn ausschließlich Folgen oder Funktionen zu beinhalten, die den Grenzwert nicht erreichen. Sie fragt die übrigen Gruppenmitglieder zweimal, ob konvergente Folgen den Grenzwert erreichen dürfen. Als der erste Student dies mit Bezug auf die vorgegebenen Beispielfolgen bejaht, scheint sie dies zu akzeptieren. Auch bei ihr gibt es also keinen Hinweis darauf, dass das Vorwissen sich hinderlich auswirkt und sie erweitert ihr vorhandenes *Concept Image* in geeigneter Weise.

Auch bei der dritten Gruppe zeigen sich Unterschiede in den *Concept Images*, welche die Studierenden zu Beginn des Workshops aufweisen. Eine Studentin macht deutlich, dass ihr *Concept Image* auch konvergente Folgen umfasst, die den Grenzwert erreichen, wie eine konstante Folge. Zwei andere Gruppenmitglieder scheinen jedoch persönliche *Concept Images* in Form verbaler Beschreibungen mitzubringen, die beinhalten, dass eine konvergente Folge niemals den Grenzwert erreicht. Einer der beiden Studierenden stellt anhand der vorgegebenen Beispielfolgen fest, dass das vorhandene *Concept Image*

weiterentwickelt werden muss. Der andere Student hingegen bemerkt zwar ebenfalls den Widerspruch zwischen seinem persönlichen Konzept und dem auf Basis der Beispielfolgen festgelegten Konzept, doch er hält an seinem Vorwissen fest und akzeptiert möglicherweise sogar bis zum Ende nicht, dass die vorgegebenen Beispielfolgen alle gegen 1 konvergieren. Die Gruppe formuliert zwar mit seiner Beteiligung schließlich eine geeignete Eigenschaft, doch er äußert am Ende noch einmal, dass er nicht damit zufrieden ist, dass auch Folgen, die den Wert 1 erreichen, unter die Eigenschaft fallen. Auch auf den Vorschlag einer Studentin, dass es sich bei der zu entwickelnden Eigenschaft möglicherweise um einen anderen Begriff handelt, als der, zu dem er ein Vorverständnis aufweist, geht er nicht ein. Bei ihm findet also keine Anpassung des *Concept Images* statt. Dies wurde zum Anlass genommen, bei der Überarbeitung des Konzepts in der Aufgabenstellung explizit zu machen, dass ein für die Studierenden neuer, hochschulmathematischer Begriff nacherfunden werden soll. Dies wird bei den Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung ab Seite 540 ausgeführt.

In der vierten Gruppe wird ein ähnliches *Concept Image* in Form einer verbalen Beschreibung deutlich. Ein Studierender äußert, Konvergenz heiße, dass sich die Folge an den Grenzwert „anschieße“. Folgen, die konstant oder schließlich konstant sind, fallen nicht unter sein bisheriges Bild konvergenter Folgen. Im Gegensatz zu dem zuvor beschriebenen Studenten ist dieser jedoch schließlich bereit, sein *Concept Image* weiterzuentwickeln. Hier wird der Nacherfindungsprozess durch das Vorwissen möglicherweise etwas verzögert, doch nicht komplett verhindert.

Insgesamt wurde also vor allem festgestellt, dass die *Concept Images* vieler Studierender zu Beginn des Workshops lediglich solche konvergenten Folgen umfasst haben, die den Grenzwert nicht erreichen. Deutlich geworden sind *Concept Images* meist in Form verbaler Beschreibungen oder indem die Studierenden geäußert haben, dass manche der vorgegebenen Beispielfolgen nicht unter ihr bisheriges Bild konvergenter Folgen fallen. Fast alle Studierenden haben festgestellt, dass ihr *Concept Image* und gegebenenfalls ihre persönliche *Concept Definition* angepasst werden müssen. Nur ein Student hat zwar festgestellt, dass nicht alle der als konvergent vorgegebenen Folgen zu seinem vorhandenen *Concept Image* passen, doch eine Weiterentwicklung seines Vorverständnisses wird nicht deutlich. Obwohl das Design des Workshops es also den meisten Studierenden ermöglicht hat, ihr Vorwissen produktiv einzusetzen, wurde die Aufgabenstellung bei der Überarbeitung des Workshop-Konzepts noch optimiert. Darauf wird bei den Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung in Abschnitt 8.1.2 eingegangen.

3. b) Die Aufgabenstellung, die Menge der (Nicht-)Beispielfolgen und die vorbereiteten Unterstützungsangebote wurden auf Basis einer Antizipation der dadurch erzeugten Erkenntnisprozesse entwickelt. Bis zu welchem Grad können diese Prozesse tatsächlich beobachtet werden? Gibt es Abweichungen, die eine Veränderung oder Ergänzung der Aufgabenstellung, der (Nicht-)Beispiele und der Unterstützungsangebote notwendig machen? Reichen die vorbereiteten Unterstützungsangebote aus oder gibt es Situationen, in denen die Lehrperson weitere Impulse geben muss?

i. Sukzessives Testen der Formulierung an neuen und bisher ins Auge gefassten Beispielen – Wie systematisch und genau gehen die Studierenden vor?

In den hypothetischen Erkenntnisverläufen wurde davon ausgegangen, dass die Studierenden systematisch vorgehen, indem sie mit einer Teilmenge der vorgegebenen Beispielfolgen beginnen, für diese eine Charakterisierung formulieren, anschließend weitere Beispiele hinzuziehen, die formulierte Charakterisierung an diesen überprüfen und gegebenenfalls überarbeiten. Es war vermutet worden, dass sich dieses Vorgehen iterativ fortsetzt, bis die Studierenden bei einer Charakterisierung aller vorgegebenen Beispielfolgen angekommen sind, die auf das vorgegebene Nicht-Beispiel nicht zutrifft. Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf die erste Durchführung des Workshops, da diese Frage beim zweiten Durchgang nicht analysiert wurde. Bei den tatsächlichen Erkenntnisverläufen lässt sich eine derartige Systematik nicht finden (siehe Abschnitt 6.3). Zunächst einmal hat keine beobachtete Studierendengruppe mit einer Teilmenge der vorgegebenen Beispielfolgen begonnen, sondern alle haben versucht, von Beginn an alle Beispielfolgen einzubeziehen. Dennoch gab es bei jeder Gruppe mindestens einmal einen Vorschlag für eine Charakterisierung, die nicht auf alle vorgegebenen Beispiele zutraf. Dies ist den Studierenden jedoch nicht immer selbst aufgefallen, da keine der Gruppen die formulierten „Definitionen“ jeweils systematisch an den vorgegebenen Folgen überprüft hat. Nur in einem Fall wurde eine Formulierung an allen Beispielfolgen überprüft, allerdings so oberflächlich, dass den Studierenden nicht aufgefallen ist, dass ihre Formulierung nicht als Charakterisierung geeignet war. In den anderen Fällen wurden die „Definitionen“ entweder überhaupt nicht überprüft oder nur an einzelnen Folgen.

Aufgrund dieser Ergebnisse wurde bei der Weiterentwicklung des Workshop-Konzepts eine Veränderung der Aufgabenstellung vorgenommen, nämlich dass die Studierenden explizit dazu aufgefordert werden, formulierte Eigenschaften jeweils an allen vorgegebenen Beispielfolgen zu testen. Bei den Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung ab Seite 540 wird dies ausgeführt.

ii. Welche der Beispielfolgen nutzen die Studierenden in ihren Argumentationen? Welche charakteristischen Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen arbeiten sie heraus?

Für eine erfolgreiche Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz ist es unabdingbar, dass die Studierenden verschiedene charakteristische Merkmale der vorgegebenen Beispielfolgen entdecken und begrifflich fassen. In den hypothetischen Erkenntnisverläufen ist eines dieser Merkmale, dass bei manchen Beispielen ab irgendeinem N alle weiteren Folgenglieder dem Grenzwert entsprechen. Dieses Merkmal haben alle sieben Studierendengruppen der beiden Durchführungen des Workshops ohne Unterstützung explizit genannt. Außerdem wurde in den hypothetischen Verläufen formuliert, dass als Merkmal einer Beispielfolge festgestellt wird, dass der Grenzwert 1 von unendlich vielen Folgengliedern angenommen wird, dass es aber auch jeweils Folgenglieder mit größerem Index gibt, die nicht dem Grenzwert entsprechen. Dieses Merkmal wurde nicht von allen Studierendengruppen explizit formuliert. Mit diesem Merkmal hängt ein weiteres eng zusammen, und zwar, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 nicht bei allen Beispielfolgen monoton fallend ist. In den Erkenntnisverläufen von zwei der vier

Gruppen der ersten Durchführung des Workshops wurde dieses Merkmal eigenständig genannt. Eine weitere Gruppe hat diesen Aspekt zwar nicht explizit geäußert, doch sie hat auch nie als Eigenschaft formuliert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 immer kleiner wird. Bei der vierten Gruppe hingegen gab es eine solche Formulierung. Die Studierenden haben erst durch eine Intervention entdeckt, dass es Beispielfolgen gibt, auf die diese Formulierung nicht zutrifft. Bei der zweiten Durchführung wurde die Entdeckung dieses Merkmals nicht explizit untersucht. Es gab auch ein Merkmal, das zwar nicht explizit in den hypothetischen Verläufen formuliert wurde, das jedoch von manchen Studierendengruppen geäußert wurde. Dabei handelt es sich um die Eigenschaft mancher Beispielfolgen, dass sie den Grenzwert 1 sowohl über- als auch unterschreiten. Implizit wurde dieses Merkmal auch in den hypothetischen Erkenntnisverläufen berücksichtigt, indem der Abstand der Folgenglieder zu 1 betrachtet wurde, und formuliert wurde, dass dieser Abstand klein wird beziehungsweise es zu jedem vorgegebenen Abstand eine Zahl n_0 gibt, so dass der Abstand aller Folgenglieder mit größerem Index als n_0 zum Wert 1 kleiner als der vorgegebene Abstand ist. Dies schließt insbesondere die Beispielfolgen mit diesem Merkmal mit ein.

Des Weiteren wurde untersucht, inwieweit die einzelnen Beispielfolgen von den Studierenden in ihren Argumentationen genutzt wurden. Bei der ersten Durchführung des Workshops wurden die beiden durch $a_n = \frac{n+1}{n}$ und $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierten Folgen

deutlich weniger genutzt und sie scheinen für die Entdeckung charakteristischer Merkmale von geringerer Bedeutung gewesen zu sein als die übrigen vorgegebenen Beispiele. Diese beiden Folgen repräsentieren dieselbe Klasse von Folgen, und zwar die Klasse der monotonen, konvergenten Folgen, die den Grenzwert 1 nicht erreichen. Daher wurde die Entscheidung getroffen, die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus der Menge der vorgegebenen Beispielfolgen zu entfernen. Die restlichen Folgen ließen sich häufiger in den Argumentationen wiederfinden und die Studierenden haben wichtige Merkmale an ihnen entdeckt.

Bei der zweiten Durchführung des Workshops wurde die konstante Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ zusätzlich in das Konzept aufgenommen. Diese wurde von allen drei Studierendengruppen mehrfach genutzt und sie haben verschiedene Merkmale an ihr entdeckt. Die durch

$$g_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \end{cases} \text{ definierte Folge war bei beiden Durchführungen des Work-}$$

shops noch nicht im Konzept enthalten. Über ihre Verwendung kann daher nichts ausgesagt werden. In der zweiten Durchführung hat eine Studierendengruppe eine Eigenschaft formuliert, die auf alle der vorgegebenen Beispiele zutrifft, auf das vorgegebene Nicht-Beispiel nicht zutrifft und nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz gegen 1 ist. Auf die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trifft diese Eigenschaft nicht zu. Durch die Hinzunahme dieser Beispielfolge kann die Schwäche des Konzepts daher behoben werden.

Im Vergleich zur ersten Version des Workshop-Konzepts schlage ich somit insgesamt drei Veränderungen vor, die teilweise bereits in der zweiten Version umgesetzt wurden. Erstens wurde die durch $e_n = 0, \underbrace{9 \dots 9}_n$ definierte Folge entfernt. Zweitens wurde die konstante

Folge $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ in das Konzept aufgenommen. Drittens schlage ich vor, die durch $g_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \end{cases}$ definierte Folge zusätzlich als Beispiel vorzugeben.

iii. Wie generisch werden die Beispiele von den Studierenden betrachtet?

Die Folgen, die den Studierenden als Beispiele vorgegeben werden, repräsentieren jeweils eine ganze Klasse gegen 1 konvergenter Folgen. Die zu entwickelnde Definition soll nicht nur die vorgegebenen Beispielfolgen umfassen, sondern alle Klassen von Folgen, welche sie vertreten. Da dies in der Aufgabenstellung nicht expliziert wurde, wäre es denkbar gewesen, dass manche Studierenden die Beispiele nicht in dem beschriebenen Sinne generisch auffassen. Das ist jedoch bei allen sieben Gruppen, die an einer der beiden Durchführungen des Workshops teilgenommen haben, keinmal vorgekommen. Bei manchen Studierenden lassen sich in den Diskussionen Äußerungen finden, aus denen sich feststellen lässt, dass sie die Beispiele generisch aufgefasst haben. Bei anderen Gruppen lassen sich zwar keine solchen Aussagen finden, doch ihre Definitionsversuche umfassen nicht nur die vorgegebenen Beispielfolgen, sondern alle repräsentierten Klassen. Aus der Analyse dieser Leitfrage ergeben sich daher keine Konsequenzen in Bezug auf das Design des Workshop-Konzepts.

iv. Klassifizieren die Studierenden die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst in mehrere Gruppen? Sind sie von sich aus motiviert, zu einer Formulierung überzugehen, in der die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung ausgedrückt wird? Wie gelingt ihnen dieser Übergang?

