

Resultate zur Monotonie der Verbindungsfunktion von $C_k \times \mathbb{Z}$ und verwandten Graphen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Philipp König

an der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und
Mathematik der Universität Paderborn

2020

Ich danke Herrn Prof. Dr. Richthammer für die Betreuung bei dieser Arbeit und den vielen hilfreichen Hinweisen, intensiven Gesprächen und Rückmeldungen, die mir ermöglichten, sie fertigzustellen.
Mein Dank geht auch an meine Eltern, die mich immer unterstützt haben.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit geht es um ein bestimmtes Problem der Kantenperkolati-
on des Produktgraphen $G \times \mathbb{Z}$. Wobei G ein endlicher zusammenhängender
Graph ist (häufig in der Arbeit ist G der Kreisgraph C_k) und \mathbb{Z} ist der Graph
mit den Knoten \mathbb{Z} und den Kanten, die die Knoten mit dem Abstand 1 ver-
binden. Kantenperkolati- on bedeutet, dass eine Kante mit Wahrscheinlichkeit
 p vorhanden ist, unabhängig von den anderen Kanten. Es wird vorausgesetzt,
dass 0 ein Knoten von G ist. Die Fragestellung, die diese Arbeit motiviert,
ist die Frage, ob für alle natürlichen Zahlen m, n mit $m < n$ und alle Knoten
 a von G (und alle $p \in (0, 1)$) es wahrscheinlicher ist, dass $(0, 0)$ mit (a, m)
verbunden ist als $(0, 0)$ mit (a, n) . Die Frage wird hier positiv beantwortet,
wenn m, n groß genug sind und man noch eine zusätzliche Eigenschaft an
 G stellt. Hier wird sogar die Monotonie des Auftretens sogenannter Muster
untersucht. Ein Muster auf einer Ebene gibt an, welche Knoten mit dem
Knoten $(0, 0)$ verbunden sind und welche Knoten miteinander auf einer Ebe-
ne verbunden sind. (die n -te Ebene des Graphen $G \times \mathbb{Z}$ ist die Menge der
Knoten der Form (x, n)). Es wird gezeigt, dass ab einer bestimmten Höhe
die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines vorgegebenen Musters (wel-
ches mindestens einen Knoten hat, der mit dem Knoten $(0, 0)$ verbunden
ist) auf einer Ebene monoton abnimmt. Auch wird auf Zusammenhänge zu
bekannten und noch nicht komplett gelösten Problemen (Bunkbed-Graph
Vermutung, Monotonie der Verbindungsfunktion bei \mathbb{Z}^2) eingegangen.

Abstract

This work is about a specific problem of the bond percolation on the product graph $G \times \mathbb{Z}$. Here G is a finite and connected graph (here G is often the cycle graph C_k) and \mathbb{Z} is the graph with the vertices \mathbb{Z} and the edges which connect the endpoints with a distance of 1. Bond percolation means, that an edge exists with probability $p \in (0, 1)$ independent of the other edges. It is assumed, that 0 is a vertex of G . The question that motivates this work is the question, if for all natural numbers n, m with $m < n$ and all vertices a of G (and all $p \in (0, 1)$), it is more likely, that $(0, 0)$ is connected with (a, m) than $(0, 0)$ is connected with (a, n) . The question is answered positively here, if m, n are big enough and if G has an additional property. More precisely it will be here even studied the monotonicity of occurrences of patterns. A pattern on a level n means, which vertices are connected to the vertex $(0, 0)$ and which vertices are connected with each other. (the level n is the set of the vertices of the form (x, n)). It will be shown, that a bound exists, so after that the likelihood that a particular special pattern will occur is monotonically decreasing. Also, relations will be shown with other well known and only partially solved problems (bunkbed-graph conjecture, monotonicity of the connection function of the graph \mathbb{Z}^2).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Setting	5
1.1 Graphen	6
1.2 Kantenperkolation	8
1.2.1 Grundlegende Definitionen	8
1.2.2 Verbindungsfunktion	9
1.3 Monotonieeigenschaften	10
1.3.1 Problemstellung	10
1.3.2 Bunkbed-Vermutung	11
1.3.3 Gitter \mathbb{Z}^d	13
1.4 Monotonieeigenschaften im Graphen $G \times \mathcal{Z}$	14
1.4.1 Wichtige Bezeichnungen im Zusammenhang des $G \times \mathcal{Z}$	14
1.4.2 Beziehung zwischen den Problemen	23
2 Bekannte Resultate	27
2.1 Bunkbed-Graphen	28
2.1.1 Hilfsmittel für die Bunkbed-Vermutung	28
2.1.2 Outerplane-Graph	28
2.1.3 Vollständiger Graph	31
2.2 Gitter \mathbb{Z}^d	33
3 Quasi-Stationäre Verteilungen	35
3.1 Totalvariation	36
3.2 Quasi-Stationäre Verteilungen	39
4 $C_k \times \mathbb{Z}$ und verwandte Graphen	45
4.1 Erwartungswert der Anzahl infizierter Knoten	46
4.2 $C_k \times \mathbb{Z}$ für kleine k	58
4.3 $C_k \times \mathbb{Z}$ für beliebige k	78
4.3.1 Vorbemerkung zu Mustern	78

4.3.2	Betrachte p klein	83
4.3.3	Betrachte p in der Mitte	88
4.3.4	p nahe bei 1	95
4.3.5	Zusammengefasst: Schranke n	99
A	Verwendete Computerprogramme	103
A.1	Berechnung der Anzahl der selbstvermeidenden Pfade von \mathbb{Z}^2 , die in E_1 enden	104
A.2	Berechnung von $E[Y^{\leq m}]$	104
A.3	Berechnung der gültigen Muster	106
A.4	Berechnung von dem minimalen n	110
A.5	Berechnung der Anzahl von Mustern	115
A.6	Berechnung der Funktionsgraphen aus Kapitel 4.2	116
A.7	Überprüfung der restlichen Fälle der Monotonie	118
A.8	Berechnung von m_{C_k}	121
	Literatur	123

Vorwort

In dieser Arbeit geht es um spezielle Fragen im Bereich der Perkolation. Als mathematisches Modell wurde die Perkolation ab den 1950-er Jahren betrachtet (als Veröffentlichung, die das Thema der Perkolation begründet hat, gilt der Artikel [BH57] aus dem Jahre 1957 von Broadbent und Hammersley).

In dem Perkulationsmodell, welches hier betrachtet werden soll (es gibt relativ viele Varianten des Modells), hat man einen ungerichteten Graphen, dessen Kanten jeweils einen zufälligen Zustand haben.¹ Entweder ist eine Kante mit einer Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ offen oder die Kante ist mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ geschlossen. Dabei ist der Zustand der jeweiligen Kanten stochastisch unabhängig voneinander. Offen bedeutet hier anschaulich, dass die Kante vorhanden oder nutzbar ist und geschlossen bedeutet, dass die Kante nicht vorhanden oder nicht nutzbar in dem Graphen ist. Die offenen Kanten bilden einen zufälligen Teilgraphen des ursprünglichen Graphen. Bei der Perkolationstheorie geht es darum, Aussagen und Eigenschaften über den (zufälligen) offenen Teilgraphen zu erhalten.

Es gibt verschiedene physikalische Vorgänge, die man mit Hilfe der Perkolationstheorie interpretieren kann. Hier soll nur eine Anwendung angegeben werden, wie sie schon in [BH57] erwähnt worden ist: Man hat einen porösen Festkörper (ein Körper aus einem Material, in dem sich Hohlräume bilden können). Man kann sich nun die Frage stellen, wie wahrscheinlich ist es, dass ein Gas, welches sich an der Oberfläche befindet, ins Innere des Körpers eindringt. Man kann den Festkörper durch Punkte diskretisieren und diese Punkte als Knoten eines Graphen betrachten. Zwei benachbarte Punkte (bzw. Knoten) haben genau dann eine Kante, wenn es einen Hohlraum gibt, der groß genug ist für die Gasmoleküle. Indem man die Hohlräume als zufällig betrachtet, die mit einer Wahrscheinlichkeit p auftreten, hat man ein Perkulationsmodell für das betrachtete physikalische Problem.

Ein häufiger Graph, der untersucht wurde, ist der \mathbb{Z}^2 . Dabei ist \mathbb{Z}^2 der

¹Es gibt auch das Perkulationsmodell, in dem die Knoten zufällig sind und die Kanten fest. Das hier betrachtete Modell heißt auch Kantenperkolation. Auch beschränkt man sich hier auf ungerichtete Kanten.

Graph, dessen Knoten die Elemente von \mathbb{Z}^2 und dessen Kanten alle Verbindungen zwischen den benachbarten Punkten (zwei Punkte sind benachbart, wenn der euklidische Abstand 1 beträgt) sind. Eine der ersten Fragestellungen war, die bei diesem Graphen (eine analoge Fragestellung kann man auch bei anderen unendlichen Graphen finden) aufgetreten ist, für welche p ist die Wahrscheinlichkeit größer 0, dass der Knoten $(0, 0)$ durch offene Pfade (ein offener Pfad ist ein Pfad, der nur offene Kanten benutzt) mit unendlich vielen Knoten verbunden ist. In [Kes80] beantwortet Kesten für Graphen \mathbb{Z}^2 , dass genau dann die Wahrscheinlichkeit größer als 0 ist, wenn $p > \frac{1}{2}$ ist. Für viele Graphen ist die genaue Schranke für das Problem noch unbekannt.

Weitere Resultate befassen sich mit Clustern, die bei der Perkolation entstehen. Dabei ist ein Cluster eine Äquivalenzklasse von Knoten bezüglich der Relation, dass zwei Knoten durch einen offenen Pfad miteinander verbunden sind. Ein wichtiges Resultat ist die von [AKN87] bewiesene Tatsache, dass es bei einer großen Klasse von Graphen nur maximal ein unendlich großes Cluster gibt (mit Wahrscheinlichkeit 1).

Es sollen nun noch ein paar untersuchte Probleme erwähnt werden, die näher an dem in dieser Arbeit untersuchten Problem liegen:

Schon [Ham57] zeigte für den Graphen \mathbb{Z}^{d-2} (bzw. sogar in allgemeineren Graphen) im Falle, dass die Wahrscheinlichkeit gleich 0 ist, dass der $(0, \dots, 0)$ mit unendlich vielen Knoten durch offene Pfade verbunden ist, folgendes Resultat: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten $(0, \dots, 0)$ mit dem Knoten $(0, \dots, 0, n)$ durch einen offenen Pfad im Graphen \mathbb{Z}^2 verbunden ist, kann durch eine gegen 0 exponentiell fallende Schranke in $n \rightarrow \infty$ beschränkt werden. (Es wurde sogar gezeigt, dass man so die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten $(0, \dots, 0)$ mit einem Knoten mit dem Kantenabstand n verbunden ist, exponentiell gegen 0 fällt für $n \rightarrow \infty$.)

In [CCC91] wurde sogar eine asymptotische Formel (sogar mit Angabe der Konvergenzgeschwindigkeit) für die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten $(0, \dots, 0)$ mit dem Knoten $(0, \dots, n)$ mit einem offenen Pfad verbunden ist, angegeben, wenn $n \rightarrow \infty$ geht.

Daran anschließend kann man eine Frage stellen, die schon nahe an der in dieser Arbeit untersuchten Fragestellung ist (siehe unten): Ist die Wahrscheinlichkeit immer kleiner, dass der Knoten $(0, \dots, 0)$ mit dem Knoten $(0, \dots, 0, n)$ verbunden ist, als die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten $(0, \dots, 0)$ mit dem Knoten $(0, \dots, 0, m)$ verbunden ist, wenn $n > m$ ist? Bisher gibt es hier nur partielle Resultate für die Fragestellung in [LPS15], welches die Frage positiv beantwortet, wenn p sehr klein ist.

Erwähnt werden soll hier auch das Bunkbed-Problem: Einen Bunkbed-

²der Graph ist analog zu \mathbb{Z}^2 definiert

Graphen eines Graphen erhält man, wenn man einen Graphen kopiert und jeden ursprünglichen Knoten mit einer Kante mit dem neuen kopierten Knoten verbindet. Man hat also einen Graphen mit zwei Ebenen (eine Ebene ist der ursprüngliche Graph, die andere Ebene der kopierte Graph). Nun stellt sich die Frage, wenn man zwei Knoten u und v auf einer Ebene nimmt, ob diese wahrscheinlicher miteinander verbunden sind als der Knoten u und der Knoten v' , welcher dem Knoten v auf der anderen Ebene entspricht. Selbst diese Fragestellung wurde nur für spezielle Klassen endlicher Graphen beantwortet. (z.B. in [Lin11] und [HL19]). Für alle endlichen Graphen ist das Problem immer noch offen.

In dieser Arbeit sollen spezielle Graphen betrachtet werden, die eine gewisse Ähnlichkeit zu den Bunkbed-Graphen haben. Für diese Graphen kann man dann auch eine Verbindung zu dem Graphen \mathbb{Z}^2 und dessen Monotonieproblem herstellen:

Hauptsächlich wird in dieser Arbeit der Produktgraph $G \times \mathbb{Z}$ betrachtet, wobei G ein endlicher zusammenhängender Graph ist (wie z.B. ein Kreisgraph oder ein vollständiger Graph). $G \times \mathbb{Z}$ ist also im Prinzip wie der Bunkbed-Graph konstruiert, außer, dass man nun abzählbar unendlich viele Ebenen hat. Man interessiert sich unter anderem für die Frage, ob es für $x, y \in V(G)$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ wahrscheinlicher ist, dass der Knoten $(x, 0)$ mit dem (y, n) verbunden ist als die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten $(x, 0)$ mit dem Knoten (y, m) verbunden ist. Um sich dieser Frage zu nähern, wird auch ein verwandtes Problem betrachtet. Man betrachtet bestimmte Muster auf jeder Ebene. Dabei drückt ein Muster aus, welche Knoten auf einer Ebene mit dem Knoten $(0, 0)$ verbunden sind und wie die Knoten auf einer Ebene miteinander verbunden sind. Die Fragestellung, die man sich stellen kann, ist nun, ob (ab einer gewissen Ebene) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Musters monoton abnimmt. Eine große Hilfe beim Behandeln dieses Problem ist es, dies als eine Markovkette zu betrachten.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im **ersten Kapitel** werden die grundlegenden Begriffe der Perkolation, die für die Arbeit benötigt werden, eingeführt. Ebenfalls werden bekannte Problemstellungen für das Monotonieproblem bei \mathbb{Z}^d und das Bunkbed-Problem genauer vorgestellt. Weiter wird der Graph $G \times \mathbb{Z}$ und die in dieser Arbeit betrachteten Begriffe eingeführt. Insbesondere wird erklärt, was hier mit einem Muster gemeint ist und die in dieser Arbeit betrachteten Probleme vorgestellt. Außerdem wird ein Zusammenhang zwischen den bekannten Problemen bei bestimmten Graphen und den in dieser Arbeit betrachteten Graphen mit den zugehörigen Problemen hergestellt.

Im **zweiten Kapitel** werden Resultate zum Vergleich der Verbundenheit von zwei Knoten bei speziellen Graphen, wie den \mathbb{Z}^d oder speziellen Bunkbed-Graphen, aus der Literatur vorgestellt.

Im **dritten Kapitel** wird hauptsächlich ein aus der Literatur bekanntes Resultat zu Markovketten vorgestellt, das man später zum Beweis des Hauptresultats dieser Arbeit verwenden wird.

Das **vierte Kapitel** bildet den Hauptteil der Arbeit und besteht aus neuen Resultaten zum Graphen $G \times \mathbb{Z}$. Zum einen wird betrachtet, wie sich die durchschnittliche Anzahl von Knoten im Teilgraphen $G \times \{n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, die mit einem speziellen Knoten verbunden sind, entwickelt. Anschließend wird noch für spezielle Graphen G mit wenigen Knoten betrachtet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Knoten miteinander verbunden sind, kleiner wird, wenn die beiden Knoten weiter voneinander entfernt sind. Abschließend wird für $G \times \mathbb{Z}$, wobei man an G noch eine Einschränkung vornimmt, gezeigt, dass auch hier die Wahrscheinlichkeit immer monoton kleiner wird ab einer bestimmten Schranke.

Kapitel 1

Setting

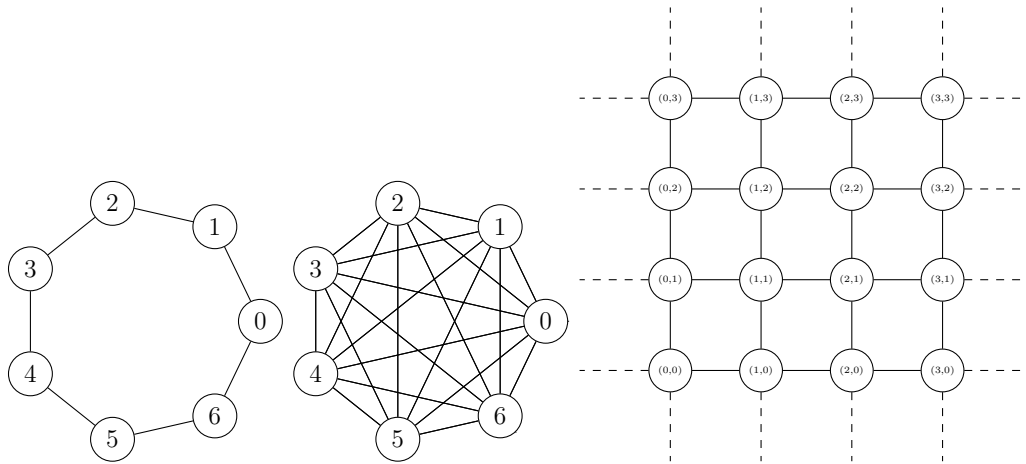
In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Begriffe eingeführt und die in der Arbeit betrachteten Probleme vorgestellt werden.

1.1 Graphen

Hier werden nur Graphen betrachtet, die eine endliche oder abzählbare unendliche Anzahl von Knoten haben. Weiter sind alle Graphen ungerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten oder Schleifen. Auch soll immer vorausgesetzt werden, dass der Graph G einen endlichen maximalen Grad hat (d.h. es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, sodass kein Knoten einen Grad größer als d hat). Die Knoten eines Graphen G werden hier mit $V(G)$ bezeichnet und die Kanten von G sollen hier mit $E(G)$ bezeichnet werden.

Es gibt folgende spezielle Graphen, die wir besonders bezeichnen und die noch später eine Rolle spielen:

- Mit C_k bezeichnen wir den Kreisgraphen mit k Knoten, d.h. $V(C_k) = \{0, \dots, k-1\}$ und $E(C_k) := \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{k-2, k-1\}, \{k-1, 0\}\}$
- Mit K_k bezeichnet man den vollständigen Graphen mit k Knoten, d.h. $V(K_k) = \{0, 1, \dots, k-1\}$ und $E(K_k) := \{\{i, j\} : i, j \in V(K_k), i \neq j\}$
- Mit $K_{m,n}$ bezeichnen wir den vollständigen bipartiten Graphen zwischen einer m und n einelementigen Menge, daher ist $V(K_{m,n}) = \{1, 2, \dots, m+n\}$ und $E(K_{m,n}) := \{\{i, j\} : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{n+1, \dots, m+n\}\}$
- Mit \mathbb{Z}^d bezeichnet man den Gittergraphen mit den Knoten aus \mathbb{Z}^d . D.h. $V(\mathbb{Z}^d) := \mathbb{Z}^d$ und $E(\mathbb{Z}^d) = \{\{i, j\} : i, j \in \mathbb{Z}^d, \|i - j\|_1 = 1\}$, dabei ist $\|i - j\|_1 = \sum_{l=1}^d |i_l - j_l|$. Für $d = 1$ schreibt man auch \mathbb{Z} statt \mathbb{Z}^1
- Allgemeiner meinen wir für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ immer den Graphen mit Knoten $V(A) := A$ und Kanten $E(A) = \{\{i, j\} : i, j \in A, \|i - j\|_1 = 1\}$. Insbesondere betrachten wir die Teilmengen $\{x \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$, $\{x \in \mathbb{Z} : k \leq x \leq n\}$ und $\{x \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Anstatt $\{\dots, -1, 0, 2, \dots, n\}$, $\{k, \dots, n\}$ und $\{n, n+1, \dots\}$ schreiben wir auch $((-\infty, n], [[k, n]]$ und $[[n, \infty))$.

Abbildung 1.1: Die Graphen C_7 , K_7 und \mathbb{Z}^2

Auch kann man mit Hilfe des Kreuzproduktes neue Graphen erhalten: Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen, dann soll mit $G_1 \times G_2 = (V', E')$ der Graph mit $V' = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ und $E' = \{ \{(v_1, v_2), (v'_1, v_2)\} | \{v_1, v'_1\} \in E_1, v_2 \in V_2 \} \cup \{ \{(v_1, v_2), (v_1, v'_2)\} | \{v_2, v'_2\} \in E_2, v_1 \in V_1 \}$ bezeichnet werden. Wichtige Graphen, die wir später behandeln, sind die Bunkbed-Graphen $G \times K_2$ (wobei G ein endlicher Graph ist) und $C_k \times \mathbb{Z}$.

Wir nennen x_1, \dots, x_n einen Pfad von x_1 nach x_n , wenn jeweils die Kanten $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$ im Graphen vorhanden sind. Ein Pfad heißt selbstvermeidender Pfad, wenn alle Knoten verschieden sind (d.h. $\#\{x_1, \dots, x_n\} = n$).

1.2 Kantenperkolation

1.2.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Unterabschnitt soll definiert werden, was unter Kantenperkolation zu verstehen ist (gute Einführungen sind z.B. [Gri99] oder [BR06]). Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein endlicher oder ein abzählbar unendlicher (ungerichteter) Graph mit endlichem Grad. Sei μ die Bernoulliverteilung mit dem Parameter $p \in (0, 1)$ (μ ist die Verteilung auf $\{0, 1\}$ mit $\mu(1) = 1 - \mu(0) = p$). Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmaß P_p , das definiert ist als $P_p := \bigotimes_{e \in E} \mu$. Insbesondere ist P_p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega := \{0, 1\}^E$ mit σ -Algebra $\bigotimes_{e \in E} \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ der von den Zylindermengen erzeugten σ -Algebra. Ist $\omega \in \Omega$, so sei $\omega(e)$ die Projektion auf die Koordinate der Kante e . Wir sagen, eine Kante e ist offen in $\omega \in \Omega$, wenn $\omega(e) = 1$ ist und sonst heißt eine Kante geschlossen. Teilweise wird für die betrachtete Verteilung auch P statt P_p geschrieben.

Man schreibt $v \sim w$, wenn $v, w \in V$ ist, für das Ereignis, dass es eine Kante zwischen v und w gibt und diese offen ist. Man schreibt $v \not\sim w$ für das Ereignis, dass es keine offene Kante zwischen v und w gibt. Ist C eine Menge von Knoten, so schreiben wir $v \sim C$ für das Ereignis, dass es eine offene Kante zwischen v und einem Knoten aus C gibt. Analog $v \not\sim C$, wenn es keine solche Kante gibt.

Wir sagen, zwei Knoten $x, y \in V$ sind verbunden, wenn das Ereignis eintritt, dass es einen offenen Pfad zwischen den beiden Knoten gibt. Dabei ist ein offener Pfad eine Menge von Knoten $v_1 = x, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = y$, sodass die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ offen (und vorhanden) sind. Wir schreiben für das Ereignis, dass x und y mit einem offenen Pfad verbunden sind, $x \leftrightarrow y$. Also ist $v \leftrightarrow w$, wenn es Kanten $v_1, \dots, v_k \in V$ mit $v_1 = v$ und $v_k = w$ gibt, sodass $v_1 \sim v_2, \dots, v_{k-1} \sim v_k$. Teilweise schreiben wir \leftrightarrow^G statt \leftrightarrow , um zu verdeutlichen, auf welchen Graphen wir uns beziehen.

Im Folgenden soll mit $C(x) := \{y \in V : x \leftrightarrow y\}$ die Menge aller Knoten bezeichnet werden, die mit dem Knoten x durch einen offenen Pfad verbunden sind. Wir nennen $C(x)$ auch den Cluster von x . Man beachte, dass bei einem zusammenhängenden Graphen mit endlichem Grad für alle $x, y \in V$ $P(|C(x)| = \infty) > 0$ genau dann ist, wenn auch $P(|C(y)| = \infty) > 0$ gilt. Deshalb ist die Definition von folgendem wichtigen Wert immer eindeutig:

$$p_c(G) := \sup\{p \in [0, 1] : P_p(|C(x)| = \infty) = 0\}$$

Im Fall $p < p_c(G)$ sprechen wir vom subkritischen Fall, im Falle $p > p_c(G)$ sprechen wir vom superkritischen Fall. Im Folgenden soll sich nur mit dem subkritischen Fall beschäftigt werden (bei den meisten betrachteten Graphen in den folgenden Kapiteln ist $p_c = 1$). Sei $\Phi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlich großen Cluster gibt, d.h. $\Phi(p) = P_p(\exists x \in V : |C(x)| = \infty)$. Es gilt dann (siehe z.B. [Gri99]) das im subkritischen Fall ($p < p_c(G)$) $\Phi(p) = 0$ und im superkritischen Fall $p > p_c(G)$ $\Phi(p) = 1$ (man beweist dies mit dem 0-1-Gesetz von Kolmogorow).

Ist der Graph vom endlichen Typ¹ und ist der Graph zugänglich², so gibt es entweder P_p -f.s. keinen unendlichen Cluster oder genau einen unendlichen Cluster. (siehe z.B. [BR06]) Ein Beispiel für einen solchen Graphen ist der \mathbb{Z}^d für $d \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Verbindungsfunktion

$\tau_p(x, y) := P_p(x \leftrightarrow y)$ heißt die Verbindungsfunktion von x und y . Je nach Graph sind verschiedene Eigenschaften der Verbindungsfunktion bekannt. Man beachte, dass die Verbindungsfunktion symmetrisch ist. Es ist klar, dass die Verbindungsfunktion bei endlichem Graph für feste x und y in p stetig ist. Auch wurde in [AKN87] gezeigt, dass die Verbindungsfunktion in p stetig für den Graphen \mathbb{Z}^d ist. Dieses Resultat kann man nach [AKN87] auch für andere Gittergraphen erweitern. Im Wesentlichen wurde für den Beweis benutzt, dass der unendliche Cluster (wenn existent) eindeutig ist.

¹Zwei Knoten eines Graphen sind äquivalent, wenn es einen Automorphismus gibt, der x auf y abbildet. Gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation, so sagen wir, dass ein Graph vom endlichen Typ ist.

²Sei $B_n(x)$ die Menge aller Knoten des ursprünglichen Graphen, die einen Kantenabstand kleiner oder gleich n zum Knoten x haben und sei $\delta B_n(x)$ die Menge aller Knoten, die den Kantenabstand von genau n zu dem Knoten x haben. Dann heißt ein unendlicher Graph zugänglich, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\delta B_n(X)|}{|B_n(X)|} \rightarrow 0$ ist

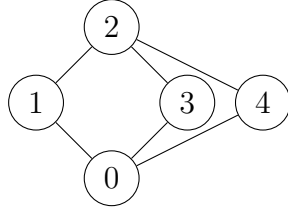
1.3 Monotonieigenschaften der Kantenperkolation

1.3.1 Problemstellung

Da man im Allgemeinen den Wert der Verbindungsfunktion nicht exakt ausrechnen kann, würde man wenigstens gerne eine Aussage darüber machen, ob für $x, y, z \in V$ $\tau_p(x, y) < \tau_p(x, z)$, $\tau_p(x, y) > \tau_p(x, z)$ oder $\tau_p(x, y) = \tau_p(x, z)$ gilt. Schon bei relativ einfach strukturierten Graphen sind bis heute keine Beweise bekannt (siehe spätere Kapitel), obwohl es häufig so aussieht, dass eine dieser Aussagen offensichtlich ist.

Für kleine p reicht es aber häufig aus, den Kantenabstand von Knoten zu betrachten, um die Verbindungsfunktionen zu vergleichen. Der Kantenabstand von zwei Knoten x und y ist definiert als die Länge des minimalen Pfades des nicht perkolierten Graphen zwischen den Knoten x und y .

Sei der Grad von dem Graphen höchstens d : Ist der Kantenabstand von x und y gleich n , so ist $\tau_p(x, y) \geq p^n$. Weiter gibt es von einem Knoten ausgehend nur maximal d^k Pfade, die die Länge k haben. Damit ist $\tau_p(x, y) \leq \sum_{k=n}^{\infty} d^k p^k$. Somit ist $\tau_p(x, y) = \Theta(p^n)$ für $p \rightarrow 0$. Dabei bedeutet diese Schreibweise wie üblich, dass $0 < \liminf_{p \rightarrow 0} \frac{\tau_p(x, y)}{p^n}$ und $\limsup_{p \rightarrow 0} \frac{\tau_p(x, y)}{p^n} < \infty$. Seien x, y und z drei Knoten, sodass der Kantenabstand von x und y kleiner als der Kantenabstand von x und z ist, dann gibt es ein $p' > 0$, sodass für alle $p < p'$ $\tau_p(x, y) > \tau_p(x, z)$ gilt. Dass der Kantenabstand kein hinreichendes Kriterium für alle p für den Vergleich der Verbindungsfunktion ist, sieht man anhand des folgenden Beispiels:



Wir haben bei diesem Graphen:

$$\begin{aligned}
 \tau_p(0, 1) - \tau_p(0, 2) &= P_p(0 \leftrightarrow 1) - P_p(0 \leftrightarrow 2) \\
 &= P_p(0 \leftrightarrow 1, 1 \not\sim 2) + \underbrace{P_p(0 \leftrightarrow 1, 1 \sim 2) - P_p(0 \leftrightarrow 2, 1 \sim 2) - P_p(0 \leftrightarrow 2, 1 \not\sim 2)}_{=0} \\
 &= P_p(0 \leftrightarrow 1, 1 \not\sim 2) - P_p(0 \leftrightarrow 2, 1 \not\sim 2) \\
 &= p(1-p) - (p^2 + (1-p^2)p^2)(1-p) = (p^3 - 2p + 1)p(1-p)
 \end{aligned}$$

Somit sieht man, dass für $p > -1/2 + \sqrt{5}/2 \approx 0.62$ $\tau_p(0, 1) < \tau_p(0, 2)$.

Auch sollte man beachten, dass es nicht klar ist (für unendliche Graphen), ob man immer ein $p' > 0$ finden kann, sodass für alle $p < p'$ und alle $x, y, z \in V$, wobei x und y einen kleineren Kantenabstand als x und z haben, gilt $\tau_p(x, y) > \tau_p(x, z)$. In den folgenden Kapiteln bzw. Abschnitten geht es darum, Bedingungen aufzustellen, wann eine Verbindungsfunktion kleiner als eine andere Verbindungsfunktion ist.

1.3.2 Bunkbed-Vermutung

In diesem Abschnitt soll sich mit der Perkolation von Bunkbed-Graphen beschäftigt werden. Dabei ist ein Bunkbed-Graph wie folgt definiert:

Definition 1.1 Sei G ein Graph und K_2 der vollständige Graph mit den zwei Knoten 0 und 1. Dann bezeichne mit $\text{BB}(G)$ den Graphen $G \times K_2$. $\text{BB}(G)$ nennt man den Bunkbed-Graphen von G .

Anschaulich ist der entsprechende Bunkbed-Graph eines Graphen G der Graph, der aus G entsteht, wenn man diesen kopiert und die jeweils entsprechenden Knoten durch eine Kante verbindet.

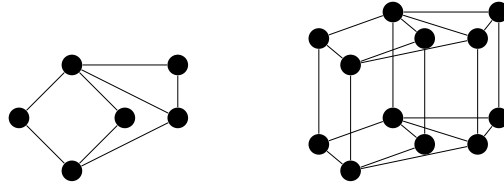


Abbildung 1.2: Ein Graph und der zugehörige Bunkbed-Graph

Folgendes bekannte Problem stellt sich bei den Bunkbed-Graphen, welches nach [BK01] auf P. W. Kasteleyn aus dem Jahre 1985 zurückgeht (dort etwas allgemeiner formuliert):

Vermutung 1.1 Seien zwei Knoten u, v aus G , dann gilt:

$$P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, 0)) \geq P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, 1))$$

Obwohl es sehr plausibel ist, dass diese Vermutung gilt, so hat man bisher die Vermutung nur für spezielle Graphen beweisen können. So wurde in [Lin11] die Vermutung für Outerplane-Graphen bewiesen. (vgl. Unterabschnitt 2.1.2). In [HL19] wurde gezeigt, dass die Vermutung für vollständige Graphen gilt (in [Buy16] und [Buy18] wurden schon Spezialfälle für $p = \frac{1}{2}$ und $p \geq \frac{1}{2}$ behandelt). Vergleiche hierzu Unterabschnitt 2.1.3.

Auf die Beweise aus [Lin11] und [HL19] wird später noch kurz eingegangen. Bei beiden Arbeiten wurde die etwas allgemeinere Vermutung für spezielle Graphen bewiesen:

Vermutung 1.2 Seien $T \subseteq V(G)$ und sei $A_T := \{\forall x \in T : (x, 0) \sim (x, 1)\} \cap \{\forall x \notin T : (x, 0) \not\sim (x, 1)\}$ (d.h. das Ereignis, dass die vertikalen Kanten nur an den Stellen T auftreten). Dann gilt:

$$P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 0) | A_T) \geq P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T) \quad (1.1)$$

Klar ist, dass wegen

$$P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, e)) = \sum_{T \subseteq V(G)} P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, e) | A_T) P(A_T)$$

für alle $e \in \{0, 1\}$ die Vermutung 1.1 folgt.

Wir führen noch kurz folgende Verallgemeinerung des Bunkbed-Graphen ein:

Definition 1.2 Sei G ein Graph und $T \subseteq V(G)$. Dann bezeichne mit $BB^T(G)$ den Graphen mit den Knoten $V(G) \times \{0, 1\}$ und den Kanten $\{(x, y), (z, y)\} : \{x, z\} \in E(G), y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, 0), (x, 1)\} : x \in T\}$.

Man kann mit dieser Definition auch eine Variante der Bunkbed-Vermutung aufstellen:

Vermutung 1.3 Seien $T \subseteq V(G)$. Dann gilt:

$$P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB^T(G)}(v, 0)) \geq P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB^T(G)}(v, 1)) \quad (1.2)$$

Die Vermutung 1.3 ist eine Verallgemeinerung von Vermutung 1.1, da durch Wahl von $T = V$ man Vermutung 1.1 erhält. Man beachte, mit dem gleichen Argument wie oben folgt die Vermutung 1.3 wieder aus Vermutung 1.2. Diese Variante wird hier nur erwähnt, da es sich im Unterabschnitt 1.4.2 mit dieser leichter arbeiten lässt als mit Vermutung 1.2.

In [Lin11] wurde eine Variante der Bunkbed-Vermutung vorgestellt, welche für den Beweis bei Outerplane-Graphen benutzt wurde:

Vermutung 1.4 Seien $T \subseteq V(G)$ und sei $A_T := \{\forall x \in T : (x, 0) \sim (x, 1)\} \cap \{\forall x \notin T : (x, 1) \not\sim (x, 2)\}$. Weiter sei B das Ereignis, dass für alle $\{x, y\} \in E(G)$ genau eine der Kante $\{(x, 0), (y, 0)\}$ oder $\{(x, 1), (y, 1)\}$ offen ist. Dann ist

$$P((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, 0) | A_T, B) \geq P((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)}(v, 1) | A_T, B) \quad (1.3)$$

Man beachte, dass das Bedingen auf das Ereignis B bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nur die obere bzw. nur die untere Kante offen ist. Insbesondere hängt die Gültigkeit der Vermutung nicht von p ab.

Auf einen Zusammenhang zwischen Vermutung 1.2 und Vermutung 1.4 wird noch in Unterabschnitt 2.1.1 eingegangen,

1.3.3 Gitter \mathbb{Z}^d

Im Folgenden soll sich nur mit dem subkritischen Fall des Graphen \mathbb{Z}^d beschäftigt werden. Eine wichtige Konstante in diesem Zusammenhang ist $\xi(p)$, welches definiert ist durch (hier $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{d-1}$):

$$\frac{1}{\xi(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{0}, n))$$

Die Existenz des obigen Limes wurde z.B. in [Gri99, Kapitel 6.2] gezeigt. Dazu wurde mit der FKG-Ungleichung ³ gezeigt, dass $P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{0}, n)) \geq (P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{0}, 1)))^n$. Anschließend wurde der Logarithmus auf beiden Seiten angewendet und mit dem Subadditiv-Limit-Theorem ⁴ die Existenz gezeigt. Für Details siehe [Gri99, Kapitel 6.2].

Bei dem Gitter \mathbb{Z}^d kann man sich die Frage stellen, ob die Verbindungsfunktion sogar monoton abnimmt, wenn man sich weiter vom Ursprung entfernt. Insbesondere hat man folgende Vermutung:

Vermutung 1.5 *Sei $0 < p < p_c(\mathbb{Z}^d)$, dann gilt für alle $n \geq 0$ und alle $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{d-1}$:*

$$P_p((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{a}, n)) > P_p((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{a}, n+1))$$

In [LPS15] wurde die Aussage für hinreichend kleine p 's bewiesen (zwar nur für $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ formuliert, aber der dort angegebene Beweis benutzt diese Einschränkung nicht). In Abschnitt 2.2 wird noch darauf eingegangen.

³ Die FKG-Ungleichung sagt in dem vorliegenden Setting folgendes aus: Sei G ein Graph. Eine Zufallsvariable Y heißt monoton wachsend auf $\{0, 1\}^{E(G)}$, wenn für alle Konfigurationen ω und ω' gilt, dass, wenn $\omega \leq \omega'$ (dies bedeutet für jede Kante e ist $\omega(e) \leq \omega'(e)$) auch $Y(\omega) \leq Y(\omega')$ ist. Sind Y und Y' zwei monoton wachsende Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y^2], \mathbb{E}[Y'^2] < \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}[YY'] \geq \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Y']$$

⁴Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist subadditiv, wenn für alle $m, m' \in \mathbb{N}$ gilt $a_{m+m'} \leq a_m + a_{m'}$. Das Subadditiv-Limit-Theorem sagt aus, wenn eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subadditiv ist, dann existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n$, wobei als Grenzwert auch $-\infty$ zugelassen ist.

1.4 Monotonieigenschaften im Graphen $G \times \mathbb{Z}$

1.4.1 Wichtige Bezeichnungen im Zusammenhang des $G \times \mathbb{Z}$

In diesem Abschnitt soll sich mit dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$ beschäftigt werden, wobei G ein zusammenhängender Graph ist und $\mathbb{Z} \in \{\mathbb{Z}, ((-\infty, m]), [[m_1, m_2]] : m > 0, m_1 < 0 < m_2\}$. Fast immer wird an G die Voraussetzung gestellt, dass G endlich ist. (Häufig wird $G = C_k$ sein) Also im Prinzip geht es um eine Art von Bunkbed-Graphen mit mehreren (potenziell unendlich vielen) Ebenen.

Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein: Für $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man mit $E_n := \{(x, n) : x \in G\}$ die Knoten der n -ten Ebene von dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$. Kanten, deren beide Endpunkte in der gleichen Ebene liegen, sollen als horizontale Kanten bezeichnet werden. Die anderen Kanten sollen als vertikale Kanten bezeichnet werden. Mit $K(E_n)$ bezeichnen wir alle horizontalen Kanten der Ebene und alle (eventuell vorhandenen) Kanten, die vertikal die Ebene mit der darunterliegenden Ebene verbinden. Genauer für $n, n-1 \in \mathbb{Z}$ sei $K(E_n) := \{\{(x, n), (y, n)\} : x, y \in G\} \cup \{\{(x, n), (x, n-1)\} : x \in G\}$ und für $n \in \mathbb{Z}, n-1 \notin \mathbb{Z}$ sei $K(E_n) := \{\{(x, n), (y, n)\} : x, y \in G\}$.

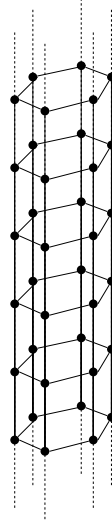


Abbildung 1.3: Der Graph $C_6 \times \mathbb{Z}$

Klar ist, wenn G endlich ist, dass bei dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 kein Knoten in einem unendlich großen Cluster liegt: Würde

ein Knoten in einem unendlichen Cluster liegen, so müsste entweder immer ein Knoten in jeder Ebene über dem Knoten mit dem Knoten verbunden sein oder in jeder Ebene darunter (da G endlich ist). Damit müsste in jeder Ebene darüber oder darunter mindestens eine der vertikalen Kanten vorhanden sein. Da die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis für jede Ebene gleich $1 - (1 - p)^k$ ist (falls G k Knoten hat), folgt, dass kein Knoten in einem unendlichen Cluster liegt. Insbesondere ist dann $p_c(G \times \mathbb{Z}) = 1$, wenn G endlich ist.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass ein Knoten aus G mit 0 bezeichnet wird. Mit $\mathbf{0}$ soll immer der Knoten $(0, 0)$ bezeichnet werden.

Definition 1.3 Ein Knoten aus $G \times \mathbb{Z}$ soll infiziert genannt werden, wenn dieser mit dem Knoten $\mathbf{0}$ verbunden ist. Sonst heißt der Knoten uninfiziert.

Definition 1.4 Wir bezeichnen mit $Z_n^{G \times \mathbb{Z}}$ die Anzahl der mit $(0, 0)$ verbundenen Knoten in der Ebene E_n eines Graphen $G \times \mathbb{Z}$. Genauer ist $Z_n^{G \times \mathbb{Z}} = \#\{\mathbf{0} \leftrightarrow (x, n) : x \in G\}$ für $n \in \mathbb{Z}$, wobei zugelassen wird, dass $Z_n = \infty$ ist. Wenn klar ist, um welchen Graphen es sich handelt, schreiben wir Z_n anstatt $Z_n^{G \times \mathbb{Z}}$.

Es scheint anschaulich so zu sein, wenn man den Graphen $G \times \mathbb{Z}$ betrachtet, dass folgende Vermutung richtig ist:

Vermutung 1.6 Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist im Fall $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$

$$\mathbb{E}[Z_n] > \mathbb{E}[Z_{n+1}]$$

Im Abschnitt 4.1 wird die Vermutung noch genauer betrachtet.

Anstatt nur die Anzahl der verbundenen Knoten auf einer Ebene zu betrachten, kann man auch die Verbindungsfunktion betrachten. Aufgrund der Struktur des Graphen kann man folgende Vermutung äußern:

Vermutung 1.7 Betrachte den Graphen $G \times \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in G$ gilt

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n + 1))$$

In der obigen Allgemeinheit wird es hier nicht bewiesen, aber es wird später gezeigt (für bestimmte endliche Graphen G), wenn n groß genug ist, dann gilt die obige Vermutung. Die Vermutung bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten mit dem entsprechenden Knoten in einer weiter entfernten Ebene verbunden ist, abnimmt, je weiter die Knoten voneinander entfernt sind. Wir haben also eine Art von Monotonie der Verbindungsfunktion.

Wie man am folgenden Lemma sieht, kann man offensichtlich aus Vermutung 1.7 Vermutung 1.6 erhalten:

Lemma 1.5 *Sei G ein Graph und sei $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $a \in G$ gilt:*

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$$

Dann ist auch

$$\mathbb{E}[Z_n] > \mathbb{E}[Z_{n+1}]$$

Beweis

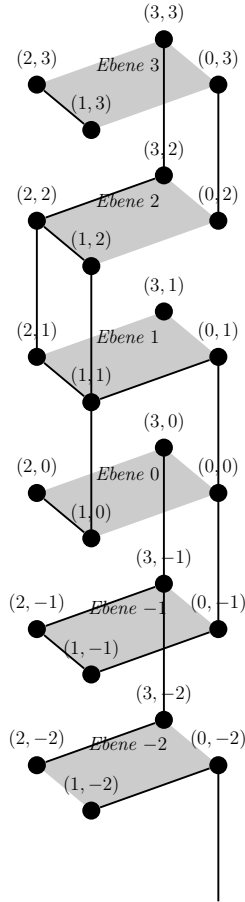
Man hat für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{E}[Z_n] = \sum_{x \in G} P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(x, n)) > \sum_{x \in G} P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(x, n+1)) = \mathbb{E}[Z_{n+1}] \quad \square$$

Um sich Vermutung 1.6 später zu nähern, betrachten wir ein anderes Problem, welches damit verwandt ist. Dafür führen wir den Begriff des Musters einer Ebene ein (ab jetzt setzen wir für den Rest des Abschnittes G endlich voraus):

Definition 1.6 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph und $n \in \mathbb{N}_0$:*

- Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $A, B_1, \dots, B_l \subseteq V(G)$. Wir nennen ein Tupel $M = (A, \{B_1, \dots, B_l\})$ ein (Ebenen-)Muster von G , wenn A, B_1, \dots, B_l eine Partition von den Knoten von G ist, wobei wir zulassen, dass $A = \emptyset$ oder $l = 0$ ist. D.h. $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_l = V(G)$ und $B_i \neq \emptyset$, $A \cap B_i = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
- Sei $\mathcal{Z} \in \{\mathbb{Z}, ((-\infty, m], [[m_1, m_2]] : m > 0, m_1 < 0 < m_2\}$. Wir sagen auf einer Ebene $n \geq 0$ des Graphen $G \times \mathcal{Z}$ liegt das (einseitige) Muster $M = (A, \{B_1, \dots, B_l\})$ vor, wenn in dem Teilgraphen $G \times \{\dots, 0, 1, \dots, n\}$ (bzw. im Teilgraphen $G \times \{m_1, \dots, 0, 1, \dots, n\}$ für $\mathcal{Z} = [[m_1, m_2]]$) folgendes gilt: Alle Knoten aus $A \times \{n\}$ sind mit dem Knoten $(0, 0)$ über einen offenen Pfad verbunden und alle Knoten aus $B_i \times \{n\}$ sind über einen offenen Pfad miteinander verbunden für jedes i . Darüber hinaus gilt für i, j mit $i \neq j$, dass kein Knoten aus $B_i \times \{n\}$ mit einem Knoten aus $B_j \times \{n\}$ verbunden ist und für alle i ist kein Knoten aus $A \times \{n\}$ mit einem Knoten aus $B_i \times \{n\}$ verbunden.
- Es soll das (einseitige) Muster auf Ebene n mit $X_n^{G \times \mathbb{Z}}$ bezeichnet werden. Falls klar ist, welcher Graph gemeint ist, wird auch X_n statt $X_n^{G \times \mathbb{Z}}$ geschrieben.

Beispiel 1.1

In der linken Kantenperkolation des Graphen $C_4 \times \mathbb{Z}$ hat man z.B. folgende Muster:

Auf Ebene 0 ist das Muster $(\{0, 3\}, \{\{1, 2\}\})$

Auf Ebene 1 ist das Muster $(\{0, 1, 2\}, \{\{3\}\})$

Auf Ebene 2 ist das Muster $(\{1, 2, 3\}, \{\{0\}\})$

Auf Ebene 3 ist das Muster $(\{3\}, \{\{0\}, \{1, 2\}\})$

Man beachte, dass nicht alle Muster auftreten können. Z.B. für den Graphen $C_4 \times \mathbb{Z}$ kann das Muster $(\{0, 2\}, \{\{1, 3\}\})$ nicht auftreten. Denn hier sind die Knoten 0 und 2 und die Knoten 1 und 3 im Graphen $G \times \{\dots, 0, 1, \dots, n\}$ miteinander verbunden. Aufgrund der Struktur des Graphen müssten sich die beiden Pfade schneiden, die die jeweiligen beiden Knoten verbinden. Dies hätte zur Folge, dass alle Knoten miteinander verbunden wären. Deshalb ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 1.7 Sei wieder G ein endlicher zusammenhängender Graph.

- Wir nennen M ein gültiges (einseitiges) Ebenenmuster, wenn es eine Kantenkonfiguration des Graphen $G \times \mathbb{Z}$ und eine Ebene $n \geq 0$ gibt, so dass auf Ebene n das (einseitige) Ebenenmuster M vorliegt. Die Menge aller gültigen Ebenenmuster bezeichnen wir mit $\mathbf{M}(G)$.
- Weiter bezeichnen wir $\mathbf{M}^0(G) = \{(A, \{B_1, \dots, B_l\}) \in \mathbf{M}(G) : A = \emptyset\}$ (also alle gültigen Muster, die keinen Knoten mit dem Knoten $(0, 0)$

verbunden haben) und $\mathbf{M}^1(G) = \mathbf{M}(G) \setminus \mathbf{M}^0(G)$. Wenn von infizierten Mustern gesprochen wird, sollen immer die Muster aus $\mathbf{M}^1(G)$ gemeint sein. Mit uninfizierten Mustern sind die Muster aus $\mathbf{M}^0(G)$ gemeint.

Man beachte, sollte M ein gültiges Ebenenmuster sein, welches auf der Ebene n vorkommen kann, dann kann das Muster auch auf jeder Ebene darüber vorkommen: Sind nämlich in $K(E_{n+1})$ keine horizontalen Kanten vorhanden und alle vertikalen Kanten vorhanden, so gibt es auf der Ebene n und $n+1$ das gleiche Muster.

Ist n groß genug, so müsste mit sehr großer Wahrscheinlichkeit auf der Ebene n ein Muster aus $\mathbf{M}^0(G)$ auftreten. Es soll sich aber jetzt eher mit den Mustern aus $\mathbf{M}^1(G)$ beschäftigt werden. Folgende Vermutung scheint sinnvoll zu sein (bewiesen wird diese Vermutung im Unterabschnitt 4.3.5 mit einer Einschränkung an den Graphen G), die eine Art von Monotonie des Vorhandenseins von Mustern auf verschiedenen Ebenen zeigt:

Vermutung 1.8 *Für einen endlichen zusammenhängenden Graphen G gilt: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $M \in \mathbf{M}^1(G)$ und $p \in (0, 1)$:*

$$P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$$

Dass diese Aussage nicht für alle n gilt, liegt daran, dass bestimmte Muster erst ab einer bestimmten Ebene auftreten können. Z.B. haben auf der 0-ten Ebene alle Muster den Knoten 0 infiziert. In Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3 wird sich mit dieser Vermutung befasst. Dann wird auch für den Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ eine Abschätzung für das n angegeben.

Falls Vermutung 1.8 gilt, so gilt Vermutung 1.7 für n groß genug, wie man später an Lemma 1.13 und Lemma 1.14 sieht.

Man erhält schon für relativ einfache Graphen sehr viele (gültige) Muster. Für den Graphen $C_3 \times \mathbb{Z}$ ist z.B. (für diesen Graphen sind alle Muster gültig, wie man jeweils leicht sieht):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(C_3) = & \{(\{\}, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}), (\{\}, \{\{0, 1\}, \{2\}\}), (\{\}, \{\{0, 2\}, \{1\}\}), (\{\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{0\}\}), (\{\}, \{\{0, 1, 2\}\}), (\{0\}, \{\{1, 2\}\}), (\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\}), \\ & (\{1\}, \{\{0, 2\}\}), (\{1\}, \{\{0\}, \{2\}\}), (\{2\}, \{\{0, 1\}\}), (\{2\}, \{\{0\}, \{1\}\}), \\ & (\{0, 1\}, \{\{2\}\}), (\{0, 2\}, \{\{1\}\}), (\{1, 2\}, \{\{0\}\}), (\{0, 1, 2\}, \{\{\}\})\} \end{aligned}$$

In Abhängigkeit der Anzahl der Knoten von G kann man die Anzahl der gültigen Muster abschätzen:

Proposition 1.8 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph mit $\#V(G) = k$. Dann gilt:*

$$2^k \leq \#\mathbf{M}(G) \leq \frac{1}{e} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{l!} \quad (1.4)$$

Beweis

Eine Obergrenze ist die Anzahl aller Muster (also die Anzahl aller gültigen und ungültigen Muster.). Sei Δ irgendein Symbol mit $\Delta \notin V(G)$. Es soll nun eine Bijektion zwischen den Partitionen von $V(G) \cup \{\Delta\}$ und den Mustern von G angegeben werden. Sei $\{B_1, \dots, B_m\}$ eine Partition von $V(G) \cup \{\Delta\}$. Sei B_j die Menge, die Δ enthält. Dann ordne der Partition das Muster $(B_j \setminus \{\Delta\}, \{B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_m\})$ zu. Offensichtlich ist dies eine bijektive Abbildung zwischen den Partitionen einer $k+1$ elementigen Menge und allen Mustern. Sei \mathcal{B}_{k+1} die Anzahl von Partitionen einer $k+1$ elementigen Menge. (\mathcal{B}_{k+1} heißt Bellsche Zahl). Nach der Dobiński-Formel ist $\mathcal{B}_{k+1} = \frac{1}{e} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{l!}$ (siehe z.B. [Rot64]). Damit erhält man die obere Schranke.

Als eine triviale Untergrenze für die Anzahl von gültigen Mustern macht man sich klar, dass für jede Teilmenge A von $V(G)$ das Muster $M = (A, B)$ mit $B := \{\{b\} : b \in V(G) \setminus A\}$ ein gültiges Muster ist. Dies erhält man dadurch, dass bei $K(E_1)$ alle Kanten vorhanden sind und bei $K(E_2)$ genau die Kanten $\{(x, 2), (x, 1)\}$ mit $x \in A$ vorhanden sind. Damit ist 2^k eine untere Grenze für $\#\mathbf{M}(G)$. \square

Bemerkung 1.9 Für den vollständigen Graphen K_k gilt, dass für $\#\mathbf{M}(K_k)$ die obere Schranke aus Proposition 1.8 angenommen wird, da alle Muster gültig sind. (siehe dazu auch die später folgende Bemerkung 4.42 im Unterabschnitt 4.3.1). Im Abschnitt 4.2 wird für den Graphen C_k für k -klein die genaue Anzahl gültiger Muster angegeben.

Damit man den Rechenaufwand für Rechnungen mit dem Computer bzw. CAS reduziert, werden wir teilweise mehrere Muster als äquivalent auffassen und somit muss man nur weniger Muster untersuchen. Was hier unter äquivalenten Mustern zu verstehen ist, soll nun erklärt werden.

Zur Erinnerung: Ein Graphautomorphismus eines Graphen G ist eine bijektive Abbildung Φ von $V(G)$ nach $V(G)$, sodass für alle $u, v \in V(G)$ $\{u, v\} \in E(G)$ genau dann, wenn $\{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(G)$ ist. Damit können wir definieren, was wir unter äquivalenten Mustern verstehen:

Definition 1.10 Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph.

- Zwei Muster $M_1 = (A, \{B_1, \dots, B_l\})$, M_2 sind äquivalent, wenn es einen Automorphismus Φ auf G gibt, sodass $M_2 = (\Phi(A), \{\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_l)\})$ ist. Dabei ist für $C = \{c_1, \dots, c_m\} \subseteq V(G)$, $\Phi(C) = \{\Phi(c_1), \dots, \Phi(c_m)\}$.
- Bezeichne mit $[M]$ die Äquivalenzklasse eines Musters und mit $[\mathbf{M}(G)]$ die Menge aller Äquivalenzklassen aller gültigen Muster. Entsprechend bezeichne mit $[\mathbf{M}^1(G)]$ und $[\mathbf{M}^0(G)]$ die zugehörigen Mengen der Äquivalenzklassen zur Menge $\mathbf{M}^1(G)$ und $\mathbf{M}^0(G)$.

Aufgrund der Definition ist die Mächtigkeit von $\mathbf{M}(G)$ gleich oder kleiner als die Mächtigkeit von $[\mathbf{M}(G)]$ mal der Anzahl der Automorphismen von G . Für $\mathbf{M}^1(G)$ und $\mathbf{M}^0(G)$ gelten die analogen Aussagen. So ist z.B.

$$[\mathbf{M}(C_3)] = \{[(\{\}, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\})], [(\{\}, \{\{0, 1\}, \{2\}\})], [(\{\}, \{\{0, 1, 2\}\})], [(\{0\}, \{\{1, 2\}\})], [(\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\})], [(\{0, 1\}, \{\{2\}\})], [(\{0, 1, 2\}, \{\{\}\})]\}$$

Also hat man $\#[M(C_3)] = 7$, aber $\#M(C_3) = 15$ (vgl. die Auflistung von $\mathbf{M}(C_3)$ oben).

Für den Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ wären die äquivalenten Ebenenmuster genau die Ebenenmuster, die durch Drehung und Spiegelung entstehen. (Daher sind es die Graphenautomorphismen der Form $x \mapsto x + m \bmod k$ und $x \mapsto -x + m \bmod k$ mit $m \in \{0, \dots, k-1\}$)

Natürlich kann man auch eine zu Vermutung 1.8 analoge Vermutung für $[\mathbf{M}^1(G)]$ aufstellen:

Vermutung 1.9 *Für einen endlichen zusammenhängenden Graphen G gilt: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $[M] \in [\mathbf{M}^1(G)]$ und $p \in (0, 1)$:*

$$P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} \in [M]) > P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} \in [M])$$

Klar ist es, dass das n_0 aus Vermutung 1.9 kleiner oder gleich dem n_0 aus Vermutung 1.8 ist.

Es soll noch kurz eine andere Art von Mustern eingeführt werden, die den ganzen Graphen berücksichtigen (also auch die Kanten über der Ebene) und somit die Verbindungen einer Ebene unter Beachtung des ganzen Graphen beschreiben:

Definition 1.11 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph, sei $\mathcal{Z} \in \{\mathbb{Z}, ((-\infty, m], [[m_1, m_2]] : m > 0, m_1 < 0 < m_2\}$ und $n \in \mathcal{Z}$:*

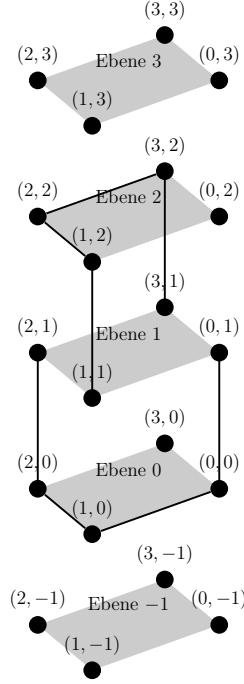
- *Wir sagen auf einer Ebene n des Graphen $G \times \mathcal{Z}$ liegt das **zweiseitige** Muster $M = (A, \{B_1, \dots, B_l\})$ vor, wenn in dem Graphen $G \times \mathcal{Z}$ folgendes gilt: Alle Knoten aus $A \times \{n\}$ sind mit dem Knoten $(0, 0)$ über einen offenen Pfad verbunden und alle Knoten aus $B_i \times \{n\}$ sind über einen offenen Pfad miteinander verbunden für jedes i . Darüber hinaus gilt für i, j mit $i \neq j$, dass kein Knoten aus $B_i \times \{n\}$ mit einem Knoten aus $B_j \times \{n\}$ verbunden ist und für alle i ist kein Knoten aus $A \times \{n\}$ mit einem Knoten aus $B_i \times \{n\}$ verbunden.*
- *Es soll das zweiseitige Muster auf Ebene n mit $\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}}$ bezeichnet werden. Falls klar ist, welcher Graph gemeint ist, wird auch \tilde{X}_n statt $\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}}$ geschrieben.*

- Wir nennen M ein **gültiges zweiseitiges** Ebenenmuster, wenn es eine Kantenkonfiguration und Ebene n im Graphen $G \times \mathbb{Z}$ gibt, sodass M auf Ebene n als zweiseitiges Ebenenmuster vorliegt. Die Menge aller gültigen zweiseitigen Ebenenmuster bezeichnen wir mit $\tilde{M}(G)$.
- Weiter bezeichnen wir $\tilde{M}^0(G) = \{(A, \{B_1, \dots, B_l\}) \in \tilde{M}(G) : A = \emptyset\}$ (also alle gültigen zweiseitigen Muster, die keinen Knoten mit dem Knoten $(0, 0)$ verbunden haben) und $\tilde{M}^1(G) = \tilde{M}(G) \setminus \tilde{M}^0(G)$.

Bemerkung 1.12 Im Gegensatz zu einseitigen Mustern ist hier $n \in \mathbb{Z}$ anstatt $n \in \mathbb{N}$. Denn im Gegensatz zu einseitigen Mustern macht die Betrachtung $n < 0$ Sinn.

Es wird noch darauf hingewiesen, dass jedes gültige einseitige Ebenenmuster auch ein gültiges zweiseitiges Ebenenmuster ist. Wenn in dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$ ein einseitiges Ebenenmuster auf Ebene n auftritt, tritt dieses auf der Ebene n auch als ein zweiseitiges Ebenenmuster auf, wenn man die Kantenperkolation des Graphen $G \times \mathbb{Z}$ so abändert, sodass alle Kanten aus $K(E_{n+1})$ geschlossen sind.

Dass es nicht nur gleich viele, sondern im Allgemeinen mehr gültige zweiseitige Ebenenmuster gibt als einseitige Ebenenmuster, kann man z.B. bei dem Graphen $C_4 \times \mathbb{Z}$ sehen. Das Muster $(\{0, 2\}, \{\{1, 3\}\})$ ist ein zweifaches Ebenenmuster von $C_4 \times \mathbb{Z}$, aber nicht ein einseitiges Ebenenmuster von $C_4 \times \mathbb{Z}$. Die Begründung dafür, dass dies kein einseitiges Muster ist, wurde oben schon gegeben. In folgender Kantenperkolation tritt dieses Muster als zweiseitiges Muster auf Ebene 1 auf:



Die obere und die untere Schranke aus (1.4) für einseitige Ebenenmuster gelten auch für zweiseitige Ebenenmuster.

Natürlich kann man analog zur Vermutung 1.8 folgende Vermutung aufstellen:

Vermutung 1.10 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph G . Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $M \in \tilde{\mathbf{M}}^1(G)$ und $p \in (0, 1)$:*

$$P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$$

Man kann direkt aus Vermutung 1.8 Vermutung 1.10 erhalten, wie man an dem folgenden Lemma sieht:

Lemma 1.13 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph und sei $p \in (0, 1)$. Gibt es $n \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $M \in \mathbf{M}^1(G)$:*

$$P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M),$$

dann gilt auch für alle $M \in \tilde{\mathbf{M}}^1(G)$:

$$P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$$

Beweis

Sei $M \in \tilde{\mathcal{M}}(G)$, $p \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann hat man:

$$\begin{aligned} P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M) &= \sum_{M' \in \tilde{\mathcal{M}}^1(G)} P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M') P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M') \\ &< \sum_{M' \in \tilde{\mathcal{M}}^1(G)} P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M') P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M') = P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) \end{aligned}$$

Dabei gilt $P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M') = P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M')$, da $P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = \cdot | X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M')$ nur von dem Zustand von $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} K(E_i)$ und $P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = \cdot | X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M')$ nur von dem Zustand von $\bigcup_{i=n}^{\infty} K(E_i)$ abhängt. Der Graph mit den Knoten $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$ und den Kanten $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} K(E_i)$ ist isomorph zu dem Graphen mit den Knoten $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$ und den Kanten $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} K(E_i)$. Aufgrund der Translationsinvarianz von P_p erreicht man die gewünschte Gleichheit. \square

Wenn Vermutung 1.10 richtig ist, dann ist auch Vermutung 1.7 für große n richtig, wie man am folgenden Lemma sieht:

Lemma 1.14 *Gilt Vermutung 1.10 für einen endlichen zusammenhängenden Graphen G , so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $a \in G$ gilt:*

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) &= \sum_{M \in \tilde{\mathcal{M}}^1(G): M=(A, \dots) \text{ mit } a \in A} P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) \\ &> \sum_{M \in \tilde{\mathcal{M}}^1(G): M=(A, \dots) \text{ mit } a \in A} P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M) \\ &= P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1)) \end{aligned} \quad \square$$

1.4.2 Beziehung zwischen den Problemen

Wir betrachten zuerst Zusammenhänge zwischen der Vermutung für Bunkbed-Graphen und den Graphen $G \times \mathbb{Z}$:

Proposition 1.15 *Sei die Vermutung 1.3 für alle endlichen (zusammenhängenden) Graphen richtig und sei G ein zusammenhängender endlicher Graph, dann gilt*

(a) für alle $m \geq n \geq 0$:

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n+1))$$

(b)

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n+1))$$

Beweis

(a) Sei $G' := G \times [[n-m, n]]$. Der Graph $\text{BB}^T(G')$ mit $T := \{(x, n) : x \in G\}$ ist isomorph zu dem Graphen $G \times [[n-m, n+1+m]]$: Man ordnet den Knoten $((x, y), 0)$ aus dem Graphen $\text{BB}^T(G')$ den Knoten (x, y) und $((x, y), 1)$ aus dem Graphen $\text{BB}^T(G')$ den Knoten $(x, 2n+1-y)$ zu.

Somit ist

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{\text{BB}^T(G')} ((a, n), 0)) = P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n))$$

und

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{\text{BB}^T(G')} ((a, n), 1)) = P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n+1)).$$

Aus Vermutung 1.3 folgt nun die Behauptung.

(b) Sei $A_m := \{(0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n)\}$ und $B_m := \{(0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n+1)\}$. Nach dem ersten Teil ist (für $0 \leq n \leq m$) $P_p(A_m) \geq P_p(B_m)$. Da $A_m \uparrow \{(0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n)\}$ und $B_m \uparrow \{(0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n+1)\}$ für $m \rightarrow \infty$ folgt aus der σ -Stetigkeit von P_p

$$\begin{aligned} & P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n)) - P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}} (a, n+1)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n)) - P_p((0, 0) \leftrightarrow^{G \times [[n-m, n+1+m]]} (a, n+1)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Anstatt bei den Graphen $G \times \mathbb{Z}$ Knoten in der Vertikalen zu vergleichen, kann man aus den Bunkbed-Vermutungen auch eine Aussage für den Vergleich der Knoten von $G \times \mathbb{Z}$ in der Horizontalen herleiten:

Proposition 1.16 Sei Vermutung 1.3 richtig, $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \{0, \dots, k-1\}$,

(a) und darüber hinaus sei $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \leq 0 \leq m_2$. Wir betrachten den Graphen $C_{2k} \times [[m_1, m_2]]$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $m_1 \leq n \leq m_2$:

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]} (x, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]} (x+1, n))$$

(b) dann gilt für den Graphen $C_{2k} \times \mathbb{Z}$ und für $n \in \mathbb{N}$:

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x + 1, n))$$

Beweis

(a) Wir definieren den Graphen $G' := [[0, k - 1]] \times [[m_1, m_2]]$. Weiter sei $T := \{(0, m) : m \in \{m_1, \dots, m_2\}\} \cup \{(k - 1, m) : m \in \{m_1, \dots, m_2\}\}$. Dann ist der Bunkbed-Graph $\text{BB}^T(G')$ isomorph zu dem Graphen $C_{2k} \times [[0, m]]$: Denn man kann den Knoten $((x, n), 0)$ von $\text{BB}^T(G')$ dem Knoten (x, n) und den Knoten $((x, n), 1)$ von $\text{BB}^T(G')$ dem Knoten $(2k - x - 1, n)$ zuordnen. Somit folgt die Behauptung aus Vermutung 1.3.

(b) Sei $A_{m_1, m_2} := \{(0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]}(x, n)\}$ und $B_{m_1, m_2} := \{(0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]}(x + 1, n)\}$. Nach dem ersten Teil ist (für $m_1 \leq 0 \leq n \leq m_2$) $P_p(A_{m_1, m_2}) \geq P_p(B_{m_1, m_2})$. Da $A_{m_1, m_2} \uparrow \{(0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x, n)\}$ und $B_{m_1, m_2} \uparrow \{(0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x + 1, n)\}$ für $m_1 \rightarrow -\infty$ und $m_2 \rightarrow \infty$ folgt aus der σ -Stetigkeit von P_p

$$\begin{aligned} & P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x, n)) - P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times \mathbb{Z}}(x + 1, n)) \\ &= \lim_{m_1 \rightarrow -\infty} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]}(x, n)) - P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_{2k} \times [[m_1, m_2]]}(x + 1, n)) \geq 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Man beachte, dass für $k = 1, 2$ der Graph G' ein Outerplane-Graph ist und nach einem in Unterabschnitt 2.1.2 vorgestellten bekannten Resultat die Aussage für $C_2 \times [[0, m]]$ und $C_4 \times [[0, m]]$ gilt.

Natürlich könnte man, wie man in den vorigen Beweisen sieht, auch aus Aussagen über Graphen $G \times [[m_1, m_2]]$ Aussagen über spezielle Bunkbed-Graphen erhalten.

Ebenfalls kann man durch Grenzwertbetrachtung des Graphen $[[0, k]] \times \mathbb{Z}$ oder $C_k \times \mathbb{Z}$ für $k \rightarrow \infty$ einen Zusammenhang zu dem Graphen \mathbb{Z}^2 herstellen. Würde die Vermutung 1.7 gelten, dann hätte man auch Vermutung 1.5 für den Fall $d = 2$. (unter Umständen mit \leq statt $<$) Es soll nun ein Beweis angegeben werden für den Fall C_k . Der Fall $[[0, k]] \times \mathbb{Z}$ geht analog.

Satz 1.17 Sei $0 < p < p_c(\mathbb{Z}^2)$ und $a, n \in \mathbb{N}_0$:

Gilt für alle $k \geq a$

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n + 1))$$

Dann gilt:

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(a, n)) \geq P_p((0, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(a, n + 1))$$

Beweis

Sei A_m das Ereignis, dass im Graphen \mathbb{Z}^2 der Cluster $C(0)$ von $(0,0)$ im Teilgraphen $[-m, m] \times \mathbb{Z}$ liegt. Weiter sei B_m das Ereignis, dass im Graphen $C_{2m+2} \times \mathbb{Z}$ der Cluster von $(0,0)$ eine Teilmenge von $\{(x, z) : x \in \{0, \dots, m\} \cup \{2m+1, 2m, \dots, m+2\}, z \in \mathbb{Z}\}$ ist (also der Cluster enthält keinen Knoten mit $m+1$ in der ersten Komponente, bzw. der Cluster liegt im Teilgraphen $(C_{2m+2} \setminus \{m+1\}) \times \mathbb{Z}$). Nach Wahl von A_m und B_m ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $P_p((0,0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(0,n) \cap A_m) = P_p((0,0) \leftrightarrow^{C_{2m+2}}(0,n) \cap B_m)$ (da der Graph $[-m, m]$ und der Teilgraph $C_{2m+2} \setminus \{m+1\}$ isomorph sind) und somit ist

$$\begin{aligned} & \limsup_{m \in \mathbb{N}} |P_p((0,0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(a,n)) - P_p((0,0) \leftrightarrow^{C_{2m+2} \times \mathbb{Z}}(a,n))| \\ &= \limsup_{m \in \mathbb{N}} |P_p(\{(0,0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(a,n)\} \cap A_m^c) - P_p(\{(0,0) \leftrightarrow^{C_{2m+2} \times \mathbb{Z}}(a,n)\} \cap B_m^c)| \\ &\leq \limsup_{m \in \mathbb{N}} P_p(A_m^c) + P_p(B_m^c) = \limsup_{m \in \mathbb{N}} 2P_p(A_m^c) = 0 \end{aligned}$$

Man beachte, dass $P_p(B_m^c) = P_p(A_m^c)$ und wegen $p < p_c(\mathbb{Z}^2)$ $P(A_m^c) \rightarrow 0$. Analog kann man zeigen, dass

$$\limsup_{m \in \mathbb{N}} |P_p((0,0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^2}(a,n+1)) - P_p((0,0) \leftrightarrow^{C_{2m+2} \times \mathbb{Z}}(a,n+1))| = 0.$$

Somit folgt die Behauptung aus der Voraussetzung. \square

Bemerkung 1.18 Man sieht auch, dass aus Proposition 1.15 und Satz 1.17 folgt, wenn die Vermutung 1.3 für alle endlichen (zusammenhängenden) Graphen richtig ist, dann gilt auch die Vermutung 1.5 für $d = 2$.

Kapitel 2

Bekannte Resultate

In diesem Kapitel soll auf bekannte Resultate über die Monotonie der Verbindungsfunktion eingegangen werden. Die Beweise der einzelnen Resultate sollen nur skizzenhaft in unterschiedlicher Ausführlichkeit vorgestellt werden, da man die Bewesideen später nicht mehr aufgreift. Die kompletten Beweise findet man in den angebenen Literaturquellen.

2.1 Bunkbed-Graphen

2.1.1 Hilfsmittel für die Bunkbed-Vermutung

Es gilt folgender Satz, der zeigt, dass man eigentlich nur Vermutung 1.4 zeigen muss:

Satz 2.1 [Lin11] *Angenommen, die Vermutung 1.4 gilt für alle Minoren¹ G' von G und alle $T \subset V(G')$, dann gilt die Vermutung 1.2 für alle $p \in [0, 1]$ und $T \subset V(G)$.*

Die grobe Beweisidee von Satz 2.1 ist es, für jede Kante darauf zu bedingen, ob die Kante auf beiden Ebenen, überhaupt nicht oder nur an einer Stelle (also nur oben oder unten) auftritt. Im Falle, dass die Kante überhaupt nicht auftritt, kann man die Kante auf dem Graphen entfernen. Sollte die Kante sowohl oben als auch unten auftreten, so kann man die beiden Endpunkte der Kante zu einem Knoten vereinigen. Insgesamt erhält man also einen Graphen, der nur Kanten entweder oben oder unten hat. Für Details siehe [Lin11].

2.1.2 Outerplane-Graph

Ein Outerplane-Graph ist ein planarer Graph², dessen Knoten alle an der Außenregion angrenzen (aber nicht unbedingt alle Kanten). Nach [CH67] ist ein Graph genau dann ein Outerplane-Graph, wenn der Graph keinen zu K_4 oder $K_{2,3}$ homomorphen Teilgraphen enthält.

In diesem Abschnitt soll der Beweis der Vermutung 1.2 für Outerplane-Graphen aus [Lin11] grob nachvollzogen werden. Hier soll nur ein kurzer Überblick gegeben werden und die Beweisideen vorgestellt werden. Insbesondere werden hier nicht Multigraphen berücksichtigt, die bei einer Kantenkontraktion auftreten können. Der Beweis basiert darauf, die Vermutung 1.4 zu zeigen. D.h.

$$P_p((u, 0) \leftrightarrow^{BB(G)} (v, 0) | A_T, B) \geq P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T, B)$$

für Outerplane-Graphen zu zeigen. Nach Satz 2.1 gilt dann die Vermutung 1.2 für Outerplane-Graphen (da jeder Minor von einem Outerplane-Graphen

¹Minoren sind Graphen, die aus einem Graphen entstehen, wenn man Kanten weglässt oder zwei verbundene Knoten zu einem neuen Knoten vereinigt. Dabei wird die verbundene Kante entfernt und der neue Knoten ist mit allen anderen Knoten verbunden, womit auch die beiden ursprünglichen Knoten verbunden waren (auch Kantenkontraktion genannt).

²Dabei ist ein planarer Graph ein Graph, den man in der Ebene zeichnen kann, ohne dass sich zwei Kanten kreuzen.

auch ein Outerplane-Graph ist). Der Beweis in [Lin11] ist ein Widerspruchsbeweis und basiert auf der Angabe eines minimalen Gegenbeispiels und der daraus folgenden Konstruktion eines noch kleineren Graphen. Dabei ist ein minimales Gegenbeispiel ein Graph G , für den es eine Menge T gibt, sodass die Vermutung nicht gilt, aber für alle Minoren von G die Vermutung für alle möglichen T gilt. (Hier wird nicht darauf eingegangen, dass auch Multigraphen entstehen können.)

Um einen kleineren Graphen zu konstruieren, der ebenfalls ein Gegenbeispiel darstellt, werden unter anderem folgende drei Operationen benutzt:

1. Sind zwei Knoten $x, y \in V(G)$ beide in T und miteinander verbunden, so würde es egal sein, ob die Kante $\{(x, 0), (y, 0)\}$ oder die Kante $\{(x, 1), (y, 1)\}$ vorhanden ist. Somit kann man x und y zu einem neuen Knoten vereinigen (und der vereinigte Knoten ist auch in T).
2. Sei $x \in V(G)$ nicht gleich u oder v und auch nicht in T und $\deg(x) = 2$. Den Knoten x kann man dann nur für einen Weg zwischen $(u, 0)$ und (v, e) ($e \in \{0, 1\}$) benutzen, wenn die beiden Kanten von x im Bunkbed-Graph entweder beide oben oder unten vorhanden sind. Also ist auch der Graph ohne x und den zugehörigen Kanten ein Gegenbeispiel (Fall: beide Kanten sind nicht oben oder unten) oder der Graph, der aus einer Kantenkontraktion mit einer Kante von x hervorgeht. (Fall: beide Kanten oben oder unten)
3. Die dritte Operation ist etwas komplexer, da man sogar zu vier verschiedenen Graphen reduziert, wovon mindestens ein Graph ein Gegenbeispiel ist. Bei dieser Operation hat man im Graphen drei Knoten $x, y, z \in V(G)$, die jeweils paarweise eine gemeinsame Kante im Graphen G haben (d.h. die Knoten x, y, z bilden ein Dreieck im Graphen G) und $\deg(z) = 2$. Dann vereinigt man zwei Knoten davon zu einem Knoten (Fall: wenn nicht alle drei Kanten oben oder alle drei Kanten unten im Bunkbed-Graphen sind) oder entfernt den Knoten z mit den zugehörigen Kanten (Fall: alle drei Kanten sind oben oder alle drei Kanten sind unten im Bunkbed-Graphen).

