

**Andreas Kohlstedt**

***Modellbasierte Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für einen Fahrzeughachsprüfstand mit hydraulischem Hexapod***

***Model-based synthesis of a hybrid force/position controller for a vehicle suspension test rig with hydraulic hexapod***

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Band 396 der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

© Heinz Nixdorf Institut, Universität Paderborn – Paderborn – Dezember 2020

ISSN (Print): 2195-5239

ISSN (Online): 2365-4422

ISBN: 978-3-947647-15-6

Das Werk einschließlich seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Herausgeber und des Verfassers unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigung, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Als elektronische Version frei verfügbar über die Digitalen Sammlungen der Universitätsbibliothek Paderborn.

Satz und Gestaltung: Andreas Kohlstedt

Hersteller: readbox unipress in der readbox publishing GmbH  
Münster

Printed in Germany

**Modellbasierte Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung  
für einen Fahrzeugachsprüfstand mit hydraulischem Hexapod**

zur Erlangung des akademischen Grades  
**DOKTOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)**  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
**DISSERTATION**

von  
**Andreas Kohlstedt, M. Sc.**  
aus Kassel

Tag des Kolloquiums: 21. Dezember 2020  
Referent: Prof. Dr.-Ing. Ansgar Trächtler  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Günter Roppenecker



## **Vorwort**

Diese Dissertationsschrift entstand während meiner sechsjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Fachgruppe „Regelungstechnik und Mechatronik“ des Heinz Nixdorf Instituts der Universität Paderborn.

Mein Dank gilt besonders Herrn Prof. Dr.-Ing. Ansgar Trächtler, der mir die Möglichkeit zur Mitarbeit in dem interessanten Forschungsprojekt „Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstand“ und zur Promotion gegeben hat. Besonders gefreut hat mich sein reges Interesse an der von mir bearbeiteten Themenstellung und seine Bereitschaft zur Diskussion. Seine Anregungen und Denkanstöße haben meine wissenschaftliche Arbeit vorangetrieben.

Für die Übernahme des Korreferats danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Günter Roppenecker vom Lehrstuhl für Regelungstechnik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg herzlich. Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Sextro und Herrn Prof. Dr.-Ing. Volker Schöppner möchte ich für ihre Mitwirkung in der Promotionskommission danken.

Meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen Alexander Weisske, Robin Schütte und Sarah Knoop möchte ich für die geleistete, hervorragende Vorarbeit danken. Dies betrifft sowohl die durchgeführten wissenschaftlichen Arbeiten als auch die exzellent entworfene Prüfstandssoftware, die mir die Aufnahme meiner Arbeit sehr erleichtert haben.

Mein herzliches Dankeschön gilt auch meinem Kollegen Phillip Traphöner, mit dem ich den größten Teil meiner Zeit am Fachbereich „Regelungstechnik und Mechatronik“ das Büro geteilt habe, sowie Simon Olma und Dr.-Ing. Karl-Peter Jäker, aus denen sich das am Achsprüfstand tätige Team lange Zeit zusammengesetzt hat. Ich danke ihnen insbesondere für die aufschlussreichen Gespräche, diverse Anregungen sowie die stets vorbildliche Zusammenarbeit. Unsere wöchentliche Besprechungen werden mir immer im Gedächtnis bleiben.

Darüber hinaus möchte ich mich bei allen Studierenden bedanken, die mich bei meiner wissenschaftlichen Tätigkeit unterstützt haben. Unter den zahlreichen Studierenden, die bei mir eine studentische Arbeit angefertigt oder als Hilfskraft gearbeitet haben, möchte ich insbesondere Torben Gräber, Heinrich Nissen, Leon Bußemas, Nico Rüddenklau, Udo Nolte und Nikolai Fast danken.

Bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Fachbereichs bedanke ich mich für die angenehme, kollegiale Arbeitsatmosphäre und die vorbildliche Zusammenarbeit.

Für die aufmerksame Durchsicht dieser Ausarbeitung danke ich Phillip Traphöner, Nikolai Fast, Dr.-Ing. Karl-Peter Jäker und meinem Vater Michael Kohlstedt.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich stets unterstützt und gefördert hat. Meiner Lebensgefährtin Marion Woermann möchte ich dafür danken, dass sie mich durch diese nicht immer einfache Zeit begleitet, mir immer Rückhalt gegeben und auf diese Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.



## **Zusammenfassung**

In dieser Dissertation wird der Entwurf einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für einen hydraulischen Hexapod durchgeführt, der als Anregungseinheit in einem PKW-Achsprüfstand dient. Während bei konventionellen Anlagen die iterativ lernende Regelung (ILR) eingesetzt wird, um unter hohem Zeitaufwand die Stellsignale der Antriebe zu bilden, besteht das Alleinstellungsmerkmal der vorliegenden Synthese in der Verwendung echtzeitfähiger Regelungsalgorithmen. Das ermöglicht auch Hardware-in-the-Loop-Anwendungen. Der Stand von Technik und Forschung zeigt, dass Regelungsansätze für anspruchsvolle Aufgaben die Bewegungsgleichungen von Manipulator und Kontaktpartner einbeziehen. In dieser Arbeit werden daher die Bewegungsgleichungen des Hexapod und des Prüflings, einer MacPherson-Radaufhängung, hergeleitet. Dabei geht die Modellierungstiefe der Radaufhängung weit über den Stand von Technik und Forschung hinaus. Mithilfe der Modelle wird eine aus der Literatur bekannte Regelung, die allgemeingültig weiterentwickelt wird, sowie eine Regelung nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung für den Hexapod entworfen. Der zweitgenannte Ansatz erweist sich für den vorliegenden Anwendungsfall als prädestiniert. Die hohe Leistungsfähigkeit beider Regelungen und deren Eignung für Betriebsfestigkeitsversuche wird anhand von Computersimulationen nachgewiesen. Für die Erprobung am Prüfstand fehlte vereinzelt Sensorik, vor allem aber ein hochwertiger Parametersatz für den Prüfling seitens des Herstellers. Nicht zuletzt deshalb werden in der Arbeit weitere Regelungsansätze beschrieben, die weniger Modellwissen erfordern. Für einen dieser Ansätze enthält die Arbeit auch Messergebnisse vom Prüfstand. Es zeigt sich, dass die mit diesem Regler erzielten Ergebnisse bisher dokumentierte echtzeitfähige Regelungen deutlich übertreffen. Betriebsfestigkeitsprüfungen mit besonders hohen Dynamikanforderungen werden durch eine ebenfalls beschriebene ILR ermöglicht.

## **Abstract**

This thesis deals with the design of a hybrid force/position controller for a hydraulic hexapod which serves as an excitation unit in a vehicle suspension test rig. While the time-consuming iterative learning control (ILC) technique is used to calculate the input signals for industrial systems, the unique characteristic of the present synthesis is its real-time capability. This also enables hardware-in-the-loop applications. The state of the art shows that control approaches for particularly demanding tasks incorporate the equations of motion of both the manipulator and the environment. Thus, the equations of motion of hexapod and test specimen, a MacPherson wheel suspension, are derived. The modeling depth of the wheel suspension significantly exceeds the state of the art. Using these models, a controller known from literature and a second one which is based on exact input/output linearization are designed for the hexapod. The former is developed further in a generally valid way. The latter proves to be predestined for the use case at hand. Computer simulations verify the high performance of both control approaches and their suitability for durability testing of vehicle suspension systems. Test rig experiments require additional sensors and, above all, a high quality model of the test specimen to be provided by the manufacturer. Also for this reason, further control approaches are described which involve less knowledge about the test specimen. For one of these methods, test rig measurements are provided. It turns out that the results achieved with this particular controller clearly exceed the known state of the art. Durability tests with particularly high dynamic requirements are facilitated by an ILC which is also included in the thesis.



## Vorveröffentlichungen

- [FKT15] FLOTTMEIER, S.; KOHLSTEDT, A.; TRÄCHTLER, A.: Regelung eines hydraulischen Hexapoden zur Echtzeitsimulation von Straßenanregungen. *VDI-Berichte* (2015), Nr. 2233, S. 267–277
- [KOF<sup>+</sup>16] KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; FLOTTMEIER, S.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Control of a hydraulic hexapod for a Hardware-in-the-Loop axle test rig. *at - Automatisierungstechnik* 64 (2016), Nr. 5, S. 365–374
- [KOT<sup>+</sup>17] KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Kinematics-based force/position control of a hexapod in a HiL axle test rig. *17. Internationales Stuttgarter Symposium Automobil- und Motorenmechanik*. Stuttgart, 2017, S. 1217–1230
- [KTO<sup>+</sup>17] KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; OLMA, S.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Fast hybrid position / force control of a parallel kinematic load simulator for 6-DOF Hardware-in-the-Loop axle tests. *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. München, 2017, S. 694–699
- [OKT<sup>+</sup>16a] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Indirect Force Control in Hardware-in-the-Loop Simulations for a Vehicle Axle Test Rig. *14th International Conference on Control, Automation Robotics & Vision (ICARCV)*. Phuket, Thailand, 2016
- [OKT<sup>+</sup>16b] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Substructuring and Control Strategies for Hardware-in-the-Loop Simulations of Multiaxial Suspension Test Rigs. *7th IFAC Symposium on Mechatronic Systems*. Loughborough, UK, 2016, S. 141–148
- [OKT<sup>+</sup>18] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Observer-based nonlinear control strategies for Hardware-in-the-Loop simulations of multiaxial suspension test rigs. *Mechatronics* 50 (2018), S. 212–224
- [OTK<sup>+</sup>16] OLMA, S.; TRAPHÖNER, P.; KOHLSTEDT, A.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Model-based method for the accuracy analysis of Hardware-in-the-Loop test rigs for mechatronic vehicle axles. *3rd International Conference on System-Integrated Intelligence (SysInt)*. Paderborn, 2016, S. 105–112
- [TKO<sup>+</sup>19] TRAPHÖNER, P.; KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Hardware-in-the-Loop-Simulation einer Fahrzeugachse mit aktiver Wankstabilisierung mithilfe eines hydraulischen Hexapoden. *VDI-Fachtagung Mechatronik*. 2019, S. 85–90
- [TOK<sup>+</sup>17] TRAPHÖNER, P.; OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Universelle Entwicklungs- und Prüfumgebung für mechatronische Fahrzeugachsen. *Wissenschafts- und Industrieforum Intelligente Technische Systeme (WInTeSys) 2017*. Paderborn, 2017, S. 157–168



---

# Modellbasierte Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für einen Fahrzeugachsprüfstand mit hydraulischem Hexapod

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Hardware-in-the-Loop-Prüfstand für PKW-Achsen . . . . .	1
1.2 Problemstellung . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	4
1.4 Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Stand von Technik und Forschung</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Konventionelle Achsprüfung in Industrie und Forschung . . . . .	7
2.1.1 Hintergrund und Ablauf der Achserprobung . . . . .	9
2.1.2 Drive-File-Generierung . . . . .	13
2.1.3 Maßnahmen zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit . .	22
2.1.4 Weitere Maßnahmen zur Verbesserung des Prozesses . . .	25
2.2 Kraft- und Interaktionsregelung und Anwendung bei Parallelkinematiken	26
2.2.1 Einführung . . . . .	27
2.2.2 Indirekte Kraftregelungen . . . . .	35
2.2.3 Direkte Kraftregelungen . . . . .	38
2.2.4 Anwendungsbeispiele . . . . .	58
2.3 Modellierung und Simulation von Achsprüfungen . . . . .	65
2.3.1 Anwendungsbeispiele . . . . .	66
2.3.2 Radaufhängung nach dem MacPherson-Prinzip . . . . .	69
2.3.3 Elastomerlager . . . . .	73
2.4 Zusammenfassung . . . . .	77
2.5 Handlungsbedarf und Konkretisierung der Zielsetzung . . . . .	80
<b>3 Vorbetrachtung an zweidimensionaler Kontakt situation</b> . . . . .	<b>83</b>
3.1 Kinematische Zwangsbedingung . . . . .	84
3.2 Dynamische Umgebung . . . . .	87
3.3 Zusammenfassung . . . . .	89
<b>4 Modellierung des Prüfstands</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1 Simulationsmodell des betrachteten Prüfsystems . . . . .	91
4.2 Starrkörper-Dynamikmodell des Hexapod . . . . .	93
4.2.1 13-Starrkörper-Modell . . . . .	96
4.2.2 1-Starrkörper-Modell . . . . .	103

