

Entwurf netzfreundlicher Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
der Universität Paderborn

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation
von

M. Sc. Carsten Henkenius

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Klaus Hoffmann

Tag der mündlichen Prüfung: 09.12.2020

Paderborn 2020

Diss. EIM-E/354

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Leistungselektronik und Elektrische Antriebstechnik der Universität Paderborn und während meiner Anstellung als Elektroingenieur für Leistungselektronik bei der Firma Delta Energy Systems (Germany) GmbH in Soest.

Die Erstellung der vorliegenden Arbeit war für mich sowohl eine bereichernde Erfahrung als auch eine persönliche Herausforderung. An dieser Stelle möchte ich den zahlreichen Menschen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit in vielfältiger Art und Weise beitrugen und mich während meiner Promotionszeit tatkräftig unterstützten.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Joachim Böcker für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus F. Hoffmann für die Übernahme des Korreferats.

Zudem danke ich allen ehemaligen Kollegen am Fachgebiet für die sehr angenehme und kollegiale Arbeitsatmosphäre. Vor allem bedanke ich mich bei Dr.-Ing. Norbert Fröhleke, Dr.-Ing. Tobias Grote und Dr.-Ing. Frank Schafmeister für die zahlreichen Ratschläge, Anregungen und Korrekturen meiner Arbeit. Ferner bedanke ich mich bei meinen Arbeitskollegen der Delta Energy Systems (Germany) GmbH für die gute Zusammenarbeit und wertvolle Unterstützung.

Mein außerordentlicher Dank gebührt jedoch meiner Frau Cordula, meiner Tochter Isabell und meinen Eltern, ohne deren Unterstützung und Vertrauen diese Arbeit niemals hätte entstehen können.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iv
Kurzfassung	vi
1 Einleitung	1
1.1 Aufbau netzfreundlicher Gleichrichter	3
1.2 Gliederung der Arbeit	5
2 Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler	8
2.1 Dynamisches Verhalten	11
2.1.1 Dynamische Mittelwertmethode	13
2.1.2 Betrieb als Synchronwandler	17
2.1.3 Betrieb als Hochsetzsteller	19
2.2 Stationäres Verhalten	23
2.2.1 Betrieb als Synchronwandler	24
2.2.2 Betrieb als Hochsetzsteller	24
2.3 Netzfrendliche Stromaufnahme	25
2.3.1 Gleichrichterbetrieb mit Synchronwandler	27
2.3.2 Gleichrichterbetrieb mit Hochsetzsteller	30
2.4 Zusammenfassung	35
3 Netzfilter	38
3.1 Störquellen und Störpfade	41
3.2 Spektrale Darstellung der Störsignale	45
3.2.1 Betrieb als Synchronwandler	46
3.2.2 Betrieb als Hochsetzsteller	50
3.3 Elektrisches Netzfiltermodell	52
3.4 Validierung und Auswertung	55
3.5 Zusammenfassung	58

4	Drosselspulen und Filterdrosseln	61
4.1	Induktivitätsmodelle	65
4.1.1	Luftspulen	71
4.1.2	Drosseln	85
4.2	Widerstandsmodelle	89
4.2.1	Luftspulen aus einem Leiter mit kreisrundem Querschnitt . . .	92
4.2.2	Luftspulen aus einem Leiter mit Litzendraht	102
4.2.3	Drosseln	106
4.3	Zusammenfassung	109
5	Experimentelle Verifikation der vorgestellten Modelle	112
5.1	Mittelwertmodell	112
5.2	Netzfilter	115
5.3	Drosselspule	116
5.4	Zusammenfassung	118
6	Zusammenfassung und Ausblick	122
	Tabellen	125
	Gleichungen und Herleitungen	129
B.1	Gegeninduktivität und äußere Selbstinduktivität kreisrunder Leiter- schleifen aus Runddraht	129
B.2	Matrixkoeffizienten für Zylinderkoordinaten	131
B.3	Matrixkoeffizienten für kartesische Koordinaten	135
B.4	Longitudinale Wirbelströme im Leiter mit rundem Querschnitt	141
B.5	Magnetische Feldstärke in der Umgebung eines kreisrunden Stromfadens	142
	Abkürzungen und Symbole	151

Abstract

Continuously rising energy prices require an increasingly efficient use of electrical energy in both an ecological and economic way. With regard to these aspects, the synchronous rectifier with integrated synchronous boost converter offers the most advantages of all active power factor correction (PFC) rectifiers. However, the advantageous properties of this power electronic circuit only come into play when all relevant design parameters are taken into account during the design phase of a circuit development. In addition to the component stress variables, such as current, voltage and power, these include parameters for the assessment of electrical interference emissions. Current object of research and development is therefore the most accurate representation of these design parameters and quantities using suitable calculation models.

Basically, the dynamic behaviour of the synchronous rectifier with integrated synchronous boost converter is described by differential equations, whereby a distinction is made between a switching model and an average value model within this thesis. The switching model is used to map rapidly occurring current and voltage changes, such as step-shaped voltage curves on power electronic switches or triangular current waveforms through the input choke. The mean value model is used to form the corresponding mean values. By combining both models, operation as synchronous boost converter as well as operation as boost converter can be considered. Both operating modes are suitable for actively controlling the power factor correction of the rectifier. Under the assumption of a sinusoidal shape of the averaged input current, the equations of the mean value model result in algebraic, but non-linear relationships for the duty cycles of the pulse width modulation .

With regard to the design of a qualified line filter for the suppression of electrical interference emissions, especially the fast switching behaviour of power electronic switches causes the emitted noise. For better cooling these components are usually fixed tightly to grounded housing parts of the power supply unit. The energy stored within the electrical field between the power electronic switch and the grounded heatsink is considered within the equivalent circuit diagram of the synchronous rectifier with integrated synchronous boost converter by plate capacitors. Provided that the rectifier circuit is symmetrically constructed, simple equivalent circuit diagrams result, which represent the composition of the switching model and line filter model. All branch currents and

branch voltages are approximated by Fourier series under the assumption of steady-state operation with active power factor correction, so that the methods of complex network analysis may be used to calculate all quantities. This also includes the waveform of the interference voltage, which is given by the previously evaluated mean value model.

From a physical point of view, chokes and filter chokes are electrical energy storage devices whose energy is stored within electrical and magnetic fields. However, the electrical energy storage process is not loss-free. In order to take into account both the stored energy and the resulting losses within the equivalent circuit diagram, calculation models are created for inductance and resistance. Based on the energy theorem of field theory, an inductance is divided into internal self-inductance, external self-inductance and inductance of the core. Internal and external self-inductance describe the stored energy of an arrangement of flexibly positionable conductor loops, which is called an air-core coil. Both together are therefore referred to as free inductance. The inductance of the core or core inductance is bound to the presence of permeable material and is therefore called bound inductance. To calculate the free inductance, the conductor loops are modelled by thin current filaments, which is why the corresponding partial integrals of the energy theorem can be solved in a closed way. The solution of the third partial integral for the calculation of the bound inductance corresponds to the calculation of the magnetization within the core volume and requires knowledge of the magnetic field of the air coil. However, this is not possible in a closed way and leads to a linear system of equations using the boundary element method, whereby the core volume has been discretized for both rectangular and cylindrical designs.

Resistance characteristics of chokes and filter chokes are also calculated on the basis of the energy set. These are defined by boundary conditions of Bessel's differential equation in the complex, whereby both rectangular and circular conductor loop shapes are investigated. The solution of this differential equation includes skin factors to consider frequency dependent current displacement effects within the conductor and together with the surrounding magnetic field strength leads to the definition of the frequency dependent resistance. This calculation methodology is then refined to model windings made of solid wire and stranded wire.

The three presented models and methods of this thesis are verified by measurements on a device for industrial power supply. The associated investigations show that these models are significantly more efficient than current design methods for the practical product development of rectifiers with integrated synchronous boost converters.

Kurzfassung

Fortwährend steigende Energiepreise erfordern einen zunehmend effizienteren Umgang mit elektrischer Energie sowohl im ökologischen als auch im ökonomischen Sinn. Die meisten Vorteile hinsichtlich dieser Gesichtspunkte bietet der Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler. Die förderlichen Eigenschaften dieser leistungselektronischen Schaltung kommen jedoch erst dann zur Geltung, wenn während der Entwurfsphase einer Schaltungsentwicklung alle relevanten Designparameter berücksichtigt werden. Dazu gehören neben den Bauteilbelastungsgrößen, wie Strom, Spannung und Leistung, auch Parameter zur Beurteilung der Störemissionen. Aktueller Gegenstand der Forschung und Entwicklung ist daher die möglichst genaue Abbildung dieser Entwurfsgrößen und Parameter anhand geeigneter Rechenmodelle.

Grundsätzlich wird das dynamische Verhalten des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler durch Differentialgleichungen beschrieben, wobei diese Arbeit zwischen einem Schaltmodell und einem Mittelwertmodell unterscheidet. Mit dem Schaltmodell werden schnell ablaufende Strom- und Spannungsänderungen, wie zum Beispiel sprungförmige Spannungsverläufe an leistungselektronischen Schaltern oder dreieckige Stromverläufe durch die Eingangsdrossel, abgebildet. Das Mittelwertmodell erzeugt die dazugehörigen Mittelwertverläufe. Durch die Kombination beider Modelle kann sowohl der Betrieb als Synchronwandler als auch der Betrieb als Hochsetzsteller berücksichtigt werden. Unter der Annahme eines sinusförmigen Verlaufs des Strommittelwertes ergeben sich aus den Gleichungen des Mittelwertmodells algebraische, jedoch nichtlineare Zusammenhänge, für die Verläufe von Tastverhältnissen der Pulsweitenmodulation.

Für den Entwurf eines geeigneten Netzfilters ist es notwendig, die Ursachen der Störemissionen zu modellieren. Das elektrische Verhalten der leistungselektronischen Schalter führt zu schnellen Ausgleichsvorgängen zwischen den Energiespeichern innerhalb des Gleichrichters, dessen Ausgleichsströme insbesondere über das Gehäuse und den angeschlossenen Schutzleiter fließen. Zur besseren Kühlung werden diese leistungselektronischen Bauteile üblicherweise eng an geerdete Gehäuseteile des Stromversorgungsgerätes fixiert. Die Energie, welche innerhalb des elektrischen Feldes zwischen leistungselektronischem Schalter und geerdetem Kühler gespeichert ist, wird innerhalb des Ersatzschaltbildes des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler durch

Plattenkondensatoren berücksichtigt. Unter der Voraussetzung, dass die Gleichrichterschaltung symmetrisch aufgebaut ist, ergeben sich daraus einfache Ersatzschaltbilder, welche die Zusammensetzung aus Schaltmodell und Netzfiltermodell repräsentieren. Alle Zweigströme und Zweigspannungen werden unter der Annahme des stationären Betriebes mit netzfreundlicher Stromaufnahme durch Fourierreihen approximiert, sodass zur Berechnung aller Größen die Methoden der komplexen Wechselstromrechnung und der Knotenspannungsanalyse angewendet werden dürfen. Dazu gehört auch die Störspannung, dessen zeitlicher Verlauf durch das zuvor ausgewertete Mittelwertmodell gegeben ist.

Aus physikalischer Sicht sind Drosselspulen und Filterdrosseln elektrische Energiespeicher, deren Energie innerhalb magnetischer Felder gespeichert ist. Der elektrische Energiespeicherprozess ist jedoch nicht verlustfrei. Um sowohl die gespeicherte Energie als auch die entstehenden Verluste innerhalb des Ersatzschaltbildes der gesamten Schaltung zu berücksichtigen, werden Rechenmodelle für Induktivität und Widerstand erstellt. Basierend auf dem Energiesatz der Feldtheorie wird die Induktivität in äußere Selbstinduktivität, innere Selbstinduktivität und Induktivität des Kernes unterteilt. Äußere und innere Selbstinduktivität beschreiben die gespeicherte Energie einer Anordnung frei positionierbarer Leiterschleifen, welche als Luftspule bezeichnet wird. Die Induktivität des Kernes oder Kerninduktivität ist an die Anwesenheit des Kernes aus permeablem Material gebunden und wird deshalb als gebundene Induktivität bezeichnet. Zur Berechnung der freien Induktivität werden die Leiterschleifen als dünne Stromfäden modelliert, weshalb die entsprechenden Teilintegrale des Energiesatzes geschlossen gelöst werden können. Die Lösung des dritten Integrals zur Berechnung der gebundenen Induktivität entspricht der Berechnung der Magnetisierung innerhalb des Kernvolumens und erfordert die Kenntnis des magnetischen Feldes der Luftspule. Das ist geschlossen jedoch nicht möglich und führt unter Anwendung der Randelementmethode zu einem linearen Gleichungssystem, wobei das Kernvolumen sowohl für rechteckige als auch zylindrische Bauformen diskretisiert wurde.

Ebenfalls werden Widerstandskennlinien von Drosselspulen und Filterdrosseln anhand des Energiesatzes berechnet. Diese werden durch Randbedingungen der Bessel'schen Differentialgleichung im Komplexen definiert, wobei sowohl rechteckige als auch kreisrunde Leiterschleifenformen untersucht werden. Die Lösung dieser Differentialgleichung beinhaltet Skin-Faktoren zur Berücksichtigung frequenzabhängiger Stromverdrängungseffekte innerhalb des Leiters und führt zusammen mit der umgebenden, magnetischen Feldstärke zur Definition des frequenzabhängigen Widerstandes. Diese Berechnungsmethode wird anschließend zur Modellierung von Wicklungen aus solidem Draht und Litzendraht verfeinert.

Die drei vorgestellten Modelle und Verfahren dieser Arbeit werden durch Messungen an einem Gerät zur industriellen Stromversorgung verifiziert. Die damit verbundenen Untersuchungen zeigen, dass diese Modelle bei der praktischen Produktentwick-

lung von netzfreundlichen Synchrongleichrichtern mit integriertem Synchronwandler aufgrund der präzisen Modellierung und den geringen Bedarf an Rechenleistung deutlich effizienter sind als gegenwärtige Entwurfsverfahren.

Kapitel 1

Einleitung

In der Vergangenheit wurde die Transformation netzüblicher Wechselspannungsformen in bedarfsgerechte Gleichspannungen üblicherweise durch passive, unregelte Gleichrichter realisiert. Allerdings entziehen diese dem Versorgungsnetz einen periodisch pulsierenden Strom, dessen höhere harmonische Schwingungen einen ebenfalls periodisch pulsierenden Spannungsverlauf an der Impedanz des Versorgungsnetzes erzeugt. Es kommt zur sogenannten Netzurückwirkung. Dieser Begriff wird allgemein als Synonym für die Verzerrung des Netzspannungsverlaufs durch den Einsatz dieser passiven oder unregelten Gleichrichter verwendet. Zur Limitierung der Netzurückwirkungen wurden Standards, wie zum Beispiel die EN61000-3-2, erstellt, welche Grenzwerte für die höheren harmonischen Schwingungsanteile im Eingangsstrom des Gleichrichters festlegen. Heutzutage werden deshalb die passiven Gleichrichter durch leistungselektronische Steller erweitert und so betrieben, dass sich der Verlauf des aufgenommenen Stromes dem Verlauf der Versorgungsspannung annähert. In diesem Zusammenhang wird eine solche Schaltung auch als Gleichrichter mit aktiver Leistungsfaktorkorrektur bezeichnet, dessen netzfreundliche Betriebsweise die Netzurückwirkungen minimiert.

Welcher Steller für die aktive Leistungsfaktorkorrektur zum Einsatz kommt, hängt oftmals vom Einsatzgebiet der leistungselektronischen Stromversorgung ab. In vielen Fällen wird der Hochsetzsteller bevorzugt, da mit dieser Schaltung der Eingangsstrom direkt eingepreßt werden kann und sich der Filteraufwand somit auf ein Minimum reduziert. Zudem wird dieser Steller zur Anpassung der Spannungshöhe der gleichförmigen Ausgangsspannung genutzt. Bei steigender Wirkungsgradanforderung wird zu der Freilaufdiode des Hochsetzstellers ein aktiver leistungselektronischer Schalter parallel geschaltet. In diesem Fall wird der Steller als Synchronwandler bezeichnet und die gesamte Gleichrichterschaltung besteht aus einem Gleichrichter mit einem nachgeschalteten Synchronwandler. Für den Einsatz in industriellen Applikationen oder dem Automobilbereich spielen jedoch auch weitere Eigenschaften, wie beispielsweise Leistungsdichte oder Kosten, eine wichtige Rolle.

Diese Eigenschaften werden nach aktuellem Stand der Technik insbesondere durch die Integration des Synchronwandlers in die Gleichrichterschaltung verbessert [26]. Bei der Integration werden die aktiven Schalter des Synchronwandlers zu dem Diodengleichrichter hinzugefügt, sodass mindestens zwei der Dioden des Gleichrichters neben der Gleichrichterfunktion auch die Freilauffunktion des Synchronwandlers übernehmen. Daher werden also mindestens zwei Gleichrichterioden weniger gebraucht, die sonst zusätzliche Verlustleistung erzeugen, Bauraum einnehmen und Kosten verursachen würden. Diese Schaltung kann dann als Gleichrichter mit integriertem Synchronwandler bezeichnet werden.

Bei höchsten Anforderungen an den Wirkungsgrad ist es natürlich auch möglich, die verbleibenden Gleichrichterioden durch aktive leistungselektronische Schalter zu ersetzen [27]. In diesem Fall entsteht eine klassische Vollbrücke, wie sie auch in einschlägigen Fachbüchern zu finden ist, jedoch mit dem Unterschied, dass eine Halbbrücke mit der Frequenz der anliegenden Netzspannung umgeschaltet wird und die andere mit einer deutlich höheren Frequenz arbeitet. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, wird die Schaltung innerhalb dieser Arbeit als Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler bezeichnet.

Unter hohen Kostenanforderungen kann es in der Praxis häufig sinnvoll sein, den Synchronwandler dieser Schaltung als Hochsetzsteller zu betreiben [28]. Dabei wird die Freilaufeigenschaft der Dioden des Synchronwandlers bewusst genutzt und es genügt, nur ein Ansteuersignal zu generieren. Die Betriebsart dieser Schaltung lässt sich demnach zwischen dem sogenannten Synchronwandlerbetrieb und Hochsetzstellerbetrieb unterscheiden. Beide sind praktisch sehr relevant und werden daher innerhalb dieser Arbeit separat betrachtet.

Unabhängig von der Betriebsart hat der Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler hinsichtlich Leistungsdichte und Kosten viele Vorteile zu bieten. Jedoch hat diese Schaltung einen wesentlichen Nachteil. Die Halbbrückenordnung der aktiven leistungselektronischen Schalter beeinflusst das elektrische Verhalten der Schaltung maßgeblich und es entsteht eine hohe Verlustleistung insbesondere während der Stromkommutierung. Die Auswahl geeigneter leistungselektronischer Schalter ist deshalb stark eingeschränkt. Im Zuge der aktuellen Entwicklung neuartiger Halbleitermaterialien mit hoher Bandlücke und der technologischen Verbesserung von IGBTs wird die Stromkommutierung der Halbbrückenordnung jedoch deutlich verbessert und der Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler verliert sein Ausschlusskriterium für die Applikation in industriellen Stromversorgungen oder im Automobilbereich.

Daher bildet der Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler den grundlegenden Gegenstand der wissenschaftlichen Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit. Dabei steht die Entwicklung einer ganzheitlichen Entwurfsmethode, wie sie beispielsweise für andere brückenlose Gleichrichterschaltungen bereits vorhanden ist, im Vordergrund. Wie innerhalb dieser Arbeit gezeigt wird, gibt es hinsichtlich der Eigen-

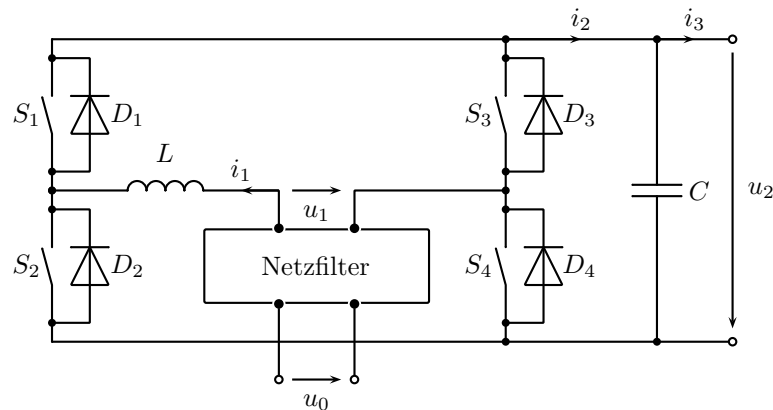


Abbildung 1.1: Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler und idealen Komponenten

schaften einzelner Komponenten, wie beispielsweise leistungselektronische Schalter, Drosselspulen oder Filterdrosseln, bereits gängige Entwurfsverfahren. Diese sind jedoch in den meisten Fällen nicht speziell für den Entwurf des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler konzipiert und wenig optimiert. Zudem basieren viele Entwurfsmethoden, wie zum Beispiel die Methode der finiten Elemente, auf der numerischen Auswertung komplexer mathematischer Zusammenhänge. Dessen Rechenbedarf führt, insbesondere für dreidimensionale Anordnungen, nicht zu einem effizienten Entwurf eines Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, sowohl numerische als auch analytische Verfahren aufzuzeigen, zu bewerten und weiterzuentwickeln, sodass deren Kombination zu einer wenig rechenintensiven und ganzheitlichen Entwurfsmethode für Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler führt. Dazu wird dieser Gleichrichter in einzelne Funktionsbaugruppen zerlegt und jede Baugruppe einzeln modelliert. Die Zusammenhänge zwischen diesen Funktionsbaugruppen bestimmen grundlegend den Aufbau der Gleichrichterschaltung (Kapitel 1.1) und die Gliederung dieser Arbeit (Kapitel 1.2).

1.1 Aufbau netzfreundlicher Gleichrichter

Abbildung 1.1 zeigt die Schaltung eines **Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler** und idealen Bauteilen. Diese Schaltung besteht aus vier leistungselektronischen Schalter-Dioden-Paaren S_1/D_1 bis S_4/D_4 , der Drosselspule L am Eingang und dem Kondensator C am Ausgang. Grundsätzlich handelt es sich hierbei also um eine klassische aktive Vollbrücke. Im Speziellen unterscheidet sich diese Schaltung jedoch durch die Art der eingesetzten Schalter in jeder Halbbrücke. Eine der beiden Halbbrücken, für

diesen Fall angenommen die Halbbrücke mit S_3/D_3 und S_4/D_4 , schaltet langsam und synchron zur Frequenz der versorgenden Wechselspannung u_1 . Diese Halbbrücke sorgt demnach für die Gleichrichtung des Eingangsstromes i_1 und wird demzufolge als Synchrongleichrichter bezeichnet. Natürlich ist es auch möglich, die einseitige Sperrfähigkeit der Dioden zur passiven Gleichrichtung der Wechselspannung des Versorgungsnetzes zu nutzen. Diese Betriebsart ist jedoch nicht sinnvoll, da die aktiven Komponenten dazu eingespart werden könnten. Aufgrund der üblicherweise geringen Netzfrequenz gegenüber der Schaltfrequenz können Leistungsverluste, die während der Stromkommutierung des Synchrongleichrichters entstehen, vernachlässigt werden, sodass die Schalter S_3/D_3 und S_4/D_4 üblicherweise hinsichtlich geringer Leitverluste optimiert sind.

Die andere Halbbrücke, bestehend aus S_1/D_1 und S_2/D_2 , schaltet schnell mit hoher Schaltfrequenz zur Einprägung der gewünschten Verlaufsform des aufgenommenen Stromes i_1 . Im Gegensatz zum Synchrongleichrichter kann es bei dieser Halbbrücke in manchen Applikationen sinnvoll sein, die passiven Sperreigenschaften der Dioden zu nutzen. Sofern der Schalter im Pfad des freilaufenden Stromes nicht aktiv hinzu geschaltet wird, geht die antiparallel angebundene Diode in den Sperrzustand, sobald kein Strom im Freilaufpfad fließt. Da der Schalter nicht synchron hinzu geschaltet wird, handelt es sich also nicht mehr um einen Synchronwandler, sondern um einen klassischen Hochsetzsteller. In beiden Fällen handelt es sich folglich um unterschiedliche Betriebsarten, die sich nicht durch den Aufbau der eigentlichen Schaltung unterscheiden. Vielmehr kommt es auf die Eigenschaften der eingesetzten leistungselektronischen Schalter unterschieden. MOSFETs finden in Halbbrücken typischerweise keine Anwendung, da die hohen Querströme beim Umschalten der Halbbrücke zu sehr hohen Verlusten führen. IGBTs sind im eingeschalteten Zustand nur bedingt rückwärts leitfähig, weshalb der Aufwand des synchronen Einschaltens üblicherweise zu groß ist. Daher wird eine Halbbrücke bestehend aus schnell schaltenden IGBTs häufig als Hochsetzsteller betrieben. Neuartige Schalter, die aus Materialien mit hoher Bandlücke bestehen, profitieren hingegen von der synchronen Ansteuerung, da deren Leitverhalten, bei rückwärts fließendem Strom und ohne synchrones Einschalten, zu hohen Verlusten führt. Beide Fälle sind demnach praktisch relevant, weshalb diese Arbeit den Betrieb als Hochsetzsteller und den Betrieb als Synchronwandler gesondert behandelt.

Aufgrund der schaltenden Arbeitsweise kommt es innerhalb von leistungselektronischen Geräten periodisch zu transienten Vorgängen mit hohen zeitlichen Änderungsraten. Es entstehen hohe Ausgleichsspannungen und Ströme, deren Leistung in irgendeiner Weise dem angeschlossenen Versorgungsnetz entnommen werden muss. Je nach dessen Aufbau und Beschaffenheit kann es dadurch zu sogenannten Netzzurückwirkungen kommen, welche sich störend auf den Netzbetrieb anderer elektrischer Geräte auswirken können. Deshalb ist es wichtig, die jeweiligen Störemissionen ausreichend zu dämpfen. Bei netzfreundlich arbeitenden Gleichrichterschaltungen werden dazu Dämpfungsschaltungen zur Einhaltung der Grenzwerte zur elektromagnetischen Verträglichkeit, sogenannte

EMV-Filter oder **Netzfilter**, zwischen das Versorgungsnetz und die Gleichrichterschaltung geschaltet. Durch einen passenden Entwurf sorgen diese Filter dafür, dass die Störemissionen weitestgehend innerhalb des Gerätegehäuses bleiben und sie gewährleisten, dass die Restemissionen vorgeschriebene Grenzwerte nicht überschreiten. Die Höhe der zu dämpfenden Störung beeinflusst dabei maßgeblich die Größe der passiven Filterbausteine und muss schon während des Entwurfs der Gleichrichterschaltung ausreichend bekannt sein. Dabei kann sich das Design eines Filters für den Betrieb als Hochsetzsteller durchaus von dem eines Filter für den Betrieb als Synchronwandler unterscheiden.

Drosselspulen und Filterdrosseln für den Einsatz in leistungselektronischen Schaltungen beinhalten im Wesentlichen eine Spule oder Wicklungen und einen magnetischen Kern. Spulen oder Wicklungen sind üblicherweise zylindrisch aufgewickelte Drahtspiralen, welche aus elektrisch gut leitfähigen Materialien bestehen. Der Kern besteht üblicherweise aus magnetisch gut leitfähigem Material und dient im Wesentlichen zur Führung des magnetischen Feldes. Der zu führende Strom und dessen zeitliche Änderung verursachen in der Spule und innerhalb des Kerns elektrische Leistungsverluste. Zudem können insbesondere ferromagnetische Materialien aufgrund ihrer Sättigungsgrenze nicht beliebig starke Magnetfelder führen. Daher ist es zwingend notwendig, Sättigungserscheinungen und elektrische Verluste von Drosselspulen oder Filterdrosseln bereits während der Entwurfsphase zu ermitteln, da es sonst zu Problemen bei der Betriebsführung der elektronischen Stromversorgung kommen kann.

Die Spannung am **Ausgangskondensator** der Gleichrichterschaltung soll möglichst konstant sein. Die Restwelligkeit der Ausgangsspannung ist von der Kapazität und der Leistungsaufnahme abhängig. Je größer die Kapazität und je kleiner die aufgenommene Leistung, desto geringer ist die Restwelligkeit. Jedoch ist die Strombelastung des Ausgangskondensators umso größer, je größer die Restwelligkeit. Für eine Gleichrichterschaltung mit vorgegebener Leistung ist der Entwurf des Ausgangskondensators demnach immer ein Kompromiss aus Restwelligkeit, Kapazität und Strombelastung.

1.2 Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit zeigt Kapitel 2 die Modellierung physikalischer Zusammenhänge zur Abbildung der netzfreundlichen Stromaufnahme eines Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler. Die dadurch entstehenden Modelle bilden die Grundlage für die Untersuchungen in Kapitel 3 und 5. Drosselspulen und Filterdrosseln sind hingegen unabhängig vom Aufbau der leistungselektronischen Schaltung und in nahezu jeder Anwendung leistungselektronischer Stromversorgungen zu finden. Daher wird in Kapitel 4 die Modellierung von Drosselspulen und Filterdrossel unabhängig von dem in dieser Arbeit zu Grunde gelegten Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler untersucht.

Kapitel 2 beschreibt zunächst die Erstellung eines geeigneten Schaltmodells, welches die schaltenden Eigenschaften realer leistungselektronischer Bauteile, wie z.B. MOS-FETs, IGBTs oder Dioden, durch sprungförmig verlaufende Schaltfunktionen abbildet. Vergleichende Gegenüberstellungen mit einem Simulationsmodell eines realen Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler verifizieren die Eigenschaften des Schaltmodells anhand beispielhafter Applikationen. Daraufhin wird die Transformation des Schaltmodells zu einem Mittelwertmodell gezeigt. Diese Transformation beruht auf der Bildung des gleitenden Mittelwertes, welche die schaltenden Eigenschaften der leistungselektronischen Schalter unterdrückt und den erforderlichen Rechenaufwand deutlich minimiert. Allerdings gehen dabei auch entwurfsrelevante Informationen des Schaltmodells verloren. Diese werden anschließend anhand der Auswertung des Mittelwertmodells rekonstruiert, sodass insbesondere die netzfreundliche Stromaufnahme des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler möglichst präzise abgebildet werden kann.

Nach dem gleichen Prinzip werden in Kapitel 3 die Störgrößen innerhalb des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler modelliert und eine Entwurfsmethode für Netzfilterschaltungen zur geeigneten Störunterdrückung entwickelt. Diese Filterentwurfsmethode besteht aus drei Phasen. In der ersten Phase werden Störpfade¹ identifiziert und dem Schaltplan hinzugefügt. Die zweite Phase zeigt die Überführung der mit Störpfaden erweiterte Gleichrichterschaltung in ein Ersatzschaltbild. In der letzten Phase werden die Übertragungsfunktionen der Störgrößen zu dem Spannungssignal der Netznachbildung mit Hilfe der komplexen Wechselstromanalyse berechnet. Zusammen mit den Spektren der Störgrößen wird dann das gesuchte Spektrum der Spannung an der Netznachbildung ermittelt.

Kapitel 4 zeigt einen neuartigen Ansatz zur Berechnung der Induktivitäts- und Widerstandscharakteristik räumlich ausgedehnter Drosselspulen und Filterdrosseln. Dieses Verfahren verzichtet auf den Einsatz der rechenintensiven Finite-Elemente-Methode und nutzt stattdessen die weitaus jüngere Methode der Randelemente zur Berechnung der magnetischen Feldverteilung. Der zu diskretisierende Raum beschränkt sich dabei auf das Volumen des magnetischen Kernes. Daraufhin folgt die Berechnung der Magnetisierung innerhalb des Kernvolumens, dessen Kenntnis für die Ermittlung der magnetischen Feldstärke in der Nähe der umgebenden Spulenwicklung notwendig ist. Durch diese Abfolge ist es nicht erforderlich, die filigranen Windungen des Spulenvolumens zu diskretisieren und erlaubt stattdessen die Widerstandscharakteristik der Spulenwicklung durch die Modellierung longitudinaler und azimuthaler Stromverdrängungseffekte zu nutzen. Dadurch reduziert sich der notwendige Rechenaufwand für einen dreidimensionalen Entwurf von Drosselspulen und Filterdrosseln massiv.

In Kapitel 5 folgt die Verifikation der vorgestellten Modelle aus den Kapiteln 2 bis

¹elektrische Verbindungen, die im Schaltplan der Gleichrichterschaltung nicht berücksichtigt, in dem realen Aufbau der Schaltung jedoch stets vorhanden sind

4 anhand von aufgenommenen Messergebnissen an einem elektronischen Stromversorgungsgerät mit einer nominellen Leistung von 3 kW. Der darin enthaltene Synchrongleichrichter mit zwei integrierten Synchronwandlern erlaubt den Betrieb an einer nominellen Eingangsspannung von 230 V mit einer nominellen Leistung von 3 kW. Die Ausgangsspannung wird dabei auf einen Wert von 435 V geregelt.

Kapitel 2

Synchrone Gleichrichter mit integriertem Synchronwandler

Bei dem Betrieb von Gleichrichterschaltungen an einem elektrischen Versorgungsnetz entsteht die sogenannte Blindleistung. Diese lässt sich in Verschiebungsblindleistung und Verzerrungsblindleistung unterteilen. Im Gegensatz zu passiven Gleichrichterschaltungen führt beim Synchrone Gleichrichter mit integriertem Synchronwandler insbesondere die aktiv schaltende Arbeitsweise zur Minimierung der Verzerrungsblindleistung. Zudem können die Schaltzeitpunkte so gewählt werden, dass die Verschiebungsblindleistung zwischen dem Versorgungsnetz und dem Gleichrichter verschwindet. Die Schaltung wird dann mit einem möglichst großen Leistungsfaktor betrieben und auch als netzfreundlich bezeichnet.

Dieser Vorgang wird typischerweise als Leistungsfaktorkorrektur (engl. power factor correction, PFC) bezeichnet und Gleichrichterschaltungen, welche nach diesem Prinzip arbeiten, werden deshalb mit PFC-Gleichrichter (engl. PFC-Rectifier) abgekürzt [8]. Dabei spielt die Form der Verläufe von Eingangsstrom und Eingangsspannung keine Rolle. In einem realen Versorgungsnetz für elektrische Geräte ist die Verlaufsform von der Eingangsspannung allerdings durch die Art und Weise der Spannungsinduktion am Generator bestimmt, dessen zeitliche Abhängigkeit üblicherweise durch die Sinusfunktion

$$u_1 = \hat{U}_{N1} \sin(\omega_N t) \quad (2.1)$$

angenähert wird. Die Spannungsamplitude \hat{U}_{N1} und die Netzkreisfrequenz

$$\omega_N = \frac{2\pi}{T_N} \quad (2.2)$$

beziehungsweise die Netzperiodendauer T_N sind standardisierte Parameter und charakterisieren das jeweilige Versorgungsnetz. In einem solchen Versorgungsnetz hat ein netzfreundlich arbeitendes Gerät demnach eine möglichst sinusförmige Stromaufnahme, dessen Phasendifferenz zur Versorgungsspannung Null beträgt.

Für den Entwurf eines synchronen Netzgleichrichters mit integriertem Synchronwandler und netzfreundlicher Stromaufnahme wird generell ein geeignetes physikalisches Modell benötigt, welches insbesondere die elektrischen Größen wie z.B. Ströme durch Drosselspulen oder Spannungen an Kondensatoren möglichst präzise abbildet. Diese Aufgabe ist keineswegs einfach zu bewältigen, da die Differentialgleichungen aufgrund der Eigenschaften von z.B. Leistungshalbleiterdioden nicht durch lineare Funktionen beschrieben werden können. Die Lösung dieser nichtlinearen, zeitvarianten Problemstellungen wird deshalb häufig numerisch approximiert [43] und führt bei schwer einzuschätzenden Anfangswertbedingungen zu zeitaufwändigen Rechenprozeduren.

In vielen Fällen ist eine präzise Abbildung aller real messbaren elektrischen Effekte der leistungselektronischen Schalter nicht zwingend erforderlich. Mit der Absicht, die Funktionsweise einer leistungselektronischen Schaltung zu studieren, ist es beispielsweise nicht unbedingt nötig, das elektrische Verhalten einer Diode unter Berücksichtigung der Sperrverzugszeit zu modellieren. Der notwendige Rechenbedarf eines realen Schaltmodells kann eingespart werden und so die Simulationsdauer der gesamten leistungselektronischen Schaltung reduzieren [17].

In diesem Zusammenhang wird das Leit- und Sperrverhalten aktiver leistungselektronischer Schalter wie z.B. IGBTs oder MOSFETs häufig durch sogenannte Schaltfunktionen approximiert [8]. Bei dieser Annahme wird das dynamische Verhalten realer Bauteile vollständig ignoriert und dem jeweiligen Schaltzustand ein Widerstand zugeordnet. Der Widerstand ist entweder nicht vorhanden (eingeschalteter Zustand) oder unendlich groß (ausgeschalteter Zustand) und ändert sich dadurch sprunghaft. Dieses Verhalten führt zu sprungförmigen Strom- und Spannungsverläufen, deren elektrische Leistung idealerweise verschwindet. Auf die gleiche Art und Weise ist es natürlich ebenfalls möglich, das elektrische Verhalten passiver leistungselektronischer Schalter, wie z.B. Dioden, zu vereinfachen. Im Gegensatz zu den aktiven Schaltern sind die Schaltzeitpunkte jedoch nicht unabhängig einstellbar und hängen insbesondere bei Schaltungen mit elektrischen Energiespeicherelementen, wie beispielsweise Drosselspulen oder Kondensatoren, kausal mit den Schaltzeitpunkten der aktiven Schalter zusammen. Je nach Aufbau ergeben sich demnach unterschiedliche Schaltzeitpunkte und verschiedene dynamische Verhaltensweisen der leistungselektronischen Schaltung. Diese dynamischen Modelle sind daher als Schaltmodell bezeichnet.

Um die sprunghaftigen Änderungen und kausalen Zusammenhänge möglichst gut abzubilden, müssen bei der numerischen Auswertung der Differentialgleichungen in der Nähe von Umschaltzeitpunkten Stützstellen generiert werden. Je öfter die Schaltfunktionen innerhalb eines vorgegebenen Zeitraumes ihren Schaltzustand wechseln, desto mehr Stützstellen werden benötigt. Rechen- und Speicheraufwand für eine möglichst genaue Schaltungssimulation nimmt also mit der gewählten Schaltfrequenz der Schaltung zu. Zudem besitzen die Schaltfunktionen aufgrund ihrer sprunghaftigen Änderungen Unstetigkeitsstellen, wodurch es bei der numerischen Lösungsapproximation zu Kon-

vergenzproblemen kommen kann. Das führt typischerweise zu unpräzisen Lösungen und schränkt die Wahl einer geeigneten numerischen Approximationsmethode ein [60]. Diese Probleme werden vermieden, indem die Schaltzeitpunkte separat ermittelt werden. Dazu wird die sogenannte dynamischen Mittelwertmethode [38, 8, 17] eingeführt. Im Grunde handelt es sich dabei um eine Integraltransformation der Differentialgleichungen, wodurch die sprungartigen Änderungen der Schaltfunktionen geglättet werden. Die Anzahl der benötigten Stützstellen wird reduziert und die Rechendauer verkürzt.

Innerhalb dieses Modells sind alle Ströme und Spannungen nur noch durch ihre jeweiligen Mittelwerte dargestellt. Mit dieser Methode lässt sich insbesondere der Betrieb als Synchronwandler [38] sehr gut modellieren. Zur Modellbildung des Betriebs als Hochsetzsteller [21] müssen die Gleichungen des Mittelwertmodells um eine Fallunterscheidung erweitert werden. Diese gibt an, ob sich der Hochsetzsteller in einem stromlückenden (engl. discontinuous conduction) oder stromlückfreien (engl. continuous conduction) Schaltintervall befindet [62]. Da beim Betrieb als Hochsetzsteller sowohl stromlückende als auch lückfreie Intervalle durchlaufen werden, muss die Fallunterscheidung zur Mittelwertmodellierung der netzfreundlichen Stromaufnahme ebenfalls ausgewertet werden. Wie in [4, 61, 45] gezeigt, führt die Mittelwertmodellierung der unterschiedlichen Intervalle zusammen mit der Fallunterscheidung zu einer sehr guten Abbildung dynamischer Eigenschaften leistungselektronischer Schaltungen und wird als Mittelwertmodell bezeichnet.

Fallunterscheidungen führen bei der numerischen Auswertung jedoch zu erhöhtem Rechenaufwand, da stets zwei Fälle parallel berechnet werden müssen, um anschließend die Gültigkeit des jeweiligen Falles zu überprüfen. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit auf die parallele Auswertung der Fallunterscheidung verzichtet und stattdessen ein vereinfachender algebraischer Ausdruck entwickelt, dessen numerische Auswertung deutlich schneller durchgeführt werden kann. Die Kombination aus Differentialgleichungssystem der Mittelwerte und algebraischer Gleichung ist demnach Basis für die Modellierung der netzfreundlichen Stromaufnahme und den daraus resultierenden Strom- und Spannungsverläufen aller Zweige der leistungselektronischen Schaltung. In vielen Publikationen werden sowohl das Schaltmodell als auch das Mittelwertmodell um ein Regelungskonzept für Eingangsstrom und Ausgangsspannung erweitert und simuliert [35, 24]. Dabei kann es aufgrund schwer einzuschätzender Anfangswertbedingungen zu langen Simulationszeiten kommen, bis der stationäre Zustand der Gleichrichterschaltung letztendlich erreicht ist. Die besondere Herausforderung besteht deshalb darin, anhand des Mittelwertmodells und der algebraischen Gleichung ein numerisches Mittelwertmodell der netzfreundlichen Stromaufnahme zu erstellen, welches mit möglichst geringem Rechenaufwand das dynamische Verhalten des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler möglichst genau abbildet.

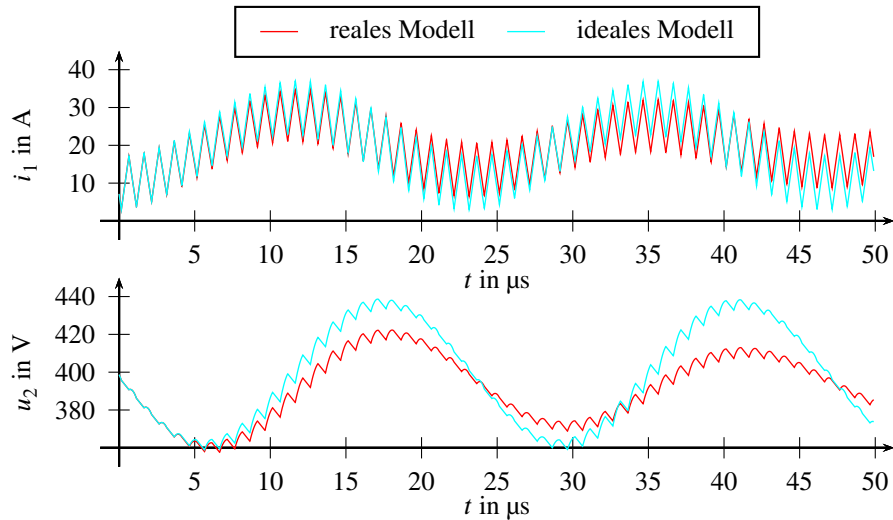


Abbildung 2.1: Simulationsergebnisse der Strom- und Spannungsverläufe eines synchronen Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler und den Parametern aus Tabelle A.1

2.1 Dynamisches Verhalten

Aus der Forderung möglichst verlustarm arbeitender leistungselektronischer Schaltungen ergibt sich, dass die Wirkung von ohmschen Widerständen, insbesondere in Verbindungszweigen mit hoher Strombelastung, vernachlässigbar klein sein müssen [8]. Dadurch entfallen diejenigen Terme der Differentialgleichung, welche sich aus dem ohmschen Gesetz ergeben und es genügt, die Strom- und Spannungsspannungsverläufe durch beziehungsweise an diesen Bauteilen durch sprungförmig verlaufende Schaltsignale zu beschreiben.

Die Annahme idealer leistungselektronischer Schalter beeinflusst natürlich auch das elektrische Verhalten der gesamten Schaltung. Um diesen Effekt zu demonstrieren, zeigt Abbildung 2.1 zwei beispielhafte Simulationsergebnisse von Eingangsstrom i_1 und Ausgangsspannung u_2 eines idealen und eines realen Schaltmodell eines synchronen Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler¹. Beide Ergebnisse zeigen hochfrequente und niederfrequente Grenzzyklen. Die hochfrequenten Grenzzyklen ergeben sich durch die sprungartigen Zustandsänderungen der leistungselektronischen Schalter und sind gewollt. Sie sollen demnach keine Ruhelage besitzen. Die niederfrequenten Grenzzyklen

¹Hinter jedem der vier Schalter-Dioden-Paare S_1/D_1 bis S_4/D_4 des realen Modells steckt ein nicht-lineares VDMOS-Modell (engl. vertical diffused MOS) [49] zur Nachbildung der Eigenschaften realer leistungselektronischer Schalter. Bei den Schaltern des Synchronwandlers (S_1 und S_2) handelt es sich um Modelle mit optimierten Schalteigenschaften. Für den Synchrongleichrichter (S_3 und S_4) wurden Modelle mit optimierten Durchlasseigenschaften verwendet.

sind die Folge des Ausgleichsvorgangs zwischen der Induktivität L und der Kapazität C . Während der Grenzyklus des realen Modells einer Ruhelage zustrebt, stellt sich beim idealen Modell ein niederfrequenter asymptotisch bahnstabiler Grenzyklus ein. Es arbeitet aufgrund der verlustlosen Zustandsänderungen der Schalter und der fehlenden elektrischen Widerstände ebenfalls verlustlos, was maßgeblich dazu führt, dass in der gesamten Schaltung keine Dämpfung vorhanden ist. Zur Definition eines idealen Schaltmodells gehören also fehlende Ruhelagen vorhandener Grenzyklen, jedoch bleiben die charakteristischen Frequenzen dieser Grenzyklen erhalten. Die Annahme eines idealen Modells kann deshalb nur zur Approximation der Dynamik einer realen leistungselektronischen Schaltung genutzt werden. Bei dem Entwurf einer Schaltung genügt es jedoch oftmals die Dynamik zu approximieren, da insbesondere die charakteristischen Frequenzen der Grenzyklen erhalten bleiben.

Der Schaltzustand eines jeden Schalter-Dioden-Paares wird durch eine jeweilige Schaltfunktion s_1, \dots, s_4 beschrieben. Dabei repräsentiert $s_1, \dots, s_4 = 1$ den eingeschalteten Zustand während $s_1, \dots, s_4 = 0$ den ausgeschalteten Zustand dargestellt [8]. Unter Berücksichtigung aller möglichen Schaltzustände ergeben sich die Differentialgleichungen in der Zustandsraumdarstellung für Strom i_1 und Spannung u_2 zu

$$L \frac{di_1}{dt} = (s_1 + s_2) (s_3 + s_4) u_1 - (s_1 s_4 - s_2 s_3) u_2 \quad (2.3)$$

$$C \frac{du_2}{dt} = (s_1 s_4 - s_2 s_3) i_1 - I_3 \quad (2.4)$$

für den Fall $u_2 \geq 0$. Als Belastung des Ausgangskondensators C wird dabei ein konstanter Strom $i_3 = I_3$ angenommen. Praktisch unzulässige Schaltzustände, die z.B. zu Kurzschlüssen der Kapazität führen, werden durch die Nebenbedingungen

$$1 \geq (s_1 + s_2) \quad (2.5)$$

$$1 \geq (s_3 + s_4) \quad (2.6)$$

abgefangen.

Für eine präzise Abbildung der Dynamik ist es wichtig, die gewünschte Pulsdauer der Schaltfunktionen innerhalb eines festen Schaltintervalls exakt einzustellen und zu messen. Solche präzisen Pulsfunktionen werden durch Pulsweitenmodulation generiert [53, 8] und können für einen synchronen Gleichrichter mit integriertem Synchronwandler beliebig vorgegeben werden. Damit die Pulsdauer des eingeschalteten Zustands eines jeden Schalters exakt der jeweils gewünschten Einschaltdauer T_1, \dots, T_4 entspricht, wird das Trägersignal c verwendet und mit dem jeweils gewünschten Tastverhältnis d_1, \dots, d_4 als Nutzsignal verglichen. Zur Erzeugung der Schaltfunktionen s_1, \dots, s_4 werden deshalb die Vorzeichen der Differenzen der Nutzsignale und dem Trägersignal ausgewertet. Die vier Schaltfunktionen des synchronen Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler

werden dann durch

$$s_1 = \frac{\text{sign}(d_1 - c) + 1}{2} \quad (2.7)$$

$$s_2 = \frac{\text{sign}(d_2 - c) + 1}{2} \quad (2.8)$$

$$s_3 = \frac{\text{sign}(d_3 - c) + 1}{2} \quad (2.9)$$

$$s_4 = \frac{\text{sign}(d_4 - c) + 1}{2} \quad (2.10)$$

ausgedrückt. Anschließend wird das Trägersignal durch die Abrundungsfunktion periodisch fortgesetzt. Das Trägersignal mit einer Periodendauer von T_S kann beispielsweise durch

$$c = \frac{t}{T_S} - \left\lfloor \frac{t}{T_S} \right\rfloor \quad (2.11)$$

ausgedrückt werden, wodurch für die Schaltfunktionen zeitlich nacheinander auftretende Schaltpulse über die gesamte Simulationsdauer entstehen. Dabei sei angemerkt, dass diese Schaltfunktionen keinesfalls Leitzustände, welche sich nur implizit ermitteln lassen, inhärent abbilden können. Leitzustände der Dioden müssen, beispielsweise durch die geeignete Wahl der Tastverhältnisse d_1, \dots, d_4 , berücksichtigt werden. Die Analyse und Modellierung dieser Zusammenhänge zeigt das folgende Kapitel.

2.1.1 Dynamische Mittelwertmethode

Differentialgleichungen lassen sich zu algebraischen Gleichungen umwandeln, indem beispielsweise die Fourier- oder Laplace-Transformation angewendet wird. Dadurch können die Ausdrücke einfacher umformt werden und die Lösungen der Differentialgleichungen sind leichter zu finden. Ganz ähnlich werden bei der dynamischen Mittelwertmodellierung die Gleichungen 2.3 und 2.4 durch eine geeignete Operation in eine einfachere Form gebracht. Dazu wird zunächst über ein zeitlich variables Intervall $\left[t - \frac{T_S}{2}, t + \frac{T_S}{2} \right]$ mit festem Zeitraum T_S integriert

$$L \frac{d}{dt} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} i_1(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} (s_1 + s_2) u_1(\tau) d\tau - \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} s_2 u_2(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

$$C \frac{d}{dt} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} u_2(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} s_2 i_1(\tau) d\tau - I_3 T_S, \quad (2.13)$$

wobei der Ausdruck auf der linken Seite über den Hauptsatz der Integralrechnung aus [10] gewonnen wird. Zur besseren Übersicht wird Gleichung 2.12 mit T_S multipliziert und die Integrale allgemein durch

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

abgekürzt. Dadurch ergibt sich

$$L \frac{d\bar{i}_1}{dt} = \frac{1}{T_S} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} (s_1 + s_2) u_1(\tau) d\tau - \frac{1}{T_S} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} s_2 u_2(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

$$C \frac{d\bar{u}_2}{dt} = \frac{1}{T_S} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} s_2 i_1(\tau) d\tau - I_3. \quad (2.16)$$

Unter der Annahme, dass alle Ströme und Spannungen zunächst nur positive Werte annehmen, können die verbleibenden Integrale durch

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau \geq \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) w(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

abgeschätzt werden. Abbildung 2.2 zeigt diesen Zusammenhang anhand eines beispielhaften Verlaufs der Funktion x für den Zeitraum T . Das grau eingezeichnete Integral $\int x w d\tau$ ist kleiner als das gesamte Integral $\int x d\tau$. Da die Schaltfunktionen, ähnlich wie die dargestellte Gewichtungsfunktion w , nur die Werte 0 und 1 annehmen können, muss Gleichung 2.17 immer zutreffen. Für den Sonderfall, dass w während der gesamten Dauer T den Wert 1 annimmt, nimmt Gleichung 2.17 die Form

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) w(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

an. Um aus diesem Sonderfall eine allgemein gültige Beziehung zu erstellen, werden zwei dimensionslose unbekannte Zahlen a und b eingeführt und Gleichung 2.17 in den

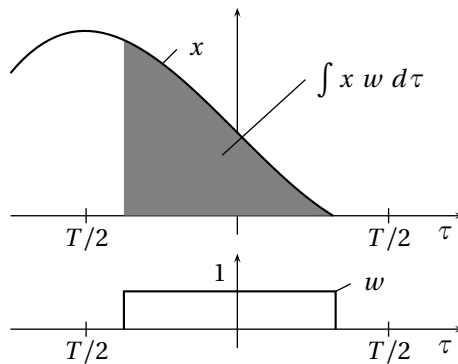


Abbildung 2.2: Zur Veranschaulichung der dynamischen Mittelwertmodellierung

Ausdruck

$$a \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) d\tau = b \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) w(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

überführt. Daraus folgt, dass

$$b \geq a \quad (2.20)$$

sein muss. Nach Abbildung 2.2 ist die Zahl b ein Ausdruck für die Dauer, in der $x > 0$ gilt. Der Fall, dass die Funktion $x(\tau)$ während der gesamten Dauer größer als 0 ist, wird durch $b = 1$ repräsentiert. Die Zahl a kann als das Tastverhältnis d (engl. duty cycle) der Einschaltdauer der Schaltfunktion $w(\tau)$ gedeutet werden. Bezogen auf den Synchronwandler kann demnach die Einschaltdauer von s_1 als das Tastverhältnis d_1 und die Einschaltdauer von s_2 als das Tastverhältnis d_2 interpretiert werden.

Zum besseren Verständnis wird dieses Verfahren nun zur Vereinfachung der Gleichungen 2.15 und 2.16 angewendet. Beim Betrieb als Hochsetzsteller ist es durchaus üblich, dass der Strom i_1 nur für einen Teil der Dauer einer Schaltperiode fließt [62, 13]. In diesem Zeitraum werden die Schaltfunktionen s_1 und s_2 nacheinander eingeschaltet. Dann ergibt sich

$$b = d_1 + d_2$$

für das Tastverhältnis der gesamten Leitzeit des Stromes i_1 innerhalb einer Schaltperiode. Innerhalb des Integrales wird der Strom mit der Schaltfunktion d_2 multipliziert. Deshalb ist

$$a = d_2$$

und das gesamte Integral aus Gleichung 2.16 kann durch

$$\frac{1}{T_S} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} s_2 i_1(\tau) d\tau = \overline{i_1} \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

abgekürzt werden. Ähnliches gilt auch für die Eingangsspannung u_1 . Jedoch verschwindet die Eingangsspannung für den gesamten Zeitraum der Schaltperiode nicht, weshalb

$$b = 1$$

und

$$a = d_1 + d_2$$

gelten muss. Deshalb wird das Integral über die Eingangsspannung durch

$$\frac{1}{T_S} \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} (s_1 + s_2) u_1(\tau) d\tau = \overline{u_1} (d_1 + d_2)$$

ausgedrückt. Die Vereinfachung des Integrals über die Ausgangsspannung u_2 erfolgt durch identische Vorgehensweise und erfordert deshalb keine weitere Erläuterung. Letztendlich wird durch Anwendung der dynamischen Mittelwertmethode der Betrieb des Gleichrichters als Hochsetzsteller durch

$$L \frac{d\overline{i_1}}{dt} = \overline{u_1} (d_1 + d_2) - \overline{u_2} d_2 \quad (2.21)$$

$$C \frac{d\overline{u_2}}{dt} = \overline{i_1} \frac{d_2}{d_1 + d_2} - I_3 \quad (2.22)$$

repräsentiert.