Nun zum Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass so ein Minimalbeispiel eines Graphen 2-fach zusammenhängend ist.³ Hierfür wird gezeigt, falls es einen Kno-

³2-fach zusammenhängend bedeutet, wenn man einen Knoten aus dem Graphen entfernt, dieser immer noch zusammenhängend ist.

ten $x \in G$ gibt, sodass $G \setminus x$ ⁴ nicht zusammenhängend ist, ist einer der beiden entstehenden Graphen auch ein Gegenbeispiel für die Vermutung.

Dadurch, dass G 2-fach zusammenhängend ist, gibt es zwei disjunkte Pfade zwischen u und v , die nur Kanten, die am Außengebiet angrenzen, benutzen (insbesondere ist dann der Grad von u größer oder gleich 2).

Mit einer Sehne von G ist eine Kante gemeint, die nicht an das Außengebiet angrenzt. Nun zeigt man, dass es keine zwei Knoten x und y in G gibt, sodass gilt: $\{x, y\}$ ist eine Sehne von G und wenn man diese beiden Knoten aus dem Graphen entfernt, dass dann u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. (Insbesondere zeigt dies, dass keine Sehne u oder v als Endknoten hat.) Dies wird bewiesen, indem man das Gegenteil annimmt, d.h. es gibt eine Sehne $\{x, y\}$, deren Knoten x, y auf einem Pfad zwischen u und v liegen, der nur Kanten aus dem Außengebiet benutzt. Seien z_1, \dots, z_m die Knoten, die zwischen x und y auf diesem Pfad liegen (man kann auch $\deg(z_i) = 2$ voraussetzen). Wenn ein $z_i \notin T$, kann man die 2. Operation benutzen, um ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Wäre $m > 1$ und $\{z_1, \dots, z_m\}$, so kann man mit der 1. Operation ein Gegenbeispiel konstruieren. Bei $m = 1$ und $\{z_1, \dots, z_m\}$ kann man die dritte Operation benutzen, um ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Also kann man davon ausgehen, dass es eine solche Sehne nicht gibt.

Eine direkte Konsequenz aus dem nicht Vorhandensein einer Sehne mit den obigen Eigenschaften ist es, dass bei dem Graphen der Grad von u 2 ist.

Nun betrachtet man die beiden Knoten x_u und y_u , die mit u verbunden sind. Man kann nun bei der Kante $\{u, x_u\}$ bedingen, ob diese im Bunkbed-Graphen nur oben oder unten vorhanden ist. Da der Grad von u gleich 2 ist, würde man im Fall, dass die Kante nur oben vorhanden ist, die Kante $\{u, x_u\}$ nicht benutzen können (man kann sich leicht überlegen, dass $u \notin T$ ist). Also kann man annehmen, dass $\{u, x_u\}$ nur unten vorhanden ist, da man im Falle, dass die Kante nur oben vorhanden ist, einfach die Kante streichen kann und somit einen kleineren Graphen erhält. Analog kann man davon ausgehen, dass $\{u, y_u\}$ nur unten vorhanden ist.

Wäre $\{x_u, y_u\} \notin E(G)$, so folgt aus der Outerplanität des Graphen und der obigen Nichtexistenz einer Sehne, deren Entfernung zu einem Graphen führt, bei dem u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen, dass entweder der Knoten x_u oder y_u den Grad 2 hat und man kann, indem man diesen Knoten mit u vereinigt, ein kleineres Gegenbeispiel konstruieren.

Im Falle $\{x, y\} \in E(G)$ würde man ebenfalls darauf bedingen, ob $\{x, y\}$ nur oben oder unten vorhanden ist und wieder die Aussage über die Sehne

⁴Mit $G \setminus x$ ist der Graph gemeint, der aus dem Graphen G entsteht, indem man den Knoten x und alle zugehörigen Kanten entfernt.

benutzen, um einen kleineren Graphen zu konstruieren, der ein Gegenbeispiel darstellt.

2.1.3 Vollständiger Graph

Wir vollziehen den Beweis in [HL19] von Vermutung 1.2 für den K_{n+1} nach: Man wählt O.B.d.A $v = n$. Klar ist, wenn $u \in T$ oder $v \in T$, dann ist $P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 0)) = P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1))$. Ist $u \in T$ so folgt dies aus der Symmetrie des Bunkbed-Graphen. Im anderen Fall ist $(v, 0) \leftrightarrow (v, 1)$ und somit sind entweder beide Ereignisse erfüllt oder nicht.

Da man auch offensichtlich annehmen kann, dass $u \neq v$, kann man aufgrund der Symmetrie des K_{n+1} davon ausgehen, dass man u zufällig (gleichverteilt und unabhängig von der Kantenperkolatation) aus $\{0, \dots, n-1\} \setminus T$ auswählt. Wegen $P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 0) | A_T) = P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T)$ für $u \in T$ kann man sogar davon ausgehen, dass man u zufällig (gleichverteilt und unabhängig von der Kantenperkolatation) in $\{0, \dots, n-1\}$ wählt.

Also reicht es, Vermutung 1.2 zu zeigen für $v = n$ und u wird zufällig (gleichverteilt) in $\{0, \dots, n-1\}$ gewählt und $(v, 0) \not\leftrightarrow (v, 1)$ (d.h. $v \notin T$).

Sei O eine Konfiguration auf $\{(x, e), (y, e)\} : x, y \in \{0, \dots, n-1\}, e \in \{0, 1\}$ (d.h. auf alle horizontalen Kanten ohne Endpunkte in n). Ohne das es Verwirrung stiftet, soll mit O auch das Ereignis ausgedrückt werden, dass auf den horizontalen Kanten (ohne Endpunkt n) die Konfiguration O vorliegt. Somit ist die zu zeigende Aussage (Gleichung (1.1)) äquivalent zu:

$$\sum_O P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 0) | A_T, O) P(O | A_T) \geq \sum_O P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T, O) P_p(O | A_T)$$

Sei $A := \{(u, 0) \leftrightarrow (v, 0)\}$ und $B := \{(u, 0) \leftrightarrow (v, 1)\}$. Weiter sei $\{c_1, \dots, c_n\}$ die Cluster von O bzgl. des Teilgraphen ohne die Knoten $(v, 0)$ und $(v, 1)$.

Man beachte

$$\begin{aligned} & P_p(A | A_T, O) - P_p(B | A_T, O) \\ &= P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 1), (v, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T, O) - P_p((u, 0) \leftrightarrow (v, 0), (v, 0) \leftrightarrow (v, 1) | A_T, O), \end{aligned}$$

da im Falle $(v, 0) \leftrightarrow (v, 1)$ entweder sowohl A und B eintreten oder beide Ereignisse nicht eintreten und $\{(u, 0) \leftrightarrow (v, 1)\} = B^c$, $\{(u, 0) \leftrightarrow (v, 0)\} = A^c$. Man beachte, dass $(u, 0) \leftrightarrow (v, 1)$ bedeutet, dass $(v, 1)$ keine offene Kante zum Cluster von $(u, 0)$ hat. Weiter bedeutet $(v, 0) \leftrightarrow (v, 1)$, dass es keinen Cluster aus O gibt mit dem sowohl der Knoten $(v, 0)$ als auch $(v, 1)$ verbunden sind (beachte $v \notin T$). Das bedeutet, dass z.B. $(u, 0) \leftrightarrow (v, 1), (v, 0) \leftrightarrow (v, 1)$ genau dann auftritt, wenn es ein i gibt, sodass $(u, 0) \in c_i$ und der Knoten $(v, 1)$

nicht mit c_i verbunden ist und für alle $i \neq j$ sind $(v, 0)$ und $(v, 1)$ nicht gleichzeitig mit c_j verbunden. Damit ist:

$$\begin{aligned} & P_p(A|A_T, O) - P_p(B|A_T, O) \\ &= \sum_i P_p((u, 0) \in c_i | A_T, O) (P_p((v, 1) \not\sim c_i | A_T, O) - P_p((v, 0) \not\sim c_i | A_T, O)) \\ &\quad \cdot P_p(\neg \exists i \neq j : (v, 0) \sim c_j \sim (v, 1) | A_T, O) \end{aligned}$$

Nun reicht es zu zeigen, dass dieser Ausdruck größer als 0 ist. Da aufgrund der Symmetrie sich die Wahrscheinlichkeit nicht ändert, wenn man simultan $(u, 0)$ mit $(u, 1)$ vertauscht und $(v, 0)$ mit $(v, 1)$ hat man:

$$\begin{aligned} & P_p(A|A_T) - P_p(B|A_T) \\ &= \frac{1}{2} \sum_O \left(\left(\sum_i P((u, 0) \in c_i | A_T, O) - P_p((u, 1) \in c_i | A_T, O) \right) (P_p((v, 1) \not\sim c_i | A_T, O) \right. \\ &\quad \left. - P_p((v, 0) \not\sim c_i | A_T, O)) P_p(\neg \exists i \neq j : (v, 0) \sim c_j \sim (v, 1) | A_T, O) \right) P_p(O|A_T) \end{aligned}$$

Sei $\#^e c_i$ die Anzahl der Knoten aus c_i auf Ebene e . (insbesondere $\#^1 c_i + \#^2 c_i = \# c_i$)

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten (u, e) in c_i liegt, gleich $\frac{\#^e c_i}{n}$ ist. Weiter ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten (v, e) mit dem Cluster c_i nicht verbunden ist, gleich $(1 - p)^{\#^e c_i}$. Somit hat man

$$\begin{aligned} & P_p((u, 0) \in c_i | A_T, O) - P_p((u, 1) \in c_i | A_T, O) (P_p((v, 1) \not\sim c_i | A_T, O) - P_p((v, 0) \not\sim c_i | A_T, O)) \\ &= \left(\frac{\#^1 c_i}{n} - \frac{\#^2 c_i}{n} \right) ((1 - p)^{\#^2 c_i} - (1 - p)^{\#^1 c_i}) \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass dieser Ausdruck immer größer gleich 0 ist. Damit folgt auch nach oben $P_p(A|A_T) - P_p(B|A_T) \geq 0$.

2.2 Gitter \mathbb{Z}^d

Dass die Verbindungsfunktion bei dem Graphen \mathbb{Z}^d asymptotisch exponentiell fällt, zeigt folgender Satz aus [CCC91]:

Satz 2.2 *Sei $p < p_c(\mathbb{Z}^d)$. Dann existieren zwei Konstanten $K(p) \geq 1$ und $\alpha(p) > 0$, sodass für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ mit $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq n^{\frac{3}{4}-\epsilon}$ (wobei $\epsilon > 0$) gilt:*

$$P_p((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow (\mathbf{a}, n)) = K(p) \frac{1}{(\alpha(p)\pi n)^{\frac{d-1}{2}}} \exp\left(-\frac{n}{\xi(p)} - \frac{\mathbf{a}^2}{\alpha(p)n}\right) (1 + O(\max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^{4\epsilon}}\}))$$

Dabei ist $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm und \mathbf{a}^2 das Skalarprodukt von dem Vektor \mathbf{a} mit sich selbst.

Der (umfangreiche) Beweis, der hier nur grob angedeutet wird, baut darauf auf, dass man analog zur Verbindungsfunktion andere Arten von Verbindungen betrachtet, die sich asymptotisch ähnlich verhalten (im subkritischen Fall). E_l soll die Menge aller Knoten sein, dessen letzte Koordinate l ist. D.h. $E_l := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_d = l\}$. Bezeichne mit C die Menge aller Knoten, die über einem offenen Pfad mit $\mathbf{0}$ verbunden sind, dessen Knoten (des Pfades) nur Knoten benutzt, deren letzte Komponente nur Einträge zwischen 0 und n hat. D.h. $C := \{y \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{0} \leftrightarrow \bigcup_{i=0}^n E_i y\}$. Sei $y \in E_m$ mit $m > 0$. Betrachte die Ereignisse $h_y = \{E_0 \cap C = \{\mathbf{0}\}, E_m \cap C = \{y\}\}$ und $c_y = \{E_0 \cap C = \{\mathbf{0}\}, E_m \cap C = \{y\}, \forall 0 < l < n : E_l \cap C \geq 2\}$ (im Wesentlichen sind es die Ereignisse, die nur Verbindungen in einem Streifen betrachten und bei der ersten und letzten Ebene nur ein Knoten (im Streifen) mit $\mathbf{0}$ verbunden ist. Dabei fordert man bei c_y noch zusätzlich, dass bei jeder Ebene (außer der ersten und letzten Ebene) immer mindestens zwei Knoten im Streifen mit dem Ursprung verbunden sind. Dann wird ausgenutzt, dass zwischen den beiden Ereignissen die Beziehung

$$P(h_{(\mathbf{a}, n)}) = (1-p)^{-2(d-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{(\mathbf{b}, i) \in E_i} P(c_{(\mathbf{b}, i)}) P(h_{(\mathbf{a}-\mathbf{b}, n-i)})$$

gilt. Aus diesem Zusammenhang kann man eine Integraldarstellung von $P(h_{(\mathbf{a}, n)})$ herleiten:

$$P_p(h_{(\mathbf{a}, n)}) = (1-p)^{2(d-1)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \int_{[-\pi, \pi]^{d-1}} \frac{1}{1 - \hat{c}(z, \mathbf{k}; p)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}}$$

Dabei ist

$$\hat{c}(z, \mathbf{k}; p) := (1-p)^{-2(d-1)} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{d-1}, n \in \mathbb{N}} P_p(c_{(\mathbf{a}, n)}) z^n \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \quad (2.1)$$

eine Transformation von $P_p(c_{(\mathbf{a},n)})$. Mit dieser Integraldarstellung leitet man eine zu Satz 2.2 ähnliche Asymptotik für $P(h_{(\mathbf{a},n)})$ her, wobei man die analytischen Eigenschaften von $\hat{c}(z, \mathbf{k}; p)$ benutzt. Indem man analog zu (2.1) Transformation $\hat{h}(z, \mathbf{k}; p)$ und $\hat{\tau}(z, \mathbf{k}; p)$ von $P_p(h_{(\mathbf{a},n)})$ bzw. von $P_p((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow (\mathbf{a}, n))$ definiert, kann man zwei Funktionen mit gewissen analytischen Eigenschaften finden, sodass

$$\hat{\tau}(z, \mathbf{k}; p) = A_1(z, \mathbf{k}; p) + A_2(z, \mathbf{k}, p)\hat{h}(z, \mathbf{k}; p)$$

gilt. Bei der Herleitung werden noch andere Arten von Verbindungen als h_y betrachtet. Indem man diesen Zusammenhang ausnutzt, kann man Satz 2.2 herleiten.

Mit Hilfe von Satz 2.2 hat [LPS15] folgenden Spezialfall von Vermutung 1.5 bewiesen:

Satz 2.3 *Es existiert ein $p'(d)$, sodass für alle $p < p'(d)$ und $n \in \mathbb{N}$:*

$$P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{0}, n)) > P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow^{\mathbb{Z}^d} (\mathbf{0}, n+1))$$

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zum einen wird gezeigt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $p_0 \in (0, 1)$ gibt, sodass die Gleichung 2.3 für alle $n \geq n_0$ und $p \leq p_0$ gilt. Dazu wird mit Satz 2.2 der Quotient von $P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow (\mathbf{0}, n))$ und $P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow (\mathbf{0}, n+1))$ gebildet und gezeigt, dass dieser für ein $p \leq p_0$ und $n \geq n_0$ kleiner als 1 ist. Dann wird für $n < n_0$ eine Schranke für die p 's bestimmt, sodass die Aussage für diese n 's gilt. Dazu wird eine Ungleichung benutzt, die im Wesentlichen darauf basiert, dass für $p \rightarrow 0$ $P((\mathbf{0}, 0) \leftrightarrow (\mathbf{0}, n)) = p^n + O(p^{n+3})$ (es gibt nur einen Weg der Länge n und alle anderen Pfade sind mindestens $n+3$ lang und die Anzahl der Pfade wachsen nur exponentiell in der Länge).

Kapitel 3

Quasi-Stationäre Verteilungen

In diesem Abschnitt soll auf ein Ergebnis aus der Literatur zu Markovketten eingegangen werden, welches später benutzt wird (in Unterabschnitt 4.3.3), um einen Teil des Beweises von Vermutung 1.8 zu führen.

3.1 Totalvariation

In diesem Abschnitt sollen ein paar bekannte Definitionen und Eigenschaften eingeführt werden, die man später benutzt.

Definition 3.1 (siehe z.B. [Kle13]) Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, \mathcal{A}) . Die Totalvariationsnorm von μ ist dann

$$\|\mu\|_{TV} := \sup\{\mu(A) - \mu(A^c) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Bemerkung 3.2 Man sollte beachten, dass in der Literatur (insbesondere, wenn man Wahrscheinlichkeitsmaße betrachtet und an der entsprechenden Metrik interessiert ist) (z.B. in [LP17, Kapitel 4.1]) häufig die Totalvariationsnorm als genau halb so groß definiert wird, wie sie hier definiert wurde.

Hat man diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße, so kann man die zugehörige Metrik der Totalvariationsnorm wie folgt darstellen: (siehe z.B. [LP17, Kapitel 4.1])

Lemma 3.3 Seien ν und ν' zwei diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{A}) und sei $A := \{x \in \Omega : \nu(x) > \nu'(x)\}$. Dann gilt:

$$\|\nu - \nu'\|_{TV} = \sum_{x \in \Omega} |\nu(x) - \nu'(x)| = 2 \sum_{x \in A} \nu(x) - \nu'(x) = 2 \sum_{x \in A^c} \nu'(x) - \nu(x)$$

Beweis

Sei $B \subseteq \Omega$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \nu(A) - \nu'(A) - (\nu(A^c) - \nu'(A^c)) &= \sum_{x \in A} (\nu(x) - \nu'(x)) - \sum_{x \in A^c} (\nu(x) - \nu'(x)) \\ &\geq \sum_{x \in B} (\nu(x) - \nu'(x)) - \sum_{x \in B^c} (\nu(x) - \nu'(x)) = \nu(B) - \nu'(B) - (\nu(B^c) - \nu'(B^c)) \end{aligned}$$

Damit folgt wegen

$$\begin{aligned} \nu(A) - \nu'(A) - (\nu(A^c) - \nu'(A^c)) &= \sum_{x \in A} (\nu(x) - \nu'(x)) - \sum_{x \in A^c} (\nu(x) - \nu'(x)) \\ &= \sum_{x \in \Omega} |\nu(x) - \nu'(x)| \end{aligned}$$

das erste Gleichheitszeichen der Behauptung. Die anderen beiden Gleichheitszeichen folgen direkt aus der Tatsache, dass ν und ν' Wahrscheinlichkeitsmaße sind. \square

Für einen Beweis im nächsten Abschnitt wird noch ein Resultat gebraucht, welches aus der Literatur bekannt ist (siehe z.B. [LP17, Kapitel 4.2]).

Lemma 3.4 *Seien μ_1 und μ_2 zwei diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem gleichen Raum Ω . Dann ist μ mit*

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \min(\mu_1(x), \mu_2(x)), & x = y \\ \frac{(\mu_1(x) - \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\})(\mu_2(y) - \min\{\mu_1(y), \mu_2(y)\})}{\frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV}}, & x \neq y \end{cases}$$

eine Kopplung von μ_1 und μ_2 (d.h.: μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega \times \Omega$ und μ hat die beiden Randverteilungen μ_1 und μ_2). Weiter ist

$$\frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} = \sum_{x, y \in \Omega, x \neq y} \mu(x, y).$$

Beweis

Sei $A := \{x \in \Omega : \mu_1(x) > \mu_2(x)\}$. Man beachte für $x \in A^c$ und $x \neq y$ ist $\mu(x, y) = 0$. Analog ist für $y \in A$ und $x \neq y$ ist $\mu(x, y) = 0$. Damit ist wegen Lemma 3.3

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in \Omega, x \neq y} \mu(x, y) &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in A^c} \mu(x, y) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV}} \sum_{x \in A} \sum_{y \in A^c} (\mu_1(x) - \mu_2(x))(\mu_2(y) - \mu_1(y)) \\ &= \sum_{x \in A} (\mu_1(x) - \mu_2(x)) = \frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \end{aligned}$$

Somit ist die letzte Aussage gezeigt. Da ebenfalls wegen Lemma 3.3

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \mu(x, x) &= \sum_{x \in \Omega} \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) = \sum_{x \in A} \mu_2(x) + \sum_{x \in A^c} \mu_1(x) \\ &= 1 - \sum_{x \in A^c} (\mu_2(x) - \mu_1(x)) = 1 - \frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \end{aligned}$$

ist mit der vorigen Gleichung μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Für $x \in A$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \Omega} \mu(x, y) &= \mu(x, x) + \sum_{y \in \Omega, x \neq y} \mu(x, y) \\ &= \mu_2(x) + \sum_{y \in A^c} \frac{(\mu_1(x) - \mu_2(x))(\mu_2(y) - \mu_1(y))}{\frac{1}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV}} \\ &= \mu_2(x) + \mu_1(x) - \mu_2(x) = \mu_1(x) \end{aligned}$$

und für $x \in A^c$:

$$\sum_{y \in \Omega} \mu(x, y) = \mu(x, x) + \sum_{y \in \Omega, x \neq y} \mu(x, y) = \mu_1(x) + \sum_{y \in \Omega, x \neq y} 0 = \mu_1(x)$$

Also hat μ die Randverteilung μ_1 und analog behandelt man die Randverteilung μ_2 . \square

3.2 Quasi-Stationäre Verteilungen

Es soll sich in diesem Abschnitt auf Markovketten in diskreter Zeit mit endlichem Zustandsraum beschränkt werden, da für den weiteren Verlauf nur solche Markovketten betrachtet werden. Die Aussagen in diesem Abschnitt gelten auch fast immer allgemeiner, wie man in den zitierten Quellen nachlesen kann. Die Definition einer Markovkette wird als bekannt vorausgesetzt wie sie z.B. in [Kle13] zu finden ist.

Ist X_0, X_1, \dots eine Markovkette mit Zustandsraum E , so bezeichne für $x \in E$ bzw. für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E mit $P^x(\cdot)$ bzw. P^μ das Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\cdot | X_0 = x)$ bzw. $\sum_{x \in E} \mu(x) P(\cdot | X_0 = x)$.

Wichtig ist noch der Begriff quasi-stationäre Verteilung einer Markovkette, die wie folgt definiert ist (siehe z.B. [CMM13]):

Definition 3.5 *Sei eine Markovkette X_0, X_1, X_2, \dots mit einem endlichen Zustandsraum $E \cup \{\infty\}$ gegeben, dabei ist ∞ ein absorbierender Zustand. (d.h. $P(X_{n+1} = \infty | X_n = \infty) = 1$) Sei $Z := \inf\{n : X_n = \infty\}$.*

- (a) *Eine Verteilung ν auf E heißt quasi-stationäre Verteilung, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $A \subseteq E$ gilt:*

$$P^\nu(X_t \in A | Z > t) = \nu(A)$$

- (b) *Existiert eine Verteilung α auf E und gilt für jedes $x \in E$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^x(X_n \in \cdot | Z > n) = \alpha(\cdot)$$

so heißt α der Yaglom-Limes von X_0, X_1, \dots .

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen der quasi-stationären Verteilung und dem Yaglom-Limes zeigt folgendes Lemma (siehe z.B. auch [MV12]):

Lemma 3.6 *Sei eine Markovkette X_0, X_1, \dots mit einem endlichen Zustandsraum $E \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein absorbierender Zustand ist und α der Yaglom-Limes von X_1, X_2, \dots , dann ist α auch die eindeutige quasi-stationäre Verteilung von X_0, X_1, \dots .*

Beweis

Man kann dies einfach nachrechnen

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P^x(X_{n+t} = x | Z > n+t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^x(X_{n+t} = x)}{P^x(Z > n+t)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_y P^x(X_n = y) P^y(X_t = x)}{\sum_y P^x(X_n = y) P^y(Z > t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_y P^x(X_n = y | Z > n) P^y(X_t = x)}{\sum_y P^x(X_n = y | Z > n) P^y(Z > t)} \\
&= \frac{\sum_y \alpha(y) P^y(X_t = x)}{\sum_y \alpha(y) P^y(Z > t)} \\
&= \frac{P^\alpha(X_t = x)}{P^\alpha(Z > t)}
\end{aligned}$$

Also ist α eine quasi-stationäre Verteilung. Angenommen, β ist eine quasi-stationäre Verteilung, dann gilt

$$\begin{aligned}
\beta(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^\beta(X_t = x | Z > t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P^\beta(X_t = x)}{P^\beta(Z > t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_y \beta(y) P^y(X_t = x)}{\sum_y \beta(y) P^y(Z > t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_y \beta(y) P^y(X_t = x | Z > t) P^y(Z > t)}{\sum_y \beta(y) P^y(Z > t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_y \beta(y) \alpha(x) P^y(Z > t)}{\sum_y \beta(y) P^y(Z > t)} = \alpha(x)
\end{aligned}$$

Also gibt es nur eine quasi-stationäre Verteilung. □

Folgende Aussage gilt nach [CV16] (dort nur für stetige Markovketten formuliert, aber der Beweis gilt analog auch für diskrete Markovketten).

Satz 3.7 Sei eine Markovkette X_1, X_2, \dots mit einem endlichen Zustandsraum $E \cup \{\infty\}$ gegeben, dabei ist ∞ ein absorbierender Zustand. Sei $Z := \inf\{n : X_n = \infty\}$, $t_0 \in \mathbb{N}$, $c \in (0, 1]$ und ν eine Verteilung auf E . Weiter gelte für alle $x \in E$, $A \subseteq E$ und $t \geq t_0$

$$P^x(X_{t_0} \in A | Z > t) \geq c\nu(A) \quad (3.1)$$

Dann existiert eine Verteilung α , sodass für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen μ auf E und $t \in \mathbb{N}$:

$$\|P^\mu(X_t \in \cdot | Z > t) - \alpha(\cdot)\|_{TV} \leq 2(1-c)^{\lfloor \frac{t}{t_0} \rfloor} \quad (3.2)$$

gilt. Die Verteilung α ist sogar die eindeutig bestimmte quasi-stationäre Verteilung der Markovkette.

Beweis

Es wird größtenteils der angepasste Beweis von [CV16] wiedergegeben mit Modifikationen, da es teilweise etwas einfacher in diskreter als in stetiger Zeit geht. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

Zuerst der Zusatz der Eindeutigkeit:

Sei α so gewählt, dass diese die Ungleichung (3.2) für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E erfüllt. Somit gilt für alle $x \in E$ und $A \subset E$:

$$|P^x(X_t \in A) - \alpha(A)| \leq \|P^x(X_t \in \cdot | Z > t) - \alpha(\cdot)\|_{TV} \leq 2(1-c)^{\lfloor \frac{t}{t_0} \rfloor}$$

Wegen $c \in (0, 1]$ ist α ein Yaglom-Limes und nach Lemma 3.6 ist α die eindeutige quasi-stationäre Verteilung.

Deshalb reicht es, im Folgenden nur die Existenz von α in Ungleichung (3.2) zu zeigen.

1. Schritt: Zeige, dass man O.B.d.A. $t_0 = 1$ annehmen kann: Sei $Y_k := X_{kt_0}$. Somit gelten die Voraussetzungen des Satzes für Y_k (mit zugehöriger Variable $Z' := \inf\{k : Y_k = \infty\} = \inf\{k : X_{kt_0} = \infty\} = \inf\{k : Z \leq kt_0\}$) für $t_0 = 1$, denn Y_k ist eine Markovkette und

$$P^x(Y_1 \in A | Z' > t) = P^x(X_{t_0} \in A | Z > t_0 t) \geq c\nu(A)$$

Wenn der Satz für $t_0 = 1$ gilt, dann gibt es eine Verteilung α auf E für $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|P^\mu(Y_t \in \cdot | Z' > t) - \alpha(\cdot)\|_{TV} \leq 2(1-c)^t.$$

Damit gilt für $t = kt_0 + l$ mit $0 \leq l < t_0$ und $y \in E$:

$$\begin{aligned} P^\mu(X_t = y | Z > t) &= \frac{P^\mu(X_t = y)}{P^\mu(Z > t)} \\ &= \frac{\sum_b P^\mu(X_t = y | X_l = b) P^\mu(X_l = b)}{\sum_b P^\mu(Z > t | X_l = b) P^\mu(X_l = b)} = \frac{\sum_b P^b(Y_k = y) P^\mu(X_l = b)}{\sum_b P^b(Z' > k) P^\mu(X_l = b)} \\ &= \frac{\sum_b P^b(Y_k = y) \frac{P^\mu(X_l = b)}{1 - P^\mu(X_l = \infty)}}{\sum_b P^b(Z' > k) \frac{P^\mu(X_l = b)}{1 - P^\mu(X_l = \infty)}} = \frac{P^{\mu^l}(Y_k = y)}{P^{\mu^l}(Z' > k)} = P^{\mu^l}(Y_k = y | Z' > k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei μ^l eine Verteilung auf E ist mit $\mu^l(b) := \frac{P^\mu(X_l = b)}{1 - P^\mu(X_l = \infty)}$ für $b \in E$. Daraus folgt für $t = kt_0 + l$ mit $0 \leq l < t_0$:

$$\|P^\mu(X_t \in \cdot | Z > t) - \alpha(\cdot)\|_{TV} = \|P^{\mu^l}(Y_k \in \cdot | Z' > k) - \alpha(\cdot)\|_{TV} \leq 2(1-c)^k$$

und da $k = \lfloor \frac{t}{t_0} \rfloor$ folgt die Behauptung.

2. Schritt: Zeige, dass für alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ_1 und μ_2 auf E und alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|P^{\mu_1}(X_1 \in \cdot | Z > t) - P^{\mu_2}(X_1 \in \cdot | Z > t)\|_{TV} \leq 2(1 - c) \quad (3.4)$$

Aus der Voraussetzung (3.1) folgt für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle Verteilungen μ auf E :

$$\begin{aligned} P^\mu(X_1 \in \cdot | Z > t) &= \frac{P^\mu(X_1 \in \cdot, Z > t)}{P^\mu(Z > t)} = \frac{\sum_{x \in E} \mu(x) P^x(X_1 \in \cdot, Z > t)}{\sum_{x \in E} \mu(x) P^x(Z > t)} \\ &= \frac{\sum_{x \in E} \mu(x) P^x(X_1 \in \cdot | Z > t) P^x(Z > t)}{\sum_{x \in E} \mu(x) P^x(Z > t)} \geq \frac{\sum_{x \in E} \mu(x) c\nu(\cdot) P^x(Z > t)}{\sum_{x \in E} \mu(x) P^x(Z > t)} \\ &= c\nu(\cdot) \end{aligned}$$

Somit gilt für $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\|P^{\mu_1}(X_1 \in \cdot | Z > t) - P^{\mu_2}(X_1 \in \cdot | Z > t)\|_{TV} \\ &\leq \|P^{\mu_1}(X_1 \in \cdot | Z > t) - c\nu(\cdot)\|_{TV} + \|P^{\mu_2}(X_1 \in \cdot | Z > t) - c\nu(\cdot)\|_{TV} \\ &\leq 2(1 - c) \end{aligned}$$

Dabei hat man verwendet, dass nach (3.1) $P^{\mu_i}(X_t \in \cdot | Z > t) - c\nu(\cdot) \geq 0$ ist und somit nach Definition von $\|\cdot\|_{TV}$ ist $\|P^{\mu_i}(X_1 \in \cdot | Z > t) - c\nu(\cdot)\|_{TV} = 1 - c$. (da $P^{\mu_i}(X_t \in A | Z > t) - c\nu(A)$ am größten ist, wenn $A = \Omega$ ist)

3. Schritt: Zeige, dass für alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ_1 und μ_2 auf E und alle $t \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|P^{\mu_1}(X_t \in \cdot | Z > t) - P^{\mu_2}(X_t \in \cdot | Z > t)\|_{TV} \leq 2(1 - c)^t \quad (3.5)$$

Definiere $p_{s,t}^T(\mu, y) = P^\mu(X_{t-s} = y | Z > T - s)$, wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist und $y \in E$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $t, T \in \mathbb{N}$ mit $s \leq t \leq T$. Man beachte, dass wegen der Markov-Eigenschaft für $s \leq t \leq u \leq T$

folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in E} p_{s,t}^T(\mu, y) p_{t,u}^T(\delta_y, z) \\
&= \sum_{y \in E} \frac{P^\mu(X_{t-s} = y, Z > T - s)}{P^\mu(Z > T - s)} \frac{P^y(X_{u-t} = z, Z > T - t)}{P^y(Z > T - t)} \\
&= \sum_{y \in E} \frac{P^\mu(X_{t-s} = y)}{P^\mu(Z > T - s)} \frac{P^y(X_{u-t} = z, Z > T - t)}{P^y(Z > T - t)} \\
&= \sum_{y \in E} \frac{P^\mu(X_{t-s} = y)}{P^\mu(Z > T - s)} P^y(X_{u-t} = z, Z > T - t) \\
&= \sum_{y \in E} \frac{P^\mu(X_{t-s} = y, X_{u-s} = z, Z > T - s)}{P^\mu(Z > T - s)} = p_{s,u}^T(\mu, z)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Seien μ_1, μ_2 zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße auf E und $0 \leq t \leq T$. Dann ist mit Lemma 3.3:

$$\|p_{0,t}^T(\mu_1, \cdot) - p_{0,t}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV} = \sum_{z \in E} |p_{0,t}^T(\mu_1, z) - p_{0,t}^T(\mu_2, z)|$$

Durch Verwendung von (3.6) erhält man:

$$= \sum_{z \in E} \left| \sum_{y \in E} p_{0,t-1}^T(\mu_1, y) p_{t-1,t}^T(\delta_y, z) - \sum_{y \in E} p_{0,t-1}^T(\mu_2, y) p_{t-1,t}^T(\delta_y, z) \right|$$

Nun setzt man $\lambda_i(y) := p_{0,t-1}^T(\mu_i, y)$ und λ sei die Kopplung aus Lemma 3.4 von λ_1 und λ_2 , dann erhält man:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z \in E} \left| \sum_{y_1, y_2 \in E} \lambda(y_1, y_2) p_{t-1,t}^T(\delta_{y_1}, z) - \sum_{y_1, y_2 \in E} \lambda(y_1, y_2) p_{t-1,t}^T(\delta_{y_2}, z) \right| \\
&= \sum_{y_1, y_2 \in E} \lambda(y_1, y_2) \sum_{z \in E} |p_{t-1,t}^T(\delta_{y_1}, z) - p_{t-1,t}^T(\delta_{y_2}, z)| \\
&= \sum_{y_1, y_2 \in E, y_1 \neq y_2} \lambda(y_1, y_2) \sum_{z \in E} |p_{t-1,t}^T(\delta_{y_1}, z) - p_{t-1,t}^T(\delta_{y_2}, z)|
\end{aligned}$$

Wieder mit Lemma 3.3, Lemma 3.4 und (3.4) und nach Wahl von λ erhält man:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y_1, y_2 \in E, y_1 \neq y_2} \lambda(y_1, y_2) \|(p_{t-1,t}^T(\delta_{y_1}, \cdot) - p_{t-1,t}^T(\delta_{y_2}, \cdot))\|_{TV} \\
&\leq \sum_{y_1, y_2 \in E, y_1 \neq y_2} \lambda(y_1, y_2) 2(1 - c) = \|p_{0,t-1}^T(\mu_1, \cdot) - p_{0,t-1}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV} (1 - c)
\end{aligned}$$

Nun erhält man damit und nach (3.4) induktiv die Ungleichung (3.5):

$$\begin{aligned}
& \|P^{\mu_1}(X_T \in \cdot | Z > T) - P^{\mu_2}(X_T \in \cdot | Z > T)\|_{TV} \\
&= \|p_{0,T}^T(\mu_1, \cdot) - p_{0,T}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV} \\
&\leq \|p_{0,T-1}^T(\mu_1, \cdot), p_{0,T-1}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV}(1-c) \\
&\leq \|p_{0,T-2}^T(\mu_1, \cdot) - p_{0,T-2}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV}(1-c)^2 \\
&\leq \dots \leq \|p_{0,1}^T(\mu_1, \cdot) - p_{0,1}^T(\mu_2, \cdot)\|_{TV}(1-c)^{T-1} \leq 2(1-c)^T
\end{aligned}$$

Abschluss

Man beachte, dass analog zu (3.3) ist

$$P^x(X_{t+s} \in \cdot | Z > t+s) = P^{\mu^{x,s}}(X_t \in \cdot | Z > t)$$

mit passendem $\mu^{x,s}$. Also hat man nach (3.5):

$$\begin{aligned}
& \|P^x(X_t \in \cdot | Z > t) - P^x(X_{t+s} \in \cdot | Z > t+s)\|_{TV} \\
&= \|P^x(X_t \in \cdot | Z > t) - P^{\mu^{x,s}}(X_t \in \cdot | Z > t)\|_{TV} \leq 2(1-c)^t
\end{aligned}$$

Somit bildet $P^x(X_t \in \cdot | Z > t)$ für $t \rightarrow \infty$ eine Cauchyfolge. Damit existiert ein $\alpha^x(\cdot) := \lim_{t \rightarrow \infty} P^x(X_t \in \cdot | Z > t)$. Man beachte α^x ist wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wieder folgt aus (3.5):

$$\begin{aligned}
& \|\alpha^x - \alpha^y\|_{TV} = \left\| \lim_{t \rightarrow \infty} P^x(X_t \in \cdot | Z > t) - \lim_{t \rightarrow \infty} P^y(X_t \in \cdot | Z > t) \right\|_{TV} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \|P^x(X_t \in \cdot | Z > t) - P^y(X_t \in \cdot | Z > t)\|_{TV} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} 2(1-c)^t = 0
\end{aligned}$$

Also ist $\alpha^x = \alpha^y$ und $\alpha := \alpha^x$ ein Yaglom-Limes. Also nach Lemma 3.6 eine quasi-stationäre Verteilung. Damit ist nach (3.5)

$$\begin{aligned}
& \|P^{\mu_1}(X_t \in \cdot | Z > t) - \alpha\| = \|P^{\mu_1}(X_t \in \cdot | Z > t) - P^\alpha(X_t \in \cdot | Z > t)\| \\
&\leq 2(1-c)^t \quad \square
\end{aligned}$$

Kapitel 4

$C_k \times \mathbb{Z}$ und verwandte Graphen

In diesem Kapitel geht es darum, den Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ (und ähnliche Graphen) genauer zu untersuchen. Im ersten Abschnitt werden Ungleichungen zwischen der erwarteten Anzahl von infizierten Knoten auf den einzelnen Ebenen hergeleitet. Im zweiten und dritten Abschnitt werden Aussagen über das Monotonieverhalten der Muster auf den einzelnen Ebenen gemacht. Dabei wird im zweiten Abschnitt für kleine Graphen u.a. mit Hilfe des Computers das Monotonieverhalten der Muster auf den einzelnen Ebenen überprüft. Im dritten Abschnitt wird u.a. ein Beweis von Vermutung 1.8 für die Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ (und ähnliche Graphen) angegeben.