4.2.3	Resultierende Modellgleichungen . . . . .	104
4.2.4	Parametrierung des 1-Starrkörper-Modells . . . . .	106
4.2.5	Modellvalidierung anhand des MKS-Hexapodmodells . . . . .	107
4.3	Starrkörper-Dynamikmodell der MacPherson-Radaufhängung . . . . .	110
4.3.1	Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	113
4.3.2	Resultierende Modellgleichungen . . . . .	128
4.3.3	Modellvalidierung anhand des MKS-Radaufhängungsmodells	129
4.4	Kopplung der Teilmodelle zum Gesamtsystemmodell . . . . .	135
4.4.1	Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe . . . . .	136
4.4.2	Dynamische Bindung von Endeffektor und Radnabe . . . . .	138
4.4.3	Modellvalidierung anhand des MKS-Prüfstandsmodells . . . . .	140
4.5	Zusammenfassung . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für den Hexapod . . . . .</b>	<b>145</b>
5.1	Analytische Formulierung nach de Luca und Manes . . . . .	147
5.1.1	Erweiterung: Selektionsmatrix $S$ zur Wahl zwischen $\lambda_a$ und $y_d$	148
5.1.2	Erweiterung: Einbeziehung der Aktordynamik . . . . .	150
5.1.3	Regelung der Radaufhängung ohne Elastomerlager . . . . .	155
5.1.4	Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern . . . . .	168
5.2	Entwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung . . . . .	180
5.2.1	Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe . . . . .	180
5.2.2	Dynamische Bindung von Endeffektor und Radnabe . . . . .	185
5.2.3	Vereinfachte Umgebungsmodelle . . . . .	188
5.3	Entwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen . . . . .	189
5.3.1	Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung . .	191
5.3.2	Weitere Ansätze . . . . .	203
5.4	Entwurf ohne Umgebungsmodell . . . . .	205
5.5	Kombination mit ILR für hohe Bandbreitenanforderung . . . . .	209
5.6	Zusammenfassung . . . . .	216
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung, wissenschaftlicher Beitrag und Ausblick . . . . .</b>	<b>223</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	223
6.2	Wissenschaftlicher Beitrag . . . . .	227
6.3	Ausblick . . . . .	228
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>233</b>	
<b>Literaturverzeichnis der studentischen Arbeiten . . . . .</b>	<b>253</b>	

## Anhang

<b>A1 Grundlagen zu Mehrkörpersystemen</b> . . . . .	<b>257</b>
A1.1 Darstellung von MKS-Topologien . . . . .	257
A1.2 Notation . . . . .	257
A1.3 Elementardrehmatrizen . . . . .	258
A1.4 XYZ-Kardanwinkel . . . . .	259
A1.5 Eigenschaften von Drehmatrizen . . . . .	259
A1.6 Kreuzproduktmatrix . . . . .	260
<b>A2 Aufstellen von Bewegungsgleichungen mithilfe des Prinzips von Jourdain</b> . . . . .	<b>261</b>
<b>A3 Regelungsentwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung</b> . . . . .	<b>265</b>
<b>A4 Herleitung der Gleichungen nach de Luca und Manes mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung</b> . . . . .	<b>269</b>
<b>A5 Zweidimensionale Modelle</b> . . . . .	<b>275</b>
A5.1 Relativgeschwindigkeit und Moment in der Ebene . . . . .	275
A5.2 Manipulator . . . . .	276
A5.3 Umgebung „Stab mit nicht vernachlässigbarer Dynamik“ . . . . .	278
A5.4 Radaufhängung . . . . .	280
<b>A6 Lösung der Gleichung <math>a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c</math></b> . . . . .	<b>287</b>
<b>A7 Zusätzliche Abbildungen zu Kapitel 5</b> . . . . .	<b>289</b>
A7.1 Analytische Formulierung nach de Luca und Manes . . . . .	289
A7.1.1 Regelung der Radaufhängung ohne Elastomerlager . . . . .	289
A7.1.2 Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern . . . . .	296
A7.2 Entwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung . . . . .	308
A7.2.1 Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe . . . . .	308
A7.3 Entwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen . . . . .	311
A7.3.1 Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung .	311
A7.3.2 Weitere Ansätze . . . . .	314
A7.4 Kombination mit ILR für hohe Bandbreitenanforderung . . . . .	317
<b>A8 Übertragungsverhalten der Servoventile</b> . . . . .	<b>321</b>



## Abkürzungsverzeichnis

ARX	AutoRegressive model with eXogenous input
BLNV	Betriebslastennachfahrversuch
BZF	Beanspruchungs-Zeit-Funktion
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DKP	Direktes kinematisches Problem
DMS	Dehnungsmessstreifen
FE	Finite Elemente
FHG	Freiheitsgrad
FIR	Finite Impulse Response
FRF	Frequency Response Function
HiL	Hardware-in-the-Loop
HNI	Heinz Nixdorf Institut
HSRC	Hybrid System Rapid Convergence
ILR	Iterativ Lernende Regelung
IMU	Inertial measurement unit
JS	Joint Space
K&C	Kinematics & Compliance
MAST	Mehraxialer Simulationstisch (engl. multi-axial shaker table)
MiL	Model-in-the-Loop
MIMO	Multiple input multiple output
MISO	Multiple input single output
MKS	Mehrkörpersystem, auch Mehrkörpersimulation
NVH	Noise, Vibration & Harshness
OS	Operational Space
PKM	Parallelkinematischer Manipulator
RC	Repetitive Control
RCC	Remote Center of Compliance
RMS	Quadratischer Mittelwert (engl. root mean square)
RPC	Remote Parameter Control

SISO	Single input single output
SKM	Seriellkinematischer Manipulator
TCP	Tool Center Point
TWR	Time Waveform Replication
UML	Unified Modeling Language

## Symbolverzeichnis

### Kürzel

#### Gesamtmodelle aus Hexapod und Radaufhängung

$\Sigma_{G3}$	Bewegungsgleichungen mit den FHG $\varphi$ , $x_L$ und $\psi$
$\Sigma_{G4}$	Bewegungsgleichungen mit den FHG $\varphi$ , $x_L$ , $\kappa_z$ und $\psi$
$\Sigma_{G4}^*$	$\Sigma_{G4}$ mit vernachlässigten Restbeschleunigungen
$\Sigma_{G11}$	Bewegungsgleichungen mit allen elf FHG
$\Sigma_{G11}^*$	$\Sigma_{G11}$ mit vernachlässigten Restbeschleunigungen
$\Sigma_{GR}$	MKS-Modell aus Hexapod (13 Starrkörper) und Radaufhängung

#### Hexapodmodelle

$\Sigma_{H1}$	Bewegungsgleichungen mit einem Starrkörper (Endeffektor)
$\Sigma_{H1}^*$	$\Sigma_{H1}$ mit optimiertem Parametersatz (siehe Abschnitt 4.2.4)
$\Sigma_{H7R}$	Bewegungsgleichungen mit 7 Starrkörpern (Endeffektor, Zylinderrohre)
$\Sigma_{H7S}$	Bewegungsgleichungen mit 7 Starrkörpern (Endeffektor, Zylinderstangen)
$\Sigma_{H13}$	Bewegungsgleichungen mit 13 Starrkörpern (Endeffektor, Zylinderrohre und -stangen)
$\Sigma_{HR}$	MKS-Modell mit 13 Starrkörpern (Endeffektor, Zylinderrohre und -stangen)

#### Radaufhängungsmodelle

$\Sigma_{A3}$	Bewegungsgleichungen mit den FHG $\varphi$ , $x_L$ und $\kappa_z$
$\Sigma_{A3}^*$	$\Sigma_{A3}$ mit vernachlässigten Restbeschleunigungen
$\Sigma_{A10}$	Bewegungsgleichungen mit allen FHG außer $\psi$
$\Sigma_{A10}^*$	$\Sigma_{A10}$ mit vernachlässigten Restbeschleunigungen
$\Sigma_{AR}$	MKS-Modell

#### Regler

$\Sigma_{R,EALin}$	Mittels Ein-/Ausgangslinearisierung entworfener Regler für das Streckenmodell $\Sigma_{G11}$ (siehe Abschnitt 5.2.1)
$\Sigma_{R,LM3}$	Regler nach [LM94] für das Streckenmodell $\Sigma_{G3}$ (siehe Abschnitt 5.1.3)
$\Sigma_{R,LM6a}$	Regler nach [LM94] für das Streckenmodell $\Sigma_{G11}$ mit den Positionsgrößen $y_{dr1}$ (siehe Abschnitt 5.1.4)

$\Sigma_{R,LM6b}$	Regler nach [LM94] für das Streckenmodell $\Sigma_{G11}$ mit den Positionsgrößen $y_{dr2}$ (siehe Abschnitt 5.1.4)
$\Sigma_{R,LM6z}$	Regler nach [LM94] für das Streckenmodell $\Sigma_{G11}$ mit den Positionsgrößen $z$ (siehe Abschnitt 5.1.4)

**Allgemeines****Exakte Ein-/Ausgangslinearisierung**

$\delta$	Totaler relativer Grad
$\delta_i$	Differenzordnung des Ausgangs $i$
$n$	Systemordnung

**Mathematische Operatoren**

$V \oplus W$	Direkte Summe der Vektorräume $V$ und $W$
$\square^{-1}$	Inverse
$\tilde{\square}$	Kreuzproduktmatrix, siehe Anhang A1.6
$\mathcal{L}\{\square\}$	Laplace-Transformierte
$\square^+$	Pseudoinverse
$\square^T$	Transposition
$\dot{\square}$	Erste zeitliche Ableitung
$\ddot{\square}$	Zweite zeitliche Ableitung
$\ddot{\square}$	Dritte zeitliche Ableitung
$\square^{(n)}$	$n$ -te zeitliche Ableitung

**Grübler-Kutzbach-Kriterium**

$f$	Anzahl der Freiheitsgrade des Mechanismus
$f_{Gi}$	Anzahl der Freiheitsgrade des Gelenks $i$
$n_G$	Anzahl der Gelenke des Mechanismus
$n_I$	Anzahl der isolierten Freiheitsgrade des Mechanismus
$n_K$	Anzahl der Starrkörper des Mechanismus
$n_L$	Anzahl der kinematischen Schleifen des Mechanismus
$n_Z$	Anzahl der Zwangsbedingungen des Mechanismus

**Sonstiges**

$\hat{\square}$	Beobachtete bzw. geschätzte Größe
$\square_r$	Sollgröße

**Größen im Tool Center Point (TCP)**

$\alpha, \beta, \gamma$	Kardanwinkel
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Winkelgeschwindigkeiten bezüglich des Inertialsystems

$\tau$	Kontaktkräfte und -momente (3D: $\tau = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$ )
$a$	Beschleunigungsvektor, $a = \dot{v}$
$F_x, F_y, F_z$	Längs- ( $x$ ), Quer- ( $y$ ) und Vertikalkraft ( $z$ )
$M_x, M_y, M_z$	Moment um die Längs- ( $x$ ), Quer- ( $y$ ) bzw. Hochachse ( $z$ )
$r_x, r_y, r_z$	Kartesische Koordinaten bezüglich des Inertialsystems
$v$	Geschwindigkeitsvektor (3D: $v = [v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ )
$v_x, v_y, v_z$	Translatorische Geschwindigkeiten bezüglich des Inertialsystems
$z$	Positionsvektor (3D: $z = [r_x \ r_y \ r_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ )

### Iterativ lernende Regelung (ILR)

#### Allgemeines

$k$	Iterationsschritt der iterativ lernenden Regelung
-----	---

#### Algorithmus

$L_1$	Verstärkungsmatrix von $u_{k-1}$
$L_2$	Verstärkungsmatrix von $e_{k-1}$
$Q_k$	Matrix der Lernfaktoren

#### Signale

$e_k$	Soll-/Ist-Abweichung des Zielgrößen-Zeitverlaufs, $e_k = y_r - y_k$
$u_k$	Zeitverlauf der Eingangsgröße im $k$ -ten Iterationsschritt (Drive-Signal)
$y_k$	Ist-Zeitverlauf der Zielgröße im $k$ -ten Iterationsschritt (Response-Signal)
$y_r$	Soll-Zeitverlauf der Zielgröße (Target-Signal)

### Manipulator- bzw. Hexapodmodell

#### Allgemeines

$\Delta p$	Differenzdrücke der Hydraulikzylinder
$F_q$	Aktorkräfte
$H$	Kinematikmatrix, $H = \partial v / \partial \dot{z}^T$
$q$	Aktorlängen bzw. Gelenkkoordinaten
$u_V$	Servoventilspannungen

#### Bewegungsgleichungen in $z, v$

$C_v$	Zentrifugal- und Coriolismatrix
$g_v$	Vektor der verallgemeinerten Gewichtskräfte
$J_g$	Geometrische Jacobimatrix

$M_v$  Massenmatrix

### Bewegungsgleichungen in $z, \dot{z}$

$C$  Zentrifugal- und Coriolismatrix

$g$  Vektor der verallgemeinerten Gewichtskräfte

$J_a$  Analytische Jacobimatrix

$M$  Massenmatrix

## Regelung

### Allgemeines

$S$  Binäre, diagonale Selektionsmatrix  
(Auswahl von Kraft- oder Positionsregelung)

$u_f$  Eingangsgröße der Kraftregelung

$u_p$  Eingangsgröße der Positionsregelung

## Umgebungs- bzw. Radaufhängungsmodell

### Allgemeines

$\lambda_a$  Aktive Kräfte

$\lambda_r$  Reaktive Kräfte

$S_{\lambda a}$  Jacobimatrix  $S_{\lambda a} = \partial \tau / \partial \lambda_a^T$ , vgl. (2-79)

$S_{\lambda r}$  Jacobimatrix  $S_{\lambda r} = \partial \tau / \partial \lambda_r^T$ , vgl. (2-79)

$S_{y_d}$  Jacobimatrix  $S_{y_d} = \partial v / \partial y_d^T$ , vgl. (2-80)

$S_{y_k}$  Jacobimatrix  $S_{y_k} = \partial v / \partial y_k^T$ , vgl. (2-80)

$y_d$  Dynamische Koordinaten

$y_k$  Kinematische Koordinaten

### Minimalkoordinaten (MacPherson-Radaufhängung)

$\kappa_y$  Drehwinkel des vorderen Querlenkerlagers um die Querachse

$\kappa_z$  Drehwinkel des vorderen Querlenkerlagers um die Hochachse

$\psi$  Drehwinkel der Radnabe gegenüber dem Radträger

$d_F$  Dämpferweg

$x_A$  Verschiebung des vorderen Querlenkerlagers in Längsrichtung

$x_E$  Verschiebung des Federbeinstützlagers in Längsrichtung

$x_L$  Verschiebung des Lenkgestänges

$y_A$  Verschiebung des vorderen Querlenkerlagers in Querrichtung

$y_E$  Verschiebung des Federbeinstützlagers in Querrichtung

$z_A$  Verschiebung des vorderen Querlenkerlagers in Hochrichtung

$z_E$  Verschiebung des Federbeinstützlagers in Hochrichtung

### Bewegungsgleichungen

$M_u$  Massenmatrix

$n_u$  Zentrifugal-, Coriolis- sowie eingeprägte Kräfte und Momente (außer Kontaktkräfte und -momente  $\tau$ )



## 1 Einleitung

### 1.1 Hardware-in-the-Loop-Prüfstand für PKW-Achsen

Das Heinz Nixdorf Institut (HNI) der Universität Paderborn betreibt einen Achsprüfstand, der für den mehrdimensionalen Test von ganzen Kraftfahrzeugachsen unter Echtzeitbedingungen konzipiert wurde. Es handelt sich um ein DFG-Forschungsgroßgerät. Bild 1-1 zeigt die wesentlichen Bestandteile des Prüfstands.

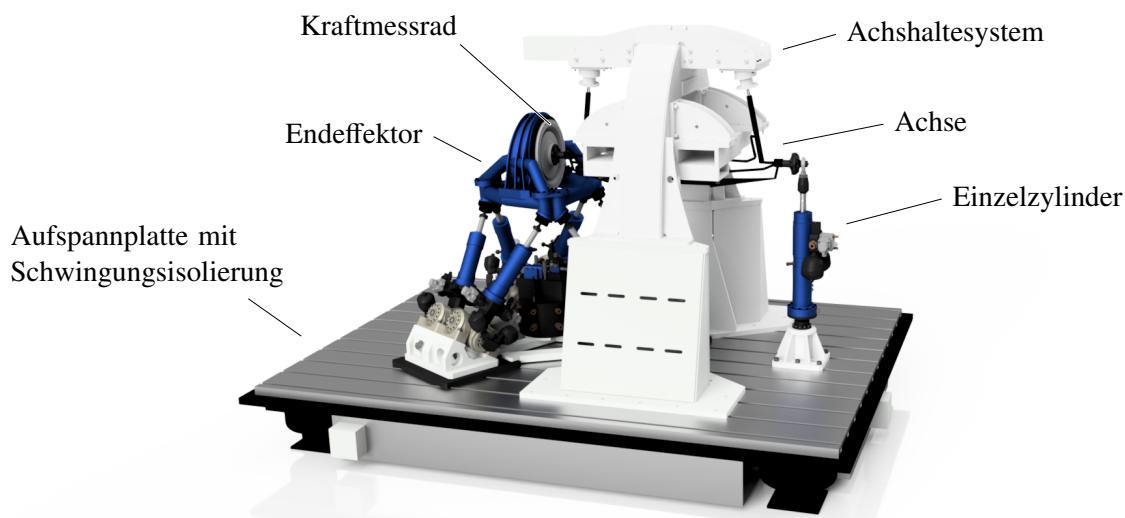


Bild 1-1: Achsprüfstand des Heinz Nixdorf Instituts (HNI)

Der Prüfling, die Kraftfahrzeugachse, ist fest mit dem Achshaltesystem verbunden. Das Achshaltesystem wurde so konstruiert, dass es die gleichen Befestigungspunkte für die Achse aufweist wie das reale Fahrzeug. Zur Aktuierung der linken Achsseite dient ein hydraulischer Hexapod. Das vollständige Prüfstandsconcept sieht auch auf der rechten Achsseite einen Hexapod vor, auf den im Rahmen des DFG-Großgeräteantrags aus Kostengründen verzichtet wurde. Als Anregungseinheit kommt auf der rechten Seite stattdessen ein hydraulischer Prüfzylinder zum Einsatz, der die Achse in einem Freiheitsgrad (FHG) bewegen kann. Um den hohen Dynamikanforderungen gerecht zu werden, wurden sämtliche Komponenten des Prüfstands für die Achsprüfung optimiert bzw. ausgewählt, vgl. [FJT14; FKT15].

Bei dem **Hexapod** handelt es sich um einen sog. parallelkinematischen Manipulator (PKM) mit sechs FHG. Verglichen mit seriellkinematischen Manipulatoren (SKM) wie dem klassischen Knickarmroboter besitzen PKM verhältnismäßig kleine Arbeitsräume und die Regelung und Systemidentifikation gestaltet sich schwieriger. Von Vorteil ist die geringere bewegte Masse sowie die höhere Steifigkeit und Positioniergenauigkeit. In der Literatur herrscht Konsens, dass PKM für hochdynamische Anwendungen prädestiniert sind. [Mer06; Neu06; Hol07]

Der **Endeffektor**, d. h. die bewegliche Arbeitsplattform des Hexapod, ist über ein Kraftmessrad mit der Radnabe der linken Achsseite verbunden. Sechs hydraulische, hydrosta-

tisch (und damit besonders reibungsarm) gelagerte Gleichlaufzylinder tragen den Endeffektor. Durch die simultane Aktuierung der sechs Hydraulikzylinder kann eine gewünschte Bewegung des Endeffektors und damit der Radnabe in sechs FHG herbeigeführt werden.

Das zwischen dem Endeffektor des Hexapod und der linken Radnabe befindliche Kraftmessrad dient der Messung der jeweils drei Kontaktkräfte und -momente zwischen diesen beiden Körpern. Neben dem Kraftmessrad sind außerdem Sensoren für die Differenzdrücke der Zylinderkammern sowie Positionsgeber zur Erfassung der Zylinderhöhe verbaut. Zur gezielten Führung des Ölstroms in die Zylinderkammern kommen zwei High Response-Servoventile je Hydraulikzylinder zum Einsatz.

Für Hexapoden finden sich in der einschlägigen Literatur auch die Bezeichnungen *Stewart-Plattform* oder *Stewart-Gough-Plattform* nach Stewart und Gough, die diesen Mechanismus zuerst beschrieben haben [GW62; Ste65]. Außerdem wird die Bezeichnung *6-UPS-Plattform* verwendet, die aus der topologischen Struktur des Mechanismus folgt: jeder Aktor ist über ein Kardangelenk (engl. **universal joint**) mit der Aufspannplatte verbunden, worauf zwischen dem Zylinderrohr und der Kolbenstange ein Schubgelenk (engl. **prismatic joint**) folgt<sup>1</sup>. Die Kopplung an die Endeffektor- bzw. Arbeitsplattform erfolgt über ein Kugelgelenk (engl. **spherical joint**). Neben dieser Gelenkkonfiguration existiert eine weitere Variante, bei der anstelle des Kardangelenks ein Kugelgelenk verwendet wird, die sog. *6-SPS-Plattform*. Abhängig von verschiedenen Faktoren wie z. B. der vorliegenden Reibung sowie vorhandenen Anbauten können die Aktoren in diesem Fall einen ausgeprägten Dreh-FHG um die durch die beiden Kugelgelenke beschriebene Achse besitzen. Bei dem Hexapod des HNI handelt es sich um eine 6-UPS-Plattform.

Die Einsatzmöglichkeiten des Prüfstands sind vielfältig [TOK<sup>+</sup>17]. Primäres Ziel der fortlaufenden Arbeiten am beschriebenen Achsprüfstand ist die Erschließung der Hardware-in-the-Loop-Simulation (HiL-Simulation) für die Entwicklung von Fahrwerkregelsystemen mit real aufgebauter Achse. HiL-Simulationen sind in der Automobilindustrie, insb. in der Steuergeräteentwicklung, weit verbreitet. Im Rahmen einer HiL-Simulation werden Teile eines realen Gesamtsystems mit numerischen Modellen der restlichen Systemkomponenten gekoppelt [ISS99]. Bei der klassischen Variante, der Steuergeräteentwicklung, wird nur das zu entwickelnde Steuergerät real aufgebaut. Für die Durchführung von HiL-Simulationen sprechen zahlreiche Gründe. So kann die betrachtete Komponente bereits in sehr frühen Phasen der Entwicklung getestet und die Zahl notwendiger Versuche am realen Gesamtsystem reduziert werden. Daraus folgt eine Verringerung der notwendigen Entwicklungszeiten und -kosten.