Beim Betrieb als Synchronwandler treten Zeiträume, in denen der Strom i_1 verschwindet, nicht auf [8]. Dadurch entsteht eine einheitliche Skalierung des Eingangsstromes und das dynamische Verhalten lässt sich durch

$$L \frac{d\overline{i_1}}{dt} = \overline{u_1} - \overline{u_2} d_2 \quad (2.23)$$

$$C \frac{d\overline{u_2}}{dt} = \overline{i_1} d_2 - I_3. \quad (2.24)$$

abbilden. Beim Vergleich zwischen Synchronwandler und Hochsetzsteller (Gleichungen 2.21 und 2.22) fällt auf, dass sich deren Differentialgleichungen lediglich durch

$$1 = d_1 + d_2 \quad (2.25)$$

unterscheiden. Deshalb ist der Betrieb des Synchronwandlers als Sonderfall des Hochsetzstellerbetriebs zu betrachten.

Einige Publikationen unterscheiden zwischen zwei weiteren Sonderfällen. Sofern der Strom zu einem einzigen Zeitpunkt innerhalb jeder Schaltperiode verschwindet, aber sein Vorzeichen nicht wechselt, wird der Synchronwandler an der sogenannten Lückgrenze (engl. boundary mode) betrieben [17]. Allerdings werden die Schaltsignale dabei durch eine Pulsweitenmodulation mit variabler Schaltfrequenz generiert. Im Grunde genügt dieser Fall der Definition des Synchronwandlerbetriebs. Ähnliches gilt für den Dreiecksbetrieb (engl. triangular mode). Hierbei wird lediglich betont, dass der Strom gezielt sein Vorzeichen wechselt, um die leistungselektronischen Bauteile möglichst verlustarm umschalten zu können [36]. Eine Übersicht aller Betriebsarten des Synchronwandlers ist in [21] gezeigt.

2.1.2 Betrieb als Synchronwandler

Die in Abbildung 2.3 dargestellten Verläufe zeigen die Auswertung von Gleichungen 2.23 und 2.24 für verschiedene Parameter D_2 . Die Schaltfunktionen s_1 und s_2 des Schaltmodells wurden durch Pulsweitenmodulation mit einem sägezahnförmigen Trägersignal und dem jeweiligen Nutzsignal d_1 und d_2 aus dem Mittelwertmodell generiert. Wie zu erkennen, verlaufen Strom und Spannung sowohl beim Schaltmodell als auch beim Mittelwertmodell sinusförmig mit durchaus gleicher Frequenz. Der visuelle Vergleich der Graphen zeigt, dass die Verläufe der Mittelwerte von \bar{i}_1 und \bar{u}_2 überwiegend zwischen den Werten von i_1 und u_2 zu den jeweiligen Umschaltzeitpunkten liegen. Obwohl diese Ergebnisse verblüffend ähnlich aussehen, ist dennoch ein kleiner Phasenversatz zu erkennen. Ein Grund für die Abweichungen ist möglicherweise eine unpassende Annahme der Anfangswerte für i_1 und u_2 . Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet, da die Ergebnisse zu keiner eklatanten Verbesserung führen würden und somit nicht im Verhältnis zum benötigten Arbeitsaufwand stehen.

Die Differentialgleichungen des Synchronwandlers (Gleichungen 2.23 und 2.24) sind durch die Funktion d_2 zwar nichtlinear, lassen sich aber unter der Annahme von $d_2 = D_2$ mit $0 < D_2 < 1$ sowie $\bar{u}_1 = U_1$ exakt lösen. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators

$$0 = \frac{d^2 \bar{i}_1}{dt^2} + \frac{D_2^2}{L C} \bar{i}_1 - \frac{D_2}{L C} I_3, \quad (2.26)$$

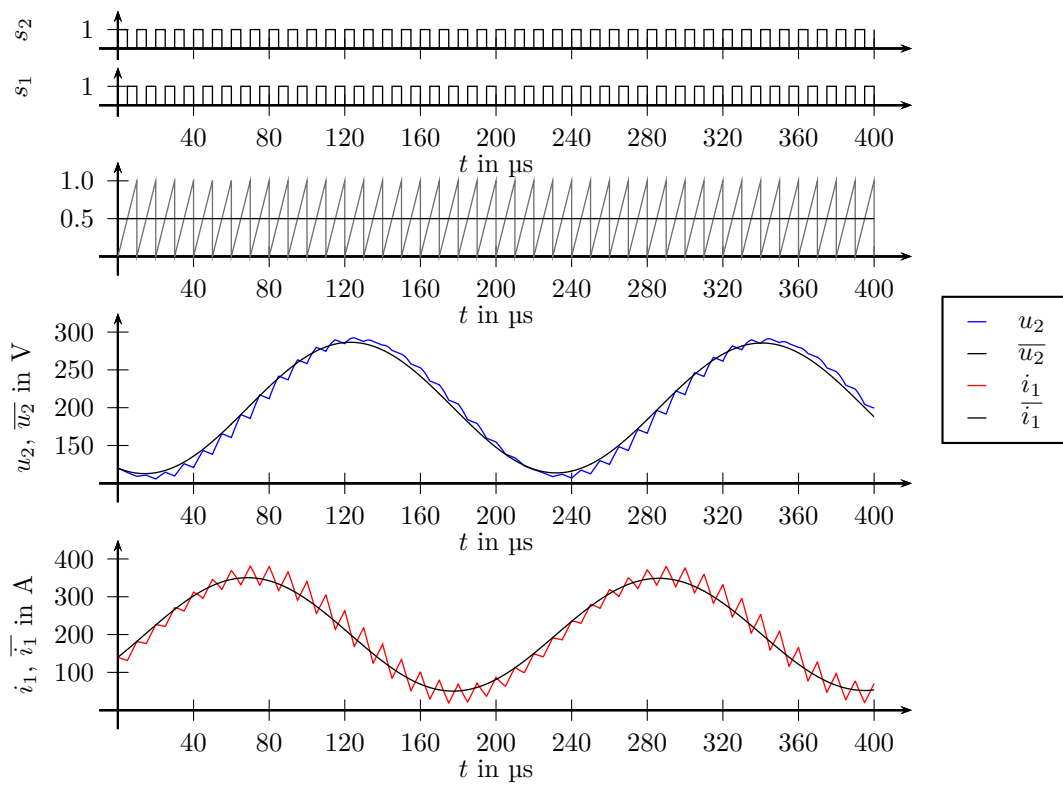


Abbildung 2.3: Vergleich zwischen Schaltmodell (farbig) und Mittelwertmodell (schwarz) des Synchronwandlers mit den Parametern aus Tabelle A.2

dessen Lösung,

$$\bar{i}_1 = \hat{I}_{1C} \sin(\omega_C t) + \frac{I_3}{D_2}, \quad (2.27)$$

leicht ermittelt werden kann. Der Strommittelwert verläuft demnach sinusförmig mit der Amplitude \hat{I}_1 und

$$\omega_C = \frac{D_2}{\sqrt{L C}} \quad (2.28)$$

als skalierte Eigenkreisfrequenz. Durch Einsetzen von Gleichung 2.27 in Gleichung 2.23 wird der resultierende Spannungsverlauf,

$$\bar{u}_2 = \frac{U_1}{D_2} - \hat{U}_{2C} \cos(\omega_C t), \quad (2.29)$$

mit der Spannungsamplitude,

$$\hat{U}_{2C} = \hat{I}_{1C} Z_0 = \frac{U_1}{D_2} - \bar{u}_2(t=0), \quad (2.30)$$

dem Kennwiderstand,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.31)$$

und dem Anfangswert des gleitenden Spannungsmittelwertes \bar{u}_2 ermittelt. Der Anfangswert für den gleitenden Strommittelwert ergibt sich durch $\bar{i}_1 = I_3 / D_2$. Abbildung 2.4 zeigt die Auswertung des Mittelwertmodells und des Schaltmodells bei konstanter Eingangsspannung $U_1 = 100 \text{ V}$ und konstantem Ausgangsstrom $I_3 = 30 \text{ A}$ für drei unterschiedlich angenommene Tastverhältnisse. Der Startwert der Ausgangsspannung beträgt $\bar{u}_2(t=0) = 130 \text{ V}$. Wie nach Gleichung 2.28 zu erwarten, nimmt die Eigenkreisfrequenz mit zunehmendem Tastverhältnis zu. Bei einem Tastverhältnis von $D_2 = 1$ wird die Eigenkreisfrequenz nicht mehr skaliert. Für diesen Fall finden jedoch auch keine Schaltvorgänge mehr statt.

2.1.3 Betrieb als Hochsetzsteller

Um einen Zusammenhang zwischen d_1 und d_2 auf anschauliche Weise herzuleiten, wird ein typischer Verlauf des Stromes i_1 während eines lückenden Schaltintervalls betrachtet. Abbildung 2.5 zeigt eine graue und eine rote Fläche, deren obere Kante jeweils mit \bar{i}_{1d} bzw. \bar{i}_1 bezeichnet sind. Werden beide Flächen gleich gesetzt, so ergibt sich

$$\bar{i}_1 = (d_1 + d_2) \bar{i}_{1d} \quad (2.32)$$

für den Mittelwert des Eingangsstromes. Das Tastverhältnis d_1 bezeichnet die Steuergröße und ist vorgegeben. Der Eingangsstrom \bar{i}_1 ergibt sich dann durch die Lösung von

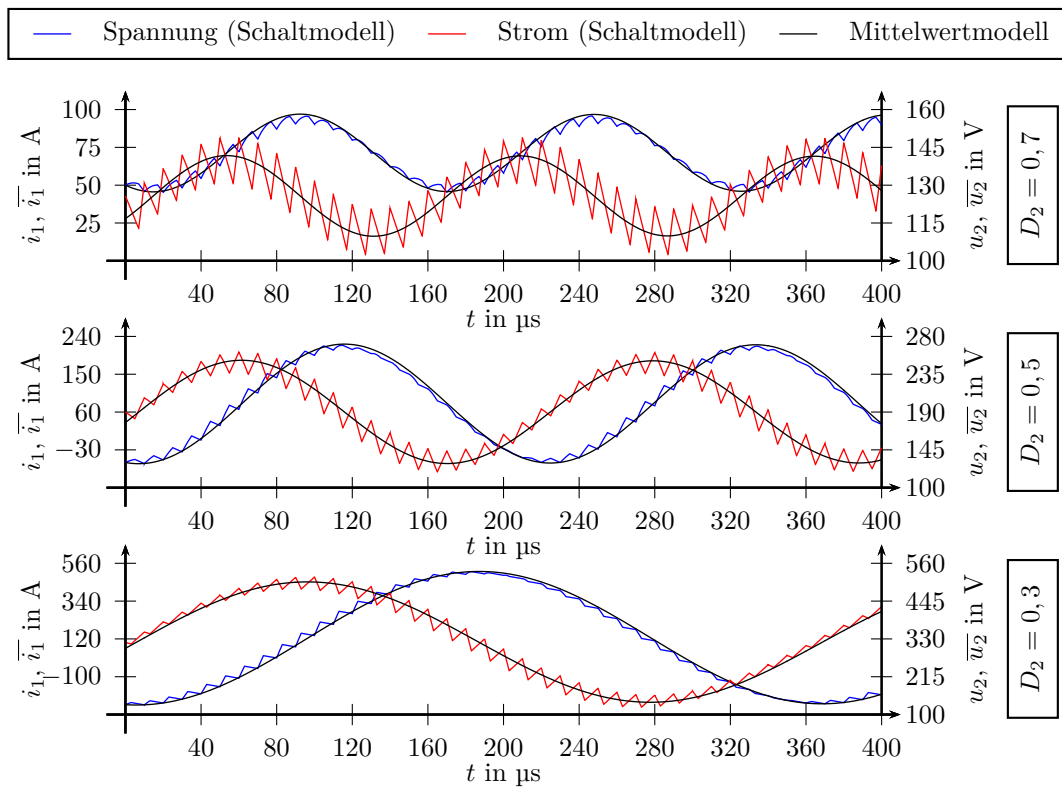


Abbildung 2.4: Darstellung von Eingangsstrom (vertikale Achse auf der linken Seite) und Ausgangsspannung (vertikale Achse auf der rechten Seite) bei unterschiedlichem Tastverhältnis

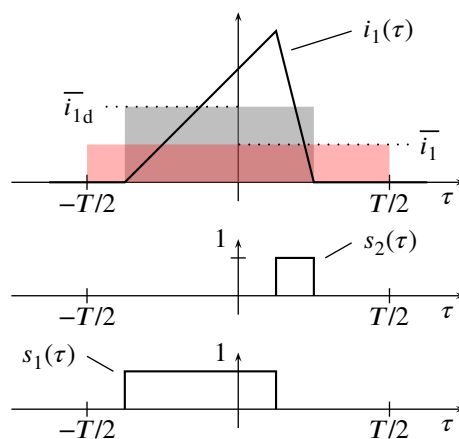


Abbildung 2.5: Typischer Verlauf von i_1 , s_1 und s_2 im lückenden Betrieb

Gleichung 2.21 und 2.22. Die Unbekannten sind also d_2 und \bar{i}_{1d} . Diese lassen sich durch bestimmen, indem in Gleichung 2.3 $s_1 = 1$ und $s_2 = 0$ gesetzt

$$L \frac{di_1}{dt} = s_1 u_1 \quad (2.33)$$

wird. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$i_1 = \frac{1}{L} \int_0^{T_1} u_1 dt + i_1(t_0) \quad (2.34)$$

wobei T_1 den Ausschaltzeitpunkt der Schaltfunktion s_1 beschreibt. Unter der Annahme, dass sich u_1 nicht ändert und $i_1(t_0) = 0$, ergibt sich für die Einschaltdauer ein Verlauf wie in Abbildung 2.5 gezeigt. Somit lässt sich Gleichung 2.33 zu

$$\bar{i}_{1d} = \frac{\bar{u}_1 d_1 T_S}{2L} \quad (2.35)$$

umformen. Dieser Ausdruck wird in wiederum in 2.32 eingesetzt und es folgt

$$d_2 = \frac{2 \bar{i}_1 L}{\bar{u}_1 d_1 T_S} - d_1 . \quad (2.36)$$

Der Zusammenhang zwischen d_1 und d_2 ist somit hergestellt und der Hochsetzsteller im lückenden Betrieb wird durch die Gleichungen 2.21, 2.22 und 2.36 vollständig beschrieben. Es besteht die Möglichkeit, die Gleichungen noch weiter zu reduzieren und zur Auswertung vereinfachen. Allerdings ist bereits zu erkennen, dass die vereinfachten Gleichungen selbst unter gleichen Annahmen wie im lückfreien Betrieb zu keinem einfach lösbaren Differentialgleichungssystem führen. Vielmehr ist es möglich, die Fallunterscheidung zwischen den Betriebsarten gleichzeitig zu berücksichtigen.

Aus den Gleichungen 2.1.1 und 2.25 lässt sich schlussfolgern, dass für das Tastverhältnis d_2 stets das Minimum von Gleichung 2.25 und 2.36 gültig ist. Mathematisch wird dieser Zusammenhang durch

$$d_2 = \min \left(\frac{2 \bar{i}_1 L}{\bar{u}_1 d_1 T_S} - d_1, 1 - d_1 \right) \quad (2.37)$$

ausgedrückt und lässt sich durch Einführen der Betragsfunktion zu

$$d_2 = \left(\frac{k_D}{d_1} - 2 d_1 + 1 - \left| \frac{k_D}{d_1} - 1 \right| \right) \frac{1}{2} \quad (2.38)$$

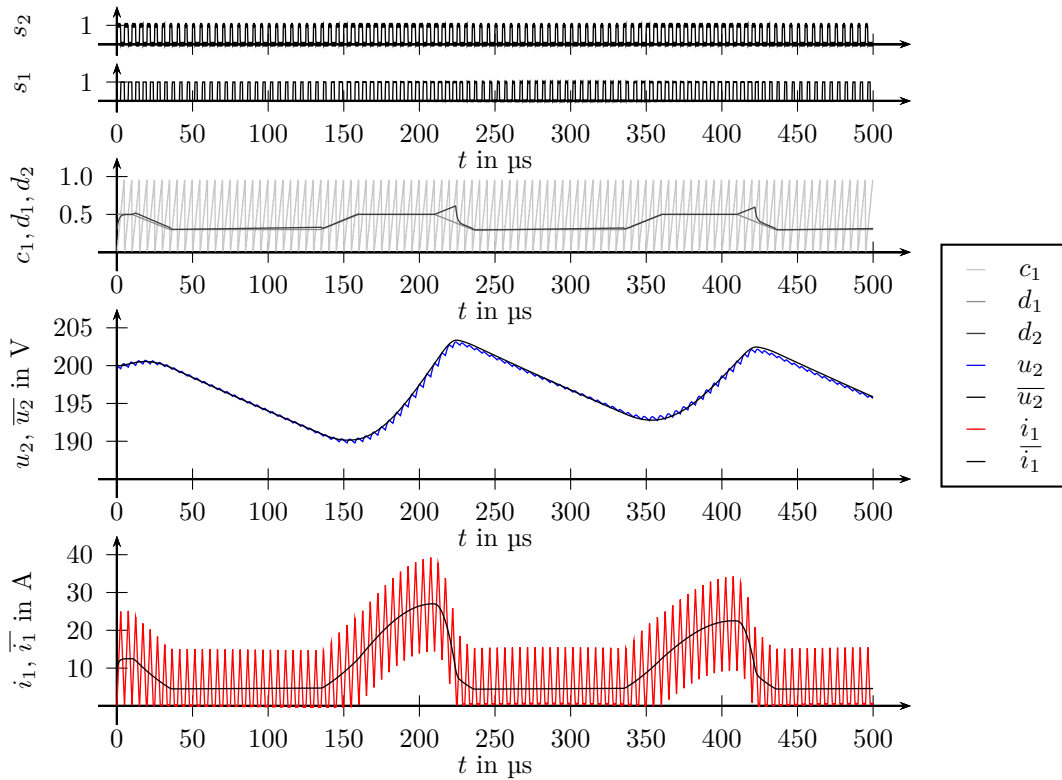


Abbildung 2.6: Vergleich zwischen schaltendem Modell (farbig) und dynamischem Mittelwertmodell (schwarz) eines Hochsetzstellers mit den Parametern aus Tabelle A.3

umformen. Dabei ist

$$k_D = \frac{2}{T_S} \frac{L}{u_1} \frac{\bar{i}_1}{\bar{u}_1} \quad (2.39)$$

eine Abkürzung und wird als Lückverhältnis bezeichnet. Gleichung 2.38 ist also eine algebraische Nebenbedingung für die Differentialgleichungen 2.21 und 2.22. Sie ist aufgrund der Betragsfunktion nichtlinear, zeigt aber über den gesamten Bereich d_1 stetiges Verhalten.

Abbildung 2.6 zeigt eine beispielhafte Auswertung des Differentiell-Algebraischen Gleichungssystems für einen vorgegebenen Verlauf von d_1 und dem sich ergebenden Verlauf von d_2 . Für den direkten Vergleich zwischen dynamischem Mittelwertmodell und schaltendem Modell wurde zudem die iterativ ermittelte Lösung des schaltenden Modells aus Gleichung 2.3 und 2.4 dargestellt. Wie zu erkennen, oszillieren die Ergebnisse des Schaltmodells sowohl für stromlückende als auch für lückefreie Schaltintervalle um die Verläufe des Mittelwertmodells herum. Rein qualitativ ist zu vermuten, dass die Ergebnisse des Mittelwertmodells für den Betrieb als Hochsetzsteller tatsächlich dem Verlauf des zeitlich lokalen Mittelwertes über eine Schaltperiode entspricht. Zur Quan-

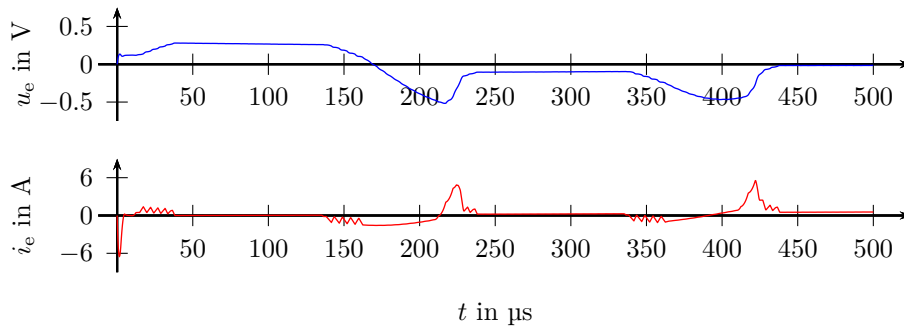


Abbildung 2.7: Darstellung der Abweichungen zwischen dynamischem Mittelwertmodell und numerisch ermitteltem gleitenden Mittelwert

Absolut		Relativ	
I_e	U_e	I_e	U_e
5,56 A	-515,22 mV	38,34 %	-0,10 %

Tabelle 2.1: Maximale Abweichungen zwischen Schalt- und Mittelwertmodell bezogen auf die Darstellung aus Abbildung 2.6

tifizierung zeigt Abbildung 2.7 die Differenz zwischen dem nachträglich berechneten zeitlich lokale Mittelwert von i_1 über eine Schaltperiode T_S und dem Ergebnis des dynamischen Mittelwertmodells. Die Stromabweichung beträgt zu Beginn der Auswertung einen Wert von $-6,12$ A. Das liegt jedoch maßgeblich daran, dass die Integrationskonstante bei der Bildung des zeitlich lokalen Mittelwertes mit einem Wert von Null initialisiert wurde. Nach dem Ablauf von einer Schaltperiodendauer ist die Abweichung verschwindend gering. Diese Abweichung ist also abhängig von der gewählten Initialisierung und wird deshalb nicht gewertet. Die maximale Stromabweichung beträgt demnach $5,56$ A und tritt bei ca. $420 \mu\text{s}$ auf. Dies entspricht einer relativen Abweichung von $38,34 \%$ bezogen auf den zeitlich lokalen Mittelwert. Für die Spannung ergibt sich eine maximale Abweichung von $-515,22$ mV, was einer relativen Abweichung von $-0,1 \%$ entspricht. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 2.1 zusammenfassend dargestellt.

2.2 Stationäres Verhalten

Das stationäre Verhalten eines Mittelwertmodells einer leistungselektronischen Schaltung ist dadurch definiert, dass sich Eingangsstrom und Eingangsspannung sowie Ausgangsstrom und Ausgangsspannung sich zeitlich nicht ändern. Die zeitlichen Ableitungen der Mittelwerte verschwinden und $i_1 = I_1$ bzw. $u_2 = U_2$ nehmen konstante Werte

an. Aufgrund der Leistungsbilanz und dem konstanten Ausgangsstrom I_3 muss Gleiches auch für u_1 , d_1 und d_2 gelten.

$$u_1 = \frac{U_2 I_3}{I_1} = U_1 \quad (2.40)$$

2.2.1 Betrieb als Synchronwandler

Für den Synchronwandler vereinfachen sich dadurch die Gleichungen 2.23 und 2.24. Es bleiben zwei algebraische Gleichungen,

$$0 = L \frac{\overline{i_1}}{dt} = U_1 - U_2 D_2 \quad (2.41)$$

$$0 = C \frac{\overline{u_2}}{dt} = I_1 D_2 - I_3, \quad (2.42)$$

welche durch

$$M_S = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_3} = \frac{1}{D_2} = \frac{1}{1 - D_1} \quad (2.43)$$

miteinander verknüpft sind. Dieser Ausdruck wird in der Leistungselektronik als Verstärkung des Synchronwandlers bezeichnet. Umfangreiche Analysen dieser Gleichungen sind in einschlägiger Grundlagenliteratur [7, 8] zu finden und werden daher nicht weiter ausgeführt.

2.2.2 Betrieb als Hochsetzsteller

Beim stationären Betrieb des Hochsetzstellers wird zwischen lückendem und lückfreiem Betrieb unterschieden. Dazu werden die Gleichungen 2.23, 2.24 und 2.38 zu

$$0 = L \frac{\overline{i_1}}{dt} = U_1 (D_1 + D_2) - U_2 D_2 \quad (2.44)$$

$$0 = C \frac{\overline{u_2}}{dt} = I_1 \frac{D_2}{D_1 + D_2} - I_3 \quad (2.45)$$

$$D_2 = \left(\frac{K_D}{D_1} - 2 D_1 + 1 \left| \frac{K_D}{D_1} - 1 \right| \right) \quad (2.46)$$

umgeformt. Die Gleichungen 2.44 und 2.45 geben dann die Verstärkung

$$M_S = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_3} = 1 + \frac{D_1}{D_2} \quad (2.47)$$

an. Durch Variation des Tastverhältnisses D_1 lässt sich aus M_S die sogenannte Steuerkennlinie ermitteln [12]. Eine beispielhafte Darstellung dieser Kennlinie ist in Abbildung 2.8 für verschiedene Lückverhältnisse zu sehen.

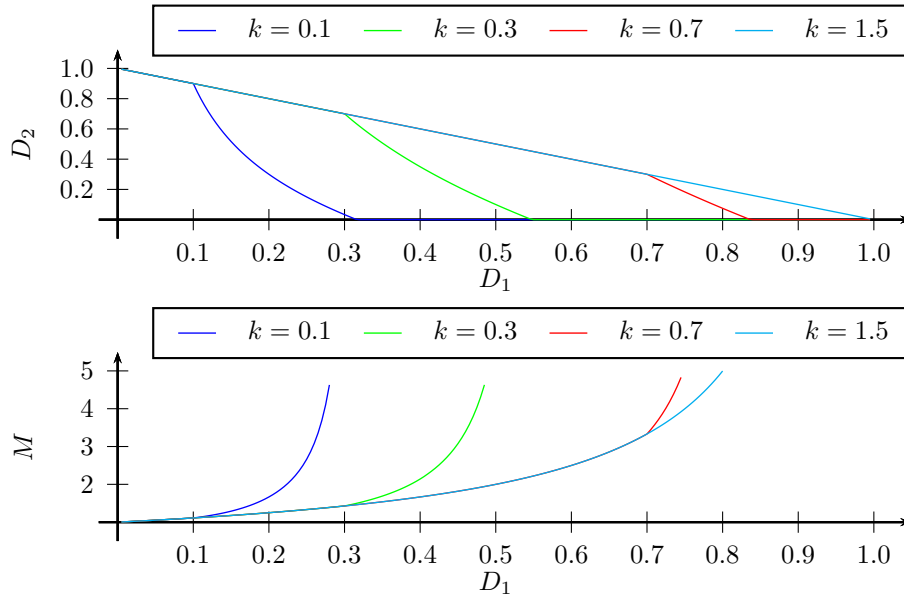


Abbildung 2.8: Tastverhältnis der Diodenleitzeit und Verstärkung des Hochsetzstellers im stationären Verhalten (konstante Spannungen und Ströme)

2.3 Netzfrendliche Stromaufnahme

Die Modellbildung der netzfrendlichen Stromaufnahme des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler nutzt das dynamische Mittelwertmodell aus Kapitel 2.1 zur geeigneten Abbildung von Eingangsstrom und Eingangsspannung. Die Wirkleistung P und die Scheinleistung S sind demnach durch

$$P := \frac{1}{T_N} \int_{T_N} \overline{u_1} \overline{i_1} d\tau \quad (2.48)$$

und

$$S := \frac{1}{T_N} \sqrt{\int_{T_N} \overline{u_1}^2 d\tau \int_{T_N} \overline{i_1}^2 d\tau} \quad (2.49)$$

definiert. Das Integrationsintervall entspricht dabei der Netzperiodendauer T_N . Aus dieser Definition ergibt sich der Leistungsfaktor direkt zu

$$\lambda := \frac{P}{S}. \quad (2.50)$$

Das Tastverhältnis d_2 ist die Steuergröße des Mittelwertmodells für den Betrieb mit Synchronwandler. Der Betrieb als Hochsetzsteller wird durch d_1 gesteuert. Um dem Gleichrichter eine netzfrendliche Betriebsführung einzuprägen, muss d_2 beziehungsweise d_1

so gewählt werden, dass λ möglichst groß beziehungsweise Wirkleistung und Scheinleistung

$$0 \leq S - P \quad (2.51)$$

möglichst gleich sind. Gleichzeitig müssen jedoch die Gleichungen 2.23 und 2.24 beziehungsweise 2.21, 2.22 und 2.38 sowie alle weiteren Beschränkungen aus Kapitel 2.1 erfüllt sein.

Zunächst lässt sich zeigen, dass der gleitende Mittelwert der Eingangsspannung $\overline{u_1}$ die Form

$$\overline{u_1} = \int_{t-\frac{T_S}{2}}^{t+\frac{T_S}{2}} u_1 d\tau = \hat{U}_{N1} \frac{\pi T_N}{T_S} \sin(\pi \frac{T_S}{T_N}) \sin(\omega_N t) = \hat{U}_{N1} \text{si}(T_S) \sin(\omega_N t) \quad (2.52)$$

annimmt. Da der Grenzwert der Kardinalsfunktion [58]

$$\lim_{T_S \rightarrow 0} \text{si}(T_S) = 1$$

aufgrund der Regel von Bernoulli-l'Hospital [10] existiert, gilt

$$\overline{u_1} \approx \hat{U}_{N1} \sin \omega_N t \quad (2.53)$$

als Annäherung der Gleichung 2.52 für den Fall $T_S \ll T_N$. Eingesetzt in Gleichung 2.51 ergibt sich daraus

$$0 \leq \frac{T_N}{2} \int_0^{T_N} \overline{i_1}^2 d\tau - \left(\int_0^{T_N} \overline{i_1} \sin(\omega_N t) d\tau \right)^2. \quad (2.54)$$

Wird $\overline{i_1}$ nun durch eine Fourier-Reihe approximiert, so lässt sich aufgrund der Parseval-schen Gleichung [10] zeigen, dass

$$S = P \quad (2.55)$$

gilt, wenn $\overline{i_1}$ durch

$$\overline{i_1} = \hat{I}_{N1} \sin(\omega_N t) \quad (2.56)$$

ausgedrückt wird. Sind $\overline{i_1}$ und $\overline{u_1}$ also sinusförmig und phasengleich, so gilt $\lambda = 1$ und der aufgenommene Stromverlauf der Gleichrichterschaltung wird als netzfreundlich bezeichnet.

2.3.1 Gleichrichterbetrieb mit Synchronwandler

Diese Zusammenhänge werden nun in das Mittelwertmodell des Synchronwandlers eingesetzt. Daraus folgt

$$\overline{u}_2 d_2 = \hat{U}_{N1} \sin(\omega_N t) - L \omega_N \hat{I}_{N1} \cos(\omega_N t) \quad (2.57)$$

$$C \frac{d\overline{u}_2}{dt} = \hat{I}_{N1} \sin(\omega_N t) d_2 - I_3, \quad (2.58)$$

dessen Lösung allerdings nicht zu jedem beliebigen Zeitpunkt eindeutig ist. Die Aussage aus Gleichung 2.57 kann in der Nähe von $t \approx 0$, unter den notwendigen Bedingungen $0 \leq d_2 \leq 1$ und $\overline{u}_2 \geq \overline{u}_1$, nicht zutreffend sein. Der minimale Zeitpunkt innerhalb von T_N ab dem das Gleichungssystem lösbar ist, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion. Der Zeitpunkt T_{\min} ist genau dort minimal, wo dieser Schnittpunkt einen minimalen Wert annimmt. Aufgrund der Randbedingungen ist dieses Minimum erreicht, sobald $d_2(T_{\min}) = 0$. Dieser Zeitpunkt wird durch Gleichung 2.57 mit

$$\omega_N T_{\min} = \arctan\left(\frac{L \omega_N \hat{I}_{N1}}{\hat{U}_{N1}}\right) \quad (2.59)$$

berechnet.

Zur vollständigen Lösung fehlen noch Startwert und Endwert von \overline{u}_2 . Die Bestimmung dieser Größen erfolgt nun iterativ mit einem direkten Suchverfahren und Barrierefunktionen [47], sodass

$$\min_{\overline{u}_2(T_{\min})} (\overline{u}_2(T_{\min}) - \overline{u}_2(T_N/2)) . \quad (2.60)$$

Zur Ermittlung eines geeigneten Startwertes für die Iteration wird die Energiebilanz der Eingangsgrößen \overline{u}_1 und \overline{i}_1 zu den Ausgangsgrößen \overline{u}_2 und I_3 betrachtet. Sofern zu den Zeitpunkten T_{\min} und $T_N/2$ der Energieinhalt der Speicherelemente L und C gleich ist, muss

$$0 = \int_{T_{\min}}^{\frac{T_N}{2}} \overline{u}_1 \overline{i}_1 d\tau - I_3 \int_{T_{\min}}^{\frac{T_N}{2}} \overline{u}_2 d\tau \quad (2.61)$$

gelten. Das linke Integral kann direkt aufgrund der Vorgaben zu

$$\frac{\hat{U}_{N1} \hat{I}_{N1}}{2} \left(1 + \frac{\sin(2 \omega_N T_{\min})}{2\pi - 2 \omega_N T_{\min}}\right) = I_3 \frac{2}{T_N - 2 T_{\min}} \int_{T_{\min}}^{\frac{T_N}{2}} \overline{u}_2 d\tau \quad (2.62)$$

gelöst werden. Für das verbleibende Integral der rechten Seite wird die Abkürzung

$$U_{2\text{Nom}} = \frac{2}{T_N - 2 T_{\min}} \int_{T_{\min}}^{\frac{T_N}{2}} \overline{u_2} d\tau \quad (2.63)$$

eingeführt. Diese Größe beschreibt die nominelle Ausgangsspannung des Gleichrichters. Für den Entwurf von Gleichrichterschaltungen ist der Wert dieser Spannung eine wichtige Größe. Sie wird häufig als Richtwert für die notwendige Spannungsfestigkeit der Leistungshalbleiter oder die notwendige Bemessungsspannung der Ausgangskondensatoren genutzt. Durch die Abkürzung aus Gleichung 2.63 kann Gleichung 2.62 zu

$$I_3 = \frac{\hat{U}_{N1} \hat{I}_{N1}}{2} \left(1 + \frac{\sin(2 \omega_N T_{\min})}{2\pi - 2 \omega_N T_{\min}} \right) \frac{1}{U_{2\text{Nom}}} \quad (2.64)$$

umgeformt werden. Demnach ist der Strom I_3 konstant. Damit ist das Modell zur Berechnung der Tastverhältnisse d_1 und d_2 bei netzfreundlicher Betriebsführung vollständig definiert.

Die Auswertung dieses Modells ist Abbildung 2.9 dargestellt. Beide Graphen zeigen die numerischen Lösungen von Mittelwert- und Schaltmodell für die Dauer einer Netzhalbperiode. Im Diagramm der oberen Bildhälfte ist zu erkennen, dass die Spannung u_2 oszillierend um die Spannung $\overline{u_2}$ schwankt. Demnach muss u_2 Oberschwingungen enthalten, welche in $\overline{u_2}$ nicht enthalten sind. Aufgrund der sehr geringen Schwankung lässt sich allerdings vermuten, dass die Amplituden der Oberschwingungen verschwindend gering sind. Die Grundschnitungen von $\overline{u_2}$ und u_2 sollten also gleiche Amplituden und Phasenlagen besitzen. Das Diagramm der unteren Bildhälfte zeigt die Ströme i_1 und $\overline{i_1}$. Für beide Ströme lässt sich ebenfalls vermuten, dass die Amplituden und Phasenlagen jeweils gleich sind. Allerdings kann diese Vermutung aufgrund der hohen Schwankung von i_1 um $\overline{i_1}$ nicht rein visuell überprüft werden. Um die Vermutungen zu quantifizieren, werden alle Größen aus Abbildung 2.9 durch die Sinusfunktionen

$$i_1 = \hat{I}_S \sin(\omega_N t + \mu_S) \quad (2.65)$$

$$\overline{i_1} = \hat{I}_M \sin(\omega_N t + \mu_M) \quad (2.66)$$

und

$$u_2 = \hat{U}_S \sin(2 \omega_N t + \alpha_S) \quad (2.67)$$

$$\overline{u_2} = \hat{U}_M \sin(2 \omega_N t + \alpha_M) \quad (2.68)$$

angenähert. Tabelle 2.2 zeigt die Auswertung der Approximation. Die Phasenlagen sind in Tabelle 2.3 dargestellt. Werden die Amplitudendifferenzen aus der dritten und sechs-

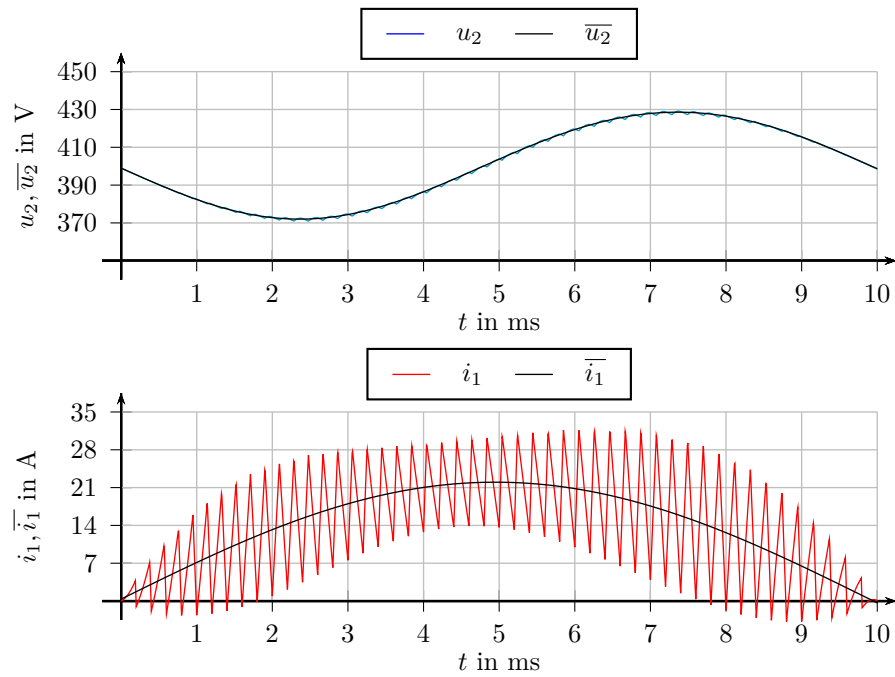


Abbildung 2.9: Darstellung von Eingangsstrom und Ausgangsspannung des Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler und den Parametern aus Tabelle A.4

\hat{U}_S	\hat{U}_M	$\hat{U}_M - \hat{U}_S$	\hat{I}_S	\hat{I}_M	$\hat{I}_M - \hat{I}_S$
28,219 V	28,237 V	188 mV	21,971 A	22 A	29 mA

Tabelle 2.2: Amplituden der Größen aus Abbildung 2.9

α_S	α_M	$\alpha_M - \alpha_S$	μ_S	μ_M	$\mu_M - \mu_S$
$-4,872^\circ$	$-4,978^\circ$	$0,106^\circ$	-4°	$-3,65^\circ$	$-0,35^\circ$

Tabelle 2.3: Phasenlagen der Größen aus Abbildung 2.9

ten Spalte auf die jeweiligen Amplituden von \hat{U}_S und \hat{I}_S bezogen, ergeben sich prozentuale Abweichungen von weniger als 0,7 %. Bezogen auf die Netzperiode T_N entsprechen die beiden Phasendifferenzangaben einem prozentualen Wert von weniger als 0,1 %. Dieses Model wird auf einem handelsüblichen Heimrechner innerhalb von 115 ms berechnet. Im Vergleich dazu benötigt die Simulation eines Mittelwertmodells aus [61] mit geregelter Eingangsstrom und geregelter Ausgangsspannung ein Vielfaches länger. Die Angabe einer konkreten Zeitersparnis ist jedoch schwierig, da die Anfangswertbedingungen des geregelten Mittelwertmodells den Zeitpunkt des eingeschwungenen Zustands und damit die Dauer der Simulation stark beeinflussen. Daher ist festzuhalten, dass die Simulationsdauer des geregelten Mittelwertmodells bei allen Vergleichsmessungen nie einen Wert von 115 ms unterschritten hat.

2.3.2 Gleichrichterbetrieb mit Hochsetzsteller

Beim Gleichrichterbetrieb mit Hochsetzsteller werden die Bedingungen für $\bar{\lambda}_N = 1$ in die Gleichungen 2.21, 2.22 und 2.38 eingesetzt. Daraus folgt

$$\bar{u}_2 d_2 = \hat{U}_{N1} \sin(\omega_N t) (d_1 + d_2) - L \omega_N \hat{I}_{N1} \cos(\omega_N t) \quad (2.69)$$

$$C \frac{d\bar{u}_2}{dt} = \hat{I}_{N1} \sin(\omega_N t) \frac{d_2}{d_1 + d_2} - I_3 \quad (2.70)$$

$$d_2 = \left(\frac{k_N}{d_1} - 2 d_1 + 1 - \left| \frac{k_N}{d_1} - 1 \right| \right) \frac{1}{2} \quad (2.71)$$

mit

$$k_N = \frac{2 L \hat{I}_{N1}}{T_S \hat{U}_{N1}}. \quad (2.72)$$

Dieses Gleichungssystem ist ebenfalls nicht zu jedem Zeitpunkt lösbar. Aufgrund der Randbedingungen ist die minimale Startzeit jedoch ebenfalls erreicht, wenn $d_2(T_{\min}) = 0$. Zur Bestimmung dieses Zeitpunktes wird Gleichung 2.69 zu

$$\omega_N T_{\min} = \arctan \left(\frac{k_N \omega_N T_S}{2 d_1(T_{\min})} \right) \quad (2.73)$$

umgeformt. Das Tastverhältnis d_1 an der Stelle T_{\min} muss allerdings numerisch berechnet werden, da

$$0 = \left(\frac{k_N}{d_1(T_{\min})} - 2 d_1(T_{\min}) + 1 - \left| \frac{k_N}{d_1(T_{\min})} - 1 \right| \right) \quad (2.74)$$

nicht explizit nach $d_1(T_{\min})$ aufgelöst werden kann.

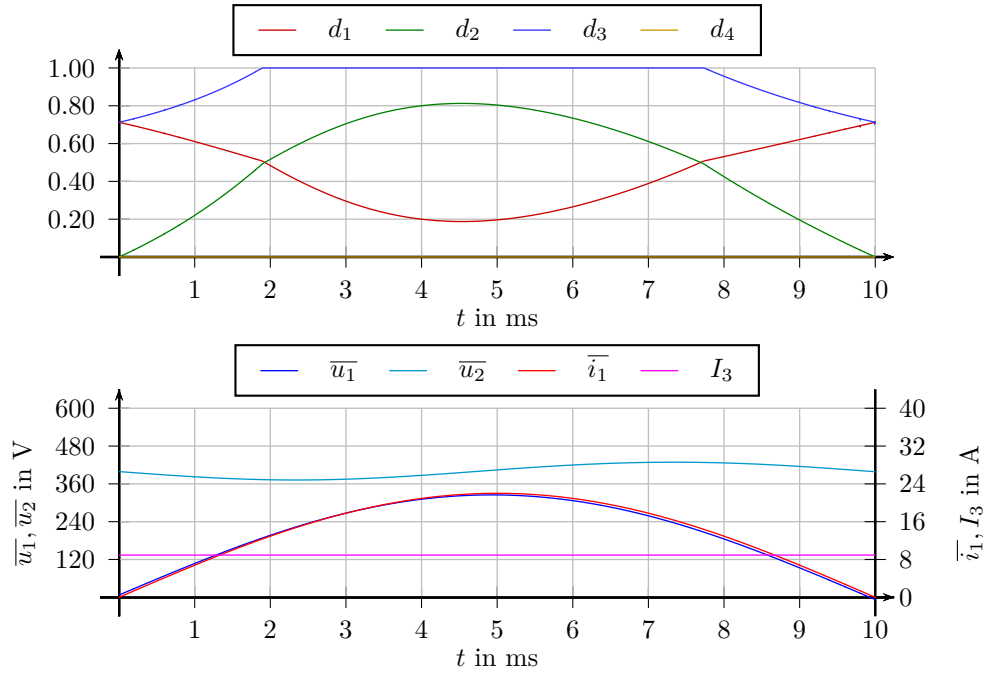


Abbildung 2.10: Auswertung des Modells zur netzfreundlichen Betriebsführung mit den Parametern aus Tabelle A.4

Abbildung 2.10 zeigt eine Auswertung dieses Modells mit den Parametern aus Tabelle A.4. Zur Verkürzung der Berechnungsdauer wurde die Auswertung unter den Bedingungen $\overline{u_1} > 0$ und $\overline{i_1} \geq 0$ durchgeführt. Zur Auswertung unter den Bedingungen $\overline{u_1} < 0$ und $\overline{i_1} < 0$ müssen lediglich die Rollen von s_1 und s_2 sowie s_3 und s_4 vertauscht werden. Abgesehen der Vorzeichen von $\overline{u_1}$ und $\overline{i_1}$ ändert sich allerdings nichts an den Verläufen von $\overline{u_2}$ und I_3 und eine Auswertung unter diesen Bedingungen enthält somit keine neuen Informationen. Das Diagramm in der unteren Bildhälfte zeigt die Verläufe der Ein- und Ausgangsgrößen. Eingangsstrom $\overline{u_1}$ und Eingangsspannung $\overline{i_1}$ verlaufen mit leichtem Phasenversatz. Nach Gleichung 2.73 beträgt der Phasenversatz für diesen Anwendungsfall ungefähr $71,21 \mu\text{s}$. Die Ausgangsspannung $\overline{u_2}$ startet und endet bei jeweils ungefähr $399,24 \text{ V}$ und pendelt um die nominelle Ausgangsspannung von 400 V . Die Schwankungsbreite der Spannung $\overline{u_2}$ beträgt circa 60 V und reicht von ungefähr 370 V bis zu 430 V . Das obere Diagramm zeigt die Tastverhältnisse aller Schalter des Gleichrichters. Sie verdeutlichen, dass der Gleichrichter beim durchlaufen einer Netzhalfperiode sowohl im lückenden als auch im lückfreien Betrieb arbeitet. Das lässt sich besonders einfach am Verlauf des Tastverhältnisses d_3 erkennen. Sofern der Gleichrichter im lückenden Betrieb arbeitet ist die Ungleichung

$$d_3 = d_1 + d_2 < 1$$

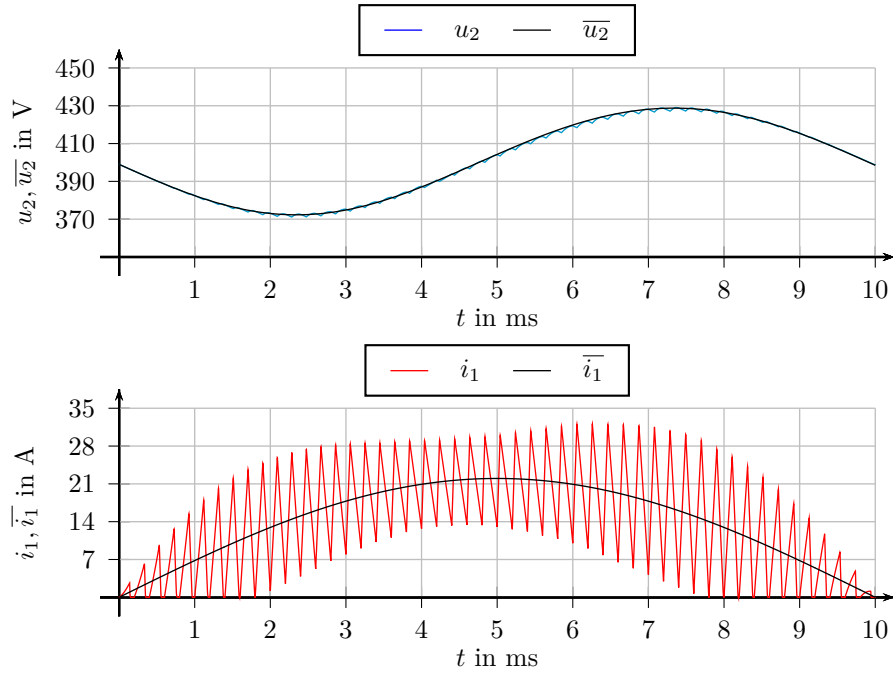


Abbildung 2.11: Validierung der Steuergrößen d_1 bis d_4 aus Abbildung 2.10 anhand eines Schaltmodells mit den Parametern aus Tabelle A.4

\hat{U}_S	\hat{U}_M	$\hat{U}_M - \hat{U}_S$	\hat{I}_S	\hat{I}_M	$\hat{I}_M - \hat{I}_S$
27,971 V	28,159 V	188 mV	22,010 A	22 A	10 mA

Tabelle 2.4: Amplituden der Größen aus Abbildung 2.11

erfüllt. Während des lückfreien Betriebes ist

$$d_3 = d_1 + d_2 = 1$$

und verläuft konstant. Weiterhin ist zu erkennen, dass alle dargestellten Größen asymmetrisch um den Zeitpunkt 5 ms verlaufen. Die Asymmetrie entsteht durch die Rückwirkung der Spannung \bar{u}_2 auf den Eingangsstrom \bar{i}_1 aufgrund des Tastverhältnisses d_3 .

Zur visuellen Beurteilung dieses Modells wurden die Schaltsignale $s_1 \dots s_4$ aus den Verläufen der Tastverhältnisse generiert und zusammen mit einem schaltenden Modell des Gleichrichters simuliert. Das Ergebnis dieser Simulation ist zusammen mit der Lösung des Mittelwertmodells aus dem vorangegangenen Diagramm in Abbildung 2.11 dargestellt. Tabelle 2.4 zeigt die Auswertung der Approximation mit Sinusfunktionen. Die Phasenlagen sind in Tabelle 2.5 dargestellt. Werden die Amplitudendifferenzen aus der dritten und sechsten Spalte auf die jeweiligen Amplituden von \hat{U}_S und \hat{I}_S bezogen, ergeben sich prozentuale Abweichungen von weniger als 0,6 %. Bezogen auf die Netzspe-

α_S	α_M	$\alpha_M - \alpha_S$	μ_S	μ_M	$\mu_M - \mu_S$
$-5,222^\circ$	$-5,663^\circ$	$-0,441^\circ$	$-2,524^\circ$	0°	$2,524^\circ$

Tabelle 2.5: Phasenlagen der Größen aus Abbildung 2.11

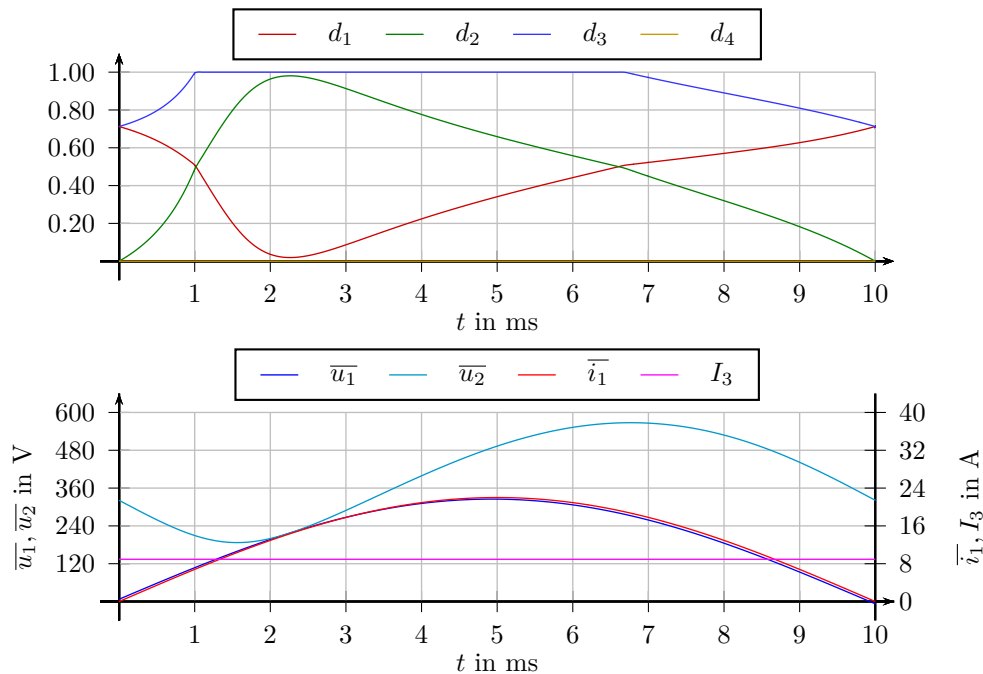


Abbildung 2.12: Auswertung des Modells zur netzfreundlichen Betriebsführung mit den Parametern aus Tabelle A.4

riode T_N entsprechen die beiden Phasendifferenzangaben einem prozentualen Wert von weniger als 0,7 %. Obwohl diese Abweichungen größer sind als die Abweichungen beim Betrieb mit Synchronwandler, bewegen sich die Werte dennoch in einem akzeptablen Bereich. Auf die weitere Analyse der Abweichungen wird nicht weiter eingegangen, da Amplituden- und Phasendifferenz innerhalb der Messunsicherheit von gängigen Messgeräten elektrischer Wechselgrößen liegen.