Des Weiteren wurde in den hypothetischen Erkenntnisverläufen davon ausgegangen, dass die Studierenden ausgehend von verschiedenen entdeckten charakteristischen Merkmalen der Beispielfolgen die Charakterisierung zwischenzeitlich durch mehrere Bedingungen ausdrücken, die sie durch „oder“ miteinander verbinden. Eine solche Formulierung wird in der Mathematik als „unschön“ angesehen; dem Auftrag, eine Charakterisierung zu finden, wird sie jedoch gerecht. Es war vermutet worden, dass der Übergang zu einer Formulierung durch eine einzige Bedingung eine Hürde darstellt, bei der die Studierenden möglicherweise Unterstützung benötigen. Dazu war eine fiktive Diskussion vorgesehen, die von Przenioslo (2005) übernommen und angepasst wurde. Darin werden die Studierenden dazu angeleitet, Umgebungen um den Wert 1 zu betrachten und zu untersuchen, ob bei den einzelnen Folgen jeweils ab einem Folgenglied alle weiteren innerhalb der Umgebung liegen. Es war vermutet worden, dass die Studierenden anschließend bemerken, dass eine Formulierung mit mehreren Bedingungen nicht mehr nötig ist. Die Analyse der tatsächlichen Erkenntnisverläufe hat ergeben, dass zwei der vier Gruppen des ersten Workshops zwischenzeitlich eine Eigenschaft formuliert haben, bei der zwei oder mehr Bedingungen durch „oder“ miteinander verbunden wurden. In beiden Fällen waren die Studierenden zu dem Zeitpunkt mit ihren Charakterisierungen zufrieden und hatten nicht das Bedürfnis, diese zu überarbeiten. Es waren daher Interventionen nötig, um die Studierenden zu ermuntern, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. In einem Fall wurde lediglich ein verbaler Impuls gegeben, eine Charakterisierung durch eine einzige Bedingung zu finden. Die Studierenden haben dies zwar hinterfragt, doch es ist ihnen eigenständig gelungen, eine Charakterisierung mit nur einer Bedingung zu formulieren. Bei der anderen Gruppe hat ein solcher Impuls nicht ausgereicht. Auch diese Studierenden haben hinterfragt, warum es nötig sei, eine einzige Bedingung zu

formulieren. Außerdem hatte die Gruppe keine Idee, wie sie eine solche einzige Bedingung entwickeln können. Es war eine weitere Intervention nötig, um die Studierenden dabei zu unterstützen. Dazu wurde die oben genannte fiktive Diskussion eingesetzt, die für diese Situation vorgesehen war. Während der Beschäftigung mit dieser Intervention benötigten die Studierenden keine weitere Unterstützung und sie haben anschließend eine geeignete Eigenschaft formuliert. Aufgefallen ist außerdem, dass bei beiden Gruppen die Formulierung der Eigenschaft durch mehrere Bedingungen einen weiteren Mangel hatte, und zwar war sie nicht genau genug, um als objektives Entscheidungskriterium zu dienen. Anstatt die vorgesehenen Interventionen für die Situation, dass die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wird, einzusetzen, hätte hier also auch eine Intervention ausgewählt werden können, die für ungenaue Formulierungen der Eigenschaft vorbereitet war.

Bei der zweiten Durchführung des Workshops hat eine der drei Gruppen zwischenzeitlich eine Eigenschaft durch zwei Bedingungen ausgedrückt. Zusätzlich war die Formulierung ungenau. Die Studierenden selbst waren mit ihr zufrieden. Da die Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken, sich im ersten durchgeführten Workshop nicht als förderlich herausgestellt hat, wurden bei der zweiten Durchführung Interventionen in Form fiktiver Diskussionen eingesetzt, die auf eine präzisere Formulierung abzielen. Diese haben den Erkenntnisprozess tatsächlich vorangetrieben.

Insgesamt hat sich ergeben, dass der Übergang zu einer Charakterisierung durch eine einzige Bedingung tatsächlich eine Hürde darstellt, sofern die Eigenschaft zuvor durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wurde. Die Aufforderung, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken, haben die Studierenden hinterfragt. Sie waren der Meinung, sie hätten die Aufgabenstellung erfüllt und sie selbst haben die „oder“-Formulierung nicht als „unschön“ angesehen. Hieraus ergibt sich somit ein Änderungsbedarf bei den Interventionen. Wenn die Formulierung gleichzeitig nicht genau genug ist, um sie als Entscheidungskriterium nutzen zu können, so soll von nun an eine Intervention für diesen Mangel ausgewählt werden. Dies ist bei den Designprinzipien zu den Unterstützungsangeboten ab Seite 542 ausgeführt.

v. Reichen die Beispiele und Unterstützungsangebote aus, damit die Studierenden ihre Definition in einer Fassung formulieren, die heutigen hochschulmathematischen Ansprüchen genügt? Welche Impulse sind nötig und hilfreich?

Im Vorfeld war davon ausgegangen worden, dass die ersten Formulierungen noch nicht präzise sind und somit anschließend eine Optimierung durch die Studierenden vorgenommen wird. Auch dies war als mögliche Problemstelle erwartet worden. Bei der Durchführung der ersten Version des Workshop-Konzepts gab es eine Gruppe, die in den ersten Minuten der Diskussion zwar eine ungenaue Eigenschaft formuliert hat, diese jedoch ohne Intervention eigenständig zu einer so präzisen Charakterisierung überarbeitet hat, dass diese als Entscheidungsregel genutzt werden kann. Die anderen drei Gruppen der ersten Durchführung des Workshops waren alle zu mindestens einem Zeitpunkt mit einer Charakterisierung zufrieden, die diese Anforderung nicht erfüllt hat. Dies war also eine häufige Problemstelle. In einem Fall, in dem die Eigenschaft nicht nur ungenau formuliert war, sondern auch durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wurde, wurde wie bereits erwähnt eine fiktive Diskussion eingesetzt. Die beiden anderen Gruppen wurden zunächst

gefragt, ob mit ihrer Formulierung entschieden werden könne, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt oder nicht. Die Studierenden mussten darauf aufmerksam gemacht werden, dass eine Definition diese Anforderung erfüllen soll. Als ihnen dies bewusst war, waren bei beiden Gruppen bei der Präzisierung der Formulierung erneut Interventionen nötig. Es war für die Studierenden nicht nur schwierig zu erkennen, wenn eine Charakterisierung zu ungenau ist, sondern es war ebenfalls problematisch, die Präzisierung vorzunehmen. Dabei war besonders der Schritt zum umgekehrten Denken nach Roh (2005) eine Hürde. Wie in Abschnitt 2.5.3 dargestellt ist unter umgekehrtem Denken beziehungsweise der umgekehrten Beziehung von ϵ und N im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff zu verstehen, dass nicht formuliert wird, dass die Folgenglieder ab einem N und/oder für größer werdendes n irgendeine Bedingung erfüllen, sondern dass zuerst ein (beliebiger) Abstand ϵ gewählt wird und erst danach N in Abhängigkeit von ϵ gewählt wird. Das ist nur wenigen Studierenden eigenständig gelungen. Zur Unterstützung wurden ϵ -Streifen eingesetzt, die auch Roh (2005) in ihrer Interventionsstudie verwendet hat. Bei einer der beiden Gruppen hat diese Unterstützung zu dem gewünschten Ergebnis geführt, bei der anderen Gruppe nicht. Weitere Unterstützungsangebote waren für diese Situation nicht vorbereitet. Dies wurde zum Anlass genommen, die Intervention zu überarbeiten, worauf bei den Designprinzipien zu den Unterstützungsangeboten ab Seite 542 eingegangen wird.

Für die zweite Durchführung des Workshops wurde die Aufgabenstellung um die Aufforderung ergänzt, die Eigenschaft so genau zu formulieren, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden kann. Dennoch gab es bei allen drei Studierendengruppen zwischenzeitlich Formulierungen, die diese Anforderung nicht erfüllen, mit denen die Studierenden jedoch zufrieden waren. Der zusätzliche Satz in der Aufgabenstellung hat somit nicht den gewünschten Erfolg geliefert. Die Studierenden waren meist der Meinung, sie könnten mit ihren Formulierungen für eine beliebige Folge entscheiden, ob sie gegen 1 konvergiert oder nicht. Möglicherweise könnten sie dies tatsächlich. Es könnte jedoch sein, dass eine andere Person anhand derselben Formulierung bei derselben Folge zu einer anderen Entscheidung gelangen würde. Die Anforderung, dass jede Person dieselbe Entscheidung treffen würde, ist den Studierenden nicht bewusst. Die Änderung der Aufgabenstellung, die ich diesbezüglich vorschlage, besteht daraus, diese zusätzliche Anforderung explizit zu machen.

vi. Formulieren die Studierenden Zwischenergebnisse ihrer Definitionsversuche schriftlich und versuchen sie diese dann zu optimieren? Welche Schwierigkeiten treten bei der Verschriftlichung auf? Welche Impulse sind nötig und hilfreich? Welchen Beitrag leistet die Aufforderung zur Verschriftlichung zum Erkenntnisprozess?

Einen weiteren Unterschied zwischen den hypothetischen und manchen tatsächlichen Erkenntnisverläufen hat die Analyse in Bezug auf das Verschriftlichen der Charakterisierung aufgezeigt. Untersucht wurde dies lediglich für die erste Durchführung des Workshops. Während in den hypothetischen Verläufen antizipiert wurde, dass die Studierenden jeweils Zwischenergebnisse aufschreiben, war dies lediglich bei zwei beobachteten Gruppen der Fall. Für die anderen beiden Gruppen bildete das Verschriftlichen eine eigene Phase während des Nacherfindungsprozesses, in der auch neue Erkenntnisse gemacht wurden. Es hat sich gezeigt, dass einige Studierende keine verbalen Beschreibungen aufschreiben woll-

ten. Sie waren der Ansicht, dass an eine aufgeschriebene Definition andere Anforderungen gestellt werden als an etwas mündlich formuliertes. So wurden Formulierungen präzisiert, formal-mathematische Schreibweisen verwendet und teilweise sind den Studierenden noch problematische Aspekte ihrer Charakterisierungen aufgefallen. Das Verschriftlichen hat bei diesen Gruppen somit einen wichtigen Stellenwert im Erkenntnisprozess eingenommen. Daher kann für Situationen, in denen eine Eigenschaft nicht genau genug formuliert wurde, um sie als Entscheidungskriterium nutzen zu können, als weitere Intervention der Impuls gegeben werden, die Eigenschaft aufzuschreiben.

3. c) Ist das Konzept geeignet, auch Studierende mit unterschiedlichen Voraussetzungen, Einstellungen und mathematischen Kompetenzen eine angeleitete Nacherfindung der Definition zu ermöglichen? Gibt es spezielle Erfordernisse, die im Konzept berücksichtigt werden müssen?

In Abschnitt 6.3 wurde ein Vergleich der Erkenntnisverläufe aller vier Gruppen, die an der ersten Workshop-Durchführung teilgenommen haben, vorgenommen. Unterschiede wurden vor allem in Bezug auf die Anzahl und Art der aufgetretenen Problemstellen und dem damit verbundenen Einsatz von Interventionen festgestellt. So gab es bei der ersten Durchführung eine Studierendengruppe, die abgesehen von einem kleinen Impuls, ihre Charakterisierung aufzuschreiben, keine Unterstützung benötigt hat, um die Definition nachzuerfinden. Umgekehrt gab es auch eine Gruppe, der die eingesetzten Interventionen nicht genügt haben und die daher mehrfach Analysis-Bücher zur Hilfe genommen hat. Dazwischen gab es zwei Gruppen, bei denen zwar mehrere der vorbereiteten Interventionen eingesetzt wurden, denen es mit dieser Unterstützung aber letztendlich gelungen ist, eine geeignete Charakterisierung zu formulieren.

Auch wenn die Erkenntnisverläufe der einzelnen Gruppen deutliche Unterschiede aufwiesen, so konnte dennoch eine gemeinsame Struktur dieser herausgearbeitet werden. Die erste Phase des Erkenntnisprozesses bestand aus einer Auseinandersetzung mit den Beispielen und einer begrifflichen Fassung charakteristischer Merkmale. Der nächste Schritt war das Finden einer einzigen Charakterisierung, die auf alle Beispiele zutrifft. Bei manchen Gruppen war dabei Unterstützung nötig. Anschließend folgte eine Phase der Optimierung der Formulierung, so dass diese so genau war, dass sie als Entscheidungsregel genutzt werden könnte. Damit dies erreicht wurde, mussten meist Interventionen eingesetzt werden. Die letzte Phase bestand schließlich aus dem Aufschreiben der finalen Charakterisierung.

Ungeeignet ist dieses Workshop-Konzept für Studierende, die sich nicht darauf einlassen, sich längere Zeit mit einer Aufgabe zu beschäftigen und ausschließlich an dem Ergebnis interessiert sind. Unabhängig davon, welche Beispielfolgen vorgegeben werden, wie die Aufgabenstellung formuliert ist und welche Unterstützungsangebote vorbereitet sind, werden diese Studierenden sich nicht auf die Aufgabe einlassen.

3. d) Welche Definitionen können die Studierenden mit Hilfe des Konzepts erarbeiten?

Mit Hilfe der vorbereiteten Unterstützungsangebote ist es fast allen Studierenden gelungen, die Definition der Folgenkonvergenz angeleitet nachzuerfinden. Da diese Frage für die zweite Durchführung des Workshops nicht analysiert wurde, werden hier nur

Ergebnisse der Teilnehmenden des ersten Workshops zusammengefasst. Die erste Gruppe ist zu folgendem Endergebnis gelangt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_k - g| < \epsilon \forall k \geq n, \text{ wobei } g \text{ der Grenzwert}$$

Dies entspricht exakt der üblichen formalen Definition der Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert. Um dieses Ergebnis zu erreichen, waren einzelne gezielte Fragen der Lehrperson und der Einsatz der ϵ -Streifen nötig, aber über die vorbereiteten Unterstützungsangebote hinaus wurde bei dieser Gruppe nicht interveniert.