Eine erweiterte Fassung der HiL-Simulation stellen sog. HiL-Prüfstände dar. Derartige Prüfstände existieren z. B. für die Antriebsstrang- [SB02] und Lenkungsentwicklung [OKG<sup>+</sup>07; HLSH15; MM15; DS16]. Die Kopplung zwischen dem real aufgebauten Teil- system und den Umgebungsmodellen erfolgt in diesem Fall nicht mehr auf Signal-, sondern auf mechanischer Ebene, vgl. [Bou08]. Eine solche Kombination von realem und virtuellem Teilsystem auf mechanischer Ebene wird im Folgenden als mechatronische HiL-Simulation bezeichnet.

Einen ähnlich komplexen HiL-Prüfstand, bei dem ebenfalls eine mehrdimensionale Anregung eines Prüflings mit stark nichtlinearem physikalischen Verhalten erfolgt, scheint es

---

<sup>1</sup>In der Realität handelt es sich dabei häufig um ein Drehschubgelenk. Es liegt ein isolierter FHG vor, der meist vernachlässigt wird, vgl. Abschnitt 4.2.

bisher sonst nicht zu geben. Bild 1-2 zeigt das Konzept der geplanten mechatronischen HiL-Simulation.

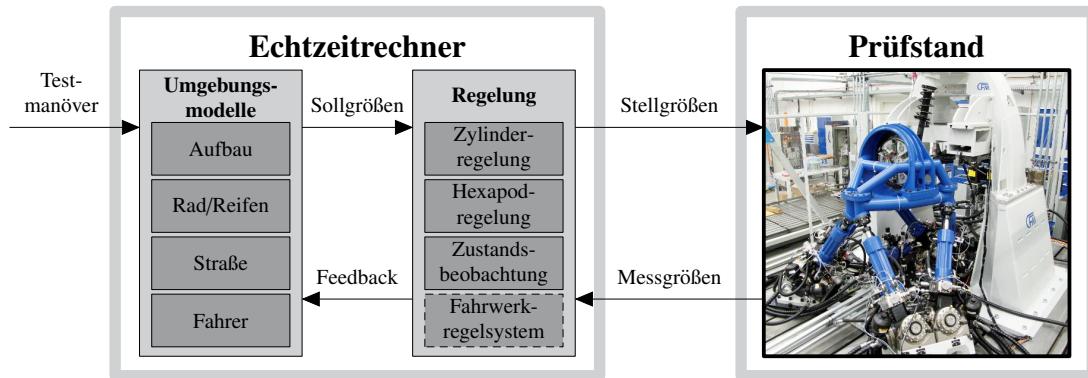


Bild 1-2: Konzept der mechatronischen HiL-Simulation

Auf dem Echtzeitrechner werden die Umgebungsmodelle, d. h. Modelle des Fahrzeugs (exklusive der im Prüfstand verbauten Achse), der Straße und des Fahrers berechnet. Aus diesen simulierten Teilsystemen folgen Anregungen der beiden Radnaben, die durch die Anregungseinheiten der Achse aufgeprägt werden müssen. Je nach Ausgestaltung der mechatronischen HiL-Simulation kann es sich bei den aufzuprägenden Anregungsdaten um Kräfte bzw. Momente und Verschiebungen bzw. Verdrehungen der Radnaben handeln. Die Regelungsalgorithmen der Anregungseinheiten bilden aus diesen Sollwerten die Stellgrößen der Antriebe. Die Reaktion des Prüflings fließt in Form der Messgrößen in die Auswertung der Regelungs- und Beobachtungsalgorithmen für die Anregungseinheiten, ggf. vorhandene Fahrwerkregelungsalgorithmen sowie die Umgebungsmodelle ein. Durch die Kopplung der Umgebungsmodelle und der real aufgebauten Achse über die geregelte Prüfstandsaktorik ergibt sich damit ein geschlossener Wirkungsablauf. Ein derartiges Prüfsystem, das eine ideale Plattform für die Entwicklung von Fahrwerkregelsystemen darstellt, existierte bislang nicht.

## 1.2 Problemstellung

Ausgangspunkt der Arbeiten ist die Dissertationsschrift von Sarah Knoop, geb. Flottmeier [Kno17]. Darin wurden verschiedene flachheitsbasierte Regelungskonzepte für die hochdynamische Positionierung des Hexapod ohne Umgebungskontakt entwickelt und verglichen. Für deren Umsetzung wurde auch eine schnelle Druckregelung sowie ein Zustandsbeobachter implementiert (siehe Abschnitt 2.3). Inzwischen wurde der Prüfstand um das Achshaltesystem sowie einen Prüfling, eine Vorderachse nach dem MacPherson-Prinzip, erweitert. Der Betrieb des Hexapod im Kontakt mit der Achse mithilfe einer Positionsregelung allein ist nicht vorstellbar, da hierfür eine hochgenaue Planung der Bewegungstrajektorie erforderlich ist. Bei unzureichenden Kinematik- und Dynamikmodellen des Hexapod und/oder der Radaufhängung kann es zu unzulässig hohen Kontaktkräften und -momenten kommen, die je nach Ausmaß zur Beschädigung oder Zerstörung der in Kontakt stehenden Mechanismen führen können [SK16]. Außerdem lassen sich mit dieser Regelung nur die Position eines endeffektorfesten Punktes sowie die Orientierung des Endeffektors gezielt einstellen. Die Vorgabe anderer Sollwerte bzw. Sollwert-Zeitverläufe,

wie sie für Achsprüfungen typisch sind (z. B. die Kräfte und Momente auf die Radnabe), ist nicht möglich.

Wie sich in Abschnitt 2.1 zeigen wird, kann das betrachtete System nicht mit den gleichen Verfahren betrieben werden, die für konventionelle Achsprüfstände seit Jahrzehnten etablierter Stand der Technik sind. Dort werden die Stellgrößen der Antriebe aus gegebenen Sollsignalen mithilfe eines iterativen Lernverfahrens generiert. Der damit verbundene Iterationsprozess ist zeitintensiv, sodass sich das Verfahren nicht für Echtzeitanwendungen eignet.

Für die Realisierung mechatronischer HiL-Simulationen muss eine hinreichend schnelle und genaue Regelung der Anregungseinheiten unter Echtzeitbedingungen erfolgen. Die wesentlichen Anforderungen an die Prüfstandsaktorik für die Realisierung der mechatronischen HiL-Simulation sind

- die Möglichkeit der gezielten Einstellung sowohl von Kräften als auch Positionen,
- der sichere Betrieb in Kontaktsituationen sowie
- die Ansteuerung unter Echtzeitbedingungen.

Weder die bestehende Prüfstandsregelung noch die etablierten Verfahren werden den genannten Anforderungen gerecht. Für die Ansteuerung der Prüfstandsaktorik muss ein neuartiger Ansatz entwickelt werden. Die Synthese echtzeitfähiger sowie hinreichend schneller und genauer Regelungsalgorithmen für die Antriebseinheiten des Prüfstands im Kontakt mit der Achse, die sich für die Durchführung mechatronischer HiL-Simulationen eignen, ist notwendig.

### 1.3 Zielsetzung

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer Regelung für den Hexapod im Achsprüfbetrieb sowie deren funktioneller Nachweis am Prüfstand. Hinsichtlich der Regelgrößen erfolgt eine Orientierung an den Zielgrößen konventioneller Achsprüfstände. Das primäre Ziel ist die Regelung der Radnabengrößen, d. h. deren Position und Orientierung sowie der Kontaktkräfte und -momente zum Endeffektor. Je nach Prüfszenario soll für jeden FHG einzeln zwischen Kraft- und Positionsregelung gewählt werden können (das gleichzeitige Einregeln von Kraft und Position in einer Richtung ist bekanntermaßen physikalisch nicht möglich). Die bestehende Positionsregelung muss daher für den Einsatz im Umgebungskontakt modifiziert werden. Außerdem muss eine Regelung der Kontaktkräfte und -momente entwickelt und die richtungsabhängige Auswahl von Kraft- oder Positionsregelung realisiert werden.

Bei konventionellen Achsprüfständen, die bspw. der Betriebsfestigkeitsprüfung dienen, werden über die Radnabengrößen hinaus auch andere Zielgrößen beim Einlernen der Aktorik vorgegeben. Die damit verbundenen Tests sind sehr anspruchsvoll und stellen die Aktorik vor hohe Anforderungen. In dieser Arbeit wird auch untersucht, inwieweit diese radnabenfernen Größen als Regelgrößen einer echtzeitfähigen Regelung in Betracht kommen.

Die Synthese und Erprobung der entwickelten Regelungsalgorithmen erfolgt modellbasiert. Zu diesem Zweck wird im Rahmen dieser Arbeit ein umfassendes MKS-Modell des

Prüfstands in MATLAB/Simscape erstellt. Außerdem werden die Bewegungsgleichungen für den Hexapod, die MacPherson-Radaufhängung sowie das resultierende Gesamtsystem hergeleitet, da diese für die Regelungssynthese von großer Bedeutung sind.

Diese Arbeit thematisiert

- den Aufbau eines umfassenden Simulationsmodells für das betrachtete Testsystem,
- die Herleitung der Bewegungsgleichungen des Prüfsystems,
- die Synthese einer Regelung für den Hexapod im Kontakt mit der Achse sowie
- deren Implementierung und Erprobung für das Zielsystem.

Der Entwurf und die Synthese der mechatronischen HiL-Simulation ist hingegen nicht Gegenstand dieser Arbeit. Zu diesem Thema sei auf die Veröffentlichungen [OKT<sup>+</sup>16b; OKT<sup>+</sup>16a; OTK<sup>+</sup>16; TOK<sup>+</sup>17; OKT<sup>+</sup>18; TKO<sup>+</sup>19] verwiesen, die zum Teil im Rahmen des DFG-Projekts „HiL-Umgebung zur mehrdimensionalen Achsprüfung und Fahrwerksauslegung“ entstanden sind.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: an diese Einleitung schließt sich der relevante Stand von Technik und Forschung an. Darin wird ausführlich das Thema der konventionellen Achsprüfung, insb. das dabei verwendete iterative Verfahren für die Ansteuerung der Aktorik, eingegangen. Im Gegensatz zu den konventionellen Achsprüfständen weisen Industrieroboter häufig eine echtzeitfähige Regelung auch für Kontaktsituationen auf. Aufgrund dessen werden im anschließenden Abschnitt 2.2 die Regelungsmethoden für Manipulatoren in Kontaktsituationen aus dem Bereich der Robotik dargelegt. Dabei werden auch Anwendungsbeispiele für PKM in Kontaktsituationen gezeigt.

Als Ausgangspunkt für die Modellierung des Prüfstands, das Aufstellen der Bewegungsgleichungen sowie die modellbasierte Regelungssynthese enthält Abschnitt 2.3 einen Literaturüberblick zur Simulation von Achsprüfungen, zur Modellierung der MacPherson-Radaufhängung sowie zur Modellierung von Elastomerlagern. Zum Abschluss des Kapitels erfolgt eine Zusammenfassung, die Identifikation des Handlungsbedarf und die Konkretisierung der zu diesem Zeitpunkt noch recht oberflächlichen Zielsetzung.

Kapitel 3 dient der Veranschaulichung der in Abschnitt 2.2 recherchierten Regelungsverfahren. Dort werden vor allem diejenigen Ansätze, die eine ideale Entkopplung der kraft- und bewegungsgeregelten Richtungen erlauben, anhand zweier einfacher Beispiele im Detail erläutert.

In Kapitel 4 wird die Modellierung des Prüfstands beschrieben. Es werden die Bewegungsgleichungen des Hexapod, der MacPherson-Radaufhängung sowie des resultierenden Gesamtsystems hergeleitet. Die Bewegungsgleichungen werden jeweils anhand eines entsprechend aufgebauten MKS-Modells validiert.