Stattdessen sei dem Leser die Anwendbarkeit der Modells zur netzfreundlichen Betriebsführung anhand eines weiteren Beispiels demonstriert. Aufgrund von Gleichung 2.70 erhöht sich die Schwankungsbreite, sofern die Ausgangskapazität C verkleinert wird und umgekehrt. Sofern die Ausgangskapazität in etwa einem siebten Teil der Kapazität aus Tabelle A.4 beträgt, alle anderen Parameter aber unverändert bleiben, ergibt die Auswertung des dynamischen Mittelwertmodells die in Abbildung 2.12 dargestellten Verläufe. Eine Symmetrie ist anhand der Tastverhältnisse kaum noch zu erkennen. Lediglich deren Anfangs- und Endwerte stimmen noch in etwa überein. Die Schwankungs-

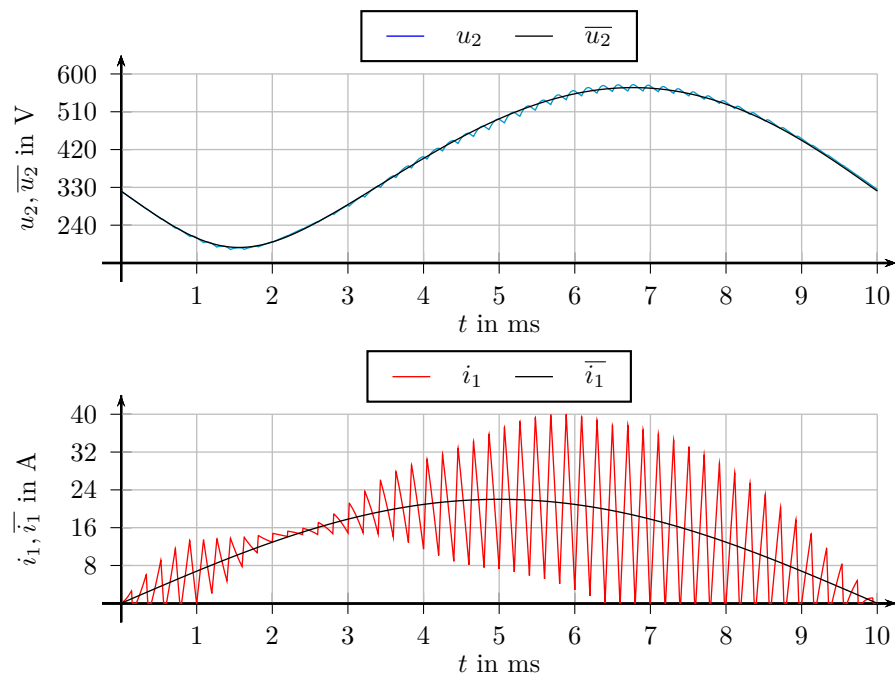


Abbildung 2.13: Validierung des Modells zur netzfreundlichen Betriebsführung anhand eines Schaltmodells mit den Parametern aus Tabelle A.4

\hat{U}_S	\hat{U}_M	$\hat{U}_M - \hat{U}_S$	\hat{I}_S	\hat{I}_M	$\hat{I}_M - \hat{I}_S$
184,976 V	184,443 V	-533 mV	22,084 A	22 A	84 mA

Tabelle 2.6: Amplituden der Größen aus Abbildung 2.13

breite der Spannung $\overline{u_2}$ ist deutlich erhöht und beträgt nun circa 400 V und reicht von 180 V bis zu einem maximalen Wert von ungefähr 580 V. Gegenüber der Auswertung aus Abbildung 2.10 wurde die Schwankungsbreite fast um den Faktor 7 erhöht. Zudem sei angemerkt, dass bei diesem Beispiel die Ausgangskapazität so klein wie möglich gewählt wurde und die Verläufe von $\overline{u_1}$ und $\overline{u_2}$ sich bei ungefähr 2 ms annähernd berühren. Würde die Kapazität des Kondensators C fortwährend verkleinert werden, würde $\overline{u_2}$ die Spannung $\overline{u_1}$ unterschreiten und die Gültigkeit des dynamischen Mittelwertmodells wäre nicht mehr gegeben. Werden die Verläufe der Tastverhältnisse, wie bereits zuvor, dem geschalteten Modell des Gleichrichters als Steuergrößen vorgegeben, entstehen die Verläufe aus Abbildung 2.13. Insbesondere bei der Betrachtung des Stromes i_1 lässt sich kaum noch vermuten, dass die Amplitude der Grundschiwingung von i_1 der Amplitude von $\overline{i_1}$ entspricht. Dennoch zeigen die Auswertungen in Tabelle 2.6 bzw. 2.7, dass auch hier die Amplituden und Phasenlagen aller vergleichbaren Größen sehr dicht beieinander liegen. Bei den Amplitudendifferenzen ergeben sich auch hier prozentuale

α_S	α_M	$\alpha_M - \alpha_S$	μ_S	μ_M	$\mu_M - \mu_S$
$-28,953^\circ$	$-29,507^\circ$	$-0,554^\circ$	$-2,705^\circ$	0°	$2,705^\circ$

Tabelle 2.7: Phasenlagen der Größen aus Abbildung 2.13

Abweichungen von weniger als 0,6 %, während die Phasendifferenzen, bezogen auf die Netzperiodendauer, weniger als 0,8 % beträgt.

Dieses Model wird auf einem handelsüblichen Heimrechner innerhalb von 271 ms berechnet. Damit benötigt die Berechnung für den Betrieb als Hochsetzsteller ca. 2,4 mal länger als die Berechnung für den Betrieb als Synchronwandler. Eine vergleichende Angabe der Rechendauer eines geregelten Mittelwertmodells ist allerdings schwierig, da die Stromregelung, insbesondere aufgrund des nicht linearen Übergangs zwischen lückenden und nicht lückenden Schaltintervallen, zusätzliche Einschwingzeit benötigt [14]. Dennoch bleibt festzuhalten, dass die Simulationsdauer des geregelten Mittelwertmodells bei allen Vergleichsmessungen nie einen Wert von 271 ms unterschritten hat.

2.4 Zusammenfassung

Nach aktueller Lage der Literatur werden die physikalischen Eigenschaften von Synchrongleichrichtern mit integriertem Hochsetzsteller, die sowohl als Synchronwandler als auch als Hochsetzsteller betrieben werden können, durch ideale Schalt- und daraus erzeugte Mittelwertmodelle beschrieben. Es gibt jedoch bisher noch keinerlei wissenschaftliche Auseinandersetzung oder Analyse, wie anhand dieser Modelle die geforderte netzfreundliche Stromaufnahme der Gleichrichterschaltungen modelliert werden kann. Am häufigsten werden beide Modelle dazu um eine Regelung von Eingangsstrom und Ausgangsspannung der Schaltung erweitert. Das führt jedoch zu hohem Rechenaufwand, da insbesondere schwer einzuschätzende Anfangswertbedingungen zu langen Simulationszeiten führen. Dieses Kapitel zeigt daher eine effiziente Vorgehensweise zur Generierung geeigneter Schalt- und Mittelwertmodelle, um die netzfreundliche Stromaufnahme eines Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler mit möglichst wenig Rechenaufwand abzubilden. Dabei wird sowohl der Betrieb als Synchronwandler als auch der Betrieb als Hochsetzsteller berücksichtigt. Das Schaltmodell dieser Gleichrichterschaltung ist allgemein gültig und ergibt sich unabhängig davon, ob die Schaltung als Synchronwandler oder als Hochsetzsteller betrieben wird. Bei der Mittelwertmodellbildung werden hingegen zwei unterschiedliche Ansätze diskutiert, da die Berücksichtigung von stromlückenden Schaltintervallen beim Betrieb als Hochsetzsteller zusätzliche Skalierungen erfordert, welche für den Betrieb als Synchronwandler nicht notwendig ist. In realen Schaltungen werden beide Betriebsarten zur Einprägung der netzfreundlichen Stromaufnahme genutzt, da sie wirtschaftliche Auslegungen erlauben.

Zunächst wird dargestellt, dass die schaltenden Eigenschaften von realen leistungselektronischen Bauteilen, wie beispielsweise MOSFETs, IGBTs oder Dioden, durch sprungförmig verlaufende Schaltfunktionen abgebildet werden und das dadurch unterschiedliche Modelle des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler entstehen. Diese Annahme impliziert, dass während eines Umschaltvorgangs keine Verluste entstehen, weshalb das Schaltmodell kein Dämpfungsterm beinhaltet und sich somit keine Ruhelage einstellen kann. Der wesentliche Vorteil liegt in der Reduktion des Rechenaufwands, da zum einen die fehlende Dämpfung nicht mitgerechnet werden muss und zum anderen zusätzliche Stützstellen für die realitätsgetreue Abbildung der Umschaltvorgänge entfallen.

Im nächsten Schritt wird die Transformation der Differentialgleichungen des Schaltmodells in ein Mittelwertmodell gezeigt und beschrieben. Diese Transformation beruht auf der Bildung des gleitenden Mittelwertes des Schaltmodells. Da dieses Modell keine sprungförmigen Schaltfunktionen mehr enthält, sondern nur noch durch deren Tastverhältnis beschrieben wird, reduziert sich der Rechenaufwand zur Generierung von Stützstellen. Mit dem Mittelwertmodell lassen sich prinzipbedingte Schalteigenschaften der Gleichrichterschaltungen, wie beispielsweise Strom- oder Spannungsschwankungsbreite des Eingangsstromes beziehungsweise der Ausgangsspannung, nicht mehr abbilden. Je nach Anwendungsfall ist dies jedoch auch nicht zwingend erforderlich. Beispielsweise wird für den Entwurf einer Regelung des Eingangsstromes die Information der Stromschwankungsbreite nicht benötigt, während für den Entwurf einer Netzfilterschaltung diese Information wichtig ist. Aus diesem Grund wird gezeigt, dass die Ergebnisse des Schaltmodells anhand der Tastverhältnisse des Mittelwertmodells und einer Pulsweitenmodulation rekonstruiert werden können.

Der Zusammenhang der Tastverhältnisse zwischen Einschalt- und Ausschaltzeit ist für den Betrieb als Synchronwandler sehr einfach, da diese Betriebsart keine stromlückenden Schaltintervalle zulässt. Deshalb ist die Rekonstruktion der Schaltfunktionen des Schaltmodells nicht besonders aufwändig. Für den Betrieb als Hochsetzsteller ist dieser Zusammenhang etwas komplizierter, weil die Leitzeit der Diode, im Falle eines stromlückenden Schaltintervalls, von der zuvor eingestellten Leitzeit des aktiven Schalters abhängt. Da bei dieser Betriebsart sowohl lückende als auch lückfreie Schaltintervalle durchlaufen werden, wird ein nichtlinearer algebraischer Zusammenhang hergeleitet, der es erlaubt, die Fallunterscheidung zwischen lückendem und lückfreien Schaltintervall zu eliminieren. Die Validierung zeigt die vergleichende Gegenüberstellung der Auswertung des Mittelwertmodells mit dem gleitenden Mittelwertverlauf des Schaltmodells. Die Analyse der Abweichungen zwischen Schalt- und Mittelwertmodell ergibt in diesem Zusammenhang einen maximalen Wert von 38,34 %, jedoch mit dem Hinweis, dass dieses Ergebnis stark von den Anfangsbedingungen der Simulation abhängen, dessen Auswirkung auf das Simulationsergebnis nicht quantifiziert werden kann.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zeigt die Modellbildung der netzfreundlichen

Stromaufnahme. Diese wird dadurch definiert, dass der Zusammenhang zwischen Eingangsspannung und Eingangsstrom des Mittelwertmodells durch das Ohmsche Gesetz beschrieben werden kann. Grundsätzlich bildet das Mittelwertmodell die Arbeitsgrundlage und die Annahme eines sinusförmigen Verlaufs der Eingangsspannung wird hinzugezogen. Dadurch lassen sich die Differentialgleichungen des Mittelwertmodells zu einer Kombination aus algebraischen Gleichungen und einer Integralgleichung vereinfachen und so Rechenaufwand einsparen. Für die Auswertung wird jedoch ein iteratives Verfahren eingeführt, da der Anfangswert der Ausgangsspannung zur Berechnung der Integralgleichung benötigt wird. Ein Startwert für die Iterationen wird anhand des Leistungsgleichgewichts hergeleitet. Dadurch und aufgrund der Periodizität von Eingangsspannung und Eingangsstrom ist es dann möglich, die Simulationsdauer auf die Dauer einer halben Netzperiode zu beschränken. Der eingeschwungene Zustand wird innerhalb der Simulationsdauer also nicht mehr ermittelt, sondern ist bereits während der ersten Netzhälfte vorhanden. Auf einem handelsüblichen Heimrechner konnte so die Rechendauer für den Betrieb als Synchronwandler auf ein Minimum von 115 ms reduziert werden. Für den Betrieb als Hochsetzsteller ergab sich eine Rechendauer von 271 ms. Die Validierung zeigt eine vergleichende Gegenüberstellung der Auswertung des Mittelwertmodells mit dem gleitende Mittelwertverlauf des Schaltmodells. Die Abweichungen zwischen Schalt- und Mittelwertmodell liegen in allen exemplarischen Darstellungen jeweils unterhalb von 1 %.

Als Fazit bleibt festzustellen, dass der netzfreundliche Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler durch die Anwendung des Mittelwertmodells sehr schnell und mit ausreichender Genauigkeit entworfen werden kann. Entfallene Informationen, wie zum Beispiel Strom- und Spannungsschwankungsbreiten, welche für die Auswahl geeigneter Bauteile benötigt werden, können sehr einfach durch Kombination der Tastverhältnisse des Mittelwertmodells mit der Pulsweitenmodulation des Schaltmodells rekonstruiert werden.

Kapitel 3

Netzfilter

Bedingt durch die periodische Arbeitsweise der elektrischen Verbraucher, werden die gemessenen Störgrößen üblicherweise in ihre harmonischen Spektralanteile zerlegt und mit den einzuhaltenden Grenzwerten verglichen und bewertet. Im unteren Frequenzbereich¹ breiten sich die Störemissionen im elektrischen Gerät entlang der leitenden Verbindungen als sogenannte leitungsgebundene Störungen aus. Darüber hinaus können einzelne Leitungsabschnitte aufgrund der schnellen transienten Vorgänge bereits als Antennen wirken und es kommt zur Störstrahlung. Diese elektromagnetischen Strahlungserscheinungen werden aufgrund des komplexen Aufbaus leistungselektronischer Schaltungen meist mit der Hilfe von rechenintensiven, numerischen Berechnungsverfahren modelliert [52]. Daraus resultieren häufig Designvorschriften für die geometrische Anordnung elektrisch aktiver und passiver Komponenten einer Schaltung. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch nicht die geometrische Aufbauoptimierung eines elektrischen Gerätes ausgearbeitet, sondern vielmehr der geeignete elektrische Entwurf eines Netzfilters diskutiert und somit der Fokus auf die Analyse von leitungsgebundenen Störemissionen gelegt.

In vielen Publikationen wird der systematische Entwurf eines Netzfilters zur Unterdrückung leitungsgebundener Störungen üblicherweise in zwei Schritte unterteilt [54, 42]. Im ersten Schritt wird die Ursache der Störung, also die Störquelle, identifiziert, charakterisiert und dessen leitungsgebundene Ausbreitung analysiert. Daraus ergibt sich üblicherweise ein Ersatzschaltbild der leistungselektronischen Schaltung, welches, neben den aktiv schaltenden Bauteilen, zusätzlich kapazitive und induktive Bauelemente zur Berücksichtigung elektrischer und magnetischer Kopplungsmechanismen enthält. Dazu gehören beispielsweise die magnetische Kopplungen zwischen Leiterbahnabschnitten oder Ladungsverschiebungen im geerdeten, leitfähigen Gehäuse des Gerätes durch eng an das Gehäuse fixierte Bauteile. Im zweiten Schritt wird das Ersatzschaltbild um die Schaltung des gewünschten Netzfilters erweitert und anschließend zusammen analysiert.

¹üblicherweise zwischen 150 kHz und 30 MHz

In [41, 20] wird der Eingangsstrom eines leistungselektronischen Gerätes ohne Netzfilter als Störsignal für das angeschlossene Versorgungsnetz aufgefasst. Das gesamte elektrische Störverhalten wird dann durch eine ideale elektrische Signalquelle dargestellt, dessen Spektrum dem des Eingangsstromes entsprechen soll. Da bei dieser Methode die Ströme in beiden Zuleitungen der Gleichrichterschaltung den gleichen Betrag haben, wird beim Netzfilterentwurf nur die sogenannte Gegentaktstöremission des Gerätes gezielt gedämpft. Die gezielte Unterdrückung sogenannter Gleichtaktemissionen² wird nicht durchgeführt.

Sofern der reale Aufbau der leistungselektronischen Schaltung bereits existiert, ist es denkbar, das Störverhalten durch Auswertung von gemessenem Eingangsstrom und gemessener Eingangsspannung als Eingangsimpedanz zu beschreiben. Dabei wird häufig zwischen der sogenannten Gleichtakt- und Gegentaktimpedanz unterschieden, wodurch sich unterschiedliche Ersatzschaltbilder für den Entwurf des Netzfilters ergeben [67, 11]. Die praktische Durchführung dieser Methode zeigt jedoch, dass die Messung von Strom und Spannung innerhalb der bestehenden Schaltung aufgrund von unzureichender Zugänglichkeit mit hohem Aufwand verbunden oder schlichtweg nicht durchführbar ist. Um dennoch sinnvoll messen zu können, ist eine Anpassung der Schaltung unumgänglich. Damit hat die Messung Einfluss auf das elektrische Verhalten der Schaltung. Dieser unerwünschte Effekt lässt sich vermeiden, indem anhand der gegebenen Schaltung zunächst ein Impedanzmodell aufgestellt und abgeschätzt wird. Anschließend erfolgt die Parametrisierung dieses Modells anhand der Messung von gut zugänglichen Signalen. Sofern die Schaltung noch nicht aufgebaut sein sollte, kann das geschätzte Impedanzmodell natürlich auch direkt für den Netzfilterentwurf verwendet werden [65]. Dabei lässt sich die Entwurfsmethode nach gezielter Unterdrückung von Gleich- und/oder Gegentakstörungen unterscheiden [40]. Grundsätzlich muss jedoch die komplexe Wechselstromanalyse des Impedanzmodells inklusive Netzfilter und Netznachbildung durchgeführt werden.

Wie in [44, 29] gezeigt, ist die Bildung eines Impedanzmodells zur Charakterisierung der Störemissionen und zur Erstellung eines Ersatzschaltbildes nicht zwingend erforderlich. Sofern die zeitlichen Spannungsänderungen an leistungselektronischen Bauteilen durch ideale Spannungsquellen nachgebildet werden, lassen sich die entstehenden Störungen von leistungselektronischen Konvertern relativ gut nachbilden. Jedoch wird die Analyse und Verifikation nur für Gleichstromwandler, also leistungselektronische Schaltungen mit festem Tastverhältnis und konstanter Eingangs- und Ausgangsspannung, durchgeführt. In [35, 50, 51] wird der Spannungsverlauf der idealen Störspannungsquelle anhand der Simulation einer geregelten Gleichrichterschaltung generiert und anschließend durch eine Fourierreihe dargestellt. Zusammen mit dem Ersatzschaltbild des Netzfilters wird daraus das Spektrum des Gleichtaktstromes berechnet

²Ein Störsignal, welches dem Netz über beide Zuleitungen entnommen und über das mit dem Schutzleiter verbundenen Gerätegehäuse zurückgeführt wird

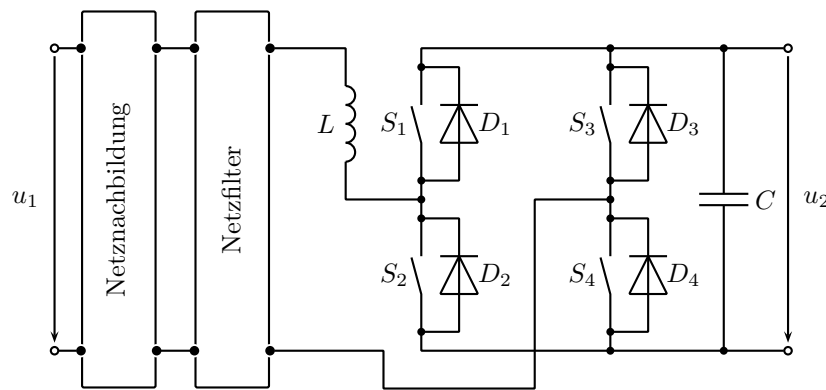


Abbildung 3.1: Beispielhafte Darstellung einer Gleichrichterschaltung mit integriertem Synchronwandler, dem vorgeschalteten Netzfilter und einer Netznachbildung

und bewertet. Das Ergebnis beruht jedoch auf der Simulation des schaltenden Verhaltens der Gleichrichterschaltung beziehungsweise auf der Auswertung vieler Stützstellen des Schaltmodells. Wie bereits in Kapitel 2 erläutert ist diese Auswertung sehr rechenintensiv und daher nicht für einen effizienten Entwurf einer Netzfilterschaltung geeignet. Es wurde jedoch ebenfalls gezeigt, dass die Spannungsverläufe des Schaltmodells auch anhand des weitaus weniger rechenintensiven Mittelwertmodells rekonstruiert werden können. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Auswertung des Mittelwertmodells zur netzfreundlichen Stromaufnahme und die Methode zur Approximation der Störspannung aus [44] zurückgegriffen und deren Kombination zur Störquellenmodellierung eines netzfreundlich arbeitenden Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler angepasst. Dabei werden sowohl der Betrieb als Synchronwandler als auch der Betrieb als Hochsetzsteller berücksichtigt. Für den Entwurf des Netzfilters werden dann die Übertragungsfunktionen von den Störquellen über Netzfilter bis zu den festgelegten Messpunkten der Netznachbildung direkt anhand der komplexen Wechselstromrechnung ermittelt. Die besondere Herausforderung besteht darin, ein möglichst einfaches numerisches Modell zur Bestimmung der Störpegel zu generieren, welches mit möglichst geringem Rechenaufwand zu einem geeigneten Filterentwurf führt.

Die Messung der Störemissionen erfolgt über gesetzlich festgelegte Messschaltungen, sogenannte Netznachbildungen, und mit standardisierten Messgeräten [52]. Abbildung 3.1 zeigt eine beispielhafte Anordnung eines solchen Aufbaus. Dabei ist Messwert-erfassung und Umformung gemäß der zugrunde gelegten Standards nicht dargestellt. Während einer realen Messung wird üblicherweise ein abstimmbares Bandpassfilter über das an der Netznachbildung abgegriffene Messsignal gelegt, wodurch die Frequenzauflösung, insbesondere bei analoger Messwert-erfassung, sehr kleine Werte annehmen kann. Im digitalen Fall wird die Frequenzauflösung durch die Abtast- und die Messwert-erfassung

nahme eingestellt³. Mit zunehmender Obergrenze für den Frequenzmessbereich wächst also die Anzahl der aufgenommenen Messdaten und damit der benötigte Speicher- und Rechenaufwand. Im Falle der numerischen Simulation des Schaltmodells müssen sogar Stützstellen mit mindestens doppelter Abtastfrequenz generiert werden. Das führt zu einer großen Menge an Daten, dessen Verarbeitung nicht zu einem möglichst einfachen Entwurf des Netzfilters führen. Aus diesem Grund wird die Obergrenze des Frequenzmessbereichs, beziehungsweise der Auflösung, auf maximal 1 MHz begrenzt.

3.1 Störquellen und Störpfade

Störemissionen von leistungselektronischen Geräten, welche eine Gleichrichterschaltung mit integriertem Synchronwandler beinhalten, entstehen durch schnelle, transiente Ausgleichsvorgänge zwischen den Energiespeichern. Diese Vorgänge werden überwiegend durch das Umschalten der leistungselektronischen Schalter verursacht und können deshalb als Störquelle bezeichnet werden. Zur Modellierung und Charakterisierung dieser Störquellen werden zunächst alle relevanten Energiespeicher ermittelt. Dabei sind nicht nur die für den Betrieb der Gleichrichterschaltungen notwendigen Energiespeicher (Drosselspulen im Eingang und Kondensator am Ausgang) zu berücksichtigen, sondern auch alle für die Störung notwendigen Energiespeicher, wie beispielsweise Kapazität von Leiterbahnen zum Gehäuse oder Gegeninduktivität zwischen benachbarten Abschnitten. Es sei jedoch erwähnt, dass die vorliegende Analyse nicht den Anspruch erhebt, exakte Modelle für Kapazität oder Induktivität zwischen Leiterbahnen oder gar verschiedener Gehäuseformen leistungselektronischer Schalter zu entwickeln. Vielmehr steht die Methode zur Modellierung der Störquellen und der Störpfade im Vordergrund.

Während Selbst- und Gegeninduktivität sowie Kapazitäten zwischen Leiterbahnabschnitten maßgeblich durch das Design der Schaltung z.B. als Leiterkarte beeinflusst werden, sind Kapazität zwischen elektrischen Komponenten und dem Gerätegehäuse meistens durch Sicherheitsbestimmungen und Kühlkonzepte vorgegeben. Je nach Sicherheitsanforderung muss z.B. ein minimaler Abstand zwischen einer leistungselektronischen Komponente und dem Gerätegehäuse eingehalten werden. Gleichzeitig findet über diesen kleinen Abstand in vielen Fällen auch die Kühlung der jeweiligen elektrischen Komponente statt. Um die thermische Anbindung möglichst optimal zu gestalten, ist es deshalb sinnvoll, den Abstand auf die minimal erforderliche Isolationsfestigkeit zu legen. Es handelt sich also nicht um einen Kompromiss zwischen optimaler Kühlung und vorgeschriebener Isolationsfestigkeit, sondern um eine thermische Anbindung, die sich aus der Isolationsanforderung ergibt. Unter der Annahme, dass elektrische Isolation zwischen diesen Komponenten und dem Gehäuse als Plattenkondensator interpretiert

³Übliche Methoden zur Spektralanalyse, wie zum Beispiel Diskrete Fouriertransformation (DFT) oder Schnelle Fouriertransformation (FFT), können aus dieser Definition abgeleitet werden

werden werden kann, gilt Gleiches auch für die elektrische Kapazität. Lediglich auf die Fläche zur Kühlung kann durch das Design der Schaltung noch Einfluss genommen werden, sofern die Gehäuseform der Komponenten dies zulässt. Durch diese Überlegungen kann die elektrische Kapazität einer elektrischen Komponente gegenüber dem Gehäuse durch

$$C = \epsilon_0 \epsilon_i \frac{F_k}{l_i} \quad (3.1)$$

modelliert werden. Diese Gleichung zur Bestimmung der Kapazität eines Plattenkondensators enthält neben der allgemeinen Permittivität ϵ_0 die relative Permittivität des Isolationsmaterial ϵ_i , den Isolationsabstand l_i und die Kühlfläche F_k .

Eine beispielhafte Darstellung des Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler und den Kondensatoren $C_1 \dots C_4$, die sich durch Isolationsabstand und Kühlung ergeben, ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Für die Charakterisierung der Störquellen müssen nun die Differentialgleichungen bezüglich aller Energiespeicher aufgestellt werden. Durch geeignete mathematische Umformungen kann das Schaltmodell des Gleichrichters mit integriertem Synchronwandler auch durch

$$L \frac{di_1}{dt} = u_1 - s_1 (s_4 u_2 - u_1) + s_2 (u_1 + s_3 u_2) - u_1 = u_1 - u_S \quad (3.2)$$

$$C \frac{du_2}{dt} = (s_1 s_4 - s_2 s_3) i_1 - I_3 = i_S - I_3 \quad (3.3)$$

ausgedrückt werden. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass die Eingangsspannung u_1 nicht mit einer Schaltfunktion multipliziert wird. Zudem sind alle sprungartigen Änderungen innerhalb von u_S und i_S zusammengefasst und werden daher als Störspannung u_S und Störstrom i_S bezeichnet.

Bei weiterer Betrachtung der Schaltung fällt auf, dass die Selbst- beziehungsweise Gegeninduktivität der Leiterbahnen nicht modelliert worden sind. Natürlich haben auch diese Energiespeicher einen Einfluss auf das leitungsgebundene Störverhalten der jeweiligen Schaltung, jedoch haben großzügig gestaltete Leiterbahnen eine Antennenwirkung und es kann zur Emission von störender elektromagnetischer Strahlung kommen. Daher wird bereits beim Design von leistungselektronischen Schaltungen stets auf die Minimierung von Selbst- und Gegeninduktivität der Leiterbahnen geachtet. Aus diesem Grund wird innerhalb dieses Kapitels die magnetische Modellierung von stromführenden Leiterbahnabschnitten nicht durchgeführt und auf eine Auswertung des Störstromes i_S verzichtet.

Zur Modellierung der Störpfade muss das Schaltmodell um die Differentialgleichungen der Filterschaltung, der Netznachbildung, und der in Abbildung 3.2 dargestellten Kondensatoren $C_1 \dots C_4$ erweitert werden. Das daraus entstehende Gleichungssystem ist jedoch aus technischer und wissenschaftlicher Sicht nicht einfach zu interpretieren. Die Eigenschaften und Zusammenhänge eines solch großen Gleichungssystems lassen sich

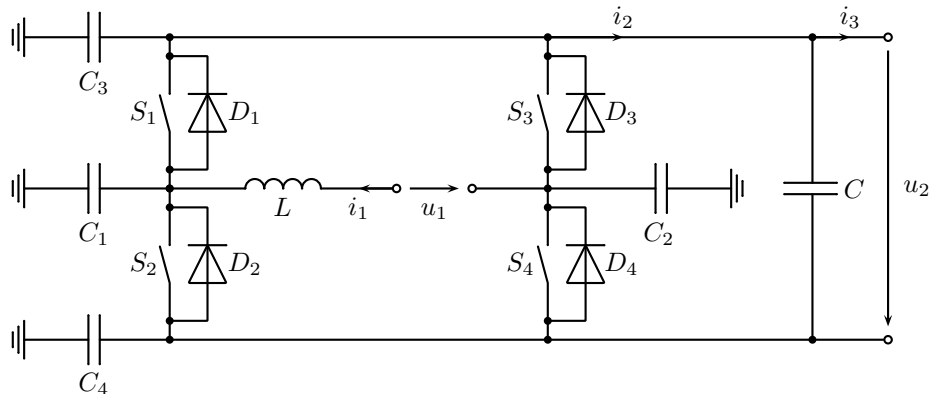


Abbildung 3.2: Gleichrichterschaltung mit integriertem Synchronwandler unter Berücksichtigung von Kapazitäten zwischen einzelnen Leitungsabschnitten der Schaltung und dem Gerätegehäuse

besonders übersichtlich durch die Darstellung als Ersatzschaltbild deutlich leichter nachvollziehen. Zudem muss grundsätzlich zwischen zwei Ersatzschaltbildern zur Modellierung von positivem und negativem Eingangsstrom i_1 unterschieden werden. Das liegt insbesondere daran, dass sich Parallelschaltungen mit unterschiedlichen Kombinationen der Kondensatoren $C_1 \dots C_4$ ergeben, die je nach Schalterstellungen des Synchrongleichrichters mit unterschiedlichen Knoten des Ersatzschaltbildes verknüpft sind. Unter der Annahme, dass die Schalter S_3 und S_4 den Synchrongleichrichter bilden, ist beispielsweise der Schalter S_4 ein- und der Schalter S_3 ausgeschaltet, sofern das Vorzeichen des Eingangsstroms positiv ist. Dadurch befinden sich die Kondensatoren C_2 und C_4 in einer Parallelschaltung. Bei negativem Vorzeichen sind die Kondensatoren C_2 und C_3 parallel geschaltet. Diese Fallunterscheidung kann vermieden werden, indem die Kapazitäten der Kondensatoren C_3 und C_4 als gleich groß angenommen werden. In der Praxis wird diese Annahme dadurch gerechtfertigt, dass in einem realen Aufbau die Ausgangsleitungen der Gleichrichterschaltung durch Kondensatoren an das Gehäuse beziehungsweise den Schutzleiteranschluss angebunden werden. Dadurch können die Spannungsabfälle der Ausgangsleitungen gegenüber dem Gehäuse einfach angepasst werden, sofern die Kapazität der hinzugefügten Kondensatoren deutlich größer ist als die Kapazitäten der Ausgangsleitungen selbst. Demnach sind die beiden Spannungsabfälle genau dann optimal ausbalanciert, wenn beide Kondensatoren gleiche Kapazitätswerte haben.

$$C_3 = C_4 = C_y$$

Wird diese Annahme bei der Erstellung des Ersatzschaltbildes der Gleichrichterschaltung berücksichtigt, ergibt sich eine Schaltung wie in Abbildung 3.3 dargestellt.

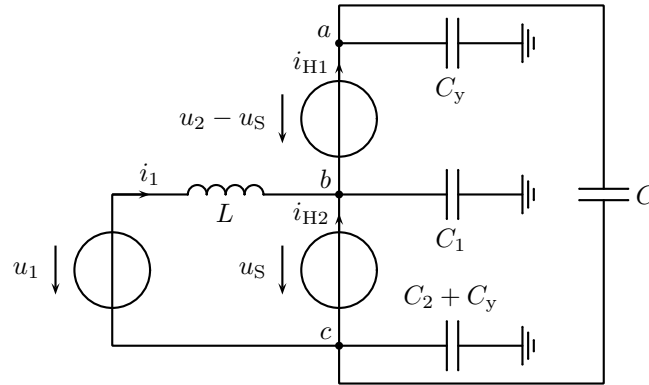


Abbildung 3.3: Ersatzschaltbild der Gleichrichterschaltung aus Abbildung 3.2

Im Grunde genommen sind alle notwendigen Störpfade des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler durch dieses Ersatzschaltbild direkt ersichtlich. Die Störspannungen werden durch die Kondensatoren an das Gehäuse angebunden und beeinflussen dadurch die Spannung des Gehäuses gegenüber dem Bezugspotential der Erde. Bei angeschlossenem Erdungsleiter⁴ wird das Bezugspotential der Erde auf das Gehäuse gelegt und es wird dem Netz ein Strom zum Ausgleich der Spannungsänderungen an den Kondensatoren entnommen, welcher über die Impedanz des Versorgungsnetzes zu Störungen der Versorgungsspannung an anderen elektrischen Geräten führen kann. Es wäre also ausreichend, mit diesem Ersatzschaltbild weiterzuarbeiten. Aufgrund der idealen Spannungsquellen ist es jedoch möglich, diese Schaltung noch weiter zu vereinfachen und so weiteren Rechenaufwand zu umgehen. Dazu sei zunächst angenommen, dass C_1 und C_2 gegenüber C_y vernachlässigt werden können, da die Kapazität der zusätzlich hinzugefügten Kondensatoren praktisch deutlich größer ist als die Kapazität zwischen den elektrischen Komponenten und dem Gehäuse⁵.

Unter dieser Voraussetzung werden die drei Knotenspannungen innerhalb der Schaltung aus Abbildung 3.3 durch Anwendung der komplexen Knotenspannungsanalyse und Auswertung von

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_C + \underline{Y}_{Cy} & 0 & -\underline{Y}_C & -1 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_L & -\underline{Y}_L & 1 & -1 \\ -\underline{Y}_C & -\underline{Y}_L & \underline{Y}_L + \underline{Y}_C + \underline{Y}_{Cy} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{I}_{H1} \\ \underline{I}_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{U}_1 \underline{Y}_L \\ -\underline{U}_1 \underline{Y}_L \\ \underline{U}_2 - \underline{U}_S \\ \underline{U}_S \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

⁴repräsentiert durch das Erdungssymbol

⁵Die elektrische Kapazität der Kühlanbindung von leistungselektronischen Komponenten hat nach (3.1) typischerweise einen Wert zwischen 10 pF und 200 pF

beschrieben. Dabei sei angemerkt, dass die Spannungsquelle \underline{U}_1 zuvor in eine Ersatzstromquelle $\underline{U}_1 \underline{Y}_L$ umgewandelt worden ist und eingeprägte Spannungen zwischen zwei Knotenpunkten durch Hilfsströme berücksichtigt sind. Da beide Spannungen $\underline{U}_2 - \underline{U}_S$ und \underline{U}_S messbare Störungen innerhalb der Netznachbildung hervorrufen, werden deren Störpfade separat analysiert. Durch den Kurzschluss der unteren Störquelle aus Abbildung 3.3 ergeben sich die Gleichungen aus 3.4 zu

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_C + \underline{Y}_{Cy} & -\underline{Y}_C & -1 \\ -\underline{Y}_C & \underline{Y}_C + \underline{Y}_{Cy} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{I}_{H1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_2 - \underline{U}_S \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Der Kurzschluss verhindert jedoch die Ausbreitung eines Gegentaktstromes und erzeugt lediglich Gleichtaktstörungen. Bei einem Kurzschluss der oberen Spannungsquelle treten hingegen Gleich- und Gegentaktstörungen zur gleichen Zeit auf. Für diesen Fall werden die Gleichungen aus 3.4 zu

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_C + \underline{Y}_L + \underline{Y}_{Cy} & -\underline{Y}_L - \underline{Y}_C & -1 \\ -\underline{Y}_L - \underline{Y}_C & \underline{Y}_C + \underline{Y}_L + \underline{Y}_{Cy} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{I}_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\underline{U}_1 \underline{Y}_L \\ -\underline{U}_1 \underline{Y}_L \\ \underline{U}_S \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

umgeformt. Die fehlenden Innenwiderstände der idealen Spannungsquellen erlauben die Eingangsspannung \underline{U}_1 , Eingangsinduktivität L und Ausgangskapazität C zu entkoppeln. Demnach bleibt

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{Cy} & 0 & -1 \\ 0 & \underline{Y}_{Cy} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{I}_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_S \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

erhalten. Da sich die Gesamtkapazität parallel geschalteter Kondensatoren durch Addition der Einzelkapazitäten ergibt, können natürlich auch die beiden zuvor vernachlässigten Kapazitäten C_1 und C_2 wieder hinzugefügt werden. Das führt insbesondere zu einer leichten Asymmetrie der Admittanzmatrix und sorgt letztendlich für die Entstehung von Gleichtaktstörungen. Abbildung 3.4 zeigt das zu den Gleichungen 3.7 gehörige Ersatzschaltbild, dessen Struktur sich nicht weiter vereinfachen lässt. Dieses Ersatzschaltbild bildet die Grundlage für alle weiteren Analysen innerhalb dieses Kapitels und repräsentiert den Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler.

3.2 Spektrale Darstellung der Störsignale

Die in dieser Arbeit zu untersuchende Methodik für den Entwurf eines geeigneten Netzfilters erfordert die Darstellung der Störspannung u_S im Frequenzbereich. Der zeitliche Verlauf von u_S wird anhand der Kombination von Mittelwertmodell und dem zugehörigen Schaltmodell aus Kapitel 2.2 generiert. Daraus ergibt sich der zeitliche Verlauf

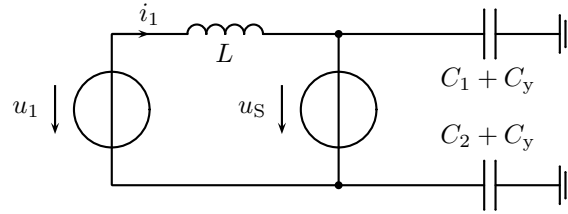


Abbildung 3.4: Endgültiges Ersatzschaltbild der Gleichrichterschaltung aus Abbildung 3.2

der Störspannung u_S . Dieser lässt sich im Frequenzbereich durch Approximation einer diskreten Fourierreihe darstellen.

3.2.1 Betrieb als Synchronwandler

Das obere Diagramm in Abbildung 3.5 zeigt exemplarisch einen typischen Verlauf der Störspannung u_S bei einer Schaltfrequenz von 5 kHz. Der synchron zum Richtungswechsel der Eingangsspannung u_1 getaktete Gleichrichter bestimmt die Richtung der Störspannung. Sofern die Eingangsspannung positiv angelegt ist, wird die Ausgangsspannung u_2 während des freilaufenden Intervalls ebenfalls positiv an L angelegt. Gleiches gilt im Falle negativ angelegter Eingangsspannung. Wird dieses Signal durch Anwendung der Fourierreihe

$$\underline{U}_{S,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_S e^{-jnk\Delta\omega} \quad (3.8)$$

in seine spektralen Anteile zerlegt, ergibt sich nach

$$\underline{U}_{S,k} = U_{S,k} e^{j\varphi_{S,k}} \quad (3.9)$$

das im unteren Diagramm von Abbildung 3.5 dargestellte Amplitudenspektrum. Zur Berechnung der Summe aus Gleichung 3.8 wurde auf den Algorithmus der Schnellen Fouriertransformation zurückgegriffen. Auf die Darstellung des Phasenspektrums wurde hier verzichtet, da aufgrund des nahezu punktsymmetrischen Verlaufs der Störspannung⁶ nur Spektralanteile mit einer Phase von 90° oder -90° zu erwarten sind. Aufgrund der Netzfrequenz von 50 Hz hat auch die Grundfrequenz des Störspektrums einen Wert von 50 Hz. Die Amplitude der Grundfrequenz beträgt 325 V und ist damit gleich der Amplitude der vorgegebenen Eingangsspannung. Die erste stark ausgeprägte Amplitude der

⁶Durch zeitliche Verschiebung kann der Verlauf des Störsignales durch eine ungerade Funktion abgebildet werden.

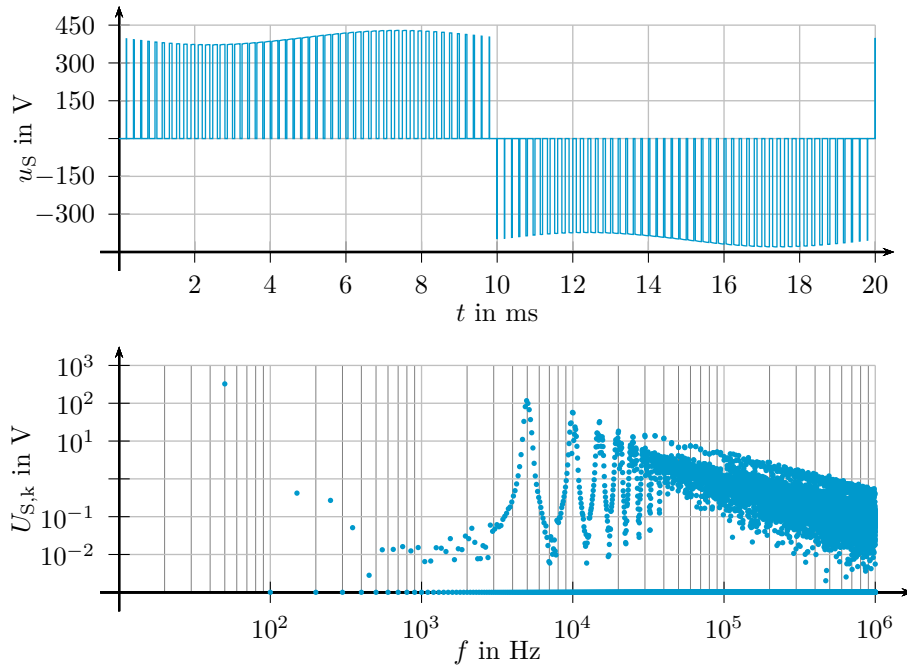


Abbildung 3.5: Störspannung u_S und dessen Amplitudenspektrum $U_{S,k}$ bei einer Schaltfrequenz von 5 kHz und den Parametern aus Tabelle 2.10

höheren Harmonischen ist in der Nähe der Schaltfrequenz von 5 kHz zu erkennen. Bei genauerer Betrachtung dieses Frequenzbereichs fällt auf, dass bei der Schaltfrequenz selbst keine ausgeprägte Amplitude vorhanden ist, sondern nur Links und Rechts davon, also bei 4950 Hz und 5050 Hz, zwei Amplituden mit einer Höhe von ungefähr 100 V existieren. Diese Beobachtung lässt sich anschaulich durch positive und negative Zerlegung des Wertebereichs der Störspannung erklären. Die Störspannung kann im Zeitbereich durch die Summe

$$u_S = u_{Sp} + u_{Sn} \quad (3.10)$$

einer nur positiven Funktion u_{Sp} und einer nur negativen Funktion u_{Sn} ausgedrückt werden. Die Summe bleibt bei der Darstellung im Frequenzbereich

$$\underline{U}_{S,k} = \underline{U}_{Sp,k} + \underline{U}_{Sn,k} \quad (3.11)$$

erhalten. Aufgrund des annähernd punktsymmetrisch Verlaufs kann die Funktion mit negativem Wertebereich als phasenverschobene und an der Frequenzachse gespiegelte Funktion mit positivem Wertebereich

$$\underline{U}_{Sp,k} = -\underline{U}_{Sn,k} e^{-jk\pi} = -\underline{U}_{Sn,k} \cos(k\pi) \quad (3.12)$$

interpretiert werden. Wird dieser Ausdruck in Gleichung 3.11 eingesetzt

$$\underline{U}_{S,k} = \underline{U}_{Sp,k} (1 - \cos(k\pi)) \quad (3.13)$$

so ist es offensichtlich, dass bei allen geraden Vielfachen der Grundfrequenz die Koeffizienten verschwinden müssen. Zur besseren Übersicht sind diese Koeffizienten in der unteren Darstellung aus Abbildung 3.5 auf eine Spannung von 1 mV festgelegt.

Durch diesen Zusammenhang ist es möglich, Rechendauer zu sparen, da das Schaltmodell nur für die Dauer der positiven, beziehungsweise negativen, Netzhalfperiode ausgewertet werden muss. Dennoch bleibt die Rechendauer nach wie vor abhängig von der geforderten Auflösung im Frequenzbereich. Daher wird an dieser Stelle eine Approximation der Störspannung eingeführt, mit dessen Hilfe die Berechnungsdauer der Fourierreihe verkürzt wird. Dazu wird grundlegend angenommen, dass sich während eines Schaltintervalls sowohl Ausgangsspannung u_2 als auch das Tastverhältnis d_2 nicht ändern. Dadurch wird der Verlauf des Tastverhältnisses durch Treppenfunktionen angenähert und die Störspannung kann während eines Schaltintervalls nur zwei Werte annehmen. Die Störspannung kann dann durch eine Summe zeitlich verschobener Rechteckfunktionen

$$\tilde{u}_S = \sum_{m=1}^M U_{2,m} \operatorname{rect} \left(\frac{\frac{t}{T} - \left(m - \frac{D_{2,m}}{2} \right)}{D_{2,m}} \right) \quad (3.14)$$

ausgedrückt werden. Der Index m kennzeichnet die Nummer des Schaltintervalls. Die Koeffizienten der Fourierreihe dieser Funktion ergeben sich nun durch die Berechnung des Integrals

$$\tilde{U}_{S,k} = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}_S e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad (3.15)$$

wodurch alle Terme der Summe aus Gleichung 3.14 ebenfalls erhalten bleiben. Wird Gleichung 3.14 in Gleichung 3.15 eingesetzt kann $\tilde{U}_{S,k}$ durch

$$\tilde{U}_{S,k} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^M U_{2,m} \int_{(m-D_{2,m})T}^{mT} e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.16)$$

ausgedrückt werden. Da die nun verbleibenden Größen des Integranden im Integrationsintervall konstant sind, lassen sich Integrale geschlossen lösen. Durch kleinere Umstellungen der Terme ergibt sich dann

$$\tilde{U}_{S,k} = \frac{1}{jk2\pi} \sum_{m=1}^M U_{2,m} (e^{jk\omega_0 D_{2,m} T} - 1) e^{-jk\omega_0 mT} \quad (3.17)$$

zur Berechnung des Spektrums der approximierten Störspannung. Die Auflösung im Frequenzbereich wird nun nicht mehr durch die Anzahl der Stützstellen des Schaltmodells bestimmt, sondern kann direkt durch die Wahl der maximalen Frequenz vorgegeben werden. Durch die gezielte Wahl einer bestimmten Frequenz ist es möglich, den

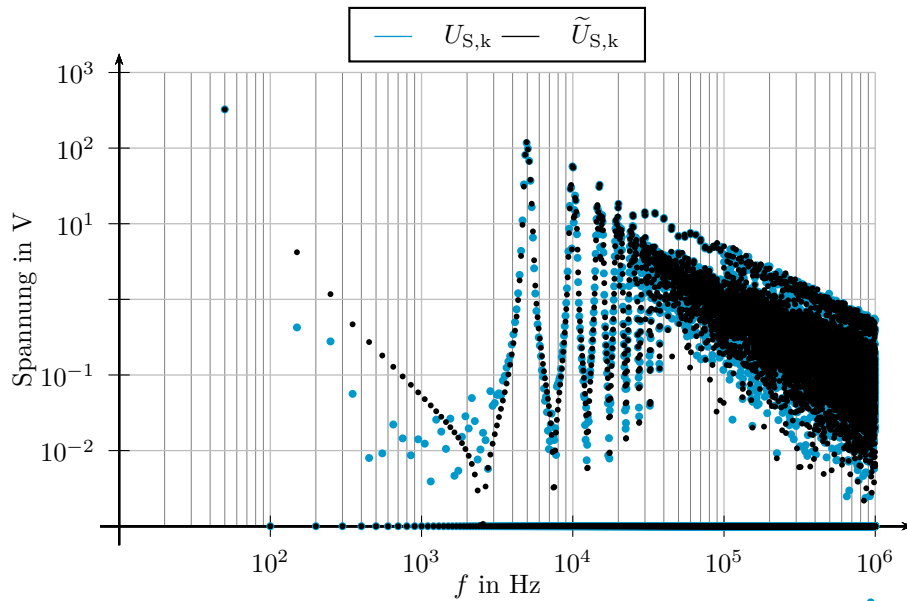


Abbildung 3.6: Darstellung der Amplitudenspektren von u_S und \tilde{u}_S zum Vergleich zwischen Schaltmodell und Approximation beim Betrieb als Synchronwandler

zugehörigen Koeffizienten des Spektrums einzeln auszuwerten. Diese Eigenschaft kann insbesondere bei der gezielten Unterdrückung einzelner Komponenten sehr vorteilhaft sein. Natürlich kann auch der approximierte Verlauf der Störspannung wieder in positiven und negativen Wertebereich unterteilt werden, um so einen besonders effizienten Algorithmus zur Auswertung von Gleichung 3.17 zu entwickeln. Da innerhalb dieser Arbeit jedoch die Methodik selbst bewertet wird, sei auf eine detaillierte Beschreibung der Auswertung an dieser Stelle verzichtet.

Zur Validierung dieses Modells zeigt Abbildung 3.6 das Spektrum der Störspannung des Schaltmodells für den Betrieb als Synchronwandler und dessen Approximation. Wie zu erkennen, werden durch die Approximation insbesondere die lokalen Maxima sehr gut abgebildet. Die Abweichungen der Maxima liegen rechts und links der jeweiligen Vielfachen der Schaltfrequenz zwischen 0,0004 % und 8,49 %. In den dazwischenliegenden Frequenzbereichen nehmen die Abweichungen deutlich zu. Eine Erklärung für diese hohen Abweichungen stellt sich aufgrund der hohen Anzahl an Termen sowohl bei der diskreten als auch bei der kontinuierlichen Fourierreihe als sehr komplex dar. Qualitativ bleibt jedoch festzuhalten, dass die Werte der Koeffizienten bei der Berechnung von Gleichung 3.17 nicht von der Wahl der Anzahl auszuwertender Frequenzen abhängt. Selbst die Auswertung einer einzelnen Frequenz ergibt den gleichen Koeffizienten wie die Auswertung über einen Frequenzbereich. Zudem können mit der kontinuierlichen Fourierreihe sprunghafte Änderungen der Störspannung aufgrund des Gibbs'schen Phänomens [30] nicht ideal abgebildet werden, wodurch zusätzlich Abweichungen zwischen

u_S und \tilde{u}_S entstehen.

3.2.2 Betrieb als Hochsetzsteller

Sofern der Gleichrichter als Synchronwandler betrieben wird, kann die Störspannung nur zwischen zwei verschiedenen Spannungswerten umschalten. Bei dem Betrieb als Hochsetzsteller kommt ein weiterer Zustand hinzu. Während eines lückenden Intervalls verschwindet der Strom i_1 für eine bestimmte Zeit. Währenddessen muss die Störspannung gleich der Eingangsspannung sein. Deshalb springt die Störspannung nach dem Ablauf der Freilaufphase auf den Wert der Eingangsspannung und verharrt dort bis zum Beginn des nächsten Schaltintervalls. Die Störspannung u_S kann für diesen Betrieb durch eine Summe zweier zeitlich verschobener Rechteckfunktionen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_S = & \sum_{m=1}^M U_{2,m} \operatorname{rect} \left(\frac{\frac{t}{T} - \left(m - (1 - D_{3,m}) + \frac{D_{2,m}}{2} \right)}{D_{2,m}} \right) + \\ & + \sum_{m=1}^M U_{1,m} \operatorname{rect} \left(\frac{\frac{t}{T} - \left(m - \frac{1-D_{3,m}}{2} \right)}{1 - D_{3,m}} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

approximiert werden. Dabei wurde die Dauer des nicht lückenden Stromes durch die Summe

$$D_{3,m} = D_{1,m} + D_{2,m}$$

von Einschalt- und Ausschaltdauer abgekürzt. Im Gegensatz zum Betrieb als Synchronwandler existiert neben der üblichen Rechteckfunktion zur Abbildung der Freilaufphase nun eine zweite Rechteckfunktion zur Abbildung des lückenden Intervalls. Wie bereits im vorangegangenen Kapitel, lässt sich die spektralen Anteile dieser Funktion durch eine Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{S,k} = & \frac{1}{jk2\pi} \sum_{m=1}^M U_{2,m} (e^{jk\omega_0 D_{2,m} T} - 1) e^{-jk\omega_0 T(m+D_{3,m}-1)} + \\ & + \frac{1}{jk2\pi} \sum_{m=1}^M U_{1,m} (e^{jk\omega_0 (1-D_{3,m}) T} - 1) e^{-jk\omega_0 m T} \end{aligned} \quad (3.19)$$

analysieren.

Zur Validierung dieses Modells zeigt Abbildung 3.7 das Spektrum der Störspannung des Schaltmodells für den Betrieb als Hochsetzsteller und dessen Approximation. Wie bereits zuvor, werden auch hier die lokalen Maxima durch die Approximation sehr gut abgebildet. In diesem Fall liegen die Abweichungen der Maxima rechts und links

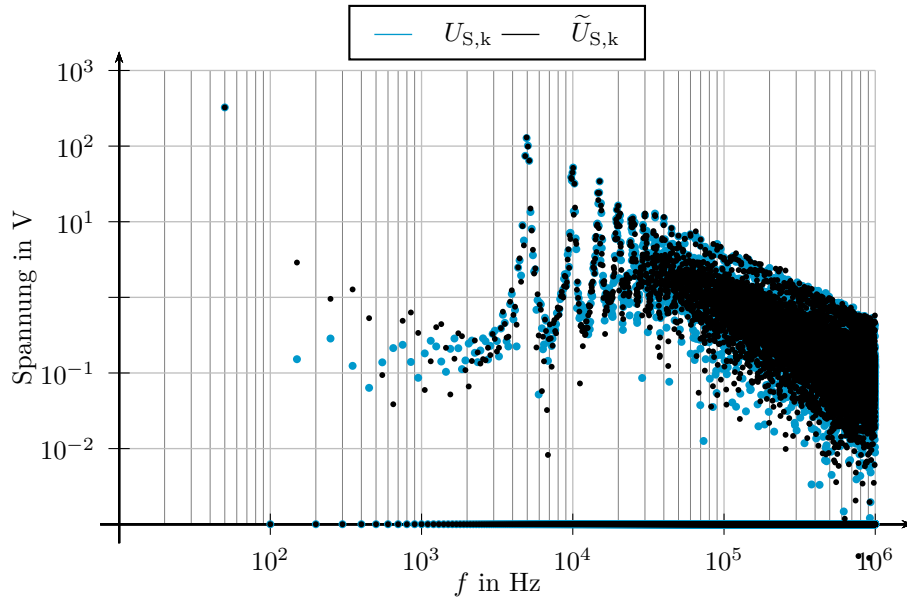


Abbildung 3.7: Darstellung der Amplitudenspektren von u_S und \tilde{u}_S zum Vergleich zwischen Schaltmodell und Approximation beim Betrieb als Hochsetzsteller

der jeweiligen Vielfachen der Schaltfrequenz zwischen 0,008 % und 9,26 %. In den dazwischenliegenden Frequenzbereichen nehmen die Abweichungen ebenfalls deutlich zu, was wiederum ebenfalls nur qualitativ begründet werden kann. Im Vergleich zum Betrieb als Synchronwandler ist jedoch auffällig, dass die Koeffizienten durch die hinzugefügten Rechteckfunktionen insbesondere im niedrigen Frequenzbereich nicht besonders geordnet verteilt sind und sich in einem Wertebereich zwischen 100 mV und 10 V bewegen. Beispielsweise hat der Koeffizient bei 150 Hz, also bei dem dreifachen der Grundfrequenz, einen Wert von ca. 2,89 V. Das entspricht einem relativen Wert von 0,89 % bezogen auf die Amplitude der Eingangsspannung und führt aufgrund von

$$\tilde{I}_{1,k} = \frac{\tilde{U}_{1,k} - \tilde{U}_{S,k}}{jk\omega_0 L} \quad (3.20)$$

zu einer nicht unerheblichen Amplitude von 4,08 A des Eingangsstromes bei einer Induktivität von 750 μH . Im Sinne der netzfreundlichen Stromaufnahme sollten jedoch insbesondere die Koeffizienten zwischen der Netzfrequenz und der Schaltfrequenz verschwinden oder zumindest verschwindend gering sein. Die Approximation des Eingangsstromes kann also die Kriterien der netzfreundlichen Stromaufnahme nicht mehr erfüllen. Für die Bewertung eines geeigneten Filterentwurfs ist das jedoch unerheblich, da, wie bereits zuvor erwähnt, die lokalen Maxima in der Nähe der Vielfachen der Schaltfrequenz von größerer Bedeutung sind.