Die zweite Gruppe hat die folgende finale Charakterisierung formuliert:

$$\text{Sei } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ eine Folge. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : |z - a_m| < x \forall n \leq m$$

Auch hier entspricht das Ergebnis der formalen Definition der Folgenkonvergenz. Die Studierenden haben diese Definition komplett eigenständig nacherfunden, es wurde lediglich an einer Stelle der Impuls gegeben, die mündlich formulierte Eigenschaft aufzuschreiben.

Die von der dritten Gruppe notierte Charakterisierung ist weniger formal als die übliche ϵ - N -Definition:

Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ existiert ein n_0 , für das alle weiteren Punkte in dem Schlauch der Breite 2ϵ liegen.

Auch wenn der letzte Teil der Charakterisierung nicht formal-mathematisch durch $|a_n - g| < \epsilon \forall n \geq n_0$ operationalisiert wurde, so haben die Studierenden dennoch die wesentlichen Aspekte der Definition nacherfunden und verstanden. Auch hier wurden mit gezielten Fragen und einer fiktiven Diskussion ausschließlich vorbereitete Interventionen eingesetzt.

Die vierte Gruppe hat folgende Charakterisierung als Ergebnis aufgeschrieben:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ gilt ab irgendeinem } n \ |a_n - x| < \epsilon$$

Im Vergleich zur üblichen formalen ϵ - N -Definition wurde hier „ab irgendeinem n “ nicht durch $\exists N \in \mathbb{N} \dots \forall n \geq N$ operationalisiert. Insbesondere wurde keine zweite Variable für die feste Zahl N im Gegensatz zu dem variablen Index n verwendet. Davon abgesehen kann bei dieser Gruppe nicht von einer eigenständigen Nacherfindung der Definition gesprochen werden. Die Studierenden haben mehrfach in Büchern nachgeschlagen und benötigten über die vorbereiteten Interventionen hinaus Unterstützung. Nachdem sie sich zunächst eine Weile eigenständig mit der Aufgabe beschäftigt hatten, waren sie irgendwann nicht mehr an der Nacherfindung selbst interessiert, sondern ausschließlich an dem Ergebnis. Dennoch haben diese Studierenden einige wichtige Aspekte der Definition

selbst entdeckt und andere zumindest nachvollzogen und verstanden.

Insgesamt ist der Nacherfindungsprozess somit bei drei von vier Gruppen erfolgreich verlaufen, denn diese Gruppen haben ausschließlich unter Verwendung vorbereiteter Unterstützungsangebote eine geeignete Charakterisierung formuliert. Diese Charakterisierungen entsprachen teilweise exakt der üblichen formalen Definition, teilweise waren sie etwas weniger formal.

Basierend auf den Ergebnissen der retrospektiven Analysen der ersten und zweiten Durchführung wurde das Workshop-Konzept schließlich ein weiteres Mal überarbeitet.

Bei einer Design-Based-Research-Studie bildet eine lokale Instruktionstheorie ein zentrales Ergebnis. Hier soll nun also dargestellt werden, unter welchen Bedingungen es gelingen kann, dass Mathematikstudierende eigenständig unter Anleitung die formale Definition der Konvergenz einer Folge nacherfinden.

Beitrag zu einer lokalen Instruktionstheorie zur eigenständigen, angeleiteten Nacherfindung der formalen Definition der Konvergenz einer Folge durch Mathematikstudierende

Als Beitrag zu einer solchen lokalen Instruktionstheorie werden hier Designprinzipien formuliert, die eine Verallgemeinerung der in Kapitel 6 und Abschnitt 7.3.2 präsentierten Ergebnisse darstellen. Das entwickelte Konzept für die angeleitete Nacherfindung der Definition besteht aus einer Menge vorgegebener (Nicht-)Beispiele konvergenter Folgen, aus einer Aufgabenstellung und aus verschiedenen Unterstützungsangeboten zu erwarteten Problemstellen. Die Designprinzipien sind daher nach diesen drei Bestandteilen gegliedert.

Designprinzipien zu der Menge der (Nicht-)Beispiele konvergenter Folgen

I.a) *Unter den vorgegebenen Beispielfolgen sollte von den folgenden Typen gegen einen Grenzwert a konvergenter Folgen jeweils mindestens eine Folge vorhanden sein:*

- *streng monotone Folgen*
- *konstante Folgen*
- *Folgen, die ab keinem N monoton sind*
- *Folgen, deren Folgenglieder ab einem sehr großen N (bspw. $N > 100000$) durch eine andere Vorschrift definiert sind als die übrigen Folgenglieder*
- *Folgen, bei denen unendlich viele Folgenglieder dem Grenzwert entsprechen, die aber nicht schließlich konstant sind*
- *Folgen, bei denen für die Teilfolge der vom Grenzwert verschiedenen Folgenglieder der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert ab keinem N monoton fallend ist*

Zum einen gilt es, die vorgegebenen Beispielfolgen so vielfältig zu wählen, dass – zumindest bei generischer Betrachtung der Beispielfolgen – keine geeigneten Charakterisierungen der vorgegebenen Folgen gefunden werden können, die nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge sind. Jede konkrete Beispielfolge

steht stellvertretend für eine der genannten Klassen konvergenter Folgen. Mit einer generischen Betrachtung der Beispielfolgen ist gemeint, dass die Studierenden eine Charakterisierung aller dieser Klassen von Folgen formulieren und nicht eine Eigenschaft, die lediglich auf die konkreten Beispielfolgen, aber nicht auf die kompletten Klassen von Folgen, welche die Beispiele repräsentieren, zutrifft. Die Studierenden, die an dem Workshop teilgenommen haben, haben die Beispielfolgen tatsächlich generisch betrachtet. Auch gab es keine Hinweise darauf, dass sie die konkreten Beispielfolgen als Stellvertreter anderer Klassen konvergenter Folgen angesehen haben als intendiert war.

Zum anderen wurden in Abschnitt 2.4 verschiedene eingeschränkte Vorstellungen zum Konvergenzbegriff dargestellt, denen entgegengewirkt werden soll, indem jeweils mindestens eine Beispielfolge vorgegeben ist, die nicht unter die eingeschränkte Vorstellung konvergenter Folgen fällt. Mindestens eine streng monotone Folge sollte gewählt werden, um an den möglicherweise vorhandenen Erfahrungsschatz der Studierenden zu konvergenten Folgen anzuknüpfen. Wenn sie in der Schule bereits konvergente Folgen behandelt haben, dann waren dies vermutlich streng monotone, konvergente Folgen wie $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Eine konstante Folge sollte vertreten sein, damit auch diese von den Studierenden in ihre *Concept Images* zu Folgen und zu konvergenten Folgen aufgenommen werden. Eine konstante Folge fällt weder unter die eingeschränkte Vorstellung des „immer näher Kommens“ an einen Grenzwert, noch unter die eingeschränkte Vorstellung, der Grenzwert dürfe nicht „erreicht“ werden (vgl. Abschnitte 2.4.3 und 2.4.5). Diese eingeschränkten Vorstellungen sollen dadurch von Anfang an verhindert werden. Des Weiteren sollte unter den vorgegebenen Beispielfolgen mindestens eine sein, die ab keinem N monoton ist, damit das *Concept Image* der Studierenden auch konvergente Folgen von diesem Typ umfasst. Auch sollte ein Beispiel einer konvergenten Folge gewählt werden, deren Folgenglieder ab einem sehr großen N durch eine andere Vorschrift definiert sind als die übrigen Folgenglieder. Ein Grund ist, dass das *Concept Image* der Studierenden zu Folgen auch abschnittsweise definierte Folgen beinhalten soll. Außerdem soll aufgrund eines solchen Beispiels deutlich werden, dass endlich viele Folgenglieder keinen Einfluss auf die Konvergenz und den Grenzwert einer Folge haben, wie viele es auch sind. Eine Folge, die den Grenzwert für unendlich viele Folgenglieder annimmt und gleichzeitig nicht schließlich konstant ist, sollte ebenfalls vertreten sein. Andernfalls könnte eine Formulierung, in der gesagt wird, der Grenzwert werde lediglich angenommen, wenn alle nachfolgenden Folgenglieder ebenfalls dem Grenzwert entsprechen, als Charakterisierung geeignet sein. Eine Studierendengruppe, die an der ersten Durchführung des Workshops im Rahmen dieses Forschungsprojekts teilgenommen hat, hat zwischenzeitlich eine derartige Charakterisierung vorgeschlagen (siehe Abschnitt 6.2.3). Außerdem sollte auch eine Folge gewählt werden, bei der für die Teilfolge der vom Grenzwert verschiedenen Folgenglieder der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert ab keinem N monoton fallend ist. Bei der zweiten Durchführung des Workshops war noch keine solche Folge im Konzept vorhanden. Eine Studierendengruppe aus dieser Durchführung hat – etwas umgangssprachlicher als hier dargestellt – als Charakterisierung formuliert, dass ab einem N für jedes Folgenglied a_n gilt, dass der Abstand zum Grenzwert g kleiner ist als der Abstand des Folgenglieds a_k zum Grenzwert, wobei $k = \max \{l \in \mathbb{N} : l < n, a_l \neq g\}$ (siehe

Abschnitt 7.3.2). Eine formale Präzisierung dieser Eigenschaft war tatsächlich als Charakterisierung der vorgegebenen Folgen geeignet, ist jedoch nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert.

- I.b) *Es sollte mindestens ein Nicht-Beispiel konvergenter Folgen vorgegeben sein. Dieses sollte den gemeinsamen Grenzwert der vorgegebenen Beispielfolgen als Häufungspunkt haben.*

Es ist mindestens ein Nicht-Beispiel konvergenter Folgen nötig, damit eine Abgrenzung möglich ist. Ansonsten wären zahlreiche Charakterisierungen der vorgegebenen Beispielfolgen möglich. In einer Interventionsstudie von Roh (2005) haben einige Studierende die Eigenschaft, dass sich in jedem beliebigen ϵ -Streifen um einen Wert unendlich viele Folgenglieder befinden, als geeignete Verbalisierung bewertet. Manchen von ihnen war dabei bewusst, dass eine Folge nach dieser „Definition“ mehrere Grenzwerte besitzen kann, anderen war dies nicht bewusst (vgl. Abschnitt 2.5.3). Damit Formulierungen, die nicht nur auf Folgen mit einem Grenzwert, sondern auch auf Folgen mit mindestens einem Häufungspunkt zutreffen, nicht als Charakterisierung geeignet sind, sollte ein vorgegebenes Nicht-Beispiel den gemeinsamen Grenzwert der Beispielfolgen als Häufungspunkt besitzen.

Ein Nicht-Beispiel konvergenter Folgen deckt natürlich nicht die gesamte Breite von Folgen, die nicht gegen den gemeinsamen Grenzwert der vorgegebenen Beispielfolgen konvergieren, ab. Dennoch haben die beiden Durchführungen des Workshops und deren Analysen gezeigt, dass ein derartiges Nicht-Beispiel ausreichend sein kann, damit Studierende die Definition der Konvergenz einer Folge nacherfinden.

Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung

- II) *In der Aufgabenstellung sollten die folgenden Aspekte expliziert sein:*

- *Die Definition soll auf Basis der vorgegebenen (Nicht-)Beispielfolgen entdeckt werden.*

Sowohl aus dem Alltagssprachlichen Gebrauch der Wörter als auch aus der Schule haben die meisten Studierenden bereits Vorverständnisse zu den Begriffen Grenzwert, Limes oder auch Konvergenz. Die Analyse der ersten Durchführung des Workshops hat ergeben, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zum Teil bei der Nacherfindung der Definition auf Basis ihrer Vorverständnisse argumentiert haben anstatt auf Basis der vorgegebenen (Nicht-)Beispielfolgen. Das hatte teilweise zur Folge, dass Vorschläge für „Definitionen“ formuliert wurden, die nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrafen. In einem Fall war es sogar so, dass ein Student darauf bestanden hat, an seinem Vorverständnis, das von „Annähern ohne Erreichen“ geprägt war, festzuhalten, manche der vorgegebenen Beispielfolgen darauf basierend nicht als konvergent akzeptiert hat und sich somit nicht auf die Aufgabenstellung eingelassen hat – siehe Abschnitte 6.2.5 und 6.3. Um dies zu vermeiden, sollte durch die Aufgabenstellung deutlich gemacht werden, dass es sich bei der nachzuerfindenden Definition um einen Begriff handelt, der möglicherweise von den Vorverständnissen zu konvergenten Folgen abweicht. Die Studierenden sollen ihre Vorverständnisse bei der Nacherfindung nicht komplett ausblenden, was sicherlich auch schwer möglich wäre. Die Analysen der Studierendendiskussionen haben ergeben, dass sich

Vorverständnisse, die in die Erkenntnisprozesse eingegangen sind, in einigen Fällen förderlich auf diese ausgewirkt haben. Lediglich wenn manche der vorgegebenen Beispielfolgen nicht als konvergente Folgen akzeptiert wurden, hat sich dies hinderlich ausgewirkt.