Aufbauend darauf erfolgt in Kapitel 5 die modellbasierte Regelungssynthese für den Hexapod. Das Kapitel enthält sowohl Simulationsergebnisse als auch Messungen vom Prüfstand.

Die Arbeit schließt mit Zusammenfassung und Ausblick ab.



## 2 Stand von Technik und Forschung

Diese Arbeit thematisiert den Regelungsentwurf für einen hydraulischen Hexapod zur Durchführung von Achsprüfungen. Das Kapitel beginnt mit einer Abgrenzung der in der Fahrwerkentwicklung typischerweise vorzufindenden Prüfsysteme. Danach wird neben der Motivation und den notwendigen theoretischen Grundlagen auch auf den typischen Ablauf einer Achsprüfung, die Definition des Prüfprogramms sowie die zugrunde gelegten Zielgrößen und Gütemaße eingegangen. Insbesondere wird auch die iterative Bildung der Steuersignale für die Aktoren beschrieben und begründet, weshalb sich dieses Vorgehen in der Industrie etabliert hat. Da sowohl der iterative Prozess als auch die Achsprüfung insgesamt sehr zeit- und kostenintensiv sind, werden verschiedene Ansätze verfolgt, diesen Entwicklungsprozess zu optimieren. Der erste Unterabschnitt des vorliegenden Kapitels schließt mit einer Zusammenstellung dieser Ideen und Maßnahmen ab.

Im Gegensatz zur Achsprüfung sind in der Robotik echtzeitfähige Regelungen allgegenwärtig. Insbesondere finden sich dort auch verschiedene Regelungsansätze für Manipulatoren im Kontakt mit einer Umgebung, z. B. für Handhabungs-, Montage- und Bearbeitungsaufgaben. Daher folgt in Abschnitt 2.2 eine ausführliche Darstellung dieser Methoden. Der Abschnitt geht sowohl auf die indirekten als auch die direkten Kraftregelungsverfahren ein. Da hier ein PKM zum Einsatz kommen wird, enthält Abschnitt 2.2 auch zahlreiche Literaturbeispiele für PKM in Kontaktaufgaben.

Der darauf folgende Abschnitt gibt einen Überblick über die in der Literatur zu findenden Beispiele hinsichtlich der Modellierung und numerischen Simulation von Achserprobungen. Insbesondere wird auf die Modellierung der Radaufhängung nach dem MacPherson-Prinzip eingegangen. Der Abschnitt dient als Ausgangspunkt der Modellierung des Achsprüfstands (Kapitel 4).

Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung, dem identifizierten Handlungsbedarf und der Konkretisierung des Ziels der Arbeit ab.

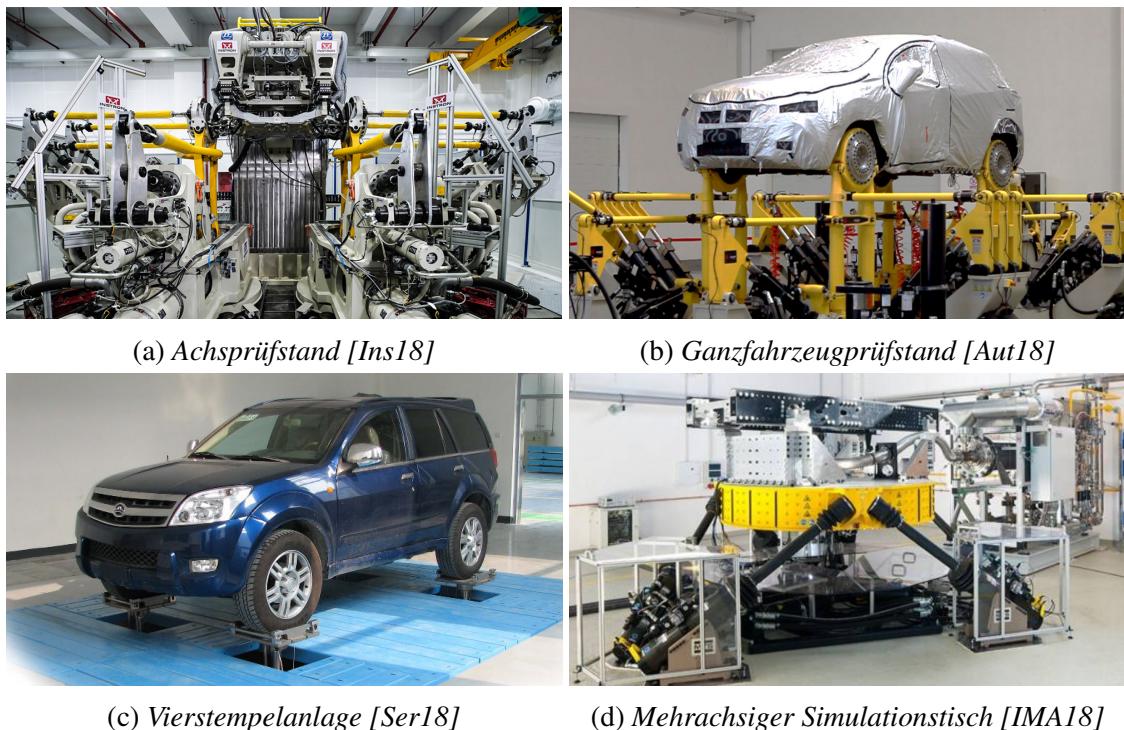
### 2.1 Konventionelle Achsprüfung in Industrie und Forschung

Gute Grundlagenwerke auf diesem Themengebiet sind die Dissertation von de Cuyper [Cuy06] sowie die Zeitschriftenbeiträge von Plummer [Plu07] und Berger et al. [BEH<sup>+</sup>02], wobei letzterer einen praxisnahen Einblick in die Betriebsfestigkeitsprüfung in Deutschland gewährt. Die Ausführungen in diesem gesamten Abschnitt entstammen, soweit nicht anders angegebenen, diesen Quellen.

In der Fahrwerktechnik kommen verschiedene Prüfstandssysteme zum Einsatz. Im Falle eines (Halb-) Achsprüfstands wird die zu prüfende Achse von einem starren Haltesystem getragen. Die Aktorik ist direkt mit den Radnaben verbunden, auf die sie Kräfte und Momente einprägt. Der Fehler, der dabei durch den im Gegensatz zur Realität unbewegten Fahrzeugaufbau entsteht, wird bei diesem Prüfkonzept in Kauf genommen. Abhilfe schafft der sog. Ganzfahrzeugprüfstand, bei dem das vollständige Fahrzeug von vier Anregungseinheiten getragen wird, wobei auch hier die Kopplung und damit die Kraft- und

Drehmomenteinleitung direkt an den Radnaben erfolgt. Sowohl am (Halb-) Achsprüfstand wie auch am Ganzfahrzeugprüfstand werden Anregungsfrequenzen von bis zu 50 Hz und mehr nachgebildet. Diese Prüfstände dienen in der Regel der Betriebsfestigkeitsuntersuchung, d. h. der Überprüfung, ob der betrachtete Prüfling (im vorliegenden Fall eine Achse bzw. das ganze Fahrwerk) betriebstypische Belastungen über seine gesamte Lebensdauer erträgt und somit betriebsfest ist.

Neben (Halb-) Achsprüfständen gibt es spezielle Komponentenprüfsysteme, z. B. für den Abgasstrang und Elastomerlager, Vierstempelanlagen für Komfortuntersuchungen sowie die bis zu 250 Hz betriebenen MAST-Systeme (engl. multi-axial shaker table) für Komponententests im hör- und spürbaren Frequenzbereich über etwa 20 Hz (engl. NVH - Noise, Vibration, Harshness). Für die Untersuchung der Kinematik und der Nachgiebigkeitseigenschaften eines Fahrwerk gibt es mit den Kinematics & Compliance (K&C)-Prüfständen ebenfalls eigenständige Lösungen. Bild 2-1 zeigt ausgewählte Beispiele.



*Bild 2-1: Exemplarische Prüfsysteme der Fahrwerkstechnik*

Das am HNI entwickelte Testsystem zählt dem Aufbau nach zur Klasse der Achsprüfstände. Mit ihm soll die HiL-Simulation mit real aufgebauter, mechanischer Komponente für die Entwicklung von Fahrwerkregelsystemen erschlossen werden. Ebenso eignet es sich für die Betriebsfestigkeitsprüfung. Unabhängig vom Einsatzzweck müssen die Stellsignale der Antriebseinheiten so gebildet werden, dass das Prüfsystem ein gewünschtes Verhalten zeigt. In den folgenden Unterabschnitten wird dargelegt, wie die Bildung der Stellsignale an einem konventionellen Achsprüfstand für Betriebsfestigkeitsuntersuchungen erfolgt. Nach einer kurzen Einführung über die Hintergründe und den Ablauf einer Achserprobung schließt sich die Beschreibung des für den Prüfstandsbetrieb etablierten, iterativen Verfahrens zur Bildung der Stellsignale an. Ebenso werden Weiterentwicklungen dieses Ansatzes sowie andere Maßnahmen erläutert, mit deren Hilfe versucht wird, den zeit- und kostenaufwändigen Prüfprozess zu optimieren.

### 2.1.1 Hintergrund und Ablauf der Achserprobung

Der Begriff der Betriebsfestigkeit geht auf Ernst Gaßner zurück, der sich u. a. mit der Bauteilfestigkeit im Flugzeugbau beschäftigte, vgl. [Gaß39]. Ziel der betriebsfesten Bauauslegung ist, „die betrachtete Konstruktion durch eine fallbezogene Kombination von Werkstoff, Formgebung und Fertigung so zu optimieren, dass bei kleinstem Raum-, Werkstoff- und Herstellungsaufwand ein Höchstmaß an Ausfallsicherheit gegen Schwinganriss oder Schwingbruch erreicht wird“ [Gaß76]<sup>2</sup>.

Die ersten experimentellen Untersuchungen zur Schwingfestigkeit wurden bereits im 19. Jahrhundert von August Wöhler durchgeführt, siehe z. B. [Wöh58]. Er untersuchte die Ursache des Bruchs von Eisenbahnachsen, deren Dimensionierung bislang auf statischen Festigkeitsberechnungen beruhte [KJPZ12]. Im Rahmen seiner Untersuchungen stellte er fest, dass die Lebensdauer eines Bauteils unter Schwingbelastung im Vergleich zur Lebensdauer bei statischer Belastung vermindert ist. Veranschaulicht wird dieser Zusammenhang durch die nach ihm benannte **Wöhlerlinie**, die die Anzahl der durch ein Bauteil ertragbaren Schwingspiele in Abhängigkeit der Beanspruchungsamplitude für einen sinusförmigen Belastungsverlauf darstellt. Die Betriebsfestigkeit wird dabei nicht nur durch den Werkstoff, sondern auch durch den Fertigungsprozess, die Formgebung des Bauteils und die vorliegende Belastung beeinflusst, vgl. [Son08]. Der Wöhlerlinie liegt ein sinusförmiger Lastverlauf bei gleichbleibender Amplitude zugrunde, was für die meisten realen Situationen nicht zutreffend ist. Üblicherweise treten stattdessen Belastungsfolgen unterschiedlicher Amplituden auf. Die Bauteillebensdauer für derartige Belastungsfolgen stellt die **Lebensdauerlinie bzw. Gaßnerlinie** dar. Entscheidend für die Darstellung ist die maximale Belastungsamplitude. Bild 2-2 zeigt die Wöhler- und Lebensdauerlinie, wobei die Belastungen (c) und (d) den Unterschied der beiden Linien veranschaulichen.