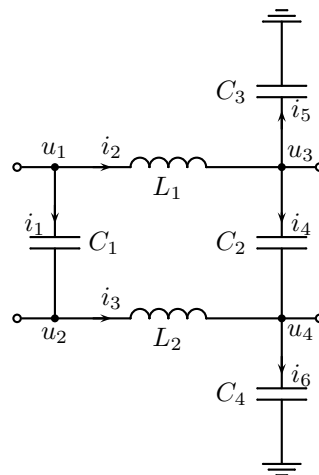


Abbildung 3.8: Beispielhafte Darstellung einer passiven Filterschaltung zur Unterdrückung leitungsgebundener Störungen

3.3 Elektrisches Netzfiltermodell

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, muss die Ausbreitung der nun bekannten leitungsgebundenen Störungen durch ein elektrisches Filter verhindert werden. Im Falle passiver Filter, also Schaltungen bestehend aus Widerständen sowie kapazitiven und induktiven Bauelementen, muss die resultierende Impedanz des Filters so gewählt werden, dass das Spektrum der gefilterten Störungen die vorgegebenen Standards einhält. Je nach Anzahl der elektrischen Zweige innerhalb der Topologie des Filters kann die Anzahl der Freiheitsgrade für das Design des Filters sehr groß sein. Eine typische Filterschaltung, wie beispielsweise in Abbildung 3.8 dargestellt, hat sechs elektrische Zweige von denen jede Zweigimpedanz durch die Wahl von Widerstand, Induktivität und/oder Kapazität beeinflusst wird. Dadurch ergeben sich für diese einfache Anordnung bereits 18 Freiheitsgrade. Bei der Berücksichtigung weiterer Zusammenhänge, wie beispielsweise die elektrische Kopplung zwischen mehreren Zweigen, erhöht sich der Freiheitsgrad zusätzlich mit der Anzahl der verkoppelten Zweigpaare. Eine wissenschaftliche Analyse von Problemstellung mit einer solch hohen Anzahl an Freiheitsgraden resultiert üblicherweise in sehr unübersichtlichen Auswertungen und führt im besten Fall nur zu tendenziellen Aussagen. Aus diesem Grund wird innerhalb dieser Arbeit keine Aussage bezüglich der Eignung von Topologien passiver Filterschaltungen getroffen. Vielmehr geht es darum, die Entwurfsmethode des Filters in Kombination mit der im vorangegangenen Kapitel bereits dargestellten Störquellen- oder Störpegelresultate zu bewerten.

Die Annahme des eingeschwungenen Zustands erlaubt Anwendung der Wechselstromrechnung und der Fourier-Reihenanalyse. Folglich wird das elektrische Verhalten

des Netzfilters durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben. Dieses Gleichungssystem wird anhand der Methoden der Graphentheorie aufgestellt und mündet letztendlich in der sogenannten Knotenspannungsanalyse [46]. Der Graph einer Filterschaltung ergibt sich durch die nummerierte Zuordnung von Spannungen zu jedem Verbindungsknoten (u_1, \dots, u_k) und der gerichteten, nummerierten Zuordnung von Strömen zu jedem Zweig (i_1, \dots, i_z). Durch die gerichtete Stromzuordnung wird ein solcher Graph auch als gerichteter Graph bezeichnet. Die Verbindung zwischen Knoten und Zweigen wird dann durch die Aufstellung der sogenannten Inzidenzmatrix beziehungsweise Knoten-Zweig-Verbindungsmatrix hergestellt. Den Elementen dieser Matrix a_{ij} ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, z$) wird durch die Definition von

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Zweig } j \text{ vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ -1 & \text{wenn Zweig } j \text{ zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ 0 & \text{wenn Zweig } j \text{ und Knoten } i \text{ nicht verbunden sind} \end{cases}$$

ein Wert der Menge $\{-1, 0, 1\}$ zugeordnet [46]. Durch die Anwendung dieser Definition auf die Filterschaltung aus Abbildung 3.8 ergibt sich beispielsweise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1z} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Inzidenzmatrix. Dabei wurde vorausgesetzt, dass ein Verbindungsknoten⁷ bereits als Bezugsknoten definiert ist. Mit Hilfe dieser Matrix wird nun der Knotenpunktsatz in Matrizenform

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_z = \mathbf{A} \mathbf{G}_z \mathbf{A}^T \mathbf{U}_k - \mathbf{A} \mathbf{I}_{qz} = \mathbf{G} \mathbf{U}_k - \mathbf{I}_{qk} = 0 \quad (3.21)$$

aufgestellt. Die Matrix \mathbf{G}_z enthält die Admittanzen aller Zweige. Alle übrigen Matrizen repräsentieren Zweig und Knotengrößen, jeweils durch z beziehungsweise k indiziert, die sich entweder ergeben oder als Quelle (Zusatzindex q) vorgegeben sind. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems,

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}_{qk}, \quad (3.22)$$

enthält die inverse Admittanzmatrix, welche anhand von bekannte Algorithmen, wie das Gauß'sche Eliminationsverfahren oder die QR-Zerlegung [10], berechnet wird.

Die Matrix \mathbf{G}_z enthält die Zuordnung aller Zweigspannungen und Zweigströme. Sofern Zweige mit unterschiedlichem Index sich nicht gegenseitig beeinflussen können,

⁷gekennzeichnet durch das Symbol für Erdung

befinden sich die Impedanzen der Reihe nach auf der Hauptdiagonalen. Je nach installierter elektrischer Komponente ergeben sich dadurch natürlich unterschiedlich Strom-Spannungsbeziehung für die einzelnen Elemente der Matrix. Im Falle der Schaltung aus Abbildung 3.8 gestaltet sich diese Matrix als

$$\mathbf{G}_z = \begin{pmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

mit insgesamt 6 Elementen auf der Hauptdiagonalen. Heutige Netzfilterschaltungen enthalten üblicherweise magnetisch gekoppelte Spulen. Die magnetische Kopplung führt automatisch zu einer elektrischen Abhängigkeit der Ströme in den betreffenden Zweigen. Unter der Annahme, dass die beiden Ströme i_2 und i_3 durch die Gegeninduktivität M miteinander verkoppelt sind, wird der Zusammenhang zwischen beiden Strömen durch

$$\underline{I}_2 = \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \underline{U}_2 - \frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \underline{U}_3 \quad (3.24)$$

$$\underline{I}_3 = -\frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \underline{U}_2 + \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \underline{U}_3 \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

ausgedrückt. Auf den Strom \underline{I}_2 im ersten Zweig wirkt also neben der eigenen Zweigspannung \underline{U}_2 auch die Zweigspannung \underline{U}_3 . Ähnliches gilt für den Strom im zweiten Zweig. Die Matrix der Admittanzen der gesamten Netzfilterschaltung wird dann durch

$$\mathbf{G}_z = \begin{pmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & -\frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

beschrieben. Natürlich kann an Stelle der Gegeninduktivität auch ein Koppelfaktor k als Ausdruck für die magnetische Kopplung gegeben sein. Mit

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

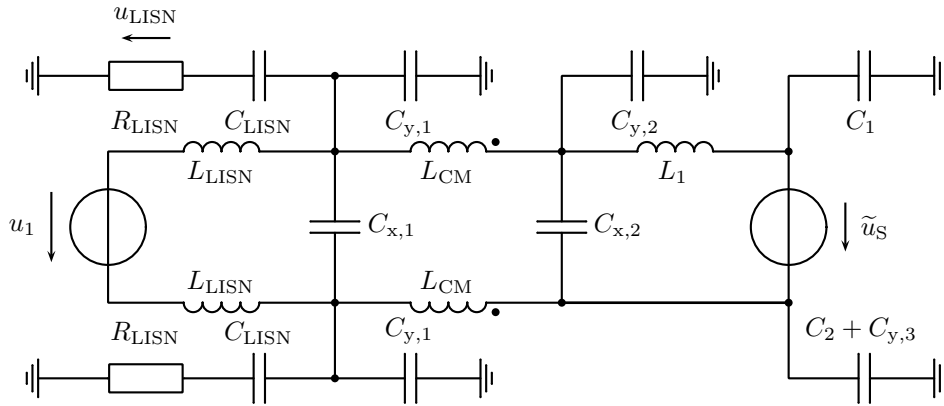


Abbildung 3.9: Ersatzschaltbild eines Synchrongleichrichters mit Synchronwandler zur Untersuchung der Netzfilterentwurfsmethode

wird \mathbf{G}_z durch

$$\mathbf{G}_z = \begin{pmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega L_1(1-k^2)} & -\frac{k}{j\omega\sqrt{L_1L_2}(1-k^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{j\omega\sqrt{L_1L_2}(1-k^2)} & \frac{1}{j\omega L_2(1-k^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

dargestellt. Anhand dieser Darstellung ist zu erkennen, dass die Matrix wieder ihre ursprüngliche Form aus Gleichung 3.23 annimmt, sofern die magnetische Kopplung nicht vorhanden ist ($k = 0$). Die Inzidenzmatrix \mathbf{A} bleibt durch die Kopplung unberührt und ändert sich nicht.

3.4 Validierung und Auswertung

Die Validierung der Entwurfsmethode erfolgt anhand eines exemplarischen Entwurfs eines Netzfilter für einen netzfreundlich arbeitenden Synchrongleichrichter mit integrierem Synchronwandler und angeschlossener Netznachbildung. Das Ersatzschaltbild zu dieser Schaltung ist in Abbildung 3.9 zu sehen. Das eigentliche Filternetzwerk besteht aus den Kondensatoren $C_{x,1}$, $C_{x,2}$, $C_{y,1}$ und $C_{y,2}$ sowie den beiden gekoppelten Spulen L_{CM} . Die Wicklungen der gekoppelten Spulen sind zu einer Gleichtaktdrossel verschaltet. Des Weiteren sind zwischen der ideal angenommenen Spannungsquelle der Netzspannung u_1 und dem Netzfilter weitere Komponenten der Netznachbildung eingezeichnet. Diese Komponenten sind mit dem Index LISN versehen was aus dem englischen

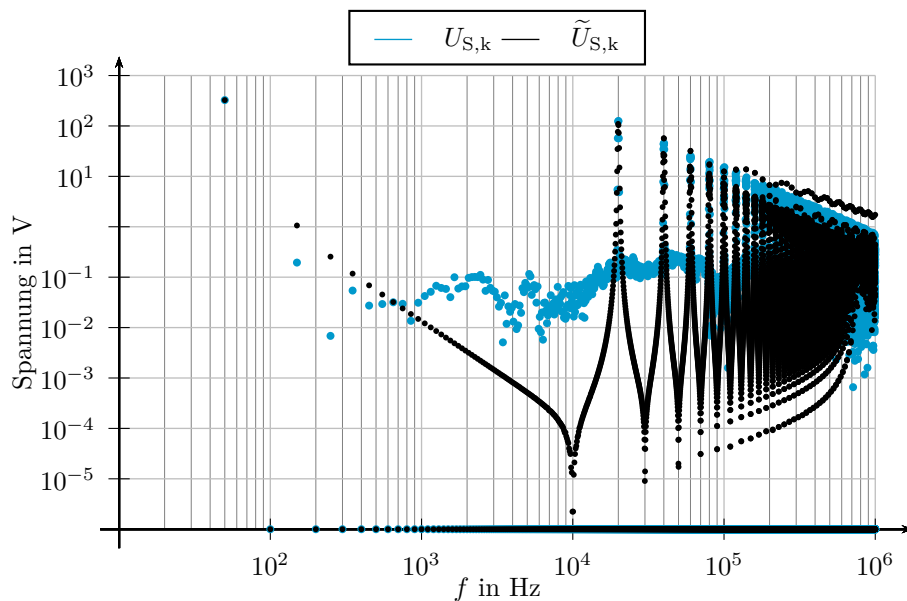


Abbildung 3.10: Darstellung der Amplitudenspektren von u_S und \tilde{u}_S zum Vergleich zwischen realem Simulationsmodell eines Synchrongleichrichters mit Synchronwandler und dessen Approximation

kommt und für “Line Impedance Stabilization Network” steht. Die Parameter der gesamten Schaltung sowie die Parameter der Gleichrichterschaltung sind in Tabelle A.5 angegeben.

Abbildung 3.10 zeigt einen Vergleich zwischen einem geschalteten Modell und der Approximation. Jedoch wurde in diesem Fall nicht mit dem idealen Schaltmodell aus Kapitel 2 gearbeitet, sondern Synchrongleichrichter und Synchronwandler mit Modellen der realen Bauteile simuliert⁸. Die netzfreundliche Betriebsführung wurde innerhalb der Simulation durch einen zeitdiskreten Regelalgorithmus mit einer Schaltfrequenz von 20 kHz realisiert. Die Koeffizienten beider Diagramme zeigen eine gute Übereinstimmung insbesondere bei den lokalen Maxima der Grund- und Schaltfrequenz. Ab einer Frequenz von ca. 100 kHz driften sie allerdings auseinander. Der Entwurf mit den approximierten Koeffizienten führt also zu einer konservativ parametrisierten Netzfilter-schaltung.

Der Einfluss der Störspannung auf andere elektrische Verbraucher im Versorgungsnetz wird durch Messung der Spannung u_{LISN} am Widerstand der Netznachbildung be-

⁸Für alle vier Schalter-Dioden-Paare S_1/D_1 bis S_4/D_4 wurden nichtlineare VDMOS-Modelle zur Nachbildung der Eigenschaften realer leistungselektronischer Schalter eingesetzt. Bei den Schaltern des Synchronwandlers (S_1 und S_2) handelt es sich Modelle der Bauteile STB43N65M5 des Leistungshalbleiterherstellers STMicroelectronics. Für den Synchrongleichrichter (S_3 und S_4) wurden Modelle der Bauteile R6020PNJ des Herstellers ROHM Semiconductor verwendet.

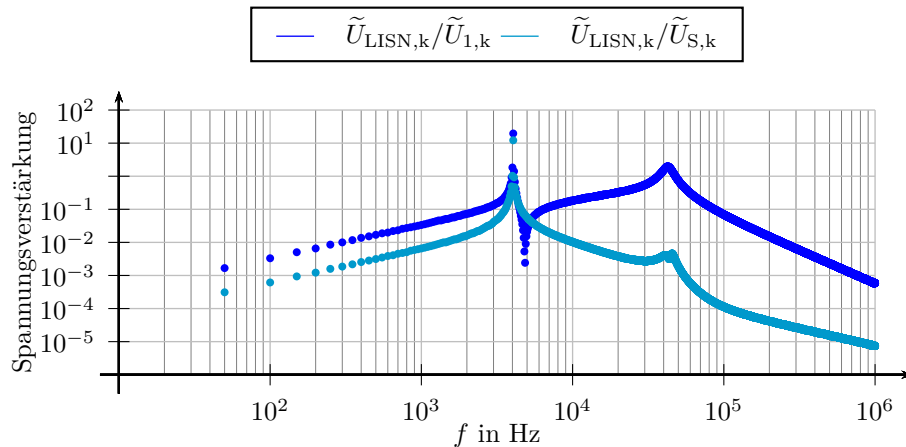


Abbildung 3.11: Spannungsverstärkung der Netzspannung u_1 und der Störspannung \tilde{u}_S gemessen am Widerstand R_{LISN} der Netznachbildung

wertet. Diese Spannung wird anhand der Übertragungsverhalten der gesamten Schaltung bezüglich der Netzspannung u_1 und der Störspannung u_S berechnet. Die Spannungsverstärkung der Übertragungsverhalten, also lediglich die Verstärkung der Spannungsamplituden, sind in Abbildung 3.11 dargestellt. Auf eine Darstellung der Phaseninformation wird an dieser Stelle verzichtet. Die Spannungsverstärkung der Eingangsspannung hat eine bedeutsame Knick- oder Resonanzfrequenz bei ca. 42 kHz. Unterhalb dieser Frequenz steigt die Spannungsverstärkung mit zunehmender Frequenz um eine Zehnerpotenz pro Dekade. Oberhalb dieser Frequenz fällt die Spannungsverstärkung um zwei Zehnerpotenzen pro Dekade. Störungen der Netzspannung rund um 42 kHz werden also am wenigsten gedämpft. Jedoch ist die Spannungsverstärkung hinsichtlich der Netzspannung nicht von entscheidender Bedeutung für einen geeigneten Entwurf des Netzfilters. Zudem ist im Spektrum der Netzspannung lediglich ein Koeffizient bei der Netzfrequenz zu erwarten, dessen Amplitude mit ungefähr -54 dB gedämpft wird.

Die Spannungsverstärkung der Störspannung hat hingegen eine bedeutsame Knick- oder Resonanzfrequenz bei ca. 4 kHz. Die Verstärkung steigt mit zunehmender Frequenz um eine Zehnerpotenz pro Dekade unterhalb des Resonanzpunktes. Oberhalb dieses Punktes fällt die Verstärkung um zwei Zehnerpotenzen pro Dekade. Wie in Abbildung 3.10 zu erkennen, sind die Koeffizienten der Störspannungen in der Nähe der Knickfrequenz jedoch relativ gering, weshalb auch im Spektrum der gefilterten Spannung relativ geringe Ausprägungen zu erwarten sind. Eine weitere Knick- oder Resonanzfrequenz befindet sich zwischen 40 kHz und 50 kHz. Obwohl die Dämpfung tendenziell zunimmt, werden in diesem Bereich Störanteile weniger gedämpft. In diesem Frequenzbereich befindet sich die zweite Harmonische der Schaltfrequenz, aufgrund dessen im gemessenen Signal der Netznachbildung eine ausgeprägte zweite Harmonische der Schaltfrequenz zu erwarten ist.

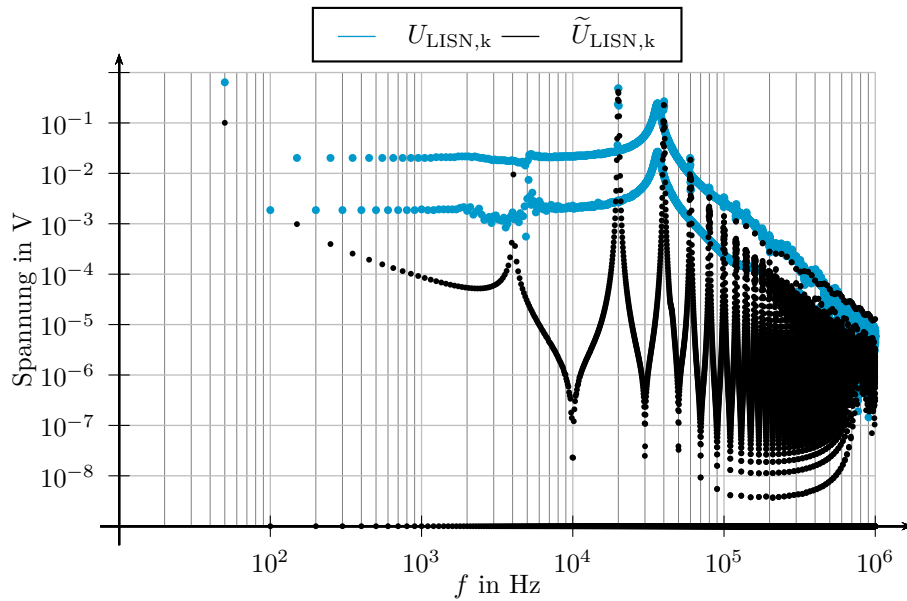


Abbildung 3.12: Darstellung der Amplitudenspektren von u_S und \tilde{u}_S zum Vergleich zwischen Schaltmodell und Approximation beim Betrieb als Synchronwandler

Der Verlauf des Signals an der Netznachbildung wird durch Faltung der approximierten Störspannung mit der Impulsantwort des Netzfilters berechnet. Im Frequenzbereich wird die Faltung durch die komplexe Multiplikation der Störspannung mit der Spannungsverstärkung des Filters realisiert. Abbildung 3.12 zeigt das Resultat dieser Multiplikation $\tilde{U}_{\text{LISN},k}$ und die Fourierreihe der Spannung u_{LISN} aus dem realen Simulationsmodell. Die lokalen Maxima beider Spektren zeigen im gesamten Frequenzbereich relativ geringe Abweichungen. Die hohe Dämpfung der Filterschaltung oberhalb der Knick- beziehungsweise Resonanzfrequenz ist deutlich zu erkennen. In diesem Fall liegen die Abweichungen der Maxima rechts und links der jeweiligen Vielfachen der Schaltfrequenz zwischen 0,02 % und 7,32 %. Auffällig ist, dass die geraden Vielfachen von 50 Hz nicht deutlich kleiner sind als die ungeraden Vielfachen. Der Grund dafür ist die fehlende Punktsymmetrie von u_{LISN} innerhalb der realen Simulation. Im Frequenzbereich entsteht dadurch der sogenannte Leakage-Effekt [30].

3.5 Zusammenfassung

Nach aktuellem Stand der Technik basieren die gängigsten Entwurfsmethoden für passive Netzfilter in leistungselektronischen Schaltungen auf der rechenaufwendigen Simulation eines vollständig geregelten Schaltmodells des gesamten Gleichrichters. Um diesen Rechenaufwand zu minimieren, zeigt dieses Kapitel eine effiziente Entwurfsmethode

zur geeigneten Störunterdrückung, bei der Störsignale anhand eines Mittelwertmodells rekonstruiert werden und somit kann auf eine Simulation des Schaltmodells verzichtet werden.

Die mit den schnellen Umschaltvorgängen verbundenen Ausgleichsvorgänge innerhalb der Gleichrichterschaltung können über den angeschlossenen Schutzleiter und die Impedanz des Netzes andere elektrische Verbraucher am Versorgungsnetz beeinflussen. Die Störpfade werden maßgeblich durch Bauteile mit enger Platzierung zu geerdeten Gehäuseteilen definiert. Die meisten Bauteile besitzen planare Kühlflächen und erfordern einen Mindestabstand zum Gehäuse, um den Berührungsschutz des elektrischen Stromversorgungsgerätes sicherzustellen. In vielen Fällen genügt es daher, die Kapazität zwischen Bauteil und Gehäuse durch die Annahme eines Plattenkondensators abzuschätzen. Je enger stromführende Bauteile im Leistungspfad an geerdeten Gehäuseteilen platziert sind, desto stärker treten elektrostatische und elektromagnetische Effekte in Erscheinung. Konsequenterweise werden jedoch nur kapazitive Störpfade betrachtet, da durch elektromagnetische Induktion hervorgerufene Ströme durch das üblicherweise solide Metallgehäuse direkt kurzgeschlossen werden und den Strom in den Zuleitungen des Gerätes nicht beeinflussen. Weiterhin erlaubt die periodische Arbeitsweise des Gleichrichters die Darstellung der Störgrößen als Fourierreihe.

Für einen Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler ergeben sich prinzipiell zwei Ersatzschaltbilder, deren Gültigkeit durch das Vorzeichen des Eingangsstromes definiert wird. Wie jedoch gezeigt, kann daraus ein einzelnes Ersatzschaltbild erstellt werden. Dadurch ergeben sich Inzidenzmatrix und die Matrix der Zweigadmittanzen und es entsteht ein gesamtes Ersatzschaltbild, bestehend aus Gleichrichterschaltung, Netzfilter und Netznachbildung. Magnetische Kopplungen, welche bei häufig eingesetzten Gleichtaktdrosseln stets vorhanden sind, können durch zusätzliche Einträge in der Matrix der Zweigadmittanzen berücksichtigt werden. Zusammen mit den Spektren der Störgrößen wird dann das gesuchte Spektrum der Spannung an der Netznachbildung ermittelt.

Die Störspannung des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler wird prinzipiell anhand des Mittelwertmodells zur netzfreundlichen Stromaufnahme aus Kapitel 2.3 und dem Schaltmodell mit der Pulsweitenmodulation rekonstruiert. Bei der Modellierung der Störspannung ist dessen Spektrum jedoch von der Anzahl der Stützstellen des zeitlichen Verlaufs abhängig und führt beim Netzfilterentwurf zur Verarbeitung hoher Datenmengen. Es ist möglich, alle Verläufe des Mittelwertmodells anhand von Treppenfunktionen zu approximieren, um diesen Rechenaufwand zu vermeiden. Dadurch kann das Spektrum der Störspannung direkt anhand der Auswertung des Mittelwertmodells berechnet werden. Zudem ist die Auswertung der Approximation nicht von der Anzahl an Stützstellen des zeitlichen Signalverlaufs abhängig. Sie beschränkt sich lediglich auf die Frage des zu untersuchenden Frequenzbereich oder der zu untersuchenden Frequenzen. Das Spektrum zeigt typischerweise lokale Maxima

bei der Netzfrequenz, der Schaltfrequenz und allen ganzzahligen Vielfachen davon. Der Vergleich der Störspannung des Schaltmodells und dessen Approximation zeigt, dass bei einem Synchrongleichrichter mit Betrieb als Synchronwandler die Abweichungen der lokalen Maxima zwischen 0,0004 % und 8,49 % betragen. Beim Betrieb als Hochsetzsteller liegen die Abweichungen zwischen 0,008 % und 9,26 %.

Die vorgeschlagene Filterentwurfsmethode wird anhand einer gegebene Gleichrichterschaltung mit Synchronwandler, Netzfilter und vorgeschalteter Netznachbildung validiert. Zu dieser Schaltung wird ein Simulationsmodell mit realen leistungselektronischen Halbleiterbauelementen aufgebaut, dessen netzfreundliche Stromaufnahme durch eine zeitdiskrete Regelung eingestellt wird. Dieses Modell dient als Bewertungsreferenz. Die Abweichungen zwischen dem Referenzmodell und der vorgeschlagenen Entwurfsmethodik liegen zwischen 0,02 % und 7,32 %.

Als Fazit dieses Kapitels bleibt festzuhalten, dass nach aktuellem Stand der Technik keine ähnliche oder vergleichbare Entwurfsmethode für Netzfilterschaltungen von netzfreundlich arbeitenden Gleichrichtern bekannt ist. Alle diskutierten Abweichungen zwischen der vorgeschlagenen Entwurfsmethode und dem Referenzmodell einer realen Schaltung liegen in einem akzeptablen Bereich.

Kapitel 4

Drosselpulen und Filterdrosseln

Drosselpulen und Filterdrosseln sind aus physikalischer Sicht elektrische Speicher, deren Energie innerhalb elektrischer und magnetischer Felder enthalten ist. Der Speicherprozess, also die Zunahme beziehungsweise Abnahme von elektrischer Energie, ist jedoch nicht verlustfrei. Ein Teil der ausgetauschten elektrischen Energiemenge wird in eine andere Form, überwiegend Wärme, umgewandelt. Dieser Prozess lässt sich sehr anschaulich durch den Energiesatz der Feldtheorie

$$p_{\text{zu}} = - \oint_F (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{F} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{S}) dV + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (4.1)$$

aus [32, 48] beschreiben. Er besagt, dass die Differenz der zugeführten Leistung p_{zu} und abgegebenen Leistung

$$p_{\text{ab}} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{S}) dV \quad (4.2)$$

zu jedem Zeitpunkt der zeitlichen Änderung der magnetischen Feldenergie

$$w_{\text{m}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (4.3)$$

entspricht. Bei dieser Form des Energiesatzes wurde die elektrische Feldenergie bewusst vernachlässigt, da innerhalb dieses Kapitels nur Induktivität und Widerstand von Drosselpulen oder Filterdrosseln mit linearen magnetischen Materialien modelliert werden. Sofern die magnetische Feldstärke \vec{H} und die magnetische Flussdichte \vec{B} durch einen elektrischen Stromfluss oder genauer eine elektrische Stromdichte \vec{S} erzeugt werden, ist es sinnvoll, Gleichung 4.1 mit der Leistungsbilanz einer elektrischen Verschaltung elementarer Zweipole aus [7] zu vergleichen. Aus diesem Vergleich

$$p_{\text{zu}} = \int_V (\vec{E} \cdot \vec{S}) dV + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV = R i^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L i^2 \quad (4.4)$$

ergeben sich die Berechnungsvorschriften

$$L = \frac{1}{i^2} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (4.5)$$

der Induktivität und des elektrischen Widerstandes

$$R = \frac{1}{i^2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{S}) dV. \quad (4.6)$$

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, verlaufen die Belastungsgrößen beim Betrieb leistungselektronischer Schaltungen häufig periodisch. Unter der Annahme, dass dadurch die Feldgrößen der eingesetzten Drosselspulen und Filterdrosseln ebenfalls periodisch verlaufen, ist es sinnvoll, die komplexe Schreibweise für alle Signale und Feldgrößen einzuführen. Dadurch lässt sich der Energiesatz aus Gleichung 4.1 zu

$$- \oint_F (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{F} = (R_S + j\omega L_S) \hat{I}^2 \quad (4.7)$$

umformen. Wird in dieser Gleichung nur der Imaginärteil betrachtet, ergibt sich

$$L_S = \frac{1}{j2\omega \hat{I}^2} \oint_F \left\{ \vec{H}^* \times \vec{E} - \vec{H} \times \vec{E}^* \right\} \cdot d\vec{F} \quad (4.8)$$

zur Berechnung der Induktivität. Der Widerstand wird durch

$$R_S = \frac{1}{2 \hat{I}^2} \oint_F \left\{ \vec{H}^* \times \vec{E} + \vec{H} \times \vec{E}^* \right\} \cdot d\vec{F} \quad (4.9)$$

bestimmt. Mit den Gleichungen 4.5, 4.6, 4.8 und 4.9 ergeben sich somit zwei Möglichkeiten den Widerstand und die Induktivität von Drosselspulen und Filterdrosseln zu bestimmen. Die Gleichungen 4.5 und 4.6 sind stets gültig und können, für den Fall zeitlich konstanter Größen, direkt ausgewertet werden. Dieser Fall wird in der Literatur auch als Magnetostatik beziehungsweise stationäres Strömungsfeld [32] bezeichnet. Die Gleichungen 4.8 und 4.9 beschreiben den Spezialfall sinusförmiger Änderungen aller Größen. Die dadurch entstehenden elektrodynamischen Effekte werden in der Literatur typischerweise als Stromverdrängungs- oder Skineffekt bezeichnet [48, 32]. Stromverdrängungseffekte beschreiben ganz allgemein, dass Feldgrößen infolge ihrer zeitlichen Änderung an die Ränder elektrisch leitfähiger Medien verschoben werden. Erfahrungsgemäß wird durch diese Effekte die Induktivität gegenüber dem stationären Fall verringert und der Widerstand erhöht [64, 3, 6].

Das folgende Kapitel zeigt die Modellbildung von Induktivität, Widerstand und den daraus resultierenden Verlusten für typische Drosselspulen und Filterdrosseln in leistungselektronischen Schaltungen. Dabei werden Induktivität und Widerstand aufgrund des Energiesatzes der Feldtheorie separat betrachtet. In Kapitel 4.1 wird gezeigt, dass die Induktivität eines magnetischen Bauteils als Zweipol sich im Wesentlichen durch die Summe von drei Einzelinduktivitäten zusammensetzt. Eine dieser drei Einzelteile ist an die Gegenwart permeabler Materialien gebunden, die zwei weiteren Teile beschreiben die Induktivität von Luftspulen. Das magnetische Feld von Luftspulen wird üblicherweise durch die Lösung der vektoriellen Poisson-Gleichung für das Vektorpotential angegeben [32, 48]. Doch sowohl in integraler als auch in differentieller Form sind Lösungen für stromdurchflossene Massivleiter nur schwer zu ermitteln. In [32, 48] werden die Massivleiter durch infinitesimal dünne Stromfäden approximiert, welche mathematisch durch die Dirac-Funktionen dargestellt werden können. Dadurch kann eine geschlossene Lösung für die vektorielle Poisson-Gleichung in integraler Form angegeben werden. In [22] wurde diese Methode auf eine große Auswahl verschiedener Stromfadenanordnungen angewendet. In leistungselektronischen Schaltungen werden runde oder rechteckige Leiterschleifenanordnungen am häufigsten eingesetzt. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit die Methode der Approximation durch Stromfäden zur Modellierung der Induktivität von runden oder rechteckigen Luftspulen angewendet und verifiziert.

Wie bereits erwähnt, beinhaltet die gesamte Induktivität von Drosselspulen oder Filterdrosseln ebenfalls die Induktivität des permeablen Materials. Am häufigsten wird diese Induktivität durch sogenannte magnetische Reluktanz- bzw. Widerstandsmodelle berechnet [7]. Die Grundannahme dieser Modellbildung besteht darin, dass der magnetische Fluss vollständig im Kern erhalten bleibt. Unter dieser Annahme können anhand der Grundlagen stationärer Strömungsfelder, wie z.B. konforme Abbildungen oder analytische Funktionen, einfache Gleichungen gefunden werden, die letztendlich zur Definition und Standardisierung sogenannter Kernformfaktoren [6, 64] und einfachen Gleichungen für Luftspaltreluktanzen [59, 33] führen. In [55, 39] wird jedoch gezeigt, dass die Induktivität von der Position der Windungen entlang des magnetischen Kernes abhängig ist. Demnach ist es sinnvoll, die Induktivität für räumliche Anordnungen von Wicklung und magnetischem Kern zu berechnen. Die Modellierung ist im dreidimensionalen Raum jedoch deutlich komplexer als in der Ebene. Üblicherweise werden solche Probleme numerisch durch die sogenannte Finite-Elemente-Methode approximiert. Der dadurch resultierende Rechenaufwand kann je nach Komplexität des zu modellierenden Bauteils sehr hoch sein. Ein ebenfalls numerischer aber weitaus jüngerer Modellierungsansatz ist die sogenannte Randelementmethode [32]. Diese basiert auf dem Kirchhoffschen Satz und erlaubt es, das Feld in einem unbegrenzten Raum durch Integration über die Randbedingungen zu berechnen. Im Gegensatz zur finiten Elemente Methode müssen dabei nicht unsichere Randbedingungen entlang einer willkürlich definierten Hülle um die zu untersuchende Anordnung herum definiert werden. Die Hülle mit den Randbedingun-

gen ist die Oberfläche des wohldefinierten Kernes selbst. Diese Methode profitiert also im Wesentlichen durch weniger diskretisiertes Raumvolumen und weniger Unsicherheit und ist daher besser geeignet für den Entwurf von magnetischen Komponenten in leistungselektronischen Schaltungen.

Um die Integrale dieser Methode zu lösen, gibt es sowohl analytische wie aber auch numerische Ansätze. Ausgangspunkt dieser Ansätze sind die Arbeiten von [19, 55, 57, 56]. Innerhalb dieser Publikationen sind die Herleitungen des numerisch zu lösenden Gleichungssystems gezeigt. Die Auswertung des Gleichungssystems wird jedoch auf Problemstellungen in kartesischen Koordinaten beschränkt. Die Ergebnisse eignen sich also besonders gut für rechteckige Kernbauformen. Neben den rechteckigen Bauformen werden jedoch häufig rotationssymmetrische Bauformen eingesetzt, deren Geometrien sich durch zylindrische Koordinaten besser beschreiben lassen. Die besondere Herausforderung besteht also darin, die Integralgleichungen der Randelementmethode für zylindrische Koordinaten aufzustellen und zu lösen. Daher wird innerhalb dieser Arbeit die Randelementmethode zur Anwendung auf zylindrische Kernbauformen erweitert und die Auswertung anschließend anhand einer Finite-Elemente-Approximation verglichen und validiert.

Zudem eignet sich die Randelementmethode besonders gut zur Bestimmung von Stromverdrängungseffekten innerhalb der Windungen und damit zur Berechnung des frequenzabhängigen Widerstands des Wickeldrahtes. Da, wie oben bereits erwähnt, die gewählte Kernbauform und die Anordnung der Wicklung den Streufluss bestimmt, sind die entstehenden Verluste ebenfalls vom Aufbau der magnetischen Komponente abhängig [3]. Um diese Verluste möglichst exakt zu modellieren, wurden Verfahren zur Approximation des Streufeldes in der Nähe der Windungen von Drosselspulen und Filterdrosseln oder Transformatoren entwickelt [18, 1]. Diese Methoden beinhalten häufig einen zweidimensionalen Störpotentialansatz [2]. Das Störpotential wird dabei so gewählt, dass am Rand des Kernmaterials vorgegebene Randbedingungen erfüllt werden, welche zuvor anhand eines Reluktanzmodells ermittelt worden sind. Der Ansatz führt bei sogenannten zweidimensionalen Randwertproblemen zu verwertbaren Ergebnissen und ist innerhalb von computergestützten Designtools schnell ausführbar [2]. Um für dreidimensionale Problemstellung nicht auf die rechenintensive Methode der finiten Elemente zurückgreifen zu müssen, kann die magnetische Feldstärke und der frequenzabhängige Widerstand auch mit Hilfe der Randelementmethode bestimmt werden.

Da mit diesem Ansatz sowohl der Kern als auch die Windungen in einzelne kleine Teile diskretisiert werden, kann für die Modellierung des frequenzabhängigen Widerstands der kurzen Leiterdrahtabschnitte infolge longitudinaler Stromdichteverteilungen, also entlang der Wickelrichtung des Drahtes fließender Wirbelströme, die Lösung der zweidimensionalen Bessel'schen Differentialgleichung direkt angegeben werden [32]. Wie jedoch in [32] gezeigt, können auch azimutale Stromdichteverteilungen, also quer zur Wickelrichtung des Drahtes fließende Wirbelströme, den frequenzabhängigen Wi-

derstand beeinflussen. Diese können natürlich nur bei der Analyse räumlicher Anordnungen von Wickeldraht und magnetischem Kern berücksichtigt werden. Im Gegensatz zur Methode der finiten Elemente muss die Querschnittsfläche des Wickeldrahtes nicht diskretisiert werden. Dadurch kann viel Rechenaufwand gespart werden, denn die häufig sehr dünnen und filigranen Wicklungsabschnitte werden insbesondere bei Litzedrähten in umso kleinere Abschnitte diskretisiert. Da der Widerstand von räumlich ausgedehnten Drosselspulen und Filterdrosseln innerhalb von wissenschaftlichen Publikationen häufig durch die rechenintensive Methode der finiten Elemente untersucht worden ist und zudem bei dieser Methode nicht zwischen longitudinalen und azimuthalen Wirbelstromeffekten unterschieden wird, sind bisher keine weitreichenden Untersuchungen zur Kombination aus Randelementmethode mit den analytischen Gleichungen für frequenzabhängigen Widerstand infolge longitudinaler und azimuthaler Stromverdrängungseffekte bekannt. Die erwähnten Vorteile hinsichtlich des Rechenaufwands machen diese neuartige Kombination für einen effizienten Entwurf von Drosselspulen und Filterdrosseln in leistungselektronischen Schaltungen interessant und rechtfertigen eine wissenschaftliche Untersuchung. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit eine Entwurfsmethode bestehend aus der Randelementmethode in Kombination mit den analytischen Gleichungen für frequenzabhängigen Widerstand infolge longitudinaler und azimuthaler Stromverdrängungseffekte entwickelt und bewertet.

4.1 Induktivitätsmodelle

Die Induktivität $L_{i,j}$ ist ein Koeffizient zur Berechnung der gespeicherten Energie eines magnetischen Feldes, dass durch die Ströme I_i und I_j in zwei Leiterschleifen i und j entsteht. Im Falle stationärer Magnetfelder wird die Induktivität zwischen diesen beiden Leitern durch den Zusammenhang

$$L_{i,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_L} (\vec{B}_j \cdot \vec{H}_i) dV_L \quad (4.10)$$

bestimmt. Durch die Einführung des Vektorpotentials \vec{A}_j

$$\vec{B}_j = \vec{\nabla}_j \times \vec{A}_j$$

aus [32] kann (4.10) umgeformt werden zu

$$L_{i,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_L} (\vec{A}_j \cdot \vec{S}_i) dV_L \quad (4.11)$$

Das Vektorpotential \vec{A}_j wird durch die Stromdichte \vec{S}_j im j -ten Leiter, mit all seinen Wirkungen, erzeugt. Der Zusatz des letzten Satzes bezieht sich insbesondere auf die

Auswirkungen magnetischer Felder auf magnetisch leitfähige bzw. permeable Materialien. Diese haben die Eigenschaft, auf ein von außen angelegtes Feld zu reagieren, sodass von dem Material selbst ein magnetisches Feld erzeugt wird [32]. Das von außen angelegte Feld wird auch als das Feld des freien Raumes bezeichnet. Das reagierende Feld ist an die Gegenwart permeabler Materialien gebunden und wird demnach als gebundenes Feld bezeichnet. Die Summe beider Felder

$$\vec{A}_j = \vec{A}_{Fj} + \vec{A}_{Gj} \quad (4.12)$$

ergibt das gesamte Vektorpotential. Wie später gezeigt wird, kann das Feld \vec{A}_{Gj} durch die Modellierung fiktiver magnetischer Ströme bzw. Ladungen berücksichtigt werden [9]. Zur anschaulichen Erläuterung dieses Sachverhalts zeigt Abbildung 4.1 eine beispielhaften Anordnung kreisrunder infinitesimal dünner Stromfäden. Abgesehen von dem Würfel der Permeabilität μ sei die Umgebung leer, sodass die Permeabilität überall dort den Wert μ_0 annimmt. Zunächst wird das magnetische Feld der Ströme I_i und I_j im lee-

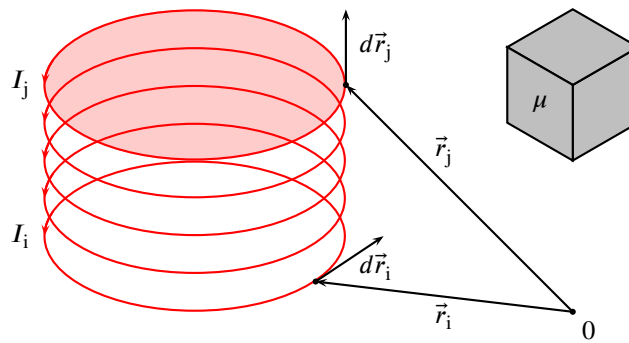


Abbildung 4.1: Magnetisierbarer Würfel in der Nähe kreisförmiger Leiterschleifen

ren Raum betrachtet. Dazu wird der Würfel als sehr weit entfernt angenommen, sodass er das magnetische Feld der freien Spule nicht beeinflusst

$$\vec{A}_{Gj} = 0$$

Für dünne Stromfäden wird das Vektorpotential des Stromes in der j -ten Leiterschleife durch das Integral

$$\vec{A}_{Fj} = \frac{\mu_0 I_j}{4 \pi} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (4.13)$$

bestimmt. Durch Einsetzen der Gleichung 4.13 in Gleichung 4.11 wird die Induktivität $L_{Fi,j}$ zwischen der i -ten und der j -ten Leiterschleife durch Integration über die Leiterschleifenkonturen C_i und C_j

$$L_{Fi,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_i} \frac{d\vec{r}_j \cdot d\vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (4.14)$$

berechnet. Die gespeicherte Energie der beiden Ströme wird in Anlehnung an Gleichung 4.5 durch

$$W_{Fi,j} = \frac{1}{2} L_{Fi,j} I_i I_j \quad (4.15)$$

berechnet. Für $i = j$ muss das Vektorpotential \vec{A}_{Fi} entlang seiner erzeugenden Stromkontur selbst integriert werden. Deshalb wird $L_{Fi,i}$ als Selbstinduktivität und $L_{Fi,j}$ als Gegeninduktivität bezeichnet.

Nun befinde sich der Würfel in die Nähe der Stromschleifen

$$\vec{A}_{Gj} \neq 0.$$

Die dadurch entstehende Verzerrung des freien Feldes wird mit dem Ansatz nach Gleichung 4.12 modelliert. Bleiben alle Schleifenströme während dieses Vorgangs konstant, muss Arbeit aufgrund der Feldänderung verrichtet werden. Diese Arbeit wird der gesamten Anordnung durch die mechanische Verschiebung des Würfels zugeführt. Ist dieser Vorgang verlustlos, so muss die Arbeit als magnetische Energie innerhalb des Feldes gespeichert sein. Demnach wird dieser Energieanteil $W_{Gi,j}$ zum Energieinhalt zweier stromführender Leiterschleifen im freien Raum

$$W_{i,j} = W_{Fi,j} + W_{Gi,j} \quad (4.16)$$

hinzugefügt. Der Induktivitätskoeffizient $L_{Gi,j}$ wird durch Differenzbildung der im Feld gespeicherten Energie mit und ohne Würfel

$$L_{Gi,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_V \left(\vec{H}_i \cdot \vec{B}_j - \vec{H}_{Fi} \cdot \vec{B}_{Fj} \right) dV \quad (4.17)$$

bestimmt. Dieses Integral wird zu

$$L_{Gi,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_V \left(\vec{H}_{Fi} \cdot \vec{B}_j - \vec{H}_i \cdot \vec{B}_{Fj} \right) dV \quad (4.18)$$

umgeformt. Die Integration über die Differenz von Gesamt- und Würfelvolumen $V - V_K$ liefert keinen Beitrag, da in diesem Bereich die Feldgrößen durch $\vec{B}_{Fi} = \mu_0 \vec{H}_{Fi}$ und

$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{H}_i$ verknüpft sind. Für $i = j$ ist dieser Zusammenhang direkt ersichtlich. In allen anderen Fällen tauchen die Terme $\vec{H}_i \cdot \vec{H}_{Fj}$ doppelt und mit entgegengesetzten Vorzeichen auf. Sie verschwinden bei der Bildung der Gesamtenergie, weshalb der Ausdruck in Gleichung 4.18 zu

$$L_{Gi,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_K} \left(\vec{H}_{Fi} \cdot \vec{B}_j - \vec{H}_i \cdot \vec{B}_{Fj} \right) dV_K \quad (4.19)$$

abgeändert wird. Mit dem Ansatz

$$\vec{B}_j = \mu_0 \left(\vec{H}_j + \vec{M}_j \right) \quad (4.20)$$

aus [48] wird der Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und der magnetischen Flussdichte innerhalb des permeablen Materials durch die Magnetisierung \vec{M}_j ausgedrückt. Durch Einsetzen von Gleichung 4.19 und erneuter Betrachtung der Gesamtenergie folgt dann

$$L_{Gi,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_K} \vec{B}_{Fi} \cdot \vec{M}_j dV_K. \quad (4.21)$$

Das eigentliche Problem besteht nun darin, \vec{M}_j innerhalb des permeablen Würfels zu bestimmen. In [48] und insbesondere in [32] wird gezeigt, dass bei Anwesenheit permeabler Medien die magnetische Feldstärke wie im Vakuum berechnet werden kann, sofern fiktive magnetische Ladungen ρ_j eingeführt werden. Diese Ladungen befinden sich innerhalb und auf der Oberfläche des Würfels

$$\vec{\nabla}_i \cdot \vec{H}_j = -\vec{\nabla}_i \cdot \vec{M}_j = \rho_j$$

und sind Quellen der magnetischen Feldstärke. Die Feldlinien von \vec{H}_j starten und enden demnach in den Raumpunkten des Würfels und haben zusätzlich Wirbel an den Stellen des stromführenden Leiters. Es besitzt also sowohl Quellen als auch Wirbel. Mit den Forderungen

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla}_i \cdot \vec{H}_{Fj} \\ \vec{S}_j &= \vec{\nabla}_i \times \vec{H}_{Fj} \\ 0 &= \vec{\nabla}_i \times \vec{H}_{Gj} \\ \rho_j &= \vec{\nabla}_i \cdot \vec{H}_{Gj} \end{aligned}$$

aus [19] kann deshalb die Gesamtfeldstärke

$$\vec{H}_j = \vec{H}_{Fj} + \vec{H}_{Gj} \quad (4.22)$$

durch Überlagerung einer wirbel- und quellenfreien Anteils modelliert werden. Die Feldstärke im freien Raum wird durch Bildung der Rotation des Vektorpotentials aus Gleichung 4.13

$$\vec{H}_{Fj} = \frac{I_j}{4\pi} \left(\vec{\nabla}_i \times \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \quad (4.23)$$

gewonnen. Aufgrund fehlender Wirbel wird \vec{H}_{Gj} als Gradientenfeld eines magnetischen Skalarpotentials

$$\vec{H}_{Gj} = -\vec{\nabla} \Phi_M = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int_{V_K} \left(\vec{M}_j \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_K}{|\vec{r} - \vec{r}_K|^3} \right) dV_K \quad (4.24)$$

dargestellt [32]. Der Ortsvektor \vec{r} beschreibt einen beliebigen Punkt im gesamten Raum während \vec{r}_K auf einen Raumpunkt des Würfels zeigt. Für dieses Volumenintegral ist kein analytisches Lösungsverfahren bekannt. Dazu wird das Volumen zunächst in N Teilvolumina zerlegt. Unter Berücksichtigung von

$$\vec{\nabla}_K \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_K|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_K}{|\vec{r} - \vec{r}_K|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_K|}$$

und unter der Annahme, dass in einem kleinen Teilvolumen die Magnetisierung konstant sei, wird Gleichung 4.24 zu

$$\vec{H}_{Gj} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \vec{\nabla}_i \left(\vec{M}_{j,n} \cdot \int_{V_{K_n}} \vec{\nabla}_K \frac{dV_{K_n}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{K_n}|} \right)$$

umgeformt. Mit dem Gaußschen Integralsatz [10] wird das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral

$$\vec{H}_{Gj} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \vec{\nabla} \left(\vec{M}_{j,n} \cdot \oint_{F_{K_n}} \frac{d\vec{F}_{K_n}}{|\vec{r} - \vec{r}_{K_n}|} \right) \quad (4.25)$$

umgewandelt. Wird der Gradient des Skalarproduktes gebildet, so kann die Feldstärke als

$$\vec{H}_{Gj} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \oint_{F_{K_n}} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{K_n}}{|\vec{r} - \vec{r}_{K_n}|^3} \left(\vec{M}_{j,n} \cdot d\vec{F}_{K_n} \right) \quad (4.26)$$

dargestellt werden. Durch Einsetzen von Gleichung 4.26 in Gleichung 4.22 ergibt sich

$$\frac{\vec{M}_j}{\chi_r} = \vec{H}_{Fj} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \oint_{F_{Kn}} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_{Kn}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{Kn}|^3} \left(\vec{M}_{j,n} \cdot d\vec{F}_{Kn} \right), \quad (4.27)$$

wobei ausgenutzt wird, dass für lineares magnetisches Material

$$\mu_0 \left(\vec{H}_{Fj} + \vec{H}_{Gj} + \vec{M}_j \right) = \mu_0 \mu_r \vec{H}_j \Rightarrow \vec{M}_j = \vec{H}_j (\mu_r - 1) = \vec{H}_j \chi_r$$

gilt. Nun werden N Raumpunkte ausgewählt, deren Ortsvektoren \vec{r}_m jeweils auf die Mittelpunkte der kleinen Teilvolumen zeigen. Mit der Auswertung von Gleichung 4.23 an der Stelle \vec{r}_n wird aus Gleichung 4.27

$$0 = \vec{H}_{Fj,m} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \oint_{F_{Kn}} \frac{\vec{r}_m - \vec{r}_{Kn}}{|\vec{r}_m - \vec{r}_{Kn}|^3} \left(\vec{M}_{j,n} \cdot d\vec{F}_{Kn} \right) - \frac{\vec{M}_{j,m}}{\chi_r}. \quad (4.28)$$

Wird diese Gleichung mit den jeweiligen Basisvektoren des Raumpunktes \vec{r}_n multipliziert ergibt sich ein lineares Gleichungssystem. Daher wird Gleichung 4.28 als

$$0 = \vec{I} \cdot \vec{H}_{Fj,m} + \sum_{n=1}^N T_{n,n} \cdot \vec{M}_{j,n} - \frac{1}{\chi_r} \vec{I} \cdot \vec{M}_{j,m} \quad (4.29)$$

dargestellt. Die Operatoren dieser Gleichung sind im Sinne der Matrizenmultiplikation und Addition durchzuführen. Wird diese Gleichungsumformung für jeden der N Raumpunkte durchgeführt, so ergibt sich ein Gleichungssystem mit $3 N$ unbekannten Magnetisierungen und $3 N$ Gleichungen. Mit der Lösung dieses Gleichungssystems und der Beziehung

$$\vec{B}_{Fi,n} = \mu_0 \vec{H}_{Fi,n}$$

werden die Induktivitätskoeffizienten aus Gleichung 4.18 durch die Summe

$$L_{Gi,j} = \frac{1}{I_i I_j} \sum_{n=1}^N \left(\vec{B}_{Fi,n} \cdot \vec{M}_{j,n} \right) \Delta V_K \quad (4.30)$$

angenähert, wobei das kleine Volumen ΔV_K von den gewählten Basisvektoren abhängt.

Durch die Gleichungen 4.14 und 4.30 kann die magnetische Energie aus Gleichung 4.16 vollständig berechnet werden. Um die Gleichungen auswerten zu können, müssen geeignete Basisvektoren gewählt werden. Diese sollten der Anwendung entsprechend so gewählt werden, dass insbesondere die Ortsvektoren \vec{r}_i und \vec{r}_K die Raumpunkte des

Kernvolumens einfach beschreiben. Die überwiegend eingesetzten Kernbauformen haben entweder rechteckige oder runde Querschnittsflächen. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher die Gleichungen 4.14 und 4.30 für kartesische und zylindrische Koordinaten ausgewertet.

Die folgenden Abschnitte zeigen zunächst die Modellierung der Induktivität von Luftspulen. Anschließend erfolgt die Auswertung von Drosselspulen, bei denen die Wicklungen von magnetisch leitfähigen Kernen umgeben sind [63].