4.1 Erwartungswert der Anzahl infizierter Knoten

Im Folgenden betrachten wir den Graphen $G \times \mathbb{Z}$, wobei wir häufig für G sowohl C_k als auch \mathbb{Z}^{d-1} zulassen.

In diesem Abschnitt soll die Anzahl der mit $\mathbf{0}$ verbundenen Knoten auf den verschiedenen Ebenen verglichen werden. (vgl. Vermutung 1.6)

Damit man die Ergebnisse, die in diesem Abschnitt folgen, für etwas allgemeinere Graphen als $C_k \times \mathbb{Z}$ oder \mathbb{Z}^d formulieren kann, führen wir folgenden aus der Literatur bekannten Begriff (siehe z.B. [Nor94]) ein:

Definition 4.1 *Ein Graph heißt (knoten-)transitiv, wenn es für alle $x, y \in V(G)$ einen Graphautomorphismus Φ gibt mit $\Phi(x) = y$.*

Wenn im Folgenden von transitiven Graphen gesprochen wird, sind immer knoten-transitive Graphen gemeint.

Beispiel 4.1 *Man sieht leicht, dass die Graphen C_k, K_k und \mathbb{Z}^{d-1} transitive Graphen sind.*

Bemerkung 4.2

1. *Im Prinzip bedeutet Definition 4.1, dass bei einem transitiven Graph, der Graph von jedem Knoten ausgehend gleich aussieht. Insbesondere verändern sich Aussagen über die Verbundenheit mit einem bestimmten Knoten für die Graphen nicht, wenn wir einen anderen Knoten betrachten.*
2. *Wir halten noch eine Eigenschaft von transitiven Graphen fest, welche gleich im Beweis von Satz 4.3 benutzt wird: Bei transitiven Graphen gibt es für alle $x, y, y' \in V(G)$ genauso viele Automorphismen, die x auf y abbilden, wie Automorphismen, die x auf y' abbilden. Denn sind Φ und Φ' zwei unterschiedliche Automorphismen, die x auf y abbilden und ist Ψ ein Automorphismus, der y auf y' abbildet, dann sind $\Phi \circ \Psi$ und $\Phi' \circ \Psi$ zwei unterschiedliche Automorphismen, die x auf y' abbilden.*

Zuallererst wird gezeigt, dass es im Durchschnitt immer mehr Knoten auf der Ebene 0 gibt als auf jeder anderen Ebene. Später wird Vermutung 1.6 für kleine p gezeigt, wobei das p natürlich von dem Graphen G abhängt.

Zur Erinnerung: Z_i ist die Zufallsvariable aus Definition 1.4. Wir haben folgenden Satz:

Satz 4.3 *Sei G ein zusammenhängender transitiver Graph, dann ist für $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$:*

$$\mathbb{E}[Z_n] < \mathbb{E}[Z_0], \forall n > 0$$

und

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_n}{Z_0} \right] < 1, \forall n > 0$$

Beweis

Um den Beweis durchzuführen, führen wir folgende Begriffe ein:

Im Folgenden soll eine (endliche) Komponente eine Menge von Knoten eines endlichen zusammenhängenden nicht leeren Teilgraphen von $G \times \mathbb{Z}$ sein. Sei $\text{Aut}(G)$ die Menge der Graphautomorphismen auf G . Wir definieren auf der Menge der Komponenten folgende Äquivalenzrelation \sim :

$$K \sim K' \Leftrightarrow \exists \Phi \in \text{Aut}(G), b \in \mathbb{Z} \text{ mit } ((x, y) \in K \Leftrightarrow (\Phi(x), y + b) \in K')$$

Mit einer Komponentenform bezeichnen wir eine Äquivalenzklasse bezüglich \sim . Die zu einem Komponenten K gehörige Komponentenform (Äquivalenzklasse) wird mit $[K]$ bezeichnet.

Wir sagen, in einem Graphen mit Kantenperkolation liegt im Knoten x die Komponentenform $[K]$ vor, falls es ein $K' \in [K]$ gibt, sodass $C(x) = K'$.

Bezeichne mit C die Komponentenform im Punkt $\mathbf{0}$. Da $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlichen Cluster gibt, gleich 0 und somit hat man

$$\mathbb{E}[Z_i] = \sum_{[K]} \mathbb{E}[Z_i | C = [K]] P(C = [K]) \quad (4.1)$$

Für jede Komponente K definieren wir eine Folge $(c_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt. Wähle aus $[K]$ eine Komponente K' aus, die einen Knoten aus E_0 hat, aber keinen Knoten aus E_{-1} . Definiere dann $c_l := \#(E_l \cap K')$ (c_l ist also die Anzahl von Knoten der Komponenten in der l -ten Zeile, wobei fast alle c_i gleich 0 sind). Sei T so gewählt, dass es ein $\Phi \in \text{Aut}_G$ gibt mit $C(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in G \times \mathbb{Z} : (\Phi(x), y + T) \in K'\}$, also die Zeile des Clusters von $\mathbf{0}$, in der der Nullpunkt liegt. Aufgrund der Invarianz des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_p , ist bei gegebenem $C = [K]$ die Position der $\mathbf{0}$ in C gleichverteilt (siehe auch Bemerkung 4.2), d.h. $P_p(T = m | C = [K]) = \frac{c_m}{\sum_{i=0}^{\infty} c_i}$. Liegt der Knoten $\mathbf{0}$ in Zeile m , so gibt es c_{m+n} Knoten auf Ebene n . Somit hat man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n|C = [K]] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n|C = [K], T = m] \mathbb{P}(T = m|C = [K]) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n} \cdot \frac{c_m}{\sum c_i} = \frac{1}{\sum c_i} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n} \cdot c_m \leq \frac{1}{\sum c_i} \sqrt{\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n}^2\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2\right)} \\
&\leq \frac{1}{\sum c_i} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cdot \frac{c_m}{\sum c_i} = \mathbb{E}[Z_0|C = [K]]
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der ersten Ungleichung die Cauchy-Schwarz Ungleichung benutzt. Da es natürlich auch Komponentenformen gibt, für die sogar die echte Ungleichung gilt (z.B.: Für $K = \{\mathbf{0}\}$ ist $\mathbb{E}[Z_0|C = [K]] = 1$, aber $\mathbb{E}[Z_n|C = [K]] = 0$ für $n > 0$), erhält man aus (4.1) insgesamt $\mathbb{E}[Z_n] < \mathbb{E}[Z_0]$.

Nun betrachten wir die zweite Ungleichung: Mit der fast gleichen Argumentation wie oben erhält man:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{Z_0} | C = [K]\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{m+n}}{c_m} \frac{c_m}{\sum c_i} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{m+n}}{\sum c_i} \leq 1$$

und $\mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{Z_0}\right] = \sum \mathbb{E}\left[\frac{Z_n}{Z_0} | C = [K]\right] \mathbb{P}(C = [K]) < 1$ □

Bemerkung 4.4 Leider lässt sich der Beweis nicht auf den Vergleich anderer Ebenen erweitern, da im Allgemeinen $\mathbb{E}[Z_{n+1}|C = [K]] \not\leq \mathbb{E}[Z_n|C = [K]]$ ist, wie man z.B für $G = C_3$ und $K = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$ sehen kann: Z_2 ist unter der Bedingung $C = [K]$ nur ungleich 0, wenn der Nullpunkt in der untersten Zeile der Komponente K liegt. Da in der untersten Zeile 3 der 6 Knoten liegen und in der zweiten Zeile 2 Knoten liegen, hat man:

$$\mathbb{E}[Z_2|C = [K]] = \frac{3}{6} \cdot 2 = 1$$

Z_1 ist unter der Bedingung $C = [K]$ nur ungleich 0, wenn der Nullpunkt in einer der beiden unteren Zeilen liegt. Damit hat man:

$$\mathbb{E}[Z_1|C = [K]] = \frac{3}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{5}{6}$$

Somit ist hier $\mathbb{E}[Z_2|C = [K]] > \mathbb{E}[Z_1|C = [K]]$.

Es sollen nun die einzelnen Ebenen verglichen werden. Dazu wird eine Aussage, wie sie in [CCC91] zu finden ist, benutzt, die aber schon als Variante in [Ham57] auftaucht:

Proposition 4.5 *Sei G ein zusammenhängender transitiver Graph, dann gilt im Falle $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$:*

$$(a) \mathbb{E}[Z_n] \mathbb{E}[Z_1] \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}]$$

$$(b) p \mathbb{E}[Z_n] \mathbb{E}[Z_0] \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}]$$

In [CCC91] wurde (a) (für \mathbb{Z}^d) mit der Hammersley-Simon-Ungleichung bewiesen, welche meistens mit der BK-Ungleichung bewiesen wird. Hier wird ein etwas anderer Beweis angegeben, der die BK-Ungleichung nicht benutzt:

Beweis

Sei Y_n die Menge der mit dem Knoten $\mathbf{0}$ durch einen offenen Pfad, der komplett in $G \times ((-\infty, n])$ liegt, verbundenen Knoten. D.h. $Y_n = \{x \in V(G \times \mathbb{Z}) : x \leftrightarrow^{G \times ((-\infty, n])} \mathbf{0}\}$. Man beachte, dass Y_n fast sicher nur abzählbar viele Werte annimmt. (Fast sicher ist der Cluster von $\mathbf{0}$ endlich. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, sodass genau m Knoten mit dem Punkt $\mathbf{0}$ verbunden sind.)

Für $A \subset V(G \times \mathbb{Z})$ und $a \in A$ soll mit $G_{a,A}$ der Teilgraph von $G \times \mathbb{Z}$ mit den Knoten aus $V(G \times \mathbb{Z}) \setminus A \cup \{a\}$ und allen Kanten aus $E(G \times \mathbb{Z})$, die keinen Knoten in $A \setminus \{a\}$ haben (d.h. $E(G_{a,A}) := \{\{u,v\} \in E(G \times \mathbb{Z}) : u,v \in V(G \times \mathbb{Z}) \setminus A \cup \{a\}\}$) bezeichnet werden.

Man beachte, wenn $Y_n = A$ ist, dann geht jeder Pfad, der einen Knoten auf der Ebene $n+1$ mit dem Punkt $\mathbf{0}$ verbindet, durch einen Knoten aus $A_n := A \cap E_n$. Sei U_a mit $a \in A_n$ die Anzahl der mit dem Knoten a verbundenen Knoten auf der Ebene E_{n+1} im Graphen $G_{a,A}$. Da $\mathbb{E}[U_a | Y_n = A]$ kleiner gleich $\mathbb{E}[Z_1]$ ist (da man einen kleineren Graphen betrachtet und der Graph symmetrisch in der Höhe ist und G ein transitiver Graph ist), hat man:

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | Y_n = A] \leq \sum_{a \in A_n} \mathbb{E}[U_a | Y_n = A] \leq \#A_n \mathbb{E}[Z_1] \quad (4.2)$$

Sei U'_a für $a = (x, n) \in A_n$ die Anzahl mit dem Knoten $(x, n+1)$ verbundenen Knoten auf der Ebene E_{n+1} im Graphen $G_{(x,n+1), Y_n}$. Analog ist $\mathbb{E}[U'_a | Y_n = A]$

kleiner gleich $\mathbb{E}[Z_0]$ (da man ebenfalls einen kleineren Graphen betrachtet)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|Y_n = A] &\leq \sum_{(x,n) \in A_n} \mathbb{E}[U'_{(x,n)} 1_{\{(x,n) \sim (x,n+1)\}} | Y_n = A] \\
&= \sum_{(x,n) \in A_n} \frac{\mathbb{E}[U'_{(x,n)} 1_{\{(x,n) \sim (x,n+1)\}} 1_{\{Y_n = A\}}]}{\mathbb{P}(Y_n = A)} \\
&= \sum_{(x,n) \in A_n} \frac{\mathbb{E}[1_{\{(x,n) \sim (x,n+1)\}}] \mathbb{E}[U'_{(x,n)} 1_{\{Y_n = A\}}]}{\mathbb{P}(Y_n = A)} \quad (4.3) \\
&= \sum_{(x,n) \in A_n} \mathbb{P}((x,n) \sim (x,n+1)) \mathbb{E}[U'_{(x,n)} | Y_n = A] \\
&\leq \#A_n p \mathbb{E}[Z_0]
\end{aligned}$$

Dabei wurde beim zweiten Gleichheitszeichen benutzt, dass $U'_{(x,n)} 1_{\{Y_n = A\}}$ und $1_{\{(x,n) \sim (x,n+1)\}}$ unabhängig sind, da $U'_{(x,n)} 1_{\{Y_n = A\}}$ nicht vom Zustand der Kante $\{(x,n), (x,n+1)\}$ abhängt. (Y_n hängt nur vom Zustand der Kanten des Graphen $G \times ((-\infty, n])$ und $U'_{(x,n)}$ nur vom Zustand der Kanten im Graphen $G_{(x,n+1), Y_n}$, der im Fall $(x,n) \in Y_n$ nicht die Kante $\{(x,n), (x,n+1)\}$ enthält, ab.)

Sei $\tilde{Z}_n := Y_n \cap E_n$ die Anzahl der Knoten auf Ebene n , die mit dem Knoten $\mathbf{0}$ in dem Graphen $G \times ((-\infty, n])$ verbundenen sind. Mit (4.2) erhält man Aussage (a):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}] &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{A, \#A_n=i} \mathbb{E}[Z_{n+1}|Y_n = A] \mathbb{P}(Y_n = A) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{A, \#A_n=i} i \mathbb{E}[Z_1] \mathbb{P}(Y_n = A) \\
&= \mathbb{E}[Z_1] \mathbb{E}[\tilde{Z}_n] \leq \mathbb{E}[Z_1] \mathbb{E}[Z_n]
\end{aligned}$$

Wobei bei der letzten Ungleichung verwendet wurde, dass $\tilde{Z}_n \leq Z_n$, da Z_n sogar die Anzahl aller mit dem Knoten $\mathbf{0}$ verbundenen Knoten auf Ebene E_n und nicht nur die Anzahl der verbundenen Knoten im Graphen $G \times ((-\infty, n])$ auf Ebene E_n ist. Analog erhält man mit (4.3) auf die gleiche Weise Aussage (b). \square

Bemerkung 4.6 Die Aussage gilt auch, wenn man statt Z_n die im Beweis eingeführte ZV \tilde{Z}_n betrachtet.

Wir nutzen nun dies, um ein p_0 zu bestimmen, sodass Vermutung 1.6 für alle $p \leq p_0$ gilt. Dazu wird folgende Abkürzung eingeführt, die man im Beweis des nächsten Satzes verwendet:

Definition 4.7 Sei $\eta_G(m)$ die Anzahl der selbstvermeidenden Pfade (also alle Pfade, die jeden Knoten nur einmal enthalten) des Graphen $G \times \mathbb{Z}$ der Länge m , die in $\mathbf{0}$ starten und in E_1 enden.

Es gibt folgende Möglichkeit die Z_n 's zu vergleichen:

Satz 4.8 Sei G ein zusammenhängender transitiver Graph mit maximalem Grad d , dann gilt für den Graphen $G \times \mathbb{Z}$ und $p < \frac{1}{d+1}$:

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \frac{(d+2)p}{2 - 2(d+1)p} \mathbb{E}[Z_n]$$

Insbesondere ist für $p \leq \frac{2}{3d+4}$:

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \mathbb{E}[Z_n]$$

Ist G ein endlicher Graph mit k Knoten, dann gilt auch:

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] \leq pk \mathbb{E}[Z_n]$$

und für $p < \frac{1}{k}$

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \mathbb{E}[Z_n]$$

Beweis

Sei G ein transitiver Graph mit maximalem Grad d . Dann hat der Graph $G \times \mathbb{Z}$ einen maximalen Grad $d+2$.

Es ist $\eta_G(m) \leq (d+2) \cdot (d+1)^{m-1}/2$ (Man hat im ersten Schritt $d+2$ Möglichkeiten für den ersten Knoten des Pfades, danach maximal $(d+1)$ Möglichkeiten für den nächsten Knoten des Pfades. Man kann es noch durch 2 teilen, da aus Symmetriegründen genauso viele Pfade in E_{-1} wie in E_1 enden.) Man beachte für $m > 4$ gilt sogar die echte Ungleichung (da dann nicht jeder Pfad ein selbstvermeidender Pfad ist). Da die Wahrscheinlichkeit für einen offenen Pfad der Länge n p^n ist, und die Anzahl der auf E_1 infizierten Knoten kleiner gleich der Anzahl der vorhandenen Pfade ist, die in E_1 enden, hat man für $p < \frac{1}{d+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_1] &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \eta_G(m) p^m < \frac{d+2}{2d+2} \sum_{m=1}^{\infty} ((d+1)p)^m = \frac{d+2}{2d+2} \frac{(d+1)p}{1 - (d+1)p} \\ &= \frac{(d+2)p}{2 - 2(d+1)p} \end{aligned}$$

Mit der Proposition 4.5 (a) ($\mathbb{E}[Z_{n+1}] \leq \mathbb{E}[Z_n] \mathbb{E}[Z_1]$) folgt nun die erste Aussage (mit dem gleichen Argument, wie oben $\mathbb{E}[Z_1] < \infty$, sieht man auch, dass $p_c(G \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{d+1}$ ist). Da

$$\frac{(d+2)p}{2-2(d+1)p} \leq 1 \Leftrightarrow (3d+4)p \leq 2 \Leftrightarrow p \leq \frac{2}{3d+4}$$

und somit $\mathbb{E}[Z_1] \leq 1$ für $p \leq \frac{2}{3d+4}$ hat man in diesem Fall $\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \mathbb{E}[Z_n]$.

Ist G ein endlicher Graph mit k Knoten, dann kann man Proposition 4.5 (b) verwenden und erhält (da $Z_0 \leq k$)

$$\mathbb{E}[Z_{1+n}] \leq p \mathbb{E}[Z_n] \mathbb{E}[Z_0] \leq p \mathbb{E}[Z_n] k$$

Somit ist offensichtlich auch für $p < \frac{1}{k}$: $\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \mathbb{E}[Z_n]$ □

Bemerkung 4.9 Für endliche Graphen sollte man überprüfen, welche der möglichen Abschätzungen besser ist. So erhält man z.B. für C_k die Ungleichung $\mathbb{E}[Z_n] > \mathbb{E}[Z_{n+1}]$ mit der ersten Abschätzung für $p \leq \frac{1}{5}$ und mit der zweiten Abschätzung für $p \leq \frac{1}{k}$. Daher ist in diesem Fall für $k \leq 4$ die zweite Abschätzung besser und für $k > 5$ die erste Abschätzung.

Man kann noch für etwas größere p (mit dem Computer) zeigen, dass $\mathbb{E}[Z_{n+1}] < \mathbb{E}[Z_n]$. Wir zeigen dies am Beispiel des Graphen $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Das gezeigte Verfahren lässt sich aber analog für alle transitiven zusammenhängenden Graphen mit maximalem endlichen Grad übertragen. Sei

$$f(m) := \sum_{n=1}^{m-1} \eta_{\mathbb{Z}}(n) p^n, \quad g(m) := \sum_{n=m}^{\infty} \eta_{\mathbb{Z}}(n) p^n$$

Nach dem obigen Beweis gilt $\mathbb{E}[Z_1] \leq f(m) + g(m)$. Wir wollen nun $f(m)$ und $g(m)$ abschätzen: Mit dem Computer kann man Werte von $\eta_{\mathbb{Z}}(n)$ für kleine n bestimmen (den Quelltext findet man im Anhang): Dazu wurden mit einer Breitensuche alle selbstvermeidenden Pfade der Länge n berechnet und geschaut, ob diese in einem Punkt von E_1 enden.

In der folgenden Tabelle sind die berechneten Werte aufgeführt:

n	$\eta_{\mathbb{Z}}(n)$	n	$\eta_{\mathbb{Z}}(n)$
1	1	12	24052
2	4	13	60974
3	8	14	156936
4	16	15	399892
5	38	16	1032920
6	96	17	2642676
7	236	18	6844452
8	588	19	17567752
9	1468	20	45593776
10	3732	21	117334038
11	9398	22	305018140

Somit kann man für kleine m $f(m)$ konkret ausrechnen. Sei $\sigma(n)$ die Anzahl der selbstvermeidenden Pfade der Länge n des Graphen \mathbb{Z}^2 . Da $\sigma(n)$ nicht nur größer als $\eta_{\mathbb{Z}}(n)$ ist, sondern da man sogar die Hälfte der Pfade wieder aus Symmetriegründen ignorieren kann, hat man $\eta_{\mathbb{Z}}(n) \leq \sigma_2(n)/2$. Offensichtlich besteht ein selbstvermeidender Pfad der Länge $n_1 + n_2$ aus einem selbstvermeidenden Pfad der Länge n_1 und die restlichen n_2 Knoten werden jeweils aus maximal 3 möglichen Knoten ausgewählt. Damit $\sigma_2(n_1 + n_2) \leq \sigma_2(n_1)3^{n_2}$. Damit gilt für $g(m)$:

$$g(m) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \eta_{\mathbb{Z}}(n)p^n \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\sigma_2(m)3^{n-m}}{2} p^n = \frac{\sigma_2(m)p^m}{2} \frac{1}{1-3p} \quad (4.4)$$

Da $\sigma_2(23) = 172666613812$ (siehe z.B. [OEI19]), erhält man mit dem Computer, dass für $p \leq 0.2721$ $f_2(23) + g_2(23) \leq 1$ ist. Somit ist für $p \leq 0.2721$ $\mathbb{E}[Z_n] \geq \mathbb{E}[Z_{n+1}]$, welches eine deutlich bessere Schranke ist als die Schranke aus 0.2 aus Satz 4.8.

Eine andere Möglichkeit, eine bessere Abschätzung zu erhalten, ist folgende: Sei $Y^{\leq m}$ die Anzahl von Punkten auf E_1 , die mit $\mathbf{0}$ mit einem offenen Pfad der Länge m oder kleiner verbunden sind und $Y^{>m}$ die Anzahl der Knoten auf E_1 , die mit einem offenen Pfad der Länge größer als m verbunden sind (aber nicht mit einem offenen Pfad kleiner oder gleich m). Es gilt:

$$\mathbb{E}_p[Z_1] = \mathbb{E}_p[Y^{\leq m}] + \mathbb{E}_p[Y^{>m}]$$

In folgender Tabelle ist $E[Y^{\leq m}]$ für kleine m ausgerechnet (leider ist dies aufwendiger als $\eta_{\mathbb{Z}^2}(n)$ auszurechnen, deshalb sind nur die ersten 6 Werte aufgelistet):

m	$E[Y^{\leq m}]$
1	p
2	$p + 4p^2 - 2p^4$
3	$p + 4p^2 + 8p^3 - 4p^4 - 4p^5 - 3p^6 + 3p^7$
4	$p + 4p^2 + 8p^3 + 12p^4 - 12p^5 - 17p^6 + 7p^7 - 6p^8 + 20p^9 - 10p^{10}$
5	$p + 4p^2 + 8p^3 + 12p^4 + 26p^5 - 49p^6 - 21p^7 - 22p^8 + 68p^9 - 23p^{10}$ $+ 51p^{11} - 7p^{12} - 101p^{13} + 46p^{14} + 48p^{15} - 40p^{16} + 8p^{17}$
6	$p + 4p^2 + 8p^3 + 12p^4 + 26p^5 + 47p^6 - 117p^7 - 142p^8 + 132p^9 - 21p^{10}$ $+ 243p^{11} - 141p^{12} + 207p^{13} - 318p^{14} - 272p^{15} + 14p^{16} + 856p^{17}$ $- 320p^{18} - 444p^{19} - 42p^{20} + 628p^{21} - 484p^{22} + 152p^{23} - 18p^{24}$

Die Tabelle wurde wie folgt mit Hilfe eines Programms erstellt. Das komplette Programm befindet sich im Anhang, hier soll nur die Funktionsweise erläutert werden:

Sei A_i das Ereignis, dass es einen Pfad der Länge $\leq n$ gibt, der in $(i, 1)$ endet. Man berechnet $P(A_i)$ für $i \in \{-(n-1), \dots, n-1\}$ und erhält dann damit $\mathbb{E}[Y^{\leq n}] = P(A_{-n+1}) + \dots P(A_{n-1})$. $P(A_i)$ kann man einfach mit der Siebformel von Poincaré und Sylvester ausrechnen:

Dazu berechnet man alle selbstvermeidenden Pfade der Länge $\leq n$, die in $(i, 1)$ enden. (Dazu macht man eine Breitensuche und speichert alle Pfade, die in maximal n Schritten in $(i, 1)$ enden) Angenommen, es gibt m_i Pfade der Länge $\leq n$, die in (i, n) enden. Sei dann $B_{i,j}$ das Ereignis, dass der j te Pfad offen ist. Es ist $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$. Um $P(A_i)$ nun mit der Siebformel auszurechnen, muss man wissen, welchen Wert $P(\bigcap_{j \in C} B_{i,j})$ für jedes $C \subseteq \{1, \dots, m_i\}$ hat. Es gilt $P(\bigcap_{j \in C} B_{i,j}) = p^a$, wenn die Anzahl der gemeinsamen Kanten von den Pfaden a ist.

Schätzt man $E[Y^{>6}]$ wie in (4.4) durch $\frac{\sigma(7)p^7}{2} \frac{1}{1-3p}$ ab, so erhält man (nach [OEI19] ist $\sigma(7) = 2172$) $\mathbb{E}[Z_1] = E[Y^{\leq 6}] + E[Y^{>6}] \leq 1$ sicherlich, wenn $p < 0.252$. Dieses Ergebnis ist etwas schlechter als das vorige Ergebnis, aber man hat auch nur Pfade der Länge ≤ 6 genau betrachtet.

Wir erwähnen noch in diesem Abschnitt, dass (für beliebige endliche zusammenhängende Graphen) man relativ leicht zeigen kann, dass die Anzahl der mit dem Nullpunkt verbundenen Knoten auf einer Ebene bei zwei benachbarten Ebenen sich nicht so stark unterscheidet (für große p). Dies ist auch im Hinblick der vorigen Betrachtung interessant, die nur sinnvolle Aussagen für kleine p macht.

Proposition 4.10 *Sei G ein Graph mit $k \in \mathbb{N}_{>1}$ Knoten, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{Z} \in \{\mathbb{Z}, ((-\infty, m], [[m, \infty))\}$ (wobei m im zweiten Fall größer als $n+1$ und im*

dritten Fall kleiner oder gleich 0 ist) mit $p \in (0, 1)$, dann gilt:

$$\frac{1}{p^k} \mathbb{E}_p[Z_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}}] > \mathbb{E}_p[Z_n^{G \times \mathbb{Z}}] > \mathbb{E}_p[Z_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}}] p^k$$

Beweis

Sei A_n das Ereignis, dass zwischen der n -ten und $n+1$ -ten Ebene alle vertikalen Kanten offen sind. Trivialerweise ist dann $Z_n 1_{A_n} = Z_{n+1} 1_{A_n}$, denn, wenn A_n eintritt, ist jeder Knoten von G auf der n -ten Ebene mit dem entsprechenden Knoten auf der $n+1$ -ten Ebene verbunden.

Sei Z_{n+1}^* die Anzahl der auf der Ebene $n+1$ mit dem Knoten $\mathbf{0}$ verbundenen Knoten, wenn alle vertikalen Knoten zwischen der Ebene n und $n+1$ offen wären. Insbesondere ist Z_{n+1}^* unabhängig von A_n (da die Zufallsvariable und das Ereignis auf unterschiedlichen Kanten definiert sind) und $Z_{n+1}^* \geq Z_{n+1}$ und nach Definition von Z_{n+1}^* ist $Z_{n+1}^* 1_{A_n} = Z_{n+1} 1_{A_n}$. Damit hat man insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[Z_n] &> \mathbb{E}_p[Z_n 1_{A_n}] = \mathbb{E}_p[Z_{n+1} 1_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_p[Z_{n+1}^* 1_{A_n}] = \mathbb{E}_p[Z_{n+1}^*] P_p(A_n) \\ &\geq \mathbb{E}_p[Z_{n+1}] P_p(A_n) = \mathbb{E}_p[Z_{n+1}] p^k \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist eine echte Ungleichung, da $k > 1$ ist. Analog erhält man $\mathbb{E}_p[Z_{n+1}] > \mathbb{E}_p[Z_n] p^k$ \square

Alternativ hätte man den Beweis auch mit der FKG-Ungleichung (siehe Fußnote auf Seite 13) führen können, welche in unserem Fall direkt $\mathbb{E}_p[Z_{n+1}] \geq \mathbb{E}_p[Z_{n+1}] \mathbb{E}_p[1_{A_n}]$ geliefert hätte.

Weiter sollte noch erwähnt werden, würde man nicht nur die Anzahl der Knoten, die mit dem Nullpunkt auf einer Ebene verbunden sind, betrachten, sondern die Anzahl der Knoten auf einer Ebene, die mit der Nullebene verbunden ist, so ist die Frage der Monotonie einfach zu beantworten:

Definition 4.11 Sei \hat{Z}_n die Anzahl der auf der Ebene n mit der Ebene 0 verbundenen Knoten. D.h. $\hat{Z}_n := \#\{x \in E_n \mid \exists y \in E_0 : x \leftrightarrow y\}$.

Satz 4.12 Sei G ein endlicher oder unendlicher Graph und $p < p_c(G \times \mathbb{Z})$, dann gilt für den Graphen $G \times \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] > \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}]$$

Ist G ein endlicher Graph mit k Knoten (wobei $k > 1$ ist), so gilt sogar:

$$\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] (1 - (1 - p)^k) > \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}]$$

Beweis

Sei $B_i^x := \{(x, 0) \leftrightarrow E_i\}$ (also das Ereignis, dass der Knoten $(x, 0)$ mit der i -ten Ebene verbunden ist.). Tritt das Ereignis B_{n+1}^x ein, so gibt es einen offenen Pfad von $(x, 0)$ nach der $n+1$ -ten Ebene. Damit gibt es auch einen offenen Pfad von $(x, 0)$ nach der Ebene der Höhe n . Somit ist $B_{n+1}^x \subset B_n^x$ und damit auch $P_p(B_{n+1}^x) < P_p(B_n^x)$. Definiere nun $A_i^x := \{(x, i) \leftrightarrow E_0\}$ (also das Ereignis, ob der Knoten x auf Ebene i mit der 0-ten Ebene verbunden ist). Da das Wahrscheinlichkeitsmaß P_p unter Spiegelungen und vertikalen Verschiebungen invariant ist, folgt $P_p(A_i^x) = P_p(B_i^x)$. Somit ist auch $P_p(A_{n+1}^x) < P_p(A_n^x)$ und damit

$$\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] = \sum_{x \in V(G)} P_p(A_n^x) > \sum_{x \in V(G)} P_p(A_{n+1}^x) = \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}]$$

Für endliche Graphen mit k Knoten kann man dies noch besser abschätzen: Sei C_n das Ereignis, dass zwischen der n -ten und $n+1$ -ten Ebene mindestens eine vertikale Kante offen ist. Man beachte, dass $P_p(C_n) = 1 - (1-p)^k$. Die Ereignisse B_n^x und C_n sind unabhängig, da diese auf unterschiedlichen Kantenmengen definiert sind. Damit ist

$$P_p(B_{n+1}^x) < P_p(B_n^x \cap C_n) = P_p(B_n^x) P_p(C_n) = P_p(B_n^x)(1 - (1-p)^k)$$

Wobei die Ungleichung eine echte Ungleichung ist, da das Ereignis möglich ist, dass nur ein Knoten auf der n -ten Ebene mit dem Knoten $(x, 0)$ verbunden ist und es nur eine vertikale Kante zwischen der n -ten und $n+1$ -ten Ebene gibt, dessen Endknoten auf der n -ten Ebene ein anderer Knoten als der auf der Ebene n verbundene Knoten ist. Damit ist auch (siehe oben) $P_p(A_{n+1}^x) < P_p(A_n^x)(1 - (1-p)^k)$ und $\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] > \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}](1 - (1-p)^k)$ \square

Bemerkung 4.13 Für alle Graphen $G \times \mathbb{Z}$ gilt offensichtlich $\mathbb{E}_p[Z_n] \leq \mathbb{E}_p[\hat{Z}_n]$. Man beachte, dass für $C_k \times \mathbb{Z}$ (oder auch für alle endliche Graphen wie in Definition 4.1) trivialerweise die erwartete Anzahl von verbundenen Knoten auf einer Ebene mit einem bestimmten Knoten auf der 0-ten Ebene gleich ist, egal, welchen Knoten man betrachtet. Somit ist $\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] \leq k \mathbb{E}_p[Z_n]$ und insgesamt

$$\mathbb{E}_p[Z_n] \leq \mathbb{E}_p[\hat{Z}_n] \leq k \mathbb{E}_p[Z_n]$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll noch angemerkt werden, dass auch eine Aussage analog zu Proposition 4.10 für die Zufallsvariablen \hat{Z}_n gilt:

Proposition 4.14 *Sei G ein Graph mit $k \in \mathbb{N}_{>1}$ Knoten und $\mathcal{Z} \in \{\mathbb{Z}, ((-\infty, m], [m, \infty))\}$ (wobei m im zweiten Fall größer als $n+1$ und im dritten Fall kleiner oder gleich 0 ist) mit $p \in (0, 1)$, dann gilt:*

$$\frac{1}{p^k} \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}] > \mathbb{E}_p[\hat{Z}_n]$$

Der Beweis funktioniert genauso wie in Proposition 4.10. Man beachte auch, dass man mit Satz 4.12 $\mathbb{E}_p[\hat{Z}_n]$ nach unten mit $\frac{1}{1-(1-p)^k} \mathbb{E}_p[\hat{Z}_{n+1}]$ abschätzen kann.

4.2 $C_k \times \mathbb{Z}$ für kleine k

In diesem Abschnitt geht es darum, für kleine Graphen die Vermutung 1.8 zu zeigen. Dies soll in diesem Abschnitt hauptsächlich durch Berechnung mit dem Computer gezeigt werden. Im nächsten Abschnitt wollen wir ein Ergebnis ohne Hilfe eines Computerprogramms für alle Graphen mit einer bestimmten Eigenschaft erhalten.

Man beachte, dass man für den Graphen $C_2 \times \mathbb{Z}$ sehr leicht die Verbindungsfunktionen aller Knoten mit dem Knoten $\mathbf{0}$ vergleichen kann:

Proposition 4.15 *Für $p \in (0, 1)$ gilt:*

$$\begin{aligned} P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}} (1, n+1)) &< P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}} (0, n+1)) \\ &< P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}} (1, n)) < P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}} (0, n)) \end{aligned}$$

Beweis

Definiere $\Omega_{(a,m),(b,n)} := \{\mathbf{0} \leftrightarrow (a, m), \mathbf{0} \not\leftrightarrow (b, n)\}$ die Menge aller Konfigurationen, die den Punkt $\mathbf{0}$ mit (a, m) verbinden, aber nicht den Punkt $\mathbf{0}$ und (b, n) verbinden.

Wir zeigen die Ungleichung $P((0, 0) \leftrightarrow (1, n)) > P(0 \leftrightarrow (0, n+1))$: Dabei reicht es, die Ungleichung $P((0, 0) \leftrightarrow (0, n+1), (0, 0) \not\leftrightarrow (1, n)) < P((0, 0) \leftrightarrow (1, n), (0, 0) \not\leftrightarrow (0, n+1))$ zu zeigen. Wir geben nun eine injektive Abbildung von $\Omega_{(0,n+1),(1,n)}$ nach $\Omega_{(1,n),(0,n+1)}$ an, die zwei Kanten austauscht: Sei $\omega \in \Omega_{(0,n+1),(1,n)}$. Es gilt $\omega(\{(1, n), (0, n)\}) = 0$ und $\omega(\{(0, n), (0, n+1)\}) = 1$. Definiere nun

$$\omega'(\{(i, l), (j, m)\}) = \begin{cases} 1 & \{(i, l), (j, m)\} = \{(0, n), (1, n)\} \\ 0 & \{(i, l), (j, m)\} = \{(0, n), (0, n+1)\} \\ \omega(\{(i, l), (j, m)\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $\omega' \in \Omega_{(1,n),(0,n+1)}$. Da $\omega \rightarrow \omega'$ eine injektive Abbildung ist und es auch Konfigurationen in $\Omega_{(1,n),(0,n+1)}$ gibt, die nicht im Bild liegen, gilt die Ungleichung.

Für die anderen beiden Ungleichungen reicht es zu zeigen, dass $P(0 \leftrightarrow (1, n), 0 \not\leftrightarrow (0, n)) < P(0 \leftrightarrow (0, n), 0 \not\leftrightarrow (1, n))$: Sei $\omega \in \Omega_{(1,n),(0,n)}$. Dann muss ω eine horizontale offene Kante auf einer Ebene kleiner als n haben, die mit dem Punkt $\mathbf{0}$ verbunden ist.

Definiere $m_\omega = \max(\{k < n : \omega_{\{(0,k),(1,k)\}} = 1\})$. Setze

$$\omega'(\{(i, l), (j, m)\}) = \begin{cases} \omega'(\{(1-i, l), (1-i, m)\}) & i \geq m_\omega, i = j \\ \omega(\{(i, l), (j, m)\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, dass ω' eine Art von Spiegelung über der horizontalen Kante $\{(0, m), (1, m)\}$ ist. Damit ist $\omega' \in \Omega_{(0, n), (1, n)}$. Wieder ist dies eine maßerhaltende injektive Funktion und damit gilt die Ungleichung. \square

Leider nutzt dieser obige Beweis besonders aus, dass C_2 nur zwei Knoten auf einer Ebene hat. Auch gibt es keine quantitative Aussage für den Vergleich von Knoten. Deshalb geben wir im Folgenden ein Verfahren an, das eine quantitative Aussage erlaubt. Später werden wir dieses Verfahren übertragen, um rechnerische Ergebnisse für C_3 und C_4 zu bekommen und somit Teilantworten für Vermutung 1.8 erhalten. Leider steigt der Rechenaufwand dann relativ stark.