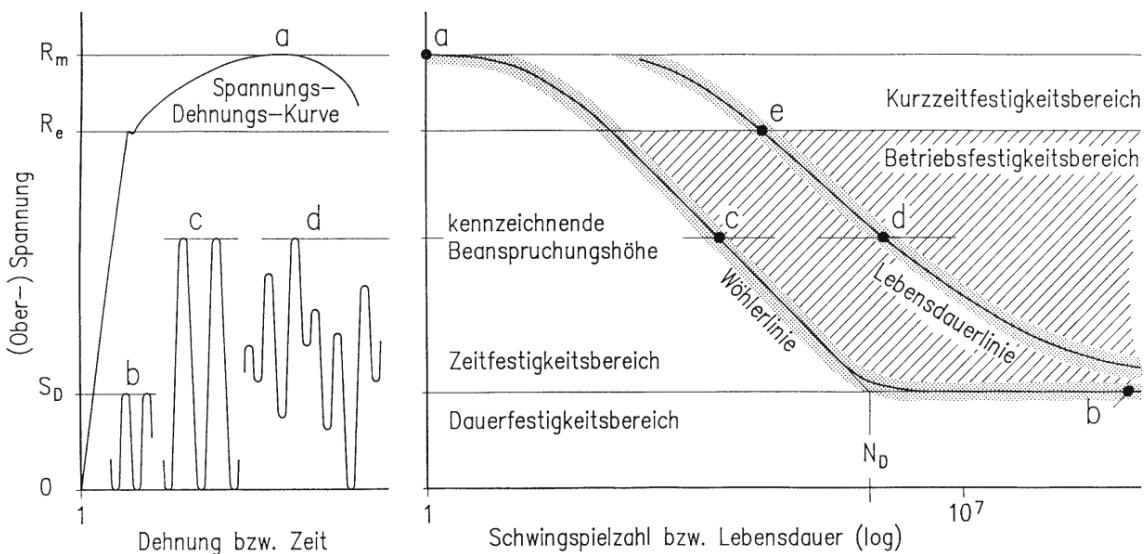


Bild 2-2: Wöhler- und Lebensdauerlinie [Hai06]

Aufgrund der teils kleineren Belastungsamplituden im Falle der Lebensdauerlinie liegt sie erwartungsgemäß rechts der Wöhlerlinie. Sie gibt die Betriebsbeanspruchung der meisten Bauteile besser wieder als die Wöhlerlinie [Hai06].

<sup>2</sup>Zitiert nach [Hai06, S. 7].

Für einige Werkstoffe kann ein Abknicken der fallenden Linie in den Dauerfestigkeitsbereich beobachtet werden, vgl. Belastung (b). Das andere Extrem, Belastung (a), entspricht dem Zugversuch. Die hieraus für die Wöhler- und Lebensdauerlinie relevante Kenngröße ist die Zugfestigkeit des Werkstoffs  $R_m$ .

Im hier interessierenden sog. Zeitfestigkeitsbereich verläuft die Wöhlerlinie bei doppeltlogarithmischer Darstellung nahezu linear. Sie kann dort durch die sog. Basquin-Gleichung,

$$N = N_A \cdot \left( \frac{S_a}{S_A} \right)^{-k}, \quad (2-1)$$

vgl. [Hai06, S. 25ff.], angenähert werden. Darin bezeichnet  $N_A$  die Lebensdauer und  $S_A$  die dazu gehörige Belastungsamplitude einer Referenzbelastung für das betrachtete Bauteil.  $k$  ist die Steigung der zugehörigen Wöhlerlinie. Sind diese Werte bekannt, so lässt sich die Lebensdauer  $N$  des Bauteils bei einer anderen Belastung im Zeitfestigkeitsbereich  $S_a$  hochrechnen. Diese Beobachtung wird in der Betriebsfestigkeitsprüfung ausgenutzt und macht diese zum Teil erst praktikabel. So wird die Lebensdauer eines Bauteils bei betriebstypischer Belastung aus schneller durchführbaren Versuchen bei höherer Belastung hochgerechnet.

Zu Beginn einer Betriebsfestigkeitsuntersuchung ist zunächst eine **Lastannahme** zu tätigen, d. h. eine Abschätzung der im typischen Betrieb eines Bauteils vorliegenden Beanspruchungen über seine gesamte Lebensdauer. Sie ist für diejenigen Stellen des Bauteils durchzuführen, die für dessen Lebensdauer maßgeblich sind. Bei einer Fahrzeugachse zählen zu diesen kritischen Stellen bspw. die Radnabe sowie die Lagerungspunkte der Achse an der Karosserie. Die korrekte Lastannahme ist wichtig für die betriebsfeste Bau teilauslegung. Sie muss so durchgeführt werden, dass die ermittelten Beanspruchungen repräsentativ für eine volle Nutzungsdauer des Bauteils sind. Die Lastannahme geschieht u. a. auf Basis von Kundenbefragungen und vorhandenen Daten aus Betriebsfestigkeitsprüfungen ähnlicher Bauteile. Auch die Verwendung speziell ausgerüsteter Versuchsträger ist üblich, vgl. [OHW06]. Die Durchführung der Lastannahme variiert von Hersteller zu Hersteller und von Zielmarkt zu Zielmarkt [Cuy06]. Grundsätzlich problematisch ist, dass die Lastannahme auf Betriebsmessungen beruht, die nur einen Bruchteil der eigentlichen Bauteilnutzungsdauer umfassen. Die Ermittlung betriebstypischer Beanspruchungen trotz dieser und anderer Einschränkungen ist bspw. in [KJPZ12] beschrieben.

Die Lastannahme resultiert in einer repräsentativen **Beanspruchungs-Zeit-Funktion (BZF)**, die die Grundlage für die Definition der durchzuführenden Betriebsfestigkeitsversuche darstellt. Zur Entwicklung des Testprogramms werden im nächsten Schritt die relevanten Merkmale der BZF mithilfe von statistischen Zählverfahren ermittelt. Unter der Vielzahl der unterschiedlichen Zählverfahren gilt das **Rainflow-Zählverfahren** als dasjenige, das die für die Lebensdauer maßgebliche Bauteilschädigung am besten erfasst. Beispielsweise wird es in [BEH<sup>+</sup>02] mit zwei anderen Verfahren, der Klassengrenzenüberschreitung und der Bereichspaarzählung, verglichen und zur Verwendung empfohlen. Das Verfahren wurde erstmals in japanischer Sprache veröffentlicht [ME68] und setzte sich infolge der Übersetzung ins Englische [Dow72] international durch. [KJPZ12]

Bei der Rainflow-Zählung werden die in einer BZF enthaltenen Beanspruchungen in verschiedene Beanspruchungsklassen unterteilt. Anhand dieser Klassifikation werden alle

geschlossenen Hystereseschleifen als maßgebliche Ursache der Bauteilschädigung anhand ihrer Start- und Zielklasse in die sog. **Rainflow-Matrix** eingetragen<sup>3</sup>. Neue Literatur zum Thema der Rainflow-Zählung beschäftigt sich vor allem mit der Weiterentwicklung der zugrunde liegenden Algorithmen zur Extraktion der geschlossenen Hystereseschleifen aus der BZF [KJPZ12]. Bild 2-3 veranschaulicht die Durchführung der Rainflow-Zählung für eine exemplarische BZF.

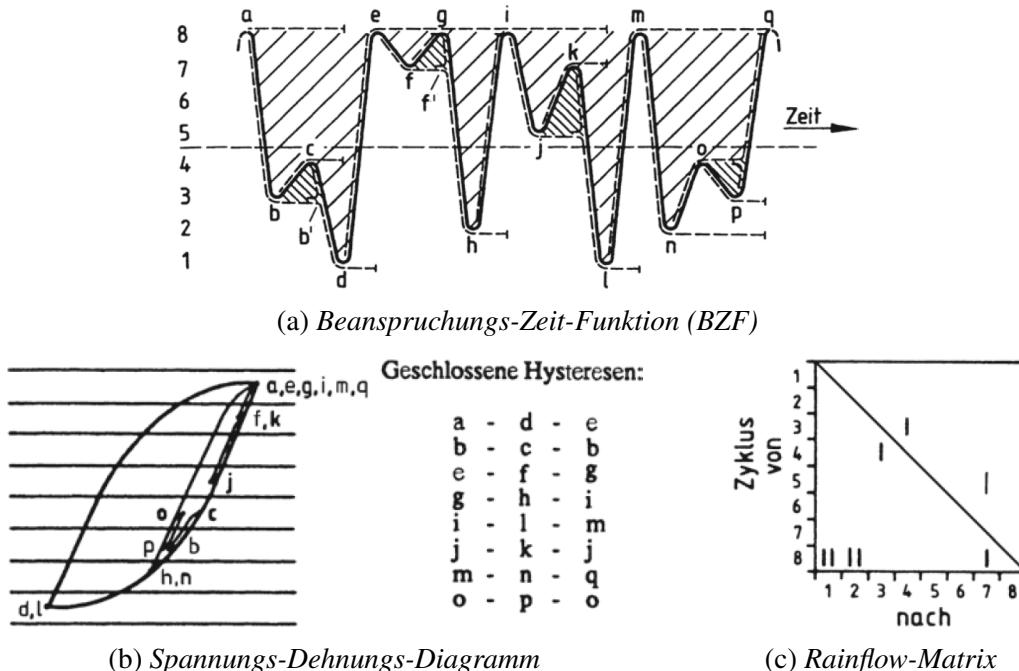


Bild 2-3: Rainflow-Zählverfahren [KJPZ12]

Bei Durchführung der Rainflow-Zählung erfolgt eine Datenreduktion. So gehen Frequenz- und Phaseninformationen, die Abfolge der Schwingungen und die Schwingungsform selbst verloren. Die Anwendung im Rahmen der Betriebsfestigkeitsanalyse ist daher nur zulässig, wenn die Lebensdauer eines Bauteils von diesen Eigenschaften nur unwesentlich abhängt [Hai06].

Die Rainflow-Matrix stellt das Ergebnis der Rainflow-Zählung dar. Sie gibt die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Beanspruchungsamplituden in einer BZF, das sog. **Lastkollektiv**, wieder. Aus der Kombination des Lastkollektivs und der Bauteil-Wöhler-Linie lässt sich die Lebensdauerlinie berechnen. Hierfür kann die lineare Schadensakkumulations-Hypothese nach Palmgren und Miner verwendet werden. Dabei wird ein waagerechter Verlauf der Wöhlerlinie nach dem Abknickpunkt angenommen, wodurch Beanspruchungsamplituden unterhalb dieser Grenze keine Schädigung des Bauteils nach sich ziehen. Praktisch trifft diese Annahme nicht zu, da kleine Belastungsamplituden eine Bauteilschädigung zur Folge haben können, bspw. dann, wenn sie auf größere folgen [BEH<sup>+</sup>02]. Aus diesem Grund existieren diverse Modifikationen der Palmgren-Miner-Regel, bei denen ab dem Abknickpunkt weiterhin ein fallender Verlauf der Wöhlerlinie angenommen wird. Die Steigung nach dem Abknickpunkt ist von Modifikation zu Modifikation unterschiedlich. Bei

<sup>3</sup>Anstelle von Start- und Zielklasse werden die Belastungszyklen häufig auch über ihre Schwingbreite und den Mittelwert der Belastung dargestellt.

manchen Ansätzen findet zusätzlich eine Verschiebung des Abknickpunktes statt, z. B. bei der Modifikation von Liu und Zenner [ZL92]. Die am häufigsten eingesetzten sind die Modifikation nach Haibach sowie Palmgren-Miner-elementar [Son08]. Einen entscheidenden Einfluss auf die Lebensdauer hat die Kollektivform, d. h. die Häufigkeitsverteilung der Belastungsamplituden. Im Falle eines Kollektivs mit vielen hohen und wenigen niedrigen Belastungsamplituden ist die Bauteillebensdauer geringer als im Falle weniger hoher und vieler niedriger Belastungsamplituden [BEH<sup>+</sup>02].