4.1.1 Luftspulen

Zur Berechnung der Selbstinduktivität einer Leiteranordnung im freien Raum muss das Integral der Gleichung 4.14 ausgewertet werden. Dabei fällt auf, dass der Integrand gegen Unendlich strebt. Der Selbstinduktivität kann demnach kein endlicher Wert zugewiesen werden. Das liegt insbesondere an der Einführung infinitesimal dünner Stromfäden, die benötigt werden um Integrale zu vereinfachen. Eine reale stromdurchflossene Leiterschleife muss aber einen endlichen Wert besitzen, da ein unendlicher Energieinhalt physikalisch nicht plausibel ist. Zur Bestimmung der Selbstinduktivität einer Leiteranordnung muss also wieder die reale Leiterschleifenanordnung mit räumlicher Stromdichteverteilung betrachtet werden. Um die Berechnung der Selbstinduktivität möglichst anschaulich zu erläutern, zeigt Abbildung 4.2 eine einfache stromdurchflossene Leiterschleife. Der gesamte Energieinhalt dieser einzelnen Leiterschleife ergibt sich nun durch

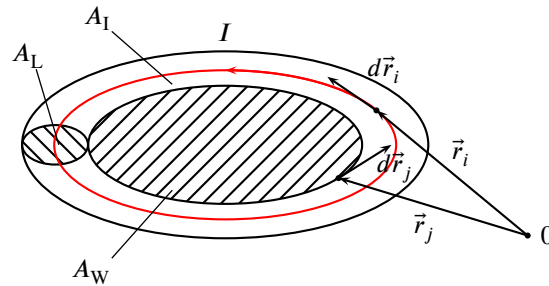


Abbildung 4.2: Stromführende Leiterschleife

Integration der Energiedichte im gesamten Raum. Dieses Integral wird in zwei Teilintegrale aufgeteilt

$$L_{Fi,i} = L_{Ii} + L_{Ai} = \frac{1}{I_i^2} \int_{V_L} (\vec{B}_i \cdot \vec{H}_i) dV_L + \frac{1}{I_i^2} \int_{V_\infty - V_L} (\vec{B}_i \cdot \vec{H}_i) dV_L. \quad (4.31)$$

Der erste Term repräsentiert die Energie des magnetischen Feldes innerhalb des Leiters. Wie in [15] oder [23] gezeigt, wird L_{Ii} deshalb als innere Selbstinduktivität bezeichnet

und durch

$$L_{Li} = \frac{1}{I^2} \int_{V_L} \mu \left| \vec{H}_i \right|^2 dV_L \quad (4.32)$$

berechnet. Werden Verjüngungen insbesondere an Schleifenabschnitten mit besonders kleinen Kurvenradien oder gar abknickenden Stellen vernachlässigt, so kann Gleichung 4.32 als ein Flächenintegral

$$L_{Li} = \frac{l}{I_i^2} \int_{F_L} \mu \left| \vec{H}_i \right|^2 dF_L \quad (4.33)$$

dargestellt werden, wobei l die Länge der Leiterschleife ist. Bei homogener Stromdichteverteilung innerhalb des Leiterquerschnitts kann \vec{H}_i häufig sehr einfach bestimmt werden, wie später gezeigt wird.

Die Energie außerhalb des Leitervolumens wird durch den zweiten Term der Gleichung 4.31 repräsentiert. Dementsprechend wird L_{Ai} als äußere Selbstinduktivität bezeichnet. Das Volumenintegral wird über den Gaußschen Integralsatz zu einem Oberflächenintegral

$$\int_{V_\infty - V_L} \left(\vec{B}_i \cdot \vec{H}_i \right) dV_L = \oint_{F_L} \vec{A}_i \cdot \left(\vec{n} \times \vec{H}_i \right) dF_L = \oint_{F_L} \left(\vec{A}_i \cdot \vec{K}_i \right) dF_L$$

umgeformt und das Kreuzprodukt zwischen dem Normvektor der Leiteroberfläche \vec{n} und der Feldstärke \vec{H}_i als Flächenstrombelag \vec{K}_i interpretiert. Die äußere Induktivität wird dann durch

$$L_{Ai} = \frac{1}{I_i^2} \oint_{F_L} \left(\vec{A}_i \cdot \vec{K}_i \right) dF_L \quad (4.34)$$

berechnet. Um die komplizierte Integration über die Leiteroberfläche zu vermeiden wird der Flächenstrombelag als eine Summe von M Stromfäden approximiert. Daraus ergibt sich

$$L_{Ai} = \frac{1}{I_i^2} \sum_{m=1}^M I_{im} \oint_{F_{Lm}} \vec{A}_i \cdot d\vec{r}_{i,m} . \quad (4.35)$$

Die Summe der Teilströme I_{im} muss wiederum den Gesamtstrom ergeben. Wird angenommen, dass alle Teilströme gleich groß sind, so wird die äußere Selbstinduktivität vereinfacht als

$$L_{Ai} = \frac{1}{I_i} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \oint_{F_{Lm}} \vec{A}_i \cdot d\vec{r}_{i,m} \quad (4.36)$$

dargestellt. Die äußere Induktivität ist demnach der Mittelwert der Integrale des Vektorpotentials entlang von Schleifenkonturen auf der Oberfläche des stromführenden Leiters. Dabei sei angemerkt, dass der Flächenstrombelag \vec{K}_i bzw. die Stromfäden $I_{i,m}$ keinesfalls als Wirbel des Vektorpotentials interpretiert werden dürfen. Bei dieser Annahme wäre das Vektorpotential auf der Oberfläche des Leiters nicht endlich und die Induktivität dadurch unendlich groß. Aufgrund der Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Flussdichte auf der Oberfläche des Leiters [32] ist es daher sinnvoll, die Wirbel des Vektorpotentials als einen dünnen Stromfaden in der Mitte des stromführenden Leiters zu modellieren. Abbildung 4.3 zeigt ein Schnittbild der ringförmigen Leiterschleife aus Abbildung 4.2 und verdeutlicht den durch die Mitte verlaufenden Stromfaden I_i . Mit Hilfe dieser Skizze kann zusätzlich festgehalten werden, dass die Integrale aus Gleichung 4.36 auch als magnetische Flüsse durch die jeweils aufgespannten Flächen der Oberflächenkonturen (gerade Linienverbindungen der roten Punkte auf der Leiteroberfläche) aufgefasst werden. Damit entspricht die äußere Selbstinduktivität einer Leiterschleife

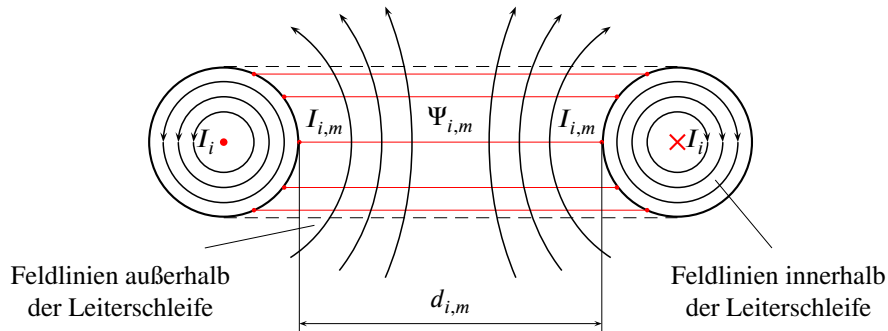


Abbildung 4.3: Querschnitt der stromführenden Leiterschleife und Darstellung des Flusses $\Psi_{i,m}$ durch die Fläche mit dem Durchmesser $d_{i,m}$

dem arithmetische Mittelwert des magnetischen Flusses

$$L_{Ai} = \frac{\bar{\Psi}_i}{I_i} . \quad (4.37)$$

Kreisrunde oder rechteckförmige gewickelte Leiterschleifen sind die am häufigsten angewendeten Wickelformen für Drosselpulen, Filterdrosseln oder Transformatoren. Dabei wird überwiegend Runddraht, Litzendraht oder auf der schmalen Kante gewickelter Flachdraht verwendet. Litzendraht kann aus schaltungstechnischer Sicht als eine Parallelschaltung mehrerer Runddrähte mit sehr kleinem Durchmesser aufgefasst werden und wird deshalb nicht explizit ausgewertet.

Kreisförmige Leiterschleifen

Nach Gleichung 4.33 wird zur Auswertung der inneren Selbstinduktivität einer Leiterschleife die magnetische Feldstärke \vec{H}_i im Inneren des Leiters benötigt. Für Wicklungen eines homogen stromdurchflossenen Runddrahts mit dem Drahtradius r_L ist die Feldstärke durch

$$\vec{H}_i = \frac{I_i r}{2\pi r_L^2} \vec{e}_\varphi \quad (4.38)$$

gegeben [32]. Dabei wird berücksichtigt, dass die Permeabilität von Kupfer ungefähr der Permeabilität unter Vakuum $\mu_{\text{Cu}} \approx \mu_0$ entspricht. Die Auswertung von Gleichung 4.33 in Polarkoordinaten

$$L_{\text{li}} = \frac{l \mu_0}{I_i^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_L} \left(\frac{I_i r}{2\pi r_L^2} \right)^2 r dr d\phi = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (4.39)$$

zeigt [23], dass die innere Selbstinduktivität eines homogen stromdurchflossenen Runddrahtes proportional zur Wicklungslänge l und unabhängig vom Drahtradius r_L ist. Zudem ist sie unabhängig von der Wicklungsführung. Zur Auswertung dieser Gleichung kann mit dem Zahlenwert für die Permeabilität in Vakuum festgehalten werden, dass Runddraht mit einer Länge von 10 cm bereits eine innere Selbstinduktivität von 5 nH besitzt.

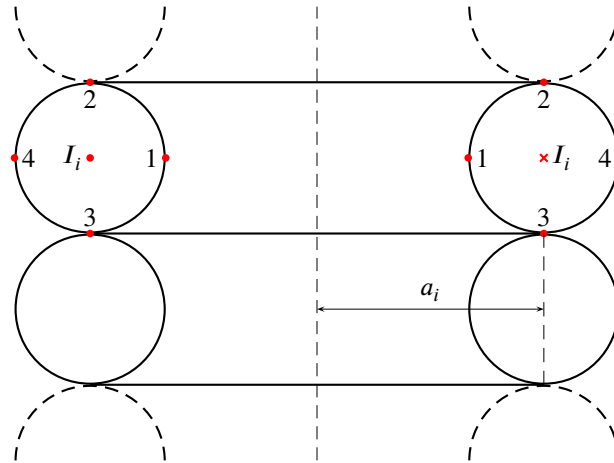


Abbildung 4.4: Querschnitt einer einlagigen Wicklung mit kreisrunden Windungen und den Konturen 1-4 auf der Oberfläche einer Windung

Bei einer kreisrund geführten Wicklung aus N Windungen einer Lage, wie in Abbildung 4.4 gezeigt, kann die Länge der Wicklung durch den N -fachen mittleren Umfang

einer Windung der entsprechenden Lage angenähert werden. Dadurch ergibt sich

$$L_{li} = \frac{\mu_0 N a_i}{4} \quad (4.40)$$

zur Ermittlung der inneren Selbstinduktivität. Zur Berechnung der äußeren Selbstinduktivität werden die magnetischen Flüsse durch die mit 1-4 gekennzeichneten Konturen aus Abbildung 4.4 gebildet. Nach [48] wird der magnetische Fluss durch die Fläche der Kontur m mit

$$\Psi_{im} = I_i \mu_0 \sqrt{(a_i + a_{i,m})^2 + z_{i,m}^2} \left\{ \left(1 - \frac{k_{i,m}^2}{2} \right) K(k_{i,m}) - E(k_{i,m}) \right\} \quad (4.41)$$

und

$$k_{i,m}^2 = \frac{4 a_i a_{i,m}}{(a_i + a_{i,m})^2 + z_{i,m}^2}$$

berechnet. Die Funktionen $K(k)$ und $E(k)$ sind Abkürzungen für die sogenannten vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung. Deren Funktionswerte können für $k_{i,j} \in [0, 1]$ aus Tabellen in [10] entnommen werden. Bei vielen Rechenprogrammen, wie z.B. MATLAB, sind die Funktionswerte bereits hinterlegt oder werden durch geeignete Methoden approximiert. Eine Deutung der physikalischen Plausibilität der elliptischen Integrale passt jedoch thematisch nicht in den Rahmen dieser Arbeit. Daher sei an dieser Stelle auf [32] und [48] verwiesen.

Abbildung 4.5 zeigt eine Auswertung der inneren und äußeren Selbstinduktivität für den laufenden Schleifenradius a_i bei verschiedenen Drahradien r_L . Die innere Selbstinduktivität wächst, wie zu erwarten linear, mit dem Drahradius. Dabei ist der Wertebereich der inneren Selbstinduktivität deutlich kleiner als der der äußeren Selbstinduktivität. Erst unter einem Längenverhältnis von $a_i/r_L \approx 10$ ist das Induktivitätsverhältnis $L_{Ai}/L_{li} \leq 10$. Die äußere Induktivität nimmt für $a_i = r_L$ den kleinsten Wert an. Das ist auch sinnvoll, da für diesen Fall die innere Kontur der Leiterschleife (Kontur 1 aus Abbildung 4.4) kein magnetisches Feld umschließt. Ebenso ist zu erkennen, dass die äußere Selbstinduktivität abnimmt, wenn der Drahradius zunimmt. Das liegt insbesondere daran, dass das Vektorpotential nach Gleichung 4.13 auf der Oberfläche des Leiters nicht exakt hyperbelförmig abnimmt, während die Integrationslängen linear mit zunehmendem Drahradius ansteigen. Weitere Erläuterungen zu diesem Thema befinden sich in [3].

Die schwarzen Punkte zeigen das Ergebnis einer Berechnung anhand der FEM für dieselbe Anordnung. Die Abweichungen sind in allen Punkten annähernd gleich. Allerdings liegen die Werte selbst in einem Bereich unter 1 nH. Hinsichtlich der praktischen Relevanz dieses Modells sind diese Abweichungen akzeptabel, weshalb der Grund der Abweichungen nicht näher fokussiert wird. Zudem sind Konstellationen mit $a_i/r_L \leq 10$

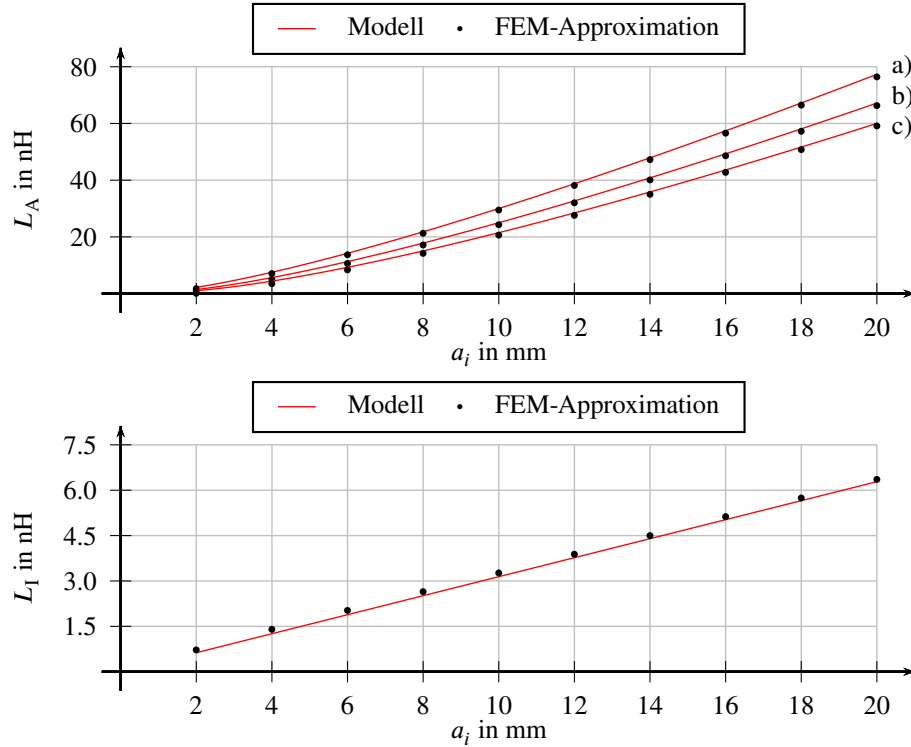


Abbildung 4.5: Äußere Selbstinduktivität für a) $r_L = 1,0$ mm b) $r_L = 1,5$ mm c) $r_L = 2,0$ mm und innere Selbstinduktivität einer kreisrunden Leiterschleife aus Runddraht

aus fertigungstechnischen Gründen nicht sinnvoll. Dementsprechend kann die innere Selbstinduktivität für den praktischen Entwurf von Luftspulen mit kreisrund geführten Wicklungen in erster Näherung vernachlässigt werden.

Der Rechenaufwand hängt bei der Auswertung von Gleichung 4.41 davon ab, über wie viele magnetische Flüsse der Mittelwert gebildet wird. In [3] und in [15] wird der Rechenaufwand auf ein Minimum reduziert, indem der magnetische Fluss nur auf der Innenseite des Runddrahtes, also durch die Fläche mit der Kontur 1 aus Abbildung 4.4, bestimmt wird. Die Genauigkeit muss dementsprechend abnehmen. Der Fluss ergibt sich dann zu

$$\Psi_i = I_i \mu_0 (2 a_i - r_L) \left\{ \left(1 - \frac{k_A^2}{2} \right) K(k_A) - E(k_A) \right\} \quad (4.42)$$

mit

$$k_A^2 = \frac{4 a_i (a_i - r_L)}{(2 a_i - r_L)^2}.$$

Eine Auswertung der beiden Ansätze aus Gleichung 4.41 und 4.42 ist in Abbildung

4.6 zu sehen. Wie zu erwarten, liegt die äußere Selbstinduktivität näher an der FEM-approximierten Lösung. Die maximale Abweichung zwischen FEM-Lösung und $\bar{\Psi}_i$ beträgt 1,13 %. Für Ψ_i beträgt die maximale Abweichung 1,82 %.

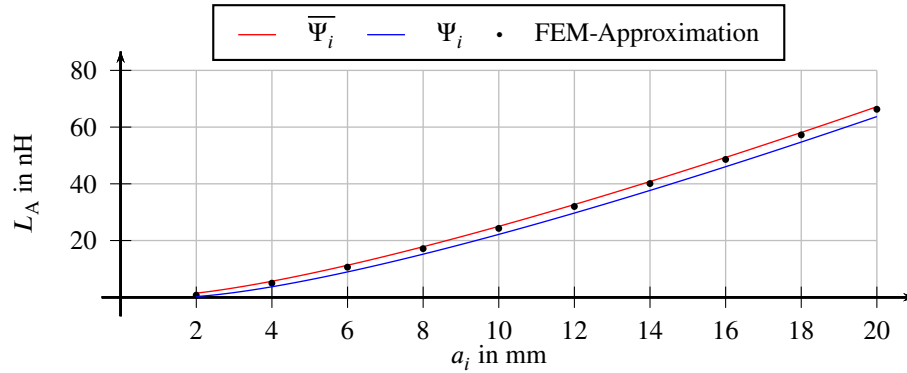


Abbildung 4.6: Vergleich der Ansätze zur Berechnung der äußeren Selbstinduktivität einer kreisrunden Leiterschleife aus Runddraht nach Gleichung 4.42 (blau) bzw. Gleichung 4.41 (rot) für $r_L = 1,5$ mm

In Anlehnung an die Auswertung aus [3] wird im nächsten Schritt die gesamte Induktivität einer aus Runddraht gewickelten Luftspule ermittelt, deren Leiterschleifen symmetrisch und kreisrund um eine Rotationsachse angeordnet sind. Eine skizzenhafte Darstellung einer solchen Anordnung zeigt Abbildung 4.1. Dazu müssen die Gegeninduktivitäten zwischen den einzelnen Leiterschleifenpaaren gebildet werden. Für eine Spule, deren Wicklungen alle vom gleichen Strom durchflossen werden, ergibt sich die Gesamtinduktivität einer Wicklung mit N Windungen ganz allgemein zu

$$L_F = \sum_{i=1}^N L_{Li} + \sum_{i=1}^N L_{Ai} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{Fi,j}, \quad (4.43)$$

wobei $L_{Fi,j}$ die Gegeninduktivität zwischen der i -ten und j -ten Leiterschleife darstellt. Um die Gegeninduktivität zu bestimmen, werden alle stromdurchflossenen Windungen wieder durch infinitesimal dünne Stromfäden approximiert. Die Lösung dieser Problemstellung ist bereits in [37] angegeben und ist zur Anpassung an die Nomenklatur dieser Arbeit in Kapitel B.1 beschrieben. Demnach wird die Gegeninduktivität zwischen zwei kreisrunden Leiterschleifen mit gemeinsamer Rotationsachse durch

$$L_{Fi,j} = \mu_0 \sqrt{(a_i + a_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \left\{ \left(1 - \frac{k_{i,j}^2}{2} \right) K(k_{i,j}) - E(k_{i,j}) \right\} \quad (4.44)$$

mit

$$k_{i,j}^2 = \frac{4 a_i a_j}{(a_i + a_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

gebildet. Die Position der Windungen wird dabei durch die Verschiebungen z_i und z_j entlang der Rotationsachse und durch die Radien a_i und a_j der jeweiligen Leiterschleife eingestellt. Für die Auswertung wird eine Luftspule mit $N = 12$ Windungen und einem Drahtradius von $r_L = 1,5$ mm aufgebaut. Abbildung 4.7 zeigt die Gesamtinduktivität wobei die äußere Selbstinduktivität nach Gleichung 4.41 berechnet wird. Bei allen drei

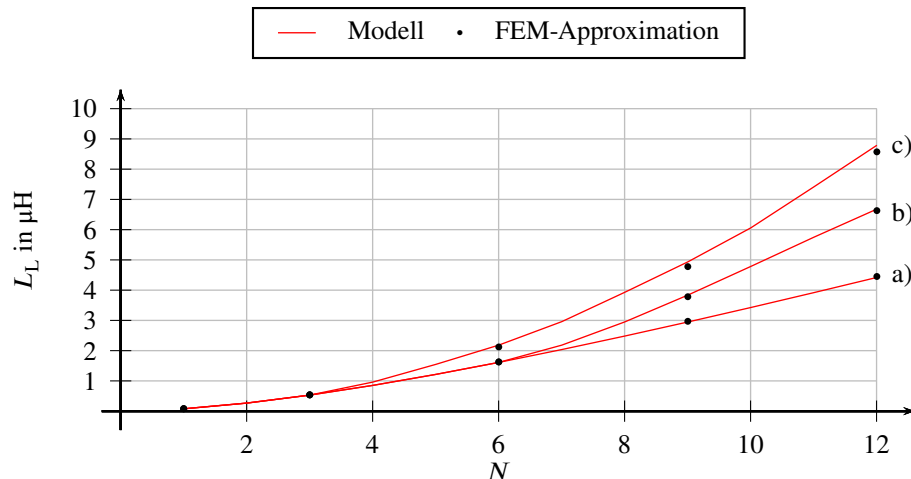


Abbildung 4.7: Gesamtinduktivität einer kreisrund gewickelten Luftspule mit $r_L = 1,5$ mm und maximal a) 12 b) 6 c) 3 Windungen pro Lage

Wicklungsanordnungen beträgt der innere Radius $a_i = 20$ mm. Das lässt sich gut daran erkennen, dass in allen drei Fällen die Induktivität für $N = 1$ den gleichen Wert annimmt. Zudem ist zu erkennen, dass die Verläufe sich jeweils dann unterscheiden, wenn eine Lage vollständig bewickelt ist und auf die nächsthöheren Lage weiter gewickelt wird. Das liegt nach [3] insbesondere daran, dass der Verkettungsfluss zwischen den jeweiligen Windungspaaren größer wird, sofern die Windungen kompakter angeordnet werden. Aufgrund der nicht vollständig verkoppelten Windungen nimmt die Induktivität der einlagig gewickelten Zylinderspule in Luft nicht quadratisch mit der Anzahl der Windungen zu. Diese fälschliche Annahme kann schnell entstehen, da in vielen Literaturquellen, wie z.B. [25] oder [16], nicht explizit auf die ideale Kopplung hingewiesen wird.

Neben Runddrähten werden ebenfalls Flachdrähte zur Herstellung von Wicklungen magnetischer Bauteile der Leistungselektronik eingesetzt. Diese sind typischerweise auf der schmalen Kante gewickelt und erzielen dadurch einen besonders hohen Füllfaktor im Wickelfenster des Kerns. Abbildung 4.8 zeigt den Querschnitt einer einzelnen sogenannten Hochkant-Wicklung, die symmetrisch um eine Rotationsachse gewickelt ist. Wie zuvor bereits erklärt, wird die Selbstinduktivität wieder in innere und äußere Selbstinduktivität unterteilt. Die äußere Selbstinduktivität wird nach Gleichung 4.37 und 4.41

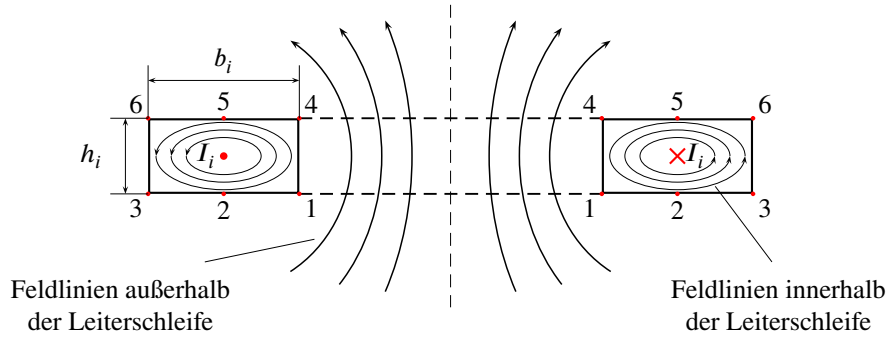


Abbildung 4.8: Querschnitt durch eine kreisförmig gewickelte Hochkant-Wicklung und Darstellung der Schleifenkonturen 1-6 zur Berechnung der äußeren Induktivität

als gemittelter magnetischer Fluss über die Konturen 1-6 berechnet. Für die innere Induktivität wird in diesem Fall eine symmetrische Feldverteilung innerhalb des massiven Leiters angenommen. Dabei sei die magnetische Feldstärke entlang einer ellipsenförmigen Feldlinie (siehe Abbildung 4.8) konstant. Während die Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse keinen großen Aufwand erfordert, muss für den Umfang ein elliptisches Integral gelöst werden [10]. Das ist im Allgemeinen nicht schwer, führt aber zu Problemen bei der weiteren Auswertung von Gleichung 4.39. Daher wird der Umfang durch

$$U \approx \pi \sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad (4.45)$$

approximiert, wobei x und y die Halbachsen einer Ellipse um den Koordinatenursprung darstellen. Durch Anwendung des Durchflutungssatzes wird die magnetische Feldstärke innerhalb des stromdurchflossenen Leiters durch

$$H_1 = \frac{I_i}{\sqrt{2} b_i h_i} \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.46)$$

berechnet. Durch Einsetzen von Gleichung 4.46 in Gleichung 4.33 ergibt sich die innere Induktivität zu

$$L_{Li} = \frac{\mu_0 l}{32} \left(\frac{b_i}{h_i} + \frac{h_i}{b_i} - \left(\frac{b_i}{h_i} \right)^2 \frac{\pi}{2} + \left(\left(\frac{b_i}{h_i} \right)^2 - \left(\frac{h_i}{b_i} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{b_i}{h_i} \right) \right). \quad (4.47)$$

Tabelle 4.1 zeigt eine Auswertung von Gleichung 4.47 für eine Windungsanordnung nach Abbildung 4.8. Dabei wird der mittlere Radius a_i der Leiterschleife um die Rotationsachse variiert. Zudem wird berücksichtigt, dass ein auf der schmalen Kante gewickelter Draht nicht mit beliebig kleinen Radien gewickelt werden kann, ohne den Flachdrahtquerschnitt zu verformen. Bei der Betrachtung der Daten bleibt zunächst festzuhalten, dass die relative Abweichung zwischen dem Modell nach Gleichung 4.47 und der

a_i	L_{li} nach (4.47)	FEM-Approximation	rel. Abweichung
14 mm	1032 fH	3093 fH	−66,63 %
18 mm	1327 fH	3934 fH	−66,26 %
22 mm	1622 fH	4736 fH	−65,75 %
26 mm	1916 fH	5545 fH	−65,44 %
30 mm	2212 fH	6539 fH	−66,17 %

Tabelle 4.1: Innere Selbstinduktivität einer Flachdrahtwindung berechnet nach Gleichung 4.47 und mit Hilfe einer FEM-Analyse für $h_i = 2$ mm und $b_i = 6$ mm

FEM-approximierten Lösung relativ groß sind. Daher sollte das Ergebnis dieses Ansatzes zunächst messtechnisch verifiziert werden. Die Größenordnung der zu messenden Induktivität liegt jedoch im Bereich der Auflösung gängiger Impedanz- oder Induktivitätsmessgeräte. Aus diesem Grund ist eine messtechnische Verifikation nicht ohne großen Aufwand möglich. Um dennoch die innere Induktivität von Flachdrahtwicklungen abschätzen zu können, wird nochmals die Abweichung zur FEM-approximierten Lösung betrachtet. Die geringe Streuung der Abweichungen legt die Vermutung nahe, dass der Fehler systematisch ist und linear mit dem mittleren Radius a_i der Leiterschleife zunimmt. Deshalb wird Gleichung 4.47 um einen Korrekturfaktor ϵ erweitert

$$L_{li} = \frac{\mu_0 l \epsilon}{32} \left(\frac{b_i}{h_i} + \frac{h_i}{b_i} - \left(\frac{b_i}{h_i} \right)^2 \frac{\pi}{2} + \left(\left(\frac{b_i}{h_i} \right)^2 - \left(\frac{h_i}{b_i} \right)^2 \right) \arctan \left(\frac{b_i}{h_i} \right) \right). \quad (4.48)$$

Weitere Untersuchungen zur Einflussnahme von h_i und b_i auf die innere Selbstinduktivität ergaben, dass ein Korrekturfaktor von $\epsilon = 3$ zu deutlich geringeren Abweichungen führt. Der untere Graph der Abbildung 4.9 zeigt einen Auszug dieser Untersuchungen. Die Gründe für die hohen Abweichungen von ca. 60 % sind vor allem die zur Lösung von Gleichung 4.32 getroffenen Annahmen. Zunächst wird angenommen, dass die Stromdichteverteilung über den gesamten Querschnitt nahezu konstant ist. Das dem nicht so ist, zeigt Abbildung 4.10. Wie zu erkennen, nimmt die Stromdichte entlang der langen Kante mit der Länge b_i ab. Auf der Innenseite der Wicklung (linke Kante der Windung) ist die Stromdichte ca. ein Drittel höher als auf der Außenseite. Unter der Annahme, dass die Feldlinien konzentrisch angeordnete Ellipsen sind, würde deren Mittelpunkt nicht mit dem Mittelpunkt der Querschnittsfläche übereinstimmen. Zudem zeigen die Feldlinien keine elliptische Form, weshalb selbst die Näherungsformel für den Umfang einer Ellipse aus Gleichung 4.45 eine grobe Annahme darstellt.

Wie komplex das Auffinden einer geschlossenen Lösung für die Selbstinduktivität einer Hochkantwindung ist, zeigen [34], [5] oder [66]. In [22] befindet sich eine gute Darstellung des generellen Problems. Die darin beschriebenen Methoden zur Berechnung der Selbstinduktivität erfordern ebenfalls vereinfachende Annahmen zur Lösung von Gleichung 4.31 und führen daraufhin zu empirisch korrigierten Gleichungen. Die

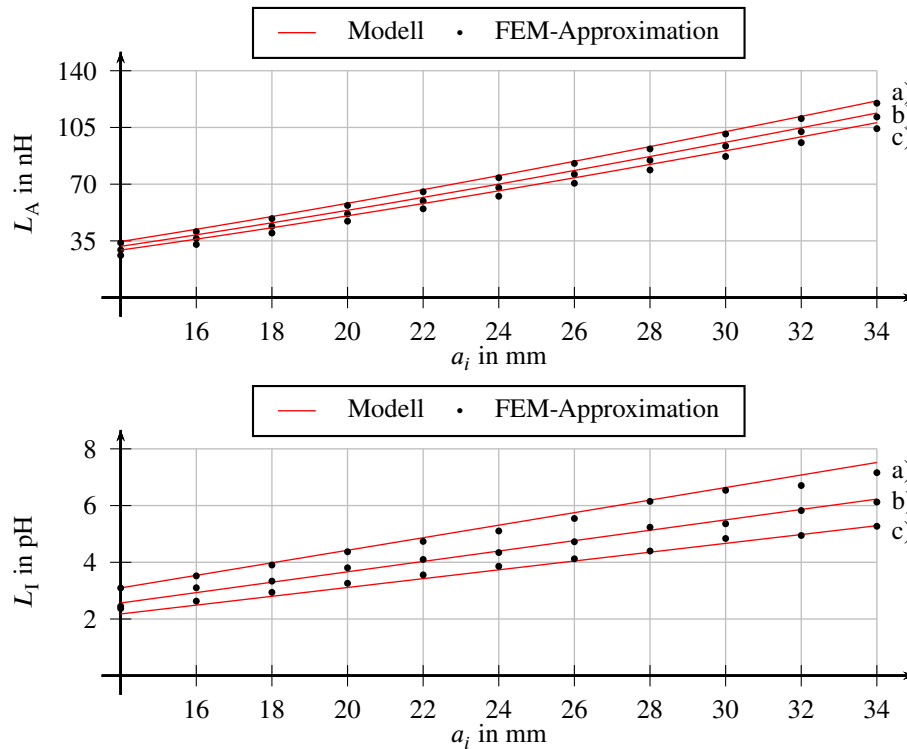


Abbildung 4.9: Äußere und innere Induktivität einer hochkant gewickelten, kreisrunden Leiterschleife mit einer Höhe von $h_i = 2$ mm und einer Breite von a) $b_i = 6$ mm b) $b_i = 8$ mm c) $b_i = 10$ mm

dimensionslose Zahl ϵ ist deshalb ein aus FEM-Lösungen empirisch ermittelter Faktor, der nach Abbildung 4.9 für übliche Kantenmaße von Flachdrahtwicklungen gut zur Approximation der inneren Induktivität geeignet ist.

Rechteckförmige Leiterschleifen

Für rechteckig geführte Leiterschleifen, wie in Abbildung 4.11 skizziert, wird ebenfalls angenommen, dass kurvig oder gar eckig geführte Schleifenabschnitte keinen Einfluss auf die Feldverteilung innerhalb des Leiters haben. Daher wird die Länge der Schleife durch die Berechnung des Umfangs der beiden Schleifenkanten angenähert. Für die innere Selbstinduktivität ergibt sich aus diesem Grund

$$L_{Ii} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu_0 2(b_i + c_i)}{8\pi}. \quad (4.49)$$

Um die äußere Selbstinduktivität der Anordnung zu ermitteln, wird zunächst die Gegeninduktivität der beiden Leiterschleifen bestimmt. Dazu werden die Leiterschleifen

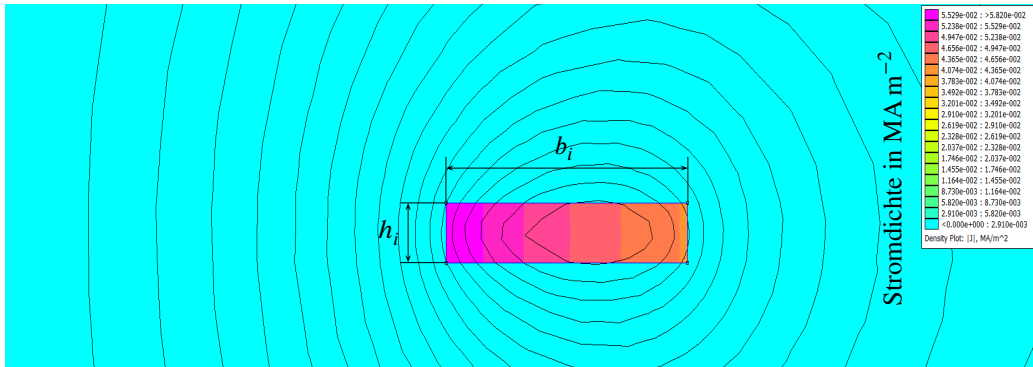


Abbildung 4.10: Darstellung der Stromdichtevertellung ($I_i = 1$ A) eines kreisförmig gewickelten Flachdrahtleiters mit den Kantenlängen $b_i = 10$ mm und $h_i = 2$ mm

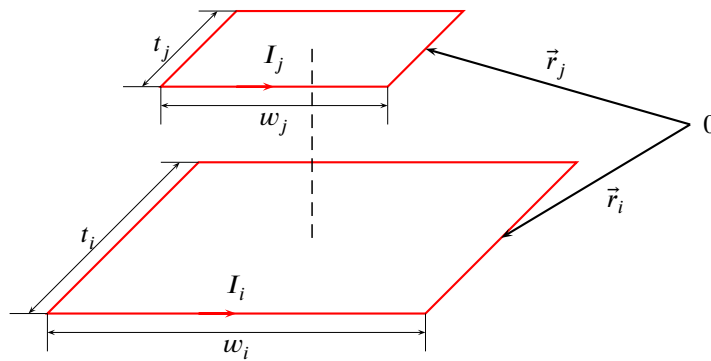


Abbildung 4.11: Rechteckförmige Leiterschleifen

wieder durch infinitesimal dünne Stromfäden angenähert. Die resultierenden Integrale aus Gleichung 4.14 sind für diese Problemstellung geschlossen lösbar. Dadurch ergibt sich für die Gegeninduktivität der Anordnung aus Abbildung 4.11

$$\begin{aligned}
 L_{Fi,j} = & \frac{2 \mu_0}{\pi} (-W_1 + W_2 - W_3 + W_4) + \\
 & \frac{\mu_0}{\pi} \left(w_i \ln \left(\frac{(z_i - z_j)^2 + (t_i + t_j)^2}{(z_i - z_j)^2 + (t_i - t_j)^2} \right) + t_i \ln \left(\frac{(z_i - z_j)^2 + (w_i + w_j)^2}{(z_i - z_j)^2 + (w_i - w_j)^2} \right) + \right. \\
 & + (w_j + w_i) \ln \left(\frac{w_j + w_i + W_1}{w_j + w_i + W_4} \right) + (w_j - w_i) \ln \left(\frac{w_j - w_i + W_3}{w_j - w_i + W_2} \right) + \\
 & \left. + (t_j + t_i) \ln \left(\frac{t_j + t_i + W_3}{t_j + t_i + W_4} \right) + (t_j - t_i) \ln \left(\frac{t_j - t_i + W_1}{t_j - t_i + W_2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

mit den spezifischen Längen

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \sqrt{(w_i + w_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (t_i - t_j)^2} \\
 W_2 &= \sqrt{(w_i - w_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (t_i - t_j)^2} \\
 W_3 &= \sqrt{(w_i - w_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (t_i + t_j)^2} \\
 W_4 &= \sqrt{(w_i + w_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (t_i + t_j)^2}.
 \end{aligned}$$

Eine detaillierte Veranschaulichung dieser Lösung ist in [3] gezeigt und wird zur besseren Übersicht dieser Arbeit nicht wiederholt. Wie bereits bei kreisrunden Leiterschleifen aus Runddraht wird mit Hilfe der Gegeninduktivität die äußere Selbstinduktivität berechnet. Aufgrund der einfacheren Implementierung und den relativ geringen Abweichungen (siehe Abbildung 4.6) wird auf die Mittelwertbildung des magnetischen Flusses aus Gleichung 4.36 verzichtet und das Verfahren nach [3] angewendet. Dazu werden beide Leiterschleifen wieder in eine Ebene gelegt $z_i - z_j = 0$ und der Drahtradius r_L eingeführt. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}
 w_i - w_j &= r_L \\
 t_i - t_j &= r_L \\
 w_i + w_j &= 2 w_i - r_L \\
 t_i + t_j &= 2 t_i - r_L
 \end{aligned}$$

und die äußere Selbstinduktivität wird durch

$$\begin{aligned}
 L_{Ai} &= \frac{2 \mu_0}{\pi} (-W_{A,1} + W_{A,2} - W_{A,3} + W_{A,4} \\
 &\quad + w_i \ln \left(2 \frac{t_i}{r_L} - 1 \right) + t_i \ln \left(2 \frac{w_i}{r_L} - 1 \right) \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{\pi} \left((2w_i - r_L) \ln \left(\frac{2w_i - r_L + W_{A,1}}{2w_i - r_L + W_{A,4}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (2t_i - r_L) \ln \left(\frac{2t_i - r_L + W_{A,3}}{2t_i - r_L + W_{A,4}} \right) - r_L \ln \left(\frac{r_L - W_{A,3}}{r_L - W_{A,2}} \frac{r_L - W_{A,1}}{r_L - W_{A,2}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

mit den spezifischen Längen

$$\begin{aligned}
 W_{A,1} &= \sqrt{(2w_i - r_L)^2 + r_L^2} \\
 W_{A,2} &= r_L \sqrt{2} \\
 W_{A,3} &= \sqrt{(2t_i - r_L)^2 + r_L^2} \\
 W_{A,4} &= \sqrt{(2w_i - r_L)^2 + (2t_i - r_L)^2}
 \end{aligned}$$

berechnet.

In Anlehnung an die Auswertung aus [3] wird nun eine einlagig gewickelte Luftspule aus rechteckig geführtem Runddrahtleiter aufgebaut. Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf der Gesamtinduktivität der Luftspule für unterschiedliche Windungszahlen N . Als Pa-

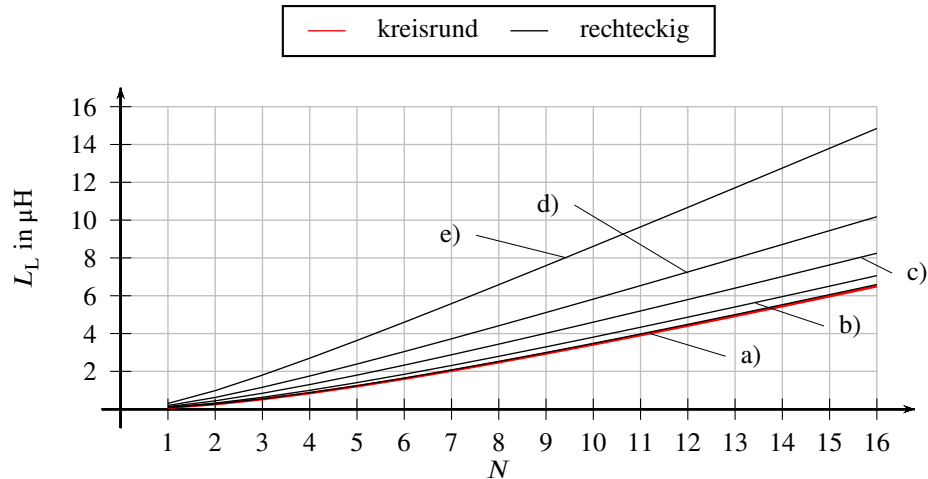


Abbildung 4.12: Gesamtinduktivität einer rechteckförmig gewickelten Luftspule aus Runddraht mit $r_L = 1,5$ mm, $a_i = 21,5$ mm und einem Verhältnis der Kantenlängen t_i/w_i von a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

rameter der verschiedenen Graphen wird das Verhältnis der Kantenlängen t_i/w_i gewählt, wobei die aufgespannte Fläche der Leiterschleifen (die Querschnittsfläche später hinzukommender Kerne) konstant gehalten wird. Zur Validierung ist die Gesamtinduktivität einer kreisrund gewickelten Luftspule mit gleicher Kernquerschnittsfläche dargestellt. Die Kantenlängen der rechteckigen Luftspule werden anhand von

$$t_i = a_i \sqrt{2} \quad (4.52)$$

$$w_i = \frac{\pi (a_i - r_L)^2}{t_i - r_L} + r_L \quad (4.53)$$

eingestellt.

Zunächst ist zu erkennen, dass die Gesamtinduktivität einer quadratischen Luftspule ($w_i = t_i$) und der kreisrund gewickelten Luftspule mit gleicher Kernquerschnittsfläche annähernd gleich sind. Da die Induktivität nach Gleichung 4.36 proportional zum magnetischen Fluss durch die Schleifenfläche ist, muss die mittlere Flussdichte beider Luftspulen annähernd gleich sein. Die Feldstärke ist dicht an den Leiterschleifen stets am größten. Da der Abstand der langen Kanten mit zunehmendem Kantenlängenverhältnis abnimmt, ist es notwendig, dass die mittlere Flussdichte zunimmt. Daher steigt die Induktivität mit zunehmendem Kantenlängenverhältnis. Bei einem Kantenlängenverhältnis von $t_i/w_i = 16$ hat sich die Induktivität gegenüber einem quadratischen Kernquerschnitt annähernd verdoppelt.

4.1.2 Drosseln

Die folgenden Kapitel zeigen die Auswertung des Gleichungssystems 4.28 für kartesische und zylindrische Koordinaten. Aus Platzgründen befinden sich die Herleitungen der Gleichungen in den Anhängen B.2 bis B.3. Zur Identifikation der Matrixkoeffizienten wird folgende Notation

$$\mathbf{T}_{n,n} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

eingeführt.

Zylindrische Kernbauformen

Zunächst wird eine einfache rotationssymmetrische Beispielgeometrie mit zylindrischen Koordinaten modelliert, dessen Berechnung der Induktivität nach Gleichung 4.30 einfach überprüft werden kann. In Abbildung 4.13 ist ein permeables Rohr zu erkennen, welches von einer kreisförmig angeordneten Leiterschleife eingeschlossen ist. Nach der Theorie aus Kapitel 4.1 ist die Induktivität dieser Anordnung abhängig von der Position des Rohres entlang der gemeinsamen Rotationsachse. Demzufolge, sollte die Induktivität der gesamten Anordnung größer werden, sofern das Rohr näher an die stromdurchflossene Leiterschleife geführt wird. Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, wird das Rohr entlang der Rotationsachse von unten nach oben verschoben und die Induktivität nach Gleichung 4.30 berechnet. Die Ergebnisse werden durch die Lösung einer FEM-Approximation validiert. Die beiden Graphen aus Abbildung 4.14 zeigen Kern- und Ge-

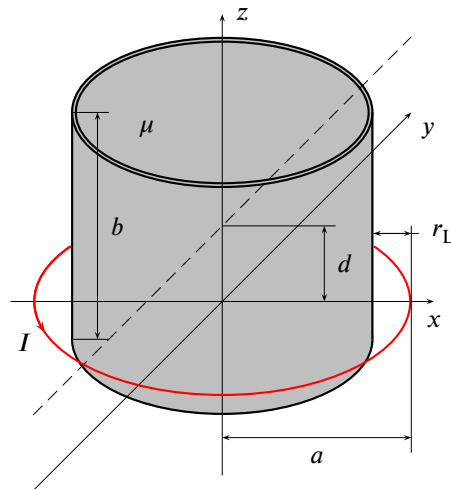


Abbildung 4.13: Zylinderrohr aus permeablem Material im Feld einer kreisförmigen Leiterschleife

samtinduktivität der Anordnung aus Abbildung 4.13 bei einer Wandstärke des Rohres von 0,5 mm. Wie zu erwarten, nehmen Kern- und Gesamtinduktivität ab, sofern das Rohr aus der Mitte herausgezogen wird. Die Kerninduktivität strebt mit zunehmendem Abstand asymptotisch gegen Null, da bei großem Abstand zur erregenden Leiterschleife keine Energie innerhalb des Rohres gespeichert werden kann. Die Gesamtinduktivität setzt sich für diesen Fall nur noch aus der inneren und äußeren Selbstinduktivität der Leiterschleife zusammen, welche der Abbildung 4.6 entnommen werden können.

Die Abweichungen zwischen dem Modell und der FEM-Approximation sind sehr gering. Sie entstehen zum größten Teil durch die Ungenauigkeiten bei der Selbstinduktivitätsberechnung (siehe Abbildung 4.6). Abschließend zeigt Abbildung 4.15 die für den Entwurf magnetischer Komponenten wichtige magnetische Flussdichteverteilung innerhalb des Rohres. Anhand dieser Darstellung kann überprüft werden, ob das Kernmaterial an einer beliebigen Stelle in Sättigung getrieben wird. Bei handelsüblichen Ferritmaterialien sind Sättigungserscheinungen ab ca. 300 mT to 400 mT zu erwarten.

Rechteckige Kernbauformen

Wie in [19] gezeigt, sind die Integrale aus Gleichung 4.28 unter der Annahme von kartesischen Koordinaten geschlossen lösbar. Die Ergebnisse der Integration enthalten einfache Ausdrücke, die bei nahezu jedem Computerprogramm zur Verfügung stehen. Zur besseren Übersicht dieser Arbeit befinden sich diese Ausdrücke in Anhang B.3.

Zur Validierung der Kern- und Gesamtinduktivität nach Gleichung 4.30 wird eine typische U-I-Kernbauform modelliert, wie sie in vielen Schaltnetzteilen zu finden ist.

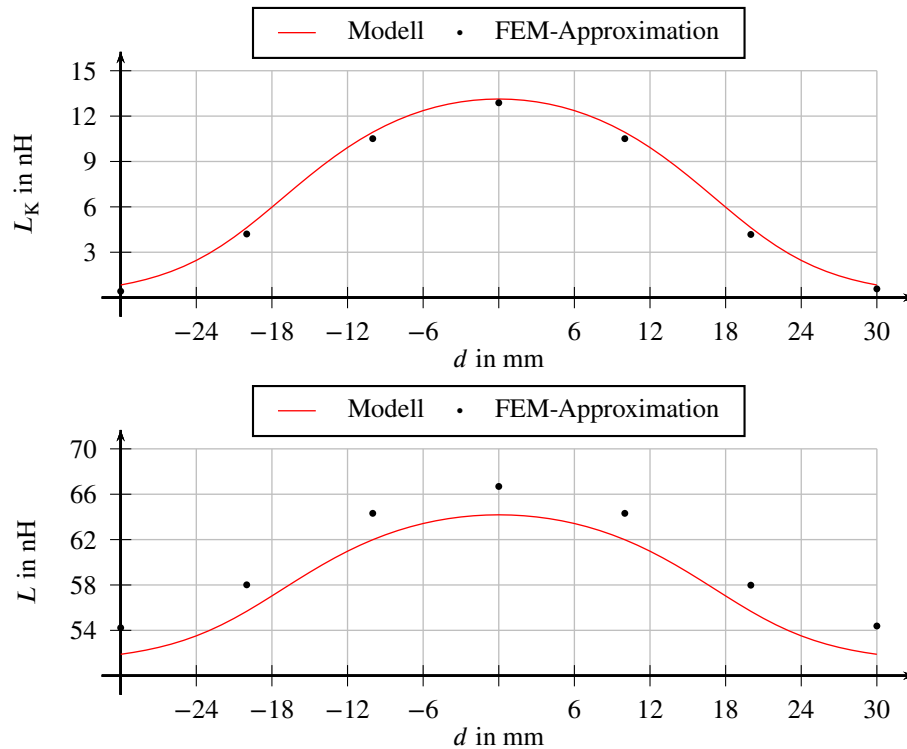


Abbildung 4.14: Induktivität einer rotationssymmetrischen Drossel bei variabler Kernposition entlang der Rotationsachse (Parameter: $r_L = 1,5$ mm, $b = 40$ mm, $a = 16$ mm, $\mu_r = 3300$)

Abbildung 4.16 zeigt eine Drosselspule mit einem permeablen Kern in dieser sogenannten U-I-Bauform. Auf beiden Schenkeln sind insgesamt 14 Windungen gewickelt und elektrisch in Reihe geschaltet. Die Windungen sind so angeordnet, dass alle magnetischen Teilflüsse die gleiche Orientierung entlang des mittleren Umfangs durch den Kern aufweisen. Durch die hohe Permeabilität des Kernmaterials und der Randbedingung der magnetische Normalkomponente wird die magnetische Energie hauptsächlich im Luftspalt gespeichert. Die Induktivität in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge ist daher eine wichtige Designgrundlage für den Entwurf von Drosselspulen. Jedoch ist die Flussdichte innerhalb des Kernmaterials ebenfalls von der Luftspaltlänge abhängig und sollte in keinem Fall die bereits erwähnte Sättigungsflussdichte überschreiten. Die Flussdichte in jedem einzelnen Raumpunkt des Kernvolumens darzustellen wäre allerdings sehr unübersichtlich. Aus diesem Grund zeigt der obere Graph aus Abbildung 4.17 die mittlere magnetische Flussdichte

$$\overline{B} = \frac{1}{V_K} \sum_{n=1}^N \left| \vec{B}_{Fi,n} \right| \Delta V_K$$

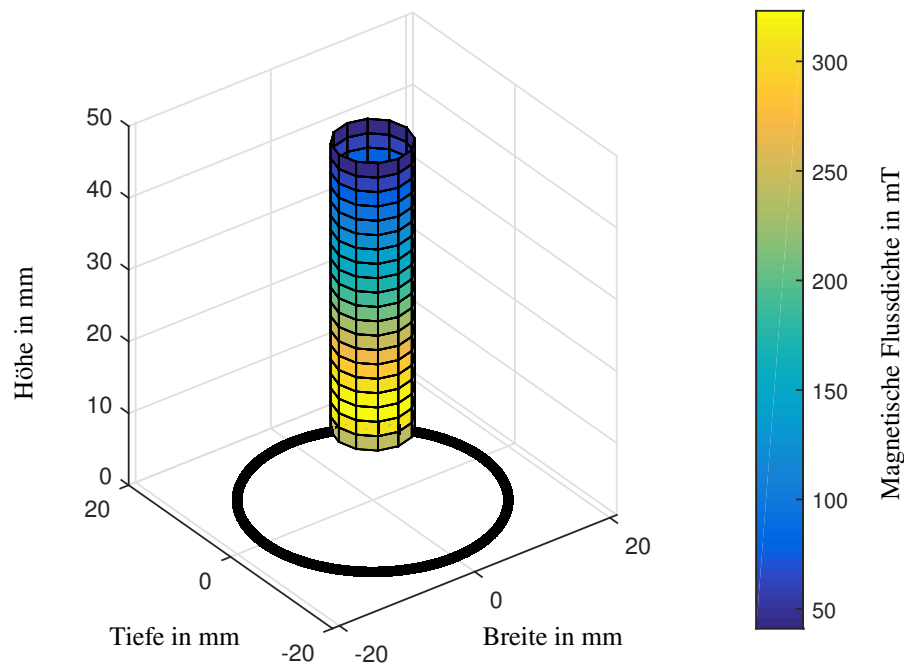


Abbildung 4.15: Darstellung der magnetischen Flussdichteverteilung innerhalb des permeablen Rohres mit $\mu_r = 3300$ bei einer Stromstärke von $I = 20$ A

in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge. Der untere Graph zeigt die Gesamtinduktivität der Drossel. Zur Referenzbildung und Validierung wird auf eine aufwendige FEM-Approximation im dreidimensionalen Raum verzichtet. Stattdessen werden die Ergebnisse mit der Auswertung eines idealen Reluktanzmodells [6] verglichen. Insbesondere für kleine Luftspaltlängen sind relativ große Abweichungen zwischen dem Modell nach Gleichung 4.30 und dem idealen Reluktanzmodell zu erkennen. Bei der Verwendung von Ferritmaterialien sind jedoch Drosselentwürfe mit einer Luftspaltlänge von weniger als 0,8 mm unzulässig, da in diesem Bereich die Sättigungsflussdichte überschritten ist. Bei Luftspaltlängen von mehr als 1,5 mm sind die Abweichungen, hinsichtlich der Induktivität, dicht beieinander, jedoch wird die magnetische Flussdichte mit Hilfe des Reluktanzmodells etwas zu niedrig berechnet. Unter der Annahme, dass das Modell nach Gleichung 4.30 der Realität entspricht, würde demnach ein Entwurf mit dem idealen Reluktanzmodell bei Luftspaltlängen zwischen 0,8 mm und 1,5 mm zu einem konservativen Design führen.