Bevor wir quantitativ $P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n))$ und $P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n))$ vergleichen, brauchen wir noch ein Lemma (und eine Definition, um das Lemma zu formulieren):

Definition 4.16 Sei G ein Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E und sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $G \times ((-\infty, n))$ bezeichnen wir den Graphen mit den Knoten $\{(v_1, i) | v_1 \in V, i \in \{\dots, -3, -2, \dots, n-1, n\}\}$ und den Kanten

$$\begin{aligned} & \{ \{(v_1, i), (v'_1, i)\} | \{v_1, v'_1\} \in E, i \in \{\dots, -2, \dots, n-2, n-1\} \} \\ & \cup \{ \{(v_1, i-1), (v_1, i)\} | i \in \{\dots, -2, -1, \dots, n-1, n\}, v_1 \in V \} \end{aligned}$$

Analog sei $G \times ((n, \infty))$ der Graph mit Knoten $\{(v_1, v_2) | v_1 \in V, v_2 \in \{n, n+1, n+2, \dots\}\}$ und den Kanten

$$\begin{aligned} & \{ \{(v_1, i), (v'_1, i)\} | \{v_1, v'_1\} \in E, i \in \{\dots, -2, \dots, n-2, n-1\} \} \\ & \cup \{ \{(v_1, i-1), (v_1, i)\} | i \in \{n+1, n+2, \dots\}, v_1 \in V \} \end{aligned}$$

Bemerkung 4.17 Also entspricht $G \times ((-\infty, n))$ dem Graphen $G \times ((-\infty, n])$, in dem alle horizontalen Kanten auf der Ebene n fehlen und der Graph $G \times ((n, \infty))$ entspricht dem Graphen $G \times [[n, \infty))$, in dem alle horizontalen Kanten auf der Ebene n fehlen.

Lemma 4.18 Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((n, \infty))}(1, n)) = P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n))}(1, n)) = \frac{p^3}{1 - p^2(1 - p)}$$

und

$$P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) = P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times [[n, \infty))}(1, n)) = \frac{p}{1 - p^2(1 - p)}$$

Beweis

Es reicht $P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) = \frac{p}{1-p^2(1-p)}$ zu zeigen, da

$$\begin{aligned} P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) &= P((0, n) \sim (1, n), (0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) \\ &\quad + P((0, n) \not\sim (1, n), (0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) \\ &= P((0, n) \sim (1, n)) + P((0, n) \not\sim (1, n)) P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n))}(1, n)) \\ &= p + (1-p) P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n))}(1, n)) \end{aligned}$$

ist, folgt aus der zweiten Gleichung die erste Gleichung. Wobei

$$P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times [[n, \infty))}(1, n)) = P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n))$$

und

$$P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((n, \infty))}(1, n)) = P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((\infty, n))}(1, n))$$

aus Symmetriegründen gelten.

Man beachte, dass die beiden Knoten $(0, n)$ und $(1, n)$ genau dann in $C_2 \times ((-\infty, n])$ verbunden sind, wenn es ein $z \in \{n, n-1, n-2, \dots\}$ gibt, sodass die Kante zwischen $(0, z)$ und $(1, z)$ offen ist und alle vertikalen Kanten zwischen (e, s) und $(e, s+1)$ für $z \leq s < n$ und $e \in \{0, 1\}$ offen sind. Wir bezeichnen mit Q_z das Ereignis, dass die Kante zwischen $(0, z)$ und $(1, z)$ offen ist und alle Kanten zwischen (e, s) und $(e, s+1)$ für $z \leq s < n$ und $e \in \{0, 1\}$ offen sind, aber für alle r mit $z < r \leq n$ ist die Kante zwischen $(0, r)$ und $(1, r)$ nicht offen. Damit erhält man

$$P((0, n) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, n])}(1, n)) = \sum_{z=0}^{-\infty} P(Q_z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i p^{2i} p = \frac{p}{1-p^2(1-p)} \square$$

Bemerkung 4.19 Alternativ kann man dies auch mit Hilfe des späteren Lemma 4.27 zeigen, wie wir es auch für andere C_k machen werden. Siehe dazu auch die Bemerkung nach Lemma 4.27.

Mit Lemma 4.18 erhält man einen quantitativen Vergleich für $C_2 \times \mathbb{Z}$:

Proposition 4.20 Für den Graphen $C_2 \times \mathbb{Z}$ gilt:

$$P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)) - P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)) = \frac{(p-p^2)^n (1-p)^3 (p+1)^2}{(p^3 - p^2 + 1)^2}$$

Beweis

Sei A das Ereignis, dass eine offene horizontale Kante zwischen der 0-ten und n -ten Ebene existiert, B sei das Ereignis, dass $(0, n)$ und $(1, n)$ im Graphen $((-\infty, 0))$ verbunden sind und C sei das Ereignis, dass $(0, n)$ und $(1, n)$ im Graphen $((n, \infty))$ verbunden sind. Offensichtlich ist $P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A) = P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A)$ (aus Symmetriegründen ist wegen der offenen horizontalen Kante die Wahrscheinlichkeit gleich). Ebenfalls aus Symmetriegründen hat man $P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A^c \cap B) = P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A^c \cap B)$. Weiter ist auch $P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C) = P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C)$ (wenn C oder ein Teilereignis von C eintritt, dann treten sowohl $\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\}$ als auch $\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\}$ ein oder keines der beiden Ereignisse tritt ein). Damit ist $P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap (A \cup B \cup C)) = P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap (A \cup B \cup C))$ und somit ist

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)) - P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)) \\ &= P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap (A \cup B \cup C)) + P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &\quad - \left(P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap (A \cup B \cup C)) + P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \right) \\ &= P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c) - P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \end{aligned}$$

Da offensichtlich $P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c) = 0$ erhält man:

$$= P(\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\} \cap A^c \cap B^c \cap C^c)$$

Sei D das Ereignis, dass alle vertikalen Kanten $\{(0, s), (0, s+1)\}$ für $0 \leq s < n$ vorhanden sind. Da $\{\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)\}$ unter $A^c \cap B^c \cap C^c$ nur dann genau auftreten kann, wenn das Ereignis D eintritt, hat man:

$$= P(D \cap A^c \cap B^c \cap C^c)$$

Es ist offensichtlich $P(A^c) = (1-p)^{n+1}$, $P(D) = p^n$ und nach Lemma 4.18 ist $P(B^c) = P(C^c) = \left(1 - \frac{p^3}{1-p^2(1-p)}\right)$. Außerdem sind A , B , C und D unabhängig, da diese auf unterschiedlichen Kantenmengen definiert sind. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)) - P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)) = P(D) P(A^c) P(B^c) P(C^c) \\ &= \frac{(p-p^2)^n (1-p)^3 (p+1)^2}{(p^3-p^2+1)^2} \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 4.21 Ist G ein endlicher zusammenhängender Graph mit k Knoten, bekommt man wenigsten relativ leicht (ähnlich zu dem vorigen Beweis) eine obere Schranke für $|\mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow (x, n)) - \mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow (y, n))|$ ($x, y \in G$). Sei A_m das Ereignis, dass alle Knoten auf der m -ten Ebene jeweils mit einem offenen Pfad im Graphen $G \times [[m, m]]$ miteinander verbunden sind (d.h. im Graphen $G \times [[m, m]]$ gibt es einen Spannbaum, der aus offenen Kanten besteht). Definiere $A := \cup_{m=0}^n A_m$. Aus Symmetriegründen ist $\mathbf{P}(\{\mathbf{0} \leftrightarrow (x, n)\} \cap A) = \mathbf{P}(\{\mathbf{0} \leftrightarrow (y, n)\} \cap A)$. Somit ist wegen der Unabhängigkeit von A_0, A_1, \dots, A_n

$$|\mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(x, n)) - \mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(y, n))| \leq \mathbf{P}(A^c) = \mathbf{P}(A_0^c)^{n+1}$$

. Da jeder Spannbaum eines Graphen mit k Knoten $k - 1$ Kanten hat, ist $\mathbf{P}(A_m) \geq p^{k-1}$. Also ist für jeden zusammenhängenden Graphen mit k Knoten

$$|\mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(x, n)) - \mathbf{P}(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(y, n))| \leq (1 - p^{k-1})^{n+1}.$$

Insbesondere wird der Unterschied zwischen den beiden Knoten auf einer Ebene exponentiell geringer, je weiter man sich von dem Ursprung entfernt.

Es soll im Folgenden für den Graphen $C_2 \times \mathbb{Z}$ $\mathbf{P}((0, 0) \leftrightarrow (e, n))$ für $e \in \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Später wird das Verfahren übertragen, um mit dem Computer die Monotonie der Verbindungsfunktion des Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ für k klein zu beweisen. Aber zuerst zu $C_2 \times \mathbb{Z}$:

Proposition 4.22 Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((0, 0) \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(0, n)) &= \frac{-a(p)(\lambda_2^n - \lambda_3^n)(2p^3 - p^2 + 1) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n)c(p)}{8\sqrt{a(p)}(p^3 - p^2 + 1)^2} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{a(p)}((\lambda_2^n + \lambda_3^n)d(p) - 2\lambda_1^n(p-1)^3(p+1)^2)}{8\sqrt{a(p)}(p^3 - p^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((0, 0) \leftrightarrow^{C_2 \times \mathbb{Z}}(1, n)) &= \frac{-a(p)(\lambda_2^n - \lambda_3^n)(2p^3 - p^2 + 1) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n)c(p)}{8\sqrt{a(p)}(p^3 - p^2 + 1)^2} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{a(p)}((\lambda_2^n + \lambda_3^n)d(p) + 2\lambda_1^n(p-1)^3(p+1)^2)}{8\sqrt{a(p)}(p^3 - p^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

mit $a(p) = 4p^4 - 8p^3 + 4p^2 + 1$, $\lambda_1 := p - p^2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-2p^3 + 2p^2 + p - p\sqrt{a(p)})$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-2p^3 + 2p^2 + p + p\sqrt{a(p)})$

Beweis

Zur Erinnerung X_n ist das einseitige Muster auf Ebene n (siehe Definition 1.6). Zuerst soll nun $P(X_n = M)$ für alle $M \in \mathbf{M}^1(C_2)$ bestimmt werden und daraus $P((0,0) \leftrightarrow (a,n))$ berechnet werden. Man beachte, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit einer Startverteilung, die wir weiter unten bestimmen werden, ist. Wir fassen die beiden Zustände aus $\mathbf{M}^0(C_2) = \{(\{\}, \{0,1\}), (\{\}, \{\{0\}, \{1\}\})$ zu einem Zustand ∞ zusammen und betrachten $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als eine Markovkette auf $\mathbf{M}^0(C_2) \cup \{\infty\}$ (dass man hier einen anderen Zustandsraum betrachtet als in Definition 1.6, sollte zu keiner Verwirrung führen). Dadurch erhält man eine Übergangsmatrix der Zustände $\infty, (\{0\}, \{\{1\}\}), (\{1\}, \{\{0\}\}), (\{0,1\}, \{\})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & p(1-p) & 0 & p^2 \\ 1-p & 0 & p(1-p) & p^2 \\ (1-p)^2 & p(1-p)^2 & p(1-p)^2 & p^2 + 2p^2(1-p) \end{pmatrix}$$

Dabei erhält man die Einträge durch Betrachtung der verschiedenen Konfigurationen von $K(E_n)$. Z.B. den Eintrag in der vierten Zeile und 2. Spalte: Der Übergang von $(\{0,1\}, \{\})$ nach $(\{0\}, \{\{1\}\})$ in Ebene n nach Ebene $n+1$ kann nur auftreten, wenn im Graphen $C_2 \times \{n, n+1\}$ $(0,n) \sim (0,n+1)$, $(1,n) \not\sim (1,n+1)$ und $(0,n+1) \not\sim (1,n+1)$ ist. Für dieses Ereignis ist die Wahrscheinlichkeit $p(1-p)^2$. Analog erhält man die anderen Einträge.

Als nächstes soll die Startverteilung α der Markovkette ausgerechnet werden (d.h. die Verteilung von X_0). Man beachte, dass nach Lemma 4.18:

$$P((0,0) \leftrightarrow^{C_2 \times ((-\infty, 0])} (1,0)) = \frac{p}{1 - p^2(1-p)}$$

Damit erhalten wir sofort folgende Startverteilung für die Markovkette (X_n) (man beachte per Definition ist der Knoten $(0,0)$ immer infiziert):

$$\alpha = (0, 1 - \frac{p}{1 - p^2(1-p)}, 0, \frac{p}{1 - p^2(1-p)})$$

Wir setzen $a(p) := 4p^4 - 8p^3 + 4p^2 + 1$ und $b(p) := -2p^3 + 2p^2 + p$ als Abkürzung. Die Eigenwerte von A sind $\lambda_0 := 1, \lambda_1 := p - p^2, \lambda_2 := \frac{1}{2}(b(p) - p\sqrt{a(p)}), \lambda_3 := \frac{1}{2}(b(p) + p\sqrt{a(p)})$ mit den zugehörigen Eigenvek-

toren

$$\begin{aligned} & (1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 0), \\ & (0, -\frac{2p}{2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1}, -\frac{2p}{2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1}, 1), \\ & (0, -\frac{2p}{2p^2 - 4p - \sqrt{a(p)} + 1}, -\frac{2p}{2p^2 - 4p - \sqrt{a(p)} + 1}, 1). \end{aligned}$$

Bilde nun die Matrix, die die Eigenvektoren als Spalten hat:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{2p}{2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1} & -\frac{2p}{2p^2 - 4p - \sqrt{a(p)} + 1} \\ 1 & 1 & -\frac{2p}{2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1} & -\frac{2p}{2p^2 - 4p - \sqrt{a(p)} + 1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \frac{(-2p^2 + 2p + \sqrt{a(p)} - 1)(2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1)}{4\sqrt{a(p)}p} & \frac{(2p^2 - 4p + 1)^2 - a(p)}{8\sqrt{a(p)}p} & \frac{(2p^2 - 4p + 1)^2 - a(p)}{8\sqrt{a(p)}p} & \frac{2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1}{2\sqrt{a(p)}} \\ -\frac{(-2p^2 + 4p + \sqrt{a(p)} - 1)(2p^2 - 2p + \sqrt{a(p)} + 1)}{4\sqrt{a(p)}p} & \frac{a(p) - (2p^2 - 4p + 1)^2}{8\sqrt{a(p)}p} & \frac{a(p) - (2p^2 - 4p + 1)^2}{8\sqrt{a(p)}p} & \frac{-2p^2 + 4p + \sqrt{a(p)} - 1}{2\sqrt{a(p)}} \end{pmatrix}$$

Nach der Linearen Algebra ist $A = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} B^{-1}$. Dann kann

man auf diese Weise A^n ausrechnen (wir schreiben $*$ an den Stellen der Matrix, an denen uns die Werte nicht interessieren):

$$\begin{aligned} A^n &= B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & m_1 & m_2 & \frac{(\lambda_3^n - \lambda_2^n)p}{\sqrt{a(p)}} \\ * & m_2 & m_1 & \frac{(\lambda_3^n - \lambda_2^n)p}{\sqrt{a(p)}} \\ * & m_3 & m_3 & \frac{(2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1)\lambda_2^n + \lambda_3^n(-2p^2 + 4p + \sqrt{a(p)} - 1)}{2\sqrt{a(p)}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wobei

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\sqrt{a(p)} (2\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n) (2p^2 - 4p + 1)}{4\sqrt{a(p)}} \\ m_2 &= \frac{\sqrt{a(p)} (-2\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n) (2p^2 - 4p + 1)}{4\sqrt{a(p)}} \\ m_3 &= -\frac{(\lambda_2^n - \lambda_3^n) (-2p^2 + 4p + \sqrt{a(p)} - 1) (2p^2 - 4p + \sqrt{a(p)} + 1)}{8\sqrt{a(p)}p} \end{aligned}$$

Mit oben kann man nun $P(X_n = M)$ bestimmen, indem man aus der Matrix αA^n die passenden Werte abliest.

Nach Lemma 4.18 ist:

$$P((0, n+1) \leftrightarrow^{C_2 \times ((n, \infty))} (1, n+1)) = \frac{p^3}{1 - p^2(1 - p)}$$

Damit können wir nun $P((0, 0) \leftrightarrow (e, n))$ ausrechnen (mit $a_{i,j}^n$ bezeichnen wir Einträge aus A^n), dabei ist $c(p) := 8p^8 - 28p^7 + 36p^6 - 14p^5 - 6p^4 + 6p^3 - 3p^2 + 2p + 1$ und $d(p) := 2p^6 - 3p^5 + p^4 + 2p^3 - 2p^2 + p + 1$:

$$\begin{aligned} &P((0, 0) \leftrightarrow (0, n)) \\ &= P(X_n = (\{0\}, \{\{1\}\})) + P(X_n \in (\{0, 1\}, \{\{\}\})) \\ &+ P(X_n = (\{1\}, \{\{0\}\})) P((0, n+1) \leftrightarrow^{C_2 \times ((n, \infty))} (1, n+1)) \\ &= \alpha_2 a_{2,2}^n + \alpha_4 a_{4,2}^n + \alpha_2 a_{2,4}^n + \alpha_4 a_{4,4}^n + (\alpha_2 a_{2,3}^n + \alpha_4 a_{4,3}^n) \frac{p^3}{1 - p^2(1 - p)} \\ &= \frac{-a(p) (\lambda_2^n - \lambda_3^n) (2p^3 - p^2 + 1) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n) c(p)}{8\sqrt{a(p)} (p^3 - p^2 + 1)^2} \\ &+ \frac{2\sqrt{a(p)} ((\lambda_2^n + \lambda_3^n) d(p) - 2\lambda_1^n (p-1)^3 (p+1)^2)}{8\sqrt{a(p)} (p^3 - p^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& P((0, 0) \leftrightarrow (1, n)) \\
&= P(X_n = (\{1\}, \{\{0\}\})) + P(X_n = (\{0, 1\}, \{\{\}\})) \\
&+ P(X_n = (\{0\}, \{\{1\}\})) P((0, n+1) \leftrightarrow^{C_2 \times ((n, \infty))} (1, n+1)) \\
&= \alpha_2 a_{2,3}^n + \alpha_4 a_{4,3}^n + \alpha_2 a_{2,4}^n + \alpha_4 a_{4,4}^n + (\alpha_2 a_{2,2}^n + \alpha_4 a_{4,2}^n) \frac{p^3}{1 - p^2(1 - p)} \\
&= \frac{-a(p) (\lambda_2^n - \lambda_3^n) (2p^3 - p^2 + 1) - (\lambda_2^n - \lambda_3^n) c(p)}{8\sqrt{a(p)} (p^3 - p^2 + 1)^2} \\
&+ \frac{2\sqrt{a(p)} ((\lambda_2^n + \lambda_3^n) d(p) + 2\lambda_1^n (p-1)^3 (p+1)^2)}{8\sqrt{a(p)} (p^3 - p^2 + 1)^2} \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.23 Wir erhalten hiermit wie bei Proposition 4.20 sogar wieder den Vergleich von $\mathbf{0} \leftrightarrow (0, n)$ und $\mathbf{0} \leftrightarrow (1, n)$:

$$P(\mathbf{0} \leftrightarrow (0, n)) - P(\mathbf{0} \leftrightarrow (1, n)) = \frac{\lambda_1^n (1-p)^3 (p+1)^2}{(p^3 - p^2 + 1)^2} = \frac{(p-p^2)^n (1-p)^3 (p+1)^2}{(p^3 - p^2 + 1)^2}$$

Wir wollen uns nun den Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ zuwenden und Vermutung 1.8 für k klein mit Hilfe des Computers zeigen. Wir geben dabei ein n_0 explizit an. Dabei wird ähnlich vorgegangen wie bei C_2 . Wobei es dann nicht mehr so leicht ist, die Werte für die Verbindungsfunktion für alle n explizit anzugeben. Deshalb zeigen wir zuerst folgendes Lemma, womit es reicht, eine Ebene zu finden, in der die Vermutung 1.8 gilt:

Lemma 4.24 Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph. Gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $M \in \mathbf{M}^1(G)$:

$$P_p(X_{n_0}^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(X_{n_0+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$$

so ist auch für alle $n \geq n_0$

$$P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$$

und für alle $M' \in \tilde{\mathbf{M}}^1(C_k)$ und $n \geq n_0$:

$$P_p(\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}} = M') > P_p(\tilde{X}_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M')$$

Insbesondere gilt dann Vermutung 1.8 und Vermutung 1.10 für den Graphen $G \times \mathbb{Z}$.

Beweis

Es gilt wegen der Markov-Eigenschaft für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M) &= \sum_{M' \in \mathbf{M}^1(C_k)} \underbrace{P_p(X_{n+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_{n_0+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M')}_{= P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_{n_0}^{G \times \mathbb{Z}} = M')} P_p(X_{n_0+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M') \\ &< \sum_{M' \in \mathbf{M}^1(C_k)} P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M | X_{n_0}^{G \times \mathbb{Z}} = M') P_p(X_{n_0}^{G \times \mathbb{Z}} = M') = P_p(X_n^{G \times \mathbb{Z}} = M) \end{aligned}$$

Die Aussage für $\tilde{X}_n^{G \times \mathbb{Z}}$ folgt aus Lemma 1.13. \square

Es soll nun ein Verfahren vorgestellt werden, das ein n_0 findet mit $P_p(X_{n_0}^{G \times \mathbb{Z}} = M) > P_p(X_{n_0+1}^{G \times \mathbb{Z}} = M)$ für alle $M \in \mathbf{M}^1(C_k)$ und $p \in (0, 1)$. Das Verfahren basiert teilweise auf den obigen Rechnungen für $C_2 \times \mathbb{Z}$. Im Folgenden wird immer symbolisch gerechnet mit der Variable p , die die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante offen ist, angibt. Das zugehörige Computer-Programm findet man im Anhang.

Zuallererst werden alle (gültigen) Muster berechnet. Dazu wird mit dem Muster $(\{0, \dots, k-1\}, \emptyset)$ (also alle infiziert) gestartet und alle Muster berechnet, die man aus diesem Muster in mehreren Schritten erhält: (Dass man alle gültigen Muster so erhält, wird noch im später folgendem Lemma 4.37 begründet) Für jedes Muster werden alle möglichen Muster der nächsten Ebene berechnet, indem man alle möglichen Kantenkonfigurationen zwischen zwei Ebenen betrachtet. Dies führt man solange durch, bis man kein neues Muster erhält.

Es werden alle Muster als Zustand ∞ zusammengefasst, die keine infizierten Knoten enthalten. Anschließend wird die Übergangsmatrix auf dem Zustandsraum $\mathbf{M}^1(C_k) \cup \{\infty\}$ berechnet: Dazu wird in zwei Schritten vorgegangen (um den Rechenaufwand zu reduzieren), indem man zuerst die Übergangsmatrix berechnet, wenn man nur die vertikalen Kanten betrachtet (also, wenn alle horizontalen Kanten auf der nächsten Ebene nicht offen sind). Anschließend wird die Übergangsmatrix berechnet, die die horizontalen Kanten hinzufügt. Wenn man die beiden Matrizen nun multipliziert, erhält man die eigentliche Übergangsmatrix. Die beiden Matrizen werden dabei berechnet, indem man für jedes Muster und jede Kantenperkolation das erhaltene Muster betrachtet.

Jetzt wird noch die Startverteilung ausgerechnet. Dazu wird eine Übergangsmatrix (wie oben) aufgestellt, die nur Muster aus $\mathbf{M}^0(C_k)$ betrachtet. Aus deren stationärer Verteilung kann man die Startverteilung von der Markovkette (X_n) berechnen, indem man für jedes Muster M aus $\mathbf{M}^1(C_k)$ das entsprechende Muster \bar{M} betrachtet, das die Knoten als uninfiziert ansieht.

Dass das Vorgehen richtig ist, sieht man an dem gleich folgenden Lemma, wozu zuerst eine Definition (ähnlich zu Definition 1.6) notwendig ist, um das Lemma zu formulieren:

Definition 4.25 Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph. Wir sagen auf einer Ebene $n \in \mathbb{Z}$ des Graphen $G \times \mathbb{Z}$ liegt das (einseitige) entsprechende uninfierte Muster $M = (\emptyset, \{B_1, \dots, B_l\})$ vor, wenn in dem Teilgraphen $G \times ((-\infty, n])$ folgendes gilt: Alle Knoten aus $B_i \times \{n\}$ sind über einen offenen Pfad miteinander verbunden für jedes i . Darüber hinaus gilt für i, j mit $i \neq j$, dass kein Knoten aus $B_i \times \{n\}$ mit einem Knoten aus $B_j \times \{n\}$ verbunden ist.

Mit Y_n , $n \in \mathbb{Z}$ bezeichne das entsprechende uninfierte Muster auf Ebene n .

Bemerkung 4.26 Offensichtlich ist $(Y_n)_{n \geq m}$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ eine Markovkette auf $\mathbf{M}^0(G)$ und bei Y_n betrachtet man nicht, ob irgendwelche Knoten infiziert sind. Ist für $n \in \mathbb{N}_0$ $X_n = (A, \{B_1, \dots, B_l\})$, so ist $Y_n = (\emptyset, \{A, B_1, \dots, B_l\})$ für $A \neq \emptyset$ und $Y_n = (\emptyset, \{B_1, \dots, B_l\})$ für $A = \emptyset$.

Man beachte auch, dass in der 0-ten Ebene immer der Knoten 0 infiziert ist und somit X_0 immer durch die Angabe von Y_0 eindeutig bestimmt ist.

Nun soll gezeigt werden, wie man aus der stationären Verteilung von Y_n die Startverteilung von X_n bekommt:

Lemma 4.27 Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph und sei die stationäre Verteilung der Markovkette Y_n β . Sei für $M = (A, \{B_1, \dots, B_l\}) \in \mathbf{M}^1(G)$, das Muster $\bar{M} \in \mathbf{M}^0(G)$ definiert durch $\bar{M} := (\emptyset, \{A, B_1, \dots, B_l\})$ (also das entsprechende uninfierte Muster). Dann ist die folgende Verteilung α auf $\mathbf{M}(G)$ mit $\alpha(M) = \beta(\bar{M})$ für $M = (A, \dots) \in \mathbf{M}^1(G)$ mit $0 \in A$ und $\alpha(M) = 0$ sonst, die Startverteilung (also die Verteilung von X_0) der Markovkette (X_n) .

Beweis

Man beachte, der Wert von Y_n hängt nur von den Kanten des Graphen $G \times ((-\infty, n])$ ab. Da für $n, m \in \mathbb{Z}$ die beiden Graphen $G \times ((-\infty, n])$ und $G \times ((-\infty, m])$ isomorph sind, hat Y_n die gleiche Verteilung wie Y_m . Damit ist von jedem Y_n die Verteilung die stationäre Verteilung β . Damit gilt insbesondere mit der obigen Bemerkung für $M \in \mathbf{M}^1(G)$ mit $M = (A, \dots) \in \mathbf{M}^1(G)$ mit

$0 \in A$:

$$\begin{aligned}
 P(X_0 = M) &= \sum_{M' \in \mathbf{M}^1(C_k)} P(X_0 = M | Y_0 = M') P(Y_0 = M') \\
 &= \sum_{M' \in \mathbf{M}^1(C_k)} P(X_0 = M | Y_0 = M') \beta(M') \\
 &= \sum_{M' \in \mathbf{M}^1(C_k)} \beta(M') \begin{cases} 1, & \text{falls } M' = \bar{M} \text{ und } M = (A, \dots) \text{ mit } 0 \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \beta(\bar{M})
 \end{aligned}$$

Da auf Ebene 0 immer mindestens ein Knoten infiziert ist (der Knoten 0), folgt $P(X_0 = M) = 0$ für $M \in \mathbf{M}^0(G)$ oder $M = (A, \dots) \in \mathbf{M}^1(G)$ mit $0 \notin A$. \square

Bemerkung 4.28 Damit hätte man auch Lemma 4.18 beweisen können: Wir betrachten (Y_n) bzgl. des Graphen $C_2 \times \mathbb{Z}$. Der Zustandsraum besteht aus $(\{\}, \{\{0\}, \{1\}\})$ und $(\{\}, \{\{0, 1\}\})$. Als Übergangsmatrix haben wir dann, wie man leicht ausrechnet:

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ (1-p)(1-p^2) & p^2 + p - p^3 \end{pmatrix}$$

Als stationäre Verteilung von (Y_n) erhält man $\frac{1}{1-p^2+p^3}(p^3 - p^2 - p + 1, p)$. Mit Lemma 4.27 ist dann $P((0, n) \leftrightarrow^{((-\infty, n])}(1, n)) = P((0, 0) \leftrightarrow^{((-\infty, 0])}(1, 0)) = P(X_0 = (\{0, 1\}, \emptyset)) = \frac{p}{1-p^2(1-p)}$.

Also wird wie oben die Startverteilung berechnet. Sei A die Übergangsmatrix der Markovkette (X_n) , wobei man alle nicht infizierten Zustände zusammenfasst und α die entsprechende Startverteilung ist.

Anschließend wird für $n = 0, 1, 2 \dots$ $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$ so lange berechnet, bis alle Einträge (außer dem Eintrag für den Zustand ∞) für $0 < p < 1$ positiv sind. Hat man so ein n gefunden, so ist man fertig und hat ein optimales n_0 aus Vermutung 1.8 für den Graphen bestimmt. (siehe auch Lemma 4.24) Es soll nun beschrieben werden, wie man untersuchen kann, ob ein Eintrag von $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$ positiv für alle $p \in (0, 1)$ ist.

Dazu wird die Sturmsche Kette aus der reellen Algebra benutzt (siehe z.B. [Rol07]), welche auf dem Euklidischen Algorithmus basiert und die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem Intervall $[a, b]$ berechnet (der Algorithmus ist auch in manchen CAS hinterlegt). Der Vollständigkeit halber geben wir den Algorithmus hier an: Zuerst konstruiert man Polynome, die man die Sturmsche Kette nennt:

Definition 4.29 Sei f ein reelles Polynom vom Grad mindestens 1. Dann definiere $g_0 := \frac{f}{\text{ggT}(f, f')}$ (dabei ist f' die Ableitung von f). Setze $g_1 := -g'_0$ und bestimme ausgehend von den Polynomen g_0, g_1 mit einer Variante des Euklidischen Algorithmus rekursiv neue Polynome aus folgender Gleichung:

$$g_{i+1} = q_i g_i - g_{i-1}, \quad (4.5)$$

Dabei ist q_i ein reelles Polynom und g_{i+1} ein reelles Polynom mit $\deg(g_i) > \deg(g_{i+1})$. Dies führt man, solange $g_{i+1} \neq 0$ ist, durch und erhält Polynome g_0, \dots, g_m (insbesondere ist $g_m \neq 0$). Die Polynome g_0, \dots, g_m nennt man *Sturmsche-Kette*.

Bemerkung 4.30 Natürlich kann nach der Definition ein reelles Polynom f mehrere verschiedene Sturmsche Ketten haben.

Bis auf das Vorzeichen entspricht es dem bekannten Euklidischen Algorithmus. Daher ist g_m der größte gemeinsame Teiler von g_0 und g_1 (bzw. von g_0 und g'_0). Bekanntlich hat das Polynom g_0 und f die gleichen (komplexen) Nullstellen und darüber hinaus hat g_0 keine mehrfachen (komplexen) Nullstellen und somit hat g_m überhaupt keine (komplexe) Nullstelle und somit ist $g_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bevor man damit die Anzahl der Nullstellen im Intervall $[a, b)$ bestimmen kann, braucht man noch folgenden Begriff:

Definition 4.31 Hat man eine endliche Folge von Polynomen g_0, \dots, g_m , dann sind Anzahl der Vorzeichenwechsel an der Stelle x wie folgt definiert: Man bestimmt $g_0(x), \dots, g_m(x)$ und streicht in dieser Folge alle Werte mit 0. Dann zählt man, wie viele der verbleibenden Folgenglieder ein anderes Vorzeichen haben als das vorausgegangene Folgenglied. Diese Zahl nennt man *Vorzeichenwechsel der Polynome g_0, \dots, g_m an der Stelle x* . Im Folgenden bezeichnet man mit $w(x)$ diese Zahl.

Nach der Vorarbeit, kann man folgendes Lemma formulieren, welches die Anzahl der Nullstellen eines reelles Polynoms im Intervall $[a, b)$ einfach bestimmt:

Lemma 4.32 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei f ein reelles Polynom. Dann hat in $[a, b)$ genau $w(b) - w(a)$ reelle Nullstellen. Dabei ist $w(x)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Sturmschen Kette von f an der Stelle x .

Beweis

Der Beweis ist im Wesentlichen aus [Rol07] entnommen: Der Beweis baut auf der Tatsache auf, wie sich $w(x)$ bei verändertem x ändert. Seien x_1, x_2, \dots, x_l die Nullstellen von f im Intervall $[a, b)$. Es soll zuerst angemerkt werden, wenn man folgende zwei Aussagen zeigt, dann ist die Aussage bewiesen:

1. Es ist $w(x_j - h) = w(x_j) = w(x_j + h) - 1$ für jedes hinreichend kleines $h > 0$.
2. Für jedes hinreichend kleines $h > 0$ ist $w(x - h) = w(x) = w(x + h)$, wenn x keine Nullstelle von f ist (insbesondere ist dann $w(x_{j-1} + h) = w(x_j - h)$, da es im Intervall $[x_{j-1} + h, x_j + h]$ keine Nullstelle gibt).

Ist dies gezeigt, dann ist w auf den Intervallen $w(b) - w(a)$ die Anzahl der Nullstellen:

$$\begin{aligned} w(b) - w(a) &= \underbrace{w(x_1) - w(a)}_{=0} + \sum_{j=2}^l \left(\underbrace{w(x_j) - w(x_{j-1}))}_{=1} \right) + \underbrace{w(b) - w(x_m)}_{=1} \\ &= l \end{aligned}$$

Nun sollen die beiden Punkte gezeigt werden. Aufgrund der Stetigkeit von g_j reicht es zu betrachten, was passiert, wenn ein g_i eine Nullstelle hat. Dazu wird $i > 0$ und $i = 0$ betrachtet.

Fall $i > 0$: Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $g_i(z) = 0$. Es gilt, dass $i < m$ ist, da $g_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Auch gilt, dass aus $g_i(z) = 0$ folgt wegen (4.5), dass $g_{i-1}(z)$ und $g_{i+1}(z)$ unterschiedliche Vorzeichen haben (und auch ungleich 0, sonst wäre es eine Nullstelle von g_m und damit eine gemeinsame von g_0 und g_1). Aufgrund der Stetigkeit gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $h \in (-\epsilon, \epsilon)$ $g_{i-1}(z)$ das gleiche Vorzeichen wie $g_{i-1}(z+h)$ und $g_{i+1}(z)$ das gleiche Vorzeichen wie $g_{i+1}(z+h)$ hat. Egal, welches Vorzeichen $g_i(z+h)$ hat, es gibt für alle $h \in (-\epsilon, \epsilon)$ bei $g_{i-1}(z+h)$, $g_i(z+h)$ und $g_{i+1}(z+h)$ genau einen Vorzeichenwechsel (da $g_{i-1}(z+h)$ und $g_{i+1}(z+h)$ unterschiedliche Vorzeichen haben). Insgesamt folgt daraus Punkt 2.

Fall $i = 0$: Sei z eine Nullstelle von g_0 , daher $g_0(z) = 0$. Nach Wahl von g_1 ist $g_1(z) \neq 0$ (da g_0 nur einfache Nullstellen hat und $g_1 = -g'_0$). Wegen $g_1 = -g'_0$ haben auch für alle hinreichend kleine $h > 0$ die Zahlen $g_0(z-h)$, $g_1(z-h)$, $g_1(z)$ und $g_1(z+h)$ das gleiche Vorzeichen und $g_0(z+h)$ hat ein anderes Vorzeichen. Somit hat die Teilfolge g_0, g_1 an der Stelle $z+h$ einen Vorzeichenwechsel mehr als an den Stellen z und $z-h$. Daher folgt mit dem Fall $i > 0$ (woanders ändert sich nicht die Anzahl der Vorzeichenwechsel) zusammen der Punkt 1 ($w(a-h) = w(a) = w(a+h) - 1$). \square

Man beachte, dass die Startverteilung α unserer betrachteten Markovkette $(X_n)_n$ nur rationale Funktionen als Einträge hat (betrachtet als Funktion in p).

Proposition 4.33 Für die Startverteilung α der Markovkette $(X_n)_n$ gilt, dass diese nur rationale Funktionen als Einträge hat.

Beweis

Sei B die Übergangsmatrix von Y_n und D_M^x die Menge aller Konfigurationen auf $K(E_1)$, sodass man, wenn man das Muster x auf der 0-ten Ebene hat, das Muster M auf der ersten Ebene erhält. Für $d \in D_M^x$ sei e_d die Anzahl der offenen Kanten der Konfiguration d in $K(E_1)$. Damit ist $P^x(Y_1 = M) = \sum_{d \in D_M^x} p^{e_d} (1-p)^{2k-e_d}$ (für $k \geq 3$, analog für $k = 1, 2$). Insbesondere sind alle Einträge von B polynomiell in p . Daher gilt für die stationäre Verteilung β von (Y_n) , dass diese als Lösung des Gleichungssystems $\beta(B - I) = 0$ (dabei ist I die Einheitsmatrix und 0 die Nullmatrix) nur rationale Funktionen als Einträge hat (sieht man z.B. durch das Gaußsche Eliminationsverfahren). Mit Lemma 4.27 hat auch die Startverteilung α von (X_n) nur rationale Funktionen als Einträge. \square

Durch eine Skalierung von α mit einem geeigneten Polynom $h(p)$ (z.B. das kleinste gemeinsame Vielfache der Divisoren der Einträge), welches keine Nullstelle in $(0, 1)$ hat (da α eine Verteilung ist, haben die Divisoren der Einträge keine Nullstellen), ist $h(p)\alpha$ ein Polynom. Dann ist $h(p)(\alpha A^n - \alpha A^{n+1})$ eine Matrix mit nur Polynomen als Einträge und den gleichen Nullstellen wie $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$.

Man beachte, dass alle Einträge von $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$ natürlich eine Nullstelle bei $p = 0$ haben für $n > 0$. Bei $p = 0$ und $n = 0$ sind die Einträge positiv bei Einträgen, in denen α ungleich 0 ist und sonst sind diese auch 0 (außer beim Zustand ∞). Offensichtlich ist bei $p = 0$ α auf den Zustand $(\{0\}, \{\{1\}, \dots, \{k-1\}\})$ konzentriert. Damit ist das Problem, dass ein Eintrag für alle $p \in (0, 1)$ von $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$ (außer dem Eintrag für ∞) für ein bestimmtes $n > 0$ positiv sind, äquivalent zu der Aussage, dass es genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 1)$ gibt und an einer beliebigen Stelle im Intervall $(0, 1)$ ist der Wert positiv. Für $n = 0$ ist die Aussage äquivalent, dass es für den Eintrag von $(\{0\}, \{\{1\}, \dots, \{k-1\}\})$ genau 0 Nullstellen im Intervall $[0, 1)$ gibt und für alle anderen Einträge genau eine Nullstelle in $[0, 1)$ und in beiden Fällen mindestens für ein p positiv ist. (Eigentlich muss man die 0-te Ebene nicht prüfen, da bestimmte gültige Muster auf Ebene 0 die Wahrscheinlichkeit 0 haben (alle Muster, bei denen die 0 nicht infiziert ist).) Mit Lemma 4.32, angewendet auf das Polynom $h(p)(\alpha A^n - \alpha A^{n+1})$, kann man dies ausrechnen. (Man sieht auch, dass man nicht α ausrechnen muss, sondern es reicht ein beliebiges positives Vielfaches auszurechnen, welches den Rechenaufwand etwas senkt)

Auf diese Weise kann man ein minimales n_0 berechnen, sodass für alle $p \in (0, 1)$, alle $n \geq n_0$ und alle $M \in \mathbf{M}^1(C_k)$ $P_p(X_{n_0} = M) > P_p(X_{n_0+1} = M)$ ist.