Ist die Referenz-Rainflow-Matrix aus der BZF ermittelt, so ist hieraus ein Testprogramm für die Betriebsfestigkeitsuntersuchung des Bauteils zu generieren. Ziel dabei ist, dass das Testprogramm die Referenz-Rainflow-Matrix möglichst gut wiedergibt. Im Falle einer zu prüfenden Fahrzeugachse werden zu diesem Zweck Fahrversuche auf speziellen Versuchsstrecken durchgeführt. Die Versuchsstrecken zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Fahrzeugachse einer deutlich höheren Beanspruchung aussetzen als normale Fahrbahnen. Beispiele sind das sog. „Belgisch Pflaster“ oder Schlechtwegstrecken. Als Testprogramm wird für jede Versuchsstrecke eine bestimmte Zahl an Fahrten definiert. [Cuy06]

Ein zunehmender Teil dieser Versuchsfahrten wird auf Prüfstände verlagert. Die Vorteile von Laborversuchen bestehen vor allem in der hohen Reproduzierbarkeit der Tests bei frei wählbaren, gleichbleibenden Rahmenbedingungen. Es entstehen keine Unterbrechungen durch schlechte Wetterbedingungen oder das mechanische Versagen nicht testrelevanter Bauteile des Fahrzeugs. Die Tests können kontinuierlich durchgeführt werden; die Abhängigkeit vom Testfahrer entfällt ebenso wie dessen Gefährdung durch die durchzuführenden Versuche im Grenzbereich. Zudem können sowohl die Tests selbst als auch die getesteten Komponenten einfacher geheimgehalten werden. Einzelne Systemkomponenten können bereits in einer frühen Entwicklungsphase lange vor Fertigstellung des ersten Gesamtsystemprototyps getestet werden.

Im sog. Betriebslastennachfahrversuch (BLNV) werden am Prüfstand die für die Lebensdauer maßgeblichen Beanspruchungsgrößen der Achse reproduziert, die zuvor im Rahmen von Versuchsfahrten gemessen wurden. Die Nachbildung der gemessenen Beanspruchungen wird durch iteratives Einlernen der Steuersignale für die Antriebe erreicht. Der zugrunde liegende Prozess wird als **Drive-File-Generierung** bezeichnet. Nach dem Einlernen der Steuereingänge kann das eigentliche Testprogramm auf dem Prüfstand durchgeführt werden. Ein frühes Beispiel für diese iterative Vorgehensweise beschreibt [CNL76] für die Nachbildung gemessener Beschleunigungen an einer Vierstempelanlage. Das Verfahren hat sich vor allem in der Automobilindustrie und für seismische Tests durchgesetzt [DP01].

Der Ablauf einer Achserprobung auf dem Prüfstand lässt sich damit in die folgenden wesentlichen Schritte unterteilen:

1. Ermittlung der für die Lebensdauer der Achse repräsentativen BZF,
2. Bestimmung der Referenz-Rainflow-Matrix,
3. Definition des Testprogramms,
4. Durchführung der Referenz-Messfahrten,
5. Drive-File-Generierung,
6. Durchführung der Achstests auf dem Prüfstand.

Das iterative Verfahren zur Bildung der Steuersignale für die Antriebe des Prüfstands im Rahmen der Drive-File-Generierung ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

### 2.1.2 Drive-File-Generierung

Die Drive-File-Generierung beruht auf der sog. iterativ lernenden Regelung (ILR), die zuerst durch Arimoto, Kawamura und Miyazaki [AKM84] für die Verbesserung der Arbeitsgenauigkeit von Robotern beschrieben wurde. Sie ist prädestiniert für die Verbesserung des Führungsverhaltens von Maschinen und Anlagen, die sich wiederholende Aufgaben durchführen. Der Grundgedanke besteht darin, eine Vorsteuerung gezielt für die sich wiederholende, vollständig bekannte Aufgabe zu optimieren. Sehr ähnlich zur ILR ist auch Repetitive Control (RC). Wang, Gao und Doyle [WGD09] kommen nach einem ausführlichen Vergleich zu dem Schluss, dass es sich hierbei prinzipiell um das gleiche Verfahren handelt. Das Lehrbuch von Owens [Owe16] gibt eine umfangreiche Einführung in das Themengebiet und ist Grundlage der folgenden Ausführungen.

Gegeben ist ein System, dessen Übertragungsverhalten durch die nichtlineare Funktion

$$\mathbf{y} = \mathcal{G}(\mathbf{u}) \quad (2-2)$$

beschrieben werde. Dabei ist  $\mathbf{u}$  die Eingangs- und  $\mathbf{y}$  die Ausgangsgröße des betrachteten Systems. Ziel der ILR ist es, die Eingangsgröße  $\mathbf{u}$  zu bilden, durch die das System einem vorgegebenen Zeitverlauf für die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}$  ideal folgt. Bezeichnet

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_r - \mathbf{y}_k \quad (2-3)$$

den Abbildungsfehler in Iterationsschritt  $k \in \mathbb{N}$  mit dem Soll-Zeitverlauf der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_r$ , so lässt sich das verfolgte Ziel durch die Formel

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_r - \mathbf{y}_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\| = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}_\infty = \mathcal{G}(\mathbf{u}_\infty) \quad (2-4)$$

ausdrücken. In der Praxis wird der Iterationsprozess beendet, sobald ein bestimmtes Gütemaß erfüllt ist, z. B. wenn der Zeitverlauf der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}$  den Sollzeitverlauf  $\mathbf{y}_r$  hinreichend gut wiedergibt und damit die Abweichung kleiner als eine vorgegebene Schranke  $\varepsilon$  ist, d. h.

$$\|\mathbf{e}_{k^*}\| < \varepsilon. \quad (2-5)$$

$k^*$  ist dabei diejenige Iteration, die zur Erfüllung des Gütemaßes führt.

Der Algorithmus zur Bildung der Stellgröße  $\mathbf{u}_{k+1}$  lautet allgemein

$$\mathbf{u}_{k+1} = f_{k+1}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \quad (2-6)$$

mit den Startwerten  $\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0$ . Der Term  $\mathbf{e}_{k+1}$  ist zum Zeitpunkt der Auswertung von (2-6) nicht bekannt, da er erst aus der Stellgröße  $\mathbf{u}_{k+1}$  folgt. Anstelle dessen kann ein mittels (2-2) aus den vorliegenden Messwerten prädizierter Wert in den Algorithmus (2-6) einfließen, siehe z. B. [Owe16, S. 123f.].

In [WGD09] wird der Algorithmus noch in einen Vorsteuer- und Korrekturterm aufgespalten, d. h.

$$\mathbf{u}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{u},k+1}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)}_{\text{Vorsteuerterm}} + \underbrace{\mathbf{f}_{\mathbf{y}_r,k+1}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)}_{\text{Korrekturterm}} . \quad (2-7)$$

Häufig wird der einfache Ansatz

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{K}_{ILR} \cdot \mathbf{e}_k \quad (2-8)$$

verwendet, d. h. der Systemeingang des nächsten Iterationsschritts  $\mathbf{u}_{k+1}$  entspricht dem Systemeingang des vorangegangenen Iterationsschritts  $\mathbf{u}_k$ , korrigiert um eine zur Abweichung  $\mathbf{e}_k$  des vorangegangenen Iterationsschritts proportionale Größe. Die Entwicklung effizienter Algorithmen mit streng monotoner Konvergenz, d. h.

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| < \|\mathbf{e}_k\| \quad \forall k \geq 0 , \quad (2-9)$$

hinreichend kleinem Fehler  $\mathbf{e}_k$  nach wenigen Iterationen sowie Robustheit sind Gegenstand der Forschung. [Owe16]

Hervorzuheben ist, dass bei diesem Verfahren keine Regelung im eigentlichen Sinne eingelernt und der Begriff der iterativ lernenden *Regelung* irreführend ist. Nach DIN IEC 60050-351:2014-09 ist die Regelung ein „Vorgang, bei dem fortlaufend eine variable Größe, die Regelgröße, erfasst, mit einer anderen variablen Größe, der Führungsgröße, verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. [...] Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst“ [DIN1]. Es handelt sich vielmehr um eine iterativ eingelernte *Steuerung*, da im laufenden Betrieb keine Anpassung der Regel- an die Führungsgröße erfolgt. Der Eingriff des Verfahrens, d. h. die Angleichung der Regel- an die Führungsgröße, erfolgt von einem zum nächsten Iterationsschritt. Eine Änderung des Streckenverhaltens nach (2-2) kann durch die Steuerung nicht ausgeglichen werden. Bei einer Betriebsfestigkeitsprüfung stellen bspw. die zunehmende Bauteilschädigung und -alterung im Ablauf der Versuche sowie die fortlaufende Weiterentwicklung des Bauteils mögliche Ursachen für verändertes Streckenverhalten dar. Ist das gewählte Gütekriterium infolge dieser Änderungen nicht mehr erfüllt, muss die Iteration erneut durchgeführt werden. Es gibt allerdings auch Versuche, bei denen bewusst keine Nachiteration erfolgt und die zunehmende Abweichung von Soll- und Ist-Ausgangsgröße in Kauf genommen wird. Die Bildung der Eingangsgröße  $\mathbf{u}$  muss für jeden gewünschten Ausgangsgrößenverlauf  $\mathbf{y}$  separat durchgeführt werden. Bild 2-4 veranschaulicht den Unterschied zwischen dem iterativen Lernverfahren und einer Regelung. Die gestrichelten Bestandteile laufen nicht in Echtzeit ab.

Neben der Robotik ist die Anwendung der ILR auch in der Automobilindustrie zur Bildung der Stellsignale für Komfort- und Betriebsfestigkeitsprüfstände etabliert [DP01]. Der Zeitverlauf der Eingangsgröße  $\mathbf{u}$  wird dort als **Drive-Signal**, der Soll-Zeitverlauf der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_r$  als **Target-Signal** sowie der am Prüfstand gemessene Ist-Zeitverlauf der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}$  als **Response-Signal** bezeichnet. Da es sich bei den Target-Signalen um weitestgehend beliebige Systemgrößen handeln kann, die nicht in direktem Zusammenhang mit den Systemeingängen stehen müssen, werden sie zum Teil auch als *remote parameters* bezeichnet.

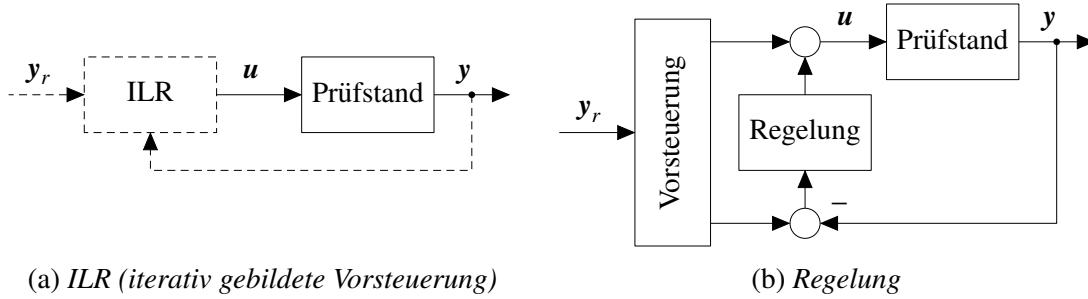


Bild 2-4: Vergleich von ILR und Regelung  
( $y_r$ ,  $y$ : Soll- und Istwert der Ausgangsgröße,  $u$ : Stellgröße)

In den ILR-Algorithmus für Komfort- und Betriebsfestigkeitsprüfungen kann auch Modellwissen in Form eines inversen Streckenmodells einbezogen werden. Weit verbreitet ist hierbei, dass das Übertragungsverhalten (2-2) von den Stelleingängen der Antriebe zu den festgelegten Systemausgängen durch eine lineare Übertragungsmatrix im Frequenzbereich

$$Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot U(j\omega), \quad (2-10)$$

die sog. Frequency Response Function (FRF), beschrieben wird. Prinzipiell handelt es sich dabei um eine Linearisierung des Systemverhaltens in einem spezifischen, mittleren Arbeitspunkt des Prüfsystems. Bei der Identifikation der Übertragungsmatrix muss sichergestellt werden, dass alle für die spätere Prüfung relevanten Frequenzanteile mit hinreichender Amplitude angeregt werden.