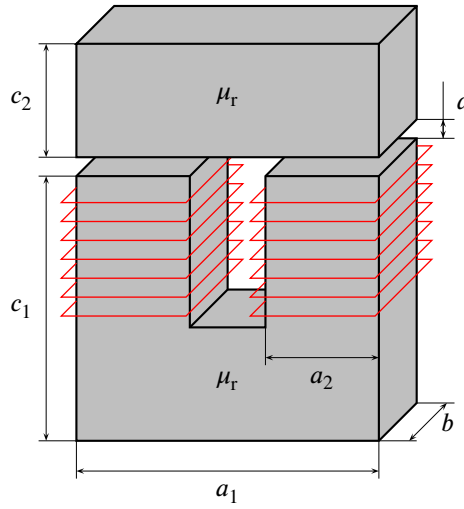


Abbildung 4.16: U-I Kernbauform mit 14 in Reihe geschalteten Windungen zur Validierung der Ergebnisse aus Gleichung 4.30 (Parameter: $a_1 = 32$ mm, $b = 20$ mm, $c_1 = 33$ mm, $a_2 = c_2 = 11$ mm, $\mu_r = 3300$)

4.2 Widerstandsmodelle

Der Widerstand $R_{i,j}$ ist ein Ausdruck für die Leistung, die durch die beiden Ströme I_i und I_j umgesetzt wird. Für den Fall, dass die Ströme zeitlich konstant fließen, kann der zugehörige Widerstand durch

$$R_{i,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int_V (\vec{E}_i \cdot \vec{S}_j) dV \quad (4.54)$$

berechnet werden. In der Praxis ist der elektrische Stromfluss üblicherweise an die Gegenwart elektrisch gut leitfähiger Materialien gebunden. In einem elektrischen Leiter mit der spezifischen Leitfähigkeit κ stellt sich demnach aufgrund des Ohmschen Gesetzes

$$\vec{S}_i = \kappa \vec{E}_i \quad (4.55)$$

im i -ten Leiter eine elektrische Feldstärke \vec{E}_i in Folge einer gegebenen Stromdichte \vec{S}_i ein. Dadurch lässt sich Gleichung 4.57 zu

$$R_{i,j} = \frac{1}{\kappa I_i I_j} \int_{V_L} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) dV_L \quad (4.56)$$

umformen und die Integration wird auf das Leitervolumen V_L begrenzt. Sofern die beiden Stromdichten in dem gesamten Volumen gleichmäßig verteilt und mit gleicher Rich-

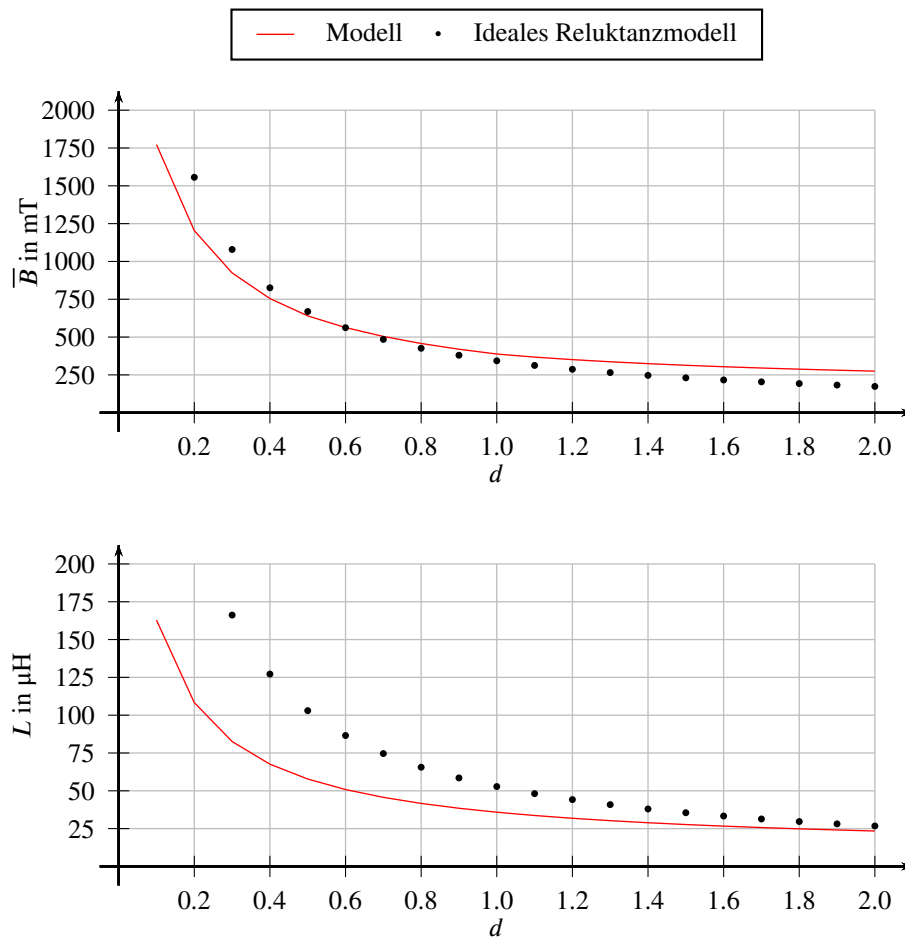


Abbildung 4.17: Mittlere magnetische Flussdichte und Induktivität der rechteckförmigen Anordnung mit $\mu_r = 3300$ bei einer Stromstärke von $I = 20$ A

tung angenommen werden

$$S_i = \frac{I_i}{F_{LQ}}$$

$$S_j = \frac{I_j}{F_{LQ}}$$

lässt sich diese Gleichung zu

$$R_{i,j} = R_{i,i} = \frac{1}{\kappa} \frac{l_L}{F_{LQ}} \quad (4.57)$$

umformen, wobei F_{LQ} die von den Stromdichten quer durchströmte Fläche des Volumens und l_L die Länge der Stromlinie [31] beschreibt. Wie in [32] gezeigt entspricht dies der

üblichen Widerstandsformel. In [3] werden durch diesen Widerstand die sogenannten frequenzunabhängigen Verluste berechnet.

Die Sicherstellung der gleichgerichteten, gleichmäßigen und zeitlich konstanten Stromdichten ist allerdings nicht immer gewährleistet. Insbesondere in Bereich leistungselektronischer Stromversorgungen sind die zeitlichen Änderungsraten von Strömen und Spannungen enorm und es ist aufgrund der periodischen Schaltvorgänge sinnvoller

$$R_{Si,j} = -\frac{1}{2 \hat{I}_i \hat{I}_j} \oint_F \Re \left\{ \underline{\vec{E}}_i \times \underline{\vec{H}}_j^* - \underline{\vec{H}}_j \times \underline{\vec{E}}_i^* \right\} \cdot d\vec{F} \quad (4.58)$$

auszuwerten. Sofern das Vorhandensein der Stromdichte wieder auf die Gegenwart elektrisch gut leitfähiger Medien beschränkt wird, kann Gleichung 4.58 durch das Ohmsche Gesetz zu

$$R_{Si,j} = -\frac{1}{2\kappa \hat{I}_i \hat{I}_j} \oint_{F_{LO}} \Re \left\{ \underline{\vec{S}}_i \times \underline{\vec{H}}_j^* - \underline{\vec{H}}_j \times \underline{\vec{S}}_i^* \right\} \cdot d\vec{F}_{LO} \quad (4.59)$$

umgeformt werden. Nebenbei sei erwähnt, dass die Integration im Vergleich zu Gleichung 4.56 nun auf die Leiteroberfläche F_{LO} beschränkt ist. Die magnetischen Eigenschaften elektrisch gut leitfähiger Materialien, wie z.B. homogenes Kupfer oder Aluminium, sind denen von Vakuum relativ ähnlich. Deshalb wird ein gegebenes zeitlich konstantes Magnetfeld \vec{B}_j durch die Anwesenheit elektrischer Leiter kaum beeinflusst. Durch die zeitlich Änderung der magnetische Flussdichte wird jedoch aufgrund des Induktionsgesetzes

$$\vec{\nabla}_i \times \underline{\vec{E}}_i = -j\omega \underline{\vec{B}}_j \quad (4.60)$$

eine elektrische Feldstärke induziert, welche aufgrund des Ohmschen Gesetzes eine Stromdichte $\underline{\vec{S}}_i$ impliziert. Diese Stromdichte erzeugt aufgrund des Ampereschen Gesetzes

$$\vec{\nabla}_i \times \underline{\vec{B}}_i = \mu_0 \underline{\vec{S}}_i \quad (4.61)$$

selbst wiederum eine magnetische Flussdichte innerhalb $\underline{\vec{B}}_{Li}$ und außerhalb $\underline{\vec{B}}_{Ai}$ des Leiters. Im äußeren Bereich ergibt sich die gesamte magnetische Flussdichte dann aus der Überlagerung der beider Flussdichten. Aufgrund der bedingten Stetigkeit von Feldstärke und Flussdichte äußert sich dieser Überlagerungseffekt dadurch, dass die Stromdichte üblicherweise an den Rand des Leiters gedrängt wird und zwar umso stärker, je größer die zeitlichen Änderungsraten des gegebenen Feldes sind. Dieser Effekt wird daher auch als Skineffekt bezeichnet.

Natürlich können, wie im stationären Fall, auch Vektorpotentiale innerhalb und außerhalb des Leiters zur Beschreibung dieses Effektes genutzt werden. Die gesuchten Vektorpotentiale müssen innerhalb des Leiters die sogenannte Vektordiffusionsgleichung

$$\vec{\nabla}_i \times \left(\vec{\nabla}_i \times \underline{\vec{A}}_{Li} \right) = j\omega\mu_0\kappa \underline{\vec{A}}_{Li} \quad (4.62)$$

und außerhalb die Laplace-Gleichung

$$\vec{\nabla}_i \times \left(\vec{\nabla}_i \times \left(\vec{A}_{Ai} + \vec{A}_j \right) \right) = 0 \quad (4.63)$$

in vektorieller Form erfüllen. Daraus ergeben sich die gesuchten Größen

$$\vec{S}_i = -j\omega\mu_0\kappa\vec{A}_{Li} \quad (4.64)$$

und

$$\vec{\nabla}_i \times \vec{A}_{Li} = \mu_0 \vec{H}_i \quad (4.65)$$

zur Berechnung von Gleichung 4.59. Die folgenden Kapitel zeigen nun die Widerstandsmodellbildung für typische Leitergeometrien von Drosselspulen und Filterdrosseln.

4.2.1 Luftspulen aus einem Leiter mit kreisrundem Querschnitt

Abbildung 4.18 zeigt einen sehr kurzen Abschnitt des gewickelten Rundleiters einer Luftspule. Der Leiter befindet sich in einem magnetischen Feld mit zeitlich periodischer

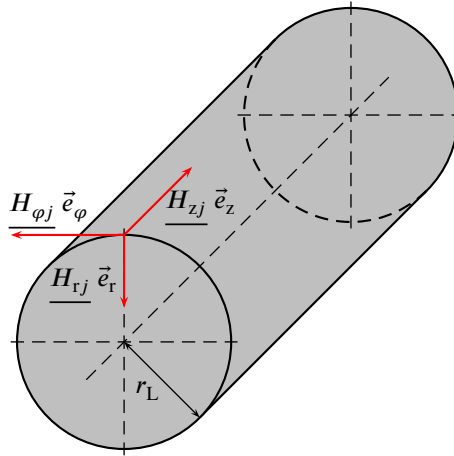


Abbildung 4.18: Ausschnitt eines Leiters mit kreisrundem Querschnitt

Änderung. Die Feldstärke wird durch

$$\vec{H}_{Fj} = \underline{H}_{Frj} \vec{e}_{ri} + \underline{H}_{F\phi j} \vec{e}_{\phi_i} + \underline{H}_{Fzj} \vec{e}_{zi} \quad (4.66)$$

mit den lokalen Zylinderkoordinaten des i -ten Leiters beschrieben. Aufgrund der sehr kurzen Länge sei angenommen, dass sich die Feldstärke in Längsausdehnung des Leiters nicht ändert. Demnach ist die Feldstärke unabhängig von der Position entlang der Rotationsachse des Leiters. Auf der Mantelfläche des Leiters sind die radiale Komponente

\underline{H}_{Frj} und die azimutale Komponente $\underline{H}_{F\varphi_j}$ von der azimutalen Koordinate φ_i abhängig. Die longitudinale Komponente der Feldstärke \underline{H}_{Fzj} sei entlang des Leiterumfangs konstant. Für das erregende Vektorpotential wird deshalb der Ansatz

$$\vec{\underline{A}}_{Fj} = \underline{A}_{F\varphi_j} \vec{e}_{\varphi_i} + \underline{A}_{Fzj} \vec{e}_{zi} \quad (4.67)$$

gewählt. Die zeitliche Änderung dieses erregenden Feldes erzeugt wiederum Wirbelströme, deren Felder das erregende Feld überlagert. Diese Überlagerung wird beispielsweise in [2] als Störpotentialansatz bezeichnet, da das magnetische Feld der Wirbelströme als Störfeld des externen, erregenden Feldes interpretiert werden kann. Wie sich anhand der Darstellung des Vektorpotentials bereits erahnen lässt, erzeugt sowohl die azimutale als auch die longitudinale Komponente des erregenden Feldes Wirbelströme innerhalb des Leiters. Sie werden deshalb ebenfalls in azimutale und longitudinale Wirbelströme unterteilt.

Longitudinale Wirbelströme

Das Vektorpotential der longitudinalen Wirbelströme muss innerhalb des Leiters die Helmholtz-Gleichung

$$\frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \frac{\partial \underline{A}_{Izi}}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \underline{A}_{Izi}}{\partial^2 \varphi_i} - \underline{\alpha}^2 \underline{A}_{Izi} = 0$$

und außerhalb des Leiters die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \frac{\partial \underline{A}_{Ozi}}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \underline{A}_{Ozi}}{\partial^2 \varphi_i} = 0$$

zusammen mit den Stetigkeitsanforderungen der Feldstärke und Flussdichte [32] erfüllen. Der Faktor $\underline{\alpha}$ wird als sogenannte Skinkonstante bezeichnet und ist als

$$\underline{\alpha} = \sqrt{j\omega \mu \kappa} = \frac{1+j}{\delta} \quad (4.68)$$

definiert, wobei δ die Skintiefe

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{f \pi \mu \kappa}} \quad (4.69)$$

bezeichnet. Die beiden partiellen Differentialgleichungen werden durch den Ansatz der Separation [32] vereinfacht und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{A}_{Izi} = & \frac{\mu_0}{\underline{\alpha}} \frac{I_0(\underline{\alpha} r_i)}{I_1(\underline{\alpha} r_L)} H_{Fa_j} + \\ & + \frac{\mu_0}{\underline{\alpha}} \sum_{k=1}^K \frac{I_k(\underline{\alpha} r_i)}{I_{k-1}(\underline{\alpha} r_L)} \left(\hat{H}_{Fcj,k} \cos(k\varphi_i) + \hat{H}_{Fs,j,k} \sin(k\varphi_i) \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

als Lösung der Helmholtz-Gleichung. Die Funktionen $I_k(\underline{z})$ sind die sogenannten modifizierten Bessel-Funktionen erster Art, deren Eigenschaften in [32] ausführlich diskutiert sind. Die unbekannten Koeffizienten des Vektorpotentials werden durch

$$H_{\text{Faj}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_{\text{Fzj}}}{\partial r_i} d\varphi_i \quad (4.71)$$

$$\hat{H}_{\text{Fcj},k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_{\text{Fzj}}}{\partial r_i} + \frac{k}{\mu_0 r_L} \underline{A}_{\text{Fzj}} \right) \cos(k\varphi_i) d\varphi_i \quad (4.72)$$

$$\hat{H}_{\text{Fs},k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_{\text{Fzj}}}{\partial r_i} + \frac{k}{\mu_0 r_L} \underline{A}_{\text{Fzj}} \right) \sin(k\varphi_i) d\varphi_i \quad (4.73)$$

berechnet. Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichungen ist im Anhang B.4 gezeigt. Mit dem Ohmschen Gesetz und dem Induktionsgesetz wird aus dem Vektorpotential die longitudinale Wirbelstromdichte

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{Izi}} &= -j\omega\kappa \underline{A}_{\text{Izi}} = -\alpha \frac{I_0(\underline{\alpha}r_i)}{I_1(\underline{\alpha}r_L)} H_{\text{Faj}} - \\ &\quad - \alpha \sum_{k=1}^K \frac{I_k(\underline{\alpha}r_i)}{I_{k-1}(\underline{\alpha}r_L)} \left(\hat{H}_{\text{Fcj},k} \cos(k\varphi_i) + \hat{H}_{\text{Fs},k} \sin(k\varphi_i) \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

innerhalb des Leiters berechnet. Der Ausdruck zur Berechnung der Feldstärke innerhalb des Leiters wird durch Bildung der Rotation von Gleichung 4.70 gewonnen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \underline{H}_{\text{I}\varphi_i} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_{\text{Izi}}}{\partial r_i} = -\frac{I_1(\underline{\alpha}r_i)}{I_1(\underline{\alpha}r_L)} H_{\text{Faj}} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^K \left(\frac{I_{k-1}(\underline{\alpha}r_i)}{I_{k-1}(\underline{\alpha}r_L)} - \frac{k}{\underline{\alpha}r} \frac{I_k(\underline{\alpha}r_i)}{I_{k-1}(\underline{\alpha}r_L)} \right) \left(\hat{H}_{\text{Fcj},k} \cos(k\varphi_i) + \hat{H}_{\text{Fs},k} \sin(k\varphi_i) \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

für die azimutale und

$$\begin{aligned} \underline{H}_{\text{I}r_i} &= \frac{1}{\mu_0 r_i} \frac{\partial \underline{A}_{\text{Izi}}}{\partial \varphi_i} = \\ &\quad \frac{\alpha}{r_i} \sum_{k=1}^K k \frac{I_k(\underline{\alpha}r_i)}{I_{k-1}(\underline{\alpha}r_L)} \left(\hat{H}_{\text{Fs},k} \cos(k\varphi_i) - \hat{H}_{\text{Fcj},k} \sin(k\varphi_i) \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

für die radiale Komponente der Feldstärke. Wird die Wirbelstromdichte aus Gleichung 4.74 zusammen mit der magnetischen Feldstärke aus Gleichung 4.75 und 4.76 in die Definition aus Gleichung 4.9 eingesetzt ergibt sich

$$R_{Si,j} = \frac{l_L}{\kappa \hat{I}^2} \Re \left\{ \underline{\alpha} r_L \frac{I_0(\underline{\alpha} r_L)}{I_1(\underline{\alpha} r_L)} \right\} H_{Fa,j}^2 + \frac{l_L \pi}{\kappa \hat{I}^2} \left(\sum_{k=1}^K \Re \left\{ \underline{\alpha} r_L \frac{I_k(\underline{\alpha} r_L)}{I_{k-1}(\underline{\alpha} r_L)} \right\} \left(\hat{H}_{Fc,j,k}^2 + \hat{H}_{Fs,j,k}^2 \right) \right) \quad (4.77)$$

als Berechnungsvorschrift für den Widerstand. Zur übersichtlicheren Darstellung werden die Realteolfunktionen abgekürzt

$$R_{Si,j} = \frac{l_L}{\kappa \hat{I}^2} F_{S0} H_{Fa,j}^2 + \frac{l_L \pi}{\kappa \hat{I}^2} \left(\sum_{k=1}^K F_{Sk} \left(\hat{H}_{Fc,j,k}^2 + \hat{H}_{Fs,j,k}^2 \right) \right) \quad (4.78)$$

und als sogenannte Skinfaktoren bezeichnet.

Bevor mit der Auswertung und Validierung von Gleichung 4.78 begonnen werden kann, müssen zunächst die oben stehenden Integrale berechnet werden. Dazu ist es notwendig, die tangentielle Feldstärke und das Vektorpotential des erregende Feldes auf der Oberfläche aller Leiteroberflächen zu bestimmen. Für eine Luftspule können diese Größen anhand der Gleichungen aus Anhang B.5 bestimmt werden, sofern zuvor die kartesischen Feldstärkekomponenten in Folge des Stromes I_j anhand der Gleichung

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi j}}{\partial r_i} = H_{Fi,j} = H_{Fy,j} \cos(\varphi_i) - H_{Fx,j} \sin(\varphi_i)$$

in die lokalen Koordinaten des i -ten Leiters transformiert werden. Damit sie die Integrale bestimmt. Allerdings ist die Integration im Zusammenhang mit den elliptischen Integralen sehr aufwendig und wird an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt. Stattdessen werden die Feldstärke und das Vektorpotential an M ausgewählten Stellen einer jeden Leiteroberfläche ausgewertet. Abbildung 4.19 zeigt dieses Verfahren skizzenhaft anhand einer rotationssymmetrischen Luftspule bestehend aus drei Windungen. Der Abstand der benachbarten Stellen m und $m + 1$ ist äquidistant und wird durch

$$\Omega_m = \frac{2\pi}{M}$$

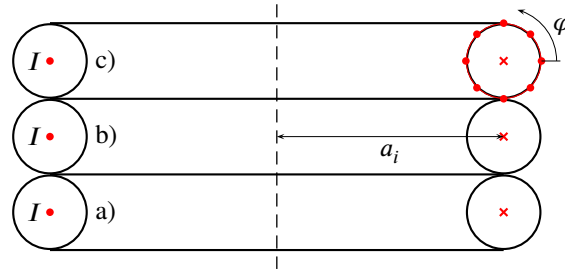


Abbildung 4.19: Zur Darstellung der Positionen auf der Leiteroberfläche einer Luftspule aus gewickeltem Draht

bestimmt. Dadurch werden die Integrale durch

$$H_{Fa,j} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_{Ft,j,m} \quad (4.79)$$

$$\hat{H}_{Fc,j,k} \approx \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left(H_{Ft,j,m} + \frac{1}{\mu_0 r_L} A_{F\varphi,j,m} \right) \cos(k m \Omega_m) \quad (4.80)$$

$$\hat{H}_{Fs,j,k} \approx \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left(H_{Ft,j,m} + \frac{1}{\mu_0 r_L} A_{F\varphi,j,m} \right) \sin(k m \Omega_m) \quad (4.81)$$

angenähert. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 4.20 einen Vergleich zwischen einer der abgetasteten Wertefolge $H_{Ft,j,m}$ und N Werten einer rekonstruierten Folge $H_{Ft,j,n}$ mit $K = 9$ Koeffizienten. Wie zu erkennen, lassen sich die abgetasteten Feldstärkewerte sehr gut approximieren. Dabei ist die Genauigkeit durch die Anzahl der zugelassenen Harmonischen einstellbar. Werden die Mittelwerte der drei umlaufenden tangentialen Feldstärken gebildet, ergibt sich für alle drei ein Wert von ungefähr $106,1 \text{ kA m}^{-1}$. Dieser ist plausibel, da er in etwa der Feldstärke eines geraden stromdurchflossenen Leiters vom Radius $1,5 \text{ mm}$ mit der Stromstärke 1 A entspricht. Zudem fällt auf, dass die tangentielle Feldstärke beim Umlauf um die beiden äußeren Leiter das Vorzeichen wechselt. Da magnetische Ladungen ausgeschlossen sind, muss an den Nullstellen der Verläufe die radiale Komponente in den Leiter hinein beziehungsweise hinaus zeigen. Rein qualitativ ist daran zu erkennen, dass beim Zusammenführen zweier parallel verlaufender stromführender Leiter die Stromdichteverteilungen in beiden Leitern verschoben werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedenen Konstellationen der maximalen Stützstellen M und der maximalen Ordnung der Fourier-Reihe K erprobt. Dabei stellte sich heraus, dass die tangentialen Feldstärken entlang aller Leiter bereits bei einer Ordnung von $K = 5$ sehr gut approximiert werden. Zur Anwendung des FFT-Algorithmus

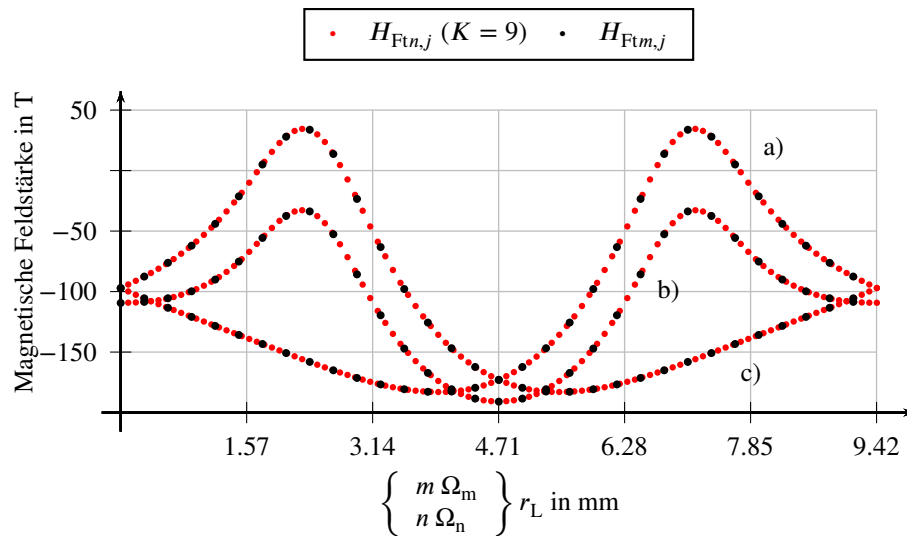


Abbildung 4.20: Feldstärke entlang des äußeren Umfangs der Leiter a), b) und c) bei $I = 1 \text{ A}$, $a_i = 20 \text{ mm}$ und $r_L = 0,5 \text{ mm}$

(engl. Fast-Fourier-Transform) ist es notwendig, mindestens

$$M = (K + 1) 2$$

Stützstellen abzutasten. Um von der Recheneffizienz des FFT-Algorithmus zu profitieren und die Rechendauer zu minimieren wird daher $M = 12$ gewählt. Alle Auswertungen innerhalb dieses Kapitels werden unter diesen Voraussetzungen durchgeführt. Die Gleichung 4.78 zeigt, dass der Widerstand abhängig ist von der örtlichen Änderungsrate des externen Feldes entlang des Leiterumfangs. Je stärker die Änderungsrate desto größer sind die Stromverdrängungseffekte und desto mehr Skinfaktoren beeinflussen den Leiterwiderstand. Abbildung 4.21 zeigt eine beispielhafte Auswertung der Skinfaktoren in Abhängigkeit der Frequenz bis zur fünften Ordnung für einen Leiter mit dem Radius $r_L = 1,5 \text{ mm}$. Im unteren Frequenzbereich sind die Effekte der Stromverdrängung noch nicht deutlich ausgeprägt. Der Gleichanteil der tangentialen Feldstärke entlang des Leiterumfangs sorgt im unteren Frequenzbereich für einen nahezu konstanten Widerstand. Dieser Zusammenhang ist physikalisch einfach zu interpretieren. Dieses Feld kann nämlich auch als das Resultat eines konstanten oder niederfrequenten Stromes in Längsrichtung durch den Leiter aufgefasst werden. Dieser Strom erzeugt eine örtlich konstante, aber zeitlich wechselförmige Feldstärke

$$H_{Fa,j} = \frac{\hat{I}}{2\pi r_L}$$

entlang des Umfangs der Leitermantelfläche. Wird dieser Ausdruck in den ersten Term

aus Gleichung 4.78 eingesetzt ergibt sich

$$R_{Si,i} = \frac{l_L}{2\pi\kappa r_L^2} F_{S0} = \frac{1}{2} R_{i,i} F_{S0} . \quad (4.82)$$

Diese Gleichung ist bereits aus [3] bekannt und beschreibt die Widerstandserhöhung in Folge eines zeitlich wechselförmigen Stromes. Sofern Strom konstant in eine Richtung fließt nimmt der Skinfaktor nullter Ordnung den Wert 2 an und es bleibt der Gleichstromwiderstand $R_{i,i}$. Ab einer Knickfrequenz von ca. 3 kHz nehmen Stromverdrängungseffekte zu und der Skinfaktor nullter Ordnung steigt mit einer Rate von ca. 0,5 pro Dekade.

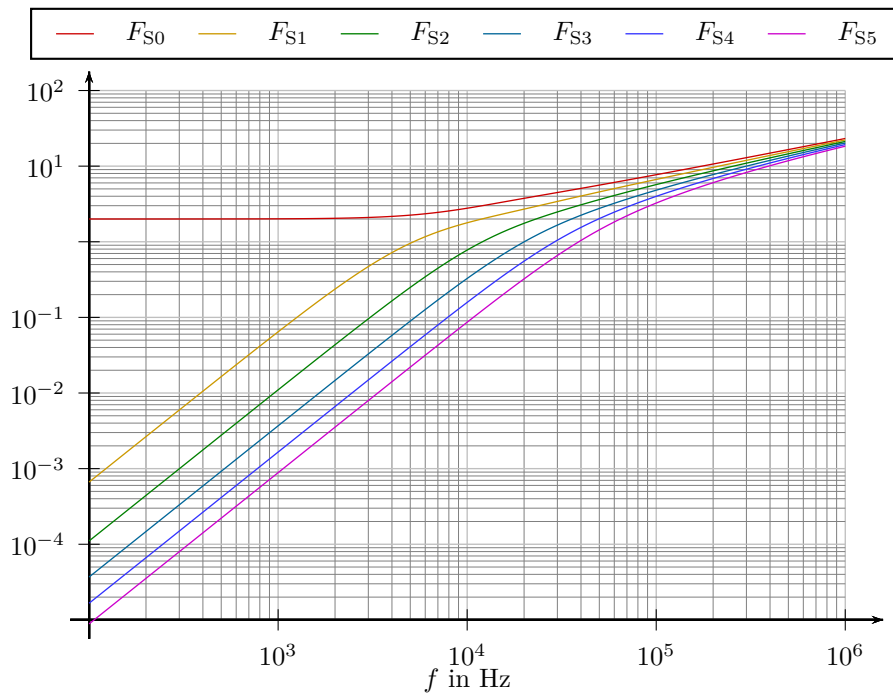


Abbildung 4.21: Skinfaktoren der tangentialen Feldstärkewellen für einen kreisrunden Leiter mit dem Radius $r_L = 1,5$ mm

Die Skinfaktoren höherer Ordnung steigen im unteren Frequenzbereich stark an, sind aber um einige Größenordnungen kleiner als der Skinfaktor nullter Ordnung. Im oberen Frequenzbereich unterscheiden sich die Skinfaktoren kaum noch und alle besitzen eine Änderungsrate von ungefähr 0,5 pro Dekade. Das liegt daran, dass die Verhältnisse der modifizierten Besselfunktionen für große Argumente nahezu konstant bleiben und die Skinfaktoren überwiegend durch den Realteil von

$$F_{Sk} \propto \log \left(\sqrt{\frac{1}{\delta}} \right) \propto \log \left(\sqrt{f} \right) = \frac{1}{2} \log(f)$$

bestimmt werden.

Zur vollständigen Auswertung und Validierung dieses Widerstandsmodells werden mehrere rotationssymmetrische Luftspulen mit den maximal 12 Windungen und unterschiedlichen Lagenkonfigurationen modelliert. Die in Abbildung 4.22 dargestellten Verläufe zeigen die Abhängigkeit des Widerstandes der Luftspule von der Anzahl der gewickelten Windungen. Generell ist zu erkennen, dass der Widerstand zunimmt, sofern der Wickeldraht in der nächsten Lage weitergeführt wird. Das liegt in erster Linie an der linearen Abhängigkeit des Widerstandes von der Leiterlänge. Die strikte Widerstandszunahme beim Lagenwechsel wird allerdings deutlich ausgeprägter, sofern die Frequenz erhöht wird. Dieser Zuwachs kann nicht durch die Längenzunahme erklärt werden, sondern hängt mit der Stromverdrängung zusammen. Es zeigt sich, dass die Widerstandsänderung durch Stromverdrängung immer größer wird, je kompakter der Leiter gewickelt ist. Dies ist damit zu begründen, dass beispielsweise zwei stromführende Drähte sich umso stärker gegenseitig beeinflussen, je näher sie beieinander angeordnet sind. Da der mittlere Abstand zwischen 12 Windungen in vier Lagen kürzer ist als in einer einlagigen Konfiguration, nehmen die Feldstärken in den Leiterumgebungen und damit die Stromverdrängungseffekte zu. In [1] wird dieser Effekt als interner Proximity-Effekt bezeichnet und ist besonders interessant bei der Betrachtung von Litzedrähten, welche im nächsten Kapitel näher erläutert werden.

Für den Moment bleibt allerdings festzuhalten, dass für den Entwurf von Luftspulen mit kleinem Widerstand, einlagige Konfigurationen zu bevorzugen sind. Allerdings ist das natürlich abhängig von den Anforderungen an die Spule, wie z.B. Induktivität oder Bauraum. Deshalb ist es besonders interessant, in diesem Zusammenhang einen Blick auf die Abhängigkeit der Induktivität von der Anzahl der Windungen aus Abbildung 4.7 zu werfen. Beispielsweise wird die Induktivität einer Luftspule mit 12 Windungen verdoppelt, sofern der Wickeldraht in vier Lagen aufgeteilt wird. Bei kleinen Frequenzen nimmt der Widerstand hingegen nur mit dem Faktor 1,5 zu. Bei $f = 10 \text{ kHz}$ wird der Widerstand vervierfacht bei $f = 100 \text{ kHz}$ sogar fast verfünffacht.

Die Abweichungen zwischen dem Widerstandsmodell nach Gleichung 4.78 und der FEM-approximierten Werte sind insbesondere im kleinen Frequenzbereich sehr gering. Für den Fall $f = 1 \text{ kHz}$ beträgt die maximale Abweichung ca. 2 %. Mit steigender Frequenz nehmen die Abweichungen allerdings zu bis zu einem maximalen Wert von ca. 20 % für den Fall $f = 100 \text{ kHz}$ und einlagiger Konfiguration. Die genaue Ursache dafür ist schwer zu begründen. Ein möglicher Aspekt betrifft die Annahme von kreisrunden Stromfäden zur Berechnung des erregenden Feldes. Das Feld auf der Oberfläche der Leiter wird für einen massiven stromführenden Leiter durchaus verschieden von dem eines Stromfadens sein. Zum Anderen wird die Abhängigkeit des erregenden Feldes in Längsausdehnung des Leiters nicht berücksichtigt. Allerdings ist es an dieser Stelle nicht korrekt, bereits jetzt Rückschlüsse auf die Verwertbarkeit dieses Widerstandsmodells zu ziehen, da insbesondere der Einfluss des Kernes noch nicht diskutiert wurde.

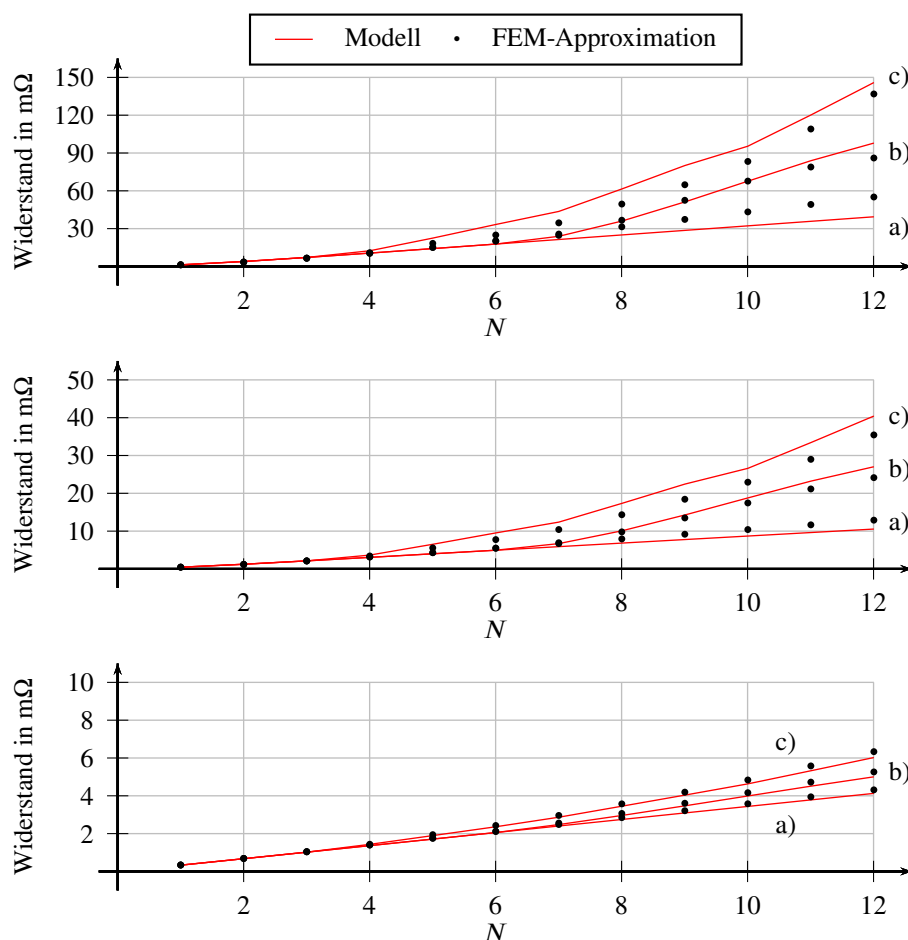


Abbildung 4.22: Widerstand einer kreisrund gewickelten Luftspule mit $r_L = 1,5$ mm und maximal a) 12 b) 6 c) 3 Windungen pro Lage. Oben: $f = 100$ kHz, Mitte: $f = 10$ kHz, Unten: $f = 1$ kHz

Azimutale Wirbelströme

Zur Beschreibung azimuthaler Wirbelströme ist es notwendig, dass das Vektorpotential innerhalb des Leiters die Helmholtz-Gleichungen

$$\frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \frac{\partial \underline{A}_{I\varphi_i}}{\partial r_i} - \left(\frac{1}{r_i^2} + \underline{\alpha}^2 \right) \underline{A}_{I\varphi_i} = 0$$

und außerhalb des Leiters die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \frac{\partial \underline{A}_{O\varphi_i}}{\partial r_i} - \frac{\underline{A}_{O\varphi_i}}{r_i^2} = 0$$

erfüllt. Dabei handelt es sich im Grunde genommen um gewöhnliche Differentialgleichungen, zu dessen Lösung kein Separationsansatz gewählt werden muss. Unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen des Feldes am Rande des Leiters lautet die Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$\underline{A}_{I\varphi_i} = \frac{I_1(\underline{\alpha}r_i)}{\underline{\alpha}I_1(\underline{\alpha}r_L)} H_{Fzj} . \quad (4.83)$$

Dabei wird angenommen, dass die Feldstärke in Längsrichtung an jedem Punkt der Leiteroberfläche konstant ist und mit zeitlicher Nullphasenlage verläuft. Daraus ergeben sich unmittelbar

$$\underline{S}_{I\varphi_i} = -\underline{\alpha} \frac{I_1(\underline{\alpha}r_i)}{I_0(\underline{\alpha}r_L)} H_{Fzj} \quad (4.84)$$

$$\underline{H}_{Iz_i} = \frac{I_0(\underline{\alpha}r_i)}{I_0(\underline{\alpha}r_L)} H_{Fzj} \quad (4.85)$$

zur Berechnung von Stromdichte und tangentialer Feldstärke. Werden diese Ausdrücke in den Satz von Poynting (Gleichung 4.59) eingesetzt, ergibt sich

$$R_{Si,j} = \frac{l_L}{\kappa \hat{I}^2} 2\pi \Re \left\{ \frac{I_1(\underline{\alpha}r_L)}{\underline{\alpha}r_L I_0(\underline{\alpha}r_L)} \right\} H_{Fzj}^2 = \frac{l_L}{\kappa \hat{I}^2} 2\pi F_{S1} H_{Fzj}^2 \quad (4.86)$$

zur Bestimmung des Widerstandes in Folge eines externen Feldes in Längsrichtung des Leiters. Der Widerstand ist in dieser Gleichung nicht mehr abhängig von einer Vielzahl von Skinfaktoren, sondern nur vom Skinfaktor erster Ordnung. Das ist auch nicht ungewöhnlich, da das externe Feld als konstant angenommen wird und somit vergleichbar ist mit dem Skinfaktor nullter Ordnung. Wie in Abbildung 4.21 zu erkennen, sind die Skinfaktoren nullter und erster Ordnung bei hohen Frequenzen nahezu gleich. Somit haben die hochfrequenten Feldkomponenten in Längsrichtung gleichen Einfluss auf die entstehenden Verluste, wie die Komponenten quer zum Leiter. Auf eine Validierung wird an dieser Stelle verzichtet, da sich der Ausdruck für den Widerstand azimuthaler Wirbelströme nicht von dem longitudinaler Wirbelströme erster Ordnung unterscheidet. Deshalb sind ähnliche Ergebnisse wie im vorangegangenen Kapitel zu erwarten.

Stattdessen zeigt die folgende Auswertung eine beispielhafte Analyse einer Luftspule. Als Anordnungsbeispiel wird der Wickel der Anordnung aus Abbildung 4.27, also eine rechteckförmig gewickelte Luftspule, modelliert. Zu dieser Analyse wird bewusst eine Rechteckwicklung gewählt, da bei einer rotationssymmetrisch gewickelte Luftspule keine Feldstärkekomponenten in Längsrichtung des Wickeldrahtes zu erwarten sind und somit der Einfluss der azimuthalen Wirbelströme nicht bewertet werden kann. Folglich zeigt Abbildung 4.23 den stromdurchflossenen Wickel zusammen mit einer qualitativen Darstellung der umgebenden Feldstärkevektoren entlang des Wickeldrahtes. Zur besseren Übersicht sind nur die Feldstärkevektoren auf dem obersten Punkt der Drahtmantelfläche dargestellt. Wie zu erkennen, ist die Feldstärke symmetrisch gegenüber der

oben bzw. unten angeordneten Wicklungen aufgeteilt. Insbesondere an den Ecken sind die Komponenten in Längsrichtung des Drahtes besonders ausgeprägt. In den mittleren Abschnitten der Wickelkanten sind sie nahezu Null, jedoch ist der Feldstärkebetrag in diesem Bereich am größten. Aus diesem Grund entstehen in diesen jeweiligen Leiterabschnitten die größten Wirbelströme und Widerstandswerte. Insbesondere an den oberen und unteren Windungen ist dieser Zusammenhang deutlich zu erkennen.

Interessant ist auch der Vergleich zwischen den inneren und äußeren Wicklungsabschnitten. Bei den beiden Windungen in der Mitte ist der Widerstand auf der Innenseite ca. 10 % größer als auf der Außenseite. An den oberen und unteren Windungen zeigt sich hingegen eine Zunahme des Widerstandes um ca. 75 %. Daher sind die Verluste auf der Innenseite der Windung ca. doppelt so groß wie auf der Außenseite. Der Graph im unteren Teil von Abbildung 4.23 zeigt den Gesamtwiderstand der Luftspule in Abhängigkeit der Frequenz. Unterhalb der Knickfrequenz von ca. 1,5 kHz sind noch keine Wirbelstromeffekte vorhanden. Deshalb hat der Widerstand einen Wert von ca. 2,52 mΩ und entspricht damit dem Wert des Gleichstromwiderstandes nach [3]. Der Gleichstromwiderstand kann anhand von Gleichung 4.82 als

$$R_{Si,i} = \frac{l_L}{\kappa \pi r_L^2} \quad (4.87)$$

ausgedrückt werden.

4.2.2 Luftspulen aus einem Leiter mit Litzendraht

Wie aus den vorangegangenen Kapitel ersichtlich wird, ist die Knickfrequenz des Widerstands abhängig von dem Radius des Wickeldrahtes. Die Knickfrequenz wird umso größer, je kleiner der Drahtradius gewählt wird. Die stromführenden Drähte in Drosselspulen und Filterdrosseln leistungselektronischer Schaltungen werden deshalb aus vielen kleinen isolierten Drähten aufgebaut. Wie in [3] erklärt, wird ein solches Bündel dann als Litzendraht oder einfach Litze bezeichnet. Zudem werden die Einzeldrähte miteinander verdreht, sodass jeder Draht im Querschnitt der Litze jede Position mindestens einmal einnimmt. Durch diesen Aufbau soll verhindert werden, dass die Einzeladern beim Wickeln um den Wickelkörper mit unterschiedlicher Länge abgeschnitten werden. Abbildung 4.24 zeigt einen Ausschnitt des schematischen Aufbaus einer Litze. Die Oberfläche der Einzeladern innerhalb der Litze ist aufgrund des kleinen Drahtradius sehr klein. Aus diesem Grund wird angenommen, dass die Feldstärke über den Querschnitt des Leiters konstant sei. Zudem wird der Draht von einem Strom durchflossen und das daraus resultierende Feld wird dem externen Feld überlagert. Mit den lokalen Koordinaten des i -ten Leiters wird ein solches erregendes Feld innerhalb der Einzelader durch

$$\underline{A}_{Fzj} = \mu_0 r_i \left(H_{Faj} + H_{Fyj} \cos(\varphi_i) - H_{Fxj} \sin(\varphi_i) \right) \quad (4.88)$$

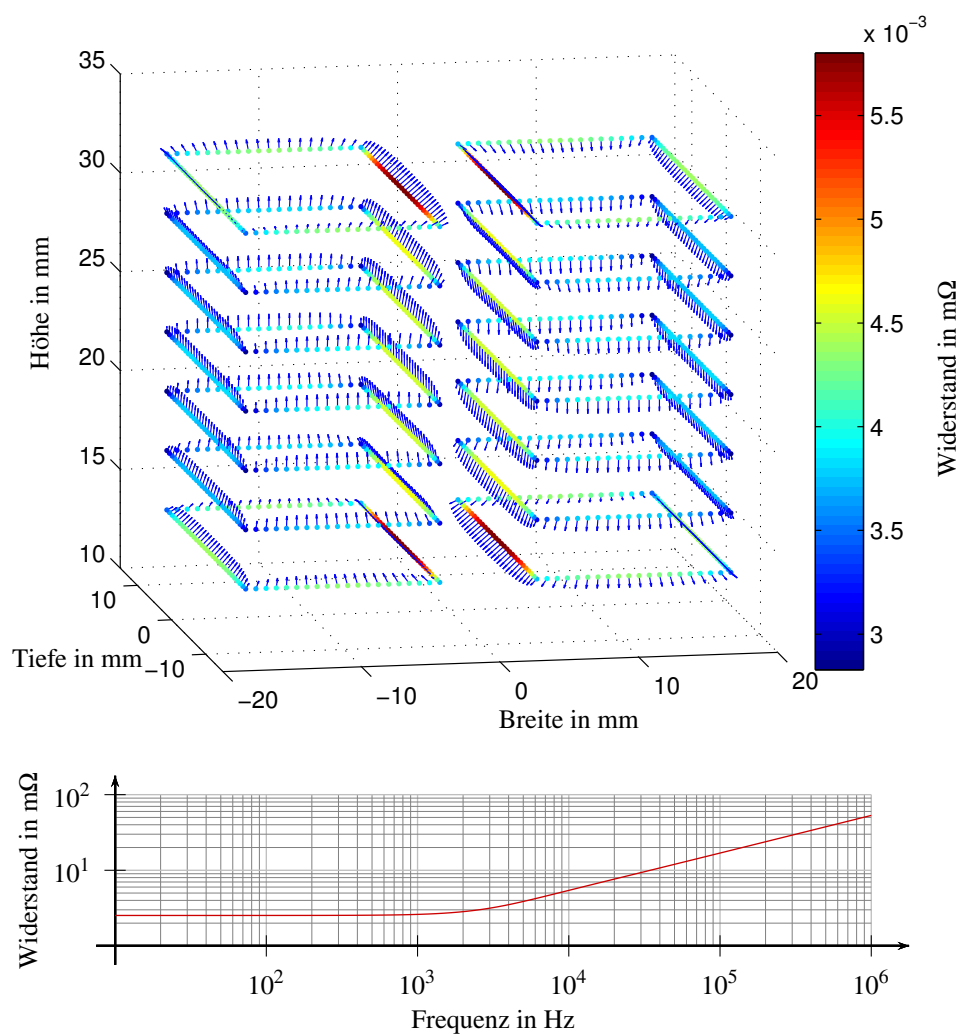


Abbildung 4.23: Oben: Feldstärke und Widerstand einer Luftspule aus Volldraht mit dem Radius 1,5 mm bei $f = 10$ kHz. Unten: Gesamtwiderstand der Luftspule aus dem oberen Teilbild

beschrieben. Zu beachten ist, dass alle Feldstärkekomponenten konstante Größen sind. Damit können die Integrale der Gleichungen 4.72 direkt gelöst werden

$$\begin{aligned}
 H_{Fa,j} &= H_{Fa,j} \\
 \hat{H}_{Fc,j,1} &= 2 H_{Fy,j} \\
 \hat{H}_{Fs,j,1} &= 2 H_{Fx,j}
 \end{aligned}$$

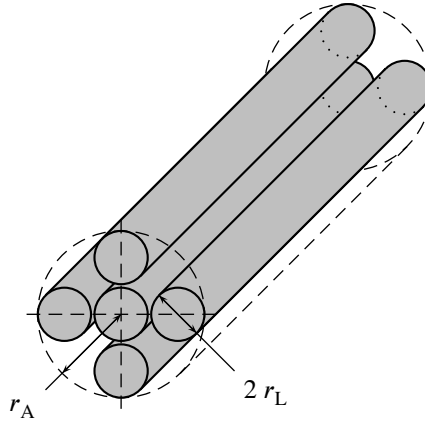


Abbildung 4.24: Schematische Darstellung einer Litzeleitung bestehend aus 5 Einzeladern

und es bleiben die Skinfaktoren nullter und erster Ordnung aufgrund der Orthogonalität der Sinus- und Kosinusfunktionen erhalten. Zusammen mit den Verlusten durch azimutale Wirbelströme kann der Gesamtwiderstand einer einzelnen Ader der Litze durch

$$R_{Si,j} = R_{Si,i} \frac{F_{S0}}{2} + \frac{l_L}{\kappa \hat{I}^2} F_{S1} \left(H_{Fxj}^2 + H_{Fyj}^2 + H_{Fzj}^2 \right) \quad (4.89)$$

beschrieben werden. Der Widerstand in Folge des Skinfaktors nullter Ordnung ist unabhängig vom äußeren Feld. Er ist für alle N_A Einzeladern einer Litzeleitung gleich. Unter der Annahme, dass der Strom sich auf alle Einzeladern gleichmäßig aufteilt, beschreibt

$$R_{Li,j} = \frac{R_{Si,i}}{N_A} \frac{F_{S0}}{2} + \frac{l_L}{\kappa I_i^2} F_{S1} \sum_{n=1}^{N_A} \left(H_{Fxj,n}^2 + H_{Fyj,n}^2 + H_{Fzj,n}^2 \right) \quad (4.90)$$

den Widerstand $R_{Li,j}$ eines vom Strom I_i durchflossenen Litzedrahtes. Bei gleichmäßiger Stromaufteilung kann die magnetische Feldstärke innerhalb der Litze durch Anwendung des Ampereschen Gesetzes

$$\vec{H}_{Fi} = \frac{I_i r_i}{2\pi r_A^2} \left(\sin(\varphi_i) \vec{e}_x + \cos(\varphi_i) \vec{e}_y \right) \quad (4.91)$$

ermittelt werden. Die Überlagerung dieses Feldes mit dem konstanten externen Feld aus Gleichung 4.88 wird anschließend in Gleichungen 4.72 eingesetzt und ergibt, nach [3],

$$R_{L,i,j} = \frac{R_{Si,i}}{N_A} \frac{F_{S0}}{2} + \frac{R_{Si,i}}{N_A} F_{S1} \frac{N_A(N_A - 1)r_L^2}{4\pi r_A^2} \quad (4.92)$$

$$+ \frac{l_L}{\kappa I_i^2} F_{S1} \sum_{n=1}^{N_A} \left(H_{Fxj,n}^2 + H_{Fyj,n}^2 + H_{Fzj,n}^2 \right)$$

zur Berechnung des Widerstandes von Litzeleitungen. Darin wird der Gesamtwiderstand der Litze in drei Teile unterteilt. Der erste Term entspricht den Widerstand durch den Skineffekt. Er ist in jeder Einzelader der Litze gleich und unabhängig von äußeren Einflüssen. Der zweite Term entspricht dem Widerstand durch den inneren Proximity-Effekt. Dieser Term ist abhängig von der Gestaltung der Litze und kann daher zur Charakterisierung der Litze verwendet werden. Der dritte Term entspricht dem Widerstand durch den äußeren Proximity-Effekt, also durch ein von außen angelegtes magnetisches Feld. Die Verluste, die mit diesem Term beschrieben werden, sind also abhängig von dem Aufbau der gesamten Wicklung bzw. Drosselspule oder Filterdrossel.

Zur Auswertung des Litzemodells zeigt Abbildung 4.25 den Widerstand einer Luftspule aus Litze. Weiterhin ist zum Vergleich nochmals der Widerstand des Volldrahtes dargestellt, wobei der effektive Litzequerschnitt dem des Volldrahtes gleicht. Die dargestellte Litze besteht aus 225 Einzeladern mit jeweils 0,1 mm Radius. Durch den kleinen

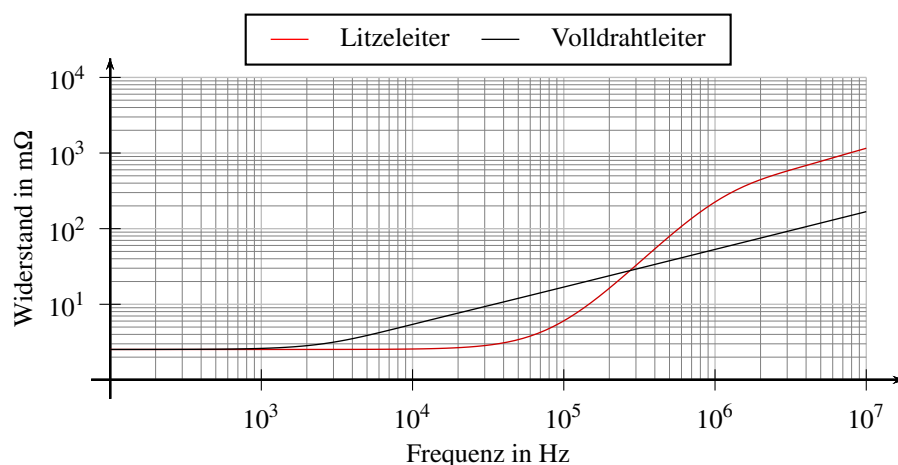


Abbildung 4.25: Widerstand der Luftspule aus Abbildung 4.23 bestehend aus Litzendraht mit 225 Einzeladern und jeweils $r_L = 0,1$ mm

Radius der Einzeladern wird die Knickfrequenz auf ca. 2 MHz angehoben. Jedoch sorgt

der innere Proximity-Effekt dafür, dass bereits ab ca. 30 kHz der Widerstand stark ansteigt und bei ca. 300 kHz den Widerstand des Volldrahtes übersteigt. Darüber hinaus ist der Widerstand der Litze bei hohen Frequenzen ca. Faktor 10 größer als der des Volldrahtes.