- *Die Definition soll so präzise formuliert werden, dass sie als objektives, eindeutiges Entscheidungskriterium genutzt werden kann, und zwar prinzipiell auch für alle anderen Folgen.*

Wie in Abschnitt 2.2 dargestellt wurde, haben Studierende das Konzept „Definition“ meist nur implizit kennengelernt und sie wissen nicht unbedingt, dass eine Funktion von Definitionen ist, mit ihnen entscheiden zu können, ob ein Objekt zu einem bestimmten Konzept gehört oder nicht. Daher muss offengelegt werden, dass die nachzuerfindende Definition dieser Anforderung genügen soll. Bei der Durchführung der ersten Version des Workshop-Konzepts, bei der dieser Aspekt noch nicht explizit in der Aufgabenstellung vorhanden war, waren fast alle teilnehmenden Studierendengruppen zu mindestens einem Zeitpunkt mit einer „Definition“ zufrieden, die nicht die nötige Präzision aufweist, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können (siehe Abschnitt 6.3). Bei der zweiten Version des Workshop-Konzepts wurde in der Aufgabenstellung ergänzt, die Eigenschaft müsse so gut formuliert werden, dass für jede beliebige Folge entschieden werden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Dennoch hat auch in dem Fall die Analyse der Erkenntnisprozesse ergeben, dass die Studierenden zum Teil mit „Definitionen“ zufrieden sind, die dieser Anforderung nicht gerecht werden (siehe Abschnitt 7.3.2). Es gibt Hinweise darauf, dass die Studierenden der Meinung sind, sie könnten derartige Formulierungen als Entscheidungskriterium nutzen und möglicherweise könnten sie selbst das auch tatsächlich. Die eigentliche Anforderung ist jedoch, dass jeder, der die Formulierung als Entscheidungsregel nutzt, damit zu derselben Entscheidung gelangt. Es muss sich also um ein objektives, eindeutiges Entscheidungskriterium handeln. Ein zentrales Ergebnis der Analyse der Erkenntnisprozesse ist, dass die Studierenden erst lernen müssen, dass eine Definition dieser Anforderung genügen muss.

- *Formulierte Definitionen sollen jeweils dahingehend getestet werden, ob sie auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutreffen und auf das beziehungsweise die Nicht-Beispiel(e) nicht zutreffen.*

Bei einer Nacherfindung einer Definition basierend auf vorgegebenen (Nicht-) Beispielen würde zu einer idealtypischen Vorgehensweise auch gehören, formulierte „Definitionen“ jeweils an allen vorgegebenen Beispielen und Nicht-Beispielen zu testen und die Definition anschließend bei Bedarf zu überarbeiten. Dies wurde auch in den hypothetischen Erkenntnisverläufen in Abschnitt 4.2.3 formuliert. Bei der Analyse der tatsächlichen Erkenntnisverläufe aus beiden Durchführungen des Workshops war jedoch ein Ergebnis, dass die meisten Studierenden nicht mit einer derartigen Systematik vorgehen (siehe Abschnitte 6.3 und 7.3.2). So haben manche Gruppen Eigenschaften formuliert, die nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutreffen oder auf das vorgegebene Nicht-Beispiel zutreffen, und sie haben dies entweder eher zufällig bemerkt oder erst durch eine Intervention. Da eine solche Systematik für einen erfolgreichen,

eigenständigen Nacherfindungsprozess bedeutsam ist, sollen die Studierenden explizit dazu angeleitet werden.

Eine Aufgabenstellung, die diese Designprinzipien erfüllt, ist die Folgende:

Wir wollen die hochschulmathematische Definition der Konvergenz einer Folge gegen 1 entdecken. Der Begriff soll dabei so definiert werden, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen den Grenzwert 1 sind und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

Versucht eine gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht besitzt, durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Diese Bedingung muss so gut formuliert werden, dass jemand, dem diese Formulierung gegeben wird, für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Jeder, dem diese Formulierung gegeben wird, soll damit zu derselben Entscheidung gelangen, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt.

Wenn ihr der Meinung seid, eine geeignete Eigenschaft formuliert zu haben, prüft für alle vorgegebenen Beispielfolgen, ob sie die formulierte Eigenschaft besitzen. Prüft auch, ob die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft nicht besitzt. Falls etwas davon nicht der Fall ist, überarbeitet die formulierte Eigenschaft.

Designprinzipien zu den Unterstützungsangeboten Tritt bei einer Studierenden-Gruppe ein Problem auf, das diese nicht eigenständig lösen kann, so sollte die Lehrperson intervenieren, damit die Studierenden sich weiter mit der Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz beschäftigen und neue Erkenntnisse gewinnen. Da es gerade bei mehreren gleichzeitig teilnehmenden Studierendengruppen schwierig ist, spontan geeignet zu intervenieren, sollten für erwartete Problemstellen Unterstützungsangebote vorbereitet sein.

Oehrtman et al. (2014) haben Problemstellen in „Problems“ und „Problematic Issues“ unterschieden (vgl. Abschnitt 2.5.4). Ersteres sind Probleme, welche die Studierenden als solche wahrnehmen, für die sie allerdings keine Lösung wissen. „Problematic Issues“ hingegen sind Situationen, die aus Mathematikersicht problematisch sind, mit denen die Studierenden selbst jedoch zufrieden sind. Oehrtman et al. (2014) haben diese Unterscheidung im Forschungsprozess vorgenommen, weil bei „Problems“ und „Problematic Issues“ unterschiedlich interveniert werden sollte. Für die meisten erwarteten Problemstellen in diesem Konzept waren ebenfalls verschiedene Unterstützungsangebote vorgesehen, je nachdem ob die Studierenden das Problem als solches wahrgenommen haben oder ob sie selbst mit der von ihnen formulierten Eigenschaft zufrieden waren. Im letzteren Fall sind meist kleinere verbale Impulse vorgesehen, welche die Studierenden auf das Problem aufmerksam machen. Bei Problemen, welche die Studierenden als solche wahrnehmen, für die sie jedoch eigenständig keine Lösung finden, sind hingegen meist invasivere Unterstützungen wie fiktive Diskussionen nötig, um den Erkenntnisprozess voranzutreiben. Darauf wird nun zu den einzelnen Problemstellen, die bei den beiden Erprobungen des Workshops aufgetreten sind, eingegangen. Lediglich eine Problemstelle, für die ein Un-

terstützungsangebot vorgesehen war, ist weder bei der Durchführung der ersten Version noch der zweiten Version des Workshops aufgetreten:

Die Studierenden finden keinen Ansatz, sie sind möglicherweise mit der Menge an Beispielen überfordert. (Situation (1.1))

Für eine solche Situation war zunächst als strategischer Impuls vorgesehen, den Studierenden vorzuschlagen, zunächst nur eine Teilmenge der vorgegebenen Beispielfolgen zu betrachten und anschließend weitere Beispielfolgen hinzuzuziehen. Zusätzlich war als weiteres Unterstützungsangebot eine fiktive Diskussion vorbereitet, die größtenteils von Przenioslo (2005) übernommen wurde. Darin bearbeiten vier fiktive Charaktere dieselbe Aufgabe, wobei sie zunächst nur zwei der Beispielfolgen betrachten und später nach und nach die weiteren Beispielfolgen einbeziehen. Die Studierenden, die diese fiktive Diskussion durcharbeiten, sollen jeweils einen Abschnitt lesen, dann eine Frage dazu beantworten, wieder weiter lesen und so weiter. Diese fiktive Diskussion samt Zwischenfragen ist ab Seite 94 zu finden.

III) *Die folgenden Problemstellen sind in mindestens einer der beiden Durchführungen des Workshops aufgetreten:*

Die Studierenden formulieren eine nicht passende Eigenschaft, prüfen jedoch nicht selbständig, ob diese auf alle Beispiele zutrifft und auf das Nicht-Beispiel nicht. (Situation (1.2))

Wie bereits bei den Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung diskutiert, wurde dies als eine häufige Problemstelle identifiziert. Dies könnte auch damit zusammenhängen, dass in beiden erprobten Versionen des Workshop-Konzepts keine explizite Aufforderung zur Überprüfung der „Definition“ an den vorgegebenen Folgen in der Aufgabenstellung enthalten war. Dennoch könnte diese Problemstelle auch dann auftreten, wenn eine solche Aufforderung in der Aufgabenstellung formuliert ist. Für eine solche Situation war vorgesehen, dass die Lehrperson die Studierenden auffordert, die formulierte Eigenschaft an allen Beispielfolgen und dem Nicht-Beispiel zu überprüfen. Falls ihnen dabei nicht auffällt, dass die Eigenschaft nicht als Charakterisierung geeignet ist, so sollen die Studierenden auf ein Beispiel hingewiesen werden, auf das die Eigenschaft nicht zutrifft, beziehungsweise auf das Nicht-Beispiel, falls die Eigenschaft auf dieses zutrifft.

- *Den Studierenden gelingt es nicht, **eine** gemeinsame Eigenschaft zu finden. Stattdessen haben sie die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt, die sie durch „oder“ miteinander verbunden haben.*

Diese Problemstelle wurde noch in speziellere Problemstellen unterteilt, um die Interventionen passgenauer gestalten zu können:

- * *Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass die Folgenglieder sich 1 annähern oder 1 erreichen. (Situation (2.1))*
- * *Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird oder 0 bleibt. (Situation (2.2))*
- * *Den Studierenden gelingt es nicht, **eine** gemeinsame Eigenschaft zu finden. Stattdessen haben sie die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt, die sie durch „oder“ miteinander verbunden haben, wobei sich die*

*Formulierung unter keine der Situationen (2.1) und (2.2) einordnen lässt.
(Situation (2.3))*

Przenioslo (2005) hatte als einen möglichen Zwischenschritt bei der Aufgabebearbeitung genannt, dass die vorgegebenen Beispielfolgen zunächst zu mehreren Gruppen von Folgen zusammengefasst werden, und diese erst anschließend zu einer einzigen Eigenschaft zusammengefasst werden. Dies ließ sich auch bei Studierendengruppen aus dieser Studie beobachten. Die Studierenden waren mit ihren durch mehrere Bedingungen formulierten Eigenschaften zufrieden; sie hatten kein Bedürfnis, diese durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Es war schwierig, dieses Bedürfnis durch verbale Impulse zu wecken. Außerdem hat sich gezeigt, dass die Formulierungen, in denen die Eigenschaft durch mehrere Bedingungen ausgedrückt wurde, gleichzeitig nicht so genau waren, dass sie als objektives Entscheidungskriterium benutzt werden könnten. Bei den bisherigen Durchführungen des Workshops war es deutlich einfacher, die Studierenden zu motivieren, diesen Mangel in der formulierten Eigenschaft zu beheben als sie davon zu überzeugen, die Eigenschaft durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Wenn es den Studierenden des Workshops gelungen ist, die Eigenschaft genau genug zu formulieren, dann haben sie diese letztendlich durch eine einzige Bedingung ausgedrückt, ohne dass sie dazu aufgefordert werden mussten. Daher können bei dieser Problemstelle Interventionen eingesetzt werden, die das Ziel haben, eine Präzisierung der Formulierung zu initiieren. Auf diese wird bei der nächsten Problemstelle eingegangen.

- *Eine von den Studierenden formulierte „Definition“ ist nicht präzise genug, um sie als objektives, eindeutiges Entscheidungskriterium nutzen zu können*

Es kann vorkommen, dass eine Studierendengruppe eine „Definition“ formuliert und nicht bemerkt, dass diese der Anforderung, als objektives, eindeutiges Entscheidungskriterium genutzt werden zu können, nicht genügt. Es kann auch vorkommen, dass Studierenden zwar bewusst ist, dass eine von ihnen formulierte „Definition“ nicht präzise genug ist, um sie als objektive, eindeutige Entscheidungsregel zu nutzen, dass es ihnen jedoch nicht gelingt, die Formulierung derart zu überarbeiten, dass mit der „Definition“ für jede beliebige Folge objektiv und eindeutig entschieden werden könnte, ob sie gegen den Grenzwert a konvergiert oder nicht. Auch diese Problemstelle ist daher trotz der Explizierung der genannten Anforderung in der Aufgabenstellung zu erwarten. Sowohl bei der Erprobung der ersten Version des Workshop-Konzepts als auch bei der zweiten Version sind beide genannten Varianten dieser Problemstelle mehrfach aufgetreten, wie die Analysen der tatsächlichen Erkenntnisverläufe ergeben haben (siehe Abschnitte 6.3 und 7.3.2). Diese Problemstelle wurde noch einmal in vier speziellere Problemstellen aufgefächert:

- * *Die Eigenschaft wird als Annäherung an 1 beschrieben. (Situation (3.1))*
- * *Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 klein wird. (Situation (3.2))*
- * *Die Eigenschaft wird dadurch charakterisiert, dass der Abstand der Folgenglieder zu 1 für große n beliebig klein wird. (Situation (3.3))*

- * *Die Eigenschaft ist nicht so genau formuliert, dass damit bei jeder beliebigen Folge entschieden werden kann, ob sie diese Eigenschaft erfüllt oder nicht, und die Formulierung lässt sich unter keine der Situationen (3.1), (3.2) und (3.3) einordnen. (Situation (3.4))*