Die FRF bei der Frequenz  $\omega$  wird durch den sog.  $H_1$ -Estimator aus den gemessenen Systemein- und -ausgängen anhand der Formel

$$G(j\omega) = P_{yu}(j\omega) \cdot P_{uu}^{-1}(j\omega) \quad (2-11)$$

aus dem Kreuzleistungsspektrum  $P_{yu}(j\omega)$  und dem Autoleistungsspektrum  $P_{uu}(j\omega)$  bei der Frequenz  $\omega$  berechnet. Dem  $H_1$ -Estimator liegt die Annahme zugrunde, dass das vorhandene Systemrauschen und die Systemeingänge unkorreliert sind. Da die Eingangssignale in diesem Falle vom Nutzer vorgegeben werden und damit gänzlich bekannt sowie frei von Rauschen sind, ist diese Annahme erfüllt. Außerdem müssen die Eingangssignale unkorreliert sein, da sonst  $P_{uu}(j\omega)$  singulär ist und nicht invertiert werden kann. Neben dem  $H_1$ -Estimator gibt es weitere Ansätze, z. B. den  $H_2$ -Estimator, der sich nach der Formel

$$G(j\omega) = P_{yy}(j\omega) \cdot P_{uy}^{-1}(j\omega) \quad (2-12)$$

berechnet. Im Gegensatz zum  $H_1$ -Estimator wird dabei angenommen, dass das Systemrauschen und die Systemausgänge unkorreliert sind. Bei unverrauschten Ein- und Ausgangssignalen sind die beiden Verfahren identisch. Wird der  $H_1$ -Estimator trotz verrauschter Eingangssignale verwendet, so liegt der ermittelte unter dem realen Amplitudenverlauf. Ist das Ausgangssignal verrauscht und wird der  $H_2$ -Estimator eingesetzt, so folgt hingegen ein überhöhter Amplitudenverlauf. [Bra11]

Zur Beurteilung der gebildeten FRF kann außerdem die sog. multiple Kohärenzfunktion aus dem Verhältnis der Autospektren von Modell- und gemessener Ausgangsgröße

$$\mathbf{C}(j\omega) = \hat{\mathbf{P}}_{yy}(j\omega) \cdot \mathbf{P}_{yy}^{-1}(j\omega), \quad \hat{\mathbf{P}}_{yy}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega) \cdot \mathbf{P}_{uy}(j\omega) \quad (2-13)$$

berechnet werden [Plu07]. Sie lässt eine Aussage darüber zu, inwiefern sich ein Systemausgang durch die Systemeingänge und die ermittelte FRF erklären lässt. Ergebnis ist ein frequenzabhängige Kennzahl im Intervall [0; 1], deren Auftragung über der Frequenz eine anschauliche Aussage über die Güte der ermittelten FRF zulässt. Dabei stellt der Wert 1 das optimale Ergebnis dar. Praktisch wird die Modellinvertierung auf diejenigen Frequenzbereiche des identifizierten Modells beschränkt, bei der eine multiple Kohärenz von mindestens 0,8 vorliegt [Cra93]<sup>4</sup>. Neben der multiplen Kohärenzfunktion kann eine Modellvalidierung auch durch den Vergleich der realen Systemausgänge mit denjenigen Systemausgängen erfolgen, die bei gegebenen Systemeingängen aus dem ermittelten Modell resultieren (sog. Vorwärtsvalidierung). Ein entsprechender Vergleich ist auch für das inverse Modell möglich, indem aus den gemessenen Systemausgängen die Systemeingänge zurückberechnet und mit den tatsächlichen Systemeingängen verglichen werden (sog. Rückwärtsvalidierung). Für diese Validierung müssen anwendungsnahe Systemeingänge zum Einsatz kommen, die sich von den für die Bildung der FRF verwendeten Systemeingängen unterscheiden.

Eine verbreitete Technik zur Steigerung der Modellqualität ist das Averaging. Dabei werden mehrere verschiedene Modelle  $\mathbf{G}(j\omega)$  für die Strecke gebildet und gemittelt. Zielsetzung ist hier die Erzielung einer möglichst hohen multiplen Kohärenz.

Die Problematik des beschriebenen Vorgehens besteht in der Annahme eines linearen Übertragungsverhaltens für ein nichtlineares System. Hinzu kommt, dass einzuhaltende (Sicherheits-) Rahmenbedingungen bei der Modellidentifikation die Qualität des linearen Streckenmodells zusätzlich begrenzen.

Der in der Literatur am häufigsten genannte ILR-Algorithmus zur Ermittlung der Drive-Signale unter Einbeziehung des Modellwissens lautet

$$\mathbf{U}_{k+1}(j\omega) = \mathbf{U}_k(j\omega) + \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{E}_k(j\omega) . \quad (2-14)$$

Je nach Forschergruppe und/oder Hersteller findet sich dieses Verfahren vor allem unter dem Namen Time Waveform Replication (TWR) oder auch Remote Parameter Control (RPC). Im Folgenden wird wie in der Mehrzahl der Literaturquellen die Bezeichnung TWR verwendet, unter der das Verfahren auch im Teststandard MIL-STD-810 [MIL1] des US-Militärs beschrieben ist.

Da das Streckenmodell  $\mathbf{G}(j\omega)$  im Frequenzbereich vorliegt, ist auch der TWR-Algorithmus im Frequenzbereich formuliert. Die Umrechnung der Signale vom bzw. in den Zeitbereich erfolgt durch die diskrete Fourier-Transformation (DFT) bzw. die inverse DFT. Die Abbildungsgüte der Iteration, d. h. die Abweichung zwischen Target- und Response-Signal, ist bei Anwendung dieses Verfahrens (in Abwesenheit sporadischer Störungen) theoretisch nur durch die Leistungsfähigkeit der Aktorik und das Messrauschen begrenzt.

Häufig wird im Rahmen der Iteration eine Tiefpassfilterung von Target- und Response-Signal durchgeführt. Hierdurch wird die Abbildungsbandbreite der Iteration, im Falle

---

<sup>4</sup>Zitiert nach [Plu07, S. 149].

der Achsprüfung üblicherweise auf einen Bereich bis 50 Hz, eingeschränkt. Es kommen digitale Filter zum Einsatz, in [ME17] bspw. ein Butterworth-Filter 15. Ordnung.

Das inverse Streckenmodell  $\mathbf{G}^{-1}$  wird mithilfe der Singulärwertzerlegung gebildet. Je nachdem, ob mehr Ein- oder Ausgangsgrößen vorliegen, wird in diesem Zusammenhang zwischen der linken und rechten Streckeninverse unterschieden [Owe16]. In der Regel besitzen die hier betrachteten Prüfstandssysteme mehr Ausgangs- als Eingangsgrößen, sodass die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(j\omega)$  mehr Zeilen als Spalten aufweist. Der Fall, dass mehr Ein- als Ausgangsgrößen vorliegen, ist zumindest auf dem Gebiet der Achsprüfung so gut wie nicht relevant [Cuy06].

In (2-14) handelt es sich bei  $\mathbf{Q}_k$  um eine diagonale Gewichtungsmatrix; ihre Einträge liegen im Intervall  $[0; 1]$ . Eine allgemein verwendbare Strategie für die Wahl der Gewichtungen existiert nicht; in der Praxis wird die Iteration mit kleinen Werten im Bereich von 30 % gestartet, um Überschwinger und Schäden zu vermeiden [TDPC11]. In der in (2-14) dargestellten Form erfolgt eine Gewichtung der Target-Signale, da die Target-Abweichung  $\mathbf{E}_k(j\omega)$  direkt mit  $\mathbf{Q}_k$  gewichtet und daraufhin mit dem inversen Streckenmodell  $\mathbf{G}^{-1}$  in die Drive-Signal-Korrektur umgerechnet wird. Anstelle dessen wird häufig auch eine Gewichtung der Drive-Signal-Korrektur vorgenommen; die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}_k$  steht dann nicht nach, sondern vor dem inversen Streckenmodell  $\mathbf{G}^{-1}$ . Es gibt auch Beispiele, in denen beide Gewichtungen genutzt werden, siehe z. B. [TDPC11]. Abgesehen davon sind auch zeit- und frequenzabhängige Gewichtungen möglich.

Als Startwerte der Iteration werden üblicherweise Nullvektoren verwendet, d. h.

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}. \quad (2-15)$$

Für die Konvergenzgeschwindigkeit ist die Qualität des inversen Streckenmodells  $\mathbf{G}^{-1}$  und die Wahl der Gewichtungsfaktoren  $\mathbf{Q}_k$  maßgeblich. Bei der Wahl hoher Werte in  $\mathbf{Q}_k$  konvergiert das Verfahren schneller, wenn ein hinreichend gutes inverses Streckenmodell vorliegt. Ist dies nicht der Fall, so führt die Wahl hoher Werte  $\mathbf{Q}_k$  zur Instabilität des Iterationsprozesses und zu unerwünschter Schädigung des Prüflings. Je höher die Nichtlinearität des Systems, desto kleiner werden die Gewichtungsfaktoren in der Praxis gewählt. So müssen zwar mehr Iterationen durchgeführt werden, die Konvergenz ist aber wahrscheinlicher [Cuy06].

Selbst bei einem linearen Übertragungsverhalten des realen Systems kann das geschilderte iterative Vorgehen für Zielgrößen mit hohen Frequenzanteilen erforderlich sein. Owens [Owe16] begründet dies damit, dass die Berechnung des inversen Streckenmodells unrealistisch komplex sein kann oder, je nach Lage der Nullstellen des inversen Systems, nicht realisierbar ist. Hinzu kommt, dass selbst bei einer Verstärkung von 1 im ersten Iterationsschritt ( $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ ) ein ideales Folgeverhalten durch verbliebene Modellgenauigkeiten höchst unwahrscheinlich ist.

Insgesamt stellt die Drive-File-Generierung einen zweiphasigen Prozess aus Systemidentifikation und Target-Simulation dar. Im Rahmen der **Systemidentifikation** wird die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(j\omega)$  bzw. ihre Inverse  $\mathbf{G}^{-1}$  aus Prüfstandsmessungen gebildet. Als Messsignal kommt hierbei z. B. unkorreliertes Rauschen auf allen Systemeingängen in Betracht. Im Anschluss erfolgt die **Target-Simulation**, in der die Drive-Signale bzw. Stellsignale der Antriebe für die betrachtete BZF mittels des Algorithmus (2-14) iterativ am Prüfstand bestimmt werden.

Als Target-Signale werden an Achsprüfständen bspw. im Fahrversuch gemessene Kräfte und Momente am Radträger verwendet. Einen Sonderfall stellt das Moment um die Rad-drehachse dar: wird nicht explizit ein Bremsmanöver nachgebildet, so wird die Verdrehung zwischen dem Radträger und der Aktorik um diese Achse klein gehalten. Um eine verbesserte Abbildung der realen Beanspruchung im Fahrzeug zu erreichen, werden meist weitere Größen als Target-Signale hinzugefügt. Verbreitet ist die Messung und Nachbildung des Dämpferwegs sowie der Belastung von Lenkern (z. B. der Spurstange) und des Stabilisators. Auch die Nachbildung der Belastung der Karosserielagerpunkte (