4.2.3 Drosseln

In diesem Kapitel wird der Einfluss des Kernes auf die den Widerstand des Wickeldrahtes untersucht. Wie die vorangegangenen Kapitel gezeigt haben, kann die magnetische Feldstärke an jedem beliebigen Punkt im Raum durch die Überlagerung der freien und gebundenen Feldstärke

$$\vec{H}_j = \vec{H}_{Fj} + \vec{H}_{Gj}$$

bestimmt werden. Daher ist zu erwarten, dass insbesondere an den Rändern des Kernes hohe Feldstärken auftreten. In den Windungen, die in der Nähe dieser hohen Feldstärken platziert sind, treten hohe Wirbelströme auf, die den Widerstand des gesamten Wickeldrahtes erhöhen. Um diesen Zusammenhang zu beurteilen, wird der Luftspule aus dem vorangegangenen Kapitel ein U-I-Kern mit einem Luftspalt von 1 mm und einer relativen Permeabilität von 3300 hinzugefügt. Das obere Teilbild der Abbildung 4.26 zeigt wieder die qualitativen Feldstärkevektoren und die farblich unterstrichenen Widerstandswerte der einzelnen Wickeldrahtabschnitte.

Der Einfluss der gebundenen Feldstärke ist am stärksten an den Windungen in der Nähe des Luftspaltes zu erkennen. Werden nur die beiden oberen Windungen betrachtet, so fällt auf, dass der Widerstand der inneren Abschnitte fast doppelt so groß ist wie in den äußeren Abschnitten. In den oberen Windungen ist der Widerstand ca. 10-mal größer als in den unteren Windungen. Bei genauerem Hinsehen ist weiterhin zu erkennen, dass nicht nur die inneren Abschnitte der oberen Windungen, sondern auch die vorderen und hinteren von der hohen Feldstärke in der Nähe des Luftspaltes beeinflusst werden. Das liegt insbesondere an der Feldstärkekomponente in Längsausdehnung des Leiters. Während bei der Luftspule der Widerstand innerhalb der Wicklung noch annähernd gleichmäßig verteilt war, konzentriert sich hier alles auf den Luftspalt. Daher ist zu erwarten, dass beim Betrieb der Drossel die meisten Verluste in den Windungen am Luftspalt anfallen und dementsprechend an Temperatur zunehmen.

An dieser Stelle wird noch ein Blick auf den resultierenden Gesamtwiderstand der Drossel geworfen. Der untere Teil aus Abbildung 4.26 zeigt einen Vergleich des frequenzabhängigen Widerstandes einer Luftspule mit und ohne Kern. Bis zu einer Frequenz von ca. 300 Hz wird der Widerstand durch den Gleichstromwiderstand bestimmt. Danach steigt der Widerstand aufgrund des Proximity-Effekts stark an. Ab der Knickfrequenz für den Leiter mit $r_L = 1,5$ mm nehmen die Änderungsraten der Skinfaktoren höherer Ordnung ab und verlaufen mit gleicher Änderungsrate wie der Skinfaktor nullter Ordnung. Daher nimmt der Widerstand mit und ohne Kern bei hohen Frequenzen mit

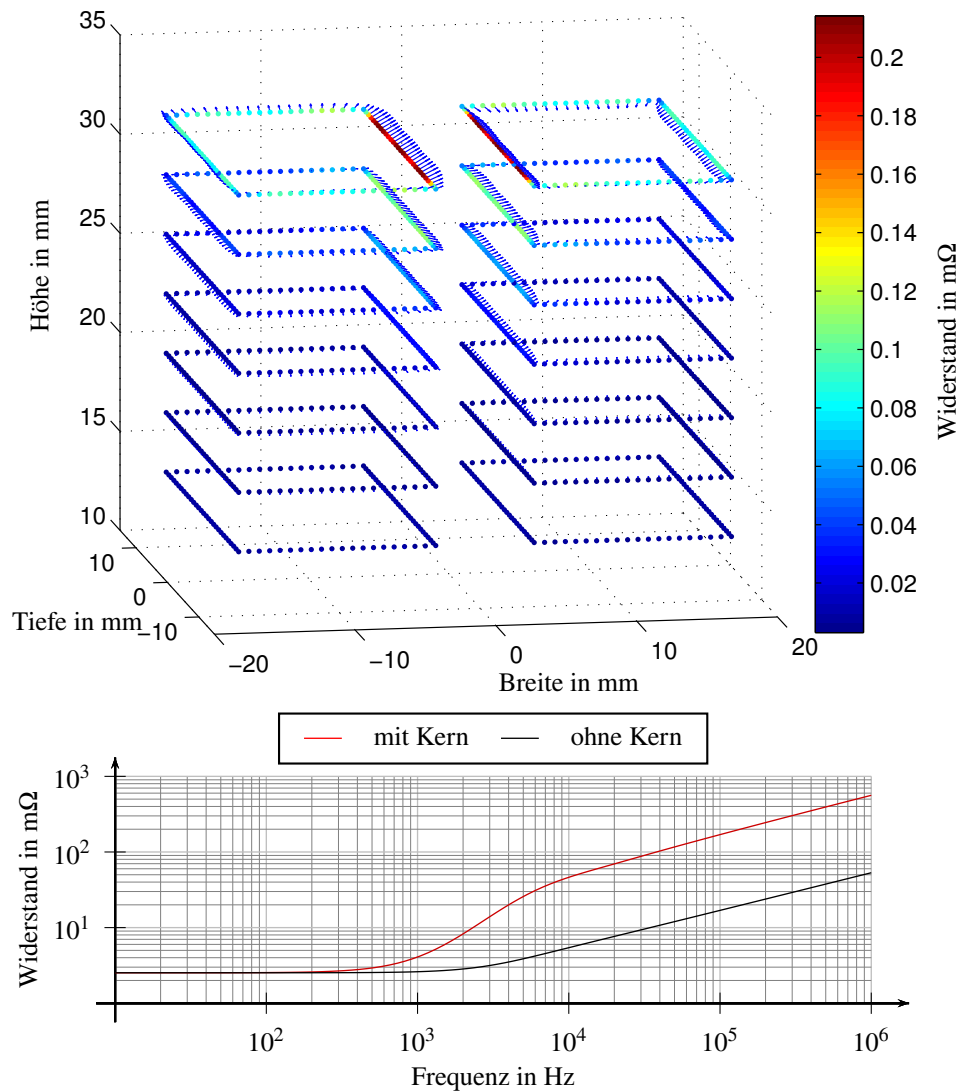


Abbildung 4.26: Oben: Feldstärke und Widerstand der Drossel mit Windungen aus Voll-
draht mit dem Radius 1,5 mm bei $f = 10$ kHz. Unten: Gesamtwiderstand der Luftspule
und der Drossel aus dem oberen Teilbild

gleicher Änderungsrate zu. Jedoch ist der Widerstand der Drossel in diesem Frequenzbe-
reich ca. 10-mal größer als der der Luftspule. Abbildung 4.27 zeigt das gesamte Bild der
modellierten Drosselspule und die Flussdichteverteilung innerhalb des Kernes. Wie zu
erwarten, nimmt die Flussdichte in der Nähe des Luftspaltes die höchsten Werte von über
400 mT an. Bei einer real nach diesem Bild aufgebauten Drossel wären also bei einem
Strom von 20 A bereits erste Teilsättigungserscheinungen zu erwarten. An den Außen-

kanten in der Tiefe ist die Flussdichte sehr gering und nimmt Werte von unter 50 mT an. Die Farbgebung der Kernoberfläche zeigt, dass die räumliche Flussdichteänderung in

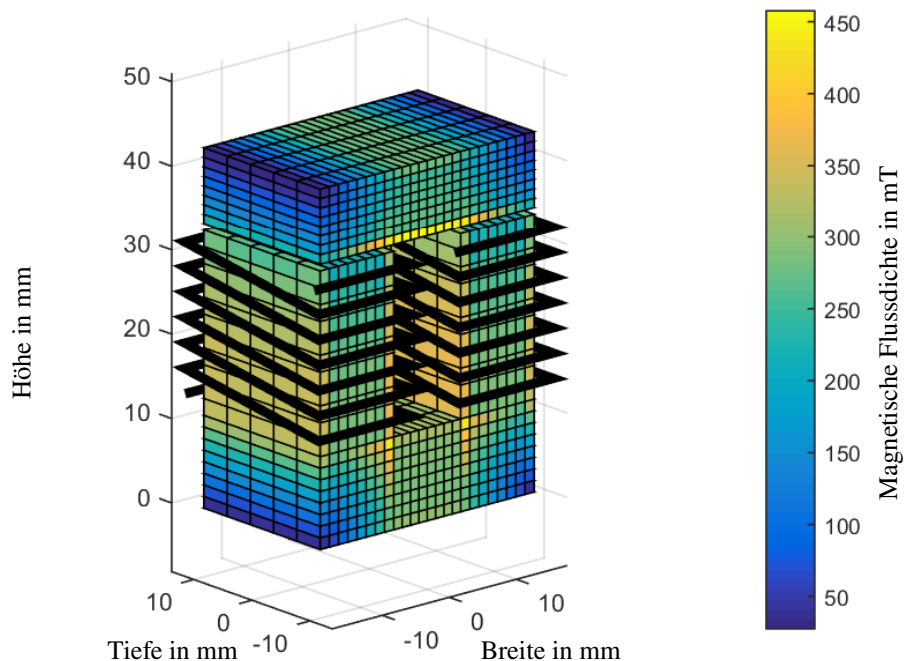


Abbildung 4.27: Darstellung der magnetischen Flussdichteverteilung innerhalb des permeablen Rohres mit $\mu_r = 3300$ bei einer Stromstärke von $I = 20$ A

Richtung von Breite und Höhe deutlich größere Werte annimmt als in Richtung der Tiefe. Das liegt daran, dass die magnetischen Vorzugsrichtungen durch die Anordnungen der Wicklungen geometrisch vorgegeben sind.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Entwurfsmethode benötigt auf einem handelsüblichen Heimrechner eine Zeit von 6,37 s für die in Abbildung 4.26 dargestellte Drosselspule. Erfahrungsgemäß liegt der Zeitaufwand für die Berechnung anhand der Methode der finiten Elemente für die gleiche Anordnung im mehrstelligen Minuten- bis Stundenbereich. Zudem erfordert die Berechnung des frequenzabhängigen Widerstandes eine iterative Ausführung des Simulationstools, sodass die Rechendauer nochmals deutlich ansteigt. Daher bleibt festzuhalten, dass die Simulationsdauer mit der Methode der finiten Elemente die Simulationsdauer der Randelementmethode in Kombination mit den frequenzabhängigen Widerstandsformeln in keinem bekannten Fall unterschritten hat.

4.3 Zusammenfassung

Für den Entwurf und zur Analyse von dreidimensional ausgedehnten Anordnungen von Drosselspulen und Filterdrosseln in leistungselektronischen Schaltungen wird heutzutage überwiegend die Methode der finiten Elemente genutzt. Bei dieser Methode wird um das zu untersuchende magnetische Bauteil eine Hülle gelegt, dessen Volumen diskretisiert wird und auf dessen Oberfläche willkürlich annehmbare Randbedingungen vorgegeben sind. Aus diesem Grund sind Analysen mit dieser Methode, je nach geometrischer Komplexität der zu untersuchenden Drosselspule oder Filterdrossel, häufig sehr rechenaufwändig und implizieren schwer quantifizierbare Einflussnahmen durch die Randbedingungen. Insbesondere wenn filigrane Strukturen, wie zum Beispiel Litze als Wickeldraht der Spule, zu untersuchen sind, muss die Diskretisierung besonders fein gewählt werden, dessen Rechenaufwand für einen einfachen Entwurf von Drosselspulen oder Filterdrosseln nicht gerechtfertigt ist. Deshalb zeigt dieses Kapitel einen neuartigen Ansatz, bei dem die weitaus jüngere Methode der Randlelemente mit den Widerstandsformeln infolge longitudinaler und azimuthaler Stromverdrängungseffekte kombiniert wird, um die Induktivitäts- und Widerstandscharakteristik von Drosselspulen und Filterdrosseln zu bestimmen bei gleichzeitiger Reduktion des Rechenaufwands. Durch diesen Ansatz wird die Induktivität einer Drossel durch Überlagerung von drei separaten Anteilen bestimmt.

Der erste Teil, die innere Selbstinduktivität, ist proportional zum magnetischen Energieinhalt innerhalb des stromführenden Leiters. Diese wird für Leiter mit kreisrunder Querschnittsfläche analytisch anhand des Durchflutungssatzes und durch Annahme einer konzentrischen, kreisrunden Verteilung der magnetischen Feldstärke bestimmt. Die Abweichung zwischen dieser analytischen Lösung und der Lösung nach der Methode der finiten Elemente beträgt für verschiedene praxisnahe Anordnung kreisrunder Leiterschleifen aus Runddraht maximal 1,13 % und ist daher zur Berechnung der Selbstinduktivität der am häufigsten eingesetzten Leiterschleifenanordnungen gut geeignet. Leiterschleifen mit rechteckigem Leiterquerschnitt haben aufgrund unzureichender Annahmen deutliche Abweichungen der Selbstinduktivität und werden daher durch lineare Faktoren korrigiert.

Der zweite Teil, also die äußere Selbstinduktivität, wird durch die magnetische Energie außerhalb des stromführenden Drahtes einer Luftspule definiert. Ein Vergleich zwischen äußerer Induktivität einer Wicklung mit kreisrunden Leiterschleifen und rechteckigen Leiterschleifen, dessen aufgespannte Schleifenfläche gleich ist, zeigt, dass rechteckige Leiterschleifen stets eine größere Induktivität haben als kreisrunde. Das liegt vor allem an den großen Feldstärken in der Nähe von eckig geformten Leiterschleifenabschnitten.

Der dritte Teil, die Induktivität des Kernes, wird durch die gespeicherte magnetische Energie im Kern definiert. Dazu wird das Produkt aus der Flussdichte und Magneti-

sierung über das Volumen des Kernmaterials integriert, wobei die Flussdichte aus der Luftspule ohne Kernmaterial, also aus der Berechnung der äußeren Induktivität, bereits bekannt ist und die Magnetisierung durch Auswertung der Randelementmethode gewonnen wird. Die Randelemente selbst sind kleine raumorientierte Flächenelemente, welche durch die Diskretisierung der Kernoberfläche entstehen und werden für zylindrische, wie aber auch kartesische Koordinaten definiert. Dadurch können Drosselspulen und Filterdrosseln mit zylindrischen oder rechteckigen Kernbauformen anhand dieser Methode entworfen werden. Diese Induktivitätsmodelle werden anhand der Induktivitätsanalyse von zwei exemplarischen Spulenkonfigurationen mit Kern validiert.

Im ersten Beispiel ist eine einzelne Leiterschleife um ein zylindrisches Rohr mit dünner Wandstärke von einem Strom durchflossen, dessen Position entlang des Rohres variiert und demnach zu unterschiedlich hohen Induktivitätswerten der gesamten Anordnung führt. Dabei zeigt sich, dass die Induktivität maximal wird, sofern sich die Leiterschleife exakt in der Mitte des Rohres befindet. Dieses Ergebnis wird durch Anwendung der Methode der finiten Elemente für die selbe Anordnung bestätigt.

Das zweite Beispiel zeigt eine in der Leistungselektronik übliche rechteckige Kernbauform mit mehreren stromdurchflossenen Leiterschleifen, welche auf zwei Schenkeln gleichmäßig verteilt sind und dessen magnetischer Kreis durch ein variabel positionierbares Joch geschlossen wird. Durch die Position des Jochs entstehen zwei gleiche Luftspalte, deren Größe die mittlere magnetische Flussdichte im Kern und damit die Gesamtinduktivität beeinflusst. Dabei kann die bekanntermaßen zunehmende Induktivität und zunehmende mittlere magnetische Flussdichte bei kleiner werdendem Luftspalt ebenfalls durch Auswertung der Induktivitätsmodelle bestätigt werden. Jedoch konnte zur Validierung dieses Ergebnisses nicht auf die Methode der finiten Elemente zurückgegriffen werden. Stattdessen wird ein praktisch bewährtes und ideales Reluktanzmodell zur vergleichenden Gegenüberstellung hinzugezogen. Zusammenfassend bleibt dabei festzuhalten, dass der Entwurf mit den entwickelten Induktivitätsmodellen zu einer eher konservativ ausgelegten Induktivität zur Applikation in einer Gleichrichterschaltung führt.

Der Widerstand ist ein Ausdruck für die Leistung, die durch die beiden Ströme innerhalb der Wicklungen umgesetzt wird. Hohe Stromänderungsraten führen dabei sowohl zu longitudinalen, sich in Längsrichtung ausbreitenden, und azimuthalen, sich in Querrichtung ausbreitenden, Verdrängungseffekten der Stromdichte innerhalb des Leiters. Diese Effekte werden mittels der Lösung der Bessel'schen Differentialgleichungen durch sogenannte Skinfaktoren ausgedrückt. Im Falle longitudinaler Stromverdrängung beschreibt der Skinfaktor nullter Ordnung die frequenzabhängigen Verluste, die nur durch den Stromfluss im Leiter selbst entstehen. Sofern mehrere Leiter dicht beieinander liegen, kommen die Skinfaktoren höherer Ordnung hinzu, welche in einigen Publikationen daher auch als Proximityfaktoren bezeichnet werden. Im Falle azimuthaler Stromverdrängung treten die Skinfaktoren höherer Ordnung nicht auf. Dabei wird gezeigt, dass der

Widerstand einer kreisrunden Wicklung aus solidem Kupferdraht nicht nur von der Anzahl der gewickelten Windungen abhängt, sondern auch vom Aufbau der Lagen. Dabei ergeben sich für einlagige Windungsanordnungen stets die kleinsten Widerstandswerte. Gleiches trifft auch für bewickelte Kerne zu. Allerdings zeigt die Auswertung der Widerstandsmodelle, dass in einem exemplarischen Aufbau einer rechteckigen Kernbauform mit gleichmäßig verteilten Windungen der Kern selbst einen wesentlichen Einfluss auf den Widerstand der Windung hat. Das liegt insbesondere an der hohen Feldstärke in der Nähe des Luftspalts. Bei Litzedrähten hängt der Widerstand nur von den Skin-faktoren nullter und erster Ordnung ab, da durch die Annahme homogener Feldstärke innerhalb jeder Einzelader alle Skinfaktoren höherer Ordnung verschwinden. Diese Annahme führt dazu, dass bei der Widerstandscharakteristik von Litzewicklungen mehrere Knickfrequenzen entstehen, welche plausibel nachvollziehbar sind. Allerdings fehlt dieser plausiblen Erklärung die Validierung beziehungsweise Verifikation.

Als Fazit dieses Kapitels bleibt festzuhalten, dass durch die Kombination der numerischen Randelementmethode mit den Widerstandsformeln für longitudinale und azimutale Stromverdrängungseffekte der Rechenaufwand für den Entwurf von Drosselspulen und Filterdrosseln gegenüber der Methode der finiten Elemente deutlich reduziert werden kann.

Kapitel 5

Experimentelle Verifikation der vorgestellten Modelle

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, sowohl numerische als auch analytische Verfahren aufzuzeigen, zu bewerten und weiterzuentwickeln, sodass deren Kombination zu einer wenig rechenintensiven und ganzheitlichen Entwurfsmethode für Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler führt. Diese Verfahren wurden in den Kapiteln 2 bis 4 ausführlich beschrieben und analysiert. Das folgende Kapitel zeigt die Verifikation dieser Modelle mittels aufgenommener Messergebnisse an einem elektronischen Stromversorgungsgerät mit einer nominellen Leistung von 3 kW. Der darin enthaltene Synchrongleichrichter mit zwei integrierten Synchronwandlern erlaubt den Betrieb an einer nominellen Eingangsspannung von 230 V und regelt die Ausgangsspannung auf einen Wert von 435 V.

5.1 Mittelwertmodell

Abbildung 5.1 zeigt die leistungselektronische Schaltung des Synchrongleichrichters zusammen mit den Kapazitäten einzelner Leitungsabschnitte zum Gehäuse. Die Parameter dieser Schaltung befinden sich im Anhang und sind in Tabelle A.6 dargestellt.

Durch den parallelen Betrieb wird der Eingangsstrom in zwei Pfade aufgeteilt, woraus sich mehrere Vorteile ergeben. Vorrangig ist zu erwähnen, dass dadurch jeder einzelne Synchronwandler nur für den halben Bemessungsstrom des Gleichrichters ausgelegt ist. Somit können kleinere und gegebenenfalls geeignetere Bauteile für den Aufbau des Synchrongleichrichters eingesetzt werden. Beispielsweise war es im vorliegenden Fall nicht möglich, den vollen Bemessungsstrom über einen einzelnen Synchronwandler einzustellen, da entsprechende leistungselektronische Schalter nicht verfügbar sind. Zudem ist die Aufteilung der Verlustleistung auf mehrere Bauteile besonders vorteilhaft, denn dadurch wird die Anforderung an den thermischen Übergang zwischen den elektrischen

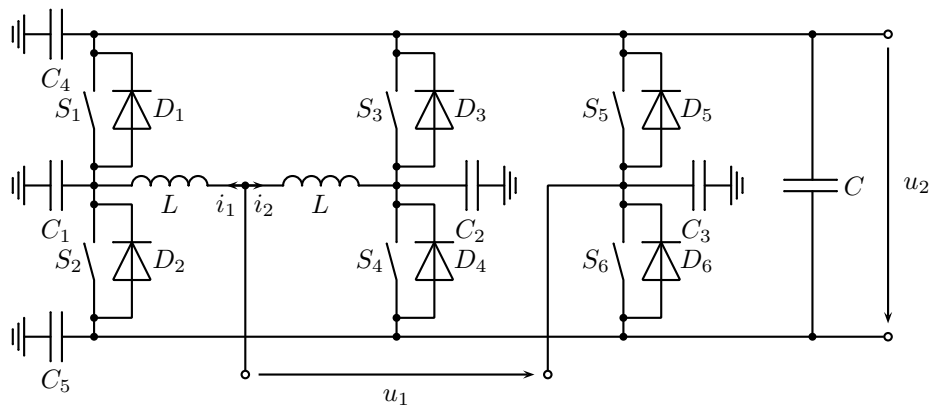


Abbildung 5.1: Synchrongleichrichter mit zwei integrierten Synchronwandlern und phasenversetzter Ansteuerung

Bauteilen und dem Kühler verringert und die Konstruktion des Kühlers vereinfacht.

Die Ströme durch die beiden parallel betriebenen Synchronwandler werden durch zwei Stromdifferentialgleichungen im Mittelwertmodell aus Kapitel 2 abgebildet. Es ergeben sich daraus jedoch keine wesentlichen Unterschiede zwischen den Verläufen der beiden Eingangsströme, denn gegebenenfalls vorhandene Bauteiltoleranzen werden nicht berücksichtigt. Aus diesem Grund wird bei der Auswertung des Mittelwertmodells nur das Ergebnis eines einzelnen Synchronwandlers gezeigt. Abbildung 5.2 zeigt die gemessenen Verläufe von Eingangsstrom und Ausgangsspannung im Vergleich zum Ergebnis des Mittelwertmodells.

Die Angabe maximaler Abweichungen ist aufgrund der hohen Anzahl an Messpunkten nicht sinnvoll. Stattdessen wird die Stromschwankungsbreite durch den minimalen beziehungsweise maximalen Strom innerhalb einer jeweiligen Schaltperiode dargestellt. Es zeigt sich, dass die Stromschwankungsbreite des Mittelwertmodells und der Messung rein qualitativ dicht beieinander liegen. Die Abweichungen der Schwankungsbreite sind bei starken Änderungsraten des Strommittelwertes am größten. Das liegt maßgeblich an der Annahme einer idealen Steuerung des Mittelwertmodells zur Einprägung des sinusförmigen Stromverlaufs. Bei dem durchgeführten Experiment wurde der gemessene Strom durch einen geschlossenen Regelkreis eingestellt, dessen Dynamik im Mittelwertmodell vernachlässigt worden ist. Bei genauer Betrachtung ist nach dem Stromnulldurchgang eine kleine Totzeit des gemessenen Eingangsstromes zu erkennen. Diese Totzeit ist für die Umschaltung des Synchrongleichrichters notwendig und verursacht eine kurze Unterbrechung der aufgenommenen Momentanleistung.

Diese beiden Effekte führen zu einer kleinen Phasenverschiebung sowie einer kleinen Amplitudendifferenz zwischen gemessenen Eingangsstrom und dem Ergebnis des

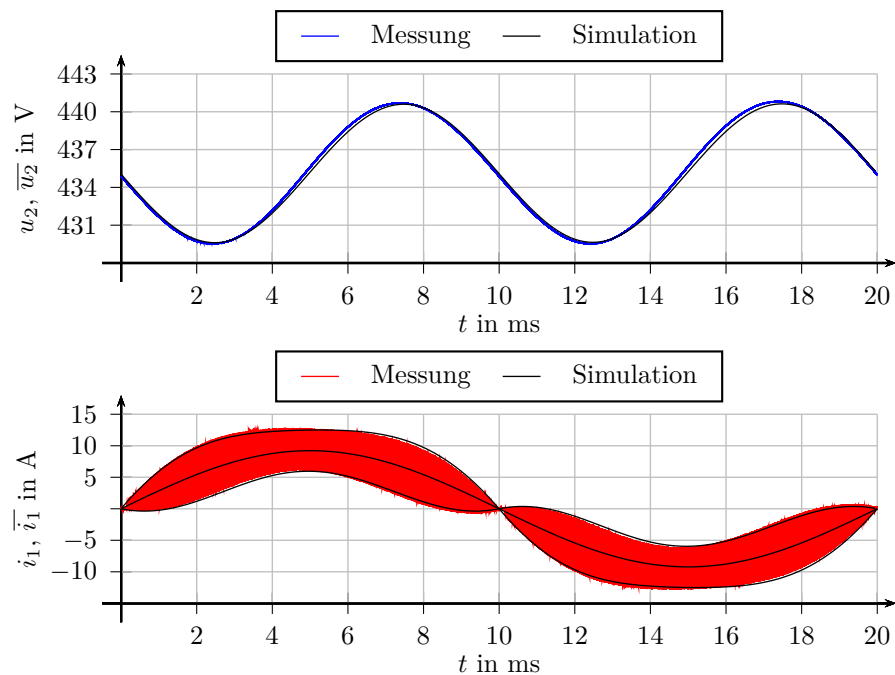


Abbildung 5.2: Darstellung des gemessenen Eingangsstromes i_1 und der gemessenen Ausgangsspannung u_2 des Synchrongleichrichters zur Verifikation des Entwurfsergebnisses anhand der dynamischen Mittelwertmethode aus Kapitel 2

Mittelwertmodells. In Abbildung 5.2 zeigt die Amplitude des Stromverlaufs aus dem Mittelwertmodell einen Wert von 9,22 A. Zum Vergleich wurde das Spektrum des gemessenen Stromsignals gebildet und für die Amplitude bei 50 Hz ein Wert von 9,41 A berechnet. So entsteht eine relative Abweichung von 2,02 % bei der Nachbildung des Strommittelwertes. Ein möglicher Grund für die Differenz von 190 mA ist die fehlende Modellierung der Verluste innerhalb des Mittelwertmodells. Gleiches gilt auch für den Eingangsstrom des Ausgangskondensators, sodass die gemessene Ausgangsspannung ebenfalls geringfügig von dem Ergebnis des Mittelwertmodells abweicht. So beträgt die Amplitude der Ausgangsspannung des Mittelwertmodells 5,51 V und die Amplitude der gemessenen Ausgangsspannung 5,56 V bei einer Frequenz von 100 Hz. Das entspricht einer relativen Abweichung von 0,9 % bei der Nachbildung des Mittelwertes der Ausgangsspannung.

Die Auswertung des Mittelwertmodells zeigt zudem nicht den Einfluss der phasenversetzten Ansteuerung der Synchronwandler, da ein maßgeblicher Unterschied zur Auswertung der phasengleichen Ansteuerung nicht zu erwarten ist. Für den Entwurf eines geeigneten Netzfilters entsteht durch die phasenversetzte Ansteuerung allerdings ein ganz wesentlicher Vorteil. Die Anzahl der Schaltvorgänge wird verdoppelt und es kommt zur teilweisen Kompensation der Störspannungen beider Synchronwandler. Demnach wer-

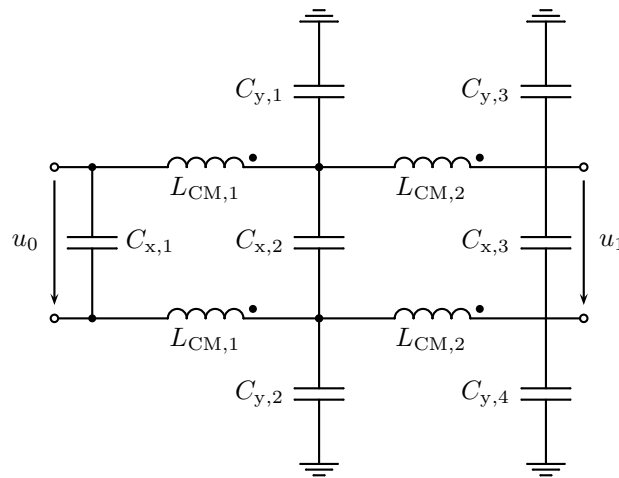


Abbildung 5.3: Passive Filterschaltung zur Störunterdrückung des Synchrongleichrichters mit zwei integrierten Synchronwandlern

den die Amplituden des überlagerten und letztendlich wirksamen Störspektrums in der Nähe der Schaltfrequenz verringert. Der Entwurf des gemeinsamen Netzfilters wird dann maßgeblich durch Störungen in der Nähe der doppelten Schaltfrequenz beeinflusst. Im Vergleich zu einem Parallelbetrieb ohne phasenversetzte Ansteuerung können deshalb kleinere passive Bauteile innerhalb der Netzfilterschaltung bei gleichbleibender Impedanz eingesetzt werden.

5.2 Netzfilter

Abbildung 5.3 zeigt das Ersatzschaltbild des gemeinsamen Netzfilters für beide Synchronwandler. Dieses Filter besteht aus insgesamt vier magnetisch gekoppelte Spulen, drei Kondensatoren zur Unterdrückung von Gegentaktstörungen und vier Kondensatoren zur Unterdrückung von Gleichtaktstörungen. Von den vier Wicklungen sind jeweils zwei auf einen gemeinsamen Kern gewickelt, dessen Wickelsinn so gewählt wurde, dass Gleichtaktstörungen maßgeblich durch die Hauptinduktivität und Gegentaktstörungen durch die Streuinduktivität beeinflusst werden. Die Werte der Parameter aller elektrischen Komponenten des Filters befinden sich im Anhang in Tabelle A.7.

Dieses Netzfilter wird zwischen die Netznachbildung und die Schaltung aus Abbildung 5.1 geschaltet. Das dadurch entstehende Ersatzschaltbild sieht dem Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.9 sehr ähnlich, weshalb auf eine Darstellung verzichtet wird. Das Ergebnis der Simulation und das Spektrum der aufgenommenen Messung sind in Abbildung 5.4 gezeigt. Als Referenz sind die Grenzwerte des zugrunde gelegten Standards

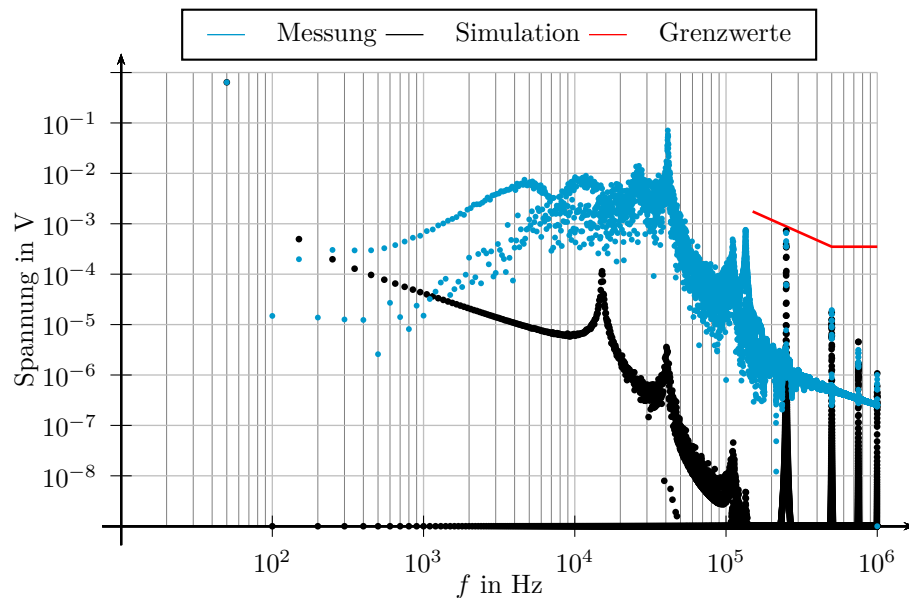


Abbildung 5.4: Darstellung des gemessenen Amplitudenspektrums an der Netznachbildung zur Verifikation des Netzfilterentwurfs anhand der vorgestellten Methode aus Kapitel 3

ebenfalls eingezeichnet.

Die dargestellten Grenzwerte sind an die Norm EN55022 angelehnt und wurden bei der Auslegung der Filterschaltung berücksichtigt. Wie zu erkennen, liegen deshalb beide Spektren unterhalb der gesetzten Grenzwerte. Die lokalen Maxima beider Spektren zeigen bei der Schaltfrequenz und den dazugehörigen höheren Harmonischen relativ geringe Abweichungen. In diesem Fall liegen die Abweichungen der Maxima in der Nähe der jeweiligen Vielfachen der Schaltfrequenz zwischen 0,11 % und 6,82 %. Im restlichen Bereich des Spektrums sind die Abweichungen relativ hoch. Das liegt insbesondere an der Annahme sprungförmig verlaufender Störspannung und der vernachlässigten Dynamik der Eingangsstromregelung. Beide führen dazu, dass die Amplituden des modellierten Störspektrums, mit Ausnahme der Netzfrequenz, der Schaltfrequenz und den dazugehörigen höheren Harmonischen, deutlich geringer sind als in dem realen Störspektrum.

5.3 Drosselspule

Zur Verifikation der Methoden aus Kapitel 4 wurden zwei Drosselspulen zur Applikation in der Schaltung aus Abbildung 5.1 entworfen und gebaut. Wie in Abbildung 5.5 zu erkennen, sind auf dem Kern insgesamt vier Wicklungen befestigt. Davon sind jeweils zwei Wicklungen in Reihe geschaltet. Durch den Steg zwischen den in Reihe geschalte-

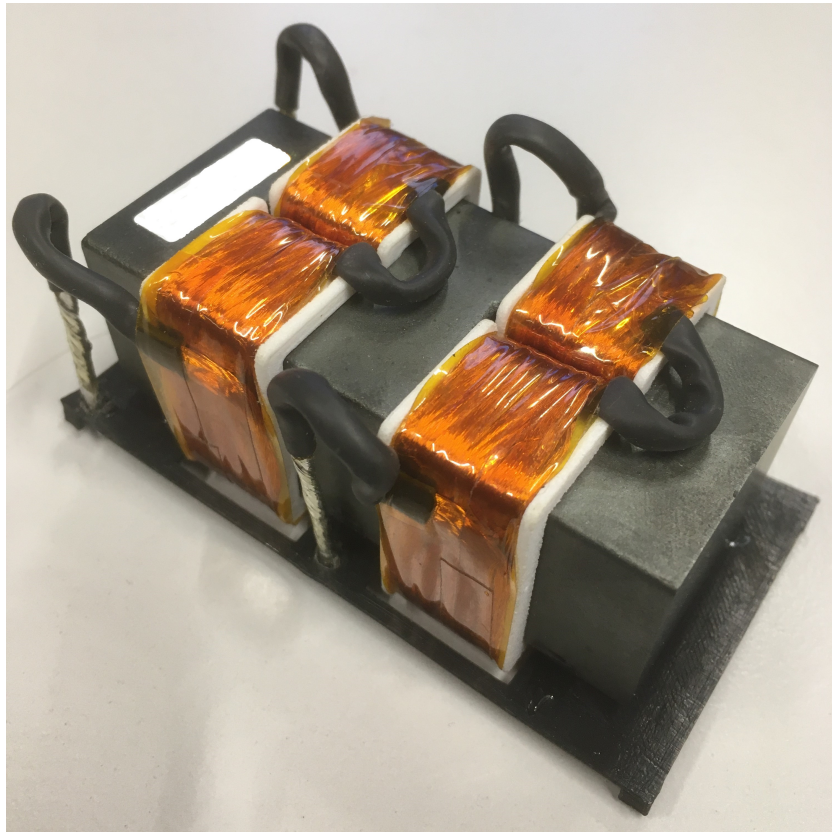


Abbildung 5.5: Abbildung der magnetischen Komponente des Synchrongleichrichters mit zwei Drosselspulen und teilweiser Flusskompensation

ten Wicklungen sind diese magnetisch schwach miteinander verkoppelt. Die Stromrichtungen durch beide Drosselspulen ist so gewählt, dass sich die jeweils verursachten magnetischen Flussdichten innerhalb des Stegs kompensieren. Unter dieser Voraussetzung kann der Kernquerschnitt in diesem Bereich verringert werden, ohne dass Sättigungseffekte innerhalb des Kernmaterials entstehen. Dadurch können beide Wicklungen separat betrieben werden und es entstehen zwei Drosselspulen mit teilweiser Flusskompensation. Bei dem Wickeldraht handelt es sich um eine Litze aus Kupfer mit einer Anzahl von 225 Einzeldrähten mit je einem Durchmesser von 0,1 mm.

In der Applikation werden die Drosselspulen mit einer Schaltfrequenz von 125 kHz betrieben. Bei dieser relativ hohen Schaltfrequenz sollte die Kapazität der Wicklungen möglichst gering sein, um etwaige Stromspitzen zu vermeiden. Aus diesem Grund sind die Windungen auf jedem Wickelkörper nur in einer einzelnen Lage nebeneinander aufgebracht. Außerdem benötigen die Drosselspulen deshalb nur eine relativ kleine Induktivität von 75 μH .

Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt, ist die Länge des Luftspalts einer der wichtigsten Parameter bei der Auslegung der Drosselspule. Von diesem Parameter hängen die Induktivität, die magnetische Flussdichte und der frequenzabhängige Widerstand der Wicklungen ab. Der Widerstandswert in der Nähe der Schaltfrequenz ist von besonderem Interesse, da in diesem Bereich die größten Stromamplituden zu erwarten sind. Abbildung 5.6 zeigt die Induktivität, die magnetische Flussdichte und der frequenzabhängige Widerstand der Wicklungen von einer Drosselspule in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge.

Wie zu erwarten, nehmen die magnetische Flussdichte und die Induktivität mit zunehmender Luftspaltlänge stets ab aufgrund der kleiner werdenden magnetischen Kopplung. Für die gewünschte Induktivität von $75\ \mu\text{H}$ wurde eine Luftspaltlänge von $0,6\ \text{mm}$ gewählt. Bei dieser Luftspaltlänge und einem Strom von $16\ \text{A}$ ergab die Simulation eine mittlere magnetische Flussdichte von $303,51\ \text{mT}$. Der frequenzabhängige Widerstand ist bei ca. $1,2\ \text{mm}$ maximal und hat bei der gewählten Luftspaltlänge einen Wert von $34,23\ \text{m}\Omega$. Im Vergleich zum Messergebnis sind hinsichtlich der Induktivität keine nennenswerten Abweichungen zu diskutieren. Beim frequenzabhängigen Widerstand beträgt die Abweichung $1,22\ \text{m}\Omega$ beziehungsweise $3,44\ \%$. Mögliche Gründe für diese Abweichung sind die vernachlässigten Zuleitungen in der Simulation und der unberücksichtigte Übergangswiderstand der Anschlüsse des Messgeräts. Da die Abweichungen jedoch sehr klein sind, wird auf eine ausführliche Diskussion dieser Gründe verzichtet.

Stattdessen zeigt Abbildung 5.7 die Verläufe des gemessenen und des simulierten frequenzabhängigen Widerstands einer Drosselspule. Wie zu erkennen, liegen die Verläufe bis zu einer Frequenz von ca. $500\ \text{kHz}$ dicht beieinander. Oberhalb dieser Frequenz zeigen sich sehr starke Abweichungen, welche vermutlich nicht auf die Vernachlässigung weiterer Stromverdrängungseffekte zurückzuführen. Wahrscheinlicher ist, dass bei der Auswertung der gemessenen Impedanz der Drosselspule der Einfluss der Lagenkapazität nicht berücksichtigt wurde.

5.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel zeigt die Verifikation der in dieser Arbeit vorgestellten Modelle anhand von Messungen an einem Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler und an einer dafür entworfenen Drosselspule.

Bei der Verifikation des Mittelwertmodells zeigt sich, dass der Eingangsstrom durch die Drosselspule mit einer relativen Abweichung von $2,02\ \%$ und die Ausgangsspannung am Kondensator mit einer Abweichung von $0,9\ \%$ nachgebildet werden kann. Die Abweichungen ergeben sich durch die Annahme einer idealen Vorgabe der Tastverhältnisse zur sinusförmigen Stromaufnahme. Bei dem vermessenen Gerät werden die Tastverhältnisse anhand eines geschlossenen Regelkreises zur Stromführung eingestellt, was stets

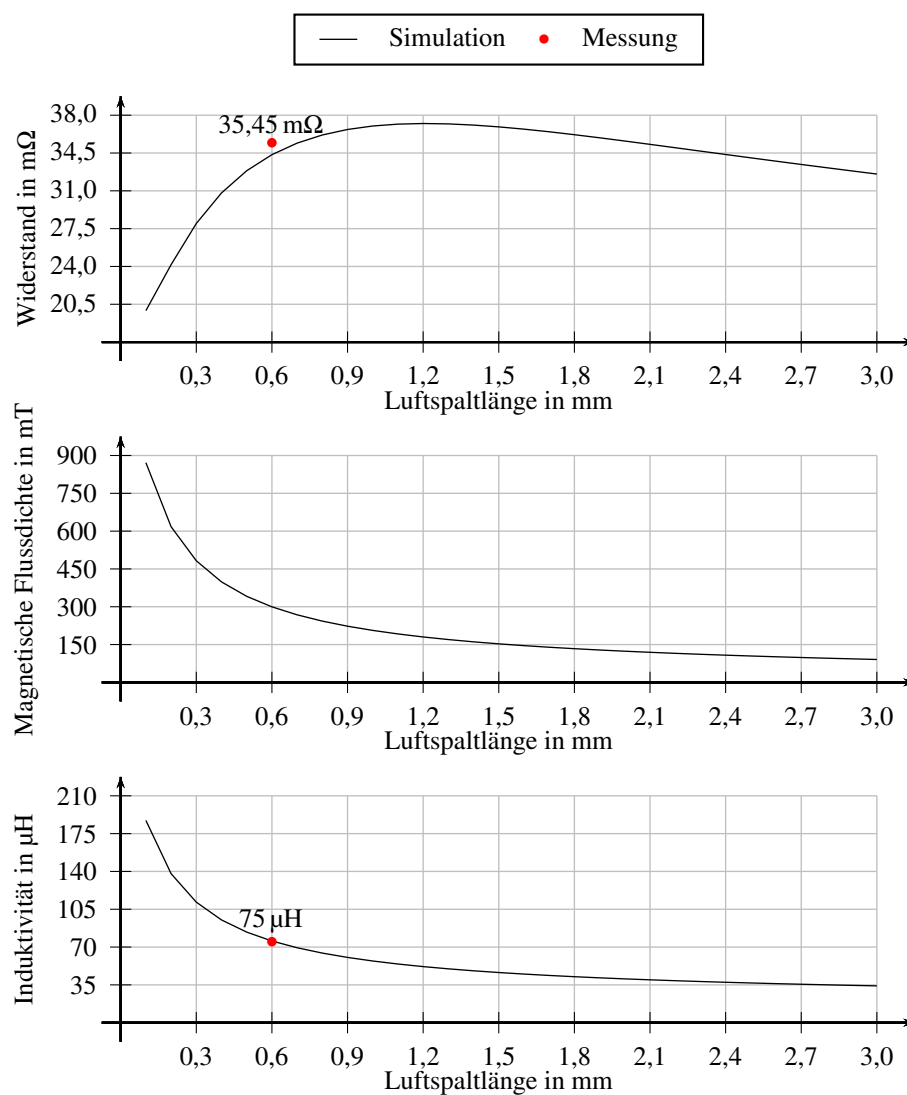


Abbildung 5.6: Darstellung der wesentlichen Parameter der Drosselspule in Abhängigkeit der Luftspaltlänge

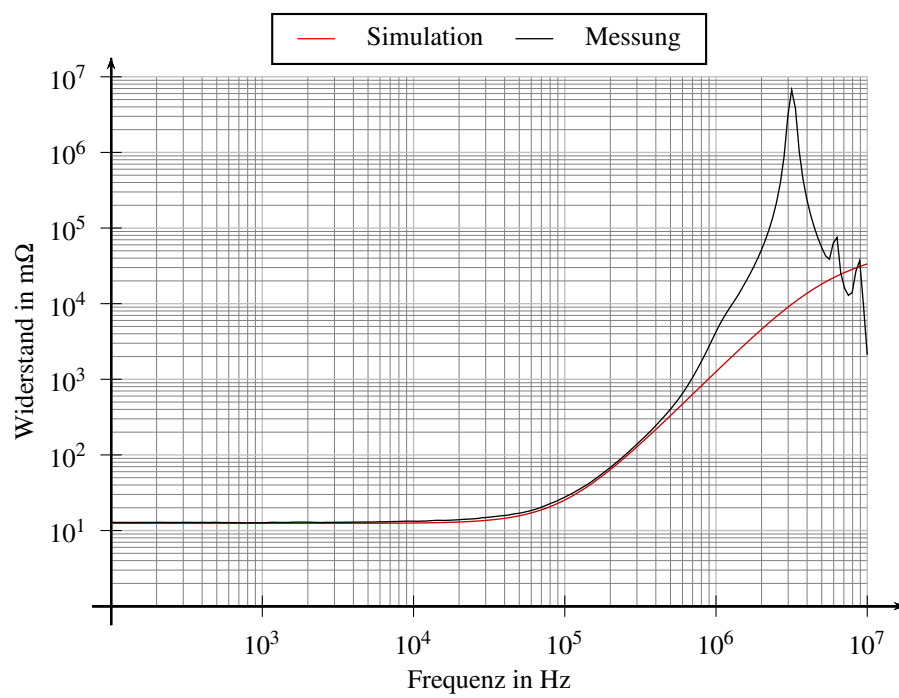


Abbildung 5.7: Darstellung des gemessenen, frequenzabhängigen Widerstands zur Verifikation des Widerstandsmodells für Litzedrähte aus Kapitel 4

zu einem leicht voreilendem Stromverlauf gegenüber der Eingangsspannung führt.

Das Messergebnis an der Netznachbildung zur Evaluierung der Netzfiltermodellierung zeigt eine minimale Abweichung von 0,11 % und eine maximale Abweichung von 6,82 % bei Frequenzen in der Nähe der doppelten Schaltfrequenz und dessen höhere Harmonische. Im restlichen Frequenzbereich des Spektrums sind deutliche Abweichungen erkennbar. Diese die Annahme eines Störspektrums einer idealen sprungförmigen Störspannung zurückgeführt werden.

Die Verifikation des Modells für den dreidimensionalen Entwurf von Drosselspulen und Filterdrosseln zeigt, dass insbesondere bei der Berechnung der Induktivität keine nennenswerten Abweichungen zum Messergebnis vorhanden sind. Beim frequenzabhängigen Widerstand ist jedoch eine Abweichung von 3,44 % zu erkennen. Mögliche Gründe für diese Abweichung sind die vernachlässigten Übergangswiderstände im Versuchsaufbau und die langen Anschlussleitungen der Drosselspule. Zudem wird der Einfluss der Kapazität der Wicklung nicht modelliert und ausgewertet, weshalb insbesondere bei Frequenzen oberhalb von 500 kHz deutliche Abweichungen zwischen dem Ergebnis der Widerstandsmodellierung und dem gemessenen Widerstand der Drosselspule entstehen.

Als Fazit dieses Kapitels bleibt festzuhalten, dass die Abweichungen von allen verifizierten Berechnungsmodellen in einem akzeptablen Rahmen liegen und die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle demnach gut für den Entwurf eines Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler geeignet sind. Aus diesem Grund wird die in dieser Arbeit vorgestellte Entwurfsmethode für das Design industrieller Stromversorgung genutzt und bereits weiterentwickelt.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit wurde das Ziel verfolgt, sowohl numerische als auch analytische Verfahren aufzuzeigen, zu analysieren und weiterzuentwickeln, deren Kombination zu einer wenig rechenintensiven und ganzheitlichen Entwurfsmethode für Synchrongleichrichter mit integriertem Synchronwandler führen soll.

Der grundlegende Aufbau des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler erlaubt es, die Schaltung in insgesamt vier Baugruppen zu unterteilen und jede einzeln hinsichtlich ihrer Funktion und ihrer entwurfsrelevanten Eigenschaften jeweils separat zu untersuchen. Dabei konnte das Mittelwertmodell vorteilhaft zur Analyse der Belastungs- und Störgrößen eingesetzt werden. Es ist möglich, die zeitaufwändige Auswertung des Schaltmodells zu umgehen und die entwurfsrelevanten Größen dieses Modells anhand des Mittelwertmodells zu rekonstruieren. Dadurch ist der notwendige Rechenaufwand deutlich reduziert.

Weiterhin bietet die vorgestellte Modellierung zur netzfreundlichen Stromaufnahme des Synchrongleichrichters mit integriertem Synchronwandler den Vorteil, dass keinerlei Differentialgleichungen oder impliziten Zusammenhänge gelöst werden müssen. Lediglich die Lösung des Mittelwertmodells erfordert die Inanspruchnahme iterativer Algorithmen zur Suche passender Anfangswerte der Ausgangsspannung des Gleichrichters. Allerdings hat sich herausgestellt, dass nur wenige Iterationen zur Auswertung der Gleichungen erforderlich sind. Demnach ist der Nutzen des direkten Suchverfahrens mit Barrierefunktionen, im Vergleich zum Aufwand bei dessen Implementierung, nicht effizient. Durch diese Tatsache und aufgrund der Periodizität von Eingangsspannung und Eingangsstrom ist es möglich, die Simulationsdauer auf die Dauer einer halben Netzperiode zu beschränken und somit Rechenkapazität, welche für die Ermittlung des eingeschwungenen Zustands benötigt wird, einzusparen. Die Verifikation des Modells hat gezeigt, dass die gemessenen Abweichungen sehr gering sind und auf die vernachlässigte Dynamik des eingesetzten Stromregelkreises zurückzuführen sind.

Die Modelle der netzfreundlichen Stromaufnahme bilden die Grundlage für die vor-

gestellte Entwurfsmethode für Netzfilterschaltungen von Synchrongleichrichtern mit integriertem Synchronwandler. Diese Methode bietet den Vorteil, dass die Störspannung, dessen Verlauf normalerweise anhand des rechenaufwändigen Schaltmodells ermittelt werden muss, nicht iterativ durch Auswertung komplexer Lösungsalgorithmen gebildet wird. Stattdessen sind Störungen als Summe approximierter Rechteckfunktionen modelliert, welche aus den Ergebnissen des Mittelwertmodells generiert werden. Das führt zu einer erheblichen Reduktion des Rechenaufwands. Bei der Verifikation der Netzfilterentwurfsmethode wurde gezeigt, dass insbesondere Störungen innerhalb des Frequenzbereichs der geltenden Standards sehr gut nachgebildet werden. Das ist für den Entwurf des Netzfilters besonders wichtig, denn dadurch können passive Komponenten wie z.B. Filterdrosseln und Kondensatoren gezielt auf die Grenzwerte der eingesetzten Norm abgestimmt werden.

Die vorgestellte Modellierung für Drosselspulen und Filterdrosseln erlaubt es, nicht auf die Methode der finiten Elemente für dreidimensionale Problemstellungen zurückgreifen zu müssen. Durch die Kombination der Randelementmethode mit den Widerstandsformeln für longitudinale und azimuthale Stromverdrängungseffekte in einfachen Runddrahtwicklungen kann auf die Diskretisierung sehr dünner und filigraner Wicklungsabschnitte verzichtet werden. Dadurch wird der Rechenaufwand für den Entwurf von Drosselspulen und Filterdrosseln gegenüber der Methode der finiten Elemente deutlich reduziert. Wie durch die Verifikation gezeigt, stimmen die Ergebnisse des vorgestellten Modells insbesondere bei der Berechnung der Induktivität und in weiten Teilen bei der Bestimmung des frequenzabhängigen Widerstands mit den Messungen überein. Die relativ großen Widerstandsabweichungen im höheren Frequenzbereich sind auf die vernachlässigte Wickelkapazität zurückzuführen.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass die vorgestellten Modelle und Verfahren aufgrund der präzisen Modellierung und den geringen Bedarf an Rechenleistung deutlich effizienter sind als gegenwärtig genutzte Entwurfsverfahren. Im Sinne des ganzheitlichen Entwurfs wurden alle wichtigen Zusammenhänge zwischen den Parametern einzelner Funktionsbaugruppen, wie beispielsweise zwischen Induktivität der Drosselspule und der Admittanzmatrix der Netzfilterschaltung, hergeleitet und analysiert. Die praktische Verwertbarkeit der einzelnen Modelle wurde anhand von Abweichungen zu realen Simulationsmodellen, gebräuchlichen Referenzmodellen oder auch durch Messergebnisse verifiziert, deren Höhe in großen Teilen begründet werden konnte. Die Ursachen der wenigen unbegründeten Abweichungen, die trotz umfangreicher Untersuchungen nicht gänzlich geklärt werden konnten, nehmen nach aktuellem Kenntnisstand keinen Einfluss auf die Genauigkeit der Auswertung. Dabei sind die gezeigten und begründeten Abweichungen der einzelnen Modelle durchaus akzeptabel, da ein konkreter Entwurf einer Gleichrichterschaltung im Laufe einer Produktentwicklung noch mehrfach Optimierungsschleifen durchläuft.

Aufgrund der Ergebnisse der Verifikation und den dargestellten geringen Abwei-

chungen finden bereits Untersuchungen zur Verbesserung und Erweiterung der in dieser Arbeit vorgestellten Modelle statt. Beispielsweise wurde das Mittelwertmodell für den Betrieb als Hochsetzsteller um die Regelung von Eingangsstrom und Ausgangsspannung ergänzt. Dadurch konnte die Stabilitätsgrenze eines Datenzentrums analysiert und erfolgreich nachgebildet werden. Zudem erfolgen gerade Untersuchungen zur Verbesserung des Netzfiltermodells. Dabei werden die Eigenschaften der häufig eingesetzten Ferritmaterialien für Filterdrosseln analysiert und durch die Annahme einer komplexen Permeabilität beim Netzfilterentwurf berücksichtigt.