Zusammenfassend soll der Algorithmus zum Berechnen des minimalen n_0 ,

welches $P_p(X_{n_0} = M) > P_p(X_{n_0+1} = M)$ für alle $M \in \mathbf{M}^1(C_k)$ berechnet, skizzenhaft aufgeführt werden:

Berechne Übergangsmatrix A der Markovkette (X_n) .

Berechne Übergangsmatrix B von (Y_n) .

Berechne die stationäre Verteilung β von B .

Berechne die Startverteilung von (X_n) α aus β .

Berechne solange $\alpha A^n - \alpha A^{n+1}$ bis alle Einträge
(außer bei ∞) positiv sind.

Dazu benutze die Sturmsche-Kette.

Der Rechenaufwand ist relativ groß aufgrund der vielen Zustände der Markovketten (X_n) und (Y_n) . Fasst man die Zustände so zusammen, indem man aus allen äquivalenten Mustern jeweils einen Zustand macht und betrachtet man dann bei den entsprechenden modifizierten Markovketten von (X_n) bzw. (Y_n) (die sind dann Markovketten auf $[\mathbf{M}^1(C_k)] \cup \infty$ und $[\mathbf{M}^0(C_k)]$) funktioniert das obige Verfahren genauso analog. Auf diese Weise kann man dann $P_p(X_{n_0} \in [M]) > P_p(X_{n_0+1} \in [M])$ überprüfen bzw. $P_p(X_n \in [M])$ und $P_p(Y_0 \in [M])$ ausrechnen, welches aufgrund der geringen Anzahl von Zuständen schneller erfolgt.

Man kann noch eine Optimierung im Fall der nicht äquivalenten Muster durchführen: Man berechnet die stationäre Verteilung β' für den äquivalenten Fall und überträgt den mit Hilfe der Symmetrie auf den nicht äquivalenten Fall, um β zu erhalten:

Proposition 4.34 *Sei der Graph C_k gegeben und sei Y'_n die zu Y_n entsprechende Zufallsvariable für äquivalente Muster d.h. $Y'_n = [M]$ genau dann, wenn $Y_n \in [M]$. Sei weiter β' die stationäre Verteilung von $Y_n'^1$, dann gilt:*

$$\beta(M) = \frac{1}{\#[M]} \beta'([M])$$

Beweis

Seien $M, M' \in \mathbf{M}^0(C_k)$ und Φ ein Graphenautomorphismus von C_k . Dann gilt offensichtlich für alle $n \in \mathbb{Z}$ $P(Y_n = M | Y_{n-1} = M') = P(Y_n = \Phi(M) | Y_{n-1} = \Phi(M'))$ (vgl. Definition 1.10). Somit hat man aus Symmetriegründen $\beta(M) = \beta(\Phi(M))$ und

$$\begin{aligned} \beta'([M]) &= P(Y'_n = [M]) = \sum_{M' \in [M]} P(Y_n = M') \\ &= \sum_{M' \in [M]} \beta(M') = \sum_{M' \in [M]} \beta(M) = \#[M] \beta(M) \end{aligned}$$

□

¹Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 4.27 ist β' auch die Verteilung von Y'_n für alle $n \in \mathbb{Z}$

Damit reduziert man die sehr aufwendige Berechnung der stationären Verteilung von Y_n deutlich, da man nur noch im Wesentlichen die stationäre Verteilung von Y'_n ausrechnen muss.

In folgender Tabelle sind sowohl das optimale n_0 für den äquivalenten und nicht äquivalenten Fall für C_k aufgelistet:

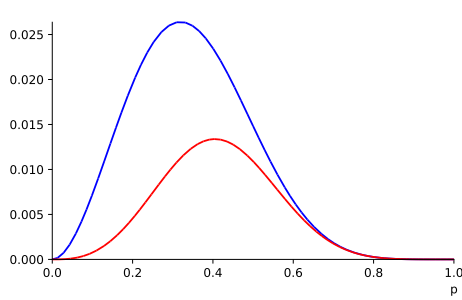
Graph	Minimales n_0 äquivalente Muster	Minimales n_0 nicht äquivalente Muster
C_2	0	2
C_3	2	2
C_4	2	4

Um eine Vorstellung vom Rechenaufwand zu bekommen, sind in folgender Tabelle die Anzahl der gültigen (infizierten/uninfizierten) Muster von C_k für kleine k angegeben, die ebenfalls mit dem Computer berechnet worden sind (siehe Anhang):

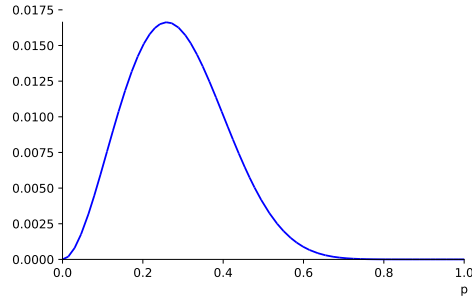
k	$\# \mathbf{M}(C_k)$	$\# \mathbf{M}^0(C_k)$	$\# \mathbf{M}^1(C_k)$	$\# [\mathbf{M}(C_k)]$	$\# [\mathbf{M}^0(C_k)]$	$\# [\mathbf{M}^1(C_k)]$
2	5	2	3	4	2	2
3	15	5	10	7	3	4
4	49	14	35	15	6	9
5	168	42	126	31	10	21
6	594	132	462	80	24	56
7	2145	429	1716	204	49	155
8	7865	1430	6435	599	130	469

Dass die obige Anzahl von Mustern teilweise bekannten Folgen entspricht, sieht man in Bemerkung 4.40.

Es soll noch der Funktionsgraph von $p \rightarrow P_p(X_n = M)$ für zwei bestimmte Muster und Ebenen beispielhaft angeschaut werden. Zuerst soll für das Muster $(\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\})$ im Graphen C_3 in der Ebene 2 und 3 der Funktionsgraph angegeben werden, der den typischen Verlauf hat, wie man ihn für die meisten Muster und Ebenen erwartet:



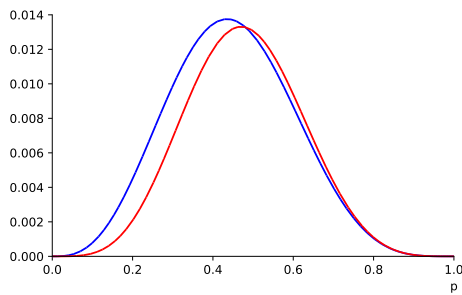
Graphen von
 $P_p(X_1^{C_3} = (\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\}))$
 und
 $P_p(X_2^{C_3} = (\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\}))$



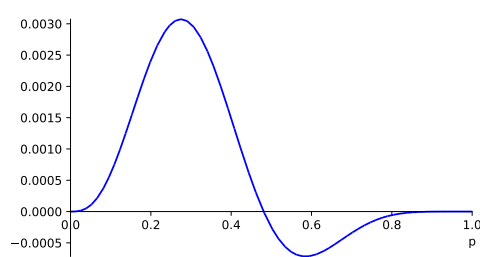
Graph von
 $P_p(X_2^{C_3} = (\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\})) - P_p(X_3^{C_3} = (\{0\}, \{\{1\}, \{2\}\}))$

Es kann auch sein, dass für ein bestimmtes Muster $M \in \mathbf{M}^1(C_3)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $P_p(X_n = M) < P_p(X_{n+1} = M)$ für alle $p \in (0, 1)$ erfüllt ist (das ist insbesondere der Fall, wenn das Muster nicht auf allen Ebenen auftreten kann, wie das Muster $(\{2\}, \{\{0, 1\}\})$, welches nicht auf der Ebene 0 eintritt, aber auf allen Ebenen, die größer als 0 sind).

Ebenfalls kann es vorkommen, dass für ein bestimmtes Muster $M \in \mathbf{M}^1(C_k)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ für bestimmte $p \in (0, 1)$ die Ungleichung $P_p(X_n = M) < P_p(X_{n+1} = M)$ und für bestimmte $p \in (0, 1)$ die Ungleichung $P_p(X_n = M) > P_p(X_{n+1} = M)$ erfüllt ist. Dies ist z.B. für C_3 und dem Muster $(\{2\}, \{\{0, 1\}\})$ und $n = 1$ der Fall. Die folgenden Bilder stellen die Differenz von $P_p(X_1 = (\{2\}, \{\{0, 1\}\}))$ und $P_p(X_2 = (\{2\}, \{\{0, 1\}\}))$ und jeweils die beiden Graphen für $p \in (0, 1)$ dar:



Graphen von
 $P_p(X_1^{C_3} = (\{2\}, \{\{0, 1\}\}))$
 und
 $P_p(X_2^{C_3} = (\{2\}, \{\{0, 1\}\}))$



Graph von
 $P_p(X_1^{C_3} = (\{2\}, \{\{0, 1\}\})) - P_p(X_2^{C_3} = (\{2\}, \{\{0, 1\}\}))$

Natürlich kann man die Vermutung 1.7 für C_k für kleine k nachweisen, wenn man das obige Verfahren noch ergänzt:

Man führt das obige Verfahren durch und bestimmt ein n_0 , sodass $P_p(X_{n_0} =$

$M) > P_p(X_{n_0+1} = M)$ gilt. Wegen Lemma 1.13 und Lemma 1.14 gilt $P_p((0,0) \leftrightarrow (a,n)) > P_p((0,0) \leftrightarrow (a,n+1))$ für $n \geq n_0$. Daher muss man $P_p((0,0) \leftrightarrow (a,n)) > P_p((0,0) \leftrightarrow (a,n+1))$ nur noch für $n < n_0$ nachweisen. Da

$$P_p((0,0) \leftrightarrow (a,n)) = \sum_{M=(A,\{B_1,\dots,B_l\}) \in \tilde{\mathbf{M}}^1(C_k), a \in A} P_p(\tilde{X}_n = M)$$

muss man nur $P_p(\tilde{X}_n = M)$ für endlich viele n und alle $M \in \tilde{\mathbf{M}}^1(C_k)$ bestimmen.

$P_p(\tilde{X}_n = M)$ kann man einfach aus αA^n und β , welche die stationäre Verteilung von Y_n ist, bestimmen:

Proposition 4.35 *Sei β die stationäre Verteilung von (Y_n) . Sei $M = (A^M, \{B_1^M, \dots, B_{l_M}^M\}) \in \mathbf{M}^1(C_k)$ und $M' = (\emptyset, \{B_1^{M'}, \dots, B_{l_{M'}}^{M'}\}) \in \mathbf{M}^0(C_k)$ und $D \subseteq \{0, \dots, k-1\}$. Betrachte folgende Äquivalenzrelation auf $V(G)$: Sei $x \sim y$ genau dann, wenn für ein $t \in \mathbb{N}$ es Mengen $F_1, \dots, F_t \in \{A^M, B_1^M, \dots, B_{l_M}^M\}$ und $G_1, \dots, G_{t-1} \in \{A^{M'}, B_1^{M'}, \dots, B_{l_{M'}}^{M'}\}$ gibt, sodass $x \in F_1$ und $y \in F_t$ und für alle $i \in \{1, \dots, t-1\}$ ist $F_i \cap D \cap G_i \neq \emptyset$ und $G_i \cap D \cap F_{i+1} \neq \emptyset$.*

Mit $r(M, M', D)$ ist das Muster $(A, \{B_1, \dots, B_l\})$ gemeint für das $A^M \subseteq A$ und A, B_1, \dots, B_l die Äquivalenzklassen bezüglich \sim sind.

Dann ist

$$P_p(\tilde{X}_n = \tilde{M}) = \sum_{\substack{M \in \mathbf{M}^1(C_k), M' \in \mathbf{M}^0(C_k), D \subseteq \{0, \dots, k-1\} \\ \text{mit } r(M, M', D) = \tilde{M}}} P_p(X_n = M) p^{\#D} (1-p)^{k-\#D} \beta(M')$$

Beweis

Den Graphen $C_k \times \mathbb{Z}$ kann man in die Graphen $C_k \times ((-\infty, n])$, $C_k \times [[n+1, \infty))$ und $C_k \times ((n, n+1))$ ² zerlegen (im Prinzip eine Partition bezüglich der Kanten). Der Graph $C_k \times [[n+1, \infty))$ ist isomorph zu $C_k \times ((-\infty, n+1])$. Da Y_{n+1} die Verteilung β hat, gibt β an, welche Knoten auf der $n+1$ -ten Ebene im Graphen $C_k \times ((-\infty, n+1])$ miteinander verbunden sind, also auch welche Knoten auf der $n+1$ -ten Ebene im Graphen $C_k \times [[n+1, \infty))$ miteinander verbunden sind. X_n gibt an, welche Knoten auf der n -ten Ebene im Graphen $C_k \times ((-\infty, n])$ miteinander verbunden sind und welche infiziert sind. Wenn man also X_n kennt und weiß, welche vertikalen Kanten zwischen der n -ten und $n+1$ -ten Ebene offen sind und weiß, welche Knoten auf der $n+1$ -ten Ebene im Graphen $C_k \times [[n+1, \infty))$ miteinander durch einen offenen

²Mit dem Graphen $C_k \times ((n, n+1))$ ist analog zu Definition 4.16, der Graph gemeint, dessen Knoten $\{(v_1, v_2) | v_1 \in C_k, v_2 \in \{n, n+1\}\}$ und dessen Kanten $\{(v, n), (v, n+1) | v \in C_k\}$ sind. Damit ist $C_k \times ((n, n+1))$ der Graph, der nur aus den Kanten zwischen der n -ten und $n+1$ -ten Ebene besteht.

Pfad verbunden sind, dann kennt man auch das zweiseitige Muster auf der n -ten Ebene. Genauer, wenn $X_n = M$ und genau von den vertikalen Kanten zwischen der n -ten und $n + 1$ -ten die Kanten $\{(d, n), (d, n + 1)\}$ für $d \in D$ offen sind und im Graphen $C_k \times [[n + 1, \infty))$ genau die Knoten auf der $n + 1$ -ten Ebene so verbunden sind, wie es dem Muster M' entspricht, hat man auf der n -ten Ebene das Muster $r(M, M', D)$. Denn die Äquivalenzrelation \sim entspricht dann der Aussage $(x, n) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}} (y, n)$.

Da die Wahrscheinlichkeit, dass von k Kanten genau die Kanten $\{(d, n), (d, n + 1)\}$ für $d \in D$ offen sind, ist $p^{\#D}(1 - p)^{k - \#D}$ die Wahrscheinlichkeit für die offenen vertikalen Kanten zwischen den beiden Ebenen. Damit folgt die Behauptung. \square

Da man die Äquivalenzklassen leicht ausrechnen kann, ist es möglich, für kleine k Vermutung 1.7 zu zeigen:

Proposition 4.36 *Für $k = 2, 3, 4$ gilt für den Graphen C_k :*

$$P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}} (a, n)) > P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}} (a, n + 1))$$

Mit dem im Anhang verfügbaren Computerprogramm wurde die Proposition nachgerechnet. Dabei hat man wieder die Sturmsche Ketten benutzt, um zu überprüfen, ob $P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}} (a, n)) - P_p((0, 0) \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}} (a, n + 1)) > 0$ ist.

4.3 $C_k \times \mathbb{Z}$ für beliebige k

In diesem Abschnitt betrachten wir das Gitter $C_k \times \mathbb{Z}$ und beweisen Vermutung 1.8 für $C_k \times \mathbb{Z}$. Dabei wird der Beweis in drei Teile zerlegt, indem wir zum einen p nahe bei 0, p nahe bei 1 und p etwas entfernt von 0 und 1 betrachten. Die Beweise funktionieren fast genauso für die meisten Graphen $G \times \mathbb{Z}$ mit G endlich und zusammenhängend. Dazu muss man eine zusätzliche Einschränkung an G machen, die die meisten Graphen erfüllen. Für alle drei Fälle ist es wichtig, etwas mehr über Muster zu erfahren. Deshalb zuerst etwas Vorarbeit, die in allen drei Fällen hilfreich ist.

4.3.1 Vorbemerkung zu Mustern

Mit X_n ist wieder das (einseitige) Muster auf der n -ten Ebene bezeichnet. (siehe Definition 1.6)

Zuerst sollen die gültigen Muster von C_k charakterisiert werden:

Lemma 4.37 *Ein Ebenenmuster M ist genau dann gültig (also aus $\mathbf{M}(C_k)$), wenn für alle $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_k$ gilt: Sind bzgl. M x_1 und x_2 verbunden und x_3 und x_4 verbunden, aber x_1 und x_3 sind nicht verbunden, so folgt, dass es in C_k disjunkte Pfade gibt, die x_1 und x_2 verbinden und x_3 und x_4 verbinden. Anschaulich bedeutet dies, dass es keinen Rundweg auf C_k gibt, in dem abwechselnd in der Reihenfolge x_1, x_3, x_2 und x_4 auftreten.*

Zusätzlich gilt sogar, dass es für alle Muster $x \in \mathbf{M}^1(C_k)$ und $y \in \mathbf{M}(C_k)$ ein $n \leq \frac{k+2}{2}$ gibt, sodass

$$P^x(X_n = y) > 0$$

Ist $x \in \mathbf{M}(C_k)$ und $y \in \mathbf{M}^0(C_k)$ so gibt es ein $n \leq \frac{k+1}{2}$, sodass

$$P^x(X_n = y) > 0$$

Beweis

Sei M ein gültiges Muster und sei eine Kantenperkolation auf $C_k \times \mathbb{Z}$ gegeben, die auf Ebene n des Graphen das Muster M hat. Wäre $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_k$, sodass es in C_k keine disjunkten Pfade gibt, die x_1 und x_2 verbinden und x_3 und x_4 verbinden und jeweils (x_1, n) mit (x_2, n) und (x_3, n) mit (x_4, n) durch einen offenen Pfad in $C_k \times ((-\infty, n])$ verbunden sind, dann wäre dies in dem betrachteten Graphen nur möglich, wenn sich die Pfade schneiden, also wäre auch x_1 mit x_3 verbunden. Damit erfüllt M die geforderte Eigenschaft.

Sei nun M ein Muster mit den Eigenschaften aus dem Lemma. Nun soll gezeigt werden, dass dieses Muster gültig ist. Es wird sogar gezeigt, dass wir das Muster M von jedem anderen gültigen Muster aus $\mathbf{M}^1(C_k)$ in maximal $\frac{k+2}{2}$ Schritten erreichen können.

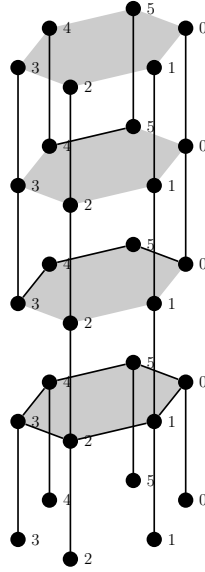


Abbildung 4.1: Beispiel für den Fall $k = 6$ und das zu konstruierende Muster $(\{1, 2\}, \{\{0, 3\}, \{4, 5\}\})$. Hier ist $F_1 = \{1, 2\}$, $F_2 = \{0, 3\}$, $F_3 = \{4, 5\}$ und $A_1 = E(C_6)$, $A_2 = \{\{0, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$, $A_3 = \{\{4, 5\}\}$

Dazu definieren wir uns zuerst ein paar Hilfsmengen: Wir definieren zuerst folgende Teilmengen A_j und F_j von $E(C_k)$ bzw. $V(C_k)$. Sei F_1 die Menge der infizierten Knoten von M und $A_1 := E(C_k)$ sei die Menge aller Kanten von C_k . Wir definieren nun die Mengen $F_1, F_2, \dots, F_j \subseteq V(C_k)$ und $A_1, A_2, \dots, A_j \subseteq E(C_k)$ wie folgt rekursiv: Seien F_{t-1} und A_{t-1} definiert. Gibt es keine miteinander verbundenen Knoten (bezüglich M) in $V(C_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} F_i$, so ist man fertig und setze $j = t - 1$. Anderenfalls betrachte die Komponenten von $C_k \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} F_i$ D_t^1, \dots, D_t^s . Nach Voraussetzung an M sind Knoten nur miteinander verbunden (außer den Knoten aus $\bigcup_{i=1}^{t-1} F_i$), wenn sie in den gleichen Komponenten D_t^1, \dots, D_t^s liegen. Für jede Komponente D_t^l setze $F_t^l = \emptyset$, falls es keine Knoten in D_t^l gibt, die mit einem anderen Knoten verbunden sind bezüglich des Musters M . Anderenfalls wähle eine Teilmenge F_t^l von D_t^l , sodass alle Knoten aus F_t^l verbunden sind (bzgl. M) und kein Knoten aus $D_t^l \setminus F_t^l$ mit einem Knoten aus F_t^l verbunden ist (und F_t^l sollte mindestens zwei Elemente haben). Darüber hinaus sollte F_t^l so gewählt werden, dass die Knoten aus D_t^l höchstens dann miteinander verbunden sind, wenn sie in der gleichen Komponente aus $D_t^l \setminus F_t^l$ liegen. Dies ist nach Voraussetzung an M möglich. Z.B. wenn O.B.d.A. $D_t^l = \{0, 1, \dots, r\}$ ist, wähle das kleinste Element e aus $\{0, 1, \dots, r\}$, welches mit mindestens einem anderen Knoten

verbunden ist. Setze als F_t^l die Menge alle Knoten, die mit dem Knoten e (einschließlich) verbunden sind. Wären nun zwei Knoten y_1, y_2 miteinander verbunden, die in unterschiedlichen Komponenten von $D_t^l \setminus F_t^l$ liegen, und e' ein Knoten aus F_t^l , der zwischen y_1 und y_2 liegt, so erfüllen e, e' und y_1, y_2 nicht die Voraussetzungen des Musters.

Definiere $F_t := \bigcup F_t^l$. Weiter definiere mit A_t^l die Menge aller Kanten aus $E(C_k)$, deren beide Endpunkte in D_t^l liegen und sei $A_t := \bigcup A_t^l$.

Wir konstruieren nun aus jedem Muster in $j + 1$ Schritten das Muster M :

Zuerst sehen wir, dass wir durch einen Schritt das Muster erreichen, dass alle Knoten infiziert sind (einfach alle Kanten offen auf der nächsten Ebene). Mit einem weiteren Schritt erreicht man das Muster, indem genau die infizierten Knoten von M infiziert sind und die Knoten aus F_2^l jeweils untereinander verbunden sind (nur die vertikalen Kanten mit Endpunkten aus F_1 und genau die horizontalen Kanten A_2 sind offen). Analog definiere immer so weiter: Im t -ten Schritt seien nur die vertikalen Kanten aus $\bigcup_{i=1}^{t-1} F_i$ offen und die genau horizontalen Kanten A_t offen. Man sieht im t -ten Schritt sind F_1, \dots, F_{t-1} jeweils miteinander verbunden und die Knoten aus F_1 sind genau die infizierten Knoten. Im letzten Schritt sollen genau die vertikalen Kanten aus $\bigcup_{i=1}^j F_i$ offen sein und alle anderen Kanten geschlossen. Somit erhält man das Muster M .

Man beachte, dass F_1, \dots, F_j disjunkte Teilmengen von $V(C_k)$ sind und damit $|F_1| + \dots + |F_j| \leq k$ ist. Wenn $|F_1| + \dots + |F_j| = k$, dann kann man sogar den letzten Schritt weglassen (da in diesem Fall im letzten Schritt alle vertikalen Kanten offen sind). Somit kann man im Falle $|F_1| + \dots + |F_j| = k$ in j Schritten das Muster M konstruieren und im Falle $|F_1| + \dots + |F_j| < k$ in $j + 1$ Schritten das Muster M konstruieren.

Wir rechnen nun aus, wie viele Schritte man maximal braucht. Man beachte, dass F_2, \dots, F_j jeweils mindestens die Mächtigkeit 2 haben. Weiter gibt es $k - |F_1|$ uninfizierte Knoten und F_2, \dots, F_j sind Teilmengen von $V(C_k) \setminus F_1$. Somit ist $j \leq (k - |F_1|)/2 + 1$, wegen $|F_1| + \dots + |F_j| \leq k$. Mit der obigen Fallunterscheidung für die Summe von $|F_1|, \dots, |F_j|$ erhält man, dass man im Falle $j < (k - |F_1|)/2 + 1$ höchstens $(k - |F_1|)/2 + \frac{3}{2}$ Schritte braucht und im Falle $j = (k - |F_1|)/2 + 1$ höchstens $(k - |F_1|)/2 + 1$ Schritte braucht. Insgesamt braucht man deshalb höchstens $(k - |F_1| + 3)/2$ Schritte.

Ist $|F_1| \geq 1$, so braucht man höchstens $(k + 2)/2$ Schritte. Wenn wir ein Muster aus $\mathbf{M}^0(C_k)$ erreichen wollen, ist $|F_1| = 0$, so könnte man den ersten Schritt weglassen und hätte insgesamt auch nur maximal $(k + 1)/2$ Schritte. Insgesamt folgt die Behauptung.

Bemerkung 4.38 Die unfizierten Muster entsprechen den aus der Literatur bekannten nichtkreuzenden Partitionen (siehe z.B. [Sim00]). Eine Partition A von der Menge $\{1, \dots, n\}$ heißt nichtkreuzende Partition, wenn für alle $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ mit $1 \leq a < b < c < d \leq n$ gilt, sind a, c und b, d in einer gemeinsamen Klasse, dann sind auch a, b, c, d in einer gemeinsamen Klasse. Nach Definition von nichtkreuzenden Partitionen und Lemma 4.37 entsprechen die nichtkreuzenden Partitionen von $\{1, \dots, k\}$ den nicht infizierten Mustern von C_k (bis auf die Bezeichnung). Die Anzahl der nichtkreuzenden Partitionen einer k -elementigen Menge ist $\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ (siehe [Sim00]). Damit ist $\#M^0(C_k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

Im Prinzip verwenden wir eigentlich hauptsächlich Lemma 4.37 in Form von folgendem Korollar:

Korollar 4.39 Für alle $n \geq \lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor$ und $x, y \in M^1(C_k)$ (und $p > 0$) ist

$$P^x(X_n = y) > 0$$

Beweis

Nach Lemma 4.37 gibt es ein $l \leq \frac{k+2}{2}$, sodass $P^x(X_l = y) > 0$. Da man immer in dem gleichen Muster bleibt, wenn in der nächsten Ebene alle vertikalen Kanten offen sind und alle horizontalen Kanten geschlossen sind, erhält man die Aussage. \square

Bemerkung 4.40 Für allgemeine endliche zusammenhängende Graphen G kann man nicht immer so eine Schranke finden. Betrachte zum Beispiel die Stern-Graphen $V(G) = \{0, \dots, k-1\}$ und $E(G) = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots, (0, k-1)\}$. Man kann nicht vom Zustand $(\{0\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{k-1\}\})$ in den Zustand $(\{0\}, \{\{1, 2, 3, \dots, k-1\}\})$ kommen. Wäre dies möglich, so müsste in jedem Zwischenschritt mindestens ein Knoten infiziert sein. Ist der Knoten 0 infiziert und die anderen Knoten nicht alle miteinander verbunden oder alle anderen Knoten auch infiziert, so erreicht man das gewünschte Muster nicht im nächsten Schritt. Ist der Knoten 0 nicht infiziert, so ist im nächsten Schritt mindestens ein Knoten ungleich dem 0 Knoten infiziert und somit können nicht alle Knoten außer dem 0 Knoten verbunden sein (außer diese sind infiziert).

Wir wollen nun eine Schranke wie in Lemma 4.37 für alle möglichen Graphen speziell bezeichnen:

Definition 4.41 Für jeden endlichen zusammenhängenden Graphen G bezeichnen wir mit m_G das minimale $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x, y \in M^1(G)$

$$P^x(X_n = y) > 0$$

ist. Sollte es kein solches n geben, so setzen wir $m_G = \infty$.

Im Laufe des Kapitels werden wir uns nur mit Graphen beschäftigen, für die $m_G < \infty$ gilt.

Bemerkung 4.42

1. Natürlich hängt nach Definition m_G nicht von p ab und nach Korollar 4.39 ist $m_{C_k} \leq \frac{k+2}{2}$.
2. m_G kann auch deutlich kleiner sein, da z.B. für $G = K_k$ ist offensichtlich $m_{K_k} = 2$: Es ist $m_{K_k} > 1$, da man z.B. von dem Zustand $(\{0\}, \{\{1, \dots, k-1\}\})$ nicht in einem Schritt in den Zustand $(\{1\}, \{\{0, 2, 3, 4, \dots, k-1\}\})$ kommen kann (Für den Nachfolgezustand gilt, dass entweder in einem Schritt der Knoten 0 infiziert ist oder es ist kein Knoten infiziert.) Dass man in zwei Schritten bei $G = K_k$ jeden Zustand erreichen kann, ist klar: In einem Schritt erreicht man, dass alle Knoten infiziert sind und in einem weiteren Schritt erreicht man die gewünschten infizierten Knoten und die gewünschten Verbindungen untereinander. Damit sind auch offensichtlich alle Muster gültig für $G = K_k$.
3. Es reicht für $m_G < \infty$ nur zu verlangen, dass es für jedes $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$ ein $n_{x,y} \in \mathbb{N}$ mit $P^x(X_{n_{x,y}} = y) > 0$ gibt. Dann ist $m_G \leq \max_{x,y \in \mathbf{M}^1(G)} \{n_{x,y}\}$, da auch $P^x(X_m = y) > 0$ für alle $m > n_{x,y}$. ($P^y(X_1 = y) > 0$, denn, wenn auf der Ebene alle vertikalen Kanten offen und alle horizontalen Kanten geschlossen sind, bleibt man im gleichen Zustand).
4. Auch ist klar, wenn G ein Graph mit genau k Knoten ist, dann ist entweder $m_G \leq \frac{1}{e} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{l!}$ oder $m_G = \infty$, da es nach Proposition 1.8 nur insgesamt höchstens $\frac{1}{e} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{l!}$ Muster gibt und wenn man von einem Muster x das Muster y erreichen kann, dann ist es auch möglich von x aus y zu erreichen, indem man in jedem Übergang (der Markovkette) ein anderes Muster hat.

Bemerkung 4.43 Ist der Graph G nicht so groß, so kann man m_G einfach ausrechnen. Dazu kann man z.B. die Übergangsmatrix A von $(X_n)_n$ aufstellen und betrachten, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Matrix A^n nur Einträge ungleich 0 für Startmuster aus $\mathbf{M}^1(G)$ hat. (vgl. auch Abschnitt 4.2) In folgender Tabelle sind die Werte für m_{C_k} für kleine k angegeben (diese wurden mit dem Programm, welches sich im Anhang befindet, ausgerechnet, dabei muss man die wirkliche Potenz nicht immer ausrechnen, sondern es reicht bei jedem Schritt jeden Eintrag, der ungleich 0 ist, 1 zu setzen):

k	m_{C_k}
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	4

Also sieht man, dass die Abschätzung von m_{C_k} , welche man mit Lemma 4.37 erhält, für $k \leq 7$ optimal ist.

Bevor man nun mit dem eigentlichen Beweis von Vermutung 1.8 beginnt, noch ein Lemma, welches eine Variante von Lemma 4.24 ist:

Lemma 4.44 *Sei $p \in (0, 1)$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und G ein endlicher Graph und $x \in \mathbf{M}^1(G)$. Gilt für alle $y \in \mathbf{M}^1(G)$*

$$P_p^x(X_{n_0+1} = y) < P_p^x(X_{n_0} = y),$$

dann gilt auch für alle $n \geq n_0$

$$P_p^x(X_{n+1} = y) < P_p^x(X_n = y).$$

Beweis

Dies kann man einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} P_p^x(X_n = y) &= \sum_{y' \in \mathbf{M}^1(C_k)} P_p^x(X_{n_0} = y') P_p^{y'}(X_{n-n_0} = y) \\ &> \sum_{y' \in \mathbf{M}^1(C_k)} P_p^x(X_{n_0+1} = y') P_p^{y'}(X_{n+1-(n_0+1)} = y) = P_p^x(X_{n+1} = y) \quad \square \end{aligned}$$

4.3.2 Betrachte p klein

Als Nächstes soll folgende Aussage bewiesen werden, die den Fall p nahe bei 0 betrachtet:

Satz 4.45 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph mit $m_G < \infty$ und genau k Knoten ($k > 1$) und b Kanten und dem maximalen Grad d . Nun betrachten wir den Graphen $G \times \mathbb{Z}$. Weiter sei $0 < t < 1$. Dann gilt für alle*

$$n \geq \frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t} \text{ und alle } p \leq \min\left\{\left(\frac{1}{k(2k+b-2+\frac{k}{k-1}d)}\right)^{\frac{1}{t}}, \frac{1}{\frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t}+3}\right\} \text{ und}$$

$x, y \in \mathbf{M}^1(G)$:

$$P_p^x(X_{n+1} = y) < P_p^x(X_n = y)$$

Beweis

Sei $n = \lceil \frac{2+m_G(4k-2)}{1-t} \rceil$. Nach Lemma 4.44 reicht es, die Aussage nur für n zu zeigen.

Wir bezeichnen im Folgenden die Knoten von G mit $0, \dots, k-1$. Sei B_i das Ereignis, dass es $j \in \{0, \dots, k-1\}$ gibt, sodass auf der i -ten und $i+1$ -ten Ebene von den vertikalen Kanten nur die Kanten $\{(j, i-1), (j, i)\}$ und $\{(j, i), (j, i+1)\}$ offen und alle anderen vertikalen Kanten geschlossen sind und darüber hinaus auf der i -ten Ebene alle horizontalen Kanten geschlossen sind. Definiere $A_{n+1} := \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} B_{2i+1}$.

Mit Hilfe von A_{n+1} soll der Beweis in drei Schritte unterteilt werden. Im ersten Schritt wird $P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_{n+1}^c)$ abgeschätzt und im zweiten Schritt $P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_{n+1})$ und jeweils mit $P_p^x(X_n = y)$ verglichen. Im letzten Schritt werden die beiden ersten Schritte kombiniert.

1. Schritt: Sei B'_i das Ereignis, dass es einen Pfad von offenen Kanten von der $i-1$ -ten Ebene zu der $i+1$ -ten Ebene gibt und insgesamt mindestens 3 Kanten der $2k+b$ Kanten der i -ten Ebene und vertikale Kanten der $i+1$ -ten Ebene offen sind. Insbesondere ist $B'_i \supseteq \{X_{n+1} \in \mathbf{M}^1(G)\} \cap B_i^c$. Es gilt deshalb, dass

$$\begin{aligned} P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_{n+1}^c) &= P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap \bigcap_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} B_{2i+1}^c) \\ &\leq P_p^x\left(\bigcap_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} B'_{2i+1}\right) = \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P_p^x(B'_{2i+1}) \leq P_p^x(B'_1)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dabei hat man berücksichtigt, dass $B'_1, B'_3, \dots, B'_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$ unabhängig sind, da diese auf unterschiedlichen Kantenmengen definiert sind.

Es soll nun $P^x(B'_1)$ nach oben abgeschätzt werden: Wenn B'_1 eintritt, gibt es entweder einen Pfad der Länge 3 oder länger, der die 0-te Ebene mit der 2-ten Ebene verbindet und nur zwei vertikale Kanten verwendet (die erste und letzte Kante des Pfades) oder es gibt ein $j \in \{0, \dots, k-1\}$, sodass die Kanten $\{(j, 0), (j, 1)\}$ und $\{(j, 1), (j, 2)\}$ offen sind und zusätzlich muss es mindestens eine offene Kante auf der 1-ten Ebene oder eine offene vertikale Kante auf der 2-ten Ebene geben. Sei C das Ereignis, dass es einen Pfad gibt, der mindestens die Länge 3 mit den obigen Eigenschaften hat. Weiter sei C' das Ereignis, dass es zwei offene vertikale Kanten übereinander gibt und das zusätzlich eine offene Kante an einer der entsprechenden Positionen auftritt.

Es gibt höchstens $kd(d-1)^{m-2}$ Möglichkeiten für einen Weg der Länge m , der in der 0-ten Ebene beginnt und in der 2-ten Ebene endet und nur horizontale Kanten benutzt (außer bei der ersten und letzten Kante). Denn für die erste Kante hat man k Möglichkeiten und für die zweite Kante d

Möglichkeiten diese auszuwählen. Für die nächsten Kanten gibt es jeweils $d - 1$ Möglichkeiten (alle Kanten außer der vorigen Kante sind möglich) für die Auswahl der Kanten und die letzte (vertikale) Kante ist eindeutig bestimmt. Wegen $p \leq \left(\frac{1}{k(2k+b-2+\frac{k}{k-1}d)} \right)^{\frac{1}{t}} \leq \frac{1}{kd}$ erhält man damit:

$$\begin{aligned} P_p(C) &\leq kdp^3 + kd(d-1)p^4 + kd(d-1)^2p^5 + \dots \\ &\leq kdp^3 \left(1 + \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots \right) = kdp^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = kdp^3 \frac{k}{k-1} \end{aligned}$$

Tritt das Ereignis C' ein, so gibt es k Möglichkeiten für die beiden vertikalen Kanten und es gibt $2k + b - 2$ Möglichkeiten für mindestens eine zusätzliche offene Kante auf der 1-ten Ebene oder eine vertikale Kante auf der 2-ten Ebene. Damit ist:

$$P_p^x(C') \leq k(2k + b - 2)p^3$$

Insgesamt ist also

$$P_p^x(B'_1) \leq P_p^x(C) + P_p^x(C') \leq k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)p^3$$

Mit (4.6) erhalten wir dann:

$$P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A^c) \leq \left(k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)p^3 \right)^{\frac{n}{2}}$$

Nun soll $P_p^x(X_n = y)$ nach unten abgeschätzt werden: Nach Definition von m_G gilt für alle $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$, dass $P_p^x(X_{m_G} = y) > 0$ ist. Da man in m_G Schritten von jedem Zustand jeden Zustand erreichen kann und (es ist $p < \frac{1}{2}$, da $\left(\frac{1}{k(2k+b-2+\frac{k}{k-1}d)} \right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{t}} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$) für jeden Zustandsübergang die Wahrscheinlichkeit größer ist als p^{k+b} , ist für jedes $w \in \mathbf{M}^1(G)$ $P_p^w(X_{m_G} = y) \geq (p^{k+b})^{m_G}$. Ist auf einer Ebene ein Knoten infiziert, dann ist auch ein Knoten auf l Ebene höher infiziert, wenn die entsprechenden vertikalen Kanten zwischen diesen beiden Ebenen offen sind. Deshalb ist $P_p^x(X_l \in \mathbf{M}^1(G)) \geq p^l$. Damit hat man für $n > m_G$:

$$\begin{aligned} P_p^x(X_n = y) &= \sum_{z \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_{n-m_G} = z) P_p^z(X_{m_G} = y) \\ &\geq \sum_{z \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_{n-m_G} = z) \min_{w \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^w(X_{m_G} = y) \\ &= P_p^x(X_{n-m_G} \in \mathbf{M}^1(G)) \min_{w \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^w(X_{m_G} = y) \\ &\geq p^{n-m_G} (p^{k+b})^{m_G} \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{n}{2} + (1 - k - b)m_G \geq t\frac{n}{2} + 1$ genau dann, wenn $n \geq \frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t}$ ist. Somit gilt nach Wahl von n und p :

$$\begin{aligned} \frac{P_p^x(X_{n+1} = y, A_{n+1}^c)}{P_p^x(X_n = y)} &\leq \frac{\left(k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)p^3\right)^{\frac{n}{2}}}{p^{n-m_G}(p^{k+b})^{m_G}} \\ &= \left(k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)\right)^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2} + (1-k-b)m_G} \\ &\leq \left(k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)\right)^{\frac{n}{2}} p^{t\frac{n}{2} + 1} \\ &\leq \left(k(2k + b - 2 + \frac{k}{k-1}d)p^t\right)^{\frac{n}{2}} p \leq p \end{aligned}$$

Wobei bei der letzten Ungleichung benutzt wurde, dass nach Voraussetzung an p die Ungleichung $p^t \leq \frac{1}{k(2k+b-2+\frac{k}{k-1}d)}$ gilt.