Alle „Definitionen“, die unter eine der Situationen (2.1) bis (2.3) und (3.1) bis (3.4) fallen, haben gemeinsam, dass in ihnen kein umgekehrtes Denken nach Roh (2005) erkennbar ist. Bei dem Schritt zum umgekehrten Denken handelt es sich um einen wesentlichen Schritt innerhalb des Nacherfindungsprozesses, der den wenigsten Studierenden, die an einem der Workshops im Rahmen dieser Arbeit teilgenommen haben, ohne Unterstützung gelungen ist. Für diese Problemstellen sollte unbedingt eine geeignete Intervention vorbereitet sein, damit der Nacherfindungsprozess dennoch erfolgreich gelingen kann. Für den Fall, dass den Studierenden die Problematik ihrer formulierten Eigenschaft nicht bewusst ist, sollen sie – unabhängig davon, welche von den einzelnen Situationen vorliegt – zunächst gefragt werden, ob mit ihrer Formulierung für jede beliebige Folge objektiv entschieden und nachgewiesen werden kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Falls den Studierenden bewusst ist, dass ihre Formulierung dieser Anforderung nicht genügt, so sollen sie bei dem Schritt zum umgekehrten Denken unterstützt werden. Dazu eignen sich die ϵ -Streifen, die auch von Roh (2005) zur Unterstützung des umgekehrten Denkens vorgeschlagen wurden. In Abschnitt 7.4.2 sind außerdem Anweisungen und Fragen zu finden, die Studierenden zusammen mit den ϵ -Streifen ausgehändigt werden können, so dass sie zur Beschäftigung mit diesen angeleitet werden. Auch dieses Unterstützungsangebot ist für alle der Situationen (2.1) bis (2.3) und (3.1) bis (3.4) vorgesehen. Sofern diese Intervention nicht ausreicht, so kann eine fiktive Diskussion eingesetzt werden, in welcher der Schritt zum umgekehrten Denken vollzogen wird. Der Beginn der fiktiven Diskussion unterscheidet sich, je nachdem welche der einzelnen Situationen vorliegt, damit die Ausgangssituation der fiktiven Diskussion der Situation, in der sich die Studierenden in dem Moment befinden, so ähnlich wie möglich ist. Im Fall der Situation (2.1) lautet die erste fiktive Aussage somit, es würden sich alle Folgen der 1 nähern oder sie seien ab irgendeinem Punkt nur noch 1. Die für die Situation (2.2) vorgesehene fiktive Diskussion beginnt mit der Äußerung, die Differenz von den Folgengliedern zu 1 werde klein oder 0. Bei der Situation (3.1) wird eine fiktive Diskussion eingesetzt, in deren erster Äußerung formuliert ist, die Folgen würden sich alle 1 annähern. Im Fall der Situation (3.2) lautet die erste Aussage der fiktiven Diskussion, die Differenz der Folgenglieder zu 1 werde klein. In allen fiktiven Diskussionen zu den bisher genannten Situationen werden die Studierenden zunächst zu einer Formulierung, der Abstand der Folgenglieder zu 1 werde beliebig klein, angeleitet. Die für die Situation (3.3) vorgesehene Diskussion beginnt hingegen mit der fiktiven Äußerung, der Abstand der Folgenglieder zu 1 werde beliebig klein. Der weitere Verlauf aller fiktiven Diskussionen ist nun identisch. Die Studierenden werden darin zu dem Übergang zum umgekehrten Denken angeleitet. Ist die Eigenschaft im Anschluss daran weiterhin ungenau formuliert, so sollen die Studierenden dazu aufgefordert werden, die Eigenschaft aufzuschreiben. Bei der ersten Durchführung des Workshops hat dieser Impuls,

sofern er eingesetzt wurde, zu einer Präzisierung der Formulierung geführt. Den Studierenden war anscheinend bewusst, dass an eine schriftlich notierte Definition andere Ansprüche in Bezug auf die Präzision gestellt werden als an eine mündlich formulierte Eigenschaft.

- *Die Studierenden haben mündlich eine geeignete Eigenschaft formuliert, doch es gelingt ihnen nicht, diese formal-mathematisch aufzuschreiben.*

Die Analyse der Nacherfindungsprozesse aus den Durchführungen des Workshops hat ergeben, dass durch den Impuls, die Eigenschaft aufzuschreiben, bei einigen Studierendengruppen das Bedürfnis entstanden ist, die Eigenschaft formaler auszudrücken, geführt hat. Den Studierenden war anscheinend bewusst, dass an eine aufgeschriebene Definition üblicherweise andere Anforderungen in Bezug auf den Präzisierungsgrad gestellt werden als an eine mündlich formulierte Eigenschaft. Bei dem Versuch, diese Formalisierung vorzunehmen, wurden die folgenden Problemstellen identifiziert:

- * *Die Studierenden haben mündlich formuliert, dass die Bedingung für immer kleiner werdendes oder „beliebig kleines“ ϵ gelten soll und es gelingt ihnen nicht, diesen Aspekt formal-mathematisch durch $\forall \epsilon > 0$ auszudrücken. (Situation (4.1))*
- * *Die Studierenden haben mündlich formuliert, dass die Bedingung ab einem n gelten soll und es gelingt ihnen nicht, diesen Aspekt formal-mathematisch durch $\exists N \in \mathbb{N} \dots \forall n \geq N$ auszudrücken. (Situation (4.2))*

Das Ersetzen einer Formulierung wie „für immer kleiner werdendes ϵ “ oder „für beliebig kleines ϵ “ durch den Ausdruck $\forall \epsilon > 0$ hat bei den meisten beobachteten Studierendengruppen eine Problemstelle gebildet (Situation (4.1)). Als Interventionen sind für diese Fälle gezielte Nachfragen vorgesehen. Insbesondere die Frage, wie die Studierenden nachweisen würden, dass eine Folge die von ihnen formulierte Eigenschaft besitzt, kann hier geeignet sein. Swinyard und Larsen (2012) haben argumentiert, dass Überlegungen, wie die Eigenschaft nachgewiesen werden könnte, die Nacherfindung der Definition vorantreiben können, da dies in der geschichtlichen Entwicklung der Definition der Konvergenz ebenfalls der Fall gewesen sei. In dieser konkreten Situation könnten die Studierenden durch die Nachfrage darauf aufmerksam werden, dass sie die formulierte Bedingung nicht „für immer kleiner werdendes ϵ “ überprüfen können, da sie die Bedingung nur für endlich viele Werte von ϵ testen können. Bei der Formulierung „für beliebig kleines ϵ “ wird ihnen vermutlich bewusst, dass eine Operationalisierung nötig ist. In beiden Fällen könnte die Frage nach dem Nachweis dieser Eigenschaft den Nacherfindungsprozess somit vorantreiben.

Der Übergang von einer Formulierung wie „ab einem n “ zur Formalisierung $\exists n_0 \in \mathbb{N} \dots \forall n \geq n_0$, mit dem auch die Verwendung einer zusätzlichen Variablen, hier n_0 , verbunden ist, wurde in den Analysen der Erkenntnisverläufe der ersten Durchführung des Workshops teilweise ebenfalls als Problemstelle identifiziert (Situation (4.2)). Auch für diese Situation wird vorgeschlagen, den Studierenden die Frage zu stellen, wie sie die Eigenschaft bei einer Folge nachweisen würden. Dieser Nachweis kann nur geeignet durchgeführt werden, wenn – zu jedem beliebigen $\epsilon > 0$ – eine natürliche Zahl N angegeben werden kann,

so dass die geforderte Bedingung für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ erfüllt ist.

- *Die formulierte Eigenschaft trifft auf alle vorliegenden Beispiele zu und auf das Nicht-Beispiel nicht. Die Eigenschaft ist jedoch nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1. (Situation (0))*

Auch wenn die vorgegebenen Beispielfolgen sorgfältig ausgewählt wurden, kann nicht ausgeschlossen werden, dass Studierende eine Eigenschaft formulieren, die diese geeignet charakterisiert, ohne äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge zu sein. In einem solchen Fall sollten die Studierenden dafür gelobt werden, dass ihnen eine Charakterisierung gelungen ist. Um zu erreichen, dass die Studierenden sich weiter mit der Nacherfindung der Konvergenzdefinition beschäftigen, sollte in diesem Fall ein weiteres Beispiel oder Nicht-Beispiel vorgegeben werden, für das die formulierte Eigenschaft nicht geeignet ist. In gewissem Sinne verändert ein nachträglich hinzugefügtes Beispiel oder Nicht-Beispiel die ursprüngliche Aufgabenstellung. In den Fällen, in denen dies bisher nötig war, haben die Studierenden dies jedoch akzeptiert.

8.1.3 Nachweis eines Effekts der Workshopteilnahme auf die Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff

Um zu untersuchen, ob sich ein Effekt der Workshopteilnahme nachweisen lässt, wurden die Personenfähigkeiten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Workshops mit zwei Kontrollgruppen verglichen. Zunächst mussten sich die Studierenden für den Workshop bewerben und aus diesen Bewerberinnen und Bewerbern wurde die Hälfte zur Teilnahme am Workshop ausgelost. Die andere Hälfte bildete die kleine Kontrollgruppe. Aus dieser kleinen Kontrollgruppe haben jedoch nur sieben Studierende an beiden Tests teilgenommen, so dass es nicht verwunderlich ist, dass bei diesem Vergleich kein signifikanter Unterschied festgestellt werden konnte. Daher wurde zusätzlich eine große Kontrollgruppe betrachtet. Diese besteht aus den 72 Studierenden, welche die Analysis-1-Vorlesung zum ersten Mal besucht haben und beide Tests bearbeitet haben. Ein Nachteil ist jedoch, dass Unterschiede zwischen der Experimental- und dieser Kontrollgruppe hinsichtlich der Motivation und anderen Faktoren vorhanden sein könnten. Zumindest die Unterschiede in Bezug auf das Vorwissen wurden in Form der Personenfähigkeiten im „Vortest“ berücksichtigt. So wurden für beide Dimensionen die Differenzen zwischen den Personenfähigkeiten in der jeweiligen Dimension des „Nachtests“ und den Personenfähigkeiten im „Vortest“ berechnet und mit dem Mann-Whitney-U-Test auf Unterschiede zwischen den Gruppen untersucht. Bei beiden Dimensionen konnte kein signifikanter Unterschied nachgewiesen werden, was auch an dem kleinen Stichprobenumfang der Experimentalgruppe liegen könnte.

Zusätzlich wurde untersucht, ob sich in Bezug auf die Ziele des Workshops ein Effekt nachweisen lässt. Dazu wurde ein Subtest des „Nachtests“ gebildet, der aus allen Items besteht, die explizit Ziele des Workshops abfragen. Auch dieser Test wurde nach der Item-Response-Theorie skaliert, wobei sich ein eindimensionales Partial-Credit-Modell als das beste unter den getesteten Modellen erwiesen hat. Die Reliabilität des Subtests ist mit 0,813 als gut zu bewerten. Für die Gruppenvergleiche wurden wieder die Differenzen zwi-

schen den Personenfähigkeiten im Subtest des „Nachtests“ und den Personenfähigkeiten im „Vortest“ betrachtet. Im Vergleich mit der kleinen Kontrollgruppe ließ sich erneut kein signifikanter Unterschied nachweisen. Wenn die Forderung nach 5% Signifikanz leicht abgeschwächt wird, lässt sich zwischen der Experimentalgruppe und der großen Kontrollgruppe zumindest eine kleine bis mittlere Effektstärke ($r = -0,215$, $p = 0.051$) nachweisen. Die Differenz zwischen der Personenfähigkeit im Subtest des „Nachtests“ und der im „Vortest“ ist bei der Experimentalgruppe tendenziell größer als bei der großen Kontrollgruppe. Es gibt somit Hinweise darauf, dass die Workshopteilnahme sich positiv auf die Vorstellungen und Fähigkeiten zum Konvergenzbegriff auswirkt und es ist zu vermuten, dass dies bei einem größeren Stichprobenumfang zu signifikanteren Unterschieden geführt hätte.

8.2 Beitrag dieser Arbeit für die mathematikdidaktische Forschung

In Kapitel 2 wurde dargelegt, dass zwar bereits zahlreiche Forschungsarbeiten zum Themenbereich Konvergenz von Folgen vorhanden sind, dennoch wurde eine Forschungslücke ausgemacht. Viele Publikationen thematisieren den Grenzwertbegriff im Rahmen der schulischen Ausbildung. Andere wiederum beschäftigen sich mit College-Studierenden in den USA oder Studierenden mit einem von Mathematik verschiedenen Hauptfach als Zielgruppe. In der Schule wird der Grenzwertbegriff eher intuitiv und wesentlich weniger formal behandelt als in einer üblichen Analysis-1-Vorlesung für Mathematikstudierende. Auch an Colleges ist der Fokus des Themas deutlich anders und die Studierenden selbst unterscheiden sich ebenfalls. Es wäre denkbar, dass manche Schwierigkeiten, die bei Schülerinnen und Schülern oder College-Studierenden beobachtet wurden, bei universitären Mathematikstudierenden weniger oder gar nicht auftreten. Andererseits könnten durch die formelere Behandlung und den höheren Fokus auf Beweisen auch Schwierigkeiten entstehen, die bei Schülerinnen und Schülern oder College-Studierenden nicht festgestellt wurden. Insofern liegt hier eine Forschungslücke vor. Die vorliegende Arbeit kann diese Lücke nicht vollständig schließen, doch sie liefert einige Ergebnisse darüber, welche Schwierigkeiten Teilnehmerinnen und Teilnehmer einer Analysis-1-Veranstaltung beim Nacherfinden der formalen Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge haben und welche Vorstellungen und Fähigkeiten sie nach der Behandlung des Themenbereichs aufgebaut haben.

Das Konzept für die Nacherfindung der Konvergenz-Definition, das Przenioslo (2005) entwickelt und mit Schülerinnen und Schülern durchgeführt hat, wurde zuvor noch nicht durch eine wissenschaftliche Studie begleitet und auf seine Wirksamkeit untersucht. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Konzept in einer Design-Based-Research-Studie weiter ausgearbeitet und für den Einsatz in Form eines Workshops an der Universität übertragen. In der retrospektiven Analyse der Erkenntnisprozesse der Studierenden, die an diesem Workshop teilgenommen haben, wurde sowohl das Ziel verfolgt, herauszufinden, wie das Konzept verbessert werden kann, als auch, die Wirksamkeit des Workshops zu untersuchen. Um letzteres Ziel zu erreichen, wurde zusätzlich eine quantitative Studie durchgeführt, in der die Kenntnisse und Vorstellungen der Workshopteilnehmerinnen und -teilnehmer unter Berücksichtigung des Vorwissens mit denen der übrigen Studierenden

der zugehörigen Analysis-1-Vorlesung verglichen wurden.

Das ursprüngliche Konzept von Przenioslo (2005) besteht aus einer Aufgabenstellung, einer Menge aus vorgegebenen Beispielfolgen und einem Nicht-Beispiel, sowie aus fiktiven Diskussionen mit dazugehörigen Fragestellungen, die bei Bedarf zusätzlich eingesetzt werden können, um die Lernenden dabei zu unterstützen, die gemeinsame Eigenschaft der vorgegebenen Beispielfolgen herauszufinden. Im Vergleich dazu wurde die Aufgabenstellung wesentlich genauer ausgearbeitet, sie enthält nun Anweisungen, um die Studierenden zu einem systematischen Vorgehen anzuleiten und explizit zu machen, welchen Anforderungen die nacherfundene Definition genügen soll. Beides war bei Przenioslo (2005) nicht der Fall. Ein Teil der Beispielfolgen wurde beibehalten, manche wurden leicht verändert, und sie wurden um eine weitere Beispielfolge ergänzt. Letzteres hat sich als notwendig erwiesen, da es zuvor einer Studierendengruppe gelungen ist, eine Eigenschaft zu formulieren, die auf alle anderen vorgegebenen Beispielfolgen im Gegensatz zu dem Nicht-Beispiel zutrifft, jedoch nicht äquivalent zur Konvergenz gegen 1 war. Die fiktiven Diskussionen wurden ebenfalls verändert. Sie wurden einerseits durch die Verwendung von echten Studierendenäußerungen authentischer gestaltet und andererseits an speziellere Problemsituationen angepasst, so dass die Studierenden passgenauer unterstützt werden können. Zusätzlich wurde eine von Roh (2005) entwickelte Visualisierung in Form von ϵ -Streifen in das Konzept aufgenommen. Die fiktiven Diskussionen und die ϵ -Streifen wurden um weitere Unterstützungsangebote ergänzt, die aus mündlichen Impulsen der Lehrperson bestehen. Es wurde genau ausgearbeitet, welche Problemstellen während der Nacherfindungsprozesse der Studierenden auftreten können und welches der vorbereiteten Unterstützungsangebote jeweils verwendet werden sollte. Insgesamt ist so ein transparentes und wesentlich genauer ausgearbeitetes Konzept entstanden, wie Studierende zur Nacherfindung der Konvergenzdefinition angeleitet werden können.

Des Weiteren wurde erstmalig die Umsetzung dieses Konzepts empirisch genau untersucht. Insgesamt haben im Rahmen dieser Fallstudie sieben Studierendengruppen an dem Workshop teilgenommen und ihre Erkenntnisprozesse wurden analysiert. Bei fünf dieser Gruppen sind die Nacherfindungen als erfolgreich zu bewerten, da es den Studierenden auf Basis der vorgegebenen Menge von Beispielfolgen mit eventuellem Einsatz von vorbereiteten Unterstützungsangeboten gelungen ist, eine Charakterisierung zu formulieren, die äquivalent zur üblichen formalen ϵ - N -Definition der Konvergenz einer Folge gegen den Grenzwert 1 ist. Bei den beiden anderen Gruppen lässt sich dies nicht uneingeschränkt sagen: in einem dieser beiden Fälle haben die Studierenden mehrfach in Büchern nachgeschlagen, wodurch die Nacherfindung nicht eigenständig erfolgt ist. In der anderen Gruppe gab es eine Studentin, die nicht bereit war, sich länger als ein paar Minuten mit der Aufgabe zu beschäftigen, und ausschließlich an der Lösung der Aufgabe interessiert war. Diese Studentin hat die gesamte Gruppe sehr dominiert, so dass eine eigenständige Nacherfindung kaum möglich war. Für solche Studierende, die nicht motiviert sind, sich über eine längere Zeit mit einer Aufgabe zu befassen, ist das Konzept der angeleiteten Nacherfindung einer Definition definitiv nicht geeignet, unabhängig von der genauen Umsetzung. Bei diesen Personen ist jedoch auch fraglich, inwiefern sie sich für ein Mathematikstudium eignen.

Bei der Mehrheit der Studierenden hingegen sind die Nacherfindungen erfolgreich verlaufen. Die Studierenden haben nicht nur am Ende des Prozesses die Definition

nacherfunden, sondern es wurden auch verschiedene neue Erkenntnisse initiiert. Viele der Studierenden haben ihr *Concept Image* zu konvergenten Folgen auf Basis der vorgegebenen Beispielfolgen erweitert und auch die persönlichen *Concept Definitions* wurden angepasst.

Zusätzlich wurde mit Hilfe zweier Testinstrumente untersucht, ob sich unter Berücksichtigung des Vorwissens der Studierenden Unterschiede zwischen den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Workshops und den übrigen Studierenden aus der Analysis-1-Vorlesung nachweisen lassen. Bei Betrachtung des gesamten „Nachtests“, in dem versucht wurde, den Themenbereich Konvergenz von Folgen möglichst vollständig durch Items abzudecken, lässt sich kein signifikanter Unterschied feststellen. Bei einer Einschränkung auf die Items, welche die wesentlichen Ziele des Workshops prüfen, ist hingegen ein kleiner, signifikanter Unterschied nachweisbar. Dass bei dem gesamten „Nachtest“ kein Unterschied und bei der Teilmenge der Items lediglich ein kleiner Unterschied festgestellt werden kann, hängt zum einen mit den kleinen Stichprobengrößen zusammen. Vor allem die Experimentalgruppe ($n = 10$) ist sehr klein, was es schwierig macht, überhaupt Unterschiede nachzuweisen. Zum anderen war zwischen dem Einsatz des „Vortests“ und des „Nachtests“ eine zeitliche Spanne von mehreren Wochen. In dieser Zeit hat der Workshop lediglich einen sehr kleinen Teil ausgemacht. Zusätzlich gab es einige Vorlesungen, Übungen, Hausaufgaben und sonstige Beschäftigungen mit dem Thema Konvergenz von Folgen. All das wirkt sich auf die Leistung der Studierenden im „Nachtest“ aus. Unter diesen Umständen spricht es für das Konzept des Workshops, dass es überhaupt möglich war, einen signifikanten Unterschied nachzuweisen.

Wie bereits erwähnt wurde mit den sogenannten ϵ -Streifen ein von Roh (2005) vorgeschlagenes Element in das Konzept des Workshops aufgenommen. Bei der Autorin wurden diese Streifen zusammen mit zwei Aussagen eingesetzt, bei denen die Studierenden jeweils entscheiden sollten, ob es sich um angemessene Beschreibungen der Eigenschaft Konvergenz handle. Diese Aussagen waren für den Einsatz im Rahmen einer Nacherfindung der Definition weniger geeignet und daher wurden sie für den Workshop nicht übernommen. Die nicht als Verbalisierung geeignete Aussage wurde jedoch leicht abgeändert im „Nachtest“ eingesetzt. Sie lautet, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele ihrer Folgenglieder liegen. Über die Hälfte der Studierenden (52%) hat diese Aussage als äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge bewertet. Die Verbalisierung ist aber äquivalent zur Definition eines Häufungspunktes. In der Studie von Roh (2005) ist es häufig vorgekommen, dass die Studierenden Häufungspunkte als Grenzwerte angesehen haben und der Meinung waren, eine Folge könne mehrere Grenzwerte haben. An einem anderen Item zeigt sich, dass das in dieser Studie nicht der Fall ist. Zwar waren bei der durch $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ definierten Folge 10% der Studierenden der Meinung, diese konvergiere, doch sie haben einen einzigen Grenzwert (z.B. 0 oder 2) angegeben. Lediglich bei einem Probanden, der $|2|$ als Grenzwert angegeben hat, wäre es möglich, dass er Häufungspunkte für Grenzwerte hält. Es gibt somit einige Studierende, die einerseits die Aussage, eine Folge konvergiere gegen einen Wert, wenn sich in jeder Umgebung um diesen Wert unendlich viele Folgenglieder befinden, als geeignete Verbalisierung bewertet haben, und andererseits geantwortet haben, die Folge mit $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ konvergiere nicht oder gegen einen einzigen Grenzwert. Dies erscheint auf den ersten

Blick widersprüchlich. Dies ist den Studierenden selbst vermutlich nicht aufgefallen. Es wäre möglich, dass sie wissen, dass eine Folge nur einen und nicht mehrere Grenzwerte besitzen kann, und ihnen lediglich nicht bewusst ist, dass die Verbalisierung auch auf Folgen mit mehreren Häufungspunkten zutrifft. Das würde also bedeuten, dass es in dieser Studie höchstens einen Studenten gibt, der glaubt, dass jeder Häufungspunkt ein Grenzwert sei und eine Folge mehrere Grenzwerte haben könne.

Als eine wesentliche Schwierigkeit beim Verständnis der formalen ϵ - N -Definition hat Roh (2005) den Aufbau des umgekehrten Denkens beziehungsweise das Erkennen der umgekehrten Beziehung von ϵ und N genannt. Darunter versteht sie, dass beim Anwenden der Definition zuerst die Variable ϵ beliebig aber fest gewählt werde und erst im Anschluss ein geeignetes N gewählt werde. Ihre Forschung hat ergeben, dass Lernende intuitiv oft anders vorgehen würden. Sie würden für größer werdendes n beobachten, wie sich der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert entwickle. Die vorliegende Arbeit hat ergeben, dass der Schritt zum umgekehrten Denken bei der angeleiteten Nacherfindung der Definition ebenfalls eine der wesentlichen Problemstellen war, bei der bei den meisten Studierendengruppen Unterstützungsangebote eingesetzt wurden. Die ϵ -Streifen können an dieser Stelle nützlich sein. Es hat sich allerdings gezeigt, dass die meisten Studierenden zum Umgang mit diesen ϵ -Streifen angeleitet werden müssen, um den Schritt zum umgekehrten Denken tatsächlich zu vollziehen. Dazu wurden geeignete Fragen entwickelt, die den Studierenden als Arbeitsblatt mit den ϵ -Streifen zusammen ausgehändigt werden können, um sie beim Aufbau des umgekehrten Denkens zu unterstützen.

Eine Forschergruppe um Michael Oehrtman, Craig Swinyard und Jason Martin hat ebenfalls eine Studie durchgeführt, in der Studierende die Definition der Konvergenz nacherfinden sollten (vgl. Abschnitt 2.5.4). Anstelle von dem fehlenden umgekehrten Denken sprechen Swinyard (2008) und Swinyard und Larsen (2012) im Zusammenhang mit der ϵ - δ -Definition des Grenzwerts bei Funktionen von einer „ x -first“-Perspektive, die viele Studierende zunächst einnehmen. Darunter verstehen sie, dass zunächst x -Werte betrachtet werden und dann beobachtet wird, wie sich die y -Werte verhalten. Beim Anwenden der formalen ϵ - δ -Definition müsse jedoch eine „ y -first“-Perspektive eingenommen werden, das heißt, es muss zuerst eine beliebige Schranke für den Abstand der y -Werte zum Grenzwert gewählt werden und erst im Anschluss muss in Abhängigkeit von dieser Schranke bestimmt werden, für welche x -Koordinaten die Schranke nicht überschritten wird. Übertragen auf die ϵ - N -Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge entspricht der Übergang von einer „ x -first“-Perspektive zu einer „ y -first“-Perspektive genau dem Aufbau des umgekehrten Denkens. Swinyard und Larsen (2012) haben dies als eine der Hauptschwierigkeiten bei der Nacherfindung der Definition benannt. In der hier durchgeführten Studie war dies ähnlich. Während bei Swinyard und Larsen (2012) jedoch keine Hilfestellungen vorbereitet waren und die Forscher die Studierenden jeweils eher spontan mit verbalen Impulsen unterstützt haben, wurde in dieser Arbeit genau ausgearbeitet, in welcher Problemsituation was für ein Unterstützungsangebot eingesetzt werden kann, um den Erkenntnisprozess der Studierenden voranzutreiben. Dies gilt nicht nur für die gerade beschriebene Schwierigkeit, sondern auch für alle anderen zu erwartenden Problemstellen. Als zweite Hauptschwierigkeit haben Swinyard und Larsen (2012) die Operationalisierung von Ausdrücken der Art „unendlich nah“ benannt. Auch dies war eine der Problemstellen, die in der Studie, die dieser Arbeit zugrunde liegt,

zu beobachten war. Es gab jedoch weitere ähnliche Problemstellen. So hat teilweise die Operationalisierung von „für große n “ die Studierenden vor Schwierigkeiten gestellt und in einzelnen Fällen auch die formal-mathematische Formulierung der Bedingung, dass sich die Folgenglieder innerhalb von ϵ -Streifen beziehungsweise ϵ -Umgebungen befinden. Ein weiteres großes Problem, das sich in dieser Studie gezeigt hat, aber weder von Swinyard und Larsen (2012) noch von Oehrtman et al. (2014) explizit als Problemstelle genannt wurde, ist die fehlende Systematik der Studierenden bei der Nacherfindung der Definition. So haben die Studierenden die von ihnen formulierten „Definitionen“ nicht systematisch an allen vorgegebenen Beispielfolgen überprüft. Dadurch ist ihnen in einigen Fällen nicht eigenständig aufgefallen, wenn sie eine Eigenschaft formuliert haben, die nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft oder auf das vorgegebene Nicht-Beispiel zutrifft. Teilweise sind solche Fälle bei Oehrtman et al. (2011) und Oehrtman et al. (2014) unter der Bezeichnung „Problematic Issues“ zu finden. Darunter verstehen die Forschenden problematische Formulierungen, die den Studierenden selbst nicht bewusst sind. Im Gegensatz dazu bezeichnen sie bewusste Schwierigkeiten mit dem Begriff „Problems“. Nicht jedes „Problematic Issue“ ist von der Art, dass die Formulierung nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutrifft oder auf das Nicht-Beispiel fälschlicherweise zutrifft. Beispielsweise stellt auch eine ungenaue „Definition“, bei der den Studierenden nicht bewusst ist, dass sie ungenau ist, ein „Problematic Issue“ dar. Insofern wurden mit der fehlenden Systematik der Studierenden die möglichen Problemstellen bei der Nacherfindung der Definition um eine wesentliche Problemstelle ergänzt.

Abgesehen von Interventionsstudien im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff wurde in Abschnitt 2.4 auch der Forschungsstand zu (Fehl-)Vorstellungen zum Konvergenzbegriff präsentiert. In diesen sollen nun die Ergebnisse dieser Arbeit zu den Kenntnissen und Vorstellungen von Mathematikstudierenden zum Konvergenzbegriff eingeordnet werden:

Eine vielfach berichtete Schwierigkeit im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff besteht darin, zu verstehen, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt (vgl. z.B. Bauer (2011), Cornu (1991), Eisenmann (2008), Ferrini-Mundy und Graham (1994), Richman (1999), Tall und Schwarzenberger (1978)). Dabei wird zum einen berichtet, dass es Lernende gibt, die $0,\bar{9}$ nicht als Zahl, sondern als Folge auffassen, die möglicherweise gegen 1 konvergiert, aber nicht gleich 1 ist. Zum anderen gebe es auch Personen, die $0,\bar{9}$ zwar als Zahl auffassen, die jedoch kleiner als 1 ist. Im Rahmen dieser Studie wurde sowohl im „Vortest“ als auch im „Nachtest“ die Frage gestellt, ob $0,\bar{9} = 1$ gilt und die Antwort sollte begründet werden. Zum ersten Messzeitpunkt haben nur 38% der Studierenden geantwortet, dass $0,\bar{9} = 1$ gilt, zum zweiten Messzeitpunkt immerhin 82%. Die Analyse der Begründungen hat ergeben, dass auch unter den Anfängerinnen und Anfängern eines Mathematikstudiums sowohl Personen sind, die $0,\bar{9}$ als Folge auffassen, als auch solche, welche die periodische Dezimalzahl als eine Zahl auffassen, die kleiner als 1 ist. Zusätzlich gab es jedoch auch Studierende, die $0,\bar{9}$ als Folge aufgefasst haben und dennoch geantwortet haben, es gelte $0,\bar{9} = 1$. Mit einer Häufigkeit von 7% im „Vortest“ und 6% im „Nachtest“ ist dieses Phänomen zwar verhältnismäßig selten aufgetreten, dennoch scheint es sich um keinen Einzelfall zu handeln. Mir ist keine Arbeit bekannt, in der bereits von diesem Phänomen berichtet wurde.

Wie in Abschnitt 2.3.3 dargestellt, haben Tall und Vinner (1981) beobachtet, dass

abschnittsweise definierte Folgen von manchen Lernenden nicht als eine einzige Folge aufgefasst werden, sondern als mehrere Folgen. Diese wurde bei den hier untersuchten Studierenden nach der Behandlung des Themenbereichs Folgen und Konvergenz kaum festgestellt. Ein Item, in dem beantwortet werden sollte, ob durch eine vorgegebene, abschnittsweise angegebene Zuordnung eine Folge definiert ist, hat eine Lösungsrate von 93%. Bei den restlichen Studierenden könnten theoretisch auch andere Gründe zu einer Falsch- oder Nichtbeantwortung geführt haben. Der Anteil derjenigen, die abschnittsweise definierte Folgen nicht als eine einzige Folge auffassen, ist in der hier vorliegenden Stichprobe mit maximal 7% somit relativ gering.

Etwas ähnliches hat Roh (2005) berichtet, und zwar die eingeschränkte Vorstellung, eine Folge müsse durch einen algebraischen Term definiert werden, der den Index beinhaltet. Auch in dieser Untersuchung haben 11% der Studierenden im „Nachtest“ die Frage, ob durch $a_n = 5 \forall n \in \mathbb{N}$ eine Folge definiert sei, verneint. Da hier allerdings keine weitere konstante Folge, die durch einen algebraischen Ausdruck definiert ist, in dem jedoch der Index vorkommt, abgefragt wurde, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob der Grund für die falschen Antworten tatsächlich mit dem Nichtvorkommen der Variable n zusammenhängt.

Eine weitere, beispielsweise von Roh (2005) berichtete Fehlvorstellung zum Konvergenzbegriff, besteht in der Vorstellung, Folgenglieder würden dem Grenzwert immer näher kommen. Im „Nachtest“ wurde den Studierenden eine derartige Verbalisierung vorgelegt, bei der entschieden werden sollte, ob sie äquivalent zur Definition ist oder nicht. 13% der Studierenden waren der Meinung, die Verbalisierung sei für die Konvergenz von Folgen geeignet. Diese eingeschränkte Vorstellung ist somit auch bei Mathematikstudierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen vielfach vorzufinden.

Laut verschiedenen Forscherinnen und Forschern gibt es außerdem zahlreiche Lernende, die monotone, konvergente Folgen als prototypisch für alle konvergenten Folgen ansehen (vgl. z.B. Davis und Vinner (1986), Alcock und Simpson (2004), Cornu (1991)). Im „Nachtest“ dieser Studie sollten die Studierenden beantworten, ob sie die Aussage, jede konvergente Folge sei monoton, für korrekt halten. 23% der Befragten haben dieser Aussage zugestimmt. Gleichzeitig haben im selben Test 81% der Studierenden korrekt beantwortet, dass die durch $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ definierte, nicht monotone Folge gegen 2 konvergiert. Bei einzelnen Personen widersprechen sich somit ihre Antworten auf diese beiden Items. Das kann dadurch erklärt werden, dass sie möglicherweise eins der Items auf Basis ihres *Concept Images* und das andere auf Basis ihrer persönlichen *Concept Definition* beantwortet haben. Unabhängig von diesem Phänomen hat sich gezeigt, dass die eingeschränkte Vorstellung von monotonen, konvergenten Folgen als Prototypen für alle konvergenten Folgen relativ weit verbreitet ist.

Ähnlich verhält es sich bei der eingeschränkten Vorstellung, konvergente Folgen würden ihren Grenzwert nicht annehmen. Berichtet wurde diese Vorstellung unter anderem von Davis und Vinner (1986), Roh (2005), Szydlik (2000), Tall und Schwarzenberger (1978) und Williams (1991). Auch diese Vorstellung ließ sich bei der hier untersuchten Stichprobe feststellen. Einerseits haben 90% der Studierenden im „Nachtest“ korrekt beantwortet, dass die konstante Folge $(0, 5)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Andererseits haben 30% der Befragten der Verbalisierung zugestimmt, eine Folge konvergiere gegen einen Grenzwert, wenn ihre Folgenglieder mit wachsendem n diesem Wert immer näher kommen würden, ohne ihn je zu erreichen. Auch hier zeigt sich somit eine mögliche Diskrepanz zwischen

dem *Concept Image* und der persönlichen *Concept Definition* einiger Studierender. Schließlich wurde in Abschnitt 2.4 noch auf die Fehlvorstellung eingegangen, der Grenzwert sei eine Schranke, die nicht über- beziehungsweise unterschritten werde (vgl. Davis und Vinner (1986), Robert (1982), Szydlik (2000)). Im „Nachtest“ war mit der durch $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ ein Beispiel einer konvergenten Folge, bei welcher der Grenzwert weder eine obere noch eine untere Schranke bildet, vertreten. Hier waren 15% der Meinung, diese Folge konvergiere nicht. Es wäre möglich, dass diese Personen die genannte Fehlvorstellung aufweisen, mit Sicherheit kann dies jedoch nicht gefolgert werden, da es für die Falschbeantwortung dieses Items auch andere Gründe geben könnte.

Insgesamt hat sich gezeigt, dass die meisten aus der Forschung bekannten Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff auch bei Mathematikstudierenden nach der Behandlung des Themas in der Analysis-1-Vorlesung auftreten. Auf der Ebene konkreter Beispiele, bei denen entschieden werden sollte, ob es sich um eine Folge handelt oder nicht beziehungsweise ob die Folge konvergiert oder nicht, gab es bei den meisten der Fehlvorstellungen jeweils bei maximal 15% der Studierenden Hinweise auf das Vorhandensein der Fehlvorstellung. Auf der Ebene der Bewertung allgemeiner Aussagen oder Verbalisierungen war dies jedoch anders, dort ließen sich bei bis zu 30% der Studierenden die einzelnen Fehlvorstellungen aufdecken. Es gab einige Studierende, die zu verschiedenen Items widersprüchliche Antworten gegeben haben. Eine mögliche Erklärung ist, dass den Studierenden selbst kein Konflikt bewusst war, da sie eines der Items auf Basis ihres *Concept Images* und ein anderes Item auf Basis ihrer persönlichen *Concept Definition* oder beide auf Basis verschiedener Bereiche des *Concept Images* beantwortet haben. Tall und Vinner (1981) haben bereits von derartigen Diskrepanzen zwischen *Concept Image* und persönlicher *Concept Definition* oder verschiedenen Bereichen des *Concept Images* eines Lernenden zu demselben Begriff berichtet. Sie sprechen in diesem Zusammenhang von einem „potential conflict factor“, der erst zu einem „cognitive conflict factor“ wird, wenn die sich widersprechenden Bereiche gleichzeitig aktiviert werden und dadurch ein dem Lernenden bewusster Konflikt entsteht (vgl. Tall und Vinner (1981, S. 153)).

8.3 Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse

Bei jeder empirischen Arbeit stellt sich die Frage, inwieweit die Ergebnisse verallgemeinerbar sind. Der entwickelte Workshop wurde – in zwei leicht verschiedenen Versionen – zweimal durchgeführt. Die zugehörigen Analysis-1-Vorlesungen wurden von verschiedenen Dozenten beziehungsweise Dozentinnen gehalten, die verschiedene Akzente gesetzt haben. Außerdem haben die Vorlesungen und somit auch die beiden Durchführungen des Workshops an zwei verschiedenen deutschen Universitäten stattgefunden, einmal an der Universität Paderborn und das andere Mal an der Universität Kassel. In Paderborn haben sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Vorlesung aus Bachelor-Studierenden der Studiengänge Mathematik und Technomathematik jeweils im ersten Semester sowie aus Lehramtsstudierenden für die Schulformen Gymnasium und Gesamtschule beziehungsweise Berufskolleg jeweils im dritten Semester zusammengesetzt. In Kassel haben ebenfalls Erstsemester des Bachelorstudiengangs Mathematik, des gymnasialen Lehramts und des Physikstudiengangs an der Vorlesung teilgenommen, außerdem Studierende des Lehramts-

studiengangs für berufliche Schulen im siebten Semester. Unter den insgesamt vertretenen Studierendengruppen besteht somit eine gewisse Vielfalt und die Zusammensetzung an den beiden Universitäten unterscheidet sich voneinander. Zwischen den beiden Durchführungen des Workshops ließen sich dennoch keine wesentlichen Unterschiede feststellen; außerdem sind die Ergebnisse aus den retrospektiven Analysen beider Durchführungen in die dritte Version des Workshop-Konzepts sowie in die lokale Instruktionstheorie eingeflossen. Die verschiedenen Studierendengruppen, die üblicherweise eine Analysis-1-Vorlesung an einer deutschen Universität besuchen, waren zumindest an einer der beiden Universitäten vertreten. Aus diesen Gründen kann davon ausgegangen werden, dass eine Workshop-Durchführung im Rahmen einer anderen Analysis-1-Vorlesung an einer deutschen Universität ähnliche Ergebnisse liefern würde.

Auf die Ergebnisse bezüglich der Vorkenntnisse der Studierenden trifft ähnliches zu. Zwar wurden in dieser Arbeit lediglich Ergebnisse aus einem Einsatz des entwickelten „Vortests“ präsentiert, doch dieser Test wurde zu einem so frühen Zeitpunkt in der Vorlesung von den Studierenden bearbeitet, dass mögliche Unterschiede in Bezug auf die Vorlesung noch kaum einen Einfluss auf die Ergebnisse haben können. Somit können die Ergebnisse zu den Vorkenntnissen der Teilnehmenden ebenfalls auf Studierende aus Analysis-1-Vorlesungen an deutschen Universitäten verallgemeinert werden.

Bei den Ergebnissen in Bezug zu den Kenntnissen und Vorstellungen der Studierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen in der Vorlesung muss dies etwas relativiert werden. Hier könnten sich durchaus Unterschiede durch verschiedene Behandlungen des Themas ergeben. Allerdings unterscheiden sich die Inhalte in Analysis-1-Vorlesungen üblicherweise nicht so stark, so dass größtenteils ebenfalls ähnliche Ergebnisse zu erwarten wären.

8.4 Möglichkeiten für anknüpfende Forschung

Aus dieser Forschungsarbeit heraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für weitere Forschungsstudien. Zum einen wäre es wünschenswert, wenn die dritte Version des Workshop-Konzepts, die in dieser Arbeit als Ergebnis präsentiert wurde, ebenfalls erprobt werden würde. Nach den ersten beiden Durchführungen wurden noch einmal einige Überarbeitungen vorgenommen, die bislang also nicht erprobt wurden. Es wäre auch denkbar, die Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz anstatt in einem zusätzlichen Workshop in Kleingruppenübungen zur Analysis-1-Vorlesung einzubinden. Des Weiteren könnte ein solches Konzept zur Nacherfindung einer Definition auch auf andere Begriffe aus der „Analysis 1“ oder auch anderen Veranstaltungen übertragen werden.

Ein weiterer Ansatzpunkt könnte der nachbereitende Teil des Workshops sein, der bislang nicht systematisch analysiert und lediglich pragmatisch weiterentwickelt wurde. Hier könnte eine Studie anschließen, in der zunächst die Aufzeichnungen der Durchführung des Nachbereitungsworkshops retrospektiv analysiert werden und basierend auf den daraus resultierenden Erkenntnissen das Konzept überarbeitet wird.

Zum anderen wurden wie erwähnt im Rahmen der eingesetzten Tests weder Nachweise von Konvergenz mit verschiedenen Methoden noch Beweiskompetenzen im Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff erhoben, da dazu nicht genügend Testzeit während der Vorlesung zur Verfügung stand. Hier könnte eine Studie anschließen, die diese Aspekte in Bezug auf das Verständnis des Konvergenzbegriffs untersucht.

Literaturverzeichnis

- Alcock, L. und Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1):1–32.
- Alcock, L. und Simpson, A. (2017). Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1):5–19.
- Andrich, D. (1978a). Application of a psychometric rating model to ordered categories which are scored with successive integers. *Applied Psychological Measurement*, 2(4):581–594.
- Andrich, D. (1978b). Scaling attitude items constructed and scored in the likert tradition. *Educational and Psychological Measurement*, 38:665–680.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3):215–241.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Dissertation, University of Utrecht.
- Bakker, A. und van Erde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In Bikner-Ahsbahr, A., Knipping, C., und Presmeg, N. (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, S. 429–466. Dordrecht: Springer.
- Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0, \bar{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1):79–102.
- Beitlich, J., Moll, G., Nagel, K., und Reiss, K. (2015). Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff am Beginn des Mathematikstudiums. In Gartmeier, M., Gruber, H., Hascher, T., und Heid, H. (Hrsg.), *Fehler. Ihre Funktionen im Kontext individueller und gesellschaftlicher Entwicklung*, S. 211 – 223. Münster, New York: Waxmann.
- Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 44:238–243.
- Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale Studie in der Jahrgangsstufe 5*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
- Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. In Lord, F. M., Novick, M. R., und Birnbaum, A. (Hrsg.), *Statistical theories of mental test scores*, S. 395–479. Reading: Addison-Wesley.

- Blum, W. und Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.
- Bortz, J. und Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation*. Heidelberg: Springer.
- Brown, A., McDonald, M. A., und Weller, K. (2010). Step by step: Infinte iterative processes and actual infinity. In Hitt, F., Holton, D., und Thompson, P. W. (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII*, CBMS Issues in Mathematics Education Volume 16, S. 115–142. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2):141–178.
- Bruner, J. (1980). *Beyond the Information Given: Studies in the Psychology of Knowing*. London: Allen & Unwin.
- Cauchy, A.-L. (1828). *Lehrbuch der algebraischen Analysis*. Königsberg: Bornträger.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In Scanlon, E. und O’Shea, T. (Hrsg.), *New Directions in Educational Technology*, NATO ASI Series 96, S. 15–22. Berlin Heidelberg: Springer.
- Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking*, S. 153–166. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., und Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2):167–192.
- Courant, R. und Robbins, H. (1963). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford: Oxford University Press.
- Danckwerts, R. und Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München [u.a.]: Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag.
- Davis, R. B., Maher, C. A., und Noddings, N. H. (1990). Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4).
- Davis, R. B. und Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5:281–303.
- Dawkins, P. und Roh, K. H. (2016). Promoting metalinguistic and metamathematical reasoning in proof-oriented mathematics courses: a method and a framework. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2):197–222.

- Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.
- Dubinsky, E. (1992). A learning theory approach to calculus. In Karian, Z. (Hrsg.), *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*, S. 43–55. Washington: MAA Notes 24.
- Dubinsky, E., Elterman, F., und Gong, C. (1988). The students' construction of quantification. *For the Learning of Mathematics*, 8:44–51.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., und Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2):253–266.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., und Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3):335–359.
- Dubinsky, E. und Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics*, IV:239–289.
- Edwards, B. S. und Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5):411–424.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking*, S. 140–152. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that $0.999... < 1$? *The Teaching of Mathematics*, XI(1):35–40.
- Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2):143–154.
- Epp, S. S. (2009). Proof issues with existential quantification. In Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., und de Villiers, M. (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, volume 1, S. 154–159. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.
- Ferrini-Mundy, J. und Graham, A. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *MAA notes*, 33:31–46.
- Fischbein, E. (1989). Tactic models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9(2):9 – 14.
- Fischbein, E., Tirosh, D., und Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10:3–40.

- Fischer, A., Heinze, A., und Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule - Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In Heinze, A. und Grüßing, M. (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*, S. 245–264. Münster: Waxmann.
- Forster, O. (2011). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Fukawa-Connelly, T. P. und Newton, C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics course via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3):323–349.
- Gravemeijer, K. und Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., und Nieveen, N. (Hrsg.), *Educational Design Research: The design, development and evaluation of programs, processes and products*, S. 45–85. London: Routledge.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., und Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In Cobb, P., Yackel, E., und McClain, K. (Hrsg.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, S. 225–273. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gravemeijer, K. und Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3):111–129.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., und Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Haak, I. (2012). Analyse von Lösungsprozessen bei der kooperativen Bearbeitung von Analysisaufgaben. Examensarbeit, Universität Paderborn.
- Hayen, J. (1988). Zur Entwicklung des Begriffsverständnisses vom Grenzwert. *Mathematica didactica*, 3/4:72–95.
- Herden, G., Knoche, N., und Pickartz, U. (1983). Eine Untersuchung zur Diskussion über Schwierigkeiten im Umgang mit dem Konvergenzbegriff. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4(4):263 – 305.
- Joyce, T. B. Y. und Yates, S. M. (2007). A rasch analysis of the academic self-concept questionnaire. *International Education Journal*, 8(2):470–484.

- Kaput, J. J., Blanton, M. L., und Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., und Blanton, M. L. (Hrsg.), *Algebra in the Early Grades*, S. 19–55. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2):137–174.
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E., und Vollmer, H. J. (2007). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Bonn, Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).
- Krummheuer, G. und Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske + Budrich.
- Küchemann, D. (1978). Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 57(2):41–54.
- Kultusministerkonferenz (2012). Allgemeine Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). <http://www.kmk.org/>, abgerufen am 03.09.2014.
- Larsen, S. (2009). Reinventing the concept of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2/3):119–137.
- Larsen, S. (2013). A local instruction theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(4):712–725.
- Larsen, S. und Lockwood, E. (2013). A local instruction theory for the guided reinvention of the quotient group concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(4):726–742.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Mangoldt, V. und Knopp, K. (1980). *Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I*. Leipzig: Hirzel.
- Martin, J., Oehrtman, M., Roh, K. H., Swinyard, C., und Hart-Weber, C. (2011). Students’ reinvention of formal definition of series and pointwise convergence. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K., und Oehrtman, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, volume 1, S. 239–254. Portland, Oregon.
- Martin, J., Oehrtman, M., Swinyard, C., und Cory, B. (2012). Reinvention six month later: The case of Megan. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K., und Oehrtman, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, S. 109–115, Portland, Oregon.
- Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(1):73 – 97.

- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., und Gowar, N. (1985). *Routes to / Roots of Algebra*. Milton Keynes: The Open University Press.
- Masters, G. N. (1982). A rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 47:149–174.
- McDonald, M. A., Mathews, D., und Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in collegiate mathematics education IV*, 8:77–102.
- Melzig, D. (2010). "Diese Ls sind die 3 beim Kevin" - Algebraische Terme anhand von Strukturen in Holzwürfelmauern deuten. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(33):8–11.
- Modler, F. und Kreh, M. (2011). *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3):20–24.
- Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2):239–257.
- Moore, A. W. (1990). *The Infinite*. London [u.a.]: Routledge.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3):249–266.
- Moore-Russo, D., Conner, A., und Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1):3–21.
- Moosbrugger, H. und Kelava, A. H. (2008). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Nardi, E. (2008). *Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level*. New York: Springer.
- Nardi, E. und Iannone, P. (2005). To appear and to be: Acquiring the 'genre speech' of university mathematics. In Bosch, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 4th Conference on European Research in Mathematics Education*, S. 1800–1810, Sant Feliu de Guixols, Spanien.
- Oehrtman, M. (2002). *Collapsing Dimensions, Physical Limit, and other Student Metaphor for Limit Concept: An Instrumentalist Investigation into Calculus Students' Spontaneous Reasoning*. Dissertation, The University of Texas, Austin, TX.
- Oehrtman, M., Swinyard, C., und Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33:131–148.

- Oehrtman, M., Swinyard, C., Martin, J., Roh, K., und Hart-Weber, C. (2011). From intuition to rigor: Calculus students' reinvention of the definition of sequence convergence. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K., und Oehrtman, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education Portland, Oregon*, volume 2, S. 325–338. Portland, Oregon: Portland State University.
- Piaget, J. (1973). *To Understand is to Invent: The Future of Education*. New York: Grossman Publishers.
- Piaget, J. (1977). *The Development of Thought: Equilibration of Cognitive Structures*. New York: The Viking Press.
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1):71–93.
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen: Nielsen & Lydiche.
- Rasmussen, C. und Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tool: Integrating student reasoning and mathematics in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5):388–420.
- Richman, F. (1999). Is $0.999\dots=1$? *Mathematics Magazine*, 72(5):396–400.
- Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Dissertation, Paris VII.
- Robinson, R. (1954). *Definition*. London: Oxford University Press.
- Roh, K. H. (2004). The role of reverse thinking in the contexts of limit. In McDoull, D. E. und Ross, J. A. (Hrsg.), *Proceedings of the 26th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, S. 191–192. Ontario, ON: University of Toronto.
- Roh, K. H. (2005). *College students' intuitive understanding of the limit of a sequence and their levels of reverse thinking*. Dissertation, The Ohio State University, Columbus, OH.
- Roh, K. H. (2006). The ϵ -strip activity as an instructional tool in learning limits of sequences. In S., A., Cortina., J. L., Sáiz, M., und Méndez, A. (Hrsg.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 2, S. 74–76. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Roh, K. H. (2007). An activity for development of the understanding of the concept of limit. In Woo, J.-H., Lew, H.-C., Park, K.-S., und Seo, D.-Y. (Hrsg.), *Proceedings 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 4, S. 105–112, Seoul, Korea.
- Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational studies in Mathematics*, 69(3):217–233.

- Roh, K. H. (2009). Students' understanding and use of logic in evaluation of proofs about convergence. In Lin, F., Hsieh, F., Hanna, G., und de Villiers, M. (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, volume 2, S. 148–153, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.
- Roh, K. H. (2010a). College students' reflective activity in advanced mathematics. In Brosnan, P., Erchick, D. B., und Flevares, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume VI, S. 80–88.
- Roh, K. H. (2010b). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ϵ -strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3):263–279.
- Roh, K. H. (2010c). How to help students conceptualize the rigorous definition of the limit of a sequence. *Primus*, 20(6):473–487.
- Roh, K. H. und Lee, Y. H. (2011a). Development of students' understanding of the logic in the epsilon-n definition of limit. In Ubuz, B. (Hrsg.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 4, S. 57–64. Ankara, Türkei: PME.
- Roh, K. H. und Lee, Y. H. (2011b). The mayan activity: A way of teaching multiple quantifications in logical contexts. *Primus*, 21(8):685–698.
- Roh, K. H. und Lee, Y. H. (2017). Design task of introductory real analysis to bridge a gap between students' intuition and mathematical rigor: the case of the convergence of a sequence. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1):34–68.
- Roh, K. H., Lee, Y. H., und Tanner, A. (2016). The king and prisoner puzzle: A way of introducing the components of logical structures. *PRIMUS*, 26(5):424–436.
- Roppelt, A. (2009). Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden. In Heinze, A. und Grüßing, M. (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*, S. 235–244. Münster: Waxmann.
- Rösken, B. und Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3:181–204.
- Rost, J. (1999). Was ist aus dem Rasch-Modell geworden? *Psychologische Rundschau*, 50:140–156.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. Bern: Verlag Hans Huber.
- Rost, J. (2006). Item-Response-Theorie. In Petermann, F. und Eid, M. (Hrsg.), *Handbuch der psychologischen Diagnostik*, S. 261–274. Göttingen: Hogrefe.

- Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemeinmathematische Untersuchung*. Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18:371–397.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorian, J.-L. (Hrsg.), *On the Teaching of Linear Algebra*, S. 209–246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Specht, B. (2009). *Variablenverständnis und Variablen verstehen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Steffe, L. P. und Gale, J. H. (1995). *Constructivism in Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Association Publishers.
- Strobl, C., Kopf, J., und Zeileis, A. (2010). Wissen Frauen weniger oder nur das Falsche? Ein statistisches Modell für unterschiedliche Aufgaben-Schwierigkeiten in Teilstichproben. In Trepte, S. und Verbeet, M. (Hrsg.), *Allgemeinbildung in Deutschland*, S. 255–272. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Swinyard, C. (2008). *Students' reasoning about the concept of limit in the context of reinventing the formal definition*. Dissertation, Portland State University.
- Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2):93–114.
- Swinyard, C. und Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4):465–493.
- Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3):258–276.
- Tall, D. (1991a). Intuition and rigour: the role of visualization in calculus. In Zimmermann, W. und Cunningham, S. (Hrsg.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, S. 105–119. Washington: MAA Notes 19.
- Tall, D. (1991b). The psychology of advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking*, S. 3–21. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2001). A child thinking about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1):7–19.
- Tall, D. und Chin, E.-T. (2002). University students' embodiment of quantifiers. In Cockburn, A. D. und Nardi, E. (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 4, S. 273–281, Norwich.
- Tall, D. und Schwarzenberger, R. L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82:44–49.

- Tall, D. und Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2):151–169.
- Tirosh, D. (1991). The role of students' intuition of infinity in teaching the cantor theory. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking*, S. 199–214. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30:341–349.
- Tirosh, D. und Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1):33–40.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Tsamir, P. (2003). Primary intuition and instruction: The case of actual infinity. In Selden, A., Dubinsky, E., Harel, G., und Hitt, F. (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education V*, CBMS Issues in Mathematics Education Volume 12, S. 79–96. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- Tsamir, P. und Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2):213–219.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. und Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In Lerman, S. (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, S. 521–525. Dordrecht: Springer Science+Business Media.
- Van der Linden, W. J. und Hambleton, R. K. (Hrsg.) (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking*, S. 65–81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. und Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4):356–366.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Vollrath, H.-J. und Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer.
- Warm, T. A. (1989). Weighted likelihood estimation of ability in item response models. *Psychometrika*, 54(3):427–450.
- Watson, A. und Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: The role of learner generated examples*. Mahwah: Erlbaum.

- Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics course: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(2):115–133.
- Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*. Mannheim: BI-Wiss.-Verl.
- Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte*, 63(1):135–154.
- Williams, S. R. (1991). Models of limit held by calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3):219–236.
- Wood, T., Cobb, P., Yackel, E., und Dillion, D. (Hrsg.) (1993). *Rethinking Elementary School Mathematics: Insights and Issues*. Reston, Virginia: The national council of teachers of mathematics.
- Wright, B. und Linacre, M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, 8(3):370.
- Zandieh, M. und Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2):57 – 75.
- Zandieh, M., Roh, K. H., und Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving 'conditional implies conditional' statements. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33:209–229.
- Zaslavsky, O. und Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4):317–346.
- Zorich, V. A. (2006). *Analysis I*. Berlin, Heidelberg: Springer.