Tabellen

Parameter	Wert	Beschreibung
L	15 μH	konstante Induktivität
C	15 μF	konstante Kapazität
T_S	10 μs	konstante Schaltperiodendauer
I_3	5 A	konstanter Laststrom
U_1	100 V	konstante Eingangsspannung
$\overline{i_1(0)}$	0 A	Anfangswert Strom
$\overline{u_2(0)}$	120 V	Anfangswert Spannung

Tabelle A.1: Parameter der Lösungen aus Abbildung 2.1

Parameter	Wert	Beschreibung
L	10 μH	konstante Induktivität
C	30 μF	konstante Kapazität
T_S	10 μs	konstante Schaltperiodendauer
I_3	30 A	konstanter Laststrom
U_1	100 V	konstante Eingangsspannung
$u_2(0)$	120 V	Anfangswert Spannung
$\overline{u_2(0)}$	120 V	Anfangswert gleitenden Spannungsmittelwert

Tabelle A.2: Parameter der Lösungen aus Abbildung 2.3

Parameter	Wert	Beschreibung
L	100 μH	konstante Induktivität
C	50 μF	konstante Kapazität
T_S	50 μs	konstante Schaltperiodendauer
G_{on}	1 kS	Leitwert eingeschaltete Diode
G_{off}	1 nS	Leitwert ausgeschaltete Diode
U_F	0 V	Schwellenspannung Diode
I_3	10 A	konstanter Laststrom
U_1	100 V	konstante Eingangsspannung
$i_1(0)$	0 A	Anfangswert Strom
$\overline{i_1(0)}$	0 A	Anfangswert gleitender Strommittelwert
$u_2(0)$	120 V	Anfangswert Spannung
$\overline{u_2(0)}$	120 V	Anfangswert gleitender Spannungsmittelwert

Tabelle A.3: Parameter der Lösungen aus Abbildung 2.6

Parameter	Wert	Beschreibung
L	750 μH	konstante Induktivität
C	500 μF	konstante Kapazität
T_S	200 μs	konstante Schaltperiodendauer
\hat{U}_{N1}	325 V	Eingangsspannungsamplitude
\hat{I}_{N1}	22 A	Eingangsstromamplitude
$U_{2\text{Nom}}$	400 V	nominelle Ausgangsspannung

Tabelle A.4: Parameter der Lösungen aus Abbildung 2.10

Parameter	Wert	Beschreibung
L	400 μH	konstante Induktivität
C_i	2000 μF	konstante Kapazität
T_S	50 μs	konstante Schaltperiodendauer
\hat{U}_{N1}	325 V	Eingangsspannungsamplitude
\hat{I}_{N1}	22 A	Eingangsstromamplitude
$U_{2\text{Nom}}$	400 V	nominelle Ausgangsspannung
$C_{x,1}$	220 nF	erste Gegentakt-Kapazität
$C_{x,2}$	10 μF	zweite Gegentakt-Kapazität
$C_{y,1}$	1 nF	erste Gleichtakt-Kapazität
$C_{y,2}$	2 nF	zweite Gleichtakt-Kapazität
L_{CM}	1500 μH	Gleichtakt-Induktivität
k	0,95	Koppelfaktor
L_{LISN}	100 μH	Induktivität Netznachbildung
R_{LISN}	50 Ω	Widerstand Netznachbildung
C_{LISN}	100 nF	Kapazität Netznachbildung
C_1	25 pF	Kapazität Synchronwandler-Gehäuse
C_2	50 pF	Kapazität Gleichrichter-Gehäuse

Tabelle A.5: Parameter der Schaltung aus Abbildung 3.9

Bauteil	Wert	Beschreibung
L	75 μH	Eingangsinduktivität
C_i	1880 μF	Ausgangskapazität
T_S	8 μs	Schaltperiodendauer eines einzelnen Synchronwandler
C_1	45 pF	Kapazität erster Synchronwandler-Gehäuse
C_2	45 pF	Kapazität zweiter Synchronwandler-Gehäuse
C_3	80 pF	Kapazität Gleichrichter-Gehäuse
C_4	100 pF	Kapazität Leiter-Gehäuse
C_5	100 pF	Kapazität Leiter-Gehäuse

Tabelle A.6: Parameter der Schaltung aus Abbildung 5.1

Parameter	Wert	Beschreibung
$C_{x,1}$	330 nF	erste Gegentakt-Kapazität
$C_{x,2}$	680 nF	zweite Gegentakt-Kapazität
$C_{x,3}$	2,2 μ F	dritte Gegentakt-Kapazität
$C_{y,1}$	680 pF	erste Gleichtakt-Kapazität
$C_{y,2}$	680 pF	zweite Gleichtakt-Kapazität
$C_{y,3}$	6,8 nF	dritte Gleichtakt-Kapazität
$C_{y,4}$	6,8 nF	vierte Gleichtakt-Kapazität
$L_{CM,1}$	1800 μ H	Gleichtakt-Induktivität
$L_{CM,2}$	2500 μ H	Gleichtakt-Induktivität
$L_{DM,1}$	10 μ H	Gegentakt-Induktivität
$L_{DM,2}$	25 μ H	Gegentakt-Induktivität

Tabelle A.7: Parameter der Schaltung aus Abbildung 5.3

Gleichungen und Herleitungen

B.1 Gegeninduktivität und äußere Selbstinduktivität kreisrunder Leiterschleifen aus Runddraht

Die folgende Herleitung, insbesondere der Teil zur Darstellung der vollständigen elliptischen Integrale, wurde aus [32] entnommen und zeigt die Berechnung der Gegeninduktivität $L_{Fi,j}$ zweier kreisrunder Leiterschleifen. Abbildung B.1 zeigt die Anordnung zweier Leiterschleifen mit einer gemeinsamen Rotationsachse. Die Anordnung befindet sich im Vakuum. Die Ortsvektoren

$$\vec{r}_j = a_j \vec{e}_{r_j} + \vec{o}_j$$

$$\vec{r}_i = a_i \vec{e}_{r_i} + \vec{o}_i$$

zeigen auf die Raumpunkte der Tangentialvektoren

$$d\vec{r}_j = a_j \vec{e}_{\varphi_j} d\varphi_j$$

$$d\vec{r}_i = a_i \vec{e}_{\varphi_i} d\varphi_i$$

der Leiterschleifen. Durch die Vektoren

$$\vec{o}_j = z_j \vec{e}_{z_j}$$

$$\vec{o}_i = z_i \vec{e}_{z_i}$$

werden die Leiterschleifen entlang ihrer Rotationsachse verschoben. Der Ortsvektor \vec{r}_j beschreibt die Kontur des oberen Stromfadens mit dem Radius a_j , wohingegen der Ortsvektor \vec{r}_i auf Raumpunkte der Kontur des unteren Stromfadens mit dem Radius a_i zeigt. Über den Kosinussatz [10] ergibt sich der Abstand zwischen den Vektoren \vec{r}_j und \vec{r}_i zu

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{a_i^2 + a_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 a_j a_i \cos(\varphi_i - \varphi_j)}.$$

Dadurch ergibt sich für die Gegeninduktivität nach Gleichung 4.14

$$L_{Fi,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_j a_i \cos(\varphi_j - \varphi_i)}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 a_j a_i \cos(\varphi_j - \varphi_i)}} d\varphi_i d\varphi_j.$$

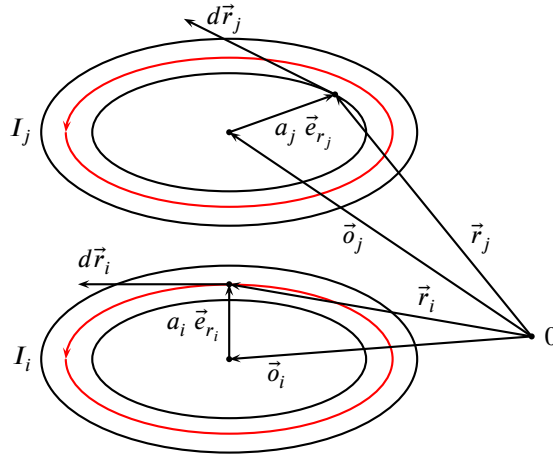


Abbildung B.1: Zur Berechnung der äußeren Selbstinduktivität

Mit der Substitution

$$\varphi_j - \varphi_i = \pi - 2\psi$$

folgt

$$\cos(\varphi_j - \varphi_i) = 2\sin^2(\psi) - 1$$

und letztendlich

$$L_{Fi,j} = \frac{\mu_0 a_i a_j}{2\pi \sqrt{(a_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_j}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_j}{2}} \frac{2\sin^2(\psi) - 1}{\sqrt{1 - k_{i,j}^2 \sin^2(\psi)}} d\psi d\varphi_j,$$

wobei

$$k_{i,j}^2 = \frac{4 a_i a_j}{(a_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

gilt. Der Integrand des inneren Integrals verläuft achsensymmetrisch zu φ_j und periodisch mit φ_i . Demnach kann das innere Integral aus dem äußeren Integral herausgezogen werden und es folgt

$$L_{Fi,j} = \frac{2 \mu_0 a_i a_j}{\sqrt{(a_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2(\psi) - 1}{\sqrt{1 - k_{i,j}^2 \sin^2(\psi)}} d\psi.$$

Mit der Erweiterung des Zählers im Integranden

$$0 = \frac{2}{k_{i,j}^2} - \frac{2}{k_{i,j}^2}$$

kann die Induktivität weiter umgeformt werden zu

$$L_{Fi,j} = \mu_0 \sqrt{(a_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2} \left\{ \left(1 - \frac{k_{i,j}^2}{2} \right) K(k_{i,j}) - E(k_{i,j}) \right\},$$

wobei $K(k)$ und $E(k)$ Platzhalter für die vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung [10] sind. Damit ist die Gegeninduktivität nur noch abhängig von der geometrischen Anordnung der Stromfäden, die durch Radius und Position entlang einer gemeinsamen Rotationsachse gegeben sind.

In [3] wird diese Gleichung zudem genutzt, um die äußere Selbstinduktivität einer Leiterschleife aus Runddraht zu bestimmen. Dazu werden die beiden Leiterschleifen in eine gemeinsame Ebene geschoben ($z_j - z_i = 0$) und der Drahtradius auf $r_L = a_i - a_j$ festgelegt. Daraus folgt

$$L_{Ai} = \mu_0 (2 a_i - r_L) \left(\left(1 - \frac{k_{Ai}^2}{2} \right) K(k_{Ai}) - E(k_{Ai}) \right)$$

mit der Abkürzung

$$k_{Ai}^2 = \frac{4 a_i (a_i - r_L)}{(2 a_i - r_L)^2}.$$

B.2 Matrixkoeffizienten für Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} T_{11} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{(r_m r_{no} - r_{no}^2 \cos(\varphi_m - \varphi)) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2 r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\ & - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{(r_m r_{nu} - r_{nu}^2 \cos(\varphi_m - \varphi)) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2 r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\ & - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(r_m r - r^2 \cos(\varphi_m - \varphi_{no})) \sin(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2 r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\ & + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(r_m r - r^2 \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})) \sin(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2 r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{(r_m r_{no} - r_{no}^2 \cos(\varphi_m - \varphi)) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{(r_m r_{nu} - r_{nu}^2 \cos(\varphi_m - \varphi)) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(r_m r - r^2 \cos(\varphi_m - \varphi_{no})) \cos(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(r_m r - r^2 \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})) \cos(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{13} = & \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r (r_m - r \cos(\varphi_m - \varphi))}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{no})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi \\
& - \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r (r_m - r \cos(\varphi_m - \varphi))}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{nu})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{no}^2 \sin(\varphi_m - \varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{nu}^2 \sin(\varphi_m - \varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{r \cos(\varphi_m - \varphi_{no}) \sin(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu}) \sin(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{no}^2 \sin(\varphi_m - \varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{nu}^2 \sin(\varphi_m - \varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{r \cos(\varphi_m - \varphi_{no}) \cos(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\
& + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu}) \cos(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} = & \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r^2 \sin(\varphi_m - \varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{no})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi \\
& - \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r^2 \cos(\varphi_m - \varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{nu})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{31} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{no}(z_m - z) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{nu}(z_m - z) \cos(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(z_m - z) \sin(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\
& + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(z_m - z) \sin(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{32} = & \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{no}(z_m - z) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{no}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{no} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r_{nu}(z_m - z) \sin(\varphi)}{\sqrt[3]{r_m^2 + r_{nu}^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r_{nu} \cos(\varphi_m - \varphi)}} dz d\varphi \\
& + \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(z_m - z) \cos(\varphi_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{no})}} dz dr \\
& - \int_{z_{nu}}^{z_{no}} \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \frac{(z_m - z) \cos(\varphi_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z)^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi_{nu})}} dz dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} = & \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r(z_m - z_{no})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{no})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi \\
& - \int_{r_{nu}}^{r_{no}} \int_{\varphi_{nu}}^{\varphi_{no}} \frac{r(z_m - z_{nu})}{\sqrt[3]{r_m^2 + r^2 + (z_m - z_{nu})^2 - 2r_m r \cos(\varphi_m - \varphi)}} dr d\varphi
\end{aligned}$$

B.3 Matrixkoeffizienten für kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}
4\pi T_{11} = & \left(\arctan \left(\frac{(y_m - y_{no})(z_m - z_{no})}{(x_m - x_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \right. \\
& - \arctan \left(\frac{(y_m - y_{no})(z_m - z_{nu})}{(x_m - x_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(y_m - y_{nu})(z_m - z_{no})}{(x_m - x_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(y_m - y_{nu})(z_m - z_{nu})}{(x_m - x_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(y_m - y_{no})(z_m - z_{no})}{(x_m - x_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(y_m - y_{no})(z_m - z_{nu})}{(x_m - x_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(y_m - y_{nu})(z_m - z_{no})}{(x_m - x_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& \left. - \arctan \left(\frac{(y_m - y_{nu})(z_m - z_{nu})}{(x_m - x_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{12} = & \left(-\ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{13} = & \left(-\ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{21} = & \left(-\ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(z_m - z_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(z_m - z_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{22} = & \left(\arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(z_m - z_{no})}{(y_m - y_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \right. \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(z_m - z_{nu})}{(y_m - y_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(z_m - z_{no})}{(y_m - y_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(z_m - z_{nu})}{(y_m - y_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(z_m - z_{no})}{(y_m - y_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(z_m - z_{nu})}{(y_m - y_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(z_m - z_{no})}{(y_m - y_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& \left. - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(z_m - z_{nu})}{(y_m - y_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{23} = & \left(-\ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& + \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{31} = & \left(-\ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(y_m - y_{no} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(y_m - y_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{32} = & \left(-\ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \right. \\
& + \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2} \right) \\
& + \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& - \ln \left(x_m - x_{no} + \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \\
& \left. + \ln \left(x_m - x_{nu} + \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{33} = & \left(\arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(y_m - y_{no})}{(z_m - z_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \right. \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(y_m - y_{nu})}{(z_m - z_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(y_m - y_{no})}{(z_m - z_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(y_m - y_{nu})}{(z_m - z_{no}) \sqrt{(x_m - x_{no})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(y_m - y_{no})}{(z_m - z_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{no})(y_m - y_{nu})}{(z_m - z_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{no})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \\
& + \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(y_m - y_{no})}{(z_m - z_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{no})^2}} \right) \\
& \left. - \arctan \left(\frac{(x_m - x_{nu})(y_m - y_{nu})}{(z_m - z_{nu}) \sqrt{(x_m - x_{nu})^2 + (y_m - y_{nu})^2 + (z_m - z_{nu})^2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

B.4 Longitudinale Wirbelströme im Leiter mit rundem Querschnitt

$$\begin{aligned}
\underline{A}_I &= M I_0(\underline{\alpha} r_i) + \sum_{k=1}^K I_k(\underline{\alpha} r_i) (N_k \cos(k\varphi_i) + O_k \sin(k\varphi_i)) \\
\underline{A}_O &= R + \sum_{k=1}^K \left(\frac{r_L}{r_i} \right)^k (S_k \cos(k\varphi_i) + T_k \sin(k\varphi_i)) + \underline{A}_E
\end{aligned}$$

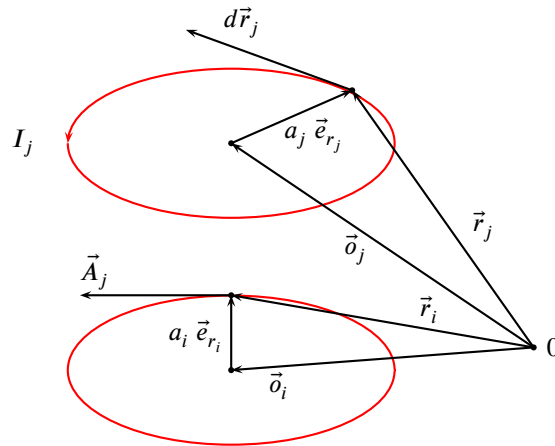


Abbildung B.2: Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke

B.5 Magnetische Feldstärke in der Umgebung eines kreisrunden Stromfadens

Der Stromfaden I_j in der oberen Leiterschleife aus Abbildung B.2 erzeugt das Vektorpotential \vec{A}_j auf der unteren Kontur. Der Ortsvektor

$$\vec{r}_j = a_j \vec{e}_{r_j} + \vec{o}_j$$

beschreibt die Raumpunkte der stromdurchflossenen Leiterschleife mit dem Tangentialvektor

$$d\vec{r}_j = a_j \vec{e}_{\varphi_j} d\varphi_j$$

der Leiterschleifen. Der Vektor

$$\vec{r}_i = r_i \vec{e}_{r_i} + \vec{o}_i$$

zeigt auf die Raumpunkte der kreisrunden Kontur an der das Vektorpotential \vec{A}_j berechnet wird. Durch die Vektoren

$$\vec{o}_j = z_j \vec{e}_{z_j}$$

$$\vec{o}_i = z_i \vec{e}_{z_i}$$

werden die Leiterschleifen entlang ihrer Rotationsachse verschoben. Durch Anwendung des Kosinussatzes [10] kann der Abstand zwischen den Vektoren \vec{r}_j und \vec{r}_i mit

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{r_i^2 + a_j^2 + (z_j - z_i)^2 - 2 a_j a_i \cos(\varphi_i - \varphi_j)}$$

berechnet werden. Eingesetzt in (4.13) ergibt sich das gesuchte Vektorpotential zu

$$\vec{A}_{Fj} = \frac{\mu_0 I_j}{2\pi r_i} \sqrt{(r_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2} \left(\left(1 - \frac{k_{i,j}^2}{2} \right) K(k_{i,j}) - E(k_{i,j}) \right) \vec{e}_{\varphi_i} = A_{\varphi_j} \vec{e}_{\varphi_i}$$

wobei

$$k_{i,j}^2 = \frac{4 r_i a_j}{(r_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

die Argumente der vollständigen elliptischen Integrale sind. Dieser Ausdruck ist auch in [32] dargestellt. Die magnetische Feldstärke \vec{H}_j an dem Ort \vec{r}_i wird durch Bildung der Rotation des Vektorpotentials berechnet. In Zylinderkoordinaten wird diese Operation durch

$$\vec{H}_{Fj} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{\nabla}_i \times \vec{A}_{Fj} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi_j}}{\partial z_i} \vec{e}_{r_i} + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{A_{\varphi_j}}{r_i} + \frac{\partial A_{\varphi_j}}{\partial r_i} \right) \vec{e}_{z_i} = H_{Frj} \vec{e}_{r_i} + H_{Fzj} \vec{e}_{z_i}$$

dargestellt und zeigt, dass die Feldstärke zwei Richtungskomponenten beinhaltet. Zur Berechnung der radialen Komponente H_{Frj} wird die Differentialgleichung

$$H_{Frj} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi_j}}{\partial z_i}$$

gelöst. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$A_{\varphi_j} = \frac{\mu_0 I_j}{2\pi r_i} w_{i,j} \left(K - \frac{k_{i,j}^2}{2} K - E \right)$$

durch

$$w_{i,j} = \sqrt{(r_i + a_j)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

und $k_{i,j} = k$ wird daraus

$$H_{Frj} = \frac{I_j}{2\pi r_i} \frac{\partial w_{i,j}}{\partial z_i} \left(K - \frac{k_{i,j}^2}{2} K - E \right) + \frac{I_j w_{i,j}}{2\pi r_i} \frac{\partial k_{i,j}}{\partial z_i} \left(\left(1 - \frac{k_{i,j}^2}{2} \right) \frac{dK}{dk_{i,j}} - k_{i,j} K - \frac{dE}{dk_{i,j}} \right).$$

Die Komponente der Feldstärke H_{Fzj} in z-Richtung wird durch die Differentialgleichung

$$H_{Fzj} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_i A_{\varphi_j} \right)$$

beschrieben. Unter Berücksichtigung der Ableitungsregeln und mit dem Ausdruck für das Vektorpotential wird daraus

$$H_{Fzj} = \frac{I_j}{2\pi r_i} \frac{\partial w_{i,j}}{\partial r_i} \left(K - \frac{k_{i,j}^2}{2} K - E \right) + \\ + \frac{I_j w_{i,j}}{2\pi r_i} \frac{\partial k_{i,j}}{\partial r_i} \left(\left(1 - \frac{k_{i,j}^2}{2} \right) \frac{dK}{dk_{i,j}} - k_{i,j} K - \frac{dE}{dk_{i,j}} \right).$$

Zur Lösung der beiden Differentialgleichungen werden die Ableitungen der Abkürzungen gebildet

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial z_i} = \frac{z_i - z_j}{w_{i,j}} \\ \frac{\partial w_{i,j}}{\partial r_i} = \frac{r_i + a_j}{w_{i,j}} \\ \frac{\partial k_{i,j}}{\partial z_i} = -k_{i,j} \frac{z_i - z_j}{w_{i,j}^2} \\ \frac{\partial k_{i,j}}{\partial r_i} = k_{i,j} \left(\frac{1}{2r_i} - \frac{r_i + a_j}{w_{i,j}^2} \right)$$

und zusammen mit den Ableitungen der elliptischen Integrale aus [32]

$$\frac{dK}{dk_{i,j}} = \frac{E}{k_{i,j} (1 - k_{i,j}^2)} - \frac{K}{k_{i,j}} \\ \frac{dE}{dk_{i,j}} = \frac{E}{k_{i,j}} - \frac{K}{k_{i,j}}$$

in die Gleichungen eingesetzt. Daraus ergibt sich für die radiale Komponente der magnetischen Feldstärke

$$H_{Frj} = \frac{I_j (z_i - z_j)}{2\pi r_i w_{i,j}} \left(\frac{2 - k_{i,j}^2}{1 - k_{i,j}^2} \frac{E(k_{i,j})}{2} - K(k_{i,j}) \right)$$

und für die Komponente in z-Richtung

$$H_{Fzj} = \frac{I_j}{2\pi w_{i,j}} \left(K(k_{i,j}) - \frac{2 - k_{i,j}^2}{1 - k_{i,j}^2} \frac{E(k_{i,j})}{2} + \frac{a_j}{a_i} \frac{k_{i,j}^2}{1 - k_{i,j}^2} \frac{E(k_{i,j})}{2} \right).$$

Literatur

- [1] M. Albach. „Two-dimensional calculation of winding losses in transformers“. In: *Power Electronics Specialists Conference, 2000. PESC 00. 2000 IEEE 31st Annual*. Bd. 3. 2000, 1639–1644 vol.3.
- [2] M. Albach und H. Rossmanith. „The influence of air gap size and winding position on the proximity losses in high frequency transformers“. In: *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*. Bd. 3. 2001, 1485–1490 vol. 3.
- [3] Manfred Albach. *Induktivitäten in der Leistungselektronik*. Mitschrift zur Cluster-Schulung. 2013.
- [4] Y. Amran, F. Huliehel und S. Ben-Yaakov. „A unified SPICE compatible average model of PWM converters“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 6.4 (Okt. 1991), S. 585–594. ISSN: 0885-8993.
- [5] S. Babic und C. Akyel. „New Formulas for Mutual Inductance and Axial Magnetic Force Between Magnetically Coupled Coils: Thick Circular Coil of the Rectangular Cross-Section-Thin Disk Coil (Pancake)“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 49.2 (Feb. 2013), S. 860–868. ISSN: 0018-9464.
- [6] Jürgen Biela. „Optimierung des elektromagnetisch integrierten Serien-Parallel-Resonanzkonverters mit eingepprägtem Ausgangsstrom“. Diss. 2005.
- [7] Joachim Böcker. *Grundlagen der Elektrotechnik B*. Skript zur Vorlesung an der Universität Paderborn. 2015.
- [8] Joachim Böcker. *Leistungselektronik*. Skript zur Vorlesung an der Universität Paderborn. 2014.
- [9] C. A. Brebbia. *Topics in boundary element research / Bd. 6: Electromagnetic applications*. 1989.
- [10] Ilja N Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. Bd. 1. Springer-Verlag, 2012.
- [11] Yongbin Chu und Shuo Wang. „A Generalized Common-Mode Current Cancellation Approach for Power Converters“. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 62.7 (Juli 2015), S. 4130–4140. ISSN: 0278-0046.

- [12] Slobodan Cuk. „Modelling, analysis, and design of switching converters“. Diss. California Institute of Technology, 1977.
- [13] A. Davoudi, J. Jatskevich und T. D. Rybel. „Numerical state-space average-value modeling of PWM DC-DC converters operating in DCM and CCM“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 21.4 (Juli 2006), S. 1003–1012. ISSN: 0885-8993.
- [14] D. M. V. de Sype u. a. „Duty-ratio feedforward for digitally controlled boost PFC converters“. In: *Eighteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2003. APEC '03*. Bd. 1. Feb. 2003, 396–402 vol.1.
- [15] R. Dengler. „Self inductance of a wire loop as a curve integral“. In: *Advanced Electromagnetics* 5 (Jan. 2016), S. 1.
- [16] Paul Dobrinski, Gunter Krakau und Anselm Vogel. *Physik für Ingenieure*. Elektronische Ressource. 2010.
- [17] Robert W Erickson und Dragan Maksimovic. *Fundamentals of power electronics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [18] J. A. Ferreira. „Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 9.1 (Jan. 1994), S. 127–131. ISSN: 0885-8993.
- [19] D. Fränkel und R. Nuscheler. „Dreidimensionale numerische Berechnung magnetischer Felder mit Hilfe eines Summationsverfahrens“. In: *Archiv für Elektrotechnik* 62.6 (1980), S. 327–333. ISSN: 1432-0487.
- [20] F. Giezendanner u. a. „EMI noise prediction for electronic ballasts“. In: *Power Electronics Specialists Conference, 2008. PESC 2008. IEEE*. Juni 2008, S. 4392–4398.
- [21] Tobias Grote. „Digital control for interleaved boost power factor correction (PFC) rectifiers“. Diss. Universität Paderborn, 2014.
- [22] Frederick W. Grover. *Inductance calculations : working formulas and tables*. 2009.
- [23] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Elektronische Ressource. 2007.
- [24] C. Henkenius u. a. „Numerical optimization of passive line filter components for suppression of electromagnetic interference (EMI)“. In: *2016 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*. März 2016, S. 1547–1553.
- [25] Ekbert Hering, Rolf Martin und Martin Stohrer. *Physik für Ingenieure*. Elektronische Ressource. 2007.

- [26] L. Huber, Yungtaek Jang und M.M. Jovanovic. „Performance Evaluation of Bridgeless PFC Boost Rectifiers“. In: *Power Electronics, IEEE Transactions on* 23.3 (Mai 2008), S. 1381–1390. ISSN: 0885-8993.
- [27] L. Huber und M.M. Jovanovic. „Performance evaluation of synchronous rectification in front-end full-bridge rectifiers“. In: *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2012 Twenty-Seventh Annual IEEE*. Feb. 2012, S. 310–316.
- [28] B.T. Irving, Yungtaek Jang und M.M. Jovanovic. „A comparative study of soft-switched CCM boost rectifiers and interleaved variable-frequency DCM boost rectifier“. In: *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2000. APEC 2000. Fifteenth Annual IEEE*. Bd. 1. 2000, 171–177 vol.1.
- [29] Q. Ji u. a. „Conducted EMI Spectra of Average Current Controlled Boost PFC Converters Operating in Both CCM and DCM“. In: *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* PP.99 (2014), S. 1–1. ISSN: 0278-0046.
- [30] Uwe Kiencke und Holger Jäkel. *Signale und Systeme*. Elektronische Ressource. 2008.
- [31] Karl E.h. Küpfmüller, Wolfgang Mathis und Albrecht Reibiger. *Theoretische Elektrotechnik: Eine Einführung*. Elektronische Ressource. 2006.
- [32] Günther Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. Elektronische Ressource. 2010.
- [33] Qingnan Li, M.A.E. Andersen und O.C. Thomsen. „Conduction losses and common mode EMI analysis on bridgeless power factor correction“. In: *Power Electronics and Drive Systems, 2009. PEDS 2009. International Conference on*. Nov. 2009, S. 1255–1260.
- [34] Y. Luo, X. Wang und X. Zhou. „Inductance Calculations for Circular Coils With Rectangular Cross Section and Parallel Axes Using Inverse Mellin Transform and Generalized Hypergeometric Functions“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 32.2 (Feb. 2017), S. 1367–1374. ISSN: 0885-8993.
- [35] J. Mahdavi, J. Roudet und R. Scheich. „Common mode conducted RFI emission of an AC/DC converter with sinusoidal input current“. In: *1994 Fifth International Conference on Power Electronics and Variable-Speed Drives*. Okt. 1994, S. 632–637.
- [36] C. Marxgut, J. Biela und J.W. Kolar. „Interleaved Triangular Current Mode (TCM) resonant transition, single phase PFC rectifier with high efficiency and high power density“. In: *Power Electronics Conference (IPEC), 2010 International*. Juni 2010, S. 1725–1732.
- [37] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism Bd. 2*. 1970.

- [38] R. D. Middlebrook und Slobodan Cuk. „A general unified approach to modelling switching-converter power stages“. In: *Power Electronics Specialists Conference, 1976 IEEE*. IEEE. 1976, S. 18–34.
- [39] J. Muhlethaler, J.W. Kolar und A. Ecklebe. „Loss modeling of inductive components employed in power electronic systems“. In: *Power Electronics and ECCE Asia (ICPE ECCE), 2011 IEEE 8th International Conference on*. Mai 2011, S. 945–952.
- [40] J. Mühlethaler, H. Uemura und J. W. Kolar. „Optimal design of EMI filters for single-phase boost PFC circuits“. In: *IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*. Okt. 2012, S. 632–638.
- [41] A. Nagel und R. W. De Doncker. „Analytical approximations of interference spectra generated by power converters“. In: *Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE*. Bd. 2. Okt. 1997, 1564–1570 vol.2.
- [42] A. Nagel und R. W. De Doncker. „Systematic design of EMI-filters for power converters“. In: *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Fifth IAS Annual Meeting and World Conference on Industrial Applications of Electrical Energy (Cat. No.00CH37129)*. Bd. 4. Okt. 2000, 2523–2525 vol.4.
- [43] Laurence W. Nagel und D.O. Pederson. *SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)*. Techn. Ber. UCB/ERL M382. EECS Department, University of California, Berkeley, Apr. 1973.
- [44] M. J. Nave. „The effect of duty cycle on SMPS common mode emissions: theory and experiment“. In: *Proceedings, Fourth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*. März 1989, S. 3–12.
- [45] G. Nirgude, R. Tirumala und N. Mohan. „A new, large-signal average model for single-switch DC-DC converters operating in both CCM and DCM“. In: *PESC 2001. IEEE 32nd Annual Power Electronics Specialists Conference*. Bd. 3. 2001, 1736–1741 vol. 3.
- [46] Steffen Paul und Reinhold Paul. *Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 1: Gleichstromnetzwerke und ihre Anwendungen*. Elektronische Ressource. 2010.
- [47] Elijah Polak. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Elektronische Ressource. 1997.
- [48] Alan M. Portis. *Electromagnetic fields: sources and media*. 1978.
- [49] P. Rossel, H. Tranduc und G. Charitat. „Power MOS devices: structures and modelling“. In: *Proceedings of International Conference on Microelectronics*. Bd. 1. Sep. 1995, 341–352 vol.1.

- [50] M. Schmidt, J. Stahl und M. Albach. „Influence of parasitic effects on passive cancellation of common mode noise in a boost converter“. In: *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2012 Twenty-Seventh Annual IEEE*. Feb. 2012, S. 471–477.
- [51] M. Schmidt, J. Stahl und M. Albach. „Interaction between passive common mode noise cancellation and conservative passive filtering“. In: *Electromagnetic Compatibility (AP EMC), 2012 Asia-Pacific Symposium on*. Mai 2012, S. 121–124.
- [52] Adolf J. Schwab und Wolfgang Kürner. *Elektromagnetische Verträglichkeit*. Elektronische Ressource. 2007.
- [53] Robert Schwarz und Hans Poisel. *Nachrichtenübertragung*. Erschienen: Bd. 1 - 2. 1993 -.
- [54] Fu-Yuan Shih u. a. „A procedure for designing EMI filters for AC line applications“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 11.1 (Jan. 1996), S. 170–181. ISSN: 0885-8993.
- [55] A Stadler, M Albach und S Chromy. „The minimization of magnetic stray fields from UI-cores with air gaps“. In: *11th International Power Electronics and Motion Control Conference EPE-PEMC*. 2004.
- [56] A. Stadler und M. Albach. „The influence of the winding layout on the core losses and the leakage inductance in high frequency transformers“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4 (Apr. 2006), S. 735–738. ISSN: 0018-9464.
- [57] A. Stadler, M. Albach und S. Chromy. „The optimization of high frequency operated transformers for resonant converters“. In: *2005 European Conference on Power Electronics and Applications*. Sep. 2005, S. 8.
- [58] Frank Stenger. *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*. Elektronische Ressource. 1993.
- [59] E. Stenglein und M. Albach. „A Novel Approach to Calculate the Reluctance of Air-Gaps in Ferrite Cores“. In: *PCIM Europe 2017; International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Renewable Energy and Energy Management*. Mai 2017, S. 1–8.
- [60] Karl Strehmel, Rüdiger Weiner und Helmut Podhaisky. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [61] Jian Sun. „Unified averaged switch models for stability analysis of large distributed power systems“. In: *APEC 2000. Fifteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*. Bd. 1. Feb. 2000, 249–255 vol.1.

- [62] Jian Sun u. a. „Averaged modeling of PWM converters operating in discontinuous conduction mode“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 16.4 (Juli 2001), S. 482–492. ISSN: 0885-8993.
- [63] Rolf Unbehauen. *Netzwerk- und Filtersynthese : Grundlagen und Anwendungen*. Systemanforderungen: 5,25Diskette ; PC, MS-DOS. 1993.
- [64] Peter Wallmeier. „Automatisierte Optimierung von induktiven Bauelementen für Stromrichteranwendungen“. Diss. Universität Paderborn, 2001.
- [65] Stefan-Peter Weber. „Effizienter Entwurf von EMV-Filtern für leistungselektronische Geräte unter Anwendung der Methode der partiellen Elemente“. Diss. Technische Universität Berlin, 2007.
- [66] Dingan Yu und K. Han. „Self-inductance of air-core circular coils with rectangular cross section“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 23.6 (Nov. 1987), S. 3916–3921. ISSN: 0018-9464.
- [67] Dongbing Zhang u. a. „Measurement of noise source impedance of off-line converters“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 15.5 (Sep. 2000), S. 820–825. ISSN: 0885-8993.

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

IGBT	Bipolartransistor mit isolierter Gate-Elektrode.
MOSFET	Metall-Oxid-Halbleiter-Feldeffekttransistor.
PFC	Power factor correction.
PWM	Pulse-Width modulation.

Kapitel 2

\hat{I}_{1C}	Amplitude des Eingangsstroms (nicht lückender Betrieb).
\hat{I}_{N1}	Amplitude des Eingangsstroms (netzfrequenzfreundlicher Betrieb).
\hat{I}_k, μ_k	Amplitude und Phasenlage der Harmonischen k in dem Eingangsstrom (geschaltetes Modell).
\hat{I}_{kM}, μ_{kM}	Amplitude und Phasenlage der Harmonischen k in dem Eingangsstrom (gemitteltes Modell).
\hat{U}_{1C}	Amplitude der Eingangsspannung (nicht lückender Betrieb).
\hat{U}_{N1}	Amplitude der Eingangsspannung (netzfrequenzfreundlicher Betrieb).
\hat{U}_{2C}	Amplitude der Ausgangsspannung (nicht lückender Betrieb).
\hat{U}_{N2}	Amplitude der Ausgangsspannung (netzfrequenzfreundlicher Betrieb).
\hat{U}_k, α_k	Amplitude und Phasenlage der Harmonischen k in der Ausgangsspannung (geschaltetes Modell).
$\hat{U}_{kM}, \alpha_{kM}$	Amplitude und Phasenlage der Harmonischen k in der Ausgangsspannung (gemitteltes Modell).
C	Kapazität (allgemein).
I_3	Lokaler Mittelwert des Ausgangsstroms.
G_{off}	Leitwert eines ausgeschalteten Schalters.
G_{on}	Leitwert eines eingeschalteten Schalters.
L	Induktivität (allgemein).

M_S	Verstärkung des Hochsetzstellers im stationären Betrieb.
\overline{P}_N	Wirkleistung am Eingang.
\overline{S}_N	Scheinleistung am Eingang.
T_N	Dauer einer Netzperiode.
T_S	Dauer eines Schaltintervalls.
T_3	Dauer von $s_3 = 1$.
T_1	Dauer von $s_1 = 1$.
T_4	Dauer von $s_4 = 1$.
T_2	Dauer von $s_2 = 1$.
T_{\min}	Zeitversatz zwischen Spannung und Strom (netzfreundlicher Betrieb).
U_F	Flussspannung eines Schalters.
d	Tastverhältnis eines Schaltzustands (allgemein).
d_3	Tastverhältnis des eingeschalteten Zustands (Netzfrequenz).
d_1	Tastverhältnis des eingeschalteten Zustands (Schaltfrequenz).
d_4	Tastverhältnis des ausgeschalteten Zustands (Netzfrequenz).
d_2	Tastverhältnis des ausgeschalteten Zustands (Schaltfrequenz).
f_N	Frequenz einer Netzperiode.
f_S	Frequenz eines Schaltintervalls.
\overline{i}_1	Lokaler Mittelwert des Eingangsstroms.
\overline{i}_{1d}	Lokaler Mittelwert des Eingangsstroms (lückenden Betrieb).
\overline{i}_2	Lokaler Mittelwert des Freilaufstroms.
\overline{u}_1	Lokaler Mittelwert der Eingangsspannung.
\overline{u}_2	Lokaler Mittelwert der Ausgangsspannung.
i_3	Ausgangsstrom.
i_1	Eingangsstrom.
i_2	Freilaufstrom.
k_D	Parameter der Tastverhältnisfunktion (allgemein).
k_N	Parameter der Tastverhältnisfunktion (netzfreundlicher Betrieb).
$\overline{\lambda}_N$	Leistungsfaktor am Eingang.
p_1	Momentane Eingangsleistung.
s_3	Schaltfunktion des elektrischen Schalters S_3/D_3 .
s_1	Schaltfunktion des Schalter-Dioden-Paares S_1/D_1 .
s_4	Schaltfunktion des elektrischen Schalters S_4/D_4 .
s_2	Schaltfunktion des elektrischen Schalters S_2/D_2 .
u_1	Eingangsspannung.
u_2	Ausgangsspannung.
ω_N	Kreisfrequenz einer Netzperiode.

Kapitel 3

C_{LISN}	Kapazität der Netznachbildung.
C	Allgemeine Kapazität zwischen Komponente und Gehäuse.
$C_{x,1}$	Kapazität eines X-Kondensators des Netzfilters.
$C_{x,2}$	Kapazität eines X-Kondensators des Netzfilters.
$C_{y,1}$	Kapazität eines Y-Kondensators des Netzfilters.
$C_{y,2}$	Kapazität eines Y-Kondensators des Netzfilters.
$D_{3,m}$	Tastverhältnis des nicht lückenden Stromes als Treppenfunktion.
$D_{1,m}$	Tastverhältnis der Einschaltdauer als Treppenfunktion.
$D_{2,m}$	Tastverhältnis der Ausschaltdauer als Treppenfunktion.
F_k	Kühlfläche einer Komponente.
L_{CM}	Induktivität der Gleichtaktdrossel.
L_{LISN}	Induktivität der Netznachbildung.
R_{LISN}	Widerstand der Netznachbildung.
$U_{\text{LISN},k}$	Fourierkoeffizienten der Spannung zur Auswertung an der Netznachbildung.
$U_{1,m}$	Eingangsspannung als Treppenfunktion.
$U_{S,k}$	Fourierkoeffizienten der Störspannung.
$U_{2,m}$	Ausgangsspannung als Treppenfunktion.
ϵ_i	Relative Permittivität.
ϵ_0	Allgemeine Permittivität.
$\varphi_{S,k}$	Phasenwinkel der Fourierkoeffizienten der Störspannung.
i_S	Störstrom zur Netzfilterauslegung.
l_i	Abstand zur Isolation einer Komponente.
u_{LISN}	Spannung zur Auswertung an der Netznachbildung.
$\underline{U}_{S,k}$	Amplituden der Fourierkoeffizienten der Störspannung.
$\underline{U}_{Sn,k}$	Fourierkoeffizienten der Störspannung im negativen Wertebereich.
$\underline{U}_{Sp,k}$	Fourierkoeffizienten der Störspannung im positiven Wertebereich.
u_S	Störspannung zur Netzfilterauslegung.
u_{Sn}	Störspannung im negativen Wertebereich.
u_{Sp}	Störspannung im positiven Wertebereich.
$\tilde{U}_{\text{LISN},k}$	Approximierte Fourierkoeffizienten der Spannung zur Auswertung an der Netznachbildung.
$\tilde{U}_{S,k}$	Approximierte Fourierkoeffizienten der Störspannung.
\tilde{u}_S	Approximation der Störspannung.

Kapitel 4

\vec{A}_{Ai}	Vektorpotential außerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{A}_{Fj}	Freies Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{A}_{Fj}	Freies Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$A_{F\varphi j}$	Azimutale Komponente des freien Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$A_{F\varphi j,m}$	Azimutale Komponente des freien Vektorpotential durch Strom in der m-ten Kontur der j-ten Leiterschleife.
A_{Fzj}	Radiale Komponente des freien Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
A_{Fzj}	Longitudinale Komponente des freien Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{A}_{Gj}	Gebundenes Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{A}_{Gj}	Gebundenes Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{A}_{Ii}	Vektorpotential innerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
$A_{I\varphi i}$	Azimutale Komponenten innerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
A_{Izi}	Longitudinale Komponenten innerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
$A_{O\varphi i}$	Azimutale Komponenten außerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
A_{Ozi}	Longitudinale Komponenten außerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{A}_i	Vektorpotential durch Stromes in der i-ten Leiterschleife.
\vec{A}_j	Vektorpotential durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{A}_j	Vektorpotential durch Stromes in der j-ten Leiterschleife.
\vec{B}_{Ai}	Magnetische Flussdichte außerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{B}_{Fi}	Freie magnetische Flussdichte durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
$\vec{B}_{Fi,n}$	Freie magnetische Flussdichte durch Strom in der i-ten Leiterschleife im n-ten Raumvolumen.
\vec{B}_{Fj}	Freie magnetische Flussdichte durch Strom in der j-ten Leiterschleife.

\vec{B}_{li}	Magnetische Flussdichte innerhalb des Wickeldrahtes durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{B}	Magnetische Flussdichte in einem Raumpunkt.
\vec{B}_i	Magnetische Flussdichte durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{B}_i	Magnetische Flussdichte durch Stromes in der i-ten Leiterschleife.
\vec{B}_j	Magnetische Flussdichte durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{B}_j	Magnetische Flussdichte durch Stromes in der j-ten Leiterschleife.
C_i	Länge des mittleren Umfangs der i-ten Leiterschleife.
C_j	Länge des mittleren Umfangs der j-ten Leiterschleife.
\vec{E}	Elektrische Feldstärke in einem Raumpunkt.
\vec{E}_i	Elektrische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{E}_i	Elektrische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{E}_j	Elektrische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{E}_j	Elektrische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
F_{Kn}	Flächeninhalt des n-ten Raumvolumens.
\vec{F}_{Kn}	Raumorientierter Flächeninhalt des n-ten Raumvolumens.
F_L	Oberflächeninhalt des Wickeldrahtes.
F_{LO}	Oberfläche eines stromführenden Leiters.
\vec{F}_{LO}	Oberfläche eines stromführenden Leiters.
F_{LQ}	Flächeninhalt eines Leiterquerschnitts.
F_{Lm}	Oberflächeninhalt des Wickeldrahtes im m-ten Abschnitt.
F_{S1}	Skinfaktor erster Ordnung.
F_{Sk}	Skinfaktor k-ter Ordnung.
F_{S0}	Skinfaktor nullter Ordnung.
\vec{F}	Orientierte Fläche in einem Raumpunkt.
$\hat{H}_{Fcj,1}$	Erster Cosinuskoeffizient der Reihenapproximation der magnetischen Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\hat{H}_{Fcj,k}$	k-ter Sinuskoeffizient der Reihenapproximation der magnetischen Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{H}_{Fi}	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
$\vec{H}_{Fi,n}$	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife im n-ten Raumvolumen.
\vec{H}_{Fj}	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{H}_{Fj}	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.

$\vec{H}_{Fj,m}$	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife im m-ten Abschnitt des Wickeldrahtes.
$\vec{H}_{Fj,n}$	Freie magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife im n-ten Raumvolumen.
$H_{Fa,j}$	Azimutale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\underline{H}_{F\varphi,j}$	Azimutale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fr,j}$	Radiale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\underline{H}_{Fr,j}$	Radiale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\hat{H}_{Fs,j,1}$	Erster Sinuskoeffizient der Reihenapproximation der magnetischen Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\hat{H}_{Fs,j,k}$	k-ter Sinuskoeffizient der Reihenapproximation der magnetischen Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Ft,j}$	Tangentiale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Ft,j,m}$	Tangentiale Feldstärke an der m-ten Position durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fx,j}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der X-Achse durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fx,j,n}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der X-Achse im n-ten Raumvolumen durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fy,j}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der Y-Achse durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fy,j,n}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der Y-Achse im n-ten Raumvolumen durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fz,j}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der Z-Achse durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\underline{H}_{Fz,j}$	Longitudinale Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$H_{Fz,j,n}$	Magnetische Feldstärke in Richtung der Z-Achse im n-ten Raumvolumen durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{H}_{Gj}	Gebundene magnetische Feldstärke durch Strom im j-ten Leiter.
H_1	Magnetische Feldstärke innerhalb einer Leiterschleife.
$\underline{H}_{I\varphi,i}$	Azimutale Feldstärke innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\underline{H}_{Iri}	Radiale Feldstärke innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\underline{H}_{Izi}	Longitudinale Feldstärke innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\vec{H}	Magnetische Feldstärke in einem Raumpunkt.
\vec{H}_i	Magnetische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{H}_i	Magnetische Feldstärke durch Strom in der i-ten Leiterschleife.
\vec{H}_j	Magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
\vec{H}_j	Magnetische Feldstärke durch Strom in der j-ten Leiterschleife.

\hat{I}	Amplitude eines sinusförmigen Stromes.
I_i	Strom in der i-ten Leiterschleife.
\hat{I}_i	Amplitude eines sinusförmigen Stromes in der i-ten Leiterschleife.
I_{im}	Strom im m-ten Abschnitt der i-ten Leiterschleife.
I_j	Strom in der j-ten Leiterschleife.
\hat{I}_j	Amplitude eines sinusförmigen Stromes in der j-ten Leiterschleife.
\mathbf{I}	Diagonale Einheitsmatrix.
\vec{K}_i	Flächenstrombelag auf der Oberfläche der i-ten Leiterschleife.
L_{Ai}	Äußere Induktivität der i-ten Leiterschleife.
$L_{Fi,i}$	Freie Selbstinduktivität der i-ten Leiterschleife.
$L_{Fi,j}$	Freie Gegeninduktivität zwischen i-ter und j-ter Leiterschleife.
$L_{Gi,i}$	Gebundene Gegeninduktivität zwischen i-ter und j-ter Leiterschleife.
$L_{Gi,j}$	Gebundene Selbstinduktivität der i-ten Leiterschleife.
L_{Ii}	Innere Induktivität der i-ten Leiterschleife.
L_S	Induktivität in Folge einer Stromverdrängung.
$L_{i,i}$	Selbstinduktivität der i-ten Leiterschleife.
$L_{i,j}$	Gegeninduktivität zwischen i-ter und j-ter Leiterschleife.
\vec{M}	Magnetisierung in einem Raumpunkt.
\vec{M}_j	Magnetisierung durch Strom in der j-ten Leiterschleife.
$\vec{M}_{j,m}$	Magnetisierung durch Strom in der j-ten Leiterschleife im m-ten Teilvolumen.
$\vec{M}_{j,n}$	Magnetisierung durch Strom in der j-ten Leiterschleife im n-ten Teilvolumen.
N_A	Anzahl der Litze eines Litzedrahtes.
Φ_M	Magnetisches Skalarpotential.
Ψ_i	Magnetischer Fluss durch die Fläche der i-ten Leiterschleife.
$\bar{\Psi}_i$	Magnetischer Fluss der i-ten Leiterschleife.
Ψ_{im}	Magnetischer Fluss durch die Fläche der m-ten Kontur der i-ten Leiterschleife.
$R_{Li,j}$	Gesamtwiderstand der i-ten Leiterschleife infolge eines periodischen Stromes in der j-ten Leiterschleife.
R_S	Widerstand in Folge einer Stromverdrängung.
$R_{Si,i}$	Widerstand der i-ten Leiterschleife für einen periodischen Strom.
$R_{Si,j}$	Widerstand der i-ten Leiterschleife für einen periodischen Strom in der j-ten Leiterschleife.
$R_{i,i}$	Widerstand des i-ten.

$R_{i,j}$	Widerstand des i-ten und j-ten Stromes.
$\underline{S}_{I\varphi i}$	Azimutale Stromdichte innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\underline{S}_{Izi}	Longitudinale Stromdichte innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\vec{S}	Elektrische Stromdichte in einem Raumpunkt.
S_i	Stromdichte innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\vec{S}_i	Stromdichte innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\vec{S}_i	Stromdichte innerhalb der i-ten Leiterschleife.
\vec{S}_j	Stromdichte innerhalb der j-ten Leiterschleife.
\vec{S}_j	Stromdichte innerhalb der j-ten Leiterschleife.
$T_{n,n}$	Abbildungsmatrix zwischen Magnetisierung und gebundener magnetischer Feldstärke.
V_K	Volumen des magnetischen Kernes.
V_{Kn}	n-tes Teilvolumen des magnetischen Kernvolumens.
V_L	Volumen des Wickeldrahtes.
V_∞	Unendliches Raumvolumen.
$W_{Fi,j}$	Freie magnetische Energie durch Ströme in der i-ten und j-ten Leiterschleife.
$W_{Gi,j}$	Gebundene magnetische Energie durch Ströme in der i-ten und j-ten Leiterschleife.
$W_{i,j}$	Magnetische Energie durch Ströme in der i-ten und j-ten Leiterschleife.
a_i	Mittlerer Radius der i-ten kreisförmigen Leiterschleife.
$a_{i,m}$	Radius der m-ten Kontur auf der Oberfläche der i-ten kreisförmigen Leiterschleife.
a_j	Mittlerer Radius der i-ten kreisförmigen Leiterschleife.
b_i	Erste Kantenlänge einer i-ten kreisförmig gewickelte Hochkant-Windung.
χ_r	Magnetischen Suszeptibilität.
$d_{i,m}$	Kleinster Durchmesser der i-ten kreisförmigen Leiterschleife.
\vec{e}_φ	Einheitsvektor in azimuthaler Richtung.
$\vec{e}_{\varphi i}$	Einheitsvektor in azimuthaler Richtung an der Position des i-ten Leiters.
\vec{e}_r	Einheitsvektor in radialer Richtung.
\vec{e}_{ri}	Einheitsvektor in radialer Richtung an der Position des i-ten Leiters.
\vec{e}_x	Einheitsvektor in Richtung der X-Achse.
\vec{e}_y	Einheitsvektor in Richtung der Y-Achse.
\vec{e}_z	Einheitsvektor in Richtung der Z-Achse.
\vec{e}_{zi}	Einheitsvektor in longitudinaler Richtung an der Position des i-ten Leiters.

h_i	Zweite Kantenlänge einer i-ten kreisförmig gewickelte Hochkant-Windung.
k_A	Argument der Elliptischen Integrale.
k_{Ai}	Argument der Elliptischen Integrale für die i-te Leiterschleife.
$k_{i,m}$	Argument der Elliptischen Integrale für die i-te Leiterschleife und die m-te Kontur auf der Leiteroberfläche.
l_L	Gesamtlänge des Wickeldrahtes.
μ	Permeabilität des magnetischen Kernmaterials.
μ_0	Permeabilität im Vakuum.
μ_r	Relative permeabilität des magnetischen Kernmaterials.
\vec{n}	Orientierung der Leiteroberfläche.
$\vec{\nabla}_K$	Nabla Operator in einem Raumpunkt des Kernvolumens.
$\vec{\nabla}$	Nabla Operator in einem beliebigen Raumpunkt.
$\vec{\nabla}_i$	Nabla Operator in einem Raumpunkt des i-ten Leiters.
$\vec{\nabla}_j$	Nabla Operator in einem Raumpunkt des j-ten Leiters.
p_{ab}	Abgegebene elektrische Momentanleistung einer elektrischen Schaltung.
p_{zu}	Zugeführte elektrische Momentanleistung einer elektrischen Schaltung.
r_A	Außenradius eines Litzedrahtes.
\vec{r}_K	Ortsvektor im Volumen des magnetischen Kernvolumens.
\vec{r}_{Kn}	Ortsvektor im n-ten Teilvolumens des magnetischen Kernes.
r_L	Radius des runden Wickeldrahtes.
\vec{r}	Ortsvektor im Raum.
ρ_j	Fiktive magnetische Ladung.
$\vec{r}_{i,m}$	Tangentenvektor entlang der Kontur der i-ten Leiterschleife.
\vec{r}_m	Ortsvektor im Mittelpunkt des m-ten Teilvolumens des magnetischen Kernes.
α	Skinkonstante.
t_i	Erste Kantenlänge einer i-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.
t_j	Erste Kantenlänge einer j-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.
w_i	Zweite Kantenlänge einer i-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.
w_j	Zweite Kantenlänge einer j-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.
w_m	Gespeicherte Energie eines magnetischen Feldes.
z_i	Verschiebung auf der Z-Achse der i-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.

$z_{i,m}$	Verschiebung auf der Z-Achse der m-ten Kontur auf der Oberfläche der i-ten kreisförmigen Leiterschleife.
z_j	Verschiebung auf der Z-Achse der j-ten rechteckig gewickelten Leiterschleife.