2. Schritt: Für $z, w \in M^1(G)$ bezeichne mit $B_i^{z,w}$ die Teilmenge von B_i , die auf der $i+1$ -ten Ebene das Muster w hat und für die beiden offenen vertikalen Kanten $\{(j, i-1), (j, i)\}$ und $\{(j, i), (j, i+1)\}$ gilt, dass j ein infizierter Knoten aus z ist.

Mit $\hat{B}_i^{z,w}$ bezeichnen wir folgende Obermenge von $B_i^{z,w}$: $\hat{B}_i^{z,w}$ ist das Ereignis, dass für ein $j \in \{0, \dots, k-1\}$, wobei j ein infizierter Knoten aus z ist, auf der $i+1$ -ten Ebene von den vertikalen Kanten nur die Kanten $\{(j, i), (j, i+1)\}$ offen und alle anderen vertikalen Kanten geschlossen sind und darüber hinaus es auf der $i+1$ -ten Ebene das Muster w gibt. Anschaulich unterscheiden sich $B_i^{z,w}$ und $\hat{B}_i^{z,w}$ dadurch, dass man bei $\hat{B}_i^{z,w}$ die i -te Ebene nicht betrachtet. Insbesondere ist also

$$P_p(B_i^{z,w}) = p(1-p)^{k+b-1} P_p(\hat{B}_i^{z,w}) < p P_p(\hat{B}_i^{z,w}). \quad (4.7)$$

Wenn das Ereignis A_{n+1} eintritt, muss es ein i mit $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ geben, sodass das Ereignis B_{2i+1} eintritt. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_{n+1}) &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap B_{2i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{z, w \in M^1(G)} P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap B_{2i+1}^{z,w} \cap \{X_{2i} = z, X_{2i+2} = w\}) \end{aligned}$$

Es soll nun betrachtet werden, was dies auf den unterschiedlichen Kantenmengen $\bigcup_{j=0}^{2i} E_j$, $\bigcup_{j=2i+1}^{2i+2} E_j$ und $\bigcup_{j=2i+3}^{n+1} E_j$ bedeutet:

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{z,w \in M^1(G)} P_p^x(X_{2i} = z) P_p(B_{2i+1}^{z,w}) P_p^w(X_{n+1-(2i+2)} = y)$$

Unter Verwendung von (4.7) erhält man:

$$< p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{z,w \in M^1(G)} P_p^x(X_{2i} = z) \underbrace{P_p(\hat{B}_{2i+1}^{z,w})}_{=P_p(\hat{B}_{2i}^{z,w})} P_p^w(X_{n-(2i+1)} = y)$$

Betrachtet man dies wieder als Ereignisse auf unterschiedlichen Kantenmengen, so erhält man:

$$\begin{aligned} &= p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{z,w \in M^1(G)} P_p^x(\{X_n = y\} \cap \hat{B}_{2i}^{z,w} \cap \{X_{2i} = z, X_{2i+1} = w\}) \\ &\leq p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P_p^x(X_n = y) \\ &= p(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) P_p^x(X_n = y) \end{aligned}$$

3. Schritt: Kombiniert man Schritt 1 und 2, so erhält man nach Wahl von n und p :

$$\begin{aligned} P_p^x(X_{n+1} = y) &= P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_n) + P_p^x(\{X_{n+1} = y\} \cap A_n^c) \\ &< (p + p(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)) P_p^x(X_n = y) \leq p(1 + \frac{n+1}{2}) P_p^x(X_n = y) \\ &\leq p(\frac{3}{2} + \frac{\lceil \frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t} \rceil}{2}) P_p^x(X_n = y) \leq P_p^x(X_n = y) \end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung wurde verwendet, dass $p \leq \frac{1}{\frac{2+2m_G(k+b-1)}{\lceil \frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t} \rceil + 3} + 2}$ ist. □

Bemerkung 4.46

1. Man sieht, wenn man Schranke an n möglichst klein wählen möchte, dann muss man t nahe bei 0 wählen, hat aber dann den Nachteil, dass die Schranke an p sehr klein wird.

2. Da $\left(\frac{1}{k(2k+b-2+\frac{k}{k-1}d)}\right)^{\frac{1}{t}}$ monoton wächst und $\frac{1}{\frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t}+3}$ monoton fällt in t , gilt die Aussage für möglichst große p 's, wenn $\left(\frac{1}{k(d-1)(2k+b-2)}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{\frac{2+2m_G(k+b-1)}{1-t}+3}$ ist. Natürlich ist dann n relativ groß.

Man beachte, dass der Graph C_k genau k Knoten und k Kanten (für $k \geq 3$, für $k = 2$ hat man genau 1 Kante) hat. Somit erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 4.47 *Man kann in Satz 4.45 für $G = C_k$ mit $k > 1$*

$$n \geq \frac{2 + m_{C_k}(4k - 2)}{1 - t}$$

und

$$p \leq \min\left\{\left(\frac{1}{k(3k - 2 + \frac{k}{k-1}2)}\right)^{\frac{1}{t}}, \frac{1}{\frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-t}+3}\right\}$$

wählen.

4.3.3 Betrachte p in der Mitte

Betrachte das Gitter $G \times \mathbb{Z}$. Im Folgenden ist immer Z der Zeitpunkt, an dem der Prozess ausstirbt. Genauer:

Definition 4.48 *Betrachte die Kantenperkolations im Gitter $G \times \mathbb{Z}$. Im Folgenden ist $Z^{G \times \mathbb{Z}}$ definiert durch*

$$Z^{G \times \mathbb{Z}} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{0} \leftrightarrow (x, n) \text{ für alle } x \in G\}$$

Wieder schreibe Z statt $Z^{G \times \mathbb{Z}}$, wenn klar ist, auf welchen Graphen man sich bezieht.

Man beachte, dass der Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 ausstirbt und somit die Definition sinnvoll ist.

Wir benutzen für den Fall, dass p nicht nahe bei 0 oder 1 ist, den Satz 3.7. Dazu werden wir zuerst die quasi-stationäre Verteilung von X_1, X_2, \dots bezüglich Z für jedes Muster aus $\mathbf{M}^1(G)$ nach unten beschränken, falls es eine quasi-stationäre Verteilung gibt. (später wird gezeigt, dass es genau eine quasi-stationäre Verteilung gibt):

Lemma 4.49 *Sei G ein endlicher zusammenhängender Graph mit $m_G < \infty$ und genau k Knoten und b Kanten und $\alpha^{G \times \mathbb{Z}}$ eine quasi-stationäre Verteilung von X_1, X_2, \dots . Es gilt für alle $x \in \mathbf{M}^1(G)$, dass*

$$\alpha^{G \times \mathbb{Z}}(x) \geq \begin{cases} (p^{k+b})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}}, & \text{für } p \leq \frac{1}{2} \\ p^{m_G} ((1-p)^{k+b-1})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}} & \text{für } p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist.

Beweis

Nach der Definition der quasi-stationären Verteilung gilt:

$$\alpha(y) = \frac{P^\alpha(X_{m_G} = y)}{P^\alpha(Z > m_G)} \quad (4.8)$$

Es soll nun $P_\alpha(X_{m_G} = y)$ nach unten und $P_\alpha(Z > m_G)$ nach oben abgeschätzt werden. Da das Ereignis $\{Z > m_G\}$ nur eintritt, wenn es auf jeder Ebene mindestens eine offene vertikale Kante gibt (dafür ist die Wahrscheinlichkeit $1 - (1-p)^k$), ist

$$P^\alpha(Z > m_G) \leq (1 - (1-p)^k)^{m_G} \quad (4.9)$$

Man kommt nur von einem Muster aus $\mathbf{M}^1(G)$ zu einem Muster $\mathbf{M}^1(G)$ in einem Schritt, wenn mindestens eine vertikale Kante offen ist. Jeder Übergang mit einer offenen Kante hat für $p \leq \frac{1}{2}$ mindestens die Wahrscheinlichkeit p^{k+b} und für $p \geq \frac{1}{2}$ mindestens $p(1-p)^{k+b-1}$ (es ist mindestens eine Kante offen und für $p < \frac{1}{2}$ sind die Konfigurationen mit vielen offenen Kanten unwahrscheinlicher, für $p > \frac{1}{2}$ die Konfigurationen mit vielen geschlossenen Kanten). Deshalb folgt für $P^x(X_1 = x') > 0$:

$$P^x(X_1 = x') \geq \begin{cases} p^{k+b}, & \text{für } p \leq \frac{1}{2} \\ p(1-p)^{k+b-1}, & \text{für } p \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.10)$$

Setze $t(p) := p^{k+b}$ für $p \leq \frac{1}{2}$ und $t(p) := p(1-p)^{k+b-1}$ für $p > \frac{1}{2}$. Da für $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$ $P^x(X_{m_G} = y) > 0$ ist, gibt es $x_0^{x,y} = x, x_1^{x,y}, x_2^{x,y}, \dots, x_{m_G-1}^{x,y}, x_{m_G}^{x,y} = y^{x,y} \in \mathbf{M}^1(G)$ mit $P^{x_{i-1}^{x,y}}(X_1 = x_i^{x,y}) > 0$. Deshalb gilt mit (4.10):

$$P^\alpha(X_{m_G} = y) \geq \sum_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \alpha(x) \prod_{i=0}^{m_G-1} P^{x_i^{x,y}}(X_1 = x_{i+1}^{x,y}) \geq \sum_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \alpha(x) (t(p))^{m_G} = (t(p))^{m_G}$$

Insgesamt folgt nun damit aus (4.8), (4.9) die Behauptung. \square

Bemerkung 4.50

1. Beachte das $\lim_{p \rightarrow 0} (p^{k+b})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}} = 0$, da wegen der Rechenregel von l'Hopital gilt

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{k+b}}{1 - (1-p)^k} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dp} p^{k+b}}{\frac{d}{dp} 1 - (1-p)^k} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(k+b)p^{k+b-1}}{k(1-p)^{k-1}} = 0$$

und $\lim_{p \rightarrow 1} p^m ((1-p)^{k+b-1})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}} = 0$ (dies gilt offensichtlich). Damit ist die Abschätzung nahe bei 0 und 1 fast trivial. Dies ist auch der Grund, dass wir die Fälle p nahe bei 0 und p nahe bei 1 gesondert behandeln müssen.

2. Man sollte auch beachten, dass $(p^{k+b})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}}$ monoton wachsend auf $p \in (0, 0.5)$ und $p^{m_G} ((1-p)^{k+b-1})^{m_G} \frac{1}{(1-(1-p)^k)^{m_G}}$ monoton fallend auf $p \in (0.5, 1)$ ist:

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{(x^k - (x-1)^k)}$ hat die Ableitung $\frac{k(x-1)^{k-1} - kx^{k-1}}{(x^k - (x-1)^k)^2}$, welche offensichtlich kleiner als 0 für $x \geq 1$ (und $k \in \mathbb{N}$) ist. Also ist die Funktion für $x \geq 1$ monoton fallend und somit ist die Funktion $p \mapsto \frac{1}{(1/p)^k - (1/p-1)^k}$ monoton wachsend auf $(0, 0.5)$. Da

$$(p^{k+b}) \frac{1}{1 - (1-p)^k} = p^b \frac{1}{(1/p)^k - (1/p-1)^k}$$

gilt die erste Aussage, da auch p^b monoton wachsend auf $(0, 0.5)$ ist.

Die zweite Aussage ist klar, da $\frac{1}{(1-(1-p)^k)}$ monoton fällt und auch $p(1-p)$ auf $(0.5, 1)$ monoton fällt (mit der ersten Ableitung sieht man es sofort) und somit auch $p(1-p)^{k+b-1}$ und schlussendlich auch $p((1-p)^{k+b-1}) \frac{1}{1-(1-p)^k}$ monoton fällt auf $(0.5, 1)$.

Deshalb ist die untere Abschätzung bei Lemma 4.49 besonders bei $p = \frac{1}{2}$ relativ weit weg von 0.

Mit der obigen Aussage kann man eine Abschätzung gleichmäßig für $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ $\epsilon > 0$ für die quasi-stationäre Verteilung angeben.

Lemma 4.51 Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph mit k Knoten und b Kanten. Dann gibt es für die Markovkette $X_n^{G \times \mathbb{Z}}$ genau eine quasi-stationäre Verteilung $\alpha^{G \times \mathbb{Z}}$ (auf $\mathbf{M}^1(G)$) und für alle $x \in \mathbf{M}^1(G)$ und $p \in (0, 1)$ gibt es ein $c_G(p) \in (0, 1)$, sodass gilt:

$$\|P_p^x(X_n^{G \times \mathbb{Z}} \in \cdot | Z > n) - \alpha^{G \times \mathbb{Z}}(\cdot)\|_{TV} \leq 2(1 - c_G(p))^n$$

Wenn die Knoten von G mit $0, \dots, k-1$ bezeichnet werden, kann man $c_G(p) = \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_1^{G \times \mathbb{Z}} = (\{0, \dots, k-1\}, \{\}) | Z > 1)$ (also das Minimum von jedem gültigen Zustand in einem Schritt den Zustand zu erreichen, dass alle Knoten infiziert sind) setzen. Weiter gilt dann

$$c_G(p) \geq \frac{p^k}{1 - (1-p)^k}$$

und speziell für den Graphen C_k mit $k > 2$ und K_k hat man

$$c_{C_k}(p) \geq \frac{kp^k(1-p) + p^{k+1}}{1 - (1-p)^k}$$

und

$$c_{K_k}(p) \geq \frac{p \prod_{i=1}^{k-1} (1 - (1-p)^i)}{1 - (1-p)^k}$$

Beweis

Der Beweis basiert darauf, Satz 3.7 anzuwenden.

Sei M_0 das Muster aus $\mathbf{M}^1(G)$, bei dem alle Knoten infiziert sind. (Man kann O.B.d.A. davon ausgehen, dass die Knoten von G mit $0, \dots, k-1$ bezeichnet werden. Dann ist $M_0 := (\{0, \dots, k-1\}, \{\})$)

Setze $c_G(p) := \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_1 = M_0 | Z > 1)$. Es soll nun gezeigt werden, dass für alle $x \in \mathbf{M}^1(G)$ gilt:

$$P_p^x(X_1 = M_0 | Z > n) \geq c_G(p) \quad (4.11)$$

Wegen (man beachte, dass es umso wahrscheinlicher ist auf der $n-1$ -ten Ebene einen infizierten Knoten zu haben, je mehr Knoten auf der 0-ten Ebene infiziert sind und somit $P_p^{M_0}(Z > n-1) \geq P_p^x(Z > n-1)$ für alle $x \in \mathbf{M}^1(G)$)

$$\begin{aligned} \frac{P_p^x(Z > n)}{P_p^{M_0}(Z > n-1)} &= \frac{\sum_{y \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_1 = y) P_p^y(Z > n-1)}{P_p^{M_0}(Z > n-1)} \\ &\leq \sum_{y \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^x(X_1 = y) = P_p^x(Z > 1) \end{aligned}$$

gilt (4.11):

$$\begin{aligned} P_p^x(X_1 = M_0 | Z > n) &= \frac{P_p^x(X_1 = M_0) P_p^{M_0}(Z > n-1)}{P_p^x(Z > n)} \\ &\geq \frac{P_p^x(X_1 = M_0)}{P_p^x(Z > 1)} = P_p^x(X_1 = M_0 | Z > 1) \geq c_G(p) \end{aligned}$$

Wähle als ν die Verteilung auf $\mathbf{M}^1(G)$, die nur das Muster M_0 annimmt. Daher $\nu(M_0) = 1$. Somit gilt der erste Teil der Aussage aufgrund von (4.11), wenn wir Satz 3.7 mit $c_G(p)$ und ν anwenden.

Nun soll noch $c_G(p)$ abgeschätzt werden:

Für alle $x \in \mathbf{M}^1(G)$ ist

$$\mathbb{P}_p^x(X_1^{G \times \mathbb{Z}} = M_0 | Z > 1) = \frac{\mathbb{P}_p^x(X_1 = M_0)}{\mathbb{P}_p^x(Z > 1)}$$

und trivialerweise ist $\mathbb{P}_p^x(Z > 1) \leq 1 - (1 - p)^k$ (mindestens eine vertikale Kante ist offen). Somit ist, wenn man $t_G(p) := \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \mathbb{P}_p^x(X_1 = M_0)$ setzt,

$$c_G(p) \geq \frac{t_G(p)}{1 - (1 - p)^k}.$$

Im Folgenden wird jetzt $t_G(p)$ abgeschätzt, um die einzelnen Abschätzungen für $c_G(p)$ zu erhalten:

Wenn man mit einem beliebigen infizierten Zustand startet, dann hat man im nächsten Schritt alle Knoten infiziert, wenn eine bestimmte vertikale Kante offen ist und die horizontalen Kanten einen offenen Spannbaum von allen Knoten auf der nächsten Ebene enthalten. Also ist, da ein Spannbaum von k Knoten $k - 1$ Kanten enthält,

$$t_G(p) = \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \mathbb{P}_p^x(X_1 = (\{0, \dots, k - 1\}, \{\})) \geq p^k$$

Für den Fall $G = C_k$ mit $k > 2$ betrachten wir $\mathbb{P}^x(X_1 = (\{0, \dots, k - 1\}, \{\}))$: Wenn eine bestimmte vertikale Kante offen ist und $k - 1$ horizontale Kanten offen sind, dann sind auf der nächsten Ebene alle Knoten infiziert. Also ist

$$t_{C_k}(p) = \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \mathbb{P}_p^x(X_1^{C_k \times \mathbb{Z}} = (\{0, \dots, k - 1\}, \{\})) \geq kp^k(1 - p) + p^{k+1}.$$

Ist $G = K_k$, so kann man $t_G(p)$ dadurch nach unten abschätzen, indem man den Fall betrachtet, dass eine bestimmte vertikale Kante offen ist und alle Knoten auf der Ebene nur durch Pfade, die nur aus horizontalen Kanten bestehen, miteinander verbunden sind. Daher ist eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit p mal der Wahrscheinlichkeit, dass eine Kantenperkolations im Graphen K_k alle Knoten verbindet. Den letzten Teil kann man wieder durch die Wahrscheinlichkeit abschätzen, dass folgende Konstruktion einen selbstvermeidenden Pfad in der Kantenperkolations im Graphen K_k konstruiert, der in 0 startet und alle Knoten besucht:

Man startet im Knoten 0 und falls es eine offene Kante am Knoten 0 gibt, wähle eine aus und nehme als zweiten Knoten des Pfades den entsprechenden Knoten. Nun gehe wie folgt vor, bis man alle Knoten besucht hat (oder man nicht weiterkommt). Nehme eine offene Kante von diesem Knoten zu einem Knoten, den man bisher noch nicht besucht hat, als neuen Knoten. Im ersten Schritt ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten 0 eine offene Kante hat $1 - (1 - p)^{k-1}$. Wenn man schon i Knoten besucht hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Knoten eine offene Kante zu einem neuen Knoten hat $1 - (1 - p)^{k-i}$. Insgesamt ist also

$$t_{K_k}(p) = \min_{x \in \mathbf{M}^1(G)} \mathbb{P}_p^x(X_1^{K_k \times \mathbb{Z}} = (\{0, \dots, k-1\}, \{\})) \geq p \prod_{i=1}^{k-1} (1 - (1 - p)^i) \square$$

Bemerkung 4.52 In [Gil59] findet man eine kompliziertere Abschätzung (als im vorigen Beweis verwendet) für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Perkolation im Graphen K_k alle Knoten miteinander verbunden sind. Dort wurde gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit größer oder gleich

$$1 - (1 - p)^{k-1} \left(\left(1 + (1 - p)^{\frac{k-2}{2}} \right)^{k-1} - (1 - p)^{(k-2)(k-1)/2} \right) - (1 - p)^{k/2} \left((1 + (1 - p)^{(k-2)/2})^{k-1} - 1 \right)$$

ist.

Nun können wir zum eigentlichen Resultat aus diesem Unterabschnitt kommen:

Satz 4.53 Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph mit k Knoten und b Kanten und $m_G < \infty$. Weiter sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$, $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$ und $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ gilt:

$$\mathbb{P}_p^x(X_{n+1} = y) < \mathbb{P}_p^x(X_n = y)$$

Man kann $n_0 := \frac{(k+(k+b)m_G)\log(\epsilon)-\log(2)}{\log(1-\epsilon^k)}$ wählen.

Speziell für $G = C_k$ kann man $n_0 := \frac{(k+2km_{C_k})\log(\epsilon)-\log(2)}{\log(1-(k+1)\epsilon^{1+k})}$ und für $G = K_k$ kann man $n_0 := \frac{(k(m_G+1)+2\binom{k}{2})\log(\epsilon)-\log(2)}{\log(1-p \prod_{i=1}^{k-1} (1-(1-\epsilon)^i))}$ wählen.

Beweis

Sei $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$.

Man beachte, dass gilt

$$\frac{P_p^x(X_{n+1} = y)}{P_p^x(X_n = y)} < 1 \Leftrightarrow \frac{P_p^x(X_{n+1} = y | Z > n + 1)}{P_p^x(X_n = y | Z > n)} < \frac{P_p^x(Z > n)}{P_p^x(Z > n + 1)} \quad (4.12)$$

Wir haben:

$$\frac{P_p^x(Z > n + 1)}{P_p^x(Z > n)} = P_p^x(Z > n + 1 | Z > n) \leq 1 - (1 - p)^k$$

Dabei wurde verwendet, dass, wenn man die Höhe n erreicht hat, mindestens eine vertikale Kante offen sein muss, um die nächste Ebene zu erreichen. Somit folgt, wenn

$$\frac{P_p^x(X_{n+1} = y | Z > n + 1)}{P_p^x(X_n = y | Z > n)} < \frac{1}{1 - (1 - p)^k},$$

dass

$$P_p^x(X_{n+1} = y) < P_p^x(X_n = y)$$

ist. Sei $\alpha_p(\cdot)$ die eindeutige quasi-stationäre Verteilung von X_1, X_2, \dots und $g(p) \in (0, 1)$ so gewählt, dass

$$\|P_p^x(X_n \in \cdot | Z > n) - \alpha_p(\cdot)\|_{TV} \leq 2g(p)^n \quad (4.13)$$

(nach Lemma 4.51 existiert so ein $g(p)$ und die quasi-stationäre Verteilung ist eindeutig). Damit gilt für $\alpha_p(y) > g(p)^n$:

$$\frac{P_p^x(X_{n+1} = y | Z > n + 1)}{P_p^x(X_n = y | Z > n)} \leq \frac{\alpha_p(y) + g(p)^{n+1}}{\alpha_p(y) - g(p)^n} < \frac{\alpha_p(y) + g(p)^n}{\alpha_p(y) - g(p)^n}$$

Da $\frac{1}{1-(1-p)^k} \geq \frac{1}{1-\epsilon^k}$ ist, reicht es zu zeigen, dass für $\alpha_p(y) > g(p)^n$

$$\frac{\alpha_p(y) + g(p)^n}{\alpha_p(y) - g(p)^n} \leq \frac{1}{1 - \epsilon^k}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$1 - \frac{\alpha_p(y) - g(p)^n}{\alpha_p(y) + g(p)^n} \leq \epsilon^k \Leftrightarrow \frac{2g(p)^n}{\alpha_p(y) + g(p)^n} \leq \epsilon^k.$$

Damit gilt die Aussage sicherlich, wenn $2\frac{g(p)^n}{\alpha_p(y)} \leq \epsilon^k$ (also insbesondere auch $\alpha_p(y) > g(p)^n$) bzw. $n \geq \frac{k \log(\epsilon) + \log(\alpha_p(y)) - \log(2)}{\log(g(p))}$.

Nach Lemma 4.49 ist für alle $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ $\alpha_p(y) \geq (\epsilon^{k+b})^{m_G}$ und nach Lemma 4.51 kann man in (4.13) $g(p) := 1 - p^k \leq 1 - \epsilon^k$ wählen. (der Nenner $1 - (1 - p)^k$ in Lemma 4.51 wurde mit 1 abgeschätzt) So folgt die Behauptung.

Für $G = C_k$ folgt die Behauptung ebenfalls aus Lemma 4.51, da man $g(p) := 1 - kp^k(1 - p) - p^{k+1} \leq 1 - (k + 1)\epsilon^{k+1}$ wählen kann und es ist nach Lemma 4.49 $\alpha_p(y) \geq (\epsilon^{2k})^{m_{C_k}}$. Damit gilt für

$$n \geq \frac{k \log(\epsilon) + \log(\alpha_p(y)) - \log(2)}{\log(g(p))} \geq \frac{k \log(\epsilon) + \log((\epsilon^{2k})^{m_{C_k}}) - \log(2)}{\log(1 - (k + 1)\epsilon^{k+1})}$$

die Gleichung (4.12) und somit auch die Behauptung.

Bei $G = K_k$ kann man verwenden, dass man nach Lemma 4.51

$$g(p) := 1 - p \prod_{i=1}^{k-1} (1 - (1 - p)^i)$$

wählen kann. Wegen Lemma 4.49 und der Tatsache, dass ein vollständiger Graph $b = \binom{k}{2}$ Kanten hat und nach Bemerkung 4.42 ist $m_{K_k} = 2$, ist $\alpha_p(y) \geq \left(\epsilon^{k + \binom{k}{2}}\right)^2$. Damit folgt die Behauptung für

$$n \geq \frac{k \log(\epsilon) + \log(\alpha(p)) - \log(2)}{\log(g(p))} \geq \frac{k \log(\epsilon) + \log((\epsilon^{k + \binom{k}{2}})^2) - \log(2)}{\log(1 - \prod_{i=1}^{k-1} (1 - (1 - p)^i))} \quad \square$$

Bemerkung 4.54 Es soll noch einmal ein kurzer Blick auf (4.12) geworfen werden. Man beachte, dass $P_p^x(Z > n + 1 | Z > n)$ für alle n ungefähr p für $p \rightarrow 0$ ist (gilt $\{Z > n\}$ für kleine p 's, so ist höchstwahrscheinlich nur ein Knoten auf der Ebene n infiziert). Da ebenfalls, heuristisch gesehen, für $p \rightarrow 0$ $\frac{P_p^x(X_{n+1}=y | Z > n+1)}{P_p^x(X_n=y | Z > n)}$ gegen 1 konvergiert, so scheint es auch ohne Satz 4.45 klar zu sein, dass die Aussage auf ganz $(0, 1 - \epsilon]$ erweitert werden kann. Später wird für die Erweiterung auf $(0, 1 - \epsilon]$ Satz 4.45 verwendet.

4.3.4 p nahe bei 1

Der Beweis für p nahe bei 1 hat etwas Ähnlichkeit zum Beweis nahe bei 0. Hier unterscheiden wir die Fälle, ob es eine Ebene gibt, in der alle Kanten offen sind. (Im Gegensatz zu dem Fall p nahe 0 haben wir betrachtet, ob es eine Ebene mit nur einer Kante gibt)

Satz 4.55 Sei G ein Graph mit k Knoten und b Kanten und $m_G < \infty$. Es gibt ein $p' < 1$ und ein n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ und $p \in [p', 1)$ und $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$ gilt

$$P_p^x(X_n = y) > P_p^x(X_{n+1} = y)$$

Man kann $n_0 := 2((k + b - 1)m_G + k)$ wählen, wobei man $p' := \sqrt[2k-1]{\frac{2k-1}{2k}}$ setzen kann.

Beweis

Sei T_n die größte Ebene i zwischen der Ebene 1 und n , in der alle vertikalen Kanten offen sind und die Knoten der Ebene einen offenen Spannbaum in dem Teilgraphen $G \times \{i\}$ bilden. Gibt es keine solche Ebene, dann setze $T_n = \infty$. Man beachte im Falle $T_n = m$ mit $m \in \{1, \dots, n\}$ sind die Knoten aus $E_{m-1} \cup E_m$ im Graphen $G \times ((m-1, m])^3$ miteinander verbunden.

Wir haben

$$\begin{aligned} P_p^x(X_{n+1} = y) &= P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = 1) \\ &\quad + P_p^x(X_{n+1} = y, 1 < T_{n+1} \leq n+1) + P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = \infty) \end{aligned}$$

Man beachte, dass ein Spannbaum eines Graphen mit k Knoten $k-1$ Kanten hat und jede Ebene k vertikale Kanten hat. Somit ist p^{2k-1} die Wahrscheinlichkeit, dass auf der i -ten Ebene alle vertikalen Kanten offen sind und es einen offenen Spannbaum im Graphen $G \times \{i\}$ gibt. Damit ist $(1 - p^{2k-1})^n$ die Wahrscheinlichkeit, dass es zwischen der 2. (einschließlich) und $n+1$ -ten (einschließlich) Ebene keine Ebene gibt, sodass alle vertikalen Kanten offen sind und die offenen horizontalen Kanten einen Spannbaum aller Knoten der Ebene enthält. Damit hat man

$$\begin{aligned} &P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = 1) + P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = \infty) \\ &= 1 - P_p^x(X_{n+1} = y, 1 < T_n \leq n+1) \\ &< 1 - P_p^x(1 < T_n \leq n+1) = (1 - p^{2k-1})^n \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ist ω eine Konfiguration aus $\{T_{n+1} = m, X_{n+1} = y\}$ mit $1 < m \leq n+1$, so erhalten wir eine Konfiguration ω' aus $\{T_n = m-1, X_n = y\}$, indem wir die $m-1$ -te Ebene komplett entfernen (einschließlich der vertikalen Kanten) und diese wieder zwischen der $n+1$ -ten Ebene und $n+2$ -ten Ebene (von ω)

³Mit dem Graphen $G \times ((m-1, m])$ ist der Graph mit den Knoten $E_{m-1} \cup E_m$ und den Kanten $\{\{(v, n), (v', n)\} | \{v, v'\} \in E(G)\} \cup \{\{(v, n-1), (v, n)\} | v \in V(G)\}$ gemeint.

einfügen. Genauer bildet man ω auf ω' mit der Abbildungsvorschrift

$$\omega'(\{(i, j), (k, l)\}) = \begin{cases} \omega(\{(i, j), (k, l)\}), & j, l < m-1 \text{ oder } j > n+1 \\ & \text{oder } l > n+1 \\ \omega(\{(i, m-1), (k, m-1)\}), & j = l = n+1 \\ \omega(\{(i, m-2), (k, m-1)\}), & j = n \text{ und } l = n+1 \\ \omega(\{(i, m-1), (k, m-2)\}), & j = n+1 \text{ und } l = n \\ \omega(\{(i, j+1), (k, l+1)\}), & \text{sonst} \end{cases}$$

ab. Man beachte, da im Graphen $G \times ((m-1, m])$ bei ω alle Knoten durch offene Pfade miteinander verbunden sind und somit ist X_{m-1} bei ω' das Muster, dass alle Knoten infiziert sind, da es bei ω eine Verbindung vom Knoten $(0, 0)$ zu der $m-2$ -ten Ebene gibt (wie auch bei ω') und im Graphen $G \times ((m-2, m-1])$ alle Knoten bei ω' miteinander durch offene Pfade verbunden sind. Die offenen Kanten von $K(E_m)$ bis $K(E_{n+1})$ bei ω entsprechen den offenen Kanten von $K(E_{m-1})$ bis $K(E_n)$ bei ω' . Somit ist X_n bei ω' das Muster y , da sowohl X_m bei ω als auch X_{m-1} bei ω' das Muster, welches alle Knoten infiziert hat, ist.

Man sollte berücksichtigen, dass auf der $m-1$ -ten Ebene bei ω mindestens eine vertikale Kante offen ist und somit bei ω' eine vertikale Kante auf der $n+1$ -ten Ebene offen ist. Insbesondere hat man eine injektive Abbildung von $\{T_{n+1} = m, X_{n+1} = y\}$ nach $\{T_n = m-1, X_n = y\} \cap A_{n+1}$, wobei A_{n+1} das Ereignis ist, dass mindestens eine vertikale Kante auf der $n+1$ -ten Ebene offen ist. Also ist aufgrund der Invarianz von P_p :

$$\begin{aligned} P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = m) &\leq P_p^x(\{X_n = y, T_n = m-1\} \cap A_{n+1}) \\ &= P_p^x(X_n = y, T_n = m-1) P_p(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Dabei hat man bei der Gleichung berücksichtigt, dass A_{n+1} und $\{X_n = y, T_n = m-1\}$ auf unterschiedlichen Kanten definiert sind und somit unabhängig sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine vertikale Kante offen ist, liegt bei $1 - (1-p)^k$. Also ist $P(A_{n+1}) = 1 - (1-p)^k$. Somit ist:

$$\begin{aligned} P_p^x(X_{n+1} = y, 1 < T_{n+1} \leq n+1) &= \sum_{m=2}^{n+1} P_p^x(X_{n+1} = y, T_{n+1} = m) \\ &\leq \sum_{m=2}^{n+1} P_p^x(X_n = y, T_n = m-1) P_p(A_{n+1}) \\ &\leq P_p^x(X_n = y, 1 \leq T_n \leq n) (1 - (1-p)^k) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Wäre

$$(1 - p^{2k-1})^n < (1 - p)^k P_p^x(X_n = y) \quad (4.16)$$

so folgt nach (4.14) und (4.15):

$$\begin{aligned} P_p^x(X_{n+1} = y) &< (1 - p^{2k-1})^n + (1 - (1 - p)^k) P_p^x(X_n = y, 1 \leq T_n \leq n) \\ &\leq P_p^x(X_n = y) \end{aligned}$$

Also reicht es (4.16) zu zeigen.

Da gilt $P_p^x(X_{m_G} = y) > 0$ für alle $x, y \in M$, hat man für alle $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$ $P_p^x(X_{m_G} = y) \geq (p(1 - p)^{k+b-1})^{m_G}$ (Es muss mindestens eine vertikale Kante auf jeder Ebene offen sein. Darüber hinaus ist $p > 1 - p$, wegen $p \geq \sqrt[k+b]{\frac{k+b}{k+b+1}} > \frac{1}{2}$ und somit sind Konfigurationen unwahrscheinlicher je mehr geschlossene Kanten sie haben).

Auch gilt $P_p^x(X_{n-m_G} \in \mathbf{M}^1(G)) \geq p^{n-m_G}$, da, wenn die nächsten $n - m_G$ vertikalen Kanten offen sind, die über einem infizierten Knoten der 0-ten Ebene liegen, dann ist die $n - m_G$ -te Ebene mit einem infizierten Knoten auf der 0-ten Ebene verbunden. Damit gilt für $n > m_G$:

$$P_p^x(X_n = y) \geq P_p^x(X_{n-m_G} \in \mathbf{M}^1(G)) \min_{z \in \mathbf{M}^1(G)} P_p^z(X_{m_G} = y) \geq p^n ((1-p)^{k+b-1})^{m_G}$$

Somit gilt für alle $n > m_G$ die Ungleichung (4.16), wenn:

$$(1 - p^{2k-1})^n < p^n ((1-p)^{k+b-1})^{m_G} (1-p)^k \quad (4.17)$$

Setze $n_0 := 2((k+b-1)m_G + k)$. Falls

$$(1 - p^{2k-1}) < p\sqrt{1-p} \quad (4.18)$$

gilt, hat man für alle $n \geq n_0$ (da $(1-p) < 1$)

$$(1 - p^{2k-1})^n < p^n (\sqrt{1-p})^n \leq p^n (\sqrt{1-p})^{2((k+b-1)m_G + k)}$$

und somit ist (4.17) und damit dann auch (4.16) erfüllt.

Die Ungleichung (4.18) ist äquivalent dazu, dass

$$(1 - p^{2k-1})(1 + p + p^2 + \dots + p^{2k-2}) < p^2$$

Da $(1 + p + p^2 + \dots + p^{2k-2}) < 2k - 1$ gilt die Ungleichung erst recht, wenn

$$2k - 1 \leq p^2 + (2k - 1)p^{2k-1}$$

Da $p^2 \geq p^{2k-1}$ gilt (man kann O.B.d.A. annehmen, dass $k > 1$, da der Satz für $k = 1$ sogar für alle $p \in (0, 1)$ richtig ist, wie man leicht sieht) die Ungleichung, wenn $2k - 1 \leq p^{2k-1} 2k$ ist. Damit folgt, dass für $p^{2k-1} \geq \frac{2k-1}{2k}$ die Ungleichung (4.16) erfüllt ist und somit gilt die Behauptung. \square

Offensichtlich gilt deshalb:

Korollar 4.56 Sei $G = C_k$ und $p' := \sqrt[2k-1]{\frac{2k-1}{2k}}$. Dann gilt für alle $n \geq 2((2k-1)m_{C_k} + k)$ und $p \in [p', 1]$ und $x, y \in \mathbf{M}^1(C_k)$

$$P_p^x(X_n^{C_k \times \mathbb{Z}} = y) > P_p^x(X_{n+1}^{C_k \times \mathbb{Z}} = y)$$

4.3.5 Zusammengefasst: Schranke n

In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, dass Vermutung 1.8 für $m_G < \infty$ gilt und für bestimmte Graphen (die Graphen C_k) geben wir ein konkretes n an.

