

**Theoretische und empirische Analysen
zum benötigten, gelehrten und bei
Studierenden der
Wirtschaftswissenschaften erreichten
Verständnis des Ableitungsbegriffs**

Dissertation

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Frank Feudel

an der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik der
Universität Paderborn

2018

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei all jenen Personen herzlich bedanken, ohne die das Abfassen dieser Dissertation nicht möglich gewesen wäre.

Zunächst möchte ich mich hierbei natürlich ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Rolf Biehler für sein großes Engagement und die stets kompetente Beratung bedanken. Insbesondere bedanke ich mich für die vielen intensiven Diskussionen, ohne die die Arbeit in der vorliegenden Form nicht hätte entstehen können. Außerdem ermöglichte er mir die Teilnahme an sehr vielen Tagungen und Konferenzen, insbesondere im Rahmen der Aktivitäten des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm), was für mein wissenschaftliches Vorankommen ebenfalls essentiell war.

Mein zweiter Dank gilt Prof. Dr. Hans M. Dietz für die jahrelange Zusammenarbeit in seiner Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn, in der er mir die Durchführung meiner Studien ermöglichte, insbesondere auch durch eine passende inhaltliche Gestaltung seiner Lehrveranstaltung. Außerdem hat er sich dankeswerter Weise für das zweite Gutachten dieser Dissertation bereit erklärt.

Außerdem möchte ich mich noch bei Prof. Dr. Andreas Filler bedanken, der mir im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei ihm ab Beginn meiner Anstellung Ende 2017 sehr viel Freiraum ließ, damit ich diese Dissertation abschließen konnte.

Für das erfolgreiche Verfassen einer Dissertation ist aber auch ein gutes kollegiales Umfeld wichtig. Hierfür möchte ich mich bei „meinen Mitstreitern“ aus der Arbeitsgruppe Biehler im Zeitraum 2013-2017 und meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe Dietz danken. Aus der gemeinsamen Arbeit sind zum Teil auch echte Freundschaften entstanden, was ich besonders toll finde. Ganz besonders möchte ich mich hierbei bei Anja Panse bedanken. Ohne Dich und Deinen ständigen Zuspruch hätte ich diese Dissertation nie geschafft! Wenn ich nicht mehr weiter wusste, hattest du stets ein offenes Ohr und einen guten fachlichen oder menschlichen Rat.

Ebenso möchte mich hier noch bei meinen Kollegen Leander Kempen und Alexandra Schock bedanken, die mir an entscheidenden Stellen durch ihre fachliche bzw. menschliche Unterstützung sehr geholfen haben. Weiterhin gilt mein Dank meiner studentischen Hilfskraft Tobias Klaholz, der mich maßgeblich bei einigen Auswertungen unterstützt hat. Außerdem möchte ich hier unbedingt noch Bernd Büchler und Axel Hoppenbrock nennen, die dafür gesorgt haben, dass Paderborn auch abseits der Arbeitszeit in den (späten) Abendstunden für mich lebenswert wurde.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meinen Eltern und Großeltern sowie bei Theo für die Geduld und Unterstützung auf privater Ebene danken.

Vielen lieben Dank an euch alle!

Zusammenfassung

Das Konzept der Ableitung spielt in der Ökonomie eine große Rolle, zum Beispiel bei der Analyse von Auswirkungen kleiner Änderungen ökonomischer Größen wie Preisen auf andere Größen wie die Nachfrage, bei der Lösung von Optimierungsproblemen wie der Gewinnmaximierung oder beim Aufbau ökonomischer Theorien wie der Kostentheorie. Daher sollten Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein umfassendes, mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung erwerben, das aber gleichzeitig die Praxis des Umgangs mit ihr in der Ökonomie mitberücksichtigt, damit die Studierenden die Ableitung dort später *verständlich* verwenden können.

In der hier vorliegenden Dissertation wird dargestellt, (i) wie ein solches (adäquates) Verständnis der Ableitung aussehen kann, (ii) inwiefern es praktisch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelt wird, und (iii) inwieweit Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums und nach Besuch einer „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ über ein solches verfügen.

Hierfür wird zunächst auf Grundlage von mathematikdidaktischer Literatur zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ und Analysen ökonomischer Lehrbücher zum Umgang mit der Ableitung bei deren Deutung in ökonomischen Kontexten ein Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler entwickelt. Dieses basiert auf dem Konstrukt des *concept image* von Tall und Vinner (1981), welches aus allen Assoziationen zu einem mathematischen Konzept besteht.

Mit Hilfe von Lehrbuchanalysen wird dann das gegenwärtig in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelte und das in der Ökonomie praktisch vorausgesetzte *concept image* zur Ableitung untersucht. Das bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften vorhandene *concept image* zur Ableitung wird mit Hilfe eines Vortests ermittelt, der speziell für diese Gruppe konzipiert, und an der Universität Paderborn eingesetzt wurde. Die Untersuchung des bei Studierenden nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ vorhandene *concept image* zur Ableitung erfolgt ebenfalls *exemplarisch* an der Universität Paderborn mit Hilfe von dafür speziell konzipierten Klausuraufgaben und einer zusätzlichen Interviewstudie zur Ermittlung möglicher Verständnisschwierigkeiten.

Die im Rahmen der Dissertation durchgeführten Studien zeigen schließlich, (1) dass Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein umfassendes *concept image* zur Ableitung benötigen, und (2) dass ein solches in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auch vermittelt wird. (3) Die hier untersuchten Studienanfänger verfügten zu Beginn ihres Studiums noch nicht über ein solches *concept image* und sie hatten viele Probleme beim Verständnis der Ableitung, die hier genau herausgearbeitet werden. (4) Sie hatten aber auch größtenteils nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ *kein adäquates concept image* zur Ableitung für deren *verständige* Anwendung in der Ökonomie, obwohl ein solches in dem Kurs vermittelt wurde. Auch hier erfolgt eine Herausarbeitung von Verständnisschwierigkeiten sowie von deren möglichen Ursachen.

Auf Basis der ermittelten Schwierigkeiten der Studierenden beim Verständnis der Ableitung zu Beginn des Studiums und nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung werden schließlich zahlreiche Konsequenzen für die Behandlung der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vorgeschlagen.

Abstract

The concept of derivative plays a major role in economics. It is, for example, important for the analysis of the impact of small changes of economic quantities like prices on another quantity like the demand, for the solution of optimization problems like profit maximization, or for the construction of economic theories like cost theory. Hence, students of economics should have an understanding of the derivative, which is adequate from a mathematical point of view on the one hand, but also includes the way the derivative is used in economic contexts, so the students are later able to use it in economics in a reflective manner.

In which way an adequate understanding of the derivative in the above mentioned sense can be theoretically described, to what extent it is currently practically taught in mathematics courses for students of economics, and to what extent students of economics have an adequate understanding of the derivative before and after their mathematics course at university is investigated in this PhD-thesis.

First, a theoretical model to describe a possible adequate understanding of the derivative that also includes the way the derivative is used in economic contexts is developed. This model is based on (didactic) literature about students' understanding of the derivative as a mathematical concept and on an analysis of economic textbooks focusing on the way the derivative is used in economic contexts. The theoretical basis of this model is the construct of *concept image* by Tall and Vinner (1981): the total cognitive structure that is associated with a concept.

Afterwards, the state of the art concerning the *concept image* of the derivative needed by, taught to and acquired by students of economics before and after their mathematics course is investigated. The *concept image* taught is examined by analyzing mathematics textbooks for economics students, the one practically needed in economics is explored by analyzing economic textbooks. To find out about economics students' *concept image* of the derivative when entering university, a pretest for this particular group was constructed and administered to university freshmen at the University of Paderborn. The *concept image* of economics students after their mathematics course was also investigated with these students by analyzing their answers to questions about the understanding of the derivative in their final exam. Furthermore, an interview study was conducted to find out particular difficulties students might have when trying to make sense of the way the derivative is used in economic contexts.

These studies show that (1) economics students need a broad *concept image* of the derivative to understand economic textbooks, and (2) that a broad *concept image* of the derivative is also taught in mathematical textbooks for students of economics. (3) The university freshmen investigated here did not yet have an adequate *concept image* of the derivative. They had many difficulties in understanding the derivative that are presented in this PhD-Thesis in detail. (4) However, the students also did not have an adequate *concept image* of the derivative after their mathematics course although such was taught there. Again, the difficulties the students had will be presented in detail here.

Finally, on the basis of the students' difficulties concerning the understanding of the derivative found out in the studies, several possible consequences for the teaching of the derivative concept in mathematics for students of economics are suggested.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Kurze Eingangsmotivation und Ziele der Arbeit	1
1.2	Forschungsfragen und Überblick über die zugehörigen Studien	2
1.3	Übersicht über die Kapitel	4
2	Ableitung und Grenzkosten in der Ökonomie	7
2.1	Die Bedeutung der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften	7
2.2	Die Praxis bei Verwendung der Ableitung in der Ökonomie und resul- tierende Schwierigkeiten	9
2.3	Konsequenzen der Betrachtungen zur Verwendung der Ableitung in der Ökonomie für die Schwerpunktsetzung der Dissertation	19
3	Entwicklung eines theoretischen Modells zur Beschreibung von „Verständ- nis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“	21
3.1	Die theoretischen Konstrukte „concept image“ und „concept definition“ zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Begriffe	21
3.2	Konkretisierung des concept image zum Verständnis der Ableitung auf Basis didaktischer Literatur	28
3.2.1	Theoretisches Rahmenmodell zum Verständnis des Ableitungs- begriffs nach Zandieh	28
3.2.2	Ein Rahmenmodell auf Basis der APOS-Theorie	34
3.2.3	Das „Differentiation Competency Framework“ von Kendal und Stacey	39
3.2.4	Ein auf Aspekten und Grundvorstellungen basierendes Rahmen- modell zum Verständnis der Ableitung	41
3.2.5	Begründete Auswahl eines der Modelle als Basis für die empiri- schen Studien der Dissertation	44
3.3	Erweiterung des Modells um die ökonomische Interpretation der Ableitung	46
3.3.1	Die ökonomische Interpretation der Ableitung	46
3.3.2	Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation	48
3.3.3	Möglichkeiten der Erklärung der Legitimität der ökonomischen Interpretation der Ableitung	51
3.3.4	Erweiterung des Modells von Zandieh	53
4	Bekannte Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffs	55
4.1	Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung einer linearen Funktion und des Differenzenquotienten	55
4.1.1	Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung bzw. der Ände- rungsrate einer linearen Funktion	55
4.1.2	Schwierigkeiten beim Verständnis des Differenzenquotienten	66
4.2	Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle	70
4.2.1	Schwierigkeiten beim Verständnis des Grenzwertbegriffs	71
4.2.2	Schwierigkeiten beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung	83
4.2.3	Schwierigkeiten beim Verständnis des Tangentenkonzepts	93

4.3	Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitungsfunktion als Funktion .	98
4.3.1	Fehlvorstellungen beim Verständnis der Ableitung als Funktion .	98
4.3.2	Mangelndes Verständnis des Funktionsbegriffs als wichtige Ursache für Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitungsfunktion	105
4.3.3	Schwierigkeiten beim kovariationalen Argumentieren	112
4.4	Studien zum Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten	119
4.5	Zusammenfassung und Konsequenzen für die Lehre	123

5 Analyse von Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften zum Ableitungskonzept 131

5.1	Ziel und Methodik der Lehrbuchanalysen	131
5.2	Analyse des Lehrbuchs von Dietz	133
5.2.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	133
5.2.2	Kapitel über den Ableitungsbegriff	135
5.2.3	Kapitel über die Technik der Ableitung	142
5.2.4	Kapitel über Elastizitäten	145
5.2.5	Kapitel über die Fahrstrahlanalyse von Kostenfunktionen	150
5.2.6	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Lehrbuchs von Dietz	153
5.3	Analyse des Lehrbuchs von Sydsæter und Hammond	157
5.3.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	157
5.3.2	Kapitel „Steigungen von Kurven“	160
5.3.3	Kapitel „Ableitung, Tangenten“	162
5.3.4	Kapitel über Änderungsraten	166
5.3.5	Kapitel über „Einfache Regeln der Differentiation“	169
5.3.6	Kapitel über die Summen-, Produkt,- und Quotientenregel . . .	171
5.3.7	Kapitel über lineare Approximation	173
5.3.8	Kapitel über Elastizitäten	176
5.3.9	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Sydsæter und Hammond	179
5.4	Analyse des Lehrbuchs von Tietze	183
5.4.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	183
5.4.2	Kapitel „Grundlagen der Differentialrechnung“	183
5.4.3	Kapitel zur Technik des Differenzierens	190
5.4.4	Kapitel über die ökonomische Interpretation der Ableitung . . .	192
5.4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Tietze	197
5.5	Analyse des Lehrbuchs von Wöhe	201
5.5.1	Leitfragen und Gliederung der Analyse	201
5.5.2	Die Ableitung in der Kosten- und Produktionstheorie	202
5.5.3	Die Rolle der Ableitung bei der Lagerplanung	216
5.5.4	Verwendung der Ableitung bei der Bewertung der Auswirkungen von Preisänderungen auf Nachfrage und Erlös	220
5.5.5	Verwendung der Ableitung in der Preistheorie	224

5.5.6	Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse des Lehrbuchs von Wöhe	228
5.6	Vergleichende Zusammenfassung der Lehrbuchanalysen und Konsequenzen für die Lehre	231
6	Konstruktion und Auswertung eines Vortests zur Ermittlung des Vorwissens zur Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften	237
6.1	Ziel und Begründung des methodischen Vorgehens	237
6.2	Überblick über den Aufbau und die Konstruktion des Tests	238
6.3	Erhebung der Daten und Methodik zur Auswertung des Tests	239
6.3.1	Erhebung der Daten	239
6.3.2	Auswertungsmethodik des Tests	240
6.4	Der Teilttest zur Technik des Ableitens	241
6.4.1	Aufbau des Teilttests zur Technik des Ableitens	241
6.4.2	Analyse der Daten des Teilttests zur Technik des Ableitens	241
6.4.3	Ergebnisse des Teilttests zur Technik des Ableitens	241
6.4.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur Technik des Ableitens mit der Literatur	244
6.5	Der Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen	244
6.5.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen	244
6.5.2	Analyse der Daten des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen	247
6.5.3	Ergebnisse des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen	248
6.5.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen mit der Literatur	250
6.6	Der Teilttest zum Differenzenquotienten	252
6.6.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zum Differenzenquotienten	252
6.6.2	Analyse der Daten des Teilttests zum Differenzenquotienten	254
6.6.3	Ergebnisse des Teilttests zum Differenzenquotienten	258
6.6.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zum Differenzenquotienten mit der Literatur	263
6.7	Der Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung	264
6.7.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung	264
6.7.2	Analyse der Daten des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung	267
6.7.3	Ergebnisse des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung	268
6.7.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung mit der Literatur	274
6.8	Der Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	277
6.8.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate	277
6.8.2	Analyse der Daten des Teilttests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate	282
6.8.3	Ergebnisse des Teilttests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate	283

6.8.4	Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate mit der Literatur	291
6.9	Der Teilttest zum Tangentenkonzept	293
6.9.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zum Tangentenkonzept	293
6.9.2	Analyse der Daten des Teilttests zum Tangentenkonzept	295
6.9.3	Ergebnisse des Teilttests zum Tangentenkonzept	296
6.9.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zum Tangentenkonzept mit der Literatur	298
6.10	Der Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen	299
6.10.1	Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen	299
6.10.2	Analyse der Daten des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen	303
6.10.3	Ergebnisse des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen	307
6.10.4	Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen mit der Literatur	315
6.11	Globalauswertung des Vortests	316
6.11.1	Aufbau und Konstruktion des Gesamttests	317
6.11.2	Analyse der Daten des Gesamttests	317
6.11.3	Ergebnisse des Gesamttests	326
6.12	Zusammenfassung der Ergebnisse des Vortests und Konsequenzen für die Lehre	329
7	Analyse von 4 Klausuraufgaben zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung	337
7.1	Ziel und Methodik der Analyse	337
7.2	Beschreibung der äußeren Rahmenbedingungen der Studie	337
7.2.1	Kurzbeschreibung der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn	337
7.2.2	In der Lehrveranstaltung vermitteltes Wissen zur ökonomischen Interpretation der Ableitung	338
7.3	Beschreibung der vier Klausuraufgaben	342
7.4	Auswertung der Aufgabe zur Angabe einer ökonomischen Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ (Aufgabe 1)	344
7.4.1	Analyse der Daten zu Aufgabe 1	344
7.4.2	Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 1	347
7.4.3	Vergleich der Ergebnisse mit den Ergebnissen einer analogen Aufgabe aus dem Vortest	349
7.5	Auswertung der Aufgabe zur Angabe einer mathematischen Interpretation von $G'(73) = 0,2$ (Aufgabe 2)	351
7.5.1	Analyse der Daten zu Aufgabe 2	352
7.5.2	Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 2	354

7.6	Auswertung der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von Zusatzkosten durch lineare Approximation (Aufgabe 3)	355
7.6.1	Analyse der Daten zu Aufgabe 3	355
7.6.2	Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 3	358
7.7	Auswertung der Aufgabe 4 zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Zusatzkosten	360
7.7.1	Analyse der Daten zu Aufgabe 4	360
7.7.2	Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 4	363
7.7.3	Aufgabenübergreifende Analyse der Daten	364
7.7.4	Ergebnisse der aufgabenübergreifende Analyse	366
7.8	Zusammenfassung der Ergebnisse der vier Klausuraufgaben und mögliche Konsequenzen für die Lehre	367

8 Konzeption und Auswertung einer Interviewstudie zur ökonomischen Interpretation der Ableitung 372

8.1	Ziel der Interviewstudie	372
8.2	Konzept und Aufbau des Interviews	373
8.2.1	Aufbau und Konzept des Interviews als Ganzes	373
8.2.2	Die Einstiegsphase mit Aufgabe 1	374
8.2.3	Die zweite Phase mit Aufgabe 2 zur Herausarbeitung von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit	376
8.2.4	Die dritte Phase mit Aufgabe 3 zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene . .	380
8.2.5	Die vierte Phase mit Aufgabe 4 zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene .	381
8.3	Erhebung und Analyse der Daten	382
8.3.1	Erhebung der Daten	382
8.3.2	Analyse der Daten	383
8.4	Auswertung der einzelnen Interviews zu den Grenzkosten	384
8.4.1	Auswertung des Interviews von Johannes	385
8.4.2	Auswertung des Interviews von Holger	395
8.4.3	Auswertung des Interviews von Detlef	410
8.4.4	Auswertung des Interviews von Ralf	421
8.4.5	Auswertung des Interviews von Karl	433
8.4.6	Auswertung des Interviews von Veronika	444
8.4.7	Auswertung des Interviews von Susanne	455
8.4.8	Auswertung des Interviews von Lisa	469
8.5	Fallübergreifende Darstellung der Ergebnisse	480
8.5.1	Ergebnisse zur ersten Leitfrage zu den ersten Assoziationen zum Grenzkostenbegriff	480
8.5.2	Ergebnisse zur zweiten Leitfrage zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit	482
8.5.3	Ergebnisse zur dritten Leitfrage zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene	484

8.5.4	Ergebnisse zur vierten Leitfrage zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene	487
8.6	Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse der Interviewstudie und Konsequenzen der Ergebnisse für die Lehre	490
9	Zusammenfassung, Fazit und Ausblick	495
9.1	Zusammenfassung der Ergebnisse der Dissertation	495
9.1.1	Zur Beschreibung eines möglichen adäquaten concept image zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften . .	496
9.1.2	Zum praktisch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzten concept image zur Ableitung	497
9.1.3	Zum concept image der Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften	498
9.1.4	Zum concept image der Ableitung bei den Studierenden nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“	501
9.1.5	Übergreifende Zusammenfassung der Ergebnisse	505
9.2	Mögliche Konsequenzen der Ergebnisse für die Lehre	506
9.3	Beitrag der Arbeit für die didaktische Forschung und Ausblick auf weitere mögliche Forschungsaktivitäten	510
9.3.1	Beitrag der Arbeit zur mathematikdidaktischen Forschung . . .	510
9.3.2	Ausblick auf weitere mögliche Forschung	512
	Literaturverzeichnis	515
	Anhang	527

1 Einleitung

1.1 Kurze Eingangsmotivation und Ziele der Arbeit

Das Ableitungskonzept spielt in den Wirtschaftswissenschaften eine wesentliche Rolle. So ist die Ableitung beispielsweise von großer Bedeutung in der sogenannten Marginalanalyse, die ein wesentliches Hilfsmittel zum Treffen optimaler Entscheidungen eines Unternehmens darstellt. In ihr werden die Auswirkungen kleiner Änderungen vom Momentanzustand untersucht, wie zum Beispiel Auswirkungen kleiner Preiserhöhungen auf die Nachfrage. Dabei dient die Ableitung dann als Maß für die Größe dieser Auswirkungen. Eine weitere wichtige Bedeutung hat die Ableitung in ökonomischen Theorien wie der Kostentheorie. Sie dient hierbei der Beschreibung und Charakterisierung verschiedener Typen ökonomischer Funktionen wie Kostenfunktionen. Die Ableitung ist aber auch ein wichtiges Hilfsmittel zur Ermittlung von Extrema ökonomischer Funktionen wie zum Beispiel von Gewinnmaxima.

Der großen Bedeutung der Ableitung und ihrer vielseitigen Nutzung in den Wirtschaftswissenschaften steht eine sehr heterogene und teilweise mathematisch widersprüchliche Praxis beim Umgang mit dem Konzept der Ableitung in der Ökonomie gegenüber. So führt das Lehrbuch „Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe u. Döring (2013), ein Standardwerk der Betriebswirtschaftslehre, das Konzept der Grenzkosten, die Ableitung einer Kostenfunktion, wie folgt ein (Wöhe u. Döring, 2013, S.300-301):

„Als Grenzkosten K' bezeichnet man die Kosten der jeweils letzten Produktionseinheit. So kann man vereinfachend die Grenzkosten der 33. Produktionseinheit in der Weise ermitteln, dass man von den Gesamtkosten bei der Produktion von 33 Produkteinheiten die Gesamtkosten bei der Produktion von 32 Produkteinheiten subtrahiert. Die Grenzkostenkurve gibt die Steigung der Gesamtkostenfunktion an. Sie lässt sich ermitteln, indem die erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion gebildet wird:

$$K' = \frac{dK}{dm} . ' \quad (1)$$

Auch in anderen ökonomischen Lehrbüchern wie Varian (2011) sind ähnliche, aus mathematischer Sicht widersprüchliche Ausführungen zu finden, was an späterer Stelle noch einmal genau dargestellt wird.

Dementsprechend sollte meiner Meinung nach ein wesentliches Ziel in einer Lehrveranstaltung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler sein, dass Studierende ein adäquates Verständnis des Ableitungskonzepts erwerben, welches einerseits aus mathematischer Perspektive akzeptabel ist, andererseits aber auch eine Brücke zur Art und Weise des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie schlägt. Die Studierenden sollten dann das Ableitungskonzept *verständlich* in den Wirtschaftswissenschaften anwenden können.

In dieser Dissertation soll nun herausgearbeitet werden

- (1) wie ein solches Verständnis des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aussehen kann,

- (2) inwiefern es derzeit in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelt wird,
- (3) und inwiefern Studierende der Wirtschaftswissenschaften über dieses zu Beginn und am Ende ihrer mathematischen Lehrveranstaltung an der Universität verfügen, wobei Letzteres aus Umfangsgründen natürlich nur exemplarisch anhand einer in Bezug auf die vermittelten Inhalte zur Ableitung prototypischen Lehrveranstaltung untersucht werden kann.

Die Beantwortung der eben genannten Fragen ist zum einen aus Sicht der Grundlagenforschung zum Lehren und Lernen des Ableitungskonzepts relevant. Denn es gibt zwar, wie an späterer Stelle genauer dargestellt wird, in der Mathematikdidaktik sehr viel Forschung zum Verständnis der Ableitung im Hochschulbereich und den auftretenden Verständnisschwierigkeiten, jedoch nicht mit dem Fokus auf Studierenden der Wirtschaftswissenschaften. Diese bilden aber eine zahlenmäßig sehr große, und damit relevante Gruppe, die in ihrer mathematischen Ausbildung mit dem Ableitungskonzept konfrontiert wird. Daher wäre es wichtig zu erfahren, über welches Verständnis der Ableitung diese Studierenden verfügen und inwieweit bei dieser Gruppe bereits bekannte Schwierigkeiten zum Verständnis der Ableitung vorhanden sind. Zusätzlich gibt es für diese Studierenden für eine *verständige* Verwendung der Ableitung in der Ökonomie die besondere Herausforderung des Schlagens einer Brücke zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und der Art und Weise des praktischen Umgangs mit ihr in der Ökonomie, der sehr heterogen und teilweise widersprüchlich ist (wie bereits am Beispiel zur Einführung der Grenzkosten in Wöhe u. Döring (2013) angedeutet). Hier wäre es wichtig zu erfahren, inwieweit den Studierenden dies in der gegenwärtigen Lehrpraxis gelingt, und welche Verständnisschwierigkeiten dabei auftreten.

Die Ergebnisse dieser Analyse des „Ist-Zustandes“ zum Verständnis der Ableitung und den auftretenden Verständnisschwierigkeiten in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler können dann Ausgangspunkt für wissenschaftlich fundierte Veränderungen der gegenwärtigen Lehrpraxis sein, mit dem Ziel Studierende der Ökonomie beim Erwerb eines adäquaten Verständnisses der Ableitung und insbesondere bei der Herstellung einer Verbindung zwischen dem mathematischen Konzept und dessen Umgangsweise in der Ökonomie zu unterstützen. Hierfür werden in dieser Arbeit zahlreiche mögliche Konsequenzen für die Lehre vorgeschlagen. Damit kann die Arbeit auch einen wichtigen Beitrag zur praktischen Verbesserung der mathematischen Ausbildung von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften leisten.

1.2 Forschungsfragen und Überblick über die zugehörigen Studien

Die Untersuchung des Verständnisses der Ableitung bei Studierenden in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler basiert auf folgenden Forschungsfragen:

- F1. Wie könnte man ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, theoretisch beschreiben?
- F2. Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in ökonomischen Lehrbüchern praktisch vorausgesetzt?

- F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?
- F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Zunächst wird also auf theoretischer Basis (mathematikdidaktische Literatur) die Frage beantwortet, wie man ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung, welches die Praxis des Umgangs der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, beschreiben kann. Dann wird das in Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelte und in ökonomischen Lehrbüchern praktisch vorausgesetzte Verständnis der Ableitung untersucht. Nach Analyse des gelehrten Verständnisses der Ableitung erfolgt die Untersuchung des bei den Lernenden zu Beginn des Studiums vorhandenen und nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ erreichten Verständnisses der Ableitung sowie der auftretenden Verständnisschwierigkeiten. Dies erfolgt *exemplarisch* anhand eines entsprechenden Kurses der Universität Paderborn. Aus den Ergebnissen dieser Analysen werden schließlich Konsequenzen für die Lehre zur Unterstützung der Studierenden beim Erwerb eines adäquaten Verständnisses der Ableitung und der Überwindung von Verständnisschwierigkeiten abgeleitet.

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden zahlreiche Studien durchgeführt, die im Folgenden kurz skizziert werden:

- Zu F1: Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurde zunächst auf Grundlage von (1) mathematikdidaktischer Literatur zum Verständnis der Ableitung als mathematisches Konzept, und von (2) Analysen wirtschaftswissenschaftlicher Lehrbücher zum Umgang mit der Ableitung bei deren Deutung in der Ökonomie ein theoretisches Rahmenmodell für ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung entwickelt, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt. Dieses Rahmenmodell diene dann auch als Grundlage zur Untersuchung des im Vergleich dazu praktisch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzten Verständnisses der Ableitung (Forschungsfrage F2), sowie des bei Studierenden tatsächlich vorhandenen bzw. erreichten Verständnisses (Forschungsfragen F3 und F4).
- Zu F2: Das praktisch in Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelte Verständnis der Ableitung wurde durch Analyse weit verbreiteter Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ermittelt (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010). Das gegenwärtig praktisch vorausgesetzte Verständnis der Ableitung in Lehrbüchern der Ökonomie wurde exemplarisch durch die Analyse ökonomischer Standardwerke untersucht (Wöhe u. Döring, 2013; Varian, 2011).
- Zu F3: Zur Ermittlung des bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn des Studiums vorhandenen Verständnisses der Ableitung und auftretenden

Verständnisschwierigkeiten wurde ein Vortest speziell für diese Gruppe entwickelt. Dieser wurde dann *exemplarisch* im September 2015 an der Universität Paderborn eingesetzt.

Zu F4: Auch das bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer mathematischen Lehrveranstaltung erreichte Verständnis wurde *exemplarisch* untersucht, und zwar anhand des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ der Universität Paderborn (dieser kann aber in Bezug auf die dort vermittelten Inhalte zur Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation durchaus als typisch angesehen werden, was später bei der Beschreibung des Kurses begründet wird). Aus Umfangsgründen erfolgte hierbei eine Fokussierung auf die ökonomische Interpretation der Ableitung, denn diese ist für Studierende der Wirtschaftswissenschaften für eine *verständige* Verwendung der Ableitung in der Ökonomie besonders relevant. Zur Untersuchung des Verständnisses der ökonomischen Interpretation der Ableitung bei den Studierenden der Universität Paderborn nach Absolvierung des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ wurden Antworten dieser Studierenden in speziell dafür konzipierten Klausuraufgaben im Wintersemester 2015/16 analysiert. Zur genauen Ermittlung der Verständnisschwierigkeiten nach Besuch der mathematischen Lehrveranstaltung wurde schließlich noch eine Interviewstudie mit 8 Studierenden des Kurses durchgeführt.

Ein Überblick über die empirischen Studien der Dissertation zur Beantwortung der Forschungsfragen F2-F4 ist noch einmal in Tabelle 1 dargestellt.

Forschungsfrage	Studie
F2. Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in ökonomischen Lehrbüchern praktisch vorausgesetzt?	Analyse von verbreiteten Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und ökonomischen Lehrbüchern
F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?	Entwicklung eines Vortests für diese Gruppe und Einsatz an der Universität Paderborn vor dem Wintersemester 2015/16
F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?	Analyse von Lösungen zu Aufgaben der Abschlussklausur des entsprechenden Kurses der Universität Paderborn am Ende des Wintersemesters 2015/16 und eine vertiefende Interviewstudie

Tabelle 1: Forschungsfragen und zugehörige Studien der Dissertation

1.3 Übersicht über die Kapitel

Die Dissertation besteht aus insgesamt neun Kapiteln. Kapitel 1-2 sind einleitende Kapitel. Kapitel 3-8 bilden den Hauptteil der Arbeit. Kapitel 9 ist das Fazit.

Das nach der Einleitung folgende *Kapitel 2* („Ableitung und Grenzkosten in der Ökonomie“) ist ein Motivationskapitel, in dem die Themenwahl und die Schwerpunktsetzung dieser Dissertation motiviert werden. Hierbei wird zunächst noch einmal die Bedeutung der Ableitung in der Ökonomie illustriert. Der wesentliche Teil dieses Kapitels ist jedoch eine Mini-Studie. In ihr werden anhand von Analysen ökonomischer Lehrwerke Schwierigkeiten beim Verständnis der Verwendung der Ableitung in der Ökonomie herausgearbeitet, die sich durch einen sehr heterogenen und teilweise mathematisch widersprüchlichen Umgang mit dem Ableitungskonzept ergeben. Dies unterstreicht die Wichtigkeit, dass in Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung vermittelt werden sollte, welches aber diese Praxis im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt.

Kapitel 3 („Entwicklung eines theoretischen Modells zur Beschreibung von ‚Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler‘“) ist das erste Kapitel des Hauptteils der Arbeit. In ihm wird zunächst auf Basis mathematikdidaktischer Literatur und Analysen ökonomischer Lehrbücher zum Umgang mit der Ableitung bei deren Deutung in ökonomischen Kontexten ein theoretisches Rahmenmodell zur Beschreibung eines solchen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler entwickelt (Beantwortung von Forschungsfrage F1).

In *Kapitel 4* („Bekannte Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffs“) erfolgt dann die Aufarbeitung des gegenwärtigen Forschungsstandes zum bei Studierenden tatsächlich vorhandenen Verständnis der Ableitung und auftretenden Verständnisschwierigkeiten. Hierfür werden zahlreiche Studien zitiert, die sich jedoch fast ausschließlich auf Mathematik- oder Ingenieursstudierende beziehen, weil es kaum Studien mit Studierenden der Ökonomie gibt.

In den *Kapiteln 5-8* werden dann die empirischen Studien der Dissertation zum Verständnis der Ableitung *in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* zur Beantwortung der Forschungsfragen F2-F4 aus Tabelle 1 dargestellt. In ihnen erfolgte die Untersuchung

- (1) des gegenwärtig in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelten und des in der Ökonomie praktisch vorausgesetzten Verständnisses der Ableitung mittels Lehrbuchanalysen (*Kapitel 5*),
- (2) des von Studienanfängern¹ der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn mitgebrachten Verständnisses der Ableitung und von auftretenden Verständnisschwierigkeiten mittels eines Vortests (*Kapitel 6*), und
- (3) des von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung erreichten Verständnisses der Ableitung und von auftretenden Verständnisschwierigkeiten durch die Analyse ihrer Lösungen in Klausuraufgaben (*Kapitel 7*) und durch eine ergänzende Interviewstudie (*Kapitel 8*).

¹Stehen keine geschlechtsneutralen Bezeichnungen zur Verfügung, wird in dieser Arbeit zur besseren Lesbarkeit stets die männliche Form verwendet, wobei natürlich auch weibliche Personen mitgemeint sind

Eine Kurzbeschreibung der konkreten Inhalte der Kapitel 5-8 mit den empirischen Studien des Dissertation befindet sich in Tabelle 2.

Kapitel der Arbeit	Kurzbeschreibung des Inhalts des Kapitels
5. „Analyse von Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften zum Ableitungskonzept“	Darstellung des in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelten und des in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzten Verständnisses der Ableitung anhand von 4 prototypischen Fallbeispielen (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010; Wöhe u. Döring, 2013) <i>Zugehörige Forschungsfrage aus Tabelle 1: F2.</i>
6. „Konstruktion und Auswertung eines Vortests zur Ermittlung des Vorwissens zur Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften“	1. Erläuterung der Konstruktion eines Vortests zur Ermittlung des Verständnisses der Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften auf Basis des theoretischen Modells zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung aus Kapitel 3 und den in Kapitel 4 ermittelten Verständnisschwierigkeiten 2. Ausführliche Auswertung der Ergebnisse bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn <i>Zugehörige Forschungsfrage aus Tabelle 1: F3.</i>
7. „Analyse von Lösungen zu 4 Klausuraufgaben zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung“	Analyse von Lösungen zu vier Klausuraufgaben zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Uni Paderborn am Ende des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ <i>Zugehörige Forschungsfrage aus Tabelle 1: F4.</i>
8. „Konzeption und Auswertung einer Interviewstudie zur ökonomischen Interpretation der Ableitung“	1. Erläuterung der Konzeption einer Interviewstudie zur Ermittlung des Verständnisses der ökonomischen Interpretation der Ableitung im Kontext der Grenzkosten 2. Ausführliche interpretative Auswertung von 8 Fallbeispielen der Uni Paderborn und anschließender fallübergreifender Vergleich <i>Zugehörige Forschungsfrage aus Tabelle 1: F4.</i>

Tabelle 2: Übersicht über die Kapitel der Dissertation mit empirischen Studien

Die Arbeit schließt mit einem Fazit in *Kapitel 9*. In diesem werden noch einmal die wesentlichen Forschungsergebnisse der Arbeit zusammengefasst, Konsequenzen für die Lehre abgeleitet und ein Ausblick auf weitere mögliche Forschung gegeben.

2 Ableitung und Grenzkosten in der Ökonomie

In diesem Kapitel soll die Thematik der Dissertation „Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ mit der Schwerpunktsetzung auf dem Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung motiviert werden.

Zum einen hat der Ableitungsbegriff eine große Bedeutung in den Wirtschaftswissenschaften. Dementsprechend sollten Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein adäquates Verständnis des Konzepts erwerben, damit sie dieses später *verständlich* in den Wirtschaftswissenschaften verwenden können. Der Erwerb eines Verständnisses der Ableitung, welches aus mathematischer Perspektive adäquat ist, und dennoch die ökonomische Praxis im Umgang mit der Ableitung angemessen berücksichtigt, ist aber nicht leicht. Denn die Praxis im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie ist sehr heterogen, teilweise inkonsistent und manchmal auf den ersten Blick mathematisch widersprüchlich. Dies kann zu erheblichen Verwirrungen der Lernenden führen, wenn sie die Verwendungspraxis der Ableitung in der Ökonomie tatsächlich verstehen und nicht bloß auswendig lernen möchten. Beide Aspekte ((1) Relevanz der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften und (2) Schwierigkeiten beim Verständnis der Verwendung der Ableitung in der Ökonomie) unterstreichen die Wichtigkeit der Unterstützung der Studierenden der Wirtschaftswissenschaften beim Aufbau eines adäquaten Verständnisses der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer Verwendungspraxis in der Ökonomie. Daher werden diese in den folgenden Unterkapiteln näher beleuchtet.

2.1 Die Bedeutung der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften

Die Ableitung spielt in der Ökonomie an vielen Stellen eine Rolle. Typische Problemstellungen der Ökonomie, bei deren Lösung die Ableitung wichtig ist, sind:

1. Lösung von Optimierungsproblemen (zum Beispiel Maximierung des Gewinns oder Optimierung von Produktionsprozessen)
2. Interpretation von Werten der Ableitung ökonomischer Größen und Funktionen
3. Verwendung der Ableitung als Entscheidungsgröße in der Marginalanalyse zum Treffen ökonomischer Entscheidungen
4. Verwendung der Ableitung als Hilfsmittel zur Beschreibung des Verlaufs ökonomischer Funktionen in ökonomischen Theorien (zum Beispiel in der Kostentheorie)

Zu 1: Die Verwendung der Ableitung zur Lösung von Optimierungsproblemen ist eines der wesentlichen Anwendungsfelder in der Ökonomie. Hierbei treten in der Ökonomie verschiedenste Optimierungsprobleme auf, beispielsweise die Gewinnmaximierung in einem Unternehmen, die Kostenminimierung bei der Herstellung eines Produkts oder auch die Optimierung einer Produktion beim Einsatz verschiedener Materialien. Die Mathematisierung entsprechender Optimierungsaufgaben führt dann zur Betrachtung

ökonomischer Funktionen (Gewinnfunktionen, Kostenfunktionen, Produktionsfunktionen, etc.) in Abhängigkeit vom eingebrachten Input (zum Beispiel gewünschte Produktionsmenge oder eingesetzte Gütermengen). Unter der Annahme beliebig teilbarer Einsatzmengen und Glattheit der ökonomischen Funktionen lassen sich dann diese Optimierungsprobleme mit Hilfe der Ableitung lösen.

Zu 2: Wie bereits gesagt, werden ökonomische Größen häufig mit Hilfe differenzierbarer Funktionen modelliert. Dementsprechend müssen Werte der Ableitung häufig wieder ökonomisch interpretiert werden. Diese Rückübersetzung spielt eigentlich bei allen Anwendungen der Ableitung in der Ökonomie eine Rolle und ist daher zentral.

Zu 3: Eines der wesentlichen Werkzeuge der Ökonomie zum Treffen optimaler Entscheidungen ist die sogenannte Marginalanalyse. In Ruffin u. Gregory (1990, S.4) wird diese wie folgt beschrieben:

„Marginal analysis aids decision making by examining the consequences of making relative small changes from the current state of affairs.“

Es werden also die Auswirkungen kleiner Änderungen Δx einer variablen Größe x betrachtet. Ein typisches Beispiel ist die Untersuchung der Auswirkungen von Preisänderungen auf die Nachfrage und den Erlös. Mathematisch gesprochen untersucht man dabei lokal das Änderungsverhalten ökonomischer Funktionen mit dem Ziel zu entscheiden, ob der derzeitige Zustand beibehalten oder geändert werden soll. Die Ableitung ist hierbei ein wichtiges Hilfsmittel zur Quantifizierung dieses Änderungsverhaltens.

Zu 4: Wie bereits gesagt, lassen sich viele Zusammenhänge in der Ökonomie durch Funktionen beschreiben. Typische Beispiele sind: die Kosten in Abhängigkeit der Produktionsmenge, die Nachfrage bei einem bestimmten Angebotspreis oder auch der Ertrag beim Einsatz bestimmter Rohstoffmengen. Hierbei gibt es häufig prototypische Modellfunktionsklassen, mit denen diese Zusammenhänge qualitativ beschrieben werden. Der Verlauf von Funktionen aus diesen Klassen wird oft mit Hilfe des Verhaltens der Ableitung beschrieben oder gar charakterisiert (Steven, 1998). Eine Beispielfunktionsklasse ist die sogenannte ertragsgesetzliche Produktionsfunktion (zunächst streng steigend und strikt konvex, ab einer Wendestelle streng steigend und strikt konkav und ab einem Maximum fallend). Aus solchen Charakterisierungen ökonomischer Funktionen lassen sich dann weitere Eigenschaften der betreffenden Funktionen herleiten sowie Beziehungen zu anderen ökonomischen Funktionen herstellen. Daraus lassen sich dann ganze Theorien über Klassen ökonomischer Funktionen und deren Eigenschaften aufbauen (Steven, 1998), zum Beispiel die Kostentheorie.

Zusätzlich bauen auf der Ableitung weitere mathematische Konzepte auf, die eine Rolle in der Ökonomie spielen. Dazu gehören insbesondere:

1. Die Elastizität einer Funktion: Hierbei betrachtet man anstelle der Auswirkungen absoluter Änderungen der unabhängigen Variable auf absolute Änderungen der abhängigen Variable relative Änderungen von abhängiger und unabhängiger Variable im Verhältnis.
2. Das Konzept des Differentials: Bei differenzierbaren Funktionen untersucht man lokal oft anstelle des Verhaltens der, in der Regel nichtlinearen Ausgangsfunktion,

das Änderungsverhalten der lokalen Linearisierung. Dieses wird an einer Stelle x durch die Beziehung $df = f'(x) dx$ charakterisiert. Das Differential dx ist hierbei ein variabler Zuwachs des Arguments (also eine Variable). Das Differential df ist die daraus resultierende Änderung der lokalen Linearisierung.

Das Ableitungskonzept bei Funktionen einer Variablen ist natürlich auch die Grundlage für die partiellen Ableitungen und das totale Differential bei Funktionen mehrerer Veränderlicher. Diese bilden dann wiederum die begriffliche Basis für das Lagrange-Verfahren zur Optimierung unter Nebenbedingungen, was in den Wirtschaftswissenschaften eine große Bedeutung hat (zum Beispiel bei der Gewinnmaximierung).

2.2 Die Praxis bei Verwendung der Ableitung in der Ökonomie und resultierende Schwierigkeiten

Um bei einer ökonomischen Funktion deren Ableitung, die in der Ökonomie auch als *Grenzgröße* oder *Grenzfunktion* bezeichnet wird, sinnvoll nutzen zu können, müssen Werte dieser Ableitung eine ökonomisch sinnvolle Deutung erhalten. Ein Verständnis der in der Ökonomie üblichen Interpretation von Werten dieser Grenzgrößen ist jedoch nicht trivial, was im Folgenden am Beispiel der Ableitung einer Kostenfunktion, den sogenannten Grenzkosten, näher erläutert wird.

Ist $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ eine differenzierbare Kostenfunktion, wobei $K(x)$ die Kosten bei einer Ausbringungsmenge von x Einheiten angibt, so wird die Ableitung mit *Grenzkosten* bezeichnet (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S.270; Dietz, 2012, S.263). Aus mathematischer Sicht entsprechen die Grenzkosten der Zuwachsrate $K'(x)$ bei einem Output von x Einheiten. In der Ökonomie werden die Grenzkosten $K'(x)$ jedoch häufig anders interpretiert, nämlich als Zusatzkosten, wenn man den Output um eine Einheit erhöht (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S.270). In einigen Büchern werden die Grenzkosten sogar auf diese Weise definiert (Pindyck u. Rubinfeld, 2013, S.325).

Die Ableitung $K'(x)$ entspricht aber streng genommen nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit. Zum einen gibt die Ableitung eine Änderungsrate der Kostenfunktion an, während die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ und damit einer absoluten Änderung entsprechen. Dies wird dann insbesondere in den unterschiedlichen Einheiten zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit sichtbar: Werden der Output in Mengeneinheiten und die Kosten in Geldeinheiten angegeben, so haben die Grenzkosten $K'(x)$ die Einheit $\left[\frac{GE}{ME}\right]$ während die Zusatzkosten der nächsten Einheit in GE angegeben werden müssten. Die Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit widerspricht insgesamt damit der Grundvorstellung der Ableitung als Änderungsrate, die in der Schule aufgebaut werden sollte (Greefrath u. a., 2016, S.108; Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S.20). Sie entspräche nämlich einer Auffassung der Geschwindigkeit als Weglänge bei vorgegebener Zeiteinheit, wie das Kinder tun, die noch keine adäquaten Vorstellungen vom Geschwindigkeitsbegriff aufgebaut haben (Thompson, 1994, S.223).

Zum anderen unterscheiden sich die Ableitung $K'(x)$ und die Zusatzkosten der nächsten Einheit in ihrem numerischen Wert. Bei den in der Schule behandelten prototypischen

Funktionen wie $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \sin(x)$ sind die Werte von Kostendifferenz und Ableitung höchst verschieden.

Aufgrund dieser beiden Unterschiede zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit liegt eine Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht auf der Hand und sollte daher sorgsam mit dem Vorwissen der Studierenden verknüpft werden.

Eine zusätzliche Schwierigkeit ist, dass in ökonomischen Lehrbüchern nicht immer eine verständliche Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit geschlagen wird. Stattdessen sind die Ausführungen häufig sehr heterogen und teilweise sogar mathematisch widersprüchlich. Dies wurde in einer Ministudie näher untersucht, die im Folgenden beschrieben wird.

Ministudie zum Umgang mit den Grenzgrößen in Lehrbüchern der Ökonomie

In der Ministudie zur Herausarbeitung der Praxis im Umgang mit der Ableitung und den Grenzgrößen in der Ökonomie wurden 20 Lehrbücher unter der Fragestellung „Wie werden die Grenzkosten in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler eingeführt und verwendet?“ gesichtet (Adam, 1980; Breyer, 2015; Däumler u. Grabe, 2013; Dyckhoff, 2002; Fandel, 2010; Götze, 2010; Henderson u. Quandt, 1983; Henrichsmeyer u. a., 1993; Krugman u. Wells, 2010; Mas-Colell u. a., 1995; Pindyck u. Rubinfeld, 2013; Reiß, 2007; Schierenbeck u. Wöhle, 2008; Schroer, 1995; Stiglitz u. Walsh, 2010; Varian, 2001, 2011; Wied-Nebbeling u. Schott, 2005; Wiese, 1999; Wöhe u. Döring, 2013). Dabei wurde jeweils untersucht, (1) welches der beiden oben genannten Grenzkostenkonzepte (Ableitung oder Kostendifferenz) verwendet wird, und (2) wie eine Verbindung zwischen beiden Konzepten hergestellt wird, falls sie beide genannt werden.

Im Folgenden werden exemplarisch anhand von Fallbeispielen verschiedene Umgangspraxen mit der Ableitung und den Grenzgrößen in der Ökonomie dargestellt, die sich in der Analyse finden ließen. Die Fallbeispiele lassen sich hierbei grundsätzlich 4 Typen zuordnen:

1. Durchgängige Verwendung der Grenzkosten als Ableitung
2. Durchgängige Verwendung eines diskreten Grenzkostenkonzeptes
3. Verwendung beider Grenzkostenkonzepte ohne Herstellung einer adäquaten Verknüpfung
4. Verwendung beider Grenzkostenkonzepte und Versuch der Verknüpfung beider Grenzkostenkonzepte

Diese Typen haben nicht den Anspruch alle Praxen der Verwendung der Grenzkosten in der Ökonomie widerzuspiegeln, sondern sind lediglich Beispiele. Eine systematische Untersuchung aller dieser Praxen könnte Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

Typ 1: Durchgängige Verwendung der Grenzkosten als Ableitung

Eine durchgängige Verwendung der Grenzkosten als Ableitung ist vor allen Dingen in fortgeschrittenen, mathematisch orientierten Lehrbüchern zu finden (Mas-Colell

u. a., 1995; Varian, 2001; Henderson u. Quandt, 1983; Adam, 1980). Darunter befinden sich die beiden weit verbreiteten Bücher zur mikroökonomischen Theorie „Mikroökonomie“ von Varian und „Microeconomic Theory“ von Mas-Colell et al.

In Büchern dieses Typs ergeben sich die Grenzkosten in der Regel aus mathematischen Rechnungen. Dies soll im Folgenden am leicht verständlichen Beispiel des Buchs „Mikroökonomische Theorie“ von Henderson und Quandt illustriert werden (Henderson u. Quandt, 1983). Dort tauchen die Grenzkosten erstmals bei der Frage der Gewinnmaximierung auf. Henderson u. Quandt (1983, S.184) bezeichnen die Kosten für eine Produktion des Outputs q mit $C(q)$ und den zugehörigen Erlös mit $R(q)$ (*revenue*). Bei der Suche nach dem Maximum des Gewinns eines Monopolisten erwähnen sie erstmals die Grenzkosten:

„Sein Gewinn ist die Differenz zwischen Gesamterlös und Gesamtkosten: $\pi = R(q) - C(q)$ (7.7). Zur Gewinnmaximierung setzen wir die Ableitung von (7.7) nach q gleich Null:

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) = 0 \quad \text{oder} \quad R'(q) = C'(q) \quad (2)$$

Bei maximalem Gewinn muss MR gleich MC sein.‘ [MR ist marginal revenue, also der Grenzerlös, MC sind die marginal cost, also die Grenzkosten].

Hier werden die Grenzkosten gar nicht explizit definiert, sondern direkt als Ableitung in einer Rechnung verwendet. Zwei Seiten vorher wurde aber der Grenzerlös direkt als Ableitung des Gesamterlöses definiert (Henderson u. Quandt, 1983, S.182), was der Leser des Buches dann hier auch auf die Grenzkosten übertragen soll.

Insgesamt wurde in diesem Buch also konsequent die Ableitung verwendet. Eine Verbalisierung der Bedeutung der Grenzkosten bzw. des Grenzerlöses fehlte jedoch. Dies ist in fortgeschrittenen Lehrbüchern dieses Typs oft der Fall, zum Beispiel auch in den weit verbreiteten Lehrbüchern zur mikroökonomischen Theorie von Mas-Colell u. a. (1995) und Varian (2001).

Unter den Büchern, die konsequent die Grenzkosten als Ableitung verwenden, ist lediglich in Adam (1980, S.152) eine zusätzliche Verbalisierung der Grenzkosten als Ableitung zu finden (allerdings ist diese im Detail nicht ganz richtig):

„Diese Funktion der Grenzkosten gibt die Änderung der Kosten pro Mengeneinheit der Ausbringung an.‘

Typ 2: Durchgängige Verwendung eines diskreten Grenzkostenkonzeptes

Neben Lehrbüchern, die durchgängig die Grenzkosten als Ableitung verwenden, gibt es Lehrbücher, die durchgängig ein diskretes Grenzkostenkonzept verwenden, entweder als $K(x+1) - K(x)$ oder als Differenzenquotient $\frac{K(x+1)-K(x)}{\Delta x}$ mit $\Delta x = 1$. Ein Beispiel ist das weit verbreitete Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013). Dort werden die Grenzkosten wie folgt definiert:

„Die Grenzkosten – mitunter auch als Mehrkosten bezeichnet – sind die Erhöhung der Kosten, die sich aus der Erhöhung des Outputs um eine zusätzliche Einheit ergeben.‘

Die Grenzkosten werden also als Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ eingeführt. Danach nennen Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) auch eine mathematische Formel zur Bestimmung der Grenzkosten:

„Deshalb können die Grenzkosten wie folgt beschrieben werden:

$$GK = \frac{\Delta VK}{\Delta q} = \frac{\Delta TK}{\Delta q} . \quad (3)$$

Mit GK meinen Pindyck und Rubinfeld die Grenzkosten, mit TK (*total cost*) die Gesamtkosten und mit VK die variablen Kosten (dies sind die Kosten abzüglich der Fixkosten $TK(0)$ (Pindyck u. Rubinfeld, 2013, S.321)). Mit q ist vermutlich der Output gemeint, was hier aber nicht gesagt wird.

Pindyck und Rubinfeld haben die Grenzkosten also diskret definiert. Allerdings passen Formel und Verbalisierung nicht ganz zusammen. Die Verbalisierung entspricht der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$, die Formel einer Änderungsrate. Damit die Formel numerisch zur Verbalisierung passt, muss außerdem $\Delta q = 1$ gelten.

Dann bringen Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.326) noch ein Beispiel. Dort bestimmen sie in einer Wertetabelle Grenzkosten über $K(3) - K(2)$ und geben das Ergebnis als €20 an. Damit passt die verwendete Einheit wieder zu der zuerst genannten verbalen Definition der Grenzkosten als Mehrkosten der nächsten Einheit, nicht aber zur genannten Formel.

Insgesamt verwendeten Pindyck u. Rubinfeld (2013) also konsistent ein diskretes Grenzkostenkonzept, vermischten allerdings Zusatzkosten und Differenzenquotient ohne weitere Erklärung miteinander. Ein Beispiel für ein Buch, in dem durchgängig in der Einheit und numerisch mit der Kostendifferenz gearbeitet wird, ist Krugman u. Wells (2010, S.209-210).

Typ 3: Verwendung beider Grenzkostenkonzepte ohne adäquate Verknüpfung beider Grenzkostenkonzepte

In den meisten der betrachteten Lehrbücher werden beide Grenzkostenkonzepte (Ableitung und Kostendifferenz) simultan verwendet. Allerdings wird oft keine Verknüpfung zwischen den beiden Konzepten hergestellt. So führt zum Beispiel Steven (1998, S.32) die Grenzkosten wie folgt ein:

„Als Grenzkosten $K'(x)$ bezeichnet man die zusätzlichen Kosten, die für die Herstellung einer weiteren Produktionseinheit anfallen. Sie ergeben sich als erste Ableitung der Kostenfunktion:

$$K'(x) = \frac{dK(x)}{dx} . \quad (4)$$

Eine Erklärung zu dieser Definition, die für Studierende widersprüchlich ist, wenn sie das Konzept der Ableitung aus der Schule verstanden haben, gibt es nicht. Dies kann zu Verwirrungen führen.

Ähnlich widersprüchlich ist die Einführung der Grenzkosten in dem weit verbreiteten Lehrbuch „Grundlagen der Volkswirtschaftslehre“ von Varian (Varian, 2011). Hier

werden die Grenzkosten zunächst als Differenzenquotient eingeführt (Varian, 2011, S.425):

$$MC(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y) - c(y)}{\Delta y} \quad (5)$$

Das Buch fährt nun fort, indem die Verbindung zur oft genannten Interpretation als Zusatzkosten für die nächste Einheit hergestellt wird (Varian, 2011, S.425):

„Häufig stellt man sich Δy als eine Outputeinheit vor, sodass die Grenzkosten die Veränderung der Kosten angeben, wenn wir die Produktion einer zusätzlichen Outputeinheit in Betracht ziehen. Wenn wir an die Erzeugung eines unteilbaren Gutes denken, sind die Grenzkosten aus der Produktion von y Einheiten einfach $c(y) - c(y - 1)$. Dies ist meist eine anschauliche Art, sich die Grenzkosten vorzustellen, es ist jedoch manchmal irreführend. Erinnern wir uns, dass die Grenzkosten eine Veränderungsrate messen: Die Kostenänderung dividiert durch eine Outputänderung. Wenn die Outputänderung eine einzelne Einheit ist, sehen die Grenzkosten wie eine einfache Kostenänderung aus, tatsächlich handelt es sich aber um eine Veränderungsrate aufgrund einer Erhöhung des Outputs um eine Einheit.“

Für die erste Einheit werden die Grenzkosten dann unter Verwendung der Aufteilung der Kosten in Fixkosten $F = c(0)$ und variable Kosten $c_v(y) = c(y) - F$ passend formalisiert (Varian, 2011, S.425):

$$MC(1) = \frac{(c_v(1) + F) - (c_v(0) + F)}{1} = \frac{c_v(1)}{1} \quad (c_v(0) = 0) \quad (6)$$

Bis hierhin ist das Buch sehr konsistent und erläutert sehr gut den Unterschied in der Bedeutung zwischen der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ und dem Differenzenquotienten $\frac{K(x+1)-K(x)}{1}$.

Zwei Seiten später wird das Buch dann jedoch inkonsistent. Hier wird eine Beziehung zwischen den Grenzkosten $MC(y)$ und den variablen Kosten $c_v(y)$ hergeleitet und zwar wie folgt (Varian, 2011, S.427):

$$c_v(y) = [c_v(y) - c_v(y - 1)] + [c_v(y - 1) - c_v(y - 2)] + \dots + [c_v(1) - c_v(0)] \quad (7)$$

Jeder Ausdruck in dieser Summe stellt jedoch die Grenzkosten der verschiedenen Outputniveaus dar:

$$c_v(y) = MC(y - 1) + MC(y - 2) + \dots + MC(0) \quad (8)$$

Die variablen Kosten $c_v(y)$ ergeben sich also laut Varian als Summe der Grenzkosten der einzelnen Einheiten: $c_v(y) = \sum_{i=1}^n MC(y - 1)$.

Bei dieser Rechnung ignoriert Varian auf einmal doch den Nenner seiner Definition der Grenzkosten als Differenzenquotient, obwohl er vorher betont hatte, dass man das nicht darf.

Noch inkonsistenter wird das Buch bei den anschließenden Übungsaufgaben. Hier sollen die Studierenden zur Kostenfunktion $c(y) = y^2 + 1$ mehrere zugehörige Kostenfunktionen bestimmen: 1.Variable Kosten, 2.Fixkosten, 3.Durchschnittliche variable Kosten, 4.Durchschnittliche Fixkosten, 5.Durchschnittskosten und 6.Grenzkosten (Varian, 2011, S.428). Die Lösungen sind laut Varian (Varian, 2011, S.428):

- Variable Kosten: $c_v(y) = y^2$
- Fixkosten: $c_f(y) = 1$
- Durchschnittliche variable Kosten $AVC(y) = \frac{y^2}{y} = y$
- Durchschnittliche Fixkosten $AFC(y) = \frac{1}{y}$
- Durchschnittskosten $AC(y) = \frac{y^2+1}{y} = y + \frac{1}{y}$
- Grenzkosten $MC(y) = 2y$

Als Erklärung der Lösung wird von Varian angegeben:

„Das ist alles offensichtlich, mit Ausnahme der letzten Zeile, die aber auch klar ist, wenn man die Differentialrechnung beherrscht. Wenn die Kostenfunktion $c(y) = y^2 + 1$ ist, dann ist die Grenzkostenfunktion $MC(y) = 2y$.“

Die Bestimmung der Grenzkosten als $MC(y) = 2y$ ist jedoch für Studierende hier nicht offensichtlich. Denn bei Verwendung der Definition der Grenzkosten von Varian müsste man hier $MC(y) = \frac{(y+1)^2 - y^2}{1} = 2y + 1$ erhalten. Auch die Verwendung der Kostendifferenz $c(y+1) - c(y)$ ergäbe das gleiche Ergebnis. Stattdessen ist hier die Gleichung der Ableitung $2y$ angegeben (ohne Nennung des Stichwortes „Ableitung“), obwohl bisher nirgends ein Hinweis auf die Ableitung kam. Auf Basis der hier dargestellten Ausführungen zu den Grenzkosten ist das Ergebnis $2y$ für Studierende an dieser Stelle nicht verständlich.

Ein weiteres Beispiel für ein Lehrbuch, in dem sich durch die simultane Verwendung beider Grenzkostenkonzepte ohne weitere Erklärungen Widersprüche ergeben, ist das ebenfalls weit verbreitete Lehrbuch „Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe (Wöhe u. Döring, 2013). Im diesem Lehrbuch werden Grenzkosten wie folgt definiert (Wöhe u. Döring, 2013, S.300):

„Als Grenzkosten K' bezeichnet man die Kosten der jeweils letzten Produktionseinheit. So kann man vereinfachend die Grenzkosten der 33. Produktionseinheit in der Weise ermitteln, dass man von den Gesamtkosten bei der Produktion von 33 Produktionseinheiten die Gesamtkosten bei der Produktion von 32 Produktionseinheiten subtrahiert. Die Grenzkostenkurve gibt die Steigung der Gesamtkostenfunktion an. Sie lässt sich ermitteln, indem die erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion gebildet wird.“

Hier werden die Grenzkosten also gleichzeitig als Ableitung und als Kostendifferenz eingeführt. Dies stellt aus rein mathematischer Sicht einen Widerspruch auf der rechnerischen Ebene dar, da $K(33) - K(32)$ im Allgemeinen nicht gleich $K'(33)$ ist. Im zugehörigen Übungsbuch Wöhe u. a. (2013) werden dann bei der Bestimmung der Grenzkosten weiterhin ständig beide Konzepte vermischt (Wöhe u. a., 2013, S.118-119). Dabei werden weitere Aussagen genannt, die ohne zusätzliche Erklärungen ebenfalls widersprüchlich sind, wie:

$$K(7) = \sum_{i=1}^7 K'(i) \quad (9)$$

Solche Aussagen können bei Studierenden zu Verwirrungen führen, wenn sie das Ableitungskonzept aus der Schule verstanden haben (oder auch, wenn sie die entsprechende Aussagen an einer Beispielfunktion konkret nachrechnen).

Typ 4: Verwendung beider Grenzkostenkonzepte und Versuch der Verknüpfung beider Grenzkostenkonzepte

Jedoch gibt es auch Lehrbücher, die beide Grenzkostenkonzepte (Ableitung und Kostendifferenz) verwenden und versuchen, hier eine Verbindung zwischen beiden Konzepten aufzuzeigen.

Als erstes Beispiel sei hier das Lehrbuch „Produktions- und Kostentheorie“ von Schroer (1995) genannt. Schroer führt zunächst zwei Grenzkostenkonzepte ein, die er sogar begrifflich unterscheidet (Schroer, 1995, S.66):

1. Differenzkosten (entsprechen dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta K}{\Delta x}$)
2. Differentialkosten (entsprechen dem Differentialquotienten $K'(x)$)

Schroer stellt auch eine Verbindung zwischen beiden Grenzkostenkonzepten her. Zunächst wird sie einmal anhand der beiden von Schroer präsentierten Definitionen deutlich: Differenzenquotient $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ versus $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ (Schroer, 1995, S.62-64). Weiterhin gibt es zwei Skizzen mit derselben Kostenfunktion zur Illustration des Unterschiedes (Schroer, 1995, S.65) (siehe Abbildung 1).

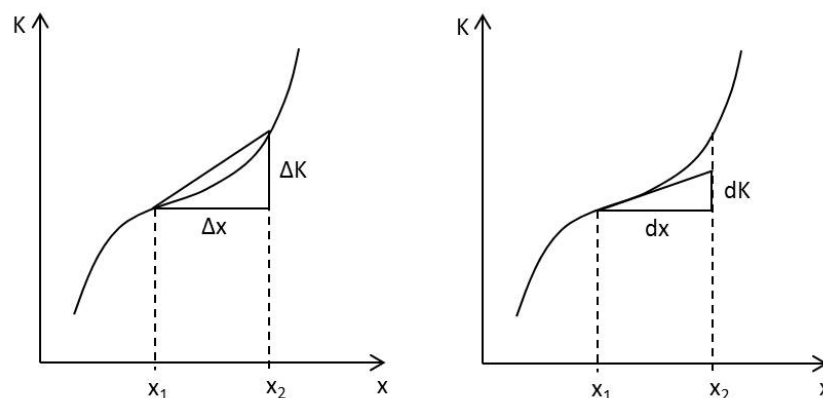


Abbildung 1: Graphik des Autors in Analogie zu einer Graphik aus Schroer (1995, S.66) zur Veranschaulichung des Unterschiedes zwischen den Grenzkosten als Differenzkosten und als Differentialkosten

Die Grenzkosten als Differenzkosten sind durch die Steigung der Sekante in der linken Graphik in Abbildung 1, die Grenzkosten als Differentialkosten durch die Steigung der Tangente in der rechten Graphik gegeben, was Schroer auch verbalisiert (Schroer, 1995, S.64). Übrigens wird in Abbildung 1 auch die bereits in Kapitel 2.1 genannte Auffassung von Differentialen in der Ökonomie deutlich: dx ist eine Variable, die den Zuwachs ausgehend vom Punkt x beschreibt. Das Differential df ist der daraus resultierend Zuwachs entlang der Tangente. Das Differential df ist also abhängige Variable in der funktionalen Beziehung $df = f'(x) dx$. Damit erhält auch die ebenfalls in Schroer genannte Schreibweise $K' = \frac{dK}{dx}$ einen mathematischen Sinn (Schroer, 1995, S.64).

Zu guter Letzt stellt Schroer auch noch eine Verbindung zwischen Differenzenquotient $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ und Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ her. Er erklärt, dass sich die Grenzkosten auch

über die Kostendifferenz definieren lassen, wenn die Ausbringungsmenge x „jeweils um eine Fertigungseinheit variiert“ (Schroer, 1995, S.62).

Als zweites Beispiel eines Lehrbuchs, in dem beide Grenzkostenkonzepte (Ableitung und Kostendifferenz) verwendet und miteinander verknüpft werden, sei hier das Lehrbuch „Mikroökonomische Theorie“ von Reiß (2007) vorgestellt. Dort werden nicht nur Unterschiede zwischen beiden Grenzkostenkonzepten genannt, sondern auch Begründungen gebracht, weshalb diese in der Ökonomie häufig synonym verwendet werden.

Konkret werden die Grenzkosten im Lehrbuch von Reiß als Ableitung definiert und als Zusatzkosten für eine sogenannte *marginale Einheit* interpretiert (Reiß, 2007, S.341). Eine Rechtfertigung dieser Interpretation und eine Erklärung des Begriffs der *marginale Einheit*, der in der Ökonomie manchmal zu finden ist, wurde bereits vorher beim Begriff des Grenznutzens dargestellt. (Reiß, 2007, S.197).

Ausgangspunkt ist hierbei eine differenzierbare Nutzenfunktion $N(x)$, die in einer Graphik dargestellt ist (Reiß, 2007, S.196) (linke Skizze in Abbildung 2). Daneben ist ein Ausschnitt des Graphen aus Abbildung 2 vom Punkt B bis zum Punkt C abgebildet, in den reingezoomt wurde (Reiß, 2007, S.196) (rechte Skizze in Abbildung 2).

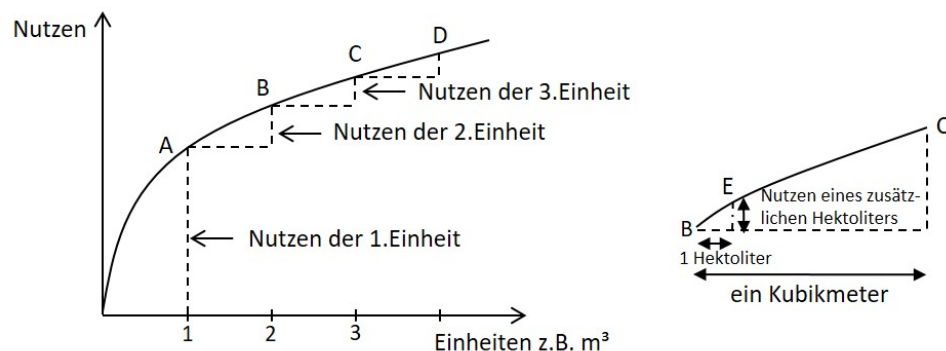


Abbildung 2: Graphik des Autors in Analogie zu einer Graphik aus (Reiß, 2007, S.196) zur Erklärung des Grenznutzens

Zu diesen beiden Graphiken gibt es folgende Erklärung (Reiß, 2007, S.197):

„In Abb. 4.5 [hier analoge Abbildung 2] ist der Nutzenzuwachs der dritten Einheit gleich der Steigung der Geraden von B zu C, da der horizontale Abstand von B zu C gleich 1 ist. Würde man Wasser nicht in Kubikmetern, sondern in Hektolitern ($=\frac{1}{10}$ Kubikmeter) messen, so bekäme man als Nutzenzuwachs die Steigung der Strecke zwischen B und E. Würde man Liter oder sogar Kubikzentimeter als Einheit wählen, so bekäme man eine Steigung, die sich von der Steigung der Tangente so gut wie nicht unterscheiden würde. Diese Tangentensteigung bezeichnen wir als Grenznutzen im Punkte B.“

Hier werden zwei Dinge erklärt. Zum einen wird noch einmal erläutert, wie man die Steigung der Tangente aus Sekantensteigungen erhält, wenn man den Punkt C gegen B laufen lässt. Dies ist quasi eine Erklärung der Definition der Ableitung. Zum anderen wird erklärt, dass man diesen Grenzprozess praktisch so realisieren kann, dass man

stets Quotienten der Form $\frac{N(x_0+1)-N(x_0)}{1}$ wählt und dabei die Einheit von x schrittweise verkleinert. Damit erhält man bei Wahl einer genügend kleinen Einheit, dass die Sekantensteigung $\frac{N(x_0+1)-N(x_0)}{1}$ ungefähr gleich der Tangentensteigung ist.

Es wurde also erklärt, weshalb man in der Ökonomie für sehr kleine Einheiten Ableitung und Sekantensteigung $\frac{N(x_0+1)-N(x_0)}{1}$ häufig miteinander identifiziert. Allerdings wird die Steigung dann wieder ohne Erklärung mit der Kostendifferenz gleichgesetzt (Reiß, 2007, S.197):

„Der Grenznutzen in einem beliebigen Punkt gibt nach Konstruktion an, um wieviel der Nutzen steigt, wenn die Menge um eine extrem kleine Gütereinheit (nicht Kubikmeter sondern Kubikmillimeter) vergrößert wird. Der moderne Ökonom spricht beim Grenznutzen vom Nutzen einer zusätzlichen infinitesimal kleinen Einheit. Gossen (1967) sprach anschaulicher vom Nutzen eines „neu hinzugekommenen Atoms“.“

Hier erkennt man auch, was in der Ökonomie häufig unter dem Begriff der marginalen Einheit (bzw. einer *infinitesimalen* Einheit, Reiß verwendet beide Begriffe synonym) verstanden wird, nämlich *eine* Einheit, die im Kontext sehr klein (aber endlich) ist. Die Verwendung des Terminus *marginal* findet man in der Ökonomie aber auch bei anderen kleinen, aber endlichen Zuwächsen > 0 , die dann als *marginale Veränderungen* der unabhängigen Variable bezeichnet werden (Dyckhoff, 2002, S.152).

Insgesamt nannte Reiß beide Grenzkostenkonzepte (Ableitung und Kostendifferenz). Hierbei definierte er die Grenzkosten als Ableitung und interpretierte sie als Zusatzkosten einer *marginale Einheit*, was für ihn eine im Kontext sehr kleine, aber endliche Einheit ist. Die Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer Interpretation schlug er auf der graphischen Ebene, indem er erklärte, dass bei der Wahl einer *marginale Einheit*, also einer im Kontext genügend kleinen Einheit, die Sekantensteigung $\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$ ungefähr der Tangentensteigung $f'(x)$ entspricht.

Ein letztes Fallbeispiel, in dem eine Verbindung zwischen beiden Grenzkostenkonzepten (Ableitung und Kostendifferenz) hergestellt wird, ist das Lehrbuch „Mikroökonomik“ von Wiese (1999). Hier wird diese Verbindung auf formalerer Ebene hergestellt als in Reiß (2007).

Wiese definiert die Grenzkosten zunächst gleichzeitig als Zusatzkosten und Ableitung (Wiese, 1999, S.194):

„Die Grenzkosten (MC=marginal cost) sind die Ausgaben für die zusätzlich notwendigen Produktionsfaktoren, wenn man eine (kleine) Einheit zusätzlich produzieren möchte:

$$MC = \frac{dy}{dx} . \quad (10)$$

An dieser Stelle gibt es keine Erklärung dazu. Diese findet man weiter vorne im Buch von Wiese (1999) (sie fehlt übrigens in der aktuellen Auflage 2014!) im Kontext von Indifferenzkurven. Das sind Isoquanten einer Nutzenfunktion $N(x_1, x_2)$ zweier Güter, die sich in der Form $x_2 = f(x_1)$ darstellen lassen (Wiese, 1999, S.45-48). Dazu wird in einer Abbildung eine solche Kurve mit einem Steigungsdreieck mit den Kathetenlängen $\Delta x_1 = 1$ und Δx_2 dargestellt (Wiese, 1999, S.47). Zu dieser Abbildung wird dann erklärt:

„Abb. C.9 zeigt den Differenzenquotienten $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$, wobei $\Delta x_1 = 1$ gilt. Falls der Grenzwert $\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ an der uns interessierenden Stelle x_1 existiert, erhält man den Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{df}{dx_1} \quad (11)$$

Den Differentialquotienten erhält man also dadurch, dass man beim Differenzenquotienten Δx_1 gegen Null gehen lässt. Man errechnet den Differentialquotienten als erste Ableitung von f nach x_1 .‘

Hier wird also auf formaler Ebene der Unterschied zwischen $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ für $\Delta x_1 = 1$ und $\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ erklärt. Dann erfolgt eine Begründung der Tatsache, dass beide Ausdrücke in der Ökonomie dennoch oft synonym verwendet werden (Wiese, 1999, S.47-48):

„In der mikroökonomischen Fachsprache ist es üblich, sowohl den Differenzen- als auch den Differentialquotienten als Grenznutzen, Grenzkosten, Grenzprodukt etc. zu bezeichnen, je nachdem, ob f eine Nutzenfunktion, eine Kostenfunktion oder eine Produktionsfunktion ist. Bei einer Vielzahl von Funktionen, die wir verwenden wollen, macht es keinen großen Unterschied, ob wir den Differenzen- oder den Differentialquotienten benutzen. Bei kleinen Änderungen sind sie annähernd gleich, bei linearen Funktionen sogar vollkommen. Bei größeren Änderungen kann der Diskretheitsfehler jedoch beträchtlich sein.‘

Mit „der Differenzenquotient“ ist hier vermutlich immer der Differenzenquotient $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ mit $\Delta x_1 = 1$ gemeint, da sonst keine Eindeutigkeit gegeben ist. Es wird darauf aufmerksam gemacht, dass für größere Δx_1 der Fehler zwischen Differenzenquotient und Ableitung eventuell nicht zu vernachlässigen ist (bzw. dass $\Delta x_1 = 1$ in der Ökonomie als klein genug angenommen wird, sodass der Fehler zwischen Ableitung und dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta x_2}{1}$ vernachlässigbar ist).

Wiese erklärt danach, wie er mit der „Doppelnatur“ der Grenzkosten anschließend umgehen möchte (Wiese, 1999, S.48):

„Im vorliegenden Text werden wir durchgängig den Differentialquotienten benutzen. Seine mathematische Bestimmung über die erste Ableitung ist in der Regel einfach. Häufig ist es der Intuition jedoch förderlich, wenn man sich fragt, wie der Wert einer Funktion sich ändert, wenn eine Variable um eine „kleine“ Einheit geändert wird, wenn wir also nach dem Differenzenquotienten fragen.‘

Für Rechnungen will er also die Ableitung verwenden, bei der Interpretation im Kontext den Differenzenquotienten $\frac{\Delta x_2}{1}$ (bzw. seiner verbalen Formulierung nach eigentlich die Differenz Δx_2).

Insgesamt stellte auch Wiese eine Verbindung zwischen Grenzgrößen als Ableitung und diskreten Grenzkosten her und zwar über den Vergleich vom Differenzenquotienten $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ und dem Differentialquotienten $\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$, die er als annähernd gleich für kleine

Δx_1 bezeichnete. Er benutzte also die Approximation $f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$ für $\Delta x \approx 0$, die sich aus der Definition der Ableitung ergibt. Mit dem Argument, dass man bei den meisten ökonomischen Funktionen den Fehler zwischen beiden Größen bei $\Delta x = 1$ vernachlässigen kann, begründete er die Möglichkeit der Interpretation der Ableitung $f'(x)$ als Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{1}$ bzw. als Kostendifferenz $f(x+1) - f(x)$.

Zusammenfassung

Die Analysen zur Einführung des Grenzkostenbegriffs in ökonomischen Lehrbüchern zeigen, dass es eine sehr große Vielfalt im Umgang mit dem Grenzkostenbegriff in Lehrbüchern der Ökonomie gibt. Während einige Lehrbücher konsequent eines der beiden Grenzkostenkonzepte (Ableitung oder Kostendifferenz bzw. Differenzenquotient mit $\Delta x = 1$) verwenden, erfolgt in den meisten Lehrbüchern eine simultane Verwendung beider Konzepte. Während in einigen Lehrbüchern den Studierenden hier auch eine Verbindung zwischen beiden Konzepten aufgezeigt wird (Schroer, 1995; Reiß, 2007; Wiese, 1999), identifizieren die meisten Lehrbücher beide Konzepte miteinander ohne ausreichende Erklärung (insbesondere die weit verbreiteten Grundlagenwerke wie (Varian, 2011) oder (Wöhe u. Döring, 2013)). Dabei ergeben sich Inkonsistenzen und teilweise sogar mathematische Widersprüche.

2.3 Konsequenzen der Betrachtungen zur Verwendung der Ableitung in der Ökonomie für die Schwerpunktsetzung der Dissertation

Aus den vorangegangenen Ausführungen sieht man, dass es bei der Praxis der Verwendung der Ableitung als Grenzgröße in der Ökonomie eine große Heterogenität gibt. In Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften wird oft keine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und der Art und Weise ihrer Verwendung in ökonomischen Kontexten geschlagen. Stattdessen sind die Ausführungen zu den Grenzgrößen wie den Grenzkosten oft inkonsistent. Teilweise tauchen dabei mathematische Widersprüche in verschiedenen Ebenen auf:

1. Widersprüche innerhalb eines Lehrbuches
2. Widersprüche beim Vergleich verschiedener Lehrbücher
3. Widersprüche zum Vorwissen der Studierenden über die Ableitung aus der Schule

Diese Widersprüche können zu Verwirrungen der Studierenden und führen. Daraus ergibt sich als wichtige Konsequenz für die Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, dass dort eine Verbindung zwischen den Grenzgrößen als Ableitung und deren in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit hergestellt werden sollte. Diese Verbindung sollte einerseits aus mathematischer Perspektive adäquat sein, andererseits aber die ökonomische Praxis angemessen berücksichtigen, damit die Studierenden die Ableitung später in der Ökonomie *verständlich* verwenden können. Daher wurde der Schwerpunkt der Forschung in dieser Dissertation zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auf diese Verbindung gelegt. Hierbei wurde untersucht

(1) wie eine solche adäquate Verbindung aussehen kann, (2) inwieweit sie gegenwärtig vermittelt wird, und (3) inwieweit die Studierenden der Wirtschaftswissenschaften vor und nach Besuch einer mathematischen Lehrveranstaltung eine solche selbst schlagen können.

3 Entwicklung eines theoretischen Modells zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“

Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung eines theoretischen Modells zur Beschreibung eines möglichen Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, welches mathematisch adäquat ist, aber auch die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt. Dieses Rahmenmodell dient dann als Basis für die Untersuchung des in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler tatsächlich vermittelten Verständnisses (Kapitel 5) und des von Studierenden erreichten Verständnisses (Kapitel 6-8).

Bei der Entwicklung des Modells wurde in drei Schritten vorgegangen:

- Schritt 1: Auswahl eines theoretischen Rahmens zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Konzepte im Allgemeinen aus der mathematikdidaktischen Literatur
- Schritt 2: Konkretisierung des Rahmens zu einem Modell zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ (zunächst als mathematisches Konzept ohne Ökonomiebezug) auf Basis der mathematikdidaktischen Literatur
- Schritt 3: Erweiterung des Modells um ökonomische Facetten auf der Basis des Umgangs mit der Ableitung in ökonomischen Kontexten in Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften

Das Kapitel gliedert sich entsprechend dieser Schritte in mehrere Unterkapitel:

1. Beschreibung der in dieser Arbeit verwendeten theoretischen Konstrukte *concept image* und *concept definition* zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Konzepte
2. Konkretisierung dieser Konstrukte für den Ableitungsbegriff zu einem Rahmenmodell zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ als rein mathematisches Konzept in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
3. Erweiterung des Modells um ökonomische Facetten auf Basis des Umgangs mit der Ableitung in Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften

3.1 Die theoretischen Konstrukte „concept image“ und „concept definition“ zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Begriffe

Auch wenn Begriffe der universitären Mathematik stets durch eine präzise Definition gegeben sind, genügt deren Kenntnis nicht zum Verständnis der jeweiligen Konzepte. So wurde beispielsweise von Vinner (1983) in einer empirischen Studie zum Verständnis des Funktionsbegriffs festgestellt, dass viele Studierende trotz Kenntnis der formalen Definition einer Funktion das Konzept nicht verstanden haben, da sie gegebene Beispiele von Funktionen ohne Gleichung nicht als solche identifizieren konnten (Vinner,

1983, S.302)). Ähnliche Schwierigkeiten hatte auch David Tall zu Begriffen aus der Analysis festgestellt (Tall, 2013, S.423). Mit ihren theoretischen Konstrukten von *concept image* und *concept definition* lieferten sie in dem gemeinsamen Paper *Concept definition and concept image with particular reference to limits and continuity* (Tall u. Vinner, 1981) einen Erklärungsansatz für dieses Phänomen, der generell als theoretische Grundlage zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Begriffe dienen kann.

Das Konstrukt des „concept image“: Laut Tall u. Vinner (1981) umfasst das Verständnis eines mathematischen Konzeptes weit mehr als die Kenntnis der zugehörigen Bezeichnung oder der formalen Definition. Es ist vielmehr gekennzeichnet durch alle Assoziationen zu diesem Begriff (Tall u. Vinner, 1981, S.152):

„We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.“

Das *concept image* besteht also aus mentalen Assoziationen eines Individuums zu einem Begriff (Rasslan u. Tall, 2002, S.89).

Vinner fasste den Begriff des *concept image* zunächst recht eng. Mit mentalen Bildern meinte er mentale Repräsentationen der zugehörigen externen Repräsentationen (inklusive Symboliken wie $y = f(x)$) (Vinner, 1983, S.293)). Mit den assoziierten Eigenschaften des Konzepts meinte er die Eigenschaften der konkreten Beispiele und Gegenbeispiele, mit denen die Lernenden gearbeitet haben (Vinner u. Dreyfus, 1989). Dies waren also in seinen Augen ursprünglich die Bestandteile des *concept image*. In späteren Beschreibungen erweiterte er das Konstrukt des *concept image* um beliebige Impressionen zu einem mathematischen Konzept, blieb aber bei der Betonung des nonverbalen Charakters der Assoziationen (Vinner, 1991, S.68):

„The concept image is something non-verbal associated in our mind with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has visual representations; it can also be a collection of experiences. The visual representations, the mental pictures the impressions and the experiences associated with the concept name can be translated into verbal forms. But it is important to remember that these verbal forms are not the first thing evoked from our memory.“

In späteren Arbeiten von Tall findet man hingegen die Betonung des Nonverbalen nicht (siehe zum Beispiel (Tall, 1988, 1996, 2013)). Er nannte hier lediglich das ursprüngliche Zitat zur Beschreibung des *concept image* als *total cognitive structure that is associated with the concept*, was er nicht näher spezifizierte.

Ähnlich weit wird das Konstrukt des *concept image* auch von anderen Forschern der Mathematikdidaktik aufgefasst. So beschrieb zum Beispiel Michelle Zandieh in ihrer Dissertation zum Verständnis des Ableitungsbegriffs von Schülern das Konstrukt wie folgt (Zandieh, 1997, S.7):

„A person’s concept image consists of everything he or she person associates with the concept - images, symbols, words, examples, properties.“

Nach dieser Auffassung sind also verbale Assoziationen ebenfalls Bestandteil des *concept image*. Ähnlich fassten auch Bingolbali und Monaghan das Konstrukt in ihrer Arbeit zum Verständnis der Ableitung von Ingenieursstudierenden auf (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.20):

„Tall and Vinner (1981) describe it [the concept image] as the total cognitive structure associated with a concept in an individual’s mind. It includes mental pictures, associated properties and processes as well as strings of words and symbols.“

In dieser Arbeit möchte ich das *concept image* wie Tall im Sinne von *„total cognitive structure associated with a concept in an individual’s mind“* auffassen. Dieses beinhaltet dann insbesondere auch verbale Assoziationen zu einem Konzept.

Hervorzuheben ist an dieser Stelle noch, dass das *concept image* eines Studierenden zu einem mathematischen Konzept nicht feststeht, sondern sich *dynamisch* verändert. Da es auf Erfahrungen der Studierenden beim Umgang mit dem Konzept basiert (Tall u. Vinner, 1981, S.152), können neue Erfahrungen zu einer Veränderung des *concept image* führen.

Zusätzlich zum allgemeinen Konstrukt des *concept image* führten Tall u. Vinner (1981) ergänzend das Konstrukt des *evoked concept image* ein. Sie betonten, dass das gesamte *concept image* zu einem mathematischen Begriff nicht durchgängig kohärent sein muss, sondern widersprüchliche Informationen zu einem mathematischen Begriff enthalten kann (Tall u. Vinner, 1981, S.152). Dies kann dadurch zustande kommen, dass einem nicht immer alle Teile des *concept image* bewusst sein müssen. So kann es z.B. sein, dass man annimmt, dass bei konvergenten Folgen der Grenzwert nicht erreicht wird, gleichzeitig aber auch mit Grenzwerten konstanter Folgen arbeitet (z.B. beim Ableiten einer konstanten Funktion). Den aktivierten Teil bezeichneten Tall und Vinner als *evoked concept image* (Tall u. Vinner, 1981, S.152). Sind schließlich widersprüchliche Teile des *concept image* aktiviert, so kann es zu einem kognitiven Konflikt kommen (Tall u. Vinner, 1981, S.152). Das Erzeugen kognitiver Konflikte kann zu einer Anpassung des *concept image* führen (Vinner, 1991, S.80).

Das Konstrukt der „concept definition“: Neben dem *concept image* führten Tall und Vinner ein weiteres Konstrukt ein, die sogenannte *concept definition* (Tall u. Vinner, 1981, S.152):

„The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition.“

Es stellt sich die Frage, inwiefern sich die *concept definition* vom *concept image* unterscheidet und welche Rolle die individuelle Rekonstruktion einer Definition für ein

Konzept, von Tall und Vinner als *personal concept definition* bezeichnet (Tall u. Vinner, 1981, S.152), spielt.

In Vinner's ursprünglicher Auffassung ist die *concept definition* dadurch charakterisiert, dass sie *verbal* ist und folgende Bedingung erfüllt (Vinner, 1983, S.293):

„By „concept definition“ we mean here a verbal definition that accurately explains the concept in a non-circular way.“

Für die formale, in Lehrveranstaltungen der Mathematik vermittelte Definition ist letztere Bedingung sicher erfüllt, für die *personal concept definition* muss das nicht der Fall sein. Allerdings können formale Definitionen auch Zeichenketten sein, was Vinner hier nicht berücksichtigte.

Was Vinner unter der *personal concept definition* genau verstand, wird durch die Art und Weise deutlich, wie er diese bei Studierenden ermittelte (Vinner, 1991, S.73):

„A natural method to learn about somebody's concept definition is by a direct question (what is a function? what is a tangent? and so on).“

Die *personal concept definition* ist also laut Vinner die direkte Antwort auf die Frage, was das Konzept sei. Hierbei muss die Antwort der Studierenden natürlich den Forderungen einer mathematischen Definition *nicht* genügen. Studierende könnten hier auch Teile des *concept image* aktivieren und verbalisieren (Beispiel: „Eine Funktion ist eine Gleichung der Form $y = f(x)$.“). Dennoch zählte sie Vinner nicht als Bestandteil des *concept image*, da Letzteres eben nur nonverbale Assoziationen enthält.

Tall sah das hingegen anders. Er sah die *personal concept definition* auch als Bestandteil des *concept image* an (Tall, 2010):

„My view is that both concept image and definition become part of the individual's cognitive structure and therefore the (personal) concept definition is part of the concept image.“

Dementsprechend stellte er in seinen Forschungsarbeiten dem *concept image* als Gegenstück nur die formale, von außen gegebene *concept definition* gegenüber, wie zum Beispiel in Tall (1996):

„It is valuable to distinguish carefully between the formal mathematical concept specified by a concept definition and the wider „concept image“ including „all the mental pictures and associated properties and processes“ related to the concept in the mind of the individual.“

Die Betrachtung der *personal concept definition* als Teil des *concept image* ist auch in neuerer didaktischer Forschung verbreitet. So beschrieb Michelle Zandieh in der bereits zitierten Arbeit zum Verständnis des Ableitungsbegriffs die *personal concept definition* und deren Zusammenhang zum *concept image* wie folgt (Zandieh, 1997, S.18):

„A person's concept image of function consists of all aspects of the function concept available to that person – representations, properties, and operational or structural aspects. A person's concept definition is whatever subset of these aspects a person uses when asked to define the concept.“

Auch Rösken u. Rolka (2007) fassten in ihrer Forschung zum Verständnis des Integrals die *personal concept definition* als Teil des *concept image* auf (Rösken u. Rolka, 2007, S.184):

„The concept image may also include a (personal) concept definition as an individual reconstruction of the mathematical one.“

Demgegenüber setzen sie die formale *concept definition*.

In diesem Sinne möchte ich auch die *concept definition* in dieser Arbeit verstehen: als die von außen vermittelte formale Definition eines mathematischen Konzepts. Eine individuelle Rekonstruktion einer Definition des Konzeptes durch einen Studierenden sehe ich hingegen als Bestandteil seines *concept image* an.

Beziehung zwischen concept image und concept definition: Wie bereits herausgearbeitet wurde, grenzten Tall u. Vinner (1981) die beiden Konstrukte *concept image* und *concept definition* gegeneinander ab, aber in unterschiedlicher Art und Weise. Vinner sah ursprünglich als wesentlichen Unterschied zwischen dem *concept image* und der *concept definition* darin, dass Ersteres aus nonverbalen Assoziationen zu einem Konzept besteht, Letztere hingegen eine verbale Charakterisierung des Konzepts ist. Beide Konstrukte sind seiner Meinung nach mental vorhanden, was aus der folgenden Beschreibung der Beziehung zwischen *concept image* und *concept definition* deutlich wird (Vinner, 1991, S.69-71):

„Assume the existence of two different „cells“ in our cognitive structure (to avoid confusion, we do not mean biological cells). One cell is for the definition(s) of the concept and the second one is for the concept image. One cell or even both of them might be void.[...] There might be some interaction between the two cells although they can be formed independently. A student might have a concept image of the notion of coordinate systems as a result of seeing many graphs in various situations. According to this concept image, the two axes of a coordinate system are perpendicular to each other. Later on, the student’s mathematics teacher might define a coordinate system as any two intersecting lines.“

Um die wechselseitige Beziehung zwischen *concept image* und *concept definition* zu verdeutlichen, nannte er für eben genanntes Beispiel mit dem Koordinatensystem drei mögliche Reaktionen eines Lernenden auf die neu vermittelte Definition bei bereits vorhandenem, auf Vorerfahrungen basierendem, *concept image*:

1. Anpassung des *concept image* an die vermittelte Definition
2. Beibehaltung des *concept image*: Vergessen der formalen Definition und bei der Frage nach der Definition des Koordinatensystems wird von senkrecht zueinander stehenden Achsen gesprochen
3. Unverbundenes Nebeneinanderstehen beider Konstrukte: bei der Frage nach der Definition eines Koordinatensystems wird die Definition des Lehrenden wiedergegeben, ansonsten denkt der Lernende jedoch ausschließlich an rechtwinklige Koordinatensysteme

Im ersten Fall bewirkt die neu gelehrt *concept definition* eine Anpassung des *concept image*. Im zweiten Fall bewirkt das *concept image* eine Anpassung der *concept definition* des Schülers im Kopf, im dritten Fall findet keine Wechselwirkung statt. Es gibt also nicht nur die Wunschwirkung, dass die gelehrt *concept definition* das *concept image* des Lernenden richtig „formt“, wovon seiner Meinung nach viele Lehrende ausgehen (Vinner, 1991, S.71).

Während Vinner ursprünglich dem *concept image* eine verinnerlichte *concept definition* (inklusive *personal concept definition*) gegenüberstellte, wird hingegen in neueren Arbeiten, auch von Tall selbst, dem *concept image* ausschließlich die extern gelehrt, formale *concept definition* gegenübergestellt (Rösken u. Rolka, 2007; Tall, 1996; Pinto u. Tall, 1999). Dieser Auffassung schließe ich mich in dieser Arbeit an. Die Beziehung zwischen der formalen *concept definition* und dem *concept image* könnte man aber ähnlich zu den Ausführungen von Vinner zur Verbindung von *concept image* und *concept definition* beschreiben.

Bedeutung von concept image und concept definition in dieser Arbeit: Das theoretische Konstrukt des *concept image* (in der weiten Auffassung von Tall, bei der auch Verbalisierungen und insbesondere eine individuell rekonstruierte *concept definition* als möglichen Bestandteile anzusehen sind) eignet sich meiner Meinung nach sehr gut zur theoretischen Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus einer kognitiven Perspektive. Es kann sowohl genutzt werden um zu beschreiben, (1) wie ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aussehen kann, (2) welches Verständnis der Ableitung tatsächlich vermittelt wird, und (3) welches Verständnis Studierende der Wirtschaftswissenschaften vor und nach Besuch einer mathematischen Lehrveranstaltung haben (das *concept image* ändert sich, wenn neue Erfahrungen mit dem Konzept gemacht werden). Die konkrete Nutzung des *concept image* zur Beantwortung der Forschungsfragen der Dissertation ist in Tabelle 3 dargestellt.

Bei der Untersuchung des *concept image* zu einem mathematischen Konzept kann sowohl dessen Umfang als auch dessen Validität betrachtet werden. Letztere ist dadurch gekennzeichnet, inwieweit die Assoziationen der Studierenden im Einklang mit der formalen *concept definition* stehen, wodurch dann das Konstrukt der formalen *concept definition* als Messlatte für die Validität des *concept image* ins Spiel kommt. Insbesondere sollte dabei die eigene *personal concept definition* im *concept image* mit der formalen, von außen gegebenen Definition übereinstimmen oder mathematisch äquivalent zu ihr sein.

Diskussion der Grenzen der Konstrukte: Natürlich haben die in dieser Dissertation gewählten Konstrukte auch Grenzen. Zunächst stellt sich die Frage, inwieweit man tatsächlich zwischen der mental abgespeicherten verbalen *concept definition* und dem *concept image* trennen kann, wie Vinner dies vorschlug. In der weiteren Auffassung des *concept image* von Tall, der die individuell rekonstruierte Definition ebenfalls als Teil des *concept image* ansah, tritt diese Problematik jedoch nicht mehr auf. Weiterhin sind die in dieser Arbeit gewählten Konstrukte zur Beschreibung des Verständnisses von Begriffen eine rein kognitive Perspektive auf das Lernen, die sowohl soziale als auch institutionelle Einflüsse vernachlässigt (Bingolbali u. Monaghan,

Forschungsfrage	Nutzung des <i>concept image</i> in der Dissertation
F1. Wie könnte man ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, dass die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, theoretisch beschreiben?	Entwicklung eines Rahmenmodells zur theoretischen Beschreibung eines möglichen mathematisch validen <i>concept image</i> zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, welches die Praxis des Umgangs mit der Ableitung mitberücksichtigt
F2. Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern vorausgesetzt?	Untersuchung, welches <i>concept image</i> Studierende zur Ableitung günstigenfalls nach Besuch einer Lehrveranstaltung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler haben können, Untersuchung des von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften benötigten <i>concept image</i> zur Ableitung, um die Ausführungen in ökonomischen Lehrbüchern aus mathematischer Perspektive verstehen zu können
F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?	Untersuchung des <i>concept image</i> der Studierenden in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zur Ableitung zu Beginn des Studiums
F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?	Untersuchung des <i>concept image</i> der Studierenden in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zur Ableitung am Ende bzw. nach einer mathematischen Lehrveranstaltung

Tabelle 3: Nutzung des Konstrukts des *concept image* zur Beantwortung der Forschungsfragen der Dissertation

2008). So kann es sein, dass Studierende bei der Verwendung mathematischer Konzepte in einer mathematischen Lehrveranstaltung auf ein ganz anderes Verständnis zurückgreifen als in einer ökonomischen Lehrveranstaltung. Eine solche Differenzierung wird nicht berücksichtigt, wenn man von *dem concept image* eines Konzeptes spricht.

Dennoch erscheint das Konstrukt des *concept image zur Ableitung* für die Untersuchung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler eine sinnvolle Wahl für diese Dissertation, da hier zumindest bei den Studierenden das Verständnis der Ableitung im Rahmen der in sich geschlossenen Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn untersucht wird (siehe Kapitel 1.2). Damit liegt hier der Fokus klar auf dem Verständnis der Ableitung innerhalb einer mathematischen Lehrveranstaltung.

3.2 Konkretisierung des concept image zum Verständnis der Ableitung auf Basis didaktischer Literatur

Im letzten Kapitel wurde das *concept image* (und die *concept definition*) als zentrales Konstrukt zur theoretischen Beschreibung des Verständnisses mathematischer Konzepte gewählt. In diesem und dem nächsten Unterkapitel soll konkretisiert werden, wie das *concept image* für die Ableitung bei den Studierenden in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aussehen kann. Dazu wird in zwei Schritte vorgegangen:

1. Konkretisierung des *concept image* der Studierenden zum Ableitungskonzept als rein mathematisches Konzept auf der Basis mathematikdidaktischer Literatur
2. Erweiterung des *concept image* um ökonomische Facetten auf Basis des Umgangs mit dem Konzept der Ableitung in ökonomischen Lehrbüchern

Zur Konkretisierung des *concept image* zur Ableitung als reines mathematisches Konzept wurden in der Literatur vier Modelle zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ gefunden. Diese werden nun zunächst vorgestellt. Anschließend erfolgt eine begründete Auswahl eines dieser Modelle für diese Arbeit. Schließlich wird dieses Modell dann um ökonomische Facetten erweitert.

3.2.1 Theoretisches Rahmenmodell zum Verständnis des Ableitungsbegriffs nach Zandieh

Michelle Zandieh entwickelte aus Lehrbuchanalysen zum Ableitungsbegriff und Beobachtungen von Mathematikern, Mathematikdidaktikern und Studierenden ein Rahmenmodell zur Beschreibung des „Verständnisses des Ableitungsbegriffs“ (Zandieh, 2000, S.104). Sie charakterisierte das Verständnis der Ableitung auf folgende Art und Weise (Zandieh, 2000, S.104):

„Rather one should ask for a description of a student’s understanding of the concept of derivative what aspects of the concept a student knows and the relationships a student sees between these aspects.“

Sie nannte folgende theoretische Konstrukte als Basis ihres Modells:

1. das Konstrukt des *concept image* als *„the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“* (siehe Kapitel 3.1).
2. Charakterisierung des Verständnisses mathematischer Konzepte über Verbindungen nach Hiebert u. Carpenter (1992, S.67): *„A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network.[...] The degree of understanding is determined by the number and strength of the connections.“*

Zandieh bezog sich also direkt auf das Konstrukt des *concept image*.

Den Grad des individuellen Verständnisses der Ableitung durch einen Studierenden charakterisierte sie durch den Grad der Übereinstimmung mit dem Verständnis der Ableitung durch die mathematische Community (Zandieh, 2000, S.104):

„An individual’s understanding of derivative is then defined in terms of its overlap or lack of overlap with the mathematical community’s notion of that concept.“

Letzteres arbeitete sie zunächst mit Hilfe von Analysen von Calculus-Lehrbüchern (z.B. (Hughes-Hallett u. a., 1994) oder (Thomas u. Finney, 1992)) und Beobachtung von Lehrenden und Studierenden bei der Arbeit mit und der Diskussion über das Konzept der Ableitung heraus (Zandieh, 2000, S.104).

Das Ergebnis ist ein Modell zur Beschreibung des Ableitungsbegriffs als Matrix, deren Zeilen die Schritte von einer Funktion f zur Ableitungsfunktion f' , und deren Spalten die Repräsentationen der Ableitung sind (siehe Tabelle 4).

	Graphisch	Verbal	Physikalisch	Symbolisch
ratio	Sekantensteigung	Mittlere Änderungsrate	Durchschnittsgeschwindigkeit	Differenzenquotient
limit	Tangentensteigung	Lokale Änderungsrate	Momentangeschwindigkeit	Differentialquotient
function	Graph der Ableitungsfunktion	Änderungsrate einer Funktion	Geschwindigkeitsfunktion	Ableitungsfunktion

Tabelle 4: Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung nach Zandieh (2000, S.106)

Zandiehs Erläuterungen zu den Zeilen der Matrix aus Tabelle 4: Die Zeilen bezeichnete Zandieh als „Ebenen des Ableitungskonzepts“. Diese Ebenen entsprechen den Schritten von einer Funktion f zur Ableitungsfunktion f' :

1. Bildung des Differenzenquotienten (Ebene *ratio*)
2. Übergang zum Grenzwert (Ebene *limit*)
3. Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion (Ebene *function*)

In jeder der Ebenen taucht ein weiteres mathematisches Konzept auf, welches gleichzeitig einen Prozess- und einen Objektcharakter hat. Dies präziserte sie bei den einzelnen Ebenen auf folgende Art und Weise Zandieh (2000, S.107):

1. *„For example, a ratio or a rational number may be thought of operationally as division, but also structurally as a pair of integers within a multiplicative structure.“*
2. *„Limits may be viewed dynamically as a process of approaching the limiting value or statically through the epsilon-delta definition.“*
3. *„Functions may be seen as the process of taking an element in the domain and acting on it to produce an element in the range. Functions may also be viewed statically as a set of ordered pairs.“*

Als Basis für ihre Idee, die Konzepte in den Ebenen der Matrix als Prozess-Objektpaare aufzufassen, nannte sie Sfard, laut derer mathematische Konzepte stets als Prozess und Objekt betrachtet werden können (Sfard, 1991, S.1), und beide Betrachtungsweisen für ein vollständiges Verständnis notwendig sind (Sfard, 1991, S.23). Historisch und psychologisch begründete Sfard hierbei, dass beim Lernen mathematischer Konzepte in der Regel zunächst ein Verständnis des Prozesses entwickelt wird (Sfard, 1991, S.10). Weiterhin führte Zandieh die Terminologie eines „Pseudo-Objekt-Verständnisses“ ein (Zandieh, 2000, S.107). Bei diesem ist der zum Objekt führende Prozess bzw. die dahinter liegende Struktur nicht bewusst. Auch diese Idee stammt von Sfard (1991), die ein solches Verständnis als *quasi-structural* bezeichnet. Ein Beispiel ist ein Verständnis der Ableitung als Steigung der Tangente mit einem Verständnis der Tangente als lokale Berührende, bei dem nicht mehr bewusst ist, dass sich die Ableitung aus einem Grenzprozess ergeben hat.

Nun ist ein solches Pseudo-Objekt-Verständnis nicht unbedingt problematisch für Studierende. So kann man beispielsweise mit dem eben genannten Pseudo-Objekt-Verständnis der Ableitung als Steigung der Tangente einige Aspekte der Ableitung verstehen (Bsp.: Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie). Problematisch ist ein Pseudo-Objekt-Verständnis dann, wenn der hinter dem Objekt liegende Prozess wieder ins Bewusstsein rücken muss, z.B. bei der Verwendung der numerischen Approximation der Ableitung durch einen Differenzenquotienten.

Zandiehs Erläuterungen zu den Spalten der Matrix aus Tabelle 4: Die Ableitung ist laut Zandieh durch verschiedene Repräsentationen charakterisiert (Zandieh, 2000, S.105), die sie als Spaltenüberschriften ihrer Matrix vorsah. Diese sind:

- a) Graphische Repräsentationen als Steigung der Tangente
- b) Verbale Repräsentation als lokale Änderungsrate
- c) Physikalische Interpretation als Momentangeschwindigkeit
- d) Symbolische Repräsentation als Grenzwert des Differenzenquotienten

Anstelle der Momentangeschwindigkeit sind laut Zandieh weitere Repräsentationen für physikalische Kontexte denkbar. Inwieweit die übliche ökonomische Interpretation der Ableitung hier hineinpasst, wird an späterer Stelle diskutiert (Kapitel 3.3).

Zandiehs Erläuterungen zu einzelnen Zellen der Matrix aus Tabelle 4: In Folgenden werden Zandiehs Erklärungen zu den einzelnen Zellen der Matrix dargestellt (Ausnahme: physikalische Repräsentation, da die für diese Arbeit keine Rolle spielt).

1. Zandiehs Erklärung zur symbolischen Repräsentation (Zandieh, 2000, S.110-111):

Ebene *ratio*: Der Differenzenquotient ist gegeben durch:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (12)$$

Ebene *limit*: Die symbolische Repräsentation der Grenzwertebene der Ableitung ist gegeben durch:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (13)$$

Voraussetzungen an den Punkt x_0 sowie an die Existenz des Grenzwertes nannte sie nicht.

Ebene *function*: Die Ableitungsfunktion ist dann gegeben durch:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (14)$$

Zandieh wies darauf hin, dass die zu (13) und (14) gehörenden Objekte konzeptuell sehr verschieden sind, auch wenn die Symbolik dies nur subtil andeutet, was Studierende leicht übersehen. Allerdings ist Zandiehs Darstellung hier meiner Meinung nach auch zu kurz. So fehlen zum Beispiel Angaben zum Definitionsbereich der Ableitungsfunktion.

In Bezug auf die Hintergrundkonstrukte *concept image* und *concept definition* ist zu erkennen, dass die von Zandieh genannten Formeln die formale *concept definition* nur unvollständig abbilden. Ich würde sie eher als Bestandteile des *concept image* zu sehen, welches auch symbolische mentale Repräsentationen enthalten darf (siehe Kapitel 3.1). Die formale *concept definition* ist in Zandiehs Modell zum Verständnis der Ableitung nur unzureichend repräsentiert.

2. Zandiehs Erklärung zur graphischen Repräsentation (Zandieh, 2000, S.111):

Ebene *ratio*: Die graphische Repräsentation des Differenzenquotienten ist die Steigung der Sekante zwischen zwei Punkten.

Ebene *limit*: Die graphische Repräsentation des Grenzwertes des Differenzenquotienten ist die Steigung der Tangente bzw. die Steigung an einer Stelle. Diese ermittelt man laut Zandieh, indem man einen Punkt $(x_0, f(x_0))$ fix lässt, und die Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ betrachtet. Geht nun $h \rightarrow 0$, so streben diese Sekanten dann gegen die Tangente, deren Steigung die Ableitung $f'(x_0)$ ist.

Ebene *function*: Der eben beschriebene Grenzübergang kann an jedem Punkt des Definitionsbereiches durchgeführt werden (unter der nicht genannten Voraussetzung, dass die Funktion differenzierbar ist)

Neben der „wandernden Sekante“ nannte Zandieh noch eine weitere Möglichkeit der graphischen Repräsentation des Grenzübergangs (Zandieh, 2000, S.111):

„Another way to view this limiting process graphically is to think of zooming in on the curve at a point of interest. At each or any step in the process of zooming in one may find the slope of a line between two points close to the point being zoomed in on. As one zooms in, one finds the slope determined by two points closer and closer to the point of interest. The object here is again the slope of the tangent line at the point of interest, but in this case we

think of the tangent line as becoming a better and better local approximation to the curve itself under magnification as opposed to a sequence of secant lines rotating to the position of the tangent.‘

Hier werden anstelle von Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ Sehnen durch $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ verwendet. Die Sehnen nähern sich für $h \rightarrow 0$ der Tangente beliebig an (auch hier wird wieder stillschweigend die Existenz der Tangente vorausgesetzt).

3. Zandieh's Erklärung zur verbalen Repräsentation (Zandieh, 2000, S.110):

Ebene *ratio*: Der Differenzenquotient misst die mittlere Änderungsrate der abhängigen Variable bei Änderung der unabhängigen Variable, was Zandieh symbolisch durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ darstellte.

Ebene *limit*: Für $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man dann die momentane Änderungsrate, die Zandieh durch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{dy}{dx}$ symbolisierte.

Ebene *function*: Die Durchführung dieses Grenzübergangs bei jedem Wert der unabhängigen Variablen liefert dann die Ableitungsfunktion.

Auch hier wurde wieder die Differenzierbarkeit der Funktion stillschweigend vorausgesetzt.

Zandieh's Nutzung des Modells zur Ermittlung des Verständnisses der Ableitung: Zandieh nutzte das Rahmenmodell aus Tabelle 4 empirisch zur Untersuchung des Verständnisses der Ableitung von 9 Highschool Schülern (darunter 6 sehr gute Schüler). Sie beobachtete die Probanden in den Klassen, interviewte sie fünfmal und untersuchte deren Tests (Zandieh, 2000, S.112). Das Ableitungskonzept war im Schuljahr vor der Studie eingeführt worden, und wurde im Schuljahr der Studie (1993/94) erneut aufgegriffen (Zandieh, 1997, S.125)). Insofern sind die Rahmenbedingungen ähnlich wie bei Studienanfängern: das Konzept wurde vor längerer Zeit in der Schule behandelt und wird nun im Studium erneut aufgegriffen. Somit könnten ähnliche Ergebnisse auch bei Studienanfängern zu erwarten sein.

Zandieh führte 5 Interviews durch, von denen in Zandieh (2000) auf drei Erhebungszeitpunkte Bezug genommen wurde:

1. erstes Interview zu Beginn des Schuljahres nach der Wiederholung von Funktionen und Grenzwert, aber vor der Behandlung der Ableitung (wobei diese bereits im Schuljahr vorher auch schon eingeführt wurde)
2. zweites Interview direkt nach Behandlung der Ableitung
3. fünftes Interview am Ende des Schuljahres

Zandieh versuchte jeweils das *concept image* der Schüler zur Ableitung zu ermitteln, indem sie untersuchte, welches Wissen die Schüler zu den einzelnen Aspekten des Ableitungsbegriffes aus Tabelle 4 hatten, inwieweit sie diese Aspekte miteinander verbinden konnten und welche Aspekte sie präferierten (Zandieh, 2000, S.113).

Zeigte ein Schüler einen Aspekt aus Tabelle 4 im Interview, wurde dies in der Matrix entsprechend gekennzeichnet. Dabei wurde unterschieden, ob der hinter dem jeweiligen Objekt liegende Prozess bewusst war oder ob ein „Pseudo-Objekt-Verständnis“ vorlag (Zandieh, 2000, S.114).

Ein wesentliches Ergebnis von Zandiehs Studie war, dass die Schüler die Verständnisebenen nicht unbedingt linear durchlaufen. Bei Zulässigkeit eines „Pseudo-Objekt-Verständnisses“ können die unteren Ebenen auch ohne vollständiges Verständnis der darüber liegenden Ebenen erreicht werden (z.B. kann die Ableitung als Steigung der Tangente an einer Stelle verstanden werden, auch wenn deren Herleitung über Sekantensteigungen nicht mehr bewusst ist). Unter dieser Prämisse erlernten die Schüler die in Tabelle 4 genannten Aspekte zum Verständnis des Ableitungsbegriffs in verschiedenen Reihenfolgen (Zandieh, 2000, S.124):

„A student’s understanding of derivative develops from a partial understanding, each student with a different collection of pieces of the puzzle, to a more complete understanding with perhaps only a few pieces remaining unplaced. There seems to be a wide variability in terms of which pieces of the puzzle that a student initially places in the puzzle frame.“

Allerdings ist das Ergebnis etwas mit Vorsicht zu sehen, da Zandieh nicht wirklich Lernprozesse angeschaut hat, sondern nur das *concept image* zu verschiedenen Zeitpunkten. Hierbei waren die Zeiträume zum Teil beträchtlich (Interview 1: 13.-15.9.1993, Interview 2: 27.-29.10.1993, Interview 5: 16.-31.5.1994, (Zandieh, 1997, S.125)). Insofern spielen hier auch Vergessensmomente wieder eine Rolle, die zu erneuten Lücken im *concept image* führen können.

Eignung des Modells für diese Arbeit: Mit Hilfe ihres Modells konnte Zandieh in ihrer Studie gut darstellen, welche Aspekte des Ableitungsbegriffs Bestandteil des *concept image* der Schüler waren und welche nicht. Das Modell eignete sich also gut zur Untersuchung des Verständnisses des Ableitungskonzepts bei diesen Schülern. Allerdings stellt sich die Frage nach der Eignung als Modell zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Hochschule. Es wurde bereits angedeutet, dass die formale *concept definition* nicht adäquat abgebildet ist.

Neben der Tatsache, dass bei der symbolischen Repräsentation nur die Formel, nicht aber durch die vollständige Definition der Ableitung in die Matrix aus Tabelle 4 aufgenommen wurde, wirkt es in der Matrix so, als ob alle Repräsentationen der Ableitung gleichberechtigt sind. Die Ableitung ist demnach gleichzeitig Grenzwert des Differenzenquotienten, Steigung der Tangente mit einem intuitiven Tangentenbegriff, lokale Änderungsrate (ebenfalls als intuitiv existent angenommen) oder gleich der ebenfalls als intuitiv existent angenommenen Momentangeschwindigkeit im physikalischen Kontext.

In hochschulmathematischen Lehrbüchern wird hingegen oft anders vorgegangen. Hier werden die Repräsentationen als lokale Änderungsrate und als Steigung der Tangente *erst über die Ableitung definiert*. So schreibt Königsberger (2004) nach der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten (Königsberger, 2004, S.138):

„Ist f in x_0 differenzierbar, so geht deren Steigung $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gegen $f'(x_0)$. Die durch $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ definierte Gerade heißt dann Tangente in P_0 an den Graphen von f .“

Ähnlich wird dort auch die Momentangeschwindigkeit über die Ableitung definiert:

„Ist bei einer zurückgelegten Bewegung der zurückgelegte Weg $s(t)$ als Funktion der Zeit gegeben, so definiert $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t_0 + h]$ und die Ableitung $\dot{s}(t_0)$ die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_0 .“

Bei diesem Vorgehen ist eine klare Hierarchie erkennbar, wobei die symbolische Repräsentation den anderen beiden in gewisser Weise übergeordnet ist, denn die anderen Begriffe werden erst durch sie definiert. Das Rahmenmodell von Zandieh bildet diese Hierarchie nicht ab.

Zandieh sah das allerdings nicht als Problem an, sondern betonte, dass die formale Definition der Ableitung von den Schülern eben nicht übergeordnet gegenüber den anderen Repräsentationen angesehen wurde (Zandieh, 1998, S.120):

„Although mathematicians may think of the formal definition as a primary means to interpret derivative in any relevant context, this was not the case for the students in this study.“

Teilweise verweigerten Schüler sogar das Erlernen der formalen Definition (Zandieh, 1998).

Auch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wird diese übergeordnete Bedeutung der Definition gegenüber den anderen Repräsentationen nicht immer deutlich. In Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wird die Ableitung zwar in der Regel als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert. Die anderen Repräsentationen der Ableitung werden dann aber unabhängig davon als existent angenommen, was zu dem Matrixmodell von Zandieh passt (Dietz, 2012, S.257-258; Sydsæter u. Hammond, 2015, S.197, S.207; Tietze, 2010, S.201). Zwar werden in Dietz (2012) die graphische und die verbale Repräsentation der Ableitung als *Interpretationen* bezeichnet, diese Abstufung wird später nicht immer konsequent aufgegriffen (zum Beispiel bei einer graphischen Begründung des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Konvexität (Dietz, 2012, S.332)). Überhaupt werden in den genannten Büchern bei Begründungen mathematischer Aussagen neben der Definition weitere Repräsentationen der Ableitung zugelassen. Insgesamt hat die formale *concept definition* der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler also nicht die übergeordnete Bedeutung gegenüber den anderen Repräsentationen wie in Lehrveranstaltungen der Mathematik.

Daher passt die Matrix von Zandieh aus Tabelle 4 mit gleichberechtigten Repräsentationen sehr gut zum gegenwärtig vermittelten (und intendierten) *concept image* zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und ist zu dessen theoretischer Beschreibung durchaus geeignet.

3.2.2 Ein Rahmenmodell auf Basis der APOS-Theorie

Ein weiteres theoretisches Modell zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“, welches von Asiala u. a. (1997a) entwickelt wurde, basiert auf der sogenannten APOS-Theorie (*action, process, object, schema*). Diese wird im Folgenden zunächst allgemein beschrieben. Anschließend erfolgt eine Konkretisierung auf das Ableitungskonzept.

Allgemeine Beschreibung der APOS-Theorie zur Beschreibung des Lernens mathematischer Konzepte: Nach der APOS Theorie wird neues mathematisches Wissen in mehreren Schritten mental konstruiert (Asiala u. a., 1996, S.7). Die Theorie orientiert sich an den von Piaget gefundenen Schritten bei der Entwicklung des logischen Denkens von Kindern (Dubinsky, 1991, S.103), die sie auf das Lernen mathematischer Konzepte überträgt. APOS erhebt somit den Anspruch *Lernprozesse* so zu beschreiben, wie sie mental ablaufen. Daher kann diese Theorie sowohl normativ für die Gestaltung von Lernszenarien, als auch deskriptiv zur Beschreibung von Verständnisschwierigkeiten verwendet werden. In der Literatur wird sie aber überwiegend normativ zur Gestaltung von Lernumgebungen verwendet (siehe zum Beispiel (Asiala u. a., 1997a; Breidenbach u. a., 1992; Asiala u. a., 1997b)). Laut der APOS-Theorie vollzieht sich das Lernen mathematischer Konzepte auf mentaler Ebene über verschiedene Ebenen des Verständnisses: *action*, *process*, *object*, *schema*, die stets in genau dieser Reihenfolge durchlaufen werden müssen. Eine Beschreibung der einzelnen Ebenen und deren Konkretisierung am Beispiel des Funktionsbegriffs (bei diesem sind sie in der Literatur gut nachvollziehbar dargestellt, siehe (Breidenbach u. a., 1992)) befindet sich in Tabelle 5.

Ebene	Definition in APOS	Beispiel beim Funktionsbegriff
action	<i>„An action is a transformation of objects, which is perceived by the individual as being somewhat external. That is an individual whose understanding of a transformation is an action conception can carry out the transformation only by reacting to external cues that give precise details on what steps to take.“</i> (Asiala u. a., 1996, S.9)	Studierende in der <i>action</i> -Ebene beim Funktionsbegriff benötigen eine Formel, um die Transformation der Abbildung explizit durchführen zu können. Dabei wird stets Schritt für Schritt vorgegangen (z.B. bei der Komposition zweier Funktionen) (Breidenbach u. a., 1992, S.278).
process	<i>„When an action is repeated, and the individual reflects upon it, it may be interiorized into a process. That is an internal construction is made that performs the same action, but now not necessarily directed by external stimuli. An individual who has a process conception of a transformation can reflect on, describe, or even reverse the steps of the transformation without actually performing those steps. In contrast to an action, a process is perceived by the individual in being internal, and under one’s control, rather than something one does in response to external clues.“</i> (Asiala u. a., 1996, S.10)	Beim Funktionsbegriff zeichnet sich die <i>process</i> -Ebene dadurch aus, dass die Studierenden im Kopf haben, dass aus einem Input ein Output entsteht, ohne dass sie diese Transformation explizit durchführen müssen (Breidenbach u. a., 1992, S.278). Studierende mit der <i>process</i> -Ebene können die zugehörigen Prozesse zusammensetzen und umkehren, d.h. sie können adäquat im Kopf mit der Komposition zweier Funktionen, mit Umkehrfunktionen oder auch mit anderen Operationen wie der Addition von Funktionen umgehen (Breidenbach u. a., 1992, S.279).

Ebene	Definition in APOS	Beispiel beim Funktionsbegriff
object	<i>„When an individual reflects on operations applied to a particular process, becomes aware of the process in totality, realizes that transformations (whether they be actions or processes) can act on it, and is able to actually construct such transformations, then he or she is thinking of this process as an object. In this case, we say that the process has been encapsulated to an object.“</i> (Asiala u. a., 1996, S.11)	Die Objektebene zeichnet sich dadurch aus, dass die Studierenden die Funktion als Objekt und damit als eine Einheit ansehen, mit und auf der man wieder operieren kann. Ein Objektverständnis ist beispielsweise bei der Betrachtung von Abbildungen nötig, deren Argumente selbst Funktionen sind (Breidenbach u. a., 1992, S.278).
schema	<i>„Once constructed, objects and processes become interconnected in various ways: for example two or more processes may be coordinated by linking them (through composition or in other ways); processes and objects are related by virtue of the fact that the former act on the latter. A collection of processes and objects can be organized in a structured manner to form a schema. Schemas themselves can be treated as objects and included in the organization of „higher level“ schemas. When this happens we say that the schema has been thematized to an object.“</i> (Asiala u. a., 1996, S.11)	Funktionen mit ähnlichen Eigenschaften werden zu einer Menge zusammengefasst (z.B. Menge der stetigen Funktionen). Diese kann dann selbst wieder als Objekt dienen, mit dem man operieren kann (Asiala u. a., 1996, S.12).

Tabelle 5: Konzeptebenen der APOS-Theorie (Asiala u. a., 1996)

Beim Übergang von der *action* zur *process*-Ebene muss die zugehörige Aktion verinnerlicht („*interiorized*“) werden. Beim Übergang zur Objektebene muss der Prozess zu einem Objekt „formiert“ werden, mit dem man wieder operieren kann, d.h. man kann Aktionen und Prozesse auf dessen Basis ausführen. Asiala u. a. (1996, S.11) nutzen hier den Begriff „einkapseln“ (*encapsulation*). Beim Übergang zum Schema müssen dann Objekte und Prozesse miteinander in Verbindung gebracht, also koordiniert („*coordinated*“) werden. Das Schema ist vergleichbar mit dem bei Piaget genannten Schema zur Organisation von Wissen (Asiala u. a., 1996, S.9).

Die Schritte zum Erreichen einer bestimmten Verständnisebene werden als *mentale Konstruktionen* bezeichnet (Asiala u. a., 1996, S.7). Das Explizit machen dieser Schritte bei einem mathematischen Konzept heißt dann *genetische Dekomposition* des Konzepts (Asiala u. a., 1996, S.7).

Bei der Gestaltung einer Lernumgebung auf Basis der APOS-Theorie wird in einem ersten Schritt eine genetische Dekomposition zunächst durch a-priori Überlegungen ermittelt. Auf deren Basis werden dann Lehrmaterialien entwickelt und eingesetzt (Asiala u. a., 1996, S.6). Durch Beobachtung, inwieweit die vermuteten mentalen Konstruktionen bei den Lernenden tatsächlich stattfinden erfolgt dann eventuell eine Revision der genetischen Dekomposition (Asiala u. a., 1996, S.6). Diese revidierte genetische Dekomposition führt dann wiederum zu einer Überarbeitung der Lernmaterialien usw.

Anwendung der APOS-Theorie auf das Ableitungskonzept: Asiala u. a. (1997a) entwickelten zum Konzept der Ableitung eine genetische Dekomposition, welche die Schritte beim Lernen des Ableitungsbegriffs beschreibt. Dabei nannten sie grundsätzlich zwei Wege, die sie als *graphischen* und *analytischen* Weg bezeichneten (Asiala u. a., 1997a, S.407). Die einzelnen Schritte der von Asiala u. a. (1997a, S.407) entwickelten genetischen Dekomposition zum Ableitungsbegriff sind in Tabelle 6 dargestellt.

	Graphischer Weg	Analytischer Weg
Schritt 1	Aktion der Verbindung zweier Punkte durch eine Sehne, die Teil der Sekante durch diese Punkte ist, und Berechnung der Steigung der Sekante	Aktion der Ermittlung der mittleren Änderungsrate durch Bestimmung des Differenzenquotienten
Schritt 2	Verinnerlichung der Aktionen aus Schritt 1 zu einem Prozess, bei dem die zwei Punkte auf dem Graph „näher und näher zusammenkommen“	Verinnerlichung der Aktionen aus Schritt 1 zu einem Prozess, bei dem die Länge der betrachteten Intervalle gegen 0 geht
Schritt 3	Einkapselung des Prozesses aus Schritt 2 um die Tangente als Grenzlage der Sekanten zu erhalten, Weiterhin Erzeugung der Tangentensteigung aus den Sekantensteigungen	Einkapselung des Prozesses aus Schritt 2 zur Bestimmung der momentanen Änderungsrate
Schritt 4	Einkapselung der Prozesse aus Schritt 2 allgemein (ohne konkrete Zahlen) um die allgemeine Definition der Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 zu erhalten	
Schritt 5	Koordinierung der Prozesse aus Schritt 2 in verschiedenen Situationen um die Definition der Ableitung mit anderen Repräsentationen in Verbindung zu bringen	
Schritt 6	Verinnerlichung des Prozesses des Bestimmens der Ableitung an verschiedenen Stellen x_0 zu einem Prozess, bei dem jeder Input x führt zu einem Output $f'(x)$ führt	
Schritt 7	Einkapselung der Ableitungsfunktion $x \mapsto f'(x)$ zu einem Objekt f'	
Schritt 8	Rekonstruktion des Schemas zur graphischen Repräsentation einer Funktion unter Nutzung der Beziehungen zwischen Funktionen und ihrer Ableitung	

Tabelle 6: Schritte der genetischen Dekomposition zur Ableitung an einer Stelle (Asiala u. a., 1997a, S.407)

Diese Schritte entsprechen im Wesentlichen dem typischen Vorgehen beim Lehren der Ableitung. Dies ist nicht überraschend, denn diese erste genetische Dekomposition entsteht durch a-priori-Überlegungen des Lehrenden bzw. Forschenden. Allerdings werden die Schritte von der Funktion f zur Ableitungsfunktion f' in der genetischen Dekomposition aus der APOS-Perspektive betrachtet und mit entsprechenden Begrifflichkeiten formuliert.

Praktische Nutzung des APOS-Modells durch Asiala et al.: Auf Basis dieser genetischen Dekomposition aus Tabelle 6 entwickelten Asiala u. a. (1997a) dann Materialien für einen experimentellen Calculus-Kurs (in dem Paper von Asiala u. a. (1997a) als

C⁴L-Kurs, d.h. *Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning*, bezeichnet (Asiala u. a., 1997a, S.408)). Dieser Kurs wurde von der sogenannten ACE-Pädagogik begleitet (*Activities, Class tasks, Exercises* (Asiala u. a., 1997a, S.401)). In dem Experimentalkurs sollten zunächst mit Hilfe des Computers die in Tabelle 6 beschriebenen mentalen Konstruktionen erfolgen, z.B. durch das Schreiben eigener Programme wie einem Programm zur näherungsweisen Bestimmung der Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten (Asiala u. a., 1997a, S.409), durch welches von der *action* zu einer *process*-Ebene gelangt werden soll. Dann wurden Aufgaben in der Klasse gestellt, die diskutiert wurden. Schließlich wurden Übungen zur Sicherung gelöst. Dabei wurde stets in Gruppen gearbeitet (Asiala u. a., 1997a, S.408). Besondere Berücksichtigung fanden auch graphische Aktivitäten wie die graphische Ermittlung von Steigungen (Asiala u. a., 1997a, S.409).

Das erworbene Verständnis wurde dann in einem Interview überprüft (17 Studierende) und die Ergebnisse wurden mit denen von 24 Studierenden eines traditionellen Calculus-Kurses verglichen (Asiala u. a., 1997a, S.404). Die Überprüfung führte schließlich zu einer Erweiterung der ursprünglichen genetischen Dekomposition. Zunächst wurde in dieser zusätzlich ein Schritt 0 eingefügt, der das notwendige Vorverständnis zum Funktionskonzept beschreibt: Kenntnis der Repräsentationsformen von Funktionen und die Fähigkeit zum Wechsel zwischen ihnen (ohne gegebene Formel). Außerdem wurden die Schritte 5-8 aus Tabelle 6 stärker konkretisiert (Bsp.: Ausformulierung wie graphische und symbolische Repräsentation der Ableitung zusammenhängen).

Insgesamt ließen sich aber laut die (Asiala u. a., 1997a, S.423) die wesentlichen Schritte der genetischen Dekomposition aus Tabelle 6 wiederfinden:

„The mental constructions we observed in this study (see Section 3) are for the most part contained in it.“ [der genetischen Dekomposition aus Tabelle 6]

Sie begründeten dieses „Wiederfinden“ damit, dass an den Übergängen zu den jeweils nächsten Schritten in ihrer Schrittfolge Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung in ihrer Studie auftraten, falls die entsprechenden mentalen Konstruktionen nicht stattfanden (leider sind die Ergebnisse der Studie in (Asiala u. a., 1997a) sehr fragmentös dargestellt, sodass ein genaues Nachvollziehen dieses „Wiederfinden“ nicht möglich ist).

Eignung des Modells für diese Arbeit: APOS ist eine Theorie zur Beschreibung von Lernprozessen. In dieser Dissertation geht es aber nicht um die Untersuchung und Gestaltung von Lernprozessen, sondern um Momentaufnahmen des *concept image* von Studierenden zu Beginn des Studiums und am Ende der Lehrveranstaltung. Es geht also um *Lernergebnisse* (zu gewissen Zeitpunkten). Weiterhin erscheint mir die streng hierarchische Ordnung der Schritte basierend auf den Verständnisebenen *action, process, object, schema*, die laut APOS-Theorie nacheinander linear durchlaufen werden müssen, einengend. Aus diesen Gründen erscheint mir dieses Modell für die Dissertation weniger geeignet.

3.2.3 Das „Differentiation Competency Framework“ von Kendal und Stacey

Das nächste theoretische Modell zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“, das hier vorgestellt wird, wurde von Kendal u. Stacey (2003) entwickelt. Ähnlich wie bei dem Rahmenmodell von Zandieh (2000) spielen hier die verschiedenen Repräsentationen der Ableitung eine Rolle, allerdings liegt der Schwerpunkt im Rahmenmodell von Kendal und Stacey auf dem Wechsel zwischen den Repräsentationen.

Sie rechtfertigten diesen Ansatz damit, dass Forschung der letzten 20 Jahre zeigte, dass das Verständnis von Konzepten in der Analysis durch den Einsatz von Technologien, welche verschiedene Repräsentationen (graphisch, numerisch, symbolisch) nutzten und diese auch miteinander verbanden, erhöht werden konnte (Kendal u. Stacey, 2003, S.22). Allerdings belegten Kendal und Stacey diese Aussage kaum mit empirischer Evidenz. Sie zitierten hier drei Vergleichsstudien (Heid, 1988; Keller u. Russell, 1997; Repo, 1994), in denen die Probanden einer Experimentalgruppe mit Technologieeinsatz bessere Ergebnisse bei Testfragen zum Verständnis von Konzepten der Analysis erzielten. Allerdings ist der Einfluss der Technologien unklar. Denn während in den Experimentalgruppen immer Wert auf Konzeptverständnis gelegt wurde, war das bei den Kontrollgruppen nicht unbedingt der Fall. Bei zwei der drei Studien wurde sogar offensichtlich, dass die Kontrollgruppen algorithmisch orientiert waren (Heid, 1988; Repo, 1994). Insofern bleibt unklar, ob das bessere Konzeptverständnis nicht auch ohne die Technologie erzielt worden wäre, wenn der Fokus in den Gruppen entsprechend gelegt worden wäre. Dennoch lässt sich ein Wechsel zwischen den Repräsentationen durchaus als wichtig für ein Verständnis der Ableitung ansehen, wie es auch Zandieh (2000) bei der Konstruktion ihres Modells hervorhob (siehe Kapitel 3.2.1).

Kendal und Stacey nannten in ihrem Modell zum Verständnis der Ableitung drei verschiedene Repräsentationen der Ableitung (Kendal u. Stacey, 2003, S.25):

1. Numerische Repräsentationen: Dies entspricht der Auffassung der Ableitung als Änderungsrate. Sie wurde hier in die numerische Repräsentation eingeordnet, weil bei Aufgaben zur Änderungsrate in der Regel numerische Werte zu bestimmen sind. Sie ist mit der verbalen Repräsentation von Zandieh (2000) vergleichbar (siehe Tabelle 4).
2. Graphische Repräsentation: Diese entspricht der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente oder als Steigung an einer Stelle, die sich ergibt, wenn man in den Graphen so weit hineinzoomt, dass er wie eine Gerade aussieht.
3. Symbolische Repräsentationen: Dies umfasst die Darstellung der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, symbolische Darstellungen wie $f'(x) = \dots$ oder auch Differentialschreibweisen.

Kendal und Stacey unterschieden nicht zwischen der Ableitung an einer Stelle oder der Ableitungsfunktion, wobei sie hervorhoben, dass bei der symbolischen Ebene in der Praxis oft mit der gesamten Funktion, während bei der numerischen und der graphischen Ebene in der Regel mit einer Stelle gearbeitet wird (Kendal u. Stacey, 2003, S.27).

Konkrete Beschreibung des Modells: Im Rahmenmodell von Kendal u. Stacey (2003) werden unterschiedliche Kompetenzen in Abhängigkeit der Fähigkeit des korrekten Lösen von Aufgaben formuliert, die bestimmte Repräsentationen als Eingabe haben, und deren Lösungen ebenfalls einer bestimmten Repräsentationen der Ableitung entsprechen (als Änderungsrate, als Steigung oder rein symbolisch (Kendal u. Stacey, 2003, S.28)). Exemplarisch seien hier folgende Aufgaben genannt:

1. *„Find the derivative of $y = x^5 + 4x^3 - x + 10$.“* (Kendal u. Stacey, 2003, S.31)
2. *„The derivative function of $f(x)$ is given by $f'(x) = x^3 - 5x + 3$. What is the gradient of the tangent to the curve $y = f(x)$ when $x = 1$?“* (Kendal u. Stacey, 2003, S.32)

Bei der ersten Aufgabe sind Ein- und Ausgabe symbolisch. Bei der zweiten Aufgabe ist die Eingabe ein symbolischer Funktionsterm. Die Ausgabe ist der Wert einer Steigung. Deshalb wird die Ausgabe zur graphischen Repräsentation gezählt (auch wenn keine Graphik produziert werden muss). Es geht also beim Ergebnis darum, welcher Repräsentation das Ergebnis zuzuordnen ist und nicht in welcher Repräsentation es vorliegt. Insgesamt ergeben sich in Abhängigkeit von Ein- und Ausgabe insgesamt $3^2 = 9$ verschiedene Kompetenzen (symbolisch-symbolisch, symbolisch-graphisch, symbolisch-numerisch, ...).

Zusätzlich unterscheiden Kendal u. Stacey (2003) bei den zu lösenden Aufgaben zwischen Aufgaben, in denen die Ableitung zunächst bestimmt werden muss, und welchen, in denen sie interpretiert werden muss (Kendal u. Stacey, 2003, S.28). Sie formulierten das wie folgt (Kendal u. Stacey, 2003, S.28):

1. *„Formulation (F) is the ability to recognise that a particular differentiation procedure is required using the data supplied and to know how to calculate it.“*
2. *„Interpretation (I) is the ability to reason about the input derivative supplied or to explain it in natural language, or to give it meaning including its equivalence to a derivative in a different representation.“*

Beispiele wären (Kendal u. Stacey, 2003, S.32):

1. *„A curve has the equation $g(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 6$. Find the gradient of the curve at the point P , where $x = 1$.“* (Aufgabe der Kategorie *Formulation*)
2. *„The derivative function of $f(x)$ is given by $f'(x) = x^3 - 5x + 3$. What is the gradient of the tangent to the curve $y = f(x)$ when $x = 1$?“* (Aufgabe der Kategorie *Interpretation*)

Die erste Aufgabe gehört zur Kategorie „Formulation“, weil zunächst die Ableitung bestimmt werden muss. Das zweite Beispiel gehört zur Kategorie „Interpretation“, weil die Ableitung bereits als Input gegeben ist und sie nur geometrisch interpretiert werden muss. Praktisch ist aber oft eine Kombination beider Aktivitäten notwendig, was dieses Modell nicht abbildet.

Durch die zusätzliche Unterscheidung zwischen Bestimmungsaufgaben und Interpretationsaufgaben ergeben sich dann insgesamt $2 \cdot 9 = 18$ Kompetenzen, über welche die Studierenden verfügen sollen (Kendal u. Stacey, 2003, S.29).

Nutzung des Modells durch Kendal und Stacey: Kendal u. Stacey (2003) nutzten das von ihnen konstruierte Rahmenmodell zur Entwicklung des „Differentiation Competency Test“, in dem die Fähigkeit der Studierenden zu Repräsentationswechseln beim Ableitungskonzept getestet wird (Kendal u. Stacey, 2003, S.30). Passend zu den 18 im Rahmenmodell formulierten Kompetenzen hat der Test 18 Items (Kendal u. Stacey, 2003, S.31-33).

Der Test wurde dann zur Evaluation eines Lehrexperiments in einem einführenden Calculus-Kurs in einer elften Klasse eingesetzt (Kendal u. Stacey, 2003, S.35). In dem Lehrexperiment wurde viel Wert auf die Repräsentationen der Ableitung und ihre Verbindung gelegt, wobei auch ein CAS genutzt wurde. Am Ende der Lehreinheit zur Ableitung wurde dann zur Evaluation den Schülern unter anderem der „Differentiation Competency Test“ vorgelegt. Bei den Ergebnissen sah man starke Unterschiede bei den Fähigkeiten der Schüler in Abhängigkeit der Repräsentationen von In- und Output (Kendal u. Stacey, 2003, S.36). Besonders schlecht sind hierbei die Items, die Interpretation und Repräsentationswechsel erforderten, ausgefallen (Kendal u. Stacey, 2003, S.36). Nur wenige Studierende beherrschten den Umgang mit allen drei Repräsentationen, und das obwohl im Lehrexperiment viel Wert darauf gelegt wurde (Kendal u. Stacey, 2003, S.38).

Eignung des Modells für diese Arbeit: Insgesamt erscheint mir das Modell von Kendal und Stacey für die Dissertation eher ungeeignet. Es ist stark aufgabenorientiert und beschreibt daher eigentlich eher prozedurales Wissen. Außerdem ist es stark an die in dem Modell verwendeten Aufgabentypen (Formulierungs- und Interpretationsaufgaben) gebunden. Es eignet sich daher nicht als Modell zur Auswertung komplexerer Aufgabenstellungen zur Untersuchung des *concept image* der Studierenden, wie sie zum Beispiel in der Interviewstudie gestellt wurden (siehe später in Kapitel 8).

3.2.4 Ein auf Aspekten und Grundvorstellungen basierendes Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung

Erst kürzlich entwickelten Greefrath u. a. (2016) ein Modell zum Verständnis des Ableitungsbegriffes aus stoffdidaktischer Perspektive. Grundlage dieses Modells bilden *Grundvorstellungen* zu einem mathematischen Begriff nach Vom Hofe (1995) und *Aspekte* eines mathematischen Begriffs. Grundvorstellungen haben dabei in der deutschen Schuldidaktik eine lange Tradition (siehe zum Beispiel (Vom Hofe, 1995; Blum u. Kirsch, 1979; Vom Hofe, 1992; Kirsch, 1979)). Neu sind jedoch die sogenannten *Aspekte*, die sich auf formale Zugänge zu mathematischen Begriffen beziehen, was für die Hochschuldidaktik Mathematik wichtig ist. Im Folgenden werden zunächst die Konstrukte *Aspekte* und *Grundvorstellungen* allgemein vorgestellt. Anschließend erfolgt die Beschreibung einer Konkretisierung auf den Ableitungsbegriff durch Greefrath u. a. (2016).

Beschreibung der Konstrukte „Aspekte“ und „Grundvorstellungen“: Greefrath u. a. (2016) definierten die Begriffe *Aspekte* und *Grundvorstellungen* wie folgt (Greefrath u. a., 2016, S.101):

1. *„An aspect of a mathematical concept is a subdomain of the concept that can be used to characterize it on the basis of mathematical content.“*

2. *„A Grundvorstellung of a mathematical concept is a conceptual interpretation that gives it a meaning.“*

Aspekte können als Zugänge zu einem Begriff verstanden werden, die zu einer formalen Definition führen können (Greefrath u. a., 2016, S.103). Grundvorstellungen geben jedem Begriff eine inhaltliche Bedeutung. Diese können dabei sowohl normativ im Sinne von intendierten Vorstellungen als auch deskriptiv im Sinne von bei Studierenden ausgebildeten Vorstellungen verstanden werden (Greefrath u. a., 2016, S.102).

In diesem Modell tauchen also formale Definitionen und Vorstellungen zu einem Begriff auf. Dies ist sehr ähnlich zu *concept image* und *concept definition* von Tall u. Vinner (1981). Greefrath u. a. (2016) gingen hierbei auf die Beziehung von *Aspekten* und *Grundvorstellungen* zu *concept image* und *concept definition* auch selbst explizit ein. Die Relation zwischen *concept image* und *Grundvorstellungen* ist dabei die Folgende (Greefrath u. a., 2016, S.103):

„The relations concept image–Grundvorstellung and concept definition–Aspect can be described as follows: A concept image may contain several individual Grundvorstellungen that conceptualize different perspectives of that concept. Individual Grundvorstellungen are central components of a valid concept image. These Grundvorstellungen give meaning to mathematical concepts.“

Grundvorstellungen sind also Teil des *concept image*. Jedoch sind es spezielle Vorstellungen, die dem Begriff eine *inhaltliche Bedeutung in einem Kontext* geben. Der Begriff des *concept image* ist weiter gefasst. In Letzterem befinden sich alle mentalen Assoziationen zu einem Begriff (siehe Kapitel 3.1).

Aspekte sind hingegen eng mit der formalen *concept definition* verwandt (Greefrath u. a., 2016, S.103):

„Each of these aspects may be expressed with one of the various concept definitions that one reads in textbooks. Thus, a concept definition is a specific realization of an aspect.“

Expliziter sagten Greefrath u. a. (2016), dass Aspekte zu einer formalen *concept definition* „konvertiert“ werden können (Greefrath u. a., 2016, S.103).

Konkretisierung des Modells auf die Ableitung: Greefrath u. a. (2016) nannten zwei wesentliche relevante Aspekte des Ableitungsbegriffs (Greefrath u. a., 2016, S.106):

1. Grenzwert des Differenzenquotienten
2. Lokale Linearisierung

Der Aspekt des Grenzwertes des Differenzenquotienten führt zur Definition:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (15)$$

Der Aspekt der lokalen Linearisierung führt zur Definition als die Zahl $m \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x - x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (16)$$

(siehe auch Kapitel 3.3.2 für ausführlichere Ausführungen zu diesem Zugang). Greefrath u. a. (2016) nannten folgende Grundvorstellungen zur Ableitung (Greefrath u. a., 2016, S.108-111):

1. Lokale Änderungsrate
2. Steigung der Tangente
3. Lokale Linearität (bei Differenzierbarkeit)
4. Verstärkungsfaktor

Die erste Grundvorstellung beruht darauf, dass beim Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ die mittlere Änderungsrate $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gegen einen Wert strebt, der als lokale Änderungsrate bezeichnet wird (im Kontext der Physik zum Beispiel geht die Durchschnittsgeschwindigkeit in die Momentangeschwindigkeit über). Die Grundvorstellung zur Steigung der Tangente geht daraus hervor, dass der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ graphisch der Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ entspricht. Beim Übergang $x \rightarrow x_0$ „konvergieren“ die Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ gegen die Tangente an an der Stelle x_0 , deren Steigung gerade den Wert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hat (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.45).

Die dritte Grundvorstellung basiert auf der Idee, dass differenzierbare Funktionen lokal affin sind (Greefrath u. a., 2016, S.110). Beim Aufbau dieser Vorstellung kann das Funktionenmikroskop helfen, mit welchem man in den Graphen „hineinzoomen“ kann (Greefrath u. a., 2016, S.111). Die Steigung dieser affinen Funktion, deren Graph sich an die Funktion „so gut anschmiegt“, dass er in einer kleinen Umgebung von x_0 kaum mehr vom Graphen von f unterscheidbar ist, ist dann die Ableitung $f'(x_0)$. Diese Vorstellung steht damit eng in Verbindung mit dem Aspekt der lokalen Linearisierung (siehe Gleichung (16)).

Die zuletzt genannte Vorstellung als Verstärkungsfaktor steht mit der Approximation

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad (17)$$

für kleine Δx im Zusammenhang. Kleine Änderungen der unabhängigen Variable verursachen die $f'(x)$ -fache Änderung der abhängigen Variable in einer Umgebung von x (Greefrath u. a., 2016, S.112).

Die Verbindungen zwischen den 2 genannten Aspekten und den 4 Grundvorstellungen sind nicht 1 zu 1. Der Aspekt des Grenzwertes des Differenzenquotienten führt zu folgenden Grundvorstellungen (Greefrath u. a., 2016, S.113):

1. Lokale Änderungsrate
2. Steigung der Tangente
3. Verstärkungsfaktor

Die lokale Linearisierung führt zu folgenden Grundvorstellungen (Greefrath u. a., 2016, S.113):

1. Steigung der Tangente
2. Lokale Linearität (bei Differenzierbarkeit)
3. Verstärkungsfaktor

Eignung des Modells für diese Arbeit: Das Modell passt gut zu den theoretischen Konstrukten *concept image* und *concept definition* der Dissertation und ist geeignet zur Beschreibung und Strukturierung des *concept image* der Studierenden zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Durch die *Aspekte* findet auch die formale Definition eine angemessene Berücksichtigung. Weiterhin ist zu erwähnen, dass anders als bei den anderen betrachteten Modellen zum Verständnis der Ableitung, hier der Zugang über lineare Approximation in dem Modell enthalten ist. Dieser ist wichtig für das Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung, was in Kapitel 3.3 genauer beschrieben wird.

Allerdings ist das Modell stark an den Terminus der Grundvorstellungen gebunden, die laut Greefrath u. a. (2016, S.101) der Ableitung eine inhaltliche Bedeutung geben sollen (siehe S.2). Dies ist etwas einengend (gegenüber dem Konstrukt des *concept image*, welches Assoziationen aller Art beinhaltet). Gerade bei den deskriptiven Studien zum bei Studierenden tatsächlich erreichten Verständnis könnte der Fokus auf Grundvorstellungen zu eng sein.

3.2.5 Begründete Auswahl eines der Modelle als Basis für die empirischen Studien der Dissertation

In den Kapiteln 3.2.1-3.2.4 wurden vier konkrete Modelle aus der didaktischen Literatur vorgestellt, mit denen man „Verständnis der Ableitung“ theoretisch beschreiben kann:

1. das Matrixmodell mit den Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion* und den Repräsentationen der Ableitung von Zandieh (2000)
2. das auf der APOS-Theorie basierende Rahmenmodell von Asiala u. a. (1997a)
3. das Differentiation Competency Framework von Kendal u. Stacey (2003)
4. das auf Aspekten und Grundvorstellungen basierende Rahmenmodell von Greefrath u. a. (2016)

Für die Dissertation wird nun eines dieser Modelle ausgewählt, welches die Basis für die theoretische Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung als mathematisches Konzept in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler bildet.

Vorauswahl von zwei der vier Modelle: Das gewählte Modell sollte in adäquater Weise beschreiben, wie das *concept image* von Studierenden zum Ableitungsbegriff in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aussehen kann. Dazu sollte es natürlich zu den in der Arbeit gewählten theoretischen Konstrukten *concept image* (und *concept definition*) zur Beschreibung des Verständnisses mathematischer Begriffe im Allgemeinen passen.

Bei dem Differentiation Competency Framework von Kendal u. Stacey (2003) ist dies eher nicht der Fall. Mit Hilfe dieses Modells lässt sich untersuchen, inwieweit die Studierenden bestimmte Aufgaben zum Repräsentationswechsel bei der Ableitung lösen können. Es geht hier also eher um prozedurales Wissen.

Auch die APOS-Theorie eignet sich weniger zur Beschreibung des *concept image* der Studierenden. Die APOS-Theorie dient eher der Beschreibung von Lernprozessen. In den empirischen Studien dieser Arbeit geht es aber nicht um die Untersuchung des Lernprozesses der Studierenden als Prozess, sondern nur um Momentaufnahmen des *concept image* zu Beginn des Studiums und am Ende der Lehrveranstaltung (siehe Tabelle 1). Außerdem sind die Verständniskategorien *action*, *process*, *object*, *schema* der APOS-Theorie, die aus Sicht der Theorie linear durchlaufen werden müssen, zu einengend zur Beschreibung des gesamten *concept image*. Daher wurde auch dieses Modell verworfen.

Die anderen beiden Modelle (das Matrixmodell von Zandieh (siehe Tabelle 4) und das Modell mit *Aspekten* und *Grundvorstellungen* von Greefrath u. a. (2016) passen hingegen sehr gut zur konkreten Beschreibung des *concept image* zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Das Modell von Zandieh basiert sogar direkt auf dem theoretischen Konstrukt des *concept image* (siehe Kapitel 3.2.1), die Grundvorstellungen nach Greefrath u. a. (2016) sind wesentlicher Teil des *concept image*, die dem jeweiligen Konzept eine inhaltliche Bedeutung geben.

Abwägung von Vor- und Nachteilen beider Modelle und Begründung der endgültigen Auswahl:

Beide Modelle haben Vor- und Nachteile. Das Modell mit den Grundvorstellungen und Aspekten hat den Vorteil, dass es stärker die formalen Zugänge zur Ableitung in Form der *Aspekte* eigens hervorhebt. Dies wird der Art und Weise, wie Begriffe an der Hochschule eingeführt werden, eher gerecht. Beim Matrixmodell von Zandieh sind hingegen alle Repräsentationen der Ableitung gleichberechtigt. Allerdings zeigte die Analyse von Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, dass dort die Repräsentationen ebenfalls als gleichberechtigt angesehen werden (siehe Kapitel 5), die unabhängig voneinander existieren und alle für mathematische Argumentationen genutzt werden. Insofern passt das Matrixmodell schon zum praktischen Umgang mit der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.

Das Modell von Zandieh hat wiederum den Vorteil, dass es explizit auf die Unterscheidung zwischen Ableitung an einer Stelle und Ableitungsfunktion eingeht, was im Modell zu Aspekten und Grundvorstellungen nicht abgebildet wird. Außerdem bezieht es explizit die Notwendigkeit des Verständnisses des Differenzenquotienten als eigene wichtige Kategorie durch die erste Ebene *ratio* ein (siehe Tabelle 4).

Beide Modelle beinhalten noch keinen ökonomischen Kontext und müssten erweitert werden. Bei beiden Modellen ist dies nicht trivial. Eine einfache Erweiterung des Matrixmodells um eine weitere Spalte (die Spalten beinhalteten die Repräsentationen) mit dem Kontext Kosten, wie es Roorda u. a. (2007, S.2163) vorschlugen, erscheint

ungeeignet, da die übliche Interpretation der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion als Zusatzkosten für die nächste Einheit (siehe Kapitel 2.2) keiner der anderen Ebenen der Ableitung im Modell von Zandieh aus Tabelle 4 direkt entspricht. Die ökonomische Interpretation als Zusatzkosten entspricht aber meiner Meinung nach auch keiner Grundvorstellung zur Ableitung (sie widerspricht sogar der Grundvorstellung als Rate, welche ein Änderungsverhältnis und keine absolute Änderung ist). Daher erscheint eine kanonische Erweiterung um die ökonomische Interpretation als weitere Grundvorstellung (dekontextualisiert als „Zuwachs der Funktion bei Vergrößerung der Kosten um eine Einheit“) ebenfalls ungeeignet. Die Erweiterung der Modelle ist damit in beiden Fällen nicht kanonisch. Daher ist keines der beiden Modelle aus dieser Perspektive die „bessere“ Wahl als Grundmodell.

Insgesamt scheinen aus den eben geführten Betrachtungen beide Modelle zur theoretischen Beschreibung eines adäquaten Verständnisses des Ableitungsbegriffs als mathematisches Konzept in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler gleichermaßen geeignet. Im Entstehungsprozess der Dissertation wurde zur Gewährleistung der internationalen Anschlussfähigkeit der Arbeit dann das Modell von Zandieh als international anerkanntes, und in der internationalen Mathematikhochschuldidaktik oft verwendetes Grundmodell, gewählt (siehe zum Beispiel (Carlson u. a., 2010, 2002; Roundy u. a., 2015; Hähkiöniemi, 2006; Roorda u. a., 2007)).

3.3 Erweiterung des Modells um die ökonomische Interpretation der Ableitung

Das bisher gewählte Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler beinhaltet noch keinen Bezug zur Ökonomie. In diesem Kapitel wird nun dargestellt wie

1. die Ableitung üblicherweise ökonomisch interpretiert wird,
2. man eine Verbindung zwischen der ökonomischen Interpretation der Ableitung und der Ableitung als mathematisches Konzept herstellen kann (aus mathematischer und stoffdidaktischer Perspektive), und
3. man das Rahmenmodell von Zandieh (2000) um diese Verbindung erweitern kann.

Diese Erweiterung bildet dann das in dieser Dissertation verwendete theoretische Modell zur Beschreibung eines möglichen mathematisch adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, dass die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt.

3.3.1 Die ökonomische Interpretation der Ableitung

Um die Ableitung in ökonomischen Kontexten verwenden zu können, müssen die entsprechenden Werte der Ableitung ökonomisch interpretiert werden können. Allerdings ist dies nicht trivial, denn die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung entspricht keiner der anderen Repräsentationen der Ableitung aus Tabelle 4 direkt.

Dies wird im Folgenden noch einmal am Beispiel der Ableitung von Kostenfunktionen, der sogenannten Grenzkosten, ausführlich erläutert. Die Grenzkosten stehen hierbei als Prototyp für beliebige Grenzgrößen (Ableitungen ökonomischer Funktionen). Da in Ökonomiebüchern die ökonomische Interpretation der Ableitung häufig am Beispiel von Kostenfunktionen eingeführt werden (Wöhe u. Döring, 2013; Schierenbeck u. Wöhle, 2008), werde ich auch hier die ökonomische Interpretation der Ableitung auch anhand der Grenzkosten beschreiben.

Ist $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ eine Kostenfunktion ($K(x)$ sind hierbei die Kosten bei einem Output von x Einheiten), so werden die Grenzkosten $K'(x)$ (falls die Ableitung existiert) oft als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S.270). In einigen Ökonomiebüchern werden die Grenzkosten sogar auf diese Weise definiert (Pindyck u. Rubinfeld, 2013, S.325). Streng genommen entspricht diese Interpretation auf mathematischer Ebene aber der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$. Sie unterscheidet sich zum einen von der Ableitung außer bei linearen Kostenfunktionen numerisch. Bei allen in der Schule verwendeten prototypischen Funktion wie $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \sin(x)$ ist der numerische Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ auch nicht vernachlässigbar.

Zum anderen unterscheiden sich Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit darin, dass die Ableitung eine Rate ist, die Kostendifferenz aber eine absolute Änderung. Dieser Unterschied wird dann auch in der Einheit deutlich, wenn die Ableitung $K'(x)$ als Größe mit Einheiten aufgefasst wird (in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und der Ökonomie wird hier häufig kein Unterschied zwischen Größe und Funktion gemacht, siehe zum Beispiel (Tietze, 2010, S.242-243)). Ist die Einheit der Ausbringungsmenge zum Beispiel Mengeneinheiten ([ME]) und die Einheit der Kosten Geldeinheiten ([GE]), so hat $K'(x)$ die Einheit $\frac{[GE]}{[ME]}$, wohingegen die Zusatzkosten der nächsten Einheit in [GE] angegeben werden müssten. Damit widerspricht die ökonomische Interpretation von $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit auf den ersten Blick sogar der Grundvorstellung der Ableitung als Änderungsrate, die in der Schule aufgebaut werden sollte (Greefrath u. a., 2016, S.108; Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S.20). Allerdings hat Thompson (1994) am Beispiel des Geschwindigkeitskonzepts gezeigt, dass bei der Entwicklung von Vorstellungen zu Raten die erste Stufe gerade ein Verständnis der Rate als absolute Änderung der abhängigen Variable bei gegebener Änderung der unabhängigen Variable ist. Man könnte daraus vermuten, dass in der Ökonomie bewusst solche einfachen Ratenauffassungen verwendet werden, weil sie funktionieren solange die Einheiten der unabhängigen Variable im ganzzahligen Bereich liegen. Allerdings dürften dann mit der Ableitung berechnete Grenzkosten nicht in Geldeinheiten angegeben werden, wie das in einigen ökonomischen Lehrbüchern der Fall ist (Wöhe u. a., 2013, S.120).

Die Grenzkosten $K'(x)$ und deren in der Ökonomie übliche Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit unterscheiden sich also numerisch und in der Einheit. Daher lässt sich diese Interpretation, anders als die physikalische Interpretation der Ableitung einer Weg-Zeit-Funktion als Momentangeschwindigkeit, nicht einfach in das theoretische Rahmenmodell von Zandieh zum Verständnis der Ableitung als weitere „Repräsentation der Ableitung“ mit einer weiteren Matrixspalte (siehe Tabelle 4) integrieren. Dennoch gibt es natürlich eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ als mathematisches Konzept und dieser hier genannten in der Ökonomie üblichen In-

terpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit.

3.3.2 Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation

Wie die Ausführungen im letzten Kapitel zeigen, entspricht die ökonomische Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen auf mathematischer Ebene nicht genau dem Konzept der Ableitung, sondern der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$. Dennoch gibt es natürlich eine Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit. Die nahe liegende Verbindung ist die Näherungsformel

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h \quad \text{für } h \approx 0 \quad (18)$$

Diese ist auch in verschiedenen Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zu finden (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010). Auf sie wird inhaltlich auch in Lehrbüchern der Ökonomie, die eine Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation herstellen, zurückgegriffen (Reiß, 2007; Wiese, 1999) (siehe Kapitel 2.2).

Die Näherungsformel (18) lässt sich auf zwei verschiedene Arten rechtfertigen:

1. Rechtfertigung der Näherungsformel über die Definition der Ableitung

Die Näherungsformel (18) kann direkt aus der Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (19)$$

gerechtfertigt werden. Denn für $h \approx 0$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad | \cdot h \\ f'(x) \cdot h &\approx f(x+h) - f(x) \end{aligned}$$

Bei dieser Herleitung muss man sich erinnern, dass die Ableitung aus einem Grenzprozess hervorgeht (Asiala u. a., 1997a, S.400), und anschließend den Näherungsaspekt des Grenzwertes nutzen (siehe (Çetin, 2009b, S.325) oder (Williams, 1991, S.221)).

2. Rechtfertigung der Näherungsformel über die Verwendung der Tangente als lineare Approximation

Eine alternative Begründung geht über die Verwendung der Tangente als lokale lineare Approximation. Die Ableitung, als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert, entspricht der Steigung der Tangente. Deren Gleichung ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ein zugehöriges Bild ist in Abbildung 3 zu sehen.

Für $x \rightarrow x_0$ geht der Fehler zwischen Ausgangsfunktion und Tangente „sehr schnell“ gegen 0 für $x \rightarrow x_0$, was Satz 3.1 präzisiert.

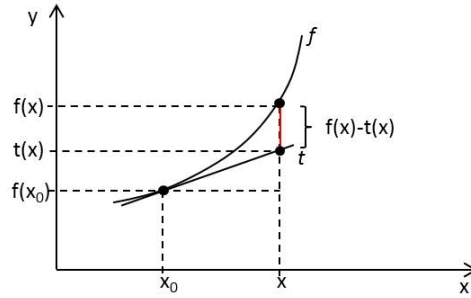


Abbildung 3: Veranschaulichung der Approximation von f durch die Tangente t mit $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Satz 3.1:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$ Häufungspunkt von X . Sei weiterhin $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 . Dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \quad (20)$$

Beweis.

Sei $R(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Damit gilt $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$ für alle $x \in X$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

□

Das Restglied konvergiert also „sehr schnell“ gegen 0. Denn ist (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow x_0$, so gibt es eine Nullfolge (p_n) mit

$$|R(x_n)| \leq p_n |x_n - x_0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (21)$$

Die Tangente t mit der Gleichung $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist sogar die einzige lineare Funktion l mit $l(x_0) = f(x_0)$, bei welcher der Fehler $f(x) - l(x)$ für $x \rightarrow x_0$ sogar noch nach Teilen durch $x - x_0$ gegen 0 konvergiert, was in Satz 3.2 festgehalten ist.

Satz 3.2 (Tangente als „beste lineare Approximation“):

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$ Häufungspunkt von X . Sei weiterhin $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 . Ist l mit $l(x) = a(x - x_0) + b$ irgendeine lineare Funktion mit $l(x_0) = f(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = 0$, so ist l gerade die Tangente, d.h. $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für alle $x \in X$.

Beweis.

Sei $l(x) = a(x - x_0) + b$ irgendeine lineare Funktion mit den beiden Eigenschaften $l(x_0) = f(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = 0$. Da $f(x_0) = l(x_0)$ folgt: $b = f(x_0)$. Weiterhin gilt für $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} a - f'(x_0) &= \frac{a(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x_0) + a(x - x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x_0) + a(x - x_0) - f(x)) + f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{l(x) - f(x)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned} \quad (22)$$

Der erste Summand in Formel (22) geht für $x \rightarrow x_0$ nach Voraussetzung gegen 0, der zweite Summand nach Satz 3.1. Damit folgt:

$$a = f'(x_0) \quad (23)$$

und somit $l(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ für alle $x \in X$. $\square$

Diese beiden Sätze rechtfertigen dann die Approximation $f(x) \approx t(x)$. Aus der Tangentengleichung $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ folgt mit $h := x - x_0$ dann die Approximationsformel $f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h$ für $h \approx 0$.

Sätze 3.2 und 3.1 können übrigens sogar zur Definition der Ableitung genutzt werden. Gibt es eine Darstellung der Form

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + R(x) \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0, \quad (24)$$

so ist f in x_0 differenzierbar mit $m = f'(x_0)$ (Beweis durch Umstellen von (24)). Die lineare Approximation kann daher auch direkt als Zugang zur Ableitung verwendet werden, welcher auch auf die mehrdimensionale Differentialrechnung verallgemeinerbar ist (siehe (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.79)). Die Verwendung dieses Zugangs als Definition war jedoch in keinem der betrachteten Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zu finden. Eine Ursache kann sein, dass die Ableitung in der Schule in der Regel als Grenzwert des Differenzenquotienten bzw. als lokale Änderungsrate definiert wurde und hier zunächst an das Vorwissen angeknüpft werden sollte (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S.20). Eine weitere Ursache könnte sein, dass es bei Verwendung des Linearisierungsansatzes zur Definition der Ableitung das Ziel ist, die Ausgangsfunktion durch ihre lineare Approximation zu ersetzen. In der Ökonomie ist das Ziel aber oft keine Ersetzung der Ausgangsfunktion, sondern die Interpretation numerischer Werte der Ableitung, die sich zum Beispiel bei der Lösung ökonomischer Probleme mit Mitteln der Differentialrechnung ergeben haben.

Wenn man die Approximationsformel $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für kleine h über die Idee der lokalen lineare Approximation herleitet, sollten in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler sicher nicht die formalen Beweise zum Zusammenhang zwischen

Ableitung und linearer Approximation im Mittelpunkt stehen. Ähnlich wie Blum und Kirsch dies in Grundkursen forderten (Blum u. Kirsch, 1979, S.12), sollte man in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler meiner Meinung nach zunächst eher das qualitative Verständnis der Näherungsformel $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ in den Vordergrund stellen (ohne formale Rechnungen und ohne Restgliedabschätzung, auch wenn letztere dann an späterer Stelle eine Quantifizierung und Abschätzung des Fehlers zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ ermöglichen, siehe nächstes Kapitel 3.3.3).

3.3.3 Möglichkeiten der Erklärung der Legitimität der ökonomischen Interpretation der Ableitung

Bisher wurde rein innermathematisch entweder über die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten oder die Charakterisierung der Ableitung als Steigung der lokal am besten approximierenden linearen Funktion (siehe Satz 3.2) die Näherungsformel

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h \quad \text{für } h \approx 0 \quad (25)$$

hergeleitet. Diese gilt bei jeder in x differenzierbaren Funktion unabhängig vom Kontext. Für $h = 1$ ergäbe sich dann formal die Näherung $f(x+1) - f(x) \approx f'(x)$.

Es bleibt aber zu reflektieren, weshalb der Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ in der Ökonomie als vernachlässigbar angenommen wird (sonst wäre die Interpretation des Wertes $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit bzw. allgemeiner bei beliebigen Grenzgrößen die Interpretation von $f'(x)$ als Zuwachs bei Erhöhung von x um eine Einheit nicht legitim). Denn bei den prototypischen Funktionen aus der Schule wie $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ oder $f(x) = \sin(x)$ ist der Fehler zwischen den Werten $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ nicht vernachlässigbar.

Argumentation über die Größe der Einheit h : Eine besonders einfache Möglichkeit wäre das Argument, dass bei ökonomischen Funktionen der Zuwachs $h = 1$ in der Regel klein ist (im Vergleich zum Output x). Ein ähnliches Argument liefert zum Beispiel Reiß (2007). Er nennt eine Änderung von einem mm^3 Wasser klein, wenn das Wasser in m^3 gemessen wird. Er spricht dann von einer sogenannten *marginalen Einheit*. Bei sehr kleinen Einheiten ist laut Reiß der Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit annähernd der Tangentensteigung (Reiß, 2007, S.197). Ähnlich argumentiert auch Wiese (1999) (siehe Kapitel 2.2).

Dieses Argument ist natürlich kein mathematisches Argument und ist allein etwas zu einfach. Ein Beispiel für eine ökonomische Funktion, wo sich ein großer Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ ergibt, sind die Durchschnittskosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ einer linearen Kostenfunktionen $K(x) = mx + K_f$ mit großen Fixkosten $K_f = K(0)$. Dann ist $k(x) = m + \frac{K_f}{x}$ und

$$k(2) - k(1) - k'(1) = \frac{K_f}{2} - K_f + K_f = \frac{K_f}{2}. \quad (26)$$

Sind die Fixkosten groß, ist der Fehler $k(x+1) - k(x) - k'(x)$ für $x = 1$ ebenfalls groß. Bei den Durchschnittskosten ist eben $h = 1$ bei kleinen x nicht mehr klein.

Argumentation über die Eigenschaften ökonomischer Funktionen: Wie eben gezeigt wurde, greift das Argument „ $h = 1$ in der Ökonomie“, nicht bei allen ökonomischen Funktionen, denn die Größe des Fehlers zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ hängt natürlich von den Eigenschaften der konkreten Funktion ab. Man könnte daher versuchen in der Mathematikvorlesung Eigenschaften an Funktionen zu formulieren, sodass der Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ klein ist. Anschließend könnte man diskutieren, inwieweit diese bei ökonomischen Funktionen erfüllt sind. In der Ökonomie geht man nämlich oft davon aus, dass die betrachteten Funktionen hier genau passende Eigenschaften für einen kleinen Fehler $|(f(x+1) - f(x)) - f'(x)|$ bzw. einen kleinen Fehler zwischen der Ableitung und dem zugehörigen Differenzenquotienten für $h = 1$ haben. So unterstreicht zum Beispiel Wiese (1999, S.47) in seinem Lehrbuch „Mikroökonomik“:

Bei einer Vielzahl von Funktionen, die wir verwenden wollen, macht es keinen großen Unterschied, ob wir den Differenzen- oder den Differentialquotienten benutzen.

Um hier passende Bedingungen zu finden, wäre es zunächst hilfreich, die Funktion f und deren „beste lokale lineare Approximation“ L (die Tangentialfunktion) mit der Gleichung $L(h) = f(x) + f'(x) \cdot h$ in einer Umgebung von x zu zeichnen. Dabei sieht man, dass der Fehler zwischen $f(x+1) - f(x)$ und $L(1) - L(0) = f'(x)$ klein ist, wenn f im Bereich $[x; x+1]$ „annähernd linear“ ist (der Fehler ist sogar 0, wenn f linear ist). Die Steigung sollte sich also im Bereich $[x; x+1]$ kaum ändern. Für Kostenfunktionen ist dies beispielsweise inhaltlich plausibel. Denn wenn eine Kostenfunktion nicht gerade einen Sprung hat, sollte sich der Preis pro Stück *nicht rasch* von Einheit zu Einheit ändern.

Kombination dieser beiden Argumente: Eine Kombination der Argumente (geringe Größe einer Einheit im Kontext und annähernde Linearität der Funktion im Bereich $[x; x+1]$) könnte dann eine plausible Erklärung liefern, weshalb in ökonomischen Theorien die Ableitung $f'(x)$ oft als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit interpretiert wird. Dort wird implizit davon ausgegangen, dass eine Einheit bei den dort auftretenden Funktionen im Kontext so klein ist, dass die Funktion in dem Bereich $[x; x+1]$ annähernd linear ist (diese annähernde Linearität kann man gegebenenfalls durch Verkleinerung der Einheit bei differenzierbaren Funktionen immer erreichen), und damit der Fehler zwischen $f(x+1) - f(x)$ und $f'(x)$ vernachlässigbar ist. Ein Explizit machen dieser Annahme macht dann plausibel, weshalb in ökonomischen Theorien $f'(x)$ oft als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit interpretiert wird (und diese Interpretation dann auch legitim ist).

Bei praktischen Problemen müsste dann natürlich überprüft werden, ob diese Annahme erfüllt ist und der Fehler in dem jeweiligen Kontext wirklich vernachlässigbar ist.

Zusatzbetrachtungen zur Quantifizierbarkeit des Fehlers: Die Größe des Fehlers zwischen $f(x+1) - f(x)$ und $f'(x)$ könnte man auch mit Hilfe der Taylor-Formel quantifizieren, wenn diese in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler behandelt

wird. Denn bei zweifacher Differenzierbarkeit gibt es nach dem Satz von Taylor ein θ zwischen x und $x + 1$ mit

$$f(x + 1) - f(x) - f'(x) = f''(\theta). \quad (27)$$

Ein kleiner Fehler wird also sichergestellt, wenn f'' im Bereich $[x; x + 1]$ betragsmäßig klein ist. Dies bedeutet gerade wieder, dass sich f' in diesem Bereich kaum ändert und die Funktion annähernd linear in diesem Bereich ist. Damit könnte dann in einer konkreten Kontextsituation abgeschätzt werden, ob der Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x + 1) - f(x)$ tolerierbar ist oder nicht. Eine solche Quantifizierung erfordert aber, wie hier gezeigt, anspruchsvolle mathematische Hilfsmittel.

Ob übrigens die Betrachtung des absoluten Fehlers $|f'(x) - f(x + 1) - f(x)|$ immer sinnvoll ist, könnte man auch überlegen. Gilt zum Beispiel bei einer Kostenfunktion $K(x) = 20$ bei einem Output x , so ist ein Fehler $K(x + h) - K(x) - K'(x)h = 20$ im Kontext als großer Fehler anzusehen. Ist $K(x) = 1000000$, dann ist der Fehler von $K(x + h) - K(x) - K'(x)h = 20$ jedoch verschwindend klein. Diese Überlegungen motivieren dann eigentlich eine Betrachtung eines Fehlers der Form

$$\frac{K(x + h) - K(x) - K'(x)h}{K(x)}. \quad (28)$$

Auf solche relativen Fehler wird allerdings in keinem der von mir betrachteten Lehrbücher eingegangen (weder in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler noch der Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaften). Man könnte aber darüber nachdenken, ob man nicht auch solche Überlegungen auch in Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aufgreift.

3.3.4 Erweiterung des Modells von Zandieh

Im Folgenden soll das theoretische Matrixmodell von Zandieh (siehe Tabelle 4) zur Beschreibung eines adäquaten Verständnisses der Ableitung als mathematisches Konzept um die ökonomische Interpretation der Ableitung und deren Verbindung zum mathematischen Konzept erweitert werden. Die einfachste Erweiterung dieses Matrixmodells (siehe Tabelle 4) wäre eine Erweiterung der Matrix mit den Zeilen *Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion* und den Spalten mit den Repräsentationen der Ableitung um eine weitere Spalte *Ökonomie*. In dieser wären dann Durchschnittskosten, Grenzkosten und Grenzkostenfunktion eingetragen, so wie es Roorda u. a. (2007, S.2163) vorschlugen. Das passt aber nicht zur üblichen, in Kapitel 3.3.1 dargestellten ökonomischen Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit. Denn letztere hat eben keine passende Entsprechung in den anderen Repräsentationen aus in Tabelle 4 (sie ist weder eine mittlere noch eine lokale Änderungsrate). Daher sollte die Matrix in Tabelle 4 anders erweitert werden.

In dem Modell sollte als verbindender Bestandteil zwischen dem mathematischen Konzept der Ableitung und der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit die Approximationsformel

$$f(x + h) - f(x) \approx f'(x)h \quad \text{für } h \approx 0, \quad (29)$$

stehen. Wie im Unterkapitel 3.3.2 dargestellt, kann die Näherungsformel (29) in folgender Weise hergeleitet werden:

1. aus der Definition der Ableitung durch Approximation des Differenzenquotienten durch die Ableitung (oder andersrum)
2. aus der graphischen Repräsentation der Ableitung als Steigung der Tangente, welche Graph der linearen Funktion ist, die den Graphen der Ausgangsfunktion f in einer Umgebung von x „besonders gut approximiert“ (siehe Satz 3.2).

Bei beiden Wegen muss man also wieder den Grenzprozess, der zur Ableitung führt, ins Bewusstsein rufen. Daher liegt die Näherungsformel in Tabelle 4 „zwischen“ den Ebenen Verhältnis und Grenzwert, gerade beim Grenzübergang.

Von der Approximationsformel $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ führt dann das Einsetzen von $h = 1$ in die Näherungsformel (29) zur in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit. Hierbei sollte die bei Verwendung dieser Interpretation in der Ökonomie implizit getroffene Modellannahme, dass bei der Verwendung dieser Interpretation die Einheit im Kontext so klein ist, dass die betrachtete Funktion im Bereich $[x; x + 1]$ fast linear ist, reflektiert werden.

Eine graphische Veranschaulichung der eben verbal beschriebenen Erweiterung des Rahmenmodells von Zandieh ist in Abbildung 4 zu sehen.

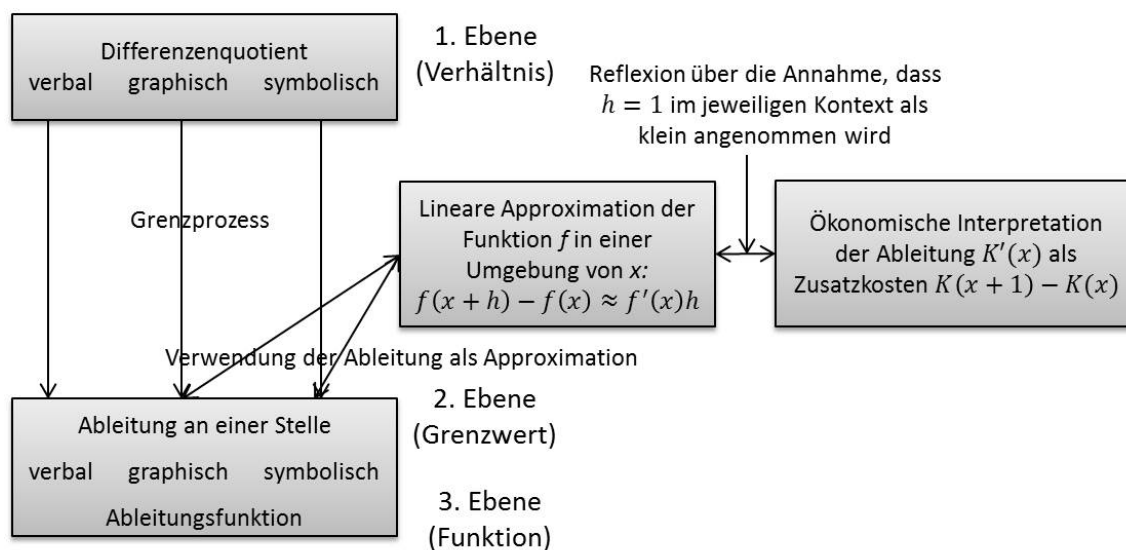


Abbildung 4: Erweiterung des Zandiehschen Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung um die ökonomische Interpretation der Ableitung und deren Verbindung zum mathematischen Konzept über lineare Approximation

Dieses Rahmenmodell ist nun eine mögliche theoretische Beschreibung eines mathematisch adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, welches die Praxis im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt. Es ist damit eine mögliche Antwort auf die erste Forschungsfrage F1 „Wie könnte man ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, theoretisch beschreiben?“.

4 Bekannte Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

In diesem Kapitel werden nun die bereits bekannten Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung aus der mathematikdidaktischen Literatur dargestellt, die bei den verschiedenen Aspekten des im letzten Kapitel entwickelten Rahmenmodells (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung auftreten. Die Herausarbeitung dieser Schwierigkeiten bildet dann zusammen mit den bereits im letzten Kapitel 3.2 dargestellten Modellen zur theoretischen Beschreibung des Verständnisses der Ableitung den aktuellen Forschungsstand zum Verständnis der Ableitung, auf dem dann die empirischen Studien der Dissertation aufbauen.

Laut des eben genannten Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung, welches auf dem Modell zum Verständnis der Ableitung von Zandieh (2000) basiert, müssen Studierende auf dem Weg von der Funktion f zur Ableitungsfunktion f' drei Ebenen verstehen (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt):

1. Ebene *Verhältnis*: das Konzept des Differenzenquotienten bzw. bereits das Konzept der Steigung einer linearen Funktion
2. Ebene *Grenzwert*: die Ableitung an einer Stelle (inklusive Differenzierbarkeit)
3. Ebene *Funktion*: die Ableitungsfunktion als ganze Funktion

Auf jeder dieser Ebenen sind auf Basis empirischer Studien Probleme in der Literatur dokumentiert, die im Folgenden näher beschrieben werden. Passend dazu ist das Kapitel in entsprechende Unterkapitel gegliedert.

Nach der Darstellung der in der Literatur dokumentierten Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung als reines mathematisches Konzept folgt die Darstellung zweier Studien, in denen es dann explizit um das Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten geht. Das Kapitel endet schließlich mit einem Fazit und Konsequenzen für die Lehre.

4.1 Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung einer linearen Funktion und des Differenzenquotienten

4.1.1 Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung bzw. der Änderungsrate einer linearen Funktion

In der universitären Mathematik wird ein Verständnis des Konzepts der Steigung einer linearen Funktion oft bereits vorausgesetzt und das Konzept daher in Lehrbüchern der Hochschulmathematik nur knapp thematisiert (siehe zum Beispiel (Königsberger, 2004)). Dies gilt übrigens auch für einige Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wie zum Beispiel Dietz (2012). Allerdings zeigt die didaktische Literatur, dass vielen Studienanfängern nicht mehr alle Aspekte des Steigungsbegriffs präsent sind.

Nagle u. a. (2013) haben eine umfangreiche Studie über den Umfang des bei Studierenden vorhandenen *concept image* zum Begriff der Steigung durchgeführt (Nagle u. a.,

2013, S.1497). Sie verwendeten hierbei den Begriff des *concept image* in der weiten Fassung nach Tall, in das auch eine *personal concept definition* gehört (siehe Kapitel 3.1).

In ihrer Studie legten sie 65 Studierenden zu Beginn eines einführenden Calculus-Kurses an einer Universität in den nordöstlichen Bundesstaaten der USA im Jahre 2010 einen aus 13 Items bestehenden Test zum Verständnis von Funktionen und Steigungen vor, von denen sich 5 Items auf die Steigung bezogen (Nagle u. a., 2013, S.1497). Die zugehörigen Fragen sind in Tabelle 7 dargestellt.

Nummer	Item
1	„What is slope?“
2	„List all the ways the slope can be represented!“
3	„How is slope used?“
4	„When is it appropriate to use slope?“
5	„Give three examples of slope.“

Tabelle 7: Testitems zur Steigung linearer Funktionen aus (Nagle u. a., 2013, S.1499)

Die Items sind nicht ganz unproblematisch. Während bei den Items 1, 2 und 5 mögliche Antworten klar sind, ist dies bei den Items 3 und 4 meiner Meinung nach nicht der Fall. Insbesondere ist für mich kein klarer Unterschied zwischen beiden Fragen deutlich. Dies schien auch bei den Studierenden der Fall zu sein, wie die folgenden zwei inhaltsähnlichen Antworten auf die Fragen 3 und 4 zeigen (Nagle u. a., 2013, S.1500):

1. „Wenn man sehen will, ob Geraden parallel sind (wenn sie die gleiche Steigung haben).“ (Antwort zu Item 4)
2. „Verwendung um zu sehen, ob Geraden parallel oder senkrecht stehen.“ (Antwort zu Item 3)

Diese etwas vage Formulierung der Fragen war aber Absicht der Autoren, um ein möglichst breites Antwortspektrum zu erhalten (Nagle u. a., 2013, S.1498).

Die Antworten auf die Items wurden in ein aus 11 Kategorien bestehendes Kategoriensystem eingeordnet, welches verschiedene Aspekte des Begriffs „Steigung“ als Kategorien enthält. Das Kategoriensystem wurde in der Form von Moore-Russo et al. entwickelt und ist eine Weiterentwicklung eines aus 7 Kategorien bestehenden Systems nach Stump (Moore-Russo u. a., 2011, S.9; Stump, 1999, S.7). Bei der Einordnung waren auch Mehrfachzuordnungen möglich. Einige (für die Ausbildung eines Verständnisses der Ableitung wichtige) Kategorien sind in Tabelle 8 dargestellt (Nagle u. a., 2013, S.1500).

Aus Tabelle 8 sieht man, dass es nicht um 100%ige mathematische Richtigkeit der Antworten ging, sondern um den Aspekt der Steigung, der in der Antwort deutlich wurde. Dies zeigen folgende Antworten, die zwar nicht 100%ig richtig sind, aus denen aber der jeweils angesprochene Aspekt der Steigung klar erkennbar wird:

1. „Graphisch zeigt die Steigung die vertikale Änderung und die horizontale Änderung.“ (eingeordnet in *Geometric ratio*)
2. „Sie ist Tangente an eine Kurve.“ (eingeordnet in *Calculus conception*)

Kategorie	Beschreibung	Beispielantworten
Geometric ratio	In der Antwort wird auf die geometrische Bestimmung der Steigung als Verhältnis von Streckenlängen im Steigungsdreieck Bezug genommen.	<i>„Die Steigung ist das Verhältnis von vertikaler Verschiebung zu horizontaler Verschiebung zwischen zwei Punkten.“</i> (Antwort zu Item 1) <i>„Graphisch zeigt die Steigung die vertikale Änderung und die horizontale Änderung.“</i> (Antwort zu Item 2)
Algebraic ratio	In der Antwort wird auf die algebraische Formel zur Bestimmung der Steigung Bezug genommen.	<i>„Die Steigung ergibt sich als Bruch aus der Differenz der y-Koordinaten durch die der x-Koordinaten $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.“</i> (Antwort zu Item 1)
Functional property	Aus der Antwort wird eine Auffassung der Steigung als Änderungsrate einer Funktion deutlich.	<i>„Sie wird verwendet um zu beschreiben, wie schnell sich eine Sache bei Änderung einer Sache ändert.“</i> (Antwort zu Item 1) <i>„Sie wird verwendet, wenn man die mittlere Änderungsrate untersucht.“</i> (Antwort zu Item 4)
Parametric coefficient	In der Antwort wird ein Bezug zwischen der Steigung und dem Parameter m in der Gleichung $y = mx + n$ hergestellt.	<i>„In $y = 2x + 10$ ist der Steigung der Gerade 2.“</i> (Antwort zu Item 3)
Behavior indicator	Es wird gesagt, dass die Steigung angibt, ob eine Gerade steigend, fallend oder horizontal ist, und wie schnell sie dies im Vergleich zu einer anderen Geraden tut.	<i>„Eine Zahl, die beschreibt, ob eine Gerade steigt, fällt oder eben ist.“</i> (Antwort zu Item 1) <i>„Sie wird verwendet um zu erkennen, welche der beiden Geraden $y = 2x + 1$ und $y = 5x - 6$ schneller steigt.“</i> (Antwort zu Item 3)
Calculus conception	Die Kategorie enthält alle Antworten, in denen irgendwie ein Bezug zur Ableitung deutlich wird. (leider wurde das von Nagle u. a. (2013) nicht präziser formuliert).	<i>„Falls $y = x^2$, so ist $2x$ die Steigung der Parabel.“</i> (Antwort zu Item 5) <i>„Sie ist Tangente an eine Kurve.“</i> (Antwort zu Item 2)

Tabelle 8: Ausschnitt aus dem Kategoriensystem von Nagle et al., der alle für das Verständnis der Ableitung wichtigen Kategorien aus Nagle u. a. (2013, S.1500) enthält

Eine Erklärung dafür, dass fachliche Ungenauigkeiten nicht weiter aufgegriffen wurden, wäre, dass es hier lediglich darum ging herauszufinden, welche Aspekte der Steigung Bestandteil des *concept image* der Studierenden waren, und nicht ob diese aus mathematischer Sicht vollkommen adäquat darin enthalten waren.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 dargestellt. Man sieht hier, dass bei vielen Studierenden wichtige Aspekte der Steigung nicht mehr präsent waren. Unter der Brille der Theorie des *concept image* von Tall u. Vinner (1981) bedeutet das: sie waren nicht mehr Bestandteil ihres *evoked concept image* (siehe Kapitel 3.1). So sollten zum Bei-

Kategorie	Anteil Studierende
Behavior indicator	71%
Parametric coefficient	68%
Algebraic ratio	54%
Geometric ratio	45%
Functional property	26%
Calculus conception	12%

Tabelle 9: Von Studierenden angesprochene Aspekte der Steigung in den Antworten der Items aus Tabelle 7 ($N = 65$); jeder Proband kann mehrere Aspekte angesprochen haben

spiel bei Item 2 „List all the ways the slope can be represented!“ die Studierenden *alle* Repräsentationen der Steigung nennen. Dazu gehören dann die algebraische Repräsentation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (*Algebraic ratio*), die geometrische Repräsentation als Verhältnis der Seitenlängen im Steigungsdreieck (*Geometric ratio*), und eventuell die Repräsentation als Parameter (*Parametric coefficient*). Offenbar nannten aber über die Hälfte der Studierenden mindestens eine Repräsentation nicht (siehe Tabelle 9).

Auch stellten 74% der Studierenden *keinen* Bezug zur Änderungsrate her (Kategorie *Functional property*). Stattdessen nannten sehr viele Studierende (71%) die Steigung als Kennzahl, aus der man ablesen kann, ob einer Gerade steigt oder fällt, und wie schnell sie dies im Vergleich zu einer anderen Geraden tut. Nagle u. a. (2013, S.1502) schließen daraus, dass Studierende die Steigung eher als geometrische Eigenschaft des Graphen ansahen und nicht als Proportionalitätsfaktor in einer linearen Beziehung. Weiterhin sieht man aus Tabelle 9, dass nur wenige Studierende einen Bezug zur Ableitung herstellten (12%). Hier nennen sie Nagle et al. aber keine Erklärung.

Insgesamt zeigt die Studie, dass vielen Studienanfängern die Aspekte, die wesentliche Grundlage für ein Verständnis des Ableitungsbegriffs sind, vielen Studierenden nicht mehr präsent sind. Dazu gehören insbesondere: *Algebraic ratio* und *Geometric ratio* (wichtig als Grundlage für die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und dessen Deutung als Steigung) sowie *Functional property* (wichtig für die Deutung der Ableitung als Änderungsrate).

Schwierigkeiten der Studierenden bei der Interpretation der Steigung als Änderungsrate: Die didaktische Literatur zeigt aber nicht nur, dass viele Studierende mit der Steigung zunächst keine Änderungsrate assoziieren, sondern dass viele Studierende auch nicht in der Lage sind, die Steigung adäquat als Änderungsrate im Kontext zu deuten, wenn dies die Aufgabenstellung explizit erfordert.

Bereits McDermott u. a. (1987) zeigten am Beispiel von Bewegungskontexten, dass viele Studienanfänger nicht in der Lage waren, eine Verbindung zwischen der Steigung der Funktion und ihrer Änderungsrate herzustellen. Dies ermittelten sie in einer Studie, in der Studienanfänger Aussagen zu Bewegungsvorgängen in Weg-Zeit-Diagramme, Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme und ähnliche übersetzen sollten, und umgekehrt aus solchen Diagrammen Aussagen zur Bewegung ablesen sollten (McDermott u. a., 1987, S.503). Hierzu gaben sie Studierenden einen Test aus 5 Aufgaben, in dem solche „Übersetzungsaufgaben“ gestellt wurden.

Dabei stellten sie fest, dass viele Studierende nicht die Steigung als Geschwindigkeit

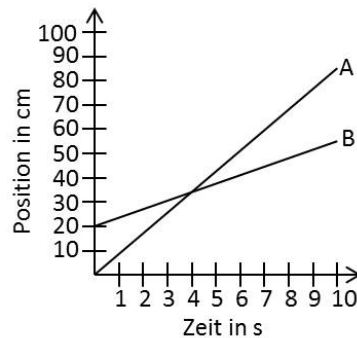


Abbildung 5: Graphik zur Veranschaulichung der Aufgabe zum Geschwindigkeitsvergleich bei gleichförmiger Bewegung aus (McDermott u. a., 1987, S.504)

ansahen, sondern die Funktionswerte selbst, sogar in linearen Kontexten. Dieser Fehler wird als *slope-height confusion* in der Literatur bezeichnet (Leinhardt u. a., 1990, S.37). Dies sei hier an einer Beispielaufgabe illustriert. Gegeben war das in Abbildung 5 gegebene Weg-Zeit-Diagramm. Zu diesem Graphen wurden folgende Aufgaben gestellt:

- a) Ist zum Zeitpunkt von $t = 2s$ die Geschwindigkeit von A größer, kleiner oder gleich der von B? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Haben A und B irgendwann mal die gleiche Geschwindigkeit? Falls ja, zu welchen Zeitpunkten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Viele Studierende (es ist keine genaue Zahl gegeben) gaben bei a) an, dass die Geschwindigkeit von B größer sei. Ebenso waren viele Studierende der Meinung, dass beide Objekte bei $t = 4s$ die gleiche Geschwindigkeit hätten. Offenbar waren viele Studierende nicht in der Lage die Steigung aus der Graphik als Geschwindigkeit zu identifizieren. Bei der Frage nach einem reinen Vergleich der Werte der Steigung treten solche Probleme weitaus weniger stark auf (Christensen u. Thompson, 2012; Planinic u. a., 2012), daher ist das Problem tatsächlich die Herstellung der Verbindung von der Steigung zur Geschwindigkeit.

Aber auch die Deutung einer als Parameter gegebenen Steigung m aus der Gleichung $y = mx + n$ bereitet Studierenden Probleme. Dies ermittelten Carlson u. a. (2010) im sogenannten *Precalculus Assessment Test*, einem Multiple-Choice Test zum Verständnis von Konzepten, die Gegenstand von Precalculus-Kursen sind. Sie stellten folgende Aufgabe:

A baseball card increases in value according to the function $b(t) = \frac{5}{2}t + 100$, where b gives the value of the card in dollars and t is the time (in years) since the card was purchased. Which of the following describe what $\frac{5}{2}$ conveys about the situation?

- I. The card's value increases \$5 every two years.
- II. Every year the card's value is 2.5 times greater than the previous year.
- III. The card's value increases $\frac{5}{2}$ dollars every year.

Nur I.	Nur II.	Nur III.	Nur I. und III.	I., II. und III.	Keine Antwort
6%	39%	21%	20%	13%	1%

Tabelle 10: Antworten der Studierenden zum Item aus dem PCA zur Interpretation der Steigung aus der Gleichung ($N = 672$)

Die Antwortalternativen samt ihrer Auswahlhäufigkeit unter den getesteten Probanden (Studierende von Precalculus-Kursen in den USA) sind in Tabelle 10 dargestellt (die richtige Antwort ist fett hervorgehoben). 40% der Studierenden nannten keine richtige Interpretation der Steigung (Antwortoptionen „Nur II.“ oder „Keine Antwort“). Nur 20% identifizierten richtig beide korrekten Interpretation.

Besonders schwierig ist die Interpretation von Werten von Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn Δx nicht ganzzahlig ist. Dies haben Byerley u. a. (2016) in einer Studie gezeigt. Sie untersuchten, wie Lehrer den Begriff der Steigung inhaltlich verstehen. Dazu stellten sie 144 Mathematiklehrern im Sommer 2012 und 157 Mathematiklehrern im Sommer 2014 folgende aus zwei Teilen bestehende Aufgabe aus dem sogenannten MMTsm-Test (*Meaning for Mathematics Teaching Secondary Math*, (Byerley u. a., 2016, S.599)). Der Aufgabenteil A war:

Part A:

Mrs. Samber unterrichtete in einer Einführungsstunde den Begriff der Steigung. In der Stunde dividierte sie 8.2 durch 2.7 um die Steigung der Gerade zu berechnen und erhielt 3.04.

Vermitteln Sie Mrs. Sambers Schülern, was 3.04 bedeutet.

Auf der nächsten Seite stand dann folgender zweiter Aufgabenteil B:

Part B:

„Mrs. Samber unterrichtete in einer Einführungsstunde den Begriff der Steigung. In der Stunde dividierte sie 8.2 durch 2.7 um die Steigung der Gerade zu berechnen und erhielt 3.04.

Ein Schüler erklärte die Bedeutung der 3.04 wie folgt. „Es bedeutet, dass wenn man x um 1 ändert, sich y um 3.04 ändert.“ Mrs. Samber fragte: „Was würde 3.04 bedeuten, wenn x sich um einen anderen Wert als 1 ändert?“

Was wäre eine gute Antwort auf Mrs. Sambers Frage?

Im Sommer 2012 entwickelten Byerley u. a. (2016) auf Basis der Antworten Kategoriensysteme, mit denen sie dann die Antworten der Probanden vom Sommer 2014 analysierten. Eine Beschreibung der Antwortkategorien zu Aufgabenteil A befindet sich in Tabelle 11.

Die Bedeutungen der in Tabelle 11 dargestellten Level sind laut Byerley u. a. (2016, S.600) die Folgenden:

Level	Antworten
A3 „relative size“	Die Lehrer sagten, dass wenn x sich um irgendeine Größe ändert, ändert sich y um das 3.04-fache.
A2a „chunky“	Die Lehrer gaben sinngemäß eine der folgenden Antworten: • Bei jeder Änderung von x um 1 ändert sich y um 3.04. • Bei jeder Änderung um 2.7 in x ändert sich y um 8.2.
A2b „chunky-graphical“	Die Lehrer beschrieben graphisch, dass die Steigung Informationen darüber liefert, wie man sich horizontal oder vertikal bewegen muss, z.B. • Falls x um 1 nach rechts geht, geht y um 3.04 nach oben. • Falls sich x um 2.7 bewegt, wächst y um 8.2. • Die Steigung sagt uns, dass man sich um 1 horizontal und um 3.04 vertikal bewegt.
A1 „memorized“	Die Lehrer gaben sinngemäß eine der folgenden Antworten: • Der Lehrer vermittelte, dass 3.04 das Ergebnis einer Rechnung ist. • Der Lehrer benutzte Phrasen wie „mittlere Änderungsrate“, „konstante Änderungsrate“ oder „Steilheit“ ohne die Frage zu beantworten, wie die 3.04 im Zusammenhang mit Änderungen von x und y steht. • Der Lehrer sagte einfach <i>rise over run</i> ohne die Änderungen zu beschreiben.

Tabelle 11: Kategorienbeschreibungen zur ersten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.599) die Steigung $\frac{8.2}{2.7} = 3.04$ zu interpretieren.

- Antworten in Level A3 zeigen ein multiplikatives Verständnis der Steigung bzw. des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.04$.
- Bei Level A2a und A2b nutzten die Probanden feste Einheiten wie 1 oder 2.7 und erklärten dann die Verbindung zwischen der Änderung von x zu der von y über wiederholte Addition. Byerley et al. nennen das *additive or chunky meaning of slope*. Die Erklärungen in Level A2b sind zusätzlich an ein Koordinatensystem gebunden.
- Level A1 bedeutet, dass eine allgemeine Bedeutung der Steigung angegeben wurde, die allerdings auswendig gelernt wirkte, weil kein Zusammenhang zwischen der Steigung 3.04 und den Änderungen der Größen x und y angegeben wurde.

Alle anderen Antworten wurden in die Kategorie A0 einsortiert. Wurden mehrere Antworten gegeben, wurde das höchste Level zugeordnet (Byerley u. a., 2016, S.600).

Level	Anteil
A3 „relative size“	1.9%
A2a „chunky “	26.1%
A2b „chunky-graphical“	49.7%
A1 „memorized “	17.8%
A0 „other“	2.5%
Keine Antwort	1.9%

Tabelle 12: Ergebnis der Kategorisierung der Antworten der Lehrer zur ersten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.601) zur Interpretation der Steigung $\frac{8.2}{2.7} = 3.04$, ($N = 157$)

Die Ergebnisse zu den von den Lehrern im Sommer 2014 genannten Interpretationen der Steigung $\frac{8.2}{2.7} = 3.04$ sind in Tabelle 12 zu sehen. Aus dieser sieht man, dass viele Lehrer hier eine Interpretation der Steigung in der Form ‚Wenn man x um eine Einheit/2.7 Einheiten erhöht, erhöht sich y um ... Einheiten‘ angaben (Kategorien A2a und A2b). Diese lässt sich nicht direkt auf beliebige $\Delta x \neq 1$ verallgemeinern, wenn Δx kein ganzzahliges Vielfaches dieser Einheit ist. Allerdings ist hier noch nicht klar, ob die Lehrer nicht trotzdem eine für beliebige Δx adäquate Interpretation der Steigung $3.04 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ angeben konnten. Dies zeigt sich erst durch Aufgabenteil B, in dem eine Interpretation der Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.04$ für $\Delta x \neq 1$ angegeben werden sollte.

Das zu Aufgabenteil B entwickelte Kategoriensystem und die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 13. Man sieht hier, dass die meisten Lehrer hier keine adäquate Interpretation der Steigung für ein beliebiges Δx angeben konnten.

Kategorie	Beschreibung	Anteil
„Akzeptable Beschreibung der Bedeutung der 3.04“	Der Lehrer gab eine akzeptable mathematische Antwort, was 3.04 bedeutet, z.B. „3.04 ist das Verhältnis“ oder „3.04 sagt uns, um wievielfach Δy größer ist als Δx “.	22.2%
„Explizite Rechenanweisung zur Bestimmung von Δy “	Der Lehrer stellte heraus, dass man zur Bestimmung der Änderung in y die Änderung von x mit 3.04 multiplizieren muss.	26.1%
„Vage Rechenanweisung zur Bestimmung von Δy “	Der Lehrer gab eine Rechenanweisung zur Bestimmung von Δy , allerdings ohne Nennung von Δy , z.B. „multipliziere es mit 3.04“.	15.9%
Andere inadäquate Antwort		30.6%

Tabelle 13: Kategorien der zweiten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.600) zur Interpretation der Steigung 3.04 bei Zuwächsen von $\Delta x \neq 1$ und Ergebnisse der Lehrer 2014 ($N = 157$)

In Tabelle 14 sind nun die Ergebnisse beider Aufgaben in Form einer Kreuztabelle dargestellt. Während viele Lehrer eine adäquate Interpretation der Steigung unter Bezugnahme auf feste Einheiten (1 oder 2.7) über wiederholte Addition angeben konnten („Wenn x um eine oder 2.7 Einheiten wächst wächst y um ... Einheiten), gelang den meisten von diesen eine Interpretation für beliebiges Δx nicht. Als Ursache nannten

Level	„Akzeptable Beschreibung der Bedeutung der 3.04“	„Explizite Rechenanweisung zur Bestimmung von Δy “	„Vage Rechenanweisung zur Bestimmung von Δy “	„Andere inadäquate Antwort“	Keine Antwort
A3 „relative size“	1	2	0	0	0
A2a/A2b „chunky“	30	31	18	40	0
A1 „memorized“	2	8	6	8	4
A0 „other“	2	0	0	0	1
No response	0	0	1	0	3

Tabelle 14: Kreuztabelle der Kategorien der Antworten aus den Aufgabenteilen A und B aus Byerley u. a. (2016) ($N = 157$), angegeben in absoluten Zahlen

Byerley et al., dass man bei dieser Art des Denkens eventuell die Steigung direkt mit dem Zuwachs Δy bei gegebener Einheit des Zuwachses im Argument (z.B. $\Delta x = 1$) identifiziert (Byerley u. a., 2016, S.601).

Insgesamt zeigt die Studie von Byerley u. a. (2016), dass es eine besondere Schwierigkeit darstellt, Steigungen der Form $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für beliebige $\Delta x \neq 1$ zu interpretieren. Viele der befragten Lehrer waren bei der Interpretation der Steigung an eine fest vorgegebene Einheit beim Zuwachs Δx (z.B. $\Delta x = 1$) gebunden. Dies ist zum Verständnis des Ableitungsbegriffs problematisch, weil dort im Differenzenquotienten der Nenner beliebig klein wird (Byerley u. a., 2016, S.603). Ist man bei der Interpretation der Steigung an die feste Einheit $\Delta x = 1$ gebunden, kann man Differenzenquotienten der Form $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h < 1$ nicht inhaltlich deuten.

Eine Ursache für das Gebundensein an feste Einheiten des Zuwachses Δx bei der Interpretation von Steigungen als Änderungsraten kann, wie bereits gesagt, laut Byerley u. a. (2016, S.601) ein Verständnis der Änderungsrate als Zuwachs der abhängigen Variablen bei gegebenem Zuwachs der unabhängigen Variablen um eine Einheit sein. Dies zeigte Thompson (1994) auch empirisch in einer Studie zur Entwicklung des Verständnisses vom Geschwindigkeitskonzept. In dieser führte er mit der zehnjährigen Schülerin JJ aus einer 5.Klasse ein über 8 Phasen zu je 55 Minuten dauerndes, klinisches Interview mit Hilfe einer von ihm konzipierten Computerumgebung durch. Innerhalb dieses Interviews versuchte Thompson (1994) aber nicht nur die Vorstellungen von JJ zum Geschwindigkeitsbegriff zu ermitteln, sondern gleichzeitig diese mit Hilfe gezielter Aufgabenstellungen weiterzuentwickeln (und diese Weiterentwicklung wiederum zu analysieren).

Zu Beginn des Experiments stellte Thompson (1994, S.198) folgende Aufgabe:

Eine Schildkröte läuft eine Strecke von 100 Fuß mit 20 Fuß pro Sekunde hin und 40 Fuß pro Sekunde zurück. Mit welcher Geschwindigkeit muss das Kaninchen laufen, wenn es immer gleich schnell ist, und die beiden sich am Ende treffen wollen?

Als Antwort gab JJ das arithmetische Mittel 30 Fuß pro Sekunde an und sagte, dass bis zum Treffen $3\frac{1}{3}$ s nötig seien, was sie wie folgt begründete (Thompson, 1994, S.198):

„Because there are three 30s in 100m and 10 is $\frac{1}{3}$ of 30, so $3\frac{1}{3}$ s.“

Sie addierte also die Geschwindigkeiten in Form von „Geschwindigkeitslängen“ auf (Bezeichnung *speed-length* von Thompson (1994, S.198)), und ermittelte deren nötige Anzahl um auf 100 Fuß zu kommen. JJ verstand also die Geschwindigkeit als Weglänge zu gegebener Zeiteinheit (wie weit kommt man jede Sekunde). In diesem Stadium war es ihr nicht möglich, Geschwindigkeiten zu beliebig vorgegebenen Zeiteinheiten anzugeben (sie hatte ein Problem, wenn die Gesamtlänge nicht in einzelne „Geschwindigkeitslängen“ aufteilbar war, z.B. bei einer Distanz von 100m und $3\frac{1}{2}$ Sekunden, (Thompson, 1994, S.201)). Erst im späteren Verlauf des Interviews (das hier aus Platzgründen nicht im Detail dargestellt wird) begann sie die bei der Bewegung aufgebrauchte Zeit als eigene Variable zu sehen, die beliebige Größen annehmen kann, und die Geschwindigkeit als konstantes Verhältnis zwischen dem zurückgelegten Weg und der dafür benötigten Zeit (Thompson, 1994, S.224)).

Aus der Studie von Thompson (1994)) sieht man am Beispiel der Geschwindigkeit, dass mitunter Änderungsraten nicht als Verhältnis zwischen zwei variierenden Größen verstanden werden, sondern als Zuwachs der abhängigen Variable y bei gegebener Erhöhung der Variablen x um eine Einheit. In diesem Fall ist man bei der Interpretation von Steigungen und Änderungsraten in Kontexten stets an eine vorgegebene Einheit der unabhängigen x -Variablen gebunden. Folglich gibt es dann Schwierigkeiten inhaltlichen Deutung eines Zusammenhangs $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für ein beliebiges $\Delta x (\neq 1)$.

Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung auf rein graphischer Ebene: Neben diesen Schwierigkeiten bei der Deutung der Steigung als Änderungsrate und beim Verständnis des zugehörigen Ratenbegriffes sind in der Literatur auch Schwierigkeiten beim Umgang mit Steigungen linearer Funktionen auf der rein graphischen Ebene dokumentiert. Während die Bestimmung von Steigungen gegebener Funktionsgraphen im Standardkoordinatensystem für viele Studierende kein Problem darstellt (wurde von uns im Vortest ermittelt, 73.4% der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften konnten das, siehe Kapitel 6.5.3), treten bei vielen Studierenden gravierende Schwierigkeiten bei anderer Skalierung der Achsen auf.

Dies zeigten Zaslavsky u. a. (2002) in einer Studie, die im Folgenden genauer beschrieben wird. Sie legten 124 Probanden (28 Elftklässler, 28 secondary pre-service teachers, 50 Mathematiklehrer, 14 Mathematikdidaktiker, 4 Mathematiker (Zaslavsky u. a., 2002, S.122)) eine Graphik der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ in zwei Maßstäben vor (siehe Abbildung 6). Dazu stellten sie drei Fragen (Zaslavsky u. a., 2002, S.121):

1. Was ist die Steigung der Funktion f ?
2. Halbiert der Graph von f den Winkel zwischen den Achsen? Wie wissen Sie das?
3. Können Sie den Tangens des Winkels zwischen Graph und x -Achse bestimmen? Falls ja, was ist der Wert? Wie haben Sie ihn berechnet? Falls nicht, warum nicht?

Zwölf der Probanden wurden auch noch über ihre Antworten interviewt (Zaslavsky u. a., 2002, S.122). Interessant ist natürlich nur der rechte Graph in Abbildung 6, weshalb jetzt nur noch über diesen gesprochen wird.

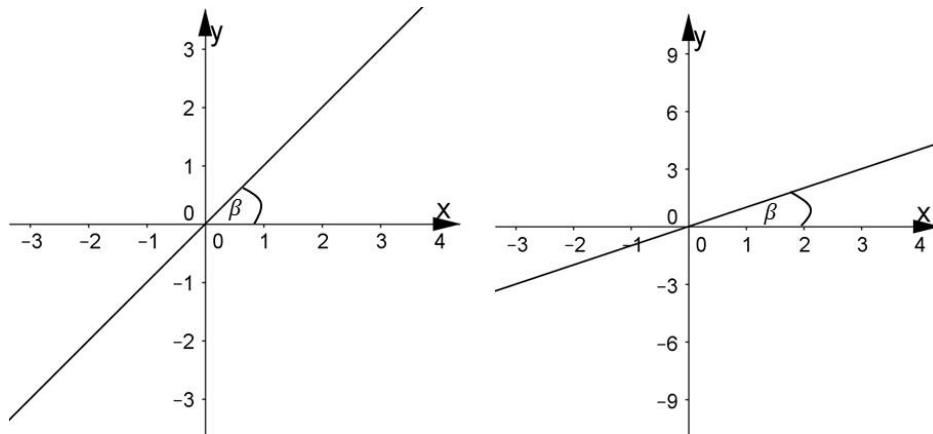


Abbildung 6: Graphiken zur Steigungs- und Winkelbestimmung aus Zaslavsky u. a. (2002, S.121)

Bei der Analyse der Antworten identifizierten Zaslavsky u. a. (2002, S.122) zwei verschiedene Perspektiven, die sie als *analytische* und als *visuelle* Perspektive bezeichnen. Probanden mit einer analytischen Perspektive bestimmten die Steigung des rechten Graphen aus Abbildung 6 mit $m = 1$, den Winkel mit 45° (denn dieser ist ja über $m =: \tan \beta$ definiert) und bejahten natürlich, dass die Gerade den Winkel zwischen den Achsen halbiert (Zaslavsky u. a., 2002, S.124). Probanden mit der visuellen Perspektive bestimmten als Wert der Steigung mit $m = \frac{1}{3}$, waren der Meinung, dass die Gerade den Winkel nicht halbiert und ermittelten den Winkel β über $\tan \beta = \frac{1}{3}$ (das ergibt sich z.B. aus den geometrischen Längen des Steigungsdreiecks (Zaslavsky u. a., 2002, S.124)).

Neben diesen beiden Perspektiven gab es auch Probanden mit Mischperspektiven, die Zaslavsky et al. mit M_1 und M_2 bezeichneten (Zaslavsky u. a., 2002, S.124). Bei der Perspektive M_1 war die Steigung eine Eigenschaft der Funktion (also $m = 1$). Am Bild wurde aber festgestellt, dass der Winkel nicht halbiert wurde. Daraufhin trat bei der Bestimmung des Winkels ein kognitiver Konflikt auf, weil die Gerade die Achsen ja nicht halbierte, sich aber mit $1 = \tan \beta$ ein Winkel von 45° ergeben würde (Zaslavsky u. a., 2002, S.124). Bei der Mischperspektive M_2 wurde die Steigung ebenfalls mit $m = 1$ bestimmt, die Gerade nicht als Winkelhalbierende angesehen und der Winkel über $\tan \beta = \frac{1}{3}$ bestimmt. Dabei trat kein kognitiver Konflikt auf, weil die Steigung als Eigenschaft der Funktion, der Winkel aber rein geometrisch betrachtet wurde (Zaslavsky u. a., 2002, S.124).

Analytische Perspektive	Mischperspektive M_1	Mischperspektive M_2	Visuelle Perspektive
20%	41%	33%	6%

Tabelle 15: Perspektiven auf das Konzept der Steigung in Zaslavsky u. a. (2002, S.124) ($N = 124$)

Die Gesamtverteilung der Perspektiven ist in Tabelle 15 zu sehen. In dieser sieht man sehr schön, dass die Perspektiven sehr heterogen waren. Dabei traten Mischformen wesentlich häufiger auf als die rein analytische und erst recht als die rein visuelle Perspektive.

	Analytische Perspektive A	Mischperspek- tive M_1	Mischperspek- tive M_2	Visuelle Perspektive V
Highschool Schüler	9	9	7	3
Preservice tea- chers	9	14	5	0
Lehrer	2	22	22	4
Mathematik- didaktiker	3	5	5	0
Mathematiker	1	1	1	1

Tabelle 16: Perspektiven der einzelnen Probandengruppen auf das Konzept der Steigung in Zaslavsky u. a. (2002, S.133), ($N = 124$)

Auch die Verteilung der Perspektiven in den einzelnen Probandengruppen war sehr heterogen (siehe Tabelle 16). Insbesondere die Heterogenität bei den Mathematikern in Tabelle 16 war für mich überraschend. Denn bei der analytischen Geometrie als Teil der Wissenschaft Mathematik wird zumindest im öffentlichen Diskurs nur die analytische Perspektive eingenommen (bei der Definition des Winkels über das Skalarprodukt, wie an der Universität üblich, ergibt sich immer diese Perspektive). Dennoch sollten Mathematiker natürlich beide Perspektiven kennen und unterscheiden können.

Insgesamt zeigt die Studie, dass Studierende auf das Konzept der Steigung einer linearen Funktion sehr unterschiedliche Perspektiven haben können: analytisch als Eigenschaft der Funktion und visuell als Eigenschaft der Geraden in der Ebene. Hierbei können bei unterschiedlicher Skalierung der Achsen kognitive Konflikte entstehen. Außerdem zeigt die Studie, dass bei der Einnahme einer rein visuellen Perspektive Steigungen eventuell nicht richtig bestimmt werden, wenn bei den Koordinatenachsen jeweils unterschiedliche Abstände für Einheiten gewählt werden, was bei Funktionen in der Ökonomie häufig der Fall ist (Bsp.: Kostenfunktion bei teuren Produkten: hier wäre eine Einheit von 1€ auf der y -Achse sicher sehr unpraktisch).

4.1.2 Schwierigkeiten beim Verständnis des Differenzenquotienten

Zu Verständnisschwierigkeiten von Studierenden beim Konzept des Differenzenquotienten, der in der mathematikdidaktischen Literatur auch als mittlere Änderungsrate bezeichnet wird, gibt es relativ wenige Forschungsergebnisse. Daher musste hier leider auf eine Studie von Malle (2003, S.57) zurückgegriffen werden, deren Methodik nicht ganz klar ist. Er führte mit 220 österreichischen Schülern in der Oberstufe eine Studie zum Verständnis des Differenzenquotienten durch. In dieser stellte er den Schülern 12 Fragen, wobei in Malle (2003) nur folgende vier Fragen abgebildet sind (Malle, 2003, S.59):

Frage 1a:

Was versteht man unter dem Differenzenquotienten?

Frage 2a: Kreuze an, welche Deutungen des Ausdrucks $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ richtig sind:

- Der Ausdruck gibt das Verhältnis der Funktionswerte (y -Werte) zur Änderung der Argumente (x -Werte) im Intervall $[a; b]$ an.
- Der Ausdruck gibt die Änderung der Funktionswerte im Intervall $[a; b]$ an.
- Der Ausdruck gibt den Unterschied zwischen den Funktionswerten und den Argumenten im Intervall $[a; b]$ an.
- Der Ausdruck gibt die mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit im Intervall $[a; b]$ an.
- Der Ausdruck gibt die Ableitung der Funktion im Intervall $[a; b]$ an.
- Der Ausdruck gibt an, wievielfach stärker sich die Funktionswerte im Intervall $[a; b]$ ändern als die Argumente.

Frage 4:

Skizziere den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $[0; 4]$.

- Um wieviel wächst $f(x)$, wenn x von 0 auf 1 erhöht wird? Um wieviel wächst $f(x)$, wenn x von 3 auf 4 erhöht wird?
- Um wieviel wächst $f(x)$ im Mittel im Intervall, wenn x um 1 erhöht wird?

Frage 6:

Was gibt das Vorzeichen des Differenzenquotienten an? Skizze!

Fragen 1 und 6 sind etwas problematisch formuliert, weil es „den Differenzenquotienten“ ja nicht gibt. Dies muss man bei der Interpretation der Ergebnisse bedenken. Die Antworten wurden von Malle nach dem Grad der Richtigkeit kategorisiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 17 dargestellt. Hierbei gibt es jedoch keine Ankerbeispiele, sodass nicht klar ist, wann eine Antwort in die Kategorien „teilweise richtig“ oder „richtig, aber keine Antwort auf die Frage“ eingeordnet wurde (das Bewertungsschema ist nicht klar!).

	richtig	teilweise richtig	richtig, aber keine Antwort auf die Frage	falsch	Keine Antwort
Frage 1a	7.3%	5.0%	10.9%	24.6%	52.3%
Frage 2a	2.3%	64.1%	0%	25.0%	8.6%
Frage 4a	39.1%	15.4%	1.4%	17.3%	26.8%
Frage 4b	12.3%	1.8%	0%	28.2%	57.8%
Frage 6	6.8%	29.5%	3.2%	24.1%	36.4%

Tabelle 17: Ergebnisse der Schüler auf die Fragen in Malle (2003, S.57) zum Verständnis des Differenzenquotienten, kategorisiert nach dem Grad der Richtigkeit ($N = 220$)

Aus Tabelle 17 sind folgende Ergebnisse erkennbar:

Zu Frage 1a: Nur 7.3% Schüler konnten Frage 1a richtig beantworten und damit eine adäquate Deutung des Differenzenquotienten angeben. Eine Ursache für den großen Anteil in der Kategorie „keine Antwort“ könnte aber die etwas zu allgemeine Formulierung der Frage sein. Oft hielten laut Malle (2003, S.59) die Schüler den Differenzenquotienten für die Ableitung oder die Steigung der Tangente (hier ist keine Zahl angegeben).

Zu Frage 2a: Nur 5 der befragten 220 Schüler konnten genau die 3 richtigen Deutungen (1,4,6) als solche identifizieren. Außerdem wurden laut Malle (2003, S.59) sehr viele falsche Deutungen angekreuzt (es ist keine genaue Zahl gegeben).

Zu Fragen 4a und 4b: Bemerkenswert viele Schüler (45.5%, aus den Kategorien „richtig, aber keine Antwort auf die Frage“, „falsch“ oder „keine Antwort“) konnten den ersten Frageteil zur absoluten Änderung nicht einmal teilweise beantworten. Einige berechneten stattdessen den Differenzenquotienten oder die Ableitung Malle (2003, S.60).

Die Bestimmung der ‚Änderung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Mittel im Intervall $[0; 4]$, wenn x um 1 erhöht wird‘ fiel noch schwerer: nur 14.1% hatten sie richtig oder teilweise richtig ermittelt. Offenbar assoziierten die Schüler bei der Bestimmung dieser „mittleren Änderung“ nicht den Differenzenquotienten, der zu einem korrekten Ergebnis führen würde. Stattdessen wurden verschiedenste arithmetische Mittel von Funktionswerten der Funktion f berechnet (es ist kein Beispiel angegeben).

Zu Frage 6: Auch nur sehr wenige Schüler (6.8%) konnten eine adäquate Deutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten nennen oder an einer Skizze illustrieren. Hierbei traten folgende falsche Deutungen auf (Malle, 2003, S.59):

- Es gibt die Richtung an, in welche eine Kurve geöffnet ist (illustriert mit zwei Parabeln).
- Es gibt den Funktionswert an der Stelle 0 an (illustriert mit zwei Parabeln).
- Es gibt an, ob die Funktion ober- oder unterhalb der x -Achse verläuft.
- Es gibt Auskunft über den Quadranten, in dem sich der Graph befindet (zum Beispiel positiv bei Graph im ersten Quadranten, negativ bei Graph im vierten Quadranten)

Außerdem kannten nur 29% die Bezeichnung „mittlere Änderungsrate“ für den Differenzenquotienten (Malle, 2003, S.59). Dies könnte eine Erklärung sein, weshalb bei der Aufgabe zur Bestimmung der mittleren Änderung pro Einheit im Intervall $[0; 4]$ so viele Schüler verschiedene arithmetische Mittel verwendeten: sie ließen sich vielleicht durch das Wort „mittlere“ in der mittleren Änderung leiten.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse von Malle, dass nur wenige Schüler ein Verständnis des Differenzenquotienten hatten. Fehlvorstellungen, die sich zeigten, waren

1. die Verwechslung des Differenzenquotienten mit der Ableitung und
2. die Ansicht, dass der Differenzenquotient eine absolute Änderung angibt.

Außerdem assoziierten die Probanden von Malle bei der rechnerischen Bestimmung der mittleren Änderung pro Einheit einer Funktion f in einem Intervall nicht den Differenzenquotienten, sondern verwendeten verschiedenste arithmetische Mittel von Funktionswerten der Funktion f . Leider ist in Malle (2003) nicht angegeben, wie viele Probanden das betraf und welche arithmetischen Mittel verwendet wurden. Hier zeigt wieder einmal der Precalculus-Assessment Test (PCA), der das Verständnis von wichtiger Konzepte aus Precalculus-Kursen überprüft (Carlson u. a., 2010, S.113), Genaueres. In diesem befand sich ein Item zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Autos:

The distance, s (in feet), traveled by a car moving in a straight line is given by the function $s(t) = t^2 + t$, where t is measured in seconds. Find the average velocity for the time period from $t = 1$ to $t = 4$.

Ergebnis	Weg zum Ergebnis	Fehler
$5 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)}{4}$	Verwechslung von Durchschnittsgeschwindigkeit und durchschnittlicher Weglänge
$6 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)-s(1)}{4-1}$	keine (richtige Antwort)
$9 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)-s(1)}{2}$	Vermischung mit arithmetischem Mittel
$10 \frac{m}{s}$	$\frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}$	Verwendung des arithmetischem Mittels der Zahlen $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ und $s(4)$
$11 \frac{m}{s}$	$\frac{s(1)+s(4)}{2}$	Verwendung des arithmetischem Mittels $s(1)$ und $s(4)$

Tabelle 18: Erklärung der falschen Ergebnisse des Vortests der Aufgabe aus dem PCA zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate (Carlson u. a., 2010, S.136)

Die angebotenen Distraktoren mit den zugehörigen Rechenwegen sind in Tabelle 18 dargestellt. Sie wurden von Carlson u. a. (2010, S.136) in einer Pilotierungsphase, in der die Frage offen gestellt wurde, aus den Antworten ermittelt.

$5 \frac{m}{s}$	$6 \frac{m}{s}$	$9 \frac{m}{s}$	$10 \frac{m}{s}$	$11 \frac{m}{s}$
13%	15%	14%	38%	19%

Tabelle 19: Verteilung der Antworten bei der Aufgabe zur Berechnung der mittleren Änderungsrate im PCA (Carlson u. a., 2010, S.136) ($N = 1501$)

Die Ergebnisse über alle Teilnehmer, denen diese Aufgabe vorgelegt wurde (verschiedenste Universitäten der USA, $N = 1501$) sind in Tabelle 19 dargestellt, wobei die richtige Antwort fett hervorgehoben ist. Aus dieser sieht man, dass nur wenige Studierende die Durchschnittsgeschwindigkeit korrekt bestimmen konnten. Offenbar verwendeten viele Probanden arithmetische Mittel von Funktionswerten der Funktion $s(t)$ wie $\frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}$ in 38% der Fälle.

Nun wäre es natürlich wünschenswert Ursachen für diesen Fehler zu finden. Hierzu gibt es in Carlson u. a. (2010) leider keine weiteren Ausführungen. Eine mögliche Erklärung ist, dass die Probanden mit dem Begriff ‚average velocity‘ durch das *average* eine Durchschnittsbildung und damit ein arithmetisches Mittel assoziierten (und dann ist das Mittel $\frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}$ erstmal naheliegend).

Insgesamt deuten die Studien darauf hin, dass bei Studienanfängern *möglicherweise* kein ausreichendes Verständnis des Differenzenquotienten vorhanden ist. Denn Malle (2003) zeigte in seiner Studie, dass von 220 befragten Schülern nur 7.3% sagen konnten, was man unter dem Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ versteht. Auftretende Fehlvorstellungen in der Studie waren, dass der Differenzenquotient eine absolute Änderung angibt oder die Ableitung ist. Weiterhin assoziierten die dortigen Probanden in einer Aufgabe zur rechnerischen Bestimmung der mittleren Änderung pro Einheit einer Funktion f in einem Intervall oft *nicht* den Differenzenquotienten. Stattdessen verwendeten viele ein arithmetisches Mittel von Funktionswerten der Funktion f . Ein ähnliches Phänomen wurde auch bei Carlson u. a. (2010) bei einer Aufgabe zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit im Precalculus-Assessment Test deutlich. Dies alles und die Tatsache, dass bei Malle nur 29% die Bezeichnung des Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate kannten, spricht dafür, dass man *nicht erwarten kann*, dass Studienanfänger mit der inhaltlichen Deutung des Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate vertraut sind.

Allerdings sind die Ergebnisse hier mit Vorsicht zu sehen, da das methodische Vorgehen in der Studie von Malle (2003) nicht klar ist (und vielleicht war vielen Probanden bei Malle einfach nur die Begrifflichkeit der mittleren Änderung in einem Intervall bzw. die der mittleren Änderungsrate nicht klar).

4.2 Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle

Die zweite Ebene des in Kapitel 3 entwickelten Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, basierend auf einem Modell zum Verständnis der Ableitung von Zandieh (2000), ist die Ebene *Grenzwert* (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). In ihr geht es um das Verständnis der Ableitung an einer Stelle x_0 und des für deren Definition notwendigen Verständnis des Grenzübergangs vom Differenzen- zum Differentialquotienten (inklusive der Frage nach der Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten). Auch zu dieser Ebene sind in der Literatur zahlreiche Verständnisschwierigkeiten dokumentiert. Diese werden in diesem Kapitel genauer dargestellt.

In einem ersten Unterkapitel werden einige in der Literatur dokumentierte Probleme beim Verständnis des Konzepts des Grenzwertes im Allgemeinen genannt, die dann auch beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung eine Rolle spielen. Hier kann ich mich aus Platzgründen nur auf ausgewählte Studien beschränken, auf die ich später in der Dissertation wieder Bezug nehme. Eine ausführliche Darstellung zu Schwierigkeiten beim Verständnis des Grenzwertbegriffs im Allgemeinen befindet sich in der Dissertation von Laura Ostsieker (Ostsieker, 2011).

In einem zweiten Unterkapitel werden in der Literatur dokumentierte Verständnisschwierigkeiten beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung präsentiert. Beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle auf graphischer Ebene kommen zusätzlich Probleme mit dem analytischen Tangentenbegriffs ins Spiel. Die hierzu in der Literatur dokumentierten Schwierigkeiten werden schließlich im letzten Unterkapitel dieses Kapitels dargestellt. Konsequenzen für die Lehre werden am Ende des Gesamtkapitels zu Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffs diskutiert (in Kapitel 4.5).

4.2.1 Schwierigkeiten beim Verständnis des Grenzwertbegriffs

Zum Verständnis des Grenzwertbegriffs gibt es in der Literatur sehr viele Studien, die hier nicht alle dargestellt werden können. Daher wurde eine Auswahl getroffen (für eine ausführlichere Darstellung von Verständnisschwierigkeiten zum Grenzwertbegriff sei auf die Dissertation von Ostsieker (2011) verwiesen).

Im ersten Teil dieses Unterkapitels werden drei Studien zu bekannten Schwierigkeiten von Studierenden beim Verständnis von Grenzwerten und Grenzprozessen vorgestellt (Davis u. Vinner, 1986; Williams, 1991; Marx, 2013). In ihnen wurde gezeigt, dass Studierende über zahlreiche Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff verfügen, die sich auch durch Instruktion nicht leicht überwinden lassen.

Im zweiten Teil dieses Unterkapitels werden noch zwei Studien zu dem speziellen Problem der Verwendung von Grenzwerten für Approximationen dargestellt, denn diese ist für Studierende der Wirtschaftswissenschaften sehr wichtig für das Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem Zusammenhang zum mathematischen Konzept über lineare Approximation (siehe Kapitel 3.3).

Studien zu typischen Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff und die Schwierigkeit von deren Überwindung:

Eine sehr prominente Studie zu Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff ist die von Davis u. Vinner (1986), die Vorstellungen von 15 Schülern einer 12.Klasse zum Grenzwertbegriff bei Folgen nach dessen expliziter Behandlung untersuchten. Dies war noch zu einer Zeit, in der der Grenzwertbegriff samt formaler Definition Schulstoff war. Im Unterricht der Schüler wurde dabei sehr viel Wert auf die Entwicklung der Grenzwertdefinition gelegt. Bei deren Erarbeitung wurde induktiv auf der Basis von vorher betrachteten Beispielen von Folgen vorgegangen (Davis u. Vinner, 1986, S.288). Anhand dieser Beispiele wurden Vorschläge für Definitionen von Schülern diskutiert und eventuell revidiert.

Dieses Vorgehen wurde in Davis u. Vinner (1986) an mehreren Beispielen illustriert. Ein Beispiel war folgende Definition (Davis u. Vinner, 1986, S.288):

„Der Grenzwert L einer Folge ist die Zahl, der sich die Folgenglieder a_n einer Folge nähern.“

Diese Definition wurde dann bei der Beispielfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 := 0,9$, $a_2 := 0,99$, ..., $a_n := 0,999 \dots 9$ überprüft. Offenbar erfüllen auch 1066, 1685, 1732 oder 10^{200} die Bedingung der Zahl L dieser Definition. Daraufhin wurde sie verworfen (Davis u. Vinner, 1986, S.288). Ein weiteres Beispiel war folgende Definition (Davis u. Vinner, 1986, S.288):

„Der Grenzwert L ist die kleinste Zahl, sodass $a_n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$.“

Diese Definition wurde an der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 := 0,1$, $a_2 := 0,01$, $a_3 = 0,002$, ... getestet, und wiederum verworfen (Davis u. Vinner, 1986, S.289).

Aus diesem Vorgehen ergab sich schließlich die korrekte Definition des Grenzwertes einer Folge in drei verschiedenen Formulierungen (eine genaue Darstellung, wie man zu diesen Definitionen kam, fehlt in Davis u. Vinner (1986)):

1. die formale Definition mit den Quantoren

2. eine geometrische Version der Definition (Veranschaulichung durch Fehlerstreifen)
3. eine verbalisierte Form der formalen Definition in folgender Form: Eine Zahl L heißt Grenzwert einer Folge (a_n) , wenn bei vorgegebener Fehlertoleranz ε fast alle Folgenglieder (d.h. alle bis auf endlich viele) bis auf die Fehlertoleranz ε gleich L sind. Dabei kann die Anzahl der $a_n \neq L$ größer werden, wenn die vorgegebene Fehlertoleranz ε kleiner ist.

Anschließend wurde auch mit der Definition gearbeitet (z.B. Beweis der Eindeutigkeit des Grenzwertes, Nachweis oder Widerlegung der Grenzwerteigenschaft mit der Definition an Beispielen, Beweis der Grenzwertsätze (Davis u. Vinner, 1986, S.291)). Danach zeigten laut Davis u. Vinner (1986, S.292-293) die 15 Schüler in einem Test, dass sie

1. eine korrekte Definition des Grenzwertes einer Folge angeben konnten,
2. diese Definition an Beispielen illustrieren konnten,
3. Fehlerhafte Definitionen durch Gegenbeispiele von Folgen widerlegen konnten,
4. Sätze über Grenzwerte von Funktionen beweisen konnten (Eindeutigkeit des Grenzwertes, Grenzwertsätze).

Dies alles fand im Schuljahr 1984-1985 statt (in Davis u. Vinner (1986) ist keine genauere Zeitangabe gegeben).

Nach den Sommerferien im Jahr 1985 wurde den Schülern erneut ein Test vorgelegt, in dem sie eine Beschreibung des Grenzwertbegriffes in intuitiver Form und eine in formaler Form angeben sollten. Die genaue Aufgabenstellung war die folgende:

I need to know how much you remember about the concept of limit of a sequence. Please write a few paragraphs to show me what you remember.
I suggest you may want to include:

- (1) A description of a limit of a sequence in intuitive or informal terms
- (2) A precise formal definition.

Das Ziel der Aufgabe war nicht herauszufinden, ob die Studierenden die korrekte Begrifflichkeit noch wussten, sondern ob diese zusätzlich von intuitiven Fehlvorstellungen überlagert war (Davis u. Vinner, 1986, S.294).

Bei der Auswertung des Tests traten dann folgende Probleme und Fehlvorstellungen auf (Davis u. Vinner, 1986, S.294-297):

1. Eine Folge darf ihren Grenzwert nicht erreichen.
2. Es werden nur monotone Folgen als konvergent angesehen.
3. Der Grenzwert kann nicht über- oder unterschritten werden.
4. Der Grenzwert ist das letzte Folgenglied der Folge.
5. Man kann den Grenzprozess bis zum Ende „durchlaufen“.

6. Man kann den Grenzwert durch Einsetzen von Werten ermitteln (zum Beispiel bei der Bestimmung von Grenzwerten zusammengesetzter Folgen).
7. Es gab Probleme mit den Quantoren der formalen Definition (Reihenfolge der Quantoren).
8. Es gab Verwirrungen dadurch, dass n den Wert *unendlich* nicht erreicht, der Grenzwert aber schon erreicht werden kann.

Man sieht also, dass zahlreiche Fehlvorstellungen bei den Schülern zum Grenzwert vorhanden waren, obwohl der Grenzwert explizit behandelt worden war, und im Unterricht vorher explizit über fehlerhafte Definitionen diskutiert worden war.

Eine Ursache für solche Fehlvorstellungen sind laut Cornu (1991, S.154) sogenannte *spontaneous conceptions*. Dies sind Assoziationen der Lernenden zu einem mathematischen Konzept, die bereits vor dessen expliziter Behandlung vorhanden sind, zum Beispiel weil sie durch den Namen des Konzepts hervorgerufen werden. Damit sind sie spezielle Bestandteile des *concept image* der Studierenden, welches alle Assoziationen zu einem Begriff enthält (Tall u. Vinner, 1981, S.152) (siehe Kapitel 3.1).

Die *spontaneous conceptions* verschwinden auch nicht unbedingt bei der korrekten Behandlung des jeweiligen Konzepts (Cornu, 1991, S.154). Sie bleiben dann innerhalb des *concept image* der Lernenden erhalten, auch wenn sie im Konflikt mit der formalen *concept definition* stehen.

Williams (1991) hat die bei Studierenden vorhandenen *spontaneous conceptions* zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion untersucht (Williams, 1991, S.219). Diese bezeichnete er als *spontaneous models* (ohne Begründung der Abweichung in der Terminologie). Zusätzlich untersuchte er in einer zweiten Phase, inwieweit sich diese durch eine gezielte Intervention verändern lassen.

Beschreibung und Ergebnisse von Phase 1: In der ersten Phase wurde 341 Studierenden am College im zweiten Semester ein einseitiger Fragebogen vorgelegt, wobei aber nicht klar ist, ob der formale Grenzwertbegriff schon behandelt wurde (Williams, 1991, S.221). Der Fragebogen bestand aus drei Fragen.

A. Please mark the following six statements about limits as being true or false:

1. T F A limit describes how a function moves as x moves toward a certain point.
2. T F A limit is a number or point past which a function cannot go.
3. T F A limit is a number that the y -values of a function can be made arbitrarily close to by restricting x -values.
4. T F A limit is a number or point the function gets close to but never reaches.
5. T F A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.
6. T F A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.

Abbildung 7: Frage 1 aus Williams (1991, S.221) zur Ermittlung der *spontaneous conceptions* der Studierenden zum Grenzwert einer Funktionen

In der ersten Frage sollten die Studierenden bei 6 Statements entscheiden, ob diese wahr oder falsch sind (siehe Abbildung 7). Die Statements sind laut Williams (1991, S.221) typische Studierendenansichten über die Natur des Grenzwertes, die in der didaktischen Forschung ermittelt wurden (wobei er keine konkreten Studien zitiert). Jedem dieser Statements ordnete er ein Modell zu (Williams, 1991, S.221):

Statement 1: Dynamisch-theoretisch

Statement 2: Grenzwert als Schranke

Statement 3: Formal

Statement 4: Grenzwert als Zahl, die beliebig angenähert, aber nicht erreicht wird

Statement 5: Grenzwert als Approximation, die man so genau machen kann, wie man möchte

Statement 6: Dynamisch-Praktisch

In der zweiten Frage sollten die Studierenden angeben, welches der Statements aus Abbildung 7 ihr Verständnis des Grenzwerts am besten beschreibt. In der dritten Frage sollten sie sagen, *„what it means to say that the limit of a function f as $x \rightarrow s$ is some number L .“*

Die Ergebnisse zu den ersten beiden Fragen sind in Tabelle 20 dargestellt. In der ersten Spalte stehen die Probanden, die das jeweilige Statement als „richtig“ angekreuzt haben und in der zweiten die, die es als „falsch“ angekreuzt haben (siehe Abbildung 7). In manchen Zeilen fehlt 1% wegen fehlender Antworten. In der dritten Spalte befindet sich der Anteil derer, die das jeweilige Statement als *beste Beschreibung* des Grenzwertes in der zweiten Frage ausgewählt haben.

Statement-type	Anteil „wahr“	Anteil „falsch“	Anteil bestes Modell
1.Dynamisch-theoretisch	80%	19%	30%
2.Grenzwert als Schranke	33%	67%	3%
3. Formal	66%	31%	19%
4. Grenzwert unerreichbar	70%	30%	36%
5. Grenzwert als Approximation	49%	50%	4%
6. Dynamisch-praktisch	43%	57%	5%

Tabelle 20: Bei Studierenden vorhandene und von ihnen präferierte Modelle zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion (Williams, 1991, S.225) ($N = 341$)

Williams folgerte aus den Ergebnissen, dass die Studierenden verschiedene Modelle akzeptieren, da Studierende mehrere Statements als richtig einstufen (Williams, 1991, S.225). Beispielsweise akzeptierten von den 226 Studierenden, die das formale Modell als richtig ansahen, 82% auch das dynamisch-theoretische Modell (siehe Tabelle 21). Letzteres war übrigens das am weitesten verbreitete Modell. Weiterhin zeigte Williams, dass neben den Vorstellungen, die im Einklang mit der formalen Definition stehen, auch weitere Fehlvorstellungen vorhanden sein können (wie, dass der Grenzwert nicht erreicht wird, siehe Tabelle 21).

Statement-type	Anteil „wahr“	Anteil „falsch“	Anteil bestes Modell
1. Dynamisch-theoretisch	82%	18%	29%
2. Grenzwert als Schranke	28%	72%	2%
3. Formal	100%	0%	29%
4. Grenzwert unerreichbar	65%	35%	31%
5. Grenzwert als Approximation	53%	46%	3%
6. Dynamisch-praktisch	45%	55%	5%

Tabelle 21: Bei Studierenden vorhandene und von ihnen präferierte Modelle zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion unter denen, die das formale Modell als „richtig“ ansahen (Williams, 1991, S.225) ($N = 226$)

Beschreibung von Phase 2: Für den zweiten Teil der Studie mit dem Ziel einen Konzeptwechsel bei Studierenden zu erreichen wurden 10 Studierende ausgewählt (Williams, 1991, S.222). Diese Auswahl erfolgte auf der Basis der bei den Studierenden vorhandenen Modelle aus Tabelle 20. Zunächst wurde hierbei Frage 3 herangezogen (eigene Vorstellungen zum Grenzwert). Falls es Zweifel gab, wurden die Fragen 1 und 2 (Auswahl aus den vorgegebenen Statements, siehe Abbildung 7) herangezogen (Williams, 1991, S.222). Schließlich gab es unter den 10 Probanden folgende Verteilung: 4 mit dynamischer Auffassung, 4 mit der Auffassung, dass der Grenzwert nicht erreicht wird, einer mit der Auffassung des Grenzwertes als Schranke und einer mit der Auffassung als Approximation.

Die Probanden trafen sich mit dem Forscher zu fünf Sitzungen über einen Zeitraum von sieben Wochen (Williams, 1991, S.222). In der ersten Sitzung wurde mit den Studierenden jeweils die *personal concept definition* nach Tall u. Vinner (1981, S.152) herausgearbeitet (siehe Kapitel 3.1). Diese wurde dann als Arbeitsdefinition schriftlich festgehalten. In den nächsten 3 Sitzungen sollten die Studierenden jeweils zu zwei verschiedenen gegenteiligen Beschreibungen des Grenzwertes Stellung beziehen (Williams, 1991, S.222-223):

1. Der Grenzwert kann erreicht werden oder nicht.
2. Das Grenzwertkonzept hat etwas mit Dynamik zu tun oder nicht.
3. Der Grenzwert ist immer eine Schranke oder nicht.

Dabei wurden jeweils zwei hypothetische Zitate genannt, und die Studierenden mussten darlegen, wem sie zustimmen (Williams, 1991, S.222). Beispielsweise gab es zu der Frage, ob der Grenzwert erreicht werden kann, einen Studenten mit der Ansicht, dass dies nicht der Fall wäre und einen mit der Ansicht, dass die Frage des Erreichens nicht relevant zur Identifikation einer Zahl als Grenzwert ist (Williams, 1991, S.222).

Nach diesen hypothetischen Zitaten, wurden den Studierenden Aufgaben gestellt, durch welche sie die Konsequenzen ihres Standpunktes gezeigt bekommen sollten und ihn dadurch überdenken sollten. Eine Beispielaufgabe, die einen kognitiven Konflikt zur Frage, ob der Grenzwert erreicht werden kann oder nicht, erzeugen sollte, war die Frage nach dem Grenzwert der konstanten Funktion f mit $f(x) := 3$, bei $x \rightarrow 2$

(Williams, 1991, S.224). Eine Beispielaufgabe, die zum Überdenken des dynamisch-praktischen Modells anhalten sollte (Grenzwert wird durch Testeinsetzungen ermittelt), war die Betrachtung des Grenzwertes einer Funktion F , bei der Studierende zunächst den Grenzwert aus den in Abbildung 8 dargestellten Testeinsetzungen ermitteln sollten (Vermutung: Der Grenzwert ist 1). Danach bekamen sie die Gleichung von F mit $F(x) := x + 1 + \frac{1}{10^{20}x}$ vorgelegt und sollten analytisch den Grenzwert von F für $x \rightarrow 0$ bestimmen, der gar nicht existiert.

x	$F(x)$	x	$F(x)$
.1	1.1	-.1	0.9
.01	1.01	-.01	0.99
.001	1.001	-.001	0.999
.0001	1.0001	-.0001	0.9999
.00001	1.00001	-.00001	0.99999
.000001	1.000001	-.000001	0.999999
.0000001	1.0000001	-.0000001	0.9999999
.00000001	1.00000001	-.00000001	0.99999999
.000000001	1.000000001	-.000000001	0.999999999

Abbildung 8: Testeinsetzungen der Funktion F mit $F(x) := x + 1 + \frac{1}{10^{20}x}$ (Williams, 1991, S.224)

Nach jeder der drei Sitzungen 2,3, und 4 wurden die Studierenden gefragt, ob sie ihre *personal concept definition* verändern möchten (Williams, 1991, S.223). In der letzten Sitzung sollten sie noch einmal darlegen, inwieweit sich in den Sitzungen 2,3 und 4 ihre Vorstellungen zum Grenzwertbegriff verändert haben (Williams, 1991, S.224).

Ergebnisse von Phase 2: Bei der Frage nach der Erreichbarkeit des Grenzwertes konnte bei fast allen Studierenden ein Konzeptwechsel erreicht werden (eine Ausnahme) (Williams, 1991, S.227). Insbesondere die konstante Funktion überzeugte als Gegenbeispiel. Allerdings äußerten einige Studierende immer noch Zweifel. Ein Student ließ die konstante Funktion als Ausnahmefunktion zu, änderte sein Konzept vom Grenzwert aber nur widerwillig. Eine andere Studentin sah die konstante Funktion nicht als Funktion an (Williams, 1991, S.227):

,Would you really call this a function, where the x-value is totally irrelevant to the y-value? See, I wouldn't even consider it as a function.'

Ein dritter Student äußerte Zweifel darüber, dass man das Grenzwertkonzept überhaupt bei stetigen Funktionen anwenden kann (Williams, 1991, S.226):

,You never would really want to find a limit, you know, where there is a point, a continuous function.'

Bei der Sitzung zur Frage nach der Dynamik des Grenzwertes und der damit einhergehenden Überzeugung, dass man zur Ermittlung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ Testeinsetzungen von Zahlen, die x_0 immer näher kommen, verwenden kann, verursachten die gegebenen Beispiele keinen Konzeptwechsel (Williams, 1991, S.229), obwohl kognitive Konflikte zu beobachten waren. Es wurde von den Studierenden erwidert, dass die

Testeinsparungen für die Mehrheit der Funktionen funktionieren würde, insbesondere für die aus den Tests, die sie schreiben müssten. Dazu seien exemplarisch Äußerungen zweier Probanden genannt:

1. *„Well, I’d have to say it was false, but for the most of the part I would say, it was true. But there is exceptions.“* (Williams, 1991, S.230)
2. zu dem Grenzwert von $F(x) := x + 1 + \frac{1}{10^{20}x}$ für $x \rightarrow 0$: *„It just totally didn’t make sense, that it just turned around and went the other way. But for those that are in our textbook, they usually showed simple ones that don’t create problems.“* (Williams, 1991, S.233)

Insgesamt zeigt die Interventionsstudie von Williams (1991), dass die bei Studierenden vorhandenen Modelle nicht leicht veränderbar sind, selbst wenn passende Gegenbeispiele behandelt werden und kognitive Konflikte erzeugt werden. Williams vermutete, dass dies daran liegen könnte, dass Studierende *mathematical truth* nicht als allgemeingültig, sondern nur als gültig für bestimmte Fälle ansahen (Williams, 1991, S.232). Gegenbeispiele wurden daher eher als *minor exceptions* einer Wahrheit angesehen, die die meisten Fälle erfasst. Teilweise waren Studierende sogar der Ansicht, dass es keine allgemeingültige Definition des Grenzwertes für alle Funktionen gibt (Williams, 1991, S.232). Weiterhin war Studierenden in ihren Modellen zum Grenzwert der Aspekt der Nützlichkeit oder der praktischen Handhabbarkeit wichtiger als mathematische Präzision (Williams, 1991, S.233). Daher wurden Modelle auch beibehalten, wenn den Studierenden ihre Unvollständigkeit bewusst waren (Williams, 1991, S.233).

Beschreibung des Studie von Marx (2013) zum Verständnis unendlicher Prozesse und deren Folgen für das Verständnis des Grenzwertkonzeptes: Eine weitere Ursache für Fehlvorstellungen beim Grenzwertbegriff ergibt sich aus der Schwierigkeit im Umgang mit der Unendlichkeit. Andreas Marx hat sich mit dieser Problematik genauer beschäftigt, indem er Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen und zur Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzwert näher untersuchte (Marx, 2013). Konkret stellte er folgende drei Forschungsfragen (Marx, 2013, S.78):

1. Welches Schülerpräkonzepte zu unendlichen Prozessen und ihrem Ergebnis lassen sich idealisieren?
2. Wird die Existenz unendlicher Prozesse überhaupt akzeptiert? Und daran anknüpfend:
3. Auf welche (Wissens- und Erfahrungs-)Basis greifen Schüler in ihren Konzepten zurück?

Zur Beantwortung der Fragen führte er mit insgesamt mit 44 Schülern einer 10.Klasse ein problemzentriertes Interview durch, wobei 22 besonders prägnante Interviews zur weiteren Analyse herangezogen wurden (Marx, 2013, S.78). Der Grenzwertbegriff wurde bei diesen Schülern bisher nicht explizit behandelt. Das Interview bestand aus zwei Aufgaben (Marx, 2013, S.81). In der ersten Aufgabe wurde nach dem Flächeninhalt einer Figur gefragt, die aus unendlich vielen Rechtecken, jeweils mit einer Grundseite

der Länge von $1dm$ und den Höhen $1dm, \frac{1}{2}dm, \frac{1}{4}dm$ usw. zusammengesetzt war (Ergebnis: $2 dm^2$). Hier war zusätzlich noch eine Skizze gegeben. In der zweiten Aufgabe ging es um das Verfahren der Intervallschachtelung. Der Zahlenstrahl sollte in 10 Teile geteilt werden. Von diesen Teilen sollte der vierte Teil, also der Teil zwischen 0,3 und 0,4 ausgewählt werden, und mit diesem Teil ebenso verfahren werden. Das Verfahren sollte unendlich oft fortgesetzt werden. Es wurde gefragt, ob es Zahlen gebe, die auf allen Teilstrecken liegen. Falls ja, sollten diese angegeben werden (Ergebnis: $\frac{1}{3}$). Ob, und wenn ja, in welchem Kontext das Verfahren der Intervallschachtelung bereits in der Schule behandelt wurde, ist nicht bekannt (und würde das Ergebnis sicher stark beeinflussen).

Durch seine Studie fand Marx (2013) heraus, dass die Akzeptanz unendlicher Prozesse durch Schüler stark davon abhängt, wie stark die Schüler die Aufgabe auf die reale Außenwelt oder die Mathematikwelt beziehen (Marx, 2013, S.80-81). In der Außenwelt hat jeder Prozess ein Ende und ist bis zu diesem durchführbar. In der Mathematikwelt müssen Prozesse kein Ende haben, da von einem idealisierten Handelnden ausgegangen wird, der den Prozess unendlich oft durchführen könnte.

Bei der Frage, wie ein unendlicher Prozesse verstanden werden kann, und wie dieser in Beziehung zu einem eventuell existieren Grenzobjekt steht, hat Marx folgende Denkweisen identifiziert:

1. Es gibt kein Ergebnis eines unendlichen Prozesses.

Zu diesem Schluss kommt man bei einer starken Handlungsorientierung. Das Ergebnis eines Prozesses ist das Ende dieser Handlung (zum Beispiel das Legen von Rechteckstreifen). Da hier dieser Prozess niemals endet, kann man bei dem Rechteckrätsel auch keine Gesamtfläche als Ergebnis erhalten. Eine Beispielaussage für diese Auffassung im Interview war (Marx, 2013, S.83):

„Aber du kriegst doch trotzdem keine ganze Fläche, wo es dann aufhört, wo es dann nicht mehr weitergeht.“

2. Ein unendlicher Prozess ist lang, aber letztlich endlich.

Diese Vorstellung führt sowohl zur typischen Fehlvorstellung, dass eine Folge durchlaufen werden könnte als auch zur Vorstellung vom Grenzwert als letztem Folgenglied. Eine Beispielaussage für diese Auffassung im Interview im Zusammenhang mit periodischen Dezimalbrüchen war (Marx, 2013, S.84):

„Ja, wir müssen davon ausgehen, dass eine Periode irgendwann mal abbricht.“

3. Die Unendlichkeit legt einen Schleier über den Prozessausgang.

Auch hier bleibt die Vorstellung eines Abbruchs vorhanden. Man weiß jedoch nicht, wann der Prozess abbricht. Eine Beispielaussage des Interviews zum Flächeninhalt aus Aufgabe 1 war (Marx, 2013, S.84):

„Du kannst auch nicht sagen, wie groß es ist. Wenn du wüsstest, wie viel fehlt, dann könntest du es dazu addieren und dann hättest du die Fläche, wie groß sie wäre.“

4. Das Ergebnis eines unendlichen Prozesses passt sich veränderlich dem Prozessverlauf an. Bei diesem Vorgehen variiert das Ergebnis, je nachdem, „wieweit man die Folge durchlaufen hat“.

5. Was im Endlichen gilt, gilt auch im Unendlichen.

Schüler nahmen oft an, dass das Grenzübjekt von gleicher Natur sein muss wie die Objekte der Folge (zum Beispiel ein Intervall bei der Intervallschachtelung) (Marx, 2013, S.86).

Schließlich nennt Marx noch zwei Arten von Beziehungen, die Schüler zwischen endlichem und unendlichem Prozess aufbauen können (Marx, 2013, S.89):

1. das Konzept der direkten Beziehung und
2. das Konzept der indirekten Beziehung.

Bei ersterem wird der Prozess mit konkreten Handlungen verknüpft. Daher ist er in letzter Konsequenz endlich. Beim Konzept der indirekten Beziehung befinden sich die Handlungen nur auf einer Modellebene und müssen nicht in der Wirklichkeit durchführbar sein. Es fällt also laut Marx nicht schwer, von einem fehlenden Ende des Prozesses auszugehen (Marx, 2013, S.89). Nur bei dieser Vorstellung ist laut Marx die Diskussion über die Existenz von „Ergebnissen eines Grenzprozesses“ (was auch immer darunter zu verstehen ist) überhaupt sinnvoll (Marx, 2013, S.89). Denn bei dem Konzept der direkten Beziehung zwischen endlichem und unendlichem Prozess wird letzterer gedanklich doch als endlich und der Grenzwert als letztes Folgenglied aufgefasst (Marx, 2013, S.90).

Insgesamt zeigt die Studie, dass Schüler (und vermutlich auch Studierende) über vielfältige Vorstellungen zu unendlichen Prozessen und der Beziehung zwischen einem Grenzprozess und dem zugehörigen Grenzübjekt verfügen. Teilweise werden hierbei die Prozesse als endlich betrachtet und der Grenzwert als Ergebnis dieses endlichen Prozesses. Also ist dann das Grenzübjekt auch von gleicher Natur wie die Objekte des Prozesses.

Schwierigkeiten der Studierenden bei Verwendung des Grenzwertes im Zusammenhang mit Approximationen: Die Verwendung von Grenzwerten in Zusammenhang mit Approximationen spielt in den Wirtschaftswissenschaften bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung eine Rolle (siehe Kapitel 3.3). Daher werden hier zwei Studien näher betrachtet, in denen untersucht wurde, inwieweit Studierende Grenzwerte zur approximativen Ermittlung von Funktionswerten nutzen können.

Çetin (2009b) untersuchte, inwieweit Studierenden bewusst ist, dass man Grenzwerte als Approximation für unbekannte Funktionswerte verwenden kann. Er legte dazu 63 Studierenden der Anadolu-Universität in der Türkei, die einen Analysis I Kurs absolviert hatten, einen aus 2 Teilen bestehenden Test vor (Çetin, 2009b, S.324). Alle an dem Test teilnehmenden Studierenden hatten den Analysis I Kurs mit mindestens 70% der Punkte bestanden (dies war die Bestehensgrenze). Die Testteilnehmer waren also eine Positivauswahl (Çetin, 2009b, S.324).

Der Test bestand aus zwei Teilen, für die je 30 Minuten Zeit angesetzt waren (Çetin, 2009b, S.325). Im ersten Teil sollten Näherungen für Funktionswerte angegeben werden, wobei die Verwendung von Taschenrechnern verboten war. Stattdessen sollten die Werte durch passende Grenzwerte angenähert werden, was aber so nicht in der Aufgabenstellung stand. Natürlich muss für deren Lösung der entsprechende Grenzwert auch bestimmt werden können oder bekannt sein. Im zweiten Testteil sollten diese Grenzwerte dann explizit berechnet werden (mit Begründung). Die genauen Aufgaben des ersten Teils waren die Folgenden (Çetin, 2009b, S.326):

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{\sin x}{x}, f(0,015) \cong? & 2) g(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 7}{x^3 + x^2}, g(10873) \cong? \\ 3) h(x) = \frac{1}{1000 \ln x}, h(0,03) \cong? & 4) k(x) = 16e^{-x} + 14, k(2718281) \cong? \end{array}$$

Die Aufgaben des zweiten Teils waren (Çetin, 2009b, S.326):

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =? & 2) g(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 7}{x^3 + x^2}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =? \\ 3) h(x) = \frac{1}{1000 \ln x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) =? & 4) k(x) = 16e^{-x} + 14, \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) =? \end{array}$$

Die Auswertung des Tests erfolgte nach folgendem Bewertungsschema (Çetin, 2009b, S.325): Im zweiten Teil des Tests wurden die Ergebnisse als richtig gewertet, wenn der Grenzwert mit Hilfe bekannter Rechenregeln exakt bestimmt werden konnte. Bei der Auswertung des ersten Testteils wurde untersucht, ob die entsprechenden Grenzwerte als Approximation herangezogen wurden. Dementsprechend sieht man schon am Design, dass die Lösung des ersten Teiltests ohne die Fähigkeit der Lösung des zweiten Teiltests nicht möglich war. Dies müsste man bei der Auswertung der Daten berücksichtigen.

Bei der Auswertung bildete Çetin schließlich 4 Gruppen (Çetin, 2009b, S.326-327):

1. Gruppe A: Die Studierenden verwendeten den Grenzwert als Approximation und konnten ihn exakt berechnen.
2. Gruppe B: Die Studierenden verwendeten den Grenzwert als Approximation, konnten ihn aber nicht exakt berechnen.
3. Gruppe C: Die Studierenden verwendeten den Grenzwert nicht als Approximation, konnten ihn aber exakt berechnen.
4. Gruppe D: Die Studierenden verwendeten den Grenzwert nicht als Approximation und konnten ihn nicht exakt berechnen.

Wie sich hier Gruppe B überhaupt ergeben kann, ist mit dem eben Gesagten fragwürdig. Vielleicht wurde die rechnerische Bestimmung des Grenzwertes nicht als korrekt gewertet, wenn der Rechenweg nicht begründet wurde.

Die Ergebnisse des Tests (charakterisiert durch die Gruppenzuordnung der Studierenden) sind in Tabelle 22 dargestellt. Wie man dort sieht, war die Gruppe, die zwar die Grenzwerte exakt berechnen konnte, ihn aber nicht als Möglichkeit der Approximation nutzte (Gruppe C), in jeder Frage die mit Abstand größte Gruppe.

Frage	Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C	Gruppe D
1	25.3%	-	63.5%	11.2%
2	19%	-	81%	-
3	8%	3.2%	68.2%	20.6%
4	11.2%	-	76.1%	12.7%

Tabelle 22: Ergebnisse des Tests zur Beantwortung der Frage, inwieweit Studierende Grenzwerte zur Approximation unbekannter Funktionswerte nutzen (Çetin, 2009b, S.327-328)

Die Ergebnisse sind jedoch etwas mit Vorsicht zu interpretieren, da das Bewertungsschema nicht genau dargestellt ist. So ist zum Beispiel nicht klar, welche Mittel den Studierenden für die Grenzwertberechnung zur Verfügung standen (z.B. ob sie die Regeln von De L'Hôpital oder spezielle Grenzwerte wie $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x)$ bereits verwenden durften). Da aber die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ von 88.8% der Probanden und $\lim_{x \rightarrow 0} (16e^{-x} + 14)$ von 87.3% der Probanden korrekt bestimmt werden konnten (Gruppen A und C), ist zu vermuten, dass diese Mittel verwendet werden durften.

Der Autor schließt aus den Ergebnissen, dass Studierende zwar Grenzwerte von Funktionen bestimmen können, diese Grenzwerte aber nicht verwenden um Funktionswerte zu approximieren (Çetin, 2009b, S.328). Da die Bestimmung der Grenzwerte dieses Tests mit den Grenzwertsätzen, den Regeln von De L'Hôpital und mit als bekannt geltenden Grenzwerten $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})$ und $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)$ aber trivial ist, sollte man eher vorsichtig schließen, dass die Ergebnisse lediglich zeigen, dass die Studierenden den Grenzwert nicht als Approximation nutzen und den Rest des Schlusses weglassen. Denn bei komplizierteren Grenzwertbestimmungen hätte es bei der Grenzwertbestimmung vermutlich auch mehr Fehler gegeben.

Ein ähnliches schwaches Ergebnis zur Fähigkeit, den Grenzwert in Zusammenhang mit Approximationen zu nutzen, und zwar dieses Mal im Kontext der Ableitung, ist in einer Studie von Bingolbali u. Monaghan (2008) zu finden. Sie wollten die Entwicklung des *concept image* zur Ableitung bei Studierenden der Mathematik und des *Mechanical Engineering* untersuchen (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.23).

Dazu legten sie Studierenden der entsprechenden Fächer einer großen türkischen Universität einen Test zum Ableitungskonzept zu unterschiedlichen Zeitpunkten vor: einmal als Pretest vor dem Calculus-Kurs im Oktober, einmal direkt danach als Posttest im Januar und einmal als Delayed Posttest im April/Mai (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.23). Den meisten Studierenden war die Ableitung bereits aus der Highschool bekannt, aber nicht allen. Dies muss bei der Auswertung berücksichtigt werden (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.23).

Der Test bestand aus 6 Fragen, die jeweils unterschiedliche Aspekte des *concept image* der Studierenden zur Ableitung ansprachen. Diese Aspekte waren (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.32-34):

1. die algebraische Berechnung von Änderungsraten zweier Polynomfunktionen
2. die Bestimmung von Tangentengleichungen bei gegebener Ausgangsfunktion (einmal als Formel gegeben und einmal graphisch)
3. die Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation

4. die Deutung der Ableitung als Änderungsrate im Kontext eines Populationswachstums einer Stadt nach x Jahren (Gegeben war die Funktionsgleichung, gesucht waren: (1) die Ausgangspopulation, (2) die anfängliche Wachstumsrate, (3) die Zeit mit einer Wachstumsrate von 1000 pro Jahr, und (4) die Zeit und die Populationsgröße, bei der die Population nicht mehr wächst)
5. eine eigene Definition der Ableitung oder eine eigene Erklärung, was die Ableitung ist

Zusätzlich sollten die Studierenden in einer letzten Aufgabe darstellen, ob sie die Deutung der Ableitung als Änderungsrate oder Steigung der Tangente bevorzugen. Sie mussten hier einer fiktiven Studierendenposition zustimmen.

Im Detail soll hier das Item zur Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation näher beschrieben werden, um die in diesem Unterkapitel geht. Dieses Item bestand aus zwei Teilaufgaben (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.32-33). In der ersten Teilaufgabe sollte aus einer gegebenen Graphik mit einer Tangente L durch den Punkt $(5, 3)$ der Wert $f'(5)$ bestimmt werden. In der zweiten Teilaufgabe musste dann die Ableitung bzw. genauer gesagt die Tangente als lineare Approximation verwendet werden:

Was ist der Wert der Funktion $f(x)$ bei $x = 5.08$? (Ermitteln Sie ihn so genau wie möglich.)

Da man in der Graphik die Position von $x = 5.08$ nicht erraten konnte (die x -Achse hatte keine Einheiten), war ein graphisches Ablesen nicht möglich, sodass tatsächlich die lineare Approximation verwendet werden musste.

Aufgabenteil	Pretest		Posttest		Delayed Posttest	
	ME ($N = 50$)	M ($N = 32$)	ME ($N = 50$)	M ($N = 32$)	ME ($N = 50$)	M ($N = 32$)
a)	22%	22%	32%	42%	42%	56%
b)	10%	18%	4%	34%	10%	34%

Tabelle 23: Ergebnisse der Aufgabe aus Bingolbali u. Monaghan (2008, S.26) zur Nutzung der Ableitung als lineare Approximation, M =Mathestudierende, ME = Studierenden aus „Mechanical Engineering“

Die Ergebnisse zu beiden Teilaufgaben sind in Tabelle 23 dargestellt. Man sieht aus ihr klar, dass die meisten Studierenden im Vortest weder in der Lage waren die Ableitung geometrisch zu deuten (Teilaufgabe a)) noch diese zur Approximation von Funktionswerten zu nutzen. Die Fähigkeit zur geometrischen Deutung verbesserte sich dann durch den Calculus-Kurs. Die Fähigkeit zur Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation verbesserte sich aber nur bei den Studierenden der Mathematik, weil nur dort der Aspekt der linearen Approximation im Zusammenhang mit der Ableitung explizit behandelt wurde (Bingolbali u. Monaghan, 2008, S.24-25). Aber selbst bei diesen Studierenden konnten auch nach dem Kurs nur 34% der Studierenden die Ableitung $f'(x_0)$ zur linearen Approximation von Funktionen in einer Umgebung von x_0 nutzen (siehe Tabelle 23).

4.2.2 Schwierigkeiten beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung

Neben vielen Studien, in denen Schwierigkeiten mit dem Grenzwertbegriff im Allgemeinen untersucht wurden, gibt es auch eine Reihe von Studien, in denen spezifisch der Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung Untersuchungsgegenstand war. Zunächst wird eine qualitative Studie von Vom Hofe (1998) vorgestellt, in der zwei besonders wichtige Probleme sichtbar werden: die Herstellung einer adäquaten Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzwert bei der Ableitung sowie und zwischen den einzelnen Repräsentationen der Ableitung. Es folgen drei Studien, in denen diesen Problematiken näher auf den Grund gegangen wird:

1. eine Studie von Friedrich (2001) zu Schwierigkeiten beim Grenzübergang im Geschwindigkeitskontext
2. eine Studie von Viholainen (2005) zu Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Beziehung zwischen symbolischer und graphischer Repräsentation beim Grenzübergang
3. eine Studie von Park (2016) zu Problemen bei der Darstellung des Grenzübergangs bei der Ableitung in verschiedenen Repräsentationen in Calculus-Lehrbüchern

Es gibt weitere Studien zum Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung (z.B. (Kendal u. Stacey, 2003; Häikiöniemi, 2006)), die aber keine zusätzlichen Erkenntnisse liefern. Daher wird hier aus Platzgründen auf deren Darstellung verzichtet.

Beschreibung der Studie von Rudolf Vom Hofe (1998) zu Schwierigkeiten beim Grenzwert im Zusammenhang mit der Ableitung: Vom Hofe untersuchte in einer qualitativen Studie, welche geistigen Hindernisse (im Sinne von *epistemological obstacles* nach Cornu (1991, S.158) als Hindernisse, die von der Natur des mathematischen Konzeptes ausgehen) Schüler beim Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotient überwinden müssen.

Die Studie war eine interpretative Fallstudie, die vordergründig deskriptiv angelegt war. Sie erfolgte in einem Analysis-Grundkurs (12.Klasse) in den Jahren 1995/96 an einem Gymnasium im Rahmen des mathematischen Kontextes der Exponentialfunktionen (Vom Hofe, 1998, S.262). Weil sich bei der Wiederholung der Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient, die nötig für die Erarbeitung der Ableitung von Exponentialfunktionen sind, starke Defizite zeigten, wurden zwei Doppelstunden eingefügt, deren Ziel das Erreichen eines Verständnisses dieser beiden Grundbegriffe und der Beziehung zwischen ihnen war. Durch Beobachtung der Schüler in diesen beiden Doppelstunden wollte vom Hofe herausfinden, welche Schwierigkeiten Schüler bei der Herstellung der Beziehung zwischen Differenzenquotient und Ableitung haben.

In diesen Doppelstunden wurde eine spezielle Lernumgebung unter Verwendung des Computer-Algebra-Systems MathPlus verwendet, mit dem der Differenzenquotient parallel symbolisch und graphisch dargestellt werden konnte. Außerdem konnte dessen Wert beim Einsetzen bestimmter Zahlenwerte in Abhängigkeit von den drei verschiedenen Größen

$$m(x, h, b) = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} \quad (30)$$

betrachtet werden. Zu dieser Computerumgebung wurde eine Sequenz von Aufgaben konstruiert. Bei deren Lösung wurden die Schüler gefilmt. Gegenstand der Aufgaben war die Untersuchung der Beziehung zwischen Differenzenquotient und Ableitung bei der Exponentialfunktion $f(x) := 2^x$ an der Stelle $x = 0$. In einem ersten Aufgabenteil wurden die Schüler aufgefordert die graphischen und rechnerischen Auswirkungen verschiedener Zahlenwerte für h im Differenzenquotienten $\frac{2^h-1}{h}$ zu untersuchen (Vom Hofe, 1998, S.264). Dann folgte die entscheidende Frage, mit Hilfe derer die Schwierigkeiten der Schüler bei der Herstellung einer Beziehung zwischen dem Differenzenquotienten und der Ableitung herausgefunden werden sollte (Vom Hofe, 1998, S.265):

Berechnen Sie eine möglichst genaue Näherungslösung für die Tangentensteigung im Punkt (0;1).

Was eine korrekte Lösung dieser Aufgabe sein könnte, bleibt offen.

Vom Hofe ging bei der Auswertung seiner Transkripte interpretativ vor. Dabei nutzte er zwei Ebenen. In der ersten deskriptiven *Beschreibungsebene* beschrieb er genau die von den Schülern getätigten Äußerungen und interpretierte sie. In der zweiten *Erklärungsebene* versuchte er dann die von den Schüler getätigten Denkweisen zu erklären, wobei er stoffdidaktische Überlegungen einfließen ließ.

In Vom Hofe (1998, S.267-285) ist ein Fallbeispiel der Schülerinnen *Julia* und *Anka* bei der Bearbeitung der oben genannten Aufgabe ausführlich dargestellt. Dabei gliederte vom Hofe die Auswertung anhand von drei Fragen, die bei den Schülerinnen bei der Lösung der oben genannten Aufgabe auftraten (Vom Hofe, 1998, S.265):

1. Was ist eigentlich der Grenzwert?
2. Kann die Steigung null werden, wenn h beliebig klein wird?
3. Warum kann man für h nicht null einsetzen?

Episode zur Frage „Was ist der Grenzwert?“: Diese Frage ergab sich sofort zu Beginn bei der Lösung der Aufgabe die Tangentensteigung so genau wie möglich zu bestimmen, als die Schülerinnen aus der letzten Stunde ihre Mitschriften zu den Begriffen „Differenzenquotient“ und „Differentialquotient“ nachschlugen (Vom Hofe, 1998, S.267):

Julia: *Was heißt das denn? Ich weiß überhaupt nicht, was Limes heißt.*

Anka: *Limes heißt Grenzwert. Und wenn h gegen 0 strebt, also h kleiner wird,...*

Julia: *So, wie wir jetzt gemacht haben, einmillionstel?*

Anka: *Dann kriegt man den Grenzwert raus, wenn man das so einsetzt.*

Julia: *Ja, was ist denn der Grenzwert?*

Anka: *Das ist der Grenzwert. [deutet auf den Wert m]*

Julia: *m !?*

Anka: *Ja.*

Julia: *Der Grenzwert zu was?*

Anka: *Der Grenzwert zur Tangente, eigentlich von Sekante zu Tangente.*

Julia: *Was ist der Grenzwert?*

Anka: *Es bleibt ja immer 'ne Sekante. Es ist nur 'ne Annäherung an die Tangente.*

Vom Hofe hebt anhand dieses Transkriptauszuges zwei Beziehungen hervor, die den Schülerinnen Probleme bereiten können (Vom Hofe, 1998, S.268-269):

1. die Beziehungen zwischen arithmetischer und geometrischer Ebene
2. die Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzwert

Anka hatte offenbar Schwierigkeiten diese Beziehungen zu verbalisieren. So könnten ihre ersten Äußerungen mit dem Einsetzen von h darauf hindeuten, dass sie der Meinung war, dass man auf rechnerischer Ebene durch „Einsetzen“ den Grenzwert herausbekommt (Vom Hofe, 1998, S.268). Außerdem wird in ihren Formulierungen die Beziehung zwischen graphischer Ebene und rechnerischer Ebene nicht adäquat wiedergegeben, denn der Grenzwert entspricht nicht der Tangente, sondern der Steigung der Tangente. Dies könnten aber auch reine Formulierungsprobleme sein. Genauer wird später im Verlauf des Interviews klar (Vom Hofe, 1998, S.270).

In der nächsten Szene, untersuchten Julia und Anka genauer die Beziehung zwischen Sekanten und Tangente (Vom Hofe, 1998, S.271):

Julia: *Warte mal. [Deutet auf den Bildschirmgraphen.] Hier ist die Sekante. Ne Sekante ist die Verbindung zwischen zwei Punkten hab' ich gedacht, oder?*

Anka: *Ja.*

Julia: *Wo ist denn der zweite Punkt von dem Teil? [Ist bei der Skalierung nicht zu sehen.]*

Anka: *Also hier sind jetzt die zwei Punkte, ne. [deutet auf eine schematische Zeichnung des Differenzenquotienten in ihrem Heft] Und dann hängt so die Sekante, ne. Und wenn h kleiner wird, also das hier ist ja h , dass da irgendwie der Abstand da halt, genau der Abstand hier ist h dann, ne. Und wenn das hier kleiner wird, wenn h da läuft, dann rutschen die Punkte ja immer weiter aneinander, ne. Und dann liegen sie irgendwann so dicht beieinander, dass du sie gar nicht mehr unterscheiden kannst. [macht im Heft einen Kreis um einen kleinen Ausschnitt des Graphen]*

Also kannst du hier, sagen wir mal in dem Bereich hier, kannst du nicht mehr genau sagen, wo die zwei sich aufhalten, weil die Zahlen werden ja immerfort unendlicher. Je kleiner du h wählst, desto mehr Zahlen kommen da hinten dran. [zeigt auf $m = 0,69315$] Und du kommst die direkt auf die Null. Weil Null ist ja dann die Tangente.

Anka hatte hier Schwierigkeiten eine Beziehung zwischen dem Grenzprozess und dem Grenzobjekt herzustellen. Für $h \rightarrow 0$ „rutschen“ laut Anka die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ aneinander (Vom Hofe, 1998, S.273). Sie hatte allerdings Probleme den Grenzprozess ab der Stelle zu beschreiben, ab der die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ nicht mehr unterscheidbar waren. Folglich konnte sie auch die Beziehung zwischen diesen Sekanten und der Tangente nicht mehr genau beschreiben. Ähnliche Schwierigkeiten hatte bereits Marx (2013) gezeigt (siehe Kapitel 4.2.1).

Nach dieser Diskussion machten Julia und Anka nun h immer kleiner (vermutlich zur Erhöhung der Genauigkeit der Näherungslösung oder zur exakten Bestimmung; ob sie das unterscheiden können, weiß man hier noch nicht), bis das Computerprogramm die Werte von h nicht mehr verarbeiten konnte (Vom Hofe, 1998, S.275).

Episode zur Frage „Kann die Steigung null werden, wenn h beliebig klein wird?“:

Nach dem gescheiterten Versuch numerisch die Beziehung zwischen dem Differenzenquotienten und der Ableitung zu erfassen, wendeten sich Julia und Anka nun verstärkt der Graphik zu (Vom Hofe, 1998, S.277). Hierbei tauchte dann das Problem auf, dass Julia vermutete, dass sich bei $h = 0$ eine waagerechte Tangente ergibt:

Anka: *Ja, wir ham ja immer noch die zwei Punkte, die auf einander zulaufen.*

Julia: *Aber wenn wir dann 0 machen, dann ist doch da eigentlich gar kein Punkt mehr.*

Anka: *Die Steigung, wir reden ja nur von ...*

Julia: *Nee, wir reden ja von h . Aber m ist die Steigung. h ist nicht die Steigung.*

Anka: *Ja, aber wir machen das ja so klein, dass der Abstand so klein wird, aber das kann doch ... Zeigt mit dem Stift auf dem Bildschirm, wie eine Gerade mit der Steigung null durch den betrachteten Punkt verlaufen würde. Du siehst doch, das kann doch nie null werden. Die Steigung kann ja nie null werden, weil's ja sonst voll da durchschneidet. Das muss ja immer so'n bisschen schräg da dranliegen.*

Julia: *Warum denn? Ich versteh's echt nicht.*

...

Julia: *Deutet mit dem Finger eine horizontale Gerade an. Warum kann's denn nicht so durchgehen?*

Julia schien hier das „ h zu 0 machen“ laut Vom Hofe (1998, S.277) nicht als Prozess zu sehen, sondern tatsächlich als das Einsetzen von $h = 0$. In diesem Zustand gibt es dann keinen zweiten Punkt, keine Differenz der x -Koordinaten mehr und damit ist die Steigung 0 (Vom Hofe, 1998, S.277). Die zugehörige Tangente müsste waagerecht sein. Zur Überprüfung dieser Vermutung setzten Julia und Anka dann auch $h = 0$ ein. Das Ergebnis in der Graphik war aber keine waagerechte Tangente, sondern ein Verschwinden der Sekante, was Julia zunächst überraschte (Vom Hofe, 1998, S.280). Zwar wusste sie, dass man nicht durch 0 teilen darf (Vom Hofe, 1998, S.279), aber Julia hatte dennoch bei der Graphik eine waagerechte Tangente erwartet (Vom Hofe, 1998, S.280).

Episode zur Frage: „Warum kann man für h nicht null einsetzen?“ Nun überlegte Julia sich dann eine passende Erklärung für das Verhalten des Computers (Vom Hofe, 1998, S.281-282):

Julia: *Ja. Aber wenn h null ist, dann hab' ich ... ich hab' ja zwei Punkte, und wenn der Abstand zwischen zwei Punkten null beträgt, dann heißt das ja, dass eigentlich nur einen Punkt ... dass wir nur noch einen Punkt haben, oder?*

Anka: *Ja.*

Julia: *Das heißt also, dass es genau wie beim Differentialquotienten ist, dass ich nur noch einen Punkt habe.*

Anka: *Ja, nur noch den Punkt und keine ...*

Julia: *Ja, dann kann's aber trotzdem 'ne Steigung geben, aber er rechnet mir hier keine Steigung aus!*

...

Julia: *Wenn hier h null ist, warum rechnet'n er mir nicht aus? Warum geht das nicht, dass h null ist?*

Julias stellte hier eine Analogie zwischen dem Fall $h = 0$ und dem Differentialquotienten her, nämlich dass beide Male nur *ein* Punkt beteiligt ist (Vom Hofe, 1998, S.281). In diesem gibt es auch eine Steigung. Julia wunderte sich dann darüber, dass der Computer hier keine Steigung ausrechnet (Vom Hofe, 1998, S.282).

An dieser Stelle sieht man den Konflikt, der dadurch verursacht wird, dass einerseits die Tangente ihrer Meinung nach genau der Geraden mit $h = 0$ entspricht, man aber andererseits bei der Bestimmung von deren Steigung mit Hilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten in diesen gerade nicht $h = 0$ einsetzen darf. Auf diese Problematik wird auch an anderen Stellen in der Literatur hingewiesen (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.48).

Insgesamt zeigte vom Hofe in seiner Studie verschiedene Schwierigkeiten beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung:

1. Schwierigkeiten bei der Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzobjekt
(Bsp.: Schwierigkeiten bei einer exakten Beschreibung der Beziehung zwischen den Sekanten und der Tangente)
2. Schwierigkeiten bei der Beziehung zwischen arithmetischer und geometrischer Ebene
(Bsp.: Konflikt, dass sich die Tangente für $h = 0$ ergibt, man bei der rechnerischen Bestimmung über den Differenzenquotient aber nicht $h = 0$ einsetzen darf)

Studie von Friedrich (2001) zu Problemen beim Grenzübergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit: Vom Hofe zeigte, dass Studierende Schwierigkeiten beim Verständnis der Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzwert in der symbolischen und der graphischen Ebene hatten. Aber auch im scheinbar intuitiven Geschwindigkeitskontext kann es zu Schwierigkeiten kommen. Dies hat Friedrich (2001) in einer qualitativen Studie näher untersucht. Er beobachtete 16 Schülerpaare (13 Paare aus der 12.Klasse, ein Paar aus der 11.Klasse und zwei Paare aus der 10.Klasse) bei der Bearbeitung einer Aufgabensequenz zum Thema „Geschwindigkeit“. Die Lösung der Aufgaben durch die Schüler wurde per Video festgehalten (Friedrich, 2001, S.209). Anschließend wurden die Äußerungen der Schüler interpretiert mit dem Ziel Vorstellungen der Schüler zum Grenzübergang bei der Ableitung zu rekonstruieren.

Die Aufgabensequenz bestand aus 5 Aufgaben (Friedrich, 2001, S.208):

- Aufgabe 1: In ihr sollte zu gegebener Weg-Zeit-Funktion bei gegebener Vorschrift ein Funktionswert berechnet werden.
- Aufgabe 2: In ihr sollten verschiedene Durchschnittsgeschwindigkeiten berechnet werden, wobei jeweils in halbstündigem Abstand der zurückgelegte Weg $f(t)$ gegeben war (von 14.30 Uhr bis 17 Uhr).
- Aufgabe 3: Hier wurde die Frage gestellt, ob es um 16 Uhr eine Momentangeschwindigkeit gebe.
- Aufgabe 4: In ihr sollte ersucht werden diese möglichst genau zu berechnen.

Aufgabe 5: In ihr wurde gefragt, ob eine exakte Berechnung möglich sei.

Interessant für die Thematik „Grenzübergang beim Ableitungsbegriff“ sind hierbei die Teilaufgaben ab der Frage nach der Existenz der Momentangeschwindigkeit. Die Frage nach der Existenz der Momentangeschwindigkeit wurde von den Schülern zunächst intuitiv bejaht, diese Bejahung dann jedoch in Frage gestellt (Friedrich, 2001, S.213). In der anschließenden Diskussion wurden prinzipiell zwei Perspektiven sichtbar, die Friedrich (2001, S.212) als *isolierende Sichtweise* und *einbettende Sichtweise* bezeichnet. In der *isolierenden Sichtweise* werden Zeitpunkt und Zeitraum isoliert betrachtet. Die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt wird nicht einen kontinuierlichen Bewegungsvorgang eingebettet. Die Geschwindigkeit wird dann als 0 angesehen. Ein Beispiel wäre folgendes Transkript (Friedrich, 2001, S.210):

„Genau, weil in diesem Augenblick keine Zeit vergeht. So. Und äh, theoretisch bewegt sich das Auto zu diesem Zeitpunkt nicht vorwärts. Sondern genau zu dieser Zeit bleibt es ja genau da stehen, wenn ich hin gucke.“

Dieses Problem trat auch bei Vom Hofe (1998, S.279) auf, wo Julia vermutet hatte, dass die Steigung an einer Stelle 0 sein müsste, weil es nur einen Punkt gibt. Die konträre Sichtweise nennt (Friedrich, 2001, S.212) *einbettende Sichtweise*. Bei ihr ist der Zeitpunkt in einen Zeitraum und die Geschwindigkeit in einen Bewegungsvorgang bzw. eine Geschwindigkeits-Zeit-Funktion eingebettet. Ein Beispiel für diese Sichtweise wäre folgendes Transkript (Friedrich, 2001, S.211):

„Weil ich ja in dem Moment, die genau diese Geschwindigkeit, zu diesem Zeitpunkt, ich habe in diesem Moment vielleicht keine Strecke zurückgelegt“ [bewegt den Stift über den Tisch], „aber wenn ich das im Ganzen betrachte, würd ich, bin ich in dem Moment so schnell.“

Weiterhin unterscheidet Friedrich (2001, S.211) zwischen der realen Welt („r-Welt“) und der Welt der Mathematik („m-Welt“). In der realen Welt wurden beide Sichtweisen im Geschwindigkeitskontext bereits angesprochen. Allerdings gibt es diese auch in der Mathematikwelt. Bei der isolierenden Sichtweise ist die lokale Änderungsrate ein „ $\frac{0}{0}$ “-Problem, bei der der Wert $h = 0$ des Differenzenquotienten isoliert vom Grenzprozess betrachtet wird (Friedrich, 2001, S.212). Schüler mit der isolierenden Sichtweise weisen laut Friedrich (2001, S.214) dem Differentialquotienten keine inhaltliche Bedeutung zu, wodurch das Arbeiten mit Ableitungen zu einem formalen Kalkül werden kann. Die einbettende Sichtweise führt laut Friedrich (2001, S.213) dagegen in natürlicher Weise zur Idee der Berechnung der Ableitung durch die stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten als Lückenwert (den man nicht kennt, aber aufgrund der r-Welt für existent hält, Momentangeschwindigkeit als stetige Fortsetzung der Durchschnittsgeschwindigkeiten).

Jedoch hebt Friedrich (2001) auch hervor, dass Differenzierbarkeit aus Sicht der einbettenden Sichtweise eine lokale und keine punktuelle Eigenschaft ist, was dagegen wieder im Konflikt mit der formalen Definition steht (Friedrich, 2001, S.215). Allerdings sind Funktionen, die nur an einem Punkt, aber in keiner seiner Umgebungen differenzierbar sind, exotische Gegenbeispiele.

Zusammengefasst zeigt die Studie von Friedrich (2001), dass es auch im Geschwindigkeitskontext Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Beziehung zwischen dem Differenzenquotienten und der Ableitung geben kann. Auch dort können Fehlvorstellungen auftreten, wie die Annahme, dass die Momentangeschwindigkeit gleich 0 ist, was auch Vom Hofe (1998) schon beim Grenzübergang im rein innermathematischen Setting der Steigung zeigte. Friedrich nannte hier als Ursache eine sogenannte isolierende Sichtweise, bei der der Zeitpunkt nicht in einen Zeitraum eingebettet wird. Diese Sichtweise passt mathematisch zum „ $\frac{0}{0}$ “-Problem im Zusammenhang mit der Bestimmung der Ableitung über den Differenzenquotienten. Das Gegenteil wäre eine einbettende Sichtweise, bei der der Zeitpunkt in einen Zeitraum eingebettet wird und damit der Grenzübergang in gewisser Weise als natürlich angesehen wird. Mathematisch passt das zur Idee der Definition der Ableitung als stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten.

Studie von Viholainen (2005) zu Problemen bei der Verbindung von graphischer und symbolischer Repräsentation: Viholainen (2005) untersuchte Schwierigkeiten der Studierenden bei der Herstellung einer Beziehung zwischen der graphischen und der symbolischen Repräsentation beim Grenzübergang vom Differenzenquotienten zur Ableitung an einer Stelle. Sein Ziel war die Untersuchung folgender Fragen (Viholainen, 2005, S.1813):

1. Wie gut verstehen die Studierenden die Verbindung zwischen der formalen Definition der Ableitung und ihren informellen Repräsentationen?
2. In wieweit verwenden Studierende formale und informale Begründungen, wenn sie mathematische Probleme lösen?

Dazu führte er mit zwei Studierenden der Mathematik aus dem zweiten Studienjahr (Anna mit 99 erworbenen ECTS und Ben mit 120 erworbenen ECTS (Viholainen, 2005, S.1813)) ein problemzentriertes Interview durch, welches aus 4 Aufgaben bestand. Diese waren

1. Was bedeutet der Grenzprozess in der Definition der Ableitung graphisch? (Viholainen, 2005, S.1813)
2. Warum können die Graphen in Figure 1 [hier Abbildung 9] nicht differenzierbar sein? (Viholainen, 2005, S.1814)
3. „Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Ist f differenzierbar? (Viholainen, 2005, S.1815)

4. „Eine gerade Funktion ist symmetrisch zur y -Achse. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare gerade Funktion mit $g'(1) = 2$. Was kann man über den Wert von $g'(-1)$ sagen?“ (Viholainen, 2005, S.1816)

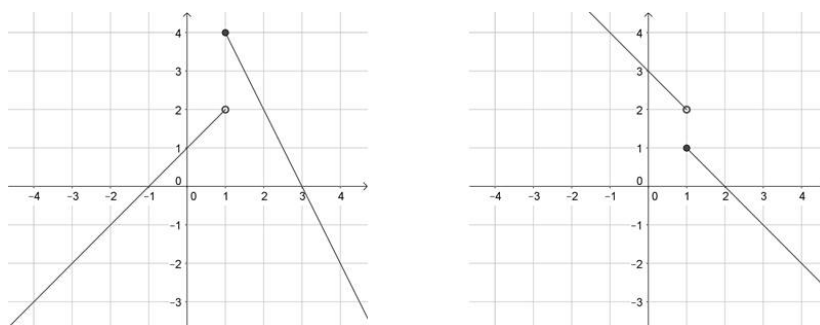


Abbildung 9: Funktionen aus Viholainen (2005, S.1814), bei denen die Nicht-Differenzierbarkeit bei $x = 1$ begründet werden sollte

Hier sollen nur die Antworten auf die ersten drei Aufgaben dargestellt werden, weil nur diese den Grenzprozess direkt betreffen.

Zu Frage 1: Anna erklärte mit Hilfe eines Bildes korrekt, wie Differenzenquotient und Ableitung mit Steigung von Sekante und Tangente zusammenhängen (S.1814). Gleiches traf auch für Ben zu, auch wenn er das Wort „Sekante“ nicht erwähnte (Viholainen, 2005, S.1814).

Zu Frage 2: Anna begründete die Nicht-Differenzierbarkeit der linken Funktion in Abbildung 9 damit, dass man keine eindeutige Tangente zeichnen könnte. Dann wollte sie über den links- und rechtsseitigen Grenzwert argumentieren (Viholainen, 2005, S.1814), konnte aber den linksseitigen Grenzwert nicht bestimmen. Auch auf die Frage, wie sich der Sprung in der Graphik bei der Bestimmung des Grenzwertes des Differenzenquotienten bemerkbar macht, konnte sie keine Antwort geben. Sie konnte also keine Verbindung zwischen graphischer und symbolischer Ebene herstellen.

Ben argumentierte damit, dass in der linken Graphik in Abbildung 9 der linksseitige Grenzwert positiv und der rechtsseitige negativ wären (Viholainen, 2005, S.1815). Als der Interviewer fragte, wie er denn den linksseitigen Grenzwert bestimmen würde, erklärte Ben, dass die linksseitige Steigung konstant bleiben würde, wenn $h \rightarrow 0$ geht. Er bezog sich also offensichtlich auf den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} f'(1 + h)$ und nicht auf den Grenzwert der Differenzenquotienten $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ für $h \rightarrow 0$, denn letztere bleiben nicht konstant (siehe Abbildung 9). Er beantwortete also nicht die Frage der Differenzierbarkeit, sondern die Frage der stetigen Fortsetzbarkeit der Ableitung (Viholainen, 2005, S.1815). Dementsprechend versagten seine Argumente beim rechten Graphen in Abbildung 9. Bei dieser Funktion ist die Ableitungsfunktion bei $x = 1$ stetig fortsetzbar, die Funktion selbst aber bei $x = 1$ nicht differenzierbar. Hier konnte Ben die Nicht-Differenzierbarkeit nicht begründen.

Zu Frage 3: Anna hatte Schwierigkeiten die Frage nach der Differenzierbarkeit der bei $x = 0$ oszillierenden Funktion zu beantworten. Letztendlich verneinte sie aufgrund der Oszillation der Funktion f mit der Gleichung (31) die Stetigkeit (Viholainen, 2005, S.1815). Ben versuchte die Aufgabe visuell zu lösen, begründete aber damit nur die Stetigkeit, was er dann selbst bemerkte (Viholainen, 2005, S.1816). Dann bestimmte er die Ableitung über die Differenzenquotienten und behauptete dann wegen der Verflachung des Graphen, dass $\lim_{h \rightarrow 0} h^3 \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ ist (Viholainen, 2005, S.1816).

Die Studie von Viholainen (2005) zeigt somit mehrere weitere Schwierigkeiten beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung, insbesondere beim Wechsel zwischen graphischer und symbolischer Ebene:

1. Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Verbindung des Kalküls vom links- und rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten zur graphischen Ebene
2. Versuch Fragen der Differenzierbarkeit graphisch zu beantworten, auch wenn dies nicht möglich ist (zum Beispiel bei oszillierenden Funktionen)

Studie von Park (2016) zur Verbindung zwischen den Repräsentationen der Ableitung beim Grenzübergang in Lehrbüchern: Park (2016) zeigte, dass auch in Lehrbüchern der Mathematik beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung nicht immer explizit die Beziehung zwischen den einzelnen Repräsentationen hergestellt wird, sowie innerhalb einer Repräsentation der Grenzübergang nicht immer konsequent in allen Stufen dargestellt wird. Dazu analysierte er mit Hilfe der Theorie der Commognition, wie in Lehrbüchern der Grenzübergang beim Konzept der Ableitung vermittelt wird. In der Theorie der Commognition wird der mathematische verbale und nonverbale Diskurs unter Beachtung folgender Facetten untersucht (Park, 2015, S.234):

1. *Word use*: Verwendung von Wörtern
2. *Visual mediators*: nonverbale Kommunikation, z.B. Zeichnungen
3. *Endorsed narratives*: dies sind Aussagen, die vom Sprecher als wahr angesehen werden, wobei die Studierenden hier andere Aussagen als wahr ansehen können als Lehrende
4. *Routines*: Muster, die im Diskurs gefunden werden können

Park (2016) analysierte drei in den USA weit verbreitete Calculus-Lehrbücher (Park, 2016, S.400). Diese waren Stewart (2010), Hugh-Hallet (2010) und Thomas u. a. (2010). Dazu betrachtete er in den Lehrbüchern alle Absätze oder Beispiele, in denen der Grenzübergang zur Ableitung an einer Stelle eine Rolle spielte. Diese bezeichnete er als *Episoden*. In den einzelnen Episoden untersuchte er dann jeweils vier Ebenen des Grenzübergangs (Park, 2016, S.401):

1. *Initial object*: Was war das Ausgangsobjekt vor dem Grenzprozess?
2. *Location*: Worauf wurde der Grenzprozess angewendet?
3. *Change*: Wie veränderte sich das Objekt durch den Grenzprozess?
4. *Final object*: Was ist das finale Objekt nach dem Grenzprozess?

Bei diesen Ebenen codierte er jeweils die verwendeten Symbole, die verbalen Erklärungen und die verwendeten Graphiken. Eine Beispielcodierung zu den Ausführungen in Stewart (2010, S.82) zur Bestimmung der Ableitung von $f(x) = x^2$ bei $x = 1$ ist in Tabelle 24 dargestellt.

	Symbol, Number	Words for symbol	Words for Graph	Graph
<i>Initial object</i>	$m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$	‚Slope‘		Graph mit einer Sekante
<i>Location</i>	2, 1.5, ..., 0.999	‚The closer x is to 1.‘	The closer P is to Q .	
<i>Change</i>	3, 2.5, ..., 1.999	‚The closer m_{PQ} is 2.‘		
<i>Final object</i>	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$	‚The slope of tangent line is 2.‘		Graph mit Tangente

Tabelle 24: Codierung eines Beispiels zur Illustration des Grenzübergangs im Lehrbuch von Stewart (2010, S.82) in Park (2016, S.401)

Danach fasste Park jede Episode in einer Tabelle mit den Kategorien *key words*, *initial object*, *limit process*, *final object* zusammen (siehe Tabelle 25). Auf dieser Basis ermittelte Park zu jedem Lehrbuch die bei den einzelnen Episoden verwendeten Repräsentationen von *Initial object*, *Limit process* und *Final object* und konnte darauf aufbauend Aussagen über deren Passung treffen. Exemplarisch sei hier ein Ausschnitt aus der Analyse verschiedener Episoden aus Hugh-Hallet (2010) dargestellt (siehe Tabelle 26).

<i>Key Words</i>	<i>Initial object</i>	<i>Limit process</i>	<i>Final object</i>
Slope	Symbol, Graph	Numbers	Number, Symbol, Graph

Tabelle 25: Zusammenfassung der Codierung des Beispiels zur Bestimmung der Ableitung von $f(x) = x^2$ bei $x = 1$ aus Tabelle 24 (Park, 2016, S.402)

Episode	<i>Key Words</i>	<i>Initial Object</i>	<i>Limit process</i>	<i>Final object</i>
L1	Velocity	Number	Numbers	Number
L2	Velocity	Symbol	Words	Symbol
L3	Slope	Part of the original graph	Zoomed-in graphs	Graph, word
L4	lope	Secant on curve	Secants on curve	Word with an arrow to a point on curve
...				

Tabelle 26: Ausschnitt aus der Codierung der Episoden zum Grenzübergang bei der Ableitung aus dem Lehrbuch von Hugh-Hallet (2010)

Die Analyse brachte dann folgende wesentliche Ergebnisse zur Behandlung des Grenzübergangs bei der Ableitung in den drei betrachteten Lehrbüchern (Park, 2016, S.416-417):

1. Die Mediatoren von *Initial object*, *Final object* und Grenzprozess passten oft in der Repräsentation nicht zueinander. Als Beispiel nennt Park, dass *Initial object* und *Final object* oft graphisch oder symbolisch dargestellt waren, der Grenzprozess jedoch nur verbal beschrieben wurde.

2. Teilweise wurde keine Verbindung zwischen verschiedenen visuellen Mediatoren hergestellt. Als Beispiel nennt Park, dass oft keine explizite Verbindung zwischen den Sekanten auf der graphischen und deren Steigungen auf der symbolischen Ebene hergestellt wurde.

Insgesamt zeigt die Studie von Park (2016), dass in Lehrbüchern der Mathematik beim Grenzübergang zur Ableitung die Beziehung zwischen den Repräsentationen beim Grenzübergang zur Ableitung und die Verbindung zwischen Ausgangsobjekt und Endobjekt über den Grenzprozess nicht immer in jeder Repräsentation dargestellt wird. Insofern ist es nicht verwunderlich, wenn auch Studierende beim Grenzübergang vom Differenzenquotienten zur Ableitung Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzobjekt in einer Repräsentation und bei der Verbindung der verschiedenen Repräsentationen haben.

4.2.3 Schwierigkeiten beim Verständnis des Tangentenkonzepts

Für ein adäquates Verständnis der graphischen Repräsentation der Ableitung an einer Stelle als Steigung der Tangente ist außerdem ein Verständnis des Begriffs der Tangente an eine Kurve notwendig. Der Tangentenbegriff wird in der Regel in der Schule zunächst geometrisch am Kreis als globale Berührende eingeführt. Beim Verständnis der graphischen Repräsentation der Ableitung als Steigung der Tangente an den Funktionsgraph muss dieser jedoch erweitert werden. Die Tangente ist dabei entweder als *Grenzlage von Sekanten* oder als *Gerade, die sich dem Graphen der Funktion um die betrachtete Stelle x_0 lokal am besten anschmiegt*, aufzufassen (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.47,S.72).

Dass das Verständnis dieses analytischen Tangentenbegriffs ein Problem darstellt, zeigte bereits Vinner (1982). Er legte 278 College-Studierenden einen Test mit folgenden Aufgaben vor (Vinner, 1982, S.26):

1. Es wurden 3 Kurven mit einem festen Punkt P vorgegeben, bei denen die Studierenden entscheiden sollten, ob es durch den Punkt genau eine Tangente, keine Tangente oder mehrere Tangenten gibt. Weiterhin sollten sie diese einzeichnen. Die Kurven hatten folgende Eigenschaften am Punkt P :
 - eine Kurve, bei der P Sattelpunkt ist
 - Eine Kurve, die zum Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ passt, mit $P = (0, 0)$
 - Eine Kurve, bei der der Graph auf einer Seite von P eine waagerechte Gerade ist
2. Die Studierenden sollten sich an die Definition der Tangente aus dem Kurs oder aus vergangenen Kursen erinnern. Falls sie sich nicht erinnern können, sollten sie selbst eine *personal concept definition* angeben.

Der Anteil richtiger Lösungen zu Aufgabe 1, wo die Anzahl der Tangenten angegeben und die Tangenten ggf. eingezeichnet werden sollten, ist in Tabelle 27 dargestellt.

Der häufigste Fehler bei der Kurve mit dem Sattelpunkt war, dass eine schiefe Gerade als Tangente eingezeichnet wurde (siehe Abbildung 10, 38% der Fälle). Andere Fehlermuster traten bei dieser Kurve in weniger als 10% der Fälle auf. Beim Graphen $f(x) = \sqrt{|x|}$ traten mehrere Fehler häufig auf (Vinner, 1982, S.27):

Setting	Anteil richtiger Lösungen
Kurve mit Sattelpunkt	18%
Graph $f(x) = \sqrt{ x }$	8%
Kurve, die auf einer Seite von P gerade ist	12%

Tabelle 27: Lösungshäufigkeiten zu den Tangentenaufgaben von Vinner (1982, S.27) ($N = 278$)

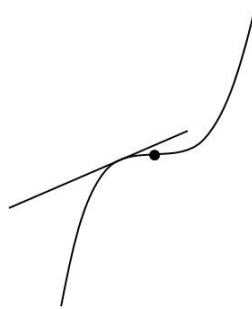


Abbildung 10: Von 38% der Studierenden gezeichnete falsche Tangente an den Punkt P ($N = 278$)

1. In 42% der Fälle wurde keine Tangente gezeichnet.
2. In 18% der Fälle wurden zwei Geraden als Tangenten eingezeichnet, die sich jeweils den beiden Ästen des Graphen von $f(x) = \sqrt{|x|}$ anschmiegen.
3. In weiteren 18% der Fälle gaben die Studierenden an, dass es unendlich viele Tangenten gibt.
4. In 14% der Fälle wurde irgendeine Schnittgerade bei $x = 0$ als Tangente eingezeichnet.

Beim Graphen, der auf einer Seite gerade war, war der häufigste Fehler eine schiefe Gerade, die den Graphen nur im Punkt P berührte (33%). Diese passt zur Vorstellung der Tangente am Kreis als globale Berührende.

Bei der Frage nach der Definition der Tangente kategorisierte Vinner die Antworten in zwei Kategorien (Vinner, 1982, S.28):

Kategorie 1: eine geometrische Definition mit globalen Eigenschaften (z.B. als Berührende, die nicht schneiden darf oder die auf einer Seite der Kurve liegt)

Kategorie 2: eine der im Kurs angebotenen Definitionen (zum Beispiel als Grenzlage von Sekanten)

Die Ergebnisse sind in Tabelle 28 zu sehen.

Insgesamt zeigt die Studie von Vinner (1982) damit, dass viele Studierende den Tangentenbegriff nicht angemessen vom geometrischen Setting am Kreis auf Tangenten an Kurven erweitert haben.

Kategorie 1	Kategorie 2	Andere Definition	Keine Definition
35%	41%	19%	4%

Tabelle 28: Tangentendefinitionen der Studierenden aus Vinner (1982, S.28) ($N = 278$)

Eine wesentlich differenzierte Studie zum Verständnis des Tangentenbegriffs ist von Biza (2007). Sie ordnete die Vorstellungen von 182 Studierenden einer griechischen Universität zu Tangenten an Kurven in verschiedene Modelle ein (Biza, 2007, S.7) (die Studierenden hatten sowohl Geometrie als auch Calculus in der Schule, aber nicht in der Universität gehört). Als Basis zur Konstruktion dieser Modelle nutzte Biza folgende Charakteristiken von Tangenten an Kurven (Biza, 2007, S.7):

- X1: Die Tangente hat einen gemeinsamen Punkt mit der gesamten Kurve.
- X2: Es gibt eine Umgebung des Tangentialpunktes außerhalb derer die Tangente weitere gemeinsame Punkte haben darf:
 - Bei X2A dürfen alle weiteren Punkte nur Berührungspunkte sein.
 - Bei X2B dürfen die weiteren Berühr- und Schnittpunkte auf dem Graphen im Ausschnitt nicht sichtbar sein.
 - Bei X2C dürfen weitere Berühr- und Schnittpunkte existieren und sichtbar sein.
- X3: Die Tangente kann mit der Kurve übereinstimmen, falls diese eine Gerade ist.
- X4: An Wendepunkten schneidet die Tangente die Kurve.
- X5: Die Glattheit der Kurve ist Voraussetzung für die Existenz einer Tangente.

Biza (2007) legte nun den Studierenden einen Test vor. In Biza (2007) sind daraus vier Aufgaben dargestellt (Biza, 2007, S.8):

- Aufgabe 1: Versuchen Sie in einfachen Worten zu erklären, was Sie denken, wenn Sie den Ausdruck Tangente hören.
- Aufgabe 2: Von einer Gerade ist bekannt, dass sie Tangente an einer Kurve in einem Punkt A ist. Schreiben Sie so viele Eigenschaften wie Ihnen einfallen über den Zusammenhang zwischen der Kurve und ihrer Tangente an dem Punkt A .
- Aufgabe 3: Entscheiden Sie, welche der in der folgenden Abbildung (siehe Abbildung 11) dargestellten Geraden Tangenten am Punkt A sind?
- Aufgabe 4: Skizzieren Sie die Tangenten der folgenden Kurven am Punkt A . [die Aufgabe liefert keine neuen Erkenntnisse, weshalb die Kurven hier nicht im Detail dargestellt sind]

Die Antworten der ersten beiden Aufgaben wurden qualitativ analysiert, die Antworten zu Aufgabe 3 (und 4) wurden quantitativ ausgewertet. In Abbildung 11 sind bei den einzelnen Kurven die Charakteristiken von Tangenten dazugeschrieben, die laut

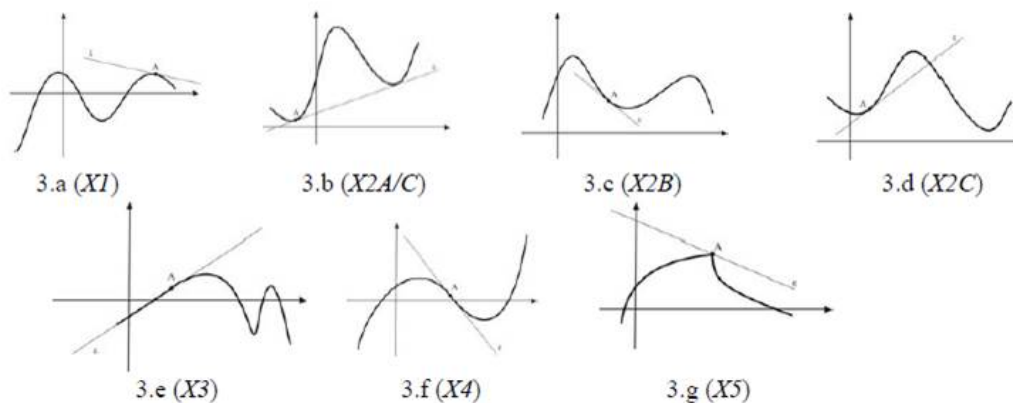


Abbildung 11: Vorgegebene Kurven im Test von Biza, bei denen die Studierenden entscheiden sollten, ob die Geraden Tangenten im Punkt A sind (Biza, 2007, S.8)

Modell	Beschreibung	Zum Modell passende Tangenten aus Abbildung 11
M1	Adäquate Vorstellungen zum Konzept der Tangente an eine Kurve Angesprochene Charakteristiken: alle	3.a-3.f
M2	Adäquate Vorstellungen zur Tangente an eine Kurve bis auf die Möglichkeit der Übereinstimmung mit der Kurve Angesprochene Charakteristiken: alle außer X3	3.a, 3.b, 3.c, 3.d, 3.f
M3	Tangente als lokale Berührende am Tangentialpunkt mit Möglichkeit der Übereinstimmung mit der Kurve Angesprochene Charakteristiken: alle außer X4	3.a-3.e
M4	Tangente als lokale Berührende am Tangentialpunkt, bei der in einer Umgebung kein weiterer Berührungspunkt/Schnittpunkt liegen darf Angesprochene Charakteristiken: alle außer X3, X4	3.a-3.d
M5	Tangente als Gerade, die die Kurve nirgends schneiden darf, wobei mit der Kurve identische Abschnitte erlaubt sind Angesprochene Charakteristiken: X1, X2A, X3, X5	3.a, 3.b, 3.e
M6	Tangente als globale Berührende an genau einem Punkt, an Spitzen können Tangenten existieren oder auch nicht Angesprochene Charakteristiken: X1	3.a, , evtl. 3.c, evtl. 3.g
M7	Tangente als Gerade, die keine Schnittpunkte neben dem Tangentialpunkt haben darf, wobei mit der Kurve identische Abschnitte erlaubt sind. Angesprochene Charakteristiken: alle außer X2B und X2C	3.a, 3.b, 3.e, 3.f
M8	Tangente als Gerade mit genau einem Berührungspunkt oder Schnittpunkt, die auch an Spitzen und Ecken existiert Angesprochene Charakteristiken: X1, X4	3.a, 3.f, 3.g

Tabelle 29: Modelle des Tangentenbegriffs nach Biza (2007, S.9) und Zuordnung der Kurven aus Abbildung 11 zu den Modellen

Biza den Zusammenhang zwischen den Kurven und den Tangenten beschreiben. Aus der Kombination mehrerer dieser Charakteristiken entwickelte Biza mehrere mentale Modelle des Tangentenbegriffs der Studierenden, die in Tabelle 29 beschrieben sind (siehe auch (Biza, 2007, S.9)).

Bei Modell M1 wurde der Begriff der Tangente an einer Kurve mit allen seinen Facetten erfasst. Bei den Modellen M6 und M8 (genau ein Schnittpunkt) hat keine Erweiterung des Tangentenbegriffes vom Kreis stattgefunden. Zu Modell M6 ist noch zu sagen, dass Studierende von Biza auch in dieses Modell einsortiert wurden, wenn sie neben 3.a und 3.g. auch 3.c. als Tangente akzeptierten (siehe Abbildung 11), weil dort der zweite Schnittpunkt nicht sichtbar ist. Bei allen anderen Modellen hat eine partielle Erweiterung des Tangentenbegriffs vom Kreis zum Konzept der Tangente an eine Kurve stattgefunden.

Mit Hilfe der Frage, ob die Geraden in Abbildung 11 Tangenten sind, hat Biza nun die Studierenden den einzelnen Modellen zugeordnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 30 dargestellt.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	unklar
Anzahl	18	33	13	42	27	15	13	7	14
Anteil	9.9%	18.1%	7.1%	23.1%	14.8%	8.2%	7.1%	3.8%	7.7%

Tabelle 30: Anteil der Studierenden mit den zugehörigen Tangentenmodell aus Tabelle 29 (Biza, 2007, S.9), ($N = 182$)

Nur bei 12.1% der Probanden fand keinerlei Erweiterung des Tangentenkonzepts vom Konzept der Tangente an einen Kreis statt (Modelle M6 und M8, nur ein Schnittpunkt). Eine vollständige Erweiterung des Tangentenkonzepts zum Konzept der Tangente an eine Kurve (Modell M1) fand aber auch nur bei 9.9% der Studierenden statt. Die meisten Studierenden haben ihr Modell der Tangente also teilweise erweitert durch gewisse Eigenschaften. In mehr als 10% der Fälle traten dabei die Modelle M2 (*keine* Möglichkeit der Übereinstimmung mit dem Funktionsgraphen), M4 (lokale Berührende, die im Tangentialpunkt nicht schneiden darf und in einer Umgebung keinen gemeinsamen Punkt haben darf) und M5 (lokale Berührende, die im Tangentialpunkt nicht schneiden darf, in einer Umgebung keinen gemeinsamen Punkt haben darf und global lediglich weitere Berührungspunkte und keine Schnittpunkte haben darf) auf (siehe Tabelle 29). Bei diesen Modellen wurde verstanden, dass Tangenten in einer Umgebung des Tangentialpunktes *keine* weiteren isolierten gemeinsamen Punkte mit der Kurve haben dürfen. Wesentlich seltener wurde akzeptiert, dass Tangenten an Wendepunkten schneiden dürfen (53% akzeptierten das nicht).

Insgesamt zeigt die Studie, dass die Vorstellungen der Studierenden zu Tangenten wesentlich heterogener sind als die von Vinner (1982) vorgeschlagene Zweiteilung in eine geometrische Auffassung (Tangente als Gerade mit genau einem Berührungspunkt) und eine analytische Auffassung (Tangente als Grenzlage von Sekanten). Häufig fanden partielle Erweiterungen des Tangentenbegriffs vom Begriff der Tangente an einen Kreis zum Begriff der Tangente an eine Kurve statt. Eine vollständige Erweiterung auf den Tangentenbegriff an eine Kurve mit allen seinen möglichen Charakteristiken fand jedoch nur bei 9.9% der Probanden statt (vor allen Dingen das mögliche Schneiden an Wendepunkten wurde von der Mehrheit nicht zugelassen). Daher könnte es bei einigen

Funktionen zu Schwierigkeiten beim Verständnis der graphischen Repräsentation der Ableitung $f'(x_0)$ an bestimmten Stellen x_0 kommen (zum Beispiel an Wendestellen).

4.3 Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitungsfunktion als Funktion

Die letzte Verständnisebene des in Kapitel 3 entwickelten theoretischen Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, basierend auf dem Modell von Zandieh (2000) (Tabelle 4), ist die Ebene *Function* (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). In dieser geht es um das Verständnis der Ableitung als Funktion.

Auch hier sind in der Literatur zahlreiche Schwierigkeiten dokumentiert. Diese und mögliche Gründe dafür sind in diesem Kapitel näher beschrieben. Eine wesentliche Ursache ist hierbei mangelndes Verständnis des Kovariationsaspektes von Funktionen (Betrachtung der Auswirkungen von Änderungen der unabhängigen Variablen einer Funktion auf die abhängige Variable) bzw. sind Schwierigkeiten beim kovariationalen Argumentieren, worauf dann im Detail eingegangen wird. Dementsprechend gliedert sich das Kapitel in:

1. ein Unterkapitel zu Fehlvorstellungen beim Verständnis der Ableitung als Funktion
2. ein Unterkapitel zur Problematik des Verständnisses des Kovariationsaspektes als Ursache für diese Schwierigkeiten
3. ein Unterkapitel zu Schwierigkeiten der Studierenden beim kovariationalen Argumentieren

4.3.1 Fehlvorstellungen beim Verständnis der Ableitung als Funktion

Wie bereits in einigen Studien aus Kapitel 4.1.1 über Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung einer linearen Funktion gezeigt, haben Studierende Schwierigkeiten diese als Änderungsrate im Kontext zu deuten (siehe z.B. (McDermott u. a., 1987)). Teilweise wird hierbei die Steigung mit dem Funktionswert verwechselt. Ähnliche Probleme sind auch bei Aufgaben zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen einer beliebigen Funktion und ihrer Änderungsrate (als Funktion) dokumentiert. Typische Fehler sind:

1. Graph-als-Bild Fehler: Übertragung einer Situation aus dem Kontext auf den Graphen (Beichner, 1994, S.751)
2. Annahme von Ähnlichkeiten zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Änderungsrate (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.6-7)
3. Slope/height-confusion: Verwechslung von Steigung und Ausgangsfunktion (Beichner, 1994, S.751)

Zum Graph-als-Bild-Fehler: Im Zusammenhang mit Kontextaufgaben ist der Graph-als-Bild Fehler ein häufiger Fehler. Dies hat zum Beispiel Hoffkamp (2011) festgestellt, als sie 100 Mathematikstudierenden an der TU Berlin folgende Aufgabe nach Schlöglhofer (2000, S.17) vorlegte (Hoffkamp, 2011, S.12):

Die gestrichelte Linie [in Abbildung 12] wird vom Punkte A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph passt? Begründen Sie Ihre Wahl.

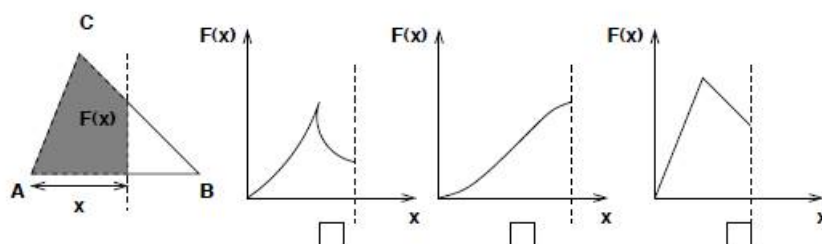


Abbildung 12: Dreiecksaufgabe zum Graph-als-Bild Fehler aus Hoffkamp (2011, S.12)

Von den 100 Studierenden gaben nur 66 eine richtige Lösung an. Nur 57 konnten ihre Lösung begründen. Der häufigste Fehler war der Graph-als-Bild Fehler (Antwort 3) (Hoffkamp, 2011, S.13). Eine zugehörige Begründung war:

„Die Fläche ist so, wie die Fläche $F(x)$.“

Der Graph-als-Bild Fehler wurde auch in physikalischen Settings nachgewiesen. Zum Beispiel enthielt die bereits in Kapitel 4.1.1 dargestellte Studie von McDermott u. a. (1987) zur Interpretation von Graphen im Bewegungskontext auch eine Aufgabe, in der zu einer vorgegebenen Rollbahn eines Balles ein Geschwindigkeits-Zeit Diagramm gezeichnet werden sollte (McDermott u. a., 1987, S.507). Ein sehr häufiger Fehler war, dass die Rollbahn abgebildet wurde (McDermott u. a., 1987, S.509). Ähnliches haben auch Bell u. Janvier (1981) dokumentiert. Sie gaben Schülern ein Geschwindigkeits-Zeit Diagramm, zu dem sie die passende Rennbahn auswählen sollten (siehe Abbildung 13). Die meisten Schüler wählten Antwort G aus (Bell u. Janvier, 1981, S.39).

Den Graph-als-Bild Fehler kann man auch noch feiner unterteilen. So unterschied Clement (1985, S.374) zwischen *global correspondence* und *local correspondence*. Bei ersterem wird das gesamte Bild abgebildet (soweit möglich), bei letzterem nur einige Eigenschaften des Graphen, wie Extrempunkte. So erfüllt zum Beispiel Graph 1 in Abbildung 12 nur die Eigenschaft der *local correspondence* zwischen dem Bild und der Funktion, während Graph 3 der *global correspondence* entspricht.

Zum Fehler der Annahme von Ähnlichkeiten zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Änderungsrate: Diesen Fehlertyp haben zum Beispiel Nemirovsky u. Rubin (1992) in einer Studie nachgewiesen. In ihr sollten Schüler zu gegebenen Graphen der Änderungsrate den Graphen der Ausgangsfunktion vorhersagen (im Geschwindigkeitskontext, im Kontext von Zuflussraten und ohne Kontext, (Nemirovsky u. Rubin, 1992,

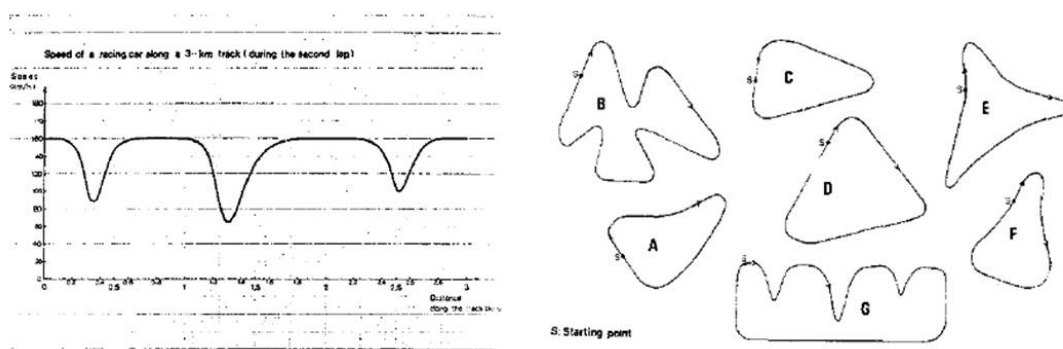


Abbildung 13: Rennbahnaufgabe zum Graph-als-Bild Fehler aus Bell u. Janvier (1981, S.38-39)

S.2-3)). Dabei beobachteten sie folgende stillschweigende Annahmen von Schülern über Gemeinsamkeiten zwischen einer Funktion und ihrer Änderungsrate (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.2-3):

1. Die Ausgangsfunktion und ihre Änderungsrate haben den gleichen Graphen.
2. Die Ausgangsfunktion und ihre Änderungsrate haben dasselbe Monotonieverhalten.
3. Die Ausgangsfunktion und ihre Änderungsrate haben die gleiche Form (zum Beispiel eine Gerade).
4. Die Ausgangsfunktion und ihre Änderungsrate haben das gleiche Vorzeichen.
5. Graphenmanipulationen wie Verschiebungen oder Spiegelungen übertragen sich von der Änderungsrate auf die Ausgangsfunktion.

Eine mögliche Erklärung für diese Ergebnisse ist, dass die Schüler hier noch keinen Calculus-Kurs hatten (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.3). Weshalb die Schüler in den Augen von Nemirovsky u. Rubin (1992, S.2-3) diese falschen Annahmen trafen, wird im nächsten Unterkapitel 4.3.2 näher beleuchtet.

Zur slope/height-confusion: Hier wird die Steigung der Funktion mit den Werten der Ausgangsfunktion verwechselt. Dies ist ein sehr typischer Fehler, wie dies zum Beispiel schon (Beichner, 1994, S.751) zeigte. Er entwickelte einen Tests zum Verständnis von Graphen in der Kinematik (Beichner, 1994, S.750), den TUG-K Test (*Test of Understanding Graphs in Kinematics*). In diesem stand die Beziehung zwischen Funktionen und ihrer Änderungsrate im Bewegungskontext im Mittelpunkt. Der Test wurde in der finalen Version insgesamt 524 Probanden, Schülern und Studierenden am College, vorgelegt (Beichner, 1994, S.752). Er bestand aus 21 Multiple-Choice Items mit je 5 Antwortmöglichkeiten. Die Distraktoren wurden überwiegend aus einer Pilotversion mit offenen Aufgaben entwickelt (Beichner, 1994, S.752). Die 21 Items lassen sich sieben Aufgabentypen zuordnen (je 3 Items zu einem Typ), die in Tabelle 31 dargestellt sind.

Gegebener Wert	Aufgabe
Weg-Zeit Diagramm	Bestimmung der Geschwindigkeit
Geschwindigkeits-Zeit Diagramm	Bestimmung der Beschleunigung oder des zurückgelegten Weges
Beschleunigungs-Zeit Diagramm	Bestimmung der Änderung der Geschwindigkeit
Graph zur Beschreibung einer Bewegung	Auswahl eines anderen passenden Graphen
Graph zur Beschreibung einer Bewegung	Auswahl einer verbalen Interpretation
Verbale Beschreibung einer Bewegung	Auswahl des passenden Graphen

Tabelle 31: Aufgabentypen des TUG-K Tests von Beichner (1994, S.752)

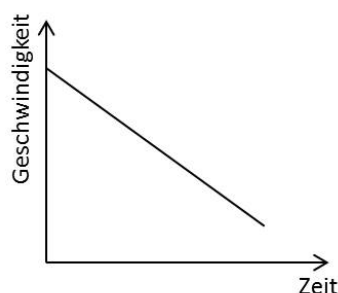


Abbildung 14: Geschwindigkeits-Zeit Diagramm aus Beichner (1994, S.761)

Ein Beispielitem ist die Aufgabe zur Beschreibung der in Abbildung 14 dargestellten Bewegung. Bei ihr standen folgende Antwortmöglichkeiten zur Verfügung (Beichner, 1994, S.761):

- (A) Das Objekt bewegt sich mit konstanter Beschleunigung.
- (B) Das Objekt bewegt sich mit gleichmäßig abnehmender Beschleunigung.
- (C) Das Objekt bewegt sich mit gleichmäßig steigender Geschwindigkeit.
- (D) Das Objekt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.
- (E) Das Objekt bewegt sich nicht.

Die slope/height-confusion entspricht Antwort (B). Diese wurde von 72% der Studierenden gewählt (siehe Tabelle 32).

Die slope/height-confusion tritt aber nicht nur im Kontext auf, was zum Beispiel aus einer Aufgabe aus dem Precalculus-Assessment Test, einem Test zum Verständnis mathematischer Konzepte aus Precalculus-Kursen, deutlich wird (Carlson u. a., 2010). Gegeben war der in Abbildung 15 dargestellte Funktionsgraph. Es sollte das Verhalten der Funktion im Intervall von $x = 5$ bis $x = 12$ beschrieben werden. Dabei standen die in Tabelle 33 genannten Antwortmöglichkeiten zur Verfügung. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 33 dargestellt. Interviews ergaben, dass bei der Wahl des am häufigsten gewählten Distraktors A tatsächlich die slope/height-confusion vorlag (Carlson u. a., 2010).

Antwortmöglichkeit	Antworthäufigkeit
(A) Das Objekt bewegt sich mit konstanter Beschleunigung.	18%
(B) Das Objekt bewegt sich mit gleichmäßig abnehmender Beschleunigung.	72%
(C) Das Objekt bewegt sich mit gleichmäßig steigender Geschwindigkeit.	2%
(D) Das Objekt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.	5%
(E) Das Objekt bewegt sich nicht.	0%
Keine Antwort	2%

Tabelle 32: Antworthäufigkeiten auf die Frage nach der Beschreibung und Bewegung aus Abbildung 14 im TUK-G-Test (Beichner, 1994, S.753) ($N = 524$)

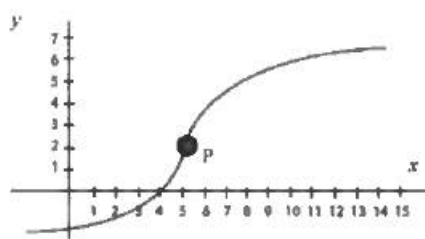


Abbildung 15: Graphik zu einem Item aus dem PCA zur Beschreibung des Wachstums einer Funktion von $x = 5$ bis $x = 12$ (Carlson u. a., 2010)

Antwortmöglichkeit	Antworthäufigkeit
A Steigend mit steigender Rate	42%
B Steigend mit fallender Rate	49%
C Steigend mit konstanter Rate	6%
D fallend mit steigender Rate	1%
E fallend mit fallender Rate	1%
Keine Antwort	1%

Tabelle 33: Antworthäufigkeiten im PCA zur Aufgabe aus Abbildung 15 ($N = 672$)

Insgesamt haben Studierende also zahlreiche Fehlvorstellungen beim Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion.

Schwierigkeiten beim Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und Ableitung auf graphischer Ebene: Auch auf der rein graphischen Ebene ohne Kontext bei der Deutung der Ableitung als Steigung gibt es Probleme. Diese wurden zum Teil bereits in Kapitel 4.2.2 angesprochen. Ein typischer Fehler ist die Ansicht, dass die Steigung der Funktion an einzelnen Punkten gleich 0 ist (Vom Hofe, 1998, S.279) (siehe Kapitel 4.2.2). Wird ein entsprechender Punkt nur isoliert betrachtet, so steigt die Funktion dort nicht.

Ein weiteres, für mich sehr unerwartetes Problem auf graphischer Ebene haben Aspinwall u. a. (1997) in einer Studie gezeigt. Sie zeigten, dass bei der Arbeit mit der Ableitung im graphischen Setting sogenannte *uncontrollable images* auftauchen können. Dies sind mentale Bilder, also Teile des *concept image* zu einem Konzept, welche die Lernenden zu Trugschlüssen führen können (Aspinwall u. a., 1997, S.303). Aspinwall

et al. bezeichneten solche Bilder als *uncontrollable*, weil sie ungefragt im Kopf des Betreffenden erscheinen und sogar erhalten bleiben, auch wenn es Beweise gibt, dass diese Bilder falsch sind (Aspinwall u. a., 1997, S.303).

Aspinwall u. a. (1997) fanden solche Bilder im Rahmen einer Fallstudie auch im Zusammenhang mit der Ableitung. Der Teilnehmer der Fallstudie war der Calculus III Student Tim, der wegen äußerer Umstände an einem Individualkurs teilnahm (Aspinwall u. a., 1997, S.306). In der Studie wurden 20 Aufgaben entwickelt um Tims Verständnis der Ableitungsfunktion herauszufinden (Aspinwall u. a., 1997, S.306). Vier davon waren Rechenaufgaben, die bereits vor Beginn der Studie entwickelt wurden. Die anderen Aufgaben, die keine Routineaufgaben waren, wurden während der Studie entwickelt (Aspinwall u. a., 1997, S.306). Dabei wurde wie folgt vorgegangen (Aspinwall u. a., 1997, S.307):

1. Stellen der Aufgaben an Tim
2. Analyse von Tims Antworten
3. Interview mit Tim
4. Analyse der Interviews
5. Entwicklung weiterer Aufgaben

In der Aufgabe, die in Aspinwall u. a. (1997) dargestellt ist, ging es um das Zeichnen der Ableitungsfunktion einer Parabel bei gegebenem Graphen der Ausgangsfunktion, wobei Tim nicht wusste, dass es sich um eine Parabel handelte (Aspinwall u. a., 1997, S.309). Als Lösung zeichnete er die in Abbildung 16 dargestellte Funktion.

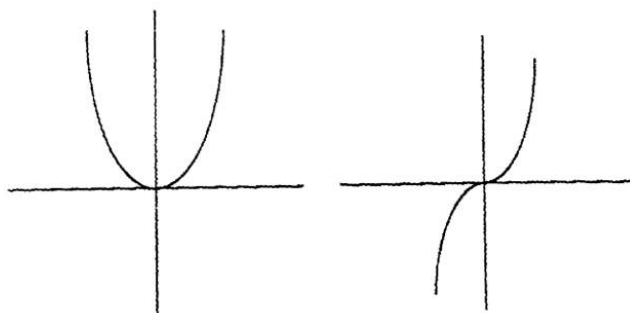


Abbildung 16: Ausgangsgraph und von Tim gezeichnete Ableitungsfunktion, (Aspinwall u. a., 1997, S.309)

Er begründete das Vorgehen wie folgt (Aspinwall u. a., 1997, S.309):

„Well, I’m trying to do the derivative of this graph. It’s [the slope is] a greater negative here [zeigt auf die negative x -Achse], and then it slowly becomes more positive near 0 to more and more positive values. So, I knew the line [damit meint er den Graphen der Ableitung] had to go from quadrant III to quadrant I.“

Diese Argumentation auf Basis der Graphik in Abbildung 16 ist auf den ersten Blick überzeugend. Insbesondere weil die Graphik suggeriert, dass die Parabel am Rand des gezeichneten Ausschnitts senkrecht nach oben geht.

Tim wurde nun gefragt, weshalb er eine Kurve (und keine Gerade) gezeichnet hatte. Er begründete das wie folgt (Aspinwall u. a., 1997, S.310):

,Wait a minute, let me see. Let me think. [30 Sekunden gehen vorbei] See, this is a parabola, and a parabola, if you go up far enough, it will go until the slope is undefined. Pretty much so. I mean, it starts off real slow, and it works up. I have to show that that on my graph also.'

Auf die Nachfrage, was er mit „undefined“ meinte, kam heraus, dass er glaubte, dass die Parabel vertikale Asymptoten hatte. Auf die Nachfrage, wie er das in dem Graph der Ableitung verdeutlichte, erwiderte er (Aspinwall u. a., 1997, S.310):

,The slope becomes undefined. But how would you show that on the derivative? I guess I couldn't really do that on a graph because you can't really show infinity on the graph. But wait a minute, the slope becomes super negative or super positive, so it's not really undefined if that's the case. It's just, as I said, super negative or super positive.'

Tim erklärte auf weitere Nachfragen, dass er der Meinung war, dass die Parabel so aussieht, dass sie ab einer gewissen Stelle gerade nach oben verlaufen würde (Aspinwall u. a., 1997, S.310). An welcher Stelle dieser Punkt erreicht war, konnte er nicht sagen. Andererseits wusste Tim, der den Graphen als Parabel erkannt hatte, dass bei Parabeln der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ ist, was zu einem Konflikt führte. An dieser Stelle sagten Aspinwall u. a. (1997, S.310), dass bei Tim ein *uncontrollable image* auftauchte. Er wusste zwar, dass die Äste der Parabel nicht senkrecht nach oben verlaufen können, sah aber immer diese vertikale Steigung im Bild (Aspinwall u. a., 1997, S.310). Dann fragte der Interviewer, wie denn die Ableitung aussehen würde, wenn die in Abbildung 16 dargestellte Funktion der Graph von $y = x^2$ wäre. Tim wusste dann, dass der Graph der Ableitung eine Gerade sein müsste, blieb aber weiterhin verwirrt (Aspinwall u. a., 1997, S.311):

,I'm still puzzled about the original question you gave me, $y = x^2$. It comes out to be a straight line if you take the derivative. It puzzles me, it shouldn't be a straight line. It's what I was getting at before; eventually that parabola goes up straight. I must be thinking faulty of it. This seems like a contradiction to me. Because I'm trying to see it in my head and see that, once you reach way out there to infinity, $y = x^2$ is going to be a straight line up. But the derivative is a straight line that keeps going off where I see the parabola straight up. While y' is a straight line, it will just be chunking along. Is there a fault in seeing it that way? I eventually see that straight line not as working out.'

Tim bemerkte also, dass seine Vorstellungen zum graphischen Ableiten nicht dasselbe Resultat lieferten, wie algebraisches Ableiten. Er fuhr dann wie folgt fort (Aspinwall u. a., 1997, S.312):

,I feel like eventually it [der Graph der Ableitung] should be increasing faster. The big thing that still confuses me is that, close to 0, it doesn't

seem as though it is proportionally a rate as stabilized as it is up toward the end. Because it is not so stable, I don't see how it [die Ableitung] can be a straight line. When I look at this graph [den Originalgraphen der Parabel] I would probably go with my original graph. Maybe it's an optical illusion. It seems the slope is changing quite a bit faster in that area [around 0].‘

Hier zeigte Tim noch ein zweites unkontrollierbares Bild. Er war der Ansicht, dass sich die Änderungsrate der Parabel nahe bei 0 schneller ändert als an den Enden der Parabel, wo die Änderungsrate „stabiler“ wirkte. Auch dieses Bild konnte er nicht kontrollieren.

In den nächsten Tagen überlegte Tim, was seine Vorstellungen mit den vertikalen Asymptoten ausgelöst haben könnte, und kam nach einigen Tagen zu folgender Antwort (Aspinwall u. a., 1997, S.312):

,But another thing I thought about afterwards was, when I saw the graph going up, logically we assume that it's going straight up. As it goes straight up, we don't see the rest of it, so we just assume it's going straight up.‘

Er erkannte also, dass seine falsche Vorstellung dadurch ausgelöst wurde, weil er nur einen Teil des Graphen sehen konnte.

Insgesamt zeigt die Studie, dass es auch auf der rein graphischen Ebene Schwierigkeiten beim Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion geben kann, die sich durch Gegebenheiten der Zeichnung (z.B. Beschränkung auf Ausschnitte) ergeben können. Hier wurde das am Beispiel einer Parabel deutlich. Durch die Begrenzung der Parabel auf einen Ausschnitt wirkte es für Tim so, als ob diese vertikale Asymptoten hatte, was dann folgerichtig zu Tims falschem Ableitungsgraph führte. Das von der Parabel erzeugte mentale Bild in Tims Kopf war so stark, dass Tim es nicht unmittelbar überwinden konnte, nachdem ihm die Gleichung der Parabel $y = x^2$ gegeben wurde, deren Ableitung eine Gerade ist, was Tim wusste.

4.3.2 Mangelndes Verständnis des Funktionsbegriffs als wichtige Ursache für Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitungsfunktion

Eine wesentliche Ursache für die im letzten Kapitel genannten Schwierigkeiten beim Verständnis des Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion liegt in einem mangelnden Verständnis des Funktionskonzeptes. So wies Monk (1994) nach, dass man für ein Verständnis der Ableitungsfunktion als Funktion eine bestimmte Art des Verständnisses von Funktionen benötigt, die er als *Across-time*-Verständnis bezeichnete (Monk, 1994, S.21). Diese Bezeichnungen wählte er dabei nicht nur für Funktionen mit der unabhängigen Variable „Zeit“, sondern für alle Funktionen, die auf einem Intervall definiert sind (inklusive $D_f = \mathbb{R}$).

Methodik von Monk: Er entwickelte für Studierende in Calculus-Kursen der USA vier Aufgaben zur Deutung von Funktionen und ihrer Änderungsraten (mit und ohne Kontext) in gegebenen Graphiken. Jede der Aufgaben bestand aus zwei Unteraufgaben: (1) eine, in der die Funktion nur an einer Stelle betrachtet werden musste, (2) und eine, für deren Lösung die Betrachtung auf dem gesamten Bereich notwendig war (Monk, 1994, S.22).

Eine Beispielaufgabe ist die Aufgabe „two speed graphs“ mit den in Abbildung 17 dargestellten Geschwindigkeits-Zeit Graphen, zu der folgende Unteraufgaben formuliert wurden:

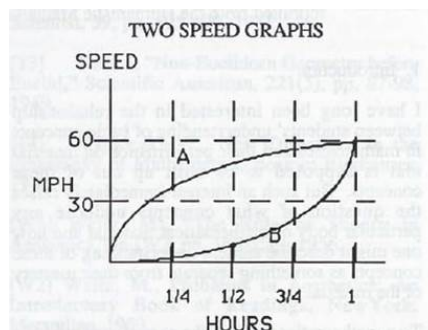


Abbildung 17: Aufgabe von Monk (1994, S.22) zum Verständnis von Änderungsraten an Stellen und über einen gesamten Zeitraum im Vergleich

- Welches der Autos ist weiter bei der Zeit $\frac{3}{4}$? Ist Auto A schneller beim Zeitpunkt $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$?
- Sagen Sie, ob die Autos am Zeitpunkt $t = 1$ am dichtesten beieinander sind oder nicht. Kommen Sie im Zeitraum von $\frac{1}{2}$ Stunde bis 1 Stunde näher zusammen oder entfernen Sie sich voneinander?

Die anderen drei Aufgabenkomplexe mit je zwei Unteraufgaben beinhalten folgende mathematischen Inhalte (Monk, 1994, S.22):

- Verhalten der Steigung der Sekante beim Differenzenquotienten
- Fläche unter einem Funktionsgraphen
- Steigung der Tangente

Als zweites konkretes Beispiel soll hier noch die innermathematische Aufgabe zur Sekantensteigung dargestellt werden (die mit der Tangentensteigung eignet sich meiner Meinung nach nicht, weil dort die Aufgabenteile a) und b) nicht gut zusammenpassen). Gegeben war die Graphik einer konkaven Funktion, in die eine Sekante zwischen den Punkten $M = (P, f(P))$ und $N = (Q, f(Q))$ eingezeichnet war (Monk, 1994, S.22). Dann wurden folgende Fragen gestellt:

- Finden Sie die Steigung der Sekante und den Wert Δy , wenn $M = (1, 6)$ und $N = (4, 12)$.
- Steigt oder fällt der Wert der Steigung der Sekante, wenn Q gegen P [das waren die Argumente] geht? Steigt oder fällt Δy ?

Die insgesamt 4 Aufgaben(paare) wurden an der Universität in Washington in die normalen Calculus Prüfungen eingebaut (Monk, 1994, S.22). Jede der Fragen wurde dabei aber nur einmal verwendet. Über alle Kurse hinweg haben dann 628 Studierende wenigstens eine der Fragen beantwortet (Monk, 1994, S.22).

Ergebnisse von Monk: Die Lösungshäufigkeiten der Aufgabe „two speed graphs“ aus Abbildung 17 sind in Tabelle 34 dargestellt. Die Ergebnisse der Aufgabe zur Sekantensteigung befinden sich in Tabelle 35.

	<i>Across-time</i> Teilaufgabe korrekt	<i>Across-time</i> Teilaufgabe falsch
<i>Pointwise</i> Teilaufgabe korrekt	40%	50%
<i>Pointwise</i> Teilaufgabe falsch	0%	10%

Tabelle 34: Ergebnisse der Aufgabe „two speed graphs“ aus Monk (1994, S.23) (siehe Abbildung 17), N nicht angegeben

	<i>Across-time</i> Teilaufgabe korrekt	<i>Across-time</i> Teilaufgabe falsch
<i>Pointwise</i> Teilaufgabe korrekt	53%	34%
<i>Pointwise</i> Teilaufgabe falsch	4%	9%

Tabelle 35: Ergebnisse der Aufgabe zu den Sekantensteigungen aus (Monk, 1994, S.23) ($N = 166$)

Die Ergebnisse der anderen beiden Aufgabenpaare sind ähnlich.
Insgesamt leitete Monk folgendes Ergebnis der Studie ab (Monk, 1994, S.24):

„Pointwise understanding of graphs is prerequisite to Across-time understanding, but the jump from the one to the other is a considerable one for students.“

Denn man sieht in den Tabellen 34 und 35 sehr gut, dass punktweises Verständnis in der Regel notwendig für ein *Across-time*-Verständnis aber eben nicht hinreichend ist.

Vergleich der Begriffe „punktweises Verständnis“ und „Across-time-Verständnis“ mit analogen Begrifflichkeiten anderer Didaktiker: Dass die Fähigkeit zur Interpretation von Graphen an Punkten nicht unbedingt die Fähigkeit zur Interpretation von Graphen auf Intervallen impliziert, zeigte auch Janvier (1978). Er stellte Schülern einer *secondary school* zu vorgegebenen Graphen Fragen, deren Beantwortung das Ablesen an Punkten (*pointwise-reading*) und die Untersuchung des Graphen auf einen Intervall (*interval-reading*) erforderte (Bell u. Janvier, 1981, S.37). So konnten bei zwei vorgegebenen Graphen einer Mikrobenpopulation nur 6 von 17 Schülern das korrekte Intervall ablesen, in der die Population B größer war als Population A (Bell u. Janvier, 1981, S.37). Der Hauptfehler war die Angabe eines Punktes anstelle eines Intervalls (zum Beispiel die Stelle des Maximums der Population B). Selbst nach Nachhaken blieben 8 der 17 Antworten falsch.

Monks *Across-time*-Verständnis bzw. Janviers Fähigkeit zum *interval-reading* sind eng mit dem *Kovariationsaspekt von Funktionen* nach Vollrath (1989) verbunden. Dieser bildet in der deutschen Mathematikdidaktik zusammen mit dem *Zuordnungsaspekt* und dem *Objektaspekt* die Grundlage für das Verständnis von Funktionen (Vollrath, 1989). Im Kovariationsaspekt geht darum wie sich die abhängige Variable bei Änderung der unabhängigen Variablen ändert (Vollrath, 1989, S.12):

„Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“

In der internationalen Didaktik findet man ähnliche Unterteilungen. Beispielsweise unterschied Thompson die Aspekte *Correspondance* und *Covariation* (Thompson, 1995, S.28).

Beschreibung der Studie von Nemirovsky u. Rubin (1992) zur Wichtigkeit des kovariationalen Argumentierens zum Verständnis der Änderungsrate einer Funktion:

Dass der Aspekt *Covariation* und die Fähigkeit zum kovariationalen Argumentieren essentiell zum Verständnis der Ableitung als Änderungsrate einer Funktion sind (Carlson u. a., 2002, S.356), wiesen auch Nemirovsky u. Rubin (1992) in einer empirischen Studie nach, die im Folgenden näher beschrieben wird.

Sie zeigten, dass die mangelnde Fähigkeit zum kovariationalen Argumentieren eine wesentliche Ursache für typische Fehlvorstellungen beim Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Änderungsrate als Funktion sind, wie zum Beispiel die Annahme desselben Monotonieverhaltens von Funktion und Ableitung.

Wie bereits in Kapitel 4.3.1 gesagt, führten Nemirovsky u. Rubin (1992) mit Schülern einer Highschool ein Experiment durch, in dem Schülern in zwei Interviews 15 Aufgaben zur Rekonstruktion des Graphen der Ausgangsfunktion aus der Ableitungsfunktion gestellt wurden (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.3). Viele der Aufgaben enthielten einen Kontext (Geschwindigkeitskontext, Kontext mit Zuflussraten), sodass der prognostizierte Graph experimentell überprüft werden konnte (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.2). Bei den anderen Aufgaben konnte der Graph am Computer überprüft werden. War der prognostizierte Graph falsch, erfolgte eine Diskussion mit dem Interviewer über den Graphen mit dem Ziel den Studierenden zum richtigen Graphen zu führen.

In Nemirovsky u. Rubin (1992) ist das Fallbeispiel des Schülers *Dan* zu einer Aufgabe ausführlich dargestellt. Grundlage dieser Aufgabe war das in Abbildung 18 dargestellte Experiment.

Der Luftzufluss konnte entweder kontrolliert werden, indem der Blasebalg gedrückt wurde oder das Ventil geöffnet bzw. geschlossen wurde (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.16). Mit dem Ventil konnte reguliert werden, wieviel Luft vom Blasebalg in die Tasche rechts in Abbildung 18 fließt. Der Interviewer gab Dan den Graphen der Zuflussrate vor. Dan sollte den Graphen der Volumen-Zeit Funktion voraussagen. Diese Voraussage konnte er dann durch die in Abbildung 18 dargestellte Apparatur überprüfen. Das ganze Interview ist in 6 Teile geteilt, die hier kurz dargestellt werden sollen.

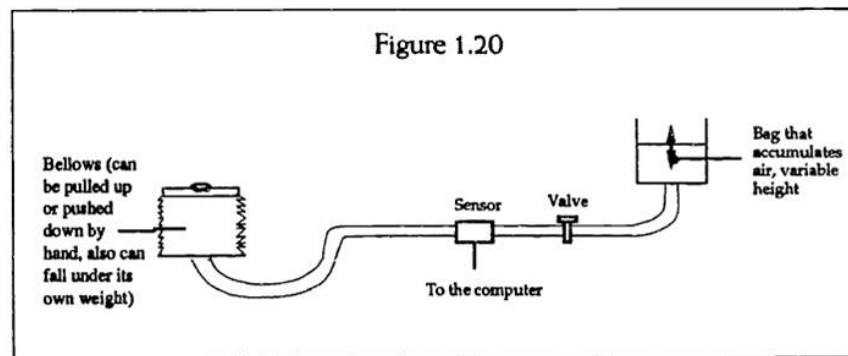


Abbildung 18: Experiment zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Funktion und Ableitung im Kontext von Luftzufuhr (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.16)

Teil 1 des Interviews: Zunächst gab der Interviewer dem Probanden Dan eine linear bis zur 0 abnehmende Zufussrate vor (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.17). Dan vermutete als Volumen-Zeit Funktion ebenfalls eine linear fallende Funktion, die das Volumen in Abhängigkeit der Zeit beschreibt (siehe Abbildung 19). Dan nahm also folgende Ähnlichkeiten zwischen Ausgangsfunktion f und ihrer Änderungsrate an: gleicher Ordinatenschnittpunkt, beides positiv, gleiche Richtung.

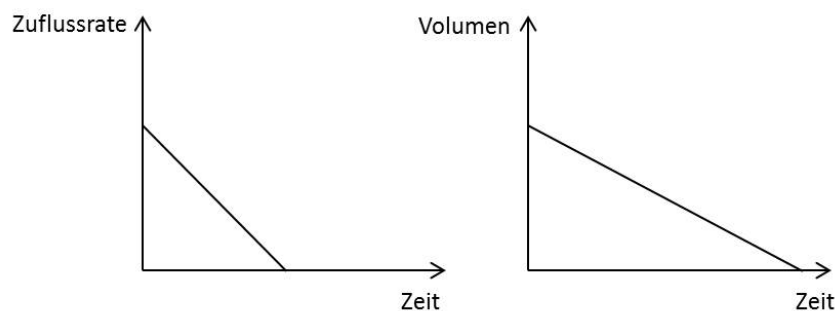


Abbildung 19: Gegebener Ableitungsgraph und Dans vorausgesagte Volumen-Zeit Funktion zu Beginn eines Experiments von Nemirovsky u. Rubin (1992, S.17)

Teil 2 des Interviews: Im Experiment bemerkte dann Dan zunächst, dass die Zufussrate im Experiment stets bei 0 begann und zweifelte daraufhin den vom Interviewer gegebenen Graphen an (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.19). Er war der Ansicht, dass man den Graphen der Zufussrate aus Abbildung 19 vertikal verschieben müsste, sodass er zu seinem Volumen-Zeit Graphen aus Abbildung 19 passen würde (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.20). Das griff der Interviewer auf und präsentierte einen neuen Graphen für die Zufussrate, die bei 0 begann (siehe Abbildung 20).

Teil 3 des Interviews: Dan konstruierte nun zu dem in Abbildung 20 gegebenen Zufussratengraphen einen zu diesem Graphen ähnlichen Graphen mit folgender Argumentation (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.21):

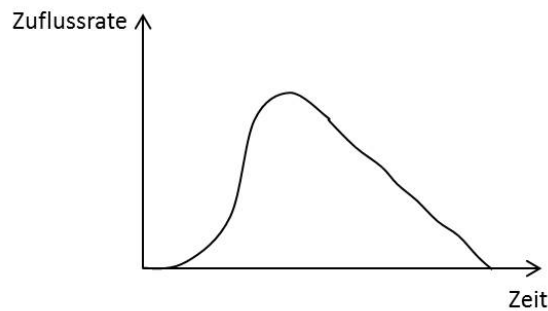


Abbildung 20: Vom Interviewer revidierter Graph der Zuflussrate im Experiment von Nemirovsky u. Rubin (1992, S.20), nachdem Dan feststellte, dass die Zuflussrate im Experiment stets bei 0 begann

„The flow rate would go up, so that means the volume would go also go up, and then, it would drop. Let me think. I’m trying to think if this would go very much below zero or not. Let me see. If the flow rate went up, volume increases, then it starts to decrease. Well, the only thing I’m trying to think of is if this, as soon as I stop the increase it will automatically just drop down until it would be below here.[...] I’m not sure if it will drop down right away and then come down or would just gradually.“

Dan verbalisierte hier, dass der Volumen-Zeit Graph und die Zuflussrate das gleiche Monotonieverhalten haben müssten. Er war sich aber nicht sicher, ob der Volumen-Zeit Graph nach dem Maximum nicht sehr viel schneller fallen müsste als der Zuflusssrategraph (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.22). Experimentell wollte er das so umsetzen, dass er Luft zunächst in die Tasche in Abbildung 18 pumpen und sie dann wieder rauslassen wollte. Der Interviewer machte ihn dann darauf aufmerksam, dass dann die Zuflussrate negativ wäre, was Dan dann auch bemerkte (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.22)

Teil 4 des Interviews: Es gelang Dan nicht, den von ihm gewünschten Zuflusssrategraphen experimentell zu produzieren. Die produzierten Graphen hatten immer negative Zuflussraten, weil Dan nur den Blasebalg verwendete (siehe Abbildung 18). Dann glaubt er, dass es nicht möglich ist, den in Abbildung 20 dargestellten Graphen als Zuflussrate erzeugen zu können (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.24).

Teil 5 des Interviews: In einer Intervention zeigte der Interviewer Dan, dass man auch das Ventil in Abbildung 18 nutzen kann um einen Graphen mit fallender, aber positiver Zuflussrate zu erzeugen (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.25). Dan bestand aber darauf, es ohne Ventil zu machen, was der Interviewer dann auch demonstrierte, indem er den Blasebalg runterdrückte und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.25). Nachdem Dan es auch probierte, erkannte er, dass das Volumen weiter zunahm, trotz abnehmender Änderungsrate (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.26). Er fing an Phrasen wie „The amount of increase of volume is less and less“ für die sich verlangsamende Zunahme des Volumens zu verwenden (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.27). Er begann also damit, die Zeitachse gedanklich in Zeiteinheiten zu zerlegen, in denen er Änderungen des Volumens betrachtete.

Teil 6 des Interviews: Nun präsentierte Dan einen neuen Graphen für die Volumen-Zeit Funktion, der jetzt seiner Meinung nach zur in Abbildung 20 dargestellten Zuflussrate passen sollte (siehe Abbildung 21).

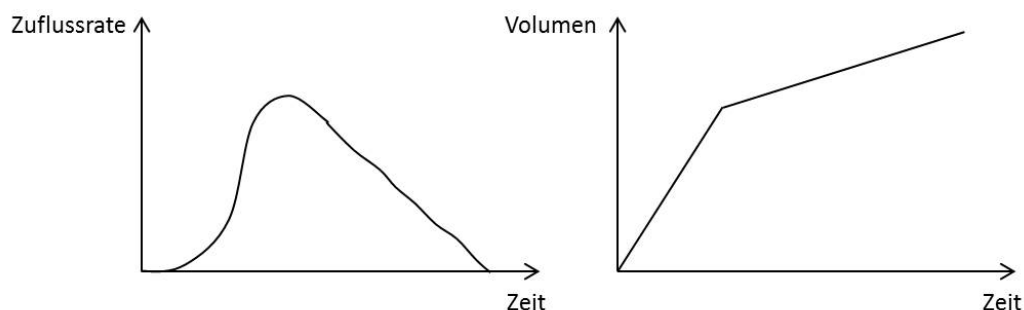


Abbildung 21: Gegebener Ableitungsgraph und Dans vorausgesagter Graph der zugehörigen Volumen-Zeit Funktion nach der Erkenntnis im Experiment, dass es ein Phänomen wie abnehmendes Wachstum gibt (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.28)

Dies kommentierte er wie folgt (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.28):

„Always increasing, but at the beginning it will increase. At the beginning ... I believe that, the volume will go up, and then, it will just sort of like go up slower and slower and slower. I am pretty sure that’s what it will do.“

Dan begann also hier mit Hilfe des kovariationalen Argumentierens die Gestalt des Graphen vorauszusagen. Dabei ließ er seine Annahme fallen, dass das Volumen zunehmen müsste, wenn die Zuflussrate zunimmt (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.29). Allerdings nahm er nun an, dass eine große Steigung des Volumen-Graphen auch einer großen Steigung der Zuflussrate entspricht (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.31). Tatsächlich müsste beim Graph des Volumens die Steigung zunehmen bis zum Maximum der Zuflussrate, und danach wieder abnehmen. Hier enden die Ausführungen in Nemirovsky u. Rubin (1992).

Insgesamt sieht man aus den Interviewausschnitten, dass Dan zu Beginn des Experiments Ähnlichkeiten zwischen Funktion und Ableitung angenommen hat. In dem Moment, wo er angefangen hat, kovariational zu argumentieren, ließ er die Annahme fallen, dass Funktion und Änderungsrate immer das gleiche Monotonieverhalten hätten (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.33). Allerdings kam er nicht ganz zum Ziel. Er war nicht in der Lage zu erkennen, dass der Graph der Volumen-Zeit Funktion glatt sein muss und das Maximum der Zuflussrate dem Wendepunkt entspricht. Eine Ursache könnte sein, dass er die Zeitachse nur in zwei Intervalle teilte (einmal bis zum Maximum des Zuflussratengraphen und einmal nach dem Maximum des Zuflussratengraphen). Für die genauere Gestalt hätte er die Intervalle gedanklich verkleinern müssen. Dennoch zeigt die Studie, dass kovariationales Argumentieren wichtig zur Herstellung der korrekten Beziehung zwischen einer Ausgangsfunktion f und ihrer Änderungsrate f' (hier im Kontext von Geschwindigkeiten) ist.

4.3.3 Schwierigkeiten beim kovariationalen Argumentieren

Obwohl kovariationales Argumentieren wesentlich für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Änderungsrate ist, fallen entsprechende Aufgaben mit Beständen und Änderungsraten, die kovariationales Argumentieren erfordern, vielen Studierenden nicht leicht. Eine quantitative Studie, in der das deutlich wurde, ist von Çetin (2009a). Er gab 104 Studierenden an der Anadolu Universität in der Türkei aus Science- und Ingenieursstudiengängen nach der Absolvierung des Calculus I Kurses einen Test, in dem Studierende eine Verbindung zwischen einem Kontext, in dem ein funktionaler Zusammenhang dargestellt wurde, und dem Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion herstellen sollten (Çetin, 2009a, S.234). Dafür war die Betrachtung der Kovariation der jeweiligen Funktion, also kovariationales Argumentieren, notwendig.

Der Test hatte folgende Aufgabentypen (Çetin, 2009a, S.234-235):

1. Auswahl des richtigen Geschwindigkeits-Zeit Graphen zu einer verbalen Darstellung eines Bewegungsvorganges
2. Auswahl der korrekten Änderungsrate beim Füllvorgang eines Gefäßes
3. Auswahl der Geschwindigkeit aus 4 Alternativen beim senkrechten Wurf nach oben (Höhe ist durch eine Wertetabelle gegeben)

Exemplarisch seien hier die Füllgraphenaufgabe und die erste Geschwindigkeitsaufgabe im Detail vorgestellt.

Die Füllgraphaufgabe im Test von Çetin:

Wasser fließt mit konstanter Geschwindigkeit in die in Abbildung 2a [hier Abbildung 22] abgebildeten Gefäße. Zum Moment t hat das Wasser die Höhe $h(t)$. Im Folgenden sind die Graphen von deren Ableitungen gegeben [unten in Abbildung 22]. Wählen Sie zu jedem Gefäß den passenden Graphen der Ableitung aus und begründen Sie Ihre Antwort. (Çetin, 2009a, S.235)

Die Ergebnisse sind in Tabelle 36 dargestellt (die richtigen Antworten sind fett hervorgehoben). Bei den Gefäßen R und S , bei denen der korrekte Füllgraph einen Wendepunkt hatte, wurde oft der originale Füllgraph anstatt seiner Änderungsrate ausgewählt (Graph VI bei Gefäß R , Graph IV bei Gefäß S).

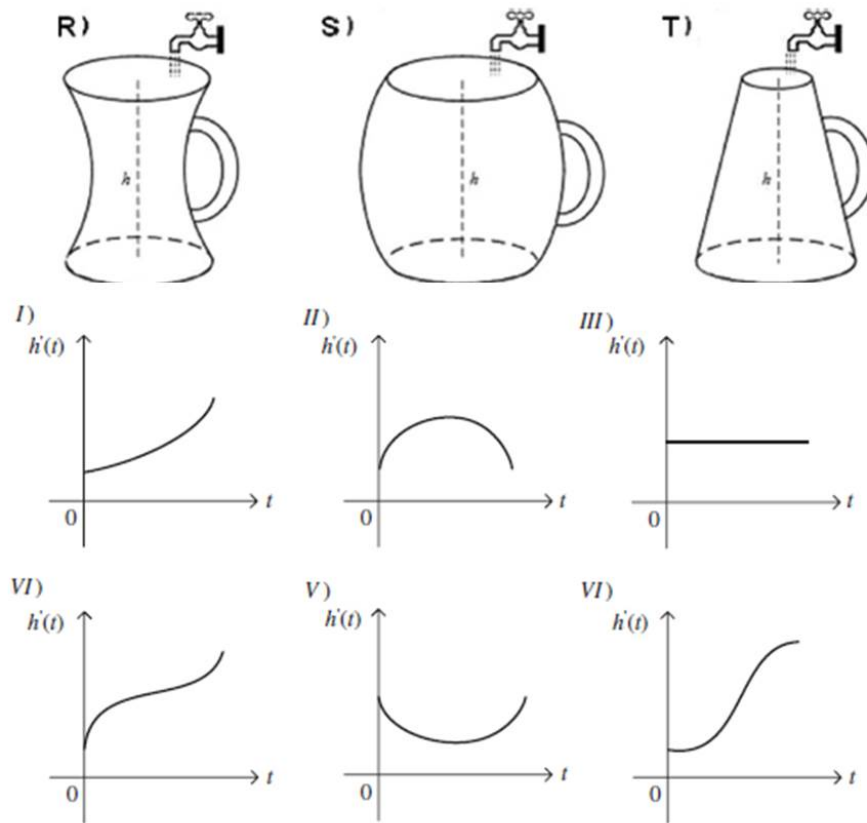


Abbildung 22: Gefäße und zur Auswahl stehende Graphen der Ableitungsfunktion $h'(t)$ aus Çetin (2009a, S.236)

	Graph I	Graph II	Graph III	Graph IV	Graph V	Graph VI
Gefäß R	-	28%	-	20%	7%	45%
Gefäß S	-	10%	-	45%	33%	12%
Gefäß T	84%	-	-	16%	-	-

Tabelle 36: Ergebnisse der Füllgraphenaufgabe aus Abbildung 22 (Çetin, 2009a, S.239-240) ($N = 104$)

Die Geschwindigkeitsaufgabe im Test von Çetin:

$f(t)$ ist die Funktion, die Erkins von zu Hause zurückgelegten Weg beschreibt. Die folgenden 3 Situationen beschreiben, was jeweils auf dem Weg von zu Hause zur Schule passiert. Einige Graphen von Ableitungsfunktionen sind auch gegeben. Wählen Sie zu jeder Situation den passenden Graphen und begründen Sie Ihre Antwort.

Situation K: „Erkin ging von zu Hause los. Nach einer Weile bemerkte er, dass er sein Buch zu Hause vergessen hatte. Nach kurzem Zögern ging er wieder nach Hause zurück um sein Buch mitzunehmen. Nachdem er sein Buch von zu Hause mitgenommen hatte, ging er weiter zur Schule.“

Situation L: „Erkin ging von zu Hause los. Nach einer Weile gab es einen schweren Regenschauer auf dem Weg zu Schule. Er wartete in einem Laden bis der Regen aufhörte. Dann ging er weiter zur Schule.“

Situation M: „Erkin ging von zu Hause los. Nach einer Weile bemerkte er, dass er zu spät für die Schule war und beschleunigte.“

Die Graphen der Ableitungsfunktionen, zu denen die Situationen zugeordnet werden sollten, sind in Abbildung 23 zu sehen.

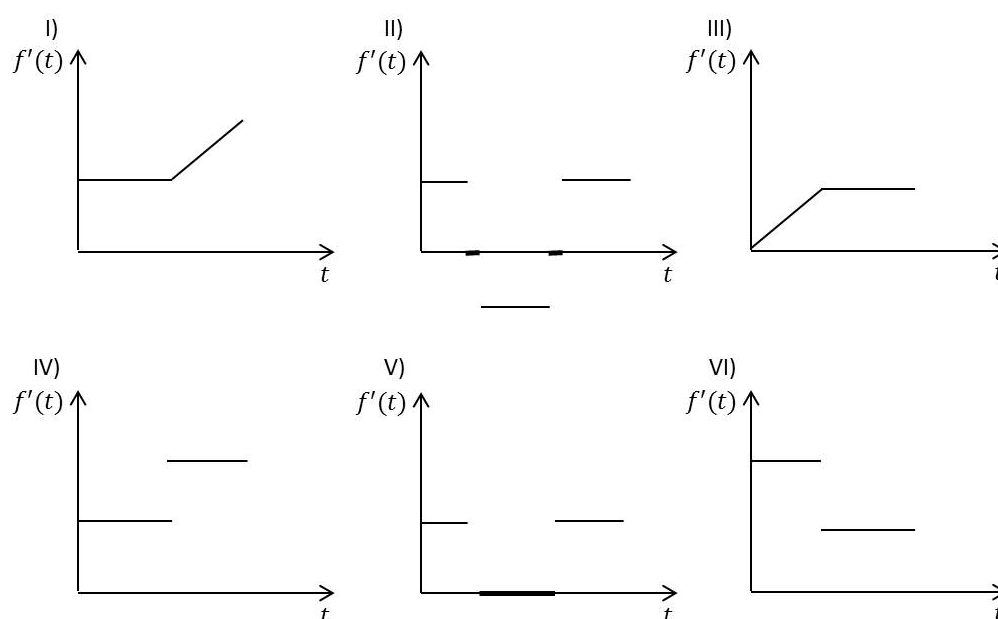


Abbildung 23: Graphen zur Geschwindigkeitsaufgabe von Çetin (2009a, S.235)

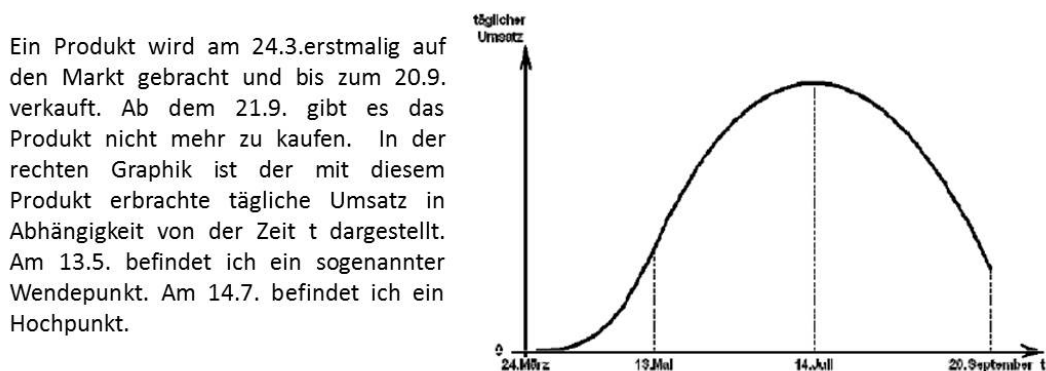
	Graph I	Graph II	Graph III	Graph IV	Graph V	Graph VI
Situation K	-	91%	-	-	5%	4%
Situation L	-	-	6%	-	94%	-
Situation M	42%	-	-	54%	-	4%

Tabelle 37: Ergebnisse der Geschwindigkeitsaufgabe aus Çetin (2009a, S.237-239), Graphen der Ableitung in Abbildung 23 ($N = 104$)

Die Ergebnisse sind in Tabelle 37 dargestellt. Offensichtlich wurden die beiden linearen Kontexte sehr gut gelöst (Situationen K und L). Die Beschreibung des Änderungsverhaltens im nichtlinearen Fall fiel jedoch wesentlich schwerer (Situation M). Hier wurden stetige Änderungen der Geschwindigkeit fälschlicherweise als abrupte Änderung der Geschwindigkeit aufgefasst (Distraktor IV in Situation M).

Insgesamt zeigt die Studie, dass Studierende Aufgaben zum Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitung, deren Lösung kovariationales Argumentieren erfordert, oft nicht lösen konnten. Hierbei fielen Aufgaben zu nichtlinearem Wachstum schwerer als zu linearem Wachstum. Bei Aufgaben, in denen die Ausgangsfunktion einen Wendepunkt hatte, wurde diese oft mit der Änderungsrate verwechselt.

Ähnliche Ergebnisse wurden auch in Deutschland durch Hahn u. Prediger (2008) ermittelt. Sie stellten 204 Studienanfängern des Lehramtes für Grund-, Haupt- und Realschulen an der Universität Bremen eine Aufgabe mit dem Namen „Produktlebenszyklus“ (siehe Abbildung 24). Abseits der Problematik, dass hier im Kontext des täglichen Umsatzes der momentane Umsatz schon über den Tag integriert wurde und daher eine kontinuierliche x -Achse keinen Sinn macht, ist dies eine prototypische Aufgabe, welche die Problematik der gegensinnigen Kovariation anspricht. Die Funktion steigt zwar bis zu ihrer Maximalstelle am 14. Juli, die Änderungsrate sinkt aber ab dem 13. Mai. Deshalb ist die erste Aussage richtig, was nur 42% der Studierenden erkannten (Hahn u. Prediger, 2008, S.176). Ab da sinkt die Änderungsrate auch durchgängig. Daher ist die zweite Aussage in Abbildung 24 falsch, was 47 % der Studienanfänger bemerkten (Hahn u. Prediger, 2008, S.176).



Kreuzen Sie bitte die für die folgenden Aussagen „richtig“ oder „falsch“ an!

	Richtig	Falsch
Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 4. Juli.	☐	☐
Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.	☐	☐

Abbildung 24: Aufgabe aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) zum Testen des Verständnisses der Ableitung als lokale Änderungsrate im Kontext gegensinniger Kovariation

Dass kovariationales Argumentieren sogar guten Studierenden schwer fällt, zeigten Carlson u. a. (2002). Sie untersuchten die Fähigkeit zum kovariationalen Argumentieren bei Studierenden, die das zweite Semester eines Calculus-Kurses mit A abge-

schlossen hatten (Carlson u. a., 2002, S.362). Hierzu gaben sie 20 Studierenden einen Test mit 5 Items (ohne Zeitbegrenzung bei der Durchführung), von denen eines die Flaschenaufgabe aus Abbildung 25 war.

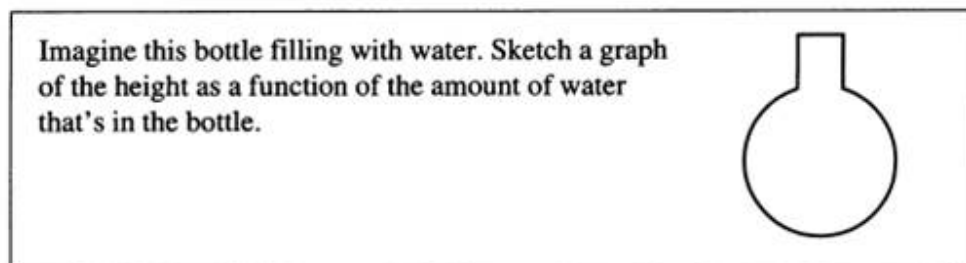


Abbildung 25: Flaschenaufgabe zum kovariationalen Argumentieren aus Carlson u. a. (2002, S.360)

Die Graphentypen der Lösungen der Studierenden sind in Tabelle 38 dargestellt. Nur 5 der 20 Studierende konnten einen im Wesentlichen richtigen Graphen zeichnen (Carlson u. a., 2002, S.363). Auf Basis dieser Ergebnisse führten Carlson u. a. (2002) eine Interviewstudie mit 6 Probanden durch, die im Folgenden näher beschrieben werden soll.

Graphtyp	Anzahl
Linear steigend	1
Wachsend und konkav	11
Wachsend und konvex	3
qualitativ akzeptabel bis auf die Steigung am Ende	3
alle Aspekte qualitativ akzeptabel	2

Tabelle 38: Ergebnisse der Flaschenaufgabe aus Abbildung 25 bei 20 Studierenden mit Note A im Kurs Calculus I ($N = 20$)

Detaillierte Beschreibung der Interviewstudie zum kovariationalen Argumentieren von Carlson et al.: Die Auswahl der 6 Interviewten von den 20 Studierenden erfolgt auf Basis der Testergebnisse mit dem Ziel möglichst großer Heterogenität (Carlson u. a., 2002, S.362)). Zur Auswertung der Interviews entwickelten Carlson u. a. (2002) ein Modell, welches aus verschiedenen Stufen des kovariationalen Argumentierens besteht. Diese ergeben sich aus 5 mentalen Aktivitäten bezüglich kovariationalen Denkens (Carlson u. a., 2002, S.357):

Mentale Aktivität 1:

„Coordinating the value of one variable with changes in the other“

Mentale Aktivität 2:

„Coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable“

Mentale Aktivität 3:

„Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable“

Mentale Aktivität 4:

„Coordinating the average rate-of-change of the function with uniform increments of change in the input variable“

Mentale Aktivität 5:

„Coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the independent variable for the entire domain of the function“

Am Beispiel des Flaschenproblems ist in Tabelle 39 exemplarisch die Zuordnung von konkreten Tätigkeiten der Schüler zu den einzelnen mentalen Aktivitäten erklärt.

Mentale Aktivität	Verhalten
1	Die Probanden formulierten, dass sich die Höhe in Abhängigkeit von der Wassermenge in der Flasche ändert, oder es wurde ein Koordinatensystem mit entsprechenden Achsenbeschriftungen gezeichnet.
2	Die Probanden demonstrierten, dass sie einen monoton wachsenden Zusammenhang erkannt haben (z.B. durch Zeichnen einer streng wachsenden Funktion).
3	Die Probanden beschrieben den Füllvorgang graphisch durch einen Streckenzug (mit äquidistanter Einteilung der Volumenachse). Die Begründung des Graphen erfolgte <i>mit absoluten Änderungen</i> : zunächst größere Höhendifferenz bei gleicher Volumenzugabe, dann immer kleinere Differenzen bis zur Mitte, dann wieder größere Differenzen und zum Schluss gleich bleibende Differenzen.
4	Die Probanden beschrieben den Füllvorgang graphisch durch einen Streckenzug (mit äquidistanter Einteilung der Volumenachse). Bei der Begründung wurde auf die <i>Änderungsrate auf einzelnen (äquidistanten) Teilintervallen</i> eingegangen.
5	Die Probanden zeichneten zur Beschreibung des Füllvorgangs eine glatte wachsende Funktion mit korrektem Wendepunkt. Diese wurde mit Hilfe der <i>momentanen Änderungsrate</i> begründet, wobei auch deutlich werden musste, dass dem Proband bewusst war, dass sich die momentane Änderungsrate aus der mittleren Änderungsrate ergibt.

Tabelle 39: Konkretisierung von Aktivitäten zu den einzelnen Aktivitäten des Rahmenmodells von Carlson u. a. (2002, S.357)

Daraus ergeben sich 5 Kompetenzstufen des kovariationalen Argumentierens wie folgt (Carlson u. a., 2002, S.358):

Level 1: Es findet nur die mentale Aktivität 1 statt.

Level 2: Es finden die mentalen Aktivitäten 1 und 2 statt und müssen in einen Zusammenhang untereinander gebracht werden können.

...

Level 5: Es finden die mentalen Aktivitäten 1 bis 5 statt und müssen in einen Zusammenhang untereinander gebracht werden können.

Bei der Begründung des Graphen musste nicht mit numerischen Werten gearbeitet werden. So genügte es bei der mentalen Aktivität 3, dass der Studierende die Volumenachse einteilte (z.B. durch x_1, x_2, x_3, x_4) und dann die Änderungen der Funktion f auf diesen Intervallen qualitativ verglich (Carlson u. a., 2002, S.359). Leider äußerten sich Carlson et al. nicht darüber, wie mit einer nicht äquidistanten Einteilung der Achse umgegangen werden soll. In diesem Fall ist nicht klar, wie dann unterschiedliche Steigungen durch absolute Änderungen verglichen werden sollen.

Carlson et al. hoben dafür hervor, dass die mentale Aktivität 5 (Nutzung des Konzepts der momentanen Änderungsrate zur Beschreibung des Graphen) nur dann als gegeben angesehen wurde, wenn der Studierende deutlich machte, dass sich die momentane Änderungsrate aus mittleren Änderungsraten ergibt. Ansonsten wurde die Aktivität von ihnen als *Pseudo-analytisch* bezeichnet (Carlson u. a., 2002, S.359). Diese Begrifflichkeit des *Pseudo-analytischen* Vorgehens passt zu der Idee des *quasistrukturellen* Verständnisses mathematischer Konzepte als Objekte nach Sfard (1991, S.21) bzw. zum *Pseudo-Objekt-Verständnis* nach Zandieh (2000, S.107). Nach Sfard (1991, S.21) bedeutete ein *quasistrukturelles* Verständnis eines Objekts, dass der dahinterliegende Prozess bzw. die dahinter liegende Struktur nicht verstanden wurde. In Fall von Carlson u. a. (2002) ist den betreffenden Studierenden nicht mehr bewusst, dass sich die lokale Änderungsrate als „Grenzwert“ aus mittleren Änderungsraten bei beliebig kleiner Verfeinerung der Intervalle auf der x -Achse ergibt.

Insgesamt sieht man an den in Tabelle 39 beschriebenen Verhaltensweisen, dass an dem Graph allein ein Rückschluss auf die mentalen Aktivitäten nicht immer möglich ist (Aktivitäten 3 und 4 können den gleichen Graphen als Ergebnis liefern). Deshalb lässt sich eine Einteilung entsprechend des Modells ab Stufe 3 und höher nur durchführen, wenn die Gedankengänge zur Produktion des Graphen verbalisiert werden, so wie es dann im Interview geschah.

Ergebnisse der Studie von Carlson et al.: Bei den Interviews wurden dann insgesamt folgende Ergebnisse sichtbar (Carlson u. a., 2002, S.373):

1. Die Mehrheit der Studierenden erreichten Level 3 des kovariationalen Argumentierens (Koordination absoluter Änderungen).
2. Die Mehrheit der Studierenden war nicht in der Lage einen Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variablen und der mittleren Änderungsrate bei gleichmäßigen Zuwächsen herzustellen. Der Übergang zwischen der Betrachtung von absoluten Änderungen hin zu Änderungsraten erfolgte oft nicht.
3. Die Studierenden hatten Probleme, einen Zusammenhang zwischen der lokalen Änderungsrate und der stetigen Veränderung der unabhängigen Variablen herzustellen. Aus den Interviews geht hervor, dass damit gemeint ist, dass den Studierenden nicht klar war, dass sich die lokale Änderungsrate als Grenzwert der mittleren Änderungsraten ergibt, wenn man von diskreten zu kontinuierlichen Zuwächsen übergeht.
4. Die Probanden konnten nicht erklären, weshalb die Kurve glatt ist (hier ist wieder das Verständnis nötig, dass sich die Gesamtkurve gedanklich als „Grenzkurve“ stückweise affiner Funktionen ergibt, die mit Hilfe mittlerer Änderungsraten konstruiert wurden).

5. Sie konnten nicht erklären, was ein Wendepunkt inhaltlich bedeutet.

Selbst die meisten der Studierenden, die in der Lage waren, einen Zusammenhang zwischen den Änderungen der unabhängigen Variablen und der lokalen Änderungsrate einer Funktion herzustellen und die Aktivität 5 scheinbar demonstrierten, konnten oft nicht erklären, wie man die lokale Änderungsrate einer Funktion (exakt) erhält. Hier lag also ein *Pseudo-analytisches* Verständnis der lokalen Änderungsrate vor.

Insgesamt liefert die Studie von Carlson u. a. (2002) zum kovariationalen Argumentieren also drei wesentliche Ergebnisse (Carlson u. a., 2002, S.373):

1. Auch gute Studierende haben Schwierigkeiten beim kovariationalen Argumentieren.
2. Besonders der Wechsel von der Betrachtung absoluter Änderungen zur Betrachtung von Änderungsraten ist eine Hürde.
3. Die Natur des Begriffs der lokalen Änderungsrate als „Grenzwert“ mittlerer Änderungsraten wird oft nicht verstanden (obwohl mit der lokalen Änderungsrate umgegangen werden kann).

Damit zeigen die Studien von Çetin (2009a), Hahn u. Prediger (2008) und Carlson u. a. (2002) exemplarisch, dass Studierende Schwierigkeiten mit dem Kovariationsaspekt von Funktionen und dem kovariationalen Argumentieren haben, was eine wesentliche Ursache für Schwierigkeiten beim Verständnis des Zusammenhangs zwischen Funktion und Ableitungsfunktion ist (wie in Kapitel 4.3.2 dargestellt wurde).

4.4 Studien zum Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten

In diesem Kapitel werden zwei Studien zum Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten dargestellt (dies sind die einzigen beiden, die der Autor gefunden hat), denn um dieses geht es ja in dieser Dissertation.

Zunächst sei die Studie von Wilhelm u. Confrey (2003) vorgestellt, in der es um die Fähigkeit der Übertragung des Verständnisses von Änderungsraten von Bewegungskontexten auf einen Geldkontext geht. Sie stellten sie vier Schülern eines Algebra I Kurses einer Highschool task-based Interviews (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.889). Vor den Interviews hatten die Schüler sich in der Klasse mit Änderungsraten beschäftigt, und zwar sowohl im Bewegungskontext als auch im Geldkontext (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.889). Typische Aufgaben waren die Voraussage von Graphen von Änderungsraten bei gegebener Ausgangsfunktionen und umgekehrt. In beiden Kontexten wurden technische Hilfsmittel genutzt, mit denen die Schüler ihre Ergebnisse überprüfen konnten: (1) im Bewegungskontext Bewegungsdetektoren, die Weg-Zeit und Geschwindigkeitsgraphen aufzeichnen konnten, (2) im Geldkontext die Software *Bank-Account*, mit der ein Kontostand in Abhängigkeit von einem Startkapital und täglich gemachten Transaktionen graphisch dargestellt werden konnte. Dabei wurden jeweils Kapital und tägliche Transaktionen in Form von Säulen dargestellt (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.889).

In Interviews wurde dann untersucht, inwieweit die Schüler die Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Änderungsrate im jeweiligen Kontext verstanden haben, und inwieweit sie ihr Wissen vom Geschwindigkeitskontext auf den Geldkontext direkt übertragen konnten. Dazu wurden am ersten Interviewtag nur Aufgaben zum Bewegungskontext und am zweiten Tag nur Aufgaben zum Geldkontext gestellt (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.889). Dabei sollten jeweils Graphen von Änderungsraten bei gegebenem Graphen der Ausgangsfunktionen produziert werden und umgekehrt (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.890).

Aufgabentyp	Katie	Evan	Marie	Troy
Vorhersage von Bewegungsgraphen bei konstanter Änderungsrate (vor- und rückwärts)	Ja	Ja	Ja	Ja
Vorhersage von Bewegungsgraphen bei nicht-konstanter Änderungsrate (vor- und rückwärts)	Ja	Ja	Nein	Nein
Vorhersage von Geldgraphen bei konstanten täglichen Transaktionen (vor- und rückwärts)	Ja	Ja	Ja	Ja
Vorhersage von Geldgraphen bei konstanten täglichen Transaktionen (vor- und rückwärts)	Ja	Nein	Nein	Nein

Tabelle 40: Ergebnisse der vier Studierenden bei der Vorhersage von Graphen von Bestand bzw. Änderungen im Bewegungskontext und im Geldkontext (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.896)

Die Ergebnisse dieser Interviews sind in Tabelle 40 dargestellt. Exemplarisch seien hier die Ergebnisse von Katie und Evan näher erläutert. Katie hatte überhaupt keine Schwierigkeiten aus der Ausgangsfunktion Graphen der Änderungsrate zu erzeugen oder andersrum: weder im Bewegungskontext noch im Geldkontext (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.890-891). Evan hatte im Bewegungskontexten auch keine Probleme dabei (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.893). Im Geldkontext hatte er aber Schwierigkeiten. Er konnte zwar den täglichen Transaktionsgraphen bei gegebenem Kapitalgraphen bestimmen. Bei der Rückrichtung erzeugte er aber bei gegebenem Transaktionsgraphen denselben auch als Kapitalgraph (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.891).

Nach beiden Aufgabensets gab es eine weitere Aufgabe, in der das Konzept der Änderungsrate vom Bewegungskontext auf den Geldkontext übertragen werden sollte (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.890). In ihr sollte zunächst ein Weg-Zeit Graph (vorwärts laufen bis zu einer Wand und dann umdrehen und anschließend rückwärts laufen bis zum Anfang) in *Bank Account* modelliert werden (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.895). Dann sollten die Studierenden den zugehörigen Geschwindigkeitsgraphen in passende Daten in *Bank Account* übersetzen, wodurch sie einen neuen Kapitalgraphen erhalten, der bestenfalls mit dem alten Graphen übereinstimmt (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.895).

Auch bei der Übertragungsaufgabe seien wieder die Ergebnisse von Evan und Katie dargestellt. Evan konnte aus dem gegebenen Bewegungsvorgang (einmal zur Wand hin und wieder zurück) den richtigen Geschwindigkeits-Zeit Graphen erzeugen (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.897). Der Weg-Zeit Graph war nicht ganz richtig, weil der Peak nicht in der Mitte war. Es ist aber nicht klar, ob das Absicht war. Beim Übertragen des Geschwindigkeitsgraphen auf *Bank Account* erkannte er sofort (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.898):

,This is like a transaction, the velocity.'

Ebenso identifizierte er das Gesamtkapital als Analogon zum Weg-Zeit Diagramm (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.898). Evan konnte also das Konzept der Änderungsrate auf den Geldkontext übertragen, obwohl er Schwierigkeiten mit dem Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und ihrer Änderungsrate im Bewegungskontext hatte (siehe Tabelle 40)

Bei Katie sah es ganz anders aus. Sie konnte zwar die richtigen Diagramme im Bewegungskontext angeben, übertrug dann aber das Weg-Zeit Diagramm in die tägliche Transaktion (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.899). Sie äußerte bei den Erklärungen zum Beispiel die Ansicht, dass bei Abnahme der täglichen Transaktion der Transaktionsgraph fallen würde (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.902). Auf explizite Nachfrage antwortete sie dann, dass der alte Weg-Zeit Graph dem Graphen der täglichen Transaktionen entsprechen würde (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.903). Katie konnte also das Konzept der Änderungsrate nicht auf den Geldkontext übertragen, obwohl sie im Bewegungskontext keinerlei Probleme hatte (siehe Tabelle 40).

Insgesamt zeigt die Studie folgende zwei wichtige Ergebnisse (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.904):

1. Studierende können ein Verständnis des Zusammenhangs zwischen Bestand und Änderungsrate aus einem Kontext *nicht* zwangsläufig in einen anderen Kontext übertragen
2. Auch Studierende, die *nur Teilzusammenhänge* zwischen Änderungsrate und Bestand in einem Kontext verstanden haben, können diese trotz der Lücken eventuell schon auf den neuen Kontext übertragen

Insbesondere das erste Ergebnis ist wichtig für die Studierenden der Wirtschaftswissenschaften. Man kann nicht davon ausgehen, dass wenn das Konzept der Änderungsrate in anderen Kontexten wie dem Geschwindigkeitskontext verstanden wurde, dieses Verständnis automatisch in ökonomische Kontexte übertragen werden kann.

Die zweite Studie hier vorgestellte Studie zum Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten ist von Mkhathswa u. Doerr (2015). Sie haben untersucht, wie Studierende Optimierungsprobleme in ökonomischen Kontext lösen. Dazu konstruierten sie eine Serie von task-based Interviews, an denen vier Studierendenpaare einer Universität in den nordöstlichen USA teilnahmen (Mkhathswa u. Doerr, 2015, S.2202). In Mkhathswa u. Doerr (2015) sind die Ergebnisse zu folgender Aufgabe dargestellt (Mkhathswa u. Doerr, 2015, S.2202):

Eine wichtige Fluggesellschaft unterhält derzeit 195 Flugzeuge. Die Fluggesellschaft fliegt 84 Ziele in 24 Staaten und 12 Ländern in der Karibik, Südamerika und Lateinamerika an. Die Fluggesellschaft überlegt, ein weiteres Flugzeug hinzuzufügen. Die Fluggesellschaft kann dabei entscheiden ein zusätzliches Flugzeug anzuschaffen oder die Dinge so zu belassen, wie sie sind. Die Entscheidung der Fluggesellschaft soll rein auf finanzieller Basis getroffen werden.

Wie soll die Fluggesellschaft entscheiden, ob sie das 196te Flugzeug hinzuzufügen soll?

Die Studierenden hatten bereits Calculus für Wirtschaftswissenschaftler gehört. Sie kannten Begriffe wie mittlere Änderungsrate und lokale Änderungsrate, aber auch Begriffe wie Grenzkosten oder Grenzerlös (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2203). In ihrem Calculus-Lehrbuch Haeussler u. a. (2010, S.513) wurden die Begriffe Grenzkosten und Grenzerlös als Änderungsraten eingeführt (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2206) (ein Blick ins Buch zeigte, dass sie als Ableitung definiert wurden und als Näherung der Zusatzkosten bzw. des Zusatzerlöses der nächsten Einheit interpretiert wurden (Haeussler u. a., 2010, S.513))

Eine intendierte Lösung der Flugzeugaufgabe ist in Mkhatshwa u. Doerr (2015) nicht dargestellt. Eine Lösung der Aufgabe könnte wie folgt lauten: Der Gewinn ergibt sich als Differenz von Erlös und Kosten ($G(x) = E(x) - K(x)$). Er nimmt zu, falls $G'(x) > 0$ bzw. $E'(x) > K'(x)$. Man sollte also ein Flugzeug anschaffen, wenn der Erlös pro Flugzeug noch höher ist als die Kosten pro Flugzeug.

Allerdings war in der Aufgabe nicht festgelegt, dass man über Grenzkosten und Grenzerlös argumentieren müsste. So tat beispielsweise eine Schülerin (Isabell) das auch nicht, sondern betrachtete allein die Gewinnfunktion (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2203):

„If the rate of change increases with the more jets that they should add another jet but if the rate of change is decreasing they should not add another jet.“

Dazu zeichnete sie zwei verschiedene Graphen, die sie mit „profit“ beschriftete: einen streng wachsenden, den sie mit „add“ beschriftete, und einen streng fallenden, den sie mit „not add“ beschriftete (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2203).

Die anderen sieben Studierenden nutzten Grenzkosten und Grenzerlös in ihren Argumentationen (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2203). Ein Beispiel ist Sally (Isabells Interviewpartnerin). Ihre Lösung ist in Abbildung 26 dargestellt. MC bezeichnet dabei „marginal cost“, also die Grenzkosten, MR bezeichnet „marginal revenue“, also den Grenzerlös.

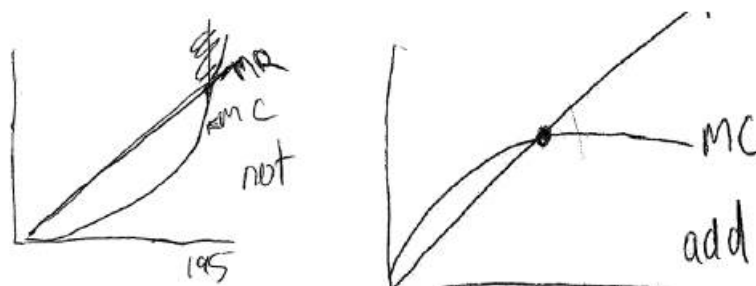


Abbildung 26: Sallys Lösung bei der Aufgabe zur Entscheidung über die Anschaffung eines zusätzlichen Flugzeuges bei gegenwärtig 195 Flugzeugen mit Hilfe von Grenzkosten und Grenzerlös (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2204)

Sally kommentierte ihre Lösung wie folgt (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2204):

„If the marginal revenue is higher than the marginal cost for the 196th plane you should purchase it but if it's the other way around you should not.“

Sally sprach hier von Grenzkosten und Grenzerlös für das 196te Flugzeug. Dies spricht dafür, dass sie diese als Zusatzkosten bzw. als Zusatzerlös für die nächste Einheit auffasste. Einen Bezug zur Ableitung stellte sie nicht her.

Ähnlich argumentierte Paige, eine andere Schülerin (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2205):

„They need to see what the potential revenue is from that one plane and see if that would give them more money.“

Auch diese Formulierung deutet auf eine Auffassung des Grenzerlöses als Zusatzerlös für die nächste Einheit hin, weil vom „Grenzerlös von diesem einen Flugzeug“ gesprochen wurde.

Insgesamt erhielten Mkhatshwa und Doerr folgende Ergebnisse (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2206):

1. Die Studierende setzten erfolgreich das Konzept der Grenzkosten und des Grenzerlöses zum Problemlösen ein
2. Sie verstanden die Grenzkosten überwiegend als Zusatzkosten bzw. Zusatzerlös und zeigten kein Ratenverständnis der beiden Konzepte

Letzteres Ergebnis wurde auch daran deutlich, dass sieben der acht Studierenden der Interviews die Einheit „Dollar“ statt „Dollar pro Einheit“ verwendet haben (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2205). Dies ist in den Augen von Mkhatshwa und Doerr nicht erfreulich, da es Ziel des Calculus-Kurs der Teilnehmer war, dass diese die Grenzgrößen als Raten verstehen (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2206).

4.5 Zusammenfassung und Konsequenzen für die Lehre

In diesem Kapitel wurde der aktuelle Forschungsstand zu Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung bei Studierenden dargestellt. Bezüglich des in Kapitel 3 entwickelten Rahmenmodells zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wurden Schwierigkeiten auf allen drei Verständnisebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion* des Modells herausgearbeitet:

1. Ebene *Verhältnis*: Probleme beim Verständnis des Differenzenquotienten bzw. beim Konzept der Steigung einer linearen Funktion (Kapitel 4.1)
2. Ebene *Grenzwert*: Probleme beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle (inklusive der Frage nach der Differenzierbarkeit einer Funktion) (Kapitel 4.2)
3. Ebene *Funktion*: Probleme beim Verständnis der Ableitungsfunktion als Funktion (Kapitel 4.3)

Anschließend folgte noch eine Herausarbeitung von Schwierigkeiten beim Umgang mit Änderungsraten in ökonomischen Kontexten (Kapitel 4.4).

In Folgenden werden die auf diesen Ebenen ermittelten Schwierigkeiten noch einmal zusammengefasst und mögliche Konsequenzen für die Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vorgeschlagen (hierbei wird davon ausgegangen, dass ähnliche Schwierigkeiten auch bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften auftreten, weil diese erfahrungsgemäß eher größere Probleme haben als Mathematikstudierende).

Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Verständnis der Steigung einer linearen Funktion:

Bereits beim Konzept der Steigung linearer Funktionen sind zahlreiche Schwierigkeiten in der Literatur dokumentiert. So fanden Nagle u. a. (2013) in einer Studie zum *concept image* von Studienanfängern zur Steigung einer linearen Funktion heraus, dass vielen Studienanfängern Aspekte des Begriffs der Steigung einer linearen Funktion, die Grundlage für das Verständnis der Ableitung sind, nicht mehr bewusst sind. So wurden in einem Test zu Steigungen linearer Funktionen, dessen Fragen auf die Nennung möglichst vieler Aspekte der Steigung einer linearen Funktion abzielten (siehe Tabelle 7), folgende wichtige Aspekte von vielen Studierenden nicht genannt (siehe auch Tabelle 9):

1. *Algebraic ratio*: Rechnerische Bestimmung der Steigung durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nur von 54% der Probanden genannt
2. *Geometric ratio*: Graphische Bestimmung der Steigung mit Hilfe des Steigungsdreiecks, nur von 45% der Probanden genannt
3. *Functional property*: Auffassung der Steigung als Änderungsrate einer Funktion, nur von 26% der Probanden genannt

Überhaupt scheint die Interpretation von Steigungen als Änderungsrate Studierenden schwer zu fallen. So fanden bereits McDermott u. a. (1987) in einer Studie zur Übersetzung von Bewegungsvorgängen in Weg-Zeit-Diagramme, Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme und umgekehrt heraus, dass hier viele Studierende (eine genaue Zahl ist von in McDermott u. a. (1987) nicht genannt) Schwierigkeiten bei der Interpretation von Steigungen als Änderungsraten hatten. So interpretierten viele Studierende bei einer Aufgabe zum Geschwindigkeitsvergleich mit gegebenem Weg-Zeit-Diagramm (siehe Abbildung 5) nicht die Steigungen sondern die Funktionswerte als Geschwindigkeiten.

Eine besondere Schwierigkeit bereitet die Interpretation von Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für Werte $\Delta x \neq 1$. Dies zeigten Byerley u. a. (2016) in einer Studie mit Mathematiklehrern. Zwar konnten von den Probanden dieser Studie 77.7% eine adäquate Interpretation einer gegebenen Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ angeben (Kategorien A3, A2a und A2b in Tabelle 12). Allerdings konnten nur 22.2% eine adäquate Interpretation dieser Steigung für $\Delta x \neq 1$ nennen (siehe Tabelle 13). Als Ursache nannten Byerley u. a. (2016) *a chunky meaning of slope*. In diesem Fall kann man zwar die Steigung in der Form *„Wenn man x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y um ... Einheiten“* interpretieren, und dann einen Zusammenhang zwischen Δy und Δx über wiederholte Addition herstellen, falls Δx ein Vielfaches dieser Einheit ist. Allerdings gelingt keine Interpretation für beliebige Δx . Als Ursache nannten Byerley u. a. (2016, S.601) ein Verständnis der Änderungsrate als Zuwachs Δy bei gegebenem Δx . Ein solches Verständnis wies Thompson (1994) bereits vorher im Geschwindigkeitskontext nach, wo eine Schülerin die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung als Weglänge bei gegebener Zeiteinheit auffasste (Thompson, 1994, S.198).

Als letzte Schwierigkeit zum Verständnis von Steigungen linearer Funktionen wurde in Kapitel 4.1 die Problematik verschiedener Perspektiven auf die Steigung linearer

Funktionen auf graphischer Ebene angesprochen. Zaslavsky u. a. (2002) unterschieden hier zwei Perspektiven: (1) eine *analytische Perspektive*, bei der die Steigung eine Eigenschaft der Funktion ist und (2) eine *visuelle Perspektive*, bei der die Steigung eine Eigenschaft der Geraden in der Zeichenblattebene ist. Bei der letzteren Perspektive werden bei unterschiedlicher Skalierung der Achsen Steigungen falsch abgelesen.

Konsequenzen für die Lehre: Aus den ermittelten Schwierigkeiten zum Verständnis der Steigung linearer Funktionen lassen sich folgende Konsequenzen für die Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ziehen:

1. Es sollte nicht vorausgesetzt werden, dass Studienanfängern noch alle Aspekte des Begriffs der Steigung einer linearen Funktion bewusst sind. Daher sollte das Konzept in seinen verschiedenen Repräsentationen und deren Verbindung in der Lehrveranstaltung noch einmal wiederholt werden (oder gegebenenfalls in einem Vorkurs).
2. Steigungen sollten nicht nur im innermathematischen Setting behandelt werden, sondern auch in Kontexten interpretiert werden, wenn man möchte, dass Studierende die Steigung auch als Änderungsrate einer Funktion verstehen.
3. Zum Verständnis von Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für beliebige $h < 1$ sollten insbesondere auch Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für Werte $\Delta x \neq 1$ interpretiert werden. Byerley u. a. (2016) schlagen hierzu eine multiplikative Interpretation der Steigung in der Form ‚Der Zuwachs der abhängigen Variable Δy ist m mal so groß wie der Zuwachs der abhängigen Variable Δx ‘ vor. Eine solche Interpretation der Steigung wird in der Literatur auch als Auffassung der Steigung als *Änderungsfaktor* bezeichnet (Malle, 2003).
4. Auch sollte der Unterschied zwischen einer *Änderungsrate* und einer absoluten Änderung hervorgehoben werden, der sich bei ökonomischen Funktionen insbesondere in verschiedenen Einheiten von absoluten Änderungen und Änderungsraten bemerkbar macht.
5. Auf der graphischen Ebene sollte auf die Problematik der Bestimmung der Steigung bei unterschiedlicher Skalierung der Achsen eingegangen werden. Studierenden sollte bewusst werden, dass sie die Achsenskalierung beachten müssen. Dies ist insbesondere in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wichtig, weil hier die Achsen oft unterschiedlich skaliert sind (z.B. ist bei Kostenfunktionen teurer Produkte die Wahl von 1€ als Einheit auf der y -Achse nicht sinnvoll).

Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Verständnis des Differenzenquotienten

Zum Verständnis des Differenzenquotienten gibt es bisher wenige Forschungsergebnisse. Malle (2003) zeigte in einer Studie mit österreichischen Schülern in der Oberstufe, dass viele Schüler kein Verständnis des Differenzenquotienten hatten. So konnten nur 7.3% eine adäquate Deutung des Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ angeben (Kategorie „richtig“ in Tabelle 17). Fehlvorstellungen, die in dieser Studie auftraten, waren:

1. Ansicht, dass der Differenzenquotient die Ableitung angeben würde
2. Ansicht, dass der Differenzenquotient einen absoluten Zuwachs angeben würde

Ebenso assoziierten die meisten Studierenden bei einer Aufgabe zur Bestimmung der ‚Änderung einer Funktion f im Mittel in einem Intervall‘ nicht den Differenzenquotienten. Stattdessen wurden verschiedenste arithmetische Mittel von Funktionswerten von f verwendet. Ein ähnliches Ergebnis hat auch Carlson u. a. (2010, S.136) im Precalculus-Assessment Test bei einer Aufgabe zur Bestimmung Durchschnittsgeschwindigkeit erhalten (siehe Tabellen 18 und 19).

Aus den Ergebnissen dieser beiden Studien kann man vermuten, dass Studienanfänger mit dem Konzept des Differenzenquotienten und dessen inhaltlicher Deutung als mittlere Änderungsrate nicht vertraut sind (und auch den Begriff der mittleren Änderungsrate *nicht* kennen). Allerdings sind die Ergebnisse mit Vorsicht zu sehen, da in der Studie in Malle (2003) die Fragen teilweise problematisch formuliert sind und die Auswertungsmethodik auch nicht klar dargestellt ist (siehe Kapitel 4.1.2).

Konsequenzen für die Lehre: Eine wichtige Konsequenz wäre, dass der Differenzenquotient und dessen Deutung als mittlere Änderungsrate in der Lehrveranstaltung behandelt und nicht als bekannt vorausgesetzt werden sollten. Ein Verständnis der mittleren Änderungsrate ist wichtig zum Verständnis der lokalen Änderungsrate im Vergleich. Zum Erwerb eines Verständnisses des Differenzenquotienten sollte dieser in verschiedenen Kontexten wie Bewegungskontexten, aber auch wirtschaftswissenschaftlichen Kontexten interpretiert werden.

Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle

Auch zum Verständnis der Ableitung an einer Stelle sind in der Literatur zahlreiche Schwierigkeiten dokumentiert. Hier gibt es zahlreiche Probleme, die in verschiedenen empirische Studien gezeigt wurden:

1. Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzobjekt
2. Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Beziehung zwischen den verschiedenen Repräsentationen beim Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung
3. Schwierigkeiten bei der Verwendung der Ableitung zur Approximationen von Funktionswerten
4. Schwierigkeiten beim Verständnis des analytischen Tangentenbegriffs

Zu Schwierigkeiten bei der Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzobjekt: Rudolf Vom Hofe (1998) fand in einer empirischen Studie zum Verständnis des Grenzübergangs bei der Ableitung heraus, dass Schüler oft keine adäquate Verbindung zwischen den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für kleiner werdende h und der Ableitung herstellen können. So konnte beispielsweise in dieser Studie die Schülerin Anka die Beziehung zwischen Differenzenquotient und Ableitung ab der Stelle nicht mehr beschreiben, ab

der sich die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ in der Graphik des von ihr verwendeten CAS nicht mehr unterscheiden ließen (siehe Kapitel 4.2.2). Bei einer zweiten Schülerin zeigte sich die Fehlvorstellung, dass die Ableitung an einer Stelle den Wert 0 haben müsse, denn die Funktion wächst an einer Stelle nicht.

Eine mögliche Ursache für das Problem des Beschreibens der Verbindung zwischen Grenzprozess und Grenzwert sind Schwierigkeiten im Umgang mit dem unendlichen Grenzprozess, wie sie Marx (2013) in einer Studie mit Schülern zum Verständnis unendlicher Prozesse herausgefunden hat. Dort konnten Schüler bei einer Aufgabe zur Bestimmung des Flächeninhaltes einer Figur, die aus unendlich vielen Rechtecken mit der Grundseite von $1dm$ und den Höhen $1dm$, $\frac{1}{2}dm$, $\frac{1}{4}dm$ usw. bestand, teilweise nicht sagen, wie groß die Gesamtfläche ist, weil man nicht weiß, wieviel noch fehlt (Marx, 2013, S.84). Laut Marx (2013) „legte in den Gedanken der Schüler die Unendlichkeit einen Schleier über den Prozessausgang“. Die Schüler konnten also die Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzübjekt nicht genau beschreiben.

Zu der Fehlvorstellung, dass die Ableitung an einer Stelle stets 0 sein müsse, hat Friedrich (2001) eine mögliche Ursache genannt. Er untersuchte Schwierigkeiten beim Verständnis der Momentangeschwindigkeit. Dabei waren einige Schüler der Ansicht, dass es zu einem Zeitpunkt keine Momentangeschwindigkeit geben kann, weil in diesem kein Weg zurückgelegt wird. Als Ursache nannte er eine sogenannte *isolierende Sichtweise*, bei welcher der Zeitpunkt vom Zeitraum getrennt betrachtet wird (Friedrich, 2001, S.212).

Zu Schwierigkeiten bei der Beziehung zwischen den verschiedenen Repräsentationen: Dass Studierende hier Schwierigkeiten haben können, wurde in zahlreichen Studien gezeigt (Vom Hofe, 1998; Viholainen, 2005; Kendal u. Stacey, 2003; Häikiöniemi, 2006). Viholainen (2005) beispielsweise untersuchte, inwieweit Studierende beim Grenzübergang zur Ableitung eine Beziehung zwischen der symbolischen und der graphischen Ebene herstellen können. In seiner Studie konnte zum Beispiel die Probandin Anna die Nicht-Differenzierbarkeit einer Funktion mit Sprung zwar auf graphischer Ebene rechtfertigen. Allerdings konnte sie keine Verbindung zum Kalkül der Bestimmung von rechts- und linksseitigem Grenzwert des Differenzenquotienten herstellen (Viholainen, 2005, S.1814-1815).

Park (2016) zeigte, dass auch in Calculus-Lehrbüchern beim Grenzübergang zur Ableitung die Beziehung zwischen den Repräsentationen nicht immer explizit hergestellt wird, sowie dass innerhalb einer Repräsentation die Verbindung zwischen Ausgangsobjekt (zum Beispiel Steigung der Sekante) und Endobjekt (zum Beispiel Steigung der Tangente) über den Grenzprozess teilweise nicht dargestellt ist.

Zu Schwierigkeiten bei der Verwendung der Ableitung zur Approximationen von Funktionswerten: Bingolbali u. Monaghan (2008) zeigten, dass viele Studierende die Ableitung nicht zur Approximation unbekannter Funktionswerte durch lokale lineare Approximation nutzen können (siehe Tabelle 23). Çetin (2009b) zeigte dasselbe Phänomen für allgemeine Grenzwerte (siehe Tabelle 22).

Zu Schwierigkeiten beim Verständnis des Tangentenkonzepts: Vinner (1982) und Biza (2007) zeigten in Studien zum Verständnis des Tangentenbegriffs, dass Studierende das Konzept der Tangente an eine Kurve oft nicht korrekt erfasst haben. So gaben in der Studie von Vinner (1982) 41% der Studierenden eine geometrische Definition der Tangente an (zum Beispiel als Gerade mit genau einem Berührungspunkt mit der Kurve), obwohl im Kurs der analytische Tangentenbegriff (Tangente als Grenzlage von

Sekanten) behandelt wurde. Auch Biza (2007) zeigte, dass nur 9.9% alle möglichen Beziehungen zwischen einer Kurve und einer Tangente an einen Punkt dieser Kurve kannten (zum Beispiel, dass sie in einem Wendepunkt die Kurve schneidet). Die meisten Studierenden hatten ihre Vorstellungen zum Tangentenbegriff vom Konzept der Tangente an einen Kreis nur partiell erweitert.

Konsequenzen für die Lehre: Aus diesen Ergebnissen kann man zahlreiche Konsequenzen für die Lehre ziehen:

1. In der Lehrveranstaltung sollte die Beziehung zwischen Grenzprozess und Grenzübjekt bei der Ableitung veranschaulicht werden, zum Beispiel auf graphischer Ebene mit Hilfe des Funktionenmikroskops (Vom Hofe, 1998, S.275).
2. Man sollte den Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung in allen Repräsentationen (symbolisch, graphisch, verbal, physikalisch) durchführen, und diese Repräsentationen miteinander verbinden. Dabei sollten diese Verbindungen möglichst explizit gemacht werden, beispielsweise durch passende Beschriftung der Steigungen der dargestellten Graphen, z.B. mit „Steigung: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ “ beim Graph einer Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
3. Die Möglichkeit der Verwendung von Grenzwerten als Approximationen sollte explizit behandelt werden. Da der Grenzwertbegriff an sich in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler abseits der Ableitung kaum eine Rolle spielt (siehe zum Beispiel (Dietz, 2012)), könnte dies bei der Behandlung des Aspektes der lokalen Linearisierung bei der Ableitung erfolgen.
4. Das Konzept der Tangente an eine Kurve sollte explizit behandelt, und vom Konzept der Tangente an einen Kreis abgegrenzt werden. Hierzu sollten vielfältige Beispiele von Tangenten an Funktionen mit möglichst vielfältigen Beziehungen zwischen Tangente und Funktionsgraph gezeigt werden.

Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitungsfunktion als Funktion

Auch auf dieser Ebene haben Studierende Schwierigkeiten. Zahlreiche Fehler bei der Herstellung der Beziehung zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion sind in der Literatur dokumentiert:

1. Graph-als-Bild Fehler: Übertragung einer Situation aus dem Kontext auf den Graphen (Beichner, 1994, S.751)
2. Annahme von Ähnlichkeiten zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Änderungsrate (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.6-7)
3. Slope/height-confusion: Verwechslung von Steigung und Ausgangsfunktion (Beichner, 1994, S.751)

Monk (1994) zeigte in einer empirischen Studie mit Studierenden in Calculus-Kursen der USA, dass eine Ursache dafür ein mangelndes Verständnis des Funktionsbegriffs ist.

Genauer gesagt stellte er fest, dass für die Herstellung eines korrekten Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion ein bestimmtes Verständnis einer Funktion notwendig ist, das er als *Across-time*-Verständnis bezeichnete. Dieses entspricht dem Kovariationsaspekt von Funktionen nach Vollrath (1989, S.12), bei dem die Auswirkungen von Änderungen der unabhängigen Variablen der Funktion auf die abhängige Variable betrachtet werden.

Passend dazu sind auch Schwierigkeiten beim kovariationalen Argumentieren eine wesentliche Ursache für Probleme bei der Herstellung eines korrekten Zusammenhangs zwischen einer Funktion und ihrer Änderungsrate. So zeigten zum Beispiel Nemirovsky u. Rubin (1992) in einer Studie zum Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits-Zeit und Weg-Zeit Diagrammen, dass ein Schüler in dem Moment falsche Annahmen über den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung fallen ließ, zu dem er begann korrekt kovariational zu argumentieren (siehe Kapitel 4.3.2).

Allerdings haben viele Studierende Probleme beim kovariationalen Argumentieren. So zeigten zum Beispiel Carlson u. a. (2002) in einer Studie zur Untersuchung der Fähigkeit der Studierenden zum kovariationalen Argumentieren, dass 75% den Füllgraphen beim Füllen einer Flasche (siehe Abbildung 25) *nicht* korrekt rekonstruieren konnten (siehe Tabelle 38). In einem nachfolgenden Interview erkannte sie, dass viele Studierende zwar einen qualitativen Zusammenhang zwischen absoluten Änderungen von abhängiger und unabhängiger Variable herstellen konnten, die genaue Gestalt des Graphen aber nicht mit Hilfe der Änderungsrate rekonstruieren konnten.

Eine letzte Schwierigkeit, die in Kapitel 4.3 gezeigt wurde, kann sich in graphischen Settings ergeben. Aspinwall u. a. (1997) zeigten, dass Darstellungen von Funktionen in Graphiken manchmal zu falschen Annahmen über den Verlauf von Funktionen führen können, die sich durch Gegebenheiten der Zeichnung (z.B. durch Ungenauigkeiten) ergeben können. So glaubte beispielsweise der Proband Tim in ihrer Studie zum Verständnis der Ableitung auf graphischer Ebene, dass eine Parabel vertikale Asymptoten hätte, weil in der vorgelegten Zeichnung nur ein Ausschnitt zu sehen war. Dementsprechend zeichnete er einen falschen Ableitungsgraphen (siehe Abbildung 16).

Konsequenzen für die Lehre: Aus diesen Studien ergeben sich zwei wesentliche Konsequenzen für die Lehre:

1. Man sollte das Verständnis des Kovariationsaspektes von Funktionen und kovariationales Argumentieren fördern. Carlson u. a. (2002, S.374) schlagen vor, hierfür Aufgaben zu dynamischen Vorgängen aus der realen Welt zu verwenden, weil an ihnen der Kovariationsaspekt von Funktionen erlebbar gemacht werden kann.
2. Man sollte genau aufpassen, ob präsentierte Graphiken aufgrund von Gegebenheiten der jeweiligen Zeichnung falsche Annahmen über den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung hervorrufen könnten (zum Beispiel durch unterschiedliche Skalierung der Achsen) und diese gegebenenfalls thematisieren.

Zusammenfassung bisheriger Forschungsergebnisse zum Verständnis von Änderungsraten in ökonomischen Kontexten

Ein wesentliches Ergebnis ist, dass Studierende ein Verständnis der Ableitung aus anderen Kontexten eventuell nicht problemlos auf ökonomischen Kontexte übertragen können. Diese zeigten Wilhelm u. Confrey (2003) in einer Studie zur Fähigkeit der Übertragung des Verständnisses des Zusammenhangs zwischen Funktion und ihrer Änderungsrate vom Bewegungskontext auf einen Geldkontext (siehe Tabelle 40).

Konsequenz für die Lehre: Man sollte nicht stillschweigend erwarten, dass Studierende ihr Verständnis der Ableitung aus anderen Kontexten wie Bewegungskontexten in ökonomische Kontexte übertragen können.

Zusammenfassendes Kurzfazit: Insgesamt zeigt die Literaturrecherche, dass Studierende an vielen Stellen Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffes haben können. Zahlreiche Konsequenzen für die Lehre wurden abgeleitet. Diese sind als mögliche Anregungen für die Gestaltung der Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zu sehen. Aufgrund des Zeitmangels in entsprechenden Kursen sollten Lehrende hier passend zu ihren Kurszielen und den Eingangsfähigkeiten der Teilnehmenden eine begründete Auswahl treffen. Besonders wichtig erscheint mir als Konsequenz der hier betrachteten Studien, dass Grundlagen aus der Mittelstufe der Schule, die eine Relevanz für das Verständnis des Ableitungsbegriffs haben (zum Beispiel das Konzept der Steigung einer linearen Funktion oder der Kovariationsaspekt von Funktionen), nicht als bekannt vorausgesetzt werden sollten. Stattdessen sollten sie noch einmal in der Lehrveranstaltung oder in einem Vorkurs behandelt werden.

5 Analyse von Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften zum Ableitungskonzept

5.1 Ziel und Methodik der Lehrbuchanalysen

Nachdem nun in Kapitel 3 ein Rahmenmodell entwickelt wurde, wie ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aussehen kann, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, folgt nun die Untersuchung der gegenwärtigen Praxis. Um diese geht es nun in der zweiten Forschungsfrage der Dissertation:

F2. Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern vorausgesetzt?

Zur Beantwortung des ersten Teils der Forschungsfrage wurden Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler analysiert. Hierfür wurden folgende Lehrbücher ausgewählt:

1. „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch“ von Dietz (2012): das vorlesungsbegleitende Lehrbuch der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn, in der auch die Studien der Dissertation stattfanden
2. „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug“ von Sydsæter u. Hammond (2015): ein weit verbreitetes Standardlehrwerk der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
3. „Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik“ von Tietze (2010): ein traditionelles und weit verbreitetes Standardwerk der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler im deutschsprachigen Raum

Die Lehrbücher wurden einer fachlichen und stoffdidaktischen Analyse unterzogen. Die Analyse der Lehrbücher wurde unter folgende Leitfragen gestellt:

- L1. *Welche Inhalte zum Ableitungskonzept werden vermittelt?*
- L2. *Welcher Exaktheitsgrad wird verwendet?*
- L3. *Wie werden die präsentierten mathematischen Aussagen begründet?*
- L4. *Welche Aufgaben sollen die Studierenden lösen?*

Bei der ersten Leitfrage geht es um die Inhalte. Dabei werden bei der Analyse die vermittelten Inhalte mit denen aus dem Rahmenmodell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) verglichen. Auf dieser Leitfrage liegt der

Schwerpunkt der Analyse. Die Leitfragen L2 und L3 greifen wichtige Aspekte der Frage auf, wie die Inhalte vermittelt werden. Die Leitfrage L4 wurde auch hinzugezogen, weil für den Lernprozess nicht nur die vermittelte Theorie wichtig ist, sondern auch die Aufgaben, welche die Studierenden am Ende lösen können sollten (im Sinne der anthropologischen Theorie der Didaktik (Bosch u. Gascón, 2014)).

Zur Beantwortung des zweiten Teils der Forschungsfrage F2 wurden Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaften analysiert. Die Basis der Analyse bildeten folgende Standardwerke:

1. Das Lehrbuch „Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe u. Döring (2013), ein Standardwerk der Betriebswirtschaftslehre (siehe (Ossimitz, 1991, S.52))
2. Das Lehrbuch „Grundzüge der Mikroökonomik“ von Varian (2011), ein Standardwerk der Volkswirtschaftslehre (siehe (Beckenbach u. a., 2016, S.215-217))

Weitere Bücher wurden zur Validierung herangezogen (Domschke u. Scholl, 2008; Fandel, 2010; Reiß, 2007; Schierenbeck u. Wöhle, 2008; Steven, 1998; Stiglitz u. Walsh, 2010).

Die Analyse der wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbücher erfolgte unter folgenden Leitfragen:

- L1. *Bei welchen Inhalten taucht die Ableitung auf?*
- L2. *Welches mathematische Hintergrundwissen zur Ableitung ist erforderlich um die in dem Lehrbuch dargestellten Inhalte verstehen zu können bzw. die zugehörigen Aufgaben lösen zu können?*

Methodisch wurde bei der Analyse in zwei Schritten vorgegangen, wie sie auch Vom Hofe (1998) bei der Analyse von Interviews zu Schwierigkeiten von Schülern beim Grenzübergang bei der Ableitung verwendet hat: eine *Beschreibungsebene* und eine *Erklärungsebene* (Vom Hofe, 1998, S.266). In der ersten Ebene arbeitete vom Hofe heraus, was die Schüler genau zum Grenzübergang bei der Ableitung gesagt haben. In der zweiten Ebene reflektierte er dann die Schüleräußerungen unter stoffdidaktischer Perspektive mit dem Ziel die Gedankengänge der Schüler zu erklären. Bei dieser Lehrbuchanalyse wurde analog vorgegangen. In einem ersten Schritt wurde herausgearbeitet, wie die betreffenden Lehrbücher vorgehen. In einem zweiten Schritt wurde das Vorgehen der Lehrbücher aus fachlicher und stoffdidaktischer Perspektive gemäß der Leitfragen reflektiert.

Diese beiden Schritte finden sich auch bei der Darstellung der Ergebnisse wieder. In der ersten *Beschreibungsebene* wird zunächst das Vorgehen der Lehrbücher dargestellt. In der zweiten *Erklärungs- und Reflexionsebene* erfolgt die eine fachliche und stoffdidaktische Reflexion des Vorgehens der Lehrbücher auf Basis der Leitfragen. Gegebenenfalls werden hier auch weitere mathematische Erklärungen gegeben, falls diese in den betrachteten Büchern fehlen oder lückenhaft sind.

Im Folgenden werden nun die Analysen der oben genannten Bücher im Detail dargestellt (wobei ich mich bei den wirtschaftswissenschaftlichen Büchern aus Platzgründen auf das Buch von Wöhe u. Döring (2013) beschränke, welches in Bezug auf die behandelten Inhalte im Zusammenhang mit der Ableitung und das dafür nötige Hintergrundwissen durchaus als prototypisches Basiswerk angesehen werden kann).

5.2 Analyse des Lehrbuchs von Dietz

Als erstes wird das Buch „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch“ von Hans M. Dietz analysiert (Dietz, 2012), weil dieses Buch vorlesungsbegleitend im Kurs „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ an der Universität Paderborn eingesetzt wird, wo die Studien dieser Dissertation zum Verständnis der Ableitung durchgeführt wurden.

Zunächst wird eine Übersicht der Kapitel und Unterkapitel des Buches gegeben, in denen die Ableitung eine wichtige Rolle spielt. Danach erfolgt eine Detailanalyse der Unterkapitel, in denen direkt *das Konzept der Ableitung* oder das damit verwandte Konzept der Elastizität im Mittelpunkt stehen. Zusätzlich wird das Kapitel mit den Ableitungsregeln im Detail dargestellt, damit man eine Idee zum Exaktheitsgrad und zur Argumentationskultur des Buches bekommt (siehe Leitfragen L2 und L3 aus Kapitel 5.1).

5.2.1 Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch

Die Ableitung als mathematisches Konzept wird im Wesentlichen im Kapitel 9 des Buches „Differenzierbare Funktionen“ behandelt. Eine Übersicht zu den Unterkapiteln des Kapitels über differenzierbare Funktionen befindet sich in Tabelle 41. Die Unterkapitel, die dann im Detail analysiert werden, sind fett hervorgeheben.

Auch in den folgenden Kapiteln 10, 11 und 12 spielt die Ableitung eine Rolle:

1. in Kapitel 10 „Monotone Funktionen“ beim Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung (Unterkapitel 10.6.)
2. in Kapitel 11 „Konvexe Funktionen“ beim Zusammenhang zwischen Konvexität und Ableitung (Unterkapitel 11.4.)
3. in Kapitel 12: „Extremwertprobleme“ im Unterkapitel zu Methoden der Extremwertbestimmung (Unterkapitel 12.4.)

Bei diesen Kapiteln wird jedoch aus Platzgründen keine Detailanalyse dargestellt, da hier nicht das Konzept der Ableitung im Mittelpunkt steht, sondern das Konzept der Monotonie in Kapitel 10, das Konzept der Konvexität in Kapitel 11 und die Lösung von Optimierungsproblemen in Kapitel 12 (samt der Frage nach der Existenz solcher Lösungen).

Das letzte Kapitel aus Dietz (2012), in dem die Ableitung eine wichtige Rolle spielt, ist Kapitel 14 mit dem Namen „Reelle Funktion in der Ökonomie“. Dieses gliedert sich in folgende Unterkapitel:

Kapitel 14.1. „Wünschenswerte Eigenschaften ökonomischer Funktionen“

Kapitel 14.2. „Mehr‘ über Kostenfunktionen“

Kapitel 14.3. „Fahrstrahlanalyse von Kostenfunktionen“

Kapitel 14.4. „Kosten, Erlös, Gewinn, Angebot“

Kapitel 14.5. „Preisvariation und Angebot auf dem Polypolmarkt“

Kapitel des Buchs	Beschreibung der behandelten Inhalte
9.1. „Der Ableitungsbegriff“	Definition der Ableitung und des Begriffes der Differenzierbarkeit, Behandlung der geometrischen Interpretation der Ableitung und der Deutung als Änderungsrate, Behandlung des Aspektes der linearen Approximation, Behandlung der ökonomischer Sprechweisen in Zusammenhang mit der Ableitung und der ökonomischen Interpretation der Ableitung
9.2. „Technik der Ableitung“	Behandlung der Ableitung elementarer Funktionen, Behandlung der Ableitungsregeln (einschließlich Ableitung der Umkehrfunktion)
9.3. „Höhere Ableitungen“	Formale Definition höherer Ableitungen
9.4. „Einige nützliche Aussagen“	Behandlung einiger Sätze über differenzierbare Funktionen: 1. Satz zum Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit 2. Satz von Rolle und Mittelwertsatz der Differentialrechnung 3. Satz über den „Differenzierbarkeitsabschluss“ (d.h. einseitige Differenzierbarkeit an den Rändern, falls eine Funktion $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $(a; b)$ differenzierbar ist, und die Ableitung sich bis zum Rand fortsetzen lässt) Behandlung der Regeln von De L'Hôpital, Behandlung des Newton-Verfahrens
9.5. „Satz von Taylor und die Taylorformel“	Behandlung des Satzes von Taylor mit Lagrange-Restglied sowie von Taylorreihen
9.6. „Elastizitäten“	Einführung des Begriffes der Elastizität, Behandlung ökonomischer Sprechweisen der Elastizität und der ökonomischen Interpretation der Elastizität, Behandlung von Rechenregeln der Elastizität

Tabelle 41: Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung in Dietz (2012) im Kapitel über differenzierbare Funktionen

Kapitel 14.6. „Marktgleichgewichte“

Kapitel 14.7. „Konsumenten- und Produzentenrente“

Die Ableitung taucht hier im Wesentlichen als Hilfsmittel zur Beschreibung ökonomischer Funktionen und bei der Lösung ökonomischer Optimierungsprobleme auf, wobei das Konzept aber nicht im Mittelpunkt steht. In Kapitel 14.2. „Fahrstrahlanalyse von Kostenfunktionen“ spielt jedoch erstmals ein weiterer Aspekt des Konzepts der Ableitung eine wichtige Rolle, der bisher nicht angesprochen wurde. Daher wird bei diesem Kapitel auch die Detailanalyse ausführlich dargestellt.

5.2.2 Kapitel über den Ableitungsbegriff

In diesem Kapitel wird die Definition der Ableitung eingeführt, der Zusammenhang zur linearen Approximation dargestellt sowie die ökonomische Interpretation vermittelt.

Beschreibungsebene: Zunächst erfolgt eine kurze Motivation (S.257):

„Der Ableitungsbegriff ist zweifellos einer der wichtigsten im Thema „reelle Funktionen“. Aus der Schulmathematik wird damit zunächst immer der Anstieg der Tangente an den Graphen einer Funktion assoziiert. Wir werden sehen, dass die Bedeutung der Ableitung weit über diese Interpretation hinausgeht. Das gilt insbesondere mit Blick auf die Ökonomie, in der oft gefragt wird, wie sich kleinste Änderungen von Inputgrößen auf den Output auswirken.“

Danach wird direkt die Definition der Ableitung genannt (S.257):

Definition 5.1:

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von D . Existiert der endliche Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \quad (32)$$

so heißt f differenzierbar an der Stelle x_0 und $f'(x_0)$ heißt Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

Unmittelbar nach der Präsentation der Definition wird die geometrische Deutung dargestellt. Dazu wird mit Hilfe einer Skizze, wie in Abbildung 27 zu sehen, zunächst der Differenzenquotient als Steigung der Sekante veranschaulicht, die sich als Verhältnis der Seiten im Steigungsdreieck ergibt (S.258).

Der Grenzübergang wird dann geometrisch ebenfalls in einer Skizze illustriert, die ähnlich der in Abbildung 28 dargestellten Skizze ist (dort ist die Tangente allerdings farbig dargestellt). Dazu gibt es folgende Erklärung (S.258):

„Lässt man nun die Konstante h gegen 0 gehen, wandert der rechte Punkt der beiden hervorgehobenen Punkte des Graphen – d.h. $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ – auf den linken zu. Dabei dreht sich die Sekante s um den Punkt $(x_0, f(x_0))$ im Uhrzeigersinn nach unten und geht in die in Grenzlage befindliche Tangente über.“

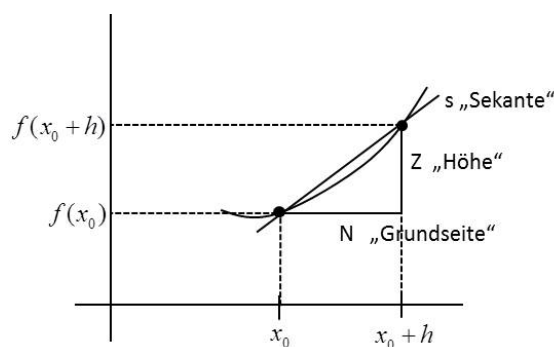


Abbildung 27: Graphik des Autors zur Visualisierung des Differenzenquotienten durch eine Sekante in Analogie zu (Dietz, 2012, S.258)

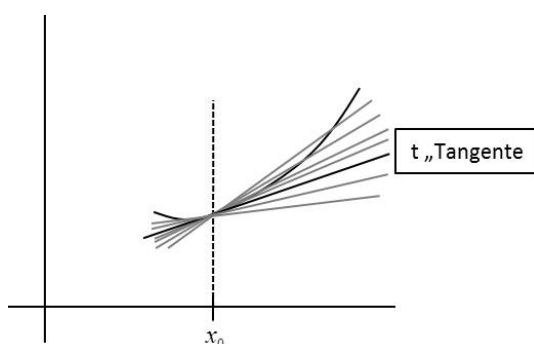


Abbildung 28: Graphik des Autors zur Visualisierung des Grenzüberganges zur Ableitung in Analogie zu (Dietz, 2012, S.258)

Gleichzeitig geht die Sekantensteigung $Df(x_0, x_0 + h)$ in den Wert $f'(x_0)$ über. Also gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ wieder.'

Erklärungs- und Reflexionsebene: Zunächst wird die Ableitung also in ihrer symbolischen Repräsentation als Grenzwert des Differenzenquotienten und in ihrer graphischen Repräsentation als Steigung der Tangente eingeführt (siehe theoretisches Modell zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3, Abbildung 4 oder Schlussblatt). Die symbolische Repräsentation bildet die formale *concept definition*. Diese ist mit allen ihren Feinheiten formuliert (inklusive der Forderung, dass x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereiches sein muss, und dass der Grenzwert des Differenzenquotienten existieren muss). Die graphische Repräsentation als Steigung der Tangente wird als Deutung des Differenzenquotienten bezeichnet. Die Tangente wird dabei als Grenzlage von Sekanten eingeführt, was einem analytischen Tangentenbegriff entspricht (Vinner, 1982, S.25). Die Existenz der Tangente im betrachteten Punkt x_0 wird hierbei vorausgesetzt, obwohl das natürlich nicht immer gegeben ist.

In beiden Repräsentationen werden die Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* aus dem theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung eingeführt (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Der Grenzübergang zwischen den beiden Ebenen wird auf ikonischer und symbolischer Ebene parallel betrachtet. Dabei wird ein intuitiver Grenz-

wertbegriff verwendet, d.h. es gab keine Definition dieses Begriffs (lediglich Grenzwerte von Folgen und einseitige Grenzwerte von Funktionen wurden exakt definiert (S.180, S.184, S.254)). Dementsprechend sind die Formulierungen im Zusammenhang mit dem Grenzübergang bei der Ableitung etwas unpräzise wie: *„Die Sekante geht für $h \rightarrow 0$ in die Tangente über.“*

Beschreibungsebene: Nach der geometrischen Definition erfolgt schließlich die Interpretation als Änderungsrate. Dazu wird zunächst der Differenzenquotient wie folgt verbalisiert (S.258):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\text{(absoluter) Funktionszuwachs}}{\text{(absoluter) Argumentzuwachs}} \quad (33)$$

Es wird dann erklärt, dass der Differenzenquotient somit der *„Wachstumsrate vom Punkt x_0 zum Punkt $x_0 + \Delta x$ “* entspricht. Der Grenzwert ist dann als *„infinitesimale“* oder *„lokale Änderungsrate“* zu deuten.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier wird also die verbale Repräsentation der Ableitung als *Änderungsrate* eingeführt. Dabei werden wieder die Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* aus dem theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung behandelt (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt).

Beschreibungsebene: Nach diesen beiden Interpretationen werden verschiedene Differential Schreibweisen eingeführt (S.259):

$$f'(x_0) =: Df(x_0) =: \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} =: \left. \frac{d}{dx} f \right|_{x=x_0} \quad (34)$$

Es wird hervorgehoben, dass dies nur formale Schreibweisen sind. Eine eigene Definition der Differentiale gibt es an dieser Stelle nicht.

Nach der Präsentation der Definition der Ableitung, der Einführung der geometrischen Interpretation sowie der Interpretation als Änderungsrate wird nun mit der Definition gearbeitet. An der Funktion f mit der Gleichung $f(x) := x^2$ wird mit ihr die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 hergeleitet (S.259). Danach wird ein Beispiel einer nicht überall differenzierbaren Funktion präsentiert, nämlich die Betragsfunktion abs mit der Gleichung $abs(x) := |x|$. Dass sie nicht differenzierbar ist, wird einmal graphisch damit begründet, dass an der Stelle $x = 0$ keine Tangente existiert, weil die Funktion dort einen Knick hat. Andererseits wird rechnerisch gezeigt, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$ nicht übereinstimmen.

Schließlich werden noch einseitige Ableitungen einer Funktion an Randpunkten des Definitionsbereichs formal definiert (S.260). Es wird dann als mathematischer Satz formuliert, dass an einem inneren Punkt die Ableitung genau dann existiert, wenn die rechts- und linksseitigen Ableitungen existieren und übereinstimmen (S.261). Die Aussage liegt in den Augen des Autors „auf der Hand“. Damit enden die Ausführungen zur Definition der Ableitung an einer Stelle.

Erklärungs- und Reflexionsebene: In diesem Absatz zur Ableitung an einer Stelle wird erstmals die Existenz der Ableitung in Frage gestellt. Hier wird auch mit Hilfe der Betragsfunktion als Gegenbeispiel auf graphischer und symbolischer Ebene begründet, dass die Ableitung nicht immer existieren muss. Beim Satz über die Existenz der Ableitung bei Existenz und Übereinstimmung von rechts- und linksseitiger Ableitung fehlt hingegen eine Begründung (allerdings ist hier auch kein Beweis möglich, da der Grenzwertbegriff nicht exakt definiert wurde).

Beschreibungsebene: Nun erfolgt der Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion. Dazu wird zunächst der Begriff der Differenzierbarkeit auf einem Intervall eingeführt (S.261).

Definition 5.2:

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein echtes Intervall. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn sie an jedem Punkt $x \in D$ eine (endliche) Ableitung besitzt. (Hierbei wird für jeden in D enthaltenen Randpunkt x unter ‚Ableitung‘ die entsprechende einseitige Ableitung verstanden.)

Als Beispiel einer nicht-differenzierbaren Funktion wird noch einmal die Betragsfunktion ($D_f = \mathbb{R}$) genannt (S.261).

Nun wird der Begriff der Ableitungsfunktion eingeführt (S.262):

„Bisher wurden unter dem Begriff der Ableitung stets einzelne Zahlenwerte verstanden. Die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$ definiert eine Funktion f' auf der Menge M aller Punkte $x \in D$, in denen eine endliche Ableitung $f'(x)$ existiert (ggf. als einseitige Ableitung, sofern x Randpunkt ist). Wir bezeichnen diese als „Ableitungsfunktion“ oder einfach kurz als „Ableitung von f “. Für den Definitionsbereich schreiben wir, wie üblich $M = D_{f'}$.“

An dieser Stelle sind zwei Aufgaben als Beispiele eingebaut, deren Lösung im Buchanhang zu finden ist (S.262). Es ist zu untersuchen, an welchen Punkten ihres Definitionsbereiches die Funktionen $f(x) := \text{sgn}(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) und $g(x) := \frac{1}{x}$ ($D_g = (0; \infty)$) eine Ableitung besitzen und ggf. ist diese zu bestimmen.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Der Übergang zur Ableitungsfunktion (Ebene *Funktion* im theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung aus Kapitel 3, siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) vollzieht sich recht schnell und wird nur in der symbolischen Repräsentation behandelt. Immerhin wird aber der Funktionscharakter der Ableitungsfunktion explizit hervorgehoben (z.B. wird betont, dass sie stets einen Definitionsbereich hat). Um den Unterschied zur Ableitung einer Stelle hervorzuheben, wird die Ableitung als Funktion vom Autor auch als *Ableitungsfunktion* oder *Ableitung der Funktion f* bezeichnet.

Beschreibungsebene: Nach der Einführung der Ableitung als reines mathematisches Konzept erfolgt ein erster Bezug zur Ökonomie. Es wird erklärt, dass für ökonomische Funktionen die Bezeichnungen „Grenz-“ bzw. „marginal“ im Englischen für die jeweiligen Ableitungsfunktionen stehen. Die Bezeichnungsweise wird übersichtlich anhand

einer Tabelle mit verschiedenen Typen ökonomischer Funktionen dargestellt (A ist Angebotsfunktion, so ist A' das Grenzangebot, E ist Erlösfunktion, so ist E' Grenzerlös, usw.) (S.263).

Da zu ökonomischen Funktionen auch Einheiten gehören, folgt nun eine Thematisierung der Einheiten der Ableitung (S.263). Die Einheit, die eine Einheit der Rate ist, wird dabei formal über die Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten (und nicht über die Interpretation als Änderungsrate) begründet.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Grenzgrößen werden also über die Ableitung definiert. Ihre Einheiten werden mit Hilfe der Definition der Ableitung begründet. Alternativ hätten sie mit der Interpretation der Ableitung als Änderungsrate begründet werden können.

Beschreibungsebene: Nach diesen ersten Ausführungen zur Verwendung der Ableitung in der Ökonomie folgt ein Abschnitt über lokale Linearisierung, mit deren Hilfe dann eine genaue ökonomische Interpretation der Ableitung hergeleitet wird. Die Ausführungen zur lokalen Linearisierung beginnen mit folgendem Satz (S.264):

Satz 5.3:

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von D . f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn es eine Konstante a derart gibt, dass für alle betragsmäßig hinreichend kleinen $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + R(x_0, x_0 + h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{R(x_0, x_0 + h)}{h} = 0 \quad (35)$$

In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Zu diesem Satz wird dann erläutert, dass man den Funktionszuwachs Δf in einen linearen Term und ein Restglied aufspalten kann. Ohne Restglied erhält man die Näherungsformel

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + a \cdot h \quad (\text{S.265}). \quad (36)$$

Es wird erklärt, dass der Fehler zwischen dem Funktionszuwachs Δf und dem Linearterm $a \cdot h$, der dem Restglied $R(x_0, x_0 + h)$ entspricht, für $h \rightarrow 0$ sogar relativ zum Nenner h gegen 0 gehen muss (S.265) und dass dann $a = f'(x_0)$ ist.

Ein allgemeiner Beweis des Satzes erfolgt nicht. Stattdessen wird die Darstellung aus (35) für $f(x) = x^2$ einmal rechnerisch gezeigt (inklusive Nachweis der Konvergenz des relativen Fehlers gegen 0) (S.265). Anschließend wird unter Einsetzen von $f'(x_0)$ und der Substitution von $x := x_0 + h$ die Näherungsformel

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{bzw.} \quad \Delta f \approx f'(x_0)(x - x_0) \quad (37)$$

anhand zweier Skizzen mit Hilfe der Tangente veranschaulicht (S.267, siehe Abbildung 29). Dazu wird erklärt, dass die Approximation $\Delta f \approx f'(x_0)(x - x_0)$ ($x := x_0 + h$) umso genauer wird, je näher x bei x_0 liegt (S.266). Deshalb ist die Tangente auch die Gerade, die sich um x_0 lokal am besten anschmiegt (S.266).

Für $x \rightarrow x_0$ erhält man dann laut Dietz formal folgende fiktive Beziehung (S.267):

$$df = f'(x_0) dx \quad (38)$$

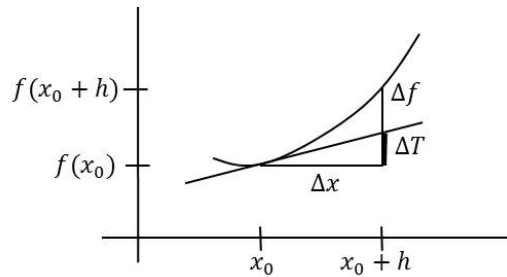


Abbildung 29: Skizze des Autors in Analogie zur Veranschaulichung der lokalen linearen Approximation in (Dietz, 2012, S.267)

Die Größen dx und df werden von Dietz als Differentiale bezeichnet, die laut Dietz als *unendlich kleine Größen* zu verstehen sind. Aus strenger mathematischer Sicht ergibt sich aus der Approximationsformel $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \rightarrow x_0$ aber die Gleichung „ $0 = 0$ “, weswegen Dietz die asymptotische Beziehung (38) einen puren mathematischen Formalismus nennt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: In diesem Abschnitt erfolgt also die Einführung des Zusammenhangs zwischen Ableitung und linearer Approximation. Dieser wird sehr exakt als mathematischer Satz formuliert. Der Satz wird zwar an einer Skizze veranschaulicht, ein Beweis fehlt jedoch.

Dann werden Differentiale eingeführt. Dietz definiert diese aber nicht in einem mathematisch strengen Sinne. Er betrachtet Differentiale als fiktive, unendlich kleine Größen in der fiktiven asymptotischen Beziehung $df = f'(x_0) dx$, die sich daraus ergibt, dass der Fehler zwischen Δf und dem Zuwachs entlang der Tangente $f'(x)(x - x_0)$ der Näherungsformel $\Delta f \approx f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen 0 geht.

Beschreibungsebene: Nach Einführung der Näherungsformel (37) und der asymptotischen Beziehung der Differentiale (38) wird der nun eingeführte Zusammenhang zwischen Ableitung und Funktionszuwachs verwendet, um eine ökonomische Interpretation der Ableitung am Beispiel einer Kostenfunktion herzuleiten. Ist K eine Kostenfunktion, bei der der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Geldeinheiten angegeben ist, so ergeben sich aus den Formeln (37) und (38) folgende Interpretationen von $K'(11)$ bei der Kostenfunktion $K(x) = x^2$ (S.269):

1. *„Erhöht man, ausgehend vom Output von 11 Einheiten den Output um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um **ungefähr** 22 Geldeinheiten.“* (aus (37))
2. *„Erhöht man, ausgehend vom Output von 11 Einheiten den Output um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um 22 **marginale** Einheiten.“* (aus (38))

In der zweiten Formel heißen dann die formalen Größen dx und dK *marginale* Einheiten.

Mit der eben dargestellten ökonomischen Interpretation der Ableitung endet dann das Einführungskapitel zur Ableitung. Weitere Aufgaben gibt es nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: In Dietz (2012) werden also ökonomische Interpretationen der Ableitung eingeführt und mit dem mathematischen Konzept der Ableitung verbunden, und zwar über die Approximationsformel $\Delta K \approx K'(x)\Delta x$. Die zweite Interpretation wurde aus der asymptotischen fiktiven Beziehung $dK = K'(x) dx$ hergeleitet.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den behandelten Inhalten:* In diesem Kapitel zum Begriff der Ableitung wurden viele inhaltliche Aspekte aus dem theoretischen Modell zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) thematisiert. Diese sind:

1. Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* in symbolischer, graphischer und verbaler Repräsentation (als Änderungsrate)
2. Ebene *Funktion* in symbolischer Repräsentation

Dabei wurden die verschiedenen Repräsentationen der Ableitung (symbolisch, graphisch, verbal) miteinander verknüpft.

Weiterhin wurde auch die Charakterisierung der Ableitung mittels linearer Approximation behandelt (siehe auch (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.72; Greefrath u. a., 2016, S.107)).

Auch die ökonomische Interpretation der Ableitung aus dem Modell aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wurde in diesem Kapitel am Beispiel der Grenzkosten eingeführt, und zwar

- (1) als Approximation des Kostenzuwachses bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit und
- (2) als marginaler Kostenzuwachs bei Erhöhung der Produktion um eine marginale Einheit.

Dabei wurde die Verbindung zum mathematischen Konzept über die Approximationsformel $\Delta K \approx K'(x_0)\Delta x$ hergestellt. Letztere wurde aus der kurz zuvor eingeführten Idee der lokalen linearen Approximation gewonnen. Eine direkte Herleitung aus der Definition der Ableitung erfolgte nicht. Daher wurde im theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) nur der Pfeil zwischen der graphischen Ebene der Ableitung und der Approximationsformel explizit vermittelt. Außerdem fehlt ein Argument, weshalb man bei $h = 1$ von einer guten Approximation ausgehen kann.

Zusätzlich leitete Dietz aus Überlegungen, dass der Fehler zwischen ΔK und $K'(x_0) \cdot \Delta x$ für $\Delta x \rightarrow 0$ gegen 0 geht, die fiktive asymptotische Beziehung $dK = K'(x_0) dx$ her. Diese bildete dann die Basis für die Interpretation der Ableitung als Kostenzuwachs bei Erhöhung der Produktion um eine *marginale Einheit*.

Zum Exaktheitsgrad und den Begründungsformen: Fast alle Definitionen und Sätze in diesem Kapitel wurden formal korrekt und mit allen Feinheiten formuliert. Zum Beispiel wurden in der Definition der Ableitung $f'(x_0)$ sowohl die Voraussetzung genannt, dass der betrachtete Punkt x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereiches sein muss, als

auch dass der Grenzwert des Differenzenquotienten existieren muss. Lediglich der Begriff des Differentials und der des Grenzwertes einer Funktion wurden nirgends exakt definiert. Daher sind die zugehörigen Ausführungen auch recht unpräzise, zum Beispiel Aussagen wie dass *„für $h \rightarrow 0$ die Sekante in die Tangente übergeht.“*

Bei den Begründungsformen fällt auf, dass die als *Satz* gekennzeichneten Aussagen nicht allgemein begründet wurden. Dies gilt sowohl für die Aussage zur Existenz der Ableitung an inneren Punkten bei der Existenz und Übereinstimmung der einseitigen Ableitungen als auch bei der Charakterisierung der Ableitung durch lokale lineare Approximation. Letztere wurde lediglich am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ demonstriert.

Bei dem hier betrachteten Gegenbeispiel zur Differenzierbarkeit (Betragsfunktion) wurde hingegen die Nichtexistenz der Ableitung sehr wohl begründet, und zwar sowohl auf ikonischer Ebene (keine Tangente, da „Knick der Funktion“) als auch auf symbolischer Ebene (Verschiedenheit von Rechts- und linksseitigem Grenzwert des Differenzenquotienten).

Zu den Aufgaben: Es gab lediglich zwei Aufgaben (Überprüfung der Differenzierbarkeit der Funktionen $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_g = (0; \infty)$). Es wurde also kaum geübt, mit der Definition der Ableitung zu arbeiten. Zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und der Verbindung zum mathematischen Konzept über lokale Linearisierung gab es gar keine Aufgabe.

5.2.3 Kapitel über die Technik der Ableitung

In diesem Kapitel werden die Ableitungsregeln sowie die Ableitung der Umkehrfunktion eingeführt.

Beschreibungsebene: Das Kapitel wird damit motiviert, dass nun Ableitungsfunktionen sehr schnell bestimmt werden sollen. Dabei wird darauf verwiesen, dass selbst bei den einfachen, bisher betrachteten Beispielen ($f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$) der Weg über die Definition langwierig ist (S.269).

Nach dieser Motivation erfolgt die Erläuterung der Strategie des schnellen Bestimmens von Ableitungen: nämlich die Zerlegung komplizierter Funktionen in Grundfunktionen, deren Ableitung bekannt ist (S.270). Dazu wird folgender Satz präsentiert (S.270):

Satz 5.4:

Affine, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen sowie die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ sind auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich differenzierbar. Potenzfunktionen $x \mapsto x^p$ sind im Inneren ihres von p abhängigen größtmöglichen Definitionsbereiches differenzierbar; im Fall $p \geq 1$ auch an dessen Rand (soweit vorhanden). Die Ableitungen werden mit folgender Tabelle gebildet. (siehe Tabelle 42)

Ein Beweis der Differenzierbarkeit der Funktionen aus Tabelle 42 und ein Beweis der Formeln für die Ableitungen erfolgt nicht. Stattdessen wird darauf hingewiesen, dass die Ableitungen von e^{ax} und $\log_a x$ aus den anderen Ableitungen hergeleitet werden könnten und dass sich der Definitionsbereich beim Ableiten bei Potenzfunktionen even-

Funktionstyp	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
affine Funktionen	$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
Potenzfunktionen	x^p	px^{p-1}	abhängig von p
Exponentialfunktion	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0; \infty)$
Winkelfunktionen	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^{ax}	ae^{ax}	$\mathbb{R}$
Logarithmusfunktionen	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0; \infty)$

Tabelle 42: Im Dietz (2012, S.270) präsentierte Grundableitungen

tuell verkleinert. Letztere Aussage wird wie folgt präzisiert:

Satz 5.5:

Es sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^p$ (mit einer Konstanten $p \in \mathbb{R}$) definiert. Dann gilt:

$$D_{f'} = \{x \in D_f \mid x^{p-1} \text{ ist wohldefiniert.}\} \quad (39)$$

Einen allgemeinen Beweis des Satzes gibt es nicht. Dafür wird der Satz am Beispiel der Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ noch einmal erläutert (S.271). Es wird erklärt, dass die formale Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ eben nur noch auf $(0; \infty)$ definiert ist. Ebenso wird mit Hilfe der Definition der Ableitung gezeigt, dass die Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht existiert.

Danach folgen noch weitere Beispiele, in denen Definitionsbereiche verschiedener Ableitungsfunktionen betrachtet werden (S.272). An $g(x) := x^{\frac{3}{2}}$ wird noch einmal demonstriert, dass $D_{g'}$ dieses Mal genauso groß ist, wie der maximale Definitionsbereich des Ableitungsterms $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Danach wird an der $\ln$ -Funktion gezeigt, dass der Ableitungsterm $\frac{1}{x}$ zwar theoretisch einen größeren Definitionsbereich haben könnte, die Funktion als Ableitungsfunktion aber höchstens dort definiert ist, wo die Funktion selbst definiert ist, und deshalb ihr Definitionsbereich gleich $(0; \infty)$ ist. Ein letztes Beispiel ist noch die Funktion $k(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[2; 3]$.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die in diesem Kapitel präsentierten Aussagen über die Ableitungen der elementaren Funktionen sind mathematisch sehr präzise. Dabei werden die Aussagen nicht als lokale Aussagen über eine Stelle, sondern gleich als globale Aussagen über die gesamte Funktion formuliert. Selbst der Definitionsbereich der Ableitungsfunktionen wird explizit thematisiert. Ein Beweis der Differenzierbarkeit der genannten elementaren Funktionen sowie der zugehörigen Formeln der Ableitung fehlt hingegen.

Beschreibungsebene: Im nächsten Teil des Kapitels zur Technik der Ableitung werden die Ableitungsregeln präsentiert, die als *Erhaltungseigenschaften der Ableitung* bezeichnet werden (S.272). Diese sind: Summenregel, Faktorregel, Produktregel und Kettenregel. Alle Regeln sind exakt mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Ausgangsfunktionen genannt (S.272), und zwar gleich wieder als Aussagen über die gesamte Funktion. Ein Beweis der Regeln erfolgt ebenfalls nicht. Stattdessen folgen nun

zahlreiche Beispiele (2 Beispiele zur Summen- und Faktorregel, 3 Beispiele zur Produktregel, 3 Beispiele zur Kettenregel, (S.273-275)).

Als weitere Anwendung der obigen Ableitungsregeln werden nun folgende weitere Ableitungsregeln hergeleitet (S.276-277):

1. Ableitung der linearen Verkettung ($((f(ax + b))' = af(ax + b))$)
2. Reziprokenregel (Ableitung von $\frac{1}{n(x)}$)
3. Quotientenregel

Schließlich werden noch einige Beispiele zur Mehrfachverkettung demonstriert (5 Beispiele, S.277-278).

Danach folgt die Behandlung der Ableitung der Umkehrfunktion (S.279). Die Ausführungen des Buches sind ähnlich zu denen bei den anderen Ableitungsregeln. Daher wird auf eine Detaildarstellung hier aus Platzgründen verzichtet.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Auch die Ableitungsregeln werden wieder sehr exakt formuliert (mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen). Allerdings werden nur die Regeln bewiesen, die sich leicht aus den anderen Regeln folgern lassen: 1. die Regel der linearen Verkettung mit Hilfe der allgemeinen Kettenregel, 2. die Reziproken- und Quotientenregel aus der Produktregel, der Kettenregel, und der Potenzregel und 3. die Umkehrformel mit Hilfe der Kettenregel unter Annahme der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

Beschreibungsebene: Das Kapitel schließt noch mit dem Hinweis auf einige Fehler (S.280-282). Zunächst wird die Suche nach der Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ mit $D_f = \mathbb{R}$ thematisiert. Es wird erläutert, dass bei diesem Definitionsbereich der Satz über die Umkehrfunktion nicht gilt, weil $f'(0) = 0$ ist. Zeichnerisch wird dann begründet, dass die Umkehrfunktion bei $x = 0$ tatsächlich nicht differenzierbar ist, weil sie bei $x = 0$ eine senkrechte Tangente hat.

Als zweiter Fehler wird die Frage nach der Differenzierbarkeit von $v(x) := \sqrt{2x^2}$ auf $\mathbb{R}$ diskutiert. Die Diskussion erfolgt mit Hilfe einer (echten) Studentenzusammenfassung, in der die Differenzierbarkeit aufgrund der Kettenregel bejaht wurde. Auch hier wurde eine kleine Voraussetzung der Ableitungsregeln nicht beachtet. Die Wurzelfunktion (äußere Funktion) ist nämlich bei $x = 0$ nicht differenzierbar, weshalb die Kettenregel nicht angewandt werden darf.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Der Autor hebt also die Wichtigkeit der Überprüfung der Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Ableitungsregeln hervor und demonstriert dies an Beispielen.

Beschreibungsebene: Direkt im Kapitel gibt es keine Übungsaufgaben. Jedoch befinden sich am Ende des Kapitels über differenzierbare Funktionen nach Behandlung der Elastizitäten noch einmal Aufgaben zum Ableiten (6 Funktionen, S.307).

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: Insgesamt wurden in diesem Kapitel die Ableitungen aller wichtiger elementaren Funktionen sowie die Ableitungsregeln behandelt. Dabei waren alle präsentierten Regeln zur Ableitung von Funktionen sehr präzise formuliert (mit allen Voraussetzungen). An Beispielen zeigte der Autor zusätzlich, dass die genaue Beachtung der Voraussetzungen bei der Anwendung der Ableitungsregeln wesentlich ist. Dafür wurden die meisten Ableitungsregeln nicht begründet. Eine Begründung erfolgte nur bei denjenigen Regeln, die sich leicht aus anderen Ableitungsregeln folgern ließen.

Im Gegensatz zum Kapitel zum Ableitungsbegriff gab es zur Technik des Ableitens einige Übungsaufgaben. Diese waren allesamt Berechnungsaufgaben zur Berechnung der Ableitung. Die Beherrschung der Rechentechniken zur Bestimmung der Ableitung auf Basis der Ableitungsregeln war dem Autor sehr wichtig, was er auch selbst hervorhob (S.273):

„Diese Regeln sind außerordentlich nützlich und deswegen wichtig, jedoch nur durch ausreichendes Üben sicher zu beherrschen.“

5.2.4 Kapitel über Elastizitäten

Das Konzept der Elastizität baut direkt auf dem Konzept der Ableitung auf. Mit Hilfe der Elastizität wird relative Änderung der Funktionswerte bei relativer Änderung des Arguments beschrieben. Dies ist für die Ökonomie beispielsweise relevant, wenn man Änderungen der Nachfrage in Abhängigkeit der Änderungen des Preises untersuchen möchte. So kann eine Änderung von 1€ je nach Ausgangspreis viel oder wenig sein. Ebenso kann eine Änderung der Nachfrage um 1000 Einheiten in Abhängigkeit der Ausgangslage viel oder wenig sein. Daher ist hier die Betrachtung relativer Änderungen sinnvoll. Im Folgenden wird nun näher beschrieben, wie Dietz (2012) die Elastizität einführt.

Beschreibungsebene: In Dietz (2012) werden Elastizitäten damit motiviert, dass Ableitungen eben nur absolute Änderungsraten sind und in der Ökonomie oft relative Änderungen von Interesse sind. Zusätzlich sind Ableitungen auch noch abhängig von der Einheit (S.299). Daher ist es laut Dietz sinnvoll, anstelle des Verhältnisses absoluter Änderungen $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ein Verhältnis relativer Änderungen zu betrachten (S.300):

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad \text{für } x \neq 0 \quad (40)$$

Dies führt dann zu folgender Definition (S.300):

Definition 5.6:

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert an einer Stelle $x \neq 0 \in D$ mit $f(x) \neq 0$ der (endliche oder unendliche) Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} =: \varepsilon_f(x), \quad (41)$$

so heißt dieser Elastizität von f bezüglich x an der Stelle x . Die durch die Zuordnung $x \mapsto \varepsilon_f(x)$ definierte Funktion heißt Elastizität(sfunktion) von f bezüglich x .

Danach wird für differenzierbare Funktionen folgende Formel zur Bestimmung der Elastizität präsentiert:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \quad \text{falls } f(x) \neq 0 \text{ und } x \neq 0 \quad (42)$$

Ein Beweis der Formel erfolgt nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Elastizität wird hier also auf symbolischer Ebene eingeführt. Dabei werden wieder die drei Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion* aus dem Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) durchlaufen. Der symbolisch definierte Grenzwert (41), so er denn existiert, bildet dabei die formale *concept definition*.

Die Definition sowie der Satz über die Berechnungsmöglichkeit sind wieder sehr präzise formuliert. Dafür fehlt ein Beweis der Berechnungsformel (42) für differenzierbare Funktionen. Ein möglicher Beweis wäre:

$$\varepsilon_f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \frac{x}{f(x)} \right) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \quad (43)$$

Beschreibungsebene: Nach der Einführung des Begriffes der Elastizität und der einfachen Berechnungsformel (42) folgt ein Beispiel (Elastizität am Beispiel der Nachfragefunktion $N(x) = \frac{10}{1+x^2}$, $x \geq 0$ an der Stelle $x = 11$, Ergebnis: $\varepsilon_N(11) = -\frac{121}{61}$, S.301). An diesem werden dann auch die ökonomische Interpretationen der Elastizität eingeführt. Folgende Interpretationen werden präsentiert (S.302):

1. *Erhöht man den Preis ausgehend vom momentanen Wert von 11 $\left[\frac{GE}{ME}\right]$ um 1%, so sinkt die Nachfrage um **ungefähr** $\frac{121}{61}\% \approx 1,98\%$.*
2. *Erhöht man den Preis ausgehend vom momentanen Wert von 11 $\left[\frac{GE}{ME}\right]$ um ein **marginales Prozent**, so sinkt die Nachfrage um $\frac{121}{61}$ **marginale Prozent**.*

Eine Begründung der Interpretationen erfolgt nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Diese Interpretationen kann ähnlich hergeleitet werden wie die ökonomische Interpretation der Ableitung $f'(x)$, welche oft als (Approximation der) Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung von x um eine Einheit interpretiert wird. Die Verbindung erfolgte dort über die Approximationsformel $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ für $\Delta x \approx 0$, die sich aus der Definition der Ableitung herleiten ließ. Dabei wurde die Ableitung als Approximation des Differenzenquotienten verwendet. Hier kann man analog vorgehen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_f(x) &\approx \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad \text{für } \Delta x \approx 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Setzt man $\Delta x = \frac{x}{100}$ (1% von x), so erhält man:

$$\varepsilon_f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \cdot 100 = \frac{\Delta f}{f(x)} \cdot 100, \quad (45)$$

also die prozentuale Änderung von f bei der Änderung des Arguments um Δx (mit $\Delta x = \frac{x}{100} = 1\%$ von x). Diese Näherung ist dann die Grundlage für die oben genannte ökonomische Interpretation der Elastizität als Approximation der relativen Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises um 1%. Für $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man in Analogie zur Ableitung aus (44) asymptotisch wieder eine Gleichung mit Differentialen, die Grundlage der Sprechweise mit den *marginalen* Prozent ist.

Beschreibungsebene: Nach der Interpretation der Elastizität an einem Punkt wird auf weitere ökonomische Sprechweisen Bezug genommen. Diese werden mit Hilfe des obigen Beispiels motiviert (S.302). Zunächst erklärt der Autor, dass sich bei einem Ausgangspreis von $x = 11$ $\left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}}\right]$ ($\varepsilon_N(11) = -\frac{121}{61}$) bei kleinen relativen Preisänderungen die Nachfrage kaum ändern würde, weshalb sie als unelastisch bezeichnet wird (dies wäre aber nur richtig, wenn $\varepsilon_N(11) \approx 0$ wäre; der Autor bestätigte, dass hier ein Fehler im Text vorlag). Danach wird die Elastizität bei einem Preis von $x = 1$ $\left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}}\right]$ betrachtet. Sie ist $\varepsilon_N(1) = -1$. Dort würde die Nachfrage sich genauso stark ändern wie der Preis, was als *proportional elastisch* bezeichnet wird. Nach dieser Motivation folgt eine Tabelle mit allen Sprechweisen (siehe Tabelle 43).

Wert der Elastizität an der Stelle x	Bezeichnung der Funktion f an der Stelle x
$\varepsilon_f(x) = 0$	vollkommen unelastisch
$0 < \varepsilon_f(f) < 1$	inelastisch
$ \varepsilon_f(x) = 1$	proportional elastisch
$ \varepsilon_f(x) > 1$	elastisch
$ \varepsilon_f(x) = \infty$	vollkommen elastisch

Tabelle 43: Ökonomische Bezeichnungen für verschiedene Werte der Elastizitäten

Es folgen zwei Beispiele, in denen Bereiche gesucht werden, in denen ökonomische Funktionen elastisch bzw. unelastisch reagieren (S.302-303). In einem dritten Beispiel wird dann eine beliebige Kostenfunktion K betrachtet. Dort ist $\varepsilon_K(x) = \frac{K'(x)}{k(x)}$ ($k(x)$ sind die Durchschnittskosten). Die Kostenfunktion ist also genau dann elastisch, wenn die Grenzkosten die Durchschnittskosten übersteigen (S.303).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Eine Erklärung dafür, weshalb es interessant ist, die Elastizität genau in die Bereiche aus Tabelle 43 einzuteilen, liefert die sogenannte *Amoroso-Robinson Relation*. Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Elastizität der Nachfrage und der Erlösänderung an. Ist $x(p)$ die Nachfrage in Abhängigkeit des Preises, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Erlös $E(x) = x \cdot p(x)$ und der Elastizität der Nachfragefunktion $\varepsilon_x(p)$:

$$E'(x) = p(x) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_x(p)} \right) \quad (46)$$

Die *Amoroso-Robinson Relation* ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$E'(x) = (xp(x))' = p(x) + xp'(x) = p(x) \left(1 + x \frac{p'(x)}{p(x)} \right) = p(x)(1 + \varepsilon_p(x)) \quad (47)$$

Nimmt man jetzt an, dass Nachfragefunktionen streng fallend sind mit $x'(p) \neq 0$ für jeden Preis, so erhält man aus der Umkehrformel für Ableitungen und der Berechnungsformel (42) für Elastizitäten, dass $\varepsilon_p(x) = \frac{1}{\varepsilon_x(p)}$. Daraus folgt dann die *Amoroso-Robinson Relation* (46).

Befindet man sich nun im elastischen Bereich, d.h. $\varepsilon_x(p) < -1$, so sinkt mit einer Preissteigerung der Erlös, weil die Nachfrage sinkt und $E' > 0$ nach (46). Umgekehrt steigt er bei einer Preiserhöhung im unelastischen Bereich.

Beschreibungsebene: Nach der Einführung des Begriffs der Elastizität und ihrer ökonomischen Interpretation erfolgt in Analogie zu den Ausführungen zur rechnerischen Bestimmung der Ableitung mit Hilfe der Ableitungsregeln und der Ableitung elementarer Funktionen ein Abschnitt, in dem die Elastizitäten elementarer Funktionen und Rechenregeln zur Elastizität angegeben sind.

Eine Übersicht über die im Buch angegebenen Elastizitäten der elementaren Funktionen befindet sich in Tabelle 44. Eine Übersicht über die Rechenregeln der Elastizität befindet sich in Tabelle 45.

Funktionstyp	$f(x)$	$\varepsilon_f(x)$	$D_{f'}$
Lineare Funktionen	ax	1	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Affine Funktionen	$ax + b$	$\frac{xa}{ax+b}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
Potenzfunktionen	x^p	p	D_f
Exponentialfunktionen	$e^{\alpha x}$	αx	$\mathbb{R}$
Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\frac{1}{\ln x}$	$(0; \infty) \setminus \{1\}$

Tabelle 44: In Dietz (2012) präsentierte Formeln der Elastizitäten gewisser elementarer Funktionen (S.304)

Summenregel	$\varepsilon_{f+g} = \frac{f\varepsilon_g + g\varepsilon_f}{f+g}$
Faktorregel	$\varepsilon_{\lambda f} = \varepsilon_f$
Produktregel	$\varepsilon_{fg} = \varepsilon_f + \varepsilon_g$
Kettenregel	$\varepsilon_{f \circ g} = (\varepsilon_f \circ g)\varepsilon_g$
Umkehrformel	$\varepsilon_{f^{-1}} = \frac{1}{\varepsilon_f}$
Quotientenregel	$\varepsilon_{\frac{f}{g}} = \varepsilon_f - \varepsilon_g$

Tabelle 45: Rechenregeln für Elastizitäten (Dietz, 2012, S.305)

Die Formeln der Elastizitäten der elementaren Funktionen aus Tabelle 44 werden auf Basis der Berechnungsformel $\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)}f'(x)$ hergeleitet (S.304). Die Rechenregeln aus Tabelle 45 werden nicht bewiesen. Allerdings werden die Kettenregel und die Faktorregel an einem Beispiel mit Hilfe der ökonomischen Interpretation der Elastizität plausibel gemacht (S.305-306). Das Plausibilitätsargument sei hier für die Faktorregel exemplarisch dargestellt:

Ein Gut kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei Technologie I entstehen aus einem Arbeitszeiteinsatz von x Stunden $p(x)$ Mengeneinheiten Output. Bei Technologie II sind es $3p(x)$ Mengeneinheiten. Für Technologie I gelte $\varepsilon_p(8) = 2$, d.h. bei einem momentanen Zeiteinsatz von h Stunden bewirkt eine weitere Steigerung des Zeiteinsatzes um 1% etwa eine zweiprozentige Steigerung des Outputs.

Was ist über Technologie II zu sagen? Es ist klar, dass hier eine einprozentige Steigerung des Zeiteinsatzes zwar einen dreifach höheren absoluten Outputzuwachs ergeben wird, bezogen auf das von vornherein auch schon höhere Ausgangsniveau ist der relative Zuwachs jedoch derselbe. Fazit: Es gilt: $\varepsilon_p = \varepsilon_{3p}$.

In einem letzten Beispiel wird schließlich bei einem Monopolisten aus der Elastizität der Nachfragefunktion $N(p) > 0$ die Elastizität der Umsatzfunktion $U(p) = pN(p)$ mit $\varepsilon_U(p) = 1 + \varepsilon_N(p)$ bestimmt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier werden also in Analogie zu den Ableitungsregeln Rechenregeln der Elastizität behandelt. Diese werden dieses Mal ausschließlich als Formeln präsentiert. Dabei werden die Formeln für die Elastizitäten mit Hilfe der allgemeinen Berechnungsformel $\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$ hergeleitet. Eine Begründung der Rechenregeln für die Elastizitäten zusammengesetzter Funktionen erfolgt hingegen nur exemplarisch bei der Faktor- und der Kettenregel. Hier werden Plausibilitätsargumente auf Basis der ökonomischen Interpretation der Elastizität gegeben. Natürlich wäre auch hier ein Beweis mit Hilfe der Berechnungsformel möglich. Dies sei hier exemplarisch für die Faktorregel gezeigt:

$$\varepsilon_{af}(x) = \frac{x}{af(x)} (af'(x)) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \varepsilon_f(x) \quad (48)$$

Beschreibungsebene: Das Kapitel endet mit einigen Übungsaufgaben, in denen Elastizitäten an Punkten und Elastizitätsfunktionen bestimmt werden sollen (S.307-308). Weiterhin sollen Elastizitäten an Punkten ökonomisch interpretiert werden, sowie verschiedene Elastizitätsbereiche (unelastisch oder elastisch) bestimmt werden.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Aufgaben sind allesamt prozedural.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den behandelten Inhalten:* Insgesamt wurden in diesem Kapitel Elastizitäten ausführlich behandelt. Zum Konzept der Elastizität wurden folgende Aspekte behandelt:

1. die formale Definition als Grenzwert eines Verhältnisses relativer Änderungen
2. eine ökonomische Interpretation als Approximation des prozentualen Zuwachses der Funktion f , wenn man deren Variable x um 1% erhöht oder als marginaler prozentualer Zuwachs bei Erhöhung der Variable x um ein *marginales Prozent*
3. Rechenregeln der Elastizität

Viele der Aspekte zum Konzept der Elastizität sind ähnlich zu denen der Ableitung aus dem theoretischen Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Von einer Funktion f bis zur Elastizitätsfunktion ε_f werden wieder die drei Ebenen durchlaufen: *Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion*. Hierbei sind wieder verschiedene Repräsentationen denkbar (symbolisch, graphisch, verbal). In Dietz (2012) wurden alle drei Ebenen in der symbolischen Repräsentation durchlaufen. Zusätzlich wurde der bei der ersten Ebene auftretende Quotient $\frac{\Delta f}{f(x)} / \frac{\Delta x}{x}$ verbalisiert. Eine graphische Repräsentation fehlte jedoch.

Weiterhin gibt es in Analogie zur Ableitung eine ökonomische Interpretation der Elastizität, die hier ebenfalls eingeführt wurde. Allerdings wurde diese in Dietz (2012) nicht gerechtfertigt und daher keine Verbindung zum rein mathematischen Konzept der Elastizität hergestellt.

Zum Exaktheitsgrad, den Begründungsformen und den Aufgaben: Die Begriffsdefinition erfolgte hier wieder sehr exakt. Dafür wurden von den Rechenregeln nur einige ausgewählte begründet. Dabei gab es sowohl formale Herleitungen auf Basis der Berechnungsformel der Elastizität $\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$ als auch Plausibilitätsbegründungen auf Basis der ökonomischen Interpretation der Elastizität. Die Aufgaben waren überwiegend prozedural.

5.2.5 Kapitel über die Fahrstrahlanalyse von Kostenfunktionen

In diesem Kapitel geht es um die Nutzung der Ableitungsfunktion zur Beschreibung des Verhaltens ökonomischer Funktionen. Ziel ist hierbei die Beschreibung der Ausgangsfunktion f , der Grenzfunktion f' , der Durchschnittsfunktion $\frac{f(x)}{x}$ und deren Beziehung zueinander, sowie die Rekonstruktion von Grenz- und Durchschnittsfunktion aus der Ausgangsfunktion. Dietz illustriert dies am Beispiel einer Kostenfunktion.

Beschreibungsebene: Dietz nimmt an, dass zunächst eine beliebige Kostenfunktion graphisch gegeben ist. Er führt nun den sogenannten *Fahrstrahl* ein. Das ist der Strahl vom Ursprung zum Punkt $(x, K(x))$. Dieser hat gerade die Steigung $\frac{K(x)}{x}$ (S.451). Die Steigung entspricht also gerade den Durchschnittskosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$. Variiert man nun die x -Werte, kann man mit Hilfe der Steigung des Fahrstrahls den gesamten Graphen der Durchschnittskosten rekonstruieren.

Weiterhin kann man den Graphen der Grenzkosten mit Hilfe der Ableitung rekonstruieren, indem man die geometrische Deutung der Ableitung verwendet. Die Grenzkosten kann man dann durch einen Vergleich der Steigung der Tangente mit der Steigung des Fahrstrahls mit den Durchschnittskosten vergleichen (S.452).

Lässt man den Fahrstrahl nun nicht im Ursprung beginnen, sondern bei den Fixkosten $K_f = K(0)$, so hat er die Steigung $\frac{K(x) - K(0)}{x}$. Dieser Term entspricht gerade den sogenannten variablen Durchschnittskosten $k_v(x)$. Auch den Graphen dieser Funktion kann also mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse rekonstruieren (S.455).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Bezüglich des mathematischen Konzeptes der Ableitung ist hier hervorzuheben, dass an dieser Stelle des Buches bei der Rekonstruktion des Graphen der Grenzkosten mit Hilfe der Tangente erstmals die Ebene *Funktion*

aus dem Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) auf graphischer Ebene explizit thematisiert und verwendet wird.

Beschreibungsebene: Dietz führt nun die Rekonstruktion aller dieser Graphen am Beispiel der Kostenfunktion $K(x) = 3x^3 - 30x^2 + 106x + 216, x \geq 0$ vor. Diese ist eine sogenannte ertragsgesetzliche Kostenfunktion, d.h. sie ist bis zu einer Wendestelle a strikt konkav und anschließend strikt konvex. Aus der Fahrstrahlanalyse leitet er mehrere Aussagen für diese Funktion graphisch ab, die er als *ökonomische Thesen* bezeichnet, deren genauer Gültigkeitsbereich noch zu überprüfen ist (S.454-457):

- Die Stückkosten (=Durchschnittskosten) einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit dem Wendepunkt a nehmen mindestens auf $(0; a]$ streng monoton ab.
- Im sogenannten Betriebsoptimum (= Minimum der Durchschnittskosten k) sind Stückkosten gleich Grenzkosten, d.h. an der entsprechenden Stelle x_{BO} gilt: $k(x_{BO}) = K'(x_{BO})$.
- Die Stückkosten sind auf $(0; x_{BO})$ höher, auf (x_{BO}, ∞) geringer als die Grenzkosten.
- Im sogenannten Betriebsminimum (= Minimum der variablen Durchschnittskosten k_v) sind stückvariable Kosten und Grenzkosten identisch, d.h. an der entsprechenden Stelle x_{BM} gilt: $k_v(x_{BM}) = K'(x_{BM})$.
- Die stückvariablen Kosten sind auf $(0; x_{BM})$ höher, auf (x_{BM}, ∞) geringer als die Grenzkosten.
- $0 < x_W < x_{BM} < x_{BO}$ (x_W ist die Wendestelle, x_{BM} der zum Betriebsminimum gehörende Output, x_{BO} der zum Betriebsoptimum gehörende Output)

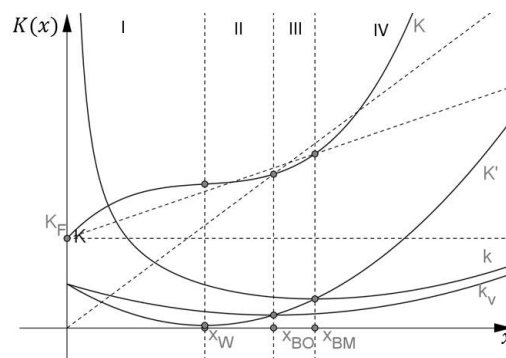


Abbildung 30: Vierphasendiagramm des Autors der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit $K(x) = 3x^3 - 30x^2 + 106x + 216, x \geq 0$

Ergebnis ist schließlich das sogenannte Vierphasendiagramm (siehe Abbildung 30). In diesem sind die Graphen aller Funktionen K , K' , k und k_v eingezeichnet. Der Name kommt daher, dass sich durch die Beziehungen dieser Funktionen zueinander verschiedene Phasen ergeben. Die 4 Phasen sind (S.458):

- I. Phase bis zum Wendepunkt: K ist konkav, K' , k und k_v sind streng fallend, $K' < k_v < k$.
- II. Phase zwischen Wendepunkt und der Stelle x_{BM} des Betriebsminimums: K ist konvex, K' ist streng wachsend, k und k_v sind streng fallend, $K' < k_v < k$.
- III. Phase zwischen x_{BM} und der Stelle x_{BO} des Betriebsoptimums: K ist konvex, K' und k_v sind streng wachsend, k ist streng fallend, $k_v < K' < k$.
- IV. Phase nach x_{BO} : K ist konvex, K' , k_v und k sind streng wachsend, $k_v < k < K'$.

Dietz unterstreicht hierbei noch, dass nur im Falle positiver Fixkosten x_{BO} und x_{BM} verschieden sind.

Anschließend führt Dietz die Fahrstrahlanalyse noch am Beispiel einer sogenannten neoklassischen (d.h. strikt konvexen) Kostenfunktion durch (S.459-460).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse werden also auf graphischer Ebene Aussagen über ökonomische Funktionen am Beispiel einer ertragsgesetzlichen und einer neoklassischen Kostenfunktion gewonnen. Bei der Begründung der Aussagen mit Hilfe der Graphik wurden jedoch nicht die konkreten Beispielfunktionen, sondern nur die Monotonie und Konvexitätseigenschaften der Funktionen und die Bedingung $K_f > 0$ genutzt. Daher liefert das Vorgehen die entsprechenden Aussagen und das Vierphasendiagramm sogar für beliebige ertragsgesetzliche und neoklassische Kostenfunktionen (mit echten Fixkosten $K_f > 0$). Eine wichtige Aussage fehlt jedoch, nämlich $k_v(0) = K'(0)$ (siehe Abbildung 30).

Beschreibungsebene: Im nächsten Abschnitt formuliert Dietz die aus der Fahrstrahlanalyse gewonnenen Aussagen für neoklassische und ertragsgesetzliche Kostenfunktionen als mathematische Sätze. Diese sind wie immer sehr präzise formuliert. Beweise gibt es jedoch nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die von Dietz hier genannten Aussagen über neoklassische und ertragsgesetzliche Kostenfunktionen lassen sich mit Hilfe der bis dahin eingeführten mathematischen Konzepte und der im Buch präsentierten Sätze zu diesen Konzepten beweisen. Exemplarisch sei hier der Beweis für die wichtige Aussage vorgeführt, dass im Minimum der Durchschnittskosten x_{BO} die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten sind (falls $x_{BO} > 0$, dies ist der „Normalfall“).

Beweis. Ist $x_{BO} > 0$ Minimalstelle der Durchschnittskosten, so gilt $k'(x_{BO}) = 0$ Daraus folgt:

$$K'(x_{BO}) = (k(x_{BO}) \cdot x_{BO})' = k'(x_{BO}) \cdot x_{BO} + k(x_{BO}) = k(x_{BO}) \quad (49)$$

□

Der Beweis verwendet die Ableitungsregeln sowie die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für Extremstellen an inneren Punkten.

Andere Aussagen zu den Kostenfunktionen, die hier aus Platzgründen nicht im Detail präsentiert werden können, verlangen schon fortgeschrittenere Sätze wie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Beschreibungsebene: Nach den theoretischen Aussagen über Kostenfunktionen folgen noch einige Berechnungsbeispiele für x_{BO} und x_{BM} (S.465-466). Die Aufgaben in diesem Kapitel sind sehr vielfältig (S.466-467). Es gibt reine Berechnungsaufgaben, aber auch Aufgaben, in denen etwas begründet werden soll, z.B. weshalb es bei der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit der Gleichung $K(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 108$ ($x \geq 0$) reicht, eine Nullstelle von k' zur Bestimmung des Betriebsoptimums zu bestimmen. Auch eine Beweisaufgabe ist zu finden: es soll gezeigt werden, dass für nichtnegative, differenzierbare kardinale Nutzenfunktionen der Grenznutzen stets kleiner als der Durchschnittsnutzen ist (kardinale Nutzenfunktionen sind per Definition streng wachsend, stetig und konkav, S.432).

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: In diesem Abschnitt wurde im Rahmen der Fahrstrahlanalyse erstmals der Übergang von der Ableitung zur Ableitungsfunktion auf graphischer Ebene durchgeführt. In Bezug auf das theoretische Modell aus Kapitel 3 für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wurde hier also erstmals die Ebene *Funktion* auf graphischer Ebene angesprochen. Diese Ebene ist hier essentiell zur Erstellung von Mehrphasendiagrammen ökonomischer Funktionen (in Dietz (2012) am Beispiel von Kostenfunktionen gezeigt). Mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse wurden dann am Beispiel einer neoklassischen und einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen Aussagen über diese gewonnen. Diese wurden dann wieder sehr präzise als mathematische Sätze auf Basis der im Buch eingeführten Definitionen für neoklassische und ertragsgesetzliche Kostenfunktionen formuliert. Dietz deutet damit an, wie sich auf Basis dieser Definitionen konsistent eine ökonomische Theorie zu Kostenfunktionen aufbauen lässt. Allerdings wurde diese Theorie dann nicht aufgebaut, da die Beweise fehlten.

5.2.6 Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Lehrbuchs von Dietz

In diesem Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung der Analyseergebnisse unter den im Voraus gestellten Leitfragen.

L1: *Welche Inhalte zum Ableitungskonzept werden vermittelt?*

In dem Lehrbuch „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Dietz (2012) werden die meisten Aspekte des Ableitungsbegriffs als reines mathematisches Konzept aus dem Modell zur Beschreibung einer möglichen adäquaten Verständnisses des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 behandelt (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Eine Übersicht, inwieweit die Aspekte des Modells zum Verständnis der Ableitung als rein mathematisches Konzept in dem Buch abgedeckt werden, ist in Tabelle 46 dargestellt.

Bei den Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* werden die Repräsentationen auch sorgfältig miteinander vernetzt. Der Übergang zur Ableitungsfunktion wird zunächst nur symbolisch vollzogen. Erst an späterer Stelle bei der Fahrstrahlanalyse (in Kapitel 14 des Buches, die Ableitung wurde in Kapitel 6 eingeführt) wird auch der Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion auf graphischer Ebene demonstriert.

Symbolisch	Graphisch	Verbal
Differenzenquotient ja	Sekantensteigung ja	Mittlere Änderungsrate ja
Differentialquotient ja	Tangentensteigung ja	Lokale Änderungsrate ja
Ableitungsfunktion ja	Graph der Ableitungsfunktion ja, später bei der Fahrstrahlanalyse	Änderungsrate einer Funktion nein

Tabelle 46: In Dietz (2012) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als mathematisches Konzept, vorerst ohne ökonomische Interpretation der Ableitung

Im dem Buch von Dietz werden außerdem ökonomische Interpretationen der Ableitung behandelt, die am Beispiel der Grenzkosten eingeführt werden. Dabei werden folgende Interpretationen der Grenzkosten vorgeschlagen:

1. *„Wenn man die Produktion von x Einheiten um **eine Einheit** erhöht, erhöhen sich die Kosten **ungefähr** um $K'(x)$ Einheiten.“*
2. *„Wenn man die Produktion von x Einheiten um eine **marginale Einheit** erhöht, erhöhen sich die Kosten um $K'(x)$ **marginale Einheiten**.“*

Die erste Interpretation entspricht der im theoretischen Modell aus Kapitel 3 dargestellten Interpretation (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Hierbei wird auch eine Verbindung zur Ableitung als reines mathematisches Konzept hergestellt, und zwar über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$. Letztere wird im Buch anschaulich aus der Idee der lokalen Linearisierung gewonnen. Eine formale Herleitung aus der Definition der Ableitung gibt es nicht. Damit findet sich nur der Pfeil zwischen der graphischen Repräsentation der Ableitung als Steigung der Tangente und der Approximationsformel aus dem theoretischen Modell für ein adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) in dem Lehrbuch von Dietz wieder. Eine Begründung, weshalb (oder inwieweit) man in der Ökonomie bei der Wahl von $h = 1$ von einer guten Approximation ausgehen kann, fehlt.

Zusätzlich präsentiert Dietz noch eine zweite ökonomische Interpretation, nämlich als Maß für den Kostenzuwachs bei der Erhöhung der Produktion um eine *marginale Einheit*. Diese Interpretation rechtfertigt er durch eine Illustration, dass der Fehler zwischen $f(x+h) - f(x)$ und $f'(x) \cdot h$ in der Formel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht. Asymptotisch ergibt sich eine fiktive Gleichheit, die er als $df = f'(x) dx$ mit den Differentialen schreibt. Die Differentiale, die er als *marginale Einheiten* bezeichnet, sind in seiner Auffassung als fiktive, unendlich kleine Größen zu verstehen.

Neben diesen konzeptuellen Aspekten erfolgt in Dietz (2012) natürlich eine Behandlung der Technik des Ableitens. Dies umfasst die Ableitung elementarer Funktionen und die Ableitungsregeln (einschließlich der Umkehrformel). Zusätzlich zu den Aspekten der Ableitung aus dem theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt)

wurden außerdem ähnliche Aspekte beim damit verwandten Konzept der Elastizität behandelt. Dort fehlte jedoch die graphische Ebene völlig.

Weitere Inhalte des Buches im Zusammenhang mit der Ableitung, die hier aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt wurden, weil bei ihnen nicht der Fokus auf der Ableitung als Konzept liegt, sind die Folgenden (siehe auch Kapitel 5.2.1):

1. Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie und Ableitung und Konvexität
2. Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit
3. Satz von Rolle und Mittelwertsatz der Differentialrechnung
4. Verwendung der Ableitung zur polynomialen Approximation und Taylorformel
5. Newton-Verfahren
6. Regeln von De L'Hôpital
7. Verwendung der Ableitung bei der Optimierung
8. Verwendung der Ableitung zur Beschreibung und Charakterisierung ökonomischer Funktionen

Insgesamt wird also in dem Lehrbuch von Dietz (2012) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Dabei werden bis auf die verbale Repräsentation der gesamten Ableitungsfunktion alle Aspekte des theoretischen Modells aus Kapitel 3 zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler abgedeckt. Weiterhin werden noch Verbindungen zu anderen Konzepten wie Monotonie, Konvexität oder Stetigkeit, sowie die Verwendung der Ableitung im Rahmen der Optimierung behandelt. Außerdem wird exemplarisch anhand von Kostenfunktionen gezeigt, wie sich ökonomische Funktionen mit Hilfe der Ableitung beschreiben und charakterisieren lassen, und wie sich darauf aufbauend eine ökonomische Theorie entwickeln lässt.

L2: Welcher Exaktheitsgrad wird verwendet?

In dem gesamten Buch legt der Autor viel Wert auf eine präzise und formal korrekte Formulierung der präsentierten Aussagen. Dies betrifft beispielsweise bereits die Definition der Ableitung $f'(x_0)$. Dort wird auf alle Kleinigkeiten, wie die Voraussetzung, dass x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereiches der Funktion sein muss, oder dass der Grenzwert des Differenzenquotienten existieren muss, geachtet. Ein weiteres Beispiel sind die Ableitungsregeln, die jeweils vollständig mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genannt sind. Bei der Ableitung der elementaren Funktionen wird sogar noch zusätzlich explizit Wert auf den Definitionsbereich der Ableitungsfunktion, und nicht bloß auf die Formel, gelegt. Selbst Aussagen über ökonomische Funktionen werden so präzise formuliert, dass sich deren Basis eine mathematisch vollkommen korrekte, und in sich konsistente ökonomische Theorie aufbauen lässt.

Die einzig nicht klar definierten Begriffe im Zusammenhang mit der Ableitung sind der Grenzwertbegriff für Funktionen und der Begriff der *marginalen Einheit*. An diesen Stellen sind auch die im Buch gebrachten Formulierungen unpräzise (Bsp.: „Die Sekante geht bei $h \rightarrow 0$ in die in Grenzlage befindliche Tangente über.“).

L3: *Wie werden die präsentierten mathematischen Aussagen begründet?*

Viele der im Buch präsentierten Aussagen werden nicht begründet. Dies betrifft vor allen Dingen wichtige mathematische Sätze (Beispiele: Ableitungsregeln (S.270) oder der Satz zum Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung (S.321)). Wenn Begründungen von Sätzen jedoch gebracht werden, so lassen sich durchaus verschiedene Formen erkennen (siehe Tabelle 47). Dabei ist der formale Beweis quantitativ bei Weitem nicht die vorherrschende Begründungsform (er wird nur bei der Herleitung von Formeln verwendet, die sich direkt aus anderen Formeln durch eine „Geradeausrechnung“ zeigen lassen).

Begründungsform	Beispiel
Formaler Beweis	Beweis der Quotientenregel auf Basis der Produkt-, Ketten- und Potenzregel
Graphische Argumentation	Herleitung von Aussagen über Kostenfunktionen mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse
Verbale Begründung	Begründung ausgewählter Rechenregeln der Elastizität über die ökonomische Interpretation der Ableitung

Tabelle 47: Begründungsformen in Dietz (2012) in Zusammenhang mit der Ableitung

Während Begründungen zu mathematischen Sätzen, die einen allgemeinen Beweis erfordern, oft fehlen, werden mathematische Aussagen, die sich mit Beispielen oder Gegenbeispielen zeigen lassen, in der Regel begründet. Beispielsweise bringt der Autor oft Gegenbeispiele zu scheinbar evidenten Aussagen. Beispiele sind:

1. Die Betragsfunktion als Gegenbeispiel zur bedingungslosen Annahme der Existenz der Tangente an eine Funktion bzw. zur Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten (S.259)
2. $f(x) = x^3$ als Gegenbeispiel zu einer Äquivalenz von streng monotonem Wachstum und positiver Ableitung, hier aus Platzgründen nicht im Detail dargestellt (S.324).

Anscheinend war es dem Autor wichtiger Sätze mit sehr genauen Voraussetzungen zu formulieren (und auch die Notwendigkeit dieser Voraussetzungen an Beispielen und Gegenbeispielen zu unterstreichen) als dann die mathematischen Aussagen bei Vorlage der entsprechenden Voraussetzungen zu begründen.

L4: *Welche Aufgaben sollen die Studierenden lösen?*

Es ist festzustellen, dass es in dem Lehrbuch von Dietz (2012) relativ wenige Aufgaben gibt. Die Aufgaben in dem Buch sind überwiegend prozedurale Routineaufgaben. Mögliche Aufgaben, an denen konzeptuelle Einsichten gewonnen werden könnten, werden in diesem Buch in der Regel vom Autor als Beispiele mit den passenden Erklärungen präsentiert.

Zusammenfassendes Fazit: Insgesamt wird im Lehrbuch von Dietz (2012) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Bis auf den Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur gesamten Ableitungsfunktion auf verbaler Ebene werden alle Aspekte des theoretischen Modells zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) abgedeckt. Die ökonomische Interpretation der Ableitung wird dabei mit der Ableitung als reines mathematisches Konzept über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ verbunden.

Bezüglich der Darstellung der präsentierten Inhalte lässt sich feststellen, dass alle präsentierten mathematischen Aussagen sehr präzise formuliert sind. Dies betrifft sogar Aussagen über Eigenschaften ökonomischer Funktionen, die so präzise formuliert sind, dass man mit ihnen eine konsistente ökonomische Theorie aufbauen könnte. Dafür fehlen aber an vielen Stellen Begründungen. Diese müssten dann in den entsprechenden Lehrveranstaltungen zusätzlich vermittelt werden, damit die Studierenden wirklich ein vernetztes *concept image* zur Ableitung aufbauen können. Ist dies aber gegeben, so lässt sich auf Basis dieses Buches nicht nur ein vollkommen kohärentes *concept image* zur Ableitung erzeugen, in welches ebenfalls die ökonomische Interpretation der Ableitung integriert ist, sondern mit Hilfe der Ableitung eine ganze Theorie zu ökonomischen Funktionen aufbauen.

5.3 Analyse des Lehrbuchs von Sydsæter und Hammond

Als nächstes wird das Buch „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Knut Sydsæter und Peter Hammond analysiert (Sydsæter u. Hammond, 2015), weil dieses Buch sehr weit verbreitet ist. Zunächst erfolgt eine Übersicht der Kapitel und Unterkapitel des Buches, in denen die Ableitung eine wichtige Rolle spielt. Danach erfolgt wieder eine Detailanalyse der Unterkapitel, in denen es direkt um das *mathematische Konzept der Ableitung* geht, und von einigen der Unterkapitel zu den Ableitungsregeln, damit man eine Idee zum Exaktheitsgrad und zur Argumentationskultur des Buches bekommt (siehe Leitfragen L2 und L3 aus Kapitel 5.1).

5.3.1 Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch

Die Ableitung ist Bestandteil von drei großen Kapiteln:

Kapitel 6: „Differentiation“

Kapitel 7: „Anwendungen der Differentialrechnung“

Kapitel 8: „Univariate Optimierung“

Diese bestehen wiederum aus sehr vielen Unterkapiteln. Eine Übersicht dieser Unterkapitel befindet sich in Tabelle 48. Die Unterkapitel, die dann im Detail analysiert werden, sind wieder fett hervorgehoben.

Kapitel des Buchs	Beschreibung der behandelten Inhalte
6.1. „Steigung von Kurven“	Geometrische Definition der Ableitung als Steigung der Tangente mit Tangentenbegriff als Berührende
6.2. „Ableitung, Tangenten“	Analytische Definition der Tangente und Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten
6.3. „Monoton wachsende und fallende Funktionen“	Einführung der Definition der Monotonie und Herstellung einer Verbindung zur Ableitung
6.4. „Änderungsraten“	Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate, Einführung der ökonomischen Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit am Beispiel der Grenzkosten
6.5. „Exkurs über Grenzwerte“	Einführung einer Verbalisierung der formalen Grenzwertdefinition für den Grenzwert von Funktionen, Behandlung der Grenzwertsätze für Funktionen auf Basis der eingeführten Definition
6.6. „Einfache Regeln der Differentiation“	Behandlung erster Ableitungsregeln (Ableitung einer konstanten Funktion, Faktorregel, Potenzregel)
6.7. „Summen, Produkte und Quotienten“	Behandlung von Summen-, Produkt- und Quotientenregel
6.8. „Kettenregel“	Behandlung der Kettenregel
6.9. „Ableitungen höherer Ordnung“	Einführung höherer Ableitungen, Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Konvexität (dabei Definition der Konvexität über f'')
6.10. „Exponentialfunktionen“	Einführung der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion
6.11. „Logarithmusfunktionen“	Einführung der Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion
7.1. „Implizites Differenzieren“	Behandlung der Technik des impliziten Differenzierens von Ausdrücken der Form $g(x, y(x))$ (anschließendes Umstellen nach $y'(x)$)
7.2. „Erste ökonomische Beispiele“	Behandlung folgender ökonomischer Beispiele, in denen die Ableitung eine Rolle spielt: 1. Modell zur Bestimmung des Volkseinkommens in einer geschlossenen Wirtschaft 2. Lineares Angebots- und Nachfragemodell
7.3. „Ableitung der Inversen“	Behandlung der Formel der Ableitung der Umkehrfunktion
7.4. „Lineare Approximation“	Behandlung der Verwendung der Ableitung zur lokalen linearen Approximation, Einführung des Begriffs des Differentials sowie der zugehörigen Rechenregeln
7.5. „Polynomiale Approximation“	Verallgemeinerung der Idee der linearen Approximation auf Polynome höheren Grades und Herleitung der zugehörigen Näherungsformeln
7.6. „Taylor-Formel“	Behandlung der Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied

Kapitel des Buchs	Beschreibung der behandelten Inhalte
7.7. „Warum Ökonomischen Elastizitäten benutzen“	Motivation und Definition des Begriffes der Elastizität, Herstellung des Zusammenhangs zwischen der Elastizität einer Nachfragefunktion und dem Erlös, Darstellung der Elastizität als doppelt logarithmische Ableitung
7.8. „Stetigkeit“	Definition der Stetigkeit über den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle
7.9. „Mehr über Grenzwerte“	Behandlung einseitiger Grenzwerte und einseitiger Stetigkeit, Behandlung des Zusammenhangs zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit, Einführung der formalen ε - δ -Definition für Grenzwerte
7.10. „Zwischenwertsatz und Newton-Verfahren“	Nennung des Zwischenwertsatzes, Behandlung des Newton-Verfahrens (Herleitung der Formel, Bemerkungen zur Konvergenzgeschwindigkeit)
7.11. „Unendliche Folgen“	Einführung des Begriffes der Folge (ohne strenge Definition), Einführung des Begriffes der Konvergenz einer Folge durch eine Verbalisierung der formalen Grenzwertdefinition
7.12. „Unbestimmte Formen und Regeln von L'Hôpital“	Behandlung der Regeln von De L'Hôpital in verschiedenen Varianten: für unbestimmte Ausdrücke der Form „ $\frac{0}{0}$ “ und „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ in den Fällen $x \rightarrow x_0$ und $x \rightarrow \pm\infty$,
8.1. „Einführung“	Definition der Begriffe „Maximumspunkt“ und „Minimumspunkt“ (global), Beweis der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für Extremstellen
8.2. „Einfache Tests auf Extrempunkte“	Behandlung verschiedener hinreichender Kriterien für Extremstellen: 1. globales Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung (einziger Vorzeichenwechsel bei x_0 als hinreichende Bedingung für eine globale Extremstelle bei x_0) 2. Konvexität/Konkavität als hinreichende Bedingung für die Extremwerteigenschaft eines stationären Punktes x_0
8.3. „Ökonomische Beispiele“	Behandlung von Beispielen ökonomischer Optimierungsprobleme (Gewinnmaximierung, Kostenminimierung)
8.4. „Der Extremwertsatz“	Behandlung des Satzes, dass jede auf einem Intervall $[a; b]$ definierte Funktion ein Minimum und ein Maximum besitzt, Herleitung der Methode „Kandidatenvergleich“ zur Bestimmung von Extremstellen von Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen (Kandidatenvergleich heißt: Vergleich der Werte $f(x_0)$ bei stationären Punkten und den Randpunkten des Intervalls), Formulierung und Herleitung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung
8.5. „Weitere ökonomische Beispiele“	Behandlung weiterer ökonomischer Optimierungsprobleme

Kapitel des Buchs	Beschreibung der behandelten Inhalte
8.6. „Lokale Extrempunkte“	Definition von lokalen Minima und Maxima an inneren Punkten des Definitionsbereichs einer Funktion, Behandlung verschiedener hinreichender Kriterien für lokale Extremstellen: 1. Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung 2. Hinreichende Kriterien unter Verwendung des Vorzeichens der zweiten Ableitung $f''(x_0)$ an einem stationären Punkt
8.7. „Wendepunkte“	Definition des Begriffes des Wendepunktes mit Hilfe der zweiten Ableitung, Behandlung notwendiger und hinreichender Kriterien für Wendepunkte (notwendige Bedingung $f''(x_0) = 0$, hinreichende Bedingung $f''(x_0) \neq 0$ und Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung bei x_0), Allgemeine Definition von Konvexität und Konkavität

Tabelle 48: Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung in Sydsæter u. Hammond (2015)

Aus Tabelle 48 sieht man bereits, dass das Buch einem spiralförmigen Aufbau folgt. Das wird an folgenden Dingen deutlich:

1. Begriffe werden zunächst auf einem weniger formalen Level behandelt und dann erst später formalisiert (Bsp.: Zunächst intuitiver Grenzwertbegriff, dann Verbalisierung der ε - δ -Definition, und noch später die formale ε - δ -Definition).
2. Es gibt einen ständigen Wechsel zwischen Mathematik und ökonomischen Anwendungen.

5.3.2 Kapitel „Steigungen von Kurven“

Dies ist das Einführungs- und Motivationskapitel zum Ableitungskonzept.

Beschreibungsebene: Zu Beginn des Einführungskapitels wird von den Autoren erklärt, dass der Ableitungsbegriff zunächst geometrisch motiviert wird, auch wenn sie die Deutung als Änderungsrate in den Wirtschaftswissenschaften für wichtiger halten (Sydsæter u. Hammond, 2015, S.196):

„Obwohl wir in den Wirtschaftswissenschaften an der Ableitung als Änderungsrate interessiert sind, beginnen wir in diesem Kapitel mit einer geometrischen Motivation für dieses Konzept. Wenn wir den Graphen einer Funktion untersuchen, würden wir gerne ein präzises Maß für die Steilheit des Graphen in einem Punkt haben.“

Dies führt dann zur Idee der Betrachtung der Ableitung als Steigung der Tangente (S.196):

„Eine nahe liegende Antwort ist es, die Steilheit einer Kurve in einem bestimmten Punkt als Steigung der Tangente an die Kurve in diesem Punkt zu definieren - d.h. als Steigung der Geraden, die die Kurve in einem Punkt berührt.“

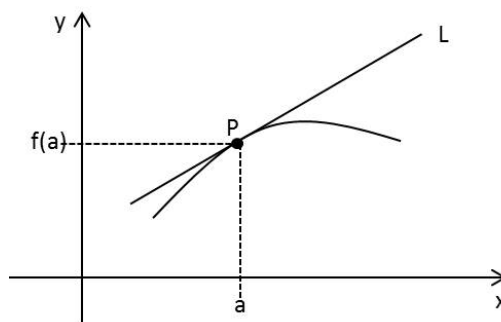


Abbildung 31: Graphik des Autors zur geometrischen Motivierung der Ableitung als Steigung der Tangente in Analogie zu einer Graphik aus Sydsæter u. Hammond (2015, S.196)

Das Vorgehen wird anhand einer Skizze einer konkaven Funktion illustriert (ähnlich wie in Abbildung 31). Danach erfolgt dann die Definition der Ableitung als Steigung der Tangente (S.197):

„ $f'(x_0)$ = die Steigung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ “

Die Definition ist nicht als solche gekennzeichnet, sondern befindet sich mitten im Fließtext.

Dann wird ein Beispiel gebracht, in dem zu gegebenem Funktionsgraph graphisch die Ableitung an 3 verschiedenen Stellen bestimmt werden soll (mit eingezeichnetem Koordinatengitter und eingezeichneter Tangente). Auffällig ist, dass das Beispiel als Aufgabe formuliert ist (S.197):

„Bestimmen Sie $f'(1)$, $f'(4)$ und $f'(7)$ für die Funktion, deren Graph in Abb. 2 [auf S.197] gegeben ist.“

Die Lösung ist dann auch mit „Lösung“ überschrieben.

Nach diesem als Aufgabe formulierten Beispiel folgen noch zwei entsprechende Übungsaufgaben, in denen Funktionswerte und Ableitungen graphisch bestimmt werden sollen (eine strikt konvexe und eine strikt konkave Funktion). Damit endet das Motivationskapitel über die Steigung von Kurven.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Ableitung wird also zunächst als Steigung der Tangente definiert. Damit wird aus dem Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt), welches Grundlage des Arbeit ist, zunächst die graphische Repräsentation der Ableitung als *concept definition* der Ableitung eingeführt. Ähnlich wie bei Dietz (2012) wird auf einen Tangentenbegriff als „Berührende in einem Punkt“ zurückgegriffen (Vinner, 1982, S.28). Deren Existenz in jedem Punkt x_0 des Definitionsbereiches der Funktion wird vorausgesetzt. Dass es Funktionen gibt, bei denen

1. die Tangente die Funktion im Tangentialpunkt x_0 auch schneiden kann (Beispiel: $f(x) = x^3$ mit $D_f = \mathbb{R}$ bei $x_0=0$), oder

2. bei der es neben dem Tangentialpunkt x_0 weitere gemeinsame Punkte mit der Funktion geben kann (Bsp.: $f(x) = x^3 + x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ bei $x_0=0$, weiterer Schnittpunkt der Tangente $x = -1$), oder
3. es überhaupt keine Tangente gibt (Bsp.: $f(x) = |x|$ mit $D_f = \mathbb{R}$ bei $x_0 = 0$).

wird nicht thematisiert. Allerdings ist für die in diesem Motivationskapitel betrachteten Funktionsklassen (strikt konvexe oder konkave Funktionen „ohne Knick“) das geometrische Tangentenkonzept tatsächlich tragfähig (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.46).

Zusammenfassung der Erkenntnisse dieses Kapitels: Insgesamt wird also die Ableitung geometrisch als Steigung der Tangente definiert. Dabei wird auf einen geometrischen Tangentenbegriff der Tangente als globale Berührende zurückgegriffen, deren Existenz vorausgesetzt wird.

5.3.3 Kapitel „Ableitung, Tangenten“

In diesem Kapitel werden ein analytischer Tangentenbegriff sowie die formale (symbolische) Definition der Ableitung eingeführt.

Beschreibungsebene: Zunächst erklären die Autoren, dass im Motivationskapitel nur eine vage Definition von Tangenten gegeben wurde. Die Autoren wollen nun „eine formale Definition des Konzepts“ angeben. Dazu werden zwei Skizzen präsentiert (ähnlich wie in Abbildung 32).

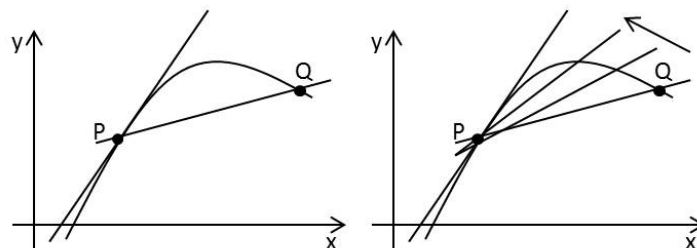


Abbildung 32: Graphik des Autors zur Visualisierung der Tangente als Grenzlage von Sekanten in Analogie zu Sydsæter u. Hammond (2015, S.198)

Die erste Skizze (linke Skizze in Abbildung 32) visualisiert die Steigung einer Sekante durch zwei Punkte P und Q . Die zweite Skizze (rechte Skizze in Abbildung 32) visualisiert einen Grenzprozess $Q \rightarrow P$. Dazu liefern die Autoren folgende Erklärung:

*„Wenn wir P festhalten und Q entlang der Kurve auf P zu bewegen, dann dreht sich die Sekante um P , wie in Abbildung 2 [hier Abbildung 32] angedeutet. Die sich im Grenzfall ergebende Gerade PT , gegen die die Sekante strebt, heißt **Tangente** an die Kurve P “.*

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Tangente wird also jetzt als Gerade definiert, gegen welche die Sekanten für $Q \rightarrow P$ streben. Was genau dieses „streben“ bedeutet, wird nicht erklärt (bis dato wurde auch kein Grenzwertbegriff eingeführt). Dabei wird davon ausgegangen, dass eine solche „Grenzgerade“ existiert. Weshalb diese Grenzgerade genau der Tangente als globale Berührende entsprechen soll, die vorher verwendet wurde, wird nicht angesprochen (vielleicht soll das durch die Skizze in Abbildung 32 als offensichtlich angenommen werden).

Beschreibungsebene: Nach Betrachtung des Grenzübergangs auf graphischer Ebene wird die Verbindung zur symbolischen Ebene hergestellt. Mit Hilfe einer weiteren Skizze, in der nun P mit $(x_0, f(x_0))$ und Q mit $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ beschriftet sind, und in die das Steigungsdreieck von P nach Q eingezeichnet ist, wird dann die Gleichung der Steigung der Sekante durch P und Q als Differenzenquotient $m_{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ hergeleitet (S.199). Dann wird der Grenzübergang wie folgt beschrieben:

„Wenn Q sich entlang des Graphen von f auf P zubewegt, muss die x -Koordinate von Q , die gleich $x + \Delta x$ ist, gegen x_0 streben, und somit strebt Δx gegen 0. Gleichzeitig strebt die Sekante PQ gegen die Tangente an den Graphen von P . Daraus folgert man, dass wir die Steigung der Tangente in P definieren sollten als die Zahl, gegen die m_{PQ} strebt, wenn Δx gegen 0 geht.“

Da die Ableitung im vorigen Abschnitt als Steigung der Tangente definiert wurde, schlagen die Autoren nun folgende Definition für die Ableitung vor (S.199):

Definition 5.7:

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 , die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (50)$$

Anschließend wird auf Basis der Tatsache, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist, deren Gleichung als $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ hergeleitet. Diese wird dann erneut als *Definition der Tangente* gekennzeichnet.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier wird also die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert. Zur Definition wird auf symbolischer und graphischer Ebene parallel hingeführt. Die dann präsentierte *concept definition* als Grenzwert des Differenzenquotienten ersetzt die vorherige geometrische Definition der Ableitung. Sie ist allerdings im Sinne einer formalen *concept definition* unvollständig. Denn es werden weder die Voraussetzungen an die Stelle x_0 (muss Häufungspunkt des Definitionsbereiches D_f sein) noch die Existenz des Grenzwertes (50) thematisiert. Der Begriff des Grenzwertes wurde hier noch nicht definiert. Eine Definition erfolgt erst in Kapitel 6.5. wie folgt:

„Die Notation $\lim_{x \rightarrow x_0}$ bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x hinreichend nah (aber nicht gleich) x_0 .“

(Abseits der Begründung der Grenzwertsätze wird mit dieser Definition aber nicht gearbeitet).

Passend zum an dieser Stelle verwendeten nicht näher definierten Grenzwertbegriff sind die Formulierungen zum Grenzübergang recht schwammig. Was genau das „streben gegen ...“ bedeutet, bleibt offen.

Außerdem können die Ausführungen zum Tangentenbegriff weitere Verwirrungen erzeugen: Die Tangente wird zunächst als „Grenzgerade“ der Sekanten durch die Punkte $P = (x_0, f(x_0))$ und $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ für $Q \rightarrow P$ definiert. Deren Steigung wird dann durch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ erneut „definiert“ (S.199):

„Daraus folgert man, dass wir die Steigung der Tangente in P definieren sollten als die Zahl, gegen die m_{PQ} strebt, wenn Δx gegen 0 geht.“

Es wird nicht klar, weshalb der Grenzwert des Differenzenquotienten hier eine Definition der Steigung der als Grenzgerade definierten Tangente sein soll und keine Berechnungsmöglichkeit. Danach wird durch die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Tangente nochmal neu definiert, und zwar ohne Hinweis, wie jetzt diese Definition mit der Definition der Tangente als Grenzgerade zusammenhängt.

Beschreibungsebene: Nach der Einführung der formalen *concept definition* der Ableitung folgen Beispiele zu deren Anwendung. Beim ersten Beispiel geht es um die Bestimmung von $f'(x_0)$ für $f(x) := x^2$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig). Dabei wird zunächst der Differenzenquotient wie folgt umgeformt (S.200):

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{h(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \quad (51)$$

Nun wird argumentiert, dass für Δx gegen 0 der Term $2x_0 + \Delta x$ „offensichtlich“ gegen $2x_0$ strebt. Nach der Bestimmung der Ableitung erfolgt noch eine Visualisierung der Tangenten für $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x_0 = -1$ (S.200).

Nach diesem Beispiel wird ein *Rezept* genannt, mit deren Hilfe sich die Ableitung bestimmen lässt (S.201):

1. Bestimmung von $f(x_0 + \Delta x)$
2. Bestimmung von $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
3. Bestimmung der Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
4. Vereinfachen des Bruches so weit wie möglich. Falls möglich, sollte Δx aus dem Nenner gekürzt werden.
5. Dann ist die Zahl zu bestimmen, gegen die $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

Dieses Rezept wird dann noch einmal anhand der Funktion f mit $f(x) = x^3$ durchgeführt (S.201). Anschließend wird darauf hingewiesen, dass dieses Rezept jedoch nur für „einfache“ Funktionen funktioniert und nicht für kompliziertere Funktionen wie $f(x) := \sqrt{3x^2 + x + 1}$ (S.201).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Bestimmung der Ableitung wird bei den Beispielen immer anhand des vorgegebenen Rezeptes auf symbolischer Ebene durchgeführt: Bestimmung des Differenzenquotienten, Vereinfachen und Rauskürzen von Δx aus dem Nenner, Bestimmung des Grenzwertes. Wie genau der Grenzwert nach dem Kürzen bestimmt wird, wird nicht näher begründet.

Beschreibungsebene: Der letzte Teil des Kapitels ist mit „Notationen“ überschrieben. Unter dieser Rubrik wird zunächst der Übergang zur Ableitung als Funktion wie folgt durchgeführt (S.202):

„Wie im Beispiel 1 gezeigt: Wenn $f(x) = x^2$, dann gilt $f'(x_0) = 2x_0$ für jedes x_0 . Wir benutzen gewöhnlich x als Symbol für eine Größe, die jeden beliebigen Wert annehmen kann. Deshalb schreiben wir $f'(x) = 2x$.“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Der Übergang zur Ableitungsfunktion vollzieht sich sehr schnell. Es wird am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ argumentiert, dass diese an jeder Stelle x_0 die Ableitung $2x_0$ hat und man daher statt x_0 die Variable x verwendet. Der Funktionscharakter der Ableitung wird dabei überhaupt nicht deutlich. Dementsprechend wird auch der Definitionsbereich der Ableitungsfunktion nicht thematisiert. Der Übergang zur Funktion wirkt eher wie ein Wechsel der Bezeichnung von $f'(x_0)$ zu $f'(x)$, was auch zur Überschrift „Notationen“ passt.

Beschreibungsebene: Zum Abschluss werden weitere Symboliken für die Ableitung $f'(x)$ genannt: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Diese Notation werden rein als Schreibweisen eingeführt. Die Differentiale haben hier (vorerst) keine eigenständige Bedeutung. Nach Abschluss der theoretischen Ausführungen folgen die Aufgaben. Die Aufgaben dienen überwiegend der Übung der rechnerischen Bestimmung von Ableitungen von Polynomfunktionen mit Hilfe des Differenzenquotienten (S.203-204). Weiterhin gibt es eine Aufgabe zur rechnerischen Bestimmung der Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$. Neben den Rechenaufgaben gibt es aber auch eine Aufgabe zur graphischen Bestimmung des Vorzeichens der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den behandelten Inhalten:* Insgesamt wurden in diesem Kapitel folgende Inhalte zur Ableitung behandelt:

1. Definition der Tangente als Grenzgerade, gegen die die Folge der Sekanten durch $P = (x_0, f(x_0))$ und $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ für festes P bei $Q \rightarrow P$ strebt
2. Definition der Ableitung als Grenzwert der Steigungen obiger Sekanten
3. Erneute Definition der Tangente an eine Funktion f in $(x_0, f(x_0))$, jetzt aber durch die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
4. Rechnerische Bestimmung der Ableitung auf Basis der formalen *concept definition* als Grenzwert des Differenzenquotienten
5. Übergang zur Ableitungsfunktion auf der symbolischen Ebene am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$

In Bezug auf das in Kapitel 3 entwickelte Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wurden folgende Aspekte des Ableitungsbegriffs eingeführt:

1. Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* in symbolischer und graphischer Repräsentation
2. Ebene *Funktion* in symbolischer Repräsentation

Während die Bildung des Differenzenquotienten und der Grenzübergang (Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert*) allgemein eingeführt wurden, erfolgte der Übergang zur Funktion lediglich am Beispiel $f(x) = x^2$. Es wurde argumentiert, dass die Ableitung an jeder Stelle x_0 gleich $2x_0$ ist, und man daher statt x_0 die Variable x schreibt. Der Funktionscharakter der Ableitungsfunktion (mit Definitionsbereich) wurde dabei nicht deutlich.

Zum Exaktheitsgrad und den Begründungsformen: Bezüglich des verwendeten Exaktheitsgrades ist feststellbar, dass hier nicht immer präzise gearbeitet wurde:

1. Es gab bisher keine Definition des Grenzwertbegriffs und die Vorgänge beim Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ wurden nur unpräzise formuliert (Bsp.: Es wird nicht näher erklärt, was es bedeutet, dass die Folge der Sekanten durch $P = (x_0, f(x_0))$ und $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ bei Festhalten von P für $Q \rightarrow P$ gegen die Tangente „strebt“).
2. Die formale *concept definition* der Ableitung an einer Stelle x_0 wurde auf die Formel $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ reduziert. Voraussetzungen an die betrachtete Stelle x_0 sowie die Problematik der Existenz des Grenzwertes wurden nicht genannt.
3. Bezüglich des analytischen Tangentenbegriffes werden weitere Inkonsistenzen deutlich. Zunächst wurde die Tangente geometrisch als Grenzgerade der Sekanten durch $P = (x_0, f(x_0))$ und $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ für $Q \rightarrow P$ (P fest) definiert. Aber anstatt nun deren Steigung rechnerisch zu bestimmen, wurde diese durch $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ erneut „definiert“. Passend dazu wurde später die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ als zweite Definition der Tangente präsentiert. Dabei wurde aber nirgends deutlich, inwieweit die Definition der Tangente über die Gleichung die Definition der Tangente als Grenzgeraden ersetzen sollte. Am Ende des Kapitels war nicht klar, was nun die *concept definition* der Tangente ist.

Zu den Aufgaben: Die Aufgaben dienten überwiegend dem Einüben der rechnerischen Bestimmung der Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten.

5.3.4 Kapitel über Änderungsraten

In diesem Kapitel geht es um die Änderungsrate, die Sydsæter und Hammond als eine Interpretation der Ableitung bezeichnen. Weiterhin wird in diesem Kapitel die ökonomische Interpretation der Ableitung einer Kostenfunktion als Approximation der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit eingeführt.

Beschreibungsebene: Zu Beginn dieses Kapitels stellen die Autoren dar, dass in den Wirtschaftswissenschaften andere Interpretationen der Ableitung als die Steigung der Tangente wichtiger sind, wie die Interpretation als Änderungsrate. Diese wird zunächst in drei Schritten eingeführt (S.207):

1. Bestimmung der absoluten Änderung $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. Übergang zur durchschnittlichen Änderung in y pro Einheit in x (durchschnittliche Änderungsrate $= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$)
3. Grenzübergang zur momentanen Änderungsrate für $\Delta x \rightarrow 0$

Es wird angemerkt, dass diese Interpretation insbesondere dann eine Rolle spielt, wenn die veränderliche Variable die Zeit ist (S.207). Direkt danach wird darauf hingewiesen, dass in den Wirtschaftswissenschaften auch andere Änderungsraten, wie die relative Änderungsrate $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ relevant sind.

Nach der Einführung der Interpretation als Änderungsrate folgt deren Anwendung am Beispiel eines Populationswachstums $N(t)$, in dem dann auch schließlich die Änderungsrate einer ganzen Funktion betrachtet wird (S.208).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier wird also im Sinne des theoretischen Modells der Arbeit zur Beschreibung eines möglichen Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler die verbale Repräsentation der Ableitung als Änderungsrate eingeführt (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt), und zwar auf den Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert*. Die dritte Ebene *Funktion* wird im Beispiel des Populationswachstums angesprochen. Bei allen drei Ebenen wird die Verbindung zur symbolischen Repräsentation hergestellt.

Beschreibungsebene: Nach der Interpretation der Ableitung als Änderungsrate folgt die Behandlung der ökonomischen Deutung der Ableitung einer Kostenfunktion, was auch als „Beispiel“ überschrieben ist (S.208). Dabei wird zunächst die Ableitung $C'(x)$ als Grenzkosten bezeichnet. Es gilt also per Definition der Grenzkosten:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \quad (52)$$

Nach Einführung des Begriffes der Grenzkosten als Ableitung wird schließlich die ökonomische Interpretation der Grenzkosten behandelt. Es wird erklärt, dass man für betragsmäßig kleine Δx die Approximation

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \quad (53)$$

erhält. Als zusätzliche Erklärung wird dargestellt, dass dies bedeutet, dass man für kleine Δx die Mehrkosten $C(x + \Delta x) - C(x)$ linear durch $\Delta x \cdot C'(x)$ approximieren kann.

Beim Setzen von $\Delta x = 1$ erhält man schließlich laut Sydsæter und Hammond (S.208):

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x) \quad (54)$$

Dann wird folgende Interpretation genannt (S.209):

„Die Grenzkosten sind annähernd gleich den Mehrkosten $C(x+1) - C(x)$, d.h. die zusätzlichen Kosten für die Herstellung einer weiteren Einheit, d.h. einer Einheit mehr als x .“

Es wird darauf hingewiesen, dass die Grenzkosten in einigen Ökonomiebüchern über die Kostendifferenz $C(x+1) - C(x)$ definiert werden. Die Interpretation wird dann an einem Beispiel noch einmal konkret vorgeführt (Interpretation von $C'(50) = 3$, S.209).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Grenzkosten $C'(x)$ werden also als Approximation der Kostendifferenz $C(x+1) - C(x)$ interpretiert. Diese Interpretation wird über die Approximation des Differenzenquotienten durch die Ableitung $C'(x) \approx \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$ auf symbolischer Ebene gerechtfertigt (über die Definition der Ableitung). Weshalb die Approximation in ökonomischen Kontexten gut ist, wird nicht thematisiert. Genauso wenig wird auf die Problematik der unterschiedlichen Einheiten zwischen der Ableitung und der hier genannten Interpretation als Approximation der Mehrkosten für die nächste Einheit eingegangen (Einheiten wurden bisher überhaupt nicht betrachtet). Dafür wird darauf hingewiesen, dass in einigen Ökonomiebüchern Grenzkosten direkt als Kostendifferenz $C(x+1) - C(x)$ definiert werden (Beispiel: (Pindyck u. Rubinfeld, 2013, S.325)), was wichtig ist, damit die Studierenden von dieser alternativen Definition nicht verwirrt werden.

Beschreibungsebene: In einem letzten Beispiel wird noch einmal die Interpretation als Änderungsrate aufgegriffen, nämlich am Beispiel einer Funktion $K(t)$, die den Kapitalstock zum Zeitpunkt t darstellt. $K'(t)$ ist dann die Investitionsrate. Nach diesen Beispielen folgen abschließende Bemerkungen, die das Vorhandensein diskreter Einheiten in der Ökonomie thematisieren, die den Forderungen nach unendlich kleinen Zuwächsen widersprechen. Es wird erklärt, dass deshalb die „echte“ Funktion durch eine differenzierbare Funktion ersetzt wird, die eine „gute Approximation“ darstellt (S.209).

Die Aufgaben in diesem Kapitel sind im Wesentlichen zwei Typen (S.210-211):

1. Bestimmung von Ableitungen in ökonomischen Kontexten
2. Ökonomische Interpretation der mit der Ableitung der ermittelten Werte

Weiterhin ist eine Aufgabe zur Interpretation der Ableitung als Änderungsrate (Anzahl der Barrel Öl in einer Ölquelle zum Zeitpunkt t) zu finden.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: In diesem Kapitel wurden folgende Aspekte der Ableitung aus dem Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) eingeführt:

1. Die verbale Repräsentation der Ableitung als Änderungsrate (in den Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion*, Letztere nur im einem Beispiel)
2. Die ökonomische Interpretation der Ableitung als Approximation der Zusatzkosten der nächsten Einheit

Bei der Interpretation als Änderungsrate wurde sorgfältig die Verbindung zur symbolischen Ebene hergestellt. Der Übergang zur Ableitungsfunktion als Änderungsrate der ganzen Funktion wurde nur im Rahmen eines Beispiels (Populationswachstum) vollzogen.

Bezüglich der ökonomischen Interpretation der Ableitung ist hervorzuheben, dass das Buch diese auch begründet hat. Die Rechtfertigung erfolgte auf symbolischer Ebene über die Approximationsformel $C'(x) \approx \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$ für $\Delta \approx 0$, die aus der formalen *concept definition* der Ableitung hergeleitet wurde. Dies passt genau zu einer der im Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vorgeschlagenen Begründungen (siehe Kapitel 3.3.2). Weshalb bei $\Delta x = 1$ die Ableitung in ökonomischen Kontexten eine gute Approximation des Differenzenquotienten ist, wurde nicht thematisiert, genauso wenig wie die unterschiedlichen Einheiten der Grenzkosten als Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit.

5.3.5 Kapitel über „Einfache Regeln der Differentiation“

Beschreibungsebene: Das Kapitel beginnt mit der Erinnerung, dass zuvor Ableitungsfunktionen mit dem Differenzenquotienten bestimmt wurden (siehe Kapitel 5.3.2), was sehr aufwendig war. Jetzt sollen Regeln behandelt werden, mit deren Hilfe sich Ableitungen schnell und einfach bestimmen lassen. Die im Kapitel „Einfache Regeln der Differentiation“ behandelten Ableitungsregeln sind mit ihrer Formulierung im Buch Sydsæter u. Hammond (2015) in Tabelle 49 dargestellt.

Ableitungsregel	Formulierung in Sydsæter u. Hammond (2015)
Konstantenregel	<i>„Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0: $f(x) = A \implies f'(x) = 0$“</i>
Wegfall additiver Konstanten	<i>„$y = A + f(x) \implies y' = f'(x)$ (Additive Konstanten verschwinden.)“</i>
Faktorregel	<i>„$y = Af(x) \implies y' = Af'(x)$ (Multiplikative Konstanten bleiben erhalten.)“</i>
Potenzregel	<i>„$f(x) = x^r \implies f'(x) = rx^{r-1}$ (r ist eine beliebige Konstante.)“</i>

Tabelle 49: Übersicht über die in Sydsæter u. Hammond (2015, S.218-219) behandelten „einfachen Regeln der Differentiation“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Ableitungsregeln sind offensichtlich rein als Rechenregeln formuliert. Auf die Differenzierbarkeit der Funktionen wird nicht eingegangen (passend zur Definition der Ableitung, die auch nur als Formel definiert wurde, siehe Kapitel 5.3.3).

Beschreibungsebene: Einen Überblick über die im Buch gebrachten Begründungen der Regeln liefert Tabelle 50.

Ableitungsregel	Begründungsform
Konstantenregel	Plausibel machen anhand einer Skizze
Wegfall additiver Konstanten	Plausibel machen anhand einer Skizze
Faktorregel	Beweis mit Hilfe der Definition der Ableitung
Potenzregel	Verweis auf die Spezialfälle $r = 2$ und $r = 3$, die bereits im Kapitel zur Einführung der Ableitung auf Basis der formalen Definition bewiesen wurden, Hinweis, dass diese Methode auf beliebige natürliche Zahlen r verallgemeinerbar ist, Verweis auf die Zukunft, wo „man sehen wird“, dass die Regel für beliebige reelle r gültig ist

Tabelle 50: Übersicht über die in Sydsæter u. Hammond (2015, S.218-219) präsentierten Begründungen der „einfachen Ableitungsregeln“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Man sieht also vielfältige Begründungsformen:

1. Plausibilitätsbegründungen mit einer Skizze
2. einen formalen Beweis
3. eine generische Begründung anhand von Spezialfällen, wobei sich die dort gebrachten Argumente auf allgemeinere Fälle übertragen lassen

Beschreibungsebene: Die einzelnen Regeln werden an einfachen Zahlenbeispielen demonstriert (S.219-220). Außerdem werden zwei ökonomische Anwendungsbeispiele gebracht. Bei der Faktorregel werden zum Beispiel die Verkaufseinnahmen zum Zeitpunkt t zweier Firmen (mathematisiert durch $f(t)$ und $g(t)$ mit $g(t) = 3f(t)$) verglichen. Es wird dann argumentiert, dass dann auch die Wachstumsrate von g dreimal so groß ist. Dagegen sind die relativen Wachstumsraten $\frac{f'(t)}{f(t)}$ und $\frac{g'(t)}{g(t)}$ gleich. Die Aufgaben in diesem Kapitel sind bis auf eine Erklärungsaufgabe überwiegend Berechnungsaufgaben, bei denen die Ableitung mit Hilfe der bis dahin behandelten Ableitungsregeln bestimmt werden soll (S.226). Die Variation in den Aufgaben ist dadurch gegeben, dass unterschiedliche Notationen verwendet werden ($f'(x)$, Differentialschreibweise), dass auch mal Stammfunktionen bestimmt werden sollen, und dass Grenzwerte von Differenzenquotienten jetzt mit Hilfe der Ableitungsregeln ermittelt werden sollen (z.B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h}$). Abseits der Rechenaufgaben gibt es eine Begründungsaufgabe, in der erklärt werden soll, weshalb die Ableitung $f'(x_0)$ auch durch den Quotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dargestellt werden kann (also ohne Δx). Damit soll dann die Ableitung von $f'(x_0)$ der Funktion f mit $f(x) = x^2$ neu bestimmt werden.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: In diesem Kapitel wurden einfache Ableitungsregeln behandelt: (1) Konstantenregel, (2) Wegfall additiver Konstanten, (3) Faktorregel, (4) Potenzregel. Dabei wurden die Regeln lediglich als Formeln formuliert. Hinweise auf Differenzierbarkeitsbedingungen fehlten. Bei der Be-

gründung der Regeln ist eine beachtliche Vielfalt der Begründungsformen zu finden (siehe Tabelle 50). Die Aufgaben waren überwiegend Berechnungsaufgaben.

5.3.6 Kapitel über die Summen-, Produkt-, und Quotientenregel

Beschreibungsebene: Zu Beginn des Kapitels werden die Summenregel und eine passende Regel für Differenzen genannt. Diese sind wie folgt formuliert (S.222):

Ableitungen von Summen und Differenzen: *Wenn f und g beide in x differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:*

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad (55)$$

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Regeln sind nicht als mathematischer Satz formuliert, sondern tatsächlich eher als Regeln in der oben genannten Form. Auffällig ist, dass hier auf einmal doch Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genannt sind, obwohl der Differenzierbarkeitsbegriff nirgends eingeführt wurde. Hier ist das Buch inkonsistent.

Beschreibungsebene: Exemplarisch wird die Summenregel auf Basis der formalen Definition bewiesen (S.222). Dann folgt ein einfaches Beispiel ($f(x) = 3x^8 + \frac{x^{100}}{100}$, S.222) und eine Anwendung, in der aus der Summenregel hergeleitet wird, dass der Grenzgewinn einer Gewinnfunktion genau dann gleich 0 ist, wenn der Grenzerlös gleich den Grenzkosten ist ($G(x) = E(x) - K(x) \Rightarrow G'(x) = E'(x) - K'(x)$, S.222). Nach der Summenregel folgt die Behandlung der Produkt- und der Quotientenregel. Die Formulierungen sind ähnlich wie bei der Summenregel (als Regel und nicht als mathematischer Satz, aber dafür mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen). Beide Regeln werden bewiesen. Der in Sydsæter u. Hammond (2015) präsentierte Beweis der Produktregel sei hier exemplarisch im Detail dargestellt (S.223-224).

Beweis. Zunächst erfolgt eine Umformung des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (56)$$

Jetzt werden die Grenzwertsätze angewandt, die mittlerweile eingeführt wurden (in Buchkapitel 6.5, dieser Beweis der Produktregel ist in Buchkapitel 6.7). Dadurch ergibt sich:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x + \Delta x)) + f(x)g'(x) \quad (57)$$

Der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x + \Delta x))$ wird bestimmt, indem $g(x + \Delta x)$ wie folgt umgeformt wird:

$$g(x + \Delta x) = \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \Delta x + g(x) \quad (58)$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ geht dieser Term aufgrund der Grenzwertsätze gegen 0, was den Beweis abschließt. $\square$

Beim Beweis der Quotientenregel wird die Differenzierbarkeit des Quotienten angenommen, was auch hervorgehoben wird (S.225). Es wird dann $f(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x)$ mit der Produktregel differenziert und das Ergebnis nach $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ umgestellt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Beweise sind hier sehr exakt formuliert und beinhalten keine Argumentationslücken. Selbst der Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x + \Delta x))$ wird nicht mit der Anschauung bestimmt, indem stillschweigend Stetigkeit angenommen wird, sondern er wird formal korrekt mit Hilfe der Grenzwertsätze bestimmt. Beim Beweis der Quotientenregel wird ordnungsgemäß darauf hingewiesen, dass durch das im Buch vorgeführte Vorgehen nur die Formel, nicht aber die Differenzierbarkeit bewiesen wird (wobei die Lesenden des Buches ja eigentlich gar nicht wissen, was das ist, da der Begriff ja nie eingeführt wurde).

Beschreibungsebene: Beide Regeln werden anhand einfacher Zahlenbeispiele vorgeführt ($h(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2)$ für die Produktregel, $h(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ für die Quotientenregel (S.223)). Außerdem werden ökonomische Anwendungen präsentiert. Die Anwendung bei der Produktregel ist die Betrachtung der Ableitung einer Erlösfunktion $R(P) = P \cdot D(P)$. Dabei ist R der Erlös (*revenue*), P ist der Preis des Produktes und $D(P)$ ist die davon abhängige Nachfrage (*demand*). Zu dem Ergebnis $R'(P) = D(P) + PD'(P)$ gibt es folgende Erklärung (S.224):

„Nehmen Sie für eine ökonomische Interpretation an, dass P um einen Euro steigt. Der Erlös $R(P)$ ändert sich aus zwei Gründen. Zunächst steigt $R(P)$ um $1 \cdot D(P)$, weil jede der $D(P)$ Einheiten einen Euro mehr einbringt. Jedoch führt ein Preisanstieg um einen Euro zu einer Änderung der Nachfrage um $D(P+1) - D(P)$ Einheiten, was annähernd $D'(P)$ ist. Der positive Verlust aufgrund des Preisanstiegs um einen Euro ist dann $PD'(P)$.“ [$D'(P) < 0$, da die Nachfrage bei Erhöhung des Preises sinkt]

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier wird also das durch die Produktregel erhaltene Ergebnis für $R'(P)$ zusätzlich über die ökonomische Interpretation der Ableitung plausibel gemacht.

Beschreibungsebene: Bei der Quotientenregel werden als Anwendungsbeispiel die Durchschnittskosten $\frac{C(x)}{x}$ behandelt (S.226). Hier wird zunächst die Ableitung bestimmt:

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right). \quad (59)$$

Dann wird festgestellt, dass die Änderungsrate der Durchschnittskosten genau dann positiv ist, wenn die Grenzkosten die Durchschnittskosten übersteigen.

Die Aufgaben sind wieder sehr vielfältig. Die meisten Aufgaben gehören zu folgenden drei Typen (S.227-228):

1. Bestimmung der Ableitung mit Hilfe der Ableitungsregeln
2. Bestimmung von Monotoniebereichen
3. Bestimmung von Tangentengleichungen

Es gibt aber auch andere Aufgabentypen (S.228). So soll in einer Aufgabe mit der Produktregel eine Formel für die Ableitung der Wurzelfunktion gefunden werden. In einer weiteren Aufgabe soll mit der Quotientenregel die Potenzregel für negative ganzzahlige Exponenten bewiesen werden. Weiterhin gibt es eine Kontextaufgabe, in der in Analogie zum vorgeführten Beispiel der Erlösfunktion der Term der Ableitung von $R(t) = p(t)x(t)$ ($x(t)$ ist die Förderrate einer Ölquelle pro Tag, $p(t)$ der Preis) ökonomisch plausibel gemacht werden. Und auch eine Aufgabe auf der graphischen Ebene gibt es. In ihr sollen zeichnerisch Grenz- und Durchschnittsproduktivität verglichen werden sollen.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: In diesem Kapitel wurden folgende Ableitungsregeln behandelt: (1) Summenregel, (2) Differenzenregel, (3) Produktregel, (4) Quotientenregel. Alle Regeln wurden sehr exakt formuliert (mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen). Bis auf die Differenzenregel, deren Beweis analog zur Summenregel ist, wurden alle Regeln formal bewiesen. Bei der Quotientenregel wurde der Einfachheit halber die Differenzierbarkeit des Quotienten bereits angenommen. Hieran merkt man wieder, dass die Rechenregeln im Vordergrund standen. Neben den formalen Beweisen gab es auch eine Plausibilitätsbegründung eines formal ermittelten Ergebnisses einer Produktregel mit Hilfe der ökonomischen Interpretation der Ableitung.

Die Aufgaben waren auch sehr vielfältig. Neben Rechenaufgaben gab es (1) Beweisaufgaben, in denen die Ableitungsregeln zum Beweis weiterer Regeln genutzt werden mussten, (2) eine Aufgabe, in der ein Ergebnis mit Hilfe der ökonomischen Interpretation der Ableitung plausibel gemacht werden sollte, (3) und eine Aufgabe in der graphisch mit Hilfe der Ableitung argumentiert werden sollte.

5.3.7 Kapitel über lineare Approximation

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Ableitung und linearer Approximation behandelt. Weiterhin werden Differentiale als eigener Begriff eingeführt.

Beschreibungsebene: Zu Beginn des Kapitels wird als Motivation angegeben, dass man anstatt mit komplizierten Funktionen zu arbeiten, manchmal mit einfachen Approximationen dieser Funktionen arbeiten möchte (S.267). Die besonders einfachen Funktionen sind lineare Funktionen.

Danach wird vorgeschlagen, die Tangente bei $x = x_0$ als Approximation zu wählen, die die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ hat. Diese wird als *die lineare Approximation von f um $x = x_0$* bezeichnet (S.268):

„Die lineare Approximation an f um $x = x_0$ ist $f(x) \approx f(x_0) + f'(a)(x - x_0)$ (für x in der Nähe von x_0).“

Die lineare Approximation durch die Tangentialfunktion wird auch in einer Abbildung illustriert (S.268). Weshalb gerade diese lineare Approximation gewählt werden soll, wird in einer Fußnote angegeben: Wenn f eine differenzierbare Funktion ist, so gilt: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)$, wobei $\varepsilon \rightarrow 0$, wenn $x \rightarrow x_0$ und ε sehr klein ist, falls $x - x_0$ sehr klein ist.

Nun werden 4 Beispiele präsentiert, in denen die eben angegebene Approximationsformel $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ angewendet wird (S.268-269). Eines davon ist zum Beispiel die Approximation $\ln 1 + x \approx x$ für $x \approx 0$.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Es wird zwar graphisch visualisiert, dass die Tangente eine geeignete Möglichkeit der linearen Approximation ist. Weshalb man aber die Tangente und keine andere Gerade nehmen soll, bleibt mehr oder weniger offen. Zwar wird in einer Fußnote ohne Beweis angegeben, dass dann

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \quad \text{mit } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ wenn } x \rightarrow x_0 \quad (60)$$

und dass ε sehr klein ist, falls $x - x_0$ sehr klein ist. Woher diese Darstellung (60) kommt, was ε ist, weshalb dieses klein ist, wenn $x - x_0$ klein ist bzw. sogar gegen 0 geht, falls $x \rightarrow x_0$, bleibt offen. Hier fehlen also Argumente, weshalb man gerade die Tangente nehmen sollte.

Beschreibungsebene: Nach der Einführung der linearen Approximation werden Differentiale eingeführt. Dabei wird zunächst dx als Symbol eingeführt, was *eine beliebige Änderung in der Variablen x ist* (S.269). Dann wird dy über die Gleichung

$$dy = f'(x) dx \quad (61)$$

definiert.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Aus diesen Überlegungen wird deutlich, dass dx als endliche Größe aufgefasst wird. Diese ist aber keine feste Größe, sondern kann *beliebig* sein, ist also eine Variable. Nach Gleichung (61) ist dann dy die davon abhängige Änderung entlang der Tangente mit der Steigung $f'(x)$. Das Differential dy ist also eine von dx abhängige Variable in einem linearen Zusammenhang. Dessen Proportionalitätsfaktor ist gerade $f'(x)$, der sich echter Quotient $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ergibt. Die Idee der Auffassung von Differentialen als Variablen, die sich hier in dem Buch andeutet, findet man übrigens auch in didaktischer Literatur (Thompson u. Dreyfus, 2017).

Beschreibungsebene: Mit den hier geführten Betrachtungen erhält man dann laut Sydsæter und Hammond den Zuwachs $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ der Ausgangsfunktion wie folgt:

$$\Delta y \approx dy = f'(x) dx \quad (62)$$

Der Fehler zwischen Δy und dy wird in einer Abbildung illustriert, die die eben beschriebene Auffassung von dx und dy als Variablen noch einmal bestätigt (ähnlich wie Abbildung 33).

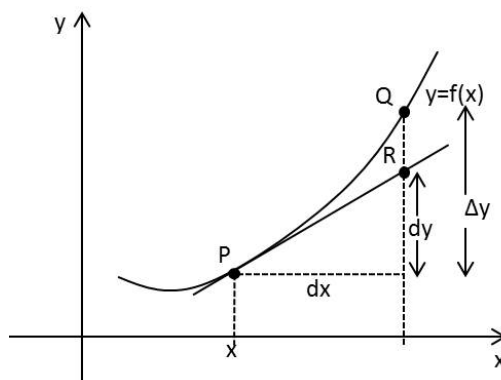


Abbildung 33: Graphik des Autors zur Visualisierung der Differentiale und der Verwendung der Ableitung zur lokalen Linearisierung in Analogie zu Sydsæter u. Hammond (2015, S.270)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die in Sydsæter u. Hammond (2015) präsentierte Definition der Differentiale passt sehr gut zu dem in mathematischen Lehrbüchern definierten Differential, welches die lineare Abbildung ist, die jedem Wert h den Wert $f'(x) \cdot h$ zuordnet (Königsberger, 2004, S.140). Denn wenn man dy als abhängige Variable auffasst, die bei festem x linear von dx abhängt, so entspricht die funktionale Beziehung $dy = f'(x) dx$ zwischen den Variablen dy und dx eben genau dieser linearen Abbildung. Die hier präsentierte Auffassung der Differentiale unterscheidet sich dafür von der Auffassung der Differentiale als fiktive, unendlich kleine Größen, wie sie beispielsweise in Dietz (2012, S.268) zu finden ist.

Beschreibungsebene: Nach der Einführung der Differentiale werden zwei Berechnungsbeispiele für Differentiale gegeben, z.B. $d(Ax^a + B) = \alpha Ax^{a-1} dx$ (S.270). Danach folgt ein Merkkasten mit Rechenregeln für Differentiale (S.271), zum Beispiel $d(fg) = g df + f dg$. Exemplarisch wird die „Produktregel“ bewiesen. Im folgenden Absatz wird dann argumentiert, dass das Differential dy (falls y von x abhängt) immer die Form $dy = f'(x) dx$ hat, egal ob x selbst von einer anderen Variable abhängt (S.271). Denn ist $y = f(x)$ und $x = g(t)$, so ist

$$dy = (f(g(t)))' dt = f'(g(t))g'(t) dt = f'(g(t)) dx = f'(x) dx. \quad (63)$$

Am Ende des Kapitels wird noch ein ökonomisches Beispiel zu Differentialen gegeben (Bsp. S.271). Dieses wird jedoch aus Platzgründen nicht im Detail dargestellt.

Die Aufgaben in diesem Kapitel beinhalten hauptsächlich die Bestimmung linearer Approximationen durch die Approximationsformel $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$, die Bestimmung von Differentialen, und deren Vergleich mit den echten Zuwächsen Δy (S.271-272). Bei den Vergleichsaufgaben werden konkrete endliche Werte für dx vorgegeben, z.B. $dx = \frac{1}{100}$. Zusätzlich gibt es eine Aufgabe, in der begründet werden soll, weshalb für den Flächeninhalt eines Kreises der Zuwachs $A(r + dx) - A(r)$ in etwa $2\pi r dr$ beträgt, und der Volumenzuwachs einer Kugel etwa $4\pi r^2 dr$ beträgt.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: In diesem Kapitel wurden also die Verwendung der Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation und der Begriff des Differentials thematisiert.

Die Differentiale wurden hier exakt definiert. Für festes x ist dx ein endlicher, variabler Zuwachs, und dy ein davon abhängiger Zuwachs entlang der Tangente mit der Steigung $f'(x)$. Weniger klar bleibt die Begriffsbildung im Zusammenhang mit der linearen Approximation. Es wird bei den Ausführungen nicht klar, weshalb gerade die Tangentialfunktion $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die lineare Approximation von f in einer Umgebung von x_0 sein soll.

Bezüglich der in diesem Kapitel gebrachten Argumentationen lässt sich feststellen, dass hier häufig Graphiken zur Erklärung herangezogen wurden. So wurde mit Hilfe einer Graphik sowohl der Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion f und ihrer linearen Approximation verdeutlicht als auch der Zusammenhang zwischen den Zuwächsen Δy und dy bei einem Zuwachs von dx (siehe Abbildung 33).

5.3.8 Kapitel über Elastizitäten

Beschreibungsebene: Das Kapitel beginnt mit einer ausführlichen Motivation des Begriffes der Elastizität durch Untersuchungen der Auswirkungen von Preisänderungen auf die Nachfrage (S.280). Am Beispiel einer Kaffeeproduktion wird erläutert, dass eine Preissteigerung von einem Euro als beträchtlich oder gering angesehen werden kann (je nachdem, wie der Ausgangswert ist). Weiterhin wird erläutert, dass bei der Betrachtung absoluter Änderungen diese von der verwendeten Einheit abhängen, und man gerne ein einheitenunabhängiges Maß für die Größe des Zuwachses hätte. Daher ist es sinnvoll, relative Änderungen von Preis und Nachfrage zu betrachten, was Sydsæter u. Hammond (2015, S.280) mit folgender Frage formuliert:

„Um welchen Prozentsatz ändert sich die nachgefragte Menge, wenn der Preis um 1% steigt?“

Als Lösung dieses Problems wird das Konzept der Elastizität eingeführt. Ist $x = D(P)$ die Nachfrage in Abhängigkeit des Preises, so sollte man anstelle des Verhältnisses absoluter Änderungen $\frac{\Delta x}{\Delta P}$ nun das Verhältnis relativer Änderungen betrachten (S.281):

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{D(P+\Delta P) - D(P)}{D(P)}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{D(P + \Delta P)}{\Delta P} \frac{P}{D(P)} \quad (64)$$

Dieses wird als *durchschnittliche Elastizität von x im Intervall $[P + \Delta P]$* bezeichnet. Sydsæter und Hammond erklären, dass wenn der Preis um ein Prozent steigt, d.h. $\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{100}$, die durchschnittliche Elastizität in (64) einen Wert von $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100$ hat. Sie gibt dann also gerade die prozentuale Änderung der nachgefragten Menge an.

Da man laut Sydsæter u. Hammond (2015, S.281) aber gerne eine Größe hätte, die nicht vom Zuwachs ΔP abhängt, lässt man wie bei der Ableitung $\Delta P \rightarrow 0$ gehen und erhält aus (64) für $\Delta P \rightarrow 0$ die Formel $\frac{P}{D(P)} D'(P)$, falls der Grenzwert existiert. Diese Formel wird im Buch als Elastizität definiert und für eine allgemeine Funktion f mit $El_x f(x)$ bezeichnet (S.281). Sydsæter und Hammond unterstreichen, dass der Quotient $\frac{\Delta x}{x} / \frac{\Delta P}{P}$ für $\frac{\Delta P}{P} = 1\%$, also die prozentuale Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises um 1%, eine gute Näherung der Elastizität $\frac{P}{D(P)} D'(P)$ ist (S.281). Eine Begründung dafür, dass man bei der Wahl von 1% eine gute Näherung erhält, geben sie aber nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier wird also in Analogie zur ökonomischen Interpretation der Ableitung eine ökonomische Interpretation der Elastizität eingeführt. Bei der Ableitung hatte man diese auf Basis der Approximation $f(x+1) - f(x) \approx f'(x)$ als Änderung der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit interpretiert. Im Falle der Elastizität ist die passende Interpretation die prozentuale Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um 1%. Der genaue Zusammenhang zwischen dem Konzept der Elastizität und dessen ökonomischer Interpretation als prozentuale Änderung der Funktionswerte bei Änderung der Argumente um 1% über den „Differenzenquotienten relativer Änderungen“ $\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta P}{P}}$ mit der Wahl von $\frac{\Delta P}{P} = 1\%$ wurde von Sydsæter u. Hammond (2015) klar erklärt. Es fehlt lediglich ein Argument, weshalb bei der Wahl von $\Delta P = \frac{P}{100}$ im Kontext der Nachfragefunktionen die Approximation „gut“ ist.

Beschreibungsebene: Nach Einführung des Begriffs der Elastizität folgen 3 Beispiele, in denen Elastizitäten berechnet und interpretiert werden (S.281-282). Eines dieser Beispiele die Beziehung zwischen der Elastizität einer Nachfragefunktion und der Elastizität des Erlöses. Ist $D(P)$ eine Nachfragefunktion in Abhängigkeit des Preises, so gilt für den Erlös $R(P) = P \cdot D(P)$:

$$El_P R(P) = \frac{P}{PD(P)}(PD(P))' = \frac{1}{D(P)}(D(P) + PD'(P)) = 1 + El_P D(P) \quad (65)$$

Aus der Formel werden dann Zusammenhänge zwischen der Elastizität der Nachfragefunktion und dem Erlös selbst hergeleitet. Da $El_P R(P) = P \frac{R'(P)}{R(P)}$, $R'(p) < 0$ und $R(P)$ sowie $P > 0$ sind, bewirkt zum Beispiel eine Preiserhöhung im Bereich $El_P D(P) < -1$ ein Sinken des Erlöses. Für $-1 < El_P D(P) < 0$ bewirkt eine Preiserhöhung dagegen eine Steigerung des Erlöses. Damit motivieren Sydsæter und Hammond schließlich die Einteilung den Definitionsbereichs einer Funktion in die verschiedenen Elastizitätsbereiche aus Tabelle 43: vollkommen unelastisch falls $|El_x f(x)| = 0$, unelastisch falls $0 < |El_x f(x)| < 1, \dots$ (S.282). Dann folgt noch die Herleitung der Umkehrformel $El_y x = \frac{1}{El_x y}$ aus der Umkehrformel der Ableitung.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Anders als bei Dietz (2012, S.302), wird hier die Einteilung der Elastizitäten in die Bereiche $|El_x f(x)| = 0$, $0 < |El_x f(x)| < 1$, $|El_x f(x)| = 1$, $|El_x f(x)| > 1$ mit Hilfe von (65) auch begründet.

Beschreibungsebene: Der letzte Teil dieses Unterkapitels zur Elastizität beschäftigt sich mit deren Darstellung als „doppelt logarithmische Ableitung“ (S.283). Ist $y = Ax^b$ mit $x, y, A > 0$, so erhält man nach dem Logarithmieren durch die Logarithmengesetze die Summe

$$\ln y = \ln A + b \ln x \quad (66)$$

Man spricht von einer *loglinearen Beziehung* zwischen x und y in Gleichung (66). Die Elastizität von $y = Ax^b$ ist gerade b , was der Steigung dieser loglinearen Beziehung entspricht. Allgemein erhält man laut Sydsæter und Hammond für positive Variablen x und y , wobei y differenzierbar von x abhängt, folgende Beziehung (S.283):

$$El_x y = \frac{d \ln y}{d \ln x} \quad (67)$$

Eine Begründung erfordert laut Sydsæter u. Hammond (2015) die Kettenregel. Diese Begründung wird aber in dem Buch nicht ausgeführt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Ein Beweis der Darstellung (67) mit Hilfe der Kettenregel und der in Kapitel 5.3.7 beschriebenen Differentiale wäre der Folgende:

Beweis.

$$\frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{(\ln y)' \cdot dx}{\frac{1}{x} \cdot dx} = \frac{\frac{1}{y(x)} y'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{y(x)} y'(x) = El_x y \quad (68)$$

□

Beschreibungsebene: Die Aufgaben in diesem Kapitel sind sehr vielfältig. Sie beinhalten die Berechnung von Elastizitäten, die ökonomische Interpretation von Elastizitäten, den Beweis von Rechenregeln für Elastizitäten und zwei Aufgaben zur Darstellung einer funktionalen Beziehung als loglineare Beziehung mit Hilfe der Elastizität (Bsp.: die Funktion $D = Ar^{1,23}$, D ist die Nachfrage an Äpfeln in den USA von 1927-1941, r das Einkommen).

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den Inhalten:* In diesem Kapitel wurden folgende Aspekte des Elastizitätskonzeptes behandelt:

1. die formale Definition als Grenzwert eines Verhältnisses relativer Änderungen
2. eine verbale Repräsentation als Approximation eines Verhältnisses relativer Änderungen
3. eine ökonomische Interpretation als Approximation des prozentualen Zuwachses der Funktion f , wenn man deren Variable x um 1% erhöht
4. Darstellung der Elastizität als doppelt logarithmische Ableitung

Viele der Aspekte zum Konzept der Elastizität sind ähnlich zu denen der Ableitung aus dem Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Allerdings wurden nicht alle zur Ableitung analogen Aspekte eingeführt. Behandelt wurden eine verbale und eine symbolische Repräsentation sowie eine ökonomische Interpretation. Es fehlen allerdings eine graphische Repräsentation und der Übergang zur Funktion. Außerdem wurden die Rechenregeln der Elastizität als Analogon der Ableitungsregeln nur in den Übungsaufgaben behandelt. Ein gesonderter Aspekt ist die Auffassung als doppelt logarithmische Ableitung.

Zum Exaktheitsgrad, den Begründungsformen und den Aufgaben: Die Begriffsbildung wurde ausführlich motiviert und mündete schließlich in einer exakten Definition. Die in diesem Kapitel dargestellten Begründungen waren entweder verbaler Natur (die Erläuterung der Beziehung zwischen der Elastizität als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation und die Begründung der Identifikation der beiden), oder es fehlten Begründungen (bei der Darstellung der Elastizität als doppelt logarithmische Ableitung). Die Aufgaben waren sehr vielfältig: (1) Berechnungsaufgaben, (2) Beweisaufgaben, (3) Aufgaben zur Interpretation von Elastizitäten, (4) Nutzung der Elastizität als Proportionalitätsfaktor in loglinearen Beziehungen.

5.3.9 Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Sydsæter und Hammond

In diesem Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung der Analyseergebnisse unter den im Voraus gestellten Leitfragen.

L1: *Welche Inhalte zum Ableitungskonzept werden vermittelt?*

In dem Lehrbuch „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter u. Hammond (2015) werden die meisten Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem theoretischen Modell zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 abgedeckt (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Eine Übersicht, inwieweit die Aspekte des Modells zum Verständnis der Ableitung als pures mathematisches Konzept in dem Buch explizit behandelt werden, ist in Tabelle 51 dargestellt.

Symbolisch	Graphisch	Verbal
Differenzenquotient ja	Sekantensteigung ja	Mittlere Änderungsrate ja
Differentialquotient ja	Tangentensteigung ja	Lokale Änderungsrate ja
Ableitungsfunktion ja	Graph der Ableitungsfunktion nein	Änderungsrate einer Funktion ja

Tabelle 51: In Sydsæter u. Hammond (2015) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als mathematisches Konzept, vorerst ohne ökonomische Interpretation der Ableitung

Die behandelten Aspekte werden auch sorgfältig miteinander vernetzt, was wesentlich für das Verständnis der Ableitung ist (Zandieh, 2000, S.104)). Der Übergang zur Ableitungsfunktion wird jedoch sehr rasch vollzogen. Auf symbolischer Ebene wird am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ erläutert, dass die Ableitung an jeder Stelle gleich $= 2x_0$ ist, und man daher anstelle von x_0 die Veränderliche x verwenden kann. Bei der Deutung der Ableitung als Änderungsrate wird die Änderungsrate einer ganzen Funktion auch nur in einem Beispiel (Populationswachstum) eingeführt.

Die ökonomische Interpretation der Ableitung aus dem Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) als Approximation des Zuwachses der Funktion bei Erhöhung der unabhängigen Variable um eine Einheit wird in dem Buch von Sydsæter und Hammond auch explizit eingeführt, und mit dem mathematischen Konzept der Ableitung verbunden. Die Verbindung erfolgt über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$. Diese Approximationsformel wird zunächst auf symbolischer Ebene aus der *concept definition* der Ableitung hergeleitet. Eine Rechtfertigung der Formel über lineare Approximation auf graphischer Ebene folgt dann an späterer Stelle, wo die Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation behandelt wird. Damit finden sich insgesamt auch beide Verbindungspfeile zwischen der Ableitung als pures mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation aus dem Modell aus Abbildung 4 (siehe auch Schlussblatt) in dem Buch von Sydsæter und Hammond wieder. Was

allerdings fehlt ist die Thematisierung der unterschiedlichen Einheiten zwischen Ableitung und Kostendifferenz, sowie eine Begründung, weshalb man bei ökonomischen Funktionen von einem kleinen Fehler zwischen $f'(x)$ und $f(x+1) - f(x)$ ausgehen kann.

Zusätzlich zu den Aspekten der Ableitung aus dem Rahmenmodell werden in dem Buch folgende darauf aufbauende Konzepte behandelt: (1) der Begriff des Differentials und (2) das Konzept der Elastizität. Differentiale sind dabei nach Sydsæter und Hammond endliche, variable Größen (also Variablen): Das Differential dx ist der Zuwachs des Arguments, und $dy = f'(x) dx$ ist der Zuwachs entlang der Tangente.

Neben diesen konzeptuellen Aspekten erfolgt in Sydsæter u. Hammond (2015) natürlich eine Behandlung der Technik des Ableitens. Dies umfasst die Ableitung elementarer Funktionen, die Ableitungsregeln und die Technik des impliziten Differenzierens (hier aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt, siehe Tabelle 48).

Weitere Inhalte des Buches im Zusammenhang mit der Ableitung, die hier aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt wurden, weil bei ihnen nicht der Fokus auf der Ableitung als *Konzept* liegt, sind die Folgenden (siehe auch Tabelle 48):

1. Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie und Ableitung und Konvexität
2. Verwendung der Ableitung zur polynomialen Approximation und Taylorformel
3. Newton-Verfahren
4. Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit
5. Mittelwertsatz der Differentialrechnung
6. Regeln von De L'Hôpital
7. Verwendung der Ableitung in der Optimierung

Insgesamt wird also in dem Lehrbuch von Sydsæter u. Hammond (2015) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Dabei werden bis auf die graphische Repräsentation der gesamten Ableitungsfunktion alle Aspekte des theoretischen Modells aus Kapitel 3 zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler explizit eingeführt. Weiterhin werden noch Verbindungen zu anderen Konzepten wie Monotonie, Konvexität oder Stetigkeit, sowie Anwendungen der Ableitung bei der Optimierung und Anwendungen in der Ökonomie vermittelt.

L2: Welcher Exaktheitsgrad wird verwendet?

Das Buch arbeitet auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen. Zu Beginn der Ausführungen zur Ableitung wird zunächst mit Begriffen auf Basis der Anschauung gearbeitet (Ableitung als Steigung der Tangente mit der Tangente an eine Kurve als globale Berührende, intuitiver Grenzwertbegriff). Diese Begriffe werden dann nach und nach mit formalen Definitionen exaktifiziert. Man sieht hier also ein Spiralprinzip (Bruner, 1980).

Allerdings sind die Definitionen manchmal unvollständig. So wird zum Beispiel die Ableitung $f'(x_0)$ zwar formal als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert, allerdings werden keine Voraussetzungen an x_0 genannt (muss Häufungspunkt von D_f sein), und auch die Existenz des Grenzwertes wird nicht thematisiert. Es erfolgt lediglich eine Fokussierung auf die Formel. Ähnliche Unvollständigkeiten gibt es auch für beweisbare Aussagen, die in dem Buch nicht als „Satz“ formuliert werden, sondern eher als Regeln vermittelt werden. So wird zum Beispiel die Ableitung für Funktionen der Form $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$ nur als Rechenregel formuliert. Die Existenz der Ableitung wird nicht thematisiert.

Weiterhin sind einige Inkonsistenzen erkennbar. So wird zunächst der Begriff der Differenzierbarkeit nicht eingeführt. Bei der Summenregel für Ableitungen taucht er jedoch auf einmal auf (er wird auch an späterer Stelle nicht definiert). Ähnliches gilt für den Stetigkeitsbegriff. Dieser wird bereits für den Beweis der Kettenregel verwendet (S.232), aber erst später definiert (S.286). Auch beim analytischen Tangentenbegriff findet man eine Inkonsistenz. Die Tangente wird zunächst als Grenzgerade eines Grenzprozesses von Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $f(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ für $\Delta x \rightarrow 0$ definiert. Deren Steigung wird dann aber nicht mit einem Steigungsdreieck bestimmt, sondern durch $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ neu definiert. Danach wird die Tangente durch die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nochmals neu definiert, ohne dass klar wird, inwieweit die alte Definition nun ersetzt wird.

L3: Wie werden die präsentierten mathematischen Aussagen begründet?

Die meisten der im Buch präsentierten mathematischen Aussagen werden begründet. Die Begründungsformen sind dabei vielfältig. Sie sind in Tabelle 52 mit je einem Beispiel dargestellt.

Begründungsform	Beispiel
Formaler Beweis	Beweis der Produktregel
Graphische Argumentation	Graphische Begründung, dass die Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0 ist
Generischer Beweis	Potenzregel für natürliche Exponenten: für $n = 2$ und $n = 3$ wurde der Beweis ausgeführt. Anschließend wurde darauf hingewiesen, dass der Weg für größere $n \in \mathbb{N}$ vollkommen analog funktioniert
Verbale Begründung	Rechtfertigung der ökonomischen Interpretation der Elastizität

Tabelle 52: Begründungsformen in Sydsæter u. Hammond (2015) in Zusammenhang mit der Ableitung

Die formalen Beweise sind in der Regel korrekt geführt. Allerdings gibt es sehr vereinzelt kleine Lücken, wo Aussagen stillschweigend aus der Anschauung übernommen werden. Ein Beispiel ist ein Schluss

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = 1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{\ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}} = e \quad (69)$$

bei der Herleitung der Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion (hier aus Platzgründen nicht im Detail dargestellt). Bei diesem Schluss wird stillschweigend die Stetigkeit der e -Funktion verwendet.

L4: Welche Aufgaben sollen die Studierenden lösen?

Die Aufgaben in diesem Buch sind recht vielfältig. Die meisten Aufgaben sind klassische Berechnungsaufgaben, in denen die eingeführten Methoden verwendet werden sollen. Die dort verwendeten Funktionen sind jedoch nicht nur Zahlenbeispiele, sondern Funktionen mit Parametern, wie sie in der Ökonomie öfter auftauchen (Varian, 2011, S.67).

Neben den Berechnungsaufgaben gibt es aber auch viele andere Aufgabentypen, die auch das konzeptuelle Verständnis fördern. Eine Übersicht über die Aufgabentypen aus Sydsæter u. Hammond (2015) Tabelle 53 zu sehen.

Aufgabentyp	Beispiel
Berechnungsaufgaben	Bestimmung von Ableitungen
Beweisaufgaben	Beweis von Rechenregeln der Elastizität
Graphische Aufgaben	Graphische Bestimmung des Vorzeichens der Ableitung an bestimmten Punkten einer Funktion
Interpretationsaufgaben	Aufgaben zur ökonomischen Interpretation berechneter Werte
Aufgaben zur Beleuchtung mathematischer Hintergründe	Aufgabe zur Kommentierung eines Fehlers bei der Anwendung von De L'Hôpital, weil die „ $\frac{0}{0}$ “-Bedingung nicht erfüllt ist
Aufgaben zur Mathematisierung verbaler Aussagen	Übersetzung von Aussagen zur Reduzierung und Reduzierung der Zuwachsrates beim Verteidigungsetat in Aussagen zum Vorzeichen der Ableitungen (taucht im Kapitel zu Ableitungen höherer Ordnung auf, das hier nicht im Detail dargestellt wurde)

Tabelle 53: Aufgabentypen in Sydsæter u. Hammond (2015) in Zusammenhang mit der Ableitung

Die Aufgaben unterstützen somit nicht nur die Ausbildung von Rechenfertigkeiten, sondern auch die Entwicklung eines umfangreichen *concept image* zur Ableitung.

Zusammenfassendes Fazit: Insgesamt wird im Lehrbuch von Sydsæter u. Hammond (2015) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Bis auf den Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur gesamten Ableitungsfunktion auf graphischer Ebene werden alle Aspekte des Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) abgedeckt. Die ökonomische Interpretation wird dabei mit der Ableitung als reines mathematisches Konzept wie im theoretischen Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ verbunden.

Die Darstellung der Inhalte ist überwiegend exakt, und zu den meisten verwendeten Begriffen wird eine formale *concept definition* präsentiert. Die präsentierten Aussagen werden in der Regel mathematisch korrekt begründet, sodass neue Aspekte gut in das bereits bestehende *concept image* integriert werden können. Allerdings gibt es ab und zu kleine Lücken in Beweisen oder bei der Formulierung der Definitionen sowie

einige Inkonsistenzen. Dennoch wird in diesem Buch überwiegend ein aus mathematischer Sicht adäquates *concept image* zur Ableitung vermittelt, bei welchem auch eine Verbindung zur Ökonomie hergestellt wird.

5.4 Analyse des Lehrbuchs von Tietze

Das letzte hier analysierte Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ist das Lehrbuch „Einführung in die Angewandte Wirtschaftsmathematik“ von Jürgen Tietze, ein Standardwerk im deutschsprachigen Raum (Tietze, 2010). Wie bei den anderen beiden Lehrbüchern wird zunächst eine Übersicht der Kapitel gegeben. Anschließend erfolgt eine Detailanalyse der Kapitel, in denen das *Konzept der Ableitung* im Mittelpunkt steht, sowie von einigen Kapiteln zu Ableitungsregeln, damit man eine Idee zum Exaktheitsgrad und zur Argumentationskultur des Buches bekommt (siehe Leitfragen L2 und L3 aus Kapitel 5.1). Auf eine Detailanalyse des Kapitels über Elastizitäten wird bei diesem Lehrbuch aus Platzgründen verzichtet, da dieses nicht Schwerpunkt der Dissertation ist.

5.4.1 Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch

Die Ableitung ist Bestandteil von zwei großen Kapiteln:

Kapitel 5: „Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen – Grundlagen und Technik“

Kapitel 6: „Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen“

Diese bestehen wiederum aus einigen Unterkapiteln. Eine Übersicht dieser Unterkapitel befindet sich in Tabelle 54. Die Unterkapitel, die dann im Detail analysiert werden, sind wieder fett hervorgehoben.

5.4.2 Kapitel „Grundlagen der Differentialrechnung“

Beschreibungsebene: Das Kapitel beginnt zunächst mit einer Motivation. Der Autor erklärt, dass es in verschiedensten Situationen wichtig ist, Auswirkungen von Änderungen zu untersuchen (S.199). Dazu nennt er mehrere Kontexte: Änderungen in Bewegungskontexten, Änderungen des Erlöses bei Änderung des Preises, Änderung der Kosten bei Änderung der Produktionsmenge sowie die Änderung des Konsums bei Änderung des Haushaltseinkommens. Nach Nennung der Beispiele fährt er dann wie folgt fort (S.199):

*„Die Auflistung derartiger Probleme, bei denen es entscheidend auf die **Änderungstendenz** einer Funktion $f : y = f(x)$ ankommt, wenn sich die unabhängige Variable x ändert, lässt sich beliebig fortsetzen. Vor 300 Jahren schufen – fast unabhängig voneinander – Gottfried Wilhelm LEIBNITZ (1646-1716) und Isaac NEWTON (1642-1727) mit der Differentialrechnung ein außerordentlich leistungsfähiges und effektives Instrumentarium zur mathematischen Erfassung derartiger „Änderungen“.“*

Kapitel des Buchs	Beschreibung der behandelten Inhalte
5.1. „Grundlagen der Differentialrechnung“	Einführung des Ableitungsbegriffs, Behandlung des Begriffs der Differenzierbarkeit einer Funktion und des Zusammenhangs zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit
5.2. „Technik des Differenzierens“	Behandlung der Ableitung elementarer Funktionen sowie der Ableitungsregeln, Behandlung der Regeln von De L'Hôpital, Behandlung des Newton-Verfahrens
6.1. „Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung“	Einführung des Begriffs des Differentials, Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung in verschiedenen Kontexten, Behandlung des Zusammenhangs zwischen Grenz- und Durchschnittsfunktion
6.2. „Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen“	Behandlung des Zusammenhangs zwischen Monotonie und Ableitung sowie zwischen Konvexität und Ableitung, Definition lokaler Extrema und Behandlung notwendiger und hinreichender Kriterien für lokale Extrema: 1. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ 2. hinreichende Kriterien: $f'(x) = 0$ $f''(x) \neq 0$ für lokale Extrema 3. hinreichende Kriterien für lokale Extrema auf der Basis höherer Ableitungen, Definition des Wendepunktes und Behandlung notwendiger und hinreichender Kriterien für Wendepunkte (mit Hilfe der dritten Ableitung), Behandlung des Verfahrens der Kurvendiskussion bei differenzierbaren Funktionen, Behandlung des Vorzeichenwechselkriteriums der 1. Ableitung für lokale Extrema (auch, falls die Funktion an der Stelle x_0 selbst vielleicht nicht differenzierbar ist)
6.3. „Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme“	Beschreibung des Verhaltens ökonomischer Funktionen mit Hilfe der Ableitung, Behandlung der Fahrstrahlanalyse zur Analyse ökonomischer Funktionen, Einführung einer eigenen Kurvendiskussion für ökonomische Funktionen, Anwendung der Ableitung zur Lösung ökonomischer Optimierungsprobleme, Behandlung des Konzepts der Elastizität, Herleitung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Ableitung

Tabelle 54: Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung in Tietze (2010)

Nach dieser Motivation erfolgt die Brücke zur graphischen Ebene:

„Anschaulich kommt die Änderungstendenz einer Funktion f durch die mehr oder weniger große „Steilheit“ ihrer Funktionskurve zum Ausdruck.“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Ableitung wird zunächst als sogenannte *Änderungstendenz* motiviert, aus der man ablesen kann, wie stark sich eine Funktion lokal ändert. Eine Konkretisierung dieser Änderungstendenz als Änderungsrate erfolgt jedoch nicht. Stattdessen wechselt der Autor die Repräsentationsebene, indem er die Änderungstendenz durch die Steilheit der Kurve bzw. die Steigung charakterisiert.

Beschreibungsebene: Es wird nun erklärt, dass sich bei linearen Funktionen die Steigung durch den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmen lässt, was auch mit Hilfe von Steigungsdreiecken veranschaulicht wird (S.200). Der Begriff der Steigung soll dann auf nichtlineare Funktionen ausgedehnt werden:

„Es liegt nahe, den linearen Steigungsbegriff auch auf nichtlineare Funktionen zu übertragen. Da bei „gekrümmten“ Funktionsgraphen der „Anstieg“ von Punkt zu Punkt verschieden ist, stellt sich somit die Frage nach der „Steigung von f in einem Punkt $P(x_0, f(x_0))$ “.“

In Analogie zum linearen Fall wird nun ein Steigungsdreieck an eine Kurve konstruiert, welches die Steigung der Sekante zwischen zwei Punkten P und Q_1 misst (S.200). Diese wird an einem Bild veranschaulicht (ähnlich wie in Abbildung 34). Aus dem Bild wird dann die Gleichung der Sekantensteigung $m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ hergeleitet.

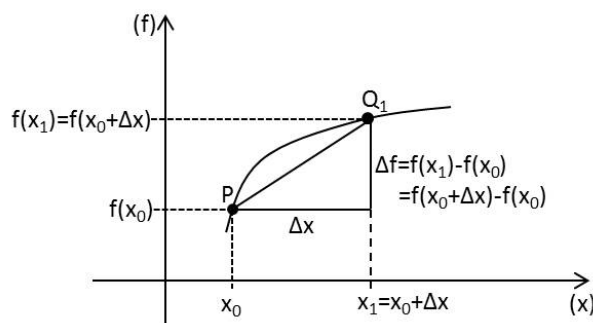


Abbildung 34: Graphik des Autors zur Veranschaulichung der Sekantensteigung zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ in Analogie zu einer Graphik aus Tietze (2010, S.200)

Danach folgt der Grenzübergang. Dazu werden folgende Erläuterungen gegeben (S.201):

„Da die Sekantensteigung den gesuchten Kurvenanstieg in P umso besser annähert, je dichter Q_1 an P liegt, halten wir den Punkt $P(x_0, f(x_0))$ fest und nähern den Punkt Q_1 (etwa über Stationen $Q_2, Q_3, \dots$) längs der Funktionskurve immer mehr dem Punkt P .

Aus Abbildung 5.1.8 [hier Abbildung 35] ist ersichtlich, dass sich bei Lageänderung der Sekante auch deren Steigung ändert. In den meisten vor kommenden Fällen kann man nun Folgendes beobachten:

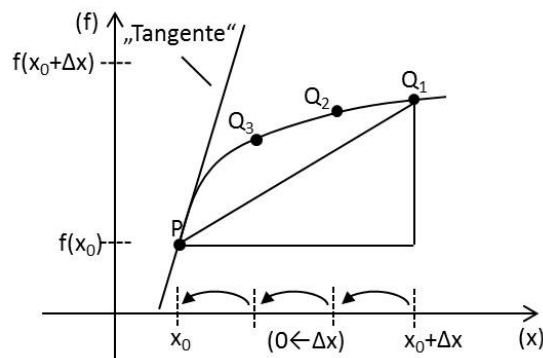


Abbildung 35: Graphik des Autors zur Veranschaulichung des Grenzübergangs von den Sekanten zur Grenzlage der Tangente in Analogie zu einer Graphik aus Tietze (2010, S.201)

Während sich für $Q_i \rightarrow P$ die Sekanten immer mehr einer Grenzlage (in Abbildung 5.1.8 [hier Abbildung 35] mit „Tangente“ bezeichnet), nähern, streben die Sekanten-Steigungen immer mehr einem Grenzwert zu (und zwar unabhängig davon, von welcher Seite die Punkte Q_i gegen P streben).

Wenn dieser Fall eintritt, so bezeichnet man den Grenzwert der Sekantensteigungen als Steigung der Funktion f an der Stelle x_0 . Diejenige Gerade, die durch P verläuft und deren Steigung mit der Funktionssteigung übereinstimmt, heißt Tangente an f in P .‘

Dann folgt die Definition (S.201):

Definition 5.8:

Existiert für eine Funktion $f : y = f(x)$ an der Stelle x_0 der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (70)$$

so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar (oder ableitbar).

Den Grenzwert selbst bezeichnet man als Funktionssteigung, (erste) Ableitung oder Differentialquotient von f an der Stelle x_0 und schreibt dafür auch symbolisch:

$$f'(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (71)$$

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Ableitung wird also als Steigung der Funktion in einem Punkt eingeführt, die sich mit Hilfe des Grenzwertes der Sekantensteigungen bestimmen lässt. Dieser Grenzwert dient dann auch als formale *concept definition* der Ableitung. Hier wird auch bereits angesprochen, dass dieser Grenzwert nicht immer existieren muss, sondern nur in den *meisten vorkommenden Fällen*, wobei unklar bleibt, was das heißt.

Bezüglich des theoretischen Modells zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) werden hier also die graphische und die

symbolische Repräsentation der Ebenen *Verhältnis* und *Grenzwert* behandelt (Erstere entspricht der Bildung des Differenzenquotienten, Letztere dem Grenzübergang zur Ableitung).

Der Grenzwertbegriff wurde zuvor in Kapitel 4 „Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen“ wie folgt definiert (S.168):

„Wenn sich für $x \rightarrow x_0$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ einem konstanten Wert g immer mehr nähern, egal auf welche Weise $x \rightarrow x_0$ strebt, so sagt man, g ist Grenzwert von $f(x)$ bei Annäherung von x gegen x_0 .“

Diese Definition ist recht schwammig (was heißt „immer mehr nähern“?). Dementsprechend sind auch die Formulierungen von Tietze zum Grenzübergang bei der Ableitung recht unpräzise (was heißt „die Sekanten-Steigungen streben immer mehr einem Grenzwert zu“?). Zwar wurde in einer Zusatzbemerkung im Kapitel über Grenzwerte von Funktionen die ε - δ -Definition genannt. Jedoch wird vom Autor darauf bewusst nicht mehr zurückgegriffen (S.169).

Beschreibungsebene: Nach der Nennung der Definition der Ableitung werden die verschiedenen Notationen eingeführt (S.201):

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} \quad (72)$$

Anschließend wird dann am Beispiel der Funktion f mit $f(x) := 0,2x^2$ demonstriert, wie man die Ableitung mit Hilfe der Definition bestimmen kann. Diese wird zunächst konkret an der Stelle $x_0 = 2$ ermittelt (einschließlich zugehöriger Tangentengleichung) und dann für ein allgemeines x_0 . Dazu werden folgende Schritte durchgeführt und jeweils an einer Skizze veranschaulicht (S.202-203):

1. Bestimmung des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
2. Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ nach dem Kürzen des Nenners zur Bestimmung der Ableitung
3. Bestimmung der Tangentengleichung

Weshalb beim Grenzübergang gewisse Terme wegfallen oder auch nicht, wird nicht kommentiert. Auf die Grenzwertsätze wird nicht zurückgegriffen, auch wenn diese in einem vorangegangenen Kapitel über Grenzwerte genannt (aber nicht begründet) wurden (S.181).

Nun erfolgt der Übergang zur Ableitungsfunktion. Am Beispiel $f(x) = 0,2x^2$ werden für verschiedene Werte x_0 die Werte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und die Tangentengleichung in einer Wertetabelle angegeben (S.203). Außerdem werden die zugehörigen Tangenten in einer Skizze visualisiert. An diesem Beispiel lässt sich laut Tietze dann erkennen, dass der Rechenaufwand für die Bestimmung der Ableitung $f'(x_0)$ bei beliebigem x_0 kaum größer ist als bei einem speziellen x_0 . Auf Basis dieser Motivation erfolgt der Übergang zur Ableitungsfunktion (S.203):

„Die Tatsache, dass – wie im vorstehenden Beispiel – für eine vorgegebene Funktion f zu jeder Stelle x_0 genau eine Ableitung (oder Kurvensteigung) $f'(x_0)$ existieren kann, zeigt, dass man die Ableitung f' in einem Intervall (oder in $\mathbb{R}$) wiederum als Funktion der unabhängigen Variable auffassen kann.“

Dann folgt die Definition der Ableitungsfunktion (S.203):

Definition 5.9 (Ableitungsfunktion):

- i) *Existiert zu einer Funktion f in jedem Punkt x eines Intervalls I ($I \subset D_f$) die (erste) Ableitung $f'(x)$, so heißt f in I differenzierbar.*
- ii) *Die Funktion f' , die jedem $x \in I$ die zugehörige (erste) Ableitung (oder Funktionssteigung) $f'(x)$ von f zuordnet, heißt die abgeleitete Funktion von f , Ableitungsfunktion von f oder kurz Ableitung f' von f .*
- iii) *Ist f' stetig, so heißt f in I stetig differenzierbar.*

Es folgen nochmal einige Notationsweisen ($f'(x)$, $\frac{df}{dx}$). Als Fußnote gibt es außerdem noch den Hinweis, dass an den Randpunkten des Intervalls nur die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten betrachtet werden müssen. Es wird außerdem darauf aufmerksam gemacht, dass die Ableitungsfunktion berechnet wird, indem man in der Definition der Ableitung statt x_0 allgemein x einsetzt (S.203).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier erfolgt also der Übergang zur Ebene *Funktion* im Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt). Dieser Übergang wird in der symbolischen Ebene mit Hilfe einer Wertetabelle mit verschiedenen $f'(x_0)$ und in der graphischen Ebene durch die Visualisierung verschiedener Tangentensteigungen vollzogen.

Beschreibungsebene: Es folgen drei Beispiele (lineare Funktion $f(x) = mx + b$, $f(x) = x^3 - 12x$ und $f(x) = \frac{1}{x}$), an denen die Bestimmung der Ableitungsfunktion mit Hilfe des Differenzenquotienten demonstriert wird (S.204).

Das Unterkapitel endet mit Aufgaben, in denen für verschiedene Funktionen Ableitungsfunktionen über den Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmt werden sollen (S.204). Zu den gleichen Funktionen sollen dann auch spezielle Funktionssteigungen durch Einsetzen, Tangentengleichungen und Punkte mit waagerechter Tangente bestimmt werden.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Aufgaben sind sehr prozedural und dienen der Übung der rechnerischen Bestimmung der Ableitung mit Hilfe der formalen *concept definition*.

Beschreibungsebene: Die Ausführungen zu den Grundlagen der Differentialrechnung enden mit dem Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit. Hier wird thematisiert, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existieren muss, wenn die Funktion an der Stelle x_0 einen Knick oder eine senkrechte Tangente hat (S.205). Dies wird an zwei Beispielen demonstriert:

1. Knick im Graphen bei $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{für } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 2$.

2. Senkrechte Tangente am Beispiel $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$ bei $x_0 = 2$.

Bei beiden Beispielen wird die Nicht-Differenzierbarkeit mit Hilfe des Differenzenquotienten nachgewiesen (S.205). Weiterhin werden die beiden Typen auch graphisch veranschaulicht (S.205).

Die beiden Beispiele zur Nicht-Differenzierbarkeit werden zum Anlass genommen, hervorzuheben, dass es in x_0 stetige Funktionen gibt, die dort aber nicht differenzierbar sind. Hingegen ist jede an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig, was anschließend als Satz formuliert und bewiesen wird (S.206). Das Kapitel endet mit 4 Aufgaben, in denen untersucht werden soll, ob gegebene Funktionen an einer gegebenen Stelle x_0 differenzierbar sind (S.206). Falls das nicht der Fall ist, soll ein Grund angegeben werden, wobei aus drei verschiedenen Gründen ausgewählt werden kann: Ecke, senkrechte Tangente, Unstetigkeitsstelle.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Anders als bei Dietz (2012) und Sydsæter u. Hammond (2015) wird im Buch von Tietze das Problem der Nicht-Differenzierbarkeit ziemlich unmittelbar nach der Einführung der Definition der Ableitung ausführlich thematisiert (inklusive Übungsaufgaben). Hierbei werden sowohl die graphische als auch die symbolische Ebene betrachtet. Jedoch werden durch die Gegenbeispiele nicht alle Typen nicht-differenzierbarer Stellen erfasst. Ein nicht erfasster Typ wäre die Nichtexistenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten wegen Oszillation wie bei

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (73)$$

für $x \rightarrow 0$.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den behandelten Inhalten:* In diesem Kapitel wurde der Begriff der Ableitung eingeführt. Die Einführung erfolgte dabei als Funktionssteigung in einem Punkt, die sich als Grenzwert von Sekantensteigungen bestimmen lässt. Dieser Grenzwert, sofern er existiert, war dann auch die formale *concept definition* der Ableitung. Grundlage für diese Definition war ein verbal definierter Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ als die Zahl, der sich f für $x \rightarrow x_0$ „beliebig annähert, egal auf welche Weise $x \rightarrow x_0$ strebt“. Allerdings wurde bereits in diesem Kapitel an Beispielen klar gemacht, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existieren muss.

Bezüglich des theoretischen Modells zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wurden in diesem Kapitel alle drei Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion* in der symbolischen und der graphischen Repräsentation behandelt. Die verbale Repräsentation als Änderungsrate wurde zwar in der Motivation der Ableitung als *Änderungstendenz* angesprochen, jedoch dann im weiteren Verlauf des Kapitels nicht wieder aufgegriffen.

Zum Exaktheitsgrad und den Begründungsformen: Die Ableitung wurde formal korrekt als Grenzwert des Differenzquotienten definiert. Hierbei wurde auch bereits von Anfang

an die Problematik der Existenz angesprochen. Allerdings fehlte die Voraussetzung, dass die betrachtete Stelle x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereiches sein muss. Die hier gebrachten mathematischen Aussagen wurden stets begründet. Allerdings tauchten beim Grenzübergang manchmal Ungenauigkeiten bzw. Lücken auf. So sind die Formulierungen zum Grenzübergang im Zusammenhang mit der Ableitung recht schwammig (Bsp.: „die Sekanten nähern sich für $Q_i \rightarrow P$ immer mehr einer Grenzlage“). Eine weitere Ungenauigkeit beim Grenzübergang ist, dass bei den Beispielrechnungen zur Bestimmung des Grenzwertes des Differenzenquotienten bei quadratischen Funktionen nicht erläutert wurde, wie der Grenzwert nach dem Kürzen bestimmt wurde. Auf die bereits vorher behandelten Grenzwertsätze (S.181) wurde nicht verwiesen. *Zu den Aufgaben:* Die Aufgaben waren überwiegend prozedural und dienten dem Einüben der rechnerischen Bestimmung der Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten. Allerdings gab es auch eine Aufgabe, in der es um konzeptuelle Überlegungen ging, nämlich die Aufgabe zur Untersuchung der Differenzierbarkeit ausgewählter Funktionen mit Klassifikation des Typs der nicht-differenzierbaren Stelle (Knick, senkrechte Tangente, Unstetigkeitsstelle).

5.4.3 Kapitel zur Technik des Differenzierens

Beschreibungsebene: Das Kapitel wird damit motiviert, dass die Bestimmung der Ableitung mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten bei komplizierteren Funktionen mühsam sein kann (S.206). Als Lösung des Problems sollen dann die Ableitungsregeln eingeführt werden, mit deren Hilfe man Ableitungen komplexer Funktionen auf Ableitungen einiger weniger Grundfunktionen zurückführen kann.

Also werden zuerst die Ableitungen gewisser elementarer Funktionen behandelt, die Tietze als *Grundfunktionen* bezeichnet (S.207). Hierbei werden die Ableitungen folgender Funktionen eingeführt:

1. Die Ableitung einer konstanten Funktionen
2. Die Ableitung der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
3. Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion
4. Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Bei jeder dieser Funktionen wird nicht nur die Formel der Ableitung genannt, sondern auch auf deren Differenzierbarkeit eingegangen. Ein Beispiel ist folgender Satz über die Ableitung von Potenzfunktionen (S.207):

Satz 5.10:

Die Potenzfunktion $f : f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist überall differenzierbar, und es gilt:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{bzw. } \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Alle Aussagen über die Differenzierbarkeit und die Ableitung dieser Grundfunktionen werden formal auf Basis der Definition der Ableitung bewiesen. Jedoch gibt es in den

Beweisen manchmal kleine Ungenauigkeiten. So wird beispielsweise für die Ableitung der konstanten Funktion folgender Beweis angegeben (S.207):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \quad (74)$$

Hier wird nicht deutlich, wo der Grenzübergang stattfindet.

Auch beim Beweis der Potenzregel gibt es eine Ungenauigkeit. Zwar wird zunächst der Differenzenquotient $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ sehr exakt mit dem binomischen Satz berechnet. Beim Grenzübergang gibt es aber wieder keinen Kommentar dazu, weshalb bis auf den ersten Summanden nx^{n-1} nach dem Ausmultiplizieren der Rest für $\Delta x \rightarrow 0$ wegfällt (kein Hinweis auf die Grenzwertsätze, S.207).

Eine letzte Lücke sei am Beispiel der Ableitung der e -Funktion gezeigt. Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird dabei zunächst wie folgt umgeformt (S.209):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \frac{k}{\ln(k + 1)} = e^x \frac{1}{\ln(1 + k)^{\frac{1}{k}}} \quad \text{mit } k = e^{\Delta x} - 1 \quad (\text{S.209}) \quad (75)$$

Dann wird argumentiert, dass mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch k gegen 0 strebt, und daher gilt:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{k \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{1}{\ln(1 + k)^{\frac{1}{k}}} = e^x \frac{1}{\ln \left[\lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} \right]} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x \quad (76)$$

Hier werden stillschweigend die Stetigkeit der e - und der $\ln$ -Funktion verwendet.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Man sieht also, dass die Aussagen zu Differenzierbarkeit und Ableitung der elementaren Funktionen zwar sehr exakt formuliert werden, in den Beweisen dann aber teilweise kleine Lücken enthalten sind (intuitiver Grenzübergang, stillschweigende Stetigkeitsannahmen aus der Anschauung).

Beschreibungsebene: Weitere Inhalte des Kapitels über die Ableitung der Grundfunktionen sind:

- 6 Beispiele zur Ableitung von Potenzfunktionen (S.208)
- Formeln für die Ableitung der Winkelfunktionen (ohne Beweis, denn diese sind laut dem Autor in der Ökonomie nicht so wichtig, S.210)
- viele Aufgaben zur Bestimmung von Ableitungsfunktionen mit Hilfe der soeben eingeführten Ableitungen der Grundfunktionen (S.210)

Als nächstes folgen die Ableitungsregeln (Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel (S.211-219)). Diese werden wieder exakt formuliert, formal mit Hilfe des Differenzenquotienten bewiesen und an Beispielen illustriert. Außerdem gibt es wieder Aufgaben zum Üben des Ableitens mit Hilfe dieser Regeln. Da die Ausführungen des Buches ähnlich zu denen bei der Ableitung elementarer Funktionen sind, wird aus Platzgründen auf eine Detaildarstellung verzichtet.

Nach den Ableitungsregeln folgen weitere Ableitungsformeln:

- Die Ableitung allgemeiner Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen (mit Herleitung über den Zusammenhang $x = e^{\ln(x)}$ und über die Kettenregel, S.220-223)
- Formel für die Ableitung der inversen Funktion (mit Herleitung über die Kettenregel unter Annahme der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

Das Kapitel zur Technik des Ableitens schließt mit der symbolischen Definition höherer Ableitungen (S.223-225). Aus Platzgründen wird hier auf eine Detaildarstellung dieser Ausführungen ebenfalls verzichtet.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: Insgesamt erkennt man, dass Tietze großen Wert auf die Technik des Ableitens gelegt hat. Hierbei wurden sehr viele Rechenregeln behandelt. Diese wurden stets genau formuliert und auf Basis der formalen *concept definition* der Ableitung bewiesen. Allerdings sind in den Beweisen im Zusammenhang mit dem Grenzübergang manchmal kleine Lücken erkennbar (keine Erwähnung der Grenzwertsätze bei der Grenzwertbestimmung, stillschweigende Stetigkeitsannahmen der e - und der $\ln$ -Funktion). Die Aufgaben in diesem Kapitel waren Aufgaben, in denen es um die Berechnung von Ableitungen mit Hilfe der eingeführten Regeln ging.

5.4.4 Kapitel über die ökonomische Interpretation der Ableitung

Das Kapitel über die ökonomische Interpretation der Ableitung besteht aus zwei Unterkapiteln:

1. ein Unterkapitel zu Differentialen, in dem auch der Aspekt der linearen Approximation der Ableitung behandelt wird
2. ein Unterkapitel zur ökonomischen Interpretation der Ableitung

Beschreibungsebene: Das Unterkapitel über Differentiale beginnt damit, dass daran erinnert wird, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist, was auch an einer Skizze verdeutlicht wird (S.237). Dann wird behauptet, dass die Tangente die Gerade ist, die f bei x_0 „am besten annähert“. Als Begründung wird angegeben, dass in x_0 sowohl ihr Funktionswert als auch ihre Steigung mit der von f übereinstimmt. Mit der Feststellung, dass die Tangente lokal an einer Stelle x_0 die beste approximierende Gerade ist, wird motiviert, die zugehörige Tangentialfunktion als lokale Näherung von f zu verwenden. Dementsprechend wird eine Änderung Δf von f bei einem Zuwachs von Δx durch die entsprechende Änderung der Tangentialfunktion ersetzt (S.237):

„Diese uns interessierende Änderung Δf kann nun nach dem Vorhergehenden in erster Näherung ersetzt werden durch die entsprechende Änderung df der Tangentialfunktion.“

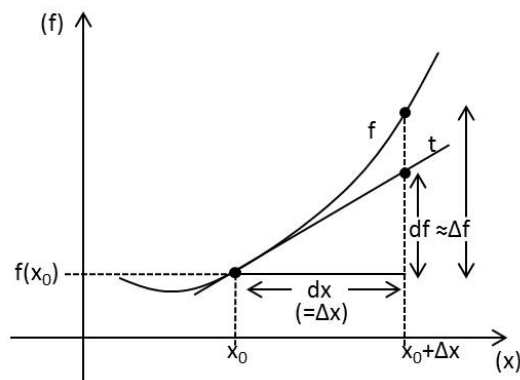


Abbildung 36: Visualisierung der Ableitung als lineare Approximation und der Differentiale, angelehnt an eine Graphik in Tietze (2010, S.237)

Dazu gibt es eine Skizze analog zu Abbildung 36 und eine weitere Erklärung:

*„Anstelle der Differenzen Δx , Δf bezeichnet man die entsprechenden (endlichen) Differenzen für die Tangentenfunktion mit dx ($= \Delta x$) und df und nennt sie **Differentiale** von x bzw. f .“*

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier werden also Differentiale eingeführt. Tietze fasst diese als endliche Größen bzw. Variablen auf. Dabei ist $dx = \Delta x$ der Zuwachs des Arguments (ausgehend von x_0) und df der zugehörige Zuwachs der Tangentialfunktion.

Beschreibungsebene: Tietze weist darauf hin, dass sich mit dieser Definition der Differentiale die Ableitung tatsächlich als $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ergibt, da dies gerade die Katheten eines Steigungsdreiecks der Tangente sind. Danach werden die zu den Differentialen geführten Erläuterungen noch einmal als Definition formuliert (S.238):

Definition 5.11 (Differential von f):

Es sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Unter dem Differential df der Funktion f an der Stelle x_0 zum Zuwachse $dx (\neq 0)$ versteht man:

$$df = f'(x_0) dx \quad (77)$$

Auch die Verbindung zwischen dem Funktionszuwachs Δf und dem Differential df wird noch einmal als Satz formuliert (S.238):

Satz 5.12:

Das Differential $df = f'(x) dx$ ($dx \neq 0$) gibt für jede Stelle x an, um wie viele Einheiten sich $f(x)$ (näherungsweise) ändert, wenn die abhängige Variable x um dx Einheiten geändert wird. (Das Differential ist somit eine Funktion der beiden Variablen x und dx !). Dabei ist die Güte der Näherung $\Delta f \approx df$ desto besser, je kleiner die (willkürliche) Abszissenänderung dx gewählt wird.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Diese hier genannte Definition der Differentiale ist nun sehr exakt. Anders sieht es mit dem Satz zum Zusammenhang zwischen dem Funktionszuwachs Δf und dem Differential df aus. Hier ist die Formulierung mit der „Güte der Näherung“ sehr ungenau. Denn wenn man eine Verbesserung der Güte als monotone Abnahme des Fehlers zwischen Δf und df versteht, was naheliegend ist, so ist die entsprechende Aussage in Satz 5.12 so nicht richtig. Der Fehler muss für $dx \rightarrow 0$ nicht monoton abnehmen, wie folgendes Beispiel bei $x = 0$ zeigt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (78)$$

Beschreibungsebene: Nach Einführung des Begriffs des Differentials folgen Beispiele, in denen Zuwächse Δf und Differentiale df bei vorgegebenen x und $dx = \Delta x$ bestimmt und miteinander verglichen werden (S.238-239). Die folgenden Aufgaben sind vom gleichen Typ wie die Beispiele (S.239).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Aufgaben sind also allesamt sehr prozedural.

Beschreibungsebene: In dem zweiten Unterkapitel des Kapitels zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung geht es dann tatsächlich um die Interpretation der ersten Ableitung ökonomischer Funktionen. Es beginnt mit folgenden Ausführungen (S.240):

*„Ändert man – ausgehend von der Stelle x_0 – die unabhängige Variable um genau **eine Einheit** (d.h. $\Delta x = dx = 1$), so ergibt sich als Tangentensteigung in x_0 :*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{1} = df \quad (79)$$

Für $dx = 1$ stimmen die Zahlenwerte von Funktionsdifferential df (=Ordnatenänderung der Tangentenfunktion) und erster Ableitung $f'(x_0)$ überein.“

Diese Ausführungen werden zusätzlich mit einer Skizze verdeutlicht, in die $dx = 1$, df und Δf eingezeichnet sind (S.240). Tietze fährt nun wie folgt fort (S.240):

„Da andererseits df ein (guter) Näherungswert für die wahre Funktionsänderung Δf ist, erhält man mit der ersten Ableitung $f'(x_0)$ einen (guten) Näherungswert für die Änderung Δf an der Stelle x_0 , sofern $dx = 1$ gewählt wird.“

Dies führt dann zu folgendem Satz (S.240):

Satz 5.13:

Der Wert $f'(x_0)$ der ersten Ableitung einer Funktion f gibt (näherungsweise) an, um wie viele Einheiten sich der Funktionswert $f(x_0)$ ändert, wenn die unabhängige Variable x_0 um eine Einheit geändert wird:

$$f'(x_0) = df(x_0)|_{dx=1} \approx \Delta f|_{x=x_0; \Delta x=1} \quad (80)$$

Dies wird dann bei der Funktion $f(x) = 0,1x^2$ für $x_0 = 3$ und $\Delta x = \pm 1$ in einer Skizze veranschaulicht.

Auf Basis von Satz 5.13 führt Tietze dann den Begriff der Grenzfunktion auf zweierlei Weise ein (S.241):

1. eine *mathematisch-ökonomische* Grenzfunktion als erste Ableitung
2. eine *praktisch-ökonomische* Grenzfunktion als Kostendifferenz $f(x+1) - f(x)$

Dann stellt er wie folgt eine Verbindung zwischen beiden Grenzfunktionen her (S.241):

„Da $f'(x) \approx \Delta f(x)$ für $\Delta x = dx = 1$ ist, stimmen beide Auffassungen nahezu überein. Da es sich mit dem Ableitungsbegriff einfacher und universeller arbeiten lässt, soll im Folgenden unter Grenzfunktion (z.B. Grenzkosten, Grenzgewinn, Grenzerlös) stets die 1.Ableitung der zugrundeliegenden ökonomischen Funktion (z.B. Kostenfunktion, Gewinnfunktion, Erlösfunktion) verstanden werden, während für die Interpretation der Grenzfunktion die praktisch-ökonomische Auffassung benutzt werden kann.“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Tietze führt also zwei verschiedene Begriffe für Grenzfunktionen ein: die Ableitung $f'(x)$ als *mathematisch-ökonomische Grenzfunktion* und die Differenz $f(x+1) - f(x)$ als *praktisch-ökonomische Grenzfunktion*. Die Verbindung zwischen beiden Funktionen ist Satz 5.13 und damit letztendlich die Approximationsformel $\Delta f \approx df = f'(x_0) dx = f'(x_0)\Delta x$. Diese wurde auf graphischer Ebene plausibel gemacht. Eine Herleitung der Näherungsformel auf symbolischer Ebene aus der Definition der Ableitung (siehe Kapitel 3.3.2) erfolgt nicht. Ebenso wenig wird begründet, weshalb man bei ökonomischen Funktion von einem kleinen Fehler zwischen $f'(x)$ und Δf bei $\Delta x = 1$ ausgehen kann.

Beschreibungsebene: Auf den folgenden Seiten (S.242-249) werden jetzt im Detail zu verschiedenen ökonomischen Funktionen (Kostenfunktionen, Erlösfunktionen, etc.) die zugehörigen Grenzfunktionen (Grenzkosten, Grenzerlös, etc.) eingeführt. Zu jeder dieser Funktionstypen wird mindestens ein Beispiel gebracht, in dem die Ableitung bestimmt und dann auf der Basis der praktisch-ökonomischen Auffassung der Grenzfunktion interpretiert wird. Auf eine Detaildarstellung wird aus Platzgründen hier verzichtet.

Im letzten Teil des Kapitels vor den Aufgaben wird schließlich noch die Grenzfunktion $f'(x)$ mit der Durchschnittsfunktion $\frac{f(x)}{x}$ verglichen (S.249-250). An einer Graphik wird hierbei illustriert, dass

1. die Grenzfunktion $f'(x)$ die Steigung der Tangente an die Funktion f durch $(x, f(x))$ ist, und
2. die Durchschnittsfunktion $\frac{f(x)}{x}$ der Steigung des Fahrstrahls (Strahl vom Ursprung durch $(x, f(x))$) entspricht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Nähere Erklärungen zum sogenannten Fahrstrahl befinden sich in Kapitel 5.2.5.

Beschreibungsebene: Das Unterkapitel zur ökonomischen Interpretation der Ableitung schließt mit 29 Aufgaben (S.249-252). Diese sind überwiegend Berechnungsaufgaben zur Ermittlung von Werten von Grenz- und Durchschnittsfunktionen. Teilweise müssen dabei zunächst Zuwächse aus der Aufgabenstellung (zum Beispiel Kostenzuwächse) durch die Ableitung approximiert werden.

Zusammenfassung unter Beachtung der Leitfragen: *Zu den behandelten Inhalten:* Im ersten der beiden Unterkapitel wurde der Aspekt der lokalen Linearisierung behandelt (Greefrath u. a., 2016, S.106). Es wurde erklärt, dass die Funktion dabei durch die Tangentialfunktion, die die beste lokale lineare Approximation in einer Umgebung von x_0 sei, ersetzt wird. Als Begründung, dass diese Approximation die bestmögliche ist, wurde angegeben, dass sie mit der Ausgangsfunktion an der Stelle x_0 in ihrem Wert und ihrer Steigung übereinstimmt.

In gleichem Atemzug wurden Differentiale eingeführt. Diese fasste Tietze als endliche Größen bzw. als Variablen auf. Genauer gesagt definierte er dx als Zuwachs Δx des Arguments und df als resultierende Änderung der Tangentialfunktion. Dies ist dieselbe Auffassung wie bei Sydsæter u. Hammond (2015, S.269) (siehe Kapitel 5.3.7). Sie unterscheidet sich aber von Dietz (2012, S.267), wo Differentiale als fiktive, unendlich kleine Größen verstanden werden (siehe Kapitel 5.2.2).

Im zweiten Teil des Kapitels ging es dann um die ökonomische Interpretation der Ableitung. Hierbei definierte Tietze zunächst zwei verschiedene Grenzfunktionen:

1. die *mathematisch-ökonomische* Grenzfunktion als $f'(x)$
2. die *praktisch-ökonomische* Grenzfunktion als $f(x+1) - f(x)$

Mittels der zuvor eingeführten Differentiale stellte er die Verbindung zwischen beiden Objekten über die Approximationsformel $\Delta f \approx df = f'(x) dx = f'(x)\Delta x$ her. Diese wurde auf graphischer Ebene plausibel gemacht. Eine symbolische Herleitung fehlte hingegen. Daher lässt sich im Lehrbuch von Tietze aus dem theoretischen Modell zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) als Verbindung zwischen dem Ableitungskonzept und der ökonomischen Interpretation nur der Pfeil zwischen der graphischen Repräsentation der Ableitung und der Approximationsformel $\Delta f \approx f'(x)\Delta x$ wiederfinden.

Zum Exaktheitsgrad und den Begründungsformen: Der Begriff des Differentials wurde exakt definiert. Allerdings gab es dann Ungenauigkeiten bei den gemachten Aussagen über die Güte der Approximation von Δf durch das Differential df . Hier wurde behauptet, dass die *Güte der Näherung* umso besser wird, je kleiner $dx = \Delta x$ ist. Auch bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung gab es hier eine kleine Ungenauigkeit. Zwar wurde auf den numerischen Unterschied zwischen der *mathematisch-ökonomischen* Grenzfunktion $f'(x)$ und der *praktisch-ökonomischen* Grenzfunktion $f(x+1) - f(x)$ hingewiesen, nicht jedoch auf die Unterschiede in der Einheit.

Bezüglich der Begründungsformen lassen sich in diesem Kapitel vor allen Dingen ikonische und verbale Begründungen finden. Mit Hilfe einer Skizze wurde die Näherung von Δf durch den Wert Zuwachs df entlang der Tangente plausibel gemacht. Zusätzlich wurde verbal begründet, weshalb die Tangente als beste lokale lineare Approximation angesehen werden kann, nämlich weil sie in der betrachteten Stelle x_0 mit der Funktion

im Wert und in der Steigung übereinstimmt. Weiterhin gab es aber auch Aussagen, die gar nicht begründet wurden wie die Annahme, dass df bei ökonomischen Funktionen eine gute Näherung für Δf darstellt.

Zu den Aufgaben: Die Aufgaben waren prozedurale Rechenaufgaben. In dem Teilkapitel zur lokalen Linearisierung und zu Differentialen sollten zu gegebenen Funktionen und gegebenen Zuwächsen dx die Werte df bestimmt und mit den wahren Änderungen Δf verglichen werden. Bei den Aufgaben zur ökonomischen Interpretation der Ableitung sollten Werte von Grenzfunktionen, Durchschnittsfunktionen etc. berechnet werden. Hierbei mussten teilweise in der Aufgabenstellung gegebene Zuwächse der Funktionen, z.B. Kostenzuwächse, zunächst durch die Ableitung approximiert werden. Es musste also die ökonomische Interpretation der Ableitung „rückwärts“ verwendet werden.

5.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Tietze

In diesem Kapitel erfolgt eine Zusammenfassung der Analyseergebnisse unter den im Voraus gestellten Leitfragen.

L1: *Welche Inhalte zum Ableitungskonzept werden vermittelt?*

In dem Lehrbuch „Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik“ von Tietze (2010) werden viele Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem Modell zur Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 abgedeckt (siehe Abbildung 4). Eine Übersicht, inwieweit die Aspekte des Modells zum Verständnis der Ableitung als pures mathematisches Konzept in dem Buch explizit behandelt werden, ist in Tabelle 55 dargestellt.

Symbolisch	Graphisch	Verbal
Differenzenquotient ja	Sekantensteigung ja	Mittlere Änderungsrate nein
Differentialquotient ja	Tangentensteigung ja, zunächst als Funktionssteigung	Lokale Änderungsrate nein
Ableitungsfunktion ja	Graph der Ableitungsfunktion ja	Änderungsrate einer Funktion nein

Tabelle 55: In Tietze (2010) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als mathematisches Konzept, vorerst ohne die ökonomische Interpretation der Ableitung

Die graphische und die symbolische Repräsentation der Ableitung werden dabei sorgfältig miteinander vernetzt, was auch wesentlich für das Verständnis der Ableitung ist (siehe auch (Zandieh, 2000, S.104)). Die verbale Repräsentation der Ableitung als lokale Änderungsrate fehlt jedoch. Zwar wird diese im Motivationskapitel angesprochen, indem die Ableitung als *Änderungstendenz* motiviert wird. Jedoch findet keine Konkretisierung dieser Änderungstendenz als Änderungsrate statt. Stattdessen erfolgt dann unmittelbar der Übergang zur graphischen Repräsentation, indem als Maß für

die Änderungstendenz einer Funktion die Steilheit einer Kurve und damit die Steigung genannt wird (S.199).

Die ökonomische Interpretation der Ableitung aus dem Modell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) wird in dem Buch von Tietze ebenfalls behandelt. Tietze führt hierbei zwei Konzepte der Grenzfunktion ein:

1. die sogenannte *mathematisch-ökonomische* Grenzfunktion als Ableitung $f'(x)$
2. die *praktisch-ökonomische* Grenzfunktion $f(x + 1) - f(x)$

Beide Konzepte verbindet er über lokale lineare Approximation und damit über die Approximationsformel $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$, so wie im theoretischen Modell aus Abbildung 4 (siehe auch Schlussblatt) dargestellt. Allerdings verwendet er hierbei nicht die Approximationsformel direkt, sondern das Konzept des Differentials. Differentiale sind bei Tietze Variablen: $dx = \Delta x$ ist der Zuwachs im Argument, und df ist der daraus resultierende Zuwachs entlang der Tangente. Dann erklärt Tietze anhand einer Skizze, dass gilt:

$$\Delta f \approx df = f'(x) dx = f'(x) \Delta x \quad (81)$$

Da sich für $\Delta x = 1$ dann $\Delta f \approx f'(x)$ ergibt, stimmen laut Tietze die *mathematisch-ökonomische* und die *praktisch-ökonomische* Grenzfunktion numerisch annähernd überein, und letztere kann als Interpretation der Ableitung in der Ökonomie verwendet werden. Eine Begründung, weshalb die Näherung für $\Delta x = dx = 1$ in der Ökonomie als gut angenommen werden kann, fehlt jedoch. Ebenso wenig wird auf die unterschiedlichen Einheiten von Ableitung und Differenz $f(x + 1) - f(x)$ eingegangen.

Auch eine symbolische Rechtfertigung der Approximation $\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$ über die Definition der Ableitung fehlt. Daher wird in Bezug auf das Modell zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) im Lehrbuch von Tietze nur der Verbindungspfeil zwischen graphischer Repräsentation der Ableitung und der Approximationsformel vermittelt.

Zusätzlich zu den Aspekten der Ableitung aus dem Rahmenmodell und dem bereits eben genannten Konzept des Differentials wird in dem Buch von Tietze natürlich die Technik des Ableitens behandelt. Dies umfasst Differenzierbarkeit und Ableitung elementarer Funktionen sowie die Ableitungsregeln. Weitere Inhalte des Buches im Zusammenhang mit der Ableitung, die hier aus Platzgründen nicht ausführlich dargestellt wurden, weil bei ihnen nicht der Fokus auf der Ableitung als Konzept liegt, sind die Folgenden (siehe auch Tabelle 54):

1. Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit
2. Regeln von De L'Hôpital
3. Newton-Verfahren
4. Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie sowie zwischen Ableitung und Konvexität

5. Verwendung der Ableitung in der Optimierung
6. Verwendung der Ableitung zur Beschreibung und Analyse ökonomischer Funktionen
7. Das Konzept der Elastizität
8. Anwendung der Ableitung zur Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten

Insgesamt wird also in dem Lehrbuch von Tietze (2010) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Bis auf die verbale Repräsentation der Ableitung als pures mathematisches Konzept werden alle Aspekte des theoretischen Modells aus Kapitel 3 zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler explizit eingeführt. Weiterhin werden noch Verbindungen zu anderen Konzepten wie Monotonie, Konvexität oder Stetigkeit, sowie Anwendungen bei der Optimierung und Anwendungen in der Ökonomie vermittelt.

L2: *Welcher Exaktheitsgrad wird verwendet?*

Die Darstellung der mathematischen Inhalte im Lehrbuch von Tietze ist zu großen Teilen exakt, jedoch nicht immer. Zu mathematischen Begriffen wird stets eine formale *concept definition* angegeben. Hierbei führt Tietze jedoch manchmal eigene Definitionen ein, die sich von sonst in der Mathematik üblichen Definitionen unterscheiden. Beispiele, auf die in der Detailanalyse aus Platzgründen nicht eingegangen werden konnte, sind:

1. Tietzes Definition der Monotonie: Er versteht unter monotonen Funktionen stets streng monotone Funktionen (S.253). Damit sind konstante Funktionen bei Tietze weder monoton wachsend noch fallend.
2. Tietzes Definition des relativen Extremums: Tietze verlangt für ein relatives Extremum, dass die betreffende Funktion in einer beidseitigen Umgebung des Kandidaten x_0 strikt kleiner oder strikt größer sein muss. Relative Extrema sind daher bei Tietzes stets strikt und können per Definition nur in inneren Punkten vorliegen (S.257).

Dies führt dann teilweise zu Formulierungen mathematischer Aussagen zur Ableitung, die man aus der Perspektive der sonst üblichen Definitionen als falsch ansehen würde (Bsp.: „Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert besitzt, so gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ “).

Weiterhin sind Tietzes eigene Definitionen auch nicht immer mathematisch exakt formuliert. Ein Beispiel ist Tietzes Grenzwertdefinition (S.168, siehe Kapitel 5.4.2):

„Wenn sich für $x \rightarrow x_0$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ einem konstanten Wert g immer mehr nähern, egal auf welche Weise $x \rightarrow x_0$ strebt, so sagt man, g ist Grenzwert von $f(x)$ bei Annäherung von x gegen x_0 .“

Dieses „immer mehr nähern“ ist zu unscharf für den Grenzwert, denn diese Eigenschaft können auch obere oder untere Schranken erfüllen.

Auch bei der Formulierung von Sätzen sind manchmal Ungenauigkeiten zu finden. Ein Beispiel ist die Aussage, dass die Güte der Näherung $\Delta f \approx df$ umso besser wird, je kleiner $\Delta x = dx$ ist.

L3: Wie werden die präsentierten mathematischen Aussagen begründet?

Viele der im Buch präsentierten mathematischen Aussagen werden begründet. Hierbei gibt es verschiedene Begründungsformen (siehe Tabelle 56).

Begründungsform	Beispiel
Formaler Beweis	Beweis der Faktorregel
Graphische Argumentation	Graphische Begründung der Approximation $\Delta f \approx df$
Verbale Begründung	Begründung, weshalb die Tangentialfunktion lokal um x_0 die beste lineare Approximation ist

Tabelle 56: Begründungsformen in Tietze (2010) in Zusammenhang mit der Ableitung

In der Regel werden die präsentierten Aussagen jedoch formal bewiesen. Allerdings enthalten die Beweise manchmal kleine Ungenauigkeiten bzw. Lücken. Ein typisches Beispiel sind Ungenauigkeiten beim Grenzübergang, wie bei folgendem Beweis, dass die Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0 ist (S.207):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \quad (82)$$

Es findet kein sichtbarer Grenzübergang statt. Ein anderes Beispiel ist der Beweis der Ableitungsformel der e -Funktion, bei deren Herleitung stillschweigend die Stetigkeit der $\ln$ -Funktion aus der Anschauung entnommen wird (S.209):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{k \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{1}{\ln(1+k)^{\frac{1}{k}}} = e^x \frac{1}{\ln \left[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \right]} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x \quad (83)$$

L4: Welche Aufgaben sollen die Studierenden lösen?

Die Aufgaben sind fast alle Berechnungsaufgaben. Eine ausführliche Aufgabenanalyse, die hier aus Platzgründen nicht dargestellt werden konnte, zeigt, dass die Aufgaben im Lehrbuch von Tietze sehr auf das Abarbeiten der gelehrten Prozeduren ausgerichtet sind. Als prototypisches Beispiel sei das Kapitel zur Verwendung der Ableitung in der Optimierung genannt, in dem es 21 Aufgaben nur zur Bestimmung von lokalen Extrema bzw. von Wendepunkten mit Hilfe der ersten drei Ableitungen gibt (S.266). Ähnlich ist das den anderen Kapiteln zur Ableitung.

Zusammenfassendes Fazit: Insgesamt wird im Lehrbuch von Tietze (2010) ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. Dabei wird zunächst die Ableitung als rein mathematisches Konzept behandelt (S.199-236). Erst viel später erfolgt der Bezug zur Ökonomie (ab S.237). Bei der Behandlung der Ableitung als pures mathematisches Konzept werden die verschiedenen Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion* des theoretischen Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) in der graphischen und der symbolischen Repräsentation abgedeckt. Eine verbale Deutung der Ableitung als Änderungsrate fehlt jedoch völlig.

Ab S.237 wird dann die ökonomische Interpretation der Ableitung behandelt. Die Verbindung zum mathematischen Konzept wird hierbei über lokale Linearisierung und die Approximation $\Delta f \approx df = f'(x) dx = f'(x)\Delta x$ hergestellt.

Die Darstellung der Inhalte ist überwiegend exakt, und zu den meisten verwendeten Begriffen wird eine formale *concept definition* präsentiert. Allerdings gibt es für einige Konzepte Definitionen im Lehrbuch von Tietze, die nicht mit den sonst in der Mathematik üblichen Definitionen übereinstimmen (Bsp.: Monotonie), und teilweise auch ungenau formuliert sind (Bsp.: Grenzwert). Auch Sätze sind manchmal ungenau formuliert und enthalten Aussagen, die aus strenger mathematischer Sicht so nicht haltbar sind.

Die meisten Aussagen werden mathematisch korrekt begründet: in der Regel über einen formalen Beweis, manchmal aber auch graphisch oder verbal. Neue Aussagen können damit gut in das bis zu diesem Zeitpunkt vorhandene *concept image* integriert werden. In manchen Beweisen gibt es aber kleine Lücken, bei denen Aussagen aus der Anschauung übernommen wurden.

Insgesamt wird also ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung mit vielen Vernetzungen vermittelt. Aus strenger mathematischer Sicht ist dieses aufgrund der ungenauen Formulierungen mancher Sätze und Definitionen, die teilweise zu falschen Vorstellungen führen, nicht immer adäquat.

5.5 Analyse des Lehrbuchs von Wöhe

5.5.1 Leitfragen und Gliederung der Analyse

Um nun das in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzte Verständnis der Ableitung zu ermitteln (zweiter Teil von Forschungsfrage F2, siehe Tabelle 1) wurden Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaften analysiert. Die Basis der Analyse bildeten folgende Standardwerke:

1. Das Lehrbuch „Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe u. Döring (2013), ein Standardwerk der Betriebswirtschaftslehre (siehe (Ossimitz, 1991, S.52))
2. Das Lehrbuch „Grundzüge der Mikroökonomik“ von Varian (2011), ein Standardwerk der Volkswirtschaftslehre (siehe (Beckenbach u. a., 2016, S.214-217))

Weitere Bücher wurden zur Validierung herangezogen (Domschke u. Scholl, 2008; Fandel, 2010; Reiß, 2007; Schierenbeck u. Wöhle, 2008; Steven, 1998; Stiglitz u. Walsh, 2010).

Die zugehörigen Leitfragen der Analyse waren (siehe auch Kapitel 5.1):

- L1. *Bei welchen Inhalten taucht die Ableitung auf?*
- L2. *Welches mathematische Hintergrundwissen zur Ableitung ist erforderlich um die in dem Lehrbuch dargestellten Inhalte verstehen zu können bzw. die zugehörigen Aufgaben lösen zu können?*

Im Folgenden erfolgt eine ausführliche Darstellung der Ergebnisse der Analyse des Lehrbuchs von Wöhe. Dieses kann als prototypisches Fallbeispiel in Bezug auf die

behandelten Inhalte und das benötigte Hintergrundwissen zur Ableitung angesehen werden.

Zur Beantwortung der ersten Leitfrage wurde das Buch linear nach Inhalten durchgegangen, bei denen Steigung und Ableitung von Funktionen auftauchen. Diese sind:

1. Kosten- und Produktionstheorie
2. Produktionsplanung, speziell Lagerplanung
3. Bewertung der Auswirkungen von Preisänderungen auf Nachfrage und Erlös
4. Preistheorie
5. Lebenszyklus eines Produktes
6. Werbebudget

In den ersten 4 dieser 6 genannten Gebiete spielen Steigung und Ableitung eine zentrale Rolle, weshalb diese im Detail beschrieben werden. Beim Lebenszyklus eines Produktes und der Thematik des Werbebudgets tritt die Ableitung nur am Rand auf und es kommen dabei keine neuen Aspekte des Ableitungsbegriffs ins Spiel. Deshalb weshalb diese Themen hier nicht im Detail dargestellt.

Wie auch bei den Analysen der Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, werden bei der Darstellung der Analyse zwei Ebenen verwendet: eine *Beschreibungsebene* und eine *Erklärungs- und Reflexionsebene* (siehe Kapitel 5.1). In der Beschreibungsebene wird erklärt, wie das Lehrbuch von Wöhe u. Döring (2013) die Inhalte darstellt. Auf der Erklärungsebene werden diese Inhalte dann aus mathematischer und stoffdidaktischer Ebene beleuchtet. Neben Erklärungen der Inhalte aus mathematischer Perspektive beinhaltet die Erklärungs- und Reflexionsebene auch Reflexionen über die Darstellung der Inhalte im Buch anhand der Leitfragen, insbesondere über das für deren Verständnis nötige mathematische Hintergrundwissen.

Zusätzlich zur Analyse des Lehrbuchs werden auch die Aufgaben im begleitenden Übungsbuch (Wöhe u. a., 2013) betrachtet. Dies ist wichtig, damit auch die Praxis und die tatsächlich auszuführenden Aufgaben angemessen berücksichtigt werden (in der Philosophie der ATD (Bosch u. Gascón, 2014)) .

5.5.2 Die Ableitung in der Kosten- und Produktionstheorie

Der erste Themenkomplex im Wöhe u. Döring (2013), in dem die Ableitung eine zentrale Rolle spielt, ist die Produktions- und Kostentheorie. Dort taucht sie in folgenden drei Kontexten auf, die in Kürze im Detail erläutert werden:

1. in der Kostenrechnung als Grenzkosten
2. bei der Beschreibung des Verlaufs von Kosten- und Produktionsfunktionen
3. im Zusammenhang mit sogenannten Produktions- und Kostenisoquanten zur Bestimmung optimaler Produktionen

Die Ableitung als Grenzkosten in der Kostenrechnung

Zunächst taucht die Ableitung im Wöhe im Einführungskapitel über Kosten als Kostengröße in Form der sogenannten Grenzkosten auf (diese spielen auch in anderen ökonomischen Lehrbüchern eine wichtige Rolle, siehe zum Beispiel (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S. 269-271, Stiglitz u. Walsh, 2010, S. 160-172) oder (Varian, 2011, S. 423-431)). Die Grenzkosten stehen hierbei prototypisch für Grenzgrößen beliebiger ökonomischer Funktionen wie Erlösfunktionen, Gewinnfunktionen oder Produktionsfunktionen. Die hier anhand der Kosten gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auch auf andere ökonomische Größen bzw. Funktionen übertragen.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe führt zunächst allgemein den Begriff der Kosten ein (Wöhe u. Döring, 2013, S.294):

Definition 5.14 (Kosten):

Kosten sind der mit Preisen bewertete Verzehr von Produktionsfaktoren, der durch die betriebliche Leistungserstellung (und -verwertung) verursacht wird.

Als Beispiel nennt er eine Kostenfunktion der Form

$$K = q_1 r_1 + q_2 r_2 + \dots + q_n r_n. \quad (84)$$

Die Variablen r_i sind die verschiedenen Rohstoffe, die mit Preisen q_i gewichtet werden (Wöhe u. Döring, 2013, S.294). Die Rohstoffmengen ihrerseits hängen laut Wöhe wieder von der gewünschten Ausbringungsmenge des Produktes ab, wodurch man die allgemeine Darstellung

$$K = f(m) \quad (85)$$

erhält (m ist die Ausbringungsmenge bzw. der Output).

Wöhe führt dann folgende grundlegenden Kostenbegriffe ein (Wöhe u. Döring, 2013, S.299-303):

1. die Fixkosten $K_f = K(0)$
2. das Gegenstück dazu: die variablen Kosten $K_v(m) = K(m) - K_f$
3. die Grenzkosten $K'(m)$
4. die Durchschnittskosten $k(m) = \frac{K(m)}{m}$

Relevant für die Ableitung sind die Grenzkosten, weshalb deren Einführung ausführlich dargestellt wird. Sie werden im Lehrbuch von Wöhe wie folgt definiert (Wöhe u. Döring, 2013, S.300):

Definition 5.15 (Grenzkosten):

Als Grenzkosten K' bezeichnet man die Kosten der jeweils letzten Produktionseinheit.

Das Buch fährt dann wie folgt fort (Wöhe u. Döring, 2013, S.300):

„So kann man vereinfachend die Grenzkosten der 33. Produktionseinheit in der Weise ermitteln, dass man von den Gesamtkosten bei der Produktion von 33 Produkteinheiten die Gesamtkosten bei der Produktion von 32 Produkteinheiten subtrahiert. Die Grenzkostenkurve gibt die Steigung der Gesamtkostenfunktion an. Sie lässt sich ermitteln, indem die erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion gebildet wird.“

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Grenzkosten werden also im Lehrbuch von Wöhe gleichzeitig als erste Ableitung und als Kostendifferenz $K(x) - K(x - 1)$ eingeführt. Für ein Verständnis der obigen Ausführungen ist das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation als Kostendifferenz notwendig (siehe Kapitel 3.3.1).

Beschreibungsebene Lehrbuch: Schließlich werden die Kostenbegriffe noch am Beispiel einer linearen Kostenfunktion bestimmt: einmal für $K(m) = 10m + 100000$ und einmal allgemein für $K(m) = k_v \cdot m + K_f$. Außerdem werden die Funktionen für das allgemeine Beispiel $K(m) = k_v \cdot m + K_f$ graphisch dargestellt (Wöhe u. Döring, 2013, S.301-302).

Beschreibungsebene Übungsbuch: Zum Thema „Grenzkosten“ gibt es im zum Lehrbuch gehörenden Übungsbuch drei Aufgaben um das Gelernte zu üben (Wöhe u. a., 2013, S.118-120):

1. In der ersten Aufgabe sollen zur Kostenfunktion $K = 0,001m^3 - m^2 + 100m + 720$ die Gleichungen der fixen Durchschnittskosten, der variablen Durchschnittskosten und der Grenzkosten angegeben werden. Anschließend sollen die Werte dieser Kosten für $m = 10$, $m = 20$, ..., $m = 100$ bestimmt und in einer Wertetabelle notiert werden. Die Grenzkosten werden hierbei in der Musterlösung mit Hilfe der Ableitung bestimmt.
2. In der zweiten Aufgabe zu den Grenzkosten als Kostengröße sollen die Studierenden *analytisch* die Minima der Funktionen K' , k_v und k bestimmen.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Für die Lösung dieser Aufgaben ist folgendes Hintergrundwissen zur Ableitung erforderlich:

1. Kenntnis, dass die Grenzgrößen der Ableitung entsprechen
2. Kenntnis von Verfahren zur Nutzung der Ableitung bei der Lösung von Optimierungsproblemen (notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für Extremstellen an inneren Punkten und hinreichende Bedingungen für Extrempunkte)

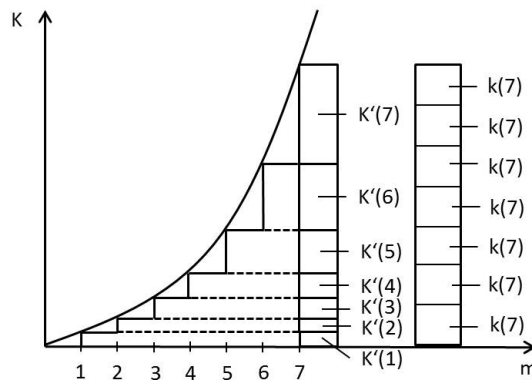


Abbildung 37: Veranschaulichung der Grenzkosten analog zu Wöhe u. a. (2013, S.118)

Beschreibungsebene Übungsbuch: In der dritten Aufgabe geht es um Aussagen zu den Grenzkosten einer strikt konvexen Kostenfunktion. Im ersten Aufgabenteil sollen zunächst die Grenzkosten $K'(1), K'(2), \dots, K'(7)$ graphisch bestimmt werden und für $m = 5$ und $m = 7$ mit den Durchschnittskosten verglichen werden (Wöhe u. a., 2013, S.118).

Die Musterlösung für $m = 7$ ist in Abbildung 37 dargestellt (es gibt eine analoge Graphik für $m = 5$). Zu dieser Graphik gibt es dann folgende Algebraisierung:

$$K(7) = \sum_{i=1}^7 K'(i) \quad \text{und} \quad K(7) = k(7) \cdot 7 \quad (86)$$

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Grenzkosten werden hier in der Musterlösung als Differenz $K(x) - K(x-1)$ bestimmt und durch Rechtecke in der Graphik 37 visualisiert. In der zugehörigen Algebraisierung $K(7) = \sum_{i=1}^7 K'(i)$ werden die Grenzkosten dann als Ableitung notiert. Um hier nicht verwirrt zu werden, müssen die Studierenden genau erkennen, dass hier für die Grenzkosten zwar die Ableitung hingeschrieben wurde, für die Gleichung (86) jedoch die ökonomische Interpretation der Ableitung verwendet wurde.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Im zweiten Aufgabenteil soll nun zu folgenden Aussagen über die Grenzkostenfunktion aus Abbildung 37 Stellung genommen werden (Wöhe u. a., 2013, S.118-119):

1. *Mit zunehmender Ausbringungsmenge steigen die Grenzkosten.*
2. *Die Grenzkosten steigen an, die Durchschnittskosten bleiben konstant.*
3. *Die Durchschnittskosten steigen an, jedoch weniger schnell als die Grenzkosten.*
4. *Für die Ausbringungsmenge $m = 4$ gilt: $K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4 = 4k_4 = K$.*
5. *Für die Ausbringungsmenge $m = 1$ gilt: $K'_1 = k_1 = K$.*

In der Musterlösung werden alle Aussagen bis auf 2. als richtig gewertet (Wöhe u. a., 2013, S.119). Erklärungen gibt es nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Antworten lassen sich aus der im Übungsbuch gegebenen Graphik (Abbildung 37) ablesen.

Zu 1.: Die Grenzkosten, aufgefasst als $K(x) - K(x - 1)$, werden in Abbildung 37 durch Rechtecke visualisiert, deren Höhe, wie in der Aussage angegeben, mit steigender Ausbringungsmenge zunimmt.

Zu 2.: Die Durchschnittskosten an einer Stelle m entstehen durch die Aufteilung der Gesamtkosten in Rechtecke mit „gleicher Höhe“ (siehe Abbildung 37). Jede Rechteckhöhe entspricht den Durchschnittskosten $k(m)$. Jedoch hängt diese Höhe dieser Rechtecke von der betrachteten Stelle ab, sodass die Durchschnittskosten nicht konstant sind.

Zu 3.: Dass die Durchschnittskosten ebenfalls ansteigen, lässt sich anhand eines Vergleichs der Höhe der Rechtecke der Durchschnittskosten aus Abbildung 37 für $m = 7$ mit der Höhe der Rechtecke in der analogen Graphik für $m = 5$ ablesen. Für $m = 7$ sind die Rechteckhöhen größer als für $m = 5$ (siehe Abbildung 37). Für andere Stellen kann man sich die Rechteckaufteilung passend im Kopf überlegen und vergleichen. Ebenso kann man durch eine Betrachtung der Rechtecke sehen, dass die Durchschnittskosten langsamer ansteigen als die Grenzkosten. Übrigens ist die Aussage 3 nur richtig, wenn K keine Fixkosten hat. Ein Gegenbeispiel für eine allgemeine strikt konvexe Kostenfunktion wäre $K(x) = x^2 + 1$. Hier steigen die Durchschnittskosten $k(x) = x + \frac{1}{x}$ nämlich auf $(0; 1)$ gar nicht an, weil $k'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$ auf $(0; 1)$ ist.

Zu 4: Bei den Lösung dieser Aufgabe wurden die Grenzkosten K' wieder mit der Kostendifferenz $K(x) - K(x - 1)$ identifiziert. Selbst dann ist die Aussage $\sum_{i=1}^4 (K(i) - K(i - 1)) = K(4)$ aber nur richtig, wenn K keine Fixkosten hat, denn im Allgemeinen gilt: $\sum_{i=1}^4 (K(i) - K(i - 1)) = K(4) - K(0)$.

Zu 5.: Es gilt gleiches wie zu 4.

Für eine Lösung dieser Aufgabe zu den Grenzkosten einer strikt konvexen Kostenfunktion bzw. ein Verständnis der im Buch angegebenen Musterlösungen ist wieder ein Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung notwendig.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Insgesamt sieht man, dass zum Verständnis der Ausführungen zu Kosten im Lehrbuch von Wöhe die ökonomische Interpretation der Ableitung verstanden werden musste. Insbesondere muss der Zusammenhang zwischen Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation über lineare Approximation verstanden worden sein um Aussagen im Übungsbuch wie $K(7) = \sum_{i=1}^7 K'(i)$, die streng genommen mathematisch falsch sind, „richtig zu lesen“. Die Studierenden müssen hier sehr flexibel zwischen beiden Grenzkostenkonzepten (Ableitung und Kostendifferenz) wechseln können.

Verwendung der Ableitung zur Beschreibung der Verläufe von Produktions- und Kostenfunktionen

Im nächsten Kapitel, in dem die Ableitung eine wichtige Rolle spielt, geht es um die Beschreibung und Charakterisierung des Verlaufs von Produktions- und Kostenfunktionen. Eine Kostenfunktion ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Ausbringungsmenge m und den für deren Produktion notwendigen Kosten ($K = f(m)$). Eine Produktionsfunktion ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen eingesetzten Produktionsfaktoren (Input) und den daraus hergestellten Produkten (Output) (Schießenbeck u. Wöhle, 2008, S.271). Die Beschreibung und Charakterisierung des Verlaufs dieser Funktionen sind wesentlicher Bestandteil der Kosten- und Produktionstheorie (siehe auch (Fandel, 2010) oder (Steven, 1998)). Auch hier lassen sich die am Beispiel der Produktions- und Kostenfunktionen gewonnenen Erkenntnisse auf andere ökonomische Funktionen übertragen.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe beginnt die Ausführungen zu verschiedenen Produktions- und Kostenfunktionen mit der sogenannten *ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion*. Diese ist laut Wöhe der älteste Typ einer Produktionsfunktion (Wöhe u. Döring, 2013, S.305). Der Ursprung dieser Funktion liegt im sogenannten Ertragsgesetz: einem Zusammenhang zwischen der Menge an eingesetztem Dünger und dem zugehörigen Ertrag in der Landwirtschaft (Wöhe u. Döring, 2013, S.305). Wöhe erläutert das „Wesen“ des Ertragsgesetzes aber nicht am Düngemittel, sondern am Einsatz des Produktionsfaktors Arbeit in der Landwirtschaft bei konstanten Einsatzmengen von Boden, Saatgut und Dünger. Dabei wächst der Ertrag zunächst mit zunehmenden Grenzerträgen, dann nur noch mit abnehmenden Grenzerträgen und bei weiterer Erhöhung des Einsatzes Arbeit nimmt der Ertrag sogar ab (Wöhe u. Döring, 2013, S.305).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Mathematisch ist eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion also zunächst steigend und strikt konvex, ab einem Wendepunkt steigend und strikt konkav und ab einer gewissen Stelle sogar fallend. Ein Beispiel für eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion ist in Abbildung 38 dargestellt.

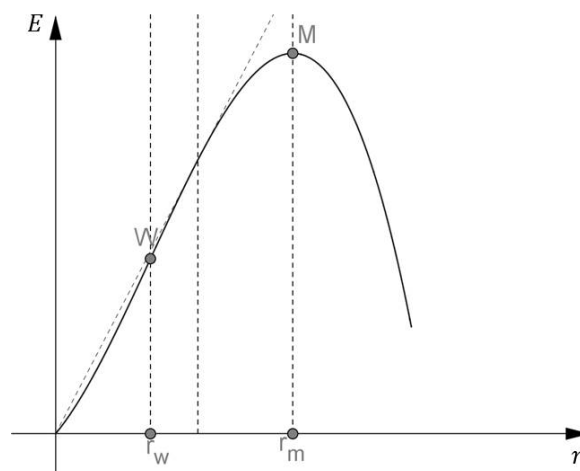


Abbildung 38: Beispiel einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

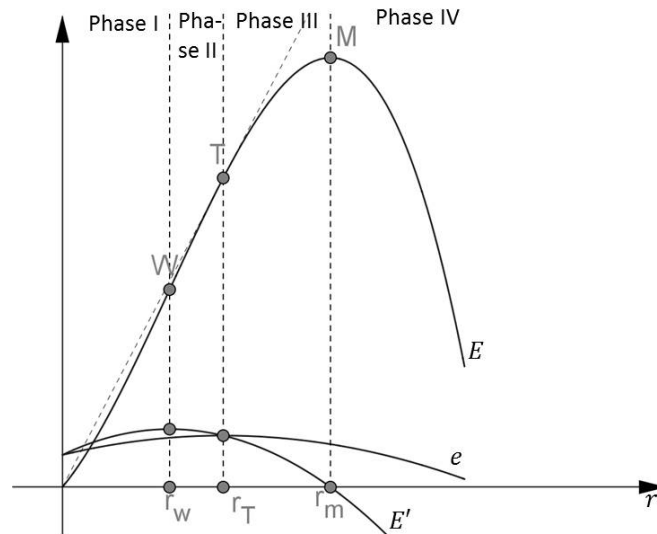


Abbildung 39: Graphik des Autors einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion mit ihren 4 Phasen in Analogie zu einer passenden Graphik aus Wöhe u. Döring (2013, S.306)

Beschreibungsebene Lehrbuch: Laut Wöhe kann man den Verlauf der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion E in 4 Phasen einteilen (siehe Abbildung 39). Diese ergeben sich aus der Beziehung zwischen der Ausgangsfunktion E , ihrer Grenzfunktion E' und der Durchschnittsfunktion e mit $e(r) = \frac{E(r)}{r}$. Die 4 Phasen sind (Wöhe u. Döring, 2013, S.306):

- I. Phase bis zum Wendepunkt W : E ist progressiv steigend.
- II. Phase zwischen Wendepunkt und dem Schnittpunkt von Tangente und Funktionsgraph (Punkt T wie „Tangentialpunkt“): E ist degressiv steigend.
- III. Phase zwischen dem Tangentialpunkt T und maximalem Ertrag M : E ist degressiv steigend.
- IV. Phase nach dem maximalen Ertrag: E ist fallend.

In Abbildung 39 sind schließlich zahlreiche Eigenschaften der Funktionen E , E' und e zu sehen, die von Wöhe auch verbalisiert werden (Wöhe u. Döring, 2013, S.306-307):

Phase I: E ist progressiv steigend, E' ist positiv und steigend, e ist steigend, $e < E'$, E' erreicht am Wendepunkt sein Maximum.

Phase II: E ist degressiv steigend, E' ist positiv und fallend, e ist steigend, $e < E'$, beim Tangentialpunkt erreicht e ein Maximum und es gilt $E'(r_T) = e(r_T)$.

Phase III: E ist degressiv steigend, E' ist positiv und fallend, e ist fallend, $e > E'$, an der Maximalstelle r_{max} von E ist $E'(r_{max}) = 0$.

Phase IV: E ist fallend, E' ist negativ und fallend, $e > E'$.

Eine Begründung der Aussagen erfolgt nicht. Zusätzlich wird angemerkt, dass $E'(r_T)$ der Tangens des Schnittwinkels von Tangente und Abszisse ist (Wöhe u. Döring, 2013, S.307)).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Um den Verlauf von E' aus dem Verlauf E qualitativ rekonstruieren zu können, ist die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente notwendig. Die Rekonstruktion des Verlaufs von e kann dann mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse erfolgen (Strahl vom Ursprung durch den Punkt $(r, E(r))$ mit der Steigung $\frac{E(r)}{r} = e(r)$, siehe auch Kapitel 5.2.5). Hier ist die Kenntnis der rechnerischen Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion notwendig.

Mit der geometrischen Deutung der Ableitung lassen sich auch einige der eben genannten Aussagen begründen. Eine Betrachtung der Steigung der Tangente liefert, dass die Grenzfunktion an der Wendestelle gerade ihr Maximum hat. Weiterhin folgt aus der geometrischen Deutung der Ableitung, dass am Tangentialpunkt des Fahrstrahls r_T mit der Steigung $e(r_T)$ (siehe Abbildung 39) gerade gilt: $E'(r_T) = e(r_T)$. Denn dort ist die Steigung der Ableitung E' gleich der Steigung e des Fahrstrahls.

Offen bleibt noch, weshalb an dem Tangentialpunkt gerade das Maximum des Durchschnittsertrages e vorliegt. Dies könnte man mit Hilfe der Ableitungsregeln und der notwendigen Bedingung für lokale Extrema begründen. Am Tangentialpunkt r_T gilt nämlich:

$$e'(r_T) = \left(\frac{E(r)}{r} \right)' \Big|_{r=r_T} = \frac{E'(r_T)r_T - E(r_T)}{r_T^2} = \frac{E'(r_T)r_T - e(r_T)r_T}{r_T^2} = 0 \quad (87)$$

Die letzte Gleichheit gilt, da am Tangentialpunkt gerade $E'(r_T) = e(r_T)$ ist. Dass an dem stationären Punkt tatsächlich ein Maximum vorliegt, kann man aus der Anschauung entnehmen bzw. ergibt sich wieder durch die Fahrstrahlanalyse.

Bis hierhin ist zum Verständnis des Verlaufs der Graphen von E , E' und e und des Zusammenhangs zwischen ihnen folgendes Hintergrundwissen zur Ableitung nötig:

1. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Rechnerische Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion (für die Fahrstrahlanalyse)
3. Ableitungsregeln
4. notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ bei lokalen Extremstellen

Weiterhin erwähnt Wöhe, dass der Tangens des Schnittwinkels der Tangente an der Stelle $r = r_T$ mit der x -Achse gerade gleich $E'(r_T) = e(r_T)$ ist. Um diese Bemerkung verstehen können, muss man zusätzlich den Zusammenhang zwischen dem Steigungswinkel und der Steigung linearer Funktionen wissen (siehe (Nagle u. a., 2013)).

Beschreibungsebene Lehrbuch: Nach Vorstellung der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion folgt die Behandlung der zugehörigen Kostenfunktion (Wöhe u. Döring, 2013, S.307-308). Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist bis zu einem Wendepunkt W strikt konkav und anschließend strikt konvex. Aus der Betrachtung der Verläufe der Kostenfunktion K , der Grenzkosten K' , der Durchschnittskosten k mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

und der variablen Durchschnittskosten k_v mit $k_v(x) = \frac{K(x)-K(0)}{x}$ ergibt sich auch ein Vierphasen-Diagramm (siehe Abbildung 40). Die Phasen im Lehrbuch von Wöhe werden ähnlich beschrieben wie bei der Produktionsfunktion. Auch werden wieder Aussagen über Verläufe der Graphen und Beziehungen zwischen den Graphen gemacht, z.B. dass beim Minimum der Durchschnittskosten diese gleich den Grenzkosten sind. Diese Aussagen werden wieder nicht begründet.

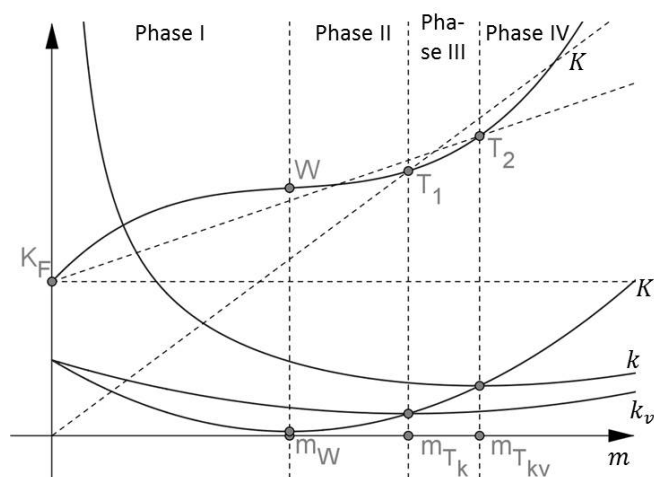


Abbildung 40: Graphik des Autors einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit ihren 4 Phasen in Analogie zu einer passenden Graphik in Wöhe u. Döring (2013, S.308))

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Konstruktion des Vierphasendiagramms und die Begründung von Zusammenhängen zwischen den Graphen von K , K' , k und k_v ist ähnlich wie bei der Produktionsfunktion. Deshalb werden sie hier nicht noch einmal im Detail dargestellt. Zusätzlich gibt es bei der Kostenfunktion aber noch die Eigenschaft: $K'(0) = k_v(0)$ (siehe Abbildung 40, diese Eigenschaft ist jedoch in der Abbildung im Wöhe nicht zu sehen, weil die Graphen von K' und k_v erst ab der Mitte der Phase 1 angedeutet sind). Allerdings ist die Aussage $K'(0) = k_v(0)$ ebenfalls wichtig, wenn man das Vierphasen-Diagramm vollständig zeichnen möchte. Ein Beweis der Aussage könnte über die Definition der Ableitung erfolgen (Existenz aller auftretenden Grenzwerte vorausgesetzt):

$$K'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(h) - K(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K_v(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k_v(h) = k_v(0) \quad (88)$$

Hier wäre dann also noch zusätzlich die Definition der Ableitung notwendig. Neben diesem formalen Beweis wäre noch eine Begründung über die ökonomische Interpretation der Ableitung möglich. Da für eine Einheit die Zusatzkosten für diese Einheit gleich den durchschnittlichen Zusatzkosten dieser Einheit sind, müssen Grenz- und variable Stückkosten bei $x = 0$ gleich sein.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Der Abschnitt über ertragsgesetzliche Produktions- und Kostenfunktionen endet damit, dass darauf hingewiesen wird, dass die ertragsgesetzlichen Produktions- und Kostenfunktionen eher eine theoretische Bedeutung haben

um sich die Zusammenhänge zwischen den beteiligten Funktionen (Ausgangsfunktion, Grenzfunktion, Durchschnittsfunktion) klar zu machen. Das Vierphasen-Diagramm dient laut Wöhe u. Döring (2013, S.309) vor allen Dingen als „Denkschule zur Herausbildung des Unterscheidungsvermögens zu Kostengrößen“ (gleiches gilt natürlich für verschiedene Ertragsgrößen bei der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion).

Beschreibungsebene Übungsbuch: Zum Ertragsgesetz gibt es auch 4 Übungsaufgaben im Übungsbuch von Wöhe (Wöhe u. a., 2013, S.125-128):

1. In der ersten Aufgabe soll eine Wertetabelle, in der Werte für eine Ertragsfunktion E für $r = 1, r = 2, \dots, r = 13$ gegeben sind, um die von E' und e ergänzt werden (Wöhe u. a., 2013, S.125-126). In der Musterlösung geschieht dies durch Verwendung der Differenz $E(r) - E(r-1)$ beim Grenzertrag und $\frac{E(r)}{r}$ beim Durchschnittsertrag.
2. In einer weiteren Aufgabe sollen dann der Grenzertrag und der Durchschnittsertrag graphisch veranschaulicht werden. In der Musterlösung werden dazu Rechtecke verwendet, wie sie in Abbildung 41 dargestellt sind.

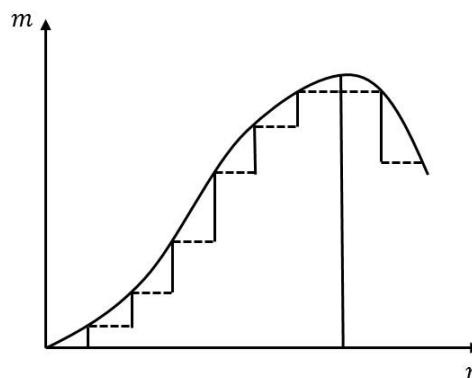


Abbildung 41: Visualisierung der Ertragsfunktion und des Grenzertrags bei einer Übungsaufgabe in Wöhe u. a. (2013, S.126) (Graphik des Autors in Analogie zur Musterlösung in Wöhe u. a. (2013, S.126))

Zusätzlich zu dieser Visualisierung der Werte von E' durch Rechteckstreifen sind Graphen von E' und e in einem neuen Koordinatensystem dargestellt (Wöhe u. a., 2013, S.126). Der Grenzertrag wurde dabei durch affine Interpolation aus den Werten $E(r) - E(r-1)$ für $r = 1, r = 2, \dots, r = 13$, die in der Aufgabe zuvor in einer Wertetabelle bestimmt wurden, ermittelt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Für eine Lösung der Aufgaben bzw. ein Verständnis der Ausführungen von Wöhe ist wieder ein Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung notwendig. Bei der graphischen Bestimmung des Grenzertrages werden sogar simultan zwei ökonomische Interpretationen der Ableitung verwendet: einmal als $E(r) - E(r-1)$ bis zum Maximum von E und einmal als $E(r+1) - E(r)$ nach dem Maximum (siehe Abbildung 41). Dies kann zu besonderer Verwirrung führen, wenn einem der Zusammenhang zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation nicht klar ist, da eigentlich nicht gilt, dass $E(r+1) - E(r) = E(r) - E(r-1)$.

Beschreibungsebene Übungsbuch: In der dritten Aufgabe soll Stellung zu 10 Aussagen zum Ertragsgesetz genommen werden (Wöhe u. a., 2013, S.127). Beispiele solcher Aussagen sind:

1. In der vierten Phase nimmt der Grenzertrag ab, wobei der Durchschnittsertrag negativ wird.

2. Am Ende der dritten Phase ist der Anstieg des Grenzertrages gleich 0.

Dazu ist eine Graphik ähnlich zu Abbildung 39 gegeben, in welcher die Graphen von E , E' , E'' und e eingezeichnet sind. Für die Lösung der Aufgabe ist also die Beschreibung des Funktionsverlaufs der einzelnen Funktionen notwendig. Da die Funktionen E , E' , E'' und e jedoch alle schon dargestellt ist, erfordert die Aufgabe nur das Übersetzen verbaler Aussagen über Funktionsverläufe in graphische Repräsentationen, aber kein Verständnis der Ableitung.

In der letzten Aufgabe zum Ertragsgesetz soll dann das Vierphasendiagramm einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion selbst rekonstruiert und der Verlauf der Funktionen K , K' , k und k_v erläutert werden (Wöhe u. a., 2013, S.128). Zur Rekonstruktion von K' ist wieder die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente notwendig. Zur Rekonstruktion von k und k_v benötigt man wieder die Fahrstrahlanalyse und damit die Bestimmung der Steigung linearer Funktionen.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Für ein Verständnis der Ausführungen von Wöhe zu ertragsgesetzlichen Produktions- und Kostenfunktionen ist folgendes Hintergrundwissen zur Ableitung notwendig:

1. die geometrische Deutung als Steigung der Tangente: beim Verständnis des Zusammenhangs zwischen dem Graphen von E und dem Graphen der Grenzfunktion E' , sowie zur Begründung der Aussage $E'(r_T) = e(r_T)$ am Tangentialpunkt des Fahrstrahls (analog bei Kostenfunktion)
2. die rechnerische Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion: beim Verständnis des Zusammenhangs zwischen den Graphen von E und e mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse sowie zur Begründung der Aussage $E'(r_T) = e(r_T)$ am Tangentialpunkt des Fahrstrahls (analog bei Kostenfunktion)
3. die Ableitungsregeln und die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ bei lokalen Extrema: zur Begründung, dass der Durchschnittsertrag e am Tangentialpunkt des Fahrstrahls gerade maximal ist bzw. die Durchschnittskosten da minimal sind
4. die Definition der Ableitung oder die ökonomische Interpretation der Ableitung: für die Begründung, dass bei $x = 0$ die variablen Stückkosten $k_v(x) = \frac{K(x) - K(0)}{x}$ gleich den Grenzkosten $K'(x)$ sind

Neben diesen rein mathematischen Aspekten tauchte auch in diesem Kapitel die ökonomische Interpretation der Ableitung auf. In dem Buch von Wöhe wurde hier wieder sehr flexibel ohne Erklärung zwischen $E'(r)$, $E(r) - E(r - 1)$ und $E(r + 1) - E(r)$ gewechselt. Um dies verstehen zu können, muss der dahinter liegende Zusammenhang über lineare Approximation verstanden worden sein. Insgesamt tauchte in diesem Kapitel das Konzept der Ableitung also in vielen Facetten auf.

Verwendung der Ableitung zur Ermittlung kostenoptimaler Produktionen

Im nächsten Unterkapitel des Lehrbuchs von Wöhe, in dem die Ableitung eine Rolle spielt, geht es um die Ermittlung kostenoptimaler Produktionen, was ebenfalls ein Problem in der Produktionstheorie ist (siehe auch (Domschke u. Scholl, 2008, S. 104-105, Reiß, 2007, S. 338-340) oder (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S. 281-283)).

Zur Herstellung eines Produktes sind im Normalfall mehrere Produktionsfaktoren $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ notwendig. Dabei können folgende Fragen auftreten:

1. Wie können die Produktionsfaktoren optimal kombiniert werden, sodass keine Verschwendung entsteht (man spricht von technischer Effizienz)?
2. Welche der technisch optimalen Kombinationen ist kostenoptimal?

Die Ableitung spielt speziell bei der Beantwortung des zweiten Problems eine Rolle. Daher werden dort die Ausführungen von Wöhe im Detail dargestellt.

r_1	r_2	m
1	5	5
2	3	5
3	2	5
3	3	5
3	5	5
4	2	5
5	1	5
6	1	5

Tabelle 57: Fiktives Beispiel aus Wöhe u. Döring (2013, S.285) mit verschiedenen Faktoreinsatzkombinationen aus den Faktoren r_1 und r_2 zur Herstellung einer Ausbringungsmenge von 5 Einheiten

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe erläutert, dass es prinzipiell möglich sein kann, ein Produkt auf mehrere Art und Weisen herzustellen (Wöhe u. Döring, 2013, S.285). Er illustriert dies an einem fiktiven Beispiel, in dem eine Ausbringungsmenge von 5 Produkten durch verschiedene Kombinationen der Produktionsfaktoren r_1 und r_2 hergestellt werden kann (siehe Tabelle 57). Ein reales Beispiel, mit solchen möglichen Kombinationen wie (3; 2) und (3; 3) für fünf Einheiten des Produktes wird nicht gegeben (man kann sich aber z.B. vorstellen, dass die Zugabe weiteren Düngers ab einer bestimmten Schwelle nicht mehr zu einem höheren Ernteertrag führt).

Faktoreinsatzkombinationen, die zu einer Verschwendung eines Rohstoffs führen, bezeichnet Wöhe als *ineffizient*. Genauer gesagt ist eine Kombination ineffizient, wenn

1. es möglich ist, eine höhere Produktionsmenge mit gleichem Faktoreinsatz zu erzeugen
2. es möglich ist, die gleiche Produktionsmenge mit geringerem Einsatz eines Faktors bei höchstens gleichem Einsatz der anderen Faktoren herzustellen (Wöhe u. Döring, 2013, S.286).

Alle anderen Kombinationen bezeichnet Wöhe als *technisch effizient*. Damit definiert er sogenannte Produktionsfunktionen Wöhe u. Döring (2013, S.286):

Definition 5.16 (Produktionsfunktion):

Die Produktionsfunktion stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen den Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 (Input) und der Ausbringungsmenge m (Output) bei technisch effizienter Produktion dar.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Produktionsfunktionen sind also Funktionen mehrerer Variablen $f(r_1, r_2, \dots, r_n)$, die den maximal möglichen Output bei einem Input $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ angeben. Eine solche Funktion besitzt Niveaulinien, die als *Produktionsisoquanten* bezeichnet werden (Wöhe u. Döring, 2013, S.288). Dabei wird in der Regel angenommen, dass Niveaulinien der Form $m = f(r_1, r_2)$ als Funktionen der Form $r_2 = \phi_m(r_1)$ darstellbar sind. Für die Beispielfunktion $f(r_1, r_2) = \frac{1}{10}r_1 \cdot r_2$ sind die Produktionsisoquanten in Abbildung 42 dargestellt.

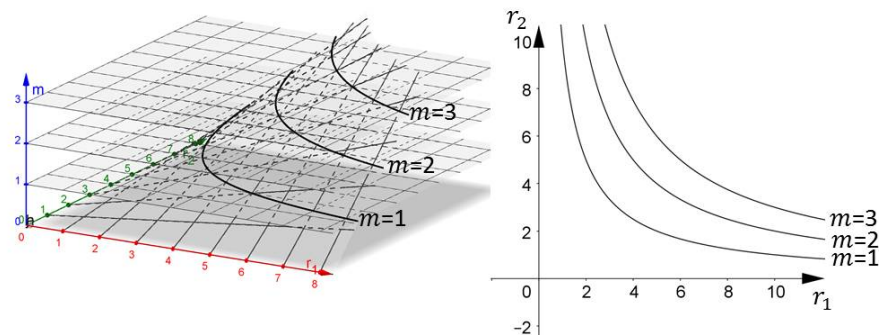


Abbildung 42: Isoquanten der Produktionsfunktion $f(r_1, r_2) = \frac{1}{10}r_1r_2$ für die Ausbringungsmengen $m = 1$, $m = 2$ und $m = 3$

Gesucht sind nun kostenoptimale Produktionen. Im Lehrbuch von Wöhe wird die Bestimmung dieser kostenoptimalen Produktionen wie folgt präzisiert:

Was ist zu einem gegebenen Kostenbudget K_0 die maximal mögliche Ausbringungsmenge $m = f(r_1, r_2)$, wenn die Kosten durch $K_0 = q_1r_1 + q_2r_2$ gegeben sind (q_1, q_2 sind die Preise der Rohstoffe r_1, r_2)?

Diese Lösungen bezeichnet Wöhe als *Minimalkostenkombinationen*.

Wöhe schlägt eine graphische Lösung des Minimalkostenproblems vor (Wöhe u. Döring, 2013, S.297). Bei festem Kostenbudgets K_0 und den Preisen q_1 und q_2 ist die Kostenisoquante $K_0 = q_1r_1 + q_2r_2$ eine lineare Funktion mit der Gleichung $r_2 = -\frac{q_1}{q_2}r_1 + \frac{K_0}{q_2}$. Ist das Kostenbudget K_0 gegeben, so wird die maximale Ausbringungsmenge m gerade bei der Produktionsisoquante erreicht, die von der Kostenisoquante tangiert wird (siehe Abbildung 43).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Ausführungen im Lehrbuch von Wöhe liefern bis hierher eine graphische Lösung des Minimalkostenproblems, nämlich über die tangierende Produktionsisoquante (dass diese die optimale Lösung liefert, kann man der Anschauung entnehmen). Hier ist bisher nur ein Verständnis des Tangentenbegriffs, aber noch nicht von der Ableitung notwendig.

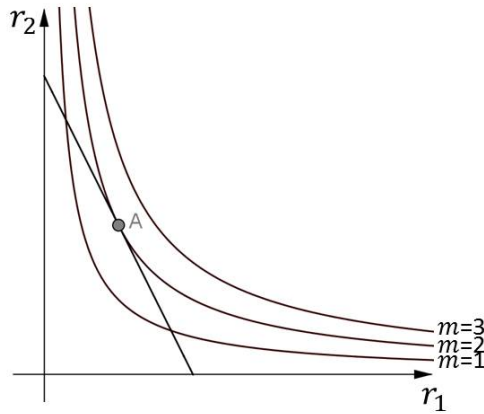


Abbildung 43: Veranschaulichung der graphischen Bestimmung der Minimalkostenkombination (r_1, r_2) bei gegebener Kostenisoquante, Graphik des Autors in Analogie zu einer Graphik in Wöhe u. Döring (2013, S.297)

Den geometrischen Tangentenansatz aus Abbildung 43 könnte man bei einer differenzierbaren Isoquante $\phi_m(r_1) = r_2$ auch algebraisieren, indem man die folgenden Gleichungen löst:

$$\phi_m(r_1) = r_2 = -\frac{q_1}{q_2}r_1 + \frac{K_0}{q_2} \quad \text{und} \quad \phi'_m(r_1) = -\frac{q_1}{q_2} \quad (89)$$

Für eine Algebraisierung des Tangentenansatzes wäre als Hintergrundwissen wieder die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente notwendig.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Zur Bestimmung der Minimalkostenkombinationen gibt es auch Übungsaufgaben (Wöhe u. a., 2013, S.109-115). In der Musterlösung werden hier bis auf eine Ausnahme graphische Methoden verwendet, für die nur ein Verständnis des Begriffs der Tangente notwendig ist. In einer Aufgabe mit der Produktionsfunktion $f(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2$ und der Kostenisoquante $K_0 = 72 = 4r_1 + 6r_2$ wird die Minimalkostenkombination dagegen auch analytisch über einen Optimierungsansatz gelöst. Dazu wird zunächst in die Produktionsfunktion f die Kostenisoquante K_0 mit $r_2 = 12 - \frac{2}{3}r_1$ eingesetzt. Dadurch erhält man eine von einer Variablen abhängige Funktion

$$m_{K_0}(r_1) = f(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2 = r_1 \left(12 - \frac{2}{3}r_1 \right). \quad (90)$$

Diese wird nun abgeleitet, die Ableitung null gesetzt und das sich ergebende Punkt $(r_1, r_2) = (6, 9)$ als Ergebnis angegeben. Eine Begründung, dass der ermittelte stationäre Punkt der Funktion m_{K_0} auch der Tangentialpunkt aus Abbildung 43 ist, fehlt.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Für ein Verständnis des durchgeführten Algorithmus der analytischen Lösung ist wieder die Kenntnis der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ an Extremstellen notwendig. Um jedoch zu verstehen, weshalb dieses formale Verfahren und das Tangentialpunktverfahren tatsächlich dieselbe Lösung liefern, ist weiteres umfangreiches Wissen notwendig.

Für eine C^1 -Funktion könnte man hier eine Verbindung zwischen analytischer und geometrischer Lösung wie folgt herstellen:

Beweis. Sei (r_1^*, r_2^*) der Punkt, an dem die Kostenisoquante $r_2 = -\frac{q_1}{q_2}r_1 + \frac{K_0}{q_2}$ die Produktionsisoquante $\phi_m(r_1) = r_2$ tangiert. Dann gilt:

$$\phi_m(r_1^*) = r_2^* = -\frac{q_1}{q_2}r_1^* + \frac{K_0}{q_2} \quad \text{und} \quad \phi'(r_1^*) = -\frac{q_1}{q_2} \quad (91)$$

Daraus folgt für die Funktion $m_{K_0}(r_1) = f(r_1, -\frac{q_1}{q_2}r_1 + \frac{K_0}{q_2})$:

$$\begin{aligned} m'_{K_0}(r_1^*) &= \frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1^*, -\frac{q_1}{q_2}r_1^* + \frac{K_0}{q_2}) + \frac{\partial f}{\partial r_2}(r_1^*, -\frac{q_1}{q_2}r_1^* + \frac{K_0}{q_2}) \cdot \left(-\frac{q_1}{q_2}\right) \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r_1}(r_1^*, \phi_m(r_1^*)) + \frac{\partial f}{\partial r_2}(r_1^*, \phi_m(r_1^*))\phi'_m(r_1^*) \quad (\text{Einsetzen der Gleichungen (89)}) \\ &= (f \circ \psi_m)'(r_1^*) \quad \text{mit} \quad \psi_m(r_1) = (r_1, \phi_m(r_1)) \end{aligned}$$

Da $(f \circ \psi)(r_1) = (r_1, \phi_m(r_1)) = m$ für alle r_1 ist, ist die Ableitung von $f \circ \psi_m$ an der Stelle r_1^* gleich 0. Also gilt am Tangentialpunkt (r_1^*, r_2^*) : $m'_{K_0}(r_1^*) = 0$. $\square$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen.

Als Hintergrundwissen zur Ableitung sind hier die geometrische Deutung der Ableitung, die mehrdimensionale Kettenregel und die Ableitungsregel für konstante Funktionen notwendig.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Zur Lösung des Minimalkostenproblems spielten also folgende Aspekte des Ableitungsbegriffs eine Rolle:

1. die geometrische Deutung der Ableitung (bei einer Algebraisierung des geometrischen Tangentenansatzes) und
2. die Verwendung der Ableitung bei der Extremwertbestimmung (bei der analytischen Bestimmung der Minimalkostenkombination)

Für ein Verständnis der Äquivalenz beider Verfahren sind dann zusätzlich Kenntnisse der mehrdimensionalen Differentialrechnung wie die mehrdimensionale Kettenregel notwendig. Für das Hintergrundverständnis der Darstellbarkeit der Isoquanten $m = f(r_1, r_2)$ als Funktionen der Form $\phi_m(r_1) = r_2$ und ist sogar der Satz über implizite Funktionen nötig.

5.5.3 Die Rolle der Ableitung bei der Lagerplanung

Das nächste Kapitel im Lehrbuch von Wöhe, wo die Ableitung auftaucht, ist die Produktionsplanung, speziell die Lagerplanung (Wöhe u. Döring, 2013, S.330-341). Hierbei spielt sie bei zwei Aspekten eine Rolle (siehe zum Beispiel auch (Domschke u. Scholl, 2008, S. 150-166) oder (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S. 255-259)):

1. Ermittlung optimaler Bestellmengen (Wöhe u. Döring, 2013, S.332-334)
2. Ermittlung optimaler Losgrößen (Mengen, die mit einem Mal produziert werden sollten) (Wöhe u. Döring, 2013, S.339-340)

Die Ausführungen von Wöhe u. Döring (2013) bei der Ermittlung optimaler Losgrößen sind analog zu denen bei der Ermittlung optimaler Bestellmengen. Daher beschränke ich mich auf eine ausführliche Darstellung der Bestellmengenplanung.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Im Lehrbuch von Wöhe wird ein einfaches Modell zur Ermittlung der optimalen Bestellmenge vorgestellt, welches dort als Grundmodell bezeichnet wird. Hierbei geht man von der Grundannahme aus, dass es einen fixen Jahresbedarf B gibt, der bekannt ist (Wöhe u. Döring, 2013, S.332). Innerhalb des Jahres wird periodisch bestellt, sodass $B = h \cdot m$ ist (Wöhe u. Döring, 2013, S.332-334). Dabei ist m die Bestellmenge pro Bestellung und h die Anzahl der Bestellungen im Jahr.

Die Kosten für die Bestellung im gesamten Jahr setzen sich aus folgenden Kosten zusammen (Wöhe u. Döring, 2013, S.321):

1. Unmittelbare Beschaffungskosten K_U (Kosten für das Material)
2. Mittelbare Beschaffungskosten K_T (Transportkosten und ähnliche)
3. Lagerkosten K_L

Die Kosten für das Jahr ergeben sich deshalb:

$$K(m) = K_U(m) + K_T(m) + K_L(m) \quad (92)$$

$K(m)$ ist also zu minimieren.

Um eine explizite Formel zu finden, müssen einige Grundannahmen getroffen werden. Diese sind laut Wöhe (siehe (Wöhe u. Döring, 2013, S.333-334)):

1. gleichmäßiger Verbrauch des Materials im Lager
2. unendlich schnelle Auffüllungsgeschwindigkeit des Lagers
3. kein Materialschwund (z.B. durch Ausschuss)
4. Lagerkapazitäten spielen keine Rolle
5. die Gesamtbestellmenge B im Jahr ist fix
6. konstanter Bestellpreis p pro Stück, der unabhängig von der Bestellmenge ist (kein Mengenrabatt)
7. von der Bestellmenge unabhängige bestellfixe Kosten pro Bestellung K_f (z.B. Transportkosten der Bestellung hängen nicht von der Menge ab)
8. keine Abnahmeerwartungen seitens des Lieferanten wie z.B. Mindestmengen
9. keine Fixkosten beim Lagern, und Lagerkosten pro Stück (k_l) sind unabhängig von der eingelagerten Menge
10. keine finanziellen Restriktionen und die Zinskosten (dies sind die Kosten, die dadurch entstehen, dass das ausgegebene Geld nun keine Zinsen mehr bringt, was dann als Kosten gewertet wird) sind konstant

Ohne Erklärung wird daraufhin folgende Funktion zur Bestimmung der Lagerkosten angegeben:

$$K(m) = B \cdot p + \frac{K_f}{m} B + \frac{m}{2} pq \quad (93)$$

mit $K_U(m) = B \cdot p$, $K_T(m) = \frac{K_f}{m} B$ und $K_L(m) = \frac{m}{2} pq$.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Dass das zustande kommen der endgültigen Formel aus den Modellannahmen nicht erklärt wird, ist aus mathematischer Perspektive unbefriedigend, weshalb hier im Folgenden die Herleitung ausgeführt ist (siehe auch Hutzschenreuter (2015, S.228-229)). Ausgangspunkt war die Gleichung

$$K(m) = K_U(m) + K_T(m) + K_L(m). \quad (94)$$

Mit den Annahmen 1.-4. (und 8.) lässt sich der Bestand des Lagers durch die in Abbildung 44 dargestellte Funktion modellieren.

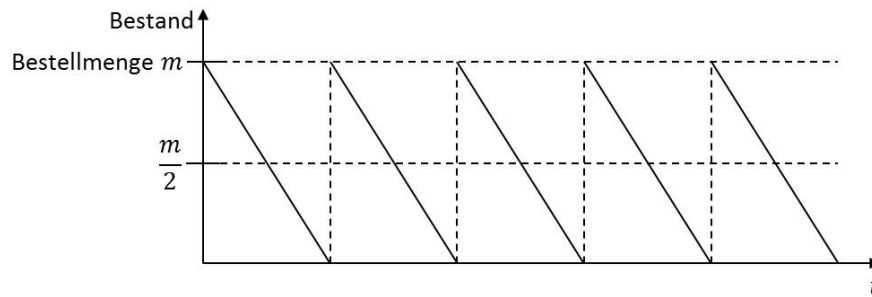


Abbildung 44: Zeitlicher Verlauf des Lagerbestandes im Grundmodell zur Ermittlung der optimalen Bestellmenge

Da die Bestellmenge für das Jahr und der Stückpreis als fix angenommen werden (Modellannahmen 5. und 6.), ergeben sich die Kosten für das Material (unmittelbare Beschaffungskosten) als $K_U = B \cdot p$. Dabei ist p den Materialpreis und B die Bestellmenge für das Jahr.

Die mittelbaren Beschaffungskosten im Jahr ergeben sich aus den Fixkosten pro Stück $\frac{K_f}{m}$ (die sind nach Modellannahme 7. unabhängig von der Bestellmenge), die dann noch mit der Bestellmenge B multipliziert werden müssen. Damit erhält man

$$K(m) = B \cdot p + \frac{K_f}{m} B + K_L(m). \quad (95)$$

Jetzt müssen noch die Lagerkosten bestimmt werden. Da die Lagerkosten pro Stück als konstant angesehen werden (Modellannahme 9.), lassen sich die Lagerkosten so berechnen, als wenn man durchgängig das Lager mit der Hälfte der Bestellmenge gefüllt hätte, d.h. man erhält sie durch $\frac{m}{2} k_l$, wobei k_l die Lagerkosten pro Stück bezeichnet. Mit $k_l = pq$ (Lagerkosten pro Stück ergeben sich als Materialpreis p multipliziert mit einem weiteren Faktor q , der durch den Lagerkostensatz und den Zinskostensatz bestimmt ist, der nach Modellannahme 10. ebenfalls konstant ist), erhält man:

$$K(m) = B \cdot p + \frac{K_f}{m} B + \frac{m}{2} pq \quad (96)$$

Dies ist dann die Funktion, die zu minimieren ist.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Nachdem in Wöhe u. Döring (2013) die Funktion (96) ohne Herleitung angegeben wurde, ist aber nun die Ermittlung des Minimums wieder (zumindest teilweise) dargestellt. Zunächst wird die erste Ableitung gebildet:

$$K'(m) = -\frac{K_f}{m^2} B + \frac{pq}{2} \quad (97)$$

Nullsetzen der Ableitung liefert dann den stationären Punkt

$$m_{opt} = \sqrt{\frac{2K_f B}{pq}} \quad (98)$$

Dies ist dann auch ohne weitere Kommentierung das Ergebnis. Diese Bestellmengenformel wird dann noch an einem einfachen, fiktiven Zahlenbeispiel illustriert (Wöhe u. Döring, 2013, S.334).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Hier ist also als Hintergrundwissen zur Ableitung die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ an lokalen Extremstellen notwendig. Wenn man noch begründen möchte, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, was hier nicht getan wurde, sind auch Kenntnisse hinreichender Bedingungen notwendig. Eine Möglichkeit der Begründung wären Konvexitätsargumente: Die Funktion in (96) ist offenbar strikt konvex (Nachweis z.B. über Erhaltungssätze der Konvexität oder die zweite Ableitung, siehe (Dietz, 2012, S.337-344)). Damit ist dieser stationäre Punkt auch das Minimum.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Die Ermittlung der optimalen Bestellmenge wird auch an zwei Aufgaben im Übungsbuch geübt:

1. In der ersten Übungsaufgabe soll die Formel (98) auf ein einfaches Zahlenbeispiel angewendet werden, was einfaches Einsetzen in die Bestellmengenformel (98) erfordert (Wöhe u. a., 2013, S.157-158).
2. In der anderen Aufgabe soll m_{opt} graphisch ermittelt werden (Wöhe u. a., 2013, S.154-155)). Dabei wird in der Musterlösung zusätzlich analytisch hergeleitet, dass beim Minimum von K die Lagerkosten K_L gleich den mittelbaren Kosten K_T sind, (kann man wieder aus der Bedingung $K'(m_{opt}) = 0$ folgern).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die rechnerische Aufgabe übt hier lediglich das Einsetzen von Zahlen. Bei der graphischen Aufgabe wird das Minimum auch nur durch graphische Addition $K_U + K_T + K_L$ ermittelt (kein Bezug zur Ableitung). Bei der Begründung, dass dort die mittelbaren Transportkosten K_T gleich den Lagerkosten K_L sind, ist noch einmal mehr die notwendige Bedingung für Extremstellen notwendig.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Insgesamt trat die Ableitung bei der Lagerplanung dann auf, wenn die zugehörigen Kostenfunktionen (Kostenfunktion für die optimale Bestellmenge, Kostenfunktion für die optimale Losgröße) minimiert werden sollten, also im Rahmen der Extremwertbestimmung. Für deren Lösung sind dann notwendig:

1. Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ bei Extremstellen an inneren Punkten
2. Hinreichende Bedingungen für die Extremwerteigenschaft stationärer Punkte (z.B. Monotonieargumente oder Konvexitätsargumente (Dietz, 2012, S.337-344))

5.5.4 Verwendung der Ableitung bei der Bewertung der Auswirkungen von Preisänderungen auf Nachfrage und Erlös

Die Ableitung spielt auch in der Preispolitik eine wesentliche Rolle. Eine angemessene Preispolitik ist eines der wesentlichen Instrumente eines Unternehmens um Produkte abzusetzen (Wöhe u. Döring, 2013, S.371). Sie ist daher ein zentrales Thema in der Betriebswirtschaftslehre.

Besonders wichtig ist es hierbei, herauszufinden, wie die Nachfrager auf eine Preisänderung reagieren (Wöhe u. Döring, 2013, S.418) (siehe auch (Domschke u. Scholl, 2008, 190-191), (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S. 321-326) oder (Varian, 2011, S. 303-322)). An dieser Stelle kommt das Konzept der Elastizität ins Spiel, welches auf dem Konzept der Ableitung aufbaut.

Zum besseren Verständnis wird an dieser Stelle noch einmal kurz zusammengefasst, wie die Elastizität definiert ist, und wie sie berechnet wird. Eine ausführlichere Beschreibung der mathematischen Hintergründe des Elastizitätskonzepts befindet sich in Kapitel 5.2.4.

Zunächst einmal gibt es zwei Begriffe der Elastizität, nämlich die Bogen- und die Punktelastizität, die sich formal wie folgt definieren lassen:

Definition 5.17 (Bogen- und Punktelastizität):

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x, \Delta x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben sodass $[x - \Delta x, x + \Delta x] \in I$ für $\Delta x > 0$ bzw. $[x + \Delta x, x - \Delta x] \in I$ für $\Delta x < 0$. Sei weiterhin $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \neq 0$.

Dann heißt der Quotient

$$\varepsilon_{f,x+\Delta x}(x) := \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad (99)$$

Bogenelastizität von f bezüglich x und Δx .

Existiert der Grenzwert von (99) für $\Delta x \rightarrow 0$, so heißt der sich ergebende Grenzwert Punktelastizität von f an der Stelle x und wird $\varepsilon_f(x)$ geschrieben.

Die Bogenelastizität misst also, wie stark sich die Funktionswerte (z.B. die Nachfrage) relativ gesehen ändern, wenn sich die Argumente (z.B. Preise) relativ ändern.

Ist f in x differenzierbar, so lässt sich die Elastizität ε_f wie folgt berechnen (Beweis siehe Kapitel 5.2.4):

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \quad (100)$$

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe beginnt das Kapitel mit der Aussage, dass es wichtig ist zu wissen, wie Nachfrager reagieren, wenn ein Unternehmen seinen Preis ändert (Wöhe u. Döring, 2013, S.418). Als mathematisches Hilfsmittel nennt er hierbei die Elastizität einer Nachfragefunktion $m(p)$ (p ist der Preis, m die Nachfrage). Diese Nachfrageelastizität definiert er wie folgt:

$$\eta = \frac{\Delta m}{m} / \frac{\Delta p}{p}. \quad (101)$$

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Elastizität wird also als Bogenelastizität definiert. Zum Verständnis dieser Definition ist ein Verständnis von Verhältnissen notwendig. Außerdem wäre ein Verständnis des Differenzenquotienten und der Definition der Ableitung wichtig, um die Elastizität gegen diese abgrenzen zu können.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe weist darauf hin, dass die Elastizität in der Regel negativ ist, weil Preissteigerungen eine geringere Nachfrage verursachen (Wöhe u. Döring, 2013, S.418). Deshalb definiert er das Vorzeichen der Elastizität η durch $[\eta] := -\eta$ um. Anschließend werden bei den Grenzfällen $[\eta] = 0$, $[\eta] = 1$, $[\eta] = \infty$ die entsprechenden Werte im Kontext interpretiert, z.B.:

„ $[\eta] = \infty$ bedeutet, dass schon die kleinste Preisänderung eine extrem starke Änderung der Nachfragemenge verursacht.“ (Wöhe u. Döring, 2013, S.418)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Wöhe begründet die Nichtnegativität der Nachfrageelastizität hier inhaltlich. Es wäre auch formale Begründung über die Berechnungsformel $\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)}f'(x)$ möglich. Da Nachfragefunktionen nicht negativ und monoton fallend sind, ist $\frac{x}{f(x)}f'(x) \leq 0$. Als Hintergrundwissen ist hier der Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie notwendig.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Danach wird in einer Tabelle zusammengefasst, wie sich der Umsatz ändert, wenn Preise im Bereich $0 < [\eta] < 1$, $[\eta] = 1$ und $[\eta] > 1$ gesenkt bzw. erhöht werden (Wöhe u. Döring, 2013, S.419) (siehe Tabelle 58). Begründungen gibt es nicht.

Nachfrage	Preissenkung	Preiserhöhung
elastisch $[\eta] > 1$	Umsatz steigt	Umsatz sinkt
$[\eta] = 1$	Umsatz konstant	Umsatz konstant
unelastisch $0 < [\eta] < 1$	Umsatz sinkt	Umsatz steigt

Tabelle 58: Auswirkungen von Preisänderungen auf den Umsatz in Abhängigkeit der Bereiche der Nachfrageelastizität (Wöhe u. a., 2013, S.227)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Für eine Begründung der Einträge in Tabelle 58 ist die *Amoroso-Robinson Relation* notwendig (Herleitung der *Amoroso-Robinson Relation* siehe Kapitel 5.2.4). Diese lässt sich mit den von Wöhe eingeführten Bezeichnungen wie folgt darstellen:

$$E'(m) = p(m) \left(1 - \frac{1}{[\eta]} \right) \quad (102)$$

Wird der Preis erhöht, sinkt die Nachfrage. Im unelastischen Bereich $0 < [\eta] < 1$ ist nach der *Amoroso-Robinson Relation* dann $E'(m) < 0$. Weil die Nachfrage bei einer Preiserhöhung sinkt, ist der zugehörige Erlös dann aber größer. Dies erklärt den Eintrag unten rechts in Tabelle 58. Die anderen Einträge lassen sich analog begründen. Als Hintergrundwissen zur Ableitung ist hier der Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie notwendig. Um die *Amoroso-Robinson Relation* (102) zu beweisen,

sind weiterhin die Berechnungsformel der Elastizität, die Ableitungsregeln und die Umkehrformel für Ableitungen bzw. Elastizitäten nötig (siehe Kapitel 5.2.4).

Beschreibungsebene Lehrbuch: Nach der Behandlung der Auswirkungen von Preisänderungen auf den Umsatz in Abhängigkeit der Nachfrageelastizität werden diese noch einmal graphisch anhand einer linearen Preis-Absatz-Funktion illustriert. Eine Preis-Absatz-Funktion $p(m)$ gibt an, welche Menge m man bei einem Preis p absetzen kann. Die Umkehrfunktion ist die Nachfragefunktion mit der Nachfrageelastizität η . Exemplarisch sei hier die Illustration für eine Preisänderung im elastischen Bereich der Nachfrage dargestellt (Abbildung 45, zum unelastischen Bereich gibt es eine analoge Abbildung).

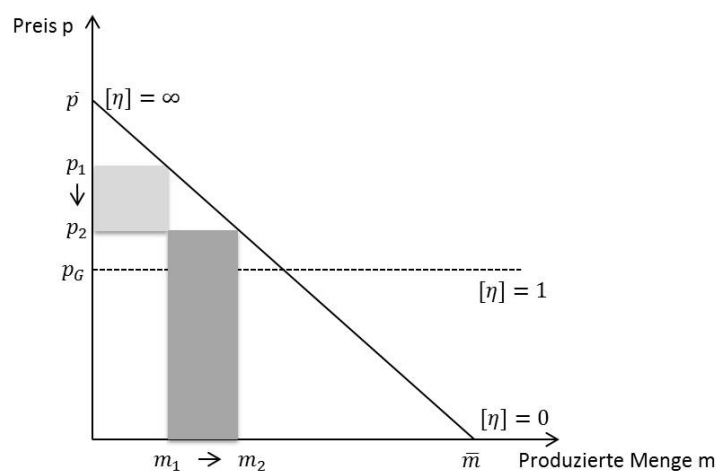


Abbildung 45: Veranschaulichung der Auswirkungen von Preisänderungen auf den Erlös im elastischen Bereich der Nachfrage, Graphik des Autors in Analogie zu Wöhe u. Döring (2013, S.419)

Zu Abbildung 45 formuliert Wöhe dann sinngemäß folgende Aussagen (Wöhe u. Döring, 2013, S.420):

1. Bei $\bar{p}$, dem Prohibitivpreis, ist die Nachfrageelastizität gleich unendlich und es lässt sich kein Stück absetzen.
2. Bei der Sättigungsmenge $\bar{m}$, bei dem $[\eta] = 0$ ist, ist das angebotene Gut für die Nachfrager wertlos geworden.
3. Die Nachfrageelastizität $[\eta]$ nimmt monoton ab, wenn der Absatz erhöht wird.
4. Bei einer Preissenkung im Bereich der elastischen Nachfrage, sinkt der Umsatz um den Flächeninhalt des hellen Rechtecks und steigt um den Flächeninhalt des dunklen Rechtecks (damit ist die Änderung insgesamt positiv)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Um diesen Ausführungen folgen zu können und nicht verwirrt zu werden, ist ein umfangreiches Hintergrundwissen notwendig. Zunächst wird auf einmal mit der Punktelastizität gearbeitet, obwohl diese nirgends eingeführt wurde. Der Zusammenhang zwischen Bogen- und Punktelastizität muss also bekannt

sein. Weiterhin wird hier die Nachfrageelastizität an den Achsenschnittpunkten angegeben, die aber mit der Definition von Wöhe $\frac{\Delta m}{m} / \frac{\Delta p}{p}$ selbst nach dem Grenzübergang $\Delta p \rightarrow 0$ nicht definiert werden kann, weil m bzw. p gleich 0 sind. Hier wird also die Elastizitätsfunktion stillschweigend stetig fortgesetzt.

Für ein Verständnis der Ausführungen der Erläuterungen zu Abbildung 45 sollten die Studierenden außerdem die von Wöhe genannten Aussagen über das Monotonieverhalten der Nachfrageelastizität und die speziellen Werte der Elastizität bei $m = 0$ oder $p = 0$ begründen können. Dies kann direkt über Ermittlung der Umkehrfunktion der zugehörigen Preis-Absatz-Funktion $p(m) = -\frac{\bar{p}}{\bar{m}}m + \bar{p}$ und Einsetzen dieser in die Berechnungsformel $\varepsilon_m(p) = \frac{p}{m(p)}m'(p)$ erfolgen. Da hier kein weiteres Wissen zum Konzept der Ableitung notwendig ist, wird auf eine Detaildarstellung der Rechnung verzichtet.

Die Aussage über den Zusammenhang zwischen Preisänderungen und der daraus resultierenden Umsatzänderung kann, wie bereits beschrieben, mit Hilfe der *Amoroso-Robinson Relation* begründet werden.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Zu Elastizitäten gibt es auch zwei Aufgaben im zugehörigen Übungsbuch (Wöhe u. a., 2013, S.227). In einer Aufgabe soll von den Studierenden noch einmal erklärt werden, wie sich der Umsatz in Abhängigkeit von $|\eta| > 1$, $|\eta| = 1$ oder $|\eta| < 1$ bei Preiserhöhungen oder Preissenkungen ändert. In der Musterlösung ist hier nur die bereits im Lehrbuch gezeigte Tabelle 58 angegeben. Begründungen gibt es nicht.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die Begründung wäre wieder über die *Amoroso-Robinson Relation* (102).

Beschreibungsebene Übungsbuch: In einer zweiten Aufgabe soll zu 8 gegebenen Aussagen zur Preisänderung entschieden werden, in welcher Zelle aus Tabelle 58 man sich befindet. Beispiele solcher Aussagen sind:

1. *Die deutsche Post ermäßigt eine Woche lang die Preise für 50-Cent Marken auf 30 Cent.* (Lösung im Buch: elastischer Bereich der Nachfrage, daher Umsatzsteigerung bei Preissenkung)
2. *Die Parkgebühr vor dem Hauptbahnhof einer Großstadt wird um 10 Cent je Stunde gesenkt.* (Lösung im Buch: unelastischer Bereich der Nachfrage, daher Umsatzeinbuße bei Preissenkung)

Eine Begründung der angegebenen Elastizitätsbereiche ist in der Musterlösung nicht angegeben (Wöhe u. a., 2013, S.227).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Da die Preis-Absatz-Funktion nicht explizit gegeben ist, soll hier auf Basis des Kontexts eine Vermutung erfolgen, ob man sich im elastischen oder im unelastischen Bereich der Nachfragefunktion befindet.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Insgesamt nimmt die Diskussion über die Elastizitäten im Zusammenhang mit Auswirkungen einer Preisänderung auf Nachfrage und Erlös in Abhängigkeit der Nachfrageelastizität einen beachtlichen Raum ein. Für ein Verständnis der Ausführungen (inklusive der Begründungen der im Buch getätigten Aussagen) ist ein umfangreiches Hintergrundwissen notwendig. Dieses umfasst:

1. Die Definition von Elastizität und Ableitung
2. Zusammenhang zwischen Bogen- und Punktelastizität
3. Die Ableitungsregeln, die Berechnungsformel für die Elastizität und die Umkehrformel zum Beweis der *Amoroso-Robinson Relation*
4. Der Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung

Um die Werte der Elastizität interpretieren zu können (was hier nicht gefragt war), müsste noch eine ökonomische Interpretation der Elastizität bekannt sein.

5.5.5 Verwendung der Ableitung in der Preistheorie

Das letzte Kapitel im Lehrbuch von Wöhe, in dem die Ableitung eine wichtige Rolle spielt, ist die Preistheorie (Wöhe u. Döring, 2013, S.415-439) mit dem Ziel der Bestimmung des gewinnoptimalen Preises und des zugehörigen Outputs eines Produkts (siehe auch (Domschke u. Scholl, 2008, S. 192-203, Reiß, 2007, S. 324-349, S. 405-415) oder (Schierenbeck u. Wöhle, 2008, S. 315-331)).

Vor der Analyse des Kapitels führe ich eine mathematische Vorbetrachtung durch, in welcher das Problem noch einmal in mathematischer Sprache dargestellt wird. Bei der Produktion einer Menge x ergibt sich der Gewinn $G(x)$ als Differenz von Erlös und Kosten:

$$G(x) = E(x) - K(x) \quad (103)$$

Der Erlös ergibt sich wiederum aus Preis mal Menge, wobei der erzielte Verkaufspreis ebenfalls von der Menge abhängt (wird zum Beispiel sehr viel angeboten, ist der Preis niedriger). Das heißt, man erhält den Gewinn durch:

$$G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x) \quad (104)$$

Die Funktion $p(x)$ ist die Preis-Absatz-Funktion. Das Ziel ist nun die Bestimmung des Outputs x und des zugehörigen Preises $p(x)$, sodass G in (104) maximal wird.

Beschreibungsebene Lehrbuch: Vor dem Einstieg in die konkrete Lösung des Optimierungsproblems nennt Wöhe folgende Grundannahmen der Preistheorie (Wöhe u. Döring, 2013, S.416):

1. Alle Nachfrager streben nach dem Nutzenmaximum, alle Anbieter nach dem Gewinnmaximum.
2. *Homogenitätsbedingung:* Angebot homogener Güter, Nachfrager haben keine sachlichen oder persönlichen Präferenzen für ein bestimmtes Angebot.

3. *Vollständige Markttransparenz*: Alle Nachfrager haben vollständige Information (vor allem über die Preisforderungen einzelner Anbieter).
4. *Reaktionsgeschwindigkeit*: Alle Marktteilnehmer reagieren unendlich schnell auf eine Änderung der Marktgegebenheiten (z.B. Preiserhöhungen oder Preissenkungen).

Auf einem vollkommenen Markt kann es nur einen Marktpreis geben. Denn würde ein Anbieter seine Preise erhöhen, würden alle Nachfrager sofort zur Konkurrenz abwandern (Wöhe u. Döring, 2013, S.416).

Wöhe behandelt das Problem der Findung des optimalen Outputs und des zugehörigen Preises in verschiedenen Marktformen: 1.Monopolmarkt (S.422-424), 2.Oligopolmarkt (einige große Anbieter, S.424-425), 3.Polypolmarkt (S.425-428), 4.Unvollkommener Markt (S.428-430). Ein konkreter Bezug zur Ableitung wird von Wöhe beim Monopol und beim Polypol (vollkommene Konkurrenz) hergestellt. Deshalb möchte ich im Folgenden diese beiden Situationen näher beschreiben.

Bestimmung des gewinnoptimalen Preises und des zugehörigen Angebots im Monopolmarkt

Beschreibungsebene Lehrbuch: Im Monopolmarkt gibt es nur einen Anbieter. Die Abnehmer haben daher keine Möglichkeit, auszuweichen. Man nimmt daher an, dass die Nachfrage bzw. der mögliche Absatz allein vom Preis abhängt (Wöhe u. Döring, 2013, S.422). Dies wird durch eine fallende Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ modelliert. Im Wöhe wird die Bestimmung des optimalen Preises am Beispiel der folgenden Preis-Absatz-Funktion und der folgenden Kostenfunktion vorgeführt (Wöhe u. Döring, 2013, S.422):

$$p(m) = -m + 10, \quad K(m) = 10 + 2m. \quad (105)$$

Das Optimierungsproblem wird im Wöhe auf zweierlei Arten gelöst (Wöhe u. Döring, 2013, S.422-423):

1. „Bestimmung“ des optimalen Preises mit einer Wertetabelle (Durchprobieren der Werte $m = 0, m = 1, \dots, m = 10$, Ergebnis: $m = 6$).
2. Graphische Bestimmung des optimalen Preises

Wie in Wöhe u. Döring (2013) das Problem graphisch gelöst wird, ist in Abbildung 46 dargestellt.

Erklärend zu der Graphik wird lediglich dazu gesagt, dass das Maximum dort angenommen wird, wo die Differenz $E - K$ maximal wird. Die eingezeichnete Tangente soll wohl anzeigen, dass dort die Tangente parallel zur Kostenfunktion ist und damit der Punkt auf der Parabel durch Parallelverschiebung von K ermittelt werden kann. Die Stelle mit dem Maximalgewinn wird als *Cournot'sche Menge* m_c bezeichnet, der zugehörige Preis p_c heißt *Cournot'scher Preis* und der Punkt auf dem Graphen der Preis-Absatzfunktion (m_c, p_c) heißt *Cournot'scher Punkt* (siehe Abbildung 46).

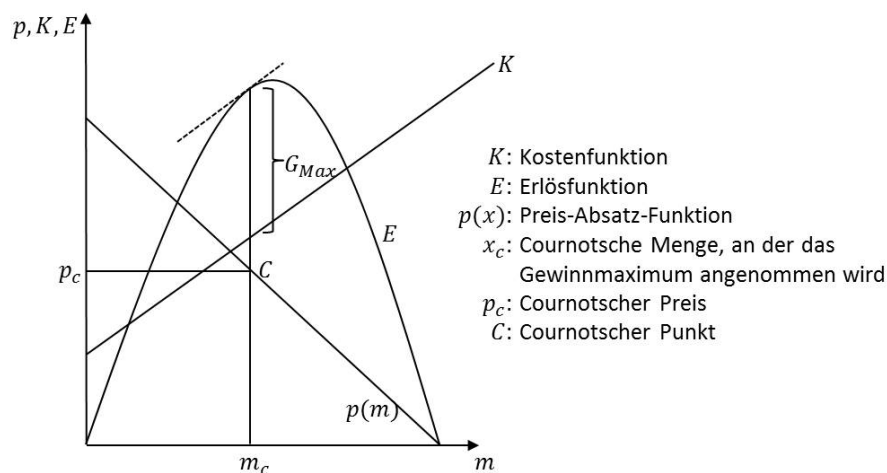


Abbildung 46: Graphische Ermittlung des Gewinnmaximums und der zugehörigen Maximalstelle (*Cournot'sche Menge*) im Monopolmarkt, angelehnt an Wöhe u. Döring (2013, S.423)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Zur Lösung des Optimierungsproblems werden von Wöhe also zwei Lösungswege angeboten: ein numerischer mit einer Wertetabelle und ein graphischer. Eine analytische Lösung über die Ableitung ist hingegen nicht dabei, obwohl alle notwendigen Funktionen mit Gleichungen gegeben sind.

Während die Lösung mit der Wertetabelle selbsterklärend ist (und hier auch tatsächlich legitim ist, weil nur ganzzahlige Ausbringungsmengen produziert werden können und damit in der Wertetabelle alle relevanten Fälle abgedeckt sind), benötigt das graphische Vorgehen in Abbildung 46 einige Erklärungen.

Für ein Verständnis dieser Graphik muss man erkennen, weshalb die Stelle m_c tatsächlich das Optimum ist. Das zugehörige Hintergrundwissen ist, dass an der Stelle m_c des Gewinnmaximums gilt, dass $K'(m_c) = E'(m_c)$. Dies folgt aus Nullsetzen von $G' = E' - K'$. Weil bei der Cournot'schen Menge die Steigung von Kosten- und Erlösfunktion identisch sind, kann man die lineare Kostenfunktion parallelverschieben und erhält am Schnittpunkt mit E den Punkt, an dem gerade $E'(m_c) = K'(m_c)$ gilt.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Zur Preisbildung im Monopol gibt es auch 7 Aufgaben im Übungsbuch. Ich beschränke mich hier aus Platzgründen auf die Darstellung von zwei Aufgaben, da bei den anderen keine neuen Wissensaspekte zur Ableitung auftauchen.

In der ersten dieser beiden Aufgaben geht es um den Zusammenhang zwischen Preis-Absatz-Funktion, Erlösfunktion und Grenzerlös. Zu gegebenen Werten einer linearen Preis-Absatz-Funktion (Prohibitivpreis 6 Euro, Sättigungsmenge 12 Stück) sollen die zugehörige Preis-Absatz Funktion, die Erlösfunktion und die Grenzerlösfunktion rechnerisch und zeichnerisch bestimmt werden. Eine Gleichung der Preis-Absatz-Funktion wäre $p(m) = -\frac{1}{2}m + 6$. In der Musterlösung erfolgt die rechnerische Bestimmung des Grenzerlöses dann mit einer Wertetabelle (Wöhe u. a., 2013, S.229). Als Werte für den Grenzerlös werden in der Wertetabelle die Differenzen $E(m) - E(m - 1)$ verwendet. Die graphische Lösung ist in Abbildung 47 zu sehen.

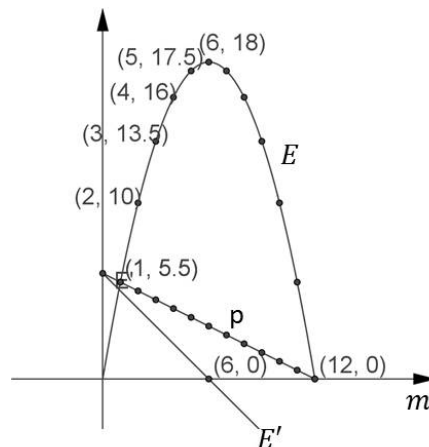


Abbildung 47: Graphik des Autors in Analogie zur graphischen Bestimmung einer Preis-Absatz-Funktion bei gegebenem Prohibitivpreis und gegebener Sättigungsmenge (Wöhe u. a., 2013, S.229)

Erklärungs- und Reflexionsebene: Die beiden Lösungen sind auf den ersten Blick widersprüchlich. In der Wertetabelle ist der Grenzerlös bei $m = 6$ gleich 0,5, in der Graphik ist er gleich 0. Das liegt daran, dass bei der Wertetabelle die Differenz $E(m) - E(m - 1)$, in der Graphik aber $E'(m)$ verwendet wurde. Um hier nicht verwirrt zu werden, ist wieder ein genaues Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung notwendig.

Beschreibungsebene Übungsbuch: In der anderen Aufgabe soll dann zu obiger Preis-Absatz-Funktion und der daraus resultierenden Erlösfunktion das Gewinnmaximum $G(m) = E(m) - K(m)$ für $K(m) = 2m$ und $K(m) = 6 + m$ bestimmt werden (Wöhe u. a., 2013, S.230). In der Musterlösung werden eine Lösung mit einer Wertetabelle und eine analytische Lösung vorgeschlagen. Dabei wird verwendet, dass im Gewinnmaximum gilt: $E' = K'$.

Erklärungs- und Reflexionsebene: Bei der Lösung mit der Wertetabelle sind keine Kenntnisse zu Steigung und Ableitung notwendig. Bei der analytischen Lösung ist wieder die notwendige Bedingung $G'(m_{opt}) = 0$ notwendig. Denn aus dieser folgt der in der Musterlösung verwendete Ansatz $E'(m_{opt}) = K'(m_{opt})$.

Bestimmung des gewinnoptimalen Angebots im Polypolmarkt

Beschreibungsebene Lehrbuch: Wöhe beginnt seine Ausführungen damit, dass man von einem festen Marktpreis p ausgehen kann, der durch die vielen Anbieter als konstant angesehen werden kann. Man geht davon aus, dass niemand den Preis ändert, denn bei Preissteigerungen würden die Anbieter sofort ihre gesamte Nachfrage verlieren (Wöhe u. Döring, 2013, S.426). Unter diesen Voraussetzungen geht es dann natürlich nicht mehr um die Bestimmung des optimalen Preises, sondern nur noch um die Bestimmung des optimalen Angebots x , sodass $G(x) = E(x) - K(x) = p \cdot x - K(x)$ maximal wird.

Im Lehrbuch von Wöhe wird am Beispiel einer linearen und einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion demonstriert, wie sich im Falle eines Polypolmarktes graphisch das Gewinnmaximum bestimmen lässt (Wöhe u. Döring, 2013, S.426-427). Dabei wird ähnlich wie in Abbildung 46 vorgegangen (dieses Mal wird aber die Erlösgerade mit der Gleichung $E(x) = p \cdot x$ parallelverschoben, bis sie die Kostenfunktion tangiert).

Erklärungs- und Reflexionsebene: Bei der graphischen Ermittlung des Gewinnmaximums über die Parallelverschiebung wird wieder genutzt, dass beim gewinnmaximalen Output m_{opt} die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind, was aus $G' = E' - K'$ und $G'(m_{opt}) = 0$ folgt. Außerdem wurde wieder die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente verwendet.

Beschreibungsebene Übungsbuch: Auch zum Polypol gibt es Aufgaben im Übungsbuch (Wöhe u. a., 2013, S.235-237). Diese verlangen aber keine neuen mathematischen Mittel, weshalb sie aus Platzgründen nicht im Detail dargestellt werden.

Zusammenfassung des zum Verständnis der Ausführungen notwendigen mathematischen Wissens zur Ableitung: Insgesamt tauchten in den Ausführungen der Preistheorie zum Finden des optimalen Preises und des optimalen Angebots im Wesentlichen zwei Aspekte des Ableitungsbegriffs auf:

1. die Verwendung der Ableitung in Zusammenhang mit der Optimierung
2. die geometrische Deutung der Ableitung

Der erste Aspekt trat in Form der Bedingung $E'(m_{opt}) = K'(m_{opt})$ auf, denn diese folgt aus der Bedingung $G'(m_{opt}) = 0$. Sie wurde jedoch nicht nur als Ansatz für die analytische Lösung verwendet, sondern auch für das graphische Verfahren, falls E oder K linear sind (Parallelverschiebung der linearen Funktion bis sie die jeweils andere tangiert). Dabei war auch die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente nötig.

Bei den Übungsaufgaben tauchte bei der Ermittlung einer Grenzerlösfunktion E' außerdem wieder die ökonomische Interpretation der Ableitung auf. Um hier nicht durch die inkonsistente Lösung im Buch (teilweise Verwendung von $E'(m)$ für den Grenzerlös und teilweise Verwendung von $E(m) - E(m - 1)$) verwirrt zu werden, musste hier der Zusammenhang zwischen Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation verstanden worden sein.

5.5.6 Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse des Lehrbuchs von Wöhe

Die Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse erfolgt unter besonderer Berücksichtigung der Leitfragen der Analyse:

- L1. *Bei welchen Inhalten taucht die Ableitung auf?*
- L2. *Welches mathematische Hintergrundwissen zur Ableitung ist erforderlich um die in dem Lehrbuch dargestellten Inhalte verstehen zu können bzw. die zugehörigen Aufgaben lösen zu können?*

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse befindet sich in Tabelle 59.

Inhalt	Anwendung der Ableitung	Notwendiges Hintergrundwissen
Ableitung als Grenzkosten in der Kostenrechnung	Ökonomische Interpretation der Ableitung am Beispiel der Grenzkosten	<i>Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung</i> und des Zusammenhangs zum mathematischen Konzept über <i>lineare Approximation</i>
Produktions- und Kostentheorie	Beschreibung des Verlaufs von Produktions- und Kostenfunktionen und des Zusammenhangs zu ihren Grenz- und Durchschnittsfunktionen Bestimmung (kosten-)optimaler Produktionen	<i>Geometrische Deutung der Ableitung</i> für den Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und Grenzfunktion, Bestimmung der <i>Steigung linearer Funktionen</i> als Grundlage der Fahrstrahlanalyse für den Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und Durchschnittsfunktion, <i>Ableitungsregeln</i> sowie die <i>notwendige Bedingung</i> $f'(x) = 0$ für <i>Extrema</i> zur Begründung des Vorhandenseins von Extremstellen der Durchschnittsfunktion am Tangentialpunkt des Fahrstrahls, <i>Definition der Ableitung</i> oder <i>ökonomische Interpretation der Ableitung</i> für ein Verständnis des Zusammenhangs zwischen Grenzkosten und variablen Durchschnittskosten bei $x = 0$ <i>Geometrische Deutung der Ableitung</i> als Steigung der Tangente bei der Algebraisierung des graphischen Verfahrens zur Bestimmung der Minimalkostenkombination, <i>Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema</i> bei analytischer Ermittlung der Minimalkostenkombination, <i>Ableitungsregeln der mehrdimensionalen Differentialrechnung</i> zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen geometrischer und analytischer Lösung
Lagerplanung	Bestimmung kostenoptimaler Bestellmengen und optimaler Losgrößen	<i>Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema</i> bei der Lösung des Optimierungsproblems, <i>Technik des Ableitens</i> zur konkreten Ermittlung der Ableitungen der entsprechenden Kostenfunktionen

Inhalt	Anwendung der Ableitung	Notwendiges Hintergrundwissen
Bewertung der Auswirkungen von Preisänderungen	Untersuchung der Auswirkungen von Preisänderungen auf Nachfrage und Erlös	Kenntnis und Verständnis der <i>Definition der Ableitung</i> als Grundlage für das Verständnis der Definition der Elastizität, <i>Definition der Ableitung</i> zur Herleitung der Berechnungsformel $\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$ für die Elastizität differenzierbarer Funktionen, <i>Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung</i> zur Beurteilung der Auswirkungen von Preisänderungen auf den Erlös in Abhängigkeit des Elastizitätsbereiches der Nachfragefunktion über die <i>Amoroso-Robinson Relation</i> , <i>Ableitungsregeln</i> und Umkehrformel zur Herleitung der <i>Amoroso-Robinson Relation</i>
Preistheorie	Bestimmung des gewinnoptimalen Outputs und Preises (in Monopol- und Polypolmarkt)	<i>Geometrische Deutung der Ableitung</i> zum Verständnis des graphischen Verfahrens zur Ermittlung des optimalen Outputs bei linearer Kosten- oder linearer Erlösfunktion, <i>Notwendige Bedingung an die Ableitung für Extrema</i> an inneren Punkten zur Rechtfertigung des Kriteriums „Grenzerlös = Grenzkosten“ zur Ermittlung des gewinnoptimalen Outputs, <i>Ökonomische Interpretation der Ableitung</i> bei der Übersetzung von Wertetabellen in die graphische Repräsentation

Tabelle 59: Zusammenfassung der Inhalte in Wöhe u. Döring (2013), bei denen die Ableitung eine Rolle spielt und des für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissens zur Ableitung

1. Steigung linearer Funktionen
2. Kenntnis und Verständnis der Definition der Ableitung
3. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
4. Ableitungsregeln und Technik des Ableitens einfacher Funktionen
5. Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung bzw. Konvexität und Ableitung
6. Ökonomische Interpretation der Ableitung und ihr Zusammenhang zum mathematischen Konzept über lineare Approximation
7. Elastizitätskonzept als ein auf der Ableitung aufbauendes Konzept

Tabelle 60: Zusammenfassung der notwendigen Wissensaspekte zur Ableitung zum Verständnis der Ausführungen im Lehrbuch von Wöhe u. Döring (2013)

Die hier benötigten Wissensaspekte zum Ableitungsbegriff, über die Studierende der Wirtschaftswissenschaften für ein Verständnis des Lehrbuchs von Wöhe verfügen müssen, sind noch einmal in Tabelle 60 zusammengefasst. Aus dieser Tabelle sieht man, dass das in der Schule vermittelte Wissen zur Ableitung nicht ausreicht. So wird zum Beispiel in Nordrhein-Westfalen der Aspekt der linearen Approximation nur im Leistungskurs behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes

Nordrhein-Westfalen, 2013). Das Elastizitätskonzept spielt in der Schule überhaupt keine Rolle. Weiterhin sieht man, dass sich das benötigte Wissen nicht auf Fertigkeiten zum Ableiten beschränkt, sondern dass die Studierenden ein tiefes Verständnis des mathematischen Konzepts der Ableitung benötigen. Dementsprechend sollte ein umfangreiches *concept image* in der Lehrveranstaltung vermittelt werden.

Zu guter Letzt zeigte die Analyse, dass die Ableitung hier vorwiegend zur Beantwortung qualitativer, theoretischer Fragestellungen und nicht zur Lösung praktischer Probleme verwendet wurde (die Beispiele aus dem Übungsbuch waren allesamt fiktive Trivialbeispiele mit einfachsten Funktionen). Das ist in anderen ökonomischen Lehrbüchern ähnlich (Varian, 2011; Domschke u. Scholl, 2008; Fandel, 2010; Reiß, 2007; Schierenbeck u. Wöhle, 2008; Steven, 1998; Stiglitz u. Walsh, 2010). Dies zeigt am Beispiel der Ableitung, dass Studierende der Wirtschaftswissenschaften eine eher an qualitativen theoretischen Fragestellungen ausgerichtete Mathematikausbildung benötigen, als eine am Üben von Rechenverfahren orientierte. Dennoch haben natürlich auch konkrete Rechenaufgaben ihre Berechtigung, denn durch sie kann auch das Verständnis theoretischer Zusammenhänge erhöht werden.

5.6 Vergleichende Zusammenfassung der Lehrbuchanalysen und Konsequenzen für die Lehre

Die in diesem Kapitel dargestellten Lehrbuchanalysen hatten das Ziel folgende Forschungsfrage zu beantworten:

F2: Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in ökonomischen Lehrbüchern praktisch vorausgesetzt?

Für die Beantwortung des ersten Teils der Forschungsfrage zum praktisch vermittelten Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wurden ebensolche Lehrbücher analysiert (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010). Zur Beantwortung des zweiten Teils der Forschungsfrage wurden Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaftler analysiert (Basis der Analyse: (Wöhe u. Döring, 2013) und (Varian, 2011), Verwendung weiterer Lehrbücher zur Validierung, siehe Kapitel 5.1).

Zu den vermittelten Inhalten (Leitfrage L1 der Analyse, siehe Kapitel 5.1): Insgesamt zeigen die Analysen, dass in wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vorausgesetzt wird. In Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wird auch ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung vermittelt. In Tabelle 61 sind noch einmal im Detail die in den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und die in ökonomischen Lehrbüchern benötigten Aspekte des Ableitungsbegriffs dargestellt.

Aus Tabelle 61 sieht man, dass die Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem theoretischen Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, das den praktischen Umgang mit der Ableitung mitberücksichtigt, aus Kapitel 3 (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) praktisch auch vermittelt werden, inklusive der ökonomischen Interpretation der Ableitung

Inhaltsaspekt		vermittelt	benötigt
1.	Definition der Ableitung	D,H,T	W,V
2.	Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente	D,H,T	W,V
3.	Deutung der Ableitung als Änderungsrate	D,H	V
4.	Ökonomische Interpretation der Ableitung und ihr Zusammenhang zum mathematischen Konzept über lineare Approximation	D,H,T	W,V
5.	Technik des Ableitens und Ableitungsregeln	D,H,T	W,V
6.	Steigung linearer Funktionen und Fahrstrahlanalyse	D,T	W
7.	Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung bzw. Konvexität und Ableitung	D,H,T	W,V
8.	Verwendung der Ableitung bei der Optimierung	D,H,T	W,V
9.	Elastizitätskonzept	D,H,T	W,V
10.	Das Konzept des Differentials	D,H,T	-

Tabelle 61: Vermittelte und benötigte Aspekte zum Ableitungsbegriff in den analysierten Lehrbüchern (einschließlich der darauf aufbauenden Konzepte *Elastizität* und *Differential*), D=(Dietz, 2012), H=(Sydsæter u. Hammond, 2015), T=(Tietze, 2010), W=(Wöhe u. Döring, 2013), V=(Varian, 2011)

und ihrer Verbindung zum mathematischen Konzept über lokale lineare Approximation. Gleichzeitig werden eben diese Aspekte auch in den wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern vorausgesetzt.

Weiterhin sieht man aus Tabelle 61, dass aus inhaltlicher Sicht eine im Wesentlichen gute Passung zwischen den in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und den in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzten Aspekten des Ableitungsbegriffs vorliegt. Lediglich das Konzept des Differentials taucht nicht in den beiden im Detail analysierten wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern auf. Dieses spielt aber dann in fortgeschrittenen Lehrbüchern der Ökonomie wie zum Beispiel dem Lehrbuch „Produktions- und Kostentheorie“ von Fandel eine Rolle (Fandel, 2010).

Bei genauerem Hinsehen wird allerdings ein Missverhältnis bei der Technik des Ableitens deutlich. Hier sind die Ausführungen in den betrachteten Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler sehr umfangreich und das Ableiten wird an vielen Beispielen geübt, die die Verwendung verschiedenster Ableitungsregeln erfordern (siehe Kapitel 5.2.3, 5.3.1, 5.3.5-5.3.6 und 5.4.3). In den wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern müssen jedoch lediglich Potenzfunktionen bzw. aus Potenzfunktionen zusammengesetzte Funktionen wie Polynomfunktionen abgeleitet werden (Bsp.: die Kostenfunktion $K = 0,001m^3 - m^2 + 100m + 720$ in Wöhe u. a. (2013)).

Umgekehrt sind die Ausführungen zur ökonomischen Interpretation der Ableitung in einigen Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler recht kurz: 2 halbe Seiten in Dietz (2012, S.268-269) und zwei halbe Seiten in Sydsæter u. Hammond (2015, S.208-209). Lediglich das Buch von Tietze enthält ein ganzes Kapitel darüber (Tietze, 2010, S.240-252). Zwar wurde in allen diesen Lehrbüchern ein Zusammenhang zwischen Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation über lineare Approximation

hergestellt. Es wurde aber in keinem der betrachteten Lehrbücher thematisiert, inwieweit man durch das Einsetzen von $h = 1$ in die Approximation $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ bei ökonomischen Funktionen tatsächlich von einer guten Näherung ausgehen kann.

Eine insgesamt so kurze Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung erscheint mir im Hinblick auf die in Kapitel 2.2 herausgearbeitete Heterogenität bei der Verwendungspraxis der Ableitung in der Ökonomie, die manchmal zusätzlich mit Inkonsistenzen gepaart ist, etwas zu knapp. Es stellt sich die Frage, inwieweit die Studierenden danach tatsächlich eine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation herstellen können, und somit die ökonomische Interpretation der Ableitung adäquat in ihr *concept image* zur Ableitung integriert haben.

Ein weiterer Unterschied ist in der Art und Weise zu erkennen, in der die Ableitung bei der Optimierung genutzt wird: In den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler gibt es sehr umfassende Ausführungen zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Extrema:

1. Notwendige Bedingung $f'(x)$ für Extrema an inneren Punkten (Dietz, 2012, S.369, Sydsæter u. Hammond, 2015, S.315, Tietze, 2010, S.257)
2. einziger Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung als hinreichende Bedingung für globale Extrema an stationären Punkten (Dietz, 2012, S.383-384 (hier als „Monotonieargument“ bezeichnet), Sydsæter u. Hammond, 2015, S.318)
3. Konvexitätsargumente zur Identifizierung stationärer Punkte als globale Extrema (Dietz, 2012, S.386-387, Sydsæter u. Hammond, 2015, S.319)
4. Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung als hinreichende Bedingung für lokale Extrema an stationären Punkten (Dietz, 2012, S.383-384, Sydsæter u. Hammond, 2015, S.338-340, Tietze, 2010, S.268)
5. Hinreichendes Kriterium für Extrema an stationären Punkten unter Verwendung der zweiten Ableitung (Dietz, 2012, S.372, Sydsæter u. Hammond, 2015, S.340, Tietze, 2010, S.258)
6. Randpunkte und nicht-differenzierbare Stellen als mögliche Kandidaten für Extrempunkte (Dietz, 2012, S.376, Sydsæter u. Hammond, 2015, S.327, Tietze, 2010, S.268)

In den Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften wird hingegen oft lediglich die erste Ableitung gleich Null gesetzt und das Ergebnis ohne weitere Begründung als das gesuchte Extremum angegeben. Ein Beispiel aus Wöhe u. a. (2013) ist die Bestimmung optimaler Bestellmengen als Minimalstelle einer Kostenfunktion. Bei dieser wird lediglich die Kostenfunktion abgeleitet und die Nullstelle der Ableitung ohne weitere Argumente als gesuchte Minimalstelle angegeben (siehe Kapitel 5.5.3). Teilweise werden Extrema in ökonomischen Lehrbüchern auch graphisch ermittelt wie bei Wöhe der optimale Angebotspreis im Monopolmarkt (Wöhe u. Döring, 2013, S.423).

Gar keine Rolle in den analysierten wirtschaftswissenschaftlichen Büchern spielen theoretische Sätze wie die Taylor-Formel. Diese tauchen aber sehr wohl in fortgeschrittenen Lehrbüchern der Ökonomie wie „Economic and Financial Modeling with Mathematics“ von Varian auf (Varian, 1993).

Insgesamt gibt es aber eine im Wesentlichen gute Passung zwischen den in den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und in den Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaftler vorausgesetzten Aspekte des Ableitungsbegriffs.

Zum Exaktheitsgrad und den Begründungsformen: Bei den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wurden nicht nur die Inhalte analysiert, sondern auch die Art und Weise von deren Vermittlung. Dazu wurden folgende Leitfragen L2 und L3 gestellt (die Leitfrage L1 betraf die im Zusammenhang mit der Ableitung vermittelten Inhalte, siehe Kapitel 5.1):

L2: *Welcher Exaktheitsgrad wird verwendet?*

L3: *Wie werden die präsentierten mathematischen Aussagen begründet?*

Beim Exaktheitsgrad ließ sich kein einheitliches Vorgehen in den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler feststellen. So legt Dietz (2012) sehr viel Wert auf eine sehr exakte mathematische Sprache. Sätze und Definitionen werden in allen ihren Feinheiten formuliert. Dafür werden viele Sätze aber nicht begründet (z.B. Differenzierbarkeit von Formeln der Ableitung elementarer Funktionen oder die Ableitungsregeln). Als Grund dafür erklärte der Autor auf Nachfrage, dass er Beweise Studierenden der Wirtschaftswissenschaften zunächst „nicht zumuten wollte“ und stattdessen mehr Wert auf gewisses „Handwerkszeug“ gelegt hat.

In Sydsæter u. Hammond (2015) und Tietze (2010) wird zum Teil weniger exakt als in Dietz (2012) vorgegangen. Sätze und Definitionen sind nicht immer exakt definiert. Beispiele sind:

1. die Definition der Ableitung $f'(x_0)$, bei der weder die Voraussetzung, dass x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereichs sein muss, noch die Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten thematisiert werden (Sydsæter u. Hammond, 2015, S.199)
2. die Aussage, dass bei der Approximation $\Delta f \approx f'(x) \cdot \Delta x$ die Güte der Approximation immer besser wird, je kleiner Δx ist (Tietze, 2010, S.238)

Bei Sydsæter und Hammond gibt es zusätzlich Inkonsistenzen. Ein Beispiel wäre, dass bei der Definition der Ableitung die Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten keine Rolle spielt, jedoch bei den Ableitungsregeln auf einmal von „differenzierbaren Funktionen“ die Rede ist, obwohl dieser Begriff nirgends eingeführt wurde (siehe Kapitel 5.3.5). Solche Inkonsistenzen innerhalb des Buches gibt es bei Tietze nicht. Dafür findet man bei Tietze manchmal eigene Begriffsbildungen, die im Widerspruch zu in Standardwerken der Mathematik gebräuchlichen Definitionen sind. Ein Beispiel ist der Begriff der Monotonie, der bei Tietze als strenge Monotonie aufgefasst wird (Tietze, 2010, S.253).

Anders als bei Dietz (2012) werden in Sydsæter u. Hammond (2015) und Tietze (2010) dafür die meisten Aussagen begründet. Die Begründungsform ist in der Regel ein formaler Beweis (z.B. bei der Begründung der Ableitungsregeln). Vereinzelt werden Aussagen auch graphisch oder verbal begründet (siehe Tabellen 52 und 56). Allerdings befinden sich in einigen Beweisen kleine Lücken. Ein Beispiel ist die stillschweigende Verwendung der Stetigkeit der e -Funktion und der $\ln$ -Funktion beim Beweis der Differenzierbarkeit der e -Funktion im Lehrbuch von Tietze (siehe S.191).

Insgesamt können also keine allgemeingültigen Aussagen zur Exaktheit und den verwendeten Begründungen in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler getroffen werden. Auf der einen Seite gibt es das sehr exakte Lehrbuch von Dietz, in dem aber die behandelten mathematischen Aussagen oft nicht begründet werden. Auf der anderen Seite gibt es Bücher wie die von Sydsæter u. Hammond (2015) oder Tietze (2010), die nicht immer 100%ig exakt sind und teilweise sogar kleine Inkonsistenzen aufweisen, in denen dafür aber viele Aussagen begründet werden.

Ergänzende Bemerkungen zur Exaktheit und den Begründungsformen in ökonomischen Lehrbüchern: Bezüglich der Exaktheit und der verwendeten Argumentationen gibt es übrigens auch bei den ökonomischen Lehrbüchern große Unterschiede (auch wenn das hier nicht wissenschaftlich im Detail untersucht wurde). So zeigte sich bei der Analyse des benötigten Hintergrundwissens zur Ableitung im Lehrbuch „Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe in Kapitel 5.5, dass dieses nicht besonders exakt bzw. teilweise inkonsistent ist. Beispiele hierfür sind die ständige Vermischung von Ableitung $f'(x)$ und der Kostendifferenz $f(x) - f(x - 1)$ in Zusammenhang mit Aussagen wie $\sum_{i=1}^7 K'(i) = K(7)$ ohne Erklärungen (siehe Kapitel 5.5.2) oder die Vermischung von Bogen- und Punktelastizität ohne Erklärung (siehe Kapitel 5.5.4). Weiterhin werden viele Aussagen in diesem Buch nicht begründet, wie zum Beispiel Aussagen über Zusammenhänge zwischen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K , ihrer Grenzfunktion K' und der Durchschnittsfunktion k (siehe Kapitel 5.5.4).

Ganz anders sieht es hingegen im fortgeschrittenen Lehrbuch „Microeconomic Theory“ von Mas-Colell et al. aus (Mas-Colell u. a., 1995). Dieses Buch ist wie ein Mathematikbuch im „Definition-Satz-Beweis-Stil“ aufgebaut. Die Begriffe werden formal und exakt definiert und die meisten der präsentierten Aussagen werden formal korrekt bewiesen.

Zu den Aufgaben: Die Analyse der Aufgaben der Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zeigte, dass *bei den Aufgaben* (insbesondere bei Dietz (2012) und Tietze (2010)) vor allem Rechenfertigkeiten geübt werden (Beispiele: Ableiten, Analytische Extremwertbestimmung mit der Ableitung). Zwar spielen in Dietz (2012) auch qualitative Betrachtungen eine Rolle (zum Beispiel das Vierphasendiagramm in Dietz (2012), siehe Kapitel 5.2.5). Solche werden aber nicht in den Aufgaben von den Studierenden verlangt.

In den wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern muss die Ableitung dann aber häufig zur Beantwortung theoretischer, qualitativer Fragestellungen verwendet werden. Beispiele hierfür sind:

1. Erstellung des Vierphasendiagramms zur Beschreibung des qualitativen Verlaufs

der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion $E(r)$, ihrer Grenzfunktion $E'(r)$ und der Durchschnittsfunktion $e(r) = \frac{E(r)}{r}$ (siehe Kapitel 5.5.2)

2. Graphische Lösung des Optimierungsproblems der Bestimmung des optimalen Preises und des zugehörigen Outputs im Monopolmarkt (siehe Kapitel 5.5.5)

Hier somit eine Diskrepanz erkennbar.

Zusammenfassendes Fazit und Konsequenzen für die Lehre: Insgesamt zeigt die Analyse, dass für ein Verständnis der Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaften ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung benötigt wird. Dieses wird von Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften auch tatsächlich vermittelt. Allerdings gibt es dort eine Überbetonung der Technik des Ableitens, die in den ökonomischen Lehrbüchern kaum benötigt wird. Demgegenüber erfolgt die Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung teilweise recht kurz, was in Anbetracht der in Kapitel 2.2 herausgearbeiteten großen Heterogenität im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie (mit einigen Inkonsistenzen) problematisch erscheint, wenn man möchte, dass die Studierenden die Verwendungspraxis der Ableitung in der Ökonomie tatsächlich verstehen und aus mathematischer Perspektive reflektieren können.

Weiterhin zeigt die Analyse, dass in Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaftler die Ableitung oft in Zusammenhang mit qualitativen, theoretischen Fragestellungen verwendet wird (Bsp.: Qualitative Untersuchung des Verlaufs einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K , ihrer Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion k). Demgegenüber steht in den Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler *zumindest bei den Aufgaben* der Fokus klar auf dem Rechnen mit konkreten Zahlen und konkreten Funktionen.

Aus diesen Betrachtungen und Diskrepanzen ergeben sich folgen drei wesentliche Konsequenzen für die Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler:

1. Man sollte stärker qualitative, theoretische Fragestellungen in die Mathematikausbildungen einbinden als das bisher der Fall ist (zumindest, wenn sich die entsprechenden Lehrveranstaltungen stark an den hier analysierten Standardwerken orientieren), und solche theoretischen, qualitativen Fragestellungen auch in die Aufgaben für die Studierenden einbinden.
2. Man kann im Gegenzug bei der Technik des Ableitens Zeit einsparen, weil das Ableiten komplizierter Funktionen nicht benötigt wird.
3. Man sollte die ökonomische Interpretation der Ableitung und deren Verbindung zum mathematischen Konzept umfangreicher als derzeit teilweise üblich behandeln, damit die Studierenden die heterogene, und teils widersprüchliche, Praxis im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie verstehen können.

6 Konstruktion und Auswertung eines Vortests zur Ermittlung des Vorwissens zur Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften

6.1 Ziel und Begründung des methodischen Vorgehens

Die dritte Forschungsfrage der Dissertation ist:

F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Diese Frage ist wichtig, wenn man in einer Lehrveranstaltung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler adäquat an das Vorwissen anknüpfen möchte.

Zur Beantwortung dieser Frage wurde ein *neuer* Vortest speziell für die Gruppe „Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften“ konzipiert, der dann exemplarisch bei den Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn des Wintersemesters 2015/16 eingesetzt wurde.

Begründung der Notwendigkeit Konstruktion eines neuen Tests: Es wurde für die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften ein neuer Vortest konzipiert, weil bekannte Eingangstests zur Analysis, wie der Precalculus-Assessment Test (PCA) (Carlson u. a., 2010) oder der Calculus Concept Inventory Test (CCI) (Epstein, 2006) hier nicht geeignet sind, was im Folgenden kurz begründet wird.

Der PCA ist eigentlich ein „Precalculus“ Test. Der Begriff der Ableitung taucht in ihm gar nicht explizit auf. Er testet stärker das Vorwissen zum Funktionsbegriff, speziell zum Kovariationsaspekt von Funktionen (Vollrath, 1989, S.12) und würde sich eher als Vortest zur Analysis in der Schule vor Behandlung der Ableitung eignen als als Vortest für Studienanfänger, die das Ableitungskonzept bereits explizit in der Schule kennen gelernt haben.

Im Gegensatz zum PCA ist im CCI tatsächlich der Ableitungsbegriff selbst explizit Schwerpunkt des Tests. Der CCI hat sich jedoch für die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften als ungeeignet erwiesen. In einem Pilotversuch mit 129 Teilnehmern des Vorkurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ der Universität Paderborn im WS 2014/15 hatte der Test einen Cronbachs α Wert von $\alpha = 0.419$ und war somit für diese Gruppe nicht reliabel. Es konnten auch keine inhaltlich reliablen Teilttests (Items, die inhaltlich zusammenpassen) gefunden werden. Eine Ursache könnte sein, dass der Schwierigkeitsgrad des Tests für Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften zu hoch ist und dementsprechend bei den Multiple-choice Fragen oft geraten wurde. Im Mittel wurden nur 7 von 22 Punkten erreicht, die höchste erreichte Punktzahl war 13 Punkte. Dies könnte daran liegen, dass viele Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften nur einen Grundkurs in Mathematik besucht haben, was für 68.9% der Studienanfänger, die am CCI im Vorkurs zum WS 2014/2015 teilgenommen hatten, der Fall war. Die Standardabweichung betrug nur 2.663 Punkte, weshalb die Studienanfänger nicht angemessen gemäß ihrer Fähigkeiten aufgetrennt werden konnten. Außerdem fehlen bei beiden Tests Items, die speziell für Studierende der Wirtschaftswissenschaften relevant sind.

Methodische Konsequenz: Es wurde für die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften ein neuer Vortest auf Basis didaktischer Literatur und bereits bestehender Vortests konzipiert, der (1) den Fähigkeiten dieser Studierenden entspricht, und (2) der auch Aufgaben enthält, die speziell für Studierende der Wirtschaftswissenschaften relevant sind. Dieser Vortest wurde dann, wie bereits gesagt, exemplarisch bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Paderborn eingesetzt.

6.2 Überblick über den Aufbau und die Konstruktion des Tests

Der Test wurde auf Basis des in Kapitel 3 entwickelten Modells zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, aufbauend auf dem Modell von Zandieh (2000) zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“, konzipiert (Modell siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt).

In diesem Modell ist das Verständnis der Ableitung durch folgende drei Ebenen charakterisiert (siehe auch Abbildung 4):

1. Ebene *Verhältnis*: Verständnis des Differenzenquotienten bzw. bereits der Steigung einer linearen Funktion
2. Ebene *Grenzwert*: Verständnis der Ableitung an einer Stelle
3. Ebene *Funktion*: Verständnis der Ableitung als ganze Funktion

Weiterhin ist die Ableitung durch verschiedene Repräsentationen charakterisiert: symbolisch als Grenzwert des Differenzenquotienten, verbal als Änderungsrate und graphisch als Steigung. Diese Repräsentationen lassen sich ebenfalls in allen drei Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion* finden, wodurch man insgesamt ein Matrixmodell zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung erhält (siehe Tabelle 4).

Dieses Matrixmodell bildete die theoretische Basis für die Konstruktion des Vortests. Zu den Zellen der Matrix wurden Teilttests konstruiert, die dann schließlich zu einem Gesamttest zusammengesetzt wurden. Die Teilttests waren:

T2: ein Teilttest zur Steigung linearer Funktionen

T3: ein Teilttest zum Differenzenquotienten

T4: ein Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung

T5: ein Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate

T6: ein Teilttest zum Tangentenkonzept

Zusätzlich wurden zwei weitere Teilttests konstruiert:

T1: ein Teilttest zur Technik des Ableitens, denn auch hier sind der Erfahrung nach Schwierigkeiten bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften zu erwarten

T7: ein Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation)

Name des Teiltests	Anzahl der Items	Aufgabennummern im Test
T1: Technik des Ableitens	6 Items	Aufgabe 1
T2: Steigung linearer Funktionen	6 Items	Aufgabe 2
T3: Differenzenquotient	7 Items	Aufgaben 13, 14, 21
T4: Geometrische Deutung der Ableitung	11 Items	Aufgaben 3-6
T5: Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	10 Items	Aufgaben 7-12
T6: Tangentenkonzept	8 Items	Aufgabe 19
T7: Ökonomische Interpretation der Ableitung und zugehöriges Hintergrundwissen	5 Items	Aufgaben 15-18, 20

Tabelle 62: Übersicht über die Teiltests des Vortests

Eine Übersicht über die Anzahl der Items in den einzelnen Teiltests mit den zugehörigen Aufgabennummern im Gesamttest befindet sich in Tabelle 62. Insgesamt ergibt sich damit ein Test aus 53 Items, die sich auf 21 Aufgaben verteilen (siehe Anhang). Von diesen Items waren 38 Items Multiple-choice Aufgaben, wobei jeweils nur eine Antwort richtig war. Bei den anderen 15 Items war das Antwortfeld offen. Eine genaue Beschreibung der einzelnen Items befindet sich in den folgenden Kapiteln zu den einzelnen Teiltests (Kapitel 6.4-6.10).

6.3 Erhebung der Daten und Methodik zur Auswertung des Tests

6.3.1 Erhebung der Daten

Die Ermittlung des Vorwissens von Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften erfolgte exemplarisch an der Universität Paderborn. Diese Probanden können als typisch für Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften in Nordrhein-Westfalen angesehen werden. Für eine Verallgemeinerung der Ergebnisse müsste der Vortest dann auch an Universitäten in anderen Bundesländern eingesetzt werden, was aus Umfangsgründen im Rahmen dieser Dissertation nicht mehr möglich war.

Der Einsatz des Vortests erfolgte im Mathematik-Vorkurs der Universität Paderborn zu Beginn des Wintersemesters 2015/16. Da der Besuch dieses Vorkurses freiwillig war, nahmen nur 143 Studierende teil, die in puncto Motivation vermutlich eine Positivauswahl darstellten. Von den 143 Probanden hatten 114 Studierende (79.7%) einen Grundkurs und nur 29 Probanden einen Mathematik-Leistungskurs besucht (20.3%). Damit unterscheiden sich die Probanden hinsichtlich ihrer Zusammensetzung bereits von denen in Ingenieursstudiengängen, wo die Mehrheit in der Regel einen Mathematik-Leistungskurs besucht hat (siehe zum Beispiel (Wolf, 2017, S.328)), und erst recht von Studienanfängern der Mathematik. Dies unterstreicht noch einmal die Wichtigkeit der Entwicklung eines eigenen Vortests für Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften, der für dieses Probanden nicht zu schwer ist, sondern sie gemäß ihrer Fähigkeiten auch tatsächlich aufteilt.

Die Durchführung des Vortests dauerte 45 Minuten. Er wurde unter Aufsicht durchgeführt, sodass die Studierenden während der Durchführung nicht miteinander kommunizieren konnten.

6.3.2 Auswertungsmethodik des Tests

Die Basis für die Konstruktion des Gesamttests bildeten die 7 Teilttests zu verschiedenen Aspekten des Ableitungskonzepts, die zunächst einzeln konstruiert und dann zusammengesetzt wurden. Dementsprechend erfolgte auch zunächst eine autonome Auswertung der einzelnen Teilttests. Dabei wurden jeweils die Antworten der Studierenden mit Punkten bewertet (in der Regel: 1 Punkt bei richtiger Antwort, 0 Punkte bei falscher Antwort; bei zwei offenen Aufgaben wurden zwei Punkte mit der Option auf einen Punkt bei teilweiser Richtigkeit vergeben). Die Auswertung erfolgte dann mit Hilfe der klassischen Testtheorie (Krauth, 1995). Aufgrund der geringen Itemanzahl bei einigen Teilttests wurde keine zusätzliche Raschmodellierung verwendet. Bei der Auswertung der Teilttests wurden jeweils drei Schritte durchgeführt:

- 1.Schritt: Überprüfung der internen Konsistenz und der Reliabilität des jeweiligen Teilttests
- 2.Schritt: Analyse der Punkteverteilung des jeweiligen Teilttests
- 3.Schritt: Detailauswertung der Ergebnisse der Einzelitems des jeweiligen Teilttests

Nach der Auswertung der einzelnen Teilttests erfolgte noch eine abschließende Globalauswertung des Tests als Ganzes. Hierbei wurde insbesondere überprüft, inwieweit die einzelnen Teilttests miteinander korrelieren und ob sich die theoretisch konstruierten Teilttests auch empirisch im Gesamttest wiederfinden lassen. Auch hier wurde keine zusätzliche Raschmodellierung verwendet, weil diese ein völlig neuer Auswertungsansatz wäre, der hier den Rahmen der Dissertation sprengen würde. Allerdings wäre eine solche Auswertung in Zukunft möglich, denn die sogenannten MNSQ-Werte („weighted mean square“), die messen, wie gut die Items in eine eindimensionale Raschmodellierung passen, liegen alle zwischen 0.8 und 1.2, was den Akzeptanzschranken in der Literatur entspricht (OECD, 2009, S.135)).

In den folgenden Kapiteln 6.4-6.10 werden nun die sieben Teilttests im Detail beschrieben und die zugehörige Auswertung dargestellt. Dies gliedert sich jeweils in folgende Schritte:

1. Erläuterung von Aufbau und Konstruktion des jeweiligen Teilttests
2. Detaillierte Diskussion der Analyse der Daten und insbesondere Diskussion der Reliabilität des jeweiligen Teilttests (die Validität ist dadurch gegeben, dass die meisten Items aus der Literatur entnommen sind, wo die Validität bereits überprüft wurde)
3. Darstellung der Ergebnisse (Darstellung und Diskussion der Punkteverteilung des jeweiligen Teilttests, dann Darstellung und Diskussion der Ergebnisse der Einzelitems)
4. Vergleich der Ergebnisse mit der Literatur, insbesondere wenn Items aus anderen in der mathematikdidaktischen Literatur dokumentierten Studien übernommen wurden

6.4 Der Teilttest zur Technik des Ableitens

6.4.1 Aufbau des Teilttests zur Technik des Ableitens

Der erste Teilttest untersucht die Fertigkeiten der angehenden Studierenden beim Ableiten. Er entspricht der Aufgabe 1 des Tests und besteht aus 6 Teilaufgaben. Hierbei muss jeweils eine Funktion abgeleitet werden. Die Funktionen wurden so gewählt, dass *neben der Summenregel und der Faktorregel nur eine weitere Ableitungsregel* angewandt werden muss, um zu testen, welche Regel beherrscht wird. Dabei wurden nur Funktionsklassen verwendet, die in der Schule im Kontext der Differentialrechnung behandelt werden (siehe zum Beispiel Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2013)): (1) ganzrationale Funktionen, (2) Funktionen mit negativen ganzzahligen und mit rationalen Exponenten (letztere werden zum Beispiel in NRW nur im Leistungskurs behandelt, s. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2013, S.28,S.31)), (3) die e-Funktion sowie (4) Verkettungen und Produkte dieser Funktionen.

Die genauen in dem Test verwendeten Funktionen, zu denen die Ableitung gebildet werden sollte, sind die Folgenden:

- a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ (ganzrationale Funktion, nötige Regel: Potenzregel für natürliche Exponenten)
- b) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$ (Wurzelfunktion ist beteiligt, nötige Regel: Potenzregel für rationale Exponenten)
- c) $f(x) = e^{2x}$ (e-Funktion, nötige Regel: Kettenregel für den Spezialfall der linearen Verkettung)
- d) $f(x) = e^{x^2}$ (e-Funktion, nötige Regel: Kettenregel für nichtlineare Verkettung)
- e) $f(x) = xe^x$ (Produkt mit e-Funktion, nötige Regel: Produktregel)
- f) $f(x) = \frac{1}{x}$ (einfachste gebrochen rationale Funktion, nötige Regel: Potenzregel für negative ganzzahlige Exponenten)

6.4.2 Analyse der Daten des Teilttests zur Technik des Ableitens

Die Codierung des Teilttests erfolgte bei jeder der sechs abzuleitenden Funktionen mit einer 0-1-Codierung: Studierende erhielten einen Punkt bei vollständiger Richtigkeit der Ableitung. Ansonsten wurde die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

Mit diesem Bewertungsschema ergab sich ein reliabler Teilttest, bei welchem Cronbachs α den Wert $\alpha = 0.708$ hatte. Die Trennschärfen der Items sind in Tabelle 63 dargestellt. Sie sind alle über 0.3 und damit gut.

6.4.3 Ergebnisse des Teilttests zur Technik des Ableitens

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: Die in diesem Teilttest erreichten Punkte sind in Abbildung 48 dargestellt: sowohl die Verteilung der Gesamtpopulation als auch die Punkteverteilungen in Grund- und Leistungskurs. Insgesamt konnten 6 Punkte erreicht werden. Die statistischen Kenngrößen sind in Tabelle 64 zu sehen.

Item	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$	0.404	0.679
$f(x) = \sqrt{x} + 3x$	0.376	0.691
$f(x) = e^{2x}$	0.598	0.612
$f(x) = e^{x^2}$	0.572	0.623
$f(x) = xe^x$	0.371	0.691
$f(x) = \frac{1}{x}$	0.342	0.700

Tabelle 63: Trennschärfen des Teiltests zur Technik des Ableitens, bei denen die obigen Funktionen abgeleitet werden sollen

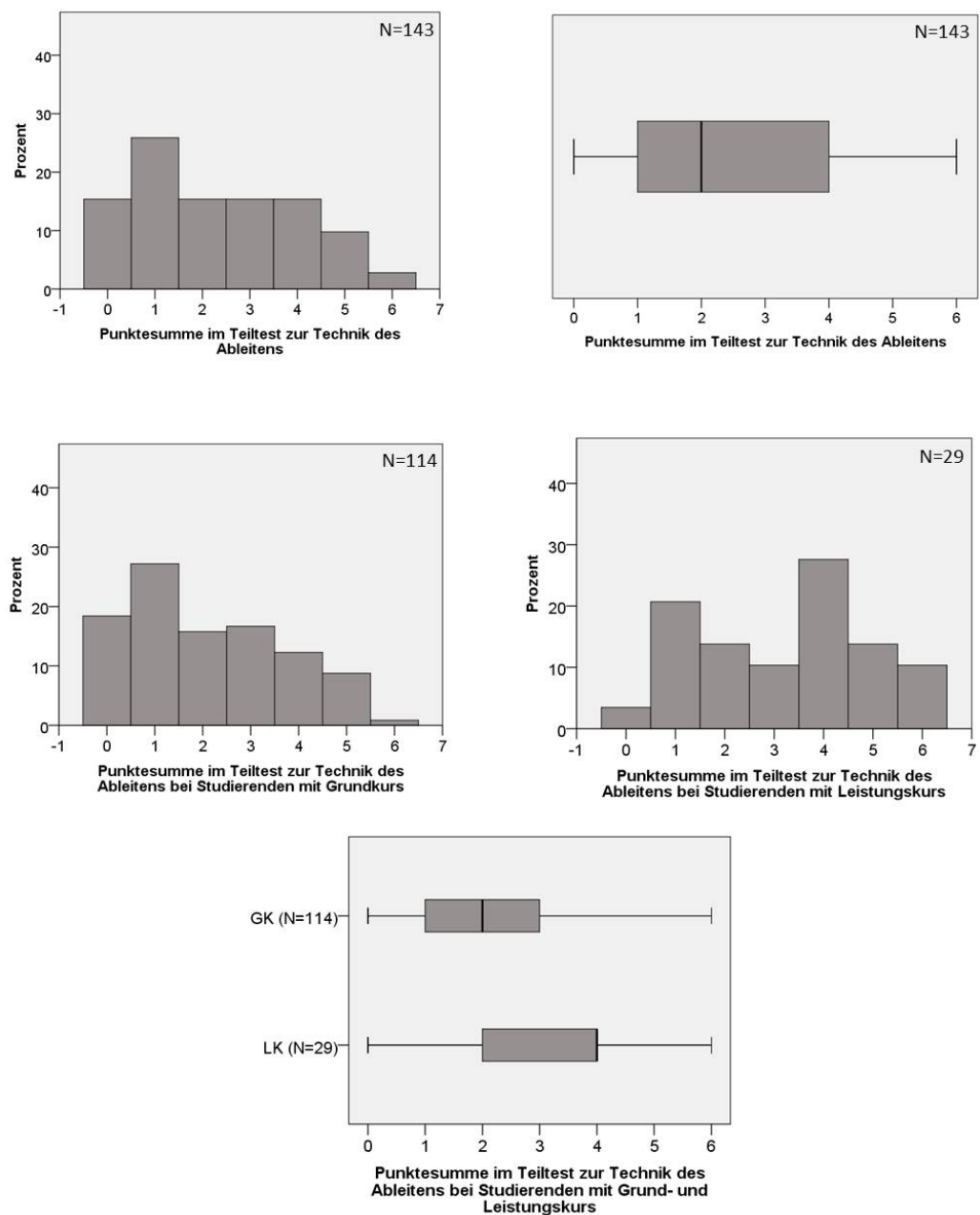


Abbildung 48: Punkteverteilung im Teilttest zur Technik des Ableitens

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	2.30	2.07	3.21
Median	2	2	4
Standardabweichung	1.703	1.617	1.760

Tabelle 64: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur Technik des Ableitens

Der dort abgebildeten Mittelwertunterschied zwischen Grund- und Leistungskurs ist signifikant ($\alpha = 0.001147$).

Man erkennt in Abbildung 48 eine annähernde Gleichverteilung bis zum Bereich von 4 Punkten (mit einem Peak bei einem Punkt). Nur wenige Studierende konnten alle 6 Funktionen korrekt ableiten (2.8%). Viele Studierende konnten dagegen *höchstens* eine Funktion korrekt ableiten (34.3%).

Weiterhin erkennt man in Abbildung 48 und an den Kenngrößen in Tabelle 64 große Unterschiede bei der Technik des Ableitens zwischen Studierenden mit Grund- und Leistungskurs. Dennoch beschränken sich Defizite beim Ableiten nicht auf Studienanfänger mit Grundkurs. Auch bei den Anfängern mit Leistungskurs gab es eine nicht kleine Gruppe Studierender, die nur einen Punkt erreicht haben. Bei den Studienanfängern mit Leistungskurs ist die Verteilung bimodal.

Abzuleitende Funktion	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$	77.6%	73.7%	93.1%
$f(x) = \sqrt{x} + 3x$	39.2%	36.8%	48.3%
$f(x) = e^{2x}$	38.5%	33.3%	58.6%
$f(x) = e^{x^2}$	32.2%	27.2%	51.7%
$f(x) = xe^x$	11.2%	8.8%	20.7%
$f(x) = \frac{1}{x}$	31.5%	27.2%	48.3%

Tabelle 65: Anteile richtiger Antworten bei den einzelnen Aufgaben des Teilttests zur Technik des Ableitens

Ergebnisse der Einzelitems: Die Lösungshäufigkeiten der Einzelaufgaben sind in Tabelle 65 zu sehen. Man sieht aus ihr, dass viele Studierende Schwierigkeiten beim Ableiten hatten sobald die Funktion nicht mehr ganzrational war. Die ganzrationale Funktion konnten 77.6% der Studienanfänger ableiten (was auch weniger ist als man es vielleicht erwarten würde). Musste die Potenzregel in verallgemeinerter Form angewendet werden (bei rationalen oder negativen ganzzahligen Exponenten), so konnten bei der Gesamtstichprobe weniger als 40% die richtige Ableitung bilden, bei Probanden mit Leistungskurs immerhin noch die Hälfte. Dass hierbei die Potenzregel für ganzzahlige Exponenten in Nordrhein-Westfalen in Grund- und Leistungskurs behandelt wurde, die für rationale Exponenten aber nur im Leistungskurs (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.28 und S.31), schlug sich nicht im Testergebnis nieder.

Bei den Aufgaben mit Kettenregel konnten weniger als 40% der Studierenden die betreffenden Funktionen korrekt ableiten. War die Verkettung nicht linear, so war die

Lösungshäufigkeit noch etwas geringer als bei linearer Verkettung. Ein deutlicher Unterschied zwischen beiden Typen der Verkettung, wie er aufgrund des Rahmenplans zu erwarten gewesen wäre (im Grundkurs in Nordrhein-Westfalen wird nur die lineare Verkettung behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.28 und S.31)), war nicht zu sehen.

Sehr schlecht fiel das Ergebnis bei dem Item mit der Produktregel aus. Nur 11.2% konnten die entsprechende Funktion $f(x) = xe^x$ ableiten (nur rund 8.8% der Studierenden mit Grundkurs, obwohl die Produktregel zumindest in Nordrhein-Westfalen auch im Grundkurs explizit behandelt wird und abiturrelevant ist (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2016, S.2)). Die schlechten Ergebnisse beim Ableiten jenseits ganzrationaler Funktionen können also nicht damit erklärt werden, dass diese Regeln nicht abiturrelevant waren.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass beim Ableiten abseits ganzrationaler Funktionen große Defizite vorlagen.

6.4.4 Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zur Technik des Ableitens mit der Literatur

In der Literatur findet man häufiger Aussagen der Form, dass Studierende zwar Ableiten könnten, nicht aber die Bedeutung der Ableitung verstünden. Ein Beispiel ist Schoening u. Wulfert (2014, S.15):

„Ein sehr auffälliges Merkmal ist, dass vielen Studierenden die am häufigsten benutzten Standardableitungen bekannt sind und sie auch einfache Funktionen ableiten können. Jedoch fehlt fast völlig das Verständnis für den inhaltlichen Nutzen des Bildens von Ableitungen.“

Inwiefern unsere Studienanfänger Defizite beim Verständnis der inhaltlichen Bedeutung der Ableitung haben, kann man aus diesem Teilttest zur Technik des Ableitens noch nicht sehen. Man sieht aber klar aus Tabelle 65, dass die Mehrheit hier auch beim Ableiten einfacher Funktionen Probleme hatte.

6.5 Der Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen

6.5.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen

Dieser Teilttest untersucht das Verständnis von Begriffsaspekten des Begriffs „Steigung einer linearen Funktion“. Er entspricht der Aufgabe 2 des Tests und besteht aus 5 Teilaufgaben, welche verschiedene Aspekte des Verständnisses der Steigung linearer Funktionen abprüfen. Das Verständnis dieses Begriffes ist essentiell um die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente verstehen zu können. Für Studierende der Wirtschaftswissenschaften ergibt sich weiterhin eine *zusätzliche* Relevanz. Denn die Steigung einer linearen Funktion ist Grundlage für die sogenannte *Fahrstrahlanalyse*, mit deren Hilfe der Verlauf von Graphen gewisser ökonomischer Funktionen beschrieben bzw. rekonstruiert wird (siehe Kapitel 5.2.5).

Grundlage der Konstruktion des Teilttests zu den Aspekten der Steigung linearer Funktionen war eine Klassifizierung dieser Aspekte nach Nagle u. a. (2013) (siehe Kapitel 4.1.1). Diese wird im Folgenden kurz erläutert.

Nagle u.a. haben eine umfangreiche Studie zum Verständnis des Begriffs „Steigung einer linearen Funktion“ bei Studierenden und Lehrenden durchgeführt. Dazu wurde diesen ein aus 5 Items bestehender Test vorgelegt. Die Antworten auf die Items wurden in ein Kategoriensystem aus 11 Kategorien eingeordnet, die verschiedenen Aspekten des Begriffs „Steigung“ entsprechen (Nagle u. a., 2013, S.1493). Eine genaue Darstellung der Studie und deren Ergebnisse befindet sich zu Beginn von Kapitel 4.1.1). Die für die Ausbildung eines Verständnisses der Ableitung wichtigen Kategorien, die auch Grundlage für die Items in diesem Teilstest waren, sind in Tabelle 66 dargestellt.

Aspekt	Beschreibung
<i>Parametric coefficient</i>	Steigung als Parameter m in der Gleichung $y = mx + n$
<i>Behavior indicator</i>	Steigung als Zahl, die angibt, ob eine Gerade steigt oder fällt, und wie schnell sie dies im Vergleich zu einem anderen Geraden tut
<i>Algebraic ratio</i>	Steigung als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
<i>Geometric ratio</i>	Steigung als Verhältnis der Katheten im Steigungsdreieck
<i>Functional property</i>	Deutung der Steigung als Änderungsrate bzw. als Proportionalitätsfaktor
<i>Calculus conception</i>	Zusammenhang zwischen Steigung und Ableitung

Tabelle 66: Steigungsaspekte linearer Funktionen nach Nagle u. a. (2013)

Zu jeder der Kategorien aus Tabelle 66 wurde eine Aufgabe für den Test konstruiert. Die Aufgaben sind in Abbildung 49 dargestellt. Die Aufgabenteile a)-d) wurden selbst konstruiert. Die mit ihnen adressierten Aspekte des Konzepts der Steigung einer linearen Funktion nach Nagle u. a. (2013) sind in Tabelle 67 dargestellt. Der letzte Aufgabenteil e), in dem es um die Deutung der Steigung als Änderungsrate im Kontext geht, wurde aus dem Precalculus-Assessment Test (PCA) (Carlson u. a., 2010) übernommen (die Aufgabe wurde auch im Theorieteil der Dissertation diskutiert, siehe Kapitel 4.1.1, S.59). Allerdings wurde der dortige Kontext des zeitabhängigen Werts einer Baseballkarte (der ist sicher nicht linear!) durch einen etwas realitätsnäheren Kontext ersetzt. Der Aspekt *Calculus conception* wurde in diesem Teilstest ausgelassen, weil es direkt zur geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung einen eigenen Teilstest gibt.

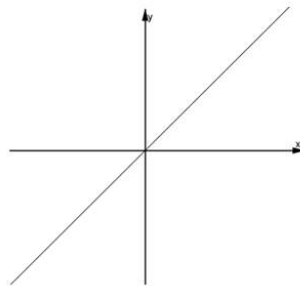
Aufgabennummer	Aufgabe	Aspekt
2a)	<i>Bestimmung der Gleichung</i> einer linearen Funktion mit Steigung 2 durch den Punkt (0; 1)	<i>Parametric coefficient</i>
2b)	<i>Anfertigung einer Skizze</i> der Funktionen g mit $g(x) = 2x$ und h mit $h(x) = -2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	<i>Behavior indicator</i>
2c)	<i>Berechnung der Steigung</i> einer linearen Funktion durch die Punkte (0; 1) und (2; 9)	<i>Algebraic ratio</i>
2d)	<i>Zeichnen der linearen Funktion</i> mit Steigung -2 durch den Punkt (0; -1) in ein vorgegebenes Koordinatensystem	<i>Geometric ratio</i>
2e)	<i>Deutung der Steigung</i> einer linearen Funktion im Kontext	<i>Functional property</i>

Tabelle 67: Zuordnung der einzelnen Aufgaben zu den Aspekten der Steigung einer linearen Funktion nach Nagle u. a. (2013)

2) a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die die Steigung 2 hat und durch den Punkt (0;1) verläuft.

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

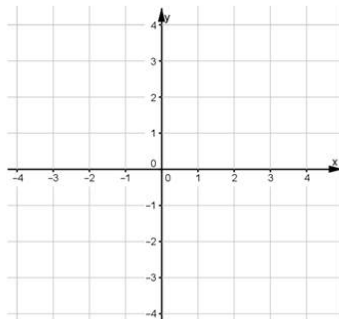
b) In dem folgenden Koordinatensystem ist die Funktion $f(x) = x$ eingezeichnet. Skizzieren Sie die Funktion $g(x) = 2x$ und $h(x) = -2x$ in das gleiche Koordinatensystem und schreiben Sie an die Graphen g und h an.



c) Geben Sie die Steigung der linearen Funktion durch die Punkte (0;1) und (2;9) an.

Wert der Steigung: $\underline{\hspace{2cm}}$

d) Zeichnen Sie die lineare Funktion durch den Punkt (0;-1) in das Koordinatensystem, die die Steigung -2 hat.



e) Bei einem Fahrradverleih mit minutengenauer Abrechnung wird der Preis in Abhängigkeit von der Zeit durch folgende Funktion beschrieben: $p(t) = \frac{7}{5}t + 2$. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden und $p(t)$ den Preis in Euro. Welche Interpretationen des Wertes $\frac{7}{5}$ in der Sachsituation sind möglich?

- I. Der Preis des Fahrrads steigt alle 5 Stunden um 7 Euro.
- II. Zu jeder Stunde ist der Preis des Fahrrads 1,4-mal höher als in der vorangegangenen Stunde.
- III. Der Preis des Fahrrads steigt um 1,40 Euro jede Stunde.

- ☐ Nur Aussage I.
- ☐ Nur Aussage II.
- ☐ Nur Aussage III.
- ☐ Nur Aussagen I. und III.
- ☐ Alle 3 Aussagen

Abbildung 49: Aufgaben des Teiltests *Steigungsaspekte linearer Funktionen*

6.5.2 Analyse der Daten des Teiltests zur Steigung linearer Funktionen

Für jede der sechs Aufgaben wurde ein Punkt vergeben, wenn aus der Lösung ersichtlich wurde, dass der in der Aufgabe angesprochene Steigungsaspekt bekannt ist. Andernfalls wurde die jeweilige Aufgabe mit 0 Punkten bewertet. In Tabelle 68 ist das Bewertungsschema im Detail dargestellt. Mit dieser Codierung ergab sich ein konsistenter Teilttest mit zufriedenstellender Reliabilität ($\alpha = 0.705$).

Item	Kriterium für die Vergabe des Punktes
<i>Bestimmung der Gleichung</i> einer linearen Funktion mit Steigung 2 durch den Punkt (0; 1)	Der Punkt wurde vergeben, wenn in der hingeschriebenen Gleichung der Form $f(x) = mx + n$ der Koeffizient m den Wert 2 hatte.
<i>Anfertigung einer Skizze</i> der Funktion g mit $g(x) = 2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	Der Punkt wurde vergeben, wenn der Graph der Funktion g steiler war als der der Funktion f .
<i>Anfertigung einer Skizze</i> der Funktion h mit $h(x) = -2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	Der Punkt wurde vergeben, wenn der Graph der Funktion h fallend war und schneller fiel als die Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = -x$.
<i>Berechnung der Steigung</i> einer linearen Funktion durch die Punkte (0; 1) und (2; 9)	Der Punkt wurde vergeben, wenn das richtige Ergebnis 4 ermittelt wurde.
<i>Zeichnen der linearen Funktion</i> mit Steigung -2 durch den Punkt (0; -1) in ein vorgegebenes Koordinatensystem	Der Punkt wurde vergeben, wenn eine Gerade mit einer Steigung -2 in das Koordinatensystem gezeichnet wurde.
<i>Deutung der Steigung</i> einer linearen Funktion im Kontext	Der Punkt wurde vergeben, wenn die richtige Antwort angekreuzt wurde (Antwort „Nur Aussagen I. und III.“, siehe Abbildung 49).

Tabelle 68: Bewertungsschema des Teiltests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen

Item	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Bestimmung der Gleichung einer linearen Funktion mit Steigung 2 durch den Punkt (0; 1)	0.328	0.697
Anfertigung einer Skizze der Funktion g mit $g(x) = 2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	0.703	0.572
Anfertigung einer Skizze der Funktion h mit $h(x) = -2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	0.724	0.562
Berechnung der Steigung einer linearen Funktion durch die Punkte (0; 1) und (2; 9)	0.370	0.691
Zeichnen der linearen Funktion mit Steigung -2 durch den Punkt (0; -1) in ein vorgegebenes Koordinatensystem	0.530	0.634
Deutung der Steigung einer linearen Funktion im Kontext	0.068	0.775

Tabelle 69: Trennschärfen des Teiltests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen

Die Trennschärfen sind in Tabelle 69 dargestellt. Bis auf das Item zur Deutung der Steigung einer linearen Funktion im Kontext sind alle Trennschärfen über 0.3 und

damit gut. Die Trennschärfe des Items zur Deutung der Steigung im Kontext ist wesentlich schlechter. Dies ist nicht überraschend, weil hier zusätzlich ein Transfer zur Realität erfolgen muss. Es wird hier also teilweise etwas anderes gemessen als bei den anderen Items. Daher sind die Ergebnisse später mit Vorsicht zu interpretieren.

6.5.3 Ergebnisse des Teiltests zur Steigung linearer Funktionen

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: Mit dem in Tabelle 69 dargestellten Punkteschema konnten in diesem Teilttest maximal sechs Punkte erreicht werden. Die Punkteverteilung ist in Abbildung 50 dargestellt.

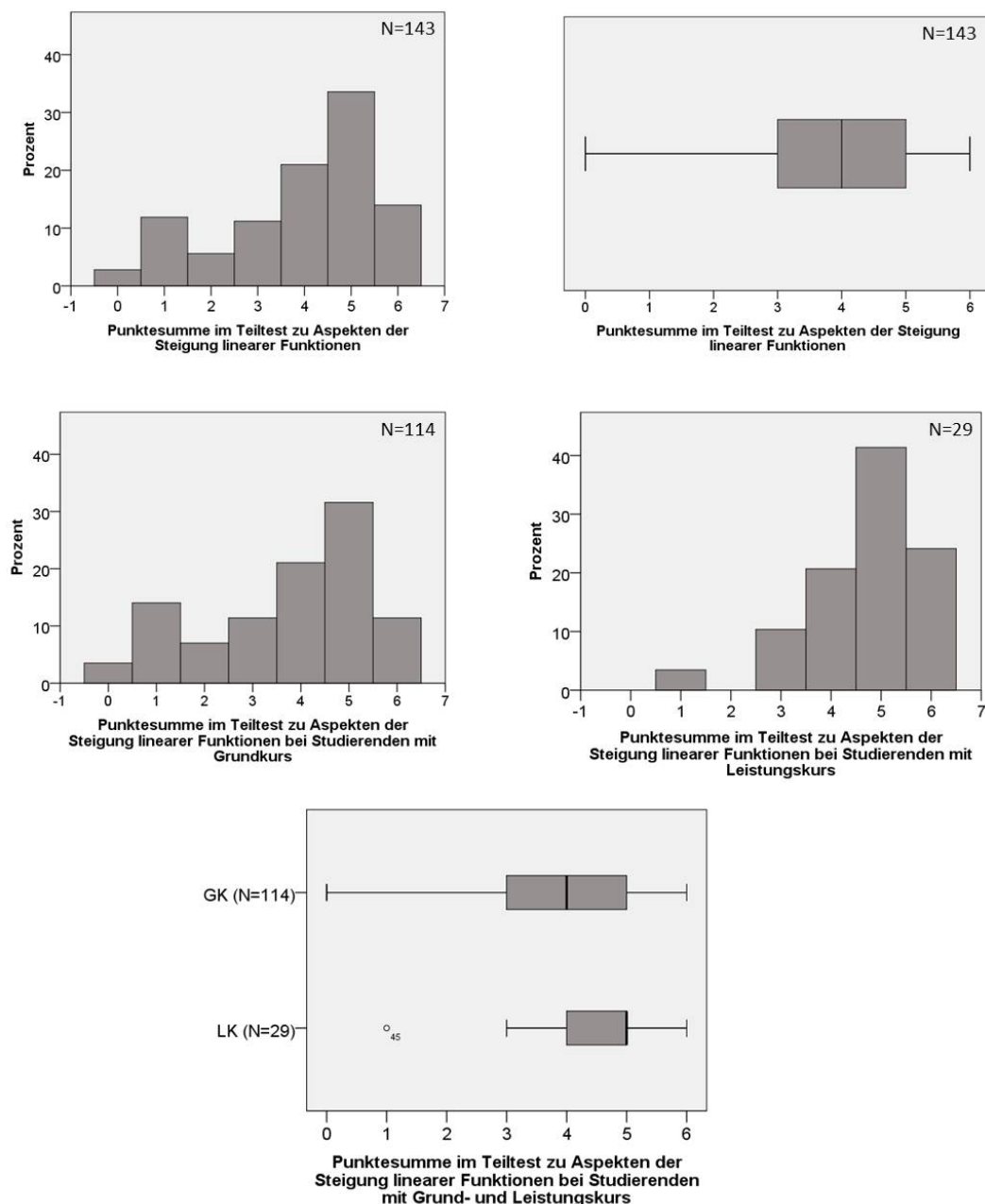


Abbildung 50: Punkteverteilung im Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen

Die Kenngrößen der Verteilung sind in Tabelle 70 zu sehen. Der Mittelwertunterschied zwischen Grund- und Leistungskurs in Tabelle 70 ist signifikant ($\alpha = 0.00071$).

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	3.92	3.73	4.69
Median	4	4	5
Standardabweichung	1.662	1.716	1.168

Tabelle 70: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen

An der Verteilung in Abbildung 50 sieht man, dass viele Probanden 5 von 6 Punkten erreicht haben. Volle Punktzahl haben allerdings nur wenige erreicht (14.0%). Weiterhin sieht man, dass die Probanden mit Leistungskurs im Mittel besser waren, und das bei geringerer Streuung.

Ergebnisse der Einzelitems: Die Ergebnisse der einzelnen Items dieses Teilttests sind in Tabelle 71 dargestellt. Die Spalte „Aspekt“ bezieht sich hierbei auf den jeweils durch die Aufgabe adressierten Aspekt der Steigung nach Nagle u. a. (2013, S.1493).

Item	Aspekt	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
<i>Bestimmung der Gleichung</i> einer linearen Funktion mit Steigung 2 durch den Punkt (0; 1)	Parametric coefficient	91.6%	89.5%	100.0%
<i>Skizze</i> der Funktion $g(x) = 2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	Behavior indicator	72.0%	67.5%	89.7%
<i>Skizze</i> der Funktion $h(x) = -2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	Behavior indicator	70.6%	65.8%	89.7%
<i>Berechnung der Steigung</i> einer linearen Funktion durch die Punkte (0; 1) und (2; 9)	Algebraic ratio	55.9%	52.6%	69.0%
<i>Zeichnen der linearen Funktion</i> mit Steigung -2 durch (0; -1) in ein vorgegebenes Koordinatensystem	Geometric ratio	73.4%	71.6%	82.8%
<i>Deutung der Steigung</i> einer linearen Funktion im Kontext	Functional property	28.7%	26.3%	37.9%

Tabelle 71: Lösungshäufigkeiten bei den einzelnen Aufgaben des Teilttests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen nach Nagle u. a. (2013)

Man sieht, dass der Aspekt *Parametric coefficient* fast allen Studierenden bekannt war. Mehr als 70% der Studierenden konnten den Graphen einer linearen Funktion bei gegebener Gleichung skizzieren bzw. genau in ein Koordinatensystem einzeichnen (Aspekte *Behavior Indicator* und *Geometric ratio*). Ein häufiger Fehler war hierbei,

dass die Steigung als Verschiebung gedeutet wurde (zum Beispiel bei der Aufgabe zur Skizzierung von $g(x) = 2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$ in 14.0% der Fälle).

Die Steigung bei zwei gegebenen Punkten algebraisch korrekt berechnen (Aspekt *Algebraic ratio*) konnten hingegen nur 55.9% der Studierenden. Hier war der häufigste Fehler die Verwendung des Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ (in 8.4% der Fälle).

Besondere Schwierigkeiten hat die Deutung der Steigung im Kontext bereitet. Die Aufgabe ist noch einmal in Abbildung 51 dargestellt. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 72, wobei die richtige Antwort fett hervorgehoben ist. Man sieht in ihr, dass immerhin 56.3% der Probanden Aussage 3 als korrekte Interpretation identifizierten. Aussage 1 wurde dagegen nur von 43.5% der Studierenden als korrekt identifiziert. Hier könnte die Schwierigkeit sein, dass als Bezugseinheit nicht $\Delta x = 1$ gewählt wurde.

e) Bei einem Fahrradverleih mit minutengenauer Abrechnung wird der Preis in Abhängigkeit von der Zeit durch folgende Funktion beschrieben: $p(t) = \frac{7}{5}t + 2$. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden und $p(t)$ den Preis in Euro. Welche Interpretationen des Wertes $\frac{7}{5}$ in der Sachsituation sind möglich?

- I. Der Preis des Fahrrads steigt alle 5 Stunden um 7 Euro.
- II. Zu jeder Stunde ist der Preis des Fahrrads 1,4-mal höher als in der vorangegangenen Stunde.
- III. Der Preis des Fahrrads steigt um 1,40 Euro jede Stunde.

- ☐ Nur Aussage I.
- ☐ Nur Aussage II.
- ☐ Nur Aussage III.
- ☐ Nur Aussagen I. und III.
- ☐ Alle 3 Aussagen

Abbildung 51: Aufgabe des Teilttests zur Deutung der Steigung im Kontext, basierend auf einer Aufgabe von Carlson u. a. (2010)

Antwort	Anteil der Studierenden ($N = 143$)
Nur Aussage 1	7.4%
Nur Aussage 2	26.2%
Nur Aussage 3	20.3%
Nur Aussagen 1 und 3	28.2%
Alle 3 Aussagen	7.9%
Keine Antwort	9.9%

Tabelle 72: Ausgewählte Antworten bei der Aufgabe zur Deutung der Steigung im Kontext, Aufgabe siehe Abbildung 51

Insgesamt sieht man also, dass die Probanden nicht mehr alle Aspekte des Begriffs der Steigung einer linearen Funktion beherrschten, die Grundlage für das Verständnis der Ableitung und ihrer Definition sind. Hierbei bereitete vor allen Dingen die Deutung der Steigung im Kontext Probleme.

6.5.4 Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur Steigung linearer Funktionen mit der Literatur

Wie in Kapitel 6.5.1 dargestellt, basierte der hier konstruierte Vortest auf den Aspekten der Steigung einer linearen Funktion aus einer Studie von Nagle u. a. (2013), die

das *concept image* von Studienanfängern zu diesem Konzept untersuchten. Sie legten 65 Studierenden eines einführenden Calculus-Kurses an einer Universität in den nordöstlichen Bundesstaaten der USA zu Beginn des Wintersemesters 2010 einen aus 13 Items bestehenden Test vor. 5 Items hatten einen Bezug zur Steigung einer linearen Funktion. Sie sind noch einmal in Tabelle 73 dargestellt.

Nummer	Item
1	Was ist die Steigung?
2	Listen Sie alle Darstellungsmöglichkeiten der Steigung auf!
3	Wie wird die Steigung verwendet?
4	An welcher Stelle ist die Verwendung der Steigung angemessen?
5	Geben Sie drei Beispiele zur Steigung an!

Tabelle 73: Items in dem von Nagle et al. durchgeführten Test zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen (Nagle u. a., 2013, S.1499)

Die Antworten wurden dann zu verschiedenen Aspekten der Steigung einer linearen Funktion zugeordnet, wobei Mehrfachzuordnungen einer Antwort möglich waren (ausführliche Beschreibung der Studie siehe Kapitel 4.1.1). In Tabelle 74 werden noch einmal die Aspekte mit Ankerbeispielen aus Nagle u. a. (2013) dargestellt, zu denen hier im Vortest auch je eine Aufgabe konstruiert wurde.

Aspekt	Beschreibung	Ankerbeispiel aus Nagle u. a. (2013)
Parametric coefficient	Steigung als Parameter m in der Gleichung $y = mx + n$ einer linearen Funktion	„In $y = 2x + 10$ ist die Steigung der Gerade 2.“ (Antwort zu Item 3)
Behavior indicator	Steigung als Zahl, die angibt, ob eine Gerade steigt oder fällt, und wie schnell sie dies im Vergleich zu einer anderen Geraden tut	„Sie wird verwendet um zu erkennen, welche der beiden Geraden $y = 2x + 1$ und $y = 5x - 6$ schneller steigt.“ (Antwort zu Item 3)
Algebraic ratio	Steigung als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	„Die Steigung ist gegeben durch die Formel $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.“ (Antwort zu Item 2)
Geometric ratio	Steigung als Verhältnis der Katheten im Steigungsdreieck	„Die Steigung ist das Verhältnis der vertikalen Verschiebung zur horizontalen Verschiebung zwischen zwei Punkten.“ (Antwort zu Item 1)
Functional property	Deutung der Steigung als Änderungsrate bzw. als Proportionalitätsfaktor	„Sie wird verwendet um zu beschreiben, wie schnell sich eine Sache bei Änderung einer anderen Sache ändert.“ (Antwort zu Item 1).

Tabelle 74: Beschreibung der Kategorien zu den im Vortest betrachteten Aspekten der Steigung linearer Funktionen nach Nagle u. a. (2013)

Es gibt einen wesentlichen Unterschied zwischen Aufgaben im Vortest und der Studie von Nagle et al.: Im Vortest wurde zu jedem der 5 Aspekte aus Tabelle 74 eine Aufgabe konstruiert, die diesen Aspekt explizit ansprach. Kann sie gelöst werden, kann man davon ausgehen, dass der Proband den Aspekt kennt. Bei Nagle u. a. (2013) waren die Aufgaben viel offener (siehe Tabelle 73).

Wegen dieser Unterschiede beim Design der Items, ist der Vergleich der Ergebnisse natürlich mit Vorsicht zu sehen, weil man nicht weiß, ob eventuelle Unterschiede aufgrund der unterschiedlichen Itemformulierung oder aufgrund der unterschiedlichen Probanden zustande kamen. Dennoch sind die Anteile der Studierenden, die eine Beherrschung gewisser Aspekte des Konzepts der Steigung einer linearen Funktion zeigten, überraschend ähnlich (siehe Tabelle 75).

Aspekt	Studierende bei Nagle ($N = 65$)	Studienanfänger der Wiwi an der Uni Paderborn ($N = 143$)
Behavior indicator	71%	72.0%
Parametric coefficient	68%	91.6%
Algebraic ratio	54%	52.6%
Geometric ratio	45%	73.4%
Functional property	26%	28.7%

Tabelle 75: Anteile der Studierenden im Vortest und bei Nagle u. a. (2013), die die Kenntnis eines Aspekts der Steigung einer linearen Funktion zeigten

Der einzig wirkliche Unterschied ist bei dem Aspekt *Geometric ratio* erkennbar, deren Kenntnis im Vortest 73.4% demonstrierten, bei Nagle u. a. (2013) aber nur 45%. Dies könnte, wie gesagt, daran liegen, dass es im Vortest eine Aufgabe gab, die nur mit Hilfe dieses Aspektes lösbar war (Einzeichnen der Funktion mit Steigung -2 durch $(0; -1)$ in ein Koordinatensystem). Bei Nagle konnten alle Items auch ohne Nutzung dieses Aspekts beantwortet werden (Items siehe Tabelle 73).

Ein weiterer Vergleich mit der Literatur lässt sich beim Item zur Deutung der Steigung im Kontext anstellen. Byerley u. a. (2016) zeigten in einer Studie, dass die Interpretation von Werten der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \neq 1$ schwerer fiel als für $\Delta x = 1$. In der dortigen Studie, die auch ausführlich in Kapitel 4.1.1 ab S.60 diskutiert wurde, konnten nur 35 von 157 befragten Mathematiklehrern (22,3%) eine akzeptable Deutung der Steigung für beliebiges $\Delta x \neq 1$ angeben (siehe Tabelle 14, (Byerley u. a., 2016, S.602)).

Auch bei dem Item dieses Teilttests zur Deutung der Steigung $\frac{7}{5}$ im Kontext von zeitabhängigen Kosten für einen Fahrradverleih ist eine ähnliche Tendenz zu sehen. Immerhin 56.3% identifizierten das gegebene Statement „Kostenerhöhung um 1,40€ pro Stunde“ als korrekt, aber nur 43.5% der Studierenden das Statement „Kostenerhöhung um 5 Euro alle sieben Stunden“ (siehe Tabelle 72). Auch wenn die Prozentzahlen in diesem Vortest höher als bei Byerley u. a. (2016) sind (die Aufgabenstellung war ja auch eine andere), so ist doch eine ähnliche Tendenz erkennbar, nämlich dass die Deutung der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \neq 1$ schwerer fiel.

Insgesamt sind die Ergebnisse dieses Vortest zu Aspekten der Steigung einer linearen Funktion ähnlich zu denen anderer Studien zum Verständnis der Steigung einer linearen Funktion.

6.6 Der Teilttest zum Differenzenquotienten

6.6.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zum Differenzenquotienten

In diesem Teilttest geht es um das Verständnis des Differenzenquotienten. Dieses ist wichtig für das Verständnis der formalen Definition der Ableitung. Wie bereits in

Kapitel 4.1.2 dargestellt, gibt es bisher sehr wenig Forschung zum Verständnis des Differenzenquotienten. Daher kann hier kaum auf Items in der fachdidaktischen Literatur zurückgegriffen werden. Deshalb ist die zentrale Aufgabe für diesen Teilstest die in Abbildung 52 dargestellte offene Aufgabe. Mit dieser sollte herausgefunden werden, inwieweit die Studierenden den Differenzenquotienten im Kontext deuten können, was laut einer Studie von Malle (2003) mit österreichischen Oberschülern ein großes Problem darstellt (siehe Kapitel 4.1.2).

21) Ein Unternehmen produziert Autos. Die durch den Verkauf von Autos entstehenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl lassen sich durch folgende Kostenfunktion beschreiben:

$$K(x) = x^3 - 100x^2 + 10000x + 72000, \quad x \geq 0$$

Dabei ist x die produzierte Stückzahl und $K(x)$ die bei der Stückzahl x entstehenden Gesamtkosten in Euro.

Es gilt, dass $\frac{K(100) - K(90)}{100 - 90} = 18100$.

Wie lässt sich das Ergebnis in dem obigen Sachkontext interpretieren?

Abbildung 52: Aufgabe des Vortests zur Interpretation des Differenzenquotienten im Kontext

Neben Schwierigkeiten bei der Deutung des Differenzenquotienten hat Malle (2003) festgestellt, dass die Schüler zahlreiche Fehlvorstellungen zur Bedeutung von dessen Vorzeichen hatten (siehe Kapitel 4.1.2). Diese bildeten die Basis für die in Abbildung 53 dargestellte Aufgabe zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten.

14) Gegeben ist eine quadratische Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Was gibt das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ an?

	Richtig	Falsch	Weiß nicht
Das Vorzeichen gibt an, ob sich die Parabel im Intervall $[-2;2]$ oberhalb oder unterhalb der x -Achse befindet.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob $f(2) > f(-2)$ oder $f(2) < f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob die Parabel im Intervall $[-2;2]$ eine positive oder negative Krümmung hat.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob die Funktion im Intervall $[-2;2]$ steigt oder fällt.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y -Achse ober- oder unterhalb der x -Achse liegt.	☐	☐	☐

Abbildung 53: Aufgabe des Vortests zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten

Allerdings ist diese Aufgabe nicht ganz unproblematisch in einem Test für Studienanfänger. Denn die richtige Aussage „ $f(2) > f(-2)$, $f(2) < f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$ “ haben Studienanfänger vermutlich in dieser Form noch nicht gesehen. Außerdem kann man die richtige Aussage direkt am Term ablesen. Das Item prüft damit eigentlich mehr das Lesen von Funktionsausdrücken. Dementsprechend müssen die Ergebnisse später mit Vorsicht interpretiert werden.

Neben Schwierigkeiten bei der Interpretation des Differenzenquotienten und von dessen Vorzeichen sind in der Literatur auch Probleme bei der rechnerischen Bestimmung mittlerer Änderungsraten dokumentiert (siehe Kapitel 4.1.2). So fand Malle (2003) in seiner Studie heraus, dass die Schüler oft arithmetische Mittel bestimmter Funktionswerte zur Bestimmung mittlerer Änderungen verwendeten. Diese Problematik wurde auch in den Vortest mit einer entsprechenden Aufgabe zur Ermittlung einer Durchschnittsgeschwindigkeit aus dem Precalculus-Assessment Test aufgenommen (siehe Abbildung 54). Die von Carlson u. a. (2010, S.135-136) in Interviews ermittelten Ursachen bei der Wahl der Distraktoren sind noch einmal in Tabelle 76 dargestellt.

13) Die durch ein Auto zurückgelegte Wegstrecke in Metern wird durch folgende Funktion beschrieben: $s(t) = t^2 + t$. Dabei ist t in Sekunden angegeben. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitspanne von $t=1s$ bis $t=4s$?

☐ $5 \frac{m}{s}$
☐ $6 \frac{m}{s}$
☐ $9 \frac{m}{s}$
☐ $10 \frac{m}{s}$
☐ $11 \frac{m}{s}$

Abbildung 54: Aufgabe des Vortests zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit, basierend auf Carlson u. a. (2010, S.135)

Ergebnis	Weg zum Ergebnis	Fehler
$5 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)}{4}$	Verwechslung von Änderungsrate und durchschnittlicher Weglänge
$6 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)-s(1)}{4-1}$	keine (richtige Antwort)
$9 \frac{m}{s}$	$\frac{s(4)-s(1)}{2}$	Vermischung mit arithmetischem Mittel
$10 \frac{m}{s}$	$\frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}$	Verwechslung mit arithmetischem Mittel der Zahlen $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ und $s(4)$
$11 \frac{m}{s}$	$\frac{s(1)+s(4)}{2}$	Verwechslung mit arithmetischem Mittel von $s(1)$ und $s(4)$

Tabelle 76: Erklärung der falschen Ergebnisse der Aufgabe aus Abbildung 54, ermittelt in Interviews von Carlson u. a. (2010, S.136)

6.6.2 Analyse der Daten des Teiltests zum Differenzenquotienten

Der Teilttest zum Differenzenquotienten besteht aus 7 Items, die sich auf 3 Aufgaben verteilen. Eine davon ist eine offene Aufgabe, die anderen sind Multiple-choice Aufgaben. Bei der Analyse der Daten wurde in zwei Schritten vorgegangen:

- 1.Schritt: Kategorisierung der Antworten der offenen Aufgabe
- 2.Schritt: Entwicklung eines Punkteschemas für den gesamten Teilttest

1.Schritt – Kategorisierung der Antworten der offenen Aufgabe: Zuerst wurden die Antworten der offenen Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ kategorisiert, wobei $K(x)$ die Kosten von x Autos angibt. Die Kategorienbildung erfolgte induktiv. Dies führte schließlich zu einem System aus 10 Kategorien (siehe Tabelle 77). Eine Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen befindet sich in Tabelle 78.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
D1.	Durchschnittskosten pro Auto zwischen 90 und 100 Autos
D2.	Durchschnittskosten pro Auto
D3.	Kosten pro Auto zwischen 90 und 100 Autos
D4.	Kosten pro Auto
D5.	Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 90 auf 100 Autos
D6.	Mehrkosten für 10 Autos
D7.	Kosten für 10 Autos
D8.	Andere falsche Deutung
D9.	Steigung der Funktion
D10.	Keine gültige Antwort

Tabelle 77: System zur Kategorisierung der Antworten bei der Aufgabe den Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Autos“ zu deuten

Die Antworten der Kategorie D1 sind vollkommen adäquate Interpretationen des Differenzenquotienten, nämlich als Durchschnittskosten pro Auto im Bereich von 90 bis 100 Autos. Bei den Antworten den Kategorien D2-D4 sind richtige Ideen erkennbar. In der Kategorie D2 („Durchschnittskosten pro Auto“) wurde erkannt, dass der Differenzenquotient Durchschnittskosten angibt. Dabei wurde jedoch nicht der passende Produktionsbereich angegeben. Bei den Antworten der Kategorien D3 und D4 („Kosten pro Auto zwischen 90 und 100 Autos“ und „Kosten pro Auto“) ist immerhin noch erkannt worden, dass der Differenzenquotient eine Rate angibt.

Die Kategorien D5-D8 beinhalten falsche Deutungen. Dabei wurde in den Kategorien D5-D7 („Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 90 auf 100 Autos“, „Mehrkosten für 10 Autos“, „Kosten für 10 Autos“) der Differenzenquotient als Kosten für 10 Autos interpretiert, wobei mehr oder weniger stark der Produktionsbereich von 90 bis 100 Autos berücksichtigt wurde. Die Antworten in Kategorie D8 sind andere falsche Deutungen. Die Antworten in den Kategorien D9 und D10 sind keine Deutungen des Differenzenquotienten im Kontext.

Zur Sicherstellung der Intercoderreliabilität wurden die Antworten dann von einem Ökonomiestudenten, der als Korrektor in der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ mitgewirkt hat, noch einmal erneut codiert. Dabei ergab sich ein Koeffizient von $\kappa = 0.92$. Das ist sehr gut.

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
D1. Durchschnittskosten pro Auto zwischen 90 und 100 Autos	Es wird angegeben, dass zwischen dem 90. und 100. Auto ein Auto durchschnittlich bzw. im Mittel 18100 Euro kostet, oder dass die Kosten zwischen 90 und 100 Autos durchschnittlich um 18100 Euro pro Auto steigen.	<i>„Bei 90-100 produzierten Autos ergibt sich ein Durchschnittspreis von 18100 Euro.“</i>
D2. Durchschnittskosten pro Auto	Es wird angegeben, dass die Durchschnittskosten für ein Auto 18100 Euro betragen (ohne Bezug auf den Produktionsbereich 90-100).	<i>„18100 ist der Durchschnittspreis eines Autos.“</i>
D3. Kosten pro Auto zwischen 90 und 100 Autos	Es wird angegeben, dass die Kosten pro Auto zwischen dem 90. Und 100. Auto bei 18100 Euro pro Stück liegen.	<i>„Wenn 90-100 Autos produziert werden, betragen die Kosten pro Stück 18100 Euro.“</i>
D4. Kosten pro Auto	Es wird angegeben, dass die Kosten pro Auto bei 18100 Euro liegen.	<i>„Die Produktionskosten für ein Auto betragen 18100 Euro.“</i>
D5. Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 90 auf 100 Autos	Es wird angegeben, dass sich die Kosten um 18100 Euro erhöhen, wenn die Produktion von 90 auf 100 Autos erhöht wird (oder verringern, wenn man die Produktion senkt).	<i>„Wenn man 10 Autos mehr produziert (von 90 auf 100) zahlt man in diesem Fall 18100 Euro.“</i>
D6. Mehrkosten für 10 Autos	Es wird angegeben, dass 10 Autos Mehrkosten von 18100 Euro verursachen bzw. die Kosten dann um diesen Wert steigen (ohne Bezug auf den Produktionsbereich 90-100).	<i>„Die Mehrkosten bei Produktion von 10 Stück betragen 18100 Euro.“</i>
D7. Kosten für 10 Autos	Es wird angegeben, dass 10 Autos 18100 Euro kosten (ohne Bezug auf den Produktionsbereich 90-100)	<i>„Bei einer Stückzahl von 10 Autos entstehen Kosten von 18100 Euro.“</i>
D8. Andere falsche Deutung	Es wird eine andere falsche Deutung des Differenzenquotienten angegeben.	<i>„Die Grenzkosten betragen 18100. Also $K'(x) = 18100$.“</i>
D9. Steigung der Funktion	Es wird angegeben, dass der Differenzenquotient die Steigung ist (ohne Bezug zum Kontext).	<i>„Das ist die Steigung $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$“</i>
D10. Keine sinnvolle Antwort	Es wird keine gültige Antwort gegeben, was im Detail folgende Antwortvarianten umfasst: 1. Keine Antwort 2. Unverständliche Antworten 3. (richtige) Antworten, die nichts mit der Aufgabe zu tun haben.	1. <i>„18100 sind die Kosten“</i> 2. <i>„Fixe Kosten betragen 72000 Euro.“</i>

Tabelle 78: Beschreibung der Kategorien der Antworten zur Deutung des Differenzenquotienten $\frac{K(100) - K(90)}{100 - 90}$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Autos“

2.Schritt – Entwicklung eines Punkteschemas für den gesamten Teilttest: Bei den sechs Multiple-choice Aufgaben wurde jeweils 1 Punkt für die korrekte Antwort gegeben. Für falsche Antworten wurden 0 Punkte vergeben. Bei der offenen Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten im Kostenkontext erfolgte zusätzlich eine Abstufung. Bei einer vollständig korrekten Antwort (Kategorie D1 aus Tabelle 77) wurden zwei Punkte vergeben. Waren richtige Ideen der Durchschnittskosten (unter Vernachlässigung des Produktionsbereiches) oder der Rate erkennbar, wurde noch ein Punkt vergeben (Kategorien D2-D4, siehe Tabelle 77). Andernfalls wurde die Antwort mit 0 Punkten bewertet.

Überprüfung von Reliabilität und innerer Konsistenz: Mit dieser Codierung ergab sich dann für Cronbachs α der Wert $\alpha = 0.587$. Das ist nicht zufriedenstellend. Ein genauerer Blick auf die Trennschärfen und die Cronbachs α bei Weglassen eines Items zeigt hier problematische Items (siehe Tabelle 79).

Item	Inhalt	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Aufgabe 13	Aufgabe zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate	0.295	0.553
Aufgabe 14 Aussage 1	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob die Parabel in dem Bereich oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegt.	0.374	0.525
Aufgabe 14 Aussage 2	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob $f(2) < f(-2)$, $f(2) > f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$.	0.420	0.507
Aufgabe 14 Aussage 3	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob die Parabel in dem Bereich eine positive oder negative Krümmung hat.	0.123	0.611
Aufgabe 14 Aussage 4	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob die Funktion im Intervall $[-2; 2]$ steigt oder fällt.	0.196	0.584
Aufgabe 14 Aussage 5	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y -Achse oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegt.	0.475	0.479
Aufgabe 21	Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten im Kontext	0.262	0.566

Tabelle 79: Trennschärfen des Teiltests zum Verständnis des Differenzenquotienten

Das Item mit der Aussage „Das Vorzeichen gibt an, ob die Parabel im Intervall $[-2; 2]$ eine positive oder negative Krümmung hat.“ war besonders problematisch. Das ist nicht überraschend, weil der Begriff der Krümmung in der Schule nicht explizit behan-

delt wird. Diese Aussage wurde zu leichtfertig aus Malle (2003) übernommen. Gemeint war, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist. Das müsste bei der nächsten Version des Tests geändert werden. Für die weitere Auswertung des Tests wird dieses Item ausgeschlossen.

Das andere problematische Item war die Aussage „Das Vorzeichen gibt an, ob die Funktion im Intervall $[-2; 2]$ steigt oder fällt.“ Hier könnte die etwas ungenaue Formulierung ebenfalls ein Problem gewesen sein, weil nicht klar herausgestellt ist, dass monotonen Steigen oder Fallen entlang des gesamten Intervalls $[-2; 2]$ gemeint ist (oder vielleicht nur insgesamt ein Fallen oder Steigen von $x = -2$ im Vergleich zu $x = 2$). Daher wurde auch dieses Item herausgenommen.

Mit Herausnahme dieser beiden Items ergab sich ein Wert von $\alpha = 0.624$. Der ist zwar nicht gut, aber hinnehmbar, wenn die Interpretationen mit der entsprechenden Vorsicht stattfinden. Die Trennschärfen sind dann auch besser (siehe Tabelle 80). Dennoch müsste dieser Teilttest vor einem erneuten Einsatz erneut überarbeitet werden.

Item	Inhalt	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Aufgabe 13	Aufgabe zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate	0.342	0.587
Aufgabe 14 Aussage 1	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob die Parabel in dem Bereich oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegt.	0.424	0.547
Aufgabe 14 Aussage 2	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob $f(2) < f(-2)$, $f(2) > f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$.	0.314	0.601
Aufgabe 14 Aussage 5	Aussage: Das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ einer quadratischen Funktion auf $[-2; 2]$ gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y -Achse oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegt.	0.568	0.460
Aufgabe 21	Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten im Kontext	0.257	0.632

Tabelle 80: Trennschärfen des Teilttests zum Verständnis des Differenzenquotienten nach Herausnahme des Items mit dem Wort „Krümmung“ und des Items mit der unscharfen Formulierung zum Monotonieverhalten der Funktion

6.6.3 Ergebnisse des Teilttests zum Differenzenquotienten

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: In diesem Teilttest konnten maximal 6 Punkte erreicht werden (nach Herausnahme von zwei Items blieben 5 Items, von denen die offene Aufgabe mit zwei Punkten bewertet wurde, siehe Kapitel 6.6.2). Die Punkteverteilung der Studierenden ist in Abbildung 55 dargestellt. Die statistischen Kenngrößen befinden sich in Tabelle 81. Der Mittelwertunterschied zwischen Grund- und Leistungskurs ist hierbei *nicht* signifikant zum Niveau $\alpha = 0.05$.

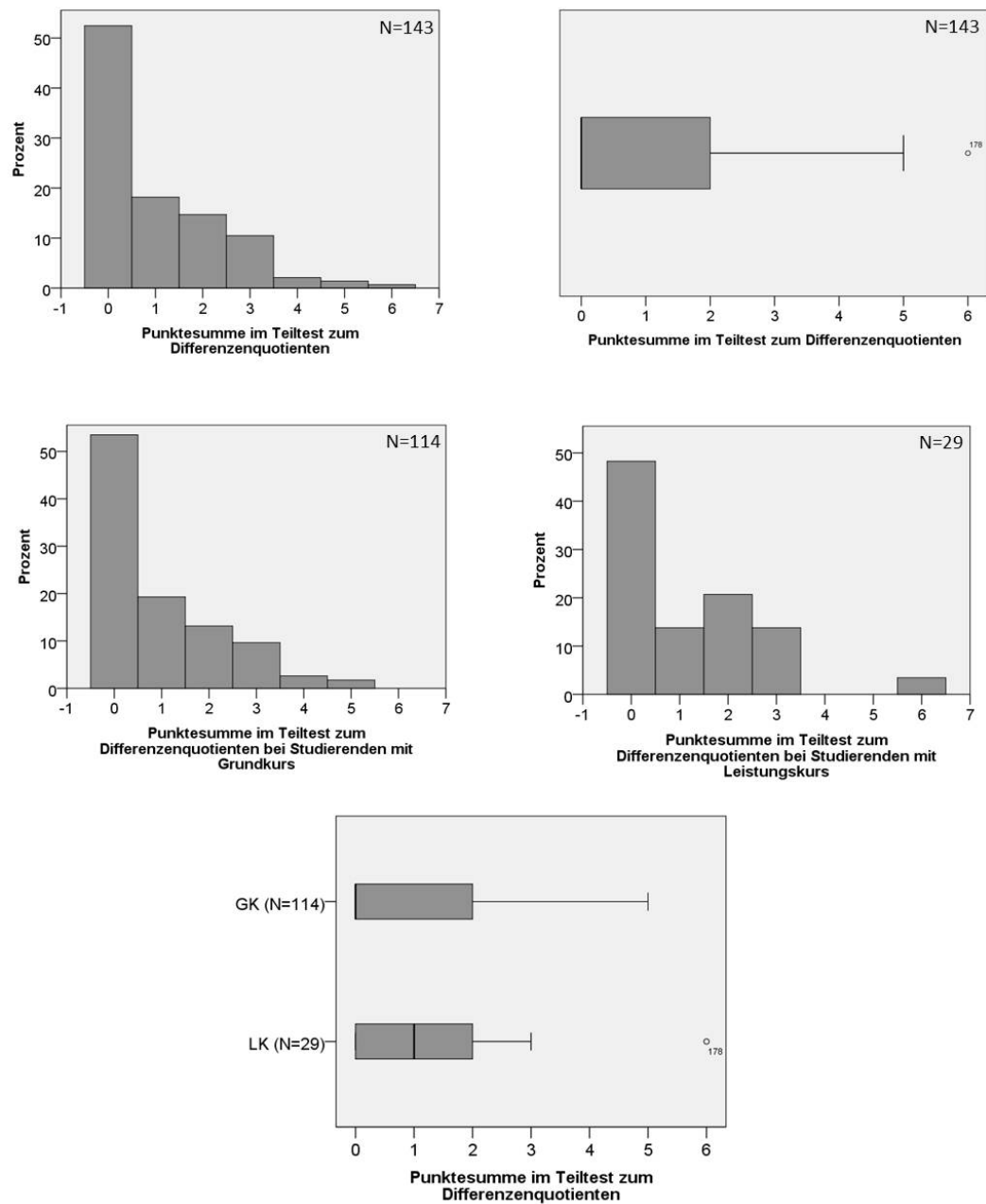


Abbildung 55: Punkteverteilung im Teilttest zum Differenzenquotienten

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	0.99	0.94	1.17
Median	0	0	1
Standardabweichung	1.300	1.257	1.466

Tabelle 81: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zum Differenzenquotienten

Man sieht einen sehr starken Bodeneffekt. Lediglich ein Proband mit Leistungskurs hat die Maximalpunktzahl erreicht. Über die Hälfte der Probanden mit Grundkurs hat gar keinen Punkt erreicht. Die Probanden mit Leistungskurs waren nicht signifikant besser.

Nun könnte man meinen, dass dieser Teilttest generell zu schwer gewesen ist, weil die abgefragten Dinge gar nicht in der Schule behandelt würden. Allerdings sind die Inhalte der Aufgaben explizit Gegenstand des Schulstoffs (siehe zum Beispiel Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2013, S.25)).

Ergebnisse der Einzelitems: *Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten:* Zunächst werden die Ergebnisse der offenen Aufgabe zur Interpretation des Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90} = 18100$ im Detail dargestellt ($K(x)$ gibt die Kosten bei einer Produktion von x Autos an). Die Verteilung der Antworten der Studierenden nach dem in Tabelle 77 dargestellten Kategoriensystem ist in Abbildung 56 zu sehen.

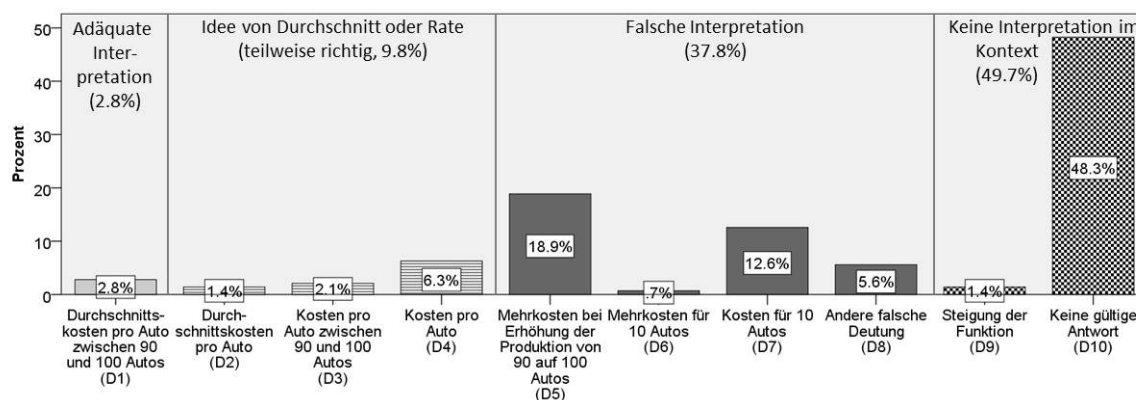


Abbildung 56: Antworten der Aufgabe das Ergebnis $\frac{K(100)-K(90)}{100-90} = 18100$ im Kontext zu interpretieren ($N = 143$)

Man sieht in Abbildung 56 folgende Dinge:

1. Nur 2.8% Studierende gaben eine vollkommen adäquate Interpretation des Differenzenquotienten an (Kategorie D1).
2. Bei weiteren 9.8% waren richtige Ideen erkennbar (Idee des Durchschnitts bei Kategorie D2, und Idee der Rate bei Kategorien D3-D4).
3. 32.2% interpretierten den Differenzenquotienten als absoluten Kostenzuwachs.
4. Fast die Hälfte der Studierenden gab gar keine Interpretation des Differenzenquotienten im Kontext an (Kategorien D9-D10).

Offenbar waren nur wenige Studierende in der Lage, den gegebenen Differenzenquotienten korrekt zu interpretieren. Häufig trat eine Verwechslung mit dem absoluten Kostenzuwachs auf. Hier stellt sich allerdings die Frage, ob dies wirklich eine Fehlvorstellung oder eine Art „Ausweichantwort“ ist, weil die Studierenden keine Idee für eine adäquate Deutung hatten. Natürlich sollte man mit Verallgemeinerungen zu Aussagen zum Verständnis des Differenzenquotienten aus diesem einen Item vorsichtig sein.

Aufgabe zur Deutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten: Auch bei der Deutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten hatten unsere Studienanfänger Schwierigkeiten. Sie sollten im Vortest das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ für $f(x) = x^2 + 2x + 2$ deuten (siehe Abbildung 53). Nach Herausnahme zweier Aussagen aus der Auswertung (siehe Kapitel 6.6.2), blieben noch drei Aussagen übrig, bei denen die Studierenden angeben sollten, ob die Deutung stimmt:

Aussage 1: Das Vorzeichen gibt an, ob sich die Parabel im Intervall $[-2; 2]$ oberhalb oder unterhalb der x -Achse befindet.

Aussage 2: Das Vorzeichen gibt an, ob $f(2) > f(-2)$ oder $f(2) < f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$.

Aussage 3: Das Vorzeichen gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y -Achse ober- oder unterhalb der x -Achse liegt.

Wie viele Studierende die einzelnen Aussagen korrekt bewerteten, ist in Tabelle 82 dargestellt. Die konkret gewählten Antwortoptionen sind in Tabelle 83 zu sehen. Die richtige Antwort ist jeweils fett hervorgehoben.

	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Aussage 1	19.6%	18.4%	24.1%
Aussage 2	19.6%	19.3%	20.7%
Aussage 3	26.6%	23.7%	37.9%

Tabelle 82: Lösungshäufigkeiten der Aufgabe zur Bewertung von Aussagen über die Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten

	richtig	falsch	weiß nicht	keine Antwort
Aussage 1	25.6%	19.6%	35.0%	20.3%
Aussage 2	19.6%	17.5%	43.4%	19.6%
Aussage 3	18.9%	26.6%	33.6%	21.0%

Tabelle 83: Gewählte Antworten bei der Aufgabe zur Bewertung von Aussagen über die Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten

Man erkennt aus Tabelle 83, dass ungefähr ein Drittel der Studierendenangaben, die Antworten nicht gewusst zu haben. Sie hatten also keine Idee von der Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten. Bei der korrekten Aussage 2, dass das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ angibt, ob $f(-2) < f(2)$, $f(-2) = f(2)$ oder $f(-2) > f(2)$, war der Anteil bei der Option „weiß nicht“ sogar über 40%. Anscheinend hatten viele Studierende eine solche Aussage noch nicht gesehen. Das spricht entweder dafür, dass sich die Studienanfänger nie zuvor mit der Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten beschäftigt hatten. Es könnte aber auch ein Hinweis darauf sein, dass die Aufgabe eher ungeeignet war um Vorstellungen der Studierenden zum Vorzeichen des Differenzenquotienten zu ermitteln.

Aufgabe zur Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit: Zu guter Letzt enthielt der Teilttest noch das Item zur Ermittlung einer Durchschnittsgeschwindigkeit aus dem Precalculus-Assessment Test (Carlson u. a., 2010, S.136). Dieses ist noch einmal in Abbildung 57 zu sehen.

13) Die durch ein Auto zurückgelegte Wegstrecke in Metern wird durch folgende Funktion beschrieben: $s(t) = t^2 + t$. Dabei ist t in Sekunden angegeben. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitspanne von $t=1s$ bis $t=4s$?

☐ $5 \frac{m}{s}$ ☐ $6 \frac{m}{s}$ ☐ $9 \frac{m}{s}$ ☐ $10 \frac{m}{s}$ ☐ $11 \frac{m}{s}$

Abbildung 57: Aufgabe des Vortests zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate

Die Lösungshäufigkeit der Aufgabe betrug nur 17.5% (18.4% bei Studierenden mit Grundkurs und nur 13.8% bei Studierenden mit Leistungskurs). Also brachten nur 17.5% die Durchschnittsgeschwindigkeit mit dem Differenzenquotienten in Verbindung.

Antwort	Anteil Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Anteil GK ($N = 114$)	Anteil LK ($N = 29$)
$5 \frac{m}{s}$	11.2%	12.3%	6.9%
$6 \frac{m}{s}$	17.5%	18.4%	13.8%
$9 \frac{m}{s}$	13.3%	12.3%	17.2%
$10 \frac{m}{s}$	34.3%	34.2%	34.5%
$11 \frac{m}{s}$	9.8%	7.9%	17.2%
keine Antwort	14.0%	14.9%	10.3%

Tabelle 84: Verteilung der Antworten bei der Aufgabe aus Abbildung 57

Die Verteilung auf die einzelnen Distraktoren der Aufgabe ist in Tabelle 84 dargestellt (die richtige Antwort ist fett hervorgehoben). Sehr oft wurden $10 \frac{m}{s} = \frac{s(1)+s(2)+s(3)+s(4)}{4}$ angegeben. Die Studierenden verwendeten also ein arithmetisches Mittel von Funktionswerten der Ausgangsfunktion zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit. Dies könnte eine echte Fehlvorstellung sein, kann aber auch durch den Begriff der „Durchschnittsgeschwindigkeit“ verursacht worden sein, der zu dieser falschen Mittelwertbildung von Werten der gegebenen Weg-Zeit Funktion verleitet. Auf jeden Fall verwendeten viele Studierende zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit *nicht* den Differenzenquotienten.

Insgesamt ist das Vorwissen der Studienanfänger zum Verständnis des Differenzenquotienten nicht befriedigend. Im Mittel wurde nur 1 von 6 Punkten erreicht (siehe Kapitel 81). Bei Studienanfängern mit Grundkurs hat die Hälfte der Studierenden gar keinen Punkt erreicht, obwohl sowohl die Berechnung als auch die Interpretation der mittleren Änderungsrate Gegenstand des Schulstoffs sein sollten (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.25). Möglicherweise wurden dort aber Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate nur kurz „als Durchgangsstation zur Ableitung“ behandelt, weshalb die Studienanfänger die inhaltliche Bedeutung des Differenzenquotienten wieder vergessen haben.

6.6.4 Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zum Differenzenquotienten mit der Literatur

Wie in Kapitel 4.1.2 dargestellt wurde, hat Malle (2003) in einer Studie mit österreichischen Oberschülern herausgefunden, dass viele der dortigen Probanden kein Verständnis des Differenzenquotienten zeigten. Nur 7.3% der dort befragten Schüler konnten adäquat sagen, was der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ inhaltlich bedeutet (Malle, 2003, S.57). Auch bei den von uns getesteten Studienanfängern konnten nur 2.8% den Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ in einem Kostenkontext adäquat deuten (siehe Abbildung 56, Kategorie D1). Bei Malle (2003) sahen viele Schüler den Differenzenquotienten als Ableitung an. Diese Fehlinterpretation wurde hier nur zweimal genannt. Stattdessen interpretierten 32.2% unserer Studienanfänger den Differenzenquotienten als Kostenzuwachs (Kategorien D5-D7 in Abbildung 56). Die Unterschiede bei den Fehlinterpretationen könnten daran liegen, dass bei Malle eine Deutung des abstrakten Differenzenquotienten angegeben werden sollte, während er hier im Kontext interpretiert werden sollte. Der abstrakte Ausdruck könnte stärker zur Idee „Ableitung“ hinführen. Dennoch konnten sowohl bei Malle als auch in unserem Vortest nur wenige Studierende den Differenzenquotienten adäquat inhaltlich deuten.

Auch bei der Frage nach der Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten in diesem Vortest, die ebenfalls auf der Studie von Malle (2003) basierte, zeigten sich hier Fehlvorstellungen wie bei Malle (siehe Tabelle 83), nämlich:

1. Das Vorzeichen gibt an, ob sich die Funktion oberhalb oder unterhalb der x -Achse befindet.
2. Das Vorzeichen gibt an, ob sich die Funktion mit der y -Achse ober- oder unterhalb der x -Achse liegt.

Allerdings haben auch über ein Drittel unserer Probanden angegeben, dass sie die Antwort nicht wüssten (siehe Tabelle 83). Das spricht dafür, dass sich viele Studienanfänger vorher nicht mit der Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten auseinandergesetzt haben.

Bei der Berechnung der mittleren Änderungsrate ist in der Literatur außerdem das Problem dokumentiert, dass hierfür oft arithmetische Mittel gewisser Funktionswerte verwendet werden (Malle, 2003; Carlson u. a., 2010). Auch dies zeigte sich hier im Vortest bei einem Item, bei dem die Durchschnittsgeschwindigkeit von $s(t) = t^2 + t$ im Intervall von $t = 1s$ bis $t = 4s$ bestimmt werden sollte (siehe Tabelle 84).

Dieses Item wurde auch 1501 Studierenden an der Arizona State University im Rahmen des Precalculus-Assessment Tests vorgelegt (Carlson u. a., 2010, S.136). Die Verteilung dort im Vergleich zu der hier ermittelten Verteilung der Antworten ist in Tabelle 85 dargestellt (die richtige Antwort ist fett hervorgehoben).

Die Ergebnisse der Studienanfänger an der Universität Paderborn sind bei dieser Aufgabe sehr ähnlich zu denen der Studierenden in den USA (Anteil korrekter Lösungen, Häufigkeit der fehlerhaften Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit durch arithmetische Mittel von Funktionswerten der Ausgangsfunktion $s(t)$). Das ist schon bemerkenswert, denn die Vorbildung der Probanden könnte sehr unterschiedlich sein. Bei den Studienanfängern der Universität Paderborn hätte aber zumindest das Konzept der mittleren Änderungsrate und deren Berechnung durch den Differenzenquotienten aus

Antwort	Teilnehmer am PCA ($N = 1501$)	Studienanfänger der WiWi an der Uni Paderborn ($N = 143$)
$5 \frac{m}{s}$	13%	11.2%
$6 \frac{m}{s}$	15%	17.5%
$9 \frac{m}{s}$	14%	13.3%
$10 \frac{m}{s}$	38%	34.3%
$11 \frac{m}{s}$	19%	9.8%
keine Antwort	-	14.0%

Tabelle 85: Vergleich der Antworten bei der Aufgabe zur Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften an der Uni Paderborn und Teilnehmern des PCA an der Arizona State University

der Schule bekannt sein müssen (siehe zum Beispiel (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.25)). Hier wären Ursachen dafür interessant, weshalb hier trotzdem derart häufig falsche Berechnungsmöglichkeiten verwendet wurden.

Insgesamt passen die Ergebnisse dieses Teilttests zum Differenzenquotienten und zur mittleren Änderungsrate zu in der Literatur dokumentierten Ergebnissen: Nur sehr wenige Probanden konnten den Differenzenquotienten adäquat interpretieren, und selbst bei der Aufgabe zur Bestimmung einer mittleren Änderungsrate einer Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ (Durchschnittsgeschwindigkeit) verwendeten viele Studierende nicht den Differenzenquotienten sondern ein arithmetisches Mittel von Funktionswerten der Ausgangsfunktion $s(t)$.

6.7 Der Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung

6.7.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung

In diesem Teilttest wurde untersucht, inwieweit die Studierenden mit der geometrischen Deutung der ersten Ableitung als Steigung der Funktion in einem Punkt umgehen können. Die geometrische Deutung der Ableitung spielt in den Wirtschaftswissenschaften eine große Rolle, wenn funktionale Zusammenhänge in der Ökonomie graphisch veranschaulicht werden, wie beispielsweise die Phasen ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen (Wöhe u. Döring, 2013, S.309). Weiterhin wird die Steigung oft direkt im Zusammenhang mit der Ableitung bzw. den Grenzkosten genannt (Wöhe u. Döring, 2013, S.300).

Der Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung umfasst 11 Items, die sich in den Aufgaben 3-6 des Gesamttests befinden. Bei *Aufgabe 3* wurden vier Funktionsgraphen vorgegeben. Dabei sollten die Graphen herausgefunden werden, bei denen $f'(1) > 0$ ist. Die Aufgabe ist in Abbildung 58 dargestellt.

3) Entscheiden Sie, für welche der folgenden Funktionen die Aussage $f'(1) > 0$ zutrifft.

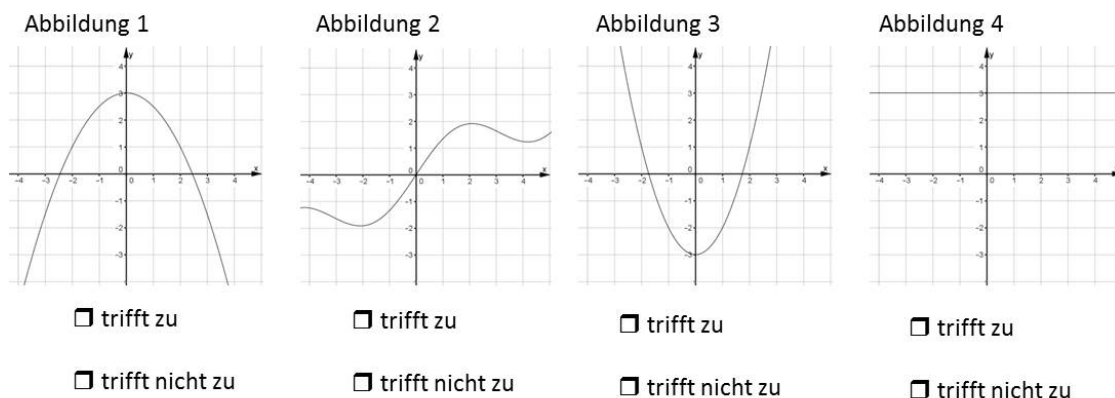


Abbildung 58: Aufgabe 3 des Vortests

Als Funktionen wurden gewählt:

1. eine nach unten geöffnete Parabel mit $f(1) > 0$ aber $f'(1) < 0$
2. eine Funktion mit $f(1) > 0$ und $f'(1) > 0$ (Gleichung: $f(x) = 0,5x + \sin(x)$)
3. eine nach oben geöffnete Parabel mit $f(1) < 0$ aber $f'(1) > 0$
4. eine konstante Funktion mit $f(1) > 0$

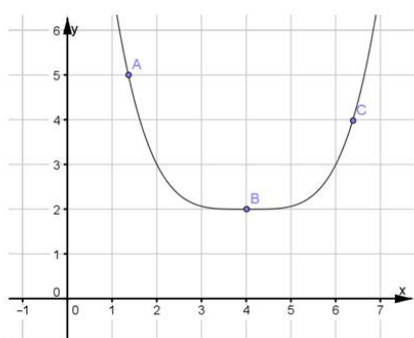
Demnach gilt für die zweite und dritte Funktion, dass $f'(1) > 0$. Bei der ersten und dritten Funktion, haben Funktion und Ableitung das entgegengesetzte Vorzeichen. Hier wird falsch angekreuzt, wenn unterstellt wird, dass Funktion und Ableitung dasselbe Vorzeichen haben (siehe auch Kapitel 4.3.1 bzw. (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.6-7)), oder aber wenn Werte der Ableitung mit Funktionswerten der Ausgangsfunktion verwechselt werden, was in der Literatur als slope/height-confusion bezeichnet wird (Leinhardt u. a., 1990, S.37).

Aufgabe 4, die aus dem Nachtest zum eVorkurs von VEMINT entnommen wurde (VEMINT, 2014a), ist sehr ähnlich dazu. Sie ist in Abbildung 59 dargestellt. Offensichtlich gilt am Punkt A $f'(x) < 0$, bei B $f'(x) = 0$ und bei C $f'(x) > 0$. Hier wird bei A und C die falsche Entscheidung getroffen, wenn die Werte der Ableitungen mit den Funktionswerten verwechselt werden (slope/height-confusion).

In *Aufgabe 5*, die aus dem VEMINT-Eingangstest 2014 übernommen wurde (VEMINT, 2014b), sollen bei drei gegebenen Funktionsgraphen, die sich an der Stelle $x = 4$ schneiden, die Größen der Ableitungen an der Stelle 4 geordnet werden. Die Aufgabe ist in Abbildung 60 dargestellt.

Die richtige Antwort ist die zweite Antwort. Distraktor 1 wird gewählt, wenn die Steigungen der Graphen an der oberen Kante des Koordinatensystems verglichen werden. Distraktor 3 wird gewählt, falls die Graphen gemäß der Reihenfolge der x-Werte beim „Austritt aus dem Koordinatensystem nach oben“ betrachtet werden. In dieser Aufgabe ist zentral, dass die Ableitung an einer Stelle nur lokal etwas über die Steigung des Graphen aussagt.

4) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion:

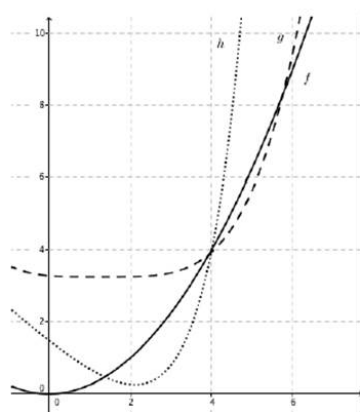


Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Aussage an!

Punkt	1. Ableitung		
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
A	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐

Abbildung 59: Aufgabe 4 des Vortests

5) Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h .



Quelle: VEMINT Eingangstest 2014

Welche Beziehung gilt für die Ableitungen im Punkt $P=(4,4)$?

1. ☐ $f'(4) < g'(4) < h'(4)$
2. ☐ $g'(4) < f'(4) < h'(4)$
3. ☐ $h'(4) < g'(4) < f'(4)$

Abbildung 60: Aufgabe 5 des Vortests

In *Aufgabe 6* geht es um den Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie im Zusammenhang mit Extremwerten, für deren Verständnis ebenfalls die geometrische Deutung der Ableitung notwendig ist. Die Aufgabe ist angelehnt an eine Aufgabe aus dem Eingangstest 2014 des Projekts KOM@ing (KOM@ing, 2014). Gegeben ist der in Abbildung 61 dargestellte Funktionsgraph.

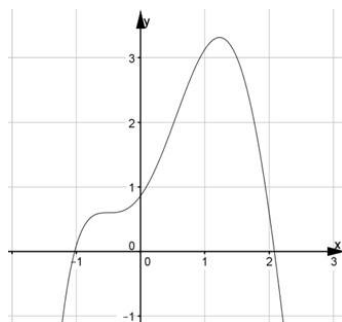


Abbildung 61: Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests

Folgende Aussagen sollen mit richtig oder falsch bewertet werden:

1. Die erste Ableitung von f hat für $-1 < x < 2$ genau eine Nullstelle.
2. Die erste Ableitung besitzt für $0 < x < 1$ ein lokales Maximum.
3. Die erste Ableitung besitzt für $1 < x < 2$ ein lokales Maximum.

Die erste Aussage ist falsch, da die erste Ableitung sowohl in $[-1; 0]$ als auch in $[1; 2]$ eine Nullstelle hat. Wird das Vorhandensein einer Nullstelle der Ableitung mit dem Vorhandensein eines lokalen Extremums gleichgesetzt, so wird diese Aussage fälschlicherweise als richtig gewertet. Bei der zweiten und dritten Aussage wird wieder die slope/height-confusion adressiert.

6.7.2 Analyse der Daten des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung

Wie bereits gesagt, besteht der Teilttest aus 11 Multiple-choice Items. Die richtige Antwort wurde jeweils mit einem Punkt bewertet, eine falsche Antwort mit 0 Punkten. Dementsprechend erfolgte eine Codierung der Items mit 0 oder 1. Insgesamt ergab sich damit ein reliabler Teilttest, bei dem Cronbachs α den Wert $\alpha = 0.755$ hatte.

Die Trennschärpen der Items sind in Tabelle 86 dargestellt. Sie sind bis auf ein Item alle akzeptabel mit einem Wert über 0.25. Das letzte Item mit der falschen Aussage „Die erste Ableitung besitzt für $1 < x < 2$ ein lokales Maximum.“ zu dem in Abbildung 61 dargestellten Funktionsgraph hat einen etwas schlechteren Wert als alle anderen. Es ist nicht klar, woran das liegt. Es kann sein, dass hier bereits der Begriff des „lokalen Maximums“ so starke Assoziationen zu einem lokalen Maximum der Ausgangsfunktion hervorrief, dass hier bereits viele ohne genaues Lesen der Aussage diese fälschlicherweise als richtig ansahen.

Item	Inhalt	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Aufgabe 3 Aussage 1	nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt auf Ordinate, Frage: $f'(1) > 0$?	0.536	0.720
Aufgabe 3 Aussage 2	Funktion f mit $f(x) = 0,5x + \sin(x)$, Frage: $f'(1) > 0$?	0.383	0.740
Aufgabe 3 Aussage 3	nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt auf Ordinate, Frage: $f'(1) > 0$?	0.453	0.731
Aufgabe 3 Aussage 4	Konstante Funktion mit $f(1) > 0$, Frage: $f'(1) > 0$?	0.413	0.736
Aufgabe 4	Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt A	0.565	0.717
Aufgabe 4	Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt B	0.548	0.718
Aufgabe 4	Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt C	0.540	0.720
Aufgabe 5	Ordnen der Größen der Ableitungen bei drei Funktionen bei $x = 4$	0.250	0.757
Aufgabe 6 Aussage 1	Anzahl der Nullstellen der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen	0.299	0.751
Aufgabe 6 Aussage 1	Aussage 1 über lokales Maximum der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen	0.250	0.756
Aufgabe 6 Aussage 1	Aussage 2 über lokales Maximum der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen	0.226	0.758

Tabelle 86: Trennschärfen der Items aus dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung

6.7.3 Ergebnisse des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: Die in diesem Teilttest erreichten Punktzahlen sind in Abbildung 62 dargestellt. Es konnten maximal 11 Punkte erreicht werden. Die Kenngrößen der Verteilungen befinden sich in Tabelle 87. Der Mittelwertunterschied zwischen den Studienanfängern mit Grund- und Leistungskurs ist signifikant zum Niveau $\alpha = 0.002$.

Im Mittel wurden 6.08 von 11 Punkten erreicht, wobei die Studierenden mit Leistungskurs mit Mittel signifikant besser waren. Weiterhin gab es eine ziemlich große Streuung der Punktzahlen mit Peaks bei 7 oder 8 Punkten (ein leichter Deckeneffekt). Unterhalb des Medians von 7 Punkten war die Streuung größer als oberhalb. Aus den unterschiedlichen Verteilungen der Probanden mit Grund- und Leistungskurs sieht man außerdem, dass die Studienanfänger mit Leistungskurs wesentlich zu dem Deckeneffekt beigetragen haben.

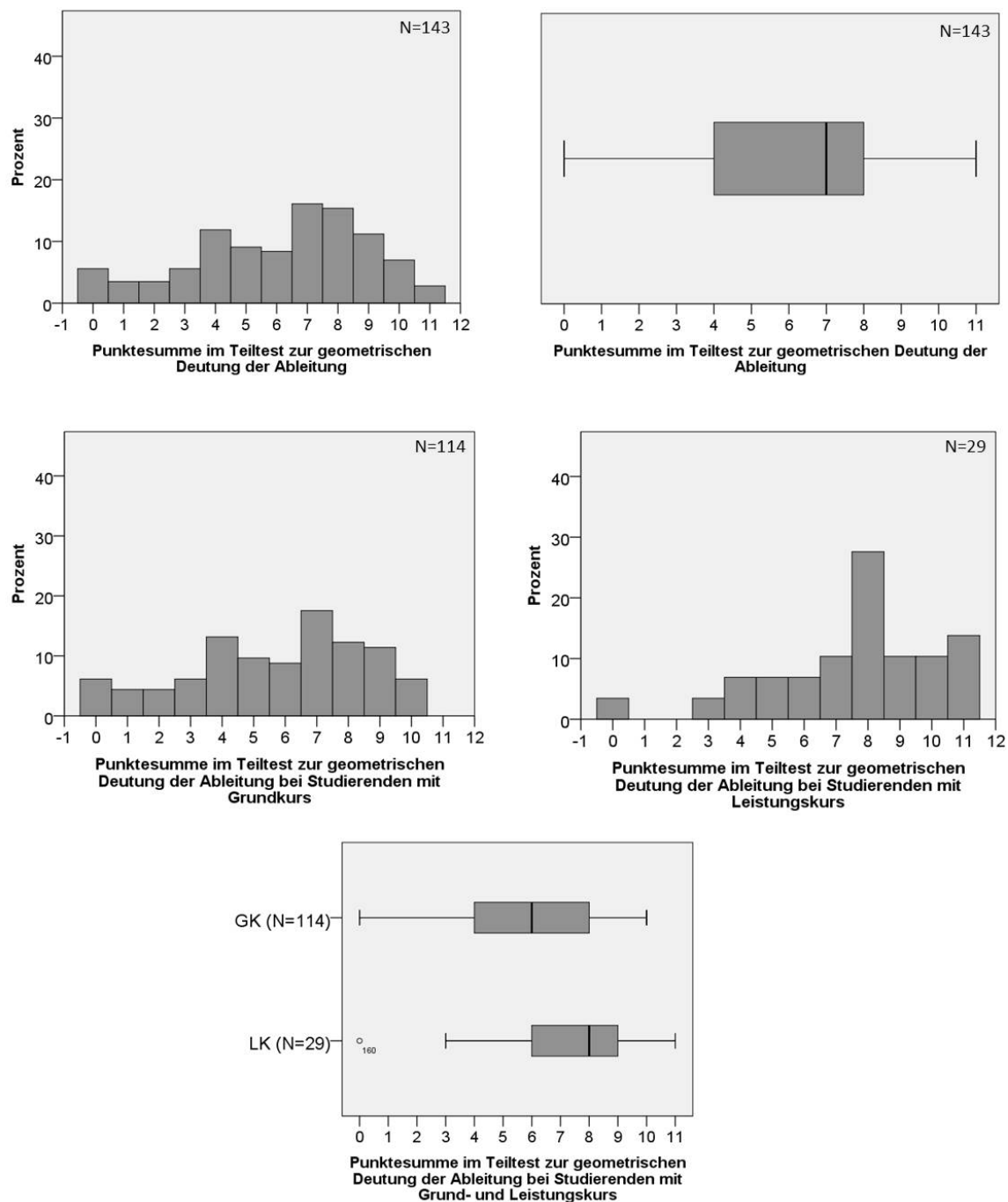


Abbildung 62: Punkteverteilung im Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	6.08	5.70	7.55
Median	7	6	8
Standardabweichung	2.858	2.800	2.640

Tabelle 87: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung

Ergebnisse der Einzelitems: Die erste Aufgabe des Teiltests war *Aufgabe 3*, bei der bei vier vorgegebenen Funktionsgraphen entschieden werden sollte, ob $f'(1) > 0$ ist oder nicht (siehe Abbildung 63). Die Ergebnisse sind in Tabelle 88 dargestellt.

3) Entscheiden Sie, für welche der folgenden Funktionen die Aussage $f'(1) > 0$ zutrifft.

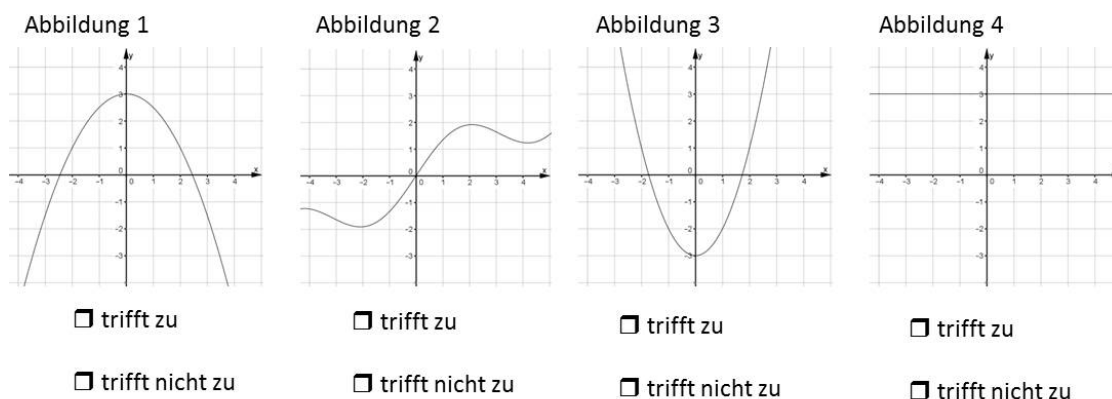


Abbildung 63: Aufgabe 3 des Vortests

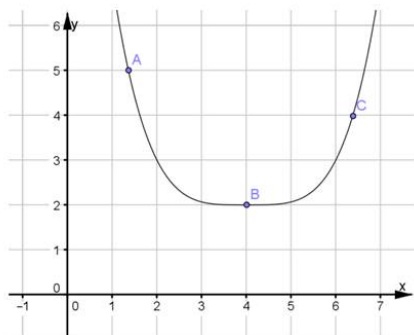
Abbildung	richtige Antwort	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
1	trifft nicht zu	64.3%	62.3%	72.4%
2	trifft zu	52.4%	47.4%	72.4%
3	trifft zu	63.6%	60.5%	75.9%
4	trifft nicht zu	67.8%	65.8%	75.9%

Tabelle 88: Lösungshäufigkeiten bei der Wahl der Graphen mit $f'(1) > 0$ aus Aufgabe 3 des Vortests

Die Mehrheit der Studierenden war offensichtlich in der Lage, die Ableitung als Steigung in dem entsprechenden Punkt des Graphen korrekt zu deuten. Die Fehlvorstellung, dass Funktion und Ableitung das gleiche Vorzeichen haben müssten schien nicht so weit verbreitet zu sein, da die Lösungshäufigkeit bei den Abbildungen 1 und 3, bei denen diese Fehlvorstellung bedient wird, nicht geringer (sogar höher) war als bei Abbildung 2, bei der das nicht der Fall ist. Es ist auffällig, dass Studienanfänger mit Leistungskurs bei dieser Aufgabe wesentlich besser waren.

Bei der nächsten *Aufgabe 4* sollte ausgewählt werden, ob bei 3 gegebenen Punkten A, B und C auf einer Parabel $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$ oder $f'(x) > 0$ ist (siehe Abbildung 64). Die Lösungshäufigkeiten der 3 Items sind in Tabelle 89 dargestellt. Man sieht hier wieder, dass Studienanfänger mit Leistungskurs wesentlich besser waren. In Tabelle 90 ist schließlich genau aufgeschlüsselt, wie häufig bestimmte Antwortalternativen angekreuzt wurden.

4) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion:



Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Aussage an!

Punkt	1.Ableitung		
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
A	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐

Abbildung 64: Aufgabe 4 des Vortests

Punkt	richtige Antwort	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
A	$f'(x) < 0$	67.1%	62.3%	86.2%
B	$f'(x) = 0$	62.9%	57.0%	86.2%
C	$f'(x) > 0$	67.1%	62.3%	86.2%

Tabelle 89: Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 4 des Vortests aus Abbildung 64

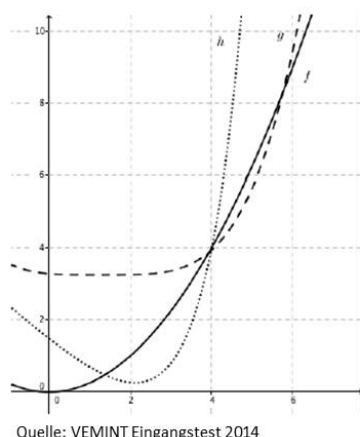
Punkt	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	keine Antwort
A	18.9%	67.1%	0.7%	13.3%
B	17.5%	4.2%	62.9%	14.7%
C	67.1%	10.5%	7.7%	14.7%

Tabelle 90: Auswahl der Antwortoptionen bei Aufgabe 4 des Vortests aus Abbildung 64 ($N = 143$)

Offensichtlich gelang die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Funktion auch bei Aufgabe 4 der Mehrheit. Ein Fehler im Sinne der slope/height-confusion, bei der Werte der Ableitung und der Funktion miteinander verwechselt werden (Antwort $f'(x) > 0$ bei Punkt A, von 18.9% der Studierenden gewählt, und Antwort $f'(x) < 0$ bei Punkt C, von 10.5% der Studierenden gewählt), lag höchstens bei einer Minderheit der Studierenden vor. Erstaunlich ist, dass 7.7% der Studierenden angaben, dass bei Punkt C auf dem rechten Parabelast $f'(x) = 0$ ist.

Aufgabe 5 war schon etwas komplexer. Es sollten bei drei gegebenen Graphen, die sich an der Stelle $x = 4$ schneiden, die Größen der Ableitungen an der Stelle $x = 4$ geordnet werden (siehe Abbildung 65). Die Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe lag nur bei 48.3% (45.6% bei Anfängern mit Grundkurs, 58.6% bei Anfängern mit Leistungskurs), was aber immer noch die knappe Hälfte der Studierenden ist. Die Verteilung der Probanden auf die Antwortalternativen ist in Tabelle 91 dargestellt.

5) Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h .



Welche Beziehung gilt für die Ableitungen im Punkt $P(4,4)$?

1. ☐ $f'(4) < g'(4) < h'(4)$
2. ☐ $g'(4) < f'(4) < h'(4)$
3. ☐ $h'(4) < g'(4) < f'(4)$

Abbildung 65: Aufgabe 5 des Vortests

Antwort	Anteil Gesamt ($N = 143$)	Anteil GK ($N = 114$)	Anteil LK ($N = 29$)
$f'(4) < g'(4) < h'(4)$	22.4%	21.9%	24.1%
$g'(4) < f'(4) < h'(4)$	55.2%	45.6%	58.6%
$h'(4) < g'(4) < f'(4)$	16.8%	20.2%	3.4%
keine Antwort	12.6%	12.3%	13.8%

Tabelle 91: Von den Studierenden ausgewählte Antworten bei Aufgabe 5 des Vortests

Man erkennt aus ihr, dass über 20% der Studierenden Distraktor 1 gewählt haben (auch bei den Studierenden mit Leistungskurs), was dann der Fall ist, wenn die Steilheit der Geraden an der oberen Kante des Koordinatensystems verglichen wird. Hier wird die Lokalität an der Stelle $x = 4$ nicht beachtet. Der Distraktor 3 wird gewählt, wenn die Graphen gemäß der Reihenfolge der x-Werte beim „Austritt aus dem Koordinatensystem nach oben“ betrachtet werden, was mit der Ableitung gar nichts zu tun hat. Dieser wurde interessanterweise von Studierenden mit Leistungskurs fast gar nicht gewählt.

Bei *Aufgabe 6* ging es schließlich um den Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie bei Extremwerten in graphischen Situationen, dessen Verständnis eng mit der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung zusammenhängt. Gegeben war der in Abbildung 66 dargestellte Funktionsgraph.

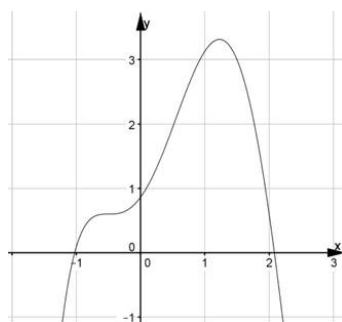


Abbildung 66: Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests

Folgende Aussagen sollten mit richtig oder falsch bewertet werden:

1. Die erste Ableitung von f hat für $-1 < x < 2$ genau eine Nullstelle.
2. Die erste Ableitung besitzt für $0 < x < 1$ ein lokales Maximum.
3. Die erste Ableitung besitzt für $1 < x < 2$ ein lokales Maximum.

Die Lösungshäufigkeiten sind in Tabelle 92 dargestellt. Man erkennt, dass hier die letzten beiden Aussagen, bei denen der Zusammenhang zum Maximum hinzukam, von weitaus weniger Probanden korrekt bewertet wurden. Auch Studierende mit Leistungskurs waren kaum besser. Eine Aufschlüsselung der Teilnehmer in die, die richtig oder falsch angekreuzt haben, oder keine Antwort gegeben haben, ist in Tabelle 93 dargestellt (die Prozentzahlen mit den richtigen Antworten sind hervorgehoben).

Aussage	richtige Antwort	% richtig GK ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
1	falsch	49.0%	43.9%	69.0%
2	richtig	33.6%	32.5%	37.9%
3	falsch	31.5%	30.7%	34.5%

Tabelle 92: Lösungshäufigkeiten bei den Aussagen über Werte der Nullstellen und Extrema der Ableitungen zum Funktionsgraph aus Abbildung 66

Aussage	richtig	falsch	keine Antwort
1	33.6%	49.0%	17.5%
2	33.6%	46.2%	20.3%
3	49.0%	31.5%	19.6%

Tabelle 93: Auswahl der Antwortoptionen der Gesamtstichprobe bei Aufgabe 6 des Vortests ($N = 143$)

Hier ist erkennbar, dass rund ein Drittel der Studierenden der Ansicht war, dass die Ableitung der Funktion aus Abbildung 66 nur eine Nullstelle hatte. Entweder war ihnen nicht klar, dass auch bei Sattelpunkten Nullstellen der Ableitung vorliegen. Es kann aber auch sein, dass sie den Sattelpunkt übersehen haben.

Weiterhin wurden hier bei den Aussagen 2 und 3 jeweils von über 40% falsche Antworten im Sinne der slope/height-confusion gegeben (Antwort „falsch“ bei Aussage 2 und Antwort „richtig“ bei Aussage 3). Dies ist ein wesentlich höherer Anteil als bei den bisherigen Aufgaben dieses Teiltests. Dies könnte einmal an der Begrifflichkeit des lokalen Maximums liegen, der sofort Assoziationen zu einem lokalen Maximum der Ausgangsfunktion hervorrief. Es kann aber auch daran liegen, dass hier die Funktion nicht nur an einer Stelle, sondern über ein gesamtes Intervall betrachtet werden musste.

Insgesamt zeigt der Teilttest, dass die Mehrheit der Studienanfänger ein akzeptables Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung der Funktion in einem Punkt mitbrachten (siehe Abbildung 62 und Tabelle 87). Die Probanden mit Leistungskurs waren im Mittel signifikant besser. Allerdings gab es auch eine recht große Streuung (siehe Tabelle 87).

Bei der Betrachtung der Einzelitems sieht man, dass Fehlvorstellungen wie die Annahme des gleichen Vorzeichens von Funktion und Ableitung, die slope/height-confusion (wenn direkt nach Aussagen über Werte der Ableitung gefragt wurde) oder die Annahme, dass eine Nullstelle der Ableitung einer Extremstelle entsprechen müsste nur bei einer Minderheit der Studierenden vorlagen. Allerdings war der Anteil der Studierenden, die Funktion und Ableitung miteinander verwechselten wesentlich höher, wenn zusätzlich noch der Begriff des lokalen Maximums ins Spiel kam und die Funktion über ein ganzes Intervall betrachtet werden musste.

Trotz der Fehler brachten die Studienanfänger bezüglich der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung der Funktion insgesamt im Mittel kein schlechtes Vorwissen mit, auf das man in der Lehrveranstaltung aufbauen kann.

6.7.4 Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zur geometrischen Deutung der Ableitung mit der Literatur

In der Literatur ist vielfach dokumentiert, dass Studierende den Wert der Funktion mit dem Wert ihrer Ableitung verwechseln würden, die sogenannte slope/height-confusion nach Leinhardt u. a. (1990, S.37). Beispielsweise wurde sie im TUG-K Test (*Test of Understanding Graphs in Kinematics*, (Beichner, 1994)) als typischer Fehler bei der Herstellung eines Zusammenhangs zwischen Ableitung und Graph in Bewegungskontexten festgestellt (siehe Kapitel 4.3.1). Zu dem in Abbildung 67 dargestellten Graphen wählten zum Beispiel 72% der Probanden des TUG-K Tests aus 5 Antwortalternativen die Antwort „Das Objekt bewegt sich mit gleichmäßig abnehmender Beschleunigung“ die der slope/height-confusion entspricht, aus.

In diesem Teilttest wurde die slope/height-confusion auch aufgegriffen. So sollte zum Beispiel bei den in Abbildung 68 dargestellten Funktionen entschieden werden, ob $f'(1) > 0$ ist. Die Graphen 1, 3 und 4 adressieren hierbei die slope/height-confusion. Allerdings haben hier jeweils über 60% der Studierenden die richtige Antwort angekreuzt (siehe Tabelle 88).

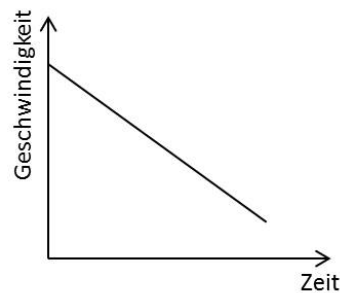


Abbildung 67: Geschwindigkeits-Zeit Diagramm aus Beichner (1994, S.761)

3) Entscheiden Sie, für welche der folgenden Funktionen die Aussage $f'(1) > 0$ zutrifft.

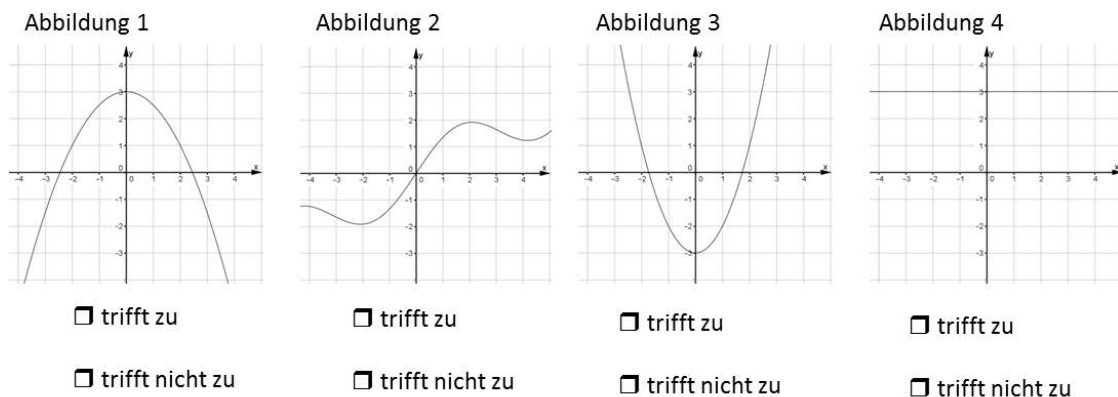


Abbildung 68: Aufgabe 3 des Vortests

Dass die Ergebnisse so unterschiedlich sind, kann daran liegen, dass die Populationen ein unterschiedlich gutes Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung hatten. Es kann aber auch an der konkreten Formulierung der Testitems liegen. Denn ein wesentlicher Unterschied zwischen den Items aus diesem Teilstest und den Items aus dem TUG-K Test ist das Vorhandensein eines Kontextes. Dass dies bereits Unterschiede beim Antwortverhalten der Probanden ausmachen kann, haben beispielsweise Planinic u. a. (2012) in einer Studie gezeigt. Sie stellten 114 Highschool Schülern in Kroatien (Alter 15 oder 16 Jahre) vier Aufgaben, von denen zwei rein innermathematisch, und zwei analoge Aufgaben in einen physikalischen Kontext eingebettet waren. Ein Paar paralleler Aufgaben ist in Abbildung 69 dargestellt.

Bezüglich der Lösungshäufigkeit war erkennbar, dass 75.4% der Schüler die Aufgabe ohne Kontext lösen konnten. Aber nur 59.6% konnten die Parallelaufgabe mit physikalischem Kontext lösen (Planinic u. a., 2012, S.1402). Die slope/height-confusion (Antwort D bei der Aufgabe mit Kontext, Antwort C bei der Aufgabe ohne Kontext, siehe Abbildung 69) trat bei der Aufgabe mit Kontext bei 40% der Schüler auf, und bei der Aufgabe ohne Kontext nur bei 23% der Schüler (Planinic u. a., 2012, S.1404). Ein ähnliches Ergebnis gab es bei dem zweiten Aufgabenpaar, welches aus Platzgründen hier nicht ausführlich dargestellt ist. Insgesamt zeigt die Studie von Planinic u. a. (2012) somit, dass die slope/height-confusion bei Aufgaben ohne Kontext (wie hier in diesem Teilstest) seltener auftritt als bei Kontextaufgaben.

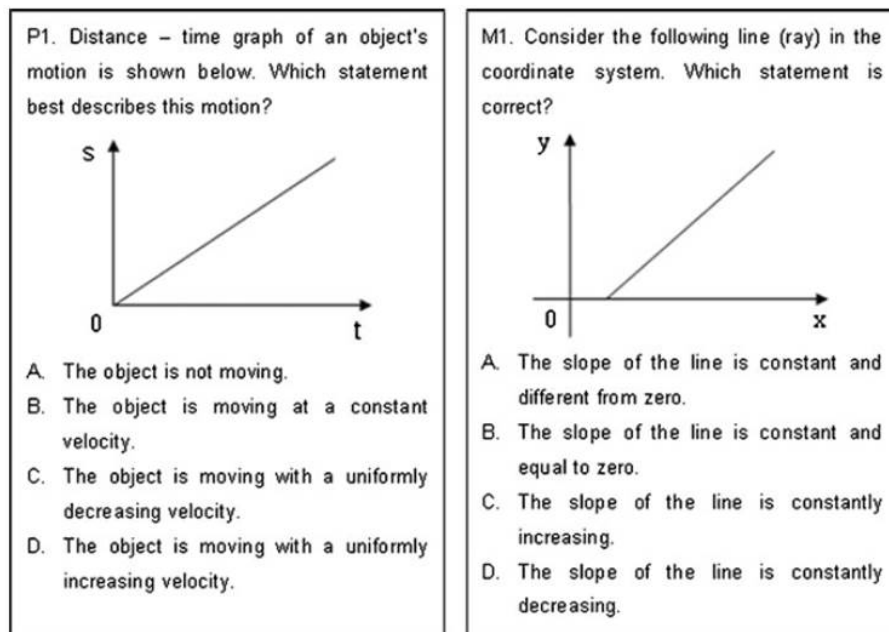


Abbildung 69: Parallelaufgabe zum Thema „Steigung linearer Funktion“ mit und ohne Kontext (Planinic u. a., 2012, S.1399)

Eine weitere Erklärung, weshalb die slope/height-confusion in unserem Teilstest seltener auftauchte, als zum Beispiel in dem in Abbildung 67 dargestellten Item des TUG-K Tests wurde bereits im theoretischen Teil der Arbeit in Kapitel 4.3.2 diskutiert. So zeigte Monk (1994), dass es für Studierende eine zusätzliche Hürde darstellt, wenn die Funktion nicht nur an einer Stelle sondern über ein Intervall betrachtet werden muss. Monk unterschied hier zwischen einem punktwisen Verständnis einer Funktion und einem *Across-time* Verständnis einer Funktion.

Bei Aufgabe 3 dieses Vortests (siehe Abbildung 63), die hier gut ausgefallen ist, musste nur entschieden werden, ob $f'(1) > 0$ ist. Es war also nur ein punktwises Verständnis der Funktion nötig. Bei vielen anderen Items der Literatur, wo die slope/height-confusion sehr oft auftrat (siehe zum Beispiel (Beichner, 1994) oder (Hahn u. Prediger, 2008)) musste die Funktion über einen Bereich betrachtet werden. Auch in diesem Teilstest zur geometrischen Deutung der Ableitung trat die slope/height-confusion häufiger auf, wenn der gesamte Verlauf der Funktion betrachtet werden musste. So waren zum Beispiel 49.0% der Studierenden der Ansicht, dass die Ableitung der in Abbildung 70 dargestellten Funktion im Bereich $1 < x < 2$ ein lokales Maximum hätte.

Insgesamt können also die besseren Ergebnisse unserer Studienanfänger beim Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung im Vergleich zu Probanden anderer Studien wie (Beichner, 1994; Orton, 1983; Carlson u. a., 2010; Hahn u. Prediger, 2008) nicht nur durch ein besseres Verständnis, sondern auch durch Unterschiede bei den Testitems zu Stande gekommen sein. Konkrete Merkmale der Items, die hier zu besseren Ergebnissen geführt haben könnten, sind:

1. Sie hatten keinen Kontext.
2. 8 der 11 Items erforderten nur die Betrachtung der jeweiligen Funktion an einer Stelle.

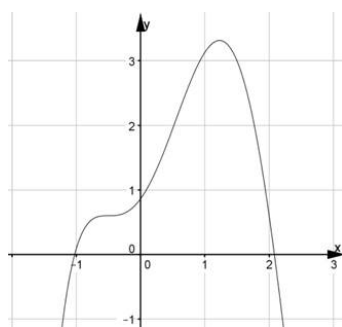


Abbildung 70: Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests

Man sollte daher aus diesen unterschiedlichen Ergebnissen nicht vorschnell darauf schließen, dass Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften ein besseres Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung hätten als Probanden anderer Tests oder Studien.

6.8 Der Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate

6.8.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate

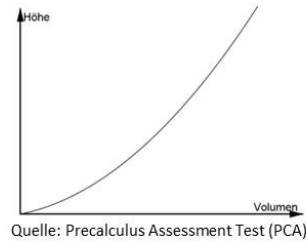
In diesem Teilttest geht es um die Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate (mit und ohne Kontext). Diese Deutung sollten Studienanfänger nach dem Abitur beherrschen (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.20). Für Studierende der Ökonomie ist sie wichtig, um das Verhalten von Funktionen (einschließlich Änderungsverhalten) im ökonomischen Kontext beschreiben zu können.

Der Teilttest umfasst die Aufgaben 7-12 des Gesamttests. In den *Aufgaben 7 und 8* geht es um Füllgraphen und die Fähigkeit zum kovariationalen Argumentieren. Dies ist sehr wichtig, damit Studierende die Funktion und ihre Ableitungsfunktion als Änderungsrate korrekt miteinander in Verbindung bringen können (siehe Kapitel 4.3.2). In diesen Aufgaben zu Füllgraphen ist die Ableitung als Änderung der Höhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge zu verstehen.

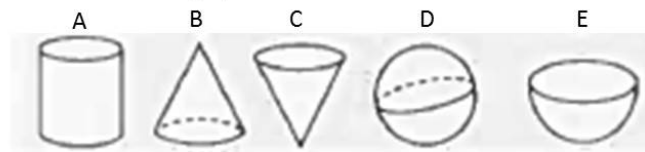
In *Aufgabe 7*, die aus dem PCA (*Precalculus-Assessment Test*) entnommen ist (Carlson u. a., 2010)), soll zu vorgegebenem Füllgraphen das korrekte Gefäß ausgesucht werden (siehe Abbildung 71). Aus dem Funktionsgraphen ist also die lokale Änderungsrate abzulesen und deren Bedeutung in den Kontext des Füllvorgangs zu übersetzen, wozu kovariationales Argumentieren nötig ist (Carlson u. a., 2002). Die richtige Antwort ist Gefäß B.

Aufgabe 8 beinhaltet den umgekehrten Prozess. Bei dieser Aufgabe, die aus Carlson u. a. (2002, S.360) übernommen ist, soll der Füllgraph zu einer vorgegebenen Flasche bestimmt werden (ausführliche Beschreibung der zugehörigen Studie im Theorieteil der Arbeit in Kapitel 4.3.3 ab S.4.3.3). Die Aufgabe ist in Abbildung 72 dargestellt. Die richtige Antwort ist Graph 1. Die Distraktoren 2-4 entstammen aus Antworten, die in einer entsprechenden offenen Frage von Carlson u. a. (2002, S.360) von Studierenden gegeben wurden (siehe Tabelle 38). Carlson et al. unterschieden jedoch nicht zwischen

7) Der folgende Funktionsgraph zeigt die Wasserhöhe beim Füllen eines Gefäßes in Abhängigkeit von der hinzugegebenen Wassermenge:



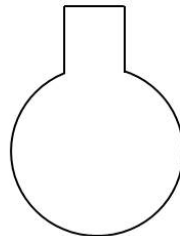
Welches Gefäß gehört zu diesem Füllgraphen?



- ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

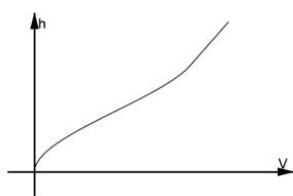
Abbildung 71: Aufgabe 7 des Vortests

8) Die folgende Flasche wird bis zum oberen Rand gleichmäßig mit Wasser befüllt.

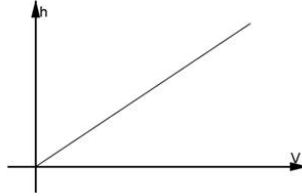


Welcher der folgenden Graphen gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge wider?

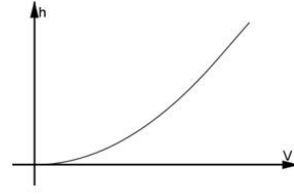
Graph 1



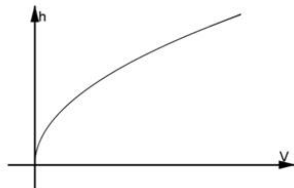
Graph 2



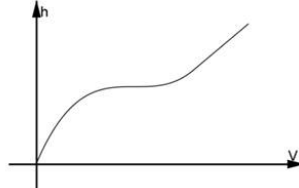
Graph 3



Graph 4



Graph 5



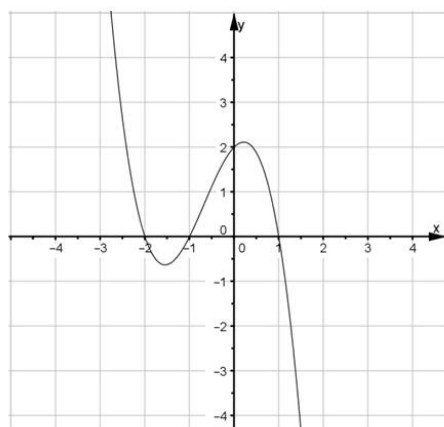
- ☐ Graph 1
☐ Graph 2
☐ Graph 3
☐ Graph 4
☐ Graph 5

Abbildung 72: Aufgabe 8 des Vortests

den Graphen 1 und 5. Graph 5 ist jedoch falsch, da der Wendepunkt kein Sattelpunkt ist, denn dieser würde eine Änderungsrate von 0 bedeuten, was einem unendlich breiten Gefäß entsprechen würde.

In der nächsten Aufgabe (*Aufgabe 9*) geht es um die Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate ohne Kontext. Sie ist aus dem VEMINT-Vorkurstest 2014 entnommen (VEMINT, 2014b). In ihr soll zu Aussagen über die Änderungsrate von Funktionen Stellung genommen werden. Sie ist in Abbildung 73 dargestellt. Beide hier genannte Aussagen über die lokale Änderungsrate sind richtig. Das Vorzeichen der Ableitung hängt eben nicht vom Vorzeichen der Funktionen an den entsprechenden Stellen ab. Die Aussagen zu den mittleren Änderungsraten sind hingegen falsch.

9) Gegeben sei folgende Funktion f :



Quelle: VEMINT Vorkurstest 2014

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

	richtig	falsch
Die lokale Änderungsrate an der Stelle -1 ist positiv.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,5; 1,5]$ beträgt 0.	☐	☐
Die lokale Änderungsrate an der Stelle 0,5 ist negativ.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;1]$ ist positiv.	☐	☐

Abbildung 73: Aufgabe 9 des Vortests

In *Aufgabe 10*, welche aus Hoffkamp (2011, S.12) bzw. Schlöglhofer (2000, S.17) übernommen ist, geht es um die Beschreibung der Größe eines Flächeninhaltes innerhalb eines Dreiecks, also um einen geometrischen Kontext (siehe Abbildung 74).

10) Die gestrichelte Linie wird vom Punkt A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph gibt die Flächeninhaltsfunktion F an?

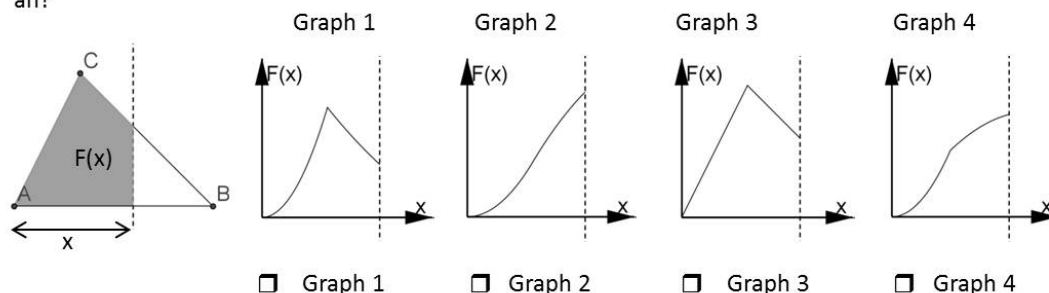


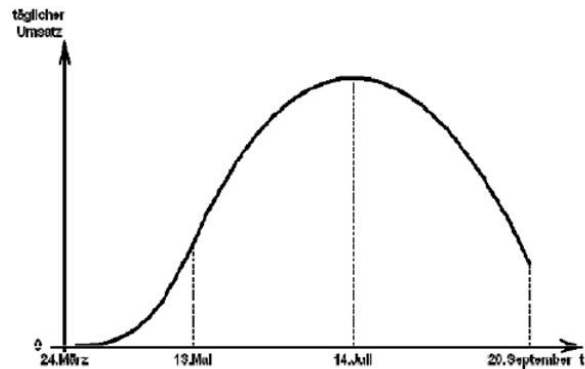
Abbildung 74: Aufgabe 10 des Vortests

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man sich überlegen, wie sich der Flächeninhalt ändert, wenn sich x minimal ändert. Dies erfordert wieder kovariationales Argumentieren. Die richtige Antwort ist Graph 2. Distraktor 1 ist der Graph-als-Bild Fehler. Distraktor 3 wird laut Hoffkamp (2011, S.13-14) (sie erfragte zusätzlich eine Begründung) angekreuzt, wenn die Probanden das Konzept der Integration verwendeten (Stammfunktion der linearen Funktion bis zur Spitze des Dreiecks ist eine Parabel). Bei beiden Distraktoren wird nicht erkannt, dass der Flächeninhalt monoton wachsen müsste. Distraktor 4 ist etwas diffiziler als die anderen beiden, da hier der entsprechende Graph auch monoton wachsend ist. Allerdings würde ein Knick im Graph bedeuten, dass sich die Änderungsrate sprunghaft ändert. Bei der Änderung des in Abbildung 74 dargestellten Flächeninhaltes findet jedoch kein Sprung in der „Änderungsgeschwindigkeit“ statt.

Aufgabe 11 ist angelehnt an Hahn u. Prediger (2008, S.176) und behandelt die Problematik der gegensinnigen Kovariation einer Funktion und deren Ableitung (ausführliche Diskussion der Aufgabe und ihrer Ergebnisse siehe Kapitel 4.3.3 ab S.115). Die Originalaufgabe ist noch einmal in Abbildung 75 dargestellt. Die erste der beiden genannten Aussagen ist richtig, die zweite falsch. Falsches Ankreuzen bedeutet wieder die Fehlvorstellung der „slope/height-confusion“ (Leinhardt u. a., 1990, S.37).

Problematisch an der Originalaufgabe ist, dass beim täglichen Umsatz eigentlich schon der momentane Umsatz über den gesamten Tag integriert wurde und daher die Werte zwischen den diskreten Tagen keinerlei inhaltliche Bedeutung haben. Dementsprechend wurde die Aufgabe etwas abgeändert. An Stelle der Funktion von Hahn und Prediger wurde eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion gewählt. Dieser Typ von Produktionsfunktionen spielt in der wirtschaftswissenschaftlichen Theorie eine große Rolle (siehe Kapitel 5.5.2, S.5.5.2). Er hat genau die gleichen qualitativen Eigenschaften wie die Funktion von Hahn und Prediger (Wendepunkt und Maximum). Die konkret gewählte Produktionsfunktion, die auf realen Daten basiert (Baßeler u. a., 1991, S.137), ist in Abbildung 76 zu sehen.

Ein Produkt wird am 24.3.erstmalig auf den Markt gebracht und bis zum 20.9. verkauft. Ab dem 21.9. gibt es das Produkt nicht mehr zu kaufen. In der rechten Graphik ist der mit diesem Produkt erbrachte tägliche Umsatz in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Am 13.5. befindet ich ein sogenannter Wendepunkt. Am 14.7. befindet ich ein Hochpunkt.



Kreuzen Sie bitte die für die folgenden Aussagen „richtig“ oder „falsch“ an!

Richtig Falsch

Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 4. Juli.

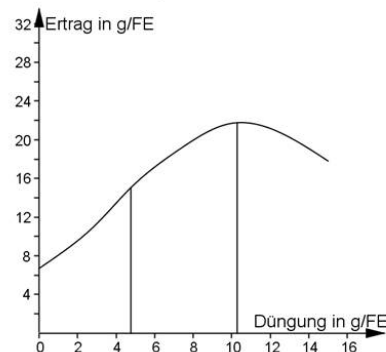
☐
☐

Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.

☐
☐

Abbildung 75: Aufgabe aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) zum Testen des Verständnisses der Ableitung als Änderungsrate im Kontext gegenseitiger Kovariation

11) Der Ertrag von Getreide bei Einsatz von Dünger lässt sich durch eine sogenannte ertragsgesetzliche Produktionsfunktion $E(x)$ beschreiben, die folgende Gestalt hat:



Quelle: Grundlagen und Probleme der Volkswirtschaft, Schäffer/Poeschel

Düngung und Ertrag sind in Gramm pro Flächeneinheit (g/FE) gegeben.

Die Funktion hat bei 4,76 g/FE einen Wendepunkt und bei 10,29 g/FE ein Maximum.

Kreuzen Sie bitte die für die folgenden Aussagen „richtig“ oder „falsch“ an!

	Richtig	Falsch
Die Zunahme des Ertrages sinkt kontinuierlich zwischen 6 und 10 Gramm Dünger pro Flächeneinheit.	☐	☐
Die maximale Zunahme des Ertrages wird zwischen 8 und 14 Gramm Dünger pro Flächeneinheit erreicht.	☐	☐

Abbildung 76: Aufgabe 11 des Vortests, angelehnt an die Aufgabe von Hahn u. Prediger (2008, S.176) aus Abbildung 75

In *Aufgabe 12*, der letzten Aufgabe dieses Teiltests, geht es ein weiteres Mal um die Problematik der gegensinnigen Kovariation, diese Mal jedoch ohne Kontext. In dieser Aufgabe, die ebenfalls aus dem PCA entnommen ist (Carlson u. a., 2010), soll das Wachstumsverhalten einer Funktion beschrieben werden (siehe Abbildung 77). Zwar gibt es in der Ökonomie sogar Fachbegriffe für die entsprechenden Wahlmöglichkeiten („wachsend mit sich beschleunigendem Wachstum“ heißt *progressives Wachstum*, „wachsend mit sich verlangsamendem Wachstum“ heißt *degressives Wachstum* usw., siehe Wöhe u. Döring (2013, S.307)). Weil jedoch nicht davon ausgegangen werden kann, dass diese Fachbegriffe aus der Schule bekannt sind, wurden sie in dem Vortest nicht verwendet.

12) Welche Eigenschaft hat der Graph der Funktion im Bereich von $x=5$ bis $x=12$?

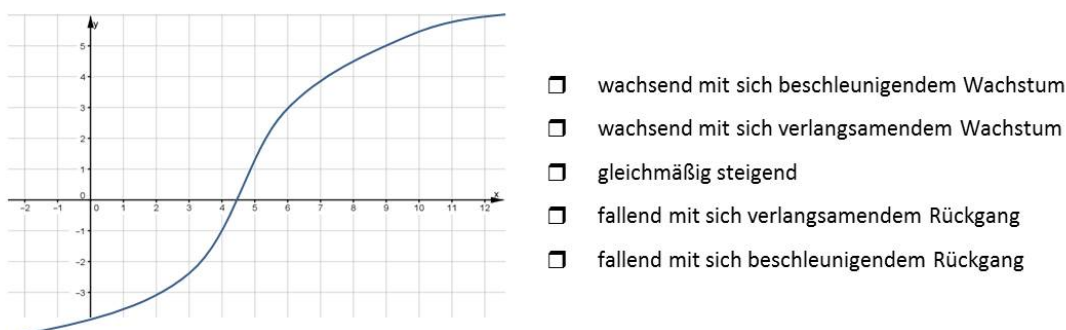


Abbildung 77: Aufgabe 12 des Vortests

6.8.2 Analyse der Daten des Teiltests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate

Dieser Teilttest besteht 10 Multiple-choice Items. Die richtige Antwort wurde jeweils mit einem Punkt bewertet, eine falsche Antwort mit 0 Punkten. Dementsprechend erfolgte eine Codierung der Items mit 0 oder 1. Insgesamt ergab sich damit ein reliabler Teilttest, bei dem Cronbachs α den Wert $\alpha = 0.707$ hatte.

Die Trennschärpen der Items sind in Tabelle 94 dargestellt. Auch wenn die Aussagen 2 und 4 aus Aufgabe 9 eine mittlere Änderungsrate betreffen, passen empirisch offenbar gut in diesen Teilttest. Ein Grund könnte sein, dass sie zum gleichen Aufgabentyp gehören wie die Aussagen 1 bis 3 derselben Aufgabe. Bis auf das Item zur Beschreibung des Wachstumsverhaltens einer Funktion ohne Kontext sind alle Trennschärpen über 0.24 und damit akzeptabel. Der Grund für die niedrigere Trennschärfe bei diesem einen Item ist, dass dieses Item mit den gewählten Formulierungen der Antwortalternativen „wachsend mit sich beschleunigendem Wachstum“, „wachsend mit sich verlangsamendem Wachstum“, „gleichmäßig steigend“, „fallend mit sich verlangsamendem Rückgang“ und „fallend mit sich beschleunigendem Rückgang“ von fast allen Probanden gelöst werden konnte.

Item	Inhalt	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Aufgabe 7	Angabe des Gefäßes zum Füllgraphen	0.287	0.699
Aufgabe 8	Angabe des Füllgraphen zum Gefäß	0.245	0.708
Aufgabe 9 Aussage 1	Lokale Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen bei $x = -1$	0.463	0.672
Aufgabe 9 Aussage 2	Mittlere Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen auf $[-1, 5; 1, 5]$	0.377	0.682
Aufgabe 9 Aussage 3	Lokale Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen bei $x = 0, 5$	0.363	0.688
Aufgabe 9 Aussage 4	Mittlere Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen auf $[0; 1]$	0.468	0.666
Aufgabe 10	Flächeninhaltsfunktion eines Dreiecks	0.354	0.687
Aufgabe 11 Aussage 1	Änderungsverhalten des Ertrages beim Ertragsgesetz	0.500	0.660
Aufgabe 11 Aussage 2	Änderungsverhalten des Ertrages beim Ertragsgesetz (2)	0.408	0.677
Aufgabe 12	Beschreibung des Wachstumsverhaltens einer Funktion ohne Kontext	0.228	0,704

Tabelle 94: Trennschärfen der Items aus dem Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate

Bei Aufgabe 10 zur Dreiecksfläche ist außerdem zu beachten, dass hier der Punkt bereits vergeben wurde, wenn einer der Graphen 2 (korrekter Graph) oder 4 (monoton wachsender Graph aber mit Knick, siehe Abbildung 74) ausgewählt wurde. Graph 4 ist zwar streng genommen nicht richtig, denn ein Knick im Graphen würde bedeuten, dass die Änderungsgeschwindigkeit einen Sprung hat. Würde man jedoch nur für Graph 2 den Punkt vergeben, ergäbe sich eine Trennschärfe von 0.000 (und Cronbachs α des Teilttests wäre dann $\alpha = 0.679$). Daher wurde diese Feinheit vernachlässigt. Dies lässt sich auch inhaltlich dadurch rechtfertigen, dass solche Feinheiten wie Knicke im Graphen in der Schule nicht behandelt werden. In einer späteren Version des Tests sollte daher der Distraktor 4 mit dem Knick entfernt werden.

6.8.3 Ergebnisse des Teilttests zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: Die in diesem Teilttest erreichten Punktzahlen sind in Abbildung 78 dargestellt, wobei maximal 10 Punkte erreicht werden konnten. Die Kenngrößen befinden sich in Tabelle 95. Die Unterschiede der Mittelwerte zwischen den Probanden mit Grund- und denen mit Leistungskurs sind signifikant zum Niveau $\alpha = 0.000412$.

Im Mittel wurden mehr als die Hälfte der Punkte erreicht, wobei die Probanden mit Leistungskurs signifikant besser waren. Weiterhin erkennt man aus Abbildung 78 und Tabelle 95 eine relativ große Streuung. Außerdem sieht man aus Abbildung 78, dass nur ein geringer Anteil weniger als 5 Punkte erzielt hat, was erfreulich ist. Bei den Probanden mit Leistungskurs zählen diese sogar als Ausreißer.

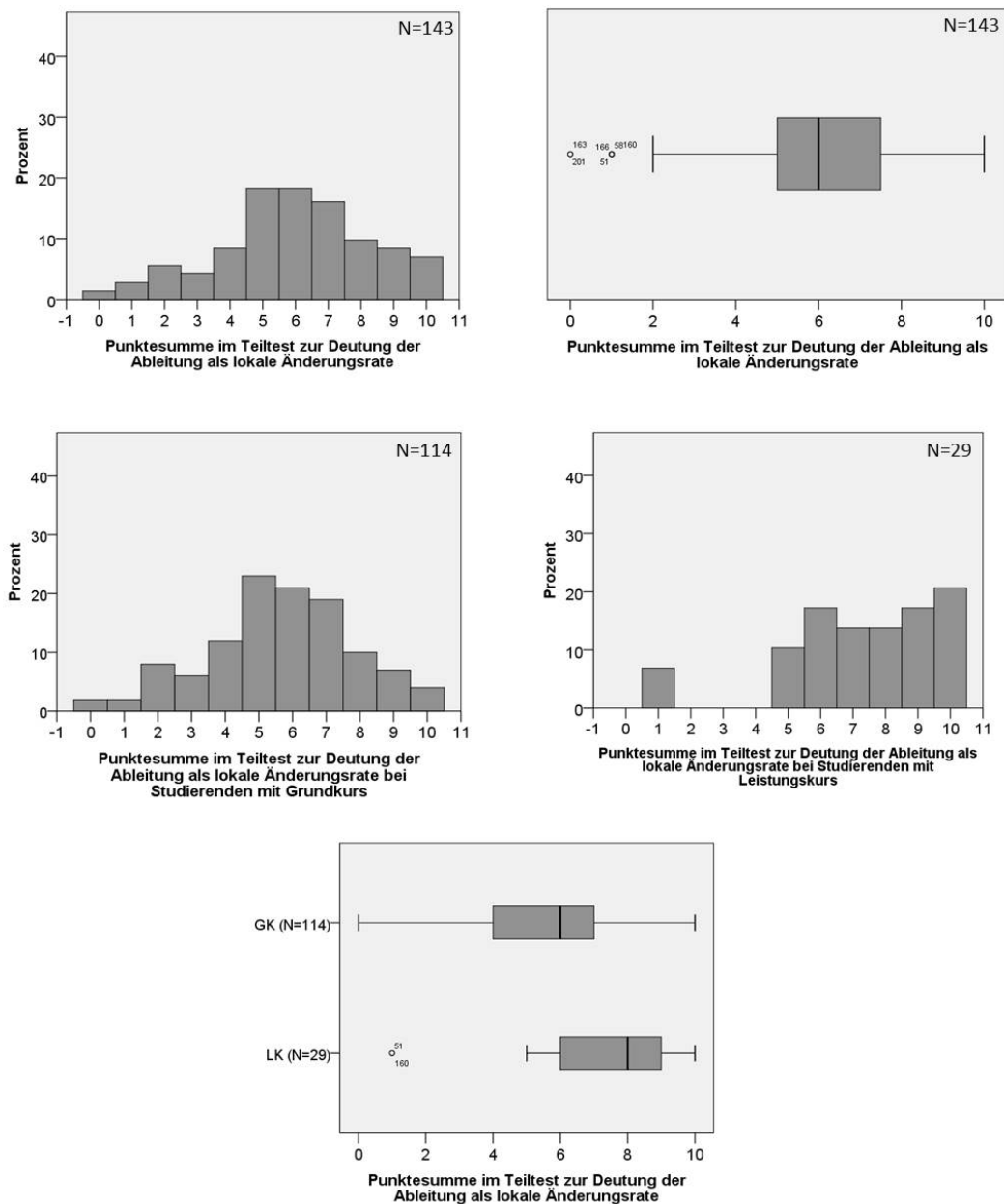


Abbildung 78: Punkteverteilung im Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate

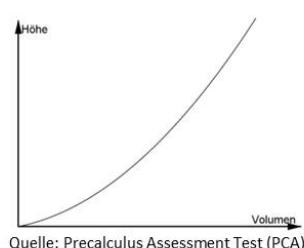
	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	5.97	5.62	7.31
Median	6	6	8
Standardabweichung	2.336	2.196	2.422

Tabelle 95: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate

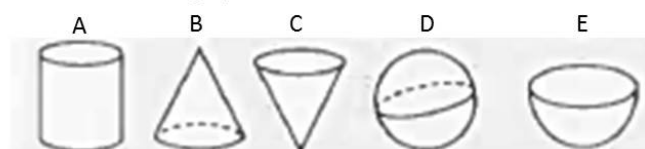
Ergebnisse der Einzelitems: In den ersten zwei Aufgaben dieses Teiltests (*Aufgaben 7 und 8*) ging es um Füllgraphen. Dort war die Ableitung jeweils die lokale Änderungsrate der Höhe des Gefäßes in Abhängigkeit von der zugegebenen Menge Wasser. Zur Lösung der Aufgaben ist kovariationales Argumentieren nötig (Carlson u. a., 2002, S.360).

Aufgabe 7, aus dem PCA entnommen, ist noch einmal in Abbildung 79 dargestellt. Die Lösungshäufigkeiten befinden sich in Tabelle 96. Die Verteilung der Studierenden auf die einzelnen Antwortoptionen der Aufgabe befindet sich in Tabelle 97, wobei die richtige Antwort fett hervorgehoben ist.

7) Der folgende Funktionsgraph zeigt die Wasserhöhe beim Füllen eines Gefäßes in Abhängigkeit von der hinzugegebenen Wassermenge:



Welches Gefäß gehört zu diesem Füllgraphen?



☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Abbildung 79: Aufgabe 7 des Vortests

richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Gefäß B	39.2%	35.1%	55.2%

Tabelle 96: Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 7 aus Abbildung 79 zum Finden des Gefäßes bei gegebenem Füllgraphen

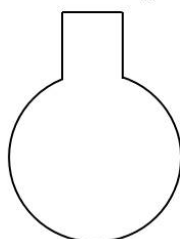
Gefäß A	Gefäß B	Gefäß C	Gefäß D	Gefäß E	keine Antwort
4.2%	39.2%	28.7%	3.5%	23.1%	1.4%

Tabelle 97: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 7 aus Abbildung 79 zum Finden des Gefäßes bei gegebenem Füllgraphen ($N = 143$)

Die falschen Gefäße, die am häufigsten gewählt wurden, waren Gefäß C (ein umgekehrter Kegel) und Gefäß E (eine umgekehrte Halbkugel). Bei dem umgekehrten Kegel und der Halbkugel sind die Graphen ähnlich zum Bild (Graph-als-Bild Fehler). Carlson u. a. (2010) haben in Interviews auch ermittelt, dass diese Distraktoren tatsächlich genau deshalb gewählt wurden. Insgesamt wurden diese beiden Graph-als-Bild Distraktoren hier von 51.8% der Studierenden gewählt.

Die nächste Aufgabe dieses Teiltests (*Aufgabe 8*) nach der Aufgabe zum Finden des Gefäßes zu gegebenem Füllgraphen war die Aufgabe Finden des Füllgraphen zu gegebenem Gefäß. Die Lösungshäufigkeiten bei der Aufgabe sind in Tabelle 98 dargestellt. Immerhin konnte fast die Hälfte der Studierenden die Aufgabe korrekt lösen. Bei Studienanfängern mit Leistungskurs waren es sogar fast 70%, was gut ist. Die Verteilung der Studierenden auf die einzelnen Antwortoptionen der Aufgabe ist in Tabelle 99 dargestellt. Die richtige Antwort ist fett hervorgehoben.

8) Die folgende Flasche wird bis zum oberen Rand gleichmäßig mit Wasser befüllt.



Welcher der folgenden Graphen gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge wider?

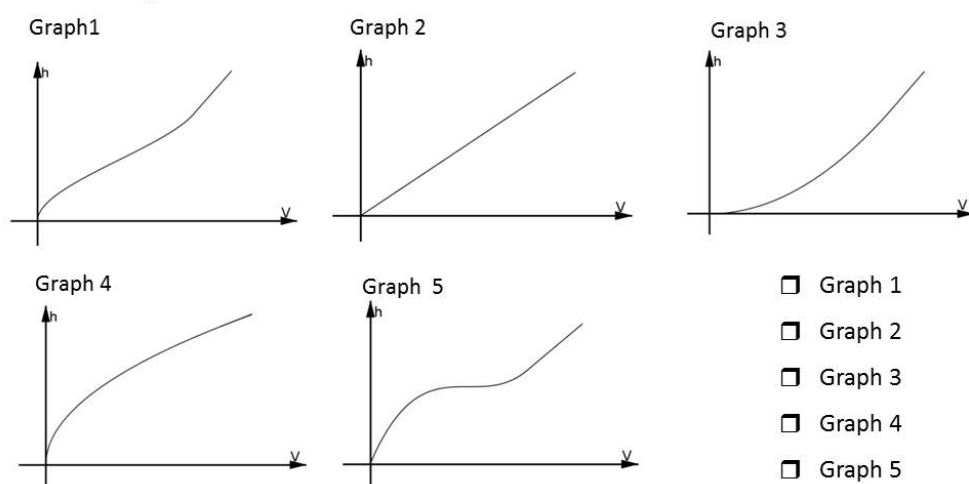


Abbildung 80: Aufgabe 8 des Vortests

richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Graph 1	49.0%	43.9%	69.0%

Tabelle 98: Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 8 aus Abbildung 80 zum Finden des Füllgraphen zu einer Flasche

Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	Graph 5	keine Antwort
49.0%	1.4%	4.9%	5.6%	37.1%	2.1%

Tabelle 99: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 8 aus Abbildung 80 zum Finden des Füllgraphen zu einer Flasche ($N = 143$)

Man sieht in Tabelle 99, dass sogar 86.1% der Studierenden bis auf die Feinheit mit dem Sattelpunkt den qualitativ richtigen Verlauf der Funktion erkennen konnten (Graphen 1 oder 5). Das ist ein sehr gutes Ergebnis.

Eine dritte Aufgabe in diesem Teilttest, die die Fähigkeit zum kovariationalen Argumentieren ansprach (*Aufgabe 10*), allerdings in einem anderen Kontext, war die in Abbildung 81 dargestellte Aufgabe. Die Lösungshäufigkeiten sind in Tabelle 100 dargestellt.

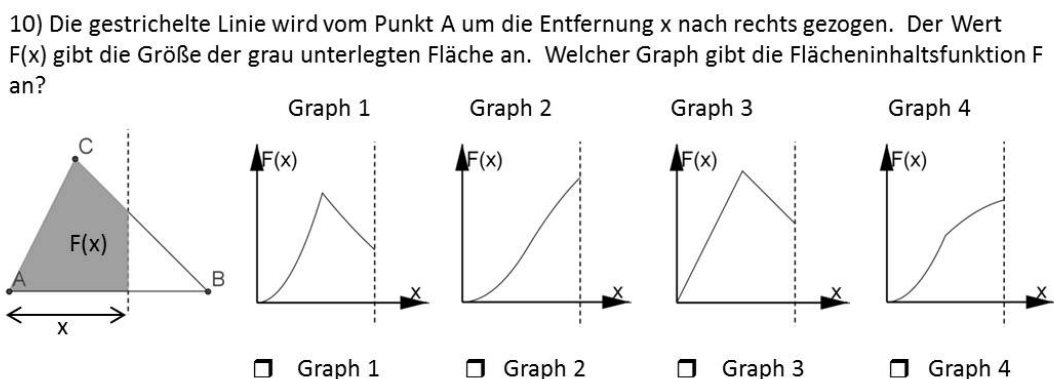


Abbildung 81: Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“, übernommen aus Hoffkamp (2011, S.12) bzw. Schlöglhofer (2000, S.17)

richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Graph 2	14.0%	13.2%	17.2%

Tabelle 100: Lösungshäufigkeiten der Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“ aus Abbildung 81

Das ist ein sehr schwaches Ergebnis. Wenn man aber bedenkt, dass Feinheiten wie ein Knick im Graphen, der einem Sprung der Änderungsgeschwindigkeit entspricht, nicht Gegenstand der Schule waren und damit den Graphen 4 ebenfalls als akzeptabel wertet, weil er qualitativ richtig ist, sieht das Ergebnis besser aus (siehe Tabelle 101).

akzeptable Antworten	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Graph 2 und Graph 4	44.1%	40.4%	58.6%

Tabelle 101: Lösungshäufigkeiten bei der Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“ aus Abbildung 81 bei Fokussierung auf den groben qualitativen Verlauf

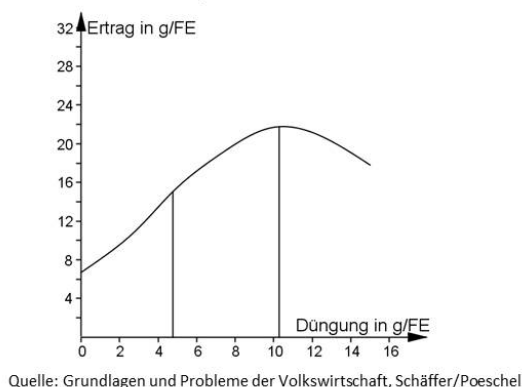
Die Verteilung der Studierenden auf die einzelnen Antwortoptionen der Aufgabe ist in Tabelle 102 dargestellt, wobei die akzeptierten Antworten fett hervorgehoben sind. 35.7% machten offensichtlich den Graph-als-Bild-Fehler (Graph 3).

Graph 1	Graph 2	Graph 3	Graph 4	keine Antwort
6.3%	14.0%	35.7%	30.1%	14.0%

Tabelle 102: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“ aus Abbildung 81 ($N = 143$)

Neben diesen 3 Aufgaben zum kovariationalen Argumentieren in Kontexten, enthielt der Teilstest noch eine weitere Aufgabe zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate im Kontext des Ertragsgesetzes (*Aufgabe 11*, siehe Abbildung 82). In ihr geht es um die Problematik der gegensinnigen Kovariation von f und f' . Die Ergebnisse sind in Tabelle 103 dargestellt.

11) Der Ertrag von Getreide bei Einsatz von Dünger lässt sich durch eine sogenannte ertragsgesetzliche Produktionsfunktion $E(x)$ beschreiben, die folgende Gestalt hat:



Düngung und Ertrag sind in Gramm pro Flächeneinheit (g/FE) gegeben.
Die Funktion hat bei 4,76 g/FE einen Wendepunkt und bei 10,29 g/FE ein Maximum.

Kreuzen Sie bitte die für die folgenden Aussagen „richtig“ oder „falsch“ an!

	Richtig	Falsch
Die Zunahme des Ertrages sinkt kontinuierlich zwischen 6 und 10 Gramm Dünger pro Flächeneinheit.	☐	☐
Die maximale Zunahme des Ertrages wird zwischen 8 und 14 Gramm Dünger pro Flächeneinheit erreicht.	☐	☐

Abbildung 82: Aufgabe 11 aus dem Vortest zum Ertragsgesetz

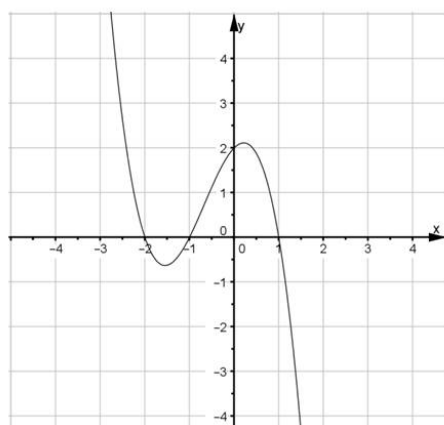
Aussage	richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
1	richtig	30.8%	23.7%	58.6%
2	falsch	35.0%	29.8%	55.2%

Tabelle 103: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 11 aus Abbildung 82 zum Ertragsgesetz

Offenbar bereitete gegensinnige Kovariation vielen Studierenden große Probleme. 69.2% der Studierenden verwechselten bei der ersten Aussage den Funktionswert mit der Steigung, 65.0% bei der zweiten Aussage.

Ein wesentlich besseres Ergebnis erzielten die Studierenden jedoch in Aufgaben, in denen sie Aussagen über die Änderungsrate in graphischen Situationen ohne Kontext machen sollten (*Aufgabe 9* des Vortests, nochmal dargestellt in Abbildung 83). Die Lösungshäufigkeiten sind in Tabelle 104 dargestellt.

9) Gegeben sei folgende Funktion f :



Quelle: VEMINT Vorkurstest 2014

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

	richtig	falsch
Die lokale Änderungsrate an der Stelle -1 ist positiv.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,5; 1,5]$ beträgt 0.	☐	☐
Die lokale Änderungsrate an der Stelle 0,5 ist negativ.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;1]$ ist positiv.	☐	☐

Abbildung 83: Aufgabe 9 des Vortests mit Aussagen über Änderungsraten ohne Kontext

Aussage	richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
1	richtig	83.9%	82.5%	89.7%
2	falsch	79.7%	80.7%	75.9%
3	richtig	75.5%	72.8%	86.2%
4	falsch	73.4%	69.3%	89.7%

Tabelle 104: Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 9 aus Abbildung 83 zu Aussagen über Änderungsraten einer Funktion ohne Kontext

Offenbar gelang den Studierenden die Deutung der Ableitung als Änderungsrate in graphischen Situationen ohne Kontext gut. Das gute Abschneiden der Studierenden in dieser Aufgabe erklärt auch, weshalb insgesamt nur sehr wenige Probanden in diesem Teilstest weniger als 5 Punkte erreichten (siehe Punkteverteilung in Abbildung 78).

In der letzten Aufgabe dieses Teilttests (*Aufgabe 12*), ebenfalls ohne Kontext, ging es wieder um die Problematik der gegenseitigen Kovariation, allerdings dieses mal ohne Kontext. Hier sollte das Wachstumsverhalten einer Funktion beschrieben werden (Abbildung 84). Die Lösungshäufigkeiten bei der Aufgabe sind in Tabelle 105 zu sehen. Die Verteilung auf die einzelnen Distraktoren sind in Tabelle 106 zu sehen.

12) Welche Eigenschaft hat der Graph der Funktion im Bereich von $x=5$ bis $x=12$?

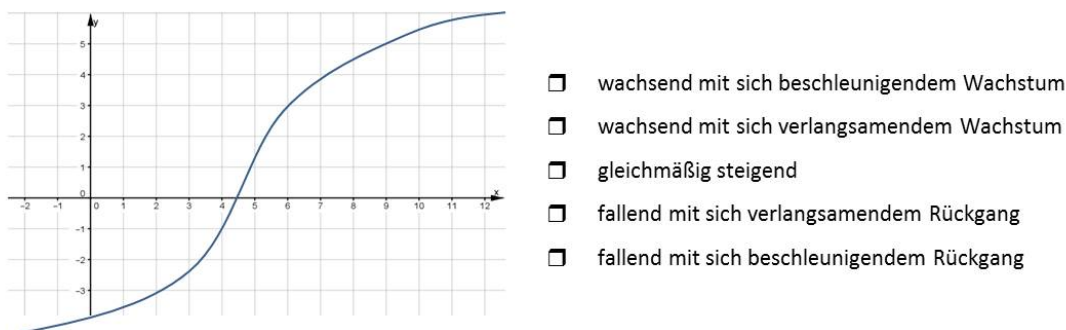


Abbildung 84: Aufgabe 12 aus dem Vortest, angelehnt an ein Item aus dem PCA (Carlson u. a., 2010)

richtige Antwort	% richtig Gesamtstichprobe ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
Antwort 2	86.0%	84.2%	93.1%

Tabelle 105: Lösungshäufigkeit bei Aufgabe 12 aus Abbildung 84 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion

Antwort 1	Antwort 2	Antwort 3	Antwort 4	Antwort 5	Keine Antwort
6.3%	86.0%	1.4%	0.7%	0.7%	4.9%

Tabelle 106: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 12 aus Abbildung 84 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion ($N = 143$)

Die Ergebnisse sind hier sehr erfreulich. Offenbar gelang auch diese Aufgabe den Studierenden sehr gut.

Insgesamt zeigt der Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate eine große Heterogenität der Studierenden bezüglich ihres Verständnisses von Änderungsraten. Studierende mit Leistungskurs haben in diesem Teilttest im Mittel signifikant besser abgeschnitten (siehe Abbildung 78 und Tabelle 95). Innerhalb der Aufgaben zeigte sich, dass der Umgang mit Änderungsraten in graphischen Situationen ohne Kontext gut gelang. Bei den Aufgaben mit Kontext, die kovariationales Argumentieren erforderten, waren die Ergebnisse dagegen sehr gemischt und hingen stark von der spezifischen Aufgabe und dem dort gewählten Kontext ab.

6.8.4 Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate mit der Literatur

In dem Teilttest zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate wurden viele Items aus der Literatur übernommen (direkt oder mit geringer Adaption). Daher lohnt ein Vergleich mit den dort dokumentierten Ergebnissen.

Vergleich bei den Aufgaben zu den Füllgraphen: Zunächst wurden zwei Aufgaben zur Thematik „Füllgraphen“ gestellt, deren Lösung kovariationales Argumentieren erfordert. Einmal sollte das Gefäß zu einem Füllgraphen angegeben werden, und einmal der Füllgraph zu vorgegebener Flasche ermittelt werden (siehe Abbildungen 79 und 80). Das erste der beiden Items wurde aus dem PCA entnommen (Carlson u. a., 2010). Dieser wurde 672 Studierenden von Precalculus-, Calculus- und Algebra-Kursen an der State University of Arizona vorgelegt. Ein Vergleich der Ergebnisse ist in Tabelle 107 dargestellt. Die richtige Antwort ist fett hervorgehoben. Hierbei waren unsere Studierenden geringfügig besser.

Gefäß	Teilnehmer PCA ($N = 672$)	Studienanfänger der Wiwi an der Uni Paderborn ($N = 143$)
A	7%	4.2%
B	33%	39.2%
C	37%	28.7%
D	4%	3.5%
E	19%	23.1%
keine Antwort	-	1.4%

Tabelle 107: Antworten der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften der Uni Paderborn im Vergleich zu den Probanden des PCA bei der Aufgabe das Gefäß zum Füllgraphen zu finden (Aufgabe siehe Abbildung 79)

Die zweite Aufgabe zu Füllgraphen war es, zu einer vorgegebenen Flasche den korrekten Füllgraphen auszuwählen (Aufgabe siehe Abbildung 80). Rund 86.1% der Studienanfänger haben einen qualitativ akzeptablen Graphen gewählt, der zunächst konkav, und dann konvex verläuft. Dies ist wesentlich besser als die bei Carlson u. a. (2002) dokumentierten Ergebnisse (ausführlich Beschreibung der Studie in Kapitel 4.3.3 ab S.115). Dort war die Aufgabe offen formuliert und es konnten nur 25% der Studierenden einen qualitativ akzeptablen Graphen zeichnen (siehe Tabelle 38).

Dass die Studienanfänger der Universität Paderborn wesentlich besser waren, könnte daran liegen, dass bei Carlson u. a. (2002, S.360) die Aufgabe offen gestellt wurde. Durch die vorgegebenen Antwortmöglichkeiten wäre es auch rein durch Symmetrieüberlegungen und ohne kovariationales Argumentieren möglich gewesen, die qualitativ richtigen Graphen zu identifizieren (siehe Abbildung 80).

Ein anderes Argument für das bessere Abschneiden der Studienanfänger an der Universität Paderborn könnte sein, dass Aufgaben mit Füllgraphen in der Schule explizit geübt werden (siehe zum Beispiel Schulbuch „Lambacher Schweiz“ (Giersemehl u. a., 2015, S.90) oder „Neue Wege“ (Lergenmüller u. Günter, 2011, S.139)). Auf jeden Fall bleibt festzuhalten, dass die hier getesteten Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften bei dieser Aufgabe im Vergleich zur Literatur ungewöhnlich gut waren.

Vergleich bei der Aufgabe mit der Dreiecksfläche: Bei der Aufgabe zur Dreiecksfläche (siehe Abbildung 81) hatten nur 14.0% den vollständig richtigen Graphen ausgewählt (siehe Tabelle 100). Diese Aufgabe hat auch Hoffkamp (2011) Studienanfängern der TU Berlin in Mathematik gestellt (siehe Kapitel 4.3.1). Dort hatten 66% die richtige Antwort ausgewählt (Hoffkamp, 2011, S.12). Eine Erklärung für die Unterschiede wäre, dass die dortigen Studierenden als Studierende der Mathematik generell ein besseres Vorverständnis zur Ableitung haben (zum Beispiel weil sie einen Leistungskurs besucht haben). Außerdem wurde in diesem Vortest gegenüber Hoffkamp (2011) noch ein zusätzlicher Distraktor aufgenommen (monoton steigender Graph mit Knick, siehe Abbildung 81), weil man ansonsten bereits durch Monotonieüberlegungen zur richtigen Antwort gelangen konnte. Dies machte die Aufgabe erheblich schwerer.

Vergleich bei der Aufgabe zum Ertragsgesetz: Die letzte Aufgabe im Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate mit Kontext war die Aufgabe zur qualitativen Beschreibung des Ertragsgesetzes (siehe Abbildung 82). Hier ging es um die Problematik der gegensinnigen Kovariation von f und f' (Hahn u. Prediger, 2008, S.176) (ausführliche Beschreibung der zugehörigen Studie siehe Kapitel 4.3.3, ab S.115). Hahn u. Prediger (2008) hatten diese Aufgabe 204 Studienanfängern des Lehramtes für Grund-, Haupt- und Realschulen an der Universität Bremen zu Beginn des Wintersemesters vorgelegt (mit geringfügig anderem Kontext, siehe Abbildung 75). Die Lösungshäufigkeiten im Vergleich sind in Tabelle 108 zu sehen.

Aussage	Studienanfänger Lehramt der Uni Bremen ($N = 204$)	Studienanfänger Wiwi der Uni Paderborn ($N = 163$)
1	42%	30.8%
2	47%	29.8%

Tabelle 108: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 11 zum Ertragsgesetz im Vergleich zu Studierenden des Lehramtes für Grund-, Haupt- und Realschulen aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) (Aufgabe siehe Abbildung 82)

Die Lösungshäufigkeiten der hier getesteten Studienanfänger sind deutlich geringer. Dass der Graph in der Originalaufgabe einen deutlicheren Wendepunkt hat als in der unseren Studienanfängern vorgelegten Aufgabe (denn unser Graph basierte auf realen Daten), ist keine Ursache für die schlechteren Ergebnisse. Denn die Lösungshäufigkeit bei der zweiten Aussage, bei der dieser Wendepunkt keine Rolle spielt, war ebenfalls wesentlich geringer. Eine Erklärung der unterschiedlichen Ergebnisse wäre, dass Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften ein schwächeres Eingangsverständnis von Änderungsraten haben als Studienanfänger des Lehramtes (zum Beispiel weil bei den Lehramtsstudierenden mehr Probanden einen Leistungskurs besucht hatten). Allerdings ist das nur eine Vermutung, die sich auf Basis der gegebenen Daten nicht beweisen lässt.

Vergleich bei der Aufgabe zur Beschreibung des Wachstumsverhaltens einer Funktion ohne Kontext: Die letzte Aufgabe dieses Teilttests, die aus der Literatur entnommen wurde, war wieder eine Aufgabe aus dem PCA (Carlson u. a., 2010). In ihr ging es um die Beschreibung des Wachstumsverhaltens einer Funktion (siehe Abbildung 84, Beschreibung der Originalaufgabe siehe Kapitel 4.3.1, ab S.101, Ergebnisse

siehe Tabelle 33). Ein Vergleich der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften mit den Teilnehmern des PCA (Studierende aus Precalculus-Kursen, Calculus-Kursen und Algebra-Kursen der Arizona State University) ist in Tabelle 109 dargestellt. Die richtige Antwort ist wieder fett hervorgehoben.

Antwort	Teilnehmer PCA ($N = 672$)	Studienanfänger der Wiwi an der Uni Paderborn ($N = 143$)
Wachsend mit sich beschleunigen- dem Wachstum	42%	6.3%
Wachsend mit sich verlangsamen- dem Wachstum	49%	86.0%
Gleichmäßig steigend	6%	1.4%
Fallend mit sich verlangsamen- dem Rückgang	1%	0.7%
Fallend mit sich beschleunigen- dem Rückgang	1%	0.7%
Keine Antwort	1%	4,9%

Tabelle 109: Antworten der Studierenden bei Aufgabe 12 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion im Vergleich zu den Teilnehmern des PCA an der Arizona State University (Aufgabe siehe Abbildung 84)

Die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften der Uni Paderborn erzielten wesentlich bessere Ergebnisse als die Probanden des PCA in den USA. Dies könnte daran liegen, dass im Vortest die Distraktoren etwas umformuliert wurden. Die Originalantwortoptionen lauteten „Increasing at an increasing rate“, „Increasing at a decreasing rate“, ... (siehe Tabelle 33 in Kapitel 4.3.1). Möglicherweise waren die in diesem Vortest gewählten Formulierungen der Antwortalternativen besonders verständlich.

Insgesamt zeigt sich beim Vergleich mit der Literatur kein einheitliches Bild. Es hing sehr von den Probanden und der jeweiligen Aufgabe ab, wie das Ergebnis ausfiel. Man sieht anhand der zuletzt diskutierten Aufgabe, dass schon geringfügige Formulierungsänderungen bei den Items große Veränderungen beim Antwortverhalten bewirken können.

Überraschend ist, dass die Aufgabe den Graphen zum Füllen einer Flasche zu finden so viel besser ausgefallen ist als bei Carlson u. a. (2002). Neben der Tatsache, dass hier Antwortoptionen vorgegeben waren während die Aufgabe bei Carlson et al. offen gestellt war, könnte eine Erklärung für das bessere Abschneiden der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Paderborn sein, dass solche Aufgabentypen in Deutschland in der Schule explizit geübt werden (Giersemehl u. a., 2015, S.90; Lergenmüller u. Günter, 2011, S.139).

6.9 Der Teilttest zum Tangentenkonzept

6.9.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zum Tangentenkonzept

In fünften Teilttest wird das Verständnis des Tangentenkonzepts untersucht, das Basis für das Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung ist. Das Konzept der

19) In welchen der folgenden Abbildungen sind die eingezeichneten Geraden Tangenten an den Graphen der Funktion im Punkt A?

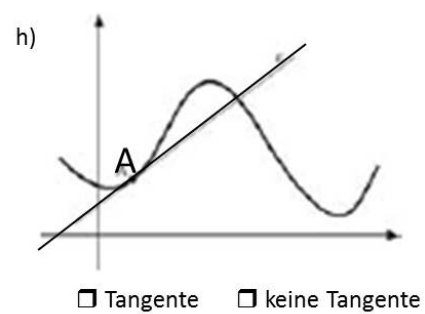
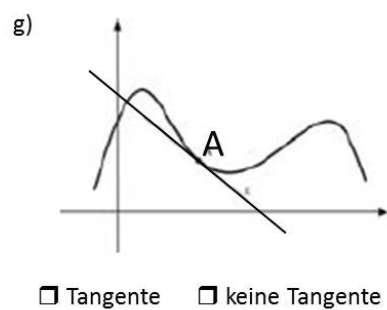
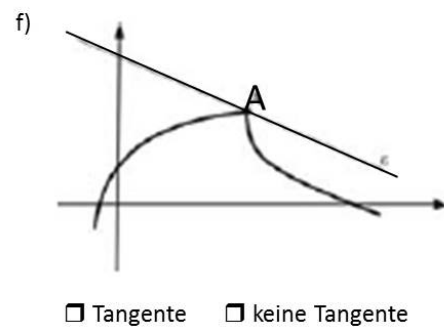
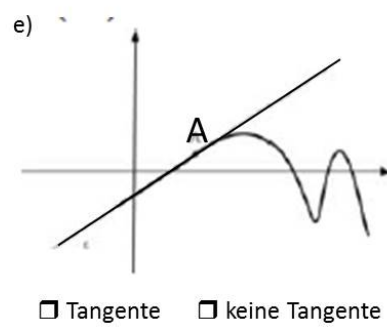
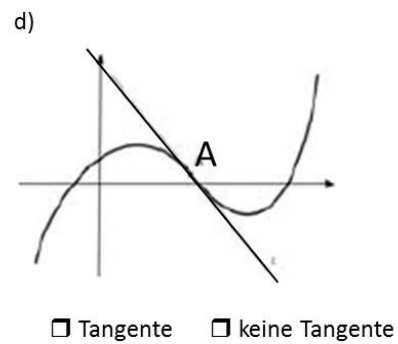
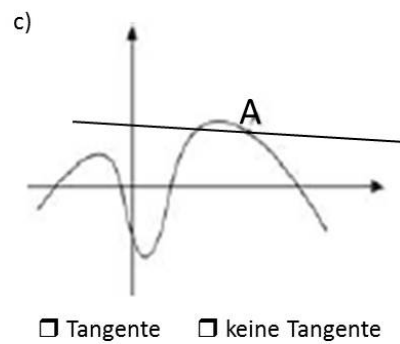
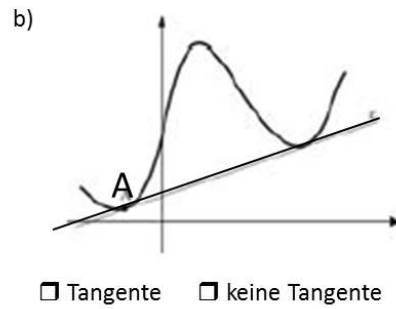
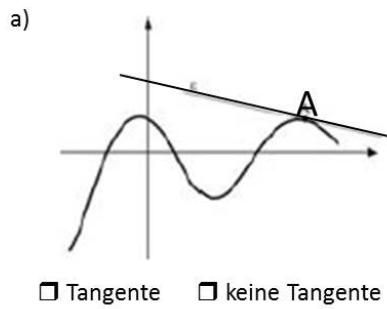


Abbildung 85: Teilstest zum Tangentenbegriff (Aufgabe 19)

Tangente ist für Studierende der Ökonomie *zusätzlich* für graphisches Lösen ökonomischer Optimierungsprobleme wichtig (Beispiel: Bestimmung des gewinnoptimalen Angebots und des zugehörigen Preises, siehe Kapitel 5.5.5).

Der Teilttest zum Verständnis des Tangentenbegriffs orientiert sich an Biza (2007), die herausgefunden hat, dass bei Studierenden der Mathematik eigene Modelle zum Tangentenkonzept vorliegen, die nicht alle Facetten des Konzepts der Tangente an eine Kurve enthalten (ausführliche Diskussion der Studie in Kapitel 4.2.3, ab S.94). Die 8 Aufgaben dieses Teilttests wurden von Biza (2007, S.8) übernommen. Sie sind in Abbildung 85 dargestellt.

In diesen 8 Aufgaben sind möglichst vielfältige Beziehungen zwischen einer Funktion und einer Gerade mit gemeinsamem Punkt *A* dargestellt. Je nachdem, welche der 8 Geraden die Studierenden als Tangente ansehen, lassen sich dann Schüsse darauf ziehen, inwieweit Studierende ihr *concept image* zur Tangente vom geometrischen Tangentenkonzept (Tangente als globale Berührende an einen Kreis) zu einem adäquaten *concept image* zum Konzept der Tangente an eine Kurve erweitert haben.

6.9.2 Analyse der Daten des Teilttests zum Tangentenkonzept

Wie bereits gesagt, besteht dieser Teilttest aus 8 Multiple-choice Aufgaben, bei denen jeweils entschieden werden sollte, ob eine graphisch dargestellte Gerade an eine Funktion eine Tangente ist oder nicht. Bei richtiger Antwort wurde jeweils 1 Punkt vergeben, ansonsten wurde das entsprechende Item mit 0 Punkten bewertet. Das entspricht einer Codierung der Antworten mit den Werten 0 oder 1. Mit dieser Codierung ergab sich für Cronbachs α ein akzeptabler Wert nur knapp unter 0.7 ($\alpha = 0.688$).

Item	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Graph a)	0.099	0.707
Graph b)	0.331	0.670
Graph c)	0.096	0.706
Graph d)	0.504	0.626
Graph e)	0.335	0.669
Graph f)	0.430	0.645
Graph g)	0.579	0.606
Graph h)	0.584	0.604

Tabelle 110: Trennschärfen des Teilttests zum Tangentenkonzept

Die Trennschärfen sind in Tabelle 110 dargestellt. Zwei Items stechen hier mit besonders niedrigen Trennschärfen heraus (Graphen a) und c)). Dies ist nicht überraschend, denn Graph a) ist eine Gerade, die die Funktion global nur in einem Punkt berührt (und nicht schneidet) und Graph c) ist eine Sekante. Bei beiden Graphen spielt es keine Rolle, inwiefern die Studierenden ihr *concept image* vom Konzept der *Tangente an einen Kreis* zum Konzept der *Tangente an eine Kurve* erweitert haben. Daher sind diese Items sehr leicht und trennten die Probanden nicht auf. Dennoch sollten beide Items im Test bleiben, weil diese beiden Beziehungen zwischen einer Kurve und einer Geraden eben dazugehören. Alle anderen Trennschärfen sind über 0.3 und damit gut.

6.9.3 Ergebnisse des Teiltests zum Tangentenkonzept

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: Die von den Probanden erreichten Punktzahlen sind in Abbildung 86 dargestellt (Maximalpunktzahl: 8). Die zugehörigen Kenngrößen befinden sich in Tabelle 111.

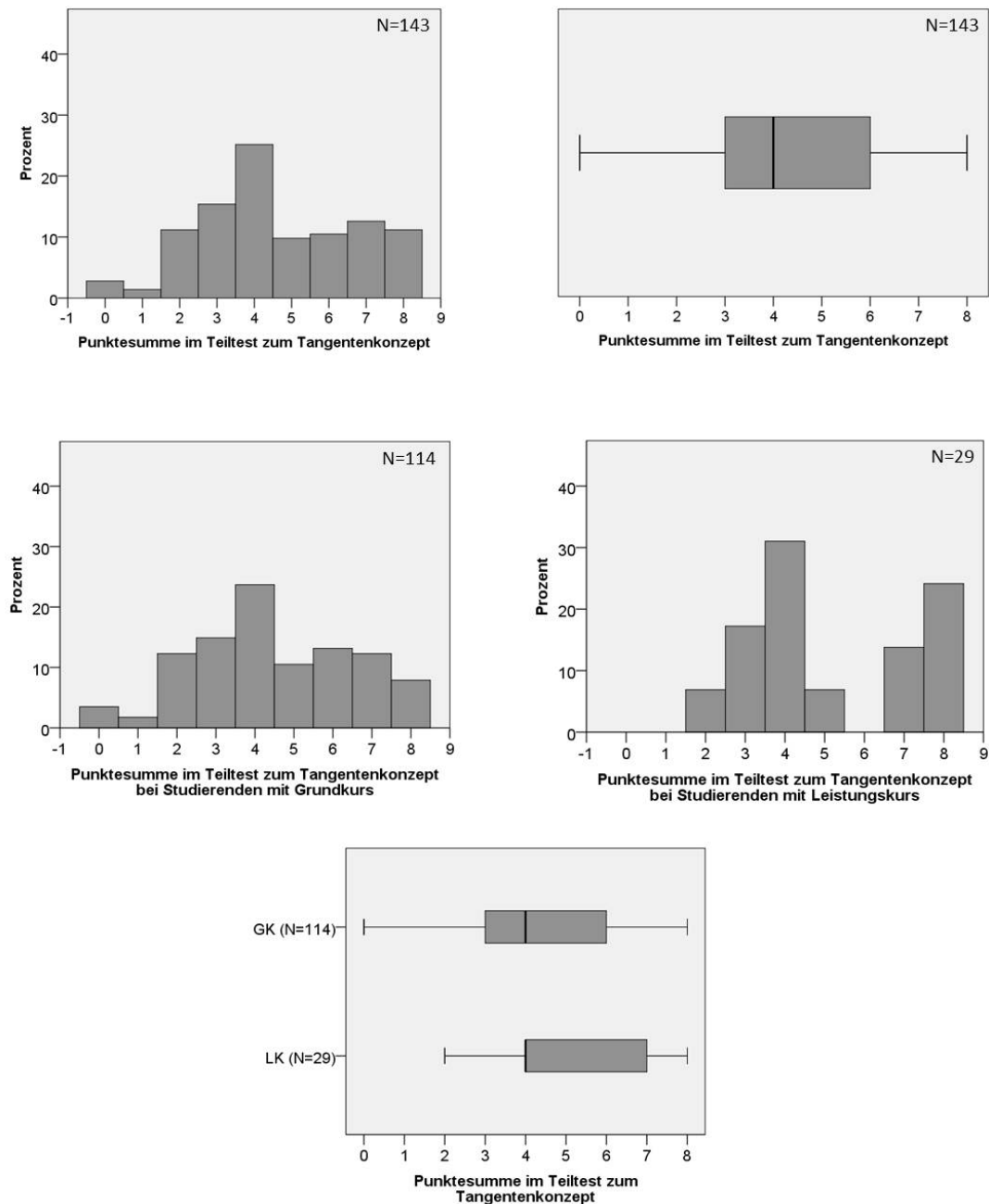


Abbildung 86: Punkteverteilung im Teilttest zum Tangentenkonzept

Im Mittel wurden etwas mehr als die Hälfte der Punkte erreicht, wobei die Studierenden mit Leistungskurs in diesem Teilttest im Mittel besser abschnitten. Der Unterschied der mittleren Punktzahl im Vergleich zu Probanden mit Grundkurs war jedoch *nicht* signifikant (zum Niveau $\alpha = 0.05$). Es gibt aber auch wieder eine große Streuung der erreichten Punktzahlen. Bei der Betrachtung der Verteilungen der Probanden mit

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	4.60	4.46	5.14
Median	4	4	4
Standardabweichung	2.070	2.045	2.117

Tabelle 111: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zum Tangentenkonzept

Grund- und Leistungskurs sieht man, dass es bei den Studienanfängern mit Leistungskurs eine große Gruppe mit mindestens 7 von 8 Punkten gab (37.9%). Sie zeigten im Wesentlichen adäquate Vorstellungen zum Konzept der Tangente an eine Kurve. Ebenso traten dort die Fälle 0 Punkte und 1 Punkt nicht auf.

Ergebnisse der Einzelitems: Die Lösungshäufigkeiten der einzelnen Items, bei denen entschieden werden sollte, ob die eingezeichnete Gerade eine Tangente ist oder nicht, sind in Tabelle 112 dargestellt.

Offensichtlich konnten fast alle Studierenden die globale Berührende als Tangente identifizieren sowie die Sekante als Gerade erkennen, die keine Tangente ist. Bei den anderen Geraden, die Tangenten sind, waren nur etwa 40%-50% der Studierenden in der Lage sie als solche zu identifizieren. Stattdessen sahen 58.0% der Studierenden eine Gerade, die mit der Funktion genau einen gemeinsamen Punkt hat, und zwar an einer nicht-differenzierbaren Stelle, als Tangente an (Graph f) in Tabelle 112 – 3.5% gaben keine Antwort). Dies liegt vermutlich daran, dass Differenzierbarkeit an der Schule nicht mehr thematisiert wird, auch nicht im Leistungskurs (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013).

Interessant wären noch Kombinationen der Items. Alle Items korrekt beantwortet haben nur 11.2% der Probanden. Studierende, deren Tangentenkonzept dagegen rein dem geometrischen Konzept als *globale Berührende* entspricht, hätten nur Geraden als Tangenten ansehen dürfen, die den Funktionsgraph im Tangentialpunkt nur berühren und nicht schneiden, sowie keinen weiteren gemeinsamen Punkt mit ihm haben (Graph a) und eventuell die an Graph f)). Dies umfasst 10.5% der Studierenden (alle diese sahen die Gerade bei Graph f) auch als Tangente an).

Studierende, welche die Tangente dadurch charakterisieren, dass sie mit der Funktion genau einem gemeinsamen Punkt hat, müssten zusätzlich zu den Geraden bei den Graphen a) und f) noch die Gerade bei Graph d) (Tangente im Wendepunkt) als Tangente ansehen. Dies umfasst weitere 4.2% der Studierenden. Also charakterisierten insgesamt 16.1% der Studierenden die Tangente dadurch, dass sie genau einen gemeinsamen Punkt mit der Funktion hat.

Insgesamt erkennt man in diesem Teilttest, dass nur 11.2% zum Konzept der Tangente an eine Kurve passende Vorstellungen bei der Beziehung zwischen Tangente und Funktion zeigten. Aber auch nur 14.7% der Studierenden gaben Antworten, die konsistent zu einem Tangentenbegriff als Gerade mit genau einem gemeinsamen Punkt wie bei der Tangente an einen Kreis passen. 74.1% der Studierenden haben ihre Vorstellungen zu Tangenten zumindest partiell vom Konzept der Tangente an einen Kreis zum Konzept der Tangente an eine Kurve bzw. an eine Funktion erweitert.

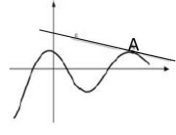
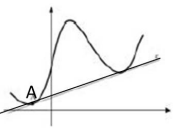
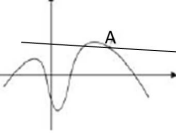
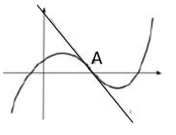
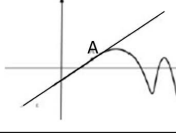
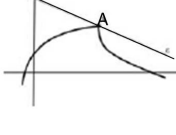
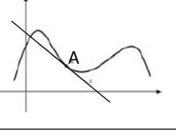
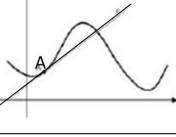
Graph	% richtig Gesamt ($N = 143$)	% richtig GK ($N = 114$)	% richtig LK ($N = 29$)
a) 	86.0%	83.3%	96.6%
b) 	49.7%	48.2%	55.2%
c) 	87.6%	86.0%	93.1%
d) 	56.6%	54.4%	65.5%
e) 	57.3%	54.4%	69.0%
f) 	38.5%	38.6%	37.9%
g) 	40.6%	38.6%	48.3%
h) 	44.1%	43.0%	48.3%

Tabelle 112: Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben zu entscheiden, ob die dargestellten Tangenten an den Punkt A sind

6.9.4 Vergleich der Ergebnisse des Teiltests zum Tangentenkonzept mit der Literatur

Die Items dieses Teiltests stammen aus einem Test von Biza (2007), den sie 182 Studierenden in Griechenland vorlegte um ihre Vorstellungen zu Tangenten zu erfassen (nur Skizze c) mit der Sekante fehlte). Ein Vergleich der Ergebnisse ist in Tabelle 113 zu sehen. Ein genauer Itemvergleich ist leider nicht möglich, da in Biza (2007) keine Ergebnisse der Einzelitems angegeben sind, sondern nur für Itemkombinationen.

	Probanden Biza ($N = 182$)	Probanden Paderborn ($N = 143$)
Richtige Beantwortung aller Items	9.9%	11.2%
Konsistente Beantwortung der Items passend zu Vorstellungen der Tangente als Gerade mit genau einem gemeinsamen Punkt (Auffassung der Geraden a), d) und f) aus Abbildung 85 als Tangenten)	12.0%	14.7%
<i>Partielle Erweiterung des concept image</i> von der Tangente an einen Kreis zur Tangente an eine Kurve (Restliche Studierende)	78.1%	74.1%

Tabelle 113: Vergleich der Antworten Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn mit den Probanden bei Biza (2007) bei den Items dieses Teiltests

Wie die Studie von Biza (2007) zeigt dieser Teilttest somit, dass das Konzept der Tangente an eine Kurve oft nur unvollständig erfasst wurde. Ebenso gab es hier aber auch nur wenige Probanden, die klar bei der geometrischen Vorstellung der Tangente stehen geblieben sind. Bei den meisten Studierenden umfasste das *concept image* zur Tangente einige adäquate Vorstellungen zum Konzept der Tangente an eine Kurve, andere Vorstellungen passten jedoch noch zu dem in der Mittelstufe vermittelten geometrischen Tangentenbegriff als globale Berührende an einen Punkt.

6.10 Der Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen

6.10.1 Aufbau und Konstruktion des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen

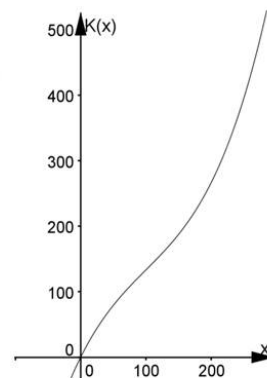
In dem letzten Teilttest dieses Vortests aus 5 Aufgaben (Aufgaben 15-18, 20) geht es um die ökonomische Interpretation der Ableitung und das für deren Verständnis nötige Hintergrundwissen (siehe Kapitel 3.3). In drei Aufgaben (Aufgaben 16-18) geht es direkt um die ökonomische Interpretation der Ableitung. Die beiden anderen Aufgaben (Aufgaben 15 und 20) sprechen das Hintergrundwissen für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation an (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation, siehe Kapitel 3.3.2).

Aufgaben zur ökonomischen Interpretation der Ableitung: In *Aufgabe 16* werden die Studierenden direkt nach der ökonomischen Interpretation der Ableitung in einer eingekleideten Kontextaufgabe gefragt (siehe Abbildung 87). Es wurde hierbei eine offene Frage gewählt, weil in der Schule in der Regel keine ökonomische Interpretation der Ableitung behandelt wird (Jörgens u. a., 2011), und herausgefunden werden sollte, wie Studienanfänger auf Basis ihres Schulwissens zum mathematischen Konzept der Ableitung diese in einem ökonomischen Kontext interpretieren würden.

- 16) Ein Unternehmen produziert Kugelschreiber. Die von der produzierten Stückzahl abhängigen Produktionskosten sind durch eine Kostenfunktion K mit folgender Gleichung gegeben:

$$K(x) = \frac{1}{30000}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + 2x, \quad x \geq 0$$

$K(x)$ gibt die Kosten in Euro bei der Produktion von x Kugelschreibern an.



Bei dieser Kostenfunktion hat die Ableitung an der Stelle $x=200$ den Wert 2, d.h. es gilt $K'(200)=2$. Wie lässt sich dieses Ergebnis ökonomisch in obigem Kontext interpretieren?

Abbildung 87: Aufgabe 16 des Vortests

In den *Aufgaben 17 und 18* geht es um die bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung häufig vorgenommene Identifikation der Ableitung mit dem Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit. In *Aufgabe 17* werden die Studierenden zunächst aufgefordert, bei gegebener Kostenfunktion $K(x)$ die Zusatzkosten für die nächste Einheit explizit zu bestimmen (siehe Abbildung 88). Damit sollte herausgefunden werden, ob die Studierenden spontan eine solche Identifikation vornehmen würden (oder sie diese vielleicht auch aus der Schule kennen).

- 17) Bei einem weiteren Unternehmen hat die zu einem Produkt gehörige Kostenfunktion die Gleichung

$$K(x) = \frac{1}{100}x^3 - x^2 + 100x, \quad x \geq 0$$

$K(x)$ gibt wieder die Kosten in Euro bei Produktion einer Stückzahl x des Produktes an.

Wie hoch sind die entstehenden Mehrkosten, wenn man die Produktion von 100 Stück um ein weiteres Stück erhöht?

Ergebnis: _____

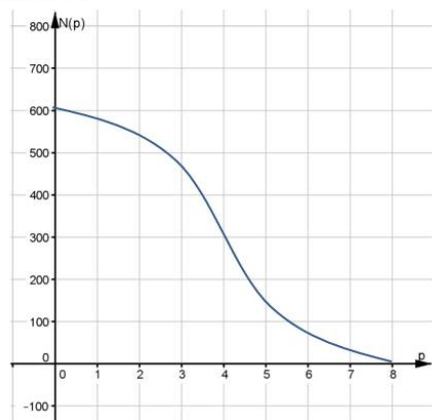
Rechenweg:

Abbildung 88: Aufgabe 17 des Vortests

Aufgabe 18 ist der eben genannten Aufgabe 17 sehr ähnlich. Dieses Mal geht es um die Bestimmung der Nachfrageverringering bei einem Produkt bei Erhöhung des Preises um eine Einheit (siehe Abbildung 89). Dieses Mal wurde die Aufgabe aber nicht offen gestellt, sondern die Studierenden konnten aus verschiedenen Antwortalternativen wählen. Die erste Antwortmöglichkeit wird angekreuzt, wenn eine Identifikation von Ableitung und Zuwachs der Funktion vorgenommen oder die Ableitung als Approximation des exakten Ergebnisses verwendet wird. Antwortmöglichkeit 2 ist das exakte Ergebnis. Bei Antwortmöglichkeit 3 wurde ein möglichst komplizierter Term, der mit p_0 und $p_0 + 1$ zu tun hat, gewählt (um Leute, die raten, dorthin zu lenken). Die letzte Antwortmöglichkeit ist einfach nur die Nachfrage beim Preis $p_0 + 1$ Euro.

18) Die Nachfrage eines Produktes ändert sich in Abhängigkeit vom Preis, was sich durch die Nachfragefunktion $N(p)$ darstellen lässt. Beispielsweise lassen sich bei einem Produkt, dessen Nachfragefunktion in Abbildung 1 dargestellt ist bei einem Preis von 4 Euro 300 Mengeneinheiten absetzen.

Abbildung 1



Bei einem festen Preis von p_0 (in Euro) ist die Nachfrage gegeben durch den Ausdruck $N(p_0)$ (Stückzahl).

Welcher Ausdruck gibt exakt die Änderung der Nachfrage bei einer Erhöhung des Preises von p_0 um 1 Euro an?

- ☐ $N'(p_0)$
- ☐ $N(p_0 + 1) - N(p_0)$
- ☐ $N'(p_0 + 1) - N'(p_0)$
- ☐ $N(p_0 + 1)$

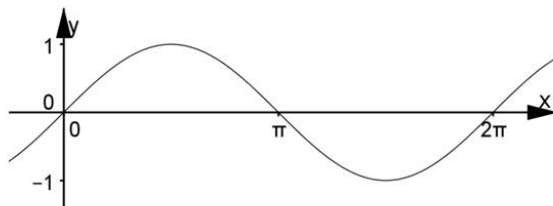
Abbildung 89: Aufgabe 18 des Vortests

Aufgaben zum notwendigen Hintergrundwissen zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung: Aufgaben 15 und 20 sprechen notwendiges Hintergrundwissen für ein Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation an. Dieser Zusammenhang ist, wie in Kapitel 3.3.2 ausführlich erläutert, die Approximationsformel $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$. Diese kann man aus der Definition der Ableitung herleiten oder sie ergibt sich aus der Auffassung der Ableitung als Steigung der bestmöglichen lokalen linearen Approximation der Funktion f in der Nähe von x (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.72). Daher wurden in diesem Teilttest auch eine Aufgabe zur Definition der Ableitung, und eine zur Verwendung der Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation gestellt.

In *Aufgabe 15* soll erfasst werden, ob die Studierenden in der Lage sind, Funktionswerte näherungsweise mit Hilfe der Ableitung durch lokale lineare Approximation zu bestimmen, wie dies beispielsweise bereits Blum u. Kirsch (1979, S.12) im Analysisunterricht für Grundkurse gefordert haben. Die Aufgabe ist in Abbildung 90 dargestellt.

Die intendierte der Lösung wäre, dass $\sin(0,1) \approx 0,1$. Eine adäquate Begründung wäre: Da $\sin'(0) = 1$ ist, hat die Funktion an der Stelle $x = 0$ die Steigung 1. Da dies die Steigung Tangente ist, welche den Graphen der Sinusfunktion in einer Umgebung der 0 gut approximiert, wäre dann der zugehörige Funktionswert auf der Tangente $T(0,1) = 0,1$ eine gute Näherung.

15) Gegeben ist die Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x)=\sin(x)$, (x ist im Bogenmaß angegeben).



Es ist bekannt, dass $\sin(0)=0$ und $\sin'(0)=1$, denn $\sin'(x)=\cos(x)$ und $\cos(0)=1$.

Geben Sie mit Hilfe der Ableitung des Sinus bei $x=0$ (**ohne** Hilfe Ihres Taschenrechners und **ohne** Verwendung des Kosinus) einen Näherungswert für $\sin(0,1)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Begründung: $\sin(0,1) \approx$ _____

Abbildung 90: Aufgabe 15 des Vortests

Es wurde hier aus folgenden Gründen die Sinusfunktion gewählt:

- Die Sinusfunktion ist den Schülern bekannt.
- Die Werte $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$ sind einfache Werte.
- Lösungen, die entgegen der Aufgabenstellung doch mit dem Taschenrechner ermittelt werden, fallen oft auf, weil viele Studierende nicht darauf achten, das Bogenmaß zu verwenden. Dann erhalten sie den falschen Wert 0,0017.
- Die Ableitung des Sinus wird in NRW, dem Bundesland der Universität Paderborn (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.25), in der Schule behandelt.

Ebenfalls geeignet wäre auch die Wurzelfunktion an der Stelle $x = 1$ gewesen.

In *Aufgabe 20* soll schließlich noch eine Definition der Ableitung angegeben werden. Die formale Definition der Ableitung ist wichtig zur Rechtfertigung der ökonomischen Interpretation der Ableitung auf symbolischer Ebene über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ (siehe Kapitel 3.3.2). Die genaue Aufgabenstellung lautet:

Geben Sie eine Definition für die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ an.

Der Begriff der Differenzierbarkeit wird hierbei nicht genannt, da er in der Schule nicht unbedingt behandelt wird (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013).

6.10.2 Analyse der Daten des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen

Der Teilttest besteht aus 5 Aufgaben: (1) Zwei offene Aufgaben und eine Multiple-choice Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung, (2) die Frage nach einer Definition der Ableitung und (3) eine Aufgabe zur Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation. Die Analyse der Daten erfolgte in zwei Schritten:

1. Kategorisierung der Antworten der offenen Aufgaben
2. Entwicklung eines Punkteschemas für den gesamten Teilttest

Analyse der Daten der offenen Aufgaben zur ökonomischen Interpretation der Ableitung: Zunächst wurden die Antworten der Aufgabe kategorisiert, in der in Studierenden $K'(200)$ im Kontext einer Kugelschreiberproduktion interpretieren sollten. $K(x)$ gibt die Kosten für die Produktion von x Kugelschreibern an. Bei der Kategorisierung ergaben sich 9 Kategorien. Diese sind in Tabelle 114 dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen befindet sich in Tabelle 115.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
I1.	Zusatzkosten der nächsten Einheit
I2.	Wachstumsrate der Kosten
I3.	Steigung der Kosten an der Stelle
I4.	Kosten pro Einheit
I5.	Gesamtkosten
I6.	Verdopplung oder Halbierung der Kosten
I7.	Andere falsche Interpretation
I8.	Steigung der Funktion
I9.	Keine gültige Antwort

Tabelle 114: Kategoriensystem der Aufgabe zur Interpretation von $K'(200) = 2$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Kugelschreibern“

Kategorien I1 und I2 können als adäquate Antworten angesehen werden. In Kategorie I1 befinden sich Antworten mit der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit. Im Vortest kann noch nicht vorausgesetzt werden, dass die Studienanfänger hier genau wissen, dass die Ableitung numerisch eigentlich nur eine Approximation dieser Zusatzkosten angibt, weshalb diese Interpretationen hier als vollständig adäquat angesehen werden. In Kategorie I2 befinden sich Antworten mit einer Interpretation von $K'(200)$ als Wachstumsrate der Kosten. Dies wäre die adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung auf Basis des in der Schule vermittelten Wissens zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate.

Die Antwortkategorien I3-I4 („Steigung der Kosten an der Stelle“ und „Kosten pro Einheit“) beinhalten immerhin noch richtige Ideen. Bei den Antworten der Kategorie I3 („Steigung der Kosten an der Stelle“) versuchten die Studierenden die geometrische Interpretation der Ableitung als Steigung in den Kontext zu übersetzen, was jedoch nicht ganz gelungen ist, da Kosten nicht an einer Stelle wachsen können. Hier fehlt das „pro Einheit“. Bei den Antworten der Kategorie I4 wurde zwar das „pro Einheit“

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
I1. Zusatzkosten der nächsten Einheit	Die Studierenden interpretieren $K'(200)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit.	<i>„Es bedeutet, dass wenn die produzierte Stückzahl von 200 Stück um eine Einheit erhöht wird, dass die Produktionskosten dann um zwei Einheiten steigen.“</i>
I2. Wachstumsrate der Kosten	Die Studierenden geben an, dass $K'(200)$ bedeutet, dass die Kosten bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern um 2 Euro pro Kugelschreiber steigen.	<i>„Bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern steigen die Produktionskosten um 2 Euro pro Kugelschreiber.“</i>
I3. Steigung der Kosten an der Stelle	$K'(200)$ wird als Wachstum der Kosten bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern interpretiert.	<i>„Bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern steigen die Kosten um 2 Euro an.“</i>
I4. Kosten pro Einheit	Die Studierenden interpretieren $K'(200)$ als Kosten pro Kugelschreiber (bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern).	<i>„Die Kosten pro Kugelschreiber bei 200 Stück liegen bei 2 Euro pro Kugelschreiber.“</i>
I5. Gesamtkosten	Die Studierenden interpretieren $K'(200)$ als Kosten für 200 Kugelschreiber.	<i>„Die Produktion von 200 Kugelschreibern kostet zwei Euro.“</i>
I6. Verdopplung oder Halbierung der Kosten	Die Studierenden geben an, dass $K'(200)$ bedeutet, dass sich bei 200 Kugelschreibern die Kosten verdoppeln oder halbieren.	<i>„In diesem Punkt verdoppeln sich die Kosten pro Kugelschreiber mit jedem, der produziert wird.“</i>
I7. Andere falsche Deutung	Es wird eine andere falsche Deutung von $K'(200) = 2$ angegeben.	<i>„Bei 200 Kugelschreibern ist ein Minimum. Das Kostenminimum liegt bei 2 Euro.“</i>
I8. Steigung der Funktion	Die Studierenden interpretieren den Wert $K'(200)$ als Steigung ohne Bezug zum Kontext .	<i>„Steigung ist an der Stelle von 200 gleich 2.“</i>
I9. Keine gültige Antwort	Es wird keine gültige Antwort gegeben, was im Detail folgende Antwortvarianten umfasst: 1. Keine Antwort 2. Antwortfragmente 3. (richtige) Antworten, die nichts mit der Aufgabe zu tun haben.	1. <i>„Keine Ahnung.“</i> 2. <i>„Wenn $K'(x)$ positiv, dann Gewinn“</i>

Tabelle 115: Beschreibung der Kategorien der Aufgabe zur Interpretation von $K'(200) = 2$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Kugelschreibern“

genannt. Aber aus den Antworten wird nicht ersichtlich, dass $K'(x)$ das Wachstum der Kosten pro Einheit und nicht die Kosten pro Einheit angibt.

Die Antwortkategorien I5-I7 beinhalten falsche ökonomische Interpretationen der Ableitung. Die Kategorien I8-I9 sind keine ökonomischen Interpretationen.

In der *zweiten offenen Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung* ging es darum, bei der Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{100}x^3 - x^2 + 100x$ die Mehrkosten bei Erhöhung einer Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit zu bestimmen (siehe Abbildung 88). Hier wurden die Antworten anhand der Lösungswege induktiv kategorisiert. Es ergaben sich insgesamt 10 Kategorien. Eine Übersicht über die Kategorien befindet sich in Tabelle 116. Da die Kategorienbezeichnungen selbsterklärend sind, wird aus Platzgründen auf eine Detailbeschreibung der Kategorien verzichtet.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
M1.	Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ (Ergebnis: 202,01 €)
M2.	Ableitung $K'(100)$ (Ergebnis: 200 €)
M3.	Ableitung $K'(101)$ (Ergebnis: 204,03 €)
M4.	Kostendifferenz mit Rechenfehler
M5.	Berechnung von $K(101)$
M6.	Berechnung von $K(1)$
M7.	Falsches Ergebnis mit anderem falschen Weg
M8.	Falsches Ergebnis ohne Rechenweg
M9.	Kein sinnvoller Ansatz
M10.	Keine Antwort

Tabelle 116: Kategoriensystem der Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit

Bei den Kategorien M1 und M4 wird die exakte Kostendifferenz bestimmt (bei M4 allerdings mit Rechenfehler). Bei den Kategorien M2-M3 wird die Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten oder der letzten Einheit identifiziert bzw. als Approximation dieser Zusatzkosten verwendet. Die Kategorien M5-M9 beinhalten schließlich falsche Antworten. Interessant ist hierbei die Kategorie M6 („Berechnung durch $K(1)$ “). Hier setzen die Studierenden teilweise direkt $x = 1$ ein (siehe Abbildung 91). Man erhält die Antwort aber auch, wenn man $K(101) - K(100) = K(1)$ rechnet, was auch auftrat.

Ergebnis: 99,01€ Rechenweg: $\frac{1}{100} \cdot 1^3 - 1^2 + 100 \cdot 1$
 $\rightarrow$ für x 1 einsetzen

Abbildung 91: Beispiellösung, in der die Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit über $K(1)$ ermittelt wurden

Kategorisierung der Antworten zur Definition der Ableitung: In einer weiteren Aufgabe dieses Teiltests sollte eine Definition der Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ angegeben werden. Das hier ermittelte Kategoriensystem besteht aus 7 Kategorien (siehe Tabelle 117). Dabei standen die formale Definition der

Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, eine geometrische Definition als Steigung (der Tangente) an der Stelle x und eine Definition der Ableitung als lokale Änderungsrate bei x bereits vor der Datenanalyse als deduktive Kategorien fest. Die anderen Kategorien wurden induktiv gefunden. Eine Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen befindet sich in Tabelle 118.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
D1.	Grenzwert des Differenzenquotienten
D2.	Steigung der Funktion
D3.	Änderungsrate der Funktion
D4.	Potenzregel
D5.	Ableitung eines verallgemeinerten Polynoms
D6.	Zahlenbeispiel
D7.	Keine gültige Antwort

Tabelle 117: Kategoriensystem der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer der Stelle $x \in \mathbb{R}$

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
D1. Grenzwert des Differenzenquotienten	Die Studierenden geben an, dass $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ oder $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist.	trat nicht auf
D2. Steigung der Funktion	Die Studierenden geben an, dass die Ableitung die Steigung der Funktion an der Stelle x ist.	<i>„Die Ableitung gibt die Steigung eines Funktionsgraphen an der Stelle x an.“</i>
D3. Änderungsrate der Funktion	Die Studierenden geben an, dass die Ableitung die Änderungsrate der Funktion an der Stelle x ist.	<i>„Ableitung=Die Änderungsrate der Funktion im Punkt x“</i>
D4. Potenzregel	Die Studierenden schreiben die Potenzregel (eventuell mit Vorfaktor) bzw. die Ableitung einer Potenzfunktion hin.	<i>„$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$“</i>
D5. Ableitung eines verallgemeinerten Polynoms	Die Studierenden leiten ein Polynom, dessen Koeffizienten Parameter sind, ab.	<i>„$f(r) = ar^2 + br + c$ $f'(r) = 2ar + b$“</i>
D6. Zahlenbeispiel	Die Studierenden leiten eine konkrete Beispielfunktion ab.	<i>„$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$“</i>
D7. Keine gültige Antwort	Es wird keine gültige Antwort gegeben, was im Detail folgende Antwortvarianten umfasst: 1. Keine Antwort 2. Fragmente einer Antwort, bei denen man nicht weiß, was gemeint ist 3. Antworten, die mathematisch unsinnig sind	<i>„$f(\mathbb{R}) =$“</i>

Tabelle 118: Beschreibung der Kategorien der Aufgabe eine Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ anzugeben

Kategorisierung der Antworten der Aufgabe zur Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation: Dies ist die letzte offene Aufgabe des Teiltests. In ihr sollte näherungsweise für $f(x) = \sin(x)$ (x ist im Bogenmaß gegeben) der Wert $\sin(0,1)$ bestimmt werden (siehe Abbildung 90). Die richtige Lösung ist: $\sin(0,1) \approx 0,1$. Das bei dieser Aufgabe ermittelte Kategoriensystem befindet sich in Tabelle 119. Eine detaillierte Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen ist in Tabelle 120 zu sehen.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
A1.	Adäquates Ergebnis mit Begründung über die Steigung
A2.	Adäquates Ergebnis durch Ablesen an der Graphik
A3.	Falsches Ergebnis mit inadäquater Begründung
A4.	Ergebnis ohne Begründung
A5.	Keine Antwort

Tabelle 119: Kategoriensystem der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $\sin(0,1)$ mit Begründung (gegebene Werte $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$)

Überprüfung der Intercoderreliabilität: Zur Ermittlung der Intercoderreliabilität wurden die Antworten der Aufgaben durch einen Korrektor des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler der Universität Paderborn erneut codiert. Die ermittelten Werte für Cohens κ befinden sich in Tabelle 121. Die Koeffizienten sind alle über 0.8 und damit gut. Anschließend wurde über Zweifelsfälle diskutiert und ein Konsens gefunden.

Entwicklung eines Punkteschemas für den gesamten Teilttest: Nach der Kategorisierung der Antworten wurde ein Punkteschema entwickelt. Für vier der fünf Aufgaben wurde bei adäquater Antwort ein Punkt vergeben (ansonsten 0 Punkte). Bei der Aufgabe für die ökonomische Interpretation von $K'(200)$ wurden zwei Punkte mit der Option auf einen Punkt bei richtiger Idee vergeben. Das Punkteschema ist in Tabelle 122 dargestellt. Man erhält damit eine Codierung der Antworten mit 0,1 oder 2. Weil dieser Teilttest aber kein homogenes Konstrukt ist, ist eine Betrachtung von Cronbachs α hier nicht sinnvoll.

6.10.3 Ergebnisse des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen

Überblick über die Punkteverteilung im Teilttest: In diesem aus 5 Aufgaben bestehenden Teilttest konnten insgesamt 6 Punkte erreicht werden. Die Punkteverteilung ist in Abbildung 92 dargestellt. Die Kenngrößen befinden sich in Tabelle 123. Im Mittel wurde kaum mehr als ein Punkt erreicht. Der Studienanfänger mit Leistungskurs waren hierbei *nicht* signifikant besser als die mit Grundkurs ($\alpha = 0.05$). Die Streuung ist ebenfalls klein. Nur 3 Probanden haben mehr als 3 Punkte erreicht, und diese hatten einen Leistungskurs.

Diese schwachen Ergebnisse sind nicht überraschend, weil im Normalfall die ökonomische Deutung der Ableitung nicht Gegenstand des Schulstoffs ist, und die Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation nur im Leistungs-

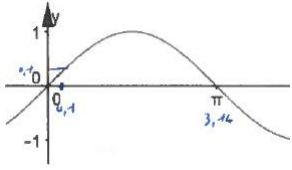
Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
A1. Adäquates Ergebnis mit Begründung über die Steigung	Die Studierenden geben einen Näherungswert $\approx 0,1$ an und begründen diesen mit der Steigung der Sinusfunktion an der Stelle $x = 0$.	„An der Stelle 0 hat $\sin(x)$ die Steigung 1. Dieser behält der Graph bis etwa $x = 1$ bei. Bei $x = 0,1$ muss der Graph also schon um 0,1 Einheiten gestiegen sein.“
A2. Adäquates Ergebnis durch Ablesen an der Graphik	Die Studierenden geben einen Näherungswert $\approx 0,1$ an, und begründen diesen durch Ablesen an der Graphik. Eine Antwort wird auch hier einsortiert, falls die Funktion gezeichnet wird und entsprechende Abschnitte mit 0,1 auf den Achsen in der Graphik markiert sind.	1. „Am Anfang circa Winkelhalbierende“ 2. 
A3. Falsches Ergebnis mit inadäquater Begründung	Die Studierenden geben ein falsches Ergebnis an und können keine adäquate Begründung für dieses Ergebnis angeben.	„Ableitung der Sinusfunktion = Cosinus und somit spiegelsenkrecht“, Ergebnis: 0,9
A4. Ergebnis ohne Begründung	Es wird keine Begründung des Ergebnisses angegeben. Oft wurde 0,0017 ermittelt, was man mit dem Taschenrechner bei Verwendung des Gradmaßes erhält.	„0,0017“
A5. Keine Antwort	Es wird keine Antwort gegeben.	

Tabelle 120: Beschreibung der Kategorien der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $\sin(0,1)$ mit Begründung (gegebene Werte $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$)

Aufgabe	Cohens κ
Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung	0.82
Aufgabe zur Bestimmung der Zusatzkosten	0.88
Aufgabe zum Nennen der Definition der Ableitung	0.95
Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $\sin(0,1)$ mit Hilfe der Ableitung	0.93

Tabelle 121: Koeffizienten Cohens κ der offenen Aufgaben des Teiltests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen

kurs behandelt wird (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.31). Bedenklich ist allerdings, dass 27.3% der Probanden 0 Punkte erreicht haben, denn zumindest *eine* Definition der Ableitung hätte in der Schule behandelt werden sollen (wenn auch vielleicht eine informelle Definition als Steigung oder Änderungsrate an einer Stelle).

Item	Kriterium für der Vergabe des Punkte
Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(200)$	• Es wurden zwei Punkte vergeben, wenn eine Interpretation als Wachstumsrate oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit genannt wurde (Kategorien I1-I2 aus Tabelle 114). Hierbei wurde noch kein Wert auf die später im Kurs vermittelte Feinheit gelegt, dass die Ableitung $K'(x)$ nur eine Approximation der Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt. • Es wurde noch ein Punkt vergeben, wenn in der Interpretation Ideen der Deutung der Ableitung als Steigung oder als Rate erkennbar waren, die Deutung aber nicht 100%ig adäquat war (Kategorien I3-I4 aus Tabelle 114).
Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit	Der Punkt wurde vergeben, wenn entweder exakt die Differenz $K(101) - K(100)$ verwendet oder approximativ die Werte der Ableitung $K'(100)$ oder $K'(101)$ verwendet wurden, selbst wenn Rechenfehler vorlagen oder der Weg nicht bis zum Ergebnis geführt wurde (Kategorien M1-M5 aus Tabelle 116).
Aufgabe zur Bestimmung der Nachfrageabnahme bei Erhöhung des Preises um eine Einheit	Der Punkt wurde vergeben, wenn aus den Antwortalternativen das exakte Ergebnis $N(p_0 + 1) - N(p_0)$ oder die Ableitung $N'(p_0)$ ausgewählt wurden.
Aufgabe zur Nennung der Definition der Ableitung an der Stelle x	Der Punkt wurde vergeben, wenn 1. die formale Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten oder 2. eine geometrische Definition als Steigung der Funktion an der Stelle x oder 3. eine verbale Definition als lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle x angegeben wurde (Kategorien D1-D3 aus Tabelle 117).
Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $\sin(0.1)$ mit Hilfe der Ableitung	Hier wurde der Punkt nur vergeben, wenn ein adäquates Ergebnis mit adäquater Begründung gegeben wurde (Kategorie A1 in Tabelle 119).

Tabelle 122: Punkteschema des Teiltests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und des für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissens

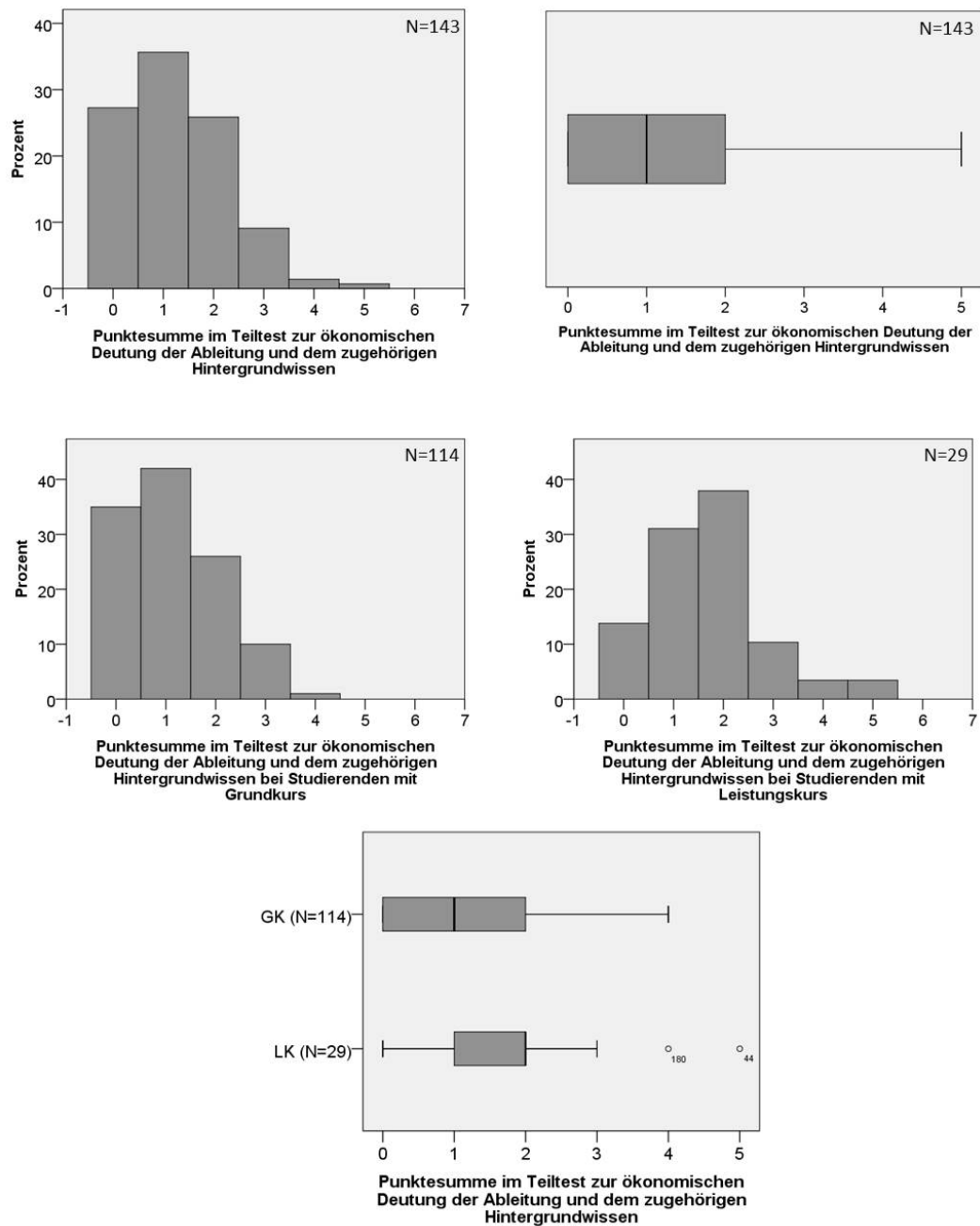


Abbildung 92: Punkteverteilung im Teilttest zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	1.24	1.12	1.69
Median	1	1	2
Standardabweichung	1.041	0.979	1.168

Tabelle 123: Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen

Ergebnisse der Einzelitems: Zunächst werden die Ergebnisse der Items betrachtet, in denen es um die ökonomische Interpretation der Ableitung geht. Eines dieser Items war, den Wert $K'(200) = 2$ einer Kostenfunktion K in einem ökonomischen Kontext zu interpretieren. $K(x)$ gibt hierbei die Kosten bei einer Produktion von x Kugelschreibern an. Die Antworten der Studierenden sind in Abbildung 93 dargestellt.

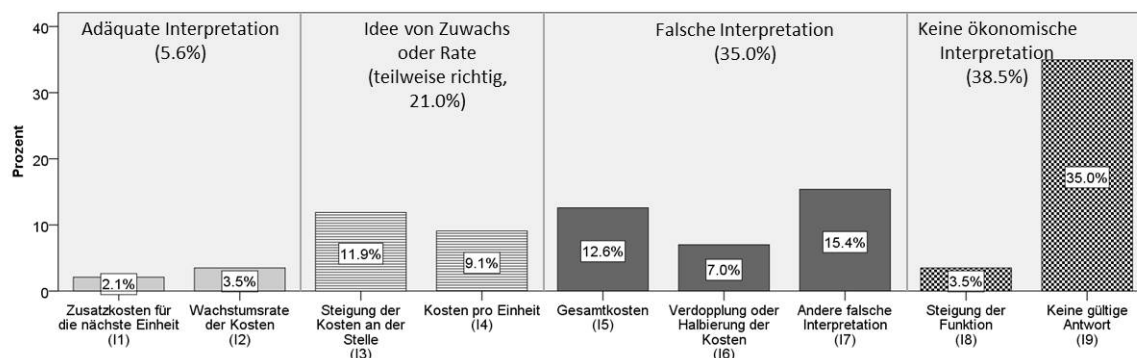


Abbildung 93: Antworten der Studierenden der Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(200) = 2$ einer Kostenfunktion K ($N = 143$)

Aus der Abbildung sind folgende Ergebnisse erkennbar:

1. Nur sehr wenige Studierende konnten eine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung nennen (Kategorien I1-I2).
2. Bei weiteren 21.0% der Studierenden wurden in den gegebenen ökonomischen Deutungen noch Ideen von Zuwachs oder Rate deutlich (Kategorien I3-I4).
3. 35.0% der Studierenden zeigten Fehlvorstellungen zur ökonomischen Interpretation der Ableitung (Kategorien I5-I6).
4. Und weitere 38.5% konnten keine ökonomische Interpretation nennen.

Zu den Ergebnissen 1.-3. lässt sich zusätzlich Folgendes sagen:

- Zu 1. Dass nur wenige Studierende eine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung nennen konnten, zeigt, dass eine solche in der Regel aus der Schule nicht bekannt ist. Weiterhin erkennt man, dass für die Studierenden die in der Ökonomie übliche Deutung der Ableitung $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht auf der Hand liegt. Sonst hätten sie diese hier spontan genannt.
- Zu 2. Dass in den Antworten von 21.0% der Studierenden Ideen von Zuwachs oder Rate erkennbar waren, spricht dafür, dass diese Studierenden versuchten ihr Vorwissen zur Ableitung als Steigung oder als Änderungsrate für eine ökonomische Interpretation der Ableitung zu nutzen. Allerdings kamen sie damit nicht ganz zum Ziel. Bei den Antworten der Kategorie I3 („Steigung der Kosten an der Stelle“) wurde die Ableitung als Wachstum der Kosten bei einer Produktion von 200 Kugelschreibern interpretiert. Hier fehlt allerdings „pro Kugelschreiber“, denn das Wachstum der Kosten an einer Stelle macht nicht wirklich Sinn. Bei den Antworten der Kategorie I4 („Kosten pro Kugelschreiber“) wurde zwar das

„pro Kugelschreiber“ genannt. Allerdings wurde in den Antworten nicht klar, dass die Ableitung die Zunahme der Kosten pro Kugelschreiber und nicht die Kosten pro Kugelschreiber angibt.

Zu 3. Die häufigsten Fehlvorstellungen waren: die slope/height-confusion (Kategorie I4, 12.8% der Fälle) sowie die Annahme, dass sich die Kosten bei 200 Kugelschreibern verdoppeln oder halbieren würden (Kategorie I5, 7.0% der Fälle). Insbesondere bei der zuletzt genannten Fehlvorstellung wäre es interessant gewesen zu erfahren, wie die Studierenden darauf kamen. In der Aufgabenstellung war jedoch leider keine Begründung der Interpretation verlangt.

Bei der zweiten Aufgabe dieses Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung sollten die Mehrkosten bei Erhöhung einer gegebenen Produktion von $x = 100$ um eine Einheit explizit ermittelt werden. Die zugehörige Kostenfunktion hatte die Gleichung $K(x) = \frac{1}{100}x^3 - x^2 + 100x$. Die Antworten wurden anhand der Lösungswege kategorisiert (siehe Tabelle 116). Die Ergebnisse sind in Abbildung 94 dargestellt.

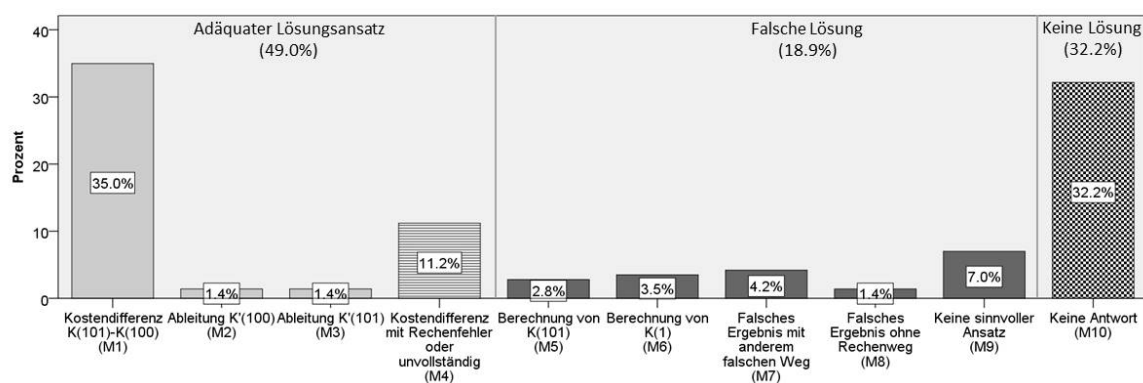


Abbildung 94: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit ($N = 143$)

Aus der Abbildung ist vor allen Dingen erkennbar, dass nur 2.8% der Studienanfänger die Zusatzkosten der nächsten Einheit über die Ableitung bestimmt haben (Kategorien M2-M3). 46.2% bestimmten die Mehrkosten dagegen über die Kostendifferenz (Kategorien M1 und M4). Dies zeigt, dass es für Studienanfänger nicht auf der Hand liegt, die Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit zu identifizieren, wie das in einigen Büchern der Ökonomie getan wird (siehe Kapitel 2.2).

Das Ergebnis der Multiple-choice Aufgabe, in der ein symbolischer Ausdruck für die Änderung der Nachfrage bei einem Produkt bei Erhöhung des Preises um einen Euro bestimmt werden sollte, ist ähnlich. Die Verteilung der Studierenden auf die einzelnen Antwortalternativen ist in Tabelle 124 dargestellt ($N(p)$ ist die Nachfrage bei einem Preis p). Nur 2.8% der Studierenden wählten hier als Lösung die Ableitung.

Ausdruck	Anteil Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Anteil GK ($N = 114$)	Anteil LK ($N = 29$)
$N'(p_0)$	2.8%	2.6%	3.4%
$N(p_0 + 1) - N(p_0)$	29.4%	30.7%	24.1%
$N'(p_0 + 1) - N'(p_0)$	25.9%	23.7%	34.5%
$N(p_0 + 1)$	29.4%	30.7%	24.1%
Keine Antwort	12.6%	12.3%	13.8%

Tabelle 124: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe, einen symbolischen Ausdruck für die Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises von einem Preis p_0 um einen Euro anzugeben (Aufgabe siehe Abbildung 89)

Überraschend ist hier außerdem der hohe Anteil der Probanden, die den Distraktor $N'(p_0 + 1) - N'(p_0)$ wählten (25.9%). Diese Formel wurde jedoch bei der vorherigen offenen Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten nur von einem Probanden verwendet. Bei der jetzigen Multiple-choice Aufgabe scheint also noch eine zusätzliche Schwierigkeit vorzuliegen. Diese könnte das Übersetzen der Angaben im Text in den symbolischen Ausdruck sein.

Ergebnisse der Aufgabe zur Definition der Ableitung: Weiterhin wurde in diesem Teilklausur die Aufgabe gestellt, eine Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ anzugeben. Denn diese ist eine wichtige Möglichkeit die Approximationsformel $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ herzuleiten, die die Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation darstellt (siehe Kapitel 3.3.2). Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 95. Die Zahlen ergänzen sich hier zu mehr als 100%, weil 2 Probanden sowohl die Antwort „Steigung“ als auch „Änderungsrate“ angaben.

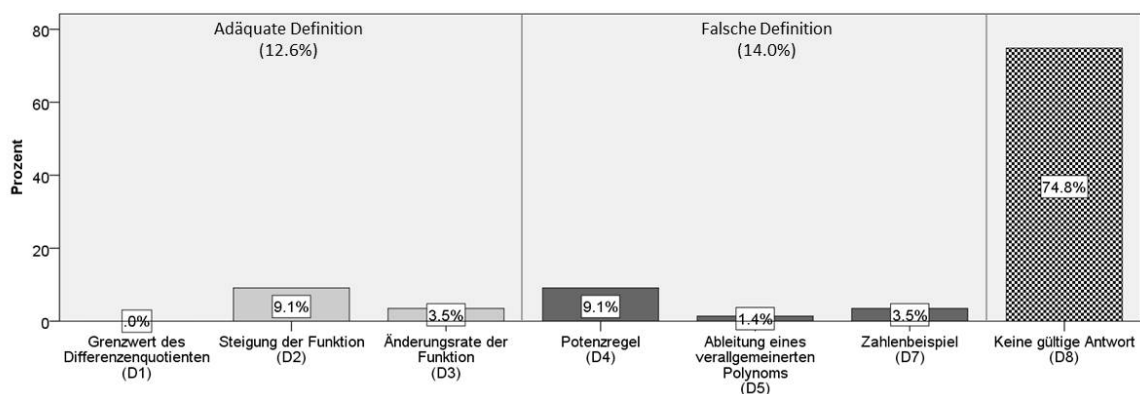


Abbildung 95: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ ($N = 143$)

Aus Abbildung 95 sind folgende Ergebnisse erkennbar:

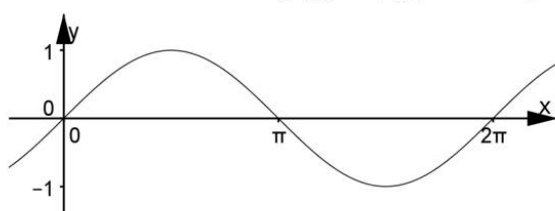
1. Niemand nannte die formale Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten (Kategorie D1).

2. Auch nur 12.6% nannten eine geometrische Definition als Steigung oder eine verbale Definition als Änderungsrate (Kategorien D2-D3).
3. 14.0% der Studierenden hielten Ableitungsregeln wie die Potenzregel für die Definition der Ableitung (Kategorien D4-D6).
4. 74.8% der Studierenden gaben gar keine sinnvolle Antwort (Kategorie D7).

Die Ergebnisse sind als problematisch einzustufen. Zumindest *eine* Definition (entweder die formale Definition oder eine geometrische Definition als Steigung an einer Stelle oder eine verbale Definition als lokale Änderungsrate an einer Stelle hätten in der Schule behandelt werden müssen. Dass teilweise Ableitungsregeln als Definition genannt wurden, könnte darauf hindeuten, dass in der Schule viel Zeit mit dem Ableiten, und im Vergleich dazu wenig Zeit mit der Definition verbracht wurde. Auch kann es sein, dass einige Studienanfänger mit der Aufgabenstellung Schwierigkeiten hatten, da der *Begriff der Definition* in einigen aktuellen Schulbüchern gar nicht mehr auftaucht (Giersemehl u. a., 2015). Dennoch ist es überraschend, dass auch eine geometrische Definition als Steigung oder eine verbale Definition als Änderungsrate nur in 12.6% der Fälle genannt wurden.

Ergebnisse der Aufgabe zur Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation: Die fünfte Aufgabe dieses Teilstests betraf die Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation. In ihr sollte bei gegebenen Werten $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$ mit Hilfe der Ableitung des Sinus bei $x = 0$ ein Näherungswert für $\sin(0,1)$ bestimmt werden. Die Aufgabenstellung ist noch einmal in Abbildung 96 dargestellt. Die Antworten der Studierenden, die mit Hilfe des Systems aus Tabelle 120 kategorisiert wurden, befinden sich in Tabelle 125.

15) Gegeben ist die Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x)=\sin(x)$, (x ist im Bogenmaß angegeben).



Es ist bekannt, dass $\sin(0)=0$ und $\sin'(0)=1$, denn $\sin'(x)=\cos(x)$ und $\cos(0)=1$.

Geben Sie mit Hilfe der Ableitung des Sinus bei $x=0$ (**ohne** Hilfe Ihres Taschenrechners und **ohne** Verwendung des Kosinus) einen Näherungswert für $\sin(0,1)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Begründung:

$\sin(0,1) \approx$ _____

Abbildung 96: Aufgabe 15 des Vortests

Nur sehr wenige Studierende konnten hier die Ableitung zur linearen Approximation nutzen, obwohl die Vorstellung der Ableitung als Steigung der besten lokalen linearen Approximation eine wesentliche Grundvorstellung zur Ableitung ist (Danckwerts u.

Name der Kategorie	Anzahl Studierender ($N = 143$)	Anteil Studierender ($N = 143$)
A1. Adäquates Ergebnis mit Begründung über die Steigung	3	2.1%
A2. Adäquates Ergebnis durch Ablesen an der Graphik	2	1.4%
A3. Falsches Ergebnis mit inadäquater Begründung	10	7.0%
A4. Ergebnis ohne Begründung	14	9.8%
A5. Keine Antwort	114	79.7%

Tabelle 125: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $\sin(0, 1)$ mit der Ableitung mit Begründung (gegebene Werte $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$)

Vogel, 2010, S.72; Greefrath u. a., 2016, S.110). Allerdings die Nutzung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation nicht immer Gegenstand des Schulstoffs. In Nordrhein-Westfalen wird sie zum Beispiel nur im Leistungskurs behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.31). Einige Studierende schrieben auch explizit „hatten wir nicht“ hin.

Insgesamt zeigt der Teilttest zum einen, dass die meisten Studienanfänger keine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung aus der Schule kannten. Weiterhin zeigen die Ergebnisse, dass die in den Wirtschaftswissenschaften übliche Identifikation der Ableitung mit den Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit von den Studienanfängern spontan nicht vorgenommen wurde (weder bei der Interpretation der Ableitung noch bei der Bestimmung der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit).

Auch über das nötige Hintergrundwissen für ein Verständnis der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation) verfügten die Studienanfänger bis auf Ausnahmen nicht. Dass hierbei Studienanfänger die Ableitung kaum zur linearen Approximation nutzen konnten, ist nicht überraschend. Denn diese wird in der Regel nur im Leistungskurs behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.31). Überraschend und problematisch ist allerdings, dass nur 12.6% der Studienanfänger eine adäquate Definition der Ableitung an einer Stelle nennen konnten.

6.10.4 Vergleich der Ergebnisse des Teilttests zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen mit der Literatur

Zur ökonomischen Interpretation der Ableitung durch Studierende gibt es bisher keine in der Literatur dokumentierten Studien. Daher ist hier kein Vergleich mit der Literatur möglich. Zum für deren Verständnis notwendigen Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation) gibt es jedoch Literatur, mit der die Ergebnisse der beiden entsprechenden Aufgaben dieses Teilttests verglichen werden können.

Bei der Frage nach der Definition der Ableitung wurde von den Studienanfängern

die formale Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten nicht genannt, obwohl sie durchaus auch in aktuellen Schulbüchern zu finden ist (zum Beispiel in Bigalke u. a. (2014)) und daher vielleicht auch im Unterricht irgendwann auftauchte. Einen Erklärungsansatz liefert die in Kapitel 3.1 ausführlich beschriebene Theorie von *concept image* und *concept definition* von Tall u. Vinner (1981). Das Verständnis eines mathematischen Konzepts durch Lernende basiert eben häufig nicht auf der formalen *concept definition*, sondern wird durch vielfältige Assoziationen charakterisiert, die bei der Arbeit mit dem Konzept erworben wurden (das sogenannte *concept image*) (Tall u. Vinner, 1981, S.152). Bei der Frage nach der Definition eines Konzepts assoziieren Studierende daher oft zunächst nicht die formale Definition sondern ihr *concept image*, auf dessen Basis sie dann eine eigene *personal concept definition* rekonstruieren. Im Falle der Ableitung wären dies zum Beispiel eine geometrische Definition der Ableitung als Steigung oder eine verbale Definition als Änderungsrate. Allerdings wurde in diesem Vortest zur Ableitung auch nur von 12.6% der Studierenden eine adäquate *personal concept definition* als Steigung an einer Stelle oder als Änderungsrate an einer Stelle genannt. Das ist überraschend, denn die Deutung der Ableitung als Änderungsrate soll laut den Standards der Kultusministerkonferenz die Basis des Verständnisses der Ableitung in der Schule bilden (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S.20).

Bei der Aufgabe zur Nutzung der Ableitung zur linearen Approximation gab es große Probleme. Nur 2.1% der Studienanfänger konnten den Wert von $\sin(0,1)$ näherungsweise mit Hilfe der Ableitung bestimmen. Dass die Verwendung der Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation viele Studienanfänger nicht beherrschen, ist auch in der Literatur zu dokumentiert. So untersuchten Bingolbali u. Monaghan (2008) das *concept image* von Studienanfängern der Mathematik und des Maschinenbaus (ausführliche Darstellung der Studie in Kapitel 4.2.1 ab S.81). Sie legten entsprechenden Studienanfängern einer großen türkischen Universität einen Vortest zum Ableitungsbegriff vor. Dieser enthielt auch eine Aufgabe zur Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation. Dabei sollte zu graphisch gegebenen Werten $f(5)$ und $f'(5)$ der Wert $f'(5.08)$ so genau wie möglich bestimmt werden (ein Ablesen aus der Graphik war wegen eines fehlenden Koordinatengitters nicht möglich). Nur 22% der Studienanfänger der Mathematik und 10% der Studienanfänger des Maschinenbaus konnten diese Aufgabe lösen (siehe Tabelle 23). Das sind zwar bessere Ergebnisse als bei unseren Studienanfängern, aber die dort getesteten Studienanfänger studierten auch Mathematik bzw. mit Maschinenbau ein auf den ersten Blick mathematikintensiveres Fach als die Wirtschaftswissenschaften.

Insgesamt passen damit die Ergebnisse der Aufgaben zur Definition der Ableitung und zur Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation zu in der Literatur dokumentierten Ergebnissen anderer Studien.

6.11 Globalauswertung des Vortests

In diesem Kapitel erfolgt noch einmal eine abschließende Globalauswertung des Tests. Neben der Untersuchung der Punkteverteilungen des Gesamttests beinhaltet diese insbesondere einen Vergleich der Daten und Ergebnisse der einzelnen Teiltests zueinander. Da der Schwerpunkt bei der Auswertung aber auf der Auswertung der einzelnen Teiltests lag, wird dieser Teil recht kurz ausfallen.

6.11.1 Aufbau und Konstruktion des Gesamttests

Wie bereits in Kapitel 6.2 ausführlich erläutert, wurde der Test aus verschiedenen Teilttests zusammengesetzt, die verschiedene Aspekte des Ableitungsbegriffs des in Kapitel 3 entwickelten theoretischen Modells zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) abprüfen. Eine Übersicht über die Teilttests ist noch einmal in Abbildung 126 dargestellt.

Name des Teilttests	Anzahl der Items	Aufgabennummern im Test
T1: Technik des Ableitens	6 Items	Aufgabe 1
T2: Steigung linearer Funktionen	6 Items	Aufgabe 2
T3: Differenzenquotient	7 Items	Aufgaben 13, 14, 21
T4: Geometrische Deutung der Ableitung	11 Items	Aufgaben 3-6
T5: Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	10 Items	Aufgaben 7-12
T6: Tangentenkonzept	8 Items	Aufgabe 19
T7: Ökonomische Interpretation der Ableitung und zugehöriges Hintergrundwissen	5 Items	Aufgaben 15-18, 20

Tabelle 126: Übersicht über die Teilttests des Vortests

Damit ergibt sich insgesamt ein Test aus 53 Items (siehe Anhang). 38 Items sind Multiple-choice Aufgaben, bei denen jeweils nur eine Antwort richtig ist. Die restlichen 15 Items sind offene Aufgaben. Eine genaue Beschreibung der Aufgaben befindet sich bereits in den Kapiteln zu den jeweiligen Teilttests (Kapitel 6.4 bis 6.10).

6.11.2 Analyse der Daten des Gesamttests

Die Auswertung des Tests erfolgte mittels klassischer Testtheorie (Krauth, 1995). Wie bereits bei der Auswertung der einzelnen Teilttests dargestellt, wurden hierfür die Items mit Punkten bewertet. Bei 51 der Items wurde ein Punkt bei der richtigen Antwort vergeben (sonst 0 Punkte). Bei zwei Items wurden insgesamt 2 Punkte vergeben mit der Option auf einen Punkt bei teilweiser Richtigkeit. Damit ergab sich eine Codierung bei den einzelnen Items mit den Werten 0,1 und eventuell 2. Mit dieser Bewertung ergab sich insgesamt ein reliabler Gesamttest mit Cronbachs $\alpha = 0.848$.

Wie bei der Auswertung des Teilttests zum Differenzenquotienten erläutert wurde (siehe Kapitel 6.6), gab es dort jedoch zwei problematische Items, die sich um das Verständnis des Vorzeichens des Differenzenquotienten drehten (basierend auf Malle (2003, S.59)). Hier sollte die Richtigkeit folgender Aussagen über das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 2$ beurteilt werden:

- Das Vorzeichen gibt an, ob die Parabel im Intervall $[-2;2]$ eine positive oder negative Krümmung hat.
- Das Vorzeichen gibt an, ob die Funktion im Intervall $[-2;2]$ steigt oder fällt.

Beide Items wiesen schlechte Trennschärfen auf und verschlechterten die Konsistenz des Teilttests zum Differenzenquotienten. Dies könnte an der Formulierung der Items liegen. Bei der ersten der beiden Aussagen taucht der Begriff der Krümmung auf,

der aber in der Schule keine Rolle spielt. Daher konnten die Studienanfänger mit der Formulierung eventuell nichts anfangen. Das zweite Item ist zu unscharf formuliert. Hier war für die Probanden eventuell nicht klar, dass ein *durchgängiges Steigen* oder *durchgängiges Fallen* gemeint war. Daher wurden diese beiden Items aus der Auswertung ausgeschlossen. Dementsprechend werden sie auch bei der Auswertung des Gesamttests nicht berücksichtigt. Durch die Herausnahme der Items änderte sich der Wert von Cronbachs α für den Gesamttest aber nicht ($\alpha = 0.848$).

Analyse der Trennschärfen der einzelnen Items: Die Trennschärfen der einzelnen Items (nach Herausnahme der beiden eben genannten Items zum Vorzeichen des Differenzenquotienten) sind in Tabelle 127 dargestellt.

Item	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2, f'(x) = ?$	0.242	0.846
$f(x) = \sqrt{x} + 3x, f'(x) = ?$	0.345	0.844
$f(x) = e^{2x}, f'(x) = ?$	0.425	0.843
$f(x) = e^{x^2}, f'(x) = ?$	0.435	0.842
$f(x) = xe^x, f'(x) = ?$	0.170	0.847
$f(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = ?$	0.219	0.847
Bestimmung der Gleichung einer linearen Funktion mit Steigung 2 durch den Punkt (0; 1)	0.140	0.848
Anfertigung einer Skizze der Funktion g mit $g(x) = 2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	0.305	0.845
Anfertigung Skizze der Funktion h mit $h(x) = -2x$ im Vergleich zu $f(x) = x$	0.317	0.845
Berechnung der Steigung einer linearen Funktion durch die Punkte (0; 1) und (2; 9)	0.165	0.848
Zeichnen der linearen Funktion mit Steigung -2 durch (0; -1) in ein vorgegebenes Koordinatensystem	0.238	0.847
Deutung der Steigung einer linearen Funktion im Kontext	0.311	0.845
Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit von $t = 1s$ bis $t = 4s$ bei gegebener Weg-Zeit-Funktion	0.225	0.847
Aussage 1 zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	0.240	0.846
Aussage 2 zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	0.146	0.848
Aussage 5 zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	0.295	0.845
Deutung des Differenzenquotienten im Kontext	0.222	0.848
$f'(1) > 0$ bei nach unten geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt auf Ordinate?	0.450	0.842
$f'(1) > 0$ bei Funktion f mit $f(x) = 0,5x + \sin(x)$?	0.460	0.842
$f'(1) > 0$ bei nach oben geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt auf Ordinate?	0.365	0.844
$f'(1) > 0$ bei konstanter Funktion?	0.462	0.842
Aussage zum Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt A	0.500	0.841

Item	Trennschärfe	α wenn Item weggelassen
Aussage zum Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt B	0.483	0.841
Aussage zum Vorzeichen der Ableitung bei Punkten einer Parabel, Punkt C	0.502	0.841
Ordnen der Größen der Ableitungen bei drei Funktionen	0.274	0.846
Anzahl der Nullstellen der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen bei $x = 4$	0,278	0.846
Aussage 1 über lokales Maximum der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen	0,215	0.847
Aussage 2 über lokales Maximum der Ableitung bei gegebenem Funktionsgraphen	0.235	0.847
Angabe des Gefäßes zum Füllgraphen	0.248	0.846
Angabe des Füllgraphen zum Gefäß	0.187	0.848
Aussage 1 zur lokalen Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen bei $x = -1$	0.319	0.845
Aussage 1 zur mittleren Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen auf $[-1, 5; 1, 5]$	0.300	0.845
Aussage 2 zur lokalen Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen bei $x = 0, 5$	0.318	0.845
Aussage 2 zur mittleren Änderungsrate bei gegebenem Funktionsgraphen auf $[0; 1]$	0.320	0.845
Ermittlung der Flächeninhaltsfunktion innerhalb einer Dreiecksfläche	0.338	0.844
Aussage 1 zum Änderungsverhalten des Ertrages beim Ertragsgesetz	0.450	0.842
Aussage 2 zum Änderungsverhalten des Ertrages beim Ertragsgesetz	0.350	0.844
Beschreibung des Wachstumsverhaltens einer graphisch gegebenen Funktion	0.234	0.847
Tangentenaufgabe Graph a)	0.090	0.849
Tangentenaufgabe Graph b)	0.134	0.849
Tangentenaufgabe Graph c)	0.103	0.848
Tangentenaufgabe Graph d)	0.393	0.843
Tangentenaufgabe Graph e)	0.280	0.846
Tangentenaufgabe Graph f)	0.293	0.845
Tangentenaufgabe Graph g)	0.363	0.844
Tangentenaufgabe Graph h)	0.336	0.845
Ökonomische Interpretation der Ableitung	0.298	0.846
Bestimmung der Mehrkosten für die nächste Einheit	0.244	0.847
Formel Ausdruck für die Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises um 1€	0.037	0.851
Angabe der Definition der Ableitung	0.075	0.849
Bestimmung eines Näherungswertes von $\sin(0, 1)$	0.162	0.848

Tabelle 127: Trennschärfen des Vortests nach Herausnahme der Aussagen 2 und 3 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten (siehe Beginn dieses Abschnitts)

In der Literatur gelten Trennschärfen ab 0.3 als gut (Döring u. Jürgen, 2016, S.478). Das Konzept der Ableitung ist aber als sogenanntes *breites Konstrukt* nach Döring u. Jürgen (2016, S.478) anzusehen, das aus verschiedenen Facetten besteht (zum Beispiel die verschiedenen Repräsentationen oder die Verständnisebenen *Verhältnis*, *Grenzwert* und *Funktion* nach Zandieh (2000)). Daher braucht man Items mit niedrigen Trennschärfen nicht auszusortieren (Döring u. Jürgen, 2016, S.478). Dennoch werden im Folgenden die drei Items genauer betrachtet, die Trennschärfen unter 0.1 aufweisen:

1. Das Item „Tangentenaufgabe Graph a)“ (Trennschärfe: 0.090):

Bei diesem Item waren eine Funktion und eine Gerade graphisch gegeben. Die Gerade berührte die Funktion in genau einem Punkt. Die Studierenden sollten entscheiden, ob diese Gerade eine Tangente ist. Dies gelang sehr vielen Studierenden (86.0%, siehe Tabelle 110). Dies ist nicht überraschend, denn hier erfolgt bereits mit Vorstellungen zu einem geometrischen Tangentenbegriff eine richtige Einschätzung. Das Item war damit sehr leicht und trennte die Probanden nicht weiter auf.

2. Das Item „Angabe der Definition der Ableitung“ (Trennschärfe: 0.075):

Nur 12.6% der Studierenden konnten eine adäquate Definition der Ableitung an einer Stelle angeben (siehe Abbildung 95). Dieses Item war damit besonders schwer und trennte die Probanden ebenfalls nicht auf.

Die beiden Items wurden jedoch im Test belassen, weil sie wichtige Aspekte des Konzepts der Ableitung bzw. der Tangente ansprechen, die in keinem anderen Item adressiert werden.

Das dritte Item mit einer Trennschärfe unter 0.1 ist das Item „Formelausdruck für die Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises um 1€“ (Trennschärfe: 0.037). Hier sollte ein Formelausdruck für die Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises um einen Euro angegeben werden (Aufgabe siehe Abbildung 89). Es sollte ermittelt werden, inwieweit Studienanfänger spontan eine Identifikation von Ableitung und Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit vornehmen. Da dieser Aspekt aber bereits in einem weiteren Item abgedeckt ist (Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit bei $K(x) = \frac{1}{100}x^3 - x^2 + 100x$), wird dieses Item bei den weiteren Analysen entfernt. Damit erhöht sich Cronbachs α von $\alpha = 0.848$ auf $\alpha = 0.851$.

Untersuchung der empirischen Struktur des Gesamttests durch Analyse der Korrelationen zwischen den Teilttests: Der Gesamttest wurde, wie gesagt, aus verschiedenen Teilttests zu Aspekten des Ableitungsbegriffs zusammengesetzt (siehe auch Tabelle 126). Es stellt sich die Frage, inwieweit sich diese Struktur auch empirisch in den Daten wiederfinden lässt. Dazu wurde zunächst untersucht, ob die erreichten Punktzahlen der einzelnen Teilttests miteinander korrelieren. Die Ergebnisse sind in Tabelle 128 dargestellt. Korrelationen über 0.3 (ab diesem Wert gelten sie laut Literatur als mittelstark (Bühner u. Ziegler, 2009, S.603)) sind fett hervorgehoben. Zum Niveau $\alpha = 0.05$ signifikante Korrelationen sind zusätzlich mit einem * markiert.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
T1: Technik des Ableitens	1	0.110	0.129	0.351*	0.334*	0.252*	0.137
T2: Steigung linearer Funktionen	0.110	1	0.260*	0.253*	0.152	0.122	0.176*
T3: Differenzenquotient	0.129	0.260*	1	0.262*	0.125	0.074	0.285*
T4: Geometrische Deutung der Ableitung	0.351*	0.253*	0.262*	1	0.420*	0.363*	0.365*
T5: Ableitung als lokale Änderungsrate	0.334*	0.152	0.125	0.420*	1	0.242*	0.266*
T6: Tangentenkonzept	0.252*	0.122	0.074	0.355*	0.242*	1	0.010
T7: Ökonomische Deutung und zum Verständnis nötiges Hintergrundwissen	0.137	0.176*	0.285*	0.365*	0.266*	0.010	1

Tabelle 128: Korrelationen der einzelnen Teiltests zum Verständnis der Ableitung

Aus Tabelle 128 sind die folgende Ergebnisse erkennbar:

1. Die meisten Teiltests korrelieren positiv miteinander, aber nur schwach (Korrelationen zwischen 0.1 und 0.3 (Bühner u. Ziegler, 2009, S.603)). Negative Korrelationen liegen nicht vor.
2. Mittlere Korrelationen über 0.3 zwischen verschiedenen Teiltests findet man nur zwischen folgenden Teiltests:
 - a) Zwischen dem Teilttest zum Ableiten und dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung
 - b) Zwischen dem Teilttest zum Ableiten und dem Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate
 - c) Zwischen dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung und dem Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate
 - d) Zwischen dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung und dem Teilttest zum Tangentenkonzept
 - e) Zwischen dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung und dem Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung
3. Der Teilttest zum Tangentenkonzept ist von den anderen Teiltests weitestgehend unabhängig (außer zum Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung).

Zu den Ergebnissen lässt sich folgendes sagen:

- Zu 1. Es war zu erwarten, dass die Teiltests positiv miteinander korrelieren (wenn auch nicht immer signifikant). Schließlich überprüfen sie alle Facetten desselben mathematischen Konzepts. Dass die meisten Korrelationen nicht stark (unter 0.3) sind, ist ein Indiz dafür, dass die Teilttests tatsächlich *verschiedene* Aspekte zum Ableitungsbegriff testen.
- Zu 2. Es ist nicht überraschend, dass zwischen den Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung und zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate mit 0.420 die stärkste Korrelation vorliegt. Denn die graphische Repräsentation der

Ableitung als Steigung und die verbale Repräsentation der Ableitung als lokale Änderungsrate hängen natürlich miteinander zusammen. Studierende nutzen teilweise sogar eine Repräsentation um die andere zu erklären (Hähkiöniemi, 2006).

Dass der Teilttest zum Tangentenkonzept mit dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung korreliert, ist ebenfalls einleuchtend. Schließlich bildet die Tangente an eine Funktion die Basis für die geometrische Deutung der Ableitung.

Weiterhin korreliert der Teilttest zur geometrischen Deutung mit dem Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation). Ursächlich für die Gesamtkorrelation über 0.3 ist die Korrelation zwischen dem Teilttest zur geometrischen Deutung und dem Item zur ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(200) = 2$ (die ist ebenfalls über 0.3). Dies könnte an dem Punkteschema für dieses Item liegen. Es wurden zwei Punkte bei einer korrekten ökonomischen Deutung vergeben. Waren aus den Antworten Ideen der Deutung der Ableitung als Steigung oder als Rate erkennbar, gab es immerhin noch einen Punkt. Wenn die Ableitung somit geometrisch gedeutet werden konnte, wurde hier immerhin ein Punkt erreicht.

Schließlich sieht man aus Tabelle 128 noch, dass die Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung und zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate mittelstark mit dem Teilttest zum Ableiten korrelieren. Eine Erklärung wäre, dass diejenigen, die die Ableitung besser verstehen, auch die Ableitungsregeln und deren Begründung eher verstanden haben, und damit beim Ableiten weniger Fehler machen. Allerdings ist dies nur eine Vermutung, die sich aus den Daten nicht belegen lässt.

- Zu 3. Die Unabhängigkeit des Teilttests zum Tangentenkonzept zu den anderen Teilttests außer dem Teilttest der geometrischen Deutung der Ableitung kann man damit erklären, dass ein Verständnis des Tangentenbegriffs in Bezug auf mögliche Beziehungen zwischen der Tangente und der Funktion (das wurde hier überprüft, siehe Abbildung 85 in Kapitel 6.9) weitestgehend unabhängig vom Ableitungskonzept erworben werden kann.

Insgesamt zeigt die Analyse der Korrelationen zwischen den Teilttests, dass die meisten der Teilttests miteinander korrelieren, aber nur schwach bis mittelstark. Dies untermauert, dass die einzelnen Teilttests tatsächlich verschiedene (wenn auch nicht vollkommen unabhängige) Aspekte zum Ableitungsbegriff überprüfen. Da keine negativen Korrelationen vorliegen, lassen sich die Teilttests auch sinnvoll zu einem Gesamttest zum Ableitungsbegriff zusammensetzen.

Untersuchung der empirischen Struktur des Gesamttests durch eine Faktorenanalyse: Weiterhin wurde noch eine Faktorenanalyse durchgeführt um zu sehen, ob sich die theoretisch konstruierten Teilttests auch empirisch wiederfinden lassen. Dazu wurde mit den Daten aller Probanden eine Hauptachsen-Analyse mit dem Rotationsverfahren „Varimax“ durchgeführt. Der zugehörige Screeplot ist in Abbildung 97 zu sehen.

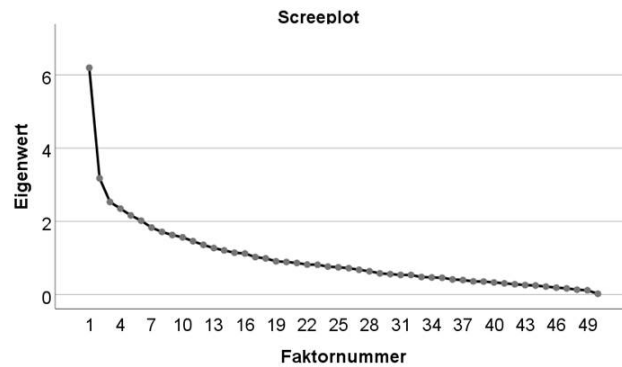


Abbildung 97: Screeplot des Vortests nach einer Hauptachsen-Faktorenanalyse

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Parabel gegeben, B auf dem Scheitelpunkt. Was ist richtig?	0.586	0.215	0.018
Parabel gegeben, C auf dem rechten Ast. Was ist richtig?	0.525	0.227	-0.032
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: lokale Änderungsrate bei $x=-1$ ist positiv.	0.509	-0.074	0.085
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,5;1,5]$ ist 0.	0.496	-0.082	0.007
Parabel gegeben, A auf dem linken Ast. Was ist richtig?	0.471	0.260	0.113
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;1]$ ist positiv.	0.458	0.000	0.113
$f(x)=e^{2x}$, $f'(x)=?$	0.442	0.055	0.133
$f(x)=e^{x^2}$, $f'(x)=?$	0.439	0.080	0.182
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die lokale Änderungsrate bei $x=0,5$ ist negativ.	0.437	-0.100	0.144
Ökonomische Interpretation von $K'(200)=2$ einer Kostenfunktion	0.404	0.172	-0.027
$f(x)=\sqrt{x+3}$, $f'(x)=?$	0.379	0.089	0.045
Umgekehrte Parabel symmetrisch zur y-Achse gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.363	0.279	0.200
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $0<x<1$ ein lokales Minimum.	0.348	-0.194	0.094
Graph der Funktion $f(x)=0,5x+\sin(x)$ gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.348	0.226	0.221
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $-1<x<2$ genau eine Nullstelle.	0.339	0.023	0.027
Welcher Graph ist die Flächeninhaltsfunktion der Fläche innerhalb des Dreiecks?	0.331	-0.030	0.123
Konstante Funktion gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.327	0.250	0.207
3 Graphen gegeben. Welche Beziehung ist zwischen den Ableitungen bei $x=4$ richtig?	0.297	0.058	0.143
$f(x)=1/x$, $f'(x)=?$	0.280	0.132	-0.034
$f(x)=x^3+3x^2-x+2$, $f'(x)=?$	0.276	0.008	0.115
Welcher Graph gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge wider?	0.272	0.093	-0.020
Aussage 5 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.	0.254	0.109	-0.025
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $1<x<2$ ein lokales Minimum.	0.234	-0.183	0.193
$f(x)=xe^{x^2}$, $f'(x)=?$	0.232	0.035	0.168
Geben Sie eine Definition der Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ an.	0.231	-0.025	0.042
Ertragsfunktion ist gegeben. Behauptung: Maximale Zunahme wird zwischen 8 und 14g/FE erreicht.	0.231	0.150	0.159
Deutung des Differenzenquotienten im Kontext	0.226	0.105	-0.001
Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t=1s$ und $t=4s$ bei der Weg-Zeit-Funktion $s(t)=t^2+t$	0.219	-0.028	0.042
Aussage 1 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob sich die Parabel oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet.	0.148	0.081	0.044
Näherungswert von $\sin(0,1)$ (zu bestimmen mit Hilfe der Ableitung)	0.138	0.039	0.074
Skizze: $f(x)=2x$ im Vergleich zu $g(x)=x$	0.005	0.841	0.070
Skizze: $f(x)=2x$ im Vergleich zu $g(x)=x$	0.009	0.836	0.039
Einzeichnen: lineare Funktion mit Steigung -2 durch $(0;1)$	0.104	0.418	0.020
Gesucht: Gleichung der linearen Funktion mit Steigung 2 durch $(0;1)$	0.037	0.401	-0.020
Berechnen der Steigung der Gerade durch die Punkte $(0;1)$ und $(2;9)$	0.076	0.359	-0.025
Parabel symmetrisch zur y-Achse gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.278	0.321	0.187
Beschreibung des Wachstums einer graphisch gegebenen Funktion im Bereich von $x=5$ bis $x=12$	0.090	0.317	0.141
Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit	0.196	0.293	0.006
Tangentenaufgabe Graph a) (globale Berührende)	-0.072	0.254	0.000
Tangentenaufgabe Graph c) (Sekante)	-0.009	0.231	-0.013
Aussage 2 zu Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob $f(2)>f(-2)$, $f(2)=f(-2)$ oder $f(2)<f(-2)$.	0.036	0.138	0.026
Tangentenaufgabe Graph h)	0.091	-0.114	0.790
Tangentenaufgabe Graph g)	0.127	-0.076	0.786
Tangentenaufgabe Graph f)	0.048	-0.073	0.601
Tangentenaufgabe Graph d)	0.144	0.096	0.484
Tangentenaufgabe Graph e)	0.075	0.082	0.376
Tangentenaufgabe Graph b)	-0.047	0.010	0.327
Fahrradverleih im proportionalen Kontext, Deutung der Steigung 7/5 im Kontext	0.148	0.053	0.326
Ertragsfunktion ist gegeben. Behauptung: Zunahme des Ertrages sinkt zwischen 6 und 10g/Flächeneinheit.	0.239	0.240	0.245
Welches Gefäß gehört zu dem gegebenen Füllgraphen?	0.069	0.104	0.200

Abbildung 98: Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 3 Faktoren

Nach dem Scree-Test kann man 3 Faktoren extrahieren (Anzahl der Faktoren vor dem Knick im Scree-Plot in Abbildung 97 (Knoche, 1990, S.177)). Anhand der Faktormatrix (siehe Abbildung 98) lässt sich erkennen:

1. Der dritte Faktor enthält die Items zum Konzept der Tangente an eine Kurve.
2. Der zweite Faktor enthält die Items zur Steigung linearer Funktionen.
3. Der erste Faktor enthält alle restlichen Items.

Das Modell aus diesen drei Faktoren ist auch aus theoretischer Sicht sinnvoll. Der erste Faktor enthält die Items, in denen es direkt um die Ableitung oder den Differenzenquotienten geht. Die anderen beiden Faktoren betreffen die anderen beiden, in dem Test untersuchten mathematischen Konzepte (Tangentenkonzept, Steigung linearer Funktionen).

Allerdings erklären diese drei Faktoren nur 23.8% der Gesamtvarianz des Tests. Das spricht dafür, doch weitere Faktoren zu extrahieren. Auch die Komplexität des theoretischen Modells zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 mit den verschiedenen Repräsentationen, den verschiedenen Ebenen *Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion* und der Verbindung zur ökonomischen Deutung der Ableitung (siehe Abbildung 4) spricht dagegen, dass sich das Verständnis der Ableitung in einem Faktor wiederfinden lässt.

Wegen der Konstruktion des Vortests auf der Basis von sieben Teilttests könnte man eigentlich auch sieben sinnvolle Faktoren in der Datenstruktur erwarten. Daher wurde eine weitere Faktorenanalyse mit sieben Faktoren durchgeführt (Faktormatrix siehe Abbildung 99). Jetzt werden 40.5% der Varianz erklärt (das Verständnis der Ableitung ist also noch komplexer). An der Faktormatrix lässt sich nun Folgendes erkennen:

1. Der erste Faktor enthält die Items zur geometrischen Deutung der Ableitung an einer Stelle.
2. Der zweite Faktor enthält die Items zur Steigung einer linearen Funktion.
3. Der dritte Faktor enthält die Items zur Technik des Ableitens (und das Item zur Angabe einer Definition der Ableitung).
4. Der vierte Faktor enthält die Items zum Konzept der Tangente an eine Kurve
5. Der fünfte Faktor enthält viele Items zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate (aber nicht alle).
6. Der sechste Faktor enthält die beiden Items zur geometrischen Deutung der Ableitung, wo die Funktion auf dem gesamten Intervall betrachtet werden muss.
7. Der siebente Faktor enthält die Items zum Differenzenquotienten.

Einige Items zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate laden auf mehreren Faktoren (zum Beispiel die Aufgabe das Gefäß zu einem vorgegebenen Füllgraphen zu suchen, Aufgabe siehe Abbildung 71). Dies ist nicht überraschend, denn bei diesen Items spielen zum Teil auch andere Aspekte eine Rolle. Bei den Aufgaben zu

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4	Faktor 5	Faktor 6	Faktor 7
Parabel gegeben, B auf dem Scheitelpunkt. Was ist richtig?	0.707	0.101	0.000	0.165	-0.032	-0.134	-0.012
Parabel gegeben, C auf dem rechten Ast. Was ist richtig?	0.665	0.105	0.077	0.157	0.009	0.007	-0.004
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Lokale Änderungsrate bei $x=-1$ ist positiv.	0.645	0.136	0.070	0.053	0.104	0.112	0.130
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,5;1,5]$ ist 0.	0.579	0.127	0.200	-0.057	0.187	0.183	0.109
Parabel gegeben, A auf dem linken Ast. Was ist richtig?	0.531	0.127	0.134	-0.084	0.167	0.092	0.263
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;1]$ ist positiv.	0.469	0.087	0.109	0.184	0.174	-0.143	-0.026
$f(x)=e^{2x}$, $f'(x)=?$	0.403	0.103	0.163	0.189	0.165	-0.063	0.000
$f(x)=e^{x^2}$, $f'(x)=?$	0.297	0.095	0.191	-0.054	0.212	-0.026	0.135
Gegeben ist eine Funktion (fallend bis Tiefpunkt bei -1,5, durch Ursprung, Hochpunkt bei 0,5, dann fallend). Behauptung: Die lokale Änderungsrate bei $x=0,5$ ist negativ.	0.037	0.934	0.161	0.047	-0.071	-0.074	-0.047
Ökonomische Interpretation von $K'(200)=2$ einer Kostenfunktion	0.060	0.888	0.145	0.015	-0.057	-0.103	-0.034
$f(x)=\sqrt{x}+3x$, $f'(x)=?$	0.086	0.475	-0.050	0.003	0.135	0.030	0.072
Umgekehrte Parabel symmetrisch zur y-Achse gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.165	0.396	-0.027	-0.041	-0.082	0.039	0.061
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $0<x<1$ ein lokales Minimum.	0.075	0.342	0.045	-0.029	0.027	-0.075	0.150
Graph der Funktion $f(x)=0,5x+\sin(x)$ gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.174	0.334	0.000	-0.027	0.121	0.126	0.037
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $-1<x<2$ genau eine Nullstelle.	0.055	0.331	-0.009	0.136	0.185	-0.075	0.046
Welcher Graph ist die Flächeninhaltsfunktion der Fläche innerhalb des Dreiecks?	0.107	0.009	0.717	0.077	0.061	0.080	-0.045
Konstante Funktion gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.078	0.059	0.701	0.134	0.081	0.092	-0.012
3 Graphen gegeben. Welche Beziehung ist zwischen den Ableitungen bei $x=4$ richtig?	-0.010	0.098	0.492	-0.057	0.060	-0.079	0.118
$f(x)=1/x$, $f'(x)=?$	0.162	0.018	0.459	0.015	0.062	-0.014	0.142
$f(x)=x^3+3x^2-x+2$, $f'(x)=?$	-0.008	0.008	0.451	0.150	0.058	-0.024	-0.034
Welcher Graph gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge wider?	0.137	-0.049	0.344	0.081	0.110	0.001	-0.133
Aussage 5 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.	0.207	0.022	0.224	0.110	0.102	0.066	0.009
Graph gegeben. Behauptung: Die erste Ableitung hat für $1<x<2$ ein lokales Minimum.	0.071	-0.005	0.222	0.013	0.025	0.155	0.089
$f(x)=xe^{x^2}$, $f'(x)=?$	0.010	0.171	0.217	-0.027	0.028	0.178	0.199
Geben Sie eine Definition der Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ an.	0.168	0.049	0.207	-0.022	0.145	0.204	-0.008
Ertragsfunktion ist gegeben. Behauptung: Maximale Zunahme wird zwischen 8 und 14g/FE erreicht.	0.054	-0.036	0.036	0.768	0.039	0.256	0.057
Deutung des Differenzenquotienten im Kontext	0.074	-0.033	0.144	0.761	0.021	0.186	0.053
Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t=1$ s und $t=4$ s bei der Weg-Zeit-Funktion $s(t)=t^2+t$	0.050	-0.061	-0.012	0.630	0.013	0.070	0.224
Aussage 1 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob sich die Parabel oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet.	0.109	0.057	0.193	0.468	0.088	-0.036	-0.036
Näherungswert von $\sin(0,1)$ (zu bestimmen mit Hilfe der Ableitung)	0.162	-0.010	0.124	0.374	0.035	-0.123	-0.109
Skizze: $f(x)=2x$ im Vergleich zu $g(x)=x$	-0.032	0.002	-0.002	0.337	0.056	-0.079	-0.025
Skizze: $f(x)=2x$ im Vergleich zu $g(x)=x$	0.107	0.083	-0.020	0.317	0.122	0.116	0.141
Einzeichnen: lineare Funktion mit Steigung -2 durch $(0;-1)$	0.101	0.087	0.006	0.189	0.135	-0.035	-0.154
Gesucht: Gleichung der linearen Funktion mit Steigung 2 durch $(0;1)$	0.179	0.035	0.009	0.080	0.636	0.065	0.042
Berechnen der Steigung der Gerade durch die Punkte $(0;1)$ und $(2;9)$	0.090	-0.044	0.195	0.056	0.623	0.029	0.074
Parabel symmetrisch zur y-Achse gegeben. Gilt $f'(1)>0$?	0.120	-0.038	-0.013	0.124	0.582	0.131	0.169
Beschreibung des Wachstums einer graphisch gegebenen Funktion im Bereich von $x=5$ bis $x=12$	0.078	-0.033	0.199	-0.021	0.505	0.092	0.163
Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit	0.017	0.194	0.124	0.141	0.385	-0.024	-0.139
Tangentenaufgabe Graph a) (globale Berührende)	0.050	0.251	0.183	0.233	0.363	-0.100	-0.122
Tangentenaufgabe Graph c) (Sekante)	0.027	0.070	0.173	0.081	0.299	0.239	-0.015
Aussage 2 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten: Es gibt an, ob $f(2)>f(-2)$, $f(2)=f(-2)$ oder $f(2)<f(-2)$.	0.166	0.023	0.204	-0.043	0.226	-0.105	-0.099
Tangentenaufgabe Graph h)	0.133	0.055	-0.056	0.052	0.162	0.087	-0.056
Tangentenaufgabe Graph g)	0.049	0.011	0.159	-0.010	0.120	0.816	-0.061
Tangentenaufgabe Graph f)	0.054	-0.006	0.078	0.132	0.000	0.702	-0.021
Tangentenaufgabe Graph d)	0.082	0.131	0.098	0.004	-0.089	-0.264	-0.113
Tangentenaufgabe Graph e)	0.120	0.114	0.094	-0.018	-0.013	-0.232	-0.162
Tangentenaufgabe Graph b)	0.098	0.067	0.164	-0.016	0.013	-0.065	0.716
Fahrradverleih im proportionalen Kontext, Deutung der Steigung 7/5 im Kontext	0.048	0.090	-0.047	0.072	0.085	-0.010	0.536
Ertragsfunktion ist gegeben. Behauptung: Zunahme des Ertrages sinkt zwischen 6 und 10g/Flächeneinheit.	0.085	-0.017	0.127	0.036	0.015	0.118	0.299
Welches Gefäß gehört zu dem gegebenen Füllgraphen?	0.027	0.162	-0.082	0.041	0.011	0.014	0.286

Abbildung 99: Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 7 Faktoren

Füllgraphen ist dies zum Beispiel die geometrische Deutung der Ableitung bei der Übersetzung der Graphen in den Kontext.

Insgesamt lassen sich also die ersten sechs Teilttests aus Tabelle 126 auch empirisch in den Daten wiederfinden. Der Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung teilt sich hier noch einmal auf in zwei Teilttests:

1. einer, in der nur die Funktion an einem Punkt betrachtet werden muss.
2. einer, in der die Funktion auf einem ganzen Intervall betrachtet werden muss.

Dass hier Unterschiede vorliegen, ist auch bereits bei der Auswertung des Teilttests zur geometrischen Deutung der Ableitung aufgefallen. Bei den Aufgaben, bei denen die Funktion auf einem ganzen Intervall betrachtet werden musste, waren die Lösungshäufigkeiten geringer, denn für diese Aufgaben ist nicht nur ein punktweises Verständnis einer Funktion, sondern ein *Across-time* Verständnis nach Monk (1994) bzw. des Kovariationsaspekts nach Vollrath (1989) nötig. Dieser Unterschied zeigte sich hier in der Faktorenanalyse erneut.

Der siebente Teilttest zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Hintergrundwissen nötigen Verständnis (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation) lässt sich nicht als homogenes Konstrukt in den Daten wiederfinden. Dies ist auch nicht überraschend, denn dieser Teilttest beinhaltet unterschiedlichste Aspekte der Ableitung.

Insgesamt zeigt die Faktorenanalyse, dass sich die Teilttests zur Ableitung (bis auf den ohnehin sehr heterogenen Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen) auch empirisch als Faktoren zum Verständnis der Ableitung bzw. zum Wissen zur Ableitung wiederfinden lassen. Der Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung zerfällt dabei aber in zwei Faktoren: punktweise geometrische Deutung der Ableitung und geometrische Deutung der Ableitung über einen Bereich.

6.11.3 Ergebnisse des Gesamttests

Überblick über die Punkteverteilung im Gesamttest: Nach Herausnahme von drei Items aufgrund von schlechten Trennschärfen (siehe Kapitel 6.11.2) umfasst der für die endgültige Analyse herangezogene Datensatz 50 Items. Bei 48 dieser Items wurde ein Punkt bei der richtigen Antwort vergeben (sonst 0 Punkte). Bei 2 Items wurden zwei Punkte vergeben mit der Option auf einen Punkt bei teilweiser Richtigkeit. Damit konnten maximal 52 Punkte erreicht werden. Die tatsächlich von den Studierenden erreichten Punkte sind in Abbildung 100 dargestellt. Die statistischen Kenngrößen der Verteilung befinden sich in Tabelle 129.

Im Mittel wurden also knapp unter der Hälfte der Punkte erreicht (die Hälfte wären 26 Punkte). Die Studienanfänger mit Leistungskurs waren hierbei signifikant besser als die mit Grundkurs ($\alpha = 0.000005$). Die Spanne der erreichten Punktzahlen reicht von 4 Punkten bis 45 Punkten. Weiterhin sieht man in Abbildung 100 und Tabelle 129 eine große Streuung. Es lag also eine große Heterogenität beim Verständnis des Ableitungsbegriffs durch die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften vor. Die Streuung bei Studierenden mit Leistungskurs war sogar noch größer (siehe Tabelle 129), weil es dort einige Probanden mit Punktzahlen weitab von Mittelwert gab (ein

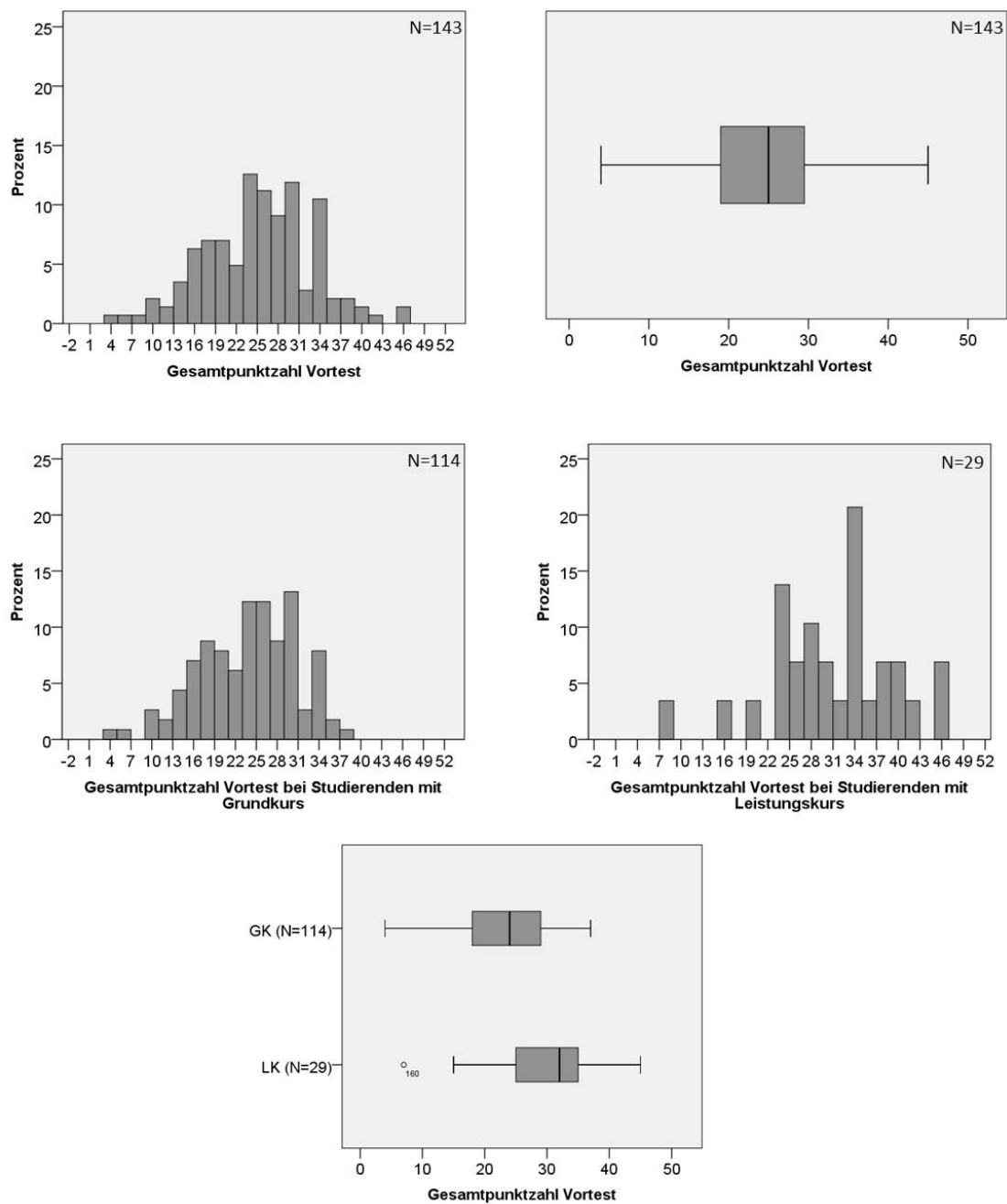


Abbildung 100: Verteilung der erreichten Gesamtpunktzahlen

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	24.80	23.34	30.52
Median	25	24	32
Standardabweichung	7.804	6.902	8.605

Tabelle 129: Kenngrößen der Punktesumme des Gesamttests

Proband mit nur 7 Punkten, 3 Probanden mit über 40 Punkten, Mittelwert: 30.52 Punkte).

Vergleich der einzelnen Teiltests: Für einen Vergleich der Teiltests untereinander wurden die dort erzielten Punktzahlen durch die jeweiligen Maximalpunktzahlen dividiert. Damit erhält man jeweils den relativen Anteil der maximal erreichbaren Punkte. Die Kenngrößen dieser normierten Verteilungen der einzelnen Teiltests sind in Tabelle 130 dargestellt.

Name des Teiltests	Anzahl der Items	Normierter Mittelwert	Normierte Standardabweichung
T1: Technik des Ableitens	6 Items	0.38	0.284
T2: Steigung linearer Funktionen	6 Items	0.65	0.277
T3: Differenzenquotient	5 Items	0.16	0.217
T4: Geometrische Deutung der Ableitung	11 Items	0.55	0.260
T5: Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	10 Items	0.60	0.234
T6: Tangentenkonzept	8 Items	0.58	0.259
T7: Ökonomische Interpretation der Ableitung und zugehöriges Hintergrundwissen	4 Items	0.19	0.190

Tabelle 130: Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teiltests (problematische Items wurden bereits entfernt)

Aus dieser Tabelle sind folgende Ergebnisse erkennbar:

1. Der Teilttest zur Steigung linearer Funktionen ist am besten ausgefallen. Hier wurden durchschnittlich 65% der Punkte erreicht. Bei diesem Konzept brachten die Studierenden also im Mittel ein vergleichsweise gutes Vorwissen mit.
2. Beim Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung und dem Verständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate wurden im Mittel etwas mehr als die Hälfte der Punkte erreicht. Allerdings lag beim Verständnis der geometrischen Deutung der Ableitung auch eine gewisse Heterogenität vor (Standardabweichung: ≈ 0.26).
3. Die Fertigkeiten der Studienanfänger beim Ableiten waren wesentlich schlechter. Hier wurden im Mittel nur 38% der Punkte erreicht. Eine Ursache für die geringere Punktzahl als bei den zuletzt genannten Teilttests zum Verständnis der Ableitung könnte sein, dass die Ableitungsaufgaben alle offen gestellt waren, während die Verständnisaufgaben überwiegend Multiple-choice Aufgaben waren, bei denen man auch durch Raten zur richtigen Lösung gelangen konnte. Eine andere Ursache könnte aber auch sein, dass in der Schule heutzutage das Verständnis der Ableitung stärker gefördert wird als Fertigkeiten zum händischen Ableiten.

4. Sehr schwache Ergebnisse erzielten die Studienanfänger in dem Teilttest zum Differenzenquotienten und zur ökonomischen Deutung der Ableitung. Hier war gleichzeitig die Streuung am geringsten. Bei diesen Teilttests wurden im Mittel weniger als 20% der möglichen Punkte erreicht. Beim Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation) ist dies nicht überraschend, denn die ökonomische Interpretation der Ableitung ist kein Schulstoff, und die Nutzung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation wird in der Regel nur im Leistungskurs behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.31). Bei dem Teilttest zum Differenzenquotienten ist dieses sehr schwache Ergebnis überraschend, denn dieser hätte in der Schule behandelt werden sollen (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.25).

Insgesamt zeigt die Globalauswertung, dass das Vorwissen der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn zum Ableitungsbegriff sehr heterogen war. Diese Heterogenität gab es sowohl innerhalb der Studierendenschaft als auch bezüglich verschiedener Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem in Kapitel 3 entwickelten Modell zur Beschreibung des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4). Aufgaben zum Ableiten einfacher Funktionen aus dem Teilttest zur Technik des Ableitens (siehe Tabelle 65) bereiteten den Studienanfängern überraschenderweise mehr Probleme als die Aufgaben zur Überprüfung des Verständnisses der Ableitung. Als am schwersten erwiesen sich aber die Aufgaben zum Differenzenquotienten (dessen Deutung, Deutung von dessen Vorzeichen und dessen Verwendung zur Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit).

6.12 Zusammenfassung der Ergebnisse des Vortests und Konsequenzen für die Lehre

Ziel dieses Kapitels 6 war die Beantwortung der dritten Forschungsfrage der Dissertation:

F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Dafür wurde auf Basis des in Kapitel 3 entwickelten theoretischen Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 4 oder Schlussblatt) ein Vortest entwickelt. Dieser wurde dann exemplarisch Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Paderborn im Mathematik-Vorkurs vor dem Wintersemester 2015/2016 vorgelegt. Er basierte auf sechs Teilttests, die verschiedene Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem theoretischen Modell adressierten (plus ein Teilttest zur Technik des Ableitens).

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und mögliche Konsequenzen für die Lehre gezogen.

Ergebnisse der Globalauswertung: In dem Test konnten maximal 52 Punkte erreicht werden. Im Mittel erreichten die Studienanfänger nur 24.80 Punkte (siehe Tabelle 129). Probanden mit Leistungskurs waren signifikant besser als die mit Grundkurs (Mittelwerte: 30.52 Punkte versus 23.34, $\alpha < 0.01$). Gleichzeitig zeigte sich eine hohe Heterogenität der Vorkenntnisse zum Ableitungsbegriff, und zwar einerseits innerhalb der Studierendenschaft (Standardabweichung: 7.804 Punkte), und andererseits bezüglich der verschiedenen Aspekte des Ableitungsbegriffs. Letzteres sieht man anhand der Mittelwerte der erreichten Punktzahlen der einzelnen Teiltests nach Normierung, d.h. Teilen durch die Anzahl der jeweiligen Items des Teiltests (siehe Tabelle 131).

Name des Teiltests	Anzahl der Items	Normierter Mittelwert	Normierte Standardabweichung
Technik des Ableitens	6 Items	0.38	0.284
Steigung linearer Funktionen	6 Items	0.65	0.277
Differenzenquotient	5 Items	0.16	0.217
Geometrische Deutung der Ableitung	11 Items	0.55	0.260
Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	10 Items	0.60	0.234
Tangentenkonzept	8 Items	0.58	0.259
Ökonomische Interpretation der Ableitung und zugehöriges Hintergrundwissen	4 Items	0.19	0.190

Tabelle 131: Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teiltests (problematische Items wurden bereits entfernt)

Im Folgenden werden noch einmal die wichtigsten Ergebnisse der einzelnen Teiltests dargestellt, und jeweils anschließend Konsequenzen für die Lehre gezogen.

Zusammenfassung zum Teiltests zur Technik des Ableitens: In diesem Teiltest sollten die Studierenden sechs einfache Funktionen ableiten: (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$, (2) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$, (3) $f(x) = e^{2x}$, (4) $f(x) = e^{x^2}$, (5) $f(x) = xe^x$, (6) $f(x) = \frac{1}{x}$. Im Mittel wurden hier nur 2.30 der 6 möglichen Punkte erreicht (siehe Tabelle 64). Abseits der Polynomfunktionen waren die Lösungshäufigkeiten stets unter 40% (siehe Tabelle 65). Am schlechtesten ist das Item mit der Produktregel mit der Funktion $f(x) = xe^x$ ausgefallen (Lösungshäufigkeit 11.2%). Insgesamt hatten viele Studienanfänger also große Schwierigkeiten beim Ableiten einfacher Funktionen.

Konsequenzen für die Lehre: Das Ableiten einfacher Funktion sollte in einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ auch geübt werden. Auch wenn in Kapitel 5 in Lehrbüchern der Wirtschaftswissenschaften eine Überbetonung der Technik des Ableitens stattfindet (Ergebnis der Lehrbuchanalysen, siehe Kapitel 5.6), zeigt der Vortest doch eine gewisse Notwendigkeit für das Üben des Ableitens. Die Konsequenz sollte aber meiner Meinung nach *nicht* das Stellen von Aufgaben sein, in denen komplizierte Funktionen unter Anwendung verschiedenster Ableitungsregeln, auch in Kombination miteinander, abgeleitet werden müssen, wie sie teilweise gegenwärtig in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler in großem

Umfang zu finden sind (siehe zum Beispiel (Tietze, 2010, S.206-225)). Stattdessen sollte der Fokus auf dem Ableiten *einfacher* Funktionen liegen, bei denen jeweils abseits der Summen- und der Faktorregel nur eine weitere Ableitungsregel erforderlich ist (da können die Übungsleiter dann auch schneller mögliche systematische Fehler sehen).

Zusammenfassung zum Teilttest zur Steigung linearer Funktionen: Im diesem Teilttest wurde die Kenntnis verschiedener Aspekte des Begriffs der Steigung einer linearen Funktion nach Nagle u. a. (2013) überprüft: (1) Steigung als Koeffizient m in der Gleichung $y = mx + n$ (*Parametric coefficient*), (2) Steigung als Maß für die Steilheit des Funktionsgraphen (*Behaviour indicator*, 2 Items), (3) Steigung als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (*Algebraic ratio*), (4) Steigung als Verhältnis der Kathetenlängen im Steigungsdreieck (*Geometric ratio*), (5) Steigung als Änderungsrate einer Funktion (*Functional property*).

Dieser Teilttest fiel im Mittel besser aus als der Teilttest zur Technik des Ableitens. Hier wurden im Mittel 3.92 von 6 Punkten erreicht (siehe Tabelle 70).

Mehr als 70% der Studierenden beherrschten die Aspekte *Parametric coefficient*, *Behaviour Indicator*, *Geometric ratio* (siehe Tabelle 71). Algebraisch aus zwei Punkten korrekt berechnen konnten die Steigung nur noch 55.9% der Probanden. Der häufigste Fehler war hierbei die Verwendung des falschen Verhältnisses $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ (8.4% der Fälle). Große Probleme bereitete die Deutung der Steigung im Kontext. Nur 28.7% konnten eine Steigung von $\frac{7}{5}$ in einer Kontextaufgabe korrekt deuten (siehe Tabelle 71).

Konsequenzen für die Lehre: Man sollte nicht voraussetzen, dass Studienanfängern noch alle Aspekte der Steigung einer linearen Funktion im Bewusstsein sind. Da aber bis auf die Deutung der Steigung im Kontext die anderen Aspekte von der Mehrheit noch beherrscht wurden, könnte eine kurze Wiederholung dieser Aspekte mit einem fakultativen Übungsmaterial mit erklärenden Musterlösungen ausreichen.

Aufgaben zur Deutung der Steigung im Kontext sollten allerdings für alle Studierenden obligatorisch gestellt werden, weil hier die größten Probleme vorlagen. Dies ist wichtig, wenn man möchte, dass die Studierenden später die Ableitung als Änderungsrate im Kontext deuten können.

Zusammenfassung zum Teilttest zum Differenzenquotienten: In diesem Teilttest wurde überprüft, inwieweit die Studienanfänger den Differenzenquotienten und sein Vorzeichen im Kontext deuten konnten, und ob sie diesen bei einer Berechnungsaufgabe zur Durchschnittsgeschwindigkeit verwenden würden.

Dieser Test ist sehr schlecht ausgefallen. Im Mittel erreichten die Studierenden nur 0.99 von 6 Punkten (siehe Tabelle 81).

Besonders wesentlich ist das Ergebnis, dass nur 2.8% der Probanden eine adäquate Deutung des Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ in einem ökonomischen Kontext angeben konnten ($K(x)$ entsprach den Kosten für die Produktion von x Autos, siehe Abbildung 56). Dies ist überraschend, denn die Deutung des Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate hätte in der Schule behandelt werden müssen (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.25).

Konsequenzen für die Lehre: Man sollte nicht voraussetzen, dass Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften inhaltlich adäquate Vorstellungen zum Differenzenquotienten haben. Daher sollte dieser noch einmal explizit in der Lehrveranstaltung behandelt werden. Hierzu sollten insbesondere Aufgaben auf den Übungsblättern zur Deutung des Differenzenquotienten im Kontext gestellt werden, damit die Studierenden ihn inhaltlich von absoluten Änderungen, und später auch von der Ableitung abgrenzen können. Dafür könnte man einerseits leicht zugängliche Kontexte wie Bewegungskontexte wählen. Andererseits sollte man aber in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auch ökonomische Kontexte verwenden.

Zusammenfassung zum Teilstest zur geometrischen Deutung der Ableitung: In diesem Teilstest wurde überprüft, inwieweit die Studienanfänger die Ableitung geometrisch als Steigung deuten konnten. Hierbei wurde insbesondere die sogenannte slope/height-confusion nach Leinhardt u. a. (1990, S.37) adressiert, bei der Werte der Funktion mit Werten der Ableitung verwechselt werden.

Dieser Test ist nicht schlecht ausgefallen. Von den 11 erreichbaren Punkten wurden im Mittel 6.08 Punkte erreicht. Allerdings lag eine recht hohe Heterogenität vor (siehe Abbildung 62).

Bei Aufgaben, in denen die Funktion über einen gesamten Bereich betrachtet werden musste, trat die slope/height-confusion jedoch häufig auf. So waren zum Beispiel bei dem in Abbildung 101 dargestellten Funktionsgraphen 49.0% der Probanden der Ansicht, dass die Ableitung im Bereich $1 < x < 2$ ein lokales Maximum hätte.

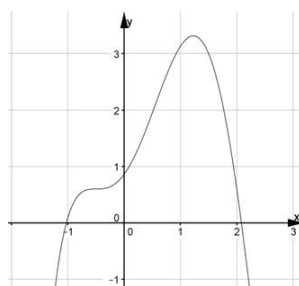


Abbildung 101: Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests

Eine Ursache für dieses häufige Auftreten der slope/height-confusion bei solchen Aufgaben zur Untersuchung des Änderungsverhaltens einer Funktion über einen Bereich könnte sein, dass zu deren Lösung ein sogenanntes *Across-time* Verständnis von Funktionen nötig ist (vergleichbar mit dem Kovariationsaspekt nach Vollrath (1989), siehe Kapitel 4.3.2). Über dieses verfügten viele Studienanfänger anscheinend nicht.

Konsequenzen für die Lehre: Auch die geometrische Deutung der Ableitung sollte in der Lehrveranstaltung der „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ thematisiert werden, insbesondere in Situationen, in denen Funktionen über einen Bereich betrachtet werden müssen.

In der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler eignen sich hier beispielsweise Mehrphasendiagramme ökonomischer Funktionen. In diesen sind die Funktionen graphisch dargestellt und werden in Abhängigkeit ihres Verlaufs in mehrere Wachstumsphasen

eingeteilt (siehe Kapitel 5.2.5 oder Kapitel 5.5.2 ab S.207). In den Diagrammen sind auch die Ableitung (Grenzfunktion) sowie die Durchschnittsfunktion eingezeichnet. Man könnte die Studierenden zunächst bei gegebenen Diagrammen (zum Beispiel beim Diagramm einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion, siehe Abbildung 39) das Verhalten der Funktion und der Ableitung beschreiben lassen und deren Beziehung zueinander in den einzelnen Phasen begründen lassen (Bsp.: „In Phase 1 ist die Funktion progressiv wachsend, wie kann man das an der Ableitung sehen?“). In einem zweiten Schritt könnte man sie dann selbst zu gegebener Ausgangsfunktion die Ableitung qualitativ in ein Mehrphasendiagramm einzeichnen und deren Verlauf begründen lassen.

Für solche qualitative Argumentationsaufgaben ist ein intensiver Austausch nötig. Daher wären solche Aufgaben besonders gut für Präsenzübungen geeignet, in denen entweder ein Austausch mit Kommilitonen oder dem Tutor stattfinden kann.

Zusammenfassung zum Teilstest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate: Ziel dieses Teilstests war es, herauszufinden, inwieweit die Studierenden die Ableitung als Änderungsrate deuten können, insbesondere bei Aufgaben, die kovariationales Argumentieren erfordern.

In diesem Teilstest konnten 10 Punkte erreicht werden, Im Mittel wurden 5.97 Punkte erreicht (siehe Tabelle 95), was auch nicht schlecht ist.

Bei der Analyse der Einzelitems fiel auf, dass Aufgaben zur Deutung der Ableitung als Änderungsrate ohne Kontext von den Studienanfängern häufiger korrekt gelöst wurden als Aufgaben mit Kontext. Zum Beispiel haben 86.0% der Studienanfänger bei einer graphisch gegebenen, wachsenden konkaven Funktion richtig erkannt, dass sich deren Wachstum als „sich verlangsamendes Wachstum“ und nicht als „sich beschleunigendes Wachstum“ beschreiben lässt (siehe Tabelle 109).

Bei den Aufgaben mit Kontext hingen die Ergebnisse stark vom konkreten Kontext ab. So wählten zwar 86.1% der Studierenden als Füllgraphen zu der Flasche aus Abbildung 102 aus verschiedenen Antwortalternativen einen bis auf Feinheiten qualitativ akzeptablen Graphen aus (erst strikt konkav, dann ab einer Wendestelle strikt konvex und zum Schluss linear, siehe Tabelle 99). Bei einer anderen Aufgabe, in der die Studierenden den Graphen des in Abbildung 102 dargestellten Flächeninhalts angeben sollten, machten hingegen 35.7% den Graph-als-Bild Fehler. Es hing also stark vom Kontext ab, inwieweit die Studierenden die Aufgaben zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate in Kontexten lösen konnten.

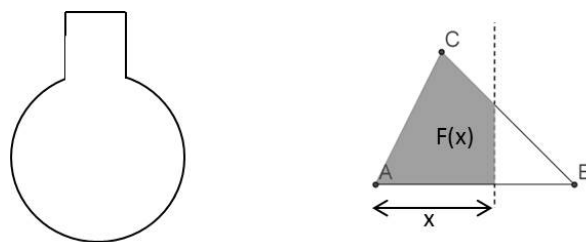


Abbildung 102: Zwei Situationen, zu denen passende Funktionsgraphen ausgewählt werden mussten (Füllgraph zur linken Flasche, Graph zur grauen Fläche innerhalb des Dreiecks)

Konsequenzen für die Lehre: Während die Deutung als Änderungsrate in graphischen Situationen ohne Kontext gut gelang, und daher kaum weiterer Übung bedarf, sollte die Interpretation der Ableitung als Änderungsrate in Kontexten auch Gegenstand der Lehrveranstaltung sein (wenn man möchte, dass die Studierenden dies am Ende können). Hier bieten sich als Übungsgelegenheiten Aufgaben zum kovariationalen Argumentieren wie Aufgaben zur Beschreibung von Bewegungen in Weg-Zeit- oder Geschwindigkeits-Zeit-Diagrammen, aber auch die in diesem Vortest verwendeten Aufgaben zu Füllgraphen an. Um kovariationales Argumentieren zu üben eignen sich laut Carlson u. a. (2002, S.374) am besten dynamische Situationen, in denen die unabhängige Variable die Zeit ist, weil an ihnen der Kovariationsaspekt von Funktionen erlebbar gemacht werden kann.

Auch hier bietet sich wieder das Behandeln der entsprechenden Aufgaben in Präsenzübungen an, in denen die Studierenden die Graphenverläufe gegenüber ihren Kommilitonen oder gegenüber dem Tutor begründen können.

Zusammenfassung zum Teilttest zum Tangentenkonzept: Ziel dieses Teiltests war es, herauszufinden, inwieweit die Studierenden ihre Vorstellungen zu Tangenten vom geometrischen Konzept der Tangente an einen Kreis zum Konzept der Tangente an eine Kurve erweitert haben. Dazu wurden den Studierenden 8 Graphiken vorgelegt (siehe Abbildung 85), in denen jeweils ein Ausschnitt eines Funktionsgraphen und eine Gerade mit einem gemeinsamen Punkt *A* dargestellt waren. Die Studierenden sollten jeweils entscheiden, ob die Gerade eine Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt *A* ist oder nicht.

Hier erreichten die Studienanfänger im Mittel 4.6 Punkte von 8 Punkten, also knapp mehr als die Hälfte der Punkte (siehe Tabelle 111). Bei Probanden mit Leistungskurs hat allerdings eine große Gruppe (37.9%) mindestens 7 Punkte erreicht.

Nur 11.2% der Studierenden beantworteten alle Items korrekt, und zeigten damit adäquate Vorstellungen zum Konzept der Tangente an eine Kurve. Besonders häufig wurde fälschlicherweise eine Gerade als Tangente angesehen, die den Funktionsgraphen nur einmal an einer Spitze berührt (in 58% der Fälle).

Konsequenzen für die Lehre: Die Vorstellungen vom geometrischen Tangentenbegriff am Kreis zur Tangente an eine Funktion lassen sich zum Beispiel erweitern, indem man den Studierenden zunächst verschiedene Möglichkeiten der Beziehung zwischen einer Funktion und der Tangente auf graphischer Ebene zeigt (Tangente mit nur einem Berührungspunkt, Tangente mit weiteren Schnittpunkten außerhalb einer Umgebung des Tangentialpunktes, Tangente im Wendepunkt, die dort auch schneidet, etc.) und mitteilt, dass diese entsprechenden Geraden Tangenten an die Funktion sind. Dann könnte man zunächst die Gemeinsamkeit herausarbeiten, dass alle diese Geraden sich lokal „am besten“ an den Graphen anschmiegen (mit anschaulicher Vorstellung der Tangente als *Schmiegegerade* nach Danckwerts u. Vogel (2010, S.47), zunächst ohne Formalisierung). Auf Basis dieser Vorstellung der Tangente kann man dann auch bereits die Frage nach der Existenz der Tangente thematisieren.

Schließlich lässt sich die Vorstellung der Tangente als Schmiegegeraden durch die Behandlung des Aspektes lokalen Approximierbarkeit von Funktionen im Zusammenhang mit der Ableitung noch formalisieren (Greefrath u. a., 2016; Danckwerts u. Vogel, 2010).

Zusammenfassung zum Teilstest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen: In diesem letzten Teilstest sollte einerseits herausgefunden werden, inwieweit die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften bereits vor einer Lehrveranstaltung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler eine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung angeben konnten. Andererseits sollte ermittelt werden inwieweit sie über das für ein Verständnis der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Argumentes um eine Einheit nötige Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation, siehe Kapitel 3.3.2) bereits zu Studienbeginn verfügten.

Auch dieser Teilstest ist nicht gut ausgefallen. Im Mittel wurden nur 1.24 Punkte von maximal möglichen 6 Punkten erreicht (siehe Tabelle 123).

Nur wenige Studienanfänger konnten eine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion K angeben (5.6%, siehe Abbildung 93). Nur 2.1% der Studierenden nannten hier die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit. Umgekehrt nutzten nur 2.8% der Studierenden die Ableitung in einer Aufgabe zur Bestimmung der Kosten der nächsten Einheit. Die Studienanfänger haben also spontan keine Identifikation der Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit vorgenommen.

Weiterhin zeigen die Ergebnisse des Teilstests, dass die Studienanfänger auch nicht über das für ein Verständnis der später in der Lehrveranstaltung vermittelten ökonomischen Interpretation der Ableitung als ungefähre Zusatzkosten der nächsten Einheit verfügen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation). Nur 12.6% der Studienanfänger konnten eine adäquate Definition der Ableitung angeben (siehe Abbildung 95). Von diesen nannte aber niemand die formale Definition. Zur Approximation von $\sin(0, 1)$ konnten die Ableitung sogar nur 2.1% der Probanden nutzen (siehe Abbildung 125).

Konsequenzen für die Lehre: Da die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit den Studienanfängern offenbar aus der Schule nicht bekannt und für sie auch nicht naheliegend war, sollte in der Lehrveranstaltung genügend Zeit für die Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation aufgewendet werden (und sie nicht bloß kurz abgehandelt werden wie in Sydsæter u. Hammond (2015, S.208-209)). Hierfür sollten zunächst die Unterschiede zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit klar herausgearbeitet werden. Anschließend sollte eine Verbindung zwischen beiden Objekten hergestellt werden (zum Beispiel über die Approximationsformel $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ bzw. die Idee der linearen Approximation dahinter, siehe Kapitel 3.3.2). Dabei sollte auch begründet werden, weshalb es bei ökonomischen Funktionen in der Regel legitim ist, für die Interpretation der Ableitung $f(x + 1) - f(x)$ als Approximation für $f'(x)$ zu verwenden.

Außerdem sollte das für die Herstellung des Zusammenhangs zwischen Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation nötige Hintergrundwissen zuvor bereitgestellt werden (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation). Insbesondere sollte man nicht annehmen, dass die Studienanfänger die formale

Definition der Ableitung aus der Schule (noch) wissen. Daher sollte die Definition der Ableitung in der Lehrveranstaltung noch einmal sorgfältig unter Einbeziehung der verschiedenen Repräsentationen der Ableitung eingeführt werden. Anschließend sollte auch mit der formalen Definition gearbeitet werden, wenn man möchte, dass die Studierenden sie für Argumentationen später auch selbstständig nutzen.

Zusammenfassendes Kurzfazit: Zusammengefasst zeigt der Vortest ein sehr heterogenes Vorwissen der Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften zum Ableitungsbegriff. Hierbei traten an vielen Stellen Probleme bei der Mehrheit der Probanden auf. Dies waren Schwierigkeiten

1. beim Ableiten einfacher Funktionen,
2. bei der Deutung der Steigung einer linearen Funktion und des Differenzenquotienten im Kontext
3. bei der geometrischen Deutung der Ableitung, wenn der gesamte Funktionsverlauf betrachtet werden muss,
4. beim Verständnis der Ableitung als Änderungsrate im Kontext im Zusammenhang mit kovariationalem Argumentieren und
5. beim Verständnis des Konzepts der Tangente an eine Kurve, dass oft nur unvollständig erfasst wurde.

Dementsprechend sollten die Studierenden genügend Lerngelegenheiten erhalten um diesen Schwierigkeiten zu begegnen. Diese können zum einen in der Vorlesung stattfinden, indem bestimmte der hier genannten Schwierigkeiten vom Dozenten aufgegriffen werden. Sie können aber auch in der Übung mit entsprechenden Übungsaufgaben adressiert werden. Einige Vorschläge wurden hier gemacht, wobei diese natürlich nur als Anregungen zu verstehen sind (hier könnte auch gemäß der Ziele der Lehrveranstaltung eine Auswahl getroffen werden).

Außerdem zeigt der Vortest, dass eine ökonomische Deutung der Ableitung und das für deren Verständnis nötige Hintergrundwissen (Definition der Ableitung, Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation, siehe Kapitel 3.3.2) aus der Schule in der Regel nicht bekannt sind. Diesen Aspekten sollte also in der Lehrveranstaltung (Vorlesung und Übung) genügend Raum gegeben werden. Sie sollten eben nicht bloß kurz abgehandelt werden, wie das zum Beispiel bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung in dem sehr gängigen Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler von Sydsæter u. Hammond (2015) der Fall ist (siehe Kapitel 5.6).

7 Analyse von 4 Klausuraufgaben zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung

7.1 Ziel und Methodik der Analyse

Die letzte Forschungsfrage der Dissertation ist:

F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Dies wurde *exemplarisch* anhand von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn untersucht.

Aus Umfangsgründen erfolgte hierbei eine Beschränkung auf das Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung, denn diese ist für Studierende der Wirtschaftswissenschaften besonders relevant. Die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit (siehe Kapitel 3.3) sollte dabei nicht bloß auswendig gelernt, sondern in das *concept image* der Studierenden zur Ableitung integriert werden. Insbesondere sollten Studierende eine Verbindung zwischen ihr und dem Rest ihres *concept image* zur Ableitung als rein mathematische Konzept schlagen können. Diese sollte einerseits mathematisch adäquat sein, andererseits aber die ökonomische Praxis im Umgang mit der Ableitung angemessen berücksichtigen.

Inwiefern den Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn dies gelang war Gegenstand der in diesem Kapitel 7 dargestellten Studie. Konkret lautet die Forschungsfrage der Studie:

F4'. Inwieweit haben die Studierenden die ökonomische Interpretation der Ableitung nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ in ihr *concept image* zur Ableitung integriert?

Zu deren Beantwortung wurden vier Klausuraufgaben für die Abschlussklausur der „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ an der Universität Paderborn konstruiert und im Wintersemester 2015/16 eingesetzt. Die Antworten wurden mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse analysiert (Mayring, 2015).

7.2 Beschreibung der äußeren Rahmenbedingungen der Studie

7.2.1 Kurzbeschreibung der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn

Die Studie fand im Kurs „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ an der Universität Paderborn im Wintersemester 2015/16 statt. Dies ist die erste von zwei mathematischen Pflichtveranstaltungen, die Studierende der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn absolvieren müssen. Der Kurs umfasst 4 Semesterwochenstunden Vorlesung und zwei Semesterwochenstunden Übung. In den Übungen müssen die Studierenden Präsenzaufgaben lösen. Zusätzlich wird jede Woche ein Hausübungsblatt online gestellt, zu denen die Studierenden schriftliche Lösungen abgeben dürfen, die dann

korrigiert werden. Die Lösungen der Aufgaben der Präsenz- und der Hausübungen werden in einer der folgenden Wochen im Vorlesungssaal (Audimax) in einer „Großübung“ durch einen Tutor vorgeführt.

Der Dozent des Kurses Prof. Dietz (auch Autor des in Kapitel 5.2 analysierten Lehrbuchs (Dietz, 2012)) legte sehr viel Wert auf das Verständnis mathematischer Konzepte. Zu den behandelten Konzepten vermittelte er daher nicht nur die formale *concept definition*, sondern auch ein umfangreiches *concept image* durch die Präsentation von Beispielen, Nicht-Beispielen, Visualisierungen, wichtigen Aussagen zu einem Konzept, Verbindungen zu anderen Konzepten und Anwendungen. Außerdem verlangte er von den Studierenden die Beherrschung eben dieser Kategorien in der Prüfung (inklusive der formalen *concept definition*). Der Dozent bezeichnete dieses Kategoriensystem als *Konzeptbasis* (Dietz, 2016). Bei wichtigen Konzepten, deren Behandlung mindestens eine Vorlesungssitzung umfasst, wurden die Studierenden außerdem dazu ermutigt, eine solche *Konzeptbasis* schriftlich anzufertigen.

Außerdem wurden die Studierenden dazu angehalten, sämtliche Aufgaben auf Basis des im Kurs vermittelten Wissens zu lösen. Damit sollte sichergestellt werden, dass die Studierenden nur auf das in der Lehrveranstaltung vermittelte Wissen und nicht auf ihr Schulwissen zurückgreifen. Dies bedeutet insbesondere, dass sie bei der Arbeit mit mathematischen Konzepten beim Lösen von Übungsaufgaben nur das in der Lehrveranstaltung vermittelte *concept image* nutzen sollten, dessen Basis stets die ebenfalls dort vermittelte *concept definition* war. Außerdem wurde den Studierenden mitgeteilt, dass die Prüfung auch Aufgaben enthalten wird, die abprüfen, inwieweit die Studierenden dann am Ende des Kurses über mathematisch valide *concept images* zu den in der Vorlesung gelehrtten mathematischen Konzepten verfügen (inklusive einer *personal concept definition*, die mit der extern vermittelten *formalen concept definition* übereinstimmt, siehe Kapitel 3.1).

Insgesamt wurde also zu mathematischen Konzepten (und insbesondere dem Ableitungskonzept) jeweils ein umfangreiches *concept image* vermittelt, und die Studierenden waren innerhalb der Lehrveranstaltung (zum Beispiel beim Lösen der Übungsaufgaben) dazu angehalten, auch nur auf dieses zurückzugreifen. Außerdem wurde von ihnen verlangt, dass sie auch in der Prüfung über eben dieses verfügen müssen.

Welche Inhalte zur Ableitung und insbesondere ihrer ökonomischen Interpretation (um die Untersuchung von deren Verständnis geht es ja in dieser Studie) genau vermittelt wurden, wird im nächsten Unterkapitel dargestellt.

7.2.2 In der Lehrveranstaltung vermitteltes Wissen zur ökonomischen Interpretation der Ableitung

Einführung der Ableitung als mathematisches Konzept in der Vorlesung: Zunächst wurde die Ableitung in der Vorlesung als rein mathematisches Konzept behandelt. Hierbei wurde sie zunächst formal als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert (falls er existiert). Sowohl der Differenzenquotient als auch der Grenzübergang zur Ableitung wurden zum besseren Verständnis der Definition auch graphisch mit Hilfe von Skizzen veranschaulicht (siehe Abbildungen 27 und 28). Außerdem wurden der Differenzenquotient und die Ableitung mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\text{(absoluter) Funktionszuwachs}}{\text{(absoluter) Argumentzuwachs}} \quad (106)$$

als Wachstumsrate gedeutet. Der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ entspricht laut Vorlesung der Wachstumsrate von f vom Punkt x_0 zum Punkt $x_0+\Delta x$. Der Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $\Delta x \rightarrow 0$ heißt lokale Wachstumsrate. Kontextbeispiele zu dieser Deutung wurden nicht behandelt.

Danach folgte die Behandlung der Ableitung elementarer Funktionen und der Ableitungsregeln (jeweils ohne Beweis). Da diese aber bei der hier dargestellten Studie zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung keine Rolle spielen, sei hier auf eine ausführliche Darstellung von deren Behandlung verzichtet.

Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung in der Vorlesung:

Die ökonomische Interpretation der Ableitung wurde am Beispiel der Grenzkosten eingeführt. Zunächst wurden die Grenzkosten einer Kostenfunktion $K : [0, \infty) \rightarrow [0; \infty)$ bei einem Output x als Ableitung $K'(x)$ definiert (falls sie existiert). Es wurde erklärt, dass sich auch bei anderen ökonomischen Funktionen wie Gewinnfunktion, Erlösfunktionen oder Produktionsfunktionen analoge *Grenzgrößen* bzw. *Grenzfunktionen* definieren lassen.

Danach wurden am Beispiel der Grenzkosten die Einheiten der Grenzgrößen diskutiert. Wird der Output in Mengeneinheiten (ME) angegeben, und werden die Kosten in Geldeinheiten (GE) angegeben, so ist die Einheit der Grenzkosten $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$. Dies wurde mit Hilfe der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten über folgende Rechnung gerechtfertigt:

$$\text{Differenzenquotient} \left\} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} K'(x_0) \frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]} \right. \quad (107)$$

Bei der Bildung des Differenzenquotienten ergibt sich wegen des Teilens als Einheit $\frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]}$. Da der Grenzübergang keinen Einfluss auf die Einheit hat, haben die Grenzkosten als Ableitung (in der Vorlesung wurde von „der Einheit der Ableitung“ gesprochen) auch die Einheit $\frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]}$.

Dann wurde die Frage gestellt, wie sich $K'(11) = 0,7$ ökonomisch interpretieren lässt. Zur deren Beantwortung wurde die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ wie folgt aus der Definition der Ableitung hergeleitet:

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \\ \Rightarrow K'(x) &\approx \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \quad \text{für } h \approx 0 \\ \Rightarrow K'(x) \cdot h &\approx K(x+h) - K(x) \end{aligned} \quad (108)$$

Für $h = 1$ erhält man dann:

$$K(x+1) - K(x) \approx K'(x) \quad (109)$$

Damit erhält man folgende ökonomische Interpretation der Ableitung $K'(11) = 0,7$:

*„Erhöht man – ausgehend von einem Output von 11 Mengeneinheiten – die Produktion um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten **ungefähr** um 0,7 Geldeinheiten.“*

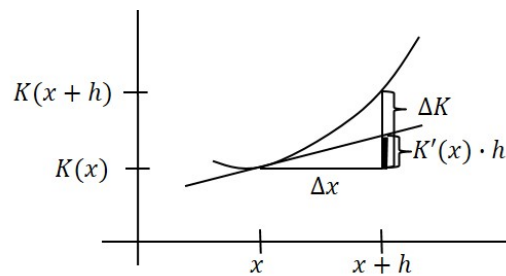


Abbildung 103: Skizze zur Veranschaulichung der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs entlang der Tangente

Hierbei wurde angenommen, dass $h = 1$ in dem entsprechenden Kontext klein ist. Zusätzlich wurden die auftretenden Größen $K(x + h) - K(x)$ und $K'(x) \cdot h$ anhand einer Skizze veranschaulicht (siehe Abbildung 103).

Anhand dieser Abbildung wurde dann erklärt, dass der Approximationsfehler immer kleiner wird, je kleiner h wird. Der Dozent formulierte dann sinngemäß die folgende Aussage aus seinem Lehrbuch (Dietz, 2012, S.267):

Man könnte grob formulieren, dass (9.11) $(K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h)$ asymptotisch exakt ist, d.h., dass die „Ungefähr-“ Beziehung beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ in eine exakte Beziehung übergeht. Für diese (fiktive) exakte Beziehung hat sich folgende Schreibweise eingebürgert:

$$dK = K'(x) dx \quad (110)$$

In dieser Gleichung heißen dx und dK Differentiale. Sie sind als unendlich kleine Größen zu verstehen. Streng genommen ist die Gleichung mit Differentialen aber nur als purer mathematischer Formalismus zu verstehen.

Dies führte dann zu folgender Sprechweise dieser Beziehung $dK = K'(x) dx$:

*„Erhöht man – ausgehend von einem Output von 11 Mengeneinheiten – die Produktion um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um 0,7 **marginale** Einheiten.“*

Wenn man von *marginalen* Einheiten spricht, kann man also das Wort „ungefähr“ weglassen.

Weitere vermittelte Inhalte zur Ableitung: Anschließend wurden noch der Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie, der Zusammenhang zwischen Ableitung und Konvexität, die Anwendung der Ableitung bei der Lösung von Optimierungsproblemen und die Nutzung der Ableitung zur Beschreibung und Charakterisierung ökonomischer Funktionen behandelt (ähnlich wie im in Kapitel 5.2 analysierten Lehrbuch des Dozenten (Dietz, 2012)). Aus Platzgründen wird dies hier nicht genauer dargestellt, da der Fokus der Studie auf dem Verständnis der *ökonomischen Interpretation der Ableitung* lag.

Übungsaufgaben zur ökonomischen Interpretation der Ableitung: Zur ökonomischen Interpretation der Ableitung gab es in der Lehrveranstaltung auch zwei umfangreiche Übungsaufgaben: eine Präsenzaufgabe in den Übungen und eine schriftlich abzugebende Hausaufgabe. Zu beiden Aufgaben wurden im späteren Verlauf des Semesters in einer Großübung im Vorlesungssaal (Audimax) Lösungen präsentiert. Die Präsenzaufgabe war:

Eine Firma produziert ein veredeltes Mineralöl zu Gesamtkosten in Höhe von $K(x) = 8x^2 + 10x + 700$ [100€] bei einem Output von x in Tonnen.

- (i) Wie lauten die Grenz- und die Durchschnittskostenfunktion der Firma?
- (ii) Wie lauten die zugehörigen Maßeinheiten?
- (iii) Bestimmen Sie die Grenzkosten bei einem Output von 5t.
- (iv) Welche Interpretation hat dieser Wert mathematisch bzw. ökonomisch?

Relevant für die Studie zur Untersuchung des Verständnisses der ökonomischen Interpretation der Ableitung ist Aufgabenteil (iv). Zu dieser wurde in der Großübung folgende Lösung für die *mathematische Interpretation* präsentiert:

„Die Steigung der Tangente an die Kostenfunktion an der Stelle x hat den Wert 90.“

Als ökonomische Interpretationen wurden folgende Lösungen genannt:

- 1. *„Erhöht man die Produktion von 5t um eine Tonne, so erhöhen sich die Kosten **ungefähr** um 9000 Euro.“*
- 2. *„Erhöht man die Produktion von 5t um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um 90 **marginale** Einheiten.“*

Außerdem wurden die beiden Ergebnisse $K'(5)$ und $K(6) - K(5)$ einander gegenübergestellt (9000 Euro versus 9800 Euro) um den numerischen Unterschied zu verdeutlichen. Hierbei wurde betont, dass die Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit unterschiedliche numerische Werte haben.

Als schriftlich abzugebende Hausaufgabe wurde folgende Aufgabe gestellt:

Ein Unternehmen produziert 43 ME eines Gutes zu Kosten von 19 GE. Die Grenzkosten liegen für diesen Output bei 1,4 GE/ME.

- (a) Stellen Sie diese beiden Angaben formal dar, also als Gleichungen.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Angaben näherungsweise die Kosten, die bei der Produktion von 45 ME entstehen.
- (c) Entsprechend kann man die Kosten $K(x)$ für jede andere Produktionsmenge x näherungsweise berechnen. Geben Sie diesen Zusammenhang durch einen Funktionsterm $L(x)$ an.

Die Lösung von Aufgabenteil (a) ist: $K(43) = 19$, $K'(43) = 1,4$. Die Lösung von (b) ist $K'(45) \approx K(43) + 2 \cdot K'(43) = 19 + 2,8 = 21,8$. In (c) sollte dann allgemein die Formel $K(x) \approx K(43) + K'(43)(x - 43) =: L(x)$ angegeben werden, wobei L der Tangentialfunktion entspricht. Auch diese Lösungen wurden in der Großübung präsentiert.

Insgesamt wurden also in der Vorlesung zwei Möglichkeiten der ökonomischen Interpretationen von Werten der Ableitung $K'(x)$ behandelt. Zunächst wurde mit Hilfe der Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ hergeleitet, dass $K'(x)$ *ungefähr* die Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt. Diese Approximationsformel wurde mit Hilfe der Definition der Ableitung gerechtfertigt und der Zusammenhang zwischen $K(x+h) - K(x)$ und $K'(x) \cdot h$ wurde zusätzlich mit Hilfe der Tangente veranschaulicht (siehe Abbildung 103). Dieser Weg ist in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, wie zum Beispiel die Analyse der Lehrbücher von Sydsæter u. Hammond (2015) und Tietze (2010) zeigte (siehe Kapitel 5.3.4 und 5.4.4), üblich.

Anschließend wurde noch eine zweite ökonomische Interpretation von $K'(x)$ mit Hilfe von Differentialen hergeleitet: als Wert, der die Zusatzkosten der nächsten *marginalen Einheit* angibt. Marginale Einheiten wurden hierbei als Sprechweise für fiktive *unendlich kleine* Größen dx und dK in der Beziehung $dK = K'(x)dx$ aufgefasst, wie sie früher in der Mathematik verwendet wurden (Walter, 2003, S.235), und heute noch in der Physik oder den Ingenieurwissenschaften verbreitet sind (siehe zum Beispiel (Hering u. a., 1999; Stroppe, 2012)). Diese Interpretation mit dieser Auffassung des Begriffs der *marginalen Einheit* war aber unter den in Kapitel 5 analysierten Lehrbüchern nur in dem Lehrbuch des Dozenten zu finden (Dietz, 2012), und scheint daher eher speziell zu sein.

7.3 Beschreibung der vier Klausuraufgaben

Die ersten beiden Aufgaben waren die Folgenden:

Aufgaben 1 und 2:

Es sei $G : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Gewinnfunktion eines Unternehmens, welches ein bestimmtes Produkt in unbeschränkter und beliebig teilbarer Menge herstellt. Der Gewinn wird in Geldeinheiten [GE], der Output in Mengeneinheiten [ME] angegeben. Bekanntlich bezeichnet man ihre Ableitungsfunktion G' auch als Grenzgewinn(funktion). Sie erfahren, dass gilt:

$$G'(73) = 0,2 \quad \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right] \quad (111)$$

1. Wie lässt sich diese Angabe ökonomisch interpretieren? Nennen Sie eine Möglichkeit dazu.
2. Wie lässt sich diese Angabe mathematisch interpretieren? Nennen Sie eine Möglichkeit dazu.

Ziel von *Aufgabe 1* war es, herauszufinden, ob eine adäquate *ökonomische Interpretation* der Ableitung Bestandteil des *concept image* der Studierenden war (dieses beinhaltet auch *verbale Formulierungen*, siehe Kapitel 3.1). Folgende Interpretationen wären auf Basis des in der Lehrveranstaltung vermittelten Wissens passend (siehe auch Kapitel 7.2.2):

1. ‚Erhöht man die Produktion von 73 ME um eine Einheit, so erhöht sich der Gewinn um **ungefähr** um 0,2 Geldeinheiten.‘
2. ‚Erhöht man die Produktion von 73 ME um eine **marginale** Einheit, so erhöht sich der Gewinn um 0,2 **marginale** Einheiten.‘

Mit *Aufgabe 2* sollte dann ermittelt werden, ob die Studierenden im Vergleich dazu auch eine innermathematische Deutung der Ableitung angeben konnten, zum Beispiel als Steigung der Tangente oder als lokale Änderungsrate. Hierzu gab es eine gleichlautende Übungsaufgabe (siehe Kapitel 7.2.2), sodass den Studierenden mit der Formulierung ‚*mathematische Interpretation der Ableitung*‘ in der Aufgabenstellung aus der Lehrveranstaltung vertraut sein sollte.

In den *Aufgaben 3 und 4* ging es dann um den Zusammenhang zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation. Dieser wurde in der mathematischen Lehrveranstaltung, wie in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler üblich, über lineare Approximation vermittelt 7.2.2. Die genauen Aufgabenstellungen waren:

Aufgaben 3 und 4:

Ein Unternehmen hat bei einem Output von 5 Mengeneinheiten eines Gutes X Kosten von 10 Geldeinheiten und Grenzkosten von 0.5 Geldeinheiten je Mengeneinheit. Der Output soll von 5 auf 7 Mengeneinheiten gesteigert werden.

3. Ermitteln Sie die dabei entstehenden Produktionskosten näherungsweise und nennen Sie auch deren Einheit.
4. Begründen sie, warum der in Aufgabe 3 ermittelte Näherungswert die zusätzlichen Produktionskosten nicht für jede Kostenfunktion exakt angeben wird, z.B. für quadratische Kostenfunktionen.

Ziel von *Aufgabe 3* war es, herauszufinden, ob die Studierenden hier zunächst auf prozeduraler Ebene eine Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten über die in der Vorlesung vermittelte Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ herstellen konnten. Auch hier wurde eine analoge Aufgabe in den Übungen behandelt (siehe auch Kapitel 7.2.2).

Mit Hilfe von *Aufgabe 4* sollte festgestellt werden, ob die Studierenden die Idee hinter dieser Formel und den in der Vorlesung vermittelten Zusammenhang zwischen den in ihr auftretenden Größen konzeptuell verstanden haben. Hier gab es *keine* analoge Übungsaufgabe, sodass die Studierenden für die Lösung dieser Aufgabe tatsächlich den in der Vorlesung präsentierten Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten über lineare Approximation verstanden haben müssen (siehe Kapitel 7.2.2).

Natürlich wären hier weitere Aufgaben wünschenswert gewesen, die umfangreiche Erläuterungen erfordern, aus denen man spezifische Verständnisschwierigkeiten des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Zusatzkosten erkennen kann. Aufgrund der hohen Teilnehmerzahl an der entsprechenden Klausur von 821 Studierenden hätte dies aber zu einem nicht mehr leistbaren Korrekturaufwand geführt. Daher wurde zusätzlich eine qualitative Interviewstudie durchgeführt (siehe Kapitel 8).

7.4 Auswertung der Aufgabe zur Angabe einer ökonomischen Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ (Aufgabe 1)

Aufgabe war es, eine *ökonomische Interpretation* von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ anzugeben (siehe Kapitel 7.3). Die Studierenden waren mit diesem Aufgabentyp vertraut, denn es gab eine Übungsaufgabe, in der $K'(5) = 90$ einer Kostenfunktion K ökonomisch interpretiert werden sollte (siehe Kapitel 7.2.2).

7.4.1 Analyse der Daten zu Aufgabe 1

Die Antworten der Aufgabe eine ökonomischen Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ anzugeben wurden mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse kategorisiert (Mayring, 2015). Weil zu erwarten war, dass viele Studierende eine ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn der nächsten Einheit oder der nächsten marginalen Einheit angeben würden, die vielleicht im Detail nicht stimmte, erfolgte die Kategorisierung der Antworten in zwei Schritten:

- 1.Schritt: Grobkategorisierung in ein Kategoriensystem mit einer groben Kategorie „Zusatzgewinn“, einer Kategorie mit der Interpretation als Wachstumsrate und verschiedenen falschen Interpretationen, die bereits im Vortest in einer analogen Aufgabe ermittelt wurden (siehe Kapitel 6.10.2)
- 2.Schritt: Feinkategorisierung der Antworten der groben Kategorie „Zusatzgewinn“ unter Berücksichtigung der genauen Formulierung in Abhängigkeit davon, ob adäquat (1) von *ungefährem* Zusatzgewinn der nächsten Einheit oder (2) vom Zusatzgewinn der nächsten *marginalen* Einheit gesprochen wurde

Zum 1.Schritt der Grobkategorisierung: Basis dieser Kategorisierung war ein aus 9 Kategorien bestehendes System, welches bereits im Vortest bei der Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(200) = 2$ entwickelt wurde (siehe Kapitel 6.10.2). Eine genaue Beschreibung der dort verwendeten Kategorien mit Ankerbeispielen ist in Tabelle 115 dargestellt. In Tabelle 132 ist noch einmal ein Überblick über diese Kategorien, angepasst an die jetzige Aufgabenstellung, zu sehen.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
1.	Zusatzgewinn
2.	Wachstumsrate des Gewinns
3.	Steigung des Gewinns an der Stelle
4.	Gewinn pro Einheit
5.	Gesamtgewinn
6.	Gewinnsteigerung um 20%
7.	Andere falsche Deutung
8.	Steigung der Funktion
9.	Keine gültige Antwort

Tabelle 132: Kategoriensystem zur Aufgabe eine ökonomische Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ einer Gewinnfunktion anzugeben

In die erste Kategorie wurden alle Antworten einsortiert, in denen $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ irgendwie als Zusatzgewinn der nächsten oder der nächsten marginalen Einheit interpretiert wurde. Die Studierenden in der zweiten Kategorie haben $G'(73)$ als Wachstumsrate bei einem Output von 73 Einheiten interpretiert, was eine adäquate Interpretation ist. Die Kategorien 3-7 sind falsche Deutungen. In Kategorie 8 wurde schließlich eine Interpretation als Steigung ohne Ökonomiebezug angegeben.

Zusätzlich tauchten in der Klausur noch drei weitere falsche Antworttypen in mehr als 3% der Fälle auf, die im Vortest gar nicht oder nur vereinzelt auftraten. Daher wurde das Kategoriensystem noch um drei zusätzliche Kategorien erweitert. Deren Beschreibung mit Ankerbeispielen ist in Tabelle 133 zu sehen.

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
10. Zuwachs des Grenzgewinns	$G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ wird als Zuwachs des Grenzgewinns interpretiert.	<i>„Verändert man ausgehend von 73 ME den Output um 1 marginale Einheit, so steigt der Grenzgewinn um 0,2 marginale (Geld-)Einheiten.“</i>
11. Extremstelle der Gewinnfunktion	Die Studierenden geben an, dass $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ bedeutet, dass die Funktion bei $x = 73$ einen Extrempunkt hat oder dass der optimale Output x_{opt} bei 73 Mengeneinheiten liegt.	<i>„Die Unternehmen bekommt maximalen Gewinn bei $x_{\text{opt}} = 73$.“</i>
12. Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$	Die Studierenden verbalisieren lediglich die Ableitung G' mit dem Terminus <i>Grenzgewinn</i> , was in der Vorlesung eine Definition und keine Interpretation war.	<i>„An der Stelle $x = 73$ beträgt der Grenzgewinn $0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$.“</i>

Tabelle 133: Erweiterung des Kategoriensystems aus Tabelle 132 um drei Kategorien, die in der Abschlussklausur in mehr als 3% der Fälle auftraten

In Kategorie 11 („Zuwachs des Grenzgewinns“) wurde anstatt einer Interpretation als Zusatzgewinn eine Interpretation als *Zuwachs des Grenzgewinns* angegeben. Bei den Antworten von Kategorie 12 („Extremstelle der Funktion“) wurde fälschlicherweise von dem Vorliegen einer Extremstelle bei $x = 73$ ausgegangen. Bei den Antworten in Kategorie 13 („Verbalisierung von $G'(73) = 0.2$ “) wurde lediglich G' mit der passenden Bezeichnung benannt (G' war in der Vorlesung per Definition der Grenzgewinn, siehe Kapitel 7.2.2).

Zum 2.Schritt der Feinkategorisierung der Kategorie „Zusatzgewinn“: Im zweiten Schritt wurden dann die Antworten der Kategorie „Zusatzgewinn“ genauer gemäß ihrer Formulierung analysiert. Laut Vorlesung wären folgende Formulierungen korrekt gewesen (siehe Kapitel 7.3):

1. *Erhöht man die Produktion von 73 ME um eine Einheit, so erhöht sich der Gewinn um **ungefähr** 0,2 Geldeinheiten.*
2. *Erhöht man die Produktion von 73 ME um eine **marginale** Einheit, so erhöht sich der Gewinn um 0,2 **marginale** Einheiten.*

Nun fanden sich in den Antworten der Studierenden viele Varianten dieser Formulierungen, von denen viele nicht genau das beschreiben, was in der Vorlesung vermittelt wurde. Ein Beispiel ist:

„Erhöht man, ausgehend von einem Output von 73, den Output um eine Einheit, so erhöht sich der Gewinn um 0,2 Geldeinheiten.“

Hier wurde nicht berücksichtigt, dass die Ableitung nur *ungefähr* den Zusatzgewinn der nächsten Einheit angibt. Ein weiteres Beispiel ist:

*„Erhöht man ausgehend von 73 ME, den Output um eine **marginale** Einheit, steigt der Gewinn **ungefähr** um 0,2 GE.“*

Auch hier stimmt der Wortlaut im Detail nicht. Wenn von einer Erhöhung um eine *marginale* Einheit gesprochen wird, müsste man *ungefähr* weglassen. Außerdem hätte man im Sinne der in der Vorlesung vermittelten ökonomischen Interpretation der Ableitung als Sprechweise für die Beziehung $dG = G'(x) dx$ (siehe Kapitel 7.2.2) auch beim Gewinn von *marginalen Einheiten* sprechen müssen.

Dementsprechend wurden bei der Feinkategorisierung die Antworten der Kategorie „Zusatzgewinn“ nochmal wie folgt unterteilt:

1. Unterteilung, ob von einem *ungefähren* Zusatzgewinn gesprochen wurde oder nicht
2. Unterteilung, ob bei der Outputerhöhung oder beim Zusatzgewinn von *marginalen* Einheiten gesprochen wurde oder nicht

Außerdem haben einige Studierende den Zusatzgewinn der nächsten oder der nächsten marginalen Einheit fälschlicherweise in $\frac{GE}{ME}$ angegeben, was auch nicht sinnvoll ist. Auch deren Anteil wurde ermittelt.

Überprüfung der Intercoderreliabilität: Zur Ermittlung der Intercoderreliabilität wurden die ersten 200 Antworten erneut durch einen Korrektor des Kurses codiert. Dabei hatte der Koeffizient Cohen's Kappa den Wert $\kappa = 0.82$. Dies ist gut. Über Zweifelsfälle wurde anschließend diskutiert und ein Konsens gefunden.

7.4.2 Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 1

Ergebnisse der Grobkategorisierung (Schritt 1): Die Ergebnisse der Grobkategorisierung, bei der zunächst alle Interpretationen als Zusatzgewinn der nächsten Einheit oder der nächsten marginalen in eine Kategorie sortiert wurden (um sie zunächst von den völlig falschen Antworten abzugrenzen), sind in Abbildung 104 dargestellt.

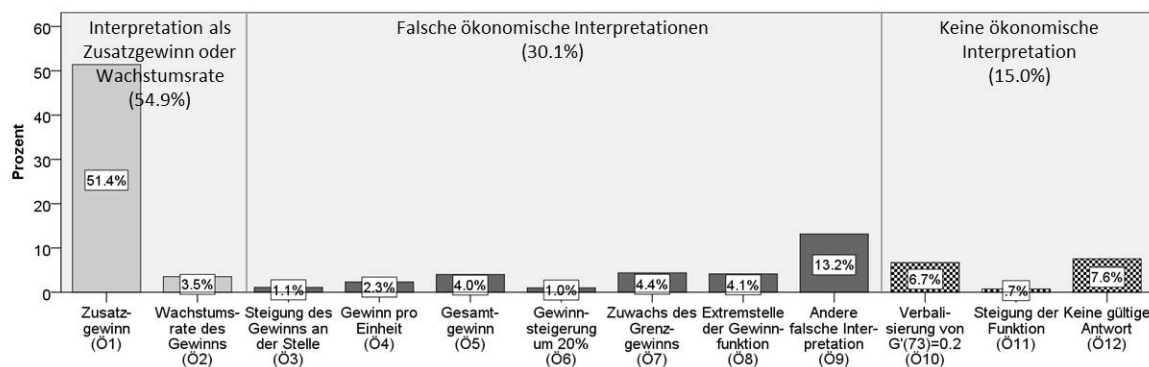


Abbildung 104: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe eine ökonomische Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ einer Gewinnfunktion G anzugeben ($N = 821$)

Aus der Graphik sind folgende wichtige Ergebnisse ablesbar:

1. 51.4% der Studierenden nannten eine Interpretation als Zusatzgewinn der nächsten oder nächsten marginalen Einheit (Kategorie Ö1), wie sie auch in ökonomischen Lehrbüchern verwendet wird (siehe Kapitel 2.2). Allerdings kann an dieser Stelle der Analyse noch nicht erkannt werden, inwieweit die Interpretation aus mathematischer Sicht adäquat ist (ob verdeutlicht wurde, dass die Ableitung nur eine Approximation des Zusatzgewinns der nächsten Einheit ist, oder ob bei Weglassen des „ungefähr“ von *marginalen* Einheiten gesprochen wurde).
2. 30.1% nannten falsche ökonomische Interpretationen, wobei eine große Variationsbreite falscher Antworten zu erkennen ist (Kategorien Ö3-Ö9).
3. 6.7% der Studierenden nannten nur eine Verbalisierung von G' als Grenzgewinn als Interpretation (Kategorie Ö10).

Das bloße Nennen einer Verbalisierung kann zwei Ursachen haben: Entweder hielten die Studierenden hier bereits die Bezeichnung „Grenzgewinn“ für eine Interpretation, oder aber sie haben nur die Bezeichnung gelernt und kannten keine echte Interpretation. Im ersteren Fall hätten diese Probanden dann aber auch in Aufgabe 2 als *mathematische Interpretation* eine Verbalisierung nennen müssen. Dies war aber nur in Einzelfällen der Fall. Daher kannten vermutlich viele der Studierenden, die nur eine Verbalisierung hingeschrieben hatten, keine echte ökonomische Interpretation der Ableitung.

Insgesamt sind die Ergebnisse auf den ersten Blick positiv. Immerhin 51.4% der Studierenden haben die in der Vorlesung vermittelte ökonomische Interpretation der Ableitung „im Groben“ verinnerlicht, und weitere 3.5% haben eine adäquate Interpretation als Wachstumsrate angegeben. Allerdings sind die restlichen 45.1% *nicht unproblematisch*, denn das Interpretieren von Werten der Ableitung in einem ökonomischen Kontext wurde in der Lehrveranstaltung explizit geübt (siehe Kapitel 7.2.2).

Ergebnisse der anschließenden Feinkategorisierung: In Tabelle 134 ist aufgeschlüsselt, wie viele Studierende bei der Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$

1. von ungefähigem Zusatzgewinn gesprochen haben oder nicht,
2. von einer *marginalen* Einheit bei der Outputerhöhung gesprochen haben oder nicht,
3. von einer *marginalen* Einheit beim Zusatzgewinn gesprochen haben oder nicht.

Die in der Vorlesung gelehrtten Interpretationen waren: (1) *ungefähre* Zusatzgewinn bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit, (2) Zusatzgewinn in *marginalen* Einheiten bei Erhöhung der Produktion um eine *marginale* Einheit. Diese beiden Zeilen sind in Tabelle 134 fett hervorgehoben. Nur insgesamt 142 Studierende (17.3%) haben eine dieser beiden Formulierungen angegeben.

ungefähre Zusatzgewinn	<i>marginale</i> Einheit bei Outputerhöhung	Zusatzgewinn in <i>marginalen</i> Einheiten	Anzahl	Anteil ($N = 821$)
nein	nein	nein	82	10.0%
Ja	nein	nein	18	2.2%
Nein	Ja	Nein	138	16.8%
Nein	Nein	Ja	1	0.1%
Nein	Ja	Ja	124	15.1%
Ja	Nein	Ja	2	0.2%
Ja	Ja	Nein	40	4.9%
Ja	Ja	Ja	17	2.1%

Tabelle 134: Feinkategorisierung der Antworten der Probanden mit der Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ als Zusatzgewinn in Abhängigkeit davon, ob von *ungefähigem Zusatzgewinn* oder von *marginalen* Einheiten gesprochen wurde

Weiterhin erkennt man aus Tabelle 134, dass 138 Studierende (16.8%) von der *marginalen* Einheit nur bei der Outputerhöhung, nicht aber bei der Gewinnerhöhung gesprochen haben. Dies ist sogar die größte Gruppe aus Tabelle 134. Wenn man die marginale Einheit so versteht, wie das in vielen wirtschaftswissenschaftlichen Büchern der Fall ist (eine Einheit, die klein genug ist, dass man den Approximationsfehler vernachlässigen kann, siehe (Reiß, 2007, S.197)), wäre auch diese Formulierung in Ordnung. Zählt man diese auch als adäquat, haben insgesamt 280 Studierende (34.1%) eine adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung genannt.

Die anderen 142 Studierenden (17.3%) der groben Kategorie „Zusatzgewinn“ haben hier nicht Formulierungen genannt, die das Approximationsproblem bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung *nicht* korrekt widerspiegeln. Sie haben vermutlich nicht verstanden, weshalb man nur von *ungefähigem* Zusatzgewinn bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit sprechen darf, oder man andernfalls von *marginalen* Einheiten sprechen sollte.

Wie bereits angedeutet, haben einige Studierende außerdem beim Zusatzgewinn der nächsten oder nächsten marginalen Einheit als Einheit $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ genannt. Sie haben hier

die Einheit des Grenzgewinns $G'(x)$ und die Einheit von dessen Interpretation als Zusatzgewinn, die GE oder marginale Einheiten sein müsste, nicht auseinandergehalten. Dies betraf 100 Studierende.

Insgesamt bleiben somit mit einer adäquaten Formulierung als

1. ungefährender Zusatzgewinn in GE bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit oder als
2. Zusatzgewinn bei Erhöhung der Produktion um eine marginale Einheit in marginalen Einheiten oder in GE

noch 214 Studierende übrig (26.1%).

	Anzahl	Anteil an Gesamtpopulation ($N = 821$)
Adäquate Formulierung	214	26.1%
Formulierung mit Mängeln	208	25.3%

Tabelle 135: Adäquatheit der Formulierungen der Studierenden mit ökonomischer Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{GE}{ME} \right]$ als Zusatzgewinn (Kategorie Ö1 aus Abbildung 104)

Damit teilen sich die 422 Studierenden, die eine Interpretation als Zusatzgewinn genannt hatten (51.4%, Kategorie Ö1 in Abbildung 104) in zwei Teilpopulationen auf (siehe Tabelle 135). Dies lässt vermuten, dass weitaus weniger Studierende die ökonomische Interpretation der Ableitung in allen Facetten verstanden haben als diese 422 Studierenden (51.4%).

7.4.3 Vergleich der Ergebnisse mit den Ergebnissen einer analogen Aufgabe aus dem Vortest

Bereits im Vortest in einem freiwilligen Vorkurs im September 2015 wurde eine analoge Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung gestellt (siehe Kapitel 6.10.2). Diese war die folgende:

Ein Unternehmen produziert Kugelschreiber. Die von der produzierten Stückzahl abhängigen Produktionskosten sind durch eine Kostenfunktion K mit folgender Gleichung gegeben:

$$K(x) = \frac{1}{30000}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + 2x, \quad x \geq 0 \quad (112)$$

$K(x)$ gibt die Kosten in Euro bei der Produktion von x Kugelschreibern an. Bei dieser Kostenfunktion hat die Ableitung an der Stelle $x = 200$ den Wert 2, d.h. es gilt $K'(200) = 2$. Wie lässt sich das Ergebnis ökonomisch in obigem Kontext interpretieren?

Mit dem in Kapitel 7.5.2 beschriebenen Kategoriensystem ergaben sich bei den Antworten im Vortest die in Abbildung 105 in der oberen Graphik dargestellten Ergebnisse. Die untere Graphik beinhaltet die Ergebnisse der Klausuraufgabe.

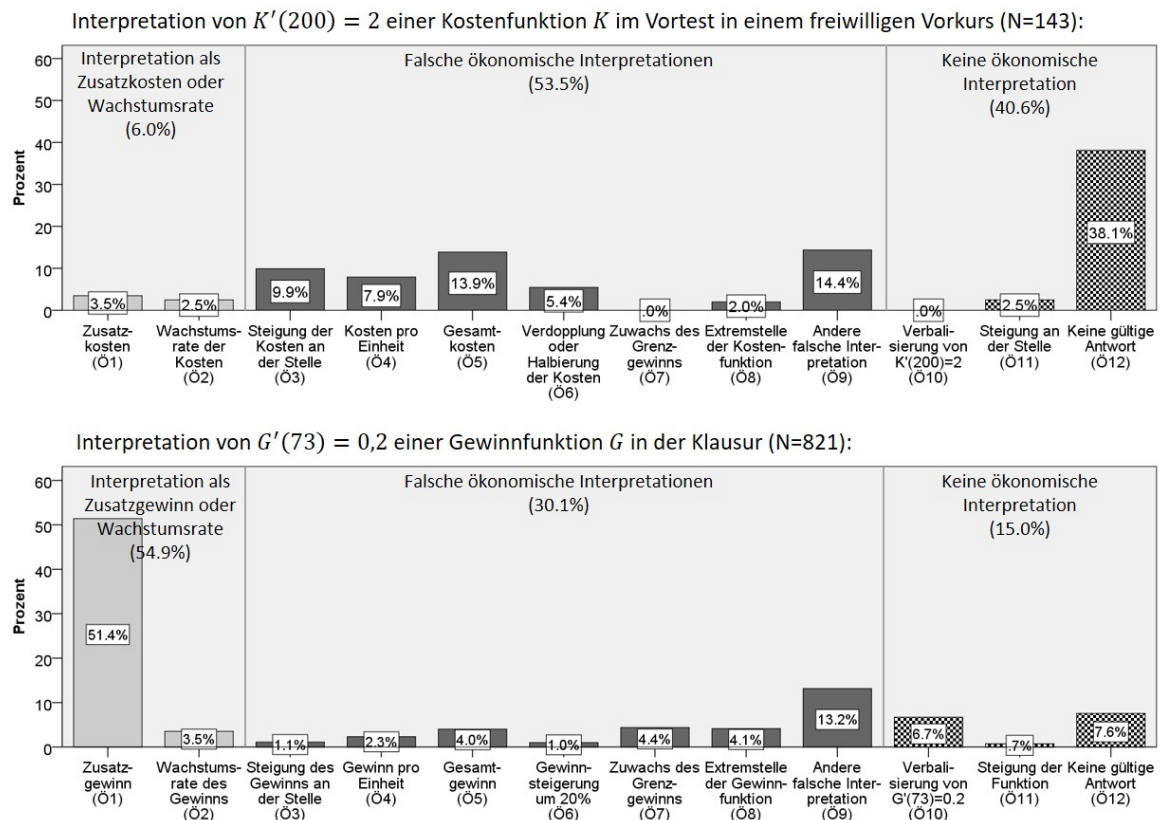


Abbildung 105: Vergleich der Antworten der Studierenden bei den Aufgaben zur ökonomischen Interpretation von $K'(200) = 2$ einer Kostenfunktion im Vortest im September 2015 und zur ökonomischen Interpretation von $G'(73) = 0,2$ einer Gewinnfunktion in der Klausur im Februar 2016

Aus diesen beiden Graphiken sind folgende drei Ergebnisse ablesbar:

1. Der Anteil der Studierenden, die eine Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung der Produktion um eine oder eine marginale Einheit nannten, stieg von 3.5% auf 51.4% (Kategorie Ö1).
2. Der Anteil derjenigen, die versuchten ihr Wissen über die Ableitung als Steigung oder als Änderungsrate zur ökonomischen Interpretation zu nutzen (Kategorien Ö2-Ö4), was nicht immer vollkommen gelungen ist (Kategorien Ö3 und Ö4), sank von 20.3% auf 6.9%.
3. Nach dem Kurs traten neue falsche Interpretationen auf (Kategorien Ö7 und Ö10), die vorher gar nicht genannt wurden. In beiden tauchte der Begriff des *Grenzgewinns* auf.

Zu den Ergebnissen lässt sich folgendes sagen:

Zu 1.: Offensichtlich haben viele Studierende die in der Vorlesung präsentierte Formulierung der ökonomischen Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung der Produktion um eine oder eine marginale Einheit in

ihr *concept image* aufgenommen (eventuell aber mit kleinen Mängeln in der Formulierung, siehe Tabelle 135). Gleichzeitig nahm der Anteil völlig falscher Interpretationen von 53.5% auf 30.1% ab. Insbesondere verwechselten nach der Lehrveranstaltung wesentlich weniger Studierende die Ableitung mit dem Funktionswert (Kategorie Ö5, sank von 13.9% auf 4.0%).

Zu 2. Dass gleichzeitig der Anteil derjenigen, deren Interpretationen auf der Deutung der Ableitung als Steigung oder als Änderungsrate an einer Stelle basierten, von 20.3% auf 6.9% sank (Kategorien Ö2-Ö4), deutet darauf hin, dass zum Teil eigene, auf dem Schulwissen zur Ableitung basierende Vorstellungen für eine ökonomische Interpretation der Ableitung verändert wurden. Allerdings lässt sich das nicht mit Sicherheit sagen, weil aus organisatorischen Gründen keine individuelle Nachverfolgung der Studierenden möglich war.

Zu 3: Dass in der Klausur die falschen Interpretationen der Kategorien Ö7 („Zuwachs des Grenzgewinns“) und Ö10 („Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$ “) auftauchten, im Vortest aber nicht, lag vermutlich daran, dass in diesen Interpretationen der Begriff des Grenzgewinns auftauchte. Diesen kannten die Studierenden zum Zeitpunkt des Vortests nicht. Offensichtlich kann der Begriff des Grenzgewinns zu neuen Fehlformulierungen führen.

Insgesamt zeigt der Vergleich von Vortest und Klausur, dass viele Studierende die in der Vorlesung vermittelte ökonomische Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine oder eine marginale Einheit in ihr *concept image* aufgenommen haben, allerdings bei 25.3% mit kleinen Mängeln in der Formulierung (siehe Tabelle 135). Die Lehrveranstaltung hat also schon das *concept image* vieler Studierenden zur Ableitung verändert. Allerdings deuten die Ungenauigkeiten in den Formulierungen der Interpretation der Ableitung als Zusatzgewinn, bei denen entweder nicht korrekt gesagt wurde, inwieweit die Ableitung nur eine Approximation des Zusatzgewinns ist, oder bei denen falsche Einheiten verwendet wurden, darauf hin, dass viele Studierende diese Interpretation und deren Rechtfertigung oft nicht im Detail verstanden haben.

7.5 Auswertung der Aufgabe zur Angabe einer mathematischen Interpretation von $G'(73) = 0,2$ (Aufgabe 2)

Aufgabe war es, eine *mathematische Interpretation* von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ anzugeben (siehe Kapitel 7.3). Die Studierenden waren mit diesem Aufgabentyp und insbesondere der Formulierung vertraut, denn es gab eine Übungsaufgabe, in der $K'(5) = 90$ einer Kostenfunktion K mathematisch interpretiert werden sollte (siehe Kapitel 7.2.2). In der Musterlösung wurde als mathematische Interpretation die geometrische Deutung als Steigung der Tangente genannt.

7.5.1 Analyse der Daten zu Aufgabe 2

Die Antworten wurden wieder mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse analysiert (Mayring, 2015). Die Kategorienbildung erfolgte hierbei induktiv. Eine Übersicht über die dabei ermittelten 12 Kategorien befindet sich in Tabelle 136. Die ersten drei Kategorien, die Interpretationen als Steigung oder als Änderungsrate enthalten, sind selbst-erklärend und brauchen keine weitere Beschreibung. Zu den Kategorien 4.-12. befindet sich eine detaillierte Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen in Tabelle 137.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
M1.	Steigung der Funktion
M2.	Steigung der Tangente
M3.	Änderungsrate
M4.	Ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn
M5.	Falsche Ökonomische Interpretation
M6.	Quasi-Ökonomische Interpretation
M7.	Steigung der Ableitung
M8.	Extremstelle der Funktion
M9.	Andere falsche Interpretation
M10.	Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$
M11.	Rechnung
M12.	Keine gültige Antwort

Tabelle 136: Kategoriensystem zur Aufgabe eine mathematische Interpretation von $G'(73) = 0,2$ einer Gewinnfunktion G anzugeben

Die Kategorien M4-M6 beinhalten ökonomische Interpretation. Sie sind daher als Antworten auf die Frage eine *mathematische Interpretation* der Ableitung anzugeben, nicht korrekt. Eine Erläuterung bedarf hierbei die Kategorie M6 („Quasi-Ökonomische Interpretation“). Hier wurden Antworten einsortiert, bei denen die übliche ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn der nächsten oder der nächsten *marginalen* Einheit einfach dekontextualisiert wurde in der Form „Wenn man x um eine Einheit erhöht, so erhöht sich der y -Wert um 0,2 Einheiten.“

Die Antworten in den Kategorien M7-M9 beinhalten weitere falsche mathematische Interpretationen. Bei den Kategorien M10-M12 wurde gar keine Interpretation angegeben.

Überprüfung der Intercoderreliabilität: Bei dieser Aufgabe ergab sich bei der Recodierung der ersten 200 Antworten durch den bei der Überprüfung der Intercoderreliabilität bereits genannten Korrektor der Lehrveranstaltung für Cohen's Kappa ein Wert von $\kappa = 0.87$. Dies ist sehr gut.

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
M4. Ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn	Es wird eine ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn für eine oder eine marginale Einheit angegeben.	<i>„Ändert man, ausgehend von 73 ME, den Output um 1 marginale Einheit, so ändert sich der Gewinn um +0,2 GE.“</i>
M5. Falsche ökonomische Interpretation	Es wird eine falsche ökonomische Interpretation von $G'(73) = 0,2$ angegeben.	<i>„Bei der Produktion von 73 Einheiten entsteht ein Output von 0,2 Einheiten.“</i>
M6. Quasi-ökonomische Interpretation	Die ökonomische Interpretation als Zusatzgewinn wird dekontextualisiert. Das heißt es wird angegeben, dass die Funktion um 0,2 Einheiten wächst, wenn man x um eine oder eine marginale Einheit erhöht.	<i>„Erhöht man den x-Wert an der Stelle 73 um eine Einheit erhöht sich der y-Wert um 0,2.“</i>
M7. Steigung der Ableitung	$G'(73)$ wird als Steigung der Ableitung oder Steigung des Grenzgewinns interpretiert.	<i>„Die Ableitung der Gewinnfunktion hat an der Stelle $x = 73$ eine Steigung von 0,2.“</i>
M8. Extremstelle der Funktion	Es wird gesagt, dass $G'(73) = 0,2$ bedeutet, dass an dieser Stelle ein Extremum bzw. der optimale Output x_{opt} vorliegt.	<i>„Die Gewinnfunktion hat an der Stelle $x = 73$ ein lokales Minimum.“</i>
M9. Andere falsche Interpretation	Es wird eine andere falsche mathematische Interpretation von $G'(73) = 0,2$ angegeben.	<i>„0,2 ist die Steigung der Tangenten an der Stelle $G'(73)$.“</i>
M10. Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$	Es wird lediglich verbalisiert, dass die Ableitung oder die Grenzgewinnfunktion an der Stelle $x = 73$ den Wert 0,2 hat.	<i>„An der Stelle $x = 73$ hat die Funktion G' einen Wert von 0,2.“</i>
M11. Rechnung	Es wird nur eine Rechnung und keine Interpretation angegeben.	<i>„$G(x) = E(x) - K(x)$, $x \geq 0$, $G'(x) = GE/ME$ durch Einsetzen von 73“</i>
M12. Keine gültige Antwort	Es wird keine gültige Antwort gegeben, was im Detail folgende Antwortvarianten umfasst: 1. Keine Antwort 2. Bruchstücke einer Antwort 3. (richtige) Antworten, die nichts mit der Aufgabe zu tun haben.	1. <i>„$G'(x)$ ist die erste Ableitung von $G(x)$.“</i> 2. <i>„Nullstellen“</i>

Tabelle 137: Beschreibung und Ankerbeispiele bei den Kategorien M4-M12 mit falschen Antworten aus Tabelle 136 zur Aufgabe eine mathematische Interpretation von $G'(73) = 0,2$ anzugeben

7.5.2 Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 2

Die Ergebnisse zur Aufgabe eine mathematische Interpretation von $G'(73) = 0,2$ anzugeben, sind in Abbildung 106 dargestellt.

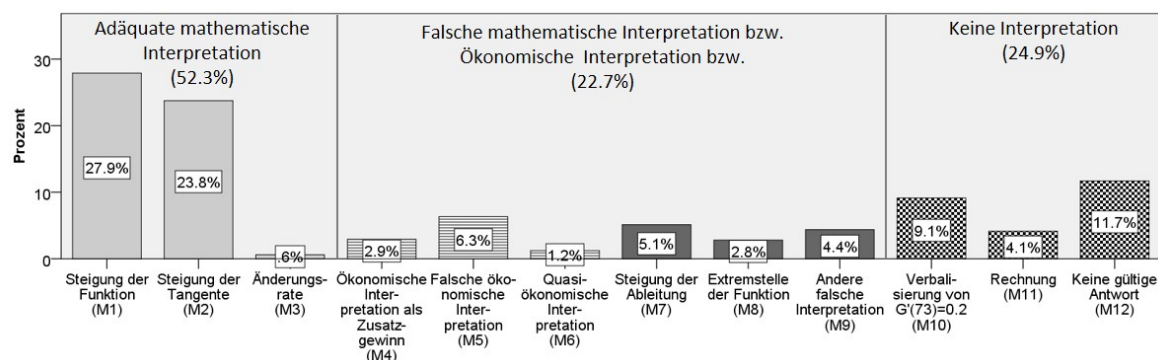


Abbildung 106: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe eine mathematische Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ einer Gewinnfunktion anzugeben ($N = 821$)

Aus der Graphik sind folgende wesentliche Sachverhalte erkennbar:

1. 52.3% konnten eine adäquate mathematische Interpretation der Ableitung angeben (Kategorien M1-M3). Hierbei wurde die geometrische Deutung gegenüber der Deutung als Änderungsrate klar bevorzugt genannt (51.7% versus 0.6%).
2. 10.4% gaben anstelle einer mathematischen eine ökonomische Interpretation an (Kategorien M4-M6).
3. 9.1% nannten lediglich eine Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$ mit Fachbegriffen für G' (als Ableitung oder Grenzgewinn, Kategorie M10).

Zu den Ergebnissen lässt sich folgendes sagen:

Zu 1.: Dass 52.3% eine adäquate mathematische Interpretation der Ableitung angeben konnten (Kategorien M1-M3), ist zunächst positiv. Dass hierbei die Interpretation als Steigung gegenüber der als Änderungsrate favorisiert wurde, lag vermutlich daran, dass in der analogen Übungsaufgabe, eine *mathematische Interpretation* von $K'(5) = 90$ bei einer Kostenfunktion anzugeben, als Musterlösung nur die geometrische Deutung als Steigung der Tangente genannt wurde (siehe Kapitel 7.2.2).

Zu 2.: Dass 10.4% anstelle einer mathematischen Interpretation der Ableitung eine ökonomische angaben (Kategorien M4-M6), wirft die Frage auf, ob sie keine mathematische Interpretation wussten, oder nicht verstanden haben, was mit einer *mathematischen Interpretation* gemeint war. Weil es aber eine genau wortgleiche Übungsaufgabe gab (siehe Kapitel 7.2.2), ist eher zu vermuten, dass diese Studierenden keine mathematische Interpretation kannten.

Sehr selten wurde hierbei eine sogenannte Quasi-ökonomische Interpretation angegeben (Kategorie M6, 1.2%), bei der die ökonomische Interpretation als

Zusatzgewinn zu einer Formulierung „Erhöhung von y bei Erhöhung von x um eine oder eine marginale Einheit“ dekontextualisiert wurde. Dies spricht dafür, dass die Studierenden eine Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion um eine Einheit oder eine marginale Einheit, an ökonomische Kontexte binden.

Zu 3.: Dass 9.1% der Studierenden lediglich eine Verbalisierung von $G'(73) = 0,2$ mit der Bezeichnung Grenzgewinn nannten (Kategorie M10), ist überraschend. Möglicherweise empfanden sie diese Bezeichnung von G' bereits als Interpretation. Dies könnte doch darauf hindeuten, dass die Formulierung *mathematische Interpretation* einigen Studierenden unklar war.

Insgesamt erkennt man aus den Daten, dass 52.3% der Klausurteilnehmer eine adäquate innermathematische Deutung der Ableitung angeben konnten (Kategorien M1-M3). Dies ist zunächst positiv, auch wenn die restlichen 47.5% durchaus auch einen Handlungsbedarf bei der Behandlung der Ableitung als innermathematisches Konzept zeigen. Allerdings könnten einige falsche Antworten auch an der Aufgabenstellung gelegen haben, wenn Studierende nicht wussten, was unter einer *mathematischen Interpretation* zu verstehen ist. Um das herauszufinden hätten weitere Aufgaben zum Verständnis der Ableitung als pures mathematisches Konzept gestellt und analysiert werden müssen. Da aber das Ziel der Studie nicht die Überprüfung des Verständnisses der Ableitung als pures mathematisches Konzept war, sondern herausgefunden werden sollte, inwiefern die Studierenden die *ökonomische Interpretation* der Ableitung in ihr *concept image* integriert haben und insbesondere eine adäquate Verbindung zwischen dem mathematischen Konzept und der ökonomischen Interpretation schlagen konnten, wurde darauf aus Aufwandsgründen verzichtet.

7.6 Auswertung der Aufgabe zur näherungsweise Bestimmung von Zusatzkosten durch lineare Approximation (Aufgabe 3)

Die Aufgabe war es, bei gegebenen Werten einer Kostenfunktion K ($K(5) = 10$ GE, $K'(5) = 0,5$ GE/ME) näherungsweise die Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um zwei Mengeneinheiten zu bestimmen. Außerdem sollte die Einheit dieser Zusatzkosten angegeben werden. Die Studierenden waren mit diesem Aufgabentyp ebenfalls vertraut, denn es gab eine wortgleiche Übungsaufgabe in der Lehrveranstaltung (siehe Kapitel 7.2.2).

7.6.1 Analyse der Daten zu Aufgabe 3

Auch bei dieser Aufgabe erfolgte eine Kategorisierung der Antworten. Da es das Ziel der Aufgabe war, herauszufinden, ob die Studierenden auf prozeduraler Ebene einen Zusammenhang zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten über lineare Approximation herstellen können, fand die Kategorisierung auf Basis des gewählten Lösungsweges statt (Rechenfehler wurden ignoriert). Die Kategorienbildung erfolgte wieder induktiv. Dies führte schließlich zu einem System von acht Kategorien (siehe Tabelle 139). Eine genaue Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen für die jeweils benutzten Lösungsansätze befindet sich in Tabelle 138.

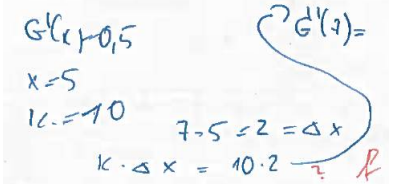
Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiel
L1. Lineare Approximation	Die Aufgabe wird korrekt über lokale lineare Approximation gelöst. In der Lösung wird deutlich, dass das Ergebnis nur eine Näherung ist.	1. Ansatz: $\Delta K \approx K'(x)\Delta x$ 2. $2 \cdot 0,5 = 1$ Antwort: <i>Es entstehen zusätzliche Kosten von näherungsweise 1 GE.</i>
L2. Lineare Approximation als Gleichheit	Die Aufgabe wird über lokale lineare Approximation gelöst, wobei in der Lösung nicht deutlich wird, dass das ermittelte Ergebnis eine Näherung ist.	1. Ansatz: $K(7) = \Delta x \cdot K'(5) + K(5)$ 2. $10 + 2 \cdot 0,5 = 11$ <i>Zusätzliche Kosten:</i> $11 - 10 = 1 \text{ GE}$
L3. Rechnung mit Tangentialfunktion	Es wird mit der Tangentialfunktion (in der Übung mit L bezeichnet) gerechnet, aber kein Bezug zur Kostenfunktion K hergestellt.	Ansatz: $L(x) = 10 + 0,5(7 - 5)$
L4. Falsche Approximationsformel	Es wird als Ansatz eine falsche Approximationsformel verwendet.	Ansatz: $K(x) - K(5) \approx K'(x)(x - 5)$
L5. Globale Linearitäts- oder Proportionalitätsannahme	Bei der Lösung der Aufgabe wird von einer linearen Kostenfunktion $K(x) = ax + b$ oder sogar von Proportionalität ausgegangen.	$K(5) = 10, K'(5) = 0,5$ $K(x) = 0,5x + 7,5$ $K(7) = 11$ $K(7) - K(5) = 1$
L6. Chaotischer Rechenweg zum ermittelten Ergebnis	Es wird ein chaotischer Rechenweg zum ermittelten Ergebnis angegeben, der 1. mathematische Fehler abseits von Rechenfehlern enthält oder 2. mathematische Ausdrücke enthält, die es nicht gibt oder 3. nicht nachvollziehbar ist.	$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $= \frac{f(5+2)-f(5)}{2}$ $= \frac{(10+2)-10}{2} = 1$
L7. Ergebnis ohne Rechenweg	Es wird ein Ergebnis ohne Rechenweg angegeben.	1 (Nr.87)
L8. Keine sinnvolle Antwort	Es gibt <i>kein Ergebnis und keinen sinnvollen Ansatz</i> zur Lösung der Aufgabe.	

Tabelle 138: Beschreibung der Kategorien und Ankerbeispiele bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
L1.	Korrekte lineare Approximation
L2.	Lineare Approximation als Gleichheit
L3.	Rechnung mit Tangentialfunktion
L4.	Falsche Approximationsformel
L5.	Globale Linearitäts- oder Proportionalitätsannahme
L6.	Chaotischer Rechenweg zum ermittelten Ergebnis
L7.	Ergebnis ohne Rechenweg
L8.	Keine sinnvolle Antwort

Tabelle 139: Kategorien der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$

Studierende der ersten Kategorie „Lineare Approximation“ haben den für die Aufgabe korrekten Weg über lineare Approximation gewählt. Die Kategorien L2-L3 enthalten ebenfalls einen korrekten Lösungsweg, aber mit Mängeln. Studierende der Kategorie L2 („Lineare Approximation als Gleichheit“) nutzten zwar auch den Ansatz der linearen Approximation. Sie machten aber weder in ihrem Lösungsweg noch in der Antwort deutlich, dass hier nur eine Näherungslösung ermittelt wurde. Studierende der Kategorie L3 („Rechnung mit Tangentialfunktion“) nutzten ebenfalls die lineare Approximation über die Tangentialfunktion (in der Übung mit L bezeichnet). Sie stellten in ihrer Lösung aber keinen Bezug zur Kostenfunktion K her.

Die Kategorien L4-L6 beinhalten schließlich falsche Lösungsansätze, z.B. die Verwendung falscher Approximationsformeln (Kategorie L4) oder die Annahme von globaler Linearität von K oder sogar von Proportionalität (Kategorie L5). Die Kategorien L7-L8 beinhalteten Antworten ohne erkennbaren sinnvollen Rechenweg. Bei den Probanden in Kategorie L7 („Ergebnis ohne Rechenweg“) wurde zwar ein Ergebnis aber kein Rechenweg dargestellt. Bei den Probanden in Kategorie L8 („Keine sinnvolle Antwort“) war gar kein sinnvoller Lösungsansatz erkennbar.

Überprüfung der Intercoderreliabilität: Bei der Recodierung der ersten 250 Antworten ergab sich für den Koeffizienten Cohen’s Kappa der Wert $\kappa = 0.86$. Dies ist sehr gut.

Zusätzliche Kategorisierung der Einheiten: Neben einer Zahl sollten die Studierenden auch noch die Einheit der ermittelten Zusatzkosten angeben. Das zugehörige Kategoriensystem ergab sich in natürlicher Weise daraus, welche Einheiten die Studierenden angegeben haben. Diese waren: (1) GE, (2) $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$, (3) $\frac{\text{GE}}{\text{ME}^2}$, (4) ME und (5) $\frac{\text{ME}}{\text{GE}}$. Daneben gab es noch eine Restekategorie, wenn beispielsweise eine Zahl als Einheit eingetragen wurde. Da die Zuordnung hier eindeutig war, war die Bestimmung einer Intercoderreliabilität nicht notwendig.

7.6.2 Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 3

In Abbildung 107 ist dargestellt, wie die Studierenden die Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von 5 auf 7 Einheit lösten (gegebene Werte der Kostenfunktion: $K(5) = 10$, $K'(5) = 0,5$).

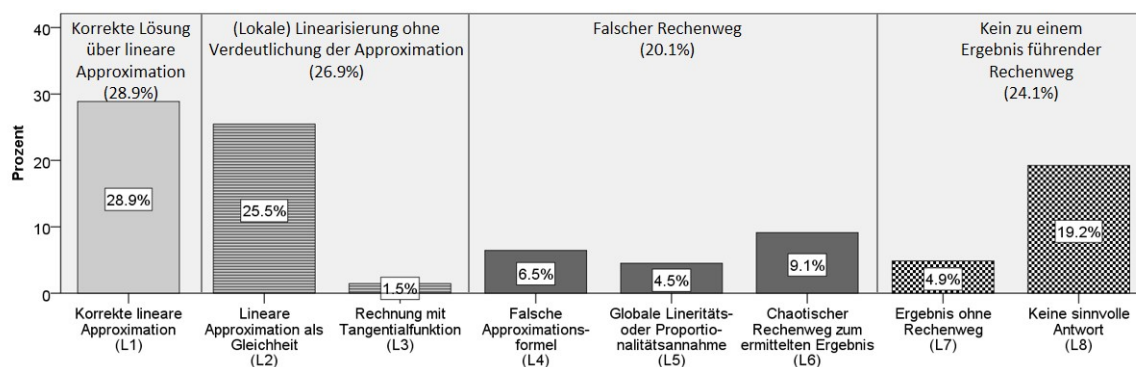


Abbildung 107: Rechenwege der Studierenden bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ ($N = 821$)

Aus der Graphik sind folgende Ergebnisse erkennbar:

1. 55.9% der Studierenden lösten die Aufgabe über lokale lineare Approximation (Kategorien L1-L3).
2. 26.9% machten allerdings in ihrer Lösung nirgends deutlich, dass hier nur eine Näherungslösung berechnet wurde (Kategorien L2-L3). 20.3% schrieben die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ sogar als Gleichung.
3. 39.3% der Studierenden konnten die Aufgabe nicht sinnvoll lösen (Kategorien L4-L6 und L8).

Zu den Einzelergebnissen lässt sich folgendes sagen:

Zu 1.: Dass 55.9% der Studierenden die Zusatzkosten mit Hilfe linearer Approximation bestimmen konnten (Kategorien L1-L3), ist zunächst erfreulich. Ein ähnlich gutes Ergebnis konnte in der Literatur nicht gefunden werden. So wurde zum Beispiel in der bereits in Kapitel 4.2.1 zitierten Studie von Bingolbali u. Monaghan (2008) zur Untersuchung des *concept image* von Studierenden der Mathematik und des Maschinenbaus eine sehr ähnliche Aufgabe gestellt. Dort sollten die Studierenden $f(5.08)$ so genau wie möglich bei gegebenen Werten $f(5)$ und $f'(5)$ bestimmen (diese sollten zuvor aus einer Graphik mit Tangente bestimmt werden, genaue Beschreibung der Studie siehe Kapitel 4.2.1). Nur 34% der dort untersuchten Mathematikstudierenden einer türkischen Universität konnten diese Aufgabe nach Besuch ihres Calculus-Kurses lösen, obwohl lineare Approximation in ihrem Kurs behandelt wurde (siehe Tabelle 23).

Zu 2.: Dass 26.9% der Studierenden in ihrer Lösung nicht deutlich machten, dass es sich um eine Approximation handelt (Kategorien L2-L3), könnte einerseits

durch Oberflächlichkeit verursacht worden sein. Es könnte aber auch darauf hindeuten, dass einigen der 55.9%, die die Zusatzkosten mit Hilfe linearer Approximation bestimmen konnten, der genaue Zusammenhang zwischen den exakten Zusatzkosten und der durch ihre Rechnung bestimmten Näherungslösung nicht klar war. Insbesondere für die 20.3%, die die Formel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ als Gleichung hingeschrieben haben (die Aussage ist streng genommen mathematisch falsch), ist zu vermuten, dass ihnen die Idee hinter dieser Approximationsformel nicht bewusst war.

Zu 3.: Bei den falschen Lösungen gab es eine große Vielfalt. Typische Fehler waren: (1) die Verwendung einer falschen Approximationsformel (Kategorie L4, 6.5% der Fälle), oder (2) eine globale Linearitätsannahme für K oder gar eine Proportionalitätsannahme (Kategorie L5, 4.5% der Fälle). Eine Reihe von Lösungen war auch überhaupt nicht nachvollziehbar oder völlig falsch, selbst wenn sie zum richtigen Ergebnis führten. Ein Beispiel ist folgende Rechnung:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(5 + 2) - f(5)}{2} = \frac{(10 + 2) - 10}{2} = 1. \quad (113)$$

Solche Lösungen dürften nach einem Semester „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ eigentlich nicht mehr in großer Zahl auftauchen. Dennoch hatten 9.1% der Fälle einen ähnlich chaotischen Rechenweg (Kategorie L6).

Insgesamt ist es dennoch erstmal positiv zu sehen, dass 55.9% die lineare Approximation zur approximativen Bestimmung der Zusatzkosten nutzen konnten, zum Beispiel über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$. Allerdings haben 26.9% in ihrer Lösung nirgends deutlich gemacht, dass hier nur eine Approximation bestimmt wurde. Das deutet darauf hin, dass vielen dieser 55.9% der Zusammenhang zwischen den exakten Zusatzkosten und dem von ihnen ermittelten Ergebnis über lineare Approximation nicht klar war.

Zur zusätzlichen Kategorisierung der Einheiten: Die von den Studierenden angegebenen Einheiten sind in Abbildung 108 dargestellt.

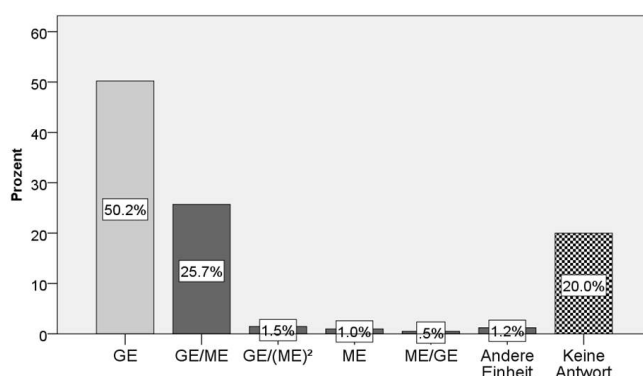


Abbildung 108: Angegebene Einheit der Zusatzkosten bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ ($N = 821$)

Die Ergebnisse aus Abbildung 108 sind erstmal verwunderlich. Immerhin haben 28.9% eine falsche Einheit für die Zusatzkosten angegeben, obwohl dies eigentlich kein Problem darstellen dürfte. Leider können durch diese quantitative Studie hier keine Gründe dafür herausgefunden werden.

7.7 Auswertung der Aufgabe 4 zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Zusatzkosten

Die letzte der vier Klausuraufgaben war es, zu begründen, weshalb die in Aufgabe 3 ermittelte Näherungslösung zur Approximation der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von 5 auf 7 Einheiten nicht exakt ist. Die genaue Aufgabenstellung war:

Begründen sie, warum der in Aufgabe 3 ermittelte Näherungswert die zusätzlichen Produktionskosten nicht für jede Kostenfunktion exakt angeben wird, z.B. für quadratische Kostenfunktionen.

Eine solche Aufgabe gab es in der Vorlesung oder der Übung nicht. Für ihre Lösung musste der in der Vorlesung vermittelte Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten verstanden worden sein.

In Anbetracht des in der Vorlesung vermittelten Wissens zum Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x)h$ (siehe Kapitel 7.2.2) wären hier prinzipiell zwei Argumentationen möglich:

1.Weg: Argumentation über die symbolische Ebene:

Die Näherungsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ ergibt sich aus der Definition der Ableitung $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$. Da die Ableitung aber im Allgemeinen nur eine Approximation des Differenzenquotienten bzw. der Differenzenquotient nur eine Approximation der Ableitung ist, ist $K'(x) \cdot h$ auch nur eine Approximation der Zusatzkosten $K(x+h) - K(x)$.

2.Weg: Argumentation über die graphische Ebene:

Die rechte Seite der Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ entspricht dem Zuwachs der Kosten auf der Tangente der Kostenfunktion K an der Stelle x . Dieser ist im Falle einer nichtlinearen Kostenfunktion nicht der Gleiche wie der Zuwachs auf der Ausgangsfunktion.

7.7.1 Analyse der Daten zu Aufgabe 4

Auch die Antworten zu dieser Aufgabe wurden kategorisiert. Die Kategorienbildung erfolgte wieder induktiv. Dabei ergaben sich die in Tabelle 140 dargestellten 11 Kategorien. Eine genaue Beschreibung der Kategorien mit Ankerbeispielen befindet sich in Tabelle 141.

Nr. der Kategorie	Name der Kategorie
N1.	Tangentenargument
N2.	Konstante Steigung bei Approximationsansatz
N3.	Differenzenquotient nur Approximation der Ableitung
N4.	Exaktheit nur bei linearen Funktionen
N5.	Fehler wegen Grenzübergang, aber mit falscher Argumentation
N6.	Quadrieren ist Fehlerursache
N7.	Andere falsche Begründung
N8.	Pseudobegründung
N9.	Aussage „Differenz ist exakt“ ohne Argument
N10.	Andere Antwort ohne Argument
N11.	Keine Antwort

Tabelle 140: Kategorien der Antworten zur Begründungsaufgabe, weshalb die Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch die Approximation $K'(5)(7-5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
N1. Tangentenargument	Es wird dargestellt, dass hier nur die lineare Näherung entlang der Tangente bei $x = 5$ verwendet wird. Auch eine Skizze genügt.	<i>„Der Näherungswert wird an der Tangente abgelesen, daher ist er nicht exakt.“</i>
N2. Konstante Steigung bei Approximationsansatz	Es wird begründet, dass das Ergebnis nicht exakt ist, weil bei dem Approximationsansatz von einer konstanten Steigung oder konstanten Grenzkosten ausgegangen wird.	<i>„Der verwendete Näherungswert geht von einer Steigung aus, die immer gleich ist (im Bsp. $0,5 \left[\frac{GE}{ME}\right]$).“</i>
N3. Differenzenquotient nur Approximation der Ableitung	Es wird erklärt, dass die Näherung auf der Approximation der Ableitung durch den Differenzenquotienten beruht, die im Allgemeinen nicht exakt ist.	<i>„Die Formel für die zusätzlichen Kosten basiert auf dem Differenzenquotienten, der ebenfalls nur eine Näherungsformel ist.“</i>
N4. Exaktheit nur bei linearen Funktionen	Es wird gesagt, dass man bei dem Approximationsansatz von einer linearen Funktion ausgeht bzw. sie nur bei linearen Funktionen exakt ist. Allerdings fehlt eine Begründung, weshalb das Ergebnis bei nichtlinearen Funktionen im Allgemeinen nicht exakt ist.	<i>„Dieser Näherungswert gilt nur für linear verlaufende Kostenfunktionen. Eine quadratische Kostenfunktion verläuft nicht linear.“</i>
N5. Fehler wegen Grenzübergang, aber mit falscher Argumentation	Der Fehler wird mit dem Grenzübergang vom Differenzenquotienten zur Ableitung begründet, aber mit mathematisch falschem Argument.	<i>„Die Ableitung $f'(x)$ ist nichts anderes als ein Grenzwert von Differenzquotienten. Sie haben keinen richtigen Zahlenwert. x_0 ist nur ein Ausgangspunkt. Daher berechnet man nur näherungsweise.“</i>

Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiele
N6. Quadrieren ist Fehlerursache	Es wird angegeben, dass der Fehler zwischen Näherungswert und exakten Zusatzkosten durch Quadrieren zustande kommt.	<i>„Bei einer quadratischen Kostenfunktion wird der ungefähre Wert quadriert, somit geht der Näherungswert noch weiter auseinander von dem exakten Wert.“</i>
N7. Andere falsche Begründung	Es wird eine andere falsche Begründung gegeben.	<i>„Der Näherungswert wird keine exakten Produktionskosten angeben, da keine richtige Funktion gegeben ist, sodass man nur Näherungsweise an die Sache rangehen kann.“</i>
N8. Pseudobegründung	Es wird angegeben, dass die Approximation eben nur eine Näherung ist und Näherungen niemals exakt sind (sozusagen per Definition von „Näherung“). Dies ist aber kein mathematisches Argument .	<i>„Da es sich um einen Näherungswert handelt ist keine exakte Angabe möglich.“</i>
N9. Aussage „Differenz ist exakt“ ohne Argument	Es wird ohne weiteres Argument angegeben, dass die Differenz den exakten Wert liefert.	<i>„Der exakte Wert ist die Differenz.“</i>
N10. Andere Antwort ohne Argument	In der Antwort lässt sich kein Argument für einen eventuellen Fehler zwischen Näherungslösung und exakten Zusatzkosten finden.	<i>„Mit der benutzten Formel wird nicht der exakte Wert errechnet.“</i>
N11. Keine Antwort	Es wird keine Antwort gegeben.	

Tabelle 141: Beschreibung der Kategorien der Antworten zur Begründung, weshalb die Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch die Approximation $K'(5)(7 - 5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist

Die ersten drei Kategorien beinhalten adäquate Begründungen für die Tatsache, dass der durch $K'(5)(7 - 5)$ ermittelte Näherungswert im Allgemeinen nicht exakt den Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ entspricht. Bei den Antworten in Kategorie N4 („Exaktheit nur bei linearen Funktionen“) wurde zwar erkannt, dass die Näherungsformel nur für lineare Funktionen exakt ist bzw. bei Verwendung der Näherungsformel von Linearität ausgegangen wird. Es wurde aber keine Begründung dafür angegeben, weshalb das Ergebnis bei nichtlinearen Funktionen im Allgemeinen nicht exakt ist.

Die Antworten der Kategorien N5-N7 beinhalten falsche Argumente für den Fehler zwischen dem Näherungswert und den exakten Zusatzkosten. In den Antworten der Kategorien N8-N11 wurden keine Argumente genannt.

Überprüfung der Intercoderreliabilität: Hier ergab sich nach Recodierung der ersten 250 Antworten der Reliabilitätskoeffizient $\kappa = 0.85$. Dies ist sehr gut (insbesondere unter Anbetracht des Umfanges einiger Antworten).

7.7.2 Ergebnisse der Analyse der Antworten von Aufgabe 4

Die Antworten der Studierenden, weshalb die Bestimmung der Zusatzkosten bei der Erhöhung der Produktion von 5 auf 7 Einheiten durch die Approximation $K'(5)(7 - 5)$ (K ist eine Kostenfunktion) im Allgemeinen nicht exakt ist, sind in Abbildung 109 dargestellt.

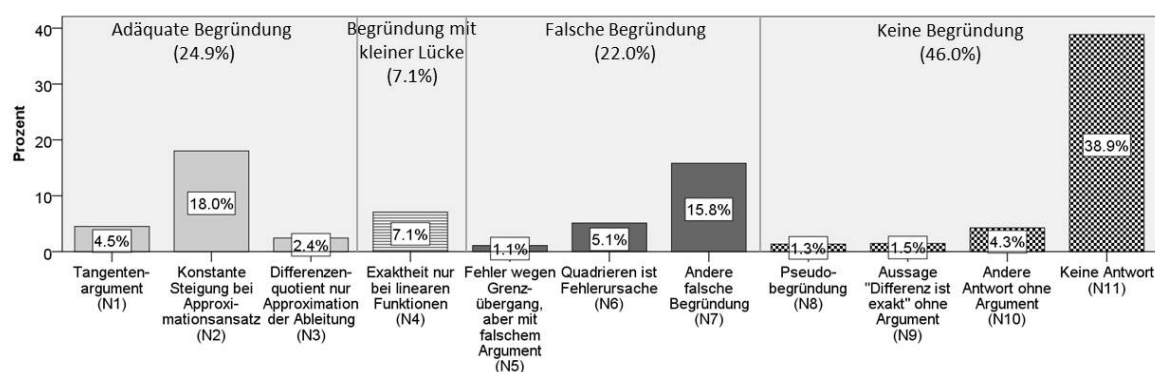


Abbildung 109: Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur Begründung, weshalb die approximative Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch $K'(5) \cdot (7 - 5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist ($N = 821$)

Aus der Graphik sind folgende Ergebnisse erkennbar:

- 24.9% der Studierenden konnten adäquat begründen, weshalb es im Allgemeinen einen Fehler zwischen dem Approximationsansatz und den exakten Zusatzkosten gibt (Kategorien N1-N3). Weitere 7.1% erkannten richtig, dass der Ansatz nur im linearen Fall exakt ist, nannten aber keine Begründung dafür (Kategorie N4).
- Auch wenn in der Vorlesung der Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten zunächst auf symbolischer Ebene mit Hilfe der Definition der Ableitung hergestellt wurde (siehe Kapitel 7.2.2), nannten nur 2.4% der Studierenden hier diesen Zusammenhang als Begründung dafür, dass der mit der Approximation $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ bestimmte Näherungswert im Allgemeinen nicht exakt ist (Kategorie N3).
- 22.0% nannten eine falsche Begründung, weshalb die in Aufgabe 3 ermittelte Approximation im Allgemeinen nicht exakt ist (Kategorien N5-N7). 46.0% konnten keine Begründung nennen (Kategorien N8-N11).

Zu den Ergebnissen lässt sich Folgendes sagen:

Zu 1.: Dieser Anteil ist schon wesentlich geringer als die 55.9%, die in Aufgabe 3 die Zusatzkosten mit Hilfe der linearen Approximation bestimmen konnten (siehe Abbildung 107). Das spricht dafür, dass eben doch weitaus weniger den Zusammenhang hinter der Approximationsformel $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ verstanden haben, als die 55.9%, welche die lineare Approximation auf prozeduraler Ebene anwenden konnten.

Zu 2.: Dass nur 2.4% als Ursache für einen Approximationsfehler den Zusammenhang zwischen Ableitung und Differenzenquotient nannten, obwohl in der Vorlesung darüber die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ hergeleitet wurde (siehe Kapitel 7.2.2), zeigt, dass dieser Zugang zum Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten für die meisten Studierenden wenig zugänglich war.

Zu 3.: Es wurden sehr viele falsche Argumentationen gebracht, weshalb das mit dem Ansatz $K'(x) \cdot h$ ermittelte Ergebnis nicht die exakten Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ angibt. Das häufigste falsche Argument war das Nennen des Quadrierens als Ursache für den Fehler zwischen den exakten Zusatzkosten und dem in Aufgabe 3 ermittelten Näherungswert (in 5.1% der Fälle, Kategorie N6). Hier kamen teilweise Fehlvorstellungen zu elementarer Arithmetik zum Vorschein, wie die Annahme, dass durch das Quadrieren der Fehler zwischen Näherungswert und exakten Zusatzkosten groß wird.

Dass 38.9% der Studierenden gar keine Antwort nennen konnten (Kategorie N11), deutet auch darauf hin, dass viele Studierenden der Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten nicht klar war.

Insgesamt zeigen somit die Ergebnisse dieser Aufgabe, dass weitaus weniger Studierende den Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten über lineare Approximation verstanden haben, als die 55.9%, die ihn für die approximative Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ nutzen konnten (siehe Abbildung 107). Nur 24.9% zeigten bei der Begründung, weshalb der Approximationsansatz $K(7) - K(5) \approx K'(5) \cdot 2$ im Allgemeinen nicht die exakten Zusatzkosten liefert, dass sie diesen Ansatz konzeptuell auf eine der beiden Arten verstanden haben:

1. als lineare Approximation des echten Kostenwachses mit der Steigung $K'(5)$ (Kategorien N1 und N2) oder
2. als Ansatz, der sich durch die Approximation der Ableitung durch den Differenzenquotienten ergibt (Kategorie N3).

7.7.3 Aufgabenübergreifende Analyse der Daten

Für eine aufgabenübergreifende Analyse der Aufgaben wurden in Abhängigkeit der Antworten Punkte vergeben. Das Punkteschema ist in Tabelle 142 dargestellt.

Aufgabennummer	Aufgabe	Bewertungsschema für Punktevergabe
1	Ökonomische Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$	• 1 Punkt bei vollkommen adäquater ökonomischer Interpretation als 1. <i>ungefährer</i> Zusatzgewinn der nächsten Einheit oder als 2. Zusatzgewinn der nächsten <i>marginalen</i> Einheit oder als 3. Wachstumsrate des Gewinns • noch 0.5 Punkte bei Formulierungen mit kleinen Mängeln (wenn nicht von <i>ungefährtem</i> Zusatzgewinn der nächsten Einheit oder von Zusatzgewinn der nächsten <i>marginalen</i> Einheit gesprochen wurde, oder wenn der Zusatzgewinn in GE/ME angegeben wurde)
2	Mathematische Interpretation von $G'(73) = 0.2$	1 Punkt für eine adäquate mathematische Interpretation als Steigung oder als Änderungsrate (Kategorien M1-M3 in Tabelle 137)
3	Approximative Bestimmung von $K(7) - K(5)$ bei gegebenen Werten $K(5) = 10$, $K'(5) = 0.5$	• 1 Punkt bei korrekter Lösung mit linearer Approximation <i>und</i> Verdeutlichung, dass das Ergebnis eine Approximation ist (Kategorie L1 in Tabelle 138) • noch 0.5 Punkte bei Lösung mit linearer Approximation, aber <i>ohne</i> Verdeutlichung, dass die Lösung nur eine Approximation ist (Kategorien L2-L3 in Tabelle 138)
4	Begründung, dass der Näherungswert aus Aufgabe 3 im Allgemeinen nicht exakt ist	1 Punkt bei korrekter Begründung (Kategorien N1-N3 in Tabelle 141), aber auch bereits bei der Erkenntnis, dass der Ansatz nur für lineare Funktionen exakt ist (Kategorie N4 in Tabelle 141), damit das Bewertungsschema über alle Aufgaben hinweg nicht zu komplex wird

Tabelle 142: Bewertungsschema für eine aufgabenübergreifende Analyse

7.7.4 Ergebnisse der aufgabenübergreifende Analyse

Die genaue Verteilung der Punkte mit obigem Bewertungsschema auf die einzelnen Aufgaben ist in Tabelle 143 dargestellt.

Zeile	A1	A2	A3	A4	Anzahl	Anteil ($N = 821$)
1	0	0	0	0	146	18.1%
2	0	0	0	1	24	2.9%
3	0	0	0.5	0	29	3.5%
4	0	0	0.5	1	14	1.7%
5	0	0	1	0	31	3.8%
6	0	0	1	1	13	1.6%
7	0	1	0	0	47	5.7%
8	0	1	0	1	15	1.8%
9	0	1	0.5	0	15	1.8%
10	0	1	0.5	1	6	0.7%
11	0	1	1	0	17	2.1%
12	0	1	1	1	10	1.2%
13	0.5	0	0	0	19	2.3%
14	0.5	0	0	1	9	1.1%
15	0.5	0	0.5	0	14	1.7%
16	0.5	0	0.5	1	11	1.3%
17	0.5	0	1	0	6	0.7%
18	0.5	0	1	1	7	0.9%
19	0.5	1	0	0	22	2.7%
20	0.5	1	0	1	12	1.5%
21	0.5	1	0.5	0	23	2.8%
22	0.5	1	0.5	1	22	2.7%
23	0.5	1	1	0	34	4.1%
24	0.5	1	1	1	29	3.5%
25	1	0	0	0	18	2.2%
26	1	0	0	1	3	0.4%
27	1	0	0.5	0	15	1.8%
28	1	0	0.5	1	7	0.9%
29	1	0	1	0	16	1.9%
30	1	0	1	1	7	0.9%
31	1	1	0	0	32	3.9%
32	1	1	0	1	13	1.6%
33	1	1	0.5	0	40	4.9%
34	1	1	0.5	1	25	3.0%
35	1	1	1	0	31	3.8%
36	1	1	1	1	36	4.4%

Tabelle 143: Punkte der Studierenden bei der aufgabenübergreifenden Analyse bei Bewertung jeder Aufgabe mit maximal einem Punkt

Man sieht aus Tabelle 143, dass 18.1% der Probanden überhaupt keinen Punkt erreicht haben. Nur 4.4% haben alle Aufgaben richtig beantwortet. Aber immerhin konnten 37.6% der Studierenden eine adäquate mathematische Interpretation der Ableitung

und eine im Wesentlichen adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung (abgesehen von Formulierungsmängeln) angeben (Zeilen 19-24, 31-36). Allerdings ist die Kenntnis beider Interpretationen nicht hinreichend dafür, dass die Studierenden auch eine Verbindung zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten herstellen können. 17.2% der Probanden konnten eine korrekte mathematische und eine vollkommen adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung angeben, aber keine Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten über lineare Approximation herstellen (Zeilen 31-35, 141 Studierende).

Umgekehrt ist die Kenntnis beider Interpretationen aber schon notwendig dafür, dass die Verbindung zwischen dem mathematischen Konzept der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation über lineare Approximation adäquat geschlagen werden kann. Dies zeigt sich auch empirisch. Nur 6.2% der Probanden haben in den ersten beiden Interpretationsaufgaben 0 Punkte erreicht, konnten aber dennoch eine Begründung dafür angeben, weshalb das in Aufgabe 3 ermittelte Ergebnis nicht exakt ist (51 Probanden, Zeilen 2,4,6).

Insgesamt liefert die aufgabenübergreifende Analyse aber keine weiteren wichtigen Erkenntnisse. Denn abseits der 18.6%, die überhaupt keinen Punkt erreicht haben, ist keine Clusterung der Studierenden bei einer bestimmten Punkteverteilung erkennbar, durch welche sich die Population in Teilgruppen mit verschiedenen Kompetenzstufen zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung und des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Zusatzkosten zerlegen lässt. Eine Ursache dafür könnte sein, dass die ersten beiden Interpretationsaufgaben allein durch Lernen der entsprechenden Formulierungen lösbar waren, und die dritte durch das Einprägen des Approximationsansatzes $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$. Wären alle Aufgaben reine Verständnisaufgaben gewesen, die umfangreiche Erläuterungen erfordert hätten, hätten sich vielleicht stärkere Clusterungen bei bestimmten Punkteverteilungen ergeben. Vier umfangreiche Verständnisaufgaben mit Erläuterungen zu stellen, wäre aber aus ökonomischen Gründen wegen der großen Teilnehmerzahl bei der Klausur nicht möglich gewesen.

Allerdings deuten auch die Ergebnisse der aufgabenübergreifenden Analyse an, dass nur wenige Studierende die ökonomische Interpretation der Ableitung kannten *und* deren Zusammenhang zum mathematischen Konzept über lineare Approximation verstanden haben.

7.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der vier Klausuraufgaben und mögliche Konsequenzen für die Lehre

Ziel dieses Kapitels 7 war die Beantwortung folgender Forschungsfrage:

F4'. Inwieweit haben die Studierenden die ökonomische Interpretation der Ableitung nach Besuch der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ in ihr *concept image* zur Ableitung integriert?

Diese Frage wurde *exemplarisch* für Studierende der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ der Universität Paderborn beantwortet. Dazu wurden vier offene Klausuraufgaben zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und ihrer Verbindung zum mathematischen Konzept über lineare Approximation konstruiert

und am Ende des Wintersemesters 2015/16 eingesetzt. Die Lösungen der Studierenden wurden dann mit Hilfe der Inhaltsanalyse analysiert (Mayring, 2015), wobei jeweils die Häufigkeiten bestimmter Antworttypen gezählt wurden.

Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse aus der Analyse der vier Aufgaben zusammengefasst und Konsequenzen für Lehre vorgeschlagen.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollte eine ökonomische Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ angegeben werden. G ist hierbei eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit des produzierten Outputs.

Hierbei konnten 51.4% der Studierenden die in der Vorlesung vermittelte Interpretation der Ableitung $G'(x)$ als Zusatzgewinn der nächsten oder der nächsten *marginalen* Einheit nennen (Kategorie Ö1 in Abbildung 104). Bei ihnen war also diese ökonomische Interpretation Bestandteil ihres *concept images* zur Ableitung. Allerdings wiesen bei etwa der Hälfte dieser Studierenden die Formulierungen Mängel auf (siehe Tabelle 135): entweder wurde nicht adäquat verdeutlicht, inwiefern die Ableitung numerisch nur eine Approximation dieses Zusatzgewinns darstellt, oder der Zusatzgewinn wurde in der falschen Einheit $\left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ angegeben (siehe Tabelle 134).

Dies deutet darauf hin, dass viele dieser 51.4%, die die Ableitung als Zusatzgewinn interpretierten, die in der Vorlesung präsentierte Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation als Zuwachs der Funktion über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ bzw. über die zugehörige Gleichung $df = f'(x) dx$ (bei der Interpretation als Zusatzgewinn für eine *marginale* Einheit, siehe Kapitel 7.2.2) nicht genau verinnerlicht haben.

Außerdem nannten 30.1% der Studierenden der Gesamtkohorte falsche Interpretationen von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ (Kategorien Ö3-Ö9 in Abbildung 104), und 15.0% nannten gar keine ökonomische Interpretation (Kategorien Ö10-Ö12). Bei ihnen war die in der Vorlesung vermittelte ökonomische Interpretation der Ableitung gar nicht Bestandteil ihres *concept image* zur Ableitung.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Aufgabe 2: Die Aufgabe war es, den Wert $G'(73) = 0,2$ nun innermathematisch zu interpretieren.

Hierbei konnten 52.3% der Studierenden eine adäquate mathematische Interpretation der Ableitung als Steigung oder als Änderungsrate angeben (Kategorien M1-M3 aus Abbildung 106). Dabei wurde die Interpretation als Steigung klar gegenüber der als Änderungsrate bevorzugt (51.7% versus 0.6%).

Der Rest konnte keine adäquate mathematische Interpretation der Ableitung nennen. 10.4% nannten stattdessen eine ökonomische Interpretation (Kategorien M4-M6 aus Abbildung 106). 9.1% nannten lediglich eine Verbalisierung von $G'(73) = 0.2$ mit Hilfe der Begriffe *Ableitung* oder *Grenzwert*. Der Begriff des Grenzwerts wurde in der Vorlesung auch lediglich als Bezeichnung der Ableitung (also als Definition) eingeführt (siehe Kapitel 7.2.2), und ist damit im Sinne der Vorlesung keine Interpretation der Ableitung. Dass 9.1% als *mathematische Interpretation* der Ableitung lediglich eine Verbalisierung von G' nannten, deutet darauf hin, dass vielleicht einige Studierende nicht wussten, was mit einer *mathematischen Interpretation* der Ableitung gemeint war. Allerdings gab es in den Übungen zur Lehrveranstaltung eine völlig analoge Aufgabe (siehe Kapitel 7.2.2).

Zusammenfassung der Ergebnisse von Aufgabe 3: In dieser Aufgabe sollten die Studierenden bei gegebenen Werten $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ einer Kostenfunktion K näherungsweise die Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von 5 auf 7 Einheiten bestimmen.

Diese Aufgabe konnten 55.9% der Studierenden korrekt mit lokaler linearer Approximation lösen (Kategorien L1-L3 aus Abbildung 107). Dies ist ein sehr hoher Anteil im Vergleich zu anderen in der Literatur dokumentierten Ergebnissen zur Verwendung der Ableitung als lineare Approximation. So konnten zum Beispiel in einer Studie von Bingolbali u. Monaghan (2008) zur Untersuchung des *concept image* der Ableitung von Mathematik- und Ingenieursstudierenden bei einer analogen Aufgabe zur Bestimmung von $f(5.08)$ bei graphisch gegebenen Werten $f(5)$ und $f'(5)$ nur 34% der Mathematikstudierenden nach ihrem Calculus-Kurs diese Aufgabe lösen (siehe Tabelle 23), und das obwohl lineare Approximation explizit in ihrem Kurs behandelt wurde.

Allerdings machten bei unseren Studierenden 26.9% in ihrer nicht Lösung deutlich, dass das ermittelte Ergebnis nur eine Approximation ist (Kategorien L2-L3 in Abbildung 107). Insbesondere schrieben 20.3% der Probanden die Approximationsformel $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ sogar als Gleichung.

Insgesamt konnte also die Hälfte der Studierenden eine Verbindung zwischen der Ableitung und Zusatzkosten über lokale lineare Approximation auf prozeduraler Ebene herstellen. Allerdings deuten die Mängel in den Lösungen (keine Verdeutlichung, inwieweit das ermittelte Ergebnis nur eine Approximation ist) darauf hin, dass der Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten hinter der Approximationsformel konzeptuell oft *nicht* verstanden wurde.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Aufgabe 4: In der letzten Aufgabe sollte begründet werden, weshalb das in Aufgabe 3 ermittelte Ergebnis im Allgemeinen nicht die exakten Zusatzkosten angibt.

Dies gelang nur 24.9% der Studierenden (Kategorien N1-N3 aus Abbildung 109). Dabei wurden folgende adäquate Argumente gebracht:

1. 18.0% argumentierten, dass bei diesem Approximationsansatz von einer konstanten Steigung bzw. von konstanten Grenzkosten ausgegangen wird (Kategorie N2 aus Abbildung 109).
2. 4.5% argumentierten damit, dass der Approximationsansatz dem Zuwachs entlang der Tangente entspricht (Kategorie N1).
3. Nur 2.4% argumentierten mit dem Zusammenhang zwischen Ableitung und Differenzenquotient (Kategorie N3), der in der Vorlesung die Grundlage für die Herleitung des Approximationsansatzes $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ bildete.

Offenbar war die zuletzt genannte Art der Herstellung eines Zusammenhangs zwischen Ableitung und Zusatzkosten über den Differenzenquotienten für die Studierenden wenig zugänglich.

Weitere 22.0% der Studierenden nannten falsche Argumente (Kategorien N5-N7 aus Abbildung 109), und 46% konnten überhaupt keine Begründung nennen, weshalb das mit dem Approximationsansatz in Aufgabe 3 ermittelte Ergebnis im Allgemeinen nicht exakt ist (Kategorien N8-N11).

Dass diese Aufgabe nur etwa ein Viertel der Studierenden lösen konnten, spricht dafür, dass die klare Mehrheit der Studierenden den Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten über lineare Approximation konzeptuell nicht verstanden hat.

Zusätzliche Ergebnisse aus der aufgabenübergreifenden Analyse: Die aufgabenübergreifende Analyse mit Bewertung aller Aufgaben mit maximal einem Punkt (Bewertungsschema siehe Tabelle 142) zeigte weiterhin, dass immerhin 37.6% der Studierenden eine adäquate mathematische Interpretation und eine im Wesentlichen adäquate ökonomische Interpretation (mit eventuell kleinen Formulierungsmängeln) angeben konnten (Zeilen 19-24 und 31-36 in Tabelle 143). Allerdings war die Kenntnis dieser beiden Interpretationen nicht hinreichend dafür, um auch eine Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation schlagen zu können.

Weiterhin zeigte die aufgabenübergreifende Analyse, dass nur 4.4% der Studierenden alle Aufgaben korrekt lösen konnten, und 18.1% gar keine Aufgabe lösen können. Abseits dieser 18.1% war jedoch keine auffällige Clusterung von Studierenden bei einer bestimmten Punkteverteilung über die Aufgaben hinweg erkennbar (wenn man jede Aufgabe mit einem Punkt bewertet).

Kurzzusammenfassung der Ergebnisse der Analyse der Klausuraufgaben: Aus den Ergebnissen sieht man:

1. Bei der Mehrheit der Studierenden war zwar die in der Vorlesung vermittelte ökonomische Interpretation der Ableitung Bestandteil des *concept image* zur Ableitung. Allerdings deuteten Ungenauigkeiten in den Formulierungen vieler Studierender auf ein eher oberflächliches Verständnis dieser Interpretation bei diesen hin.
2. Die Mehrheit der Studierenden konnte zwar auf prozeduraler Ebene eine Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ herstellen. Allerdings haben weitaus weniger den Zusammenhang konzeptuell verstanden (sonst hätten sie begründen können müssen, weshalb die Approximation im Allgemeinen nicht exakt ist).
3. Nur sehr wenige Probanden (2.4%) gaben als Grund für den Fehler zwischen dem Approximationsansatz und den exakten Zusatzkosten den Zusammenhang zwischen Ableitung und Differenzenquotient an. Die anderen Probanden, die eine adäquate Begründung für diesen Fehler nannten, argumentierten über die Steigung der Funktion oder über die Tangente auf graphischer Ebene. Daher scheint der Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten auf graphischer Ebene den Studierenden zugänglicher zu sein.

Mögliche Konsequenzen für die Lehre:

1. Das Ergebnis, dass die Studierenden nur ein eher oberflächliches Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung hatten, spricht dafür, dass sich die Studierenden nicht tiefgründig mit dieser Verbindung in der Lehrveranstaltung

auseinandergesetzt haben. Eine Ursache könnte sein, dass sie selbst keinen Konflikt zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und der oft verwendeten ökonomischen Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit verspürt haben. Dies wiederum könnte daran liegen, dass die ökonomische Interpretation der Ableitung und ihre Verbindung zum mathematischen Konzept in der Vorlesung „straightforward“ eingeführt und gerechtfertigt wurde (siehe Kapitel 7.2.2).

Eine Alternative könnte daher sein, die Studierenden direkt mit der teils widersprüchlichen Praxis im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie (siehe Kapitel 2.2) zu konfrontieren, zum Beispiel mit Aufgaben wie:

„In ökonomischen Lehrbüchern steht oft: „Die Ableitung $K'(x)$ gibt die Zusatzkosten der nächsten Einheit an.“

Nehmen Sie auf Basis Ihres Wissens zum Ableitungskonzept aus der Vorlesung Stellung zu dieser Aussage!“

Diese Aufgabe könnte zum Beispiel der Dozent in der Vorlesung als Ausgangspunkt zur Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung stellen, und die Studierenden zunächst mit dem Nachbarn diskutieren lassen. Dann könnte er die Unterschiede zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit, und schließlich den Zusammenhang zwischen beiden über lokale lineare Approximation thematisieren.

Alternativ könnte man diese Aufgabe auch als Übungsaufgabe in einer Präsenz- oder Hausübung stellen, nachdem eine mathematisch adäquate ökonomische Interpretation der Ableitung behandelt wurde. Dann wird eventuell der kognitive Konflikt auch erzeugt.

2. Die zweite Konsequenz dieser Studie wäre, dass die Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation besser über lokale lineare Approximation auf der graphischen Ebene als über den symbolischen Weg über die Approximation $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h \approx 0$ geschlagen werden sollte. Denn letztere Verbindung schien für die Studierenden weniger zugänglich zu sein (optimal wäre natürlich die Verknüpfung beider Wege, wenn ausreichend Zeit vorhanden ist).

8 Konzeption und Auswertung einer Interviewstudie zur ökonomischen Interpretation der Ableitung

8.1 Ziel der Interviewstudie

Die letzte Forschungsfrage der Dissertation war:

F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Wie bereits mehrfach gesagt, wurde diese Frage exemplarisch bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn beantwortet und aus Umfangsgründen wurde hier Schwerpunkt auf das Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung gelegt. Denn diese ist für Studierende der Wirtschaftswissenschaften besonders relevant.

Am Ende einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ sollten Studierende der Wirtschaftswissenschaften diese in ihr *concept image* zur Ableitung integriert haben. Das heißt, sie sollten eine Verbindung zwischen ihr und dem restlichen *concept image* zur Ableitung geschlagen haben (siehe theoretisches Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Kapitel 3 in Abbildung 4). Dies ist eine Herausforderung, denn die Ableitung und die in der Ökonomie übliche Interpretation als Funktionszuwachs bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit sind verschiedene mathematische Objekte (genauere Ausführungen am Beispiel der Grenzkosten siehe Kapitel 3.3).

Inwiefern Studierende der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung die ökonomische Interpretation der Ableitung in ihr *concept image* zur Ableitung integriert haben, wurde bereits in Kapitel 7 durch die Analyse von Klausuraufgaben untersucht. Dabei ergab sich bei der Aufgabe zur Interpretation von $G'(73) = 0,2 \frac{[GE]}{[ME]}$ einer Gewinnfunktion, dass zwar über die Hälfte der Studierenden die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zusatzgewinn nennen konnte (siehe Abbildung 104). Bei 25.3% der Studierenden hatten die Formulierungen dieser Interpretationen als Zusatzgewinn aber Mängel (siehe Tabelle 135). So stellten 17.3% der Studierenden nicht adäquat dar, inwiefern $G'(x)$ nur eine Approximation des Zusatzgewinns angibt. 12.2% nannten die falsche Einheit $\frac{GE}{ME}$. Dies ist zwar die Einheit der Ableitung $G'(73)$, nicht aber die Einheit der Interpretation als Zusatzgewinn (die wäre $[GE]$). Diese beiden Tatsachen deuten darauf hin, dass vielen Studierenden der genaue Zusammenhang zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation (Unterschiede und Verbindung über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ bzw. über lokale lineare Approximation, siehe Kapitel 3.3) nicht klar war.

Dies wurde nun noch einmal genauer in einer Interviewstudie am Beispiel der Grenzkosten untersucht mit der folgenden Forschungsfrage F4' (Forschungsfrage F4' ist die genaue Forschungsfrage bei der Analyse der Klausuraufgaben in Kapitel 7):

F4". Inwiefern können die Studierenden nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ eine adäquate Verbindung zwischen dem mathematischen Konzept der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation herstellen, und welche Schwierigkeiten treten dabei auf?

Untersucht wurde das am prototypischen Beispiel der Grenzkosten $K'(x)$. Was genau *adäquate Verbindung* heißt, und wie die Forschungsfrage mit Hilfe einer Interviewstudie beantwortet werden soll, wird im nächsten Kapitel genauer dargestellt.

8.2 Konzept und Aufbau des Interviews

8.2.1 Aufbau und Konzept des Interviews als Ganzes

Ziel der Interviewstudie ist es, herauszufinden, inwieweit die Studierenden eine *adäquate Verbindung* zwischen der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion, in der Ökonomie mit Grenzkosten bezeichnet, und deren in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herstellen können. *Adäquate Verbindung* bedeutet:

- I. Den Studierenden sollte klar sein, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene eigentlich der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen, die sich numerisch von $K'(x)$ unterscheidet und im Kontext eine andere Einheit als die Ableitung hat, nämlich [GE] anstelle von $\frac{[GE]}{[ME]}$.
- II. Die Studierenden sollten eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit *auf mathematischer Ebene* herstellen können (zum Beispiel über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$, bzw. über lineare Approximation),
- III. Die Studierenden sollten reflektieren, dass bei der ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Zusatzkosten der nächsten Einheit angenommen wird, dass $h = 1$ in dem entsprechenden Kontext so klein ist, dass man den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ vernachlässigen kann.

Um in dem Interview herauszufinden, inwieweit den Studierenden dies nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ gelingt, wurde ein Interview aus mehreren Phasen konzipiert, in denen die Facetten I.-III. dieser adäquaten Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit angesprochen werden:

- Phase 1: Erinnerung der Studierenden an das Grenzkostenkonzept (Einstieg)
- Phase 2: Herausarbeitung von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und deren in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit (Adressierung von I.)
- Phase 3: Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf graphischer Ebene (Adressierung von II. und III.)

Phase 4: Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf symbolischer Ebene (Adressierung von II. und III.)

Die erste Phase ist eine Einstiegsphase. In der zweiten Phase soll dann zunächst untersucht werden, inwieweit den Studierenden auf Basis ihres Wissens zu den Grenzkosten aus ihrer Mathematikvorlesung (und eventuell aus ökonomischen Vorlesungen) Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und deren in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit bewusst sind.

In der dritten und vierten Phase soll dann untersucht werden, inwieweit die Studierenden auf der Basis ihres Wissens aus ihrer mathematischen Lehrveranstaltung eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und deren Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herstellen können. Dies erfolgte in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler der Universität Paderborn sowohl auf der graphischen Ebene über die Tangente und deren Steigung als auch auf der symbolischen Ebene über die Approximationsformel $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h (genaue Beschreibung des in der Vorlesung vermittelten Wissens zur Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation siehe Kapitel 7.2.2).

Methodik des Interviews: Das Interview ist als *halbstrukturiertes Interview* konzipiert (Döring u. Jürgen, 2016). Den festen Leitfaden des Interviews bilden vier Aufgaben, die in den folgenden Kapiteln genauer beschrieben werden. Die Aufgaben bilden dabei jeweils den Ausgangspunkt der oben genannten vier Phasen.

Im Sinne eines halbstrukturierten Interviews werden den Studierenden während ihres Lösungsprozesses zusätzlich Fragen gestellt, mit denen ihre Gedankengänge offen gelegt werden sollen (Döring u. Jürgen, 2016). Außerdem werden Tipps gegeben, wenn die Studierenden gar nicht mehr weiterkommen. Damit soll verhindert werden, dass die Aufgabenlösung gleich bei der ersten Lösungsschwierigkeit stecken bleibt. Denn es sollen ja möglichst viele verschiedene Schwierigkeiten ermittelt werden, die Studierende bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer ökonomischen Interpretation haben könnten (siehe Forschungsfrage der Studie am Ende von Kapitel 8.1). Außerdem ist eine Bearbeitung späterer Aufgaben teilweise nur sinnvoll, wenn die Lösung vorheriger Aufgaben bereits bekannt ist (Genaueres wird bei der detaillierten Beschreibung der Aufgaben in den nächsten Kapiteln klar).

Die Fragen und Tipps wurden teilweise vorher überlegt. Sie dürfen aber auch spontan gestellt bzw. gegeben werden. Spontanität hat den Vorteil, auf die Ausführungen der einzelnen Studierenden passender reagieren zu können. Damit lassen sich individuelle Schwierigkeiten der Studierenden genauer ermitteln. Der Nachteil an dieser Spontanität ist, dass die Fragen eventuell nicht immer in der nötigen Präzision formuliert werden, man manchmal nicht ausreichend nachfragt um die Ausführungen der Studierenden 100%ig zu verstehen oder teilweise zu stark interveniert. Außerdem laufen dann nicht alle Interviews gleich ab. Dies muss man später bei der Auswertung berücksichtigen.

8.2.2 Die Einstiegsphase mit Aufgabe 1

Ziel der Phase: In dieser Phase soll als erstes herausgefunden werden, was die Studierenden mit den Grenzkosten *zunächst* assoziieren: die Ableitung $K'(x)$ oder deren

in der Ökonomie übliche Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit (oder beides gleichzeitig). Weiterhin soll ermittelt werden, ob die verwendete Einheit zu dem bei der Rechnung verwendeten mathematischen Objekt ($K'(x)$ oder $K(x+1) - K(x)$) passt.

Aufgabe der Phase:

Aufgabe 1:

Eine Kostenfunktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ gibt die Kosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x eines Produktes an. Der Output x ist dabei in Mengeneinheiten, $K(x)$ in Euro angegeben. Gegeben ist die Kostenfunktion K mit folgender Gleichung:

$$K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500 \quad (114)$$

Was sind die Grenzkosten bei einer Ausbringungsmenge von $x = 100$ Mengeneinheiten? Was ist die zugehörige Einheit der Grenzkosten?

Diese Aufgabe ist als Einstiegsaufgabe zum Grenzkostenbegriff gedacht. Mit ihr soll wie gesagt ermittelt werden, ob die Studierenden mit den Grenzkosten *zunächst* die Ableitung $K'(x)$ oder die Zusatzkosten der nächsten Einheit (oder sofort beides gleichzeitig) assoziieren. Der Einstieg soll mit einer Rechenaufgabe erfolgen, weil dies für die Studierenden zunächst ein komfortabler Anfang des Interviews zur Entspannung ist. Denn es ist davon auszugehen, dass zumindest die numerische Bestimmung der Grenzkosten in beiden Varianten (über $K'(x)$ bei erster Assoziation der Ableitung oder $K(x+1) - K(x)$ bei erster Assoziation der Zusatzkosten der nächsten Einheit) keine Probleme bereiten würde.

Gleichzeitig lassen sich aber bereits mögliche Widersprüche zwischen der verwendeten Berechnungsmöglichkeit (Ableitung oder Kostendifferenz) und der angegebenen Einheit erkennen, die eventuell in einer späteren Phase zur Herausarbeitung der Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit aufgegriffen werden können.

A-priori Analyse der Aufgabe und ihrer Lösung: Prinzipiell sind hier zwei korrekte Lösungsvarianten denkbar. In der Mathematikvorlesung der Studierenden (der Universität Paderborn) wurden die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ definiert (siehe Kapitel 7.2.2). Mit diesem Ansatz erhält man zunächst als Ableitung $K'(x) = \frac{3}{1000}x^2 - \frac{1}{2}x + 21$. Einsetzen von $x = 100$ liefert schließlich den numerischen Wert $30 - 50 + 21 = 1$. Die Einheit der Grenzkosten ist dann $\frac{\text{€}}{\text{ME}}$. Die Begründung der Einheit erfolgte in der Vorlesung auf Basis der formalen Definition der Ableitung (siehe Kapitel 7.2.2). Alternativ wäre eine Begründung der Einheit über die Deutung der Ableitung als Änderungsrate möglich, die ebenfalls in der Vorlesung angesprochen wurde.

Eine weitere denkbare Lösung der Aufgabe wäre über die Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit, so wie sie oft in ökonomischen Lehrbüchern zu finden ist (siehe Kapitel 2.2), und dementsprechend vermutlich auch in wirtschaftswissenschaftlichen Lehrveranstaltungen verwendet wird. Teilweise werden die Grenzkosten in der Ökonomie auch direkt als Zusatzkosten der nächsten Einheit definiert

(zum Beispiel in (Pindyck u. Rubinfeld, 2013, S.325)). In diesem Fall müsste man die Grenzkosten über die Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ bestimmen. Als numerisches Ergebnis erhält man dann exakt 1,051. Die zugehörige korrekte Einheit wäre dann eine Einheit der Kosten, also €.

Angedachte Interventionen des Interviewers in dieser Phase: Der Interviewer soll hier nach einem ausführlichen Rechenweg fragen, falls dieser nicht ersichtlich ist. Außerdem soll nach einer Begründung der Einheit gefragt werden.

8.2.3 Die zweite Phase mit Aufgabe 2 zur Herausarbeitung von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit

Ziel der Phase: In dieser Phase soll zunächst ermittelt werden, inwieweit die Studierenden Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit angeben können (z.B. numerischer Unterschied, Unterschied in der Einheit oder ein Unterschied in der mathematischen Definition).

Können die Studierenden dies nicht selbstständig, sollen diese Unterschiede gemeinsam mit dem Interviewer erarbeitet werden. Dies ist wichtig, damit die Aufgaben 3 und 4, in denen es um eine genaue Betrachtung der Beziehung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit $K(x+1) - K(x)$ auf mathematischer Ebene geht, gelöst werden können.

Aufgabe der Phase: Zunächst werden die Studierenden mit einer jeweils alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert, die sie bei der rechnerischen Bestimmung der Grenzkosten in Aufgabe 1 nicht verwendet haben. Wurde die erste Aufgabe mit der Ableitung $K'(x)$ gelöst, so wird ihnen folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) auf einer Karteikarte vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Haben sie die erste Aufgabe mit der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ gelöst, werden sie daran erinnert, dass in ihrer mathematischen Lehrveranstaltung die Grenzkosten anders definiert wurden, nämlich als Ableitung $K'(x)$ (siehe Kapitel 7.2.2).

Dann wird folgende Frage zur Provokation gestellt:

Frage (Aufgabe 2): Ist die Ableitung $K'(x)$ dasselbe wie die Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x Einheiten um eine Einheit?

Bei dieser Frage wird unterstellt, dass die Studierenden die in Aufgabe 1 bei der Berechnung der Grenzkosten verwendete Auffassung als Ableitung $K'(x)$ oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit als Definition der Grenzkosten ansehen (beide Möglichkeiten der Definition der Grenzkosten sind in Ökonomiebüchern zu finden, siehe Kapitel 2.2). Dann sollen mit dieser Frage zwei Definitionen der Grenzkosten gegenübergestellt und die mit ihnen definierten Grenzkostenbegriffe verglichen werden.

Die Aufgabe ist Ausgangspunkt zur Diskussion von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit (und somit insbesondere zwischen den dahinter stehenden mathematischen Objekten $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$), die in der Ökonomie oft ohne weitere Erklärung miteinander identifiziert werden. Dabei wird bewusst *nicht* die übliche Terminologie der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler gebraucht, in der immer die Ableitung $K'(x)$ die Definition der Grenzkosten ist und die Zusatzkosten der nächsten Einheit die Interpretation dieser Ableitung sind (siehe zum Beispiel (Tietze, 2010, S.241)). Stattdessen werden zur Provokation eines stärkeren Konflikts die Zusatzkosten der nächsten Einheit hier bewusst als *alternative Definition der Grenzkosten* den über die Ableitung definierten Grenzkosten entgegengesetzt.

A-priori Analyse der Aufgabe und ihrer Lösung: Eine adäquate Antwort auf die Frage „Ist die Ableitung $K'(x)$ dasselbe wie die Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x Einheiten um eine Einheit?“ auf Basis der Mathematikvorlesung der Universität Paderborn wäre hier „Nein“. Dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen der Kostendifferenz entsprechen, und der zugehörige numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ wurden in der Vorlesung explizit thematisiert (siehe Kapitel 7.2.2). Ebenfalls wurde die Einheit der Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ als „Geldeinheit pro Mengeneinheit“ angegeben und mit Hilfe der formalen Definition der Ableitung gerechtfertigt. Dementsprechend sollten die Studierenden hier folgende Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit angeben:

1. der Unterschied auf mathematischer Ebene, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen
2. der numerische Unterschied zwischen den Grenzkosten als $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit
3. der Unterschied in der Einheit zwischen diesen beiden Größen

Auf Basis der Mathematikvorlesung wäre aber noch eine andere Antwort möglich. Neben der ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Wert, der die *ungefähren* Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt, wurde dort noch eine weitere Möglichkeit der Interpretation von $K'(x)$ unter Verwendung des Begriffs der *marginalen* Einheit eingeführt:

*Erhöht man – ausgehend von einem Output von x Mengeneinheiten – die Produktion um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um ... **marginale** Einheiten.*

Diese Interpretation wurde als Sprechweise der Beziehung $dK = K'(x)dx$ eingeführt, in der die Differentiale dK und dx als unendlich kleine Größen bezeichnet wurden. Streng genommen war dies laut dem Lehrenden aber nur als purer mathematischer Formalismus zu verstehen, mit dem man verdeutlicht, dass der Fehler zwischen ΔK und Δx in der Approximation $\Delta K \approx K'(x) \cdot \Delta x$ für $\Delta x \rightarrow 0$ gegen 0 geht. Eine ausführliche Darstellung der Herleitung dieser Interpretation befindet sich in Kapitel 7.2.2.

Greifen die Studierenden nun diese Ausführungen auf, so wäre eine Antwort auf die Frage, ob die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe seien, dass man bei der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit von einer *marginalen Einheit* sprechen muss. *Marginale Einheiten* entsprechen laut der Vorlesung Einheiten unendlich kleiner Zuwächse dx und dK (wobei unklar blieb, was genau unter diesen zu verstehen ist) in der exakten Beziehung $dK = K'(x) dx$. Dann gibt es keinen Approximationsfehler mehr. Die Ableitung entspricht aber auch bei der Verwendung marginaler Einheiten auf mathematischer Ebene nicht den Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine marginale Einheit (diese wären dK). Die Ableitung müsste man dann als Verhältnis fiktiver, unendlich kleiner Größen auffassen. Ähnliche Auffassungen der Ableitung wurden auch lange Zeit in der Wissenschaft Mathematik genutzt (Walter, 2003, S.235), und finden sich auch heute in den Ingenieurwissenschaften oder der Physik (siehe zum Beispiel (Hering u. a., 1999; Stroppe, 2012)).

Angedachte Interventionen des Interviewers in dieser Phase: Weil in dieser Phase von vorn herein umfangreiche Interventionen geplant sind, die nicht nur Gedankengänge der Studierenden offen legen sollen, sondern die Studierenden gegebenenfalls zu neuen Erkenntnissen führen sollen (dies ist nur in dieser Phase der Fall, damit später Aufgaben 3 und 4 sinnvoll bearbeitet werden können), erhält diese Phase fortan die Bezeichnung *Interventionsphase*.

Wurde die erste Aufgabe zur Bestimmung der Grenzkosten mit Hilfe der Ableitung gelöst, und konnten die Studierenden *keine* Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit nennen (oder waren sie sogar der Auffassung, dass diese identisch sind), wird in der Interventionsphase folgende Aufgabe gestellt:

Interventionsaufgabe:

In dem folgenden Koordinatensystem ist der Graph einer anderen (fiktiven) Kostenfunktion K dargestellt (Abbildung 110). Es ist bekannt, dass bereits 10 Mengeneinheiten produziert wurden. Bestimmen Sie die Mehrkosten, wenn die Produktion von 10 um eine weitere Einheit erhöht wird.

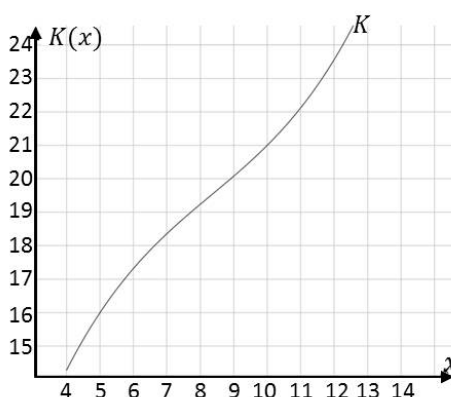


Abbildung 110: Graph der Interventionsaufgabe

Die Funktion ist nur graphisch gegeben, damit die Studierenden, die Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit miteinander identifizieren, hier nicht mehr den Lösungsalgorithmus unter Verwendung der Ableitung abrufen können, und erneut darüber nachdenken, wie man Zusatzkosten der nächsten Einheit bestimmt. Dementsprechend ist die intendierte Lösung $K(11) - K(10) \approx 1,1$.

Sind die Studierenden nach der Bestimmung dieser Mehrkosten über die Kostendifferenz immer noch der Ansicht, dass die Ableitung und diese Mehrkosten der nächsten Einheit dasselbe seien, sollen sie nun die gesuchten Mehrkosten in Analogie zu Aufgabe 1 graphisch mit Hilfe der Ableitung bestimmen (also über $K'(10)$) und dann mit der Differenz $K(11) - K(10)$ vergleichen. Zentral bei der Lösung ist dann folgendes in der Vorlesung vermitteltes Wissen:

1. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Graphische Bestimmung der Steigung linearer Funktionen

Bei Bedarf werden hier entsprechende Tipps vom Interviewer gegeben, damit das Interview nicht steckenbleibt.

Falls bei der Aufgabenlösung nicht schon geschehen, sollen dann noch die bestimmten Größen $K'(10)$ und $K(11) - K(10)$ graphisch visualisiert werden. Dadurch wird sichtbar, dass beide Objekte nicht dasselbe sind.

Wurden bei der ersten Aufgabe die Grenzkosten bei $x = 100$ mit Hilfe der Differenz $K(101) - K(100)$ gelöst, wird in der Interventionsphase nicht die eben genannte Interventionsaufgabe gestellt. Stattdessen wird direkt mit dem zugehörigen Graphen der Funktion aus Aufgabe 1 gearbeitet (siehe Abbildung 111). Auch hier sollen dann wieder die Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ und die Ableitung $K'(100)$ visualisiert werden. Die Lösungsschritte und das aus der Vorlesung benötigte Hintergrundwissen sind natürlich dieselben wie bei Verwendung des Graphen der Interventionsaufgabe.

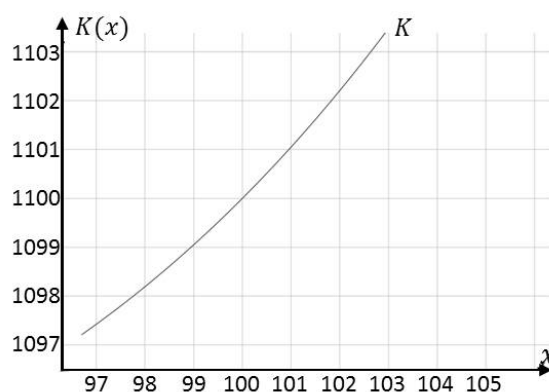


Abbildung 111: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Am Ende steht schließlich hoffentlich die Erkenntnis, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene exakt der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ entsprechen, sowie dass diese sich von den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ numerisch und in der Einheit unterscheiden.

8.2.4 Die dritte Phase mit Aufgabe 3 zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene

Ziel der Phase: In dieser Phase soll, aufbauend auf den Erkenntnissen der vorangegangenen Interventionsphase, herausgefunden werden, inwieweit die Studierenden eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf Basis ihres Wissens zur Ableitung aus der Mathematikvorlesung *auf graphischer Ebene* herstellen können, und an welchen Stellen Schwierigkeiten auftreten. Eventuell wurde damit bereits in der vorangegangenen Interventionsphase zur Herausarbeitung von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit mit Hilfe des Interviewers begonnen. Dies ist später bei der Auswertung zu berücksichtigen.

Aufgabe der Phase:

Aufgabe 3: Begründen Sie **anhand der folgenden Grafik** (siehe Abbildung 112), weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

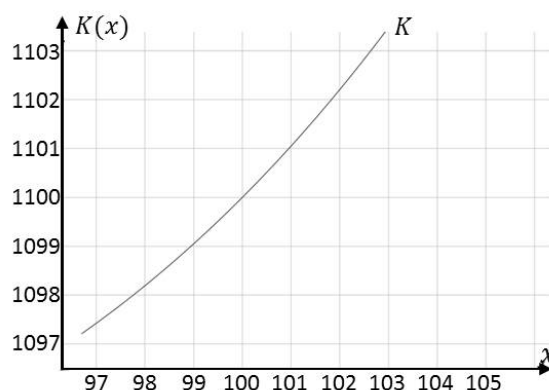


Abbildung 112: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Der Begriff der Mehrkosten wurde im Laufe der Interventionsphase im Dialog für die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ eingeführt. Der Begriff der Grenzkosten wurde ab dieser Stelle nur noch für die Ableitung $K'(x)$ verwendet (passend zur Definition der Grenzkosten aus der Mathematikvorlesung, siehe Kapitel 7.2.2).

Da bereits in der letzten Phase bei der Herausarbeitung der Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene gearbeitet wurde, liegt einigen Studierenden hier bereits die in Abbildung 112 dargestellte Skizze vor (mit eingezeichneter Tangente). In diesem Fall wird die Aufgabe nicht schriftlich vorgelegt, sondern mündlich gestellt. Dies hat den Vorteil, dass der Interviewfluss nicht unterbrochen wird, und die Studierenden unmittelbar mit den bereits von ihnen erstellten Skizzen weiterarbeiten können.

A-priori Analyse der Aufgabe 3 und ihrer Lösung: Eine Lösung der Aufgabe wäre die Begründung, dass die Funktion aus Abbildung 111 in dem dort dargestellten Be-

reich (und insbesondere im Intervall $[100; 101]$) annähernd linear ist. Denn die Ableitung $K'(100)$ als Steigung der Tangente bei $x = 100$ ist dann ungefähr gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$. Letztere entspricht numerisch der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$.

Auch wenn ein solcher Aufgabentyp aus der Mathematikvorlesung nicht bekannt ist, wurde dort folgendes dafür nötige Hintergrundwissen vermittelt:

1. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Beziehung zwischen der Tangente an eine Kostenfunktion an eine Stelle x , der Sekante durch $(x, K(x))$ und $(x+h, K(x+h))$ und der Differenz $K(x+h) - K(x)$ auf graphischer Ebene
3. Verfahren zur graphischen Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion

Außerdem wurde in einer Skizze mit der Tangente der Fehler zwischen $K(x+h) - K(x)$ und $K'(x) \cdot h$ visualisiert (siehe Abbildung 113).

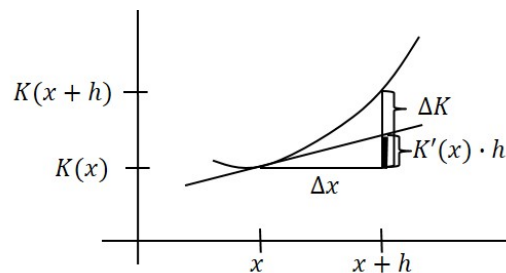


Abbildung 113: Skizze zur Veranschaulichung der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs entlang der Tangente

Angedachte Interventionen in dieser Phase: Da laut Forschungsfrage auch die Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit ermittelt werden sollen (siehe Ende von Kapitel 8.1), erhalten die Studierenden eventuell zusätzliche Hilfen, damit sie nicht gleich bei der ersten Lösungsschwierigkeit stecken bleiben. Diese Hilfen sind:

1. Hinweise zur geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Hilfen zur Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion

8.2.5 Die vierte Phase mit Aufgabe 4 zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene

Ziel der Phase: In dieser Phase soll schließlich noch herausgefunden werden, inwieweit die Studierenden den in der Vorlesung präsentierten Zusammenhang zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf symbolischer Ebene über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ verinnerlicht haben und an welchen Stellen hier Schwierigkeiten auftreten.

Aufgabe der Phase:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

A-priori Analyse der Aufgabe 4 und ihrer Lösung: Eine auf der Mathematikvorlesung basierende Begründung wäre die dort präsentierte Rechtfertigung, weshalb die Ableitung $K'(x)$ die *ungefähren* Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x Einheiten um eine Einheit angibt. Diese erfolgte in der Vorlesung über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ wie folgt:

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \\ \Rightarrow K'(x) &\approx \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \quad \text{für } h \approx 0 \\ \Rightarrow K'(x) \cdot h &\approx K(x+h) - K(x) \end{aligned} \tag{115}$$

Für $h = 1$ erhält man dann:

$$K(x+1) - K(x) \approx K'(x) \tag{116}$$

Dabei wird angenommen, dass $h = 1$ in dem entsprechenden Kontext sehr klein ist. Das Argument „ $h = 1$ ist klein in der Ökonomie“ ist eine etwas verkürzte Argumentation dafür, dass der Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ klein ist (siehe Kapitel 3.3.3). Solche Argumentationen sind aber auch in ökonomischen Lehrbüchern zu finden und könnten von den Studierenden durchaus erwartet werden.

Angedachte Interventionen des Interviewers im Zusammenhang mit Aufgabe 4:

Um wieder möglichst viele verschiedene Schwierigkeiten bei den Schritten zur Lösung dieser Aufgabe sichtbar werden zu lassen, werden auch hier bei Bedarf Tipps gegeben, damit der Lösungsprozess nicht bei der ersten Schwierigkeit stecken bleibt. Als fester Hinweis ist hier die Definition der Ableitung $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ vorgesehen, falls die Studierenden diese nicht mehr wissen. Andere Hinweise und Fragen werden variabel in Anbetracht der Lösungsschritte der Studierenden gegeben bzw. gestellt.

8.3 Erhebung und Analyse der Daten

8.3.1 Erhebung der Daten

Die Interviews fanden im Sommersemester 2015 im Zeitraum Mai-Juli mit Probanden der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II“ der Universität Paderborn statt. Die Studierenden waren demnach alle mindestens im zweiten Semester. Daher brachten sie vermutlich nicht nur Kenntnisse zu Ableitung und Grenzkosten aus der Mathematikvorlesung des ersten Semesters mit, sondern auch aus Vorlesungen zur Mikroökonomie wie der Vorlesung „Grundzüge der Volkswirtschaftslehre“, die

an der Universität Paderborn im Regelfall ebenfalls im zweiten Semester belegt wird (Paderborn, 2013). Die Teilnahme an den Interviews war freiwillig und die Probanden erhielten 20€ dafür. Als Thema des Interviews wurde lediglich die Thematik „Ableitung“ angegeben, damit sich die Studierenden nicht gezielt vorbereiten konnten (zwei Probanden erklärten auch später, dass sie Rechenaufgaben erwartet hätten).

Insgesamt nahmen schließlich 8 Probanden an dem Interview teil. Die freiwillige Teilnahme könnte eine etwas verzerrte Stichprobe zur Folge haben: Studierende, die eher bereit sind, über ihre Mathematikkenntnisse zu reden, und die auch zumindest über ein gewisses Grundwissen zur Ableitung verfügen (das Thema „Ableitung“ wurde vorher genannt). Dies ist aber auch eine geeignete Zielgruppe für das Interview. Denn damit das Interview in Gang kommt, ist zumindest eine erste Lösung der Einstiegsaufgabe zur rechnerischen Bestimmung der Grenzkosten durch die Studierenden nötig. Da der weitere Verlauf stark vom Dialog mit dem Interviewer geprägt ist, ist auch die Kommunikativität der Studierenden wichtig. Allerdings zeigte sich dann bei der Durchführung, dass unter den Teilnehmern auch Studierende mit einem schwachen Verständnis der Ableitung waren, sodass tatsächlich auch eine gewisse Breite erfasst wurde.

Die Interviews wurden vom Autor durchgeführt und videographiert. Während der Interviews war es dem Interviewer wichtig, dass sich die Probanden nicht unwohl fühlten. Dies war bei den hier konzipierten Interviews eine Herausforderung, da es ja um Kenntnisse zu dem in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler behandelten Konzept der Ableitung und um das Verständnis dieses Konzepts ging. In diesem Kurs war der Interviewer sogar selbst Übungsleiter. Daher bohrte der Interviewer nach länger andauernden „zählen“ Passagen, in denen die Studierenden Schwierigkeiten bei der Lösung der Aufgaben hatten, manchmal nicht länger nach, auch wenn ihm die Ausführungen der Studierenden in dem Moment noch nicht 100%ig klar waren. Am Ende der Interviews wurden jeweils noch die schriftlichen Aufzeichnungen der Studierenden zur Lösung der Aufgaben vom Interviewer zur weiteren Analyse einbehalten.

8.3.2 Analyse der Daten

Die Interviews wurden durch eine in Transkription geschulte studentische Hilfskraft transkribiert. Dabei wurden auch die Namen der Interviewten pseudonymisiert. Der Schwerpunkt der Transkription lag auf der verbalen Kommunikation. Für ein besseres Verständnis der Transkripte wurden Füllwörter wie „sozusagen“ gestrichen. Pausen von über 5 Sekunden wurden ebenfalls im Transkript festgehalten um Überlegungsphasen zu identifizieren. Nonverbale Aktivitäten wie das Schreiben wurden *nicht* transkribiert, weil die Aufzeichnungen der Studierenden am Ende vorlagen, und man anhand der Videos die Zeitpunkte der entsprechenden Schreibaktivitäten bei der Auswertung leicht erkennen konnte. Bei der Darstellung der Ergebnisse werden hier bei der Zitierung von Transkriptstellen jedoch die entsprechenden Schreibaktivitäten auch genannt (in eckigen Klammern).

Die Auswertung der Interviews erfolgte durch schrittweise (sequentielle) Interpretation (Krummheuer u. Naujok, 1999, S.69). Dabei wurde jeweils niedrig-inferent, das heißt nah am Text interpretiert, mit dem Ziel mögliche Vorstellungen der Studierenden zu den Grenzkosten zu rekonstruieren. Als Bezugsrahmen diente hierbei jeweils die Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ und die dort vermittelten Inhalte zur Beziehung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation

am Beispiel der Grenzkosten (siehe Kapitel 7.2.2). Ein solches Vorgehen wird in der Literatur als *reflektierende Interpretation* bezeichnet (Bohnsack, 2014, S.137). Die Interpretation erfolgte dabei stets unter dem Blickwinkel von Leitfragen zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation im Grenzkostenkontext, dessen Untersuchung die Forschungsfrage dieser Studie war (siehe Ende von Kapitel 8.1). Die Leitfragen befinden sich in Tabelle 144. Die sequentielle Interpretation mündete schließlich in ausführlichen Einzelfallbeschreibungen (Bohnsack, 2014, S.141).

Leitfrage	Zugehörige Phase des Interviews
L1. Welche Auffassung der Grenzkosten (Ableitung $K'(x)$ oder Zusatzkosten der nächsten Einheit) assoziieren die Studierenden mit dem Grenzkostenbegriff <i>zunächst</i> ?	Phase zu Aufgabe 1
L2. Inwiefern sind den Studierenden Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit bewusst?	Phase zu Aufgabe 2 und anschließende Interventionsphase
L3. Inwiefern können die Studierenden eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen (mit Unterstützung des Interviewers, falls nötig), und welche Schwierigkeiten treten dabei auf?	Interventionsphase und Phase zu Aufgabe 3
L4. Inwiefern können die Studierenden eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene herstellen (mit Unterstützung des Interviewers, falls nötig), und welche Schwierigkeiten gibt es dabei?	Phase zu Aufgabe 4

Tabelle 144: Leitfragen zur Auswertung der Interviews

In einem zweiten Schritt wurden dann die einzelnen Interviews verglichen. Hierfür wurden die Leitfragen erneut beantwortet, dieses Mal aber unter vergleichender Perspektive.

Zur Sicherstellung der Interpretationsvalidität wurden alle Interviews vom Autor zweimal im Abstand von einem Jahr interpretiert. Außerdem wurden sie intensiv mit dem Betreuer der Arbeit diskutiert. Einige Interviews wurden zusätzlich im größeren Kollegenkreis des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) und auf Tagungen zur Diskussion gestellt. Da dennoch Interpretationen immer subjektiv sind, werden bei der Ergebnisdarstellung die vom Autor vorgenommenen Interpretationen mit entsprechenden Transkriptstellen belegt, damit der Leser die Erkenntnisgewinnung nachvollziehen kann, und schließlich selbst entscheiden kann, ob er den Interpretationen des Autors folgt oder nicht.

8.4 Auswertung der einzelnen Interviews zu den Grenzkosten

Die Interviews werden zunächst einzeln interpretativ ausgewertet. Dazu erfolgt jeweils eine Darstellung ausführlicher Fallbeschreibungen. Bei diesen werden die vorgenommenen Interpretationen stets mit entsprechenden Dialogstellen aus dem Originaltranskript belegt. Wie die zitierten Stellen dargestellt werden, sei an folgendem Kurzbeispiel illustriert:

- (1) I: *Ja, genau, dann gebe ich dir mal sozusagen das erste Blatt dazu.*
 (2) J: *Ok, die Grenzkosten erstmal. Also soll ich auch mit dir kommunizieren?*
 (3) I: *Ja gerne, was machst du jetzt?*
 ...
 (9) I: *Ja, was ist da jetzt die Einheit in dem Ganzen?*
 (10) J: *Das ist hier Geldeinheit pro Mengeneinheit.*

Vor den entsprechenden Sätzen ist immer derjenige genannt, der spricht. „I“ bezeichnet hierbei stets den Interviewer, die andere Person den Interviewten. Die Redeanteile von Interviewer und der interviewten Person wurden im Originaltranskript alle durchnummeriert. Bei der Zitierung bestimmter Stellen werden jedoch teilweise Redeanteile übersprungen. So hat zum Beispiel bei der oben zitierten Transkriptstelle zwischen (3) und (9) weitere Kommunikation stattgefunden, die hier nicht dargestellt ist. Bei ausgelassenen Redeanteilen handelt es sich um Dialoge, die keine zusätzlichen Erkenntnisse zum Verständnis der Grenzkosten durch die Studierenden liefern (zum Beispiel Dialoge über die Funktionsweise des Taschenrechners).

Tätigkeiten der Studierenden und zusätzliche Erklärungen zum besseren Verständnis werden innerhalb der zitierten Transkriptstellen in eckigen Klammern geschrieben.

8.4.1 Auswertung des Interviews von Johannes

Phase zu Aufgabe 1: Die erste Aufgabe ist die Bestimmung der Grenzkosten der Kostenfunktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$. Außerdem soll die Einheit bestimmt werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in € angegeben sind.

Johannes möchte die Aufgabe unmittelbar mit Hilfe der Ableitung lösen:

- (1) I: *Ja, genau, dann gebe ich dir mal sozusagen das erste Blatt dazu.*
 (2) J: *Ok, die Grenzkosten erstmal. Also soll ich auch mit dir kommunizieren?*
 (3) I: *Ja gerne, was machst du jetzt?*
 (4) J: *Also, ich leite jetzt erstmal die Kostenfunktion ab, also die Grenzkosten und dann setze ich $x = 100$ ein.*

Er erhält dann das richtige Ergebnis:

- (6) J: *Soll ich noch ausrechnen?*
 (7) I: *Ja, gerne.*
 (8) J: *[rechnet aus] Eins.*

Anschließend wird die Frage der Einheit diskutiert:

- (9) I: *Ja, was ist da jetzt die Einheit in dem Ganzen?*
 (10) J: *Das ist hier Geldeinheit pro Mengeneinheit.*

Johannes nennt also auch die richtige Einheit der Ableitung. Er verwendet somit für die Grenzkosten bis hierhin konsistent das Konzept der Ableitung.

Seine Begründung der Einheit liefert erste Hinweise auf sein Verständnis der inhaltlichen Bedeutung der Grenzkosten:

(11) I: *Warum ist das Geldeinheit pro Mengeneinheit?*

(12) J: *Das ist weil (Pause), ach so, es gibt ja die Änderung der Geldeinheiten pro Mengeneinheit an. Denn wir erhöhen ja um eine marginale Einheit.*

Der Satz „Es gibt ja die Änderung der Geldeinheiten *pro* Mengeneinheit an.“ deutet an, dass Johannes die Grenzkosten als Änderungsrate, also als Änderung der Kosten *pro* Mengeneinheit, auffasst.

Zusätzlich bringt Johannes hier den Begriff der marginalen Einheit ins Spiel, der auch in der Mathematikvorlesung genannt wurde (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3). Was er genau darunter versteht, wird erst später deutlich.

Phase zu Aufgabe 2: Bei Aufgabe 2 werden die Studierenden mit der alternativen Grenzkostendefinition (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit) konfrontiert, die sie in der ersten Aufgabe *nicht* verwendet haben. Daher bekommt Johannes nun die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit auf einer Karteikarte in der folgenden Form vorgelegt, wie sie im Buch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) zu finden ist:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Er äußert hierzu sofort ohne weitere Nachfrage des Interviewers:

(14) J: *Ok, ja da würde für mich das marginal erstmal fehlen.*

Er ist also *nicht* der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung das Gleiche wie die Zusatzkosten der nächsten Einheit sind. In seinen Augen ist die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit unvollständig, weil das Wort *marginal* fehlt.

Hierbei nimmt er Bezug auf die Mathematikvorlesung. Dort wurde neben der Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Wert, der die *ungefähren* Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x Einheiten um eine weitere Einheit angibt, folgende Interpretation von $K'(x)$ genannt (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3):

*„Erhöht man – ausgehend von einem Output von x Mengeneinheiten – die Produktion um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um ... **marginale** Einheiten.“*

Diese Interpretation der Grenzkosten $K'(x)$ wurde in der Vorlesung als Sprechweise für die Beziehung $dK = K'(x)dx$ eingeführt, wobei dx und dK als fiktive, unendlich kleine Größen eingeführt wurden. Bei dieser Sichtweise entspricht die Ableitung als Objekt aber eigentlich auch keinen Zusatzkosten, sondern einem Verhältnis fiktiver, unendlich kleiner Größen: $K'(x) = \frac{dK}{dx}$.

Weil Johannes beim Vergleich der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit mit den Grenzkosten als Ableitung nur anmerkte, dass bei der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten *der* nächsten Einheit das Wort *marginal* fehlen würde, wirkt es hier so als ob Johannes die Grenzkosten als Ableitung mit den

Zusatzkosten für eine *marginalen* Einheit identifiziert (was auch immer er unter einer marginalen Einheit versteht). Seine von ihm genannte Begründung der Einheit der Grenzkosten „es gibt die Änderung der Geldeinheiten *pro* Mengeneinheit“ spricht aber dafür, dass Johannes die Grenzkosten doch nicht als echte Zusatzkosten, sondern eher als Änderung der Kosten *pro* Einheit, also als Verhältnis auffasst. An späterer wird das noch deutlicher.

Insgesamt ist also Johannes nicht der Meinung, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Dennoch folgt nun die Interventionsphase, in der die Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit herausgearbeitet werden. In dieser wird dann auch geklärt, was Johannes unter einer *marginalen* Einheit versteht.

Interventionsphase: Ziel der Interventionsphase ist die Erkenntnis durch die Studierenden, dass die Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht dasselbe sind. Johannes war ohnehin der Ansicht, dass sie beide nicht dasselbe sind. Zunächst möchte der Interviewer auf den Einheitenunterschied hinaus:

(15) I: *Ja, bevor wir sozusagen darauf [auf das Fehlen des Wortes marginal] eingehen, vielleicht noch die Frage, was wäre denn eigentlich die Einheit, wenn man diese Definition [Grenzkosten als Zusatzkosten für eine Einheit] wörtlich nehmen würde? Was müsste dann die Einheit sein?*

(16) J: *Kosten, also Geldeinheiten.*

Johannes erkennt also auf Nachfrage, dass zumindest die Einheit der Grenzkosten als Ableitung nicht mit der Einheit von Zusatzkosten übereinstimmt. An späterer Stelle fordert der Interviewer Johannes dazu auf, die zu Beginn vorgelegte Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit so umzuformulieren, dass auch die Einheit zur Ableitung passt:

(35) I: *Könntest du das, die Definition, so umformulieren, dass es von der Einheit her passt zu dem, was die Ableitung ist? Hast du eine Idee, wie man das machen könnte?*

(36) J: (Pause) *Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten pro marginaler Mengeneinheit, die bei der Produktion der nächsten marginalen Mengeneinheit entstehen.*

Hier lässt sich schwer sagen, was eine korrekte Antwort im Sinne der Mathematikvorlesung sein soll, da der Begriff der *marginalen* Einheit nicht klar definiert wurde. Der erste Teil von Johannes genannter Definition verdeutlicht aber nun adäquat den Ratencharakter der Grenzkosten als Ableitung. Der Nachsatz „die bei der Produktion der nächsten marginalen Mengeneinheit entstehen“ ist dann allerdings überflüssig. Nachdem nun über die Unterschiede in der Einheit zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit gesprochen wurde, möchte der Interviewer jetzt erfahren, inwiefern Johannes der numerische Unterschied klar ist. Daher fordert er ihn jetzt auf, die erste Aufgabe zur Bestimmung der Grenzkosten bei $x = 100$ nun auf Basis der ihm vorgelegten Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion *um eine Einheit* zu bestimmen:

(19) I: *Ja, wie müsste man denn die Aufgabe lösen, wenn man diese Definition [Grenzkosten als Zusatzkosten für eine Einheit] wörtlich nehmen würde?*

(20) J: *Warte mal. Vielleicht mache ich das jetzt ein bisschen umständlich, aber ich würde erstmal die Kosten von 100 [bestimmen].*

Johannes schreibt dabei auf seinen Zettel die Kostendifferenz $K(101) - K(100)$. Er weiß also, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit eigentlich über die Kostendifferenz bestimmt werden.

Der Interviewer ermuntert Johannes zustimmend, diesen Weg weiterzuverfolgen, was dieser dann auch tut. Er ermittelt dann jedoch für $K(100)$ zunächst ein falsches Ergebnis:

(25) I: *Was kommt denn raus?*

(26) J: *Ich hab das irgendwie falsch eingegeben. Ich habe jetzt 3 Millionen.*

Da es ja in dem Interview nur auf den Ansatz und nicht auf die korrekte Ermittlung des Ergebnisses mit dem Taschenrechner ankommt, nennt der Interviewer dann die Ergebnisse für $K(101)$ und $K(100)$ selbst:

(31) I: *Also einmal haben wir 1101,051 minus 1100*

(32) J: *Ok. Ungefähr Eins.*

(33) I: *Ungefähr, ja, aber eben ungefähr.*

(34) J: *Das passt schon mal immerhin.*

Johannes vergleicht hier sein Ergebnis von $K(101) - K(100)$ mit dem zuvor ermittelten Ergebnis von $K'(100)$. Er äußert sich zufrieden darüber, dass beide Ergebnisse nah beieinander liegen. Dies deutet darauf hin, dass ihm bewusst ist, dass die Ableitung ungefähr, aber im Allgemeinen nicht genau, die Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt. Das wurde in der Mathematikvorlesung auch so vermittelt.

Ungeklärt zur Rekonstruktion von Johannes' Verständnis der Grenzkosten ist noch die Frage, was er unter einer *marginalen* Einheit versteht:

(37) I: *Ja, jetzt kommen wir nochmal zu dem marginal, was du eben gesagt hast. Was ist denn eigentlich eine marginale Einheit?*

(38) J: *Eine unendlich kleine Einheit.*

Da nicht klar ist, ob Johannes darunter nicht doch eine sehr kleine, aber endliche Einheit versteht, fordert der Interviewer ihn auf, eine marginale Einheit in die Graphik der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1 einzuzichnen:

(39) I: *Kannst du denn da mal eine in die Skizze einzeichnen, hier mal. Das ist jetzt die Skizze zu der Aufgabe [Aufgabe 1] wohlgemerkt. Könntest du da eine unendlich kleine Einheit mal einzeichnen, oder/*

(40) J: *Ja, das wird ein bisschen schwierig.*

(41) I: *Ok.*

(42) J: *Ja, das ist halt die, das ist K , ok. Das ist halt die Steigung in diesem Punkt.*

Johannes' Schwierigkeiten mit dem Einzeichnen der *marginalen Einheit* deuten an, dass er darunter tatsächlich *keine* endliche Einheit versteht (und nicht eine endliche, aber im Kontext sehr kleine Einheit, wie das in einigen Lehrwerken der Ökonomie wie Reiß (2007, S.197) üblich ist). Als der Interviewer nochmal nach der marginalen Einheit nachfragt, sagt Johannes klar, dass er eine marginale Einheit nicht einzeichnen kann:

(47) I: *Ja, was ist mit der unendlich kleinen Einheit? Es macht Probleme, ja?*

(48) J: *Ja, es ist nicht einzuzeichnen* (lacht).

Dies könnte dafür sprechen, dass Johannes tatsächlich die in der Vorlesung vermittelte Auffassung einer marginalen Einheit als fiktive, unendlich kleine Größe übernommen hat (ist aber nicht sicher). Außerdem scheint der Begriff der marginalen Einheit für ihn etwas „nebulös“ zu sein, denn er kann nicht genau sagen, was das ist. Dies ist nicht überraschend, denn der Begriff wurde in der Vorlesung auch nicht klar definiert. Zum Abschluss der Interventionsphase möchte der Interviewer noch einmal auf den Unterschied zwischen der Ableitung als *Änderungsrate* und den Zusatzkosten als *absolute Änderung* hinaus. Dabei möchte er herausfinden, inwieweit Johannes die Grenzkosten als echte *absolute Zusatzkosten* versteht. Daher fragt er nochmal nach, ob die Zusatzkosten für eine unendlich kleine Einheit nicht annähernd 0 sein müssten:

(49) I: *Wenn ich die Zusatzkosten bei einer unendlich kleinen Einheit bestimmen will, sind die dann nicht null? Die Zusatzkosten für die nächste unendlich kleine Einheit, wenn nichts weiter dazukommt, ist es dann nicht fast an der Null? Wieso ist es dann hier Eins? Hast du da eine Idee, oder?*

(50) J: *Naja die, es wird ja nicht nur / das Argument wird ja nicht nur unendlich klein sondern, ja, ok das ist schwierig zu sagen* (lacht). *Es wird ja sowohl das Argument als auch der Funktionswert sehr klein und wenn man was Kleines durch etwas sehr Kleines teilt, dann muss ja nicht unbedingt null rauskommen.*

Bereits vorher bei der Begründung der Einheit der Grenzkosten deutete sich an, dass Johannes diese als Kostenänderung *pro* Mengeneinheit, also als Änderungsrate, auffasst. Hier wird das noch einmal deutlicher. Für ihn sind die Zusatzkosten für eine marginale Einheit also keine echten Zusatzkosten, sondern vielmehr ein Verhältnis von unendlich kleinen Größen (was auch immer eine unendlich kleine Größe ist). Dies entspricht letztendlich wieder der Ableitung in einer Auffassung, wie sie auch lange Zeit in der Mathematik genutzt wurde (Walter, 2003, S.235), und die auch heute in den Ingenieurwissenschaften oder der Physik verbreitet ist (siehe zum Beispiel (Hering u. a., 1999; Stroppe, 2012)).

Insgesamt sieht man bis hierher, dass Johannes vor der Intervention schon klar war, dass die Ableitung nicht den Zusatzkosten für die nächste Einheit entspricht. Ihm schien klar zu sein, dass die Ableitung numerisch nur eine Approximation dieser Zusatzkosten ist, und auf Nachfrage bemerkte er auch den Unterschied in der Einheit. Zunächst schien er aber der Ansicht zu sein, dass die Grenzkosten als Ableitung den Zusatzkosten der nächsten *marginalen* Einheit entsprechen. Bei genauerer Nachfrage wurde allerdings deutlich, dass er unter diesen Zusatzkosten einer marginalen Einheit

keine echten Zusatzkosten versteht, sondern ein Verhältnis unendlich kleiner Größen, wobei er nicht genau sagte, was eine unendlich kleine Größe bzw. Einheit ist. Dies entspricht dann eigentlich wieder der Ableitung in einer Auffassung als Quotient $K' = \frac{dK}{dx}$ zweier fiktiver, unendlich kleiner Größen, so wie dies in der Mathematik lange Zeit üblich war.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik (siehe Abbildung 114), weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

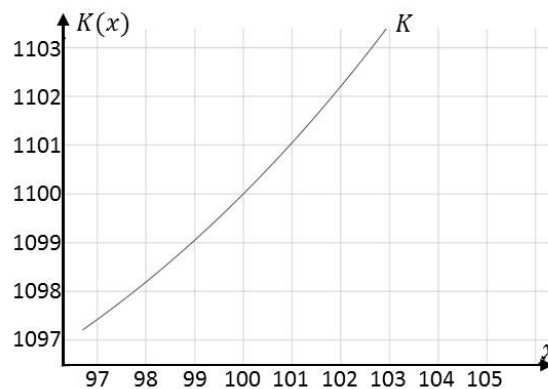


Abbildung 114: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Da die Skizze der Funktion Johannes bereits vorliegt, wird die Aufgabe hier nicht als schriftliche Aufgabe vorgelegt, sondern durch den Interviewer mündlich eingeleitet (allerdings etwas allgemeiner, weil der Interviewer den Eindruck hatte, dass Johannes auch mit dieser allgemeineren Frage umgehen kann):

(53) I: *Ja, jetzt gucken wir nochmal hier drauf auf die beiden. Dann kommt man sozusagen/Die Einheiten haben wir jetzt sozusagen, die sind eigentlich unterschiedlich. Und die Werte sind ja auch unterschiedlich, wenn man es genau nimmt. Aber der Unterschied ist ja gering, wenn man da mal guckt. Hast du eine Idee, warum der bei ökonomischen Funktionen so gering ist?*

(54) J: *Ja, also bei geringen Änderungen ist halt die, die Tangent/also die Ableitung ungefähr gleich der Sekantensteigung.*

Johannes begründet den geringen Fehler also mit annähernder Gleichheit von Sekanten- und Tangentensteigung bzw. Ableitung bei kleinen Änderungen. Hierbei wird auch deutlich, dass Johannes weiß, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist und dass sich diese durch Steigungen passender Sekanten approximieren lässt. Um etwas genauer zu erfahren, inwieweit Johannes der Zusammenhang zwischen Ableitung $K'(x)$ und Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ über die Sekantensteigungen auf graphischer

Ebene klar ist, fordert der Interviewer ihn auf, die entsprechenden Größen graphisch bei der Funktion aus Aufgabe 1 für $x = 100$ einzuzichnen:

(55) I: *Ja, wo ist hier die Sekantensteigung drin bei der Frage der Zusatzkosten? Ist das hier die Sekantensteigung die Differenz? Oder könntest du die Differenz hier auch einzeichnen in die Skizze?*

[Johannes zeichnet das Steigungsdreieck der Sekante durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$]

(55 weiter) I: *Und was ist jetzt die Differenz da, die wir haben?*

(56) J: *Ja, die 101 minus die 100, das ist Δx und die 1,05 ist ΔK .* [wurde in der Interventionsphase berechnet]

(57) I: *Ja, genau. Und wo ist jetzt die Sekantensteigung?*

(58) J: *Das ist die Änderung durch die.* [zeigt zuerst auf die vertikale Kathete und dann auf die horizontale durch horizontale Kathete im Steigungsdreieck]

Johannes kann also eine Verbindung zwischen der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ und der Steigung der Sekante durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$ auf graphischer Ebene über ein Steigungsdreieck herstellen. Außerdem sagte er bereits, dass die Sekantensteigungen für kleine Änderungen (hierbei meint er vermutlich kleine Änderungen von Δx) die Tangentensteigung gut approximieren, und dass die Tangentensteigung der Ableitung entspricht. Dies spricht dafür, dass ihm auch insgesamt der Zusammenhang zwischen der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ und der Ableitung $K'(100)$ auf graphischer Ebene über die Sekanten- und die Tangentensteigung klar ist. Aber Johannes hat noch nicht begründet, weshalb gerade bei der gegebenen Funktion aus Abbildung 114 der Fehler klein ist, was die Aufgabe war. Daher fragt der Interviewer hier nochmal genauer nach:

(61) I: *Ja, bei dieser Funktion, wenn man sozusagen mal graphisch drauf guckt. Könnte man sagen, warum das gleich, also ungefähr gleich ist? Oder könntest du dir eine Funktion vorstellen, bei der das ganz stark abweicht. Irgendeine ganz fiktive Funktion? Muss keine Gleichung sein, sondern du kannst auch einfach ein Bildchen reinmalen.*

Daraufhin malt Johannes einen stärker gekrümmten Graphen im Bereich $[100; 102]$ (siehe Abbildung 115). Auf die Frage, weshalb bei der von Johannes gezeichneten Funktion der Fehler größer ist, gibt er folgende Begründung:

(63) I: *Ja, was macht es aus, dass es da nicht gut klappt?*

(64) J: *Ja, das hier ist ungefähr eine lineare Funktion und das hier ist eine ganz andere. Ja, weicht einfach stark ab.*

Er erkennt also, dass die annähernde Linearität der Kostenfunktion K in dem dargestellten Bereich Grund für den geringen Fehler ist. Dies spricht noch einmal dafür, dass er eine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung $K'(100)$ und der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ über die Steigung der zugehörigen Sekante durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$ und die Tangentensteigung schlagen konnte.

Inwiefern Johannes eine Idee hat, weshalb Funktionen in der Ökonomie häufig annähernd linear über größere Bereiche sind, bleibt offen. Der Interviewer hat hier nicht zusätzlich nachgefragt, weil dies in der Mathematikvorlesung auch nicht angesprochen wurde.

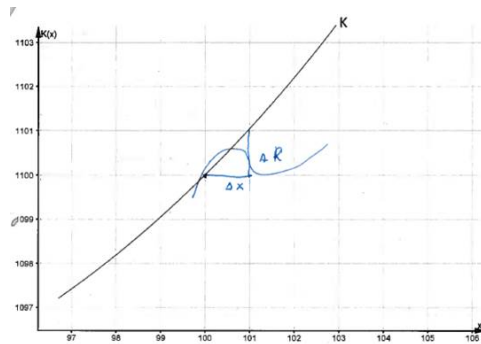


Abbildung 115: Beispiel von Johannes für eine Funktion, bei der der Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ größer ist als bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 3 (ebenfalls in der Graphik)

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Johannes ist sich nicht sicher, ob er sich an die Definition der Ableitung korrekt erinnern kann:

(66) J: *Oh, ob ich die jetzt noch die Definition der Ableitung weiß.*

Nach längerer Überlegung schafft Johannes es, sich an diese zu erinnern:

(70) J: *Das ist so aus der Erinnerung, also es ist ja eine Änderung der Funktionswerte durch die Veränderung des x -Wertes und das ist halt das h . Und jetzt müssen wir den Grenzwert h gegen 0 laufen.*

(71) I: *Mhm (bejahend).*

Danach überlegt Johannes eine Weile:

(72) J: *Das [vermutlich der Grenzwert des Differenzenquotienten] ist jetzt mal f' und (Pause) Ok, dann nehmen wir mal nicht den Grenzwert, bei der, äh, Sekantensteigung.*

Er verfolgt aber seinen Ansatz mit der Sekantensteigung nach längerer Überlegung nicht weiter, und argumentiert dann stattdessen auf der symbolischen Ebene:

(74) J: *Ja gut, wenn wir jetzt, wenn wir die Ableitung haben, dass wenn h gegen null läuft, dann lässt man es immer kleiner werden. Wenn wir h jetzt klein wählen, dann entspricht es ja ungefähr dann der Ableitung.*

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für kleine h

Abbildung 116: Approximationsformel von Johannes zur Begründung der annähernden Gleichheit von $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$

Dabei schreibt er die in Abbildung 116 dargestellte Approximation auf.

Dies ist genau die in der Vorlesung vorgeführte Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer ökonomischen Interpretation als Wert, der die *ungefähren* Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt (siehe Kapitel 7.2.2). Der Interviewer ermutigt Johannes, dass er auf dem richtigen Weg ist, indem er zustimmt und darauf verweist, dass nun noch die nächste Einheit irgendwie in die Argumentation mit reingebracht werden muss.

Das Reinbringen des $h = 1$ in die Argumentation bereitet Johannes aber zunächst anscheinend Schwierigkeiten:

(77) I: *Ja, jetzt brauchen wir noch irgendwie die Zusatzkosten für die nächste Einheit. Die müssen wir noch irgendwie in die Argumentation mit reinbringen.*

(78) J: (Pause) *Ja, wie meinst du das jetzt mit den Zusatzkosten?*

Da Johannes mit der Frage des Interviewers nicht viel anfangen kann, konkretisiert dieser dann die Frage:

(85) I: *Ja, und was ist mit $h = 1$? Was kann man dazu sagen aus ökonomischer Sicht?*

(86) J: *Das ist die/das ist, wenn man den Output um eine Einheit erhöht.*

(87) I: *Ja klar, und wie kann man damit begründen, dass es $[K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$] ungefähr gleich ist?*

(88) J: *Man kann ja nur ganze/ man kann nur ganze Einheiten produzieren.*

(89) I: *Mit der Begründung, dass alles für $h < 1$ überhaupt keinen Sinn macht, richtig.*

(90) J: *Das ist halt die nächst kleinere Einheit, die man mehr produzieren kann.*

Johannes beantwortet hier zwar nicht die Frage, weshalb $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x)$ in der Ökonomie oft annähernd gleich sind. Er liefert aber eine praktische Begründung dafür, weshalb man bei der Interpretation der Ableitung in der Ökonomie in die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für h oft den Wert 1 einsetzt, nämlich dass $h = 1$ eben oft die kleinstmögliche Einheit in der Realität ist. Dies wurde in der Mathematikvorlesung so nicht diskutiert, sondern ist eine weitere alternative Möglichkeit plausibel zu machen, weshalb bei der Interpretation der Ableitung in der Ökonomie häufig die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ verwendet wird. Allerdings zieht

dieses Argument nur für unteilbare Outputs wie Stückzahlen. Außerdem müsste man bei der Verwendung dieses Arguments eigentlich die gesamte Modellierung der Kosten unteilbarer Güter mit einer Funktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ in Frage stellen.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Johannes anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Johannes assoziierte bei der ersten Aufgabe zur Berechnung der Grenzkosten bei $x = 100$ mit diesen zunächst die Ableitung. Er nannte auch die dazu passende Einheit „Geldeinheit pro Mengeneinheit“. Diese begründete er damit, dass die Grenzkosten einer Kostenänderung pro Mengeneinheit entsprechen. Dies deutet eine Auffassung der Grenzkosten als Änderungsrate an. Eine Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit zeigte er nicht.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Bereits zu Beginn des Interviews war Johannes klar, dass die Grenzkosten als Ableitung nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Letztere bestimmte er korrekterweise über die Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$. Ihm war klar, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ entsprechen.

Zur Kontrolle seines Ergebnisses der über $K(x + 1) - K(x)$ bestimmten Zusatzkosten der nächsten Einheit nutzte er aber dennoch den bereits in Aufgabe 1 berechneten Wert von $K'(x)$. Dabei äußerte er sich zufrieden darüber, dass die Werte in etwa gleich waren. Dies deutet darauf hin, dass ihm klar war, dass die Ableitung $K'(x)$ nur eine Approximation der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ ist, so wie es in der Mathematikvorlesung vermittelt wurde. Den Unterschied in den Einheiten zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit bemerkte er durch die Aufforderung des Interviewers, genauer über die Einheit der Zusatzkosten nachzudenken.

Allerdings identifizierte Johannes zu Beginn des Interviews die Ableitung *anscheinend* mit den Zusatzkosten für eine *marginale Einheit*. Unter einer marginalen Einheit verstand er eine Größe, die er als unendlich kleine Einheit bezeichnete. Diese war kleiner als jede für ihn in ein Koordinatensystem einzeichnenbare Einheit. Dies könnte dafür sprechen, dass Johannes die in der Vorlesung vermittelte Auffassung der marginalen Einheit als Sprechweise für eine fiktive, unendlich kleine Größe übernommen hat. Bei weiterem Nachfragen kam dann heraus, dass Johannes unter den Zusatzkosten der nächsten marginalen Einheit aber keine Zusatzkosten im eigentlichen Sinne verstand, sondern ein Verhältnis unendlich kleiner Größen. Dies entspricht wieder der Ableitung, wenn man diese als Verhältnis fiktiver, unendlich kleiner Größen auffasst, wie das in der Mathematik lange Zeit üblich war, und in der Physik teilweise auch heute üblich ist. Insgesamt fasste Johannes die Grenzkosten also durchweg als Ableitung auf. Die Zusatzkosten der nächsten Einheit waren für ihn die Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Johannes konnte eine Verbindung zwischen der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ und der Ableitung $K'(x)$ auf graphischer Ebene über Sekanten- und Tangentensteigung herstellen. Seine

Ausführungen bei der Aufgabe 3 zur Begründung, weshalb bei der dort graphisch gegebenen Funktion die Werte von $K(101) - K(100)$ und $K'(100)$ annähernd gleich sind (siehe Abbildung 114), zeigen zunächst, dass er über das dafür nötige Hintergrundwissen aus der Vorlesung verfügte:

1. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Mögliche Approximation der Tangentensteigung durch Sekantensteigungen bei kleinen Änderungen Δx
3. Beziehung zwischen der Sekantensteigung $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ und der Kostendifferenz ΔK auf graphischer Ebene, visualisiert mit Hilfe eines Steigungsdreiecks

Dass er als Ursache für den geringen Fehler zwischen $K(101) - K(100)$ und $K'(100)$ bei der in dieser Aufgabe graphisch dargestellten Funktion deren annähernde Linearität im Bereich $[100; 102]$ korrekt benannte, spricht dafür, dass er dieses Hintergrundwissen auch zu einer Verbindung zwischen $K'(100)$ und der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ über die Sekanten- und Tangentensteigung verknüpfen konnte.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Johannes konnte auch auf symbolischer Ebene eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen. Wie in der Vorlesung vorgeführt, folgte er hierfür zunächst aus der formalen Definition der Ableitung die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h .

Eine Begründung, weshalb man für $h = 1$ in der Ökonomie von einer guten Näherung ausgeht, gab er hingegen nicht, obwohl das in der Vorlesung angesprochen wurde („ $h = 1$ wird als klein angenommen“). Dafür gab er ein anderes Plausibilitätsargument, weshalb man in der Ökonomie in die Approximationsformel oft $h = 1$ einsetzt und in der Ökonomie als Interpretation der Ableitung oft die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ verwendet. Dieses war, dass $h = 1$ die kleinstmögliche Einheit ist, die es in der Realität gibt. Dies ist eine praktische Perspektive zur Rechtfertigung der ökonomischen Interpretation der Ableitung, die über die in der Vorlesung vermittelte Begründung hinausgeht. Allerdings zieht das Argument nur, wenn der Output Stückzahlen oder Ähnliches sind, und nicht wenn der Output beliebig teilbar ist. Außerdem müsste man bei der Verwendung dieses Arguments eigentlich die gesamte Modellierung der Kosten unteilbarer Güter über eine Funktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ in Frage stellen.

8.4.2 Auswertung des Interviews von Holger

Phase zu Aufgabe 1: Bei der ersten Aufgabe sollen zunächst die Grenzkosten der Kostenfunktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Dabei soll auch die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Euro gegeben ist.

Holger beginnt unverzüglich mit der Lösung der Aufgabe über die Ableitung $K'(100)$:

- (1) I: *Ja, was machst du denn jetzt?*
- (2) H: *Erst mal, ich soll die Grenzkosten bestimmen, da mach ich jetzt*

erstmal die Ableitung.

(3) I: *Mhm* (bejahend).

(4) H: *So, jetzt haben wir, x soll 100 sein.*

Dann haben wir jetzt $K'(100)$ ist ...

Er ermittelt dann das richtige Ergebnis $K'(100) = 1$.

Eine Einheit nennt er nicht. Daher fragt der Interviewer hier nochmal nach:

(7) I: *Was ist denn die Einheit, die dazu gehört?*

(8) H: *Die Einheit, die dazu gehört?*

(9) I: *Mhm* (bejahend).

(10) H: *Hier ist keine Einheit angegeben. Dann ist es einfach die Mengeneinheit.*

(11) I: *Hier steht was* (weist auf den ersten Satz in der Aufgabenstellung von Aufgabe 1 hin), *Moment.*

(12) H: *Ja, ok. Dann kann ich es in Euro, ja Euro. Moment, das ist aber in Mengeneinheiten, ja Output ist ein Euro, das sind dann die Grenzkosten, die bei 100 Mengeneinheiten anfallen.*

(13) I: *Also wäre die Einheit Euro?*

(14) H: *Ja.*

(15) I: *Warum Euro?*

(16) H: *Mhm.*

Die Ausführungen von Holger deuten darauf hin, dass das Dazugehören einer Einheit für ihn trotz des Kostenkontextes nicht selbstverständlich ist. Als er dann die Einheit im Aufgabenkontext sieht, erkennt er, dass dort die Kosten in Euro angegeben sind. Aus dieser Information schließt er, dass die Einheit der Grenzkosten auch Euro ist, wobei er jedoch zögert. Eine Begründung für die Einheit kann er nicht nennen. Dies deutet darauf hin, dass er sich der Antwort nicht sicher ist.

Phase zu Aufgabe 2: In dieser Aufgabe werden die Studierenden mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit). Da Holger die erste Aufgabe mit der Ableitung gelöst hat, wird ihm nun folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Auf die Frage, ob diese Definition genau der Ableitung entspricht, wenn man sie wörtlich nimmt, zögert Holger zunächst:

(21) I: *Wenn man sozusagen diese Definition hier wörtlich nimmt, entspricht das auch genau der Ableitung oder ist das eigentlich was anderes?*

(22) H: *Muss ich nochmal genau lesen.*

(23) I: *Ja.*

(24) H: *Also wir haben hier ja schon die Mengeneinheiten ganz genau gegeben mit 100, müsste eigentlich dasselbe sein, oder nicht?*

Es wirkt so, als ob sich Holger hier zunächst nicht ganz sicher ist.

Er versucht dann die ihm vorgelegte Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit auf das eben berechnete konkrete Beispiel mit den Grenzkosten von 1 Euro pro Mengeneinheit (aus seiner Sicht 1 Euro) anzuwenden:

(24 weiter) H: *Wenn ich mich jetzt an der Definition hier langhangel, wir haben ja hier unser Output x , in diesem Fall von 100, also beim Output, wenn das hier jetzt versinnbildlicht die Grenzkosten, die beim Output von 100 entstehen durch die zusätzlichen Kosten, also von 1 Euro. Das wären die Zusatzkosten um eine Mengeneinheit mehr zu produzieren.*

(25) I: *Mhm, und ist das dann das Gleiche wie die Ableitung?*

(26) H: *Ja.*

Für Holger entspricht die Ableitung also den Zusatzkosten der nächsten Einheit.

Interventionsphase: Da Holger der Auffassung ist, dass Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind, und er Aufgabe 1 mit Hilfe der Ableitung gelöst hat, folgt nun die Interventionsaufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten der nächsten Einheit im graphischen Setting. Diese hat das Ziel, dass Holger nicht mehr seinen Lösungsalgorithmus mit der Ableitung abrufen kann, sondern erneut über die Methode zur Bestimmung der Mehrkosten nachdenkt (siehe Kapitel 8.2.3):

Interventionsaufgabe:

In dem folgenden Koordinatensystem ist der Graph einer anderen (fiktiven) Kostenfunktion K dargestellt (siehe Abbildung 117). Es ist bekannt, dass bereits 10 Mengeneinheiten produziert wurden. Bestimmen Sie die Mehrkosten, wenn die Produktion von 10 um eine weitere Einheit erhöht wird.

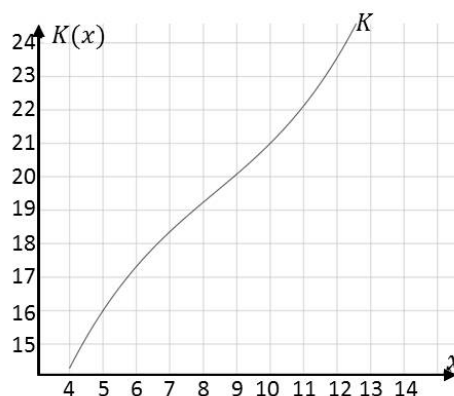


Abbildung 117: Graph der Interventionsaufgabe zur Bestimmung der Zusatzkosten der nächsten Einheit

Auch die Interventionsaufgabe möchte Holger zunächst wieder mit der Ableitung lösen. Dann stoppt er aber und verwendet die Kostendifferenz $K(11) - K(10)$, die er in der Graphik abliest:

(32) H: *Das hier ist die Gesamtkostenfunktion. Man müsste sich sozusagen die Ableitung dazu vorstellen und dann würde man die Mehrkosten eigentlich sehen. Ableitung ist nichts anderes als die Steigung in einem Punkt, das heißt die Steigung in diesem/wenn wir jetzt mal irgendeinen Punkt nehmen.*

(33) I: *Ja, hier ist ja einer gegeben. Wir wollen von dem bestimmten das haben.*

(34) H: *Hier ist ja schon einer gegeben, von 10 Mengeneinheiten, also haben wir x gleich 10, bei 10 haben wir Kosten von 21 eigentlich. Jetzt bräuchten wir die, wenn einer mehr produziert wird. Wobei **wir können uns das eigentlich sparen**, weil wir dann ja bei 11 sind, dann hätten wir Kosten von 22 Komma irgendwas. Dann hätten wir zusätzliche Kosten von 1 Komma, da 1,1 müsste das eigentlich geben.*

Holger erkennt hier also, dass für die Bestimmung der Mehrkosten für die Erhöhung der Produktion von 10 Einheiten um eine Einheit keine Ableitung notwendig ist. Außerdem wird deutlich, dass er die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung in einem Punkt kennt.

Auf Nachfrage des Interviewers, ob bei Verwendung der Ableitung das Gleiche herausgekommen wäre, stimmt Holger zu, wirkt aber wieder nicht sicher. Daraufhin wird er aufgefordert, die Aufgabe nun mit der Ableitung zu lösen:

(37) I: *Kannst du das nochmal ausprobieren geometrisch mit der Ableitung?*

(38) H: *Wenn wir die Ableitung in dem Punkt, sollte möglichst klein sein, die ist ein bisschen höher als eins.*

Das richtige Ergebnis wäre exakt eins. Sein Ergebnis ist aber *etwas größer als eins*. Da der verwendete Rechenweg unklar ist, fragt der Interviewer nochmal nach:

(39) I: *Wie kommst du jetzt darauf [auf das Ergebnis]? Wie liest du das ab?*

(40) H: *Ich versuche halt die Steigung ungefähr abzuschätzen, sprich mit zwei gleich großen Punkten Abstand. Wenn man hier, und dann, ich nehme jetzt mal einfach die 8 und, ach die 9 und die 11, also irgendwo zwischen hier, ein Steigungsdreieck einzeichnen würde, dann kommt man relativ genau bei Eins raus, also so circa. Zwei nach da und zwei nach da.*

Holger hat also zur Ermittlung des Ergebnisses die Steigung der Sekante durch $(9, K(9))$ und $(11, K(11))$ verwendet. Damit ist klar, weshalb er nur einen Näherungswert und nicht das exakte Ergebnis „eins“ erhielt. Ob er diese Sekante nur aus praktischen Gründen gewählt hat, oder dahinter die Fehlvorstellung steckt, dass $K'(x)$ als Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x - h, K(x - h))$ und $(x + h, K(x + h))$ für $h \rightarrow 0$ definiert ist, ist hier noch nicht sicher.

Holger stellt anschließend fest, dass er ungefähr das Ergebnis erhalten hat, was er auf dem anderen Weg über die Differenz auch ermittelt hat, und scheint zufrieden:

(44) H: *Die Steigung hat ungefähr Eins näherungsweise, wir sehen ja auch schon, dass die Steigung der Kosten auch in etwa Eins ist[meint vermutlich die Zusatzkosten, da die Aussage sonst nicht sinnvoll ist], dann kommt das ungefähr hin.*

Der Interviewer betont daraufhin, dass es eben nur „ungefähr“ ist:

(45) I: *In etwa, jetzt hast du ein wichtiges Wort gesagt.*

(46) H: *Das ist ja graphisch. Ich kann es nicht genau sagen.*

Holger stellt hier also nicht die Gleichheit von Ableitung und Kostendifferenz in Frage, sondern sieht den Grund für den numerischen Unterschied in dem graphischen Vorgehen. Er ist also nach wie vor der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sein müssten.

Daraufhin fordert der Interviewer Holger nun für einen numerischen Vergleich der Kostendifferenz mit der Ableitung auf, die Differenz $K(101) - K(100)$ von Aufgabe 1 zu bestimmen und mit der Ableitung zu vergleichen (Ergebnisse: $K(101) - K(100) = 1,051$ versus $K'(100) = 1$). Holger berechnet zunächst richtig $K(100) = 1100$. Bei $K(101)$ erhält er nicht 1101 und scheint überrascht:

(71) H: *... sind wir bei 1101,301.*

(72) I: *Komma 301?*

(73) H: *Ja, wo kommen die denn her?*

Der Interviewer macht den Studenten darauf aufmerksam, dass aber noch ein Rechenfehler drin ist, denn das richtige Ergebnis ist $K(101) = 1100,051$. Nach erneuter Rechnung erhält Holger auch das richtige Ergebnis. Damit scheint er zufriedener, wobei er aber betont, dass immer noch nicht das Ergebnis rauskommt, was in Aufgabe 1 ermittelt wurde:

(76) I: *Was kommt jetzt raus?*

...

(77) H: *Ja, dann kommt man da relativ genau bei [Eins] raus, aber nur relativ. Ich würde das jetzt einfach mal auf die Rundung schieben.*

(78) I: *Was kommt raus?*

(79) H: *1101,051*

(80) I: *Mhm (bejahend). Das ist richtig.*

(81) H: *Aber es ist nicht genau Eins.*

Holger stellt also immer noch nicht die Gleichheit von Ableitung und Kostendifferenz in Frage, sondern nennt als Ursache für den numerischen Unterschied zwischen den Ergebnissen Rundung.

Der Interviewer macht ihn nun darauf aufmerksam, dass hier keine Rundungsfehler vorliegen (die Zahlen waren so gewählt, dass nur endliche Dezimalbrüche auftauchen), was Holger mit einem „OK“ zur Kenntnis nimmt.

Nun ist also offensichtlich, dass $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ unterschiedliche numerische Werte haben. Allerdings wurde noch kein Grund diskutiert. Daher fragt der Interviewer Holger, ob dieser eine Idee hat. Dieser findet zunächst keine spontane Antwort:

(86) I: *Hast du eine Idee, warum da was Unterschiedliches rauskommt?*

(87) H: *Hm, das ist eine gute Frage.*

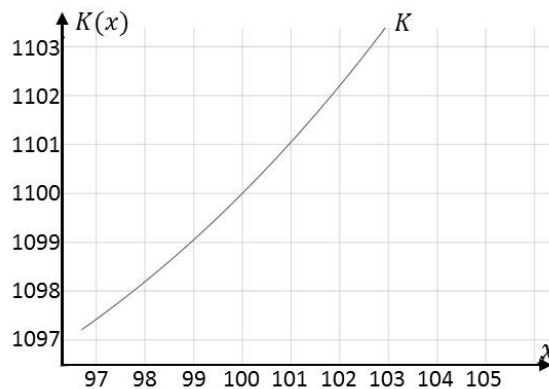


Abbildung 118: Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1

Der Interviewer gibt Holger daraufhin das Bild des Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1, bei der er den Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ berechnet hatte, mit dem Ziel der Visualisierung der einzelnen Werte in der Graphik (siehe Abbildung 118).

Zunächst vollzieht Holger seine Rechnung über die Differenz an der Graphik nach und erkennt, dass der Wert der Zusatzkosten in der Grafik größer als $K'(100) = 1$ ist, wie es gerade auch berechnet wurde:

(90) I: *Ich kann dir nochmal von der Funktion, die du jetzt hattest, ein Bild geben. So sieht sie aus.*

(91) H: *Ok. Da 100, hier 101, ja hier sind wir wieder genau knapp drüber, das ist es halt.*

(92) I: *Das ist genau das, ja.*

(93) H: *Von den Werten her sollte es eigentlich identisch sein.*

Er wiederholt also auch nochmal, dass die Werte eigentlich identisch sein müssten. Die Identität von Ableitung und Zusatzkosten stellt er also immer noch nicht in Frage.

Daraufhin fragt der Interviewer Holger, wie er die Steigung an der Stelle $x = 100$ denn nun graphisch bestimmen würde, in der Hoffnung, dass Holger nun die Tangente einzeichnen würde und den Unterschied erkennt. Dies tut Holger jedoch nicht. Stattdessen nennt er nun nach kurzer Überlegung eine andere Begründung für den numerischen Unterschied zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(100)$ und den Grenzkosten als Zusatzkosten $K(101) - K(100)$:

(95) H: *Ach deswegen, weil es nicht exakt ist. Also auf die Ableitung ist man ja damals gekommen hat, weil man versucht, die Steigung in dem Punkt zu bestimmen, indem man, man stellt sich sozusagen vor, ok, wir nehmen einen Punkt links und rechts davon, die gleich weit entfernt sind und dazwischen die Steigung. Und diesen Raum versuchen wir dann möglichst klein zu machen, so klein wie nur denkbar möglich, aber natürlich können wir ja nicht exakt in dem Punkt landen, aber halt vorstellungsmäßig wollen wir darin landen, und ich nehme mal, dass daher dieser minimale Rundungsfehler, also nicht Rundungsfehler, aber dieser minimale Unterschied kommt, weil man nicht exakt ist.*

Hier wird nun tatsächlich die Fehlvorstellung deutlich, dass Holgers Meinung nach bei dem zur Ableitung führenden Grenzprozess Sekanten durch $(x - h, K(x - h))$ und $(x + h, K(x + h))$ verwendet werden. Deren Grenzwert für $h \rightarrow 0$ entspricht zwar für differenzierbare Funktionen tatsächlich der Ableitung. Aber mit dieser Definition der Ableitung wäre beispielsweise auch die Betragsfunktion bei $x = 0$ differenzierbar mit der Ableitung 0.

Die Fehlvorstellung, die aber ursächlich dafür ist, dass Holger auf graphischem Wege nicht zu einer adäquaten Beziehung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ gelangt, ist seine Vorstellung, dass durch den Grenzübergang zur Ableitung nicht die exakte Steigung in dem Punkt bestimmt wird. Seiner Meinung nach bleibt immer ein kleiner Restfehler. Diesen sieht er nun als Ursache für den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ an.

Der Interviewer interveniert hier noch einmal und möchte darauf hinaus, dass man ja rechnerisch sehr wohl die exakte Ableitung nach dem Grenzübergang ermittelt hat:

(96) I: *Aber rechnerisch sind wir doch exakt in diesem Punkt, oder?*

(97) H: *Ja, rechnerisch schon.*

(98) I: *Da ist ja der Fehler ja auch da.*

(99) H: *Ja, rechnerisch schon, bei der Ableitung sind wir nicht exakt in diesem Punkt eigentlich, wir sind ja nur möglichst nah dran, meine ich. Ich meine, dass man so auf die Ableitung gekommen ist, dass man sich die Ableitung vorstellt, indem man sich dem Punkt so nah wie möglich nähert, wie man kann.*

Holger konkretisiert hier nochmal seine Aussage. Bei der Bestimmung der Ableitung über den Grenzprozess wird seiner Meinung nach die Stelle x *nicht* erreicht, weshalb dann auch die „wahre“ Steigung bei x auch nicht erreicht wird.

Insgesamt sieht man bis hierher, dass Holger zunächst der Ansicht war, dass die Grenzkosten als Ableitung dasselbe wie die Zusatzkosten der nächsten Einheit wären. Auch durch die Intervention gelangte Holger nicht zu der gewünschten Erkenntnis, dass dahinter zwei verschiedene mathematische Objekte stehen. Denn obwohl er erkannte, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit exakt durch die Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ bestimmt werden und den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ bemerkte, kam er nicht zu adäquaten Schlüssen über die Beziehung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf mathematischer Ebene.

Stattdessen sah Holger dann als Ursache des numerischen Unterschiedes an, dass die Ableitung eben nicht der „wahren“ Steigung in einem Punkt entspricht. Er setzte dann also die Zusatzkosten der nächsten Einheit numerisch mit der „wahren“ Steigung in einem Punkt gleich, die eben seiner Meinung nach durch die Ableitung $K'(x)$ *nicht* exakt ermittelt wird, weil beim Grenzübergang der Punkt x nicht erreicht wird.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Die zugehörige Graphik ist in Abbildung 119 dargestellt.

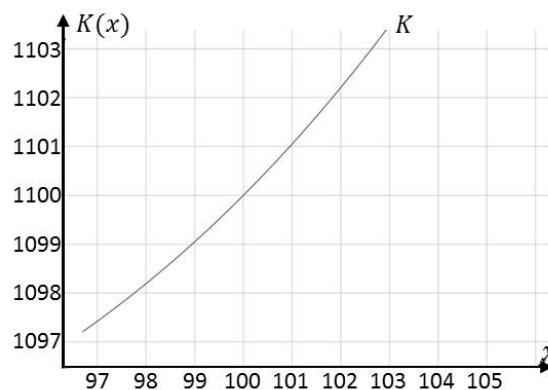


Abbildung 119: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Da die Graphik Holger bereits aus der Interventionsphase vorliegt, wird die Aufgabe hier nicht als schriftliche Aufgabe vorgelegt, sondern durch den Interviewer mündlich gestellt. Er fragt Holger, ob er erklären kann, weshalb man in den Wirtschaftswissenschaften im Allgemeinen von einem kleinen Fehler zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ ausgeht, bzw. ob er ein Beispiel einer Funktion nennen könnte, bei welcher der Fehler groß wäre.

Zunächst antwortet Holger, dass bei höherer Steigung der Fehler größer wäre. Als Beispiel nennt er die e-Funktion:

(106) I: *Gibt es vielleicht eine Funktion, bei der er [der Fehler] größer ist, hast du da eine Idee, wo das sozusagen nicht hinhaut?*

(107) H: *Der Fehler müsste eigentlich größer werden je, ich würde behaupten, je stärker die Steigung ist, also je je höher die Steigung ist eigentlich, also sprich bei sowas wie der e-Funktion oder so. Oder wenn sie Sprünge macht.*

Die Antwort „bei höherer Steigung“ ist falsch, wenn man sie wörtlich nimmt. So liegt der Fehler bei linearen Funktionen mit sehr großer Steigung sogar bei 0. Dementsprechend zeichnet der Interviewer nun zur Provokation eine solche lineare Funktion:

(108) I: *Da ja, gut ok. Wir gehen mal von einer/ nehmen wir mal eine andere. So wie wäre es denn mit der hier, da ist die Steigung doch auch relativ hoch [zeichnet eine lineare Funktion mit großer Steigung]. Wäre da der Fehler eher groß oder eher klein?*

(109) H: *Ach, ich glaube das ist, bei linearen Funktionen würde es genau passen.*

Holger ist also der Ansicht, dass der Unterschied zwischen den numerischen Werten von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bei linearen Funktionen gleich 0 ist. Da Holger bisher keine adäquaten Vorstellungen zum Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene zeigte, wäre es hier sehr interessant zu erfahren, wie er zu dieser Ansicht kommt. Daher fragt der Interviewer nach:

(112) H: *Bei linearen Funktionen, da ist ja, ist die Steigung ja immer gleich in jedem Punkt.*

(113) I: *Ja.*

(114) H: *Und dann haben wir auch eine exakte Steigung. Dann ist das nicht das Problem und bei allen, ich sage mal jetzt Kurven oder **geschwungenen Funktionen** ist es nicht so, weil die Steigung sich da die ganze Zeit ändert und dann hat zwischen diesen zwei Punkten ist es dann immer schwerer diesen Wert zu bestimmen. Also zum Beispiel bei Parabeln hätte man dasselbe Problem und nur bei linearen Funktionen würde es komplett wegfallen.*

Die Argumentation passt sehr gut zu Holgers vorherigen Äußerungen. Bei linearen Funktionen ist die Steigung der Sekanten im Grenzprozess schließlich immer exakt der Steigung der Funktion in dem gesuchten Punkt. Bei nichtlinearen Funktionen (die er „geschwungene Funktionen“ nennt) ist das nicht der Fall. Dort ist seiner Meinung nach das Ergebnis nicht exakt, weil es immer schwerer sei „diesen Wert“ (vermutlich die Steigung im gesuchten Punkt) zu bestimmen.

Er erklärt das nun noch einmal genauer:

(117) H: *Ja, die Differenz muss ja dann irgendwo daran liegen. Man nähert sich den Punkten ja, wie gesagt, an, dann hat man einen Punkt minimal rechts und minimal links davon. Zwischen diesen beiden Punkten ist die Steigung ja minimal anders als sie eigentlich im richtigen Punkt wäre.*

Hier werden nochmal Holgers Vorstellungen zum Grenzübergang bei der Ableitung sehr deutlich. Seiner Meinung nach wird dabei „der wahre Punkt“ x nicht erreicht. Stattdessen erhält man über die rechnerische Ableitung eigentlich die Steigung einer Sekante durch $(x-h, K(x-h))$ und $(x+h, K(x+h))$ für ein „minimales h “ (was auch immer das sein soll). Ändert sich nun die Steigung in einer Umgebung des Punktes x sehr schnell, liefert diese Sekante natürlich eine schlechtere Näherung der „wahren“ Steigung.

Nun ist bisher in keiner von Holgers Argumentationen die Differenz $K(x+1) - K(x)$ aufgetaucht, die er ja in der Interventionsaufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten der nächsten Einheit berechnet hatte. Auf eine entsprechende Nachfrage findet Holger keine Antwort:

(120) I: *Und wie kommt die Differenz hier zur nächsten Einheit rein? Die haben wir sozusagen noch gar nicht drin in der Argumentation bis jetzt.*

(121) H: *Ja, ja, warte. Das ist eine richtig gute Frage. Ich glaube das kann ich im Moment nicht genau sagen.*

Insgesamt stellt Holger also bis hierher keine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene her. Obwohl er erkennt, dass der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bei linearen Funktionen gleich 0 ist, liefert er keine adäquate Begründung dafür. Er erklärt dies damit, dass bei nichtlinearen Funktionen die „wahre Steigung“ durch den Grenzübergang bei der Ableitung (durch die seiner Meinung nach die Steigung einer Sekante durch

$(x - h, K(x - h))$ und $(x + h, K(x + h))$ für ein „minimales h “ bestimmt wird) nicht genau getroffen wird.

Nun will der Interviewer (etwas später im Interview) noch erfahren, ob Holger Ideen hätte, weshalb man bei Funktionen in der Ökonomie von einem kleinen Fehler ausgehen kann, was aber in der Mathematikvorlesung nicht thematisiert wurde. Unglücklicherweise interpretierte der Interviewer Holgers vorherige Aussagen so, als ob dieser nicht nur der Ansicht war, dass bei linearen Funktionen der Fehler gleich 0 ist, sondern der Fehler größer wird, je stärker eine Funktion gekrümmt ist:

(140) I: *Hier hast du ja gesagt, dass es [der Fehler] davon abhängt, wie die Funktion gekrümmt ist.*

(141) H: *Ja.*

Dabei dachte der Interviewer an einen intuitiven Begriff der Krümmung, wie er in Schulbüchern verwendet wird (Bigalke u. a., 2011, S.149), der nur zum relativen Vergleich der Krümmung zweier Funktionen verwendet werden kann. Holger widerspricht hier aber nicht, dass er auch der Ansicht sei, dass die Stärke der Krümmung die Größe des Fehlers bestimmt. Eine passende Begründung auf Basis von den bisher ermittelten Vorstellungen zur Ableitung von Holger wäre: Die wahre Steigung an der Stelle x wird bei stärkerer Krümmung schlechter durch die Sekante durch $(x - h, K(x - h))$ und $(x + h, K(x + h))$ mit minimalem h approximiert, da sich die Steigung der Funktion sich zwischen $x - h$ und $x + h$ noch stärker ändert. Eine solche Argumentationslinie brachte Holger aber nicht explizit.

In dem Glauben, dass das Argument mit der Krümmung von Holger selbst kam, fragt der Interviewer dann nach, weshalb Funktionen in der Ökonomie häufig schwach gekrümmt sind (und daher der Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ im Allgemeinen als klein angenommen werden kann):

(142) I: *Kannst du dir vorstellen, warum Funktionen in der Ökonomie häufig schwach gekrümmt sind?*

Holger versucht einen Zusammenhang zwischen dem vom Interviewer eingebrachten Begriff der Krümmung und einem ökonomischen Kontext herzustellen, indem am Beispiel einer Kostenfunktion eine Erklärung sucht:

(145) H: *Wenn die Krümmung jetzt wer weiß wie stark wäre, dann würden ja pro Stück, was ich eben schon gesagt habe, würden die Kosten dann explodieren, ja nicht explodieren, aber exponentiell steigen in dem Zusammenhang dann. Und in der Realität macht das ja wenig Sinn, weil man dann erstens für jede weitere Einheit würde es ja immer mehr steigen, also immer viel, viel teurer werden. Und das macht je wenig Sinn. Das wäre dann, dass man für zwei Einheiten viel, viel mehr zahlen würde als für eine Einheit mehr.*

Holger bringt hier eine starke Krümmung mit der raschen Änderung der Kosten pro Stück in einen Zusammenhang: eine starke Krümmung bedeutet eine rasche Zunahme der Kosten für jede weitere Einheit. Dies ist seiner Meinung nach aber nicht plausibel, weil sich die Kosten pro Einheit in der Realität kaum von Einheit zu Einheit so stark

ändern würden (was meiner Meinung nach ein sehr gut nachvollziehbares Argument ist).

Auf die Aussage von Holger hin, dass stark gekrümmte Funktionen in der Ökonomie nicht sinnvoll wären, provoziert der Interviewer noch mit der Aussage, weshalb denn nicht alle Kostenfunktionen linear sind. Denn das wäre ja der Fall, wenn die Kosten pro Einheit konstant sind. Holger argumentiert hier mit Verschleiß:

(146) I: *Und warum kann man dann nicht davon ausgehen, dass alle Kosten linear sind? Ich denke die Kosten sind immer konstant.*

(147) H: *Ganz linear können die auch nicht sein, weil man muss ja immer zu bedenken, so Sachen wie Verschleiß dabei. Und alles, was läuft, geht dann ein bisschen mehr kaputt sozusagen all diese Dinge. Es ist ja nicht so als würde nichts mehr passieren, wenn wir immer eine mehr produzieren.*

Dies sind sehr interessante Argumentationen. Sie zeigen, dass Studierende der Ökonomie adäquate Ideen über Eigenschaften ökonomischer Funktionen haben, auch wenn über diese in der mathematischen Lehrveranstaltung gesprochen wurde.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Holger ignoriert zunächst, dass er laut Aufgabenstellung zur Begründung des Unterschieds zwischen den Grenzkosten $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ die Definition der Ableitung verwenden sollte, und beginnt mit einer allgemeinen Begründung:

(127) H: *Weil bei ökonomischen Funktionen haben wir in der Regel einen gewissen Absolutwert.*

Der Interviewer versteht die Begründung nicht, weshalb er nochmal nachfragt:

(128) I: *Was meinst du damit? [mit dem „Absolutwert“]*

(129) H: *Es geht ja meistens irgendwie um Euro oder Mengen oder irgendetwas in der Art und da gibt es nicht/ also klar, zahlenmäßig gibt es 0,05 Cent vielleicht, aber in der realen Welt halt nicht. Das kann man dann vereinfacht so sehen. Weil in dem ökonomischen Kontext geht es nicht darum, dass wir einen numerisch perfekten Wert wollen, sondern wir wollen einen, der das Ganze möglichst genau widerspiegelt. Also, wie gesagt, diese 0,051 Euro sind dann hinfällig, wenn man so möchte.*

Holger erklärt also, dass der Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ in der Realität nicht wichtig ist, weil dort keine numerische Perfektion nötig ist.

Auf Nachfrage, weshalb nicht doch zufällig ein größerer Fehler auftreten könnte, überlegt er, findet Holger aber keine passende Antwort.

(130) I: *Aber warum kann ich in der Regel davon ausgehen, dass der Fehler doch klein ist und nicht groß?*

(131) H: *Weil wir zum einen zu ökonomischen Funktionen, die werden ja auch nicht unendlich groß gewählt. Ah, ne, damit kann ich das auch nicht, ne. So ökonomische Funktionen, die haben ja immer um Euro.*

(132) I: *Genau, es geht jetzt um Kostenfunktionen.*

(133) H: *Genau, ja. Und weil die Funktion immer rational, ne ist auch quatsch. Ja, wie gesagt ich denke die ganze Zeit daran, dass es gar nicht sinnvoll ist im Zusammenhang mit dem Euro.*

Er scheint hier irgendwie wieder mit den Einheiten in der Ökonomie argumentieren zu wollen (wie genau wird aber nicht klar). Was er mit „Funktionen sind immer rational“ meint, bleibt auch unklar. Insgesamt findet er keine Antwort, weshalb kein großer Fehler zu erwarten ist. Klar wird aber, dass er kleine Fehler nicht nur für tolerierbar hält, sondern numerische Perfektion sogar als überflüssig ansieht.

Nun war aber die Aufgabe, mit der *Definition der Ableitung* zu begründen, weshalb man in der Ökonomie von einem kleinen Fehler ausgehen kann. Daher weißt der Interviewer darauf hin:

(148) I: *Dann kommen wir jetzt nochmal zu der letzten Sache mit der Definition der Ableitung. Die hatten wir jetzt noch nicht.*

Holger weiß die Definition der Ableitung nicht mehr und bekommt sie deshalb auf einer Karteikarte vorgelegt als $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$, damit das Interview nicht steckenbleibt (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5). Daraufhin möchte Holger nach kurzer Überlegung wieder graphisch argumentieren:

(151) H: *Wegen dieser schwachen Krümmung eigentlich. Weil, wenn wir uns das vorstellen, geht das ja nicht komplett linear. Aber die geht ja annähernd linear, ist jetzt auch das falsche Wort, aber eben nur schwach gekrümmt und dann wäre es ja so, als wenn wir es für eine einfache lineare Funktion vorstellen, ist ja theoretisch auch denkbar. Dann würde es ja sowieso gelten k von x plus 1 minus k von x, dann ist es ganz gleich. Und weil wir immer diese schwach gekrümmten Funktionen haben, die ja annähernd linear sind, fällt dann der Limes auch raus.*

Holger nennt nun selbst das Argument mit der Stärke der Krümmung, wobei es sein kann ist, dass er die Aussage, dass bei stärker gekrümmten Funktionen der Fehler größer ist, vom Interviewer übernommen hat. Die anschließende Argumentation mit dem Rausfallen des Limes ist für mich leider nicht nachvollziehbar.

Da es das Ziel der Aufgabe war, herauszufinden, inwieweit die Studierenden auf der *symbolischen* Ebene eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen können, fragt der Interviewer noch einmal explizit nach einer Argumentation ohne Verwendung der graphischen Ebene:

(152) I: *Fällt dir noch eine andere Argumentation ein, wo man sozusagen dieses graphische Argument der Krümmung nicht mit reinnimmt?*

(153) H: *Ja, also müssen wir es mathematisch machen, ich gucke nochmal*

auf die Funktion. [nimmt das Blatt mit der konkreten Kostenfunktion aus Aufgabe 1 mit der Gleichung $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ vor

(154) I: *Graphisch ist ja auch mathematisch.*

(155) H: *Ja, ja, ja. Umgangssprachlich mathematisch, also Zahlen.*

Das deutet darauf hin, dass Holger nun versucht, die vorher genannte Begründung mit der schwachen Krümmung jetzt algebraisch zu begründen.

Nach kurzem Überlegen nennt er dann folgende Begründung der geringen Krümmung von K :

(155 weiter) H: *Es muss auf jeden Fall an dem Vorfaktor hängen, der halt immer sehr, sehr gering ist, irgendwo da muss es [hängen].*

Das Nennen des „immer sehr geringen Vorfaktors“ (hier: $\frac{1}{1000}$) als Ursache für den Fehler deutet darauf hin, dass er die Funktion K als prototypischen Stellvertreter für ökonomische Funktionen ansieht, die seiner Meinung nach immer eine ähnliche Form wie die hier verwendete Funktion $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ mit einem sehr geringen Leitkoeffizienten haben.

Auf Nachfrage, weshalb es an diesem Vorfaktor hängen muss, argumentiert er damit, dass der erste Vorfaktor (vor einem Polynom) im Wesentlichen die Gestalt der Funktion bestimmt:

(156) I: *Warum muss es an dem hängen?*

(157) H: *Der erste Vorfaktor ist natürlich entscheidend, weil das hier bestimmt eigentlich, wie die Funktion aussieht. Es ist das höchste x und das ist dann immer das Relevanteste. Also weil der Vorfaktor hier sehr klein ist, bei diesen Funktionen, weil sonst wäre es eine stark gekrümmte Funktion.*

Holger versucht also das Krümmungsargument auf der algebraischen Ebene wiederzufinden. Er behauptet, dass der erste Vorfaktor das Aussehen der Funktion bestimme und ein großer erster Vorfaktor eine starke Krümmung bedeuten würde (ein kleiner Vorfaktor bedeute dagegen eine schwache Krümmung). Dass der erste Vorfaktor die Gestalt einer Funktion bestimmt, ist aber nur asymptotisch für x gegen unendlich richtig. Außerhalb eines Intervalls $[a; \infty)$ (a groß) bestimmen auch die Terme niedrigerer Ordnung die Gestalt der Funktion (und damit auch das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Funktion).

Holger versucht nun noch in sein Argument die Definition der Ableitung reinzubringen, was aber nicht sinnvoll gelingt:

(157 weiter) H: *Und dann wäre es halt näherungsweise, also ohne den Limes, wäre es halt näherungsweise so, als ob man einfach nur das x immer noch hätte, $x+1$ minus K vom normalen x , da muss es irgendwie stecken. Aber ich glaube genauer als so kriege ich es auch nicht.*

Damit endet das Interview.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Holger anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Holger assoziierte bei der Aufgabe zur Berechnung der Grenzkosten bei einem Output von $x = 100$ diese zunächst mit der Ableitung. Bei der Einheit gab er hingegen € an, also eine Einheit der absoluten Kosten. Diese passt nicht zu der Auffassung der Grenzkosten als Ableitung. Allerdings konnte Holger keine Begründung der Einheit nennen, und schien sich auch nicht sicher.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Holger war zunächst der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen müssten. Auch durch die Intervention gelangte er nicht zu adäquaten Erkenntnissen über Unterschiede zwischen diesen beiden. Zwar erkannte er, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit exakt durch die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ bestimmt werden und erkannte auch den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$.

Er begründete diesen nach kurzem Nachdenken dann aber damit, dass die Ableitung $K'(x)$ eben nicht exakt der „wahren“ Steigung in dem Punkt x entspricht, da dieser bei der Grenzwertbildung nicht erreicht wird. Die Ableitung $K'(x)$ entspricht in seinen Vorstellungen eigentlich der Steigung einer Sekante durch $(x-h, K(x-h))$ und $(x+h, K(x+h))$ für ein „minimales“ h , wobei er nicht sagte, was das ist. Den Wert der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x Einheiten um eine Einheit identifizierte er dann mit dem der „wahren“ Steigung im Punkt x .

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Holger konnte auf graphischer Ebene keine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ herstellen. Zwar kannte er die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung in einem Punkt. Dies genügte jedoch nicht zur Herstellung einer Verbindung von $K'(x)$ zur Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ auf der graphischen Ebene. Zentral wäre hier die Tangente gewesen (siehe Abbildung 113 in der a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4).

Über die graphische Repräsentation der Ableitung als Steigung der Tangente schien Holger aber nicht zu verfügen. Denn für ihn war ja die Ableitung gedanklich die Steigung einer Sekante durch $(x-h, K(x-h))$ und $(x+h, K(x+h))$ mit einem minimalen h (wobei er nicht sagte, was das ist). Diese Fehlvorstellung war schließlich für Holger auch eine Erklärung des numerischen Unterschiedes zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$. Daher gab es dann für ihn auch keine weitere Notwendigkeit, nach einer weiteren Beziehung zwischen $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x)$ auf der graphischen Ebene zu suchen.

Zwar erkannte Holger, dass es bei linearen Funktionen keinen Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ gibt. Diesen erklärte aber eben wieder mit derselben falschen Vorstellung: Bei nichtlinearen Funktionen ändert sich die Steigung in einer Umgebung eines Punktes x , weshalb die „wahre“ Steigung durch die Ableitung, die ja seiner Auffassung nach einer Sekantensteigung entspricht, „nicht genau getroffen wird.“

Dennoch hatte Holger später interessante, adäquate eigene Ideen, weshalb Funktionen in der Ökonomie zumindest *über Bereiche einiger Einheiten* annähernd linear sind, was dann einen geringen numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ zur Folge hat. Er hat hier die vom Interviewer eingebrachte Abhängigkeit dieses Unterschiedes von der Krümmung der Funktion mit einem intuitiven Krümmungsbegriff aufgegriffen (je stärker die Krümmung, desto größer der Fehler). Holger begründete dann plausibel, weshalb zum Beispiel Kostenfunktionen eine vergleichsweise schwache Krümmung haben: Es ist eben *nicht* plausibel, dass sich die Kosten von Einheit zu Einheit rasch ändern. Dies sind adäquate Ideen, die über die Mathematikvorlesung hinaus gehen.

Insgesamt sieht man aber, dass Holgers Fehlvorstellung zum Grenzübergang bei der Ableitung, dass die Ableitung $K'(x)$ nicht der „wahren Steigung“ im Punkt x entspricht, zentral dafür war, dass er keine adäquate Beziehung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente auf graphischer Ebene herstellen konnte.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auch auf der symbolischen Ebene hatte Holger Schwierigkeiten eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herzustellen. Zunächst wusste er die Definition der Ableitung nicht mehr. Als sie ihm dann gegeben wurde, arbeitete er mit ihr dennoch nicht weiter (z.B. um daraus die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ wie in der Mathematikvorlesung zu folgern, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5).

Stattdessen griff er nun Ideen zur Größe des Fehlers zwischen der Ableitung $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ in Abhängigkeit von der Stärke der Krümmung der Funktion auf, die sich im Interview ergeben hatten. Er versuchte nun auf symbolischer Ebene zu begründen, weshalb Funktionen in der Ökonomie häufig eine schwache Krümmung aufweisen. Dies wollte er anhand der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 mit der Gleichung $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ erklären. Er argumentierte dann, dass die vergleichsweise schwache Krümmung an dem „immer geringen Vorfaktor“ vor dem Monom mit der höchsten Potenz hängen müsste, denn dieser bestimmt maßgeblich die Gestalt der Funktion.

Dies ist allerdings nur für betragsmäßig große x richtig. Dennoch ist seine Begründung eine interessante Idee, da in der Ökonomie tatsächlich häufig Produktionen für große x betrachtet werden. Außerdem deutet Holgers Idee darauf hin, dass er die Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ mit einem betragsmäßig geringen Vorfaktor als prototypische Kostenfunktion ansah. Eine Verbindung von dieser Idee, den geringen Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ algebraisch mit Hilfe der Funktionsgleichung zu begründen zur Definition der Ableitung konnte er dann aber nicht herstellen.

Insgesamt konnte Holger also *nicht* die in der Vorlesung präsentierte Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h herstellen. Stattdessen versuchte er eine algebraische Begründung mit Hilfe der Funktionsgleichung der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) dafür zu geben, weshalb Kostenfunktionen in der Ökonomie vergleichsweise schwach gekrümmt sind, und damit der Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ gering ist. Aber auch dabei kam er nicht ganz zum Ziel.

8.4.3 Auswertung des Interviews von Detlef

Phase zu Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollen die Grenzkosten der Kostenfunktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Außerdem soll die Einheit angegeben werden, wenn x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Euro gegeben ist.

Detlef beginnt zunächst mit einem falschen Ansatz:

- (1) D: *Ok. Jetzt soll ich also die Grenzkosten bestimmen.*
- (2) I: *Mhm, ja, genau.*
- (3) D: *Und dann müsste ich das ja theoretisch, also die Kostenfunktion, würde ich jetzt sagen, durch 100 teilen.*

Detlef könnte hier die Grenzkosten $K'(x)$ mit den Durchschnittskosten bzw. Stückkosten $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ verwechseln. Auch in dem in Kapitel 6 dargestellten Vortest wurden Grenzkosten teilweise als Kosten pro Stück interpretiert (9.1% der Teilnehmer, siehe Abbildung 93). Auf Nachfrage des Interviewers wird jedoch deutlich, dass Detlef hier lediglich eine falsche Rechenvorschrift aus der in der Ökonomie üblichen Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit gebildet hat:

- (4) I: *Durch 100, wieso durch 100?*
- (5) D: *Also die Grenzkosten ist ja quasi, also was für Kosten entstehen bei einer Einheit mehr, oder?*

Der Interviewer macht ihn darauf aufmerksam, dass man durch Teilen durch 100 die Stückkosten bei einem Output $x = 100$ bestimmt, was Detlef dann für sich selbst auch nachvollzieht:

- (8) I: *Das wären die Stückkosten.*
- (9) D: *Ach so, das wären die Stückkosten.*
- (10) I: *Das wären die Stückkosten, wenn ich durch 100 teile.*
- (11) D: *Stimmt, dann hätte ich quasi genau, wieviel kostet eins.*

Detlef versucht nun aus seiner Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit die passende Rechenvorschrift zu rekonstruieren:

- (13) D: *Ja, ok. Die Grenzkosten ist ja, wieviel kostet eine Einheit mehr.*
- (Pause). *Das ist jetzt interessant, weil/ also dann will man ja quasi wissen, wie viel kosten 99 und wieviel kosten 100, oder? Und dann der Unterschied.*

Er rekonstruiert dann passend dazu die Rechenvorschrift $K(100) - K(99)$. Dies wären allerdings die Kosten für die letzte Einheit und nicht für eine Einheit mehr, weshalb der Interviewer ihn nun darauf hinweist (auch wenn es Lehrbücher gibt, wo die Grenzkosten auch als Kosten der letzten Einheit definiert werden, siehe zum Beispiel (Wöhe u. Döring, 2013, S.300)):

- (16) I: *Ja, dann würde ich dich bitten, das zu machen, ja.*
- (17) D: *Einfach die 99 und die 100 einsetzen und dann die Differenz bilden?*
- (18) I: *Bei einer Einheit mehr wären es natürlich 101 und 100.*
- (19) D: *Ja, natürlich.*

Detlef führt nun die Rechnung mit dem Taschenrechner aus und erhält für $K(100)$ das richtige Ergebnis 1110:

(24) I: *Was kommt raus?*

(25) D: *1100?*

(26) I: *Mhm.* (bejahend)

Weil Detlef sich mit dem Eintippen schwer tut, nennt der Interviewer nun selbst das Ergebnis für $K(101)$: 1101,05. Nach dem Aufschreiben fragt der Interviewer Detlef nun noch einmal, wie groß die Grenzkosten nun wären:

(32) I: *Ja, also die Grenzkosten wären jetzt was?*

(33) D: *Also man zahlt ja für 100 1100. Für 101 zahlt man 1101 und 0,5 Cent. Das heißt die Differenz einfach. Also ein Euro Komma 05.*

Detlef nennt hier auch gleich die Einheit €, die konsistent zu seiner Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit ist.

Dies erfolgte vielleicht aber nicht bewusst, weshalb der Interviewer nochmal nachfragt:

(34) I: *Wenn sozusagen die Kosten in Geldeinheiten in Geldeinheiten gegeben sind und der Output in Mengeneinheiten. Was wäre jetzt die Einheit von dem, was du jetzt berechnet hast?*

(35) D: *Menge pro, nee.*

Hier geht Detlefs Überlegung offenbar in eine falsche Richtung. Dies spricht dafür, dass er das € vorher tatsächlich unbewusst gesagt hat.

Nachdem der Interviewer ihn nochmal auffordert, die Einheit aus seinem inhaltlichen Verständnis der Grenzkosten zu rekonstruieren, erkennt Detlef dann aber, dass die Einheit passend zu seiner Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit € sein müsste:

(39) I: *Dank daran, was die Grenzkosten sind.*

(40) D: *Ah, Euro.*

(41) I: *Ja, das wäre die Einheit. Das ist*

(42) D: *Ach so, das ist die/ach so, ja gut, ok. Ja, das wäre, ja das hier in Euro genau.*

Insgesamt sieht man, dass Detlef die Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit auffasst. Zu dieser nennt er auch die passende Rechenvorschrift als Kostendifferenz und die passende Einheit. An die Definition der Grenzkosten als Ableitung aus der Mathematikvorlesung hat er bis jetzt anscheinend noch nicht gedacht (auch nicht bei seinen Überlegungen zur Einheit).

Phase zu Aufgabe 2: In dieser Aufgabe werden die Studierenden mit der alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert (als Ableitung oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit). Weil Detlef die Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit versteht, konfrontiert ihn der Interviewer mit der Definition der Grenzkosten als Ableitung:

- (43) I: *Ja, nun gab es in der Vorlesung, ich weiß nicht, ob du dich Erinnerst, da wurden die Grenzkosten anders definiert. Da wurden die als Ableitung der Kostenfunktion definiert. Erinnerst du dich daran, vielleicht so dunkel?*
 (44) D: *Ja, das kann sein.*

Detlef scheint sich nicht wirklich daran zu erinnern, aber er nimmt es anscheinend zunächst so hin. Nun fragt der Interviewer nach, ob mit der Ableitung das Gleiche rauskäme:

- (45) I: *Jetzt ist die Frage, ist das das Gleiche? Die Ableitung an der Stelle 100, wie das was du gerade berechnet hast?*
 (46) D: *Wie das Einsetzen?*
 (47) I: *Wie die Mehrkosten für die nächste Einheit?*
 (48) D: *Ach so.*
 (49) I: *Entspricht das dem Gleichen oder ist das eigentlich was anderes?*
 (50) D: *Also die Ableitung der Kostenfunktion, ja eigentlich ist es doch das Gleiche, oder nicht? Moment mal, wenn ich die Ableitung bilde, dann habe ich ja. . . . Ja, es muss ja das Gleiche sein, weil Herr Dietz doch*
 (51) I: *Weil das Herr Dietz immer sagt?*
 (52) D: *Weil das Herr Dietz immer sagt. (lacht)*

Detlef ist also der Ansicht, dass die Ableitung $K'(x)$ und die von ihm bestimmten Kosten der nächsten Einheit dasselbe seien. Die Begründung, dass der Lehrende der Mathematikvorlesung dies sagen würde, kam aber hier vom Interviewer, der Detlef leider in seinen Ausführungen unterbrach. Denn der Interviewer war bei der Nennung des Namens des Lehrenden sehr überrascht, da der Lehrende klar betont hat, dass die Ableitung $K'(x)$ *nicht* genau die Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt.

Detlef gibt sich nun aber nicht mit diesem „Autoritätsargument“ zufrieden und beschäftigt sich weiter mit der Frage:

- (52 weiter) D: *Also wir haben die Grenzkosten gebildet und es geht quasi um diese 1,05 Euro.*
 (53) I: *Ja.*
 (54) D: *Und finden wir die durch die Ableitung raus. Ist das die Frage?*
 (55) I: *Naja das könnte man probieren erst mal.*

Es scheint so, als würde Detlef sich zum ersten Mal mit der Frage der Identität der Grenzkosten als Ableitung und der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit beschäftigen. Dies ist überraschend, denn bei der Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung in der Vorlesung wurde durch den Lehrenden betont und am Beispiel demonstriert wurde, dass die Ableitung $K'(x)$ nicht die Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt (siehe a-priori Analyse der Aufgabe in Kapitel 8.2.3 oder Darstellung der Vorlesungsinhalte zur Ableitung in Kapitel 7.2.2).

Interventionsphase: Das Interviewkonzept sieht vor, dass in der Interventionsphase durch einen Vergleich von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf der graphischen Ebene festgestellt werden soll, dass die Grenzkosten als Ableitung *nicht* den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. (siehe Kapitel 8.2.3). Da Detlef in Aufgabe 1 mit

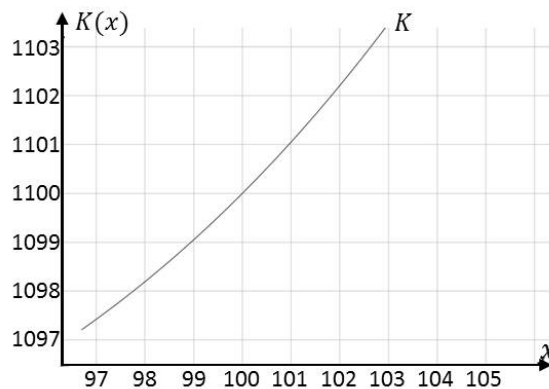


Abbildung 120: Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1

der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ begonnen hatte, legt ihm der Interviewer nun, wie im Interviewkonzept vorgesehen, die zugehörige Graphik der Funktion vor (siehe Abbildung 120), und fordert ihn nun zur graphischen Bestimmung der Ableitung auf:

(57) I: *Jetzt die Frage, kannst du irgendwie die Ableitung einzeichnen, dass man sie sieht?*

(58) D: *Ja, ist ja eine Tangente, nicht wahr?*

(59) I: *Mhm, genau. Deswegen habe ich das Lineal mitgebracht.*

(60) D: *Ja, ich würde dann so, also die muss ja quasi an einem Punkt tangieren [zeichnet die Tangente korrekt ein]. Würde ich jetzt so einzeichnen. Und die geht dann ja quasi mit der Kurve.*

Detlef assoziiert die Ableitung also mit der Tangente, die er korrekt einzeichnen kann. Ob er wirklich glaubt, dass die Ableitung die Tangente ist, oder er hier nur sprachlich ungenau ist, ist an dieser Stelle noch nicht klar. Nebenbei wird hier deutlich, dass Detlef den Tangentenbegriff geometrisch als Berührende auffasst (Vinner, 1982). Jetzt möchte der Interviewer, dass Detlef auch $K'(100)$ graphisch bestimmt:

(61) I: *Und jetzt ist die Frage, was hast du gerade berechnet? Kannst du das auch irgendwie [einzeichnen]?*

Hier versteht Detlef nicht, was der Interviewer von ihm will. Daher wird der Interviewer dann konkreter:

(63) I: *Du hast da die Differenz berechnet.*

(64) D: *Das Delta habe ich doch hier zwischen dem hier berechnet. [zeigt auf zwei Werte, entweder die Funktionswerte $K(101)$ und $K(100)$ oder die Punkte $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$, was man im Video wegen der Perspektive nicht genau sieht]*

(65) I: *Genau richtig.*

Detlef kann also die Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ in der Graphik visualisieren. Nun möchte der Interviewer, dass Detlef auch den numerischen Wert von $K'(100)$ in der Graphik visualisiert:

- (65) weiter I: *Und jetzt ist die Frage, der Wert, den man rauskriegen würde bei der Ableitung, wo wäre dann der zu sehen bei der Skizze?*
 (66) D: *Wenn ich welchen Wert rauskriegen würde?*
 (67) I: *Wenn ich die Ableitung sozusagen berechnen würde an der Stelle 100, wo wäre denn der Wert in der Skizze? Kann man den auch sehen in der Skizze den Wert?*

Detlef kommt hier nicht weiter, weshalb der Interviewer einen Hinweis gibt, und dabei an die Tangente anknüpfen möchte, die Detlef bereits eingezeichnet hat:

- (73) I: *Hast du schon richtig gesagt, ist die Steigung der Tangente.*
 (74) D: *Genau.* (unmittelbar danach)
 (75) I: *Jetzt ist die Frage, ob ich die hier irgendwie ablesen kann auf dem Bild?*
 (76) D: *Das ist eine gute Frage.* (Pause) *Ja schon.*

Während des Interviews glaubte der Interviewer, dass Detlef bereits von der *Steigung* der Tangente gesprochen hatte, weshalb er diese hier nannte. Die Analyse des Interviews zeigte dann aber, dass Detlef zuvor den Begriff der Tangente, nicht aber den der Steigung verwendet hat. Dass er hier aber dem Interviewer bei dem Stichwort der *Steigung der Tangente* unmittelbar enthusiastisch zustimmt, spricht jedoch dafür, dass er bereits vorher die Steigung der Tangente als Ableitung assoziierte. Detlef fährt wie folgt fort:

- (78) D: *Grundsätzlich würde ich ja, also müsste ich doch, Moment* (Pause).
Jetzt müsste man wissen, wie die Kurve verläuft. Ist ja eine quadratische.

Was hinter dieser Idee steckt, ist nicht sicher. Hier wären verschiedene Interpretationen denkbar. Es könnte sein, dass Detlef hier graphisch die gesamte Ableitungsfunktion aus der Kostenfunktion rekonstruieren möchte. Es kann aber auch sein, dass er hier eine Formel sucht und damit den Wert der Ableitung bekommen ermitteln möchte. Dabei möchte er hier anscheinend einen Prototypen einer strikt konvexen Funktion verwenden (der Detlef vorliegende Graph ist strikt konvex, siehe Abbildung 120). Der Interviewer weist nun noch einmal auf die Tangente, die ja schon eingezeichnet wurde, und auf die Bestimmung von deren Steigung hin:

- (81) I: *Die Ableitung ist ja die Steigung der Tangente.*
 (82) D: *Ok, ja.*
 (83) I: *Und genau die wollen wir jetzt wissen.*
 (84) D: *Oh Gott, oh Gott.*
 (85) I: *Wie war das mit der Steigung einer linearen Funktion. Wie kann man die berechnen?*
 (86) D: *Delta y durch Delta x.*

Nach der sehr starken Intervention des Interviewers, durch die Detlef auch anscheinend etwas nervös wird, nennt Detlef schließlich die korrekte Formel zur Bestimmung der Steigung. Der Interviewer fordert ihn nun auf, diesen Weg weiterzuverfolgen:

(87) I: *Mhm, genau. Das könnte man hier mal probieren.*

(88) D: *Das könnte man mal probieren. Also von hier [zeigt auf $(100, K(100))$ auf dem Graphen]. Also es ist ja ein Delta, also ich muss ja von da nach da und dann, ich will ja grundsätzlich zu dem Punkt [zeigt auf $(101, K(101))$ auf dem Graphen der Kostenfunktion] gelangen.*

Detlefs Ansatz ist leider nicht richtig zur Bestimmung der Tangentensteigung. Stattdessen würde man damit die Sekantensteigung durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$ erhalten. Der Grund für Detlefs Ansatz wird dann in seiner nächsten Äußerung klar:

(90) D: *Es geht ja um die Grenzkosten und wenn es um eine Einheit mehr gehen soll.*

Detlef hat also immer noch die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit im Hinterkopf, als er die Grenzkosten als Ableitung graphisch ermitteln soll. Er mischt nach wie vor beide Grenzkostenkonzepte.

Der Interviewer weist deshalb noch einmal darauf hin, dass es jetzt unabhängig von den Zusatzkosten der nächsten Einheit nur um die Bestimmung der Steigung der Tangente geht:

(91) I: *Wenn ich jetzt vergessen würde, dass ich jetzt zu dem Punkt gelangen wollen würde, wie würdest du es dann bestimmen, sozusagen die Steigung der Tangente?*

(92) D: *Der Tangente, also der hier [zeigt nun auf die eingezeichnete Tangente bei $x = 100$]. Dann würde ich sagen, ist $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, oder?*

Wie man sieht, nennt Detlef jetzt auf einmal eine falsche Formel zur Bestimmung der Steigung. Dies kann aber auch deshalb der Fall sein, weil er jetzt etwas verunsichert ist (vorher nannte er ja die richtige Formel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Nach dem Hinweis des Interviewers auf die richtige Formel, versucht Detlef nun die Steigung mit Hilfe der Formel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu bestimmen:

(95) D: *Wenn $\Delta x = 1$, dann haben wir 100 und 101. Dann ist das Delta Eins.*

(96) I: *Mhm (bejahend), und wie ist Δy dann? Kann man das hier sehen?*

(97) D: *Wenn wir jetzt grundsätzlich davon ausgehen, dass es von 100 auf 101 ist, dann ist Delta 1 auch 100, äh eins, Delta y eins, oder, wenn ich jetzt von hier nach hier gehe (Pause), oder von hier nach hier.*

(98) I: *Wo ist das genau?*

(99) D: *Ah ne, quatsch, das ist ja gar nicht das. Ich dachte das wäre jetzt der Punkt. Ok, dann ist ja. Ok, wenn wir davon ausgehen, dass das $[\Delta x]$ eins ist, dann haben wir (Pause)*

Offenbar hat Detlef weitere Schwierigkeiten mit der Bestimmung der Tangentensteigung, nämlich die graphische Bestimmung von Δy . Detlef kommt hier nicht zum Ziel. Nach weiteren Diskussionen zur Bestimmung von Δy , die hier nicht im Detail dargestellt werden sollen, weil dies nicht Schwerpunkt der hier durchgeführten Forschung ist, nennt der Interviewer schließlich selbst den korrekten Wert $K'(100) = 1$.

Dann zeigt er noch einmal den *numerischen* Unterschied zwischen dem Wert $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ in der Graphik durch einen Vergleich der Strecke Δy des Steigungsdreiecks an die Tangente mit $\Delta x = 1$ und der Kostendifferenz:

- (111) I: *Und dann haben wir hier einen Unterschied. Wir haben einmal die Steigung Eins und dann die Mehrkosten.*
- (112) D: 1,05.
- (113) I: *Und hier sieht man ja auch den Unterschied. Der Punkt [auf der Tangente] ist knapp drunter.*
- (114) D: *Mhm* (bejahend)
- (115) I: *Also es ist erstmal nicht das Gleiche.*
- (116) D: *Ok* [wirkt überrascht].
- (117) I: *Du siehst ja den Unterschied.*
- (118) D: *Ja, sehe ich, klar. Also eins und ja, ja klar.* [markiert den Unterschied in der Skizze und schreibt ein Fragezeichen dran]

Detlef nimmt den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ zur Kenntnis. Hierbei wirkt es so, als ob ihm dieser Unterschied zum ersten Mal bewusst wird, obwohl er in der Mathematikvorlesung thematisiert wurde (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3). Inwieweit er aber während der Intervention tatsächlich einen Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene erkannt hat, bleibt an dieser Stelle offen. Das von ihm an die Zeichnung geschriebene Fragezeichen spricht erstmal dafür, dass ihm die Ursachen dieses numerischen Unterschiedes *nicht* klar sind. Es könnte aber auch sein, dass für ihn die Visualisierung des Zusammenhangs zwischen $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ keine ausreichende inhaltliche Erklärung ist.

Insgesamt kann man feststellen, dass Detlef Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf der graphischen Ebene hatte. Zwar hat Detlef sofort mit der Ableitung die Tangente auf graphischer Ebene assoziiert. Er konnte sich dann aber bei der graphischen Bestimmung der Grenzkosten als Ableitung nicht von seiner Vorstellung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit lösen. Dies zeigte sich zum Beispiel darin, dass er bei der Steigungsbestimmung der Tangente zunächst versucht hat, die Punkte $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$ ins Spiel zu bringen, und dies mit der Deutung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit begründete.

Aber selbst nach dem Hinweis des Interviewers, dass jetzt nur die Steigung der Tangente bestimmt werden soll (unabhängig von Vorstellungen über Grenzkosten), traten weitere Schwierigkeiten bei der Steigungsbestimmung mit der Formel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auf. So nannte Detlef zwischendurch die falsche Formel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ (vorher nannte er einmal korrekt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$), und hatte anschließend Probleme bei der graphischen Bestimmung von Δy . Allerdings könnten die zuletzt genannten Schwierigkeiten auch durch Verunsicherung des Studenten durch die vielen Interventionen des Interviewers entstanden sein.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Der Begriff der Mehrkosten ist hierbei Detlef bereits klar, denn am Ende der Interventionsphase nannte er dazu selbst korrekt die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$. Der zu Aufgabe 3 gehörende Funktionsgraph ist in Abbildung 121 dargestellt.

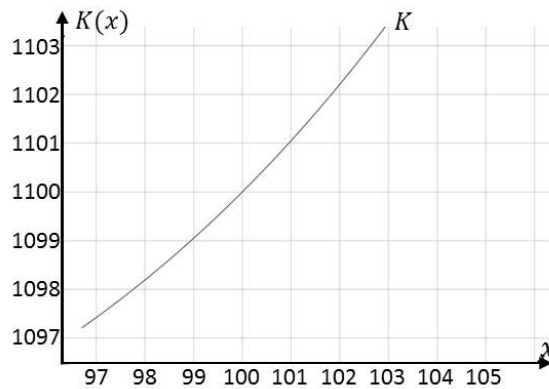


Abbildung 121: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Da die Skizze der Funktion Detlef bereits aus der Interventionsphase (mit eingezeichneter Tangente und einem Steigungsdreieck an die Tangente) vorliegt, wird die Aufgabe hier nicht als schriftliche Aufgabe vorgelegt, sondern durch den Interviewer mündlich eingeleitet:

- (119) I: *Jetzt ist die Frage, der Unterschied ist klein, das sieht man ja hier auch.*
 (120) D: *Aber der könnte ja schon größer werden.*
 (121) I: *Fällt dir irgendeine Funktion ein vielleicht, wo der wesentlich größer wird?*

Detlef überlegt zunächst und zeigt anschließend auf das Blatt mit dem Graphen der Interventionsaufgabe (siehe Abbildung 122).

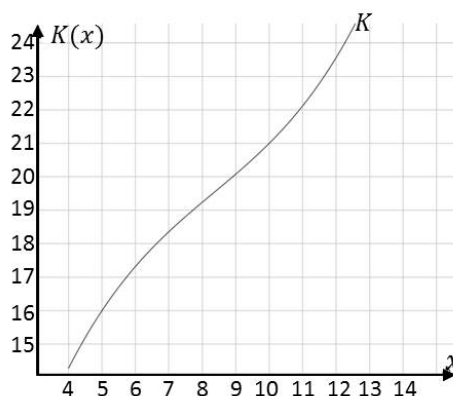


Abbildung 122: Ausschnitt aus dem Graphen der Interventionsaufgabe 1'

Der Interviewer nickt und meint, dass bei dieser Funktion der Fehler schon etwas größer wäre, aber noch nicht sehr viel. Gleichzeitig setzt Detlef seine Überlegungen fort:

- (128) D: *Aber wenn die noch stärker wäre.*
 (129) I: *Was heißt stärker?*
 (130) D: *Also noch etwas ausgeprägter in der/Also wenn die quasi dann so verlaufen würde, dann wäre die stärker.*
 (131) I: *Mhm.* (bejahend)
 (132) D: *Gewölbt.*
 (133) I: *Genau das ist der Punkt.*

Detlef hat nun eine stärker gekrümmte Funktion gezeichnet (siehe Abbildung 123).

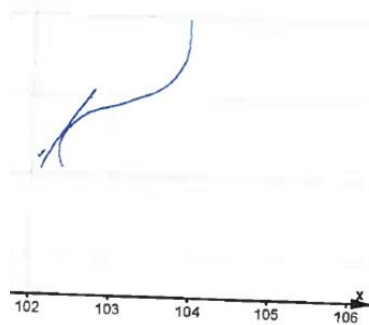


Abbildung 123: Detlefs Beispiel für eine Funktion mit großem Unterschied zwischen Ableitung und Zuwachs zur nächsten Einheit

Dass er nun hier korrekt erkannt hat, dass der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ von der „Stärke der Krümmung“ abhängt, deutet an, dass Detlef nun doch einen Zusammenhang zwischen der Ableitung und der Kostendifferenz auf graphischer Ebene über die Tangente hergestellt hat. Dies unterstreichen dann insbesondere seine folgenden Anmerkungen:

- (136) D: *Ja stimmt, weil die ja auch schon fast an so eine lineare Funktion, also ähnelt sehr und dementsprechend ist da die Tangierung nicht so unterschiedlich.*
 (137) I: *Ja, ja. Genau das ist der Punkt, ja.*
 (138) D: *Und ja stimmt, wenn wir das hier hätten [zeigt auf sein gezeichnetes Beispiel]. Dann wäre das natürlich schon deutlich extremer.*

Zwar wurde der Zusammenhang zwischen der Ableitung $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente in der Mathematikvorlesung auch durch eine passende Skizze visualisiert (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4), Detlef wurde das aber anscheinend erst im Verlauf des Interviews bewusst.

Nun fragt der Interviewer noch zusätzlich nach einem ökonomischen Argument, weshalb der Fehler bei ökonomischen Funktionen in der Regel klein ist. Detlef begründet das damit, dass ökonomische Funktionen „öfter mal“ linear sind (nicht überraschende Antwort, wenn die annähernde Linearität gerade als Grund für den geringen Fehler identifiziert wurde):

- (144) D: *Vielleicht weil das linear ist, öfter mal?*
 (145) I: *Mhm.* [bejahend] *Ja, genau, das wäre erst mal eine Idee.*
 (146) D: *Also das man in der Praxis nicht von dem hier ausgeht, sondern eher von einem linearen Sachverhalt.*

Was mit „öfter mal“ oder „eher“ gemeint ist, ist nicht sicher. Es könnte sein, dass er der Ansicht ist, dass man von annähernder Linearität ausgehen kann, oder aber, dass man in vielen Situationen völlige Linearität annimmt (oder beides). Der Interviewer hat hier nicht noch einmal genauer nachgefragt, da dies in der Mathematikvorlesung so auch nicht thematisiert wurde.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Detlef weiß die Definition der Ableitung nicht mehr. Er versucht sie zu rekonstruieren, was ihm aber nicht gelingt:

(153) D: *An der Stelle x von der Funktion $f(x)$, wobei jetzt mit Stelle, da will ich natürlich auch nichts Falsches sagen. Aber da geht es ja einfach darum, dass die, wie nennt sich die Funktion, Tangensfunktion 90 Grad, ne wie war das nochmal? Was ist die Ableitung der Funktion?*

Er zeigt hierbei mit der Hand eine waagerechte Linie, was auf die Tangente hinweisen könnte. Bei den 90 Grad zeigt er schließlich mit der Hand eine Senkrechte. Hier ist nicht klar, was er meint. Seine Ausführungen deuten aber darauf hin, dass er versucht eine Definition aus geometrischen Vorstellungen zu rekonstruieren.

Der Interviewer legt Detlef nun die formale Definition der Ableitung auf einer Karteikarte in der folgenden Form vor: $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$, und fragt, ob die Erinnerung von Detlef wiederkommt, was dieser bejaht.

Detlef setzt sich nun mit den Bestandteilen der Definition auseinander:

(158) D: *Ja, wobei was war h hier in dem Zusammenhang? Ist das h ?*
[zeigt auf das Symbol in der Definition]

(159) I: *Das ist h , ja.*

(160) D: *h geht gegen null.*

(161) I: *Das war bei der Ableitung so, ja genau.*

(163) D: *Ja, ok. Dann haben wir $x + h$ durch h . Ok, ja.*

Die Nachfrage, ob *das h* ist, bezog sich nur darauf, dass Detlef sich nicht sicher war, ob er den Buchstaben richtig entziffern konnte. Inwieweit er nun eine inhaltliche Bedeutung von h sowie der gesamten Definition rekonstruieren konnte, bleibt offen (es wirkt allerdings *nicht* so). Der Interviewer wollte hier auch nicht nachbohren, da Detlef bereits in der Interventionsphase durch die Nachfragen nervös wurde.

Auf die Frage, weshalb denn nun in der Ökonomie angenommen wird, dass die Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit annähernd gleich sind, erwidert Detlef:

(166) D: *Es kommt dann sicherlich auf h an.*

(167) I: *Mhm. (bejahend).*

(168) D: *Und wenn h Eins ist, dann ist es gleich.*

Detlef erkennt also, dass bei den Zusatzkosten der nächsten Einheit in die Definition der Ableitung $h = 1$ eingesetzt wurde, wobei er allerdings den Limes ignoriert. Außerdem ist es dann natürlich nicht der gleiche Wert als wenn man $h \rightarrow 0$ gehen lässt.

Zum Schluss fragt der Interviewer noch nach einem Argument, warum man annehmen kann, dass die beiden Ausdrücke $(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h})$ und $K(x+1) - K(x)$ in ökonomischen Kontexten annähernd gleich sind. Detlef findet hier aber keine Antwort. Insgesamt konnte Detlef also keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene herstellen.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Detlef anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Detlef assoziierte die Grenzkosten zunächst mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit. Dies ist nicht die in der Mathematikvorlesung präsentierte Definition der Grenzkosten. Sie wird aber in vielen wirtschaftswissenschaftlichen Lehrbüchern verwendet (z.B. Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325)).

Detlef bestimmte passend dazu die Grenzkosten auf mathematischer Ebene korrekt mit einer Kostendifferenz. Nach einigen Unsicherheiten in der Einheit rekonstruierte er dann auch die zu dieser Kostendifferenz passende Einheit €. Detlef assoziierte mit den Grenzkosten *zunächst* also ausschließlich die Zusatzkosten der nächsten Einheit.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Als Detlef mit der im Mathekurs verwendeten Definition der Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ konfrontiert wurde, wirkte es zunächst nicht so, als ob er sich *nicht* an diese erinnern kann. Allerdings schien es für ihn nicht unlogisch, dass die Grenzkosten dort so definiert wurden (Zitat: „Ja, das kann sein.“). Auf die Nachfrage, ob die Grenzkosten als Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe seien, stimmte er zunächst zu, wirkte aber nicht sicher.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Detlef hatte Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Verbindung zwischen den Zusatzkosten der nächsten Einheit und der Ableitung $K'(x)$ auf der graphischen Ebene. Zwar konnte er bei einer graphisch gegebenen Funktion korrekt die Zusatzkosten der nächsten Einheit als Kostendifferenz ΔK visualisieren. Weiterhin assoziierte er mit der Ableitung sofort die Tangente (und vermutlich auch deren Steigung, da er kurze Zeit später sofort dem Interviewer zustimmte, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist). Dann kam er allerdings beim Vergleich beider Größen nicht weiter. Hierbei traten zwei Schwierigkeiten auf:

1. Er konnte bei der Herausarbeitung der Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit sich zunächst *nicht* von seiner Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit lösen, und wollte daher die Tangentensteigung $K'(x)$ über die Punkte $(x, K(x))$ und $(x+1, K(x+1))$ ermitteln.

2. Aber auch nach dem entsprechenden Hinweis des Interviewers sich bei der Bestimmung der Steigung nur an der Tangente in der gegebenen Graphik zu orientieren, gab es weitere Schwierigkeiten bei der Steigungsbestimmung: Detlef nannte zunächst die falsche Berechnungsformel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, und selbst nach Nennung der richtigen Formel durch den Interviewer konnte Detlef den Zuwachs Δy nicht ermitteln.

Letztendlich nannte der Interviewer selbst das Ergebnis $K'(100) = 1$.

Danach hatte Detlef aber selbst Ideen, weshalb der Fehler zwischen $K(101) - K(100)$ und $K'(100)$ bei dem in Aufgabe 3 dargestellten Funktionsgraphen (siehe Abbildung 121) so gering war: annähernde Übereinstimmung der Funktion mit der Tangente über einen gewissen Bereich. Als Beispiel für eine Funktion mit einem großen Fehler zeichnete er eine Funktion mit sich schneller ändernder Steigung, die er als „stärker gewölbt“ bezeichnete. Dies deutet darauf hin, dass er am Ende des Interviews doch den Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf der graphischen Ebene über die Tangente hergestellt hat.

Das Fragezeichen, was er am Ende der Interventionsphase an den Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der dort verwendeten Beispielfunktion schrieb, wirkte allerdings so, als ob Detlef die graphische Verbindung zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ *nicht* für eine ausreichende Erklärung für diesen Unterschied hielt. Hier hätte man vielleicht doch noch stärker auf eine inhaltliche Ebene gehen müssen.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Detlef konnte keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene herstellen. Zunächst wusste er die Definition der Ableitung nicht mehr. Diese wurde ihm dann auf einer Karteikarte vorgegeben. Inwiefern er eine inhaltliche Bedeutung der Definition und ihrer Bestandteile rekonstruieren konnte, bleibt offen (es wirkte allerdings nicht so). Schließlich vermutete Detlef, dass der Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ mit dem h in der formalen Definition der Ableitung zu tun haben müsste. Er erkannte dann auch, dass man aus dieser Definition der Ableitung die Kostendifferenz erhält, wenn man $h = 1$ in den Bruch $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ einsetzt, wobei er der Limes ignorierte.

Er konnte dann aber kein Argument bringen, weshalb man „bei diesem Einsetzen von $h = 1$ “ in der Ökonomie auch tatsächlich von einem kleinen Fehler zwischen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ und $K(x+1) - K(x)$ ausgeht (obwohl dazu in der Mathematikvorlesung diskutiert wurde, dass $h = 1$ eben in ökonomischen Kontexten als klein angesehen wird, siehe a-priori-Analyse in Kapitel 8.2.5).

8.4.4 Auswertung des Interviews von Ralf

Phase zu Aufgabe 1: Die erste Aufgabe ist die Bestimmung der Grenzkosten der Kostenfunktion K mit der Gleichung $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$. Dabei soll auch die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in € gegeben ist.

Ralf beginnt wie folgt mit der Lösung der Aufgabe:

- (1) I: *Was überlegst du gerade?*
 (2) R: *Ich überlege nochmal, wie das mit den Grenzkosten ging. Das ist ja eigentlich Stoff aus Mathe 1.*
 (3) I: *Ja, genau.*
 (4) R: *Nur, was sind die Grenzkosten beziehungsweise wie man sie nochmal berechnet. Ich glaube, da muss man irgendwo die Ableitung bilden.*

Ralf stellt richtig fest, dass die Grenzkosten im ersten Semester behandelt wurden, und erinnert sich an die dort eingeführte Definition der Grenzkosten als Ableitung. Dann fährt er wie folgt fort:

- (7) R: *Also, wenn das die Grenzkosten sind, was ich glaube, dann müsste man doch eigentlich nur x einsetzen. oder nicht?*
 (8) I: *Ja.*
 (9) R: *Das war es eigentlich.*

Er möchte also die Grenzkosten passend zur Mathematikvorlesung als $K'(100)$ ermitteln (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2). Dabei hat er ein paar Probleme mit dem von dem Interviewer mitgebrachten Taschenrechner, was die Redeanteile (9)-(22) umfasst. Diese werden hier aber nicht dargestellt, da sie keine Erkenntnisse zum Verständnis der Grenzkosten liefern. Schließlich erhält Ralf dann aber das richtige Ergebnis $K'(100) = 1$.

Dann folgt die Frage nach der Einheit der Grenzkosten:

- (23) I: *Was ist die Einheit dazu?*
 (24) R: *Mengeneinheit durch Geldeinheit?*
 (25) I: *Warum?*
 (26) R: *Ich meine, ich hätte das so gelernt. Aber ich bin mir nicht mehr sicher.*

Ralf versucht die Einheit aus der Erinnerung abzurufen. Dies gelingt ihm aber nicht korrekt, denn die zur Ableitung passende Einheit wäre $\frac{\text{€}}{\text{ME}}$. Versuche zur Rekonstruktion der Einheit der Grenzkosten mit Hilfe der Definition der Ableitung (so wurde sie in der Mathematikvorlesung gerechtfertigt, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2) oder über die ökonomische Deutung der Ableitung unternimmt er nicht.

Phase zu Aufgabe 2: In dieser Phase werden die Studierenden mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit). Weil Ralf Aufgabe 1 mit Hilfe der Ableitung gelöst hat, bekommt er nun folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Ralf äußert hierzu, dass er diese Definition auch kennt, sie aber nicht der Definition entspräche, die in der Mathe-Vorlesung genannt wurde:

- (27) I: *Dann kommt jetzt mal eine Definition von den Grenzkosten, wie man sie immer in den Wiwi-Büchern findet. Erkennst du die wieder aus deinen Wiwi-Büchern?* [Ralf liest sich die Definition durch] *Oder zum Beispiel aus dem Mikroökonomie-Lehrbuch habe ich das da gerade entnommen. Da steht es oft so drin.*
- (28) R: *Ja, aber bei Dietz war es, glaube ich, anders.*

Damit hat er Recht, denn in der Mathematikvorlesung wurden die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ definiert.

Der Interviewer fragt nun nach den Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (meint damit die Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit):

- (29) I: *Ja ja, gut. Genau richtig, ja. Jetzt ist die Frage, ist es das Gleiche wie die Ableitung oder ist es eigentlich was anderes, wenn man diese Definition [die ökonomische als Zusatzkosten] wörtlich nimmt?*

Ralf äußert nach einigem stillen Überlegen (15s) die Ansicht, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit etwas anderes sind als die Ableitung:

- (30) R: *Ist, glaube ich, was anderes als die Ableitung.*

Auf die Frage an Ralf, ob er die Unterschiede beschreiben könnte, kann er nach langer Überlegung (30s) keine Antwort geben. Daher beginnt nun die Interventionsphase des Interviews.

Interventionsphase: In dieser Phase sollen die Studierenden mit Hilfe des Interviewers die Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit erkennen. Zunächst will der Interviewer auf die Unterschiede in der Einheit hinaus:

- (32) I: *Wenn man jetzt diese Definition aus dem Mikroökonomiebuch [die als Zusatzkosten der nächsten Einheit] wörtlich nehmen würde, was wäre dann eigentlich die Einheit, die hier rauskommen müsste?*
- (33) R: *Eigentlich nur Geldeinheiten.*
- (34) I: *Dann wäre es auf jeden Fall Geldeinheiten.*
- (35) R: *Ja.*

Das „eigentlich nur Geldeinheiten“ wird von Ralf überrascht gesagt. Zwar konnte Ralf sich vorher nicht an die korrekte Einheit der Grenzkosten als Ableitung erinnern, seine Überraschung deutet aber an, dass er „Geldeinheiten“ als Einheit der Grenzkosten als Ableitung gar nicht in Betracht gezogen hatte. Dies erfragt der Interviewer noch einmal explizit:

- (36) I: *Irgendwie hast du in Erinnerung, dass es bei der Ableitung anders war?*
- (37) R: *Ja.*

Da Ralf nun mit Hilfe des „Wörtlich Nehmens“ der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit für diese Definition die richtige Einheit ermitteln konnte, hofft der Interviewer nun, dass er mit derselben Frage auch die zugehörige Rechenvorschrift herausfindet, und damit die Zusatzkosten der nächsten Einheit exakt bestimmen kann:

(38) I: *Wenn man das dort [die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit] wörtlich nehmen müsste, was dort steht, wie müsste man denn das eigentlich berechnen, die Zusatzkosten für die nächste Einheit?*

(39) R: (23.0) *Ich weiß nicht.*

Trotz längerer Überlegung, findet Ralf also von sich aus keine Antwort.

Dies nimmt der Interviewer zum Anlass, nun wieder die Interventionsaufgabe, bei der die Mehrkosten bei Erhöhung von 10 Einheiten um eine Einheit der in Abbildung 124 gegebenen Funktion graphisch bestimmt werden sollen, ins Spiel zu bringen.

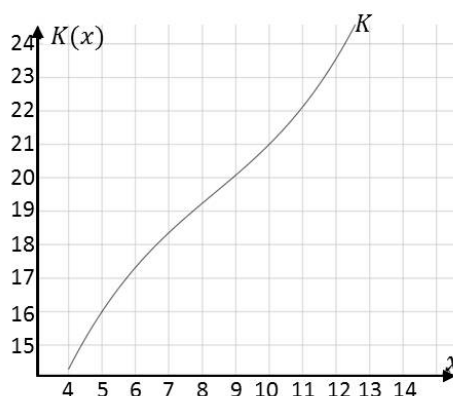


Abbildung 124: Graph der Funktion der Interventionsaufgabe

Ralf möchte zunächst gerne eine Funktionsgleichung haben:

(40) I: *Machen wir das Ganze sozusagen einmal graphisch. Ist jetzt eine andere Kostenfunktion. Jetzt geht es um die Erhöhung von 10 auf um eine weitere Einheit.*

(41) R: *Mhm (bejahend). Da würde ich jetzt einfach, da gibt es ja keine Dings, keine Funktion dazu.*

In der Erwartung, dass Ralf mit der Funktionsgleichung passend zu seinen vorherigen Überlegungen die Ableitung verwenden würde, fragt er dementsprechend nach:

(42) I: *Keine Gleichung gegeben, ja. Wie würdest du es jetzt machen?*

(43) R: *Mit Gleichung hätte ich einfach $K(11) - K(10)$ gemacht.*

Ralf hat also erkannt, dass die Mehrkosten bzw. Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von 10 Einheit um eine Einheit auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz entsprechen.

Der Interviewer möchte hier Ralfs Ansatz der rechnerischen Bestimmung der Zusatzkosten der nächsten Einheit aufgreifen, da auch bei dieser der numerische Unterschied zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit sichtbar wird (später will er auf die ermittelten Werte wieder in der Graphik veranschaulichen lassen). Dafür ist aber eine Funktionsgleichung nötig. Daher fordert der Interviewer Ralf nun auf, seinen Weg zur Bestimmung der Zusatzkosten der nächsten Einheit bei Aufgabe 1 auf $x = 100$ zu anzuwenden, der dann später mit $K'(100)$ verglichen werden soll:

(44) I: *Mhm (bejahend). Ja genau, das wäre sozusagen, ja genau. Und das könnte man dort auch machen?*

(45) R: *Ja.*

Ralf beginnt also passend mit der Berechnung von $K(101)$ zur Berechnung der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$:

(46) R: *Also $K(101)$.*

Nach einer Weile hat Ralf das richtige Ergebnis von 1100,051 Euro ermittelt und berechnet dann $K(100)$. Dabei erhält er aber ein falsches Ergebnis von 3100 (korrektes Ergebnis: 1100). Auf den Hinweis, dass er sich verrechnet hat, möchte Ralf nochmal neu beginnen, erkennt dann aber seinen Fehler:

(52) R: *Ah, ich mache es nochmal neu. Ah, ich weiß wo der Fehler ist.*

(53) I: *Da, ja dann kam irgendwie/*

(54) R: *Ich habe auf die Ableitung geguckt.*

Schließlich ermittelt er das richtige Ergebnis von 1100 und damit die richtige Kostendifferenz $K(101) - K(100) = 1,051$ (im Vergleich zu $K'(100) = 1$).

Da jetzt sowohl die Ableitung $K'(x)$ als auch die Zusatzkosten der nächsten Einheit über die Kostendifferenz bestimmt wurden, fragt der Interviewer noch einmal nach, ob Ralf vielleicht nun die Unterschiede zwischen der Ableitung $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ erläutern kann:

(61) I: *Ja, also ist offensichtlich nicht das Gleiche wie die Ableitung. Vielleicht ist die beim Rechnen eine Idee gekommen, wo der Unterschied liegt?*

(62) R: *Ja, also bei der Ableitung ist die Steigung ja an einer bestimmten Stelle und jetzt hat man sozusagen die Steigung zwischen zwei Punkten. Oder den Zuwachs dazwischen, zwischen den beiden Punkten, wird berechnet.*

Ralf artikuliert nun sehr schön, dass bei den Grenzkosten als Ableitung die Steigung der Funktion an *einer* Stelle berechnet wird. Er kennt also auch die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung an einer Stelle. Diese grenzt er nun von der Steigung bzw. dem Zuwachs zwischen *zwei* Punkten ab. Hier ist allerdings noch nicht klar, ob ihm der inhaltliche Unterschied zwischen Zuwachs und Steigung klar ist.

Um hier Genaueres zu erfahren, soll Ralf jetzt noch einmal die einzelnen Größen ($K'(100)$ und $K(101) - K(100)$) am zugehörigen Funktionsgraphen visualisieren (siehe Abbildung 125):

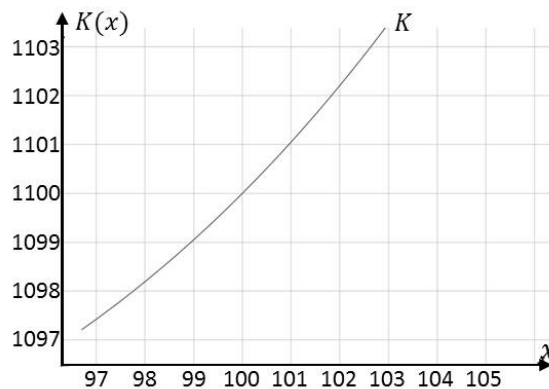


Abbildung 125: Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1

(65) I: *Könntest du es mal irgendwie einzeichnen?*

Ralf erklärt nach kurzer Diskussion über die Frage, um welche Funktion es jetzt geht (nämlich um die aus Aufgabe 1, bei der Ralf numerisch sowohl $K'(100)$ als auch $K(101) - K(100)$ bestimmt hatte), dass die Ableitung die Steigung in einem Punkt ist:

(72) R: *Ja, also die Ableitung ist ja eigentlich nur die Steigung an dem Punkt, was war das jetzt, an dem Punkt 100.* [markiert den Punkt $(100, K(100))$]

Danach erläutert er, wie sich seiner Ansicht nach die berechneten $K(101) - K(100)$ veranschaulichen lassen:

(74) R: *Und das andere war sozusagen der Zuwachs von da nach da. Also das ist jetzt ein Steigungsdreieck, aber sozusagen was hier von der Strecke da dazu gekommen ist* [zeigt auf die vertikale Streckenlänge].

Ralf zeichnet hierbei das Steigungsdreieck der Sekante durch die Punkte $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$ zwischen $x = 100$ und $x = 101$ ein (er zeichnet allerdings die Sekante nicht ein, sondern zeichnet das Dreieck direkt an die Kurve). Sein Zeigen auf ausschließlich die vertikale Strecke bei der Kostendifferenz spricht dann aber dafür, dass er doch zwischen Zuwachs und Steigung zwischen zwei Punkten unterscheiden kann.

Während Ralf nun die Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ explizit veranschaulicht hat, fehlt noch die Veranschaulichung der Ableitung (bisher wurde lediglich der Punkt $x = 100$ markiert). Deshalb fragt der Interviewer nochmal genau nach:

(75) I: *Und wie kann ich jetzt die Ableitung an der Stelle $x = 100$ graphisch veranschaulichen? Du hast jetzt erstmal nur den Punkt da eingemalt.*

Ralf kommt hier nicht weiter. Das Problem könnte hier sein, dass Ralf direkt versucht, einen Punkt oder eine Strecke zu finden, die $K'(100)$ veranschaulicht, was nicht geht. Auf die Idee, die die Tangente und ein zugehöriges Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$ zu wählen, kommt er nicht. Daher gibt der Interviewer erstmal den Tipp, dass die Steigung eigentlich nur für Geraden definiert wurde, der zur Tangente führen soll:

- (77) I: *Nun war die Steigung eigentlich nur für eine Gerade definiert.*
 (78) R: *Die Tangente.*
 (79) I: *Ja.*
 (80) R: *So, dann/*
 (81) I: *Ja, und jetzt wäre wo die Steigung der Tangente abzulesen?*
 (82) R: *Ja, mit einem Steigungsdreieck* [zeichnet ein Steigungsdreieck an die Tangente zwischen $x = 100$ und $x = 101$].

Jetzt sind also in der Graphik zwei Steigungsdreiecke zwischen $x = 100$ und $x = 101$, also mit $\Delta x = 1$, eingezeichnet: das an die Tangente und das an die Sekante. Damit ist der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ gut sichtbar. Damit endet die Interventionsphase.

Insgesamt sieht man bis hierher, dass Ralf vor der Intervention schon das Gefühl hatte, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Zusatzkosten für die nächste Einheit nicht dasselbe sind. Allerdings konnte er die Unterschiede nicht benennen.

Durch den Hinweis des Interviewers die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit „wörtlich zu nehmen“, bemerkte Ralf den Unterschied in der Einheit. Genauer gesagt erkannte er, dass Zusatzkosten in Geldeinheiten angegeben werden müssten. Und das war seiner Erinnerung nach nicht der Einheit der Grenzkosten als Ableitung, auch wenn er Letztere nicht mehr genau wusste.

Durch die Interventionsaufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten für die nächste Einheit auf der graphischen Ebene erkannte Ralf, dass diese auf mathematischer Ebene wörtlich genommen der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen. Danach konnte er als Unterschied zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit angeben, dass die Ableitung nur die Steigung in *einem* Punkt angibt, während bei der Kostendifferenz eine Steigung bzw. ein Zuwachs *zwischen zwei Punkten* bestimmt wird. Kurz darauf visualisierte er Letztere als vertikale Seite des Steigungsdreiecks an die Sekante durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$. Daraus wird deutlich, dass er die Kostendifferenz als absolutes Wachstum und nicht als Steigung versteht. Er konnte also die Ableitung als Steigung und die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ als absoluter Zuwachs auf mathematischer Ebene korrekt gegeneinander abgrenzen.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Die zugehörige Graphik ist in Abbildung 126 dargestellt.

Da die Skizze der Funktion mit eingezeichneter Tangente bei $x = 100$ Ralf bereits aus der Interventionsphase vorliegt, wird Aufgabe hier nicht als schriftliche Aufgabe gestellt. Sie wird stattdessen durch den Interviewer mündlich als Frage formuliert:

- (86) I: *Man sieht ja, es weicht also ab. Man sieht ja, die Abweichung ist sehr gering, wenn man mal drauf guckt. Hast du eine Idee, warum sie so gering ist?*

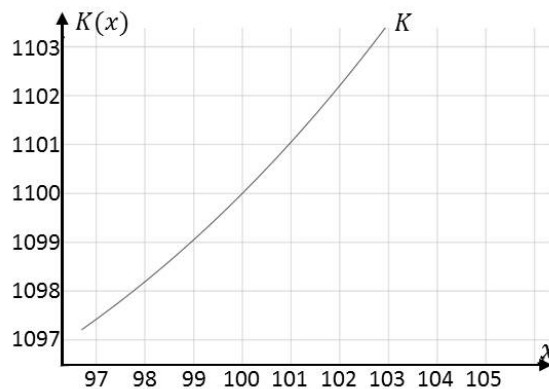


Abbildung 126: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Ralf kann hier sofort eine Antwort drauf geben:

(87) R: *Es ist halt so gering, weil zwischen 100 und 101 nicht so viel Abstand ist. Würde man jetzt 100 und, was weiß ich, 120 nehmen, dann würde die Tangente ja viel steiler auseinandergehen.*

Er erkennt also, dass bei Verwendung der Ableitung numerisch ein Kostenzuwachs entlang der Tangente ermittelt wird. Dabei betont er, dass der Fehler hier nur so klein ist, weil der Zuwachs auf der x -Achse von $x = 100$ zu $x = 101$ klein ist. Interessant ist, dass er den Abstand „eins“ als gering bezeichnet, obwohl er in der Graphik nicht als geringer Abstand dargestellt wird (siehe Abbildung 126).

Ralf hat hier also die Bedingung „Zuwachs ist klein“ als wichtig für einen kleinen Fehler zwischen dem Kostenzuwachs und dem Zuwachs entlang der Tangente angesprochen. Nun stellt sich aber noch die Frage, welche Eigenschaft die Funktion aus Abbildung 126 hat, damit hier der Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei Erhöhung von x um eins auch tatsächlich klein ist. Daher fragt der Interviewer nach einer Funktion, bei der der Fehler größer ist:

(88) I: *Gibt es denn Funktionen, wo trotz dieses geringen Abstandes dort ein großer Fehler rauskäme? Irgendwie eine Idee? Kannst auch einfach ein Bild einzeichnen.*

(89) R: *Vielleicht bei der Sinusfunktion.*

Ralf zeichnet dann nach Aufforderung das in Abbildung 127 dargestellte Bild. Dazu äußert er:

(93) R: *Wenn man jetzt hier einen Punkt haben wolle, sage ich jetzt mal, und man macht das mit der Ableitung, dann ist ja die Tangente so [zeichnet sie ein]. Und wenn man jetzt noch bis hierhin geht und dann der Abstand, dann ist das sozusagen sogar negativ.*

Ralf nennt hier ein besonders extremes Beispiel, bei dem nicht einmal das Vorzeichen der Approximation stimmt. Auf Nachfrage des Interviewers weshalb es denn bei der alten Kostenfunktion hingegen ganz gut geklappt hätte, meint Ralf, dass diese ja schon fast eine Tangente beziehungsweise eine Gerade ist:

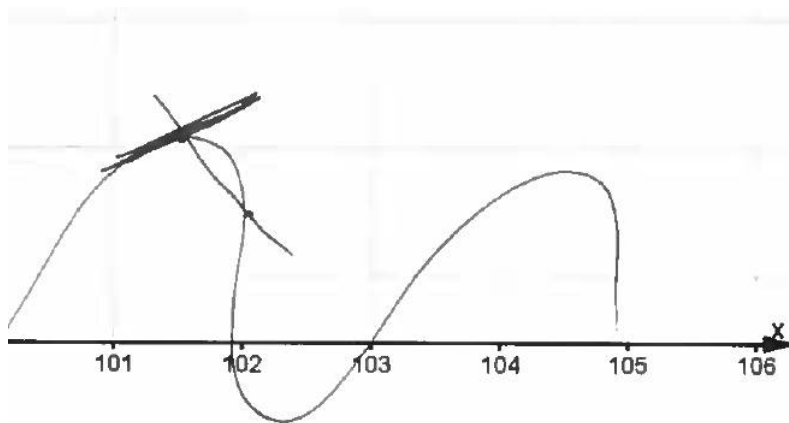


Abbildung 127: Ralfs Beispiel für eine Funktion mit großem Unterschied zwischen Ableitung und Zuwachs zur nächsten Einheit

(94) I: *Ja, und woran liegt es, dass es bei der anderen Funktion ganz gut klappt?*

(95) R: *Weil die schon fast so wie eine Tangente aussieht.*

(96) I: *Ja.*

(97) R: *Oder wie so eine Gerade.*

Ralf kann also auf graphischer Ebene adäquat begründen, weshalb der Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 3 (siehe Abbildung 126) vergleichsweise klein ist. Der genannte Grund ist, dass ihr Graph annähernd der Tangente entspricht. Er stellt also an diesem Beispiel eine adäquate Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente her. Allerdings ist nicht klar, ob er auch die Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und Zuwächsen $K(x+h) - K(x)$ für $h \neq 1$ adäquat herstellen kann (denn dort wird der Zuwachs auf der Tangente durch $K'(x) \cdot h$ und nicht durch $K'(x)$ bestimmt). Dies herauszufinden war aber auch nicht Ziel der Aufgabe (siehe Kapitel 8.2.4).

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Ralf weiß zunächst die Definition der Ableitung nicht mehr. Daher bekommt er diese auf einer Karteikarte vorgelegt in der Form $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$. Nach einer längeren Überlegungspause erkennt man, dass Ralf versucht, die Terme $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ auf symbolischer Ebene zu vergleichen:

(101) R: *(65.0) Also, wenn man sich das jetzt nochmal anguckt, hier sieht ja eigentlich schon ein bisschen aus wie jetzt [zeigt nacheinander auf die Terme $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$].*

(102) I: *Richtig, genau.*

(103) R: *Wie ist das hier? Ist ja eigentlich fast das Gleiche, nur dass man jetzt halt bei der Ableitung vielleicht die Höhe des Steigungsdreiecks geringer ansetzen würde, um halt ein genaueres Ergebnis zu haben.*

(104) I: *Mhm.* (bajahend)

(105) R: *Um eine kleinere Spanne zu haben. Weil bei dem [den Zusatzkosten für die nächste Einheit] macht man ja immer plus 1.*

Wie Ralf das hier meint, ist nicht sicher. Zunächst spricht er von der „Höhe des Steigungsdreiecks“, die bei der Verwendung der Ableitung „geringer angesetzt wird“ als bei einem Zuwachs von $\Delta x = 1$. Dies spricht dafür, dass er h , welches gegen 0 geht, als *Höhe* eines Steigungsdreiecks ansieht. Eine kleiner werdende Höhe induziert Ralfs Meinung nach dann auch einen kleineren Zuwachs Δx , und mit damit erhält man dann laut Ralf bei einem kleineren h ein „genaueres Ergebnis“ als beim Kostenzuwachs mit $\Delta x = 1$.

Diese Gedankengänge passen zu Ausführungen der Vorlesung, wo am Beispiel einer konvexen Kostenfunktion visualisiert wurde (siehe Abbildung 113), dass der Fehler zwischen Tangente und Zuwachs $K(x + \Delta x) - K(x)$ umso geringer ist, je kleiner Δx ist. Allerdings stellt Ralf keine adäquate Verbindung zwischen diesen Ausführungen und der Definition der Ableitung her. Zum einen weist er h eine falsche Bedeutung zu. Zum anderen wird nicht klar, was hier bei Ralf das „exakte Ergebnis“ sein soll, welchem man sich bei Verkleinerung von Δx annähert, und wie dieses mit dem numerischen Wert $K'(x)$ genau in Verbindung steht.

Nun will der Interviewer noch einmal darauf hinaus, dass eben „eins“ in ökonomischen Kontexten als kleine Spanne Δx angenommen werden kann (eigentlich hätte man sagen müssen „angenommen wird“, denn im Einzelfall wäre das eigentlich eine zu prüfende Modellannahme):

(106) I: *Und jetzt ist die Frage, warum reicht es sozusagen wenn ich plus eins nehme? Sozusagen, warum kann ich davon ausgehen, dass das gut ist?*

Ralf antwortet, dass eine höhere Genauigkeit sowieso aus realer Sicht oft gar keinen Sinn macht:

(107) R: *Weil wenn man jetzt mit großen Geldeinheiten irgendetwas rechnet, dann ist es ja meistens, dass man es eher in Einser-Schritten oder sowas macht, also wenn man jetzt Cent-Angaben, ich meine, ist ja nur maximal zwei Kommastellen, wenn überhaupt.*

(108) I: *Ja.*

(109) R: *Und ist ja nicht mit drei Millionen.*

Ralf begründet hier also die Verwendung des Zuwachses von „eins“ anstelle einer beliebig kleinen Spanne damit, dass man in der Realität eben nicht beliebig kleine Zuwächse betrachtet. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn der Output x Stückzahlen sind. Deshalb Ralf sich nun hier auf die Geldeinheiten bezieht, ist nicht klar (es könnte auch sein, dass ihm hier kein anderes Beispiel für diskrete Einheiten eingefallen ist).

Der Rest des Interviews liefert keine neuen Erkenntnisse zur Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene durch Ralf (inwiefern Studierende eine solche herstellen können, war je die Leitfrage bei der Auswertung dieser Aufgabe 4, siehe Tabelle 144). Daher wird auf eine Darstellung dieses Rests verzichtet.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Ralf anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1):

Ralf assoziierte bei der Aufgabe zur Berechnung der Grenzkosten diese zunächst mit der Ableitung $K'(x)$. Dies entspricht der Definition der Grenzkosten aus der Mathematikvorlesung (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2). Die dazu passende Einheit konnte er nicht angeben. Er nannte „Mengeneinheit durch Geldeinheit“ aus der Erinnerung, war sich aber nicht sicher. Das ist zwar auch ein Bruch wie die korrekte Einheit der Grenzkosten als Ableitung. Diese wäre aber $\frac{\text{€}}{\text{ME}}$.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2):

Ralf war von Beginn an der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Er konnte aber keine Unterschiede benennen. Auf die Nachfrage des Interviewers nach der Einheit der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit, wenn man die entsprechende Definition wörtlich nehmen würde, erkannte Ralf, dass die Zusatzkosten in Geldeinheiten angegeben werden müssten. Er bemerkte, dass dies *nicht* die Einheit der Ableitung ist, auch wenn er Letztere nicht genau wusste.

Durch die Interventionsaufgabe zur graphischen Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 10 Einheiten um eine Einheit erkannte Ralf dann auch, dass diese Mehrkosten auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen. Danach konnte er auch einen wesentlichen Unterschied zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Mehrkosten der nächsten Einheit nennen: die Ableitung gibt die *Steigung an einer Stelle* an, die Mehrkosten entsprechen der Steigung bzw. dem Wachstum *zwischen zwei Punkten*. Durch das Einzeichnen der Kostendifferenz als vertikale Länge eines Steigungsdreiecks wurde klar, dass er auch zwischen der Steigung und einem absoluten Zuwachs unterscheiden konnte, und die Kostendifferenz tatsächlich als absoluten Zuwachs ansah.

Somit erkannte Ralf allein durch die Interventionsaufgabe ohne weitere Hilfe durch den Interviewer den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ und unterschied hier auch beide Größen inhaltlich: die Ableitung war für ihn eine Steigung an einer Stelle, die Mehrkosten der nächsten Einheit waren für ihn ein absoluter Zuwachs zwischen zwei Stellen.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3):

Ralf konnte mit kleinen Hilfen des Interviewers eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene über die Tangente herstellen (wie in der Mathematikvorlesung, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4).

Die Kostendifferenz visualisierte er korrekt als Seitenlänge der vertikalen Seite des Steigungsdreiecks der Steigung der Sekante durch $(100, K(100))$ und $(101, K(101))$. Bei der Ableitung kannte er die geometrische Deutung als Steigung in einem Punkt. Für deren Veranschaulichung benötigte er aber den Tipp des Interviewers, dass Steigungen zunächst nur für Geraden definiert wurden, woraufhin ihm die Tangente einfiel. Daraufhin konnte er deren Steigung mit Hilfe eines Steigungsdreiecks an die Tangente zwischen $x = 100$ und $x = 101$ bestimmen. Dadurch wurde der numerische Unterschied zur vorher visualisierten Kostendifferenz in der Skizze gut deutlich.

Ralf konnte dann auch erklären, weshalb der numerische Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der in der Aufgabe gegebenen Funktion so klein war, nämlich weil die Funktion im Bereich $[100; 101]$ annähernd mit der Tangente übereinstimmte. Zusätzlich betonte Ralf, dass die Abweichung zwischen dem Graphen der Originalfunktion und der Tangente größer ist, wenn der betrachtete Zuwachs auf der x -Achse größer ist, wie es auch in der Vorlesung visualisiert wurde (siehe a-priori Analyse in 8.2.4, Abbildung 113).

Dies spricht dafür, dass Ralf weitestgehend selbstständig im Laufe des Interviews eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf der graphischen Ebene *über die Tangente*, herstellen konnte, wie sie in der Vorlesung am Beispiel einer konvexen Funktion illustriert wurde (siehe Abbildung 113 in der a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4). Dabei waren Tipps waren an zwei Stellen nötig:

1. die Aufgabe zur expliziten Bestimmung der „Mehrkosten der nächsten Einheit“ am Beispiel: Durch sie erkannte Ralf, dass die Mehrkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ entsprechen
2. ein Hinweis darauf, dass der Begriff der Steigung eigentlich nur für Geraden definiert wurde: Dadurch erinnerte sich Ralf daran, dass die Steigung in einem Punkt der Steigung der Tangente entspricht (in der Mathematikvorlesung wurde die *Steigung in einem Punkt* eigentlich gar nicht definiert)

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auf dieser Ebene hatte Ralf hingegen Schwierigkeiten bei der Herstellung einer adäquaten Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$. In der Mathematikvorlesung wurde hierfür die Approximationsformel $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h aus der Definition der Ableitung hergeleitet (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5). Dass man dann in der Ökonomie zur Interpretation der Ableitung dort häufig $h = 1$ einsetzt, wurde damit erklärt, dass $h = 1$ in der Ökonomie häufig als klein angenommen wird.

Ralf wusste zunächst die Definition der Ableitung nicht mehr. Als sie ihm gegeben wurde, versuchte er eine Verbindung zwischen ihr und seinen Vorstellungen zu einem kleiner werdenden Approximationsfehler zwischen Tangente und Graph der Ausgangsfunktion herzustellen, wenn der Zuwachs auf der x -Achse kleiner wird.

Allerdings gelang Ralf die Herstellung der Verbindung von der Definition der Ableitung zu diesen Gedanken zur Approximation nicht adäquat. Zum einen glaubte er, dass das h in der Definition der Ableitung der Höhe des Steigungsdreiecks entspricht. Weiterhin behauptete er, dass durch die Verkleinerung dieser Höhe sich auch die Spanne Δx verkleinert. Dadurch würde dann laut Ralf die Verwendung der Ableitung, bei der man h geringer ansetzt, „ein genaueres Ergebnis“ liefern als $K(x + 1) - K(x)$. Hierbei war nicht klar, was das exakte Ergebnis sein soll, auf das sich Ralf hier bezieht und wie der Wert der Ableitung damit in Beziehung steht. Außerdem hängt K' eben eigentlich gar nicht mehr von h ab. Der genaue Zusammenhang zwischen der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten einerseits, und der Approximation des Funktionszuwachses durch den Zuwachs auf der Tangente auf graphischer Ebene andererseits, schien Ralf nicht klar zu sein.

Die Verwendung der Spanne „eins“ auf der x -Achse in der Ökonomie rechtfertigte Ralf dann damit, dass man in Realität eben nicht beliebig kleine Zuwächse betrachtet, sondern „es häufig in Einser Schritten macht“. Dies ist nicht die eben genannte Argumentation der Mathematikvorlesung, dass „ $h=1$ als klein in der Ökonomie angenommen wird“. Es ist aber eine praktische Erklärung, weshalb in der Ökonomie die Ableitung häufig als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert wird (zum Beispiel wenn der Output Stückzahlen sind).

Somit hatte Ralf bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene vor allen Dingen Schwierigkeiten bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Definition der Ableitung $K'(x)$ und seinen Vorstellungen zur Approximation des Funktionszuwachses durch die Tangente mit der Steigung $K'(x)$ auf graphischer Ebene.

8.4.5 Auswertung des Interviews von Karl

Phase zu Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollen die Grenzkosten der Funktion K mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Außerdem soll die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in € gegeben ist.

Karl beginnt wie folgt:

- (1) K: *Soll ich erklären, was ich erstmal machen würde?*
- (2) I: *Ja, gerne.*
- (3) K: *Also ich würde jetzt erstmal die Funktion ableiten.*
- (4) I: *Ja.*
- (5) K: *Und für x 100 einsetzen.*

Karl möchte die Aufgabe also sofort mit der Ableitung $K'(100)$ lösen, so wie die Grenzkosten auch in der Mathematikvorlesung definiert wurden (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2).

Er erhält dann das richtige Ergebnis:

- (9) K: *Ja, ich habe dann für die Grenzkosten raus, das wäre eins.*

Es folgt die Nachfrage nach der Einheit:

- (10) I: *Mhm, und was wäre dann die Einheit dazu?*
- (11) K: *Mengeneinheit durch Geldeinheit, oder?*
- (12) I: *Wie kommst du darauf?*
- (13) K: *Ich habe das noch so im Kopf.*

Karl versucht also die Einheit aus der Erinnerung abzurufen. Dies gelingt ihm jedoch nicht, denn die richtige Einheit wäre der Kehrwert der oben genannten Einheit. Genauer gesagt wäre sie $\frac{\text{€}}{\text{ME}}$.

Danach versucht Karl die Einheit aber selbst zu rekonstruieren:

(13) weiter K: *Die Grenzkosten bei 100 Mengeneinheiten betragen 1 Euro, also dann Geldeinheiten, weil das ist ja.*

(14) I: *Warum?*

(15) K: *Na, wenn man 100 Mengen/ die Grenzkosten (Pause).*

(16) I: *Was hat denn die Ableitung für eine Einheit?*

(17) K: *Also ich hab' noch im Kopf, dass irgendwie alles was mit Grenz- oder die erste Ableitung ist, dass es Mengeneinheit durch Geldeinheit ist.*

(18) I: *Mhm.*

(19) K: *Menge pro, ja genau. Menge pro Geldeinheit. Ob das richtig ist, weiß ich nicht.*

Karl gelingt es nicht, sich an die korrekte Einheit der Grenzkosten als Ableitung aus der Vorlesung zu erinnern. In der dieser wurde diese über die Definition der Ableitung über folgende Rechnung gerechtfertigt:

$$\text{Differenzenquotient} \left\} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} K'(x_0) \frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]} \right. \quad (117)$$

Bei der Bildung des Differenzenquotienten ergibt sich wegen des Teilens als Einheit $\frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]}$. Da der Grenzübergang keinen Einfluss auf die Einheit hat, haben die Grenzkosten als Ableitung (in der Vorlesung wurde von „der Einheit der Ableitung“ gesprochen) auch die Einheit $\frac{[\text{GE}]}{[\text{ME}]}$.

Karl schien noch korrekt in Erinnerung zu haben, dass sich als Einheit ein Bruch ergibt, hatte aber einen falschen Bruch im Sinn.

Der Interviewer fragt nun nochmal nach, ob Karl die Einheit der Grenzkosten aus einem inhaltlichen Verständnis des Konzepts die Einheit rekonstruieren kann:

(20) I: *Und wenn du mit deinem gesunden Menschenverstand rangehst, die Grenzkosten, was müsste dann die Einheit sein?*

(21) K: *Sind ja Kosten, also Geldeinheiten.*

Daraufhin nennt Karl als Einheit „Geldeinheiten“. Dies begründet er mit dem Begriff der Grenzkosten, die eben Kosten sind. Vermutlich hatte er diese Begründung auch schon im Kopf, als er das erste Mal € als Einheit der Grenzkosten nannte, bevor ihn der Interviewer unterbrach (Redeanteil (13)). Die Einheit „Geldeinheiten“ würde zwar zu einer Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit passen. Sie ist aber nicht die Einheit der Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$, die Ralf bei der Berechnung in Aufgabe 1 verwendete.

Phase zu Aufgabe 2: Bei Aufgabe 2 werden die Studierenden mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten (als Ableitung oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit) konfrontiert. Weil Karl in Aufgabe 1 die Ableitung verwendet hat, bekommt er hier folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Karl erinnert sich sofort an diese Definition (vielleicht auch als Interpretation):

(25) K: *An die zusätzlichen, ah doch, genau, also den Text kenne ich, das sagt mir was. Die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion, ja.*

Er versucht nun mit Hilfe dieser Definition sein Ergebnis „Grenzkosten= 1“ aus Aufgabe 1 zu interpretieren:

(25) weiter K: *Also würde ich jetzt noch eine Mengeneinheit dazu nehmen, würden die zusätzlichen Kosten Eins betragen.*

Er nimmt hier also eine Gleichsetzung der Grenzkosten als Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit vor.

Nun fragt der Interviewer, ob diese Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit der Ableitung entspräche, wenn man sie wörtlich nimmt:

(26) I: *Ist diese Definition, wenn man sie wörtlich nimmt das Gleiche wie die Ableitung oder eigentlich was anderes?*

(Pause von 15s)

(27) K: *Ja, müsste doch eigentlich das Gleiche sein.*

Karl ist also der Meinung, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sein müssten, ist sich aber nicht sicher. Damit beginnt die Interventionsphase.

Interventionsphase: Ziel der Interventionsphase ist die Herausarbeitung von Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit.

Zunächst möchte der Interviewer auf die Einheitenproblematik hinaus und stellt folgende Frage:

(28) I: *Ja, wenn du diese Definition [die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit] wörtlich nehmen würdest, was wäre dann die Einheit? In was müsste ich das angeben, wenn ich sozusagen das dort benutze?*

Er erwartet hier die Einheit „Geldeinheiten“, die Karl bereits vorher genannt hat. Karl gibt aber überraschenderweise eine andere Antwort:

(29) K: *Geldeinheit pro produzierter Mengeneinheit, oder?*

(30) I: *Warum jetzt so?*

(31) K: *Weil das ja in Abhängigkeit zu den Mengeneinheiten ist. Wenn ich jetzt noch eine Einheit dazu nehme, dass die Kosten dann um Eins steigt.*

Karl rekonstruierte nun für sich die Einheit der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit als „Geldeinheit pro Mengeneinheit“. Dies spricht dafür, dass Karl die Zusatzkosten in der Definition „Zusatzkosten der nächsten Mengeneinheit“ als „Zusatzkosten pro Einheit“ auffasst. Dann kann sich natürlich kein Widerspruch in der

Einheit zwischen den über die Zusatzkosten definierten Grenzkosten und den Grenzkosten als Ableitung ergeben.

Daher möchte der Interviewer nun auf den numerischen Unterschied zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit hinaus. Dazu legt er Karl die Interventionsaufgabe vor, in der bei einer graphisch gegebenen Funktion die Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 10 Einheiten um eine Einheit bestimmt werden sollen (Funktionsgraph siehe Abbildung 128).

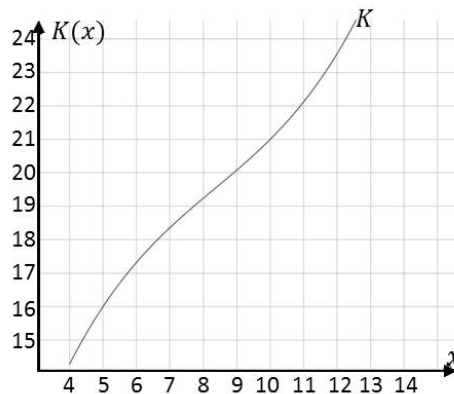


Abbildung 128: Graph der Kostenfunktion K der Interventionsaufgabe

Nach kurzer Überlegung nennt Karl das Ergebnis 1. Dies wäre das Ergebnis bei Verwendung der Ableitung (siehe Abbildung 128). Bei einer exakten Bestimmung der Mehrkosten über die Kostendifferenz müsste man ein Ergebnis größer als 1 erhalten. Da es aber sein kann, dass Karl hier nur ungenau abgelesen hat, fragt der Interviewer nochmal nach:

- (37) K: *Ist das dann auch Eins, oder?*
- (38) I: *Wie kommst du jetzt darauf?*
- (39) K: *Ja, weil wenn wir einen Output von 11, ach ja, doch den Output auf 11 um eine weitere Einheit [von zehn] erhöhen, dann steigen auch die Kosten um eine weitere Einheit.*
- (40) I: *Woran siehst du das?*
- (41) K: *Einfach, also ich habe versucht abzulesen.*
- (42) I: *Mhm. (bejahend)*
- (43) K: *Der Graph/ Ah, ne, ne, ne. Ah ok. Das ist doch schon etwas mehr als Eins.*

Karl hat also doch erkannt, dass die Mehrkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene eigentlich der Kostendifferenz $K(11) - K(10)$ entsprechen.

Da Karl zu Beginn des Interviews die Zusatzkosten der nächsten Einheit mit den Grenzkosten als Ableitung gleichgesetzt hat, fragt der Interviewer nochmal nach ob bei Verwendung der Ableitung dasselbe wie bei Verwendung der Kostendifferenz rausgekommen wäre:

- (46) I: *Jetzt hast du ja sozusagen gar nicht die Ableitung genutzt. Jetzt hast du es ja anders gemacht.*

- (47) K: *Mhm* (bejahend), *durch Ablesen*.
 (48) I: *Käme bei Verwendung der Ableitung das Gleiche raus?*
 (49) K: *Denke schon*.

Karl ist also nach wie vor überzeugt, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind.

Der Interviewer möchte nun Karl zur Erkenntnis des numerischen Unterschiedes führen. Hierfür fordert er ihn auf, die Aufgabe 1 zur Bestimmung der Grenzkosten bei $x = 100$ auf demselben Weg zu lösen, wie er jetzt die Interventionsaufgabe gelöst hat (also über die Kostendifferenz). Bei Verwendung der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$ würde man 1,051 erhalten, was sich von dem bereits ermittelten Wert $K'(100) = 1$ unterscheidet. Karl versteht jedoch die Aufgabenstellung nicht (die zugehörigen Dialogteile (50)-(67) werden hier ausgelassen, weil sie keine neuen Erkenntnisse zu Karls Verständnis der Grenzkosten liefern). Daher entscheidet sich der Interviewer dann dafür, den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ durch Karl gleich auf graphischer Ebene herausfinden zu lassen. Dies ist ja laut Interviewkonzept an späterer Stelle ohnehin vorgesehen, um zu sehen, inwieweit die Studierenden auf graphischer Ebene eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ schlagen können:

- (68) I: *Wie könnte man das* [die Interventionsaufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten der nächsten Einheit, die ja für Karl dasselbe wie die Grenzkosten als Ableitung waren] *jetzt mit der Ableitung lösen?*
 (69) K: *Einfach 10 in die Ableitung einsetzen und gucken, was rauskommt*.
 (70) I: *Aber wir haben ja keine Formel*.
 (71) K: *Genau deswegen. Genau das irritiert mich*.

Karl möchte zunächst eine Formel haben, ist aber dann sehr schnell in der Lage einen alternativen Lösungsweg ohne Formel über die graphische Ebene anzugeben:

- (72) I: *Genau, und wie kommt man dann ran an die erste Ableitung? Wie war das?*
 (73) K: *Ja, die erste Ableitung gibt die Steigung an*.
 (74) I: *Mhm, ja*.
 (75) K: *Dann die Steigung an der Stelle*.

Karl erinnert sich sofort an die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung an einer Stelle. Er erinnert sich auch gleich daran, dass sich Steigungen mit einem Steigungsdreieck bestimmen lassen:

- (76) I: *Ja, genau. Und wie groß ist die?*
 (77) K: *Ja, müsste man jetzt mit dem Steigungsdreieck*. [zeichnet ein Steigungsdreieck direkt an die Kurve mit der Spitze bei $x = 100$ und der vertikalen Seite bei $x = 101$, siehe Abbildung 129]
 (78) I: *Ja*.
 (79) K: *Ist auf jeden Fall ein bisschen mehr als eins. Obwohl, es ist ja. Irgendwas mache ich falsch glaube ich. Obwohl das ist, ach eine Einheit, klar. Wäre jetzt 1,2 durch 1*.

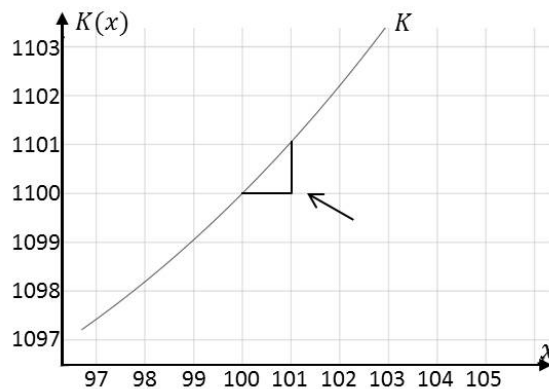


Abbildung 129: Steigungsdreieck von Karl zur Bestimmung von $K'(10)$

Karl hat hier also nicht die Steigung an der Stelle $x = 10$ bestimmt, sondern die Steigung der Sekante durch $(10, K(10))$ und $(11, K(11))$. Er assoziiert also mit der Steigung an einer Stelle schon ein Steigungsdreieck, setzt dieses aber an die Kurve und nicht an die Tangente an der Stelle $x = 10$ an. Damit erhält er natürlich auch dasselbe Ergebnis wie bei Verwendung der Kostendifferenz $K(11) - K(10)$. Allerdings äußert Karl, wie man oben sieht, selbst Zweifel an seinem Vorgehen. Die gedankliche Gleichsetzung von den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit könnte die Wahl dieses falschen Lösungsansatz unter Verwendung des Steigungsdreiecks an die Kurve auch begünstigt haben.

Die Vorstellung von der Ableitung als Steigung der *Tangente* scheint bei Karl bis jetzt nicht präsent zu sein (nur die Deutung als Steigung in einem Punkt), weshalb der Interviewer daran erinnert, dass Steigungen in der Vorlesung eigentlich nur für Geraden definiert wurden:

(82) I: *Die Ableitung bei 10 war die Steigung von der Funktion, aber wir haben ja eigentlich nur die Steigung von einer Geraden.*

(83) K: *Die Tangente erstmal.*

(84) I: *Genau.*

(85) K: *Ach so, alles klar. (wirkt erleichtert)*

Karl wirkt bei dieser Erkenntnis mit der Tangente erleichtert. Seine vorherige innere Unsicherheit, die durch die Zweifel bei der Wahl des Steigungsdreiecks deutlich wurden, scheinen zu verschwinden. Karl verfügt also doch über die Vorstellung der Ableitung als Steigung der Tangente, jedoch war diese nicht gleich präsent.

Beim Einzeichnen der Tangente macht Karl nebenbei sein Verständnis des Tangentenbegriffs deutlich:

(87) K: *Ok. Die Frage ist jetzt, wie zeichne ich das ein. Die muss ja nicht schneiden, sondern berühren.*

Sein Verständnis basiert also auf einem geometrischen Tangentenbegriff als Gerade, die die Funktion berührt, aber nicht schneidet (Vinner, 1982).

Karls eingezeichnete Tangente ist korrekt und er nennt dann als richtiges Ergebnis für die Steigung den Wert 1:

(89) K: *Irgendwie sieht das für mich aus wie Eins.*

(90) I: *Ja, ist es auch.*

(91) K: *Ach so, das ist auch Eins* [wie bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1], *ok.*

Da schon bekannt ist, dass Karl Steigungen mit Hilfe von Steigungsdreiecken korrekt ermitteln kann, fordert ihn der Interviewer nicht noch einmal auf zu erklären, wie er auf diese 1 gekommen ist.

Der Interviewer macht Karl nun darauf aufmerksam, dass die Ableitung und die Zusatzkosten für die nächste Einheit nicht das gleiche sind, was Karl dann auch für sich bestätigt:

(92) I: *Das ist sozusagen, also ist die Ableitung nicht das Gleiche wie die Mehrkosten, wie man sieht, es unterscheidet sich.*

(93) K: *Ah, ok, weil ich ja vorhin gesagt habe, es ist mehr als Eins.*

Karl ist also durch die Intervention klar zu Erkenntnis gelangt, dass ein numerischer Unterschied vorliegt.

Insgesamt sieht man bis hierher, dass Karl zunächst die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit miteinander identifiziert hat. Bei den Einheiten konnte sich kein Widerspruch ergeben, da Karl für sich aus der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit die Einheit „Geldeinheiten pro Mengeneinheit“ rekonstruiert hat. Diese stimmt mit der Einheit der Grenzkosten als Ableitung überein. Das spricht dafür, dass er die dort genannten Zusatzkosten nicht als echte Zusatzkosten auffasst, sondern eher als Zusatzkosten pro Einheit, also als Rate.

Allerdings bemerkte Karl dann durch den Vergleich von $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x)$ auf graphischer Ebene den numerischen Unterschied zwischen $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x)$. Somit ist klar, dass sie nicht dasselbe sein können. Inwiefern er hier auch die Verbindung zwischen beiden Objekten über die Tangente und deren Steigung verinnerlicht hat, ist erstmal unklar.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Die zugehörige Graphik ist in Abbildung 130 zu sehen.

Weil das Prozedere mit dem Einzeichnen der Tangente bereits in der Interventionsphase von Karl korrekt durchgeführt wurde, zeichnet der Interviewer die Tangente bei $x = 100$ zunächst selbst ein und fragt:

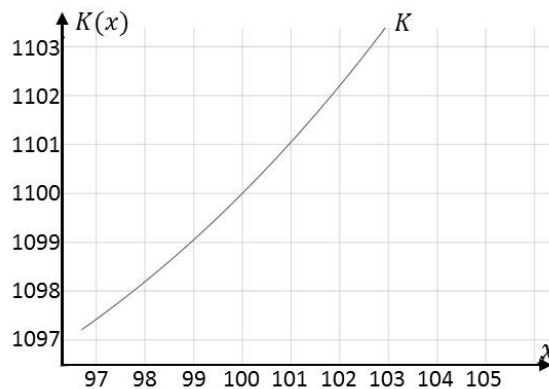


Abbildung 130: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

(101) I: *Wie müsste eine Funktion aussehen, damit es stark abweicht [die Ableitung von den Zusatzkosten]?*

...

(103) weiter I: *Wie müsste die aussehen, damit der Fehler groß ist?*

Karl ist der Ansicht, dass bei Graphen, die stärker von einer Geraden abweichen, die er als „konvexer“ beschreibt, der Fehler größer ist:

(104) K: *Ja, wenn die Kosten am Ende sehr hoch ausfallen, also wenn der Graph konvexer ist.*

(105) I: *Ja. Also sozusagen/ Und was hat der Graph [der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 bzw. 2] hier für eine Eigenschaft, dass es so gut klappt?*

(106) K: *Die ist ja fast, wie war das, weder konvex noch konkav oder umgekehrt, was weiß ich jetzt nicht mehr.*

(107) I: *Ja, ja, genau. Was ist sie dann?*

(108) K: *Die ist ja fast eine Gerade sozusagen.*

Karl hat also (lokale) annähernde Linearität der in Abbildung 130 dargestellten Funktion als Ursache für den geringen Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ korrekt erkannt. Dies spricht dafür, dass Karl tatsächlich eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene über die Tangente hergestellt hat, wie sie auch in der Vorlesung visualisiert wurde (siehe Abbildung 113 in der a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4). Es bleibt allerdings offen, ob ihm auch der Zusammenhang zwischen $K(x+h) - K(x)$ und $K'(x)$ für $h \neq 1$ auch klar ist, denn dort ist ja der Zuwachs auf der Tangente nicht $K'(x)$ sondern $K'(x) \cdot h$.

Überraschenderweise fügt Karl nach seinen Ausführungen zur annähernden Linearität der in Aufgabe 3 gegebenen Kostenfunktion in dem in Abbildung 130 dargestellten Bereich noch eine Bemerkung mit „durchschnittlich steigenden Kosten“ ein:

(112) K: *Die durchschnittlichen Kosten fast, also.*

(113) I: *Was meinst du mit durchschnittlich?*

(114) K: *Durchschnittlich steigend. Also durchschnittlich steigende Kosten.*

Was er hiermit meint, bleibt unklar. Hier hätte man nochmal genauer nachfragen sollen.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Karl weiß zunächst die Definition der Ableitung nicht mehr. Daher bekommt er diese auf einer Karteikarte vorgelegt in der Form $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$. Er versucht nun den Variablen der Definition eine inhaltliche Bedeutung zu geben, indem er den Bezug zur geometrischen Ebene herzustellen versucht:

(123) K: *h war das hier* [zeigt auf die vertikale Seite des Steigungsdreiecks in der Skizze zur Kostenfunktion aus Aufgabe 1], *also die Höhe sozusagen, oder?*

Es gelingt Karl nicht, der Variablen h die korrekte Bedeutung zuzuordnen. Wahrscheinlich hat er sich von der Variablenbezeichnung h wie Höhe dazu verleiten lassen, h als die Höhe des Steigungsdreiecks anzunehmen.

Der Interviewer fragt nun noch einmal nach, was h ist. Dadurch signalisiert er natürlich, dass Karls Antwort nicht richtig ist:

(124) I: *Ja, was war h ?*

(125) K: *Was war nochmal h ? Auf jeden Fall ist es ja, je kleiner beziehungsweise je näher sich h an die Null nähert, desto ähnlicher ist der Wert der Wert der Ableitung mit der Ausgangsfunktion.*

Streng genommen ist diese Aussage nicht richtig. Denn für $h \rightarrow 0$ wird der Wert der Ableitung nicht ähnlicher mit dem Wert der Ausgangsfunktion. Für $h \rightarrow 0$ strebt der Differenzenquotient gegen die Ableitung. Die Zusammenhänge zwischen Ausgangsfunktion, Differenzenquotient und Ableitung scheinen Karl nicht klar zu sein.

Der Interviewer fragt nochmal nach:

(126) I: *Mit der Ausgangsfunktion?*

Karl überlegt eine Weile, findet aber keine passende Antwort. Stattdessen versucht er noch einmal die Bedeutung der Variable h zu rekonstruieren:

(131) K: *Die Frage ist jetzt, was war h nochmal? Das h hat nichts mit dem Steigungsdreieck zu tun, oder?*

(132) I: *Mhm. Also h war nicht die Höhe des Steigungsdreiecks.*

Karl arbeitet mit dieser Information aber nicht weiter, sondern wendet sich nun dem Term $K(x+1) - K(x)$ zu. Aber auch da hat er Schwierigkeiten, weil er mit dem Term $K(x+1)$ nicht umgehen kann:

- (133) K: *Ah ok, ok, $K(x + 1)$.*
 (134) I: *Mhm.* (Zustimmung, als Ermunterung gemeint, sich jetzt erstmal mit diesem Term zu beschäftigen)
 (135) K: *Bezieht sich das auf das?* [zeigt zuerst auf die 1 im Ausdruck $K(x + 1)$ und dann auf die 1, die in Aufgabe 1 bei der Bestimmung von $K'(100)$ ermittelt wurde] *Also weil hier jetzt die Eins rauskommt.*
 (136) I: *Ne, die Eins ist zufällig.*
 (137) K: *Ah, das ist zufällig.*
 (138) I: *Das war, damit da eine schöne Zahl rauskommt.*
 (139) K: *Ah gut, ok.*

Karl möchte hier fälschlicherweise die 1 von $K'(100) = 1$ mit der 1 in $K(x + 1)$ in Verbindung bringen. Er versteht also die inhaltliche Bedeutung des Terms $K(x + 1)$ nicht.

Insgesamt hat Karl bis hierher bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene über die Definition der Ableitung Probleme bei der inhaltlichen Deutung der Definition der Ableitung und beim Verständnis von Funktionstermen. Es bleibt ihm also dann letztendlich nur ein schematischer Vergleich der Terme übrig, den Karl dann auch vornimmt.

Bei diesem Vergleich erkennt Karl richtig, dass bei der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ im Vergleich zur Definition der Ableitung nun in den Bruch $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ der Wert $h = 1$ eingesetzt wurde:

- (139) weiter K: *Also h ist Eins. h ist Eins.*
 (140) I: *Mhm* (bejahend).

Dies ist aber für Karl ein Problem:

- (141) K: *Aber je näher, ist ja paradox. Je näher sich h der Null nähert, desto mehr kommt der auch Wert zur Eins, oder wie? Desto näher ist h auch zu Eins?*
 (142) I: *Ne das nicht.*
 (143) K: *Ach so ne das kann auch nicht sein. Wenn das schon bei null ist.*

Es steht für ihn also im Widerspruch, dass einerseits $h \rightarrow 0$ gehen soll, andererseits aber $h = 1$ sein soll. Hier käme das ökonomische Argument ins Spiel, dass in der Ökonomie die 1 tatsächlich als sehr kleiner Wert nahe 0 angenommen wird (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5).

Der Interviewer fragt noch einmal, wie man denn $h \approx 0$ und $h = 1$ aus ökonomischer Sicht zusammenbringen könnte. Hier findet Karl aber keine Antwort und damit endet das Interview.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Karl anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Zu Beginn des Interviews assoziierte Karl mit den Grenzkosten die Ableitung $K'(x)$, wie sie in der Mathematikvorlesung eingeführt wurden (siehe a-priori

Analyse in Kapitel 8.2.2). An die dazu passende Einheit konnte er sich nicht mehr korrekt erinnern (er nannte „Mengeneinheit durch Geldeinheit“).

Nach der Aufforderung die Einheit aus seinem inhaltlichen Verständnis der Grenzkosten zu rekonstruieren, nannte er schließlich „Geldeinheiten“, weil die Grenzkosten ja Kosten sind. Und diese werden schließlich in Geldeinheiten angegeben. Dies passt dann wieder zur Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit, wie sie in vielen Lehrbüchern der Ökonomie zu finden ist (siehe Kapitel 3.3.1). Karl war hier also nicht konsistent.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Karl war vor der Intervention im Interview der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind. Aus der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit rekonstruierte er dann überraschenderweise die Einheit der Grenzkosten als Ableitung: *Geldeinheiten pro Mengeneinheit*. Dies spricht dafür, dass er die Grenzkosten als Zusatzkosten nicht als echte Zusatzkosten verstand, sondern schon im Sinne einer Rate. Dementsprechend konnte er nicht zu einem Widerspruch in den Einheiten geführt werden.

Allerdings bemerkte er dann durch die Aufgabe zur Bestimmung von Mehrkosten der nächsten Einheit, dass diese auf mathematischer Ebene der Differenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen. Durch den vom Interviewer angeleiteten Vergleich beider Werte auf der graphischen Ebene erkannte Karl auch den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Karl konnte eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen, benötigte aber einige Hilfestellungen des Interviewers. Selbstständig konnte er die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ bei einer gegebenen Funktion graphisch bestimmen. Außerdem kannte er die Deutung der Ableitung als Steigung in einem Punkt angeben. Diese Steigung konnte er aber nicht korrekt bestimmen, weil ihm die Tangente zunächst nicht in den Sinn kam (er bestimmte die Steigung an einer Stelle mit Hilfe eines Steigungsdreiecks an die Kurve zwischen $(x, K(x))$ und $(x+1, K(x+1))$ und somit letztendlich die Steigung der Sekante durch diese beiden Punkte). Dann gab der Interviewer den Tipp, dass der Begriff der Steigung zunächst nur für eine Gerade eingeführt wurde (in der Vorlesung wurde die Steigung einer Kurve an einem Punkt *nicht definiert*). Daraufhin fiel Karl die Tangente ein. Deren Steigung konnte er dann korrekt mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen, wodurch ihm der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auffiel.

An späterer Stelle bemerkte er korrekt, dass annähernde Linearität der Ausgangsfunktion K über einen gewissen Bereich eine wichtige Ursache dafür ist, dass der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ klein ist. Bei Funktionen mit stärkerer Änderung der Wachstumsrate, die er als „konvexer“ bezeichnete, ist der Fehler seiner Meinung nach größer. Dies spricht dafür, dass Karl nach der Intervention tatsächlich $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente und ihre Steigung adäquat miteinander in Verbindung bringen konnte (wie es auch in der Vorlesung visualisiert wurde, siehe Abbildung 113 in der a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4).

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auf dieser Ebene hatte Karl sehr große Schwierigkeiten. Zunächst wusste er die Definition der Ableitung nicht mehr. Als ihm diese als $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ vorgelegt wurde, konnte er den Termen in ihr keine adäquate inhaltliche Bedeutung geben. So war er beispielsweise der Ansicht, dass das h der Höhe eines Steigungsdreiecks entspricht. Weiterhin hatte er Schwierigkeiten beim Verständnis von Funktionsausdrücken. So konnte er beispielsweise den Ausdruck $K(x+1)$ in der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ nicht richtig deuten. Er war der Ansicht, dass die eins in $K(x+1)$ etwas mit der eins des Ergebnisses $K'(100) = 1$ aus Aufgabe 1 zu tun hatte. Dies führte dazu, dass Karl letztendlich nur ein schematischer Vergleich von $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ und $K(x+1) - K(x)$ übrig blieb.

Bei diesem schematischen Vergleich erkannte Karl dann, dass bei $K(x+1) - K(x)$ der Wert $h = 1$ in den Bruch $\frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ der Definition der Ableitung eingesetzt wurde. Dies führte dann aber zu einem kognitiven Konflikt. Für Karl war es ein Widerspruch, dass h einerseits gegen 0 geht, und andererseits gleich 1 sein soll. Auf den in der Vorlesung genannten Hinweis, dass $h = 1$ in der Ökonomie häufig als klein angenommen wird, und damit nahe an der null liegt (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5), kam Karl nicht.

Insgesamt konnte Karl auf der symbolischen Ebene keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen, obwohl eine solche der Mathematikvorlesung bei der Herleitung der ökonomischen Interpretation der Ableitung über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h behandelt wurde (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5).

8.4.6 Auswertung des Interviews von Veronika

Phase zu Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollen die Grenzkosten der Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Dabei soll auch die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Euro gegeben ist.

Veronika liest sich zunächst die Aufgabenstellung durch und äußert gleich zu Beginn Unbehagen im Zusammenhang mit der Bestimmung der Einheit:

- (1) I: *Dann lass uns einfach mal anfangen. Dann gebe ich dir sozusagen einfach mal den Einstieg.*
- (2) V: *Oh Gott, mit der Einheit, ja.*

Danach fängt sie an, die Aufgabe zu lösen, indem sie $K'(100)$ berechnen möchte:

- (4) V: *Also, soll ich jetzt einfach sagen, was ich mache?*
- (5) I: *Ja, gerne.*
- (6) V: *Also die Ableitung machen, dann 100 einsetzen, dann habe ich die Grenzkosten.*

Veronika beginnt zu rechnen und erhält schließlich das richtige Ergebnis $K'(100) = 1$. Bei der Einheit nennt sie zunächst „Euro pro Stück“

- (12) V: *Das ist Euro pro Stück.*
 (13) I: *Mhm. (Tonlage wie „aha“)*

Sie nennt also die zu den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ passende Einheit. Bei der Frage nach der Begründung wird sie aber unsicher:

- (14) V: *Ja, ich glaube schon,*
 (15) I: *Genau das wäre jetzt meine nächste Frage gewesen.*
 (16) V: *Weil die Grenzkosten ist das ja, wenn ich das um eine marginale Einheit erhöhe, kriege ich wie weit die Kosten dann steigen. Also wenn ich eine Einheit des Produktes mehr rausbringe, habe ich Kosten von einen Euro pro Stück mehr. Aber pro Stück macht das eigentlich keinen Sinn? Die Kosten. Warte, warte. Das war komisch. Aber ich glaube es ist Euro pro Stück? Könnte es das sein? Nee, ne? Ok warte. Die Grenzkosten. Wenn ich eine Einheit mehr rausbringe, habe ich Kosten von einen Euro mehr, aber pro Stück oder nicht? Insgesamt dann? Vielleicht habe ich auch insgesamt. Aber ich meine das war pro Stück, ich meine, dass man das teilen musste, wenn man die Ableitung gebildet hat.*

Man sieht hier bereits einen kognitiven Konflikt bei Veronika. Einerseits scheint sie sich daran zu erinnern, dass man durch die Mengeneinheit teilen muss, wenn die Ableitung gebildet wird (in der Mathematikvorlesung wurde die Einheit der Grenzkosten $K'(x)$ mit der formalen Definition der Ableitung begründet, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2). Andererseits hat Veronika auch die Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit im Sinn. Sie spricht hier auch einmal auch von einer *marginalen* Einheit. Das ist sie aber einfach nur eine Sprechweise für die nächste produzierbare Einheit, was an späterer Stelle deutlicher wird. Bei der Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten wäre die passende Einheit €, was Veronika auch zu bemerken scheint.

Letztendlich entscheidet sich Veronika für „Euro pro Stück“ aus ihrer Erinnerung, ist aber nicht überzeugt:

- (19) I: *Aber, du hast ja gerade drüber nachgedacht mit dem Euro pro Stück dann.*
 (20) V: *Ja, irgendwie habe ich darüber nachgedacht, ob das stimmen kann. Aber ich glaube das war so.*
 (21) I: *Aber ganz überzeugt bist du nicht, oder?*
 (22) V: *Ich bin nicht ganz überzeugt.*

Damit endet die Phase zu Aufgabe 1 des Interviews.

Phase zu Aufgabe 2: Bei Aufgabe 2 werden die Studierenden mit der alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit). Da Veronika bei der Bestimmung der Grenzkosten in Aufgabe 1 die Ableitung verwendet hat, bekommt sie folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Bereits vorher bei der Diskussion über die Einheit hatte sie die mit der Ableitung berechneten Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert. Daher erwartet der Interviewer hier, dass Veronika der Ansicht ist, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind. Dies bestätigt Veronika auch:

(25) I: *Jetzt ist die Frage: ist das das Gleiche wie die Ableitung oder ist das was anderes?*

(26) V: *Ne, das ist das Gleiche.*

Dies ist dann der Startpunkt der Interventionsphase.

Interventionsphase: Ziel der Interventionsphase ist die Erkenntnis der Studierenden, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen, und sich diese von den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ in ihrer Einheit und numerisch unterscheiden.

Zunächst will der Interviewer auf den numerischen Unterschied hinaus. Dementsprechend legt er jetzt die Interventionsaufgabe vor, in der bei einer graphisch gegebenen Funktion die Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 10 Einheiten um eine Einheit bestimmt werden sollen (Funktionsgraph siehe Abbildung 131).

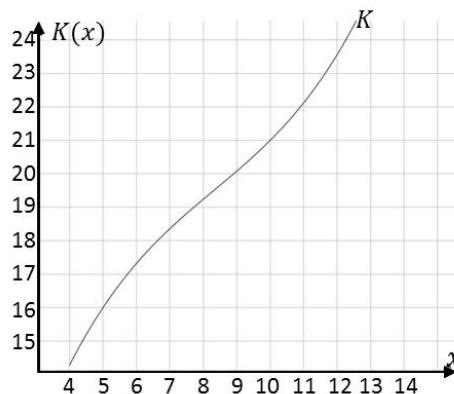


Abbildung 131: Graph der Kostenfunktion K aus der Interventionsaufgabe

Veronika möchte sofort den Stift ansetzen, stoppt dann aber:

(31) I: *Was überlegst du gerade?*

(32) V: *Ich überlege, ob ich da jetzt diese Tangente reinmalen soll oder nicht, aber eigentlich ist das dafür nicht notwendig.*

(33) I: *Aha.*

Veronika möchte also die Mehrkosten der nächsten Einheit zunächst mit der Ableitung bestimmen, die sie ja auch als die Zusatzkosten der nächsten Einheit ansah. Hierfür wollte sie die Tangente einzeichnen und vermutlich deren Steigung ablesen. Weshalb das ihrer Meinung aber nicht nötig ist, wird aus dem folgenden Dialog klar:

(34) V: *Also die Tangente [deutet den Verlauf der Tangente auf dem Papier an]. Die [die Funktion] ist ja fast gerade schon.*

Veronika will also die Tangente nicht einzeichnen, weil der Graph der Funktion ihrer Meinung nach fast eine Gerade ist. Da es aber doch keine lineare Funktion ist, hakt der Interviewer nochmal nach:

- (35) I: *Wenn man genau hinguckt?*
- (36) V: *Ja, da ist eine so ganz leicht Krümmung so.*
- (37) I: *Mhm* (bejahend).
- (38) V: [zeichnet die Tangente ein] *So.*
- (39) I: *Ja, und was sind jetzt die Kosten, die Mehrkosten, wenn man von 10 auf 11 Einheiten erhöht? Wie viel wäre das jetzt?*
- (40) V: *Eins.*
- (41) I: *Warum eins?*
- (42) V: *Weil man hier einen hoch geht.*

Es ist noch nicht klar, wie Veronika hier auf ihr Ergebnis kam. Bei korrektem Ablesen der Steigung der Tangente bei $x = 10$ würde man tatsächlich „eins“ erhalten (siehe Abbildung 131). Es könnte aber auch sein, dass sie doch die Differenz $K(11) - K(10)$ verwendet hat und nur ungenau abgelesen hat, wie zum Beispiel Karl (siehe Kapitel 8.4.5). Daher fragt der Interviewer nochmal nach:

- (43) I: *Wo geht man einen hoch?*
- (44) V: *So* [zeichnet Steigungsdreieck an die Tangente ein]. *Dann hast du die Steigung der Tangente.*

Veronika hat die Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 10 Einheiten um eine Einheit also auch über die Bestimmung von $K'(10)$ gelöst. Hier zeigt sich noch einmal, dass Veronika die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ mit den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit identifiziert. Daher fragt der Interviewer nun noch einmal genauer nach, wie man die Aufgabe hätte lösen müssen, wenn man die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich nehmen würde:

- (45) I: *Ja, wenn du die Definition [der Grenzkosten als Zusatzkosten] wörtlich nehmen würdest, müsstest du es dann nicht vielleicht anders machen?*
- (46) V: [liest die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit noch einmal vor] *Ja, wenn ich eine weitere Mengeneinheit produziere, erhalte ich Kosten von 22, vorher hatte ich Kosten von 21.*

Jetzt erkennt Veronika, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ auf mathematischer Ebene entsprechen. Allerdings erhält sie bei dem Ablesen der Differenz ebenfalls 1€, weil sie ungenau abliest:

- weiter (46) V: *Also ich habe ein Euro Grenzkosten.*
- (47) I: *Mhm* (bejahend). *Jetzt hast du es ja anders bestimmt als mit der Tangente.*
- (48) V: *Genau, jetzt habe ich es hier abgelesen.*
- (49) I: *Genau, und wenn man genau hinguckt, Moment.*

- (50) V: *Also jetzt habe ich $K(11) - K(10)$ gerechnet.*
 (51) I: *Genau und wenn man hier nochmal genau hinguckt, kommt dann Eins raus oder?*
 (52) V: *Ach so, ne. Oh, ich habe so hässlich gemalt, ne dann kommt 1,2 oder 1,1, raus.*

Veronika hat nun den numerischen Unterschied erkannt, was sie dann auch nochmal für sich bestätigt:

- (53) I: *Also was anderes als wenn ich sozusagen die Tangente nehme.*
 (54) V: *Ja, stimmt. Stimmt, mit der Tangente würde genau Eins rauskommen.*

Damit sind der numerische Unterschied zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit geklärt. Nun fragt der Interviewer nun noch einmal nach, welche Einheit die Grenzkosten haben müssten, wenn man deren Definition als Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich nimmt:

- (55) I: *Wie sieht es jetzt mit der Einheit aus, wenn ich das [die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit] wörtlich nehmen würde? Was wäre da die Einheit?*
 (56) V: *Euro.*
 (57) I: *Ja.*
 (58) V: *Und bei der Ableitung habe ich noch pro Stück gemacht.*
 (59) I: *Ja, genau. Mhm (bejahend).*
 (60) V: *Das ist der Unterschied, richtig?*

Offenbar ist dieser Unterschied in den Einheiten für Veronika wesentlich schwerwiegender als der numerische Unterschied.

Nun fragt der Interviewer noch einmal nach, weshalb die Einheit der Grenzkosten als Ableitung „Euro pro Stück“ ist:

- (61) I: *Ja, jetzt die Frage, warum ist die Einheit bei der Ableitung Euro pro Stück? Hast du da noch eine Idee, warum da die Einheit Euro pro Stück war?*
 (62) V: *Ja, weil man das irgendwie ausrechnen und beweisen konnte, aber äh, ja, bei der Definition der Ableitung war das doch auch mit/*
 (63) I: *Mhm (bejahend).*
 (64) V: *Durch x , f strich durch x mal irgendwas. Aber da bin ich gerade bei Elastizität, ne warte. Ach die, ja, ne, weiß ich aber nicht mehr. Aber ich bin ziemlich sicher, dass das „[Geteilt] durch“ da kommt. Weil wenn man die Stückkosten ableitet, hat man ja durch Stück zum Quadrat gehabt.*
 (65) I: *Mhm, ja.*
 (66) V: *Aber ich weiß nicht mehr warum.*

Veronika versucht also die Einheit der Grenzkosten als Ableitung über die Definition der Ableitung zu begründen, so wie es in der Vorlesung getan wurde (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.2). Dies gelingt ihr aber nicht, weil sie die formale Definition der Ableitung nicht rekonstruieren kann.

Insgesamt zeigt sich, dass Veronika zu Beginn des Interviews die Grenzkosten als Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit miteinander identifizierte. Die Intervention führte dann bei Veronika zu der Erkenntnis, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x + 1) - K(x)$ entsprechen, und dass diese sich von den Grenzkosten als Ableitung numerisch und in der Einheit unterscheiden. Insbesondere der Unterschied in den Einheiten schien für Veronika bedeutsam zu sein, weil sie hier bereits vorher einen kognitiven Konflikt hatte.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Die zugehörige Graphik ist in Abbildung 132 dargestellt.

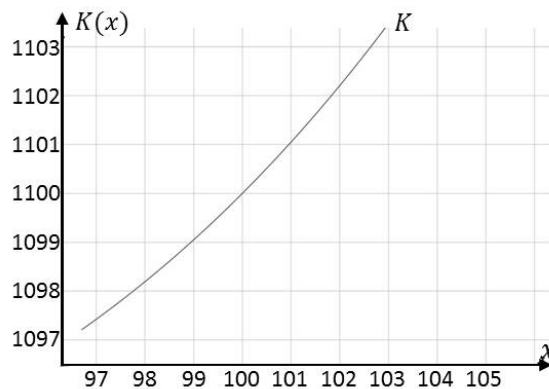


Abbildung 132: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

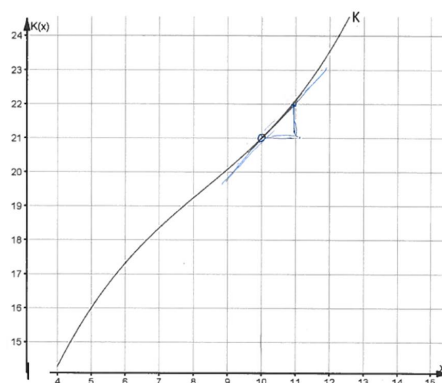


Abbildung 133: Graph der Kostenfunktion der Interventionsaufgabe mit Veronikas Einzeichnungen aus der Interventionsphase

Weil Veronika die Skizze mit eingezeichneter Tangente der Interventionsaufgabe bereits vorliegt (siehe Abbildung 133), und Veronika dort schon festgestellt hatte, dass der

numerische Unterschied zwischen $K'(10)$ und $K(11) - K(10)$ sehr gering ist, entscheidet sich der Interviewer spontan, den Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene direkt an Veronikas Skizze zu diskutieren.

Der Interviewer fragt also nach, weshalb der numerische Unterschied zwischen Ableitung und Kostendifferenz bei der Veronika vorliegenden Funktion so gering ist:

(67) I: *Ja, du siehst also, es $[K'(10)]$ und die Zusatzkosten $K(11) - K(10)$ unterscheidet sich ein bisschen. Also einmal sind die Einheiten unterschiedlich, die Werte sind auch ein bisschen unterschiedlich. Dennoch ist der Unterschied der Werte ja relativ gering. Warum ist der denn relativ gering? Und wie könnte denn eine Funktion aussehen, dass der Unterschied groß wäre?*

(68) V: *Der Unterschied ist ziemlich gering, weil die Kostenfunktion nur so leicht gekrümmt ist, dass sie ähnlich der Tangente ist. Das sieht so aus. Aber wenn die jetzt stärker gekrümmt wäre, hätten wir einen ziemlich großen Unterschied, wenn das jetzt so ginge*[deutet auf dem Blatt den Graphen einer stark gekrümmten Funktion an].

Veronika stellt also richtig fest, dass der Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ deshalb so klein ist, weil die Funktion vergleichsweise schwach gekrümmt ist. Hierbei legt sie vermutlich einen anschaulichen Krümmungsbegriff zu Grunde, wie er auch in der Schule verwendet wird (Bigalke u. a., 2011, S.149), denn in der Vorlesung wurde der Begriff der Krümmung nicht genannt. Mit diesem Krümmungsbegriff kann man die Stärke der Krümmung zweier Funktionen relativ zueinander vergleichen.

Der Interviewer fragt nun nach, weshalb denn Funktionen in der Ökonomie vergleichsweise schwach gekrümmt sind (meint damit: schwächer als prototypische nichtlineare Funktionen wie $f(x) = x^2$ und $f(x) = e^x$):

(70) V: *Warum die Kostenfunktionen nur leicht gekrümmt sind?*

(71) I: *Mhm (bejahend). Hast du da eine Idee?*

(72) V: *Ja, wie nannte man das nochmal? Da gibt es einen Begriff für, weil immer wenn du mehr Mengen produzierst, steigen die Kosten ja nicht sehr viel stärker, sondern, oh wie heißt das denn? Eigentlich ist es immer besser, also nicht immer, aber häufiger besser mehr zu produzieren, weil sich die Fixkosten dann besser auf mehrere Stücke verteilen, sozusagen. Weißt du, was ich meine?*

Die Antwort von Veronika ist dem Interviewer zunächst unverständlich, weshalb er nochmal genauer nachfragt:

(73) I: *Ne, das ist mir jetzt nicht ganz klar.*

(74) V: *Na ja, die Kostenfunktion setzt sich aus Stückkosten [richtig wäre variable Kosten] und Fixkosten zusammen. Wenn ich jetzt nur wenige Stücke produziere, haben die Fixkosten ja einen größeren Anteil. Und wenn ich viele Stücke produziere, verteilen sich die Fixkosten auf all diese Stücke und das heißt, jede zusätzliche Einheit bringt, wenn ich jetzt ganz, ganz viele Einheiten habe, dann bringt sie ja nur noch die zusätzlichen Stückkosten mit ein, aber nicht noch/*

(75) I: *Mhm (bejahend, bezieht sich darauf, dass der Interviewer nun verstanden hat, wie das mit der Verteilung der Fixkosten gemeint ist).*

Was Veronika hier beschreibt, heißt in der Ökonomie *Fixkostendegression* (Wöhe u. Döring, 2013, S.301). Dieser Effekt besagt, dass der Anteil der Fixkosten $K_f := K(0)$ an den Stückkosten $k(x) := \frac{K(x)}{x}$ bei steigender Produktion immer geringer wird. Dies kann mit folgender Rechnung erklären:

$$\begin{aligned} K(x) &= K_v(x) + K_f \\ (\text{Aufteilung in Fixkosten } K_f = K(0) \text{ und variable Kosten } K_v(x) = K(x) - K_f) \\ \Rightarrow k(x) &= \frac{K(x)}{x} = \frac{K_v(x)}{x} + \frac{K_f}{x} \end{aligned} \quad (118)$$

Der Anteil der Fixkosten an den Stückkosten ist hierbei durch $\frac{K_f}{x}$ gegeben. Dieser Term wird eben für größeres x immer kleiner.

Nach der Beschreibung des Phänomens der Fixkostendegression fährt Veronika wie folgt fort:

(76) V: *Und deshalb steigt es nur langsam an, also im Sinne der Stückkosten.*

Hier ist der Schluss nicht klar. Denn die Fixkostendegression erklärt nicht das lokale Wachstumsverhalten und Krümmungsverhalten einer Kostenfunktion. Veronika liefert also keine plausible Erklärung, weshalb Kostenfunktionen in der Ökonomie häufig schwach gekrümmt sind. Allerdings wurde diese Frage in der Vorlesung auch nicht thematisiert.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Veronika weiß zunächst die Definition der Ableitung nicht mehr. Daher bekommt sie diese auf einer Karteikarte vorgelegt in der Form $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$. Als Veronika die Definition sieht, bemerkt sie zunächst entsetzt, dass sie sie nicht mehr weiß:

(88) V: *Ach du meine Güte.*

(89) I: *Wieso, ach du meine Güte?*

(90) V: *Ich weiß das nicht mehr. Oh nein. Ich schreib mir das mal auf, vielleicht kommt es dann.*

Veronika versucht nun die symbolischen Bestandteile der Definition der Ableitung zu analysieren, wobei sie sich insbesondere auf den Ausdruck $\lim_{h \rightarrow 0}$ konzentriert:

(92) V: *Die Ableitung sagt ja, dass das gleich dem $[K(x+h) - K(x)]$, aber geteilt durch h noch, ist. h läuft gegen 0. 0 darf es nicht werden, weil man nicht durch 0 teilen darf.*

(93) I: *Richtig.*

Interessant ist, dass Veronika rein auf der symbolischen Ebene bleibt. Anders als beispielsweise Ralf versucht sie nicht den Variablen eine Bedeutung auf der geometrischen Ebene zuzuordnen (siehe Kapitel 8.4.4) oder ihnen eine inhaltliche Bedeutung zu geben.

Nun fährt sie mit ihrer Analyse fort:

(94) V: *Also wird es [h] etwas sehr, sehr, kleines. Und wenn ich etwas sehr, sehr kleines durch etwas durch etwas sehr, sehr, sehr kleines teile, habe ich ja ungefähr diesen Wert wieder. Kann man das so?*

(95) I: *Was meinst du jetzt?*

(96) V: *Wenn ich das jetzt durch 0,00001 teile, erhalte ich ja wieder den oberen Wert.*

(97) I: *Dann wäre die Ableitung quasi?*

(98) V: *Gleich dem Zähler. Aber $x + 0,0001$, ja. Und nicht $x + 1$.*

Veronikas Argumentation wirkt so, als ob sie der Ansicht ist, dass mein beim Teilen des Zählers im Differenzenquotienten $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ durch ein sehr kleines h wieder den Zähler selbst erhält.

Sie kommt hier aber nicht weiter und wendet sich daher jetzt dem zweiten Term $K(x+1) - K(x)$ zu:

weiter (98) V: *Das [die 1 in $K(x+1)$] ist die eine Einheit, die ich weiter gehe.*

(99) I: *Mhm (bejahend).*

(100) V: *Minus das, wo ich vorher war $[K(x)]$. Ok (überlegend). Ja, wenn ich $h = 1$ setze, habe ich das Gleiche*

(101) I: *Genau, dann hast du das.*

Veronika erkennt also, dass bei $K(x+1) - K(x)$ in den Differenzenquotienten der Wert $h = 1$ eingesetzt wurde. Nun stellt sich die Frage, weshalb sich beim Einsetzen des Wertes $h = 1$ annähernd derselbe Wert wie bei Verwendung der Ableitung ergibt:

(101) weiter I: *Und jetzt die Frage, warum ist es ungefähr gleich, wenn ich $h = 1$ setze, wie als wenn ich dort die Definition [der Ableitung] hinschreibe? Warum kommt da sozusagen der gleiche Wert raus, der Gleiche ist es ja nicht, aber nur mit einer geringen Abweichung? Gibt es irgendein Argument dafür, was man sich überlegen könnte? Ist ja nicht bei beliebigen Funktionen so, aber ein ökonomisches Argument, warum kann man bei Kostenfunktionen davon ausgehen?*

(102) V: *Weil es eine marginale Einheit ist, weil es eine zusätzliche Einheit ist.*

Hier verwendet Veronika nun das zweite Mal den Begriff der marginalen Einheit. Dieser ist für sie aber nur eine Sprechweise für die nächste produzierbare Einheit, was der Interviewer in einem Nachtrag zum Interview nochmal explizit erfragt hat:

(113) I: *Du hast manchmal was von einer marginalen Einheit erzählt, was meinst du denn mit marginal?*

(114) V: *Heißt das nicht so? Eine marginale/das ist die nächste weitere Einheit, die ich produzieren kann.*

Veronikas Argumentation, dass der Unterschied deshalb klein ist, weil $h = 1$ der nächsten produzierbaren Einheit entspricht, ist nicht ganz klar. Daher fragt der Interviewer nochmal nach:

(103) I: *Und was kann man dazu sagen? Wenn es eine zusätzliche Einheit ist? Bei der anderen Funktion kommt auch eine zusätzliche Einheit dazu, was weiß ich bei der, ich mache mal ein Bild.*

Durch das Bild argumentiert Veronika aber nun wieder mit der Krümmung:

(106) I: *Weil ja die Krümmung nicht so stark ist.*

Weshalb Funktionen in der Ökonomie vergleichsweise schwach gekrümmt sind, kann sie aber nach wie vor nicht begründen.

Das Argument für den kleinen Fehler bei $h = 1$ aus der Vorlesung, nämlich dass $h = 1$ in der Ökonomie eben als klein angenommen wird, und man daher in der Ökonomie (genauer: in der ökonomischen Theorie) von keinem großen Fehler zwischen $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ ausgeht, (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5), bringt sie jedenfalls nicht. Damit endet das Interview.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Veronika anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Bereits zu Beginn des Interviews hatte Veronika sowohl die Auffassung der Grenzkosten als Ableitung als auch die als Zusatzkosten der nächsten Einheit im Kopf. Erstere verwendete sie bei der Berechnung der Grenzkosten. Letztere rief sie ab, als sie sich Gedanken über die korrekte Einheit der Grenzkosten machte und diese aus ihrem inhaltlichen Verständnis der Grenzkosten rekonstruieren wollte. Dementsprechend wirkte es so, als ob sie die Zusatzkosten der nächsten Einheit als Verständnisgrundlage des Konzepts der Grenzkosten nutzte, für Berechnungen aber die Ableitung verwendete. Dies passt auch zu Ausführungen einiger Ökonomiebücher, in denen die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit definiert werden, für ihre Berechnung aber die Ableitung verwendet wird (siehe zum Beispiel (Wied-Nebbeling u. Schott, 2005, S.143)).

Bei der Einheit der Grenzkosten hatte Veronika sofort einen kognitiven Konflikt. Einerseits konnte sie sich aus der Mathematikvorlesung erinnern, dass man wegen der Definition der Ableitung durch die Mengeneinheit teilen muss und nannte passend dazu die Einheit „Euro pro Stück“. Andererseits fragte sie sich, ob die Zusatzkosten der nächsten Einheit, die sie ebenfalls mit den Grenzkosten assoziierte, nicht eigentlich in Euro angegeben werden müssten.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Zu Beginn des Interviews war Veronika der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind. Dabei identifizierte sie die Grenzkosten als Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit bereits selbstständig vor der expliziten Nachfrage des Interviewers.

Im Laufe des Interviews bemerkte Veronika dann die Unterschiede zwischen beiden Größen. Sie erkannte, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genommen auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen. Durch einen Vergleich von $K(x+1) - K(x)$ und $K'(x)$ auf der graphischen Ebene bemerkte sie dann den numerischen Unterschied.

Auch den Unterschied in der Einheit bemerkte sie, nachdem der Interviewer sie aufgefordert hatte die passende Einheit zu nennen, wenn man die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich nimmt. Der Unterschied in den Einheiten war für sie anscheinend bedeutsamer als der numerische Unterschied, weil sie dann sagte, dass dies *der Unterschied* sei. Dies ist *nicht* überraschend, denn hier verspürte sie bereits vorher einen kognitiven Konflikt.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Veronika konnte nach der Erkenntnis, dass die Zusatzkosten auf mathematischer Ebene der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen, selbstständig eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf graphischer Ebene herstellen. Sie kannte die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente, konnte diese dann auch graphisch mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen und mit der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene vergleichen. Sie erkannte auch, dass die Größe des numerischen Unterschiedes davon abhängt, wie stark die Funktion gekrümmt ist. Hierbei verwendete sie einen anschaulichen Krümmungsbegriff wie in der Schule, mit dem sich die Stärke der Krümmung zweier Funktionen relativ zueinander vergleichen lässt. Veronika erkannte dabei, dass annähernde Linearität über einen gewissen Bereich eine wichtige Bedingung für einen kleinen Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ ist. Eine Begründung, weshalb Funktionen in der Ökonomie häufig diese Eigenschaft aufweisen, konnte Veronika nicht angeben. Diese Frage wurde aber in der Vorlesung auch nicht angesprochen.

Insgesamt konnte Veronika also die Vorlesung präsentierte Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente und deren Steigung auf graphischer Ebene herstellen (siehe Abbildung 113 in der a-priori Analyse in Kapitel 8.2.4).

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auf symbolischer Ebene hatte Veronika dagegen Probleme bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$, obwohl eine solche in der Mathematikvorlesung über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ behandelt wurde. Zunächst wusste sie die Definition der Ableitung nicht mehr. Als diese ihr gegeben wurde, kam sie dennoch erst einmal nicht weiter. Sie nannte zunächst die Ansicht, dass man im Bruch $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ beim Teilen durch ein sehr kleines h wieder den Zähler erhält (damit versuchte sie vielleicht zunächst das Verschwinden des Nenners in $K(x+1) - K(x)$ zu erklären, ist aber nicht sicher).

Schließlich erkannte Veronika aber, dass bei den Zusatzkosten der nächsten Einheit der Wert $h = 1$ in den Bruch $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ der Definition der Ableitung eingesetzt wird. Sie konnte dann allerdings *nicht klar* erklären, weshalb man in der Ökonomie

davon ausgehen kann, dass der resultierende Wert kaum von der Ableitung abweicht. Sie begründete das Einsetzen von $h = 1$ damit, „dass es eine *marginale* Einheit bzw. eine zusätzliche Einheit ist“ (sie verstand das *marginale Einheit* nur als Sprechweise für die nächste produzierbare Einheit). Dies könnte darauf hindeuten, dass sie hier eine praktische Perspektive einnimmt: $h = 1$ ist eben die kleinstmögliche Einheit, die man in der Realität wählen kann (zum Beispiel bei Stückzahlen). Dies ist aber nur eine Vermutung, die sich durch das eben genannte Zitat nicht belegen lässt. Das Argument der Vorlesung, dass $h = 1$ eben als klein in ökonomischen Kontexten angenommen wird (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5), brachte auf jeden Fall nicht.

8.4.7 Auswertung des Interviews von Susanne

Phase zu Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollen die Grenzkosten der Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Dabei soll auch die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ und Euro gegeben ist.

Susanne überlegt zunächst sehr lange (30s). Anders als viele andere fängt sie nicht sofort an, die Grenzkosten durch den Wert $K'(100)$ zu bestimmen:

- (1) I: *Ja, was hast du jetzt vor, wenn ich mal fragen darf?*
- (2) S: *Ich bin halt am überlegen. Grenzkosten bedeutet ja erstmal, wenn ich noch eine Einheit mehr produzieren würde, wie sich das noch lohnen würde für mich.*

Susanne versucht also eine inhaltliche Bedeutung der Grenzkosten zu rekonstruieren. Die von ihr genannte Bedeutung deutet in Richtung der Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit hin. Susanne nennt jedoch den Nachsatz, „wie sich das noch lohnen würde“. Das „noch“ in dem „noch lohnen“ klingt so, als ob man mit den Grenzkosten eine Art Schwellenwert bestimmen könnte, zum Beispiel den Wert, ab dem die Kosten den Erlös übersteigen. Einen solchen Schwellenwert gibt es tatsächlich bei jeder Produktion, weil die Kosten ab einer bestimmten, unter Umständen extrem großen Menge explodieren (kein Platz mehr für die Produktion, Mangel an qualifizierten Fachkräften), während die Nachfrage aufgrund einer Sättigung des Marktes stagniert. Man könnte diesen Schwellenwert als Verlustschwelle bezeichnen. Möglich ist aber auch, dass Susanne sich auf das Gewinnmaximum bezieht hinter welchem der Gewinn wieder geringer wird und sich die Produktion nicht mehr lohnt.

Susanne fährt mit ihren Ausführungen fort, was sie demnach berechnen würde:

- (2) weiter S: *Also ich muss die Kosten berechnen, ob es sich noch für mich lohnen würde, wenn ich eine Einheit mehr berechne oder wenn ich eine Einheit produziere, würde es sich halt nicht mehr lohnen.*
- (3) I: *Ja, es ist unabhängig von der Frage, ob es sich noch lohnt, aber die Idee [meint damit die Idee die Kosten der nächsten Einheit zu betrachten] war schon richtig.*
- (4) S: *Und mit der ersten Ableitung würde ich die Maxima von den Kosten bestimmen.*

Susanne möchte also zur Berechnung der Kosten, bei der sich die Produktion einer weiteren Einheit nicht mehr lohnt, das Maximum der Kosten bestimmen. Dies ist

allerdings nicht sinnvoll, da Kostenfunktionen streng monoton wachsend sind und kein Maximum haben. Daher interveniert der Interviewer hier:

- (5) I: *Ja, aber wir wollen ja nicht die Maxima, wir wollen ja die Grenzkosten an der Stelle $x = 100$ wissen.*
- (6) S: *Dann würde ich für x einfach 100 einsetzen.*
- (8) I: *In was jetzt?*
- (8) S: *In die Kostenfunktion.*

Die Idee von Susanne $x = 100$ in die Kostenfunktion einzusetzen könnte darauf hindeuten, dass sie die Grenzkosten mit den Gesamtkosten verwechselt. Der Ansatz könnte aber auch einfach nur geraten sein, weil sie wegen der Anmerkung des Interviewers das Gefühl hatte, die Stelle $x = 100$ ins Spiel bringen zu müssen und ihr keine andere Antwort eingefallen ist.

Der Interviewer fragt dementsprechend nach:

- (9) I: *Was kriegen wir dann raus?*
- (10) S: *Dann kriege ich raus, wie viel Kosten ich für 100 Mengeneinheiten brauche.*
- (11) I: *Mhm (bejahend). Ja, aber wir wollen ja jetzt die Grenzkosten wissen.*
- (12) S: *Genau, ja. Mathe 1 ist schon ein bisschen her.*

Susanne weiß also doch, dass $K(100)$ die Gesamtkosten bei der Produktion von 100 Einheiten ist. Aber anscheinend ist ihr nichts anderes eingefallen.

Da das Interview ohne Lösung von Aufgabe 1 nicht weitergehen kann, ermuntert der Interviewer Susanne noch einmal darüber nachzudenken, was die Grenzkosten sind:

- (13) I: *Du hast ja vorhin zwei Dinge genannt: was die Grenzkosten irgendwie angeben und dann hast du noch ein anderes Stichwort genannt.*

Susanne versucht nun die Ableitung ins Spiel zu bringen, weiß aber nicht wie:

- (14) S: *Also, es hat jetzt gar nichts mit der ersten Ableitung zu tun, oder?*
- (15) I: *Könnte.*
- (16) S: *Das wären ja die maximalen. Ah, wie war das nochmal? Dann würde ich ja nur die maximalen/ Nee, die maximalen Kosten würde ich ja nicht rauskriegen.*

Offenbar assoziiert sie mit den Grenzkosten bei einem Output x nicht die Ableitung $K'(x)$, wie sie in der Mathematikvorlesung definiert wurden.

Weil Susanne zu Beginn gesagt hat, dass man mit Hilfe der Grenzkosten untersucht, ob sich die Produktion einer weiteren Einheit lohnt, was einer Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit ähnelt, greift der Interviewer diesen Ansatz nochmal auf:

- (19) I: *Du hast ja noch was anderes gesagt. Du hast ja irgendwie gesagt, wenn man irgendwie um eine Einheit erhöht oder sowas.*
- (20) S: *Ja, wenn ich zum Beispiel 101 einsetzen würde, dann könnte ich das vergleichen. Könnte gucken, ob die mehr Kosten haben oder weniger.*

Es wirkt hier so, als ob Susanne auch die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht genau kennt (höchstens vage assoziiert).

Für den Fortgang des Interviews fordert der Interviewer Susanne dennoch auf, die zugehörige Rechnung durchzuführen. Susanne berechnet daraufhin zunächst $K(100)$ und dann $K(101)$. Nach einigen Rechenfehlern liegen schließlich die richtigen Ergebnisse $K(100) = 1100$ und $K(101) = 1101,051$ vor. Daraufhin fragt der Interviewer, was denn nun die Grenzkosten sind:

(39) I: *Ja, und was wären jetzt die Grenzkosten dann?*

(40) S: *1,51 Euro.* [liest 1,051 falsch]

(41) I: *Ja, 1,05 Euro, genau.*

(42) S: *Ah, ja, ja, 1,05 Euro.*

Susanne wurde also mit Hilfe des Interviewers auf Basis ihrer Erinnerung nun zu der Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit geführt. Sie nennt auch die dazu passende Einheit €.

Allerdings fragt der Interviewer an späterer Stelle noch einmal explizit nach der Einheit dieser mit der Kostendifferenz ermittelten Grenzkosten, wo Susanne dann überraschenderweise eine andere Antwort gibt:

(62) S: *Ja, Kosten wären ja eigentlich immer Euro. Und hier wäre das dann halt pro Mengeneinheit.*

(63) I: *Warum wäre das da Euro pro Mengeneinheit?*

(64) S: *Weil ich für diese eine Einheit, für diese eine Mengeneinheit ja 1,05 Euro mehr bezahlen muss.*

(65) I: *Mhm* (bejahend).

Hier ist Susanne also in ihren Ausführungen inkonsistent.

Phase zu Aufgabe 2: In dieser Phase werden die Studierenden mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten konfrontiert (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit). Weil Susanne die erste Aufgabe mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit gelöst hat, erinnert sie der Interviewer daran, dass die Grenzkosten in der Mathematikvorlesung anders definiert wurden:

(43) I: *Bei Herrn Dietz wurden die Grenzkosten doch anders definiert in der Vorlesung. Kannst du dich noch erinnern wie das war?*

(44) S: *Nee, weiß ich nicht.*

(45) I: *Mhm, gut. Dann gebe ich dir einfach mal die Definition, die bei Herrn Dietz im Buch stand.*

Hier wird also nochmal deutlich, dass Susanne die Auffassung der Grenzkosten als Ableitung überhaupt nicht mehr im Sinn hatte.

Susanne bekommt deshalb die Definition in der folgenden Form schriftlich auf einer Karteikarte vorgelegt (siehe auch (Dietz, 2012, S.263)):

„Ist $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ eine Kostenfunktion, so sind die Grenzkosten bei einem Output x durch die Ableitung $K'(x)$ definiert (soweit existent).“

Susanne schlägt nun vor, wie sie die Aufgabe 1 mit dieser Definition lösen würde, hat aber Schwierigkeiten:

- (46) S: *Ok. Also ich würde dann die Ableitung machen.*
(47) I: *Mhm (bejahend). Das wäre dann sozusagen die Ableitung. Ja, und dann ?*
(48) S: *Ja. Ja, und dann? Weiß ich auch nicht mehr.*
(49) I: *Wir wollen ja es ja an der Stelle 100 haben, also?*
(50) S: *Dann würde ich in die Ableitung 100 einsetzen.*

An ihrem nachfragenden Vorgehen wird nochmal deutlich, dass Susanne die Definition der Grenzkosten als $K'(x)$ aus der Vorlesung überhaupt nicht mehr in Erinnerung hatte.

Susanne äußert dann sofort spontan, dass das Ergebnis dann aber ein anderes wäre:

- (51) I: *Ja, das wäre sozusagen der andere Weg, der sozusagen nach der Definition von Herrn Dietz wäre. Was käme dann raus?*
(52) S: [gleichzeitig schon während der Frage] *Aber dann würde ja was anderes rauskommen!*

Susanne ist also *nicht* der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und die Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe wären.

Auf Nachfrage des Interviewers, weshalb dort etwas anderes rauskommen würde, nennt Susanne als Ursache, dass sich beim Ableiten eine ganz andere Funktion ergeben würde:

- (53) I: *Warum würde da was anderes rauskommen?*
(54) S: *Ja, wenn ich das ableite, habe ich ja eine ganz andere Funktion.*
(55) I: *Mhm (bejahend). Also da würde erstmal was anderes rauskommen.*

Susanne begründet also algebraisch die Unterschiedlichkeit von $K(101) - K(100)$ und $K'(100)$, da die Ableitungsfunktion durch eine andere Gleichung gegeben ist als die Ausgangsfunktion. Damit beginnt die Interventionsphase.

Interventionsphase: Ziel der Interventionsphase ist ja, dass die Studierenden die Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit erkennen (hier noch offen: numerischer Unterschied, Unterschied in der Einheit).

Da Susanne ohnehin der Ansicht ist, dass sich $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ unterscheiden, möchte der Interviewer zunächst den numerischen Unterschied sichtbar machen. Daher fordert er Susanne auf, nun bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 die Grenzkosten bei $x = 100$ über $K'(100)$ auszurechnen. Sie erhält dann das richtige Ergebnis $K'(100) = 1$ (Vergleich: $K(101) - K(100) = 1,051$).

Bei der Einheit nennt sie dieselbe Einheit wie bei den über die Kostendifferenz bestimmten Grenzkosten:

- (67) I: *Ok, ja. Und was käme bei der Ableitung für eine Einheit raus?*
(68) S: *Wäre ja eigentlich auch, also auch „Euro pro Mengeneinheit“.*

Der Interviewer hat hier leider nicht noch einmal nach einer Begründung der Einheit gefragt. Weil Susanne aber kurze Zeit später angibt, keine inhaltliche Bedeutung der Ableitung zu kennen, ist diese Antwort wahrscheinlich daher zustande gekommen, weil Susanne darüber informiert wurde, dass die Verwendung der Ableitung ebenfalls eine Variante zur Grenzkostenbestimmung ist. Und für die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit hatte sie vorher bereits „Euro pro Mengeneinheit“ genannt. Damit konnten natürlich Unterschiede in der Einheit zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ nicht mehr herausgearbeitet werden.

Weil Susanne die Grenzkosten als Ableitung *nicht* mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit gleichgesetzt hat, fragt der Interviewer jetzt nochmal, worin denn die Unterschiede bestehen:

(69) I: *So, du hast ja schon irgendwie gesagt, es ist ja nicht das Gleiche. Das hast du ja gleich von Anfang an gesagt.*

(70) S: *Ja.*

(71) I: *Das hast du ja jetzt auch ausgerechnet. Kannst du irgendwie erklären, worin der Unterschied besteht?*

(72) S: *Nee, ich weiß eigentlich gar nicht mehr was die Ableitung eigentlich aussagt von einer Funktion.*

Die letzte Aussage von Susanne ist problematisch, wenn man bedenkt, dass in der Vorlesung das Konzept der Ableitung mit seinen verschiedenen Repräsentationen ausführlich behandelt wurde (siehe Kapitel 7.2.2).

Insgesamt sieht man bis hierher, dass sich Susanne kaum an das Grenzkostenkonzept erinnern konnte. Sie assoziierte, dass man mit den Grenzkosten ermitteln kann, ob sich die Produktion einer weiteren Einheit lohnen würde. Aufbauend auf Susannes Idee die nächste Einheit zu betrachten, führte sie der Interviewer wieder zur Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit. An das Grenzkostenkonzept als Ableitung aus der Vorlesung konnte sie sich gar nicht mehr erinnern.

Nachdem sie mit beiden Definitionen der Grenzkosten (Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit) konfrontiert wurde, äußerte sie die Ansicht, dass die Grenzkosten als $K'(x)$ *nicht* den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Dies begründete sie algebraisch damit, dass beim Ableiten eine ganz andere Funktion rauskäme. In der Interventionsphase bemerkte sie dann auch den numerischen Unterschied, den sie vorher schon vermutet hatte. Sie konnte aber nicht inhaltlich erklären, weshalb sich $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ unterscheiden, weil sie nicht mehr wusste, was die Ableitung ist.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Der zugehörige Graph ist in Abbildung 134 dargestellt.

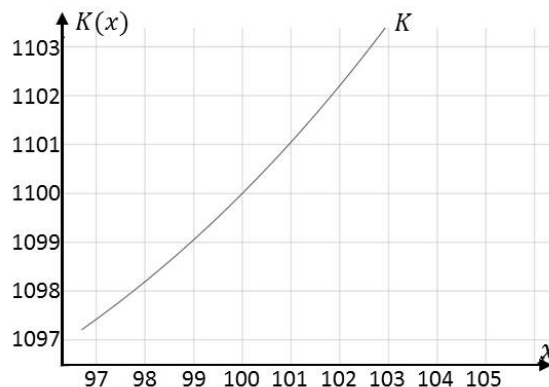


Abbildung 134: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Der Interviewer erläutert noch einmal, worum es in dieser Aufgabe geht, ohne den Begriff „Mehrkosten“ aus der Aufgabenstellung zu verwenden:

(77) I: *Einmal hast du es ja jetzt ausgerechnet durch die Kostendifferenz und einmal durch die Ableitung. Und jetzt ist die Frage / die unterscheiden sich ja kaum. Ich hab vielleicht vergessen zu sagen warum, also warum es darum geht, also in Wiwibüchern wird es oft gleichgesetzt sozusagen.*

Da Susanne mit der Aufgabe überfordert ist, fängt der Interviewer an, den Weg zum Vergleich von $K'(x)$ und $K(x + 1) - K(x)$ auf graphischer Ebene (Einzeichnen der Tangente, graphische Bestimmung von deren Steigung, Vergleich mit der Kostendifferenz auf graphischer Ebene) vorzustrukturieren. Daher fragt er zunächst, was sich Susanne unter der Ableitung vorstellt:

(91) I: *Was kann man sich denn unter der Ableitung vorstellen? Was war denn die Ableitung? Hast du da irgendwie eine Erinnerung?*

(92) S: *Nee.*

Weil Susanne selbst nicht sagen kann, was die Ableitung ist, hat der Interviewer die Hoffnung, sie über die Rechenprozeduren bei der Extremwertbestimmung zur geometrischen Deutung führen zu können (Ableitung an Extremstellen gleich null setzen, weil an Extrempunkten die Steigung null ist bzw. eine waagerechte Tangente vorliegt). Dementsprechend fragt er nach, wofür die Ableitung verwendet wird, woraufhin Susanne dann die Extremwertbestimmung nennt, bei der die Ableitung gleich 0 gesetzt wird:

(93) I: *Wozu haben wir die Ableitung denn benutzt mal?*

(94) S: *Ja, zum Beispiel um ein Maximum auszurechnen.*

(95) I: *Genau, und was haben wir da gemacht mit der Ableitung?*

(96) S: *Gleich null gesetzt.*

Auf die Frage nach einer Begründung gibt Susanne jedoch keine korrekte Antwort:

(97) I: *Warum haben wir die gleich null gesetzt?*

(98) S: *Ja, da ging es irgendwie darum, um zu gucken, ob es größer oder kleiner null ist. Wenn es größer war, war es ein Maximum und wenn es kleiner war, dann war es ein Minimum. Irgendwie sowas.*

Bei ihrer Antwort bringt Susanne einiges durcheinander. Mit dem > 0 und < 0 spielt sie vermutlich auf die hinreichenden Kriterien für lokale Extrema mit Hilfe der *zweiten* Ableitung an, gibt diese allerdings falsch wider. Offensichtlich kann sich Susanne nicht mehr richtig an die Prozedur der Extremwertbestimmung erinnern.

Der Interviewer weist Susanne darauf hin, dass sie wahrscheinlich die erste Ableitung hier mit der zweiten verwechselt hat und betont nochmal die Frage, weshalb die erste Ableitung gleich null gesetzt wurde, was sie aber nicht beantworten kann:

(99) I: *Mhm, das war die Zweite. Das war bei der Zweiten. Jetzt ist die Frage, warum haben wir die erste gleich null gesetzt?*

(100) S: *Warum haben wir die gleich null gesetzt? (10.0) - Nee.*

Daraufhin möchte der Interviewer ihr mit der in Abbildung 135 dargestellten Skizze auf die Sprünge helfen, bei denen er die Extrema markiert hat:

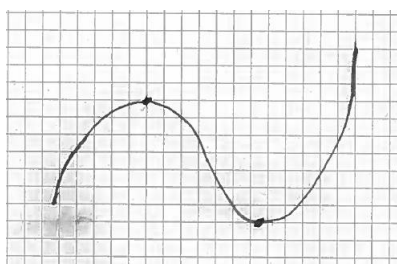


Abbildung 135: Skizze für Susanne als Hilfe für die Erkenntnis, dass bei Extremwerten die Steigung 0 ist bzw. eine waagerechte Tangente vorliegt

Der Interviewer fragt nach, ob vielleicht bei dem Bild eine Erinnerung kommt (ein ähnliches Bild mit eingezeichneten waagerechten Tangenten war an der Tafel der Vorlesung):

(103) I: *So, und dann haben wir dort [beim Maximum] die Ableitung gleich null gesetzt. Wenn du das Bildchen so siehst, kommt da vielleicht eine Erinnerung hoch, warum [sie gleich null gesetzt wurde]?*

(104) S: *Ach so, wenn ich die null setze, dann habe ich schon das Maximum.*

(105) I: *Ja gut, ich könnte auch das Minimum hier rauskriegen.*

(106) S: *Ja, ja, stimmt- Irgendwas mit Hoch- und Tiefpunkt? Aber das wäre ja Maximum und Minimum. Nee.*

Susanne kommt wieder nicht weiter. Der Interviewer merkt nun, dass die Hinführung über die Prozedur der Extremwertbestimmung zur geometrischen Deutung der Ableitung nicht funktioniert und fragt nun noch einmal direkt nach, ob Susanne sich denn geometrisch etwas unter der Ableitung vorstellen kann, was diese klar verneint:

(109) I: *Kannst du dir denn geometrisch was unter der Ableitung vorstellen vielleicht?*

(110) S: *Auch nicht.*

Daraufhin malt der Interviewer in die nun vorliegende Skizze mit den Extremstellen die waagerechten Tangenten ein, wie das in der Vorlesung auch getan wurde (siehe Abbildung 136).

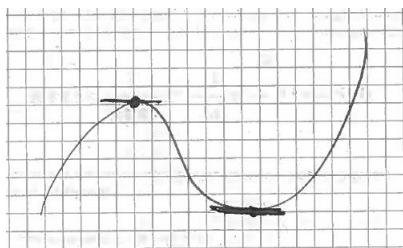


Abbildung 136: Skizze als Hilfe für Susanne mit eingezeichneten waagerechten Tangenten an den Extrempunkten mit $f'(x) = 0$

Mit der Skizze fällt Susanne nun das Stichwort Tangente ein:

(113) I: *Kommt da vielleicht die Erinnerung wieder?*

(114) S: *Ja, irgendwas mit Tangenten.*

(115) I: *Aha, genau.*

(116) S: *Ja.*

Den Zusammenhang zum Nullsetzen der Ableitung zu den lokalen Extremstellen kann sie aber immer noch nicht erklären:

(117) I: *Was war denn mit den Tangenten und der Ableitung? Wie hing das zusammen? Und warum ist das/hier ja die Ableitung gleich null zu setzen?*

(118) S: *Na wenn ich null einsetze, kriege ich meinen Tangentenpunkt raus.*

(119) I: *Na, nicht ganz. Das war die Steigung der Tangente.*

(120) S: *Ah ok. Ja, weil die [die Funktion an dem Maximum] ja halt keine Steigung hat.*

Der Interviewer musste also letztendlich vorgeben, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist. Daraus schließt Susanne dann, dass der „Sinn der Ableitung“ die Steigung ist:

(120) I: *Genau. Wir setzen hier null bei den Extrempunkten, weil die ja keine/weil die Steigung dort eben null ist.*

(121) S: *Ja, also ist der Sinn der ersten Ableitung die Steigung.*

Der Ton von Susanne wirkt so, als ob sie vorher noch nie etwas von der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung gehört hätte und diese jetzt für sich neu erkennt. Sie hatte also die geometrische Deutung nicht nur nicht präsent, sondern wusste sie überhaupt nicht mehr.

Nachdem Susanne nun die geometrische Deutung der Ableitung neu für sich erkannt hat, fragt der Interviewer, was die Steigung der Funktion K aus Aufgabe 1 an der Stelle $x = 100$ wäre, woraufhin sie folgerichtig antwortet, dass sie gleich 1 ist (sie hatte ja schon berechnet, dass $K'(100) = 1$).

Damit $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ auf graphischer Ebene verglichen werden können, wie in der hier betrachteten Aufgabe 3 gefordert, fordert der Interviewer Susanne nun auf $K'(100)$ graphisch zu bestimmen:

(125) I: *Das haben wir jetzt rechnerisch bestimmt. Jetzt ist die Frage, kannst du das auch irgendwie mit der Grafik?*

(126) S: *Also ich würde ja hier, hier hätte ich meinen Punkt 100, dann würde ich meine Tangente einzeichnen.*

(127) I: *Mhm* (bejahend).

(128) S: *Würde dann so irgendwie verlaufen.* [zeichnet die korrekte Tangente ein]

(129) I: *Genau.*

(130) S: *Und eigentlich mit Steigung immer ein Steigungsdreieck einzeichnen.*

(131) I: *Ja.*

Nachdem Susanne also erkannt hat, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist, kann sie die Tangente korrekt einzeichnen und erinnert sich, dass man deren Steigung mit einem Steigungsdreieck bestimmt. Dies schafft sie dann auch korrekt:

(132) S: *Aber wie man jetzt auf die Eins kommen soll? Ja, wahrscheinlich dieses große Stückchen hier, Eins. Ach so, ja Eins durch Eins.* [zeichnet das Steigungsdreieck an die Tangente zwischen $x = 100$ und $x = 101$ und beschriftet die beiden Katheten mit der Länge 1]

(133) I: *Mhm* (bejahend). *Eins durch Eins. Genau.*

Damit ist die Ableitung $K'(100)$ graphisch bestimmt worden (nach sehr langer und häufiger Intervention durch den Interviewer). Um die Unterschiede zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ auf graphischer Ebene zu visualisieren fehlt aber noch das Einzeichnen der Kostendifferenz $K(101) - K(100)$. Der Interviewer fordert dementsprechend Susanne dazu auf, die vorher berechneten 1,05 in die Graphik einzuzeichnen:

(135) I: *Ja. So kannst du diese 1,501 auch an der Graphik wiederfinden? Die du dort berechnet hast? Eh, 1,051?*

(136) S: *Ne das wäre ja hier noch ein Stückchen ein bisschen weiter noch.*

(137) I: *Ja, genau, genau. Und wo wäre das?*

(138) S: *Das würde hier dann noch ein Stückchen weiter [in Richtung x-Achse] gehen und dann hoch.*

Ihre Ausführungen zeigen, dass sie jetzt ein falsches Steigungsdreieck verwenden will, nämlich mit der waagerechten Kathetenlänge 1,05. Das deutet darauf hin, dass sie die Steigung über $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ bestimmen möchte. Das fiel vorher nicht auf, da bei der Tangente gerade $\Delta y = \Delta x = 1$ galt. Außerdem sieht man, dass sie versucht, ihren Lösungsweg

von der Bestimmung der Ableitung über die Steigung nun auf die Kostendifferenz zu übertragen.

Eigentlich ist aber die Kostendifferenz keine Steigung, worauf der Interviewer nun hinweist:

(141) I: *Hier [bei Bestimmung der Differenz in Aufgabe 1] hast du ja gar nichts mit der Ableitung, mit der Steigung gemacht, bei der Sache. Überleg nochmal!*

(142) S: *Ach ja.*

(143) I: *Was hast du da gemacht?*

(144) S: *Ja, ich hab eigentlich einfach nur die Kosten ausgerechnet für 100 und 101.*

(145) I: *Mhm (bejahend). Und wie kann man sozusagen diese Differenz denn hier in der Graphik wiederfinden?*

(146) S: *Ach so. Wenn ich 100 einsetze, habe ich Kosten von 1100, für 101 dann die Kosten [meint mit „die“ sicher die Kosten bei $x = 101$].*

Hier nennt Susanne beim Blick auf die Graphik auch den Wert 1 (und wirkt dabei überrascht), weshalb der Interviewer sie auffordert nochmal genau zu schauen:

(146) weiter S: *Aber die Differenz wäre dann ja auch Eins!*

(147) I: *Na, wenn man genau guckt.*

(148) S: *Ach so, hier geht es weiter hoch.*

Susanne hat also ihre berechnete Kostendifferenz von 1,05 Euro auch in der Graphik wiedergefunden und erkannt, dass man an der Stelle $x = 101$ „ein Stückchen weiter hoch gehen muss“, wenn man die Kostendifferenz und nicht das Steigungsdreieck der Tangente verwendet. Damit ist der numerische Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ an der Graphik veranschaulicht. Auch dabei war wieder Hilfe des Interviewer nötig.

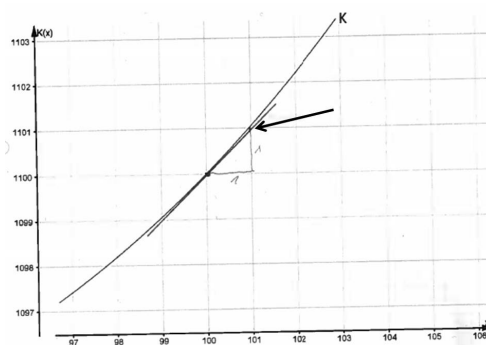


Abbildung 137: Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1 mit Susannes Hilfslinien nach der Intervention im Interview

Nun geht es aber noch um die eigentliche Aufgabe 3, nämlich die Begründung, weshalb dieser Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der in dieser Aufgabe gegebenen Funktion (siehe Abbildung 137) gering ist:

(151) I: *Das sieht man hier an der Graphik sehr schön, dass es sich eigentlich kaum unterscheidet, es geht nur ein Stückchen weiter hoch.*

(152) S: *Ja.*

(153) I: *Hast du eine Idee jetzt an der Graphik, warum sich das kaum unterscheidet? Oder wie würde eine/*

(154) S: *Also an diesem Stückchen jetzt.*

(155) I: *Nur um dieses Stückchen, ja.*

(156) S: *Ok.*

Das Stückchen, von dem die Rede ist, ist in Abbildung 137 mit einem Pfeil markiert. Der Interviewer fragt nun nach einer Beispielfunktion, bei der dieser Fehler größer ist (er vermutete, dass dies für Susanne einfacher wäre als die geringe Größe des Fehlers bei der in Abbildung 137 gegebenen Funktion allgemein zu begründen):

(157) I: *Hast du eine Idee, warum sich das jetzt bei der Kostenfunktion so wenig unterscheidet? Oder kannst du dir eine Funktion vorstellen, bei der sich das stark unterscheiden würde?*

(158) S: *Nee, überhaupt nicht. Obwohl, es würde sich wahrscheinlich stark unterscheiden, wenn die eine stärkere Krümmung hätte, also wenn konvex.*

(159) I: *Mhm (bejahend), wenn sie eine starke Krümmung hat, genau. Das ist eine Aussage.*

(160) S: *Ok genau, wenn sie weiter so gehen würde [deutet eine stärker gekrümmte Funktion an, bei der der Fehler zwischen dem Kostenzuwachs $K(101) - K(100)$ und dem Zuwachs auf der Tangente größer ist].*

Hier erkennt Susanne nun also, dass die Größe des numerischen Unterschiedes zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ von der Stärke der Krümmung der Funktion abhängt. Sie verwendet dabei vermutlich, wie andere Teilnehmer des Interviews auch, einen intuitiven Krümmungsbegriff aus der Schule (Bigalke u. a., 2011, S.149), mit dem man die Stärke der Krümmung zweier Funktionen relativ zueinander vergleichen kann. Die Aussage mit dem „konvex“ ist natürlich streng genommen falsch, aber sie meint vermutlich ein sich stärker beschleunigendes Wachstum.

Auf die Frage, weshalb Funktionen in der Ökonomie häufig schwach gekrümmt bzw. annähernd linear sind, was nicht Gegenstand der Vorlesung war, gibt Susanne zunächst keine passende Antwort:

(161) I: *Ja, jetzt ist diese Kostenfunktion ja relativ, naja linear. Kannst du dir vorstellen, warum Kostenfunktionen in der Ökonomie oft linear oder annähernd linear sind?*

(162) S: *Ja, wenn ich mehr produziere, dann habe ich mehr Kosten.*

Der Interviewer macht Susanne darauf aufmerksam, dass sie gerade erklärt hat, weshalb Kostenfunktionen wachsend sind und wiederholt seine Frage:

(163) I: *Ok, sind sie sozusagen wachsend. Jetzt ist die Frage, warum sind sie annähernd linear oft? Kann man sich das vorstellen?*

(164) S: *Na, wenn ich eine Mengeneinheit produziere, habe ich bestimmte Kosten und dann das Doppelte für die Zweite. Umso mehr ich produziere wird es wahrscheinlich günstiger. Deswegen ist es wahrscheinlich nicht ganz linear, sondern hat eine kleine Krümmung.*

Susannes Antwort beinhaltet durchaus interessante Ideen. Sie erklärt, weshalb man zunächst Linearität erwarten würde. Im zweiten Satz erklärt sie dann plausibel, weshalb aber global keine Linearität, sondern eine schwache Krümmung vorliegt (allerdings resultiert ihre Erklärung in einer strikt konkaven Funktion mit geringer Krümmung, was aber bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit einer Wendestelle zumindest bis zu dieser Wendestelle der Fall ist).

Dass Susanne korrekt als Bedingung für einen geringen numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ die annähernde Linearität im Bereich $[100; 101]$ erkannt hat, deutet darauf hin, dass sie nun während des Interviews eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene hergestellt hat. Sie hatte sogar interessante Ideen, weshalb viele Kostenfunktionen der Ökonomie diese Eigenschaft haben, obwohl dies in der Vorlesung nicht thematisiert wurde. Allerdings war bei der graphischen Bestimmung von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ eine starke Intervention des Interviewers nötig, obwohl das dafür nötige Hintergrundwissen (Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente, Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion) in der Mathematikvorlesung vermittelt wurde.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4:

Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Susanne weiß die Definition der Ableitung nicht mehr. Sie versucht zunächst die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung als Definition zu verwenden, die sie kurz zuvor für sich neu kennen gelernt hatte:

(168) S: *Also war jetzt die Definition der Ableitung, dass ich dadurch meine Steigung/*

Der Interviewer unterbricht hier mit der Feststellung, dass dies nicht die Definition wäre. Susanne gibt zu, sich nicht an die Definition erinnern zu können, woraufhin der Interviewer ihr die Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten auf einer Karteikarte vorlegt: $K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$.

Er fragt nach, ob sich Susanne an die Definition erinnern kann, was diese aber verneint:

(173) I: *Das [der Grenzwert des Differenzenquotienten] war die Definition der Ableitung. Kannst du dich da dunkel dran erinnern an sowas?*

(174) S: *$x + h$? Nee. Überhaupt nicht.*

(175) I: *Vergessen?*

(176) S: *Ja.*

Weil sich Susanne nicht mehr an die Definition erinnern kann, fragt nun der Interviewer nach, ob sie dem Ausdruck $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ eine Bedeutung geben kann. Susanne fokussiert sich bei der Antwort auf die Frage zunächst auf den Limes:

(177) I: *Kannst du sozusagen mit diesem Ausdruck $[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h}]$ was anfangen, der hier steht? Was das heißt?*

(178) S: *Ähm ja, ich weiß auch nicht mehr, was Limes bedeutet. Oder ich glaub' ich wusste noch nie was Limes bedeutet.*

(179) I: *Ok.*

(180) S: *Also h geht gegen 0. Ja, und die Ableitung von K , also die Ableitung $K(x)$ ist, wenn Limes h gegen 0 geht? (lacht)*

Es wird deutlich, dass Susanne die inhaltliche Bedeutung des Limes-Symbols in der Ableitungsdefinition noch nie verstanden hat.

Der Interviewer fragt noch einmal nach, was man sich unabhängig vom Limes unter dem Differenzenquotienten vorstellen kann, woraufhin Susanne die Steigung nennt:

(181) I: *Und was kann man sich sozusagen unter dem, was hier hinten steht [der Differenzenquotient] vorstellen?*

(182) S: *Mhm. Die Steigung? (lacht)*

(183) I: *Ok. Also sozusagen, eh, es wäre jetzt geraten, oder?*

(184) S: *Ja.*

Aus ihren im Interview erworbenen Wissen, dass die Ableitung $K'(x)$ der Steigung entspricht, rät sie, dass der Ausdruck des Differenzenquotienten auch die Steigung ist. Da es nur geraten ist, hat sie eigentlich keine Idee zur inhaltlichen Bedeutung des Differenzenquotienten.

Insgesamt sieht man, dass Susanne nie in irgendeiner Form auf symbolischer Ebene über Aspekte, die die Ableitung betreffen, hätte reflektieren können, weil sie weder die Definition als Ganzes noch ihre Bestandteile verstanden hat.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Susanne anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Susanne hatte zu Beginn des Interviews keine klaren Vorstellungen zu den Grenzkosten mehr. Sie glaubte, dass man diese bestimmen müsste um zu sehen, ob sich die Produktion einer weiteren Einheit noch lohnen würde. Dies klingt so, als ob man an den Grenzkosten ablesen kann, ob eine Verlustschwelle oder das Gewinnmaximum erreicht wurde. Dies ist allerdings nicht der Fall (zumindest nicht

durch alleinige Betrachtung der Grenzkosten; beim Gewinnmaximum müsste noch der Grenzerlös betrachtet werden, da dort Grenzkosten=Grenzerlös).

Immerhin assoziierte Susanne aber korrekt, dass die Grenzkosten etwas mit der Betrachtung von Kosten der nächsten Einheit zu tun haben. Dies spricht dafür, dass sie immerhin noch Phrasen aus einer Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit im Hinterkopf hatte. Mit Hilfe des Interviewers wird sie darauf aufbauend wieder zur Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit geführt. An die Definition der Grenzkosten als Ableitung aus der Mathematikvorlesung erinnerte sich Susanne überhaupt nicht mehr.

Bei der Einheit war Susanne inkonsistent. Bei der Berechnung der Zusatzkosten der nächsten Einheit nannte sie die dazu passende Einheit €. Später nach expliziter Nachfrage war sie auf einmal der Auffassung, dass die Einheit „Euro pro Mengeneinheit“ sein müsste, weil sich die Grenzkosten ja auf diese eine Einheit beziehen.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Nachdem Susanne mit beiden Definitionen der Grenzkosten konfrontiert wurde (Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit), äußerte sie spontan die Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Sie begründete das algebraisch damit, dass sich beim Ableiten eine ganz andere Funktion ergäbe.

Dementsprechend war dann auch der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bei der Kostenfunktion aus der ersten Aufgabe für sie nicht überraschend. Bei den Einheiten konnte sich kein Unterschied ergeben, da Susanne den Grenzkosten als Zusatzkosten die Einheit „Euro pro Mengeneinheit“ zuordnete, und dementsprechend die Grenzkosten als Ableitung ihrer Meinung nach dieselbe Einheit haben müssten.

Inhaltliche Gründe für den numerischen Unterschied zwischen der Ableitung $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ konnte sie nicht nennen.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Susanne hatte große Probleme bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene. Dies lag vor Allem daran, dass sie gar keine Vorstellungen über die Ableitung auf graphischer Ebene hatte. Sie hatte nur noch vage die Prozeduren zur Verwendung der Ableitung bei der Bestimmung lokaler Extrema im Kopf (und das auch nicht korrekt).

Mit Hilfe des Interviewers erkannte sie dann für sich im Interview neu, dass die Ableitung die Steigung der Tangente ist. Diese konnte sie dann auch korrekt ermitteln. Allerdings hatte sie dann weitere Schwierigkeiten bei der graphischen Bestimmung der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ (in der entsprechenden Aufgabe $K(101) - K(100)$). Sie wollte hierfür die Formel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ verwenden. Dies zeigt, dass sie Probleme bei der Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion hatte und nicht klar zwischen einer Steigung und einer absoluten Änderung unterscheiden konnte.

Nachdem die Größen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ an einer Beispielfunktion bei $x = 100$ mit Hilfe des Interviewers visualisiert wurden, erkannte Susanne, dass annähernde Linearität im Bereich $[x; x+1]$ eine wichtige Bedingung dafür ist, dass der numerische Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ klein ist. Das spricht dafür, dass sie dann

im Verlauf des Interviews auch eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Tangente hergestellt hat, wie sie auch in der Vorlesung visualisiert wurde (siehe Abbildung 113 in Kapitel 8.2.4).

Allerdings war dafür, wie gesagt, eine starke Intervention des Interviewers notwendig, weil Susanne folgende Schwierigkeiten hatte:

1. keine Kenntnis einer geometrischen Deutung der Ableitung
2. Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion
3. keine Unterscheidung zwischen Steigung von einer absoluten Änderung

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auf der symbolischen Ebene konnte Susanne keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen. Zunächst wusste sie die dafür notwendige Definition der Ableitung nicht mehr. Aber selbst nachdem diese ihr gegeben wurde, konnte sie mit dem Ausdruck $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ nichts anfangen. Beispielsweise hatte sie weder eine Vorstellung zur inhaltlichen Bedeutung des Differenzenquotienten noch zum Limes-Symbol in der Definition. Dies ist so schwerwiegend, dass Susanne auch mit kleinen Hilfen durch den Interviewer vermutlich keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene hätte herstellen können (zum Beispiel über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ wie in der Vorlesung, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5).

8.4.8 Auswertung des Interviews von Lisa

Phase zu Aufgabe 1: In der ersten Aufgabe sollen die Grenzkosten der Kostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$ bei einem Output von $x = 100$ bestimmt werden. Weiterhin soll die Einheit angegeben werden, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Euro gegeben ist.

Lisa möchte die Aufgabe zunächst mit Hilfe der Ableitung $K'(100)$ lösen:

(5) I: *Was machst du jetzt?*

(6) L: *Also zuerst rechne ich generell die Ableitung aus, also ohne noch ein x einzusetzen. Und danach setze ich 100 ein.*

Sie bestimmt noch vor dem Einsetzen die korrekte Einheit selbstständig:

(8) L: *So, warte mal. Bei 100, die Einheiten wären ja Geldeinheiten pro Mengeneinheiten.*

(9) I: *Mhm* (bejahend).

Die gewählte Einheit ist die passende Einheit der Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$. Schließlich erhält Lisa das richtige Ergebnis:

(13) I: *Was kommt da raus?*

(14) L: *Ja $30 - 50 + 21$ [die Werte der Summanden der Ableitung $K'(x)$ bei $x = 100$] sind Eins.*

Damit hat Lisa die Aufgabe vollständig mit der Auffassung der Grenzkosten als Ableitung gelöst.

Phase zu Aufgabe 2: Bei Aufgabe 2 werden die Studierenden mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten (Ableitung oder Zusatzkosten der nächsten Einheit) konfrontiert. Da Lisa Aufgabe 1 mit der Ableitung gelöst hat, bekommt sie jetzt folgende Definition der Grenzkosten aus dem Lehrbuch „Mikroökonomie“ von Pindyck u. Rubinfeld (2013, S.325) vorgelegt:

„Die Grenzkosten bei einem Output x sind die zusätzlichen Kosten, die bei der Produktion der nächsten Mengeneinheit entstehen.“

Als der Interviewer fragt, ob dies das Gleiche wie die Ableitung ist, antwortet Lisa, dass ihr hier auch schon ein Widerspruch aufgefallen ist:

(19) I: *Also ist das das Gleiche wie die Ableitung oder ist das irgendwie was anderes?*

(20) L: *Ja, also ich habe mich letztes Semester auch damit auseinander gesetzt. Weil in ökonomischen Fächern lernen wir das wirklich so. Wir benutzen die Ableitung und müssen diese Koeffizienten bei „Stata“ [eine Ökonometrie-Software], ich weiß nicht, ob du das kennst?*

Lisa ist die erste, die hier von sich aus einen Widerspruch zwischen der Art und Weise der Verwendung der Grenzkosten in den ökonomischen Lehrveranstaltungen und dem in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten Wissen bemerkt hat. In letzterer wurde nämlich gerade betont, dass die Ableitung *nicht* genau den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3). Sie fährt mit ihren Gedanken fort:

(20) weiter L: *Auf jeden Fall ist in der Ökonometrie das so, dass man diese Koeffizienten interpretiert. In Wirklichkeit macht man nichts anderes als die Ableitung bilden und dann halt das, was vor dem x steht zu interpretieren. Und ich musste immer sagen: erhöht man x um eine Einheit, erhöht sich y um so und so viel, ne? Das war wirklich!*

Dann habe ich aber, weil ich ja letztes Semester noch Mathe 1 hatte, immer gedacht, eigentlich lernt man das in Mathe ja ganz anders. Da sagt man nämlich, wenn man x um eine marginale Einheit erhöht, erhöht sich y um, ja so und so viele marginale Einheiten.

Für sie ist also die Bildung der Ableitung $K'(x)$ die Methode zur Berechnung der Grenzkosten. Die Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit sieht sie als Interpretation der Ableitung an, die sie aber zudem offensichtlich *nicht* für angemessen hält („ich musste immer sagen. . .“). Sie betont, dass man eigentlich von *marginalen Einheiten* sprechen muss (ähnlich wie der Proband Johannes, siehe Kapitel 8.4.1).

Lisa ist also offensichtlich *nicht* der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ den Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen. Stattdessen scheint sie die Grenzkosten als Ableitung als Zusatzkosten für eine *marginale* Einheit aufzufassen. Was sie unter einer marginalen Einheit versteht, wird später klar.

Interventionsphase: Ziel der Intervention ist die Erkenntnis, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht dasselbe sind. Lisa war ohnehin der Ansicht, dass sie nicht dasselbe sind, weil man ihrer Meinung nach von einer marginalen Einheit sprechen muss.

Daher fragt der Interviewer nun nach, was eine marginale Einheit ist:

(21) I: *Jetzt ist die Frage, was ist denn eine marginale Einheit?*

(22) L: *Ja eine marg/ Soll ich dir das hier aufzeichnen?*

(23) I: *Gerne, gerne, ja.*

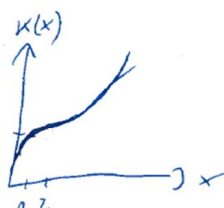


Abbildung 138: Skizze von Lisa zur Veranschaulichung einer marginalen Einheit

Lisa zeichnet dann das in Abbildung 138 dargestellte Bild. Dazu liefert sie folgende Erklärung:

(24) L: *So, und ich habe hier x und hier habe ich $K(x)$. Ja und wenn man hier halt die Einheiten hat, eins zwei, dann wäre halt/Oh, das ist jetzt irgendwie blöd, blöde Stelle. Äh, bei Funktionen malen war ich noch nie so gut.*

(25) I: *Ich kann dir auch, hier ist ein Bild von der richtigen Funktion, wie sie aussieht.* [gibt Lisa den Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1, siehe Abbildung 139]

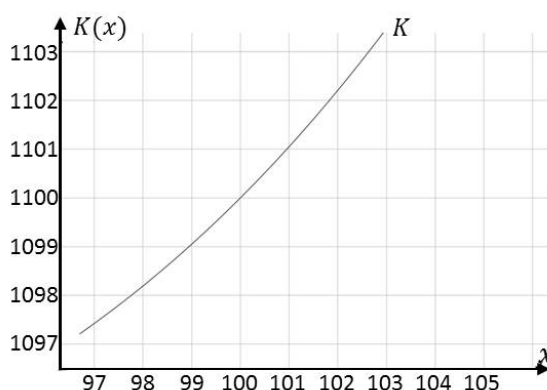


Abbildung 139: Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1

Lisa bestimmt nun erstmal die Zusatzkosten für eine Einheit, um diese später von einer *marginalen* Einheit und den zugehörigen Zusatzkosten abzugrenzen:

(31) I: *Und wie sieht das jetzt aus, wenn die marginale Einheit dazukommt? Kannst du das einzeichnen?*

(32) L: *Ja, also eine Einheit wäre ja von 100 auf 101, hatten wir gesagt. Also erhöht man x sozusagen um eine Einheit, ausgehend von 100, ne? Ausgehend von der aktuellen Mengeneinheit. Dann wäre ich von hier, hierhin gegangen und dann hätte ich gesagt, erhöhen sich die Kosten um, ja auch eine.*

Lisa ermittelt also graphisch das Ergebnis $K(101) - K(100)$, liest aber ungenau ab (exaktes Ergebnis: $K(100) = 1100$, $K(101) = 1101,051$).

Daher fordert der Interviewer sie auf, nochmal genau hinzuschauen:

(33) I: *Guck mal genau hin.*

(34) L: *1100 bis 1101.*

...

(39) I: *Ja, rechne es mal aus.*

(40) L: *Ah ja, ich sehe es schon. Da kommt ein bisschen was mehr.*

(41) I: *Mhm (bejahend).*

(42) L: *Ok, ich sehe es schon. Ich kann es auch ausrechnen.*

(43) I: *Gut, das brauchen wir nicht mehr. Du hast es ja schon gesehen.*

Damit ist der numerische Unterschied zwischen der Ableitung $K'(100)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit sichtbar.

Jetzt fährt Lisa mit ihren Ausführungen zur marginalen Einheit fort:

(48) L: *Ok. Ja genau, und eine marginale Einheit stelle ich mir so ganz, ganz klein vor. Also ich würde hier ein ganz, ganz, ganz bisschen nach rechts gehen und dann noch ein ganz, ganz, ganz bisschen nach oben. Aber das so marginal, dass man das eigentlich gar nicht zeichnen könnte.*

Lisa äußert also, dass eine marginale Einheit für sie eine sehr kleine Größe ist. Diese ist so klein, dass man sie eigentlich nicht zeichnen könnte. Allerdings spricht Lisa hier *nicht* von einer *unendlich kleinen* Größe. Es wirkt eher so, als wäre die marginale Einheit für sie eine sehr, sehr kleine, aber endliche Größe. Diese ist aber eben so klein, dass man sie nicht einzeichnen kann, weil man auf der x -Achse nur ein ganz kleines Stückchen dazu addiert.

Nun hatte Lisa ja bei der Konfrontation mit der Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit nur moniert, dass man von *marginalen* Einheiten sprechen muss, nicht aber, dass die Ableitung eigentlich keinen Zusatzkosten entspricht. Um zu erfahren inwiefern Lisa die Grenzkosten tatsächlich als echte Zusatzkosten auffasst, provoziert der Interviewer mit der Frage, ob die Zusatzkosten für eine sehr, sehr kleine Einheit nicht annähernd gleich null sein müssten:

(49) I: *Aber sind dann die Zusatzkosten nicht annähernd null, wenn ich dann nur ein ganz klein bisschen rüber gehe und dann ein Stückchen nach oben? Warum sind die dann Eins, oder annähernd Eins? [$K'(x)$ war der Wert der Ableitung]*

- (50) L: *Nee, die sind doch dann gar nicht mehr Eins.*
- (51) I: *Ok (nachfragend).*
- (52) L: *Das hat doch was zu tun, was man für eine Steigung hat. Bei der Ableitung errechnet man sich ja eh immer die Tangente eigentlich aus. Die Steigung der Tangente wäre doch das, was man da ausrechnet.* [deutet mit dem Stift die Tangente bei $x = 100$ an]
- (53) I: *Genau, die Steigung der Tangente ist das, ja.*
- (54) L: *Ja. Und das habe ich nachher auch raus, wenn ich x um eine marginale Einheit ausgehend von 100. Ähm, nee, wenn ich, was habe ich denn? Nee, wenn ich ausgehend von 100 x um eine marginale Einheit erhöhe, erhöhen sich die Grenzkosten (zögert) trotzdem um eine (lacht). Ich glaub, dann ist die Steigung trotzdem Eins, oder?*

Lisa versucht das, was sie für die „die Zusatzkosten für eine marginale Einheit“ hält, mit den Grenzkosten als Ableitung $K'(100) = 1$ in Verbindung zu bringen. Hierbei ist ihr klar, dass die Ableitung $K'(100)$ die Steigung der Tangente bei genau $x = 100$ ist. Außerdem versteht sie unter einer marginalen Einheit, eine sehr kleine Größe (ab sofort mit dx bezeichnet), die dazukommt. Dies scheint für sie zunächst widersprüchlich: Bestimmung der Steigung bei genau $x = 100$ und versus Erhöhung von x um eine *marginale* Einheit. Diesen Widerspruch löst Lisa dann für sich auf, indem sie den Zusatzkosten für eine marginale Einheit gedanklich die Steigung $\frac{dK}{dx} = \frac{K(100+dx)-K(100)}{dx}$ mit sehr, sehr kleinem dx zuordnet. Dieses sind so klein, dass sich der Wert dieser Steigung numerisch nicht von $K'(100)$ unterscheidet.

Daraus wird auch deutlich, dass die „Zusatzkosten für eine marginale Einheit“ für Lisa eigentlich *keinen* echten Zusatzkosten sind, sondern eine im Kontext gedeutete Steigung, also ein Verhältnis. Das unterstreicht auch die von ihr genannte Einheit dieser „Zusatzkosten“:

- (59) I: *Was wäre denn jetzt, wenn ich sagen würde, die Zusatzkosten für eine marginale Einheit? Welche Einheit hätten denn diese Zusatzkosten?*
- (60) L: *Ja, eine Geldeinheit für eine Mengeneinheit, oder? Oder nicht? Ah, pro Mengeneinheiten. Ich setze doch nur einen Punkt ein.*

Den Unterschied in der Einheit zwischen ihrer Auffassung der Grenzkosten und einer Auffassung der Grenzkosten als echte Zusatzkosten bemerkt sie dann auch in einem entsprechenden Dialog mit dem Interviewer:

- (63) I: *Welche Einheit müsste ich denn nehmen. wenn ich sozusagen diesen Satz wörtlich nehmen würde [die Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit aus Pindyck u. Rubinfeld (2013)]*
- (64) L: *Ich glaube, ich verstehe die Frage noch nicht. Wenn ich x , also die Mengeneinheiten erhöhe, so erhöhe.*
- (65) I: *Dann entstehen ja Zusatzkosten irgendwie.*
- (66) L: *Genau.*
- (67) I: *In welcher Einheit müsste ich die denn eigentlich angeben? Wenn ich diesen Satz sozusagen so wörtlich nehme?*
- (68) L: *Ach so. Ich glaube, dann nehme ich wieder die Kosten und sage dann wieder nur Geldeinheiten, ne?*
- (69) I: *Mhm (bejahend).*

Insgesamt erkennt man also bis hierher, dass Lisa von Beginn des Interviews an der Ansicht war, dass die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und die Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht dasselbe wären. Letztere entsprechen ihrer Meinung nach der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$.

Allerdings wirkte es am Anfang so, als sei sie der Auffassung, dass die Grenzkosten als Ableitung den Zusatzkosten für eine *marginale* Einheit entsprechen. Dabei verstand Lisa unter einer marginalen Einheit eine sehr kleine, aber endliche Größe (bei der Auswertung dieses Interviews mit dx bezeichnet). Dies führte während des Interviews zu einem kurzzeitigen Widerspruch. Denn einerseits bestimmt man mit $K'(x)$ die Steigung der Tangente genau an der Stelle x , andererseits müsste bei der Produktion einer marginalen Einheit dx eigentlich etwas zu dem x dazukommen. Diesen Widerspruch löste Lisa für sich auf, indem sie den Zusatzkosten für eine *marginale* auf mathematischer Ebene eine Steigung $\frac{dK}{dx}$ mit einer sehr kleinen Größe dx zuordnete. Diese ist so klein, dass sich das Verhältnis $\frac{dK}{dx}$ numerisch nicht von $K'(x)$ unterscheidet.

Aus diesen Ausführungen wird auch deutlich, dass Lisa die „Zusatzkosten für eine marginale Einheit“ eigentlich nicht als Zusatzkosten, sondern als Sprechweise für eine im Kontext gedeutete Steigung bzw. für ein Verhältnis ansieht: also eigentlich als Zusatzkosten *pro* marginaler Einheit. Dazu passt auch die von ihr genannte Einheit dieser Zusatzkosten als „Geldeinheiten *pro* Mengeneinheit“. Insgesamt fasst Lisa die Grenzkosten auf mathematischer Ebene also durchweg als Steigung bzw. Verhältnis auf.

Phase zu Aufgabe 3:

Aufgabe 3:

Begründen Sie anhand der folgenden Grafik, weshalb die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 1 ($K(x) = \frac{1}{1000}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 21x + 500$) bei einem Output von $x = 100$ Mengeneinheiten annähernd gleich sind.

Die zugehörige Graphik ist in Abbildung 140 dargestellt.

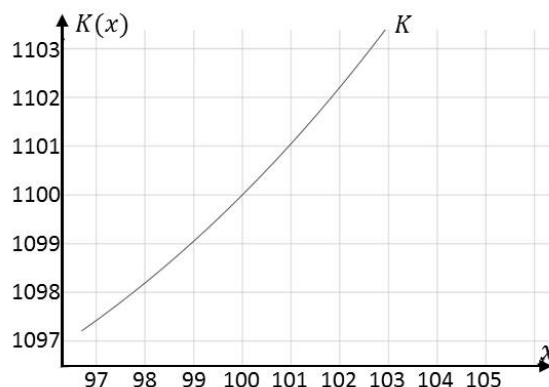


Abbildung 140: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Da die Skizze der Funktion Lisa bereits vorliegt, wird die Aufgabe hier nicht als schriftliche Aufgabe vorgelegt, sondern durch den Interviewer mündlich gestellt:

- (77) I: *Ja, kannst du dir an der Funktion erklären, warum es [die Ableitung $K'(x)$ und die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$] sich kaum unterscheidet?*
(78) L: *Ja, an der Stelle 101 ist die Steigung nur minimal höher, würde ich sagen.*

Diese Antwort wirkt so, also ob sie sagen möchte, dass die Ursache für den geringen Fehler ist, dass die Funktion im Bereich $[100; 101]$ annähernd linear ist. Das ist aber nicht sicher, weshalb der Interviewer nun noch einmal nach einer Funktion fragt, wo der Fehler zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit größer wäre:

- (81) I: *Würde dir eine Funktion einfallen, wo der Unterschied größer wäre? Fragen wir mal so.*
(82) L: *Ja, wenn die jetzt mehr parabelförmig wäre.*
(83) I: *Ja, wenn die jetzt mehr sozusagen*
(84) L: *Ja, mehr so von hier zum Beispiel kommen würde, ne. [zeichnet eine Funktion, deren Steigung schneller zunimmt]*
(85) I: *Ja, irgendwie so schneller da abbiegen.*

Lisa erkennt also, dass der Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der Kostenfunktion aus Abbildung 140 deshalb so gering ist, weil annähernd linear ist. Dies sagt sie dann auch nochmal explizit:

- (96) L: *Das wäre ja eigentlich eher der Fall, wenn man von linearen Kosten ausgeht. Dann wären die ja überall gleich.*
(97) I: *Mhm (bejahend).*
(98) L: *Und vielleicht gehen die da im ökonomischen Kontext immer von linearen Kostenfunktionen aus.*

Der Interviewer weist darauf hin, dass die Kostenfunktion aus Aufgabe 1 aber nicht ganz linear ist (siehe Abbildung 140):

- (99) I: *Na, die ist hier ja nicht ganz linear.*
(100) L: *Nee, die nicht.*
(101) I: *Die nicht, ja. Aber?*
(102) L: *Aber, ach so. Ja, du hast ja jetzt hier auch nur so einen Ausschnitt von 97 bis 104. Und da sieht die halt doch ziemlich linear aus. Und wenn wir die Skala jetzt oder wenn man anders skalieren würde, und man hätte die ganze Funktion, dann hätte man eine kubische, die würde ja ganz anders aussehen.*
(103) I: *Mhm (bejahend).*

Lisa vermutet hier, dass Kostenfunktionen in ökonomischen Kontexten über kleinen Bereichen, wie zum Beispiel in dem Bereich $[97; 104]$, annähernd linear sind, auch wenn sie das global nicht sind. Es kommt ihrer Meinung nach lediglich auf die Skalierung an.

Sie fährt dann wie folgt fort:

(104) L: *Und wahrscheinlich wollen die sich immer nur generell die Änderungen im kleinen Bereich angucken oder so.*

(105) I: *Mhm* (bejahend).

(106) L: *Die wollen, keine Ahnung, ihre Mengen jetzt nicht von 0 auf 100 erhöhen, sondern, keine Ahnung, von 97 auf 103. Und dann gucken die sich halt nur die Funktion an und die ist dann annähernd linear. Deswegen können wir wahrscheinlich davon ausgehen oder das fast gleichsetzen, die marginale Einheit und halt normale Einheit.*

Einige wenige Einheiten (und insbesondere $h = 1$) sind also in Lisas Augen klein in der Ökonomie.

Lisa konnte also einen adäquaten Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen. Sie zeigte bereits in der vorherigen Phase, dass sie die Differenz $K(x+1) - K(x)$ graphisch bestimmen konnte und wusste, dass die Ableitung $K'(x)$ die Steigung der Tangente ist. Dass sie nun die annähernde lokale Linearität einer Funktion über einen gewissen Bereich als wesentliche Bedingung für einen kleinen Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ erkannte, spricht dafür, dass sie $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ über die Steigung der Tangente auf graphischer Ebene auch miteinander in Verbindung bringen konnte.

Phase zu Aufgabe 4:

Aufgabe 4: Begründen Sie **mit Hilfe der Definition der Ableitung**, weshalb man in ökonomischen Kontexten häufig annehmen kann, dass bei gegebenem Output von x Mengeneinheiten die numerischen Werte von Grenz- und Mehrkosten ($K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$) annähernd gleich sind.

Lisa glaubt zunächst, dass diese Aufgabe gerade eben schon besprochen wurde. Der Interviewer weist dann darauf hin, dass aber bei der vorherigen Begründung der annähernden Gleichheit von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ die Definition der Ableitung nicht benutzt wurde:

(108) L: *Hä, ist das nicht das Gleiche wie eben?*

(109) I: *Hier haben wir die Definition der Ableitung sozusagen nicht benutzt.*

(110) L: *Ach so.*

Dann versucht Lisa die Definition der Ableitung zu rekonstruieren:

(114) L: *Ok. Definition der Ableitung. Limes. Ich muss überlegen. Also genau, man hat ja hier den y , genau, h gegen 0, h ungleich 0. Ich glaube es kommt langsam. Und dann brauche ich jetzt die Differenz f von, Moment [holt sich das Blatt mit ihrer eigenen Zeichnung aus Aufgabe 1 und zeichnet ein Steigungsdreieck, siehe Abbildung 141]. Ich gehe hier eine Einheit nach da, das ist mein h und dann brauche ich/ Das ist $f(x)$, das ist $f(x+h)$, mhm, $f(x)$ glaube ich.*

(115) I: *Mhm* (bejahend).

(116) L: *Ich hoffe, die ist jetzt schon mal richtig.*

(117) I: *Die ist richtig.*

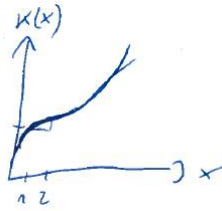


Abbildung 141: Von Lisa verwendete Skizze zur Rekonstruktion der Definition der Ableitung mit eingezeichnetem Steigungsdreieck

Lisa hat es also geschafft, die Definition der Ableitung korrekt zu rekonstruieren, was schon eine Ausnahme ist (im Vergleich zu den anderen Interviewteilnehmern). Dabei nutzte sie ihr Wissen, dass die Ableitung Grenzwert von Steigungen von Sekanten ist. Den algebraischen Ausdruck für diese Steigungen rekonstruierte sie dann mit Hilfe einer Skizze.

Lisa vergewissert sich nach der Rekonstruktion der Definition der Ableitung noch einmal, ob sie die Frage richtig verstanden hat:

(118) L: *Also die Frage ist schon ähnlich, warum man das so fast gleichsetzen kann, aber jetzt muss ich das mit der Definition der Ableitung machen, richtig?*

(119) I: *Mhm* (bejahend).

Lisa versucht nun auf der symbolischen Ebene die beiden Terme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (den sie selbst hingeschrieben hat) und $K(x+1) - K(x)$ (gegeben in der Aufgabenstellung) zu vergleichen. Dabei bemerkt sie richtig, dass bei den Zusatzkosten der Limes weggelassen ist:

(120) L: *Ok. Die lassen doch eigentlich den Limes weg, oder?*

(121) I: *Ja, richtig.*

Die Frage, weshalb man das bei ökonomischen Funktionen machen darf, beantwortet Lisa wie folgt:

(121) weiter I: *Jetzt ist die Frage, warum kann ich das [Weglassen des Limes] bei ökonomischen Funktionen riskieren? Bei anderen Funktionen geht es ja eventuell schief, hast du ja vorhin angedeutet.*

(122) L: *Ja. Also, die sagen eher, ich möchte jetzt um eine Einheit mehr werden und nicht ich möchte jetzt eine marginale Einheit mehr erzeugen. Ja, wahrscheinlich, weil man manchmal nicht unbedingt eine marginale Einheit mehr erzeugen will. Ja, weil man doch etwas produziert, zum Beispiel Kugelschreiber oder so.*

(123) I: *Klar.*

(124) L: *Da will ich doch nicht irgendwie einen Bruchteil von einem Kugelschreiber.*

Sie begründet hier also die Verwendung *einer Einheit* anstelle einer marginalen Einheit (dann müsste man ihrer Meinung nach die Ableitung nehmen) aus einer praktischen Perspektive: es ist eben *oft* nicht möglich, kleinere Einheiten als $h = 1$ zu wählen.

Sie verdeutlicht sich nun noch einmal den Unterschied zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf symbolischer Ebene:

(128) L: *Ja, die setzen ja hier Eins ein.*

(129) I: *Richtig.*

(130) L: *Die setzen es nicht gegen null ein, sondern sagen h ist Eins, ne?*

(131) I: *Mhm (bejahend).*

Lisa überlegt weiter, weshalb man das auf der mathematischen Ebene tun darf:

(132) L: *Die brauchen auch den Limes eigentlich gar nicht, ne? Der fällt ja weg.*

(133) I: *Mhm (bejahend).*

(134) L: *Setzen dafür Eins ein. Und dann kommt hier irgendeine Einheit. Genau, wenn hier jetzt irgendeine Einheit steht plus Eins minus/ also $f(x+1) - f(x)$, dann würde da doch, ich hoffe, ich liege jetzt nicht falsch. Hä? Nee, das kommt, nee das ist ja Blödsinn. Das sind ja die y -Werte.*

Sie vergleicht nun also noch einmal die Terme, kommt damit aber nicht weiter. Daraufhin versucht sie, die bereits diskutierte annähernde Linearität von Funktionen in der Ökonomie mit reinzubringen:

(134) weiter L: *Aber wenn das oben fast linear ist. Das muss ich hier irgendwie noch ein bisschen bedenken.*

Da Lisa bereits bei der vorherigen Aufgabe selbst gesagt hat, dass man eben bei kleinen Bereichen wie [97; 103] von annähernder Linearität ausgehen kann, möchte der Interviewer sie nun dahin führen, dass eben $h = 1$ klein genug ist, was aber nicht gelingt:

(137) I: *Du hast vorhin auch schon mal so was in die Richtung gesagt, wenn ich mich erinnere. Du hattest eine allgemeine Begründung, wo du hier von diesem Ausschnitt angefangen hast zu erzählen. Da ging es glaube ich in diese Richtung.*

(138) L: *Hm. Ich gucke mir sozusagen um die / also die Seite an. Und wenn doch die Ökonomen davon ausgehen, dass es fast linear ist. Heißt das nicht immer Eins da oben? Nee, ne?*

Vermutlich hat Lisa nicht verstanden worauf der Interviewer hinaus wollte. Damit endet dann das Interview.

Zusammenfassung der Ergebnisse des Interviews von Lisa anhand der Leitfragen

Zu den ersten Assoziationen zu den Grenzkosten bei der Berechnungsaufgabe (Leitfrage L1): Lisa assoziierte mit den Grenzkosten bei der Aufgabe zu deren Berechnung zunächst die Ableitung $K'(x)$. Auch bei der Bestimmung der Einheit verwendete sie konsistent dazu die korrekte Einheit „Euro pro Mengeneinheit“.

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit (Leitfrage L2): Lisa war von Beginn an der Ansicht, dass die Ableitung *nicht* den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht. Sie hatte diesen Konflikt sogar schon selbst in ihren Ökonomiekursen gespürt. Dabei konnte sie die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ insofern von den Zusatzkosten der nächsten Einheit abgrenzen, dass sie Letzteren auf mathematischer Ebene die Differenz $K(x+1) - K(x)$ zuordnete.

Allerdings war sie zu Beginn des Interviews anscheinend der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung den Zusatzkosten einer *marginalen* Einheit entsprechen. Unter einer marginalen Einheit verstand sie eine sehr, sehr kleine, aber endliche Größe (anders als in der Mathematikvorlesung, wo dies eine Sprechweise für eine *fiktive, unendlich kleine* Größe war, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3). Im Laufe des Interviews wurde dann aber deutlich, dass sie die Zusatzkosten für eine *marginale* Einheit eigentlich als Sprechweise für das Verhältnis $\frac{dK}{dx}$ mit sehr, sehr kleinem dx ansieht. Dieses dx ist ihrer Meinung nach so klein, dass das Verhältnis numerisch mit $K'(x)$ übereinstimmt. Passend dazu nannte sie auch die Einheit „Geldeinheiten pro Mengeneinheit“. Sie verstand die Zusatzkosten also nicht als echte Zusatzkosten, sondern als Zusatzkosten *pro* marginaler Einheit. Insgesamt fasste Lisa die Grenzkosten also konsequent als Steigung im Kontext und somit als Änderungsrate auf.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der graphischen Ebene (Leitfrage L3): Lisa konnte auf graphischer Ebene eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen. Sie zeigte im Laufe des Interviews klar, dass sie über das nötige Hintergrundwissen aus der Mathematikvorlesung verfügte. Dieses umfasst:

1. die graphische Bestimmung der Zusatzkosten der nächsten Einheit
2. die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
3. das Verfahren zur graphischen Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion

Dass sie erklären konnte, dass annähernde Linearität in einem gewissen Bereich Ursache für einen geringen Fehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ ist, spricht dafür, dass sie mit Hilfe dieses Hintergrundwissens auch eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene über die Steigung der Tangente herstellen konnte.

Zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der symbolischen Ebene (Leitfrage L4): Auch die Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene gelang Lisa. Zunächst konnte sie die formale Definition der Ableitung korrekt angeben (dabei ist Lisa neben Johannes aus Kapitel 8.4.1 die Einzige). Während Johannes die Definition aus der Erinnerung direkt rekonstruierte, nutzte Lisa hier ihr Wissen, dass die Ableitung Grenzwert von Steigungen von Sekanten ist. Letztere bestimmte sie dann mit Hilfe eines kleinen Steigungsdreiecks. Dass sie die Definition korrekt mit Hilfe einer Skizze rekonstruieren konnte, deutet auch darauf hin, dass ihr der Zusammenhang zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ klar

ist. Das beinhaltet auch die Vorstellung, dass für kleine h der Differenzenquotient eine Näherung der Ableitung darstellt (wie in der Vorlesung vermittelt, siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5).

Lisa erkannte dann ebenfalls korrekt, dass bei Verwendung der Zusatzkosten der nächsten Einheit anstelle des Grenzwertes $h \rightarrow 0$ nun in den Differenzenquotienten einfach $h = 1$ eingesetzt wird. Die „Legitimität dieses Einsetzens“ begründete sie am Beispiel einer Kugelschreiberproduktion damit, dass man in der Ökonomie häufig die Zusatzkosten für *eine* Einheit und nicht für eine *marginale* Einheit wissen möchte. Dies ist ein sehr wichtiges praktisches Argument, welches in der Vorlesung nicht angesprochen worden ist. Das Argument aus der Vorlesung, dass $h = 1$ aus in ökonomischen Kontexten als kleiner Wert nahe 0 angenommen wird, nannte sie hier nicht. Aber ihr Argument ist zumindest bei Stückzahlen auch plausibel (auch wenn man dann eigentlich die gesamte Modellierung über eine Kostenfunktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ in Frage stellen müsste). Aus Lisas Argument für den geringen Fehler bei der Wahl von $h = 1$ wird auch deutlich, dass sie weiß, dass die Approximation der Ableitung durch den Differenzenquotienten nur für kleine h gut ist.

Insgesamt gelang es also Lisa, auf der symbolischen Ebene eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herzustellen und sogar eine Begründung dafür anzugeben, weshalb man bei der Interpretation der Ableitung häufig in den Differenzenquotienten den Wert $h = 1$ einsetzt anstatt den Grenzwert $h \rightarrow 0$ zu nehmen.

8.5 Fallübergreifende Darstellung der Ergebnisse

Nach den Einzelfallbeschreibungen erfolgt nun noch einmal eine fallübergreifende Darstellung der Ergebnisse auf Basis der vor der Auswertung formulierten *vier* Leitfragen zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation im Kontext der Grenzkosten und den auftretenden Verständnisschwierigkeiten (siehe Tabelle 144).

8.5.1 Ergebnisse zur ersten Leitfrage zu den ersten Assoziationen zum Grenzkostenbegriff

Die erste Leitfrage war:

L1: Welche Auffassung der Grenzkosten (Ableitung $K'(x)$ oder Zusatzkosten der nächsten Einheit) assoziieren die Studierenden mit dem Grenzkostenbegriff zunächst?

Zu deren Beantwortung sollten die Studierenden zunächst die Grenzkosten einer gegebenen Kostenfunktion bei einem Output von $x = 100$ bestimmen. Weiterhin sollten sie die Einheit angeben, wenn der Output x in Mengeneinheiten und $K(x)$ in Euro gegeben sind.

Erste Assoziationen zu den Grenzkosten der Studierenden bei deren rechnerischer Bestimmung: Die meisten Studierenden assoziierten bei dieser Aufgabe die Grenzkosten *zunächst* mit der Ableitung (5 Studierende). Zwei Studierende assoziierten die Grenzkosten als erstes mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit (einmal erst mit Hilfe des Interviewers). Und eine Studentin, Veronika, hatte unmittelbar beide

Auffassungen der Grenzkosten im Kopf. Bei der rechnerischen Bestimmung verwendete sie die Ableitung. Bei der Überlegung der passenden Einheit griff sie aber auch auf die Auffassung der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit zurück (siehe Kapitel 8.4.6).

Passung der Einheit zum verwendeten Rechenansatz: Die verwendete Einheit passte nicht immer zu der in der Rechnung verwendeten Auffassung der Grenzkosten (als $K'(x)$ oder $K(x+1) - K(x)$). Unter den 6 Studierenden, die die Grenzkosten rechnerisch mit Hilfe der Ableitung bestimmten, konnten nur 3 Studierende (Johannes, Lisa, Veronika) die dazu passende Einheit „Euro pro Mengeneinheit“ angeben. Als Begründung dieser Einheit wurden zwei verschiedene Ansätze deutlich:

1. Begründung über die Definition der Ableitung (zum Beispiel bei Veronika, wobei ihr die Rekonstruktion der Einheit aus der Definition nicht gelang, weil sie die Definition der Ableitung nicht mehr genau wusste, siehe Kapitel 8.4.6)
2. Begründung über die Deutung der Ableitung als Änderungsrate (zum Beispiel bei Johannes, der als Begründung nannte, dass die Ableitung eine Kostenänderung pro Mengeneinheit angibt, siehe Kapitel 8.4.1)

Dies sind beides adäquate Begründungsansätze auf Basis der Mathematikvorlesung (siehe Kapitel 8.2.2).

Die anderen 3 Studierenden, die die Ableitung bei der rechnerischen Bestimmung der Grenzkosten verwendeten, gaben eine falsche Einheit an (zweimal „Mengeneinheit pro Euro“ auf Basis einer falschen Erinnerung an die Vorlesung, einmal „Euro“ ohne Begründung).

Von den beiden Studierenden, die die Grenzkosten über die Differenz $K(x+1) - K(x)$ bestimmt hatten, gab einer die passende Einheit € an. Die andere Studentin tat dies zunächst auch, änderte dann aber bei expliziter Nachfrage nach der Einheit der Grenzkosten ihre Meinung zu „Euro pro Mengeneinheit“, allerdings mit der falschen Begründung, dass sich ermittelten Zusatzkosten nur auf den Output x beziehen (siehe Kapitel 8.4.7).

Abschließende Kurzzusammenfassung: Insgesamt sind hier also zwei Dinge erkennbar:

1. Die Mehrheit (6 Studierende) assoziierten die Grenzkosten bei einer Aufgabe zu deren rechnerischer Bestimmung zunächst mit der Ableitung. Dies ist nicht überraschend, denn in der Vorlesung wurden die Grenzkosten über die Ableitung definiert (siehe Kapitel 8.2.2).
2. Nur 4 Studierende konnten die zu ihrer Auffassung der Grenzkosten passende Einheit angeben. Dies ist insbesondere bei den Probanden kritisch zu sehen, die die Ableitung verwendeten, da die Einheit der Grenzkosten als Ableitung in der Mathematikvorlesung thematisiert und über die formale Definition der Ableitung begründet wurde (siehe Kapitel 7.2.2)

8.5.2 Ergebnisse zur zweiten Leitfrage zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit

Die zweite Leitfrage war:

L2: *Inwiefern sind den Studierenden Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit bewusst?*

Zur Beantwortung dieser Leitfrage wurden die Studierenden zunächst mit der jeweils alternativen Definition der Grenzkosten (als Ableitung oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit) konfrontiert, die sie bei der rechnerischen Bestimmung der Grenzkosten in Aufgabe 1 nicht verwendet haben. Dann wurden sie gefragt, ob die Grenzkosten als Ableitung dasselbe wie die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit sind. Bei den meisten Studierenden wirkte es so, als ob sie sich zum ersten Mal mit dieser Frage beschäftigen, obwohl in der Mathematikvorlesung betont wurde, dass die Grenzkosten $K'(x)$ *nicht* exakt die Zusatzkosten der nächsten Einheit angeben (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.3).

Wahrgenommene Unterschiede vor der Intervention durch den Interviewer Hier gab es unter den Probanden des Interviews zwei Ansichten, die von jeweils der Hälfte der Probanden eingenommen wurden:

1. Die Grenzkosten als Ableitung sind dasselbe wie die Zusatzkosten der nächsten Einheit (4 Studierende)
2. Die Grenzkosten als Ableitung entsprechen *nicht* den Grenzkosten der nächsten Einheit (4 Studierende)

Von denen, die der Ansicht waren, dass die Grenzkosten als Ableitung *nicht* den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit entsprechen, wurden folgende Begründungen gegeben:

1. Man müsste von *marginalen* Einheiten sprechen. (Johannes und Lisa)
2. Beim Ableiten erhält man eine andere Funktion. (Susanne)
3. Ich weiß nicht. (Ralf)

Nur Johannes und Lisa gaben hier eine inhaltliche Begründung (Susannes Begründung ist lediglich formaler Natur). Sie erklärten beide, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit durch die Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ bestimmt werden. Bei den Grenzkosten als Ableitung bezieht man sich ihrer Meinung nach jedoch auf eine viel kleinere Größe, die sie als *marginale Einheiten* bezeichneten.

Damit griffen Lisa und Johannes als einzige Studierende die Ausführungen der Vorlesung auf, in der betont wurde, dass die Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion eben nicht die exakten Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit angibt (siehe Kapitel 7.2.2). Es gilt eben nur die Approximation $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$. Lässt man jedoch in dieser Beziehung h gegen 0 gehen, erhält man laut Vorlesung

als „Ergebnis“ die exakte Beziehung $dK = K'(x)dx$, in denen dx und dK fiktive, als unendlich kleine Größen aufgefasst wurden, die als *marginale* Einheiten bezeichnet wurden (aber nicht exakt definiert wurden). Die Grenzkosten als Ableitung entsprechen dann exakt dem Verhältnis $\frac{dK}{dx}$.

Dazu passende Vorstellungen zu den Grenzkosten wurden auch bei Johannes und Lisa deutlich. Allerdings unterschieden sich Johannes' und Lisas Vorstellungen in Bezug auf das Konzept der *marginalen* Einheit. Dies ist nicht überraschend, denn der Begriff der *marginalen* Einheit wurde in der Mathematikvorlesung nicht exakt definiert (siehe Kapitel 7.2.2). Johannes bezeichnete eine *marginale* Einheit als *unendlich kleine Größe*, wobei er nicht genau sagte, was das ist. Die Grenzkosten als Ableitung waren für ihn ein Verhältnis $\frac{dK}{dx}$ solcher fiktiver, unendlich kleiner Größen dx und dK (wie in der Vorlesung gelehrt). Für Lisa war hingegen eine *marginale* Einheit dx eine sehr kleine, aber endliche Größe. Die Grenzkosten waren für sie ein Verhältnis zweier endlicher Größen $\frac{dK}{dx}$. Allerdings ist die *marginale* Einheit in ihren Augen so klein, dass dieses Verhältnis numerisch gleich der Ableitung $K'(x)$ ist.

Passend zu ihren Vorstellungen der Grenzkosten als Ableitung als Verhältnis nannten Lisa und Johannes die passende Einheit „Geldeinheiten *pro* Mengeneinheit“ und erkannten den Unterschied in der Einheit zu absoluten Zusatzkosten. Sie sahen die Grenzkosten als Ableitung also als *Zusatzkosten pro marginaler* Einheit an.

Wahrgenommene Unterschiede nach der Intervention: Folgende Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit sollten im Interview deutlich werden:

1. Erkenntnis, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene wörtlich genommen der Kostendifferenz entsprechen (nur relevant, wenn die Grenzkosten in der ersten Aufgabe *nicht bereits* mit der Differenz $K(x+1) - K(x)$ bestimmt wurden)
2. numerischer Unterschied
3. Unterschied in den Einheiten

Inwieweit die Studierenden diese Unterschiede während des Interviews bemerkten sei im Folgenden dargestellt:

- Zu 1. Alle Studierende, die zu Beginn des Interviews die Grenzkosten als Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit identifizierten, erkannten, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit wörtlich genau genommen der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen (durch die Aufgabe, die Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine Einheit graphisch zu bestimmen).
- Zu 2. Alle Studierenden bemerkten den numerischen Unterschied mit Hilfe des Interviewers (entweder über einen numerischen Vergleich von $K'(x)$ mit der Differenz $K(x+1) - K(x)$ oder einen Vergleich auf graphischer Ebene)
- Zu 3.: Den Unterschied in den Einheiten bemerkten 3 von 8 *nicht*. In einem der drei Fälle konnte kein Unterschied sichtbar werden, weil die Einheit der Grenzkosten als Ableitung bereits mit € angegeben wurde (bei Holger, siehe Kapitel

8.4.2). Bei den anderen beiden Fällen waren die jeweiligen Studierenden der Ansicht, dass die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit in „Euro pro Mengeneinheit“ angegeben werden müssten (Karl und Susanne, siehe Kapitel 8.4.5 und 8.4.7). Dies könnte darauf hindeuten, dass sie diese Sprechweise „Zusatzkosten *der* nächsten Einheit“ eigentlich als „Zusatzkosten *pro* Einheit“ im Sinne einer Rate verstanden. Ähnliches ist beispielsweise beim Begriff der Geschwindigkeit in der Literatur dokumentiert, die teilweise als Anzahl der zurückgelegten Meter in einer gegebenen Zeiteinheit aufgefasst wird (Thompson, 1994). In diesen Fällen konnte sich auf jeden Fall kein Widerspruch in den Einheiten ergeben.

Allerdings führte die Kenntnisnahme der entsprechenden Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit nicht immer zu adäquaten Schlüssen zur Beziehung zwischen den beiden. So hat Susanne zwar von vorn herein vermutet, dass hier ein numerischer Unterschied vorliegt, weil man beim Ableiten eine andere Funktion erhält, aber eigentlich wusste sie gar nicht, was die Ableitung ist (siehe Kapitel 8.4.7). Auch Holger konnte wegen Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung aus dem numerischen Unterschied zwischen den Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit keine adäquaten Schlüsse zur Beziehung zwischen diesen beiden ziehen. So schob er den numerischen Unterschied darauf, dass die Ableitung nicht die „wahre“ Steigung in einem Punkt angibt, weil bei der Grenzwertbildung die Stelle x nicht erreicht wird (siehe Kapitel 8.4.2). Die Ableitung war für ihn dann eigentlich die Steigung einer Sekante „mit minimalen h “, wobei er dieses *minimal* nicht näher spezifizierte. Ähnliche Schwierigkeiten beim Übergang vom Differenzenquotienten zur Ableitung sind auch in der Literatur dokumentiert (zum Beispiel bei Vom Hofe (1998), genaue Darstellung der Studie in Kapitel 4.2.2).

Abschließende Kurzzusammenfassung: Insgesamt sieht man somit, dass die Studierenden durch die Intervention des Interviewers nach der Frage zu den Unterschieden zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit zwar Unterschiede zwischen den beiden bemerkten, aber nicht immer adäquate Schlüsse zu deren Zusammenhang zogen. Die Ursache waren hier fehlende oder fehlerhafte Vorstellungen zum Ableitungskonzept.

8.5.3 Ergebnisse zur dritten Leitfrage zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene

Die dritte Leitfrage war:

L3: Inwiefern können die Studierenden eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen (mit Unterstützung des Interviewers, falls nötig), und welche Schwierigkeiten treten dabei auf?

Innerhalb des Interviews gab es zwei Gelegenheiten, in denen untersucht wurde, inwieweit die Studierenden eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen können:

1. in der Interventionsphase nach Aufgabe 2 bei der Herausarbeitung von Unterschieden zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene mit Hilfe des Interviewers
2. bei der Begründung, weshalb der numerische Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der in Abbildung 142 dargestellten Funktion nur gering ist (Aufgabe 3 des Interviews)

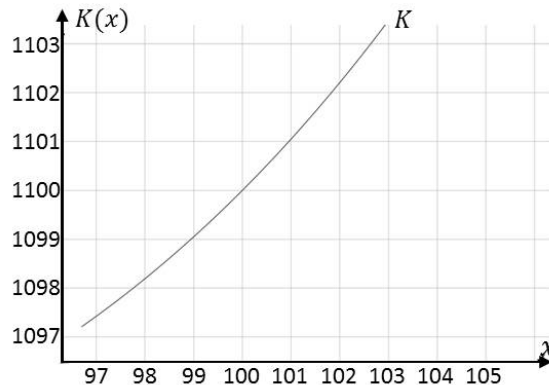


Abbildung 142: Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3

Notwendige Schritte für einen Vergleich von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene und zur Lösung von Aufgabe 3 auf Basis der Mathematikvorlesung:

1. Visualisierung der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$
2. Geometrische Deutung der Ableitung $K'(x)$ als Steigung der Tangente (und anschließendes Einzeichnen der Tangente)
3. Graphische Bestimmung der Tangentensteigung

Dann muss man erkennen, dass $K'(x)$ numerisch den Zuwachs entlang der Tangente angibt, wenn man x um eine Einheit erhöht, also wenn man $\Delta x = 1$ wählt. Damit kann man die Werte von $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene miteinander vergleichen.

Damit kann man dann auch in Aufgabe 3 begründen, dass der numerische Unterschied zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ bei der in Abbildung 142 dargestellten Funktion deshalb so klein ist, weil die Funktion in Bereich $[100; 101]$ annähernd linear ist (der Graph stimmt fast mit der Tangente überein).

In der Vorlesung vermitteltes Hintergrundwissen:

1. Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente
2. Beziehung zwischen der Tangente an eine Kostenfunktion an einer Stelle x , der Sekante durch $(x, K(x))$ und $(x+h, K(x+h))$ und der Differenz $K(x+h) - K(x)$ auf graphischer Ebene

3. Verfahren zur graphischen Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion

Außerdem wurde in der Vorlesung der Zusammenhang zwischen $K(x+h) - K(x)$ und $K'(x)$ über den Zuwachs entlang der Tangente ($K'(x) \cdot h$) für $h > 0$ am Beispiel einer konvexen Funktion visualisiert (siehe Abbildung 143).

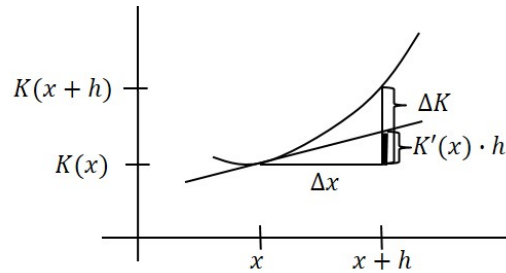


Abbildung 143: Skizze aus der Mathematikvorlesung zur Veranschaulichung der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs entlang der Tangente

Fähigkeit der Studierenden zur Herstellung einer adäquaten Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene: Hier lassen sich die Studierenden in mehrere verschiedene Gruppen sinnvoll einteilen:

- Gruppe 1: die Studierenden, die selbstständig eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene mit den oben genannten Schritten herstellen konnten (Johannes, Veronika, Lisa),
- Gruppe 2: diejenigen, die mit Hilfen des Interviewers eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellen konnten (Detlef, Ralf, Karl),
- Gruppe 3: diejenigen, die aufgrund von Fehlvorstellungen oder Fehlschlüssen keine adäquate Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene herstellten (Holger) und,
- Gruppe 4: diejenigen, die eine Kompletthanleitung des Interviewers benötigten, weil sie keine Ideen zur geometrischen Deutung der Ableitung hatten (Susanne).

Folgende Schwierigkeiten auf mathematischer Ebene traten hier auf:

1. Keine Assoziation der Ableitung mit der Steigung der Tangente, sondern nur mit der Steigung in einem Punkt
2. Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion
3. Fehlvorstellungen zum Ableitungsbegriff

Zu diesen Schwierigkeiten lässt sich Folgendes im Detail sagen:

- Zu 1: Einige Studierende kannten zwar die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung in einem Punkt, assoziierten diese aber nicht mit der Tangente (betrifft Ralf, Karl und Holger). Dadurch konnten sie die Ableitung nicht graphisch bestimmen. Ralf und Karl kamen nach dem Hinweis, dass Steigungen in der Vorlesung eigentlich nur für Geraden definiert wurden, dann auf die Idee die Tangente zu verwenden.
- Zu 2: Hier wurde teilweise die falsche Formel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ für die Berechnung der Steigung verwendet (Detlev und Susanne). Außerdem hatte Detlev dann auch noch Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Δy auf der Tangente, was aber auch der Nervosität in der Interviewsituation geschuldet sein konnte.
- Zu 3: Hier trat bei dem Probanden Holger die Fehlvorstellung auf, dass die rechnerisch bestimmte Ableitung eigentlich gar nicht der „wahren“ Steigung in dem betreffenden Punkt x entspricht, sondern einer Sekantensteigung durch $(x, K(x))$ und $(x+h, K(x+h))$ „für ein minimales h “ (was auch immer das ist). Dies sah er als Ursache für den numerischen Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ an (siehe Kapitel 8.4.2).

Nachdem die verschiedenen Größen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ visualisiert wurden, erkannten dann *alle* Studierenden, dass annähernde Linearität im Bereich $[x; x+1]$ ein wesentlicher Grund ist, dass der Unterschied zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ bei $x = 100$ bei der in Abbildung 143 dargestellten Funktion so klein ist.

Einige Studierende nannten sogar Begründungen, weshalb man bei Funktionen in der Ökonomie von annähernder lokaler Linearität ausgehen kann, obwohl das in der Vorlesung nicht angesprochen wurde. Als Beispiel sei hier Holger genannt. Er erklärte sehr schön, dass es eben *nicht* plausibel ist, dass sich die Kosten von Einheit zu Einheit rasch ändern (siehe Kapitel 8.4.2). Global sind ökonomische Funktionen seiner Meinung nach aber oft nicht ganz linear, da durch Verschleiß und Ähnliches die Kosten pro Stück global gesehen dennoch leicht zunehmen. Dies sind interessante, plausible Ideen zur Begründung der annähernden lokalen Linearität ökonomischer Funktionen.

Abschließende Kurzzusammenfassung: Insgesamt zeigte das Interview, dass die Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ *auf graphischer Ebene* (mit kleinen Hilfen) 6 der 8 Studierenden gelang. Zwei Probanden gelang dies selbstständig, die anderen brauchten kleine Hilfen des Interviewers zur Aktivierung des nötigen Hintergrundwissens.

8.5.4 Ergebnisse zur vierten Leitfrage zur Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene

Die vierte und letzte Leitfrage war:

L4: Inwiefern können die Studierenden eine Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene herstellen (mit Unterstützung des Interviewers, falls nötig), und welche Schwierigkeiten gibt es dabei?

Zu deren Beantwortung wurde die Aufgabe 4 des Interviews gestellt, in der die Studierenden *mit Hilfe der Definition der Ableitung* begründen sollte, weshalb die numerischen Werte zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ in ökonomischen Kontexten als häufig annähernd gleich angenommen werden können.

Notwendige Schritte zur Lösung von Aufgabe 4 auf Basis der Mathematikvorlesung: Die Definition der Ableitung lautet

$$K'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \quad (119)$$

Damit folgt für kleine h :

$$K'(x) \approx \frac{K(x+h) - K(x)}{h} \quad \text{bzw.} \quad K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h \quad (120)$$

Da $h = 1$ in ökonomischen Kontexten häufig klein ist (im Vergleich zu x), kann man dann annehmen, dass in diesem Fall $K'(x) \approx K(x+1) - K(x)$.

In der Vorlesung vermitteltes Hintergrundwissen: Der obige Lösungsweg wurde in der Vorlesung bei der Herleitung der ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Wert, der die *ungefähren* Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von x um eine Einheit angibt, dargestellt (siehe a-priori Analyse in Kapitel 8.2.5). Zentrale Wissensbausteine sind:

1. die Definition der Ableitung,
2. die sich aus der Definition der Ableitung ergebende Approximation
 $K'(x) \approx \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$ bzw. $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h ,
3. ein Argument, weshalb in ökonomischen Kontexten (genauer: in der ökonomischen Theorie) bei $h = 1$ von einer guten Approximation ausgegangen wird

Fähigkeit der Studierenden zur Herstellung einer adäquaten Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene: Lediglich zwei Studierende konnten hier eine adäquate Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf *symbolischer Ebene* herstellen (Johannes und Lisa). Sie zeigten, dass sie über die drei eben genannten Wissensbausteine verfügten und damit eine plausible Argumentation geben konnten, weshalb man in ökonomischen Kontexten von einem kleinen Fehler zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ ausgehen kann. Allerdings rechtfertigten sie das Einsetzen von $h = 1$ in die Approximation bzw. den Differenzenquotienten nicht damit, dass dies eben aus ökonomischer Sicht eine kleine Einheit ist, sondern aus einer praktischen Perspektive: $h = 1$ ist eben *oft* die kleinstmögliche Einheit in der Realität (siehe Kapitel 8.4.1 oder 8.4.8). Dieses Argument zieht zwar nicht, wenn der Output ein beliebig teilbares Gut ist, ist aber nicht teilbaren Einheiten wie Stückzahlen sehr plausibel. Allerdings hätte man dann eigentlich die gesamte Modellierung der Kosten durch eine Funktion $K : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ in Frage stellen müssen.

Bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene wurden zahlreiche Probleme sichtbar:

1. Keine Kenntnis der Definition der Ableitung
2. Probleme beim Verständnis der Definition der Ableitung
3. Konflikt zwischen $h \rightarrow 0$ und $h = 1$ beim Vergleich der Definition der Ableitung mit $K(x+1) - K(x)$
4. Schwierigkeiten beim Verständnis von Funktionsausdrücken

Zu diesen Schwierigkeiten lässt sich Folgendes im Detail sagen:

Zu 1: 6 der 8 Probanden konnten sich nicht an die formale Definition der Ableitung aus der Vorlesung erinnern und sie auch nicht rekonstruieren.

Zu 2: Selbst nachdem ihnen die Definition der Ableitung auf einer Karteikarte vorgelegt wurde, zeigte sich, dass diese oft nicht verstanden wurde. So sahen zum Beispiel Ralf und Karl das h in der Definition als Höhe eines Steigungsdreiecks an (vermutlich weil „Höhe“ mit „H“ beginnt, siehe Kapitel 8.4.4 und 8.4.5). Ein anderes Beispiel ist Susanne, die klar sagte, dass sie noch nie wusste, was das Limes-Symbol bedeutet (siehe Kapitel 8.4.7). Wenn man aber den Bestandteilen der Definition der Ableitung keine inhaltliche Bedeutung geben kann, kann man nicht verstehen, wie Ableitung und Kostendifferenz konzeptuell miteinander zusammenhängen.

Zu 3: Immerhin erkannten aber 6 von 8 Studierenden, dass man bei der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ in den Bruch $\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ den Wert $h = 1$ einsetzt anstelle den Grenzwert gegen 0 zu nehmen. 4 dieser 6 Studierenden rechtfertigten dieses „Einsetzen von $h = 1$ “ damit, dass eben $h = 1$ in der Realität *oft* das kleinstmögliche h ist (zum Beispiel bei Stückzahlen). Die beiden anderen konnten hier kein Argument bringen. Sehr gut sieht man den Konflikt zwischen $h \rightarrow 0$ und $h = 1$ bei Karl in folgendem Zitat (siehe Kapitel 8.4.5):

„Aber je näher, ist ja paradox. Je näher sich h der Null nähert, desto mehr kommt der auch Wert zur Eins, oder wie?“

Das in der Vorlesung gebrachte Argument, dass $h = 1$ in ökonomischen Lehrbüchern als klein angenommen wird, was auch in Ökonomiebüchern zu finden ist (siehe Kapitel 3.3.3), brachte an dieser Stelle niemand. Allerdings nannte es Lisa implizit an anderer Stelle, als sie die Vermutung äußerte, dass Funktionen in der Ökonomie über kleine Bereiche wie $[97; 103]$ annähernd linear sind (siehe Kapitel 8.4.8).

Zu 4: Schwierigkeiten beim Verständnis von Funktionsausdrücken wurden zum Beispiel bei Karl gut sichtbar, der vermutete, dass die eins in $K(x+1)$ der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ etwas mit der in ersten Aufgabe ermittelten eins bei $K'(100) = 1$ zu tun hatte. Allerdings trat dieses Problem nur einmal explizit auf. Diese Schwierigkeit ist somit nur von untergeordneter Bedeutung.

Abschließende Kurzzusammenfassung: Insgesamt sieht man also, dass 6 der 8 Studierenden *keinen* Zusammenhang zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf *symbolischer Ebene* herstellen konnten. Sie wussten weder die Definition der Ableitung, noch konnten sie den einzelnen Bestandteilen der Definition eine inhaltliche Bedeutung geben, nachdem ihnen die Definition vorgelegt wurde. Dies ist aber wichtig zur Herstellung eines auf konzeptueller Ebene verstandenen Zusammenhangs zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$. Hier wären noch umfangreiche Interventionen des Interviewers nötig gewesen, damit die Studierenden zunächst die formale Definition der Ableitung und die Bedeutung ihrer Bestandteile verstanden hätten.

8.6 Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse der Interviewstudie und Konsequenzen der Ergebnisse für die Lehre

Im Folgenden seien vier wesentliche Ergebnisse der Interviewstudie genannt, zu denen anschließend Konsequenzen für die Lehre vorgeschlagen werden:

- I. Obwohl in der Mathematikvorlesung thematisiert wurde, dass die Grenzkosten als Ableitung *nicht* exakt die Zusatzkosten der nächsten Einheit angeben, war den Studierenden bis auf Lisa und Johannes dies nach Besuch der Lehrveranstaltung nicht klar.
- II. Auf der *graphischen Ebene* konnte die der Mehrheit der Studierenden mit Hilfen des Interviewers eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herstellen. Hier hatten Studierende sogar eigene Ideen zur Begründung, warum Kostenfunktionen in der Ökonomie lokal (d.h. in Bereichen über einige wenige Einheiten hinweg) annähernd linear sind.
- III. Bis auf Lisa und Johannes hatten die Studierenden sehr große Probleme bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung und der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit auf der *symbolischen Ebene*.
- IV. Der Begriff der *marginalen Einheit* wurde von den Studierenden verwendet, die die Grenzkosten als Ableitung von den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf inhaltlicher Ebene abgrenzen konnten. Allerdings wurde dieser Begriff in der Mathematikvorlesung nicht klar definiert, weshalb Studierende dann hierzu eigene, teils nebulöse, Vorstellungen verwendeten.

Zu I (Problematik der nicht wahrgenommenen Unterschiede zwischen den Grenzkosten als Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit): Dass 6 der 8 Probanden des Interviews hier von sich aus *keine* inhaltlichen Unterschiede nennen konnten, ist überraschend. Denn zumindest der numerische Unterschied zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ wurde in der mathematischen Lehrveranstaltung bei der Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung thematisiert (siehe Kapitel 7.2.2). In den Interviews wirkte es hingegen so, als ob sich diese 6 Studierenden zum ersten Mal mit der Frage, wie die Grenzkosten als Ableitung mit

der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit zusammenhängen, beschäftigt haben.

Eine Ursache dafür könnte sein, dass die ökonomische Interpretation der Ableitung in der Vorlesung ziemlich „straightforward“ eingeführt wurde. Der Lehrende leitete aus der Definition der Ableitung die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h her. Aus dieser leitete er dann durch Einsetzen von $h = 1$ die Interpretation von $K'(x)$ als *ungefähre* Zusatzkosten der nächsten Einheit her (ausführliche Darstellung der Einführung dieser Interpretation siehe Kapitel 7.2.2).

Danach thematisierte der Dozent, dass die Approximation $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ besser wird, wenn h kleiner wird. Im Unendlichen erhält man dann eine exakte, fiktive Beziehung $dK = K'(x)dx$. Damit rechtfertigte er dann eine zweite Möglichkeit der Interpretation von $K'(x)$ (siehe Kapitel 7.2.2):

*Erhöht man – ausgehend von einem Output von ... Mengeneinheiten – die Produktion um eine **marginale** Einheit, so erhöhen sich die Kosten um ... **marginale** Einheiten.*

All dies geschah frontal ohne Beteiligung der Studierenden.

In Ökonomiebüchern werden die Grenzkosten $K'(x)$ dann häufig einfach als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert oder gar als solche definiert (siehe Kapitel 3.3.1). Ungefähr passt das ja auch zu den in der Mathematikvorlesung vermittelten Interpretationen der Grenzkosten. Daher identifizierten dann viele Studierende vermutlich ohne weiteres Nachdenken die Grenzkosten als Ableitung mit den Zusatzkosten der nächsten Einheit (so wie hier 4 der 8 Teilnehmer des Interviews). Ein genaueres Reflektieren über die Beziehung zwischen beiden mit kognitiven Konflikten wie hier im Interview fand vorher nicht statt.

Konsequenzen für die Lehre: Dem könnte man entgegenwirken, wenn man in der Vorlesung direkt nach der Definition der Grenzkosten als Ableitung einer Kostenfunktion (das ist die übliche Definition der Grenzkosten in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, siehe (Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010; Dietz, 2012)), die Studierenden wie im Interview mit der alternativen Definition der Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit konfrontiert. Dann könnte man sie kurz Unterschiede diskutieren lassen oder selbst an der Tafel den numerischen Unterschied und den Unterschied in der Einheit an einem einfachen Beispiel vorführen. Mit dem Bewusstsein über die Unterschiede kann man dann

1. thematisieren, weshalb in der Ökonomie aber dennoch häufig die Ableitung als Zusatzkosten der nächsten Einheit interpretiert wird und
2. und dabei die Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und ihrer ökonomischen Interpretation als Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf mathematischer Ebene vorführen (zum Beispiel über lokale lineare Approximation).

Dies könnte man dann auch zum Anlass nehmen, in der Ökonomie oft implizit getroffene Modellannahmen (nämlich, dass man bei den Funktionen in ökonomischen Theorien eben davon ausgeht, dass die Approximation $K'(x) \approx K(x+1) - K(x)$ gut ist, weil

eine Einheit in dem jeweiligen Kontext klein ist bzw. die entsprechende Funktion im Bereich $[x; x + 1]$ annähernd linear ist) thematisieren und problematisieren.

Auch die Verwendung des Begriffs der *marginalen* Einheit könnte hilfreich sein um herauszuarbeiten, dass die Ableitung eben nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht (Näheres dazu in Kürze auf S.493).

Zu II: (Fähigkeit zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf graphischer Ebene): Auf dieser Ebene zeigten die Probanden der Interviewstudie durchaus Potential, und die Mehrheit konnte mit kleinen Hilfen des Interviewers auf graphischer Ebene einen Zusammenhang zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x + 1) - K(x)$ über die Tangente und deren Steigung herstellen (siehe Kapitel 8.5.3). Dahinter steckt die Idee der lokalen linearen Approximation (Greefrath u. a., 2016, S.107, Danckwerts u. Vogel, 2010, S.72).

Als Schlüssel erwies sich hier die Tangente. Sobald den Studierenden klar war, dass die Ableitung die Steigung *der Tangente* ist, kamen sie bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x + 1) - K(x)$ auf graphischer Ebene maßgeblich weiter (sie konnten beide visualisieren und vergleichen). Die Deutung als *Steigung in einem Punkt* war hier nicht ausreichend.

Konsequenzen für die Lehre: Man sollte bei der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung zu deren Illustration stets die Tangente nutzen, damit die Studierenden den Begriff der Steigung einer Funktion an einer Stelle gemeinsam mit der Tangente verankern. Hilfreich könnten hier insbesondere Aufgaben sein, in denen die Steigung einer Funktion an einer Stelle graphisch (mit der Tangente) bestimmt werden soll.

Alternativ könnte man auch überlegen, die Steigung *in einem Punkt* als Steigung der Tangente zu definieren. Denn diese Sprechweise wurde hier von Studierenden auch genutzt (Ralf, Karl), obwohl sie in der Mathematikvorlesung nicht eingeführt wurde. Dann könnte man sie auf eine *präzise* mathematische Basis stellen, in der quasi per Definition die Verknüpfung zur Tangente hergestellt werden muss.

Zu III: (Fähigkeit zur Herstellung einer Verbindung zwischen Ableitung und Zusatzkosten der nächsten Einheit auf symbolischer Ebene): 6 der 8 Probanden konnten *keine* Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit auf symbolischer Ebene über die Definition der Ableitung und die Approximationsformel $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für kleine h herstellen, obwohl eine solche in der Vorlesung vorgeführt wurde.

Hier gab es in der Interviewstudie sehr viele Schwierigkeiten, die auch mit kleinen Hilfen des Interviewers nicht überbrückbar gewesen wären (siehe letztes Kapitel 8.5.4). Ein Hauptproblem war, dass die Definition der Ableitung von den Probanden oft weder gewusst wurde, noch aus deren *concept image* zur Ableitung rekonstruiert werden konnte. Und selbst wenn die Definition den Studierenden vorgelegt wurde, war ihnen oft der konzeptuelle Zusammenhang zwischen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ und $K(x+1) - K(x)$ über den Differenzenquotienten bzw. die Approximation $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ nicht klar (vermutlich, da sie bereits die Definition der Ableitung und ihre Bestandteile nicht verstanden haben).

Konsequenzen für die Lehre: Es stellt sich die Frage, inwieweit die Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung und den Zusatzkosten der nächsten Einheit über die Definition der Ableitung und die resultierende Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ auf der symbolischen Ebene für die Studierenden sinnvoll ist (auch wenn es der derzeit übliche Weg in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ist, siehe zum Beispiel (Sydsæter u. Hammond, 2015, S.208-209)). Die Schwierigkeiten der Studierenden bei dieser formalen symbolischen Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit über die Definition der Ableitung erscheinen mir sehr viel höher als bei der Verbindung auf graphischer Ebene über die Idee der *lokalen linearen Approximation* (Greefrath u. a., 2016, S.107, Danckwerts u. Vogel, 2010, S.72). Wenn man möchte, dass die Studierenden am Ende *selbstständig* eine adäquate Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen können, sollte man meiner Meinung nach eher den graphischen Weg verfolgen, über den dies zumindest dem meisten Probanden im Interview mit Unterstützung des Interviewers gelang. Optimal wäre natürlich eine Verknüpfung beider Wege (wenn das zeitlich möglich ist).

Zu IV: (Potential und Schwierigkeiten beim Begriff der „marginalen Einheit“):

Die Interviewstudie zeigte, dass der Begriff der *marginalen* Einheit Potential hat, um die Grenzkosten als Ableitung von den Zusatzkosten der nächsten Einheit inhaltlich abzugrenzen. Die einzigen beiden Studierenden dieser Studie, die eine inhaltliche Abgrenzung zwischen den Grenzkosten als Ableitung und denen als Zusatzkosten der nächsten Einheit vornehmen konnten, verwendeten hierzu den Begriff *marginalen* Einheit.

Allerdings schien der Begriff der *marginalen* Einheit, wie er in der Vorlesung vermittelt wurde, nämlich als fiktive, unendlich kleine Größe in der Beziehung $dK = K'(x)dx$ (siehe Kapitel 7.2.2) für die Studierenden etwas nebulös. Demensprechend entwickelten die Studierenden hier dann unterschiedliche Vorstellungen zu diesem Begriff:

1. Johannes übernahm die Sprechweise aus der Vorlesung der *marginalen* Einheit als *unendlich kleine Größe*, wobei er aber auch nicht genau sagen konnte, was das ist (siehe Kapitel 8.4).
2. Veronika sah den Begriff *marginale* Einheit nur als Sprechweise für die nächste produzierbare Einheit an (siehe Kapitel 8.4.6).
3. Lisa sah eine marginale Einheit als sehr, sehr kleine, aber endliche Größe an (siehe Kapitel 8.4.8).

Je nachdem, wie der Begriff dann verstanden wird, muss dann neu eingeschätzt werden, ob die Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als Wert, der die Zusatzkosten einer *marginalen* Einheit angibt, adäquat ist.

Konsequenzen für die Lehre: Eine Verwendung dieses Begriffes könnte hilfreich zur Einführung einer ökonomischen Interpretation der Ableitung sein, die näher am mathematischen Konzept der Ableitung ist, als die in der Ökonomie übliche Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit. Allerdings sollte man meiner Meinung nach auf den Begriff der *unendlich kleinen Größe* verzichten, weil es eine solche in

der modernen Mathematik nicht gibt. Eine Möglichkeit der Definition der marginalen Einheit dx wäre als endliche Größe, die im Kontext so klein ist, dass man den Approximationsfehler zwischen $\frac{dK}{dx}$ und $K'(x)$ praktisch vernachlässigen kann. Damit ist die Größe dieser *marginalen Einheit* stets vom Kontext abhängig, was auch einige Ökonomiebücher betonen (Reiß, 2007, S.197). Die Ableitung $K'(x)$ könnte dann als Zusatzkosten pro marginaler Einheit des Outputs interpretiert werden.

9 Zusammenfassung, Fazit und Ausblick

In dem letzten Kapitel dieser Dissertation zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst, wichtige Konsequenzen für die Lehre abgeleitet, und schließlich auf Basis des Beitrags dieser Arbeit zur mathematikdidaktischen Forschung ein Ausblick auf mögliche weitere Forschungsaktivitäten gegeben.

9.1 Zusammenfassung der Ergebnisse der Dissertation

Zunächst sollen die Ergebnisse der Dissertation zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auf Basis der im Voraus formulierten Forschungsfragen zusammengefasst werden. Die Forschungsfragen waren:

- F1. Wie könnte man ein mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, theoretisch beschreiben?
- F2. Welches Verständnis der Ableitung wird in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelt, und welches wird in ökonomischen Lehrbüchern praktisch vorausgesetzt?
- F3. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?
- F4. Welches Verständnis des Ableitungsbegriffs haben Studierende der Wirtschaftswissenschaften nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, und welche Verständnisschwierigkeiten gibt es?

Für deren Beantwortung wurde zunächst ein Rahmenmodell für eine theoretische Beschreibung eines möglichen mathematisch adäquaten *concept image* der Ableitung entwickelt, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung bei deren Verwendung in der Ökonomie mitberücksichtigt (Beantwortung von Forschungsfrage F1).

Danach erfolgte im Vergleich dazu eine Analyse des gegenwärtigen Ist-Zustandes von gelehrtem und bei Studierenden vorhandenem Verständnis der Ableitung. Hierbei wurde zunächst untersucht, welches *concept image* zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften praktisch vermittelt und welches praktisch in ökonomischen Lehrwerken vorausgesetzt wird (Beantwortung von Forschungsfrage F2).

Nach der Untersuchung des gelehrteten *concept image* folgte schließlich die Untersuchung des bei den Studierenden erreichten Verständnisses des Ableitungskonzepts in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Hierfür wurde zunächst *exemplarisch* am Beispiel der Universität Paderborn untersucht, welches *concept image* zur Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn des Studiums vorhanden ist (Beantwortung von Forschungsfrage F3), und anschließend welches sie nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ haben (Beantwortung von Forschungsfrage F4). Bei Letzterer erfolgte aus Umfangsgründen eine Beschränkung auf die ökonomische Interpretation der Ableitung, denn diese ist

für Studierende der Wirtschaftswissenschaften für eine *verständige* Verwendung des Konzepts in der Ökonomie besonders relevant.

Im Folgenden sollen die Ergebnisse zu diesen einzelnen Fragen noch einmal zusammengefasst werden.

9.1.1 Zur Beschreibung eines möglichen adäquaten concept image zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Hierfür wurde, wie gesagt, ein Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler entwickelt, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in ökonomischen Kontexten mitberücksichtigt. Theoretische Grundlage dafür bildete das theoretische Konstrukt des *concept image* nach Tall u. Vinner (1981, S.152), und zwar in seiner weiten Fassung nach Tall, zu dem auch eine eigene *personal concept definition* gehört (siehe Kapitel 3.1).

Zur Konkretisierung eines möglichen adäquaten *concept image* zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wurde dann zunächst das Matrixmodell zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ in der Mathematik von Zandieh (2000, S.106) ausgewählt. Die Zeilen der Matrix sind die verschiedenen Verständnisebenen auf dem Weg von einer Funktion f zur Ableitungsfunktion f' (*Verhältnis*, *Grenzwert*, *Funktion*, siehe Tabelle 4). Die Spalten sind die verschiedenen Repräsentationen der Ableitung (verbal, graphisch, symbolisch). Dieses Modell wurde dann noch um die in der Ökonomie übliche Interpretation von $f'(x)$ als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit und deren Verbindung zum mathematischen Konzept der Ableitung über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ und die dahinter liegende Idee der lokalen linearen Approximation (Danckwerts u. Vogel, 2010, S.72; Greefrath u. a., 2016, S.110) erweitert. Ergebnis ist dann das in Abbildung 144 dargestellte Rahmenmodell.

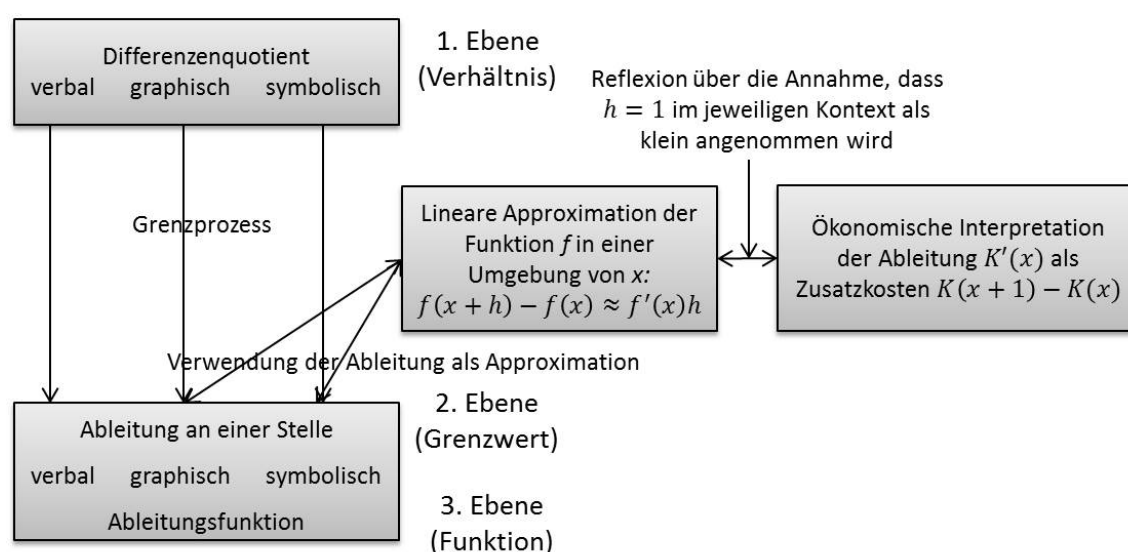


Abbildung 144: Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Hier wären theoretisch auch andere Interpretationen denkbar, zum Beispiel als *Zuwachs pro marginaler Einheit*, wie sie in der Interviewstudie von Studierenden der Universität Paderborn nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung genannt wurden (siehe Kapitel 8.5). Das Modell in Abbildung 144 ist also nur *ein mögliches* adäquates *concept image* zur Ableitung, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt.

9.1.2 Zum praktisch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten und in ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzten *concept image* zur Ableitung

Um dieses zu ermitteln wurden verbreitete Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010) und Standardwerke der Ökonomie (Wöhe u. Döring, 2013; Varian, 2011) aus mathematischer und stoffdidaktischer Perspektive analysiert.

Dabei lag der Schwerpunkt der Analyse auf der Frage, welche inhaltlichen Aspekte des Ableitungskonzepts in den mathematischen Lehrbüchern vermittelt, bzw. in den ökonomischen Lehrbüchern vorausgesetzt werden. Die Ergebnisse sind noch einmal in Tabelle 145 dargestellt.

Inhaltsaspekt		vermittelt	benötigt
1.	Definition der Ableitung	D,H,T	W,V
2.	Geometrische Deutung der Ableitung als Steigung der Tangente	D,H,T	W,V
3.	Deutung der Ableitung als Änderungsrate	D,H	V
4.	Ökonomische Interpretation der Ableitung und ihr Zusammenhang zum mathematischen Konzept über lineare Approximation	D,H,T	W,V
5.	Technik des Ableitens und Ableitungsregeln	D,H,T	W,V
6.	Steigung linearer Funktionen und Fahrstrahlanalyse	D,T	W
7.	Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung bzw. Konvexität und Ableitung	D,H,T	W,V
8.	Verwendung der Ableitung bei der Optimierung	D,H,T	W,V
9.	Elastizitätskonzept	D,H,T	W,V
10.	Das Konzept des Differentials	D,H,T	-

Tabelle 145: Vermittelte und benötigte Aspekte zum Ableitungsbegriff in den analysierten Lehrbüchern (einschließlich der darauf aufbauenden Konzepte *Elastizität* und *Differential*), D=(Dietz, 2012), H=(Sydsæter u. Hammond, 2015), T=(Tietze, 2010), W=(Wöhe u. Döring, 2013), V=(Varian, 2011)

Wie man in Tabelle 145 sieht, wird ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung in ökonomischen Lehrbüchern benötigt, und in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auch ein umfangreiches *concept image* vermittelt. Zu diesen *concept image* gehören insbesondere die verschiedenen Aspekte des Ableitungsbegriffs aus dem theoretischen Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler aus Abbildung 144.

Außerdem liegt insgesamt eine im Wesentlichen gute Passung zwischen vermittelten und vorausgesetzten Aspekten zum Ableitungsbegriff vor. Eine Ausnahme scheint hier das Differential zu sein, welches in den beiden betrachteten Ökonomiebüchern nicht verwendet wird. Dieses spielt aber in fortgeschritteneren theoretischen Büchern eine Rolle (siehe zum Beispiel (Fandel, 2010)).

Allerdings gab es auch *drei wichtige Diskrepanzen* (genauere Darstellung der Diskrepanzen mit Belegen in der Zusammenfassung der Lehrbuchanalysen in Kapitel 5.6):

1.Diskrepanz: Überbetonung der Technik des Ableitens in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

2.Diskrepanz: Teilweise sehr kurze, und in Anbetracht der großen Heterogenität bei der Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie (siehe Kapitel 2) meiner Meinung nach *zu kurze* Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

3.Diskrepanz: Diskrepanz zwischen den Aufgaben in den mathematischen Lehrbüchern (überwiegend Rechenaufgaben mit konkreten Zahlen) und den Fragestellungen, die in ökonomischen Lehrbüchern mit der Ableitung beantwortet werden bzw. werden sollen (überwiegend qualitative, theoretische Fragestellungen)

9.1.3 Zum concept image der Ableitung bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften

Zur Ermittlung des *concept image* der Ableitung bei den Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften wurde ein Vortest zum Ableitungskonzept für diese Gruppe konzipiert und zu Beginn des Wintersemesters 2015/16 exemplarisch im Mathematik-Vorkurs der Universität Paderborn eingesetzt. Die Konstruktion basierte auf dem theoretischen Rahmenmodell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung, welches im ersten Teil der Dissertation entwickelt wurde (siehe Abbildung 144 oder Vortest), und auf aus mathematikdidaktischer Literatur bekannten Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung (siehe Kapitel 4). Die Auswertung des Vortests erfolgte mittels klassischer Testtheorie (Krauth, 1995). Der Vortest zeigte, dass die Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Paderborn ein sehr heterogenes Vorwissen mitbrachten. Dies sieht man zum Beispiel an der Punkteverteilung in Abbildung 145 mit der Maximalpunktzahl von 52 Punkten und den Kenngrößen der Verteilung (siehe Tabelle 146).

	Gesamtstichprobe ($N = 143$)	Grundkurs ($N = 114$)	Leistungskurs ($N = 29$)
Mittelwert	24.80	23.34	30.52
Median	25	24	32
Standardabweichung	7.804	6.902	8.605

Tabelle 146: Kenngrößen der Punktesumme des Gesamttests

Im Mittel wurden also knapp die Hälfte der Punkte erreicht. Die Unterschiede in den Mittelwerten zwischen Studierenden mit Grund- und Leistungskurs sind signifikant

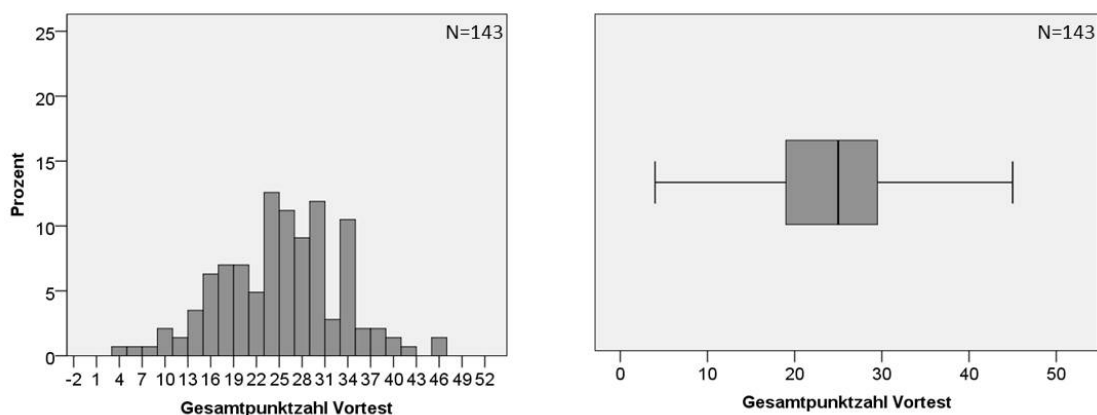


Abbildung 145: Verteilung der erreichten Gesamtpunktzahlen

($\alpha = 0.000005$). Weiterhin sieht man in Abbildung 100 und Tabelle 129 eine große Streuung.

Es gab jedoch nicht bloß eine große Streuung innerhalb der Studierendenschaft, sondern auch große Unterschiede bei verschiedenen Aspekten des Ableitungsbegriffs, die in unterschiedlichen Teilttests abgeprüft wurden (Aufteilung des Gesamtttest in Teilttests siehe Tabelle 62). Die Mittelwerte und Standardabweichungen bei den Punkteverteilungen der einzelnen Teilttests im Vergleich befinden sich noch einmal in Tabelle 147. Dabei wurden die Punktzahlen jeweils normiert, d.h. die Punktzahlen wurde jeweils durch die im Teilttest erreichbare Maximalpunktzahl geteilt. Sie sind in Tabelle 147 absteigend bezüglich der Mittelwerte angeordnet.

Name des Teilttests	Anzahl der Items	Normierter Mittelwert	Normierte Standardabweichung
(1) Steigung linearer Funktionen	6 Items	0.65	0.277
(2) Das Tangentenkonzept	8 Items	0.58	0.259
(3) Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	10 Items	0.60	0.234
(4) Geometrische Deutung der Ableitung	11 Items	0.55	0.260
(5) Technik des Ableitens	6 Items	0.38	0.284
(6) Ökonomische Interpretation der Ableitung und zugehöriges Hintergrundwissen	4 Items	0.19	0.190
(7) Differenzenquotient	5 Items	0.16	0.217

Tabelle 147: Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teilttests (ohne die drei entfernten Items, siehe Kapitel 6.11.2)

Wichtige Ergebnisse der einzelnen Teilttests:

Zu (1) und (2): Teilttests zur Steigung linearer Funktionen und zum Tangentenkonzept:

Wie man in Tabelle 131 sieht, verfügten die Studierenden über ein vergleichsweise gutes Verständnis der *Steigung einer linearen Funktion* sowie des *Tangentenkonzepts*, die eine wichtige Grundlage für das Verständnis der Ableitung bilden. Allerdings waren

Studienanfängern nicht immer alle Aspekte des Konzepts der Steigung einer linearen Funktion noch bewusst (zum Beispiel konnten weniger als die Hälfte eine Steigung bei zwei gegebenen Punkten korrekt bestimmen, siehe Tabelle 71). Besondere Schwierigkeiten bereitete die Deutung der Steigung in einem Kontext (Lösungshäufigkeit des zugehörigen Items: 28.7%).

Zu (3) und (4): Teilttests zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate und zur geometrischen Deutung der Ableitung:

Auch bei diesen beiden Teilttests wurden im Mittel mehr als die Hälfte der Punkte erreicht (detaillierte Ausführungen zu den Ergebnissen dieser Teilttests siehe Kapitel 6.12). Allerdings gab es auch hier Schwierigkeiten. So fiel die geometrische Deutung der Ableitung den Studierenden schwerer, wenn der gesamte Funktionsverlauf betrachtet werden musste (genauere Ausführungen siehe Kapitel 6.12). Und bei der Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate im Kontext hing die Lösungshäufigkeit der einzelnen Items stark vom Kontext ab (genauere Ausführungen siehe Kapitel 6.12).

Zu (5): Teilttest zur Technik des Ableitens:

Der Teilttest zur Technik des Ableitens fiel wesentlich schlechter aus als die zuvor genannten Teilttests. Sobald die abzuleitende Funktion kein Polynom war, lag die Lösungshäufigkeit bereits unter 40% (siehe Tabelle 65). Am geringsten war die Lösungshäufigkeit bei dem Item zur Bildung der Ableitung von $f(x) = xe^x$ (11.2%).

Zu (6) und (7): Teilttests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen und Teilttest zum Differenzenquotienten:

Besonders schwach fielen im Vergleich die Teilttests zum Differenzenquotienten und zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen (Definition der Ableitung und Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation) aus. Hier war auch die Streuung nur sehr gering und Studienanfänger mit Leistungskurs waren *nicht* signifikant besser (siehe Tabelle 131). In Tabelle 148 sind noch einmal wichtige Beispiele dargestellt, die das schwache Abschneiden illustrieren.

Aufgabe	Anteil adäquater Lösungen
Aufgabe zur Deutung des Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ in einem ökonomischen Kontext ($K(x)$ gibt die Kosten für die Produktion von x Autos an.)	2.8%
Aufgabe zur ökonomischen Interpretation von $K'(200) = 2$ ($K(x)$ gibt die Kosten für die Produktion von x Kugelschreibern an.)	5.6%
Aufgabe zur Bestimmung einer Approximation von $\sin(0,1)$ mit Hilfe der Ableitung $\sin'(0) = \cos(0) = 1$	2.1%
Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$	12.6%

Tabelle 148: Ergebnisse ausgewählter Items aus dem Teilttest zum Differenzenquotienten und dem Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem für deren Verständnis notwendigen Hintergrundwissen

Zusammenfassendes Kurzfazit: Insgesamt zeigt der Vortest ein sehr heterogenes Vorwissen der Studienanfänger zum Ableitungsbegriff. Große Schwierigkeiten zeigten sich bei folgenden Aspekten:

1. Technik des Ableitens abseits von Polynomfunktionen
2. Deutung von Steigungen linearer Funktionen und von Differenzenquotienten
3. Geometrische Deutung der Ableitung, wenn der gesamte Funktionsverlauf betrachtet werden musste
4. Kenntnis einer Definition der Ableitung
5. Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation
6. Ökonomische Interpretation der Ableitung

Bei der Deutung der Ableitung als Änderungsrate in Kontexten hing es stark vom Kontext ab, inwieweit den Studierenden dies gelang.

Die schwachen Ergebnisse bei der Verwendung der Ableitung im Zusammenhang mit linearer Approximation und der ökonomischen Interpretation der Ableitung sind nicht überraschend, denn diese Aspekte sind nicht unbedingt Gegenstand des Schulstoffs (in Nordrhein-Westfalen wird lokale lineare Approximation nur im Leistungskurs behandelt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S.31), eine ökonomische Interpretation der Ableitung ist gar nicht vorgesehen). Die obigen Aspekte 1.-4. sind hingegen Gegenstand des Schulstoffs. Offenbar kann man dennoch nicht voraussetzen, dass sie adäquat in den *concept images* von Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften enthalten sind.

Als besonders problematisch sind hierbei die Aspekte einzustufen, die für ein Verständnis der Ableitung wichtig sind, von vielen Studienanfängern *nicht* beherrscht werden, aber dennoch gegenwärtig in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler *kaum aufgegriffen* werden. Diese sind:

1. eine inhaltliche Deutung von Steigungen linearer Funktionen als Änderungsrate (wird zum Beispiel in Dietz (2012) nicht behandelt)
2. eine inhaltliche Deutung des Differenzenquotienten (wird zum Beispiel in Sydsæter u. Hammond (2015) oder Tietze (2010)) nicht behandelt)

9.1.4 Zum concept image der Ableitung bei den Studierenden nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“

Auch dieses wurde *exemplarisch* anhand von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn ermittelt. Aus Umfangsgründen lag hierbei der Fokus auf dem Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung und deren Verbindung zum mathematischen Konzept über lokale lineare Approximation („rechter Teil“ des theoretischen Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler in Abbildung 144).

Um zu ermitteln, inwieweit eine adäquate ökonomische Interpretation Bestandteil des *concept image* der Studierenden war, und inwieweit sie eine adäquate Verbindung

zwischen dieser und dem mathematischen Konzept der Ableitung über lineare Approximation schlagen konnten, wurden zunächst die Antworten von vier dazu speziell konzipierten Klausuraufgaben mit Hilfe von qualitativer Inhaltsanalyse analysiert (Beschreibung und Begründung der Aufgaben siehe Kapitel 7.3).

Um genaue Verständnisschwierigkeiten bei der Herstellung einer adäquaten Verbindung zwischen der ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem mathematischen Konzept ermitteln zu können, wurde außerdem eine ergänzende Interviewstudie mit 8 Studierenden geführt. In dieser wurde untersucht, (1) inwieweit den Studierenden im Kontext der Grenzkosten Unterschiede zwischen der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion und deren in der Ökonomie üblicher Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit bewusst waren, (2) inwieweit sie eine Verbindung zwischen beiden auf *graphischer Ebene* über die Tangente, und (3) inwieweit sie eine Verbindung auf *symbolischer Ebene* über die Definition der Ableitung und die Approximation $K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ herstellen konnten (genaue Beschreibung des Konzepts der Interviewstudie siehe Kapitel 8.2).

Zentrale Ergebnisse der Analyse der Klausuraufgaben:

1. Über die Hälfte der Studierenden konnten in einer Aufgabe der Klausur zur ökonomischen Interpretation der Ableitung einer Gewinnfunktion eine *auf den ersten Blick adäquate* ökonomische Interpretation von $G'(x)$ nennen, zum Beispiel als Zusatzgewinn der nächsten oder der nächsten marginalen Einheit. Allerdings wiesen bei genauer Analyse der Antworten *etwa die Hälfte dieser Interpretationen* aus mathematischer Sicht *Mängel in der Formulierung* auf. Insbesondere wurde in vielen Fällen nicht adäquat dargestellt, inwiefern die Ableitung nur eine Approximation dieses Zusatzgewinns darstellt oder nicht, obwohl dies in der Mathevorlesung explizit thematisiert wurde (genaue Zahlen siehe Tabelle 134 in Kapitel 7.2.2).
2. Ebenfalls konnte zwar *über die Hälfte* der Studierenden auf prozeduraler Ebene eine Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herstellen, indem sie gesuchte Zusatzkosten mit Hilfe der Ableitung über lokale lineare Approximation bestimmen konnten. Allerdings machten *etwa ein Viertel* in ihrer Lösung nicht deutlich, dass das ermittelte Ergebnis nur eine Approximation ist (genaue Zahlen siehe Abbildung 107 in Kapitel 7.6.2).
3. Ebenso konnte *etwa nur ein Viertel* der Studierenden begründen, weshalb die zuvor ermittelte Ergebnis im Allgemeinen nicht die exakten Zusatzkosten angibt (Aufgabe 4, Details siehe Abbildung 109 in Kapitel 7.7.2). Dies spricht dafür, dass viele Studierende den Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten über lokale lineare Approximation auf *konzeptueller Ebene nicht verstanden* haben.

Wichtige Ergebnisse der Interviewstudie: Auch die Ergebnisse der Interviewstudie sprechen dafür, dass viele Studierende nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung keine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ einer Kostenfunktion (den Grenzkosten) und deren in der Ökonomie üblicher Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit herstellen konnten, obwohl eine solche in der Mathematikvorlesung gelehrt wurde (siehe Kapitel 7.2.2).

Zu den wahrgenommenen Unterschieden zwischen den Grenzkosten $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit: 4 der 8 Probanden des Interviews waren zu Beginn des Interviews der Ansicht, dass die Grenzkosten als Ableitung und die Grenzkosten als Zusatzkosten der nächsten Einheit dasselbe sind. Studierende identifizierten also teilweise einfach die Ableitung mit ihrer ökonomischen Interpretation. Überhaupt schienen diese 4 der 8 Probanden sich vorher gar nicht mit der Frage beschäftigt zu haben, inwiefern die Ableitung $K'(x)$ den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht, obwohl das in der Mathematikvorlesung thematisiert wurde.

Lediglich zwei Probanden (Johannes und Lisa) waren auf Basis des in der Mathematikvorlesung vermittelten Wissens zum Zusammenhang zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation (siehe Kapitel 7.2.2) klar, dass die Ableitung nicht den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht. Sie wussten, dass die Zusatzkosten der nächsten Einheit auf mathematischer Ebene wörtlich genommen der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$ entsprechen und numerisch nur eine Approximation von $K'(x)$ sind. Ihnen war auch klar, dass die Grenzkosten als Ableitung eigentlich *nicht* absoluten Zusatzkosten entsprechen (sie bemerkten den Unterschied in der Einheit auf Nachfrage sofort).

Beide interpretierten die Ableitung $K'(x)$ stattdessen als *Verhältnis zweier sehr kleiner Größen* $\frac{dK}{dx}$, die sie als *marginale Einheiten* bezeichneten. Damit griffen sie als einzige die Ausführungen der Mathematikvorlesung auf, in der betont wurde, dass die Ableitung $K'(x)$ *nicht* die Zusatzkosten der nächsten Einheit angibt. Stattdessen wurden dort folgende Interpretationen von $K'(x)$ gelehrt (siehe Kapitel 7.2.2):

1. als Wert, der die *ungefähren* Zusatzkosten bei Erhöhung des Outputs x um eine zusätzliche Einheit angibt (gerechtfertigt über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$)
2. als Wert, der die (exakten) *marginalen* Zusatzkosten bei Erhöhung des Outputs x um eine zusätzliche *marginale* Einheit angibt (gerechtfertigt über die Beziehung $dK = K'(x)dx$, die sich laut Vorlesung formal asymptotisch aus der Approximation $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \rightarrow 0$ ergibt)

Johannes und Lisa griffen also die zweite gelehrt Interpretation der Ableitung auf. Allerdings unterschied sich ihre Auffassung vom Begriff der *marginalen Einheit*. Johannes übernahm die Sprechweise der Vorlesung als fiktive, *unendlich kleine Größe*. Für Lisa war hingegen eine marginale Einheit dx eine sehr kleine, aber endliche Größe. Diese sah sie aber als so klein an, dass das Verhältnis $\frac{dK}{dx}$ numerisch gleich der Ableitung $K'(x)$ ist (siehe Kapitel 8.5).

Die Fälle Johannes und Lisa zeigen, dass es *sehr wohl Studierende gab*, die die Ableitung nicht einfach mit den Zusatzkosten der Ableitung identifizierten, sondern in ihrer mathematischen Lehrveranstaltung gelehrt Inhalte zur ökonomischen Interpretation der Ableitung aufgriffen und daraus resultierend für sich die Ableitung als Verhältnis sehr kleiner bzw. unendlich kleiner Größen interpretierten, was weitaus näher am mathematischen Konzept der Ableitung als die in der Ökonomie übliche Interpretation als Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ liegt.

Zur Fähigkeit der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene: Eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und deren in der Ökonomie üblicher Interpretation als Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf *graphischer Ebene* über die Tangente und deren Steigung konnten 6 der 8 Probanden herstellen (eventuell mit kleinen Hilfen des Interviewers). Probleme traten dabei an folgenden Stellen auf:

1. Keine Assoziation der Ableitung mit der Steigung der Tangente, sondern nur mit der Steigung in einem Punkt
2. Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion
3. Fehlvorstellungen zum Ableitungsbegriff (hier die Fehlvorstellung, dass die Ableitung nicht der wahren Steigung in einem Punkt entspricht, sondern einer Sekantensteigung für ein sehr kleines h , siehe Kapitel 8.4.2).

Zumindest die ersten beiden Schwierigkeiten konnten im Laufe des Interviews überwunden werden.

Zur Fähigkeit der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf symbolischer Ebene: Auf dieser Ebene konnten *nur zwei Studierende* eine adäquate Verbindung zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ herstellen, obwohl eine solche Verbindung in der Mathematikvorlesung über die Definition der Ableitung und die daraus resultierende Approximation $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ vorgeführt wurde.

Bei den 6 Probanden, denen das nicht gelang, wurden folgende Probleme sichtbar:

1. Keine Kenntnis der Definition der Ableitung
2. Probleme beim Verständnis der Definition der Ableitung
3. Konflikt zwischen $h \rightarrow 0$ und $h = 1$ beim Vergleich der Definition der Ableitung mit $K(x+1) - K(x)$
4. Schwierigkeiten beim Verständnis von Funktionsausdrücken

Diese Probleme 2.-4. konnten im Laufe des Interviews *nicht* überwunden werden.

Zusammenfassendes Kurzfazit der Analyse der Klausuraufgaben und der Interviewstudie: Insgesamt zeigen somit die Analysen der Klausuraufgaben und die Interviewstudie, dass zwar bei der Mehrheit der Studierenden die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um Einheit Bestandteil ihres *concept image* war. Allerdings haben viele der Studierenden die in der Mathematikvorlesung gelehrt Verbindung über lineare Approximation aus dem theoretischen Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 144 oder Schlussblatt) *auf konzeptueller Ebene* nicht verstanden. Bei der Herstellung dieser Verbindung gab es viele Schwierigkeiten, insbesondere bei der Herstellung der Verbindung *auf symbolischer Ebene* über die Definition der Ableitung und die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$.

9.1.5 Übergreifende Zusammenfassung der Ergebnisse

Die in der Dissertation ermittelten Ergebnisse lassen sich wie folgt kurz noch einmal zusammenfassen:

1. Studierende der Wirtschaftswissenschaften benötigen ein umfangreiches *concept image* zur Ableitung. Mit diesem müssen sie dann in der Ökonomie vorwiegend *qualitative* und *theoretische* Fragestellungen beantworten (dies war für mich sehr überraschend!). Wie ein solches *concept image* aussehen kann, wurde in einem theoretischen Modell auf Basis didaktischer Literatur und Ausführungen zur Ableitung in ökonomischen Lehrbüchern festgehalten (siehe Abbildung 144 oder Schlussblatt).
2. In der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler werden die dafür benötigten Inhalte auch praktisch vermittelt (zumindest in den in dieser Dissertation analysierten weit verbreiteten Lehrwerken der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (Dietz, 2012; Sydsæter u. Hammond, 2015; Tietze, 2010)). Allerdings scheint die Behandlung der Technik des Ableitens in den mathematischen Lehrbüchern mit allen möglichen Ableitungsregeln etwas umfangreich, denn in den betrachteten *ökonomischen Lehrwerken* müssen lediglich einfache Funktionen wie Polynomfunktionen abgeleitet werden. Die ökonomische Interpretation der Ableitung wird hingegen in den mathematischen Lehrbüchern teilweise nur kurz behandelt, was in Anbetracht der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Heterogenität im Umgang mit der Ableitung in der Ökonomie, teils mit Widersprüchen, problematisch erscheint. Überhaupt scheint der Fokus in der Mathematikausbildung sehr auf dem Einüben von Prozeduren mit konkreten Funktionen zu liegen (zumindest suggerierten dies die Aufgaben in den untersuchten mathematischen Lehrwerken).
3. Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften bringen nicht immer ein adäquates Vorwissen in Bezug auf das Ableitungskonzept mit, um die in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelten Inhalte zur Ableitung verstehen zu können. Teilweise liegen hier Lücken zu Inhalten vor, die in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler nicht oder nur sehr kurz behandelt werden. Dazu gehören insbesondere das Konzept der Steigung einer linearen Funktion und deren Deutung im Kontext sowie das Konzept des Differenzenquotienten. Auch die formale Definition der Ableitung scheint bei den Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften aus der Schule nicht mehr präsent zu sein. Ebenso haben viele von ihnen bereits Probleme beim Ableiten einfacher Funktionen.
4. Aber auch nach ihrer mathematischen Lehrveranstaltung verfügen Studierende der Wirtschaftswissenschaften nicht immer ein adäquates *concept image* zur Ableitung (siehe Abbildung 144), selbst wenn ein solches dort vermittelt wurde. Dies wurde in einer entsprechenden Lehrveranstaltung an der Universität Paderborn in Bezug auf die ökonomische Interpretation der Ableitung gezeigt. Zwar konnte *die Mehrheit der Studierenden* in der Abschlussklausur des Kurses die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung einer Gewinnfunktion als Zusatzgewinn bei Erhöhung von x um eine oder eine marginale Einheit nennen. Bei *etwa der Hälfte davon* hatten die Formulierungen aber aus mathematischer Sicht Mängel. Auch konnten nur *etwa ein Viertel der Studierenden* begründen, weshalb $K'(5) \cdot 2$ im Allgemeinen nur eine

Approximation der Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion von 5 um zwei Einheiten angibt. Das deutet darauf hin, dass viele Studierende den in der Vorlesung vermittelten Zusammenhang zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit über lineare Approximation *auf konzeptueller Ebene* nicht verstanden haben. Stattdessen identifizierten viele vermutlich einfach die Ableitung mit dieser Interpretation wie die Hälfte der Probanden in der Interviewstudie.

In Letzterer wurden außerdem zahlreiche Probleme bei der Herstellung einer Verbindung zwischen $K'(x)$ und der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer und symbolischer Ebene sichtbar. Hier sind insbesondere folgende Probleme hervorzuheben:

- Keine Assoziation der Tangente bei der geometrischen Deutung der Ableitung als Steigung (Hauptproblem auf graphischer Ebene)
- Keine Kenntnis der formalen Definition der Ableitung und kein Verständnis ihrer Bestandteile sowie der Definition als Ganzes (Hauptproblem auf symbolischer Ebene)

Im folgenden Kapitel werden nun mögliche Konsequenzen für die Lehre aus all diesen Problemen abgeleitet, mit denen man den Aufbau eines adäquaten *concept image* zur Ableitung, das mathematisch akzeptabel ist und gleichzeitig die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in ökonomischen Kontexten mitberücksichtigt (wie zum Beispiel im theoretischen Modell in Abbildung 144), fördern kann.

9.2 Mögliche Konsequenzen der Ergebnisse für die Lehre

Wie im letzten Kapitel gesagt, zeigen die Studien der Dissertation am Beispiel der Studierenden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn, dass viele Studierende nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung kein adäquates *concept image* zur Ableitung hatten, obwohl ein solches in ihrer mathematischen Lehrveranstaltung vermittelt wurde.

Dabei wurden zahlreiche Schwierigkeiten und Probleme deutlich, deren Adressierung zu einem besseren Verständnis der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation führen können. Aus denen sollen nun mögliche Konsequenzen für die Lehre abgeleitet werden. Dabei werden die vielen Schwierigkeiten der Übersicht halber in *vier verschiedene Problemfelder* zusammengefasst:

Problemfeld 1 – Mangelndes Vorwissen der Studierenden für ein adäquates Verständnis der Ableitung als mathematisches Konzept: Der im Rahmen dieser Dissertation bei Studienanfängern der Universität Paderborn eingesetzte Vortest zeigte, dass Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften teilweise kein ausreichendes Vorverständnis der Ableitung als mathematisches Konzept zu Studienbeginn haben. Einige Aspekte des theoretischen Modells für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Abbildung 144 oder Schlussblatt), die eigentlich Gegenstand des Schulstoffs sind, waren nicht Bestandteil der *concept images* der Studierenden bzw. fehlerhaft enthalten. Hierbei traten bei folgenden Aspekten Schwierigkeiten auf (siehe auch Kapitel 9.1.3):

1. bei Deutung von Steigungen linearer Funktionen im Kontext
2. bei Deutung von Differenzenquotienten
3. bei der geometrischen Deutung der Ableitung, wenn der gesamte Funktionsverlauf betrachtet werden musste und bei der Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate im Zusammenhang mit kovariationalem Argumentieren
4. bei der Definition der Ableitung (keine Kenntnis einer Definition der Ableitung, siehe Tabelle 148)

Insbesondere die Schwierigkeiten bei den ersten beiden Aspekten sind problematisch, da diese Aspekte gegenwärtig in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler kaum behandelt werden (zumindest in den hier analysierten Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, siehe Kapitel 9.1.3).

Konsequenzen für die Lehre: Man könnte (und sollte) diese Lücken im Vorwissen in der Lehrveranstaltung adressieren. Mögliche Maßnahmen wären die Folgenden:

Zu 1: Man sollte das Konzept der Steigung einer linearen Funktion explizit behandeln und nicht voraussetzen. Dabei sollte insbesondere der Unterschied zwischen einer Steigung und einer absoluten Änderung hervorgehoben werden, damit später die Ableitung als Änderungsrate von absoluten Änderungen abgegrenzt werden kann. Hierbei könnte man zunächst mit Bewegungskontexten beginnen, in denen die Deutung einer Steigung als Änderungsrate in Form der Geschwindigkeit leicht zugänglich ist, und dann die gewonnen Erkenntnis zur Deutung von Steigungen als Änderungsrate auf ökonomische Kontexte übertragen.

Insbesondere sollten auch Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \neq 1$ interpretiert werden, da dies bekanntlich besonders schwer fällt (siehe Kapitel 4.1.1), aber für ein Verständnis von Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h < 1$ wesentlich sind.

Zu 2. Man sollte auch das Konzept des Differenzenquotienten und dessen Deutung als mittlere Änderungsrate explizit behandeln und ihn nicht als „Durchgangstation zur Ableitung“ übergehen. Denn ein Verständnis des Differenzenquotienten ist wichtig für ein Verständnis der Interpretation der Ableitung als lokale Änderungsrate (auch um sie später im Kostenkontext von absoluten Zusatzkosten abgrenzen zu können).

Zu 3. Zur Förderung des Verständnisses der geometrischen Deutung der Ableitung könnte man Übungsaufgaben zur Beschreibung des Verlaufs von graphisch gegebenen Funktionen mit Hilfe der Ableitung stellen, z.B. Aufgaben zur Beschreibung der Beziehung zwischen einer Funktion, ihrer Grenzfunktion und ihrer Durchschnittsfunktion in einem Mehrphasendiagramm (genau solche Diagramme müssen Studierende der Ökonomie auch verstehen können, siehe Kapitel 5.5.2). Zur Förderung der Fähigkeit zur Deutung der Ableitung in Kontexten könnte man Aufgaben zur Konstruktion von Graphen aus Kontexten stellen: Laut Carlson u. a. (2002, S.374)) eignen sich dafür besonders dynamische Vorgänge, da hier der für die Konstruktion der Graphen notwendige Kovariationsaspekt von Funktionen erlebbar gemacht werden kann.

Zu 4. Die formale Definition der Ableitung sollte neu eingeführt werden. Dabei sollte insbesondere die Verbindung zu den anderen Repräsentationen der Ableitung hergestellt werden (verbal, graphisch, eventuell physikalisch, siehe Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung von Zandieh (2000) in Kapitel 3.2.1, Tabelle 4). Dies ist wichtig, damit die Studierenden die formale Definition der Ableitung in ihr restliches *concept image* tatsächlich integrieren (in Form einer *personal concept definition*), und sie dann später auch abrufen bzw. aus des Rest ihres *concept images* rekonstruieren können.

Problemfeld 2 – Zu kurze Behandlung der ökonomischen Interpretation der Ableitung in der mathematischen Lehrveranstaltung: Die im Rahmen dieser Dissertation durchgeführten Analysen verbreiteter Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler sprechen dafür, dass die ökonomische Deutung der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler teilweise recht kurz behandelt wird, zumindest wenn in den Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wie in den untersuchten Lehrbüchern vorgegangen wird (Zusammenfassung der Ergebnisse siehe Kapitel 9.1.2). In Letzteren wird viel Wert auf das Ableiten komplizierter Funktionen gelegt, obwohl in den untersuchten ökonomischen Lehrbüchern nur einfache Funktionen wie Polynome abgeleitet werden müssen. Der Vortest zeigte gleichzeitig, dass die Studienanfänger aber aus der Schule weder die in der Ökonomie übliche Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit kennen noch über das für deren Verständnis nötige Hintergrundwissen verfügen (Definition der Ableitung, Behandlung der Ableitung in Zusammenhang mit linearer Approximation, siehe Tabelle 148).

Konsequenz für die Lehre: Die ökonomische Deutung der Ableitung und ihre Rechtfertigung über die Idee der lokalen linearen Approximation (sowie die Definition der Ableitung) sollten *ausführlich* behandelt werden (und nicht bloß sehr kurz wie z.B. in Sydsæter u. Hammond (2015, S.208-209)). Dabei sollten insbesondere auch die Unterschiede zwischen der Ableitung und der in der Ökonomie üblichen Interpretation der Ableitung als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit, sowie die Modellannahme, dass bei dieser Interpretation eine Einheit in dem entsprechenden Kontext als klein angenommen wird, thematisiert werden. Im Gegenzug könnte man bei der Technik des Ableitens Zeit sparen. Dennoch sollte zumindest das Ableiten einfacher Funktionen auch geübt werden, denn auch hier haben Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften Probleme, wie der Vortest zeigte (siehe Kapitel 9.1.3).

Problemfeld 3 – Zu geringe aktive Auseinandersetzung der Studierenden mit dem Konzept der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation: Die im Rahmen der Dissertation durchgeführte Interviewstudie zeigte am Beispiel der Grenzkosten, dass die Mehrheit der Interviewten sich mit der dort untersuchten Fragestellung, ob die Ableitung $K'(x)$ genau den Zusatzkosten der nächsten Einheit entspricht, anscheinend zum ersten Mal beschäftigt hat, obwohl dieses Problem in ihrer Mathematikvorlesung thematisiert wurde. Offenbar haben diese Studierenden sich vorher in der Lehrveranstaltung nicht aktiv mit dieser Problematik auseinandergesetzt. Eine Ursache könnte sein, dass in der Mathematikvorlesung der Interviewten die gelehrt Interpretationen der Ableitung $K'(x)$ (als Wert, der die *ungefähren* Zusatz-

kosten der nächsten Einheit angibt oder die exakten Zusatzkosten bei Erhöhung der Produktion um eine *marginale* Einheit angibt) „straightforward“ aus der Definition der Ableitung über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ hergeleitet wurden (siehe Kapitel 7.2.2). Da viele Studierende dann vielleicht das Gefühl hatten, das schon „im Groben“ verstanden zu haben, haben sie sich eventuell nicht mehr gründlich mit der ökonomischen Deutung der Ableitung im Rahmen der Vorlesungsnachbereitung beschäftigt (wenn sie diese überhaupt nachbereitet haben).

Konsequenz für die Lehre: Man könnte die Studierenden direkt mit der ökonomischen Praxis im Umgang mit der Ableitung und der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit konfrontieren, um wie in der Interviewstudie kognitive Konflikte zu erzeugen, die eine intensive Beschäftigung mit der ökonomischen Interpretation der Ableitung motivieren könnten. Hier könnte man die Studierenden direkt mit der provokanten Aussage

„Die Grenzkosten $K'(x)$ geben die Kosten der nächsten Einheit an.“,

wie sie in ähnlicher Form in einigen ökonomischen Lehrbüchern zu finden ist (Wöhe u. Döring, 2013, S.300), konfrontieren. Anschließend könnten die Studierenden dazu aufgefordert werden (zum Beispiel in einer Übungsaufgabe oder in einer Präsenzübung), auf Basis ihres in der Mathematikvorlesung vermittelten Wissens zum Ableitungskonzept zu beurteilen, ob diese Aussage wörtlich genommen korrekt ist. Dann könnte man die Unterschiede herausarbeiten und schließlich die Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ herstellen.

Problemfeld 4 – Schwierigkeiten auf mathematischer Ebene bei der Herstellung einer Verbindung zwischen der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation: In der Interviewstudie tauchten einige Schwierigkeiten rein auf mathematischer Ebene auf, wenn die Studierenden versuchten, eine Verbindung zwischen der Ableitung $K'(x)$ und deren in der Ökonomie üblicher Interpretation als Zusatzkosten der nächsten Einheit auf graphischer Ebene über die Tangente oder auf symbolischer Ebene über die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ herzustellen (Zusammenfassung der Ergebnisse siehe Kapitel 9.1.4):

- S1. Zwar kannten viele Studierende die geometrische Deutung der Ableitung als Steigung, jedoch assoziierten sie damit nicht die Tangente, sodass sie den Wert von $K'(x)$ nicht graphisch bestimmen und mit der Differenz $K(x+1) - K(x)$ auf graphischer Ebene in Verbindung bringen konnten.
- S2. Viele Studierende kannten die formale Definition der Ableitung nicht, und konnten sie auch nicht aus ihrem *concept image* zur Ableitung rekonstruieren, sodass sie auf symbolischer Ebene keine Verbindung zwischen $K'(x)$ und den Zusatzkosten $K(x+1) - K(x)$ herstellen konnten.
- S3. Studierende, die das Konzept der *marginalen* Einheit verwendeten um die Ableitung $K'(x)$ und den Zusatzkosten der nächsten Einheit abzugrenzen, konnten nicht klar sagen, was das ist (in der Vorlesung wurde der Begriff auch nicht klar definiert, siehe Kapitel 7.2.2)

Konsequenzen für die Lehre:

- Zu S1: Zur Verankerung der Verknüpfung der Vorstellung der Ableitung als Steigung mit der Tangente könnte man Aufgaben zur graphischen Bestimmung der Ableitung stellen, in denen die Tangente verwendet werden muss. Außerdem sollte man als Lehrperson bei Verwendung der geometrischen Deutung als Steigung stets den Bezug zur Tangente herstellen (z.B. in Skizzen, aber auch bei verbalen Formulierungen). Zusätzlich könnte man den Begriff der Steigung in einem Punkt direkt als Steigung der Tangente definieren, damit der Begriff der „Steigung in einem Punkt“ per Definition eng mit der Tangente verknüpft wird.
- Zu S2: Die formale Definition der Ableitung sollte nicht nur einmal in der Vorlesung hergeleitet werden, sondern es sollte in der gesamten Lehrveranstaltung weiterhin mit ihr gearbeitet werden (inklusive Übungen), damit die Studierenden sie echt in ihr *concept image* zur Ableitung integrieren (in Form einer *personal concept definition*). Dabei sollte möglichst oft in Erinnerung gerufen werden, welche Bedeutung die Bestandteile der Definition (Variable h , Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und das Resultat nach der Grenzwertbildung) haben.
- Zu S3: Der Begriff der *marginalen Einheit*, der für Studierende eine Hilfe sein kann um die Grenzkosten als Ableitung von den Zusatzkosten der nächsten Einheit abzugrenzen (siehe Zusammenfassung der Ergebnisse der Interviewstudie in Kapitel 8.6), sollte in der Vorlesung klar definiert werden, damit die Studierenden hier eine gemeinsame Wissensbasis haben. Da es *unendlich kleine Größen* in der Standardanalysis nicht gibt, sei hier eine Definition des Begriffs passend zu dessen Verwendung wie in einigen Ökonomiebüchern vorgeschlagen (z.B. (Reiß, 2007, S.197)): nämlich als im Kontext so kleine Einheit, dass man den Approximationsfehler zwischen $K'(x)$ und $K(x+1) - K(x)$ vernachlässigen kann.

Die hier genannten Konsequenzen sind nicht als Vorschriften, sondern eher als mögliche Anregungen für Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler gemeint, wenn deren Ziel das Erreichen eines adäquaten Verständnisses der Ableitung (ähnlich wie im Modell in Abbildung 144 bzw. auf dem Schlussblatt) ist. In Anbetracht der Tatsache, dass in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler generell ein großer Zeitmangel herrscht, können Lehrende dann hier gemäß ihrer eigenen Kursziele und ihrer gegenwärtigen Kursgestaltung aus diesen Vorschlägen für sie passende auswählen.

9.3 Beitrag der Arbeit für die didaktische Forschung und Ausblick auf weitere mögliche Forschungsaktivitäten

9.3.1 Beitrag der Arbeit zur mathematikdidaktischen Forschung

Der Ableitungsbegriff ist eines der wichtigen Konzepte mit dem Studierende in mathematischen Lehrveranstaltungen an einer Universität im ersten Studienjahr konfrontiert werden. Dementsprechend gibt es zum Verständnis dieses Konzepts und auftretenden Verständnisschwierigkeiten schon seit langer Zeit umfangreiche Forschungen, die ausführlich in den Kapiteln 3 und 4 dargestellt wurden (z.B. (Orton, 1983; McDermott u. a., 1987; Nemirovsky u. Rubin, 1992; Beichner, 1994; Vom Hofe, 1998; Zandieh,

2000; Friedrich, 2001; Carlson u. a., 2002; Hähkiöniemi, 2006; Bingolbali u. Monaghan, 2008; Hoffkamp, 2011; Greefrath u. a., 2016; Park, 2016)).

Allerdings gibt es bisher keine Forschung zum Verständnis dieses Begriffs bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften. Diese sind aber zahlenmäßig eine sehr große und damit relevante Gruppe, die mit dem Ableitungskonzept konfrontiert werden. Die Ergebnisse der Arbeit liefern hier einen „ersten Rundumschlag“ zu verschiedenen Facetten von „Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“, die aus Sicht der Grundlagenforschung wichtig sind und im Folgenden noch einmal kurz zusammengefasst werden:

1. Zur theoretischen Beschreibung *eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* wurde zunächst ein theoretisches Rahmenmodell entwickelt (siehe Abbildung 144 oder Schlussblatt). Dieses beschreibt auf Basis des Modells zum Verständnis der Ableitung von Zandieh (2000, S.106) ein mögliches adäquates *concept image* zur Ableitung, welches mathematisch valide ist, aber auch die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt. Dieses Rahmenmodell kann sowohl für Forschungen zum gegenwärtigen Ist-Stand des gelehrten und des bei Studierenden vorhandenen Verständnisses der Ableitung dienen (wie in dieser Dissertation). Es kann aber auch als Strukturierungsgrundlage für Planungen zur Behandlung der Ableitung in einer mathematischen Lehrveranstaltung genutzt werden.
2. In Bezug auf das *bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften tatsächlich vorhandene Verständnis* der Ableitung hat die Arbeit gezeigt, dass viele Schwierigkeiten beim Verständnis des mathematischen Konzepts der Ableitung, die in anderen Studien mit anderen Studiengruppen gezeigt wurden, auch bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften auftreten. Beispiele hierfür sind (1) Schwierigkeiten bei der geometrischen Deutung der Ableitung und die slope/height-confusion, wenn der gesamte Verlauf von Funktionen betrachtet werden muss (Beichner, 1994), (2) Schwierigkeiten bei der Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate im Zusammenhang mit Problemen, die kovariationales Argumentieren erfordern (Carlson u. a., 2002) oder (3) Schwierigkeiten bei der Deutung von Steigungen linearer Funktion als Änderungsrate und bei der Deutung von Differenzenquotienten (Carlson u. a., 2010; Malle, 2003; Byerley u. a., 2016).

Außerdem haben Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften auch noch Schwierigkeiten beim Ableiten einfacher Funktionen (abseits von Polynomfunktionen, siehe Tabelle 65).

3. Zusätzlich wurde noch die *besondere Schwierigkeit bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften herausgearbeitet*, eine Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und der in der Ökonomie üblichen Interpretation als Zuwachs der Funktion bei Erhöhung von x um eine Einheit herzustellen (siehe Kapitel 3.3). Hierbei wurde in der Arbeit gezeigt, dass zwar bei der Mehrheit der Studierenden diese ökonomische Interpretation Bestandteil ihres *concept image* zur Ableitung war, viele aber keine auf konzeptueller Ebene verstandene Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation über die Approximationsformel $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ und die dahinter liegende Idee der lokalen linearen Approximation schlagen konnten, obwohl eine

solche in der Mathematikvorlesung gelehrt wurde. Hierbei wurden verschiedenste Schwierigkeiten identifiziert. Diese Probleme beim Herstellen der eben genannten Verbindung sind für die Studiengruppe der Studierenden der Wirtschaftswissenschaften spezifisch und erweitern somit die bis dato bekannten Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung.

4. Die ermittelten Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften mündeten schließlich in zahlreichen möglichen Konsequenzen für die Lehre zur Unterstützung der Studierenden beim Erwerb eines adäquaten Verständnisses der Ableitung, das die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt.

Mit dem letztgenannten Punkt (und dem theoretischen Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung) leistet die Arbeit damit auch einen Beitrag für eine praktisch orientierte didaktische Forschung zur Verbesserung der Lehre in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.

9.3.2 Ausblick auf weitere mögliche Forschung

Da die Ergebnisse dieser Arbeit eine Art „ersten Rundumschlag“ zu verschiedenen Fragen bezüglich des Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler liefern, bieten sich grundsätzlich zwei Richtungen für weitere Forschungsaktivitäten an:

1. Erweiterung der hier gewonnenen Erkenntnisse zu den in dieser Dissertation gestellten Forschungsfragen zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (siehe Beginn des Fazitkapitels)
2. Weiterführende Forschung zur Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und darauf aufbauenden mathematischen Konzepten auf Basis der Ergebnisse der Dissertation

Mögliche Forschung für eine Erweiterung der hier gewonnenen Erkenntnisse zum Verständnis der Ableitung auf Basis der hier gestellten Forschungsfragen: Diese Arbeit hat sowohl durch die Wahl der theoretischen Perspektive auf das Verständnis der Ableitung als auch in empirischer Sicht klare Grenzen. Eine Überwindung dieser Grenzen könnte zu einer Erweiterung der in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zum Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler führen, was im Folgenden an drei Beispielen beschrieben wird:

1. Die hier gewählte theoretische Perspektive des *concept image* von Tall u. Vinner (1981) war insofern eine Beschränkung, als dass sie eine rein mathematisch-kognitive Perspektive auf das Verständnis der Ableitung ist. Soziale und institutionelle Einflüsse auf das Verständnis der Ableitung werden in der Perspektive nicht explizit berücksichtigt. Nun kann es aber beispielsweise sein, dass Studierende in ökonomischen Lehrveranstaltungen auf ein ganz anderes Verständnis der Ableitung zurückgreifen als in einer Lehrveranstaltung der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Dies wäre in der hier gewählten Perspektive, in der von *dem concept*

image der Ableitung gesprochen wird, nicht bemerkt worden. Vielleicht würde ein *adäquates* Verständnis der Ableitung aus rein ökonomischer Perspektive auch anders aussehen als im hier entwickelten Rahmenmodell aus Abbildung 144 (siehe auch Schlussblatt). Mit einer Wahl einer theoretischen Perspektive mit institutionellem Fokus wie die anthropologische Theorie der Didaktik (Bosch u. Gascón, 2014) könnte man sicher die hier gewonnenen Erkenntnisse zum Verständnis der Ableitung unter Berücksichtigung institutioneller Einflüsse sinnvoll erweitern.

2. Bei der Untersuchung des in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelten und in der Ökonomie vorausgesetzten Verständnisses mittels Lehrbuchanalysen war die Datenbasis begrenzt. So bilden Lehrbücher sicher nicht 1:1 Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler oder ökonomische Lehrveranstaltungen ab. So ließ sich beispielsweise die Überbetonung der Technik des Ableitens im Lehrbuch von Dietz (2012) in dem hier untersuchten Kurs „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ des Autors an der Universität Paderborn nicht finden. Eine breitere Datenbasis, zum Beispiel mit Experteninterviews (Dozenten von Lehrveranstaltungen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler und von ökonomischen Lehrveranstaltungen), könnte ebenfalls die durch in diese Arbeit gewonnenen Erkenntnisse sinnvoll erweitern.
3. Auch bei der Untersuchung des bei den Studierenden der Wirtschaftswissenschaften vor und nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung vorhandenen Verständnisses der Ableitung war die Datenbasis begrenzt. Dieses wurde *exemplarisch* an der Universität Paderborn im Kurs „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“ (im Zeitraum 2015-2016) untersucht. Dieser Kurs kann zwar in Bezug auf die behandelten Inhalte zur Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation (mit Ausnahme der Verwendung des Begriffs der *marginalen Einheit*) als typisch angesehen werden (siehe Kapitel 7.2.2), ist aber eben *nur ein Kurs*. Auch hier wäre eine breitere Datenbasis wünschenswert, zum Beispiel durch eine Durchführung des hier entwickelten Vortests oder der Interviewstudie mit Studierenden der Wirtschaftswissenschaften an anderen Universitäten.

Weiterführende Forschung, die auf den Ergebnissen der Dissertation aufbaut:

Hier wären verschiedene Anknüpfungspunkte möglich:

1. Ein erster Anknüpfungspunkt ist das nicht so erfreuliche Ergebnis der Dissertation zum Verständnis der ökonomischen Interpretation der Ableitung nach deren Behandlung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Die Mehrheit der an der Universität Paderborn untersuchten Studierenden hat diese trotz ihrer Herleitung in der Mathevorlesung nicht verstanden, das heißt sie konnten keine adäquate Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation über lineare Approximation herstellen. Hier könnte man auf Basis der in dieser Forschung ermittelten Schwierigkeiten bei der Herstellung dieser Verbindung nun ein Szenario zur Gestaltung der Lehre entwerfen, nach dem mehr Studierende die ökonomische Interpretation der Ableitung tatsächlich mathematisch adäquat in ihr *concept image* zur Ableitung integriert haben.

2. Einen zweiten unmittelbaren Anknüpfungspunkt bietet der Begriff der *marginalen* Einheit, welchen von den hier untersuchten Studierenden in einer Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung 39.2% nutzten (siehe Tabelle 134). Die beiden Probanden im Interview, die ihn bewusst zur Abgrenzung der Grenzkosten als Ableitung gegenüber den Zusatzkosten der nächsten Einheit verwendeten, konnten aber nicht genau sagen, was eine marginale Einheit ist. In der Vorlesung wurde der Begriff auch nicht exakt definiert, sondern als Sprechweise für fiktive unendlich kleine Größen dK und dx in der Beziehung $dK = K'(x)dx$ eingeführt (siehe Kapitel 7.2.2). Hier wäre es interessant zu erfahren, was die Studierenden unter einer marginalen Einheit genau verstehen. Folgende Varianten wären zum Beispiel möglich:

- als unendlich kleine Größe wie in der Mathevorlesung der Universität Paderborn (was auch immer das sein soll)
- als Sprechweise für eine Einheit (wie bei der Probandin Vanessa der Interviewstudie, siehe Kapitel 8.4.6)
- als eine sehr kleine, aber endliche Größe (wie bei der Probandin Lisa der Interviewstudie, siehe Kapitel 8.4.8)
- als *eine* Einheit, die jedoch im Kontext sehr klein ist (zum Beispiel 1mm^3 , wenn eine Wassermenge in m^3 gemessen wird, siehe Reiß (2007, S.197))

Es stellt sich dann natürlich die Frage, ob die Interpretation der Ableitung $K'(x)$ als (exakte) Zusatzkosten für die nächste marginale Einheit oder pro marginaler Einheit bei den jeweils verwendeten Auffassungen noch adäquat ist.

3. Außerdem bieten die Ergebnisse der Arbeit Anknüpfungspunkte für Forschung zum Verständnis mathematischer Konzepte in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, die auf der Ableitung aufbauen. Dazu gehören insbesondere:
- das Konzept der Differentials
 - das Konzept der Elastizität
 - die Ableitung bei Funktionen mehrerer Variablen

Es bleibt zu hoffen, dass einige dieser Ideen zukünftig aufgegriffen werden und an die hier dargestellte Forschung zum Verständnis des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler angeschlossen wird.

Literaturverzeichnis

- [Adam 1980] ADAM, Dietrich: *Produktionspolitik*. 3.Auflage. Springer, 1980
- [Asiala u. a. 1996] ASIALA, Mark ; BROWN, Anne ; DEVRIES, David J. ; DUBINSKY, Ed ; MATHEWS, David ; THOMAS, Karen: A Framework fo Research and Curriculum Design in Undergraduate Mathematics Education. In: KAPUT, Jim (Hrsg.) ; SCHOENFELD, Alan H. (Hrsg.) ; DUBINSKY, Ed (Hrsg.): *Research in Collegiate Mathematics Education. II. Issues in Mathematics Education* Bd. 6. Providence,RI: American Mathematical Society, 1996, S. 1–32
- [Asiala u. a. 1997a] ASIALA, Mark ; COTTRILL, Jim ; DUBINSKY, Ed ; SCHWINGENDORF, Keith E.: The development of students' graphical understanding of the derivative. In: *The Journal of Mathematical Behavior* 16 (1997), Nr. 4, S. 399–431
- [Asiala u. a. 1997b] ASIALA, Mark ; DUBINSKY, Ed ; MATHEWS, David M. ; MORICS, Steven ; OKTAC, Asuman: Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. In: *The Journal of Mathematical Behavior* 16 (1997), Nr. 3, S. 241–309
- [Aspinwall u. a. 1997] ASPINWALL, Leslie ; SHAW, Kenneth L. ; PRESMEG, Norma C.: Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between A Function And Its Derivative. In: *Educational Studies in Mathematics* 33 (1997), Nr. 3, S. 301–317
- [Baßeler u. a. 1991] BASSELER, Ullrich ; HEINRICH, Jürgen ; UTECHT, Burkhard: *Grundlagen und Probleme der Volkswirtschaft*. Bachem, 1991
- [Beckenbach u. a. 2016] BECKENBACH, Franz ; MARIA, Daskalakis ; HOFMANN, David: *Zur Pluralität der volkswirtschaftlichen Lehre in Deutschland*. 1.Auflage. Metropolis-Verlag, 2016
- [Beichner 1994] BEICHNER, Robert J.: Testing student interpretation of kinematics graphs. In: *American Journal of Physics* 62 (1994), Nr. 8, S. 750–762
- [Bell u. Janvier 1981] BELL, Alan ; JANVIER, Claude: The interpretation of graphs representing situations. In: *For the learning of mathematics* 2 (1981), Nr. 1, S. 34–42
- [Bigalke u. a. 2011] BIGALKE, Anton ; KÖHLER, Norbert ; GABRIELE, Ledworuski ; KUSCHNEROW, Horst: *Mathematik Gymnasiale Oberstufe – Nordrhein Westfalen, Einführungsphase*. Coenelsen, 2011
- [Bigalke u. a. 2014] BIGALKE, Anton ; KÖHLER, Norbert ; LEDWORUSKI, Gabriele ; KUSCHNEROW: *Bigalke/Köhler Mathematik - Nordrhein-Westfalen, Einführungsphase*. 1. Cornelsen, 2014
- [Bingolbali u. Monaghan 2008] BINGOLBALI, Erhan ; MONAGHAN, John: Concept image revisited. In: *Educational Studies in Mathematics* 68 (2008), Nr. 1, S. 19–35

- [Biza 2007] BIZA, Irene: Is the tangent line tangible? Students' intuitive ideas about tangent lines. In: KÜCHEMANN, Dietmar (Hrsg.) ; British Society for Research into Learning Mathematics (Veranst.): *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into the Learning of Mathematics* Bd. 27 British Society for Research into Learning Mathematics, 2007, S. 6–11
- [Blum u. Kirsch 1979] BLUM, Werner ; KIRSCH, Arnold: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: *Der Mathematikunterricht* 3 (1979), S. 6–24
- [Bohnsack 2014] BOHNSACK, Ralf: *Rekonstruktive Sozialforschung – Einführung in Methodologie und Praxis qualitativer Forschung*. 9.Auflage. Springer, 2014
- [Bosch u. Gascón 2014] BOSCH, Marianna ; GASCÓN, Josep: Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: BIKNER-AHSBAHS, Angelika (Hrsg.) ; PREDIGER, Susanne (Hrsg.): *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer, 2014, Kapitel 5, S. 67–83
- [Breidenbach u. a. 1992] BREIDENBACH, Daniel ; DUBINSKY, Ed ; HAWKS, Julie ; NICHOLS, Devilyna: Development of the process conception of function. In: *Educational Studies in Mathematics* 23 (1992), Nr. 3, S. 247–285
- [Breyer 2015] BREYER, Friedrich: *Mikroökonomik*. 6.Auflage. Springer, 2015
- [Bruner 1980] BRUNER, Jerome S.: *Der Prozess der Erziehung*. 5.Auflage. Berlin-Verlag, 1980
- [Byerley u. a. 2016] BYERLEY, Cameron ; YOON, Hyunkyoung ; THOMPSON, Patrick W.: Limitations of a „chunky“ meaning for slope. In: FUKAWA-CONNELLY, Tim (Hrsg.) ; INFANTE, Nicole E. (Hrsg.) ; WAWRO, Megan (Hrsg.) ; BROWN, Stacy (Hrsg.): *Proceedings of the 19th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Pittsburgh, 2016, S. 596–604
- [Bühner u. Ziegler 2009] BÜHNER, Markus ; ZIEGLER, Matthias: *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler*. 2.Auflage. Pearson, 2009
- [Carlson u. a. 2002] CARLSON, Marilyn ; JACOBS, Sally ; COE, Edward ; LARSEN, Sean ; HSU, Eric: Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 33 (2002), Nr. 5, S. 352–378
- [Carlson u. a. 2010] CARLSON, Marilyn ; OEHRMAN, Michael ; ENGELKE, Nicole: The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. In: *Cognition and Instruction* 28 (2010), Nr. 2, S. 113–145. – Testversion unter <https://mathed.asu.edu/instruments/PCA/index.shtml>, abgerufen am 28.9.2014
- [Çetin 2009a] ÇETIN, Nezahat: The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. In: *PRIMUS* 19 (2009), Nr. 3, S. 232–244

- [Çetin 2009b] ÇETIN, Nezahat: The performance of undergraduate students in the limit concept. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 40:3 (2009), S. 323–330
- [Christensen u. Thompson 2012] CHRISTENSEN, Warren M. ; THOMPSON, John R.: Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. In: *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 8 (2012), S. 023101–1 – 023101–5
- [Clement 1985] CLEMENT, John: Misconceptions in graphing. In: STREEFLAND, Leen (Hrsg.) ; Utrecht University Utrecht, The Netherlands (Veranst.): *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Bd. 1 Utrecht University Utrecht, The Netherlands, 1985, S. 369–375
- [Cornu 1991] CORNU, Bernard: Limits. In: TALL, David (Hrsg.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 1991, Kapitel 10, S. 153–166
- [Danckwerts u. Vogel 2010] DANCKWERTS, Rainer ; VOGEL, Dankwart: *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum Akademischer Verlag, 2010
- [Davis u. Vinner 1986] DAVIS, Robert B. ; VINNER, Shlomo: The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. In: *Journal of Mathematical Behaviour* 5 (1986), Nr. 3, S. 281–303
- [Dietz 2012] DIETZ, Hans M.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Das ECOMath-Handbuch*. Springer, 2012
- [Dietz 2016] DIETZ, Hans M.: CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. In: HOPPENBROCK, Axel (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; RÜCK, Hans-Georg (Hrsg.): *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze*. Springer, 2016, S. 131–147
- [Domschke u. Scholl 2008] DOMSCHKE, Wolfgang ; SCHOLL, Armin: *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre*. 4th. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008
- [Dubinsky 1991] DUBINSKY, Ed: Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, David (Hrsg.): *Advanced Mathematical Thinking*. Springer, 1991, S. 65–81
- [Dyckhoff 2002] DYCKHOFF, Harald: *Grundzüge der Produktionswirtschaft*. 4.Auflage. Springer, 2002
- [Däumler u. Grabe 2013] DÄUMLER, Klaus-Dieter ; GRABE, Jürgen: *Kostenrechnung* 1. 11.Auflage. NWB-Verlag, 2013
- [Döring u. Jürgen 2016] DÖRING, Nicola ; JÜRGEN, Bortz: *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. 5.Auflage. Springer, 2016
- [Epstein 2006] EPSTEIN, Jerome: The Calculus Concept Inventory. In: DEEDS, Donald (Hrsg.) ; CALLEN, Bruce (Hrsg.): *Proceedings of the National STEM Assessment Conference, Washington, D.C.*, 2006, S. 60–67

- [Fandel 2010] FANDEL, Günter: *Produktions- und Kostentheorie*. 8.Auflage. Springer, 2010
- [Friedrich 2001] FRIEDRICH, Hauke: Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwert. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 22 (2001), Nr. 3-4, S. 207–230
- [Giersemehl u. a. 2015] GIERSEMEHL, Inga ; JÖRGENS, Thomas ; GÜRGENSEN-ENGL, Thorsten ; RIEMER, Wolfgang ; RAPHAELA, Sonntag ; SPIELMANN, Heike: *Lambacher Schweizer Mathematik - Einführungsphase*. 1. Klett-Verlag, 2015
- [Gossen 1967] GOSSEN, Heinrich H.: *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, und der daraus fließenden Regeln für menschliches Handeln*. Reprint der Ausgabe Braunschweig 1854. Liberac Publishers, 1967
- [Götze 2010] GÖTZE, Uwe: *Kostenrechnung und Kostenmanagement*. 5.Auflage. Springer, 2010
- [Greefrath u. a. 2016] GREEFRATH, Gilbert ; OLDENBURG, Reinhard ; SILLER, Hans-Stefan ; ULM, V. ; WEIGAND, Hans-Georg: Aspects and “Grundvorstellungen” of the Concepts of Derivative and Integral. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37 (2016), Nr. 1, S. 99–129
- [Haeussler u. a. 2010] HAEUSSLER, Ernest F. ; PAUL, Richard S. ; WOOD, Richard W.: *Introductory Mathematical Analysis – for business, economics and life and social sciences*. 13.Auflage. Pearson-Verlag, 2010
- [Hähkiöniemi 2006] HÄHKIÖNIEMI, Markus: Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. In: *Journal of Mathematical Behaviour* 25 (2006), Nr. 2, S. 170–184
- [Hahn u. Prediger 2008] HAHN, Steffen ; PREDIGER, Susanne: Bestand und Änderung - Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 29 (2008), Nr. 3-4, S. 163–198
- [Heid 1988] HEID, M K.: Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. In: *Journal for research in mathematics education* (1988), S. 3–25
- [Henderson u. Quandt 1983] HENDERSON, James M. ; QUANDT, Richard E.: *Mikroökonomische Theorie*. 5.Auflage. F. Vahlen, 1983
- [Henrichsmeyer u. a. 1993] HENRICHSMEYER, Wilhelm ; GANS, Oskar ; EVERS, Ingo: *Einführung in die Volkswirtschaftslehre*. 10.Auflage. Eugen Ulmer Verlag, 1993
- [Hering u. a. 1999] HERING, Ekbert ; MARTIN, Rolf ; STOHRER, Martin: *Physik für Ingenieure*. 7.Auflage. Springer, 1999
- [Hiebert u. Carpenter 1992] HIEBERT, James ; CARPENTER, Thomas P.: Learning and teaching with understanding. In: GROUWS, Douglas A. (Hrsg.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. 1992, S. 65–97

- [Hoffkamp 2011] HOFFKAMP, Andrea: *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse*, Technische Universität Berlin, Dissertation, 2011
- [Hugh-Hallet 2010] HUGH-HALLET, Deborah: *Calculus: Single and multivariable*. 5th Ed. Wiley, 2010
- [Hughes-Hallett u. a. 1994] HUGHES-HALLETT, Deborah ; GLEASON, Andrew M. ; FLATH, Daniel E. ; GORDON, Sheldon P. ; LOMEN, David O. ; LOVELOCK, David ; MCCALLUM, William G. ; OSGOOD, Bra: *Calculus: single variable*. 1.Auflage. Wiley, 1994
- [Huttschenreuter 2015] HUTZSCHENREUTER, Thomas: *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. 6.Auflage. Springer, 2015
- [Janvier 1978] JANVIER, Claude: *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments*, University of Nottingham, Dissertation, 1978
- [Jörgens u. a. 2011] JÖRGENS, Thomas ; JÜRGENSEN-ENGL, Thorsten ; RIEMER, Wolfgang ; SONNTAG, Raphaela ; SPIELMANS, Heike ; SURREY, Inga: *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien, Einführungsphase, Nordrhein-Westfalen*. 1.Auflage. Klett-Verlag, 2011
- [Keller u. Russell 1997] KELLER, Brian A. ; RUSSELL, Chris A.: Effects of the TI-92 on Calculus Students Solving Symbolic Problems. In: *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 4 (1997), Nr. 1, S. 77–97
- [Kendal u. Stacey 2003] KENDAL, Margaret ; STACEY, Kaye: Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. In: *Mathematics Education Research Journal* 15 (2003), Nr. 1, S. 22–41
- [Kirsch 1979] KIRSCH, Arnold: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *Der Mathematikunterricht* 25 (1979), Nr. 3, S. 25–41
- [Knoche 1990] KNOCHE, Norbert: *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*. Bd. 13: *Modelle der empirischen Pädagogik*. Wissenschaftsverlag, 1990
- [KOM@ing 2014] KOM@ING: *Vortest an der Universität Paderborn vor dem Wintersemester 2014 aus dem Projekt KOM@ing*. 2014. – unveröffentlicht
- [Krauth 1995] KRAUTH, Joachim: *Testkonstruktion und Testtheorie*. Beltz, 1995
- [Krugman u. Wells 2010] KRUGMAN, Paul ; WELLS, Robin: *Wells, Krugman*. 1.Auflage. Schäffer-Poeschel Verlag, 2010
- [Krummheuer u. Naujok 1999] KRUMMHEUER, Götz ; NAUJOK, Natalie ; BOHNSACK, Ralf (Hrsg.) ; LÜDERS, Christian (Hrsg.) ; JO, Reichertz (Hrsg.): *Qualitative Sozialforschung*. Bd. 7: *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Springer, 1999

- [Königsberger 2004] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1*. 6.Auflage. Springer-Verlag, 2004
- [Leinhardt u. a. 1990] LEINHARDT, Gaea ; ORIT, Zaslavsky ; STEIN, Mary K.: Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. In: *Review of educational research* 60 (1990), Nr. 1, S. 1–64
- [Lergenmüller u. Günter 2011] LERGENMÜLLER, Arno ; GÜNTER, Schmidt: *Mathematik Neue Wege - Einführungsphase*. 2. Schroedel, 2011
- [Malle 2003] MALLE, Günther: Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. In: *Mathematik lehren* 118 (2003), S. 57–62
- [Marx 2013] MARX, Andreas: Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 34 (2013), Nr. 1, S. 73–97
- [Mas-Colell u. a. 1995] MAS-COLELL, Andreu ; WHINSTON, michael D. ; GREEN, Jerry R.: *Microeconomic Theory*. 1.Auflage. Oxford University Press, 1995
- [Mayring 2015] MAYRING, Philipp: *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. 12.Auflage. Beltz, 2015
- [McDermott u. a. 1987] MCDERMOTT, Lillian C. ; L., Rosenquist M. ; VAN ZEE, Emily H.: Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. In: *American Journal of Physics* 55 (1987), Nr. 6, S. 503–513
- [Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2013] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN: Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/ Gesamtschule Nordrhein-Westfalen. (2013). – <http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe/>, abgerufen am 18.11.2016
- [Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2016] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN: Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2016. (2016). – <https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentralabiturgost/faecher/fach.php?fach=2>, abgerufen am 20.11.2016
- [Mkhatshwa u. Doerr 2015] MKHATSHWA, Thembinkosi ; DOERR, Helen: Students' understanding of marginal change in the context of cost, revenue, and profit. In: KRAINER, Konrad (Hrsg.) ; VONDROVÁ, Naďa (Hrsg.): *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, S. 2201–2206
- [Monk 1994] MONK, George S.: Students' understanding of functions in calculus courses. In: *Humanistic Mathematics Network Journal* 1 (1994), Nr. 9, S. 7

- [Moore-Russo u. a. 2011] MOORE-RUSSO, D. ; CONNER, A.M. ; RUGG, Kristina I.: Can slope be negative in 3-space? Stuying concept image of slope through collective definition construction. In: *Educational Studies in Mathematics* 76 (2011), Nr. 1, S. 3–21
- [Nagle u. a. 2013] NAGLE, Courtney ; MOORE-RUSSO, Deborah ; VIGLIETTI, Janine ; MARTIN, Kristi: Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: A Comparison across Academic Levels. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 11 (2013), S. 1491–1515
- [Nemirovsky u. Rubin 1992] NEMIROVSKY, Ricardo ; RUBIN, Andee: Students' Tendency To Assume Resemblances between a Function and Its Derivative / TERC Communications, Cambridge. 1992 (2-92). – Forschungsbericht. – working paper
- [OECD 2009] OECD: PISA 2009. OECD publishing, 2009 (5-385). – Forschungsbericht. – Technical Report
- [Orton 1983] ORTON, A: Students' Understanding of Differentiation. In: *Educational Studies in Mathematics* 14 (1983), S. 235–250
- [Ossimitz 1991] OSSIMITZ, Günther: *Mathematik für Betriebswirte – Eine hochschuldidaktische Analyse*, Universität Klagenfurt, Dissertation, 1991
- [Ostsieker 2011] OSTSIEKER, Laura: *Gestaltung von Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs und ihre empirische Untersuchung*, Universität Paderborn, Dissertation, 2011
- [Paderborn 2013] PADERBORN, Universität: Studienverlaufsplan des Studiengangs Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn. (2013). – <https://wiwi.uni-paderborn.de/studium/orga/pruefungsordnung-studienplaene/>, abgerufen am 7.9.2018
- [Park 2015] PARK, Jungeun: Is the derivative a function? If so, how do we teach it? In: *Educational Studies in Mathematics* 89 (2015), Nr. 2, S. 233–250
- [Park 2016] PARK, Jungeun: Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. In: *Educational Studies in Mathematics* 91 (2016), Nr. 3, S. 395–421
- [Pindyck u. Rubinfeld 2013] PINDYCK, Robert S. ; RUBINFELD, Daniel L.: *Mikroökonomie*. 8.Auflage. Pearson Deutschland GmbH, 2013
- [Pinto u. Tall 1999] PINTO, Márcia M. ; TALL, David: Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In: ZASLAVSKY, Orit (Hrsg.): *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Bd. 4, 1999, S. 65–72
- [Planinic u. a. 2012] PLANINIC, Maja ; MILIN-SIPUS, Zeljka ; KATIC, Helena ; SUSAC, Ana ; IVANJEK, Lana: Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 10 (2012), Nr. 6, S. 1393–1414

- [Rasslan u. Tall 2002] RASSLAN, Shaker ; TALL, David: Definitions and images for the definite integral concept. In: COCKBURN, Elena Anne D. and N. Anne D. and Nardi (Hrsg.): *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Bd. 4, 2002, S. 89–96
- [Reiß 2007] REISS, Winfried: *Mikroökonomische Theorie*. 6. Auflage. Oldenbourg-Verlag, 2007
- [Repo 1994] REPO, Sisko: Understanding and reflective abstraction: Learning the concept of derivative in a computer environment. In: *International DERIVE Journal* 1 (1994), Nr. 1, S. 97–113
- [Roorda u. a. 2007] ROORDA, Gerrit ; VOS, Pauline ; GOEDHART, Martin: Derivatives in applications: How to describe students understanding. In: DURAND-GUERRIER, Viviane (Hrsg.) ; SOURY-LAVERGNE, Sophie (Hrsg.) ; ARZARELLO, Ferdinando (Hrsg.): *Proceedings of the WG on ‘Mathematical Modelling and Applications’ 5th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-5)*, 2007
- [Rösken u. Rolka 2007] RÖSKEN, Bettina ; ROLKA, Katrin: Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students’ learning of integral calculus. In: *The Montana Mathematics Enthusiast* 3 (2007), S. 181–204
- [Roundy u. a. 2015] ROUNDY, David ; DRAY, Tevian ; MANOGUE, Corinne A. ; WAGNER, Joseph F. ; WEBER, Eric: An extended theoretical framework for the concept of derivative. In: *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* Citeseer, 2015, S. 838–843
- [Ruffin u. Gregory 1990] RUFFIN, Roy J. ; GREGORY, Paul R.: *Principles of Economics*. 4. Auflage. Scott, Foresman, 1990
- [Schierenbeck u. Wöhle 2008] SCHIERENBECK, Henner ; WÖHLE, Claudia B.: *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. 17. Auflage. Oldenbourg-Verlag, 2008
- [Schlöglhofer 2000] SCHLÖGLHOFER, Franz: Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. In: *Mathematik lehren* 103 (2000), S. 16–17
- [Schoening u. Wulfert 2014] SCHOENING, Mirco ; WULFERT, Reinhard: Studienvorbereitungskurse „Mathematik“ an der Fachhochschule Brandenburg. In: BAUSCH, Isabell (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; BRUDER, Regina (Hrsg.) ; FISCHER, Pascal R. (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; KOEPF, Wolfram (Hrsg.) ; SCHREIBER, Stephan (Hrsg.) ; WASSONG, Thomas (Hrsg.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Springer, 2014, S. 213–229
- [Schroer 1995] SCHROER, Johannes: *Produktions- und Kostentheorie*. 6. Auflage. Oldenbourg-Verlag, 1995
- [Sfard 1991] SFARD, Anna: On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: *Educational Studies in Mathematics* 22 (1991), Nr. 1, S. 1–36

- [Steven 1998] STEVEN, Marion: *Produktionstheorie*. 1.Auflage. Gabler Verlag, 1998
- [Stewart 2010] STEWART, James: *Calculus*. 4th Ed. Cengage Learning, 2010
- [Stiglitz u. Walsh 2010] STIGLITZ, Joseph E. ; WALSH, Carl E.: *Mikroökonomie*. 4.Auflage. Oldenbourg-Verlag, 2010
- [Stroppe 2012] STROPPE, Heribert: *Physik für Natur- und Ingenieurwissenschaften*. 15.Auflage. Hanser, 2012
- [Stump 1999] STUMP, Sheryl: Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. In: *Mathematics Education Research Journal* 11 (1999), S. 124–144
- [Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland 2012] STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife. (2012). – <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>, abgerufen am 18.11.2016
- [Sydsæter u. Hammond 2015] SYDSÆTER, Knut ; HAMMOND, Peter J.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug*. 4. aktualisierte Auflage. Pearson Deutschland GmbH, 2015
- [Tall 1988] TALL, David: Concept Image and Concept Definition. In: *Senior Secondary Mathematics Education* (1988), S. 37–41
- [Tall 1996] TALL, David: Functions and calculus. In: *International handbook of mathematics education*. Springer, 1996, S. 289–325
- [Tall 2010] TALL, David: *Concept image and concept definition*. [https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html#concept image](https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html#concept%20image). Version: 2010. – Abgerufen am 25.5.2018
- [Tall 2013] TALL, David: *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press, 2013
- [Tall u. Vinner 1981] TALL, David ; VINNER, Shlomo: Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. In: *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981), S. 151–169
- [Thomas u. Finney 1992] THOMAS, George B. ; FINNEY, Ross L.: *Calculus and Analytic Geometry*. 8.Auflage. Addison Wesley, 1992
- [Thomas u. a. 2010] THOMAS, George B. ; WEIR, Maurice D. ; HASS, Joel: *Thomas' calculus: Early transcendentals*. 12th Ed. Pearson Addison-Wesley, 2010
- [Thompson 1994] THOMPSON, Patrick W.: The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: HAREL, G. (Hrsg.) ; CONFREY, J. (Hrsg.): *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, Albany, NY: SUNY Press, 1994, S. 179–234

- [Thompson 1995] THOMPSON, Patrick W.: Students, functions, and the undergraduate curriculum. In: DUBINSKY, Ed (Hrsg.) ; SCHOENFELD, Alan H. (Hrsg.) ; KAPUT, Jim (Hrsg.): *Research in collegiate mathematics education I* Bd. 1, Providence, RI: American Mathematical Society, 1995, S. 21–44
- [Thompson u. Dreyfus 2017] THOMPSON, Patrick W. ; DREYFUS, Thommy: A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials. In: GÖLLER, Robin (Hrsg.) ; BIEHLER, Rolf (Hrsg.) ; HOCHMUTH, Reinhard (Hrsg.) ; RÜCK, Hans-Georg (Hrsg.): *Proceedings of the conference Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*, 2017, S. 354–358
- [Tietze 2010] TIETZE, Jürgen: *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*. 15. Auflage. Vieweg-Teubner Verlag, 2010
- [Varian 1993] VARIAN, Hal R.: *Economic and financial modeling with Mathematica®*. Springer, 1993
- [Varian 2001] VARIAN, Hal R.: *Mikroökonomie*. 3. Auflage. Oldenbourg-Verlag, 2001
- [Varian 2011] VARIAN, Hal R.: *Grundzüge der Mikroökonomik*. 8. Auflage. Oldenbourg-Verlag, 2011
- [VEMINT 2014a] VEMINT: *eVorkurs an der Universität Paderborn vor dem Wintersemester 2014 aus dem Projekt VEMINT*. 2014. – unveröffentlicht
- [VEMINT 2014b] VEMINT: *Vortest an der Universität Paderborn vor dem Wintersemester 2014 aus dem Projekt VEMINT*. 2014. – unveröffentlicht
- [Viholainen 2005] VIHOLAINEN, Antti: Relationships between informal and formal reasoning in the subject of the derivative. In: BOSCH, M. (Hrsg.) ; Working Group 14 on Advanced Mathematical Thinking (Veranst.): *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education IV (CERME 4)* Working Group 14 on Advanced Mathematical Thinking, 2005, S. 1811–1820
- [Vinner 1982] VINNER, Shlomo: Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In: *Proceedings of the 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1982, S. 24–28
- [Vinner 1983] VINNER, Shlomo: Concept definition, concept image and the notion of function. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14 (1983), Nr. 3, S. 293–305
- [Vinner 1991] VINNER, Shlomo: The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, David (Hrsg.): *Advanced Mathematical Thinking*. Springer, 1991, S. 65–81
- [Vinner u. Dreyfus 1989] VINNER, Shlomo ; DREYFUS, Tommy: Images and definitions for the concept of function. In: *Journal for Research in Mathematics Education* (1989), S. 356–366
- [Vollrath 1989] VOLLRATH, Hans-Joachim: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1989), S. 3–37

- [Vom Hofe 1992] VOM HOFE, Rudolf: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* (1992), S. 345–364
- [Vom Hofe 1995] VOM HOFE, Rudolf: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. 1.Auflage. Spektrum akademischer Verlag, 1995
- [Vom Hofe 1998] VOM HOFE, Rudolf: Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 19 (1998), Nr. 4, S. 257–291
- [Walter 2003] WALTER, Wolfgang: *Analysis 1*. 7.Auflage. Springer-Verlag, 2003
- [Wied-Nebbeling u. Schott 2005] WIED-NEBBELING, Susanne ; SCHOTT, Hartmut: *Grundlagen der Mikroökonomik*. 3.Auflage. Springer, 2005
- [Wiese 1999] WIESE, Harald: *Mikroökonomik*. 2.Auflage. Springer, 1999
- [Wilhelm u. Confrey 2003] WILHELM, Jennifer A. ; CONFREY, Jere: Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 34 (2003), Nr. 6, S. 887–904
- [Williams 1991] WILLIAMS, S.R.: Models of Limit Held by College Calculus Students. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (1991), Nr. 3, S. 219–236
- [Wöhe u. Döring 2013] WÖHE, Günter ; DÖRING, Ulrich: *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. 25.Auflage. F. Vahlen, 2013
- [Wöhe u. a. 2013] WÖHE, Günter ; KAISER, Hans ; DÖRING, Ulrich: *Übungsbuch zur Allgemeinen Betriebswirtschaftslehre*. 14.Auflage. F. Vahlen, 2013
- [Wolf 2017] WOLF, Paul: *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge: Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Springer, 2017
- [Zandieh 1997] ZANDIEH, Michelle: *The Evolution of Student Understanding of the Concept of Derivative*, Oregon State University, Dissertation, 1997
- [Zandieh 1998] ZANDIEH, Michelle: The role of a formal definition in nine students' concept image of derivative. In: BERENSON, Sarah (Hrsg.) ; DAWKINS, Karen (Hrsg.) ; BLANTON, Maria (Hrsg.) ; COULOMBE, Wendy (Hrsg.) ; KOLB, John (Hrsg.) ; NORWOOD, Karen (Hrsg.) ; STIFF, Lee (Hrsg.): *Proceedings of the 20th annual meeting of the North American chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education* Bd. 1, 1998, S. 136–141
- [Zandieh 2000] ZANDIEH, Michelle J.: A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In: DUBINSKY, Ed (Hrsg.) ; SCHOENFELD, Alan H. (Hrsg.) ; KAPUT, Jim (Hrsg.): *Research in Collegiate Mathematics Education. IV. Issues in Mathematics Education* Bd. 8. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000, S. 103–127

[Zaslavsky u. a. 2002] ZASLAVSKY, Orit ; SELA, Hagit ; LERON, Uri: Being sloppy about the slope: The effect of changing scale. In: *Educational Studies in Mathematics* 49 (2002), S. 119–140

Anhang

Gesamter Vortest zum Verständnis der Ableitung für Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften

Bitte beantworten Sie im Vorfeld noch folgende Fragen:

Haben Sie die Veranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ schon einmal gehört?

☐ Ja ☐ Nein

Haben Sie einen Mathematik-Leistungskurs besucht?

☐ Ja ☐ Nein

1) Berechnen Sie bitte die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ _____

b) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$ _____

c) $f(x) = e^{2x}$ _____

d) $f(x) = e^{x^2}$ _____

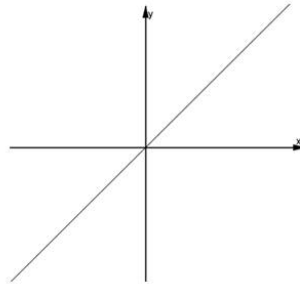
e) $f(x) = xe^x$ _____

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ _____

2) a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die die Steigung 2 hat und durch den Punkt (0;1) verläuft.

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

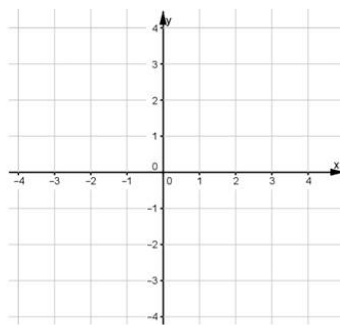
b) In dem folgenden Koordinatensystem ist die Funktion $f(x) = x$ eingezeichnet. Skizzieren Sie die Funktion $g(x) = 2x$ und $h(x) = -2x$ in das gleiche Koordinatensystem und schreiben Sie an die Graphen g und h an.



c) Geben Sie die Steigung der linearen Funktion durch die Punkte (0;1) und (2;9) an.

Wert der Steigung:

d) Zeichnen Sie die lineare Funktion durch den Punkt (0;-1) in das Koordinatensystem, die die Steigung -2 hat.



e) Bei einem Fahrradverleih mit minutengenaue Abrechnung wird der Preis in Abhängigkeit von der Zeit durch folgende Funktion beschrieben: $p(t) = \frac{7}{5}t + 2$. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden und $p(t)$ den Preis in Euro. Welche Interpretationen des Wertes $\frac{7}{5}$ in der Sachsituation sind möglich?

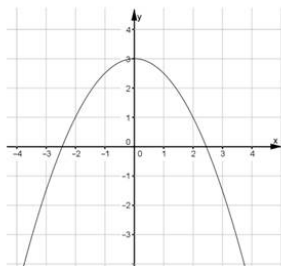
- I. Der Preis des Fahrrads steigt alle 5 Stunden um 7 Euro.
- II. Zu jeder Stunde ist der Preis des Fahrrads 1,4-mal höher als in der vorangegangenen Stunde.
- III. Der Preis des Fahrrads steigt um 1,40 Euro jede Stunde.

Quelle für e): (Carlson u.a., 2010)

- ☐ Nur Aussage I.
- ☐ Nur Aussage II.
- ☐ Nur Aussage III.
- ☐ Nur Aussagen I. und III.
- ☐ Alle 3 Aussagen

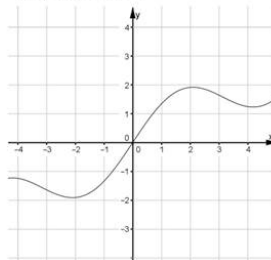
3) Entscheiden Sie, für welche der folgenden Funktionen die Aussage $f'(1) > 0$ zutrifft.

Abbildung 1



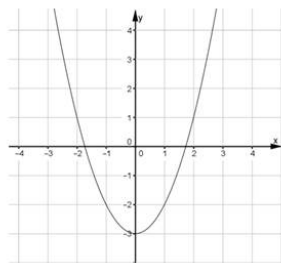
☐ trifft zu ☐ trifft nicht zu

Abbildung 2



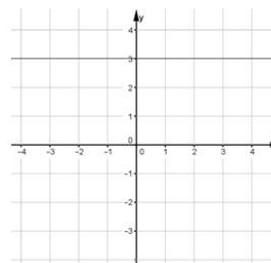
☐ trifft zu ☐ trifft nicht zu

Abbildung 3



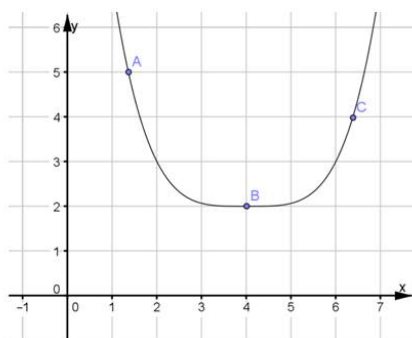
☐ trifft zu ☐ trifft nicht zu

Abbildung 4



☐ trifft zu ☐ trifft nicht zu

4) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion:

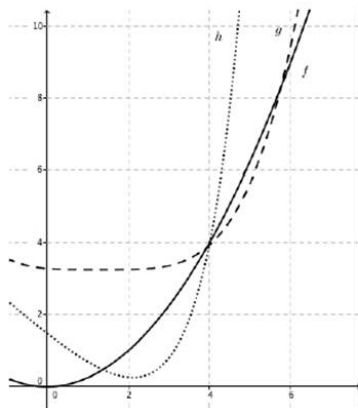


Quelle: (VEMINT, 2014a)

Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Aussage an!

Punkt	1. Ableitung		
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
A	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐

5) Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h .

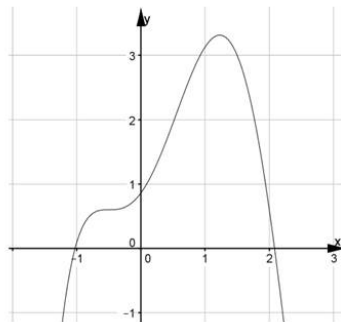


Welche Beziehung gilt für die Ableitungen im Punkt $P=(4,4)$?

- ☐ $f'(4) < g'(4) < h'(4)$
- ☐ $g'(4) < f'(4) < h'(4)$
- ☐ $h'(4) < g'(4) < f'(4)$

Quelle: (VEMINT, 2014b)

6) Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Funktion f für $-1 \leq x \leq 2$.

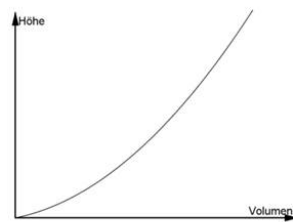


Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Antwort an.

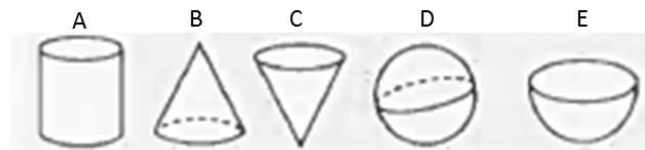
	Richtig	Falsch
Die erste Ableitung von f hat für $-1 < x < 2$ genau eine Nullstelle.	☐	☐
Die erste Ableitung besitzt für $0 < x < 1$ ein lokales Maximum.	☐	☐
Die erste Ableitung besitzt für $1 < x < 2$ ein lokales Maximum.	☐	☐

Angelehnt an eine Aufgabe aus (KOM@ing, 2014)

7) Der folgende Funktionsgraph zeigt die Wasserhöhe beim Füllen eines Gefäßes in Abhängigkeit von der hinzugegebenen Wassermenge:



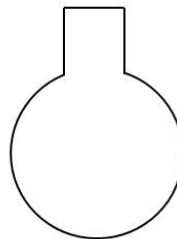
Welches Gefäß gehört zu diesem Füllgraphen?



- ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Quelle: (Carlson u.a., 2010)

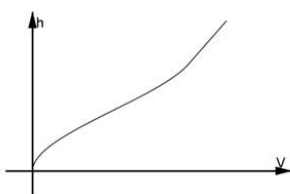
8) Die folgende Flasche wird bis zum oberen Rand gleichmäßig mit Wasser befüllt.



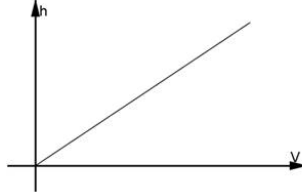
Welcher der folgenden Graphen gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit von der zugegebenen Wassermenge wider?

Quelle der Aufgabenstellung: (Carlson u.a., 2002)

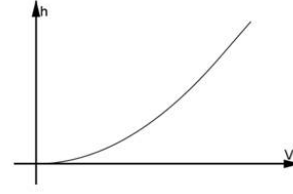
Graph 1



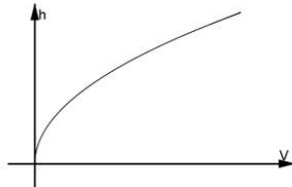
Graph 2



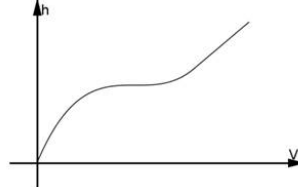
Graph 3



Graph 4

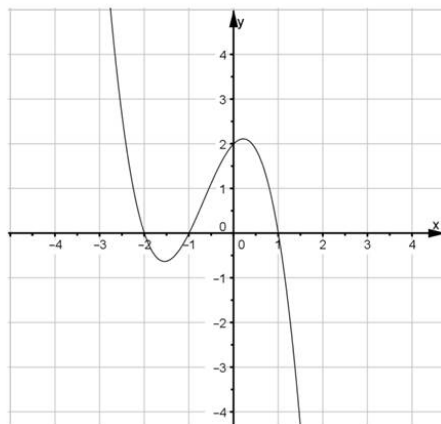


Graph 5



- ☐ Graph 1
☐ Graph 2
☐ Graph 3
☐ Graph 4
☐ Graph 5

9) Gegeben sei folgende Funktion f:

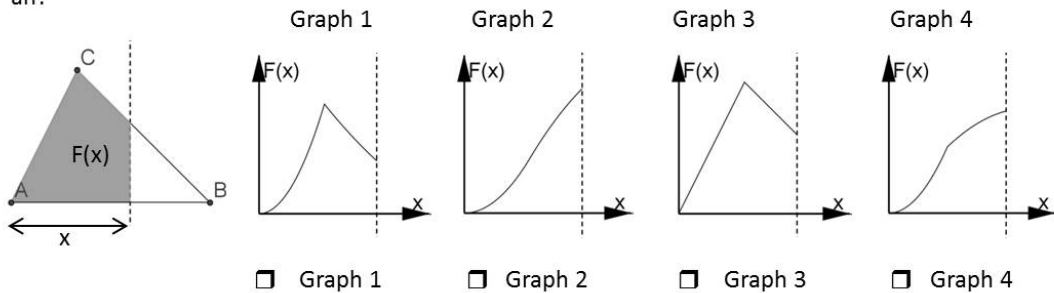


Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

	richtig	falsch
Die lokale Änderungsrate an der Stelle -1 ist positiv.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,5; 1,5]$ beträgt 0.	☐	☐
Die lokale Änderungsrate an der Stelle 0,5 ist negativ.	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;1]$ ist positiv.	☐	☐

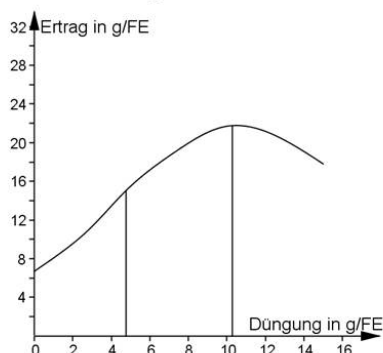
Quelle: (VEMINT, 2014)

10) Die gestrichelte Linie wird vom Punkt A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph gibt die Flächeninhaltsfunktion F an?



Quelle: (Hoffkamp, 2011) bzw. (Schlöglhofer, 2002)

11) Der Ertrag von Getreide bei Einsatz von Dünger lässt sich durch eine sogenannte ertragsgesetzliche Produktionsfunktion $E(x)$ beschreiben, die folgende Gestalt hat:



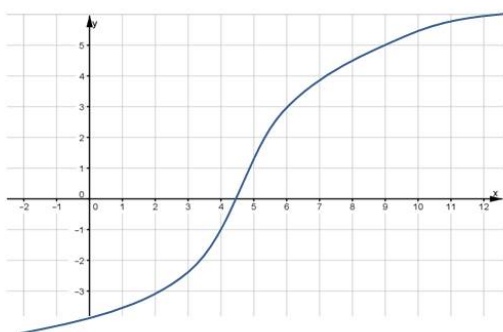
Düngung und Ertrag sind in Gramm pro Flächeneinheit (g/FE) gegeben.
Die Funktion hat bei 4,76 g/FE einen Wendepunkt und bei 10,29 g/FE ein Maximum.

Kreuzen Sie bitte die für die folgenden Aussagen „richtig“ oder „falsch“ an!

	Richtig	Falsch
Die Zunahme des Ertrages sinkt kontinuierlich zwischen 6 und 10 Gramm Dünger pro Flächeneinheit.	☐	☐
Die maximale Zunahme des Ertrages wird zwischen 8 und 14 Gramm Dünger pro Flächeneinheit erreicht.	☐	☐

Aufgabe angelehnt an Prediger (2008)

12) Welche Eigenschaft hat der Graph der Funktion im Bereich von $x=5$ bis $x=12$?



- ☐ wachsend mit sich beschleunigendem Wachstum
- ☐ wachsend mit sich verlangsamendem Wachstum
- ☐ gleichmäßig steigend
- ☐ fallend mit sich verlangsamendem Rückgang
- ☐ fallend mit sich beschleunigendem Rückgang

Quelle: (Carlson, 2010)

13) Die durch ein Auto zurückgelegte Wegstrecke in Metern wird durch folgende Funktion beschrieben: $s(t) = t^2 + t$. Dabei ist t in Sekunden angegeben. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitspanne von $t=1s$ bis $t=4s$?

- ☐ $5 \frac{m}{s}$
☐ $6 \frac{m}{s}$
☐ $9 \frac{m}{s}$
☐ $10 \frac{m}{s}$
☐ $11 \frac{m}{s}$

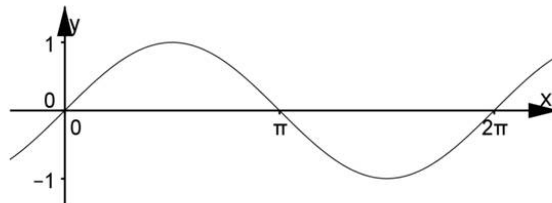
Quelle: Precalculus Assessment Test (PCA)

14) Gegeben ist eine quadratische Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Was gibt das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ an?

	Richtig	Falsch	Weiß nicht
Das Vorzeichen gibt an, ob sich die Parabel im Intervall $[-2;2]$ oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob $f(2) > f(-2)$ oder $f(2) < f(-2)$ oder $f(2) = f(-2)$.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob die Parabel im Intervall $[-2;2]$ eine positive oder negative Krümmung hat.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob die Funktion im Intervall $[-2;2]$ steigt oder fällt.	☐	☐	☐
Das Vorzeichen gibt an, ob der Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse ober- oder unterhalb der x-Achse liegt.	☐	☐	☐

Aufgabe angelehnt an (Malle, 2003)

15) Gegeben ist die Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = \sin(x)$, (x ist im Bogenmaß angegeben).



Es ist bekannt, dass $\sin(0)=0$ und $\sin'(0)=1$, denn $\sin'(x)=\cos(x)$ und $\cos(0)=1$.

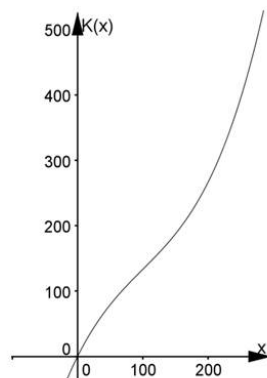
Geben Sie mit Hilfe der Ableitung des Sinus bei $x=0$ (**ohne** Hilfe Ihres Taschenrechners und **ohne** Verwendung des Kosinus) einen Näherungswert für $\sin(0,1)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Begründung: $\sin(0,1) \approx$ _____

- 16) Ein Unternehmen produziert Kugelschreiber. Die von der produzierten Stückzahl abhängigen Produktionskosten sind durch eine Kostenfunktion K mit folgender Gleichung gegeben:

$$K(x) = \frac{1}{30000}x^3 - \frac{1}{100}x^2 + 2x, \quad x \geq 0$$

$K(x)$ gibt die Kosten in Euro bei der Produktion von x Kugelschreibern an.



Bei dieser Kostenfunktion hat die Ableitung an der Stelle $x=200$ den Wert 2, d.h. es gilt $K'(200)=2$. Wie lässt sich dieses Ergebnis ökonomisch in obigem Kontext interpretieren?

- 17) Bei einem weiteren Unternehmen hat die zu einem Produkt gehörige Kostenfunktion die Gleichung

$$K(x) = \frac{1}{100}x^3 - x^2 + 100x, \quad x \geq 0$$

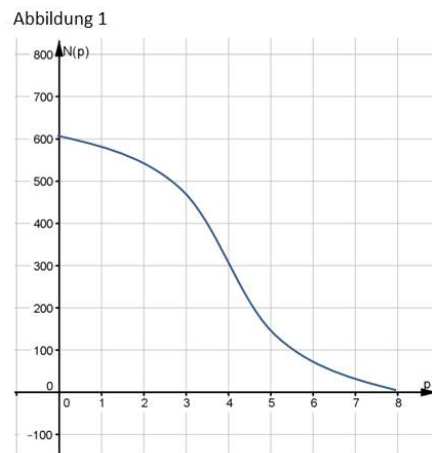
$K(x)$ gibt wieder die Kosten in Euro bei Produktion einer Stückzahl x des Produktes an.

Wie hoch sind die entstehenden Mehrkosten, wenn man die Produktion von 100 Stück um ein weiteres Stück erhöht?

Ergebnis: _____

Rechenweg:

18) Die Nachfrage eines Produktes ändert sich in Abhängigkeit vom Preis, was sich durch die Nachfragefunktion $N(p)$ darstellen lässt. Beispielsweise lassen sich bei einem Produkt, dessen Nachfragefunktion in Abbildung 1 dargestellt ist bei einem Preis von 4 Euro 300 Mengeneinheiten absetzen.

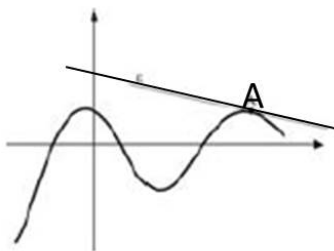


Bei einem festen Preis von p_0 (in Euro) ist die Nachfrage gegeben durch den Ausdruck $N(p_0)$ (Stückzahl). Welcher Ausdruck gibt exakt die Änderung der Nachfrage bei einer Erhöhung des Preises von p_0 um 1 Euro an?

- ☐ $N'(p_0)$
- ☐ $N(p_0 + 1) - N(p_0)$
- ☐ $N'(p_0 + 1) - N'(p_0)$
- ☐ $N(p_0 + 1)$

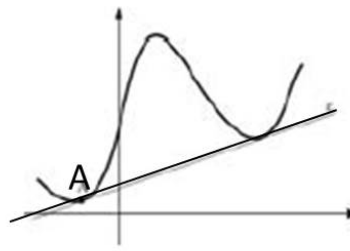
19) In welchen der folgenden Abbildungen sind die eingezeichneten Geraden Tangenten an den Graphen der Funktion im Punkt A?

a)



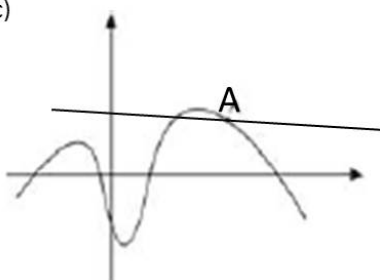
☐ Tangente ☐ keine Tangente

b)



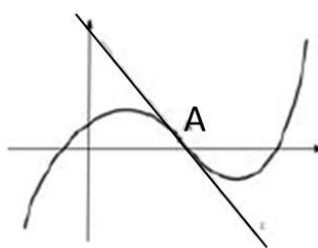
☐ Tangente ☐ keine Tangente

c)



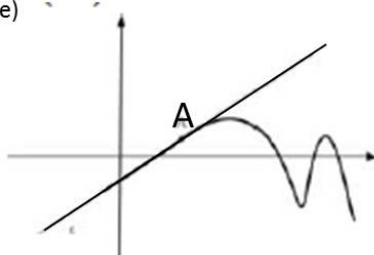
☐ Tangente ☐ keine Tangente

d)



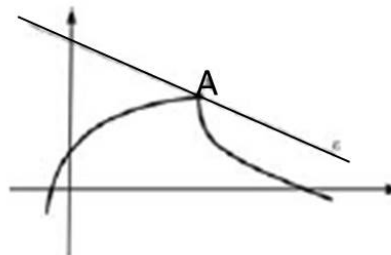
☐ Tangente ☐ keine Tangente

e)



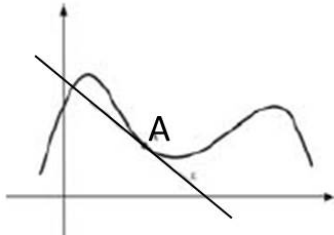
☐ Tangente ☐ keine Tangente

f)



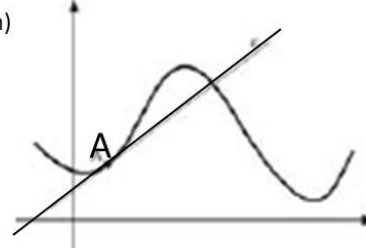
☐ Tangente ☐ keine Tangente

g)



☐ Tangente ☐ keine Tangente

h)



☐ Tangente ☐ keine Tangente

Quelle: (Biza, 2007)

20) Geben Sie eine Definition für die Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ an!

21) Ein Unternehmen produziert Autos. Die durch den Verkauf von Autos entstehenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl lassen sich durch folgende Kostenfunktion beschreiben:

$$K(x) = x^3 - 100x^2 + 10000x + 72000, \quad x \geq 0$$

Dabei ist x die produzierte Stückzahl und $K(x)$ die bei der Stückzahl x entstehenden Gesamtkosten in Euro.

Es gilt, dass $\frac{K(100) - K(90)}{100 - 90} = 18100$.

Wie lässt sich das Ergebnis in dem obigen Sachkontext interpretieren?

Schlussblatt:

Theoretisches Rahmenmodell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