Satz 4.57 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\delta \in (0, 1)$ so gewählt, dass $\frac{1}{(1-\delta)} \leq 2k^{\frac{2}{\delta}-2}$ (die Existenz eines solchen δ ist klar⁴). Dann gilt für $n \geq \left((4k^2)^{\frac{1}{\delta}}\right)^{k+2} (k+3)$ und für alle $x, y \in \mathbf{M}^1(C_k)$

$$P^x(X_n^{C_k \times \mathbb{Z}} = y) > P^x(X_{n+1}^{C_k \times \mathbb{Z}} = y)$$

Beweis

Wir setzen im ganzen Beweis voraus, dass $k \geq 3$ ist. Man kombiniert alle 3 Lemmas für p klein, p in der Mitte und p groß. Setze $\epsilon := \frac{1}{(4k^2)^{1/\delta}}$. Zeige, die Aussage gilt für $p \in (0, \epsilon)$ bzw. $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ und $p \in (1 - \epsilon, 1)$:

Für $p \in (0, \epsilon)$: Setzt man im Korollar 4.47 $t = \delta$, so hat man wegen

$$\left(k(3k-2 + \frac{k}{k-1}2)\right)^{1/\delta} \leq (k(3k-2+3))^{1/\delta} = (4k^2)^{\frac{1}{\delta}}$$

und (beachte Lemma 4.37 zu m_{C_k})

$$\begin{aligned} \frac{\lceil \frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-\delta} \rceil + 3}{2} &\leq \frac{\frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-\delta} + 4}{2} \leq \frac{\left(\frac{k+2}{2}\right)(4k-2) + 6}{2(1-\delta)} \\ &= \frac{(k+2)(k-\frac{1}{2}) + 3}{(1-\delta)} = \frac{k^2 + \frac{3}{2}k + 2}{(1-\delta)} \leq \frac{k^2 + k^2}{(1-\delta)} \leq 4k^{\frac{2}{\delta}} \end{aligned}$$

für alle $p < \epsilon$ und alle $n \geq \frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-\delta}$ die Aussage $P^x(X_n = y) > P^x(X_{n+1} = y)$. Da (vgl. obige Rechnung)

$$\frac{2 + m_{C_k}(4k-2)}{1-\delta} \leq \frac{2 + (k+2)(2k-1)}{1-\delta} \leq \frac{3k^2}{1-\delta} \leq 6k^{\frac{2}{\delta}} < \left((4k^2)^{\frac{1}{\delta}}\right)^{k+2} (k+3)$$

⁴Denn die linke Seite geht für $\delta \rightarrow 0$ gegen 1 und die rechte Seite geht für $\delta \rightarrow 0$ gegen ∞ .

ist die Aussage für $p \in (0, \epsilon)$ gezeigt.

Für $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$: Da (dabei wird verwendet, dass $\log(x) \leq x - 1$ für $x > 0$ und Lemma 4.37):

$$\begin{aligned} & \frac{(k + 2km_{C_k}) \log(\epsilon) - \log(2)}{\log(1 - (k + 1)\epsilon^{k+1})} = \frac{(k + 2km_{C_k}) \log(\frac{1}{\epsilon}) + \log(2)}{-\log(1 - (k + 1)\epsilon^{k+1})} \\ & \leq \frac{(k + 2km_{C_k})(\frac{1}{\epsilon} - 1) + \log(2)}{(k + 1)\epsilon^{k+1}} \leq \frac{k + 2km_{C_k}}{(k + 1)\epsilon^{k+2}} \leq \frac{1 + 2m_{C_k}}{\epsilon^{k+2}} \\ & \leq \frac{k + 3}{\epsilon^{k+2}} = \left((4k^2)^{\frac{1}{\delta}} \right)^{k+2} (k + 3) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung direkt aus Satz 4.53.

Für $p \in (1 - \epsilon, 1)$: Man beachte, dass nach der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^{2k-1} \geq \left(1 - \frac{1}{(2k-1)2k}\right)^{2k-1} \geq 1 - \frac{2k-1}{(2k-1)2k} = \frac{2k-1}{2k}$$

Damit hat man

$${}^{2k-1}\sqrt{\frac{2k-1}{2k}} \leq 1 - \frac{1}{4k^2} \leq 1 - \epsilon$$

Damit folgt aus Satz 4.55, dass für alle $p > 1 - \epsilon$ und $n \geq 2((2k-1)m_{C_k} + k)$, dass $P_x(X_n = y) > P_x(X_{n+1} = y)$. Da mit Lemma 4.37 gilt, dass

$$2((2k-1)m_{C_k} + k) \leq (2k-1)(k+2) + 2k \leq 2k(k+3) \leq \left(4k^{\frac{2}{\delta}}\right)^{k+2} (k+3)$$

ist, folgt die Aussage. \square

Bemerkung 4.58

1. Man sieht, dass man δ beliebig nahe an 1 wählen kann, wenn $k \rightarrow \infty$. Da $\frac{1}{1-0.5} = 2 \leq 2k^{\frac{2}{\delta}-2}$ gilt, wäre z.B. $\delta = 0.5$ eine Wahl, die für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Genauer kann man einfach numerisch für ein bestimmtes (oder ab einer bestimmten Größe) k ein besseres δ ausrechnen.
2. Natürlich könnte man die Abschätzungen etwas genauer durchführen (besonders für k groß), doch würde sich an der Größenordnung nichts Qualitatives ändern.
3. Obige Aussage gilt auch für $C_k \times [[0, \infty))$, da man im Beweis die konkrete Startverteilung nicht benutzt hat, sondern nur Aussagen über die Markovkette $(X_i)_i$ mit einer vorgegebenen (beliebigen) Startverteilung.

Der vorige Satz gilt analog auch für beliebige Graphen mit $m_G < \infty$:

Satz 4.59 *Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph mit $m_G < \infty$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x, y \in \mathbf{M}^1(G)$, für alle $n \geq n_0$ und für alle $p \in (0, 1)$ bei dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$ gilt*

$$P^x(X_n = y) > P^x(X_{n+1} = y)$$

Beweis

Der Beweis funktioniert wieder mit Satz 4.45, Satz 4.53 und Satz 4.55. Nach Satz 4.45 und Satz 4.55 existieren p', p'' und ein $n' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n'$ und alle $p \in (0, p') \cup (p'', 1)$, $P^x(X_n = y) > P^x(X_{n+1} = y)$ gilt. Setzt man $\epsilon = \min\{p', 1 - p''\}$, so gibt es nach Satz 4.53 ein n'' , sodass für alle $n > n''$ und alle $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ $P^x(X_n = y) > P^x(X_{n+1} = y)$ gilt. Man setzt nun $n_0 := \max\{n', n''\}$. \square

Man hat folgendes Korollar (eigentlich schon ein direktes Korollar von Satz 4.45), welches eine Abschwächung von Vermutung 1.7 ist:

Korollar 4.60 *Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph mit $m_G < \infty$, so gibt es ein $p' \in (0, 1)$, sodass für alle $p \leq p'$ und $a \in V(G)$ gilt:*

$$P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$$

Für $G = C_k$ kann man $p' := \frac{1}{4 \cdot 3^a + 4k^2 + 6k - 1}$ wählen.

Beweis

Es gibt nach dem Satz ein n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ $P^x(X_n = y) > P^x(X_{n+1} = y)$ gilt. Mit Lemma 1.13 und Lemma 1.14 folgt, dass dann auch $P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$ gilt.

Für alle $n < n_0$ können wir jeweils ein $p(n) \in (0, 1)$ finden, sodass $P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{G \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$ gilt (siehe Abschnitt 1.3.1). Damit erfüllt $p' := \min\{p(n) : n \leq n_0\}$ die Forderungen.

Für $G = C_k$ setzen wir $k \geq 3$ voraus (für $k = 1$ ist die Aussage trivial, für $k = 2$ siehe Abschnitt 4.2). Dann gilt nach Korollar 4.47 mit $t = 0.5$, da (vgl. Beweis von Satz 4.57)

$$\left(k(3k - 2 + \frac{k}{k-1}2)\right)^{1/0.5} \leq (k(3k + 1))^{1/0.5} \leq (4k^2)^2$$

und

$$\frac{\lceil \frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-0.8} \rceil + 3}{2} \leq \dots \leq \frac{k^2 + k^2}{(1 - 0.5)} = 4k^2 \leq (4k^2)^2,$$

dass für alle $n \geq \frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-0.5}$ und $p \leq \frac{1}{(4k^2)^2}$

$$P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$$

ist. Setze $n_0 := 4k^2 + 6k = \frac{2+\frac{k+2}{2}(4k-2)}{1-0.5} \geq \frac{2+m_{C_k}(4k-2)}{1-0.5}$. Der Kantenabstand von $\mathbf{0}$ und (a, n) beträgt $a+n$ Kanten. Daher ist $p^{a+n} < P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(x, n))$. Wenn es eine Verbindung von $\mathbf{0}$ zu dem Knoten $(a, n+1)$ gibt, muss es mindestens einen offenen Pfad der Länge $a+n+1$, der in $\mathbf{0}$ startet, geben. Daher ist $p^{a+n+1}4 \cdot 3^{a+n} > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$. Also kann man

$$P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n)) > p^{a+n} \geq p^{a+n+1}4 \cdot 3^{a+n} > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$$

für $p \leq p(n) := \frac{1}{4 \cdot 3^{a+n}}$. Insgesamt hat man daher $p' := \frac{1}{4 \cdot 3^{a+n_0-1}} = \frac{1}{4 \cdot 3^{a+4k^2+6k-1}}$ und $n < n_0$: $P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n)) > P(\mathbf{0} \leftrightarrow^{C_k \times \mathbb{Z}}(a, n+1))$. Da

$$(4k^2)^2 \leq 4 \cdot 3^{k^2} \leq 4 \cdot 3^{a+4k^2+6k-1}$$

folgt die Behauptung für $G = C_k$. □

Bemerkung 4.61 Man sieht auch an dem Beweis des Korollars, wie man für einen konkreten Graphen (mit $m_G < \infty$) Vermutung 1.7 für alle p und n theoretisch beweisen kann. Nach Satz 4.59 gibt es ein n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage gilt. Für $n < n_0$ kann man die Aussage mit der Methode aus Abschnitt 4.2 nachrechnen. Nachdem man nur endlich viele Fälle durchgerechnet hat, kann man entscheiden, ob Vermutung 1.7 für diesen Graphen stimmt. Natürlich ist dann die Schranke an n_0 zu groß, um dies effektiv machen zu können.

Man hat auch folgendes Korollar, welches sich an Fragen anschließt, die im vorigen Abschnitt betrachtet wurden und Vermutung 1.6 unterstützt:

Korollar 4.62 Sei G ein zusammenhängender endlicher Graph mit $m_G < \infty$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > n_0$ und alle $p \in (0, 1)$ bei dem Graphen $G \times \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathbb{E}_p[Z_n] > \mathbb{E}_p[Z_{n+1}]$$

Beweis

Folgt direkt mit Hilfe von Lemma 1.5. □

Anhang A

Verwendete Computerprogramme

In diesem Anhang sind alle Computerprogramme aufgeführt, die in dieser Arbeit verwendet wurden. Die Programme sind alle in Python (<https://www.python.org>) geschrieben und verwenden teilweise die CAS-Bibliothek SymPy (<https://www.sympy.org/>).

A.1 Berechnung der Anzahl der selbstvermeidenden Pfade von \mathbb{Z}^2 , die in E_1 enden

```

'''
Berechnet die Anzahl der selbstvermeidenden Wege der Länge l, die in
der ersten Ebene enden und die in start starten und die Knoten in
visited nicht benutzen.
'''
def anzahlselfstinE1(l, besuchte, start):
    (x,y) = start
    if l==0:
        if y==1:
            return 1
        else:
            return 0
    anzahl = 0
    for i in [(x+1,y),(x-1,y),(x,y+1),(x,y-1)]:
        if i in besuchte:
            continue
        anzahl += anzahlselfstinE1(l-1, besuchte | set([i]), i)
    return anzahl

#Erzeugt eine Liste von der Anzahl von den Wegen der Länge 1 bis 22.
if __name__ == "__main__":
    besuchte = set([(0,0)])
    for i in range(1,23):
        print(i, "& ", anzahlselfstinE1(i, besuchte, (0,0)), " \\\\")

```

A.2 Berechnung von $E[Y^{\leq m}]$

```

'''
Berechnet alle selbstvermeidenden Pfade nach point von v[-1] der Länge <=k,
die keine Knoten aus v benutzen.
'''
def calcweg(v, k, point):
    listweg = []
    (x,y) = v[-1]
    for r in [(x+1,y),(x-1,y),(x,y+1),(x,y-1)]:
        if r==point:
            listweg.extend([tuple(v+[point])])
        elif not(r in v) and len(v) < k:
            listweg.extend(calcweg(v+[r], k, point))
    return listweg

```



```

'''
Berechnet die Wahrscheinlichkeit von (0,0) nach point durch einen Pfad
der Länge <=k zu kommen. Rückgabe ist eine Liste, die man als Polynom
in p interpretieren muss.
'''
def calcprob(k, point):
    '''
    Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Pfad aus l gibt
    mit der Siebformel. Da rekursiv berechnet wird, muss beim ersten
    Aufruf kan die leere Menge sein, weginkan 0 sein und poly eine
    ausreichend lange Liste, die nur aus 0 besteht. In poly steht
    dann das Ergebnis der Berechnung.
    '''
    def sieb(kan, weginkan, l, poly):
        if len(l)==0:
            return 0
        for i in range(0, len(l)):
            kannew = set.union(kan, l[i])
            poly[len(kannew)] += (-1)**weginkan
            sieb(kannew, weginkan+1, l[i+1:], poly)
    allwege = [] #Soll eine Menge von Pfaden enthalten, wobei die Pfade
                #als ungeordnete Kanten gespeichert werden.
    wege = calcweg([(0,0)], k, point)
    for x in wege:
        aktweg = set([])
        for i in range(1, len(x)):
            e = [x[i-1], x[i]]
            e.sort()
            aktweg.add(tuple(e))
        allwege.append(aktweg)
    poly = [0] * (200) #ausreichend groß
    sieb(set(), 0, allwege, poly)
    return poly

'''
Wandelt die Liste poly in eine Polynomdarstellung um.
'''
def polytotxt(poly):
    text = ""
    for i in range(0, len(poly)):
        if text != "" and poly[i] > 0:
            text += "+"
        if poly[i] == 1:
            text += "p^" + str(i)
        elif poly[i] != 0:
            text += str(poly[i]) + "p^" + str(i)
    return text

```

```

'''
Berechnet  $E[Y^{\leq m}]$ 
'''
def calcEYm(m):
    probg1 = [0] * (200)
    for j in range(-m+1,m):
        r = calcprob(m,(1,j))
        for k in range(len(r)):
            probg1[k]=probg1[k]+r[k]
    return probg1

#Gibt die Berechnung von  $E[Y^{\leq m}]$  für  $m \leq 6$  aus
if __name__ == "__main__":
    for m in [1,2,3,4,5,6]:
        print(m,':',polytotxt(calcEYm(m)))

```

A.3 Berechnung der gültigen Muster

Der folgende Quellcode enthält Funktionen zum Berechnen der Muster, die in anderen Programmen benutzt werden.

```

import itertools as it
import copy
import functools

'''
Gibt bei einer Liste, die nur Listen enthält die Position der Liste
zurück, die e enthält.
'''
def getlwith(e):
    return next((i for i in range(0,len(l)) if e in l[i]),-1)

'''
Gibt das Muster an, das man aus m erhält, wenn die horizontalen
Kanten aus l vorhanden sind.
'''
def usehoredges(m,l):
    k=len(l)
    if(m==[]):
        return []
    #Füge allen ak die aus rl verbundenen Knoten hinzu und lösche aus rl:
    def h(ak,rl):
        aks=copy.deepcopy(ak)
        while len(aks)>0:
            i=aks.pop()

```

```

        if l[i]==1:
            r=getlwith(rl,(i+1)%k)
            if r!=-1:
                ak.extend(rl[r])
                aks.extend(rl[r])
                del rl[r]
            if k> 2 and l[(i-1)%k]==1:
                r=getlwith(rl,(i-1)%k)
                if r!=-1:
                    ak.extend(rl[r])
                    aks.extend(rl[r])
                    del rl[r]
    ak.sort()

    rl=list(copy.deepcopy(m[1]))
    inf=list(copy.deepcopy(m[0]))
    h(inf,rl)
    npart=[]
    while len(rl)>0:
        a=list(rl.pop())
        h(a,rl)
        npart.append(a)
    npart.sort()
    return [inf,npart]

'''
Gibt das Muster an, das man aus m erhält, wenn die vertikalen
Kanten aus l vorhanden sind.
'''
def useveredges(m,l):
    if(m==[]):
        return []
    inf=[]
    ver=[]
    for e in m[0]:
        if(l[e]==1):
            inf.append(e)
        else:
            ver.append([e])
    for s in m[1]:
        ak=[]
        for e in s:
            if(l[e]==1):
                ak.append(e)
            else:
                ver.append([e])
        if(len(ak)>0):
            ver.append(ak)
    return [inf,sorted(ver)]

```

```

'''
Gibt für Ck das zu m äquivalente Muster zurück.
Wenn nullid gleich True ist, dann wird jedes uninfizierte Muster
als [] zurückgegeben.
'''
def aquiPattern(k,m, nulid=True):
    if(m==[]):
        return []
    if nulid and m[0]==[]:
        return []
    ap=[]
    for s in [-1,1]:
        #Verschiebung
        for i in range(0,k):
            np0=[]
            for x in m[0]:
                np0.append((s*x+i) % k)
            np0.sort()

            np1=[]

            for x in m[1]:
                np1ak=[]
                for y in x:
                    np1ak.append((s*y+i) % k)
                np1ak.sort()
                np1.append(np1ak)
            np1.sort()
            ap.append([np0,np1])
    ap.sort()
    return ap[0]

'''
Erzeugt alle einseitigen Muster.
Das Programm benutzt die Eigenschaft, dass man aus dem Muster,
bei dem alles infiziert ist, jedes gültige Muster erzeugen kann.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=256)
def genPattern(k,aqui=False, nullid=False):
    def at(m):
        if aqui:
            return aquiPattern(k,m, nullid)
        else:
            if nullid and m!=[] and m[0]==[]:
                return []
            return m
    pattern=[[list(range(k)),[]]]

```

```

pr=[[list(range(k)),[]]]
while pr:
    am=pr.pop()
    for vk in it.product([0,1],repeat=k):
        mv=at(useveredges(am,vk))
        mh=at(usehoredges(am,vk))
        if not mv in pattern:
            pattern.append(mv)
            pr.append(mv)
        if not mh in pattern:
            pattern.append(mh)
            pr.append(mh)
    return sorted(pattern)

'''
Gibt die uninfizierten Muster zurück.
Falls aqui=True, dann werden die äquivalenten
uninfizierten Muster zurückgegeben.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=256)
def genPatternun(k,aqui=False):
    m=genPattern(k,aqui,False)
    return tuple(x for x in m if x[0]==[])

```

A.4 Berechnung von dem minimalen n für die Vermutung über die Muster

Benutzt das Programm aus Abschnitt A.3 (hier importiert als genPattern).

```
from genPattern import genPattern, genPatternun, aquiPattern
from genPattern import useveredges, usehoredges
import itertools as it
import functools
import sympy as sp
```

```
p=sp.Symbol('p', positive = True)
```

```
'''
Berechnet die Übergangsmatrix.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=32)
def createM(k, aqui=True, nullid=True):
    def at(m):
        if aqui:
            return aquiPattern(k,m,nullid)
        else:
            if nullid and m!=[] and m[0]==[]:
                return []
            return m
    m=genPattern(k,aqui,nullid)
    matv=sp.zeros(len(m),len(m))
    math=sp.zeros(len(m),len(m))
    for vk in it.product([0,1],repeat=k):
        anzE=vk.count(1)
        wahr=sp.expand(p**anzE * (1-p)**(k-anzE))

        for i in range(0,len(m)):
            j=m.index(at(useveredges(m[i],vk)))
            matv[i,j]= matv[i,j]+wahr
            j=m.index(at(usehoredges(m[i],vk)))
            math[i,j]= math[i,j] + wahr
    ueb=matv.multiply(math)
    return sp.expand(ueb)

'''
Berechnet die Übergangsmatrix für uninfizierte Muster.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=32)
def createMuni(k, aqui=True):
    m=genPattern(k,aqui,False)
    mat=createM(k,aqui,False)
```

```

    li=[]
    for i in range(0,len(m)):
        if m[i][0]==[]:
            li.append(i)
    return mat[li,li].expand()

'''
infiziert den Knoten s im uninfizierten Muster m
'''
def infPart(s,m):
    for i in range(0,len(m[1])):
        for j in m[1][i]:
            if j==s:
                return [m[1][i],m[1][:i]+m[1][i+1:]]

'''
Berechnet die Anzahl von Nullstellen von poly im Intervall [a,b).
'''
def countRoots(pol,a,b):
    '''
    Berechnet eine Sturmsche Kette.
    '''
    def sturm(poly):
        if poly==0:
            return []
        g=sp.gcd(poly,sp.diff(poly,p))
        poly= poly.div(g)[0]
        pl=[poly]
        np=-sp.diff(poly,p)
        while np!=0:
            pl.append(np)
            np=-sp.rem(pl[-2],np)
        return pl

    '''
    Berechnet die Anzahl von Vorzeichenwechseln an der Stelle x.
    '''
    def getvorw(sl,x):
        l=[e.subs(p,x) for e in sl]
        l=[v for v in l if v!=0] #alle Nullen entfernen
        vw=0
        for i in range(1,len(l)):
            if (l[i]*l[i-1]<0):
                vw=vw+1
        return vw

    s= sturm(sp.Poly(pol,p)) #Berechnet die Sturmsche Kette.
    return getvorw(s,b)-getvorw(s,a)

'''

```

Gibt alle zu m äquivalenten Muster zurück für Ck.
 , , ,

```
def allaquiPattern(k,m):
    allp = []
    if k==2:
        em=[1]
    else:
        em=[-1,1]
    for s in em: #für k=2 nicht -1 1
        for x in range(k):
            np1 = [(s*i+x) % k for i in m[0]]
            np1.sort()
            np2=[]
            for j in m[1]:
                a = [(s*i+x) % k for i in j]
                a.sort()
                np2.append(a)
            np2.sort()
            allp.append([np1,np2])
    return allp
```

, , ,

*Die Startverteilung bis auf Normierung
 (Rückgabe ist immer positiv und ein Polnom)*
 , , ,

```
@functools.lru_cache(maxsize=32)
def berechnepseudoStart(k,aqui=True):
    ms=createMuni(k,aqui=True)
```

```
A=ms.transpose()-sp.eye(ms.cols)
```

```
los=A.nullspace()[0]
los=sp.simplify(los)
```

```
b=[]
for a in los:
    b.append(a.as_numer_denom()[1])
den=sp.lcm(b)
los=den*los
```

```
# Sicherstellen, dass los nicht kleiner als 0 in (0,1) ist.
for e in los.subs(p,sp.Rational(1,2)):
    if e<0:
```



```

        los=-los
        break

    los=sp.expand(los)

#Berechnet Startverteilung:
    mus=genPattern(k,aqui,True)
    muuinf=genPatternun(k,aqui=True)
    start=[0]*len(mus)

    if aqui:
        for i in range(0,k):
            for ui in range(0,len(muuinf)):
                t=mus.index(aquiPattern(k,infPart(i,muuinf[ui])))
                start[t]=start[t]+los[ui]/k
    else:
        for ui in range(0,len(muuinf)):
            aquiPat=allaquiPattern(k,muuinf[ui])
            for aktp in aquiPat:
                t=mus.index(infPart(0,aktp))
                start[t]=start[t]+los[ui]/len(aquiPat)
    start=sp.Matrix(start).transpose()
    return sp.simplify(start)

'''
Berechnet die minimale Ebene, ab wann die Vermutung für die Muster gelten.
aqui gibt an, ob man äquivalente oder nicht äquivalente Muster betrachtet.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=32)
def countSchritte(k,aqui):
    m=createM(k,aqui)[1:,1:] #Das nichtinfizierte Muster ist an Stelle 0
    #entferne das nicht infizierte Muster an Stelle 0.
    start=berechnepseudoStart(k,aqui)[0,1:]
    diff=(start*(m**0-m**1)).expand()
    i=0
    #erste Ebene gesondert behandeln
    for (j,e) in enumerate(genPattern(k,aqui,nullid=True)[1:]):
        if diff[j].subs(p,sp.Rational(1,2)) <= 0:
            i=1
        elif e==[[0],[[j] for j in range(1,k)]]:
            if countRoots(diff[j],0,1)!=0:
                i=1
            elif countRoots(diff[j],0,1)!=1:
                i=1
    if i==0:

```

```

        return i
    else:
        diff=(diff * m).expand()
    while True:
        r=True
        for x in diff:
            if x.subs(p,sp.Rational(1,2)) <= 0 or countRoots(x,0,1)!=1:
                diff=(diff * m).expand()
                i=i+1
                r=False
                break
        if r:
            return i

#Berechnet minimale Ebene für C2, C3 und C4 für äquivalente
# und nicht äquivalente Muster:
if __name__ == "__main__":
    for k in [2,3,4]:
        print('Minimale_Ebene_für_C_',k,'_ist_', countSchritte(k,aqui=True),
              '_für_äquivalente_Muster')
        print('Minimale_Ebene_für_C_',k,'_ist_', countSchritte(k,aqui=False),
              '_für_nicht_äquivalente_Muster')

```

A.5 Berechnung der Anzahl von Mustern

Benutzt das Programm aus Abschnitt A.3 (hier importiert als genPattern).

```

from genPattern import genPattern , genPatternun

'''
Zählt die Anzahl von infizierten/unifizierten Mustern von Ck.
'''

def countPattern(k,aqui=False):
    gesP=len(genPattern(k,aqui,nullid=False))
    infPattern=len(genPattern(k,aqui,nullid=True))-1
    uninfpattern=len(genPatternun(k,aqui))
    return(gesP , uninfpattern , infPattern)

#Gibt die Anzahl Muster für Ck mit k zwischen 2 und 8 aus.
if __name__ == "__main__":
    for k in range(2,9):
        (m,m0,m1)=countPattern(k,aqui=False)
        (am,am0,am1)=countPattern(k,aqui=True)
        fs1="#M(C{0})={1} , □#M0(C{0})={2} , □#M1(C{0})={3} , □#[M(C{0})]={4} , "
        fs2=" □#[M0(C{0})]={5} , □#[M1(C{0})]={6} "
        fs=fs1+fs2
        print( fs . format(k,m,m0,m1,am,am0,am1))

```

A.6 Berechnung der Funktionsgraphen aus Kapitel 4.2

Benutzt das Programm aus Abschnitt A.4 (hier importiert als `clacminn`).

```

from calcminn import *

'''
Berechnet die exakte Startverteilung
'''
def berechneStart(k, aqui=True):
    start=berechnepseudoStart(k, aqui)
    start=start/sum(start)
    return sp.simplify(start)

'''
Berechnet die Verteilung auf Ebene eb der einseitigen Muster
'''
@functools.lru_cache(maxsize=64)
def createMatrixaufEbene(k, eb, aqui=False):
    start=berechneStart(k, aqui)
    ma=createM(k, aqui)
    muaEm=(start*ma**eb)
    return muaEm

'''
Gibt die Wahrscheinlichkeit des einseitigen Musters mus auf eb an
'''
def wahrMustaufEb(n, mus, eb, aqui=False):
    mat=createMatrixaufEbene(n, eb, aqui)
    return mat[genPattern(n, aqui, nullid=True).index(mus)]

if __name__ == "__main__":
    muster1=[[0],[1],[2]]
    muster2=[[2],[0,1]]
    sp.plot(wahrMustaufEb(3, muster1, 1) - wahrMustaufEb(3, muster1, 2),
            (p, 0, 1), ylabel='', line_color='blue')
    pl1=sp.plot(wahrMustaufEb(3, muster1, 1), wahrMustaufEb(3, muster1, 2),
            (p, 0, 1), ylabel='', show=False)
    pl1[0].line_color='blue'
    pl1[1].line_color='red'
    pl1.show()
    sp.plot(wahrMustaufEb(3, muster2, 1) - wahrMustaufEb(3, muster2, 2),
            (p, 0, 1), ylabel='', line_color='blue')
    pl2=sp.plot(wahrMustaufEb(3, muster2, 1), wahrMustaufEb(3, muster2, 2),
            (p, 0, 1), ylabel='', show=False)
    pl2[0].line_color='blue'

```

A.6. BERECHNUNG DER FUNKTIONSGRAPHEN AUS KAPITEL 4.2117

```
p12[1].line_color='red'  
p12.show()
```

A.7 Überprüfung der restlichen Fälle, um die Vermutung über die Monotonie der Verbindungsfunktion zu zeigen

Hier werden die Programme aus Abschnitt A.3 und Abschnitt A.4 (als genPattern und calcminn) benutzt.

```

from calcminn import *
from genPattern import getlwithe
import copy

'''
    Gibt alle infizierten Knoten an, wenn auf der n-ten Ebene das Muster
    m vorliegt und auf der nächsten Ebene im Graphen [n+1,infty)
    (umgekehrt gesehen) das uninfizierte Muster mn liegt und es zwischen
    den beiden Ebenen eine Verbindung über die Knoten in l gibt.
'''

def infbdoppeltMuster(m,mn,l):
    if m==[]:
        return m
    infkn=copy.deepcopy(m[0])
    akn=copy.deepcopy(m[0])

    ninfm=copy.deepcopy(m[1])
    while akn != []:
        a=akn.pop()
        if l[a]!=0:
            iane=mn[1][getlwithe(mn[1],a)]
            for i in iane:
                if l[i] !=0:
                    j=getlwithe(ninfm,i)
                    if j!=-1:
                        akn.extend(ninfm[j])
                        infkn.extend(ninfm[j])
                    del ninfm[j]

    return infkn

'''

Berechnet die stationäre Verteilung der uninfizierten Muster
bis auf die Normierung.
(Rückgabe ist immer positiv und ein Polynom)
'''

@functools.lru_cache(maxsize=32)
def calcpsuedouninfstat(k,aqui):
    ms=createMuni(k,aqui=True)

```

A.7. ÜBERPRÜFUNG DER RESTLICHEN FÄLLE DER MONOTONIE 119

```

A=ms.transpose()-sp.eye(ms.cols)

los=A.nullspace()[0]
los=sp.simplify(los)
b=[]
for a in los:
    b.append(a.as_numer_denom()[1])
den=sp.lcm(b)
los=den*los
los=los.simplify()
# Sicherstellen, dass los nicht kleiner als 0 in (0,1) ist
for e in los.subs(p,sp.Rational(1,2)):
    if e<0:
        los=-los
        break
    elif e>0:
        break
muuinf=genPatternun(k,aqui=True)
muuinfna=genPatternun(k,aqui=True)
if aqui:
    return los
else:
    muuinf=genPatternun(k,aqui=True)
    muuinfna=genPatternun(k,aqui=False)
    ena=[0]*len(muuinfna)
    for ui in range(0,len(muuinf)):
        aquiPat=allaquiPattern(k,muuinf[ui])
        for aktP in aquiPat:
            t=muuinfna.index(aktP)
            ena[t]=ena[t]+los[ui]/len(aquiPat)
    return ena

'''
Berechnet die Verteilung der Muster auf der Ebene m.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=32)
def pseudovertaufEbene(k,m):
    if m==0:
        return berechnepseudoStart(k,False)
    else:
        return (pseudovertaufEbene(k,m-1)*createM(k,False)).expand()

'''
Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass in Ck auf Ebene m der Knoten
a infiziert ist.
'''
@functools.lru_cache(maxsize=512)
def waufpseudoEninf(k,m,a):

```

```

mus=genPattern(k, False, True)
muuinf=genPatternun(k, False)

muaEm=pseudovertaufEbene(k,m)
stat=calcpsuedouninfstat(k, False)

wahr=0
for l in it.product([0,1], repeat=k):
    anzE=l.count(1)
    wp=p**anzE*(1-p)**(k-anzE)
    for x in mus:
        for y in muuinf:
            if a in infbdoppeltMuster(x,y,l):
                wahr=wahr+muaEm[mus.index(x)]*wp*stat[muuinf.index(y)]
return wahr

'''
Testet, ob die Verbindungsfunktion von  $C_k$  monoton ist für alle Ebenen  $\leq n$ 
Falls richtig, ist die Ausgabe True, sonst False.
'''
def testgiltver(k,m):
    for i in range(m):
        for j in range(k):
            x=(waufpseudoEninf(k,i,j)-waufpseudoEninf(k,i+1,j))
            if (x.subs(p,sp.Rational(1,2)) <= 0 or
                (j==0 and i==0 and countRoots(x,0,1)!=0) or
                ((j!=0 or i>0) and countRoots(x,0,1)!=1)):
                return False
    return True

#Testet die Behauptung für  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4$  für die übrig gebliebenen Fälle.
if __name__ == "__main__":
    for [k,m] in [[2,2],[3,2],[4,4]]:
        print('k=',k,'□',testgiltver(k,m))

```


A.8 Berechnung von m_{C_k}

Benutzt das Programm aus Abschnitt A.3 (als genPattern).

```

from genPattern import *

'''
Berechnet das mCk.
'''
def calcmCk(k):
    '''
    Berechnet, an welcher Stelle bei Multiplikation von den zwei
    Übergangsmatrizen ma1 ma2 die Werte ungleich 0 sind.
    '''
    def vm(ma1, ma2):
        rm=[[0] * len(m) for i in range(len(m))]
        for i in range(len(ma1)):
            for j in range(len(ma1)):
                if rm[i][j]==0:
                    for l in range(len(ma1)):
                        if ma1[i][l]==1 and ma2[l][j]==1:
                            rm[i][j]=1
                            break
                    return rm
    m=copy.deepcopy(genPattern(k, aqui=False, nullid=True))
    m.remove([])
    matv=[[0] * len(m) for i in range(len(m))]
    math=[[0] * len(m) for i in range(len(m))]
    for vk in it.product([0,1], repeat=k):
        for i in range(0, len(m)):
            uv=useveredges(m[i], vk)
            if uv[0] != []:
                j=m.index(uv)
                matv[i][j]= 1
            uh=usehoredges(m[i], vk)
            if uh[0] != []:
                j=m.index(uh)
                math[i][j]= 1
    mat=vm(matv, math)
    r=1
    matn=mat
    while(True):
        anzn=0
        for i in matn:
            for j in i:
                if j==0:
                    break
            anzn=anzn+1
        if anzn==len(m)**2:

```

```
        return r
    r=r+1
    matn=vm(matn,mat)

#Gibt minimales mCk für k=2...7 aus.
if __name__ == "__main__":
    for k in range(2,8):
        print('mC',k,': ',calcmCk(k))
```

Literatur

- [AKN87] M. Aizenman, H. Kesten und C. M. Newman. „Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation“. In: *Communications in Mathematical Physics* 111.4 (Dez. 1987), S. 505–531.
- [BH57] S. R. Broadbent und J. M. Hammersley. „Percolation processes: I. Crystals and mazes“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53.3 (1957), S. 629–641.
- [BK01] J. van den Berg und J. Kahn. „A correlation inequality for connection events in percolation“. In: *Annals of probability* 29.1 (2001), S. 123–126.
- [BR06] Bela Bollobas und Oliver Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [Buy16] Paul de Buyer. „A proof of the bunkbed conjecture for the complete graph at $p = \frac{1}{2}$ “. In: (28. Apr. 2016). arXiv: <https://arxiv.org/abs/1604.08439v1> [math.CO].
- [Buy18] Paul de Buyer. „A proof of the Bunkbed conjecture on the complete graph for $p \geq 1/2$ “. In: (13. Feb. 2018). arXiv: <https://arxiv.org/abs/1802.04694v1> [math.PR].
- [CCC91] Massimo Campanino, J. T. Chayes und L. Chayes. „Gaussian fluctuations of connectivities in the subcritical regime of percolation“. In: *Probability Theory and Related Fields* 88.3 (Sep. 1991), S. 269–341.
- [CH67] Gary Chartrand und Frank Harary. „Planar Permutation Graphs“. eng. In: *Annales de l’I.H.P. Probabilités et statistiques* 3.4 (1967), S. 433–438.
- [CMM13] Pierre Collet, Servet Martínez und Jaime San Martín. *Quasi-Stationary Distributions*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

- [CV16] Nicolas Champagnat und Denis Villemonais. „Exponential convergence to quasi-stationary distribution and Q-process“. In: *Probability Theory and Related Fields* 164.1-2 (Jan. 2016), S. 243–283.
- [Gil59] E. N. Gilbert. „Random Graphs“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 30.4 (Dez. 1959), S. 1141–1144.
- [Gri99] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [Ham57] J. M. Hammersley. „Percolation Processes: Lower Bounds for the Critical Probability“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 28.3 (1957), S. 790–795.
- [HL19] Peter van Hintum und Piet Lammers. „The bunkbed conjecture on the complete graph“. In: *European Journal of Combinatorics* 76 (2019), S. 175–177.
- [Kes80] Harry Kesten. „The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$ “. In: *Comm. Math. Phys.* 74.1 (1980), S. 41–59.
- [Kle13] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 16. März 2013. 664 S.
- [Lin11] Svante Linusson. „On percolation and the bunkbed conjecture“. In: *Combinatorics, Probability and Computing* 20.1 (Feb. 2011), S. 103–117.
- [LP17] David A. Levin und Yuval Peres. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2017.
- [LPS15] Bernardo N. B. de Lima, Aldo Procacci und Rémy Sanchis. „A Remark on Monotonicity in Bernoulli Bond Percolation“. In: *Journal of Statistical Physics* 160.5 (Mai 2015), S. 1244–1248.
- [MV12] Sylvie Méléard und Denis Villemonais. „Quasi-stationary distributions and population processes“. In: *Probab. Surveys* 9 (2012), S. 340–410.
- [Nor94] Biggs Norman Norman L. Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1. Juli 1994. 216 S.
- [OEI19] OEIS Foundation Inc., Hrsg. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2019. URL: <https://oeis.org/A001411>.
- [Rol07] Ronald H. W. Hoppe Roland W. Freund. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag GmbH, 18. Apr. 2007. ISBN: 978-3-540-45389-5.

- [Rot64] Gian-Carlo Rota. „The Number of Partitions of a Set“. In: *The American Mathematical Monthly* 71.5 (1964), S. 498–504.
- [Sim00] Rodica Simion. „Noncrossing partitions“. In: *Discrete Mathematics* 217.1 (2000), S. 367–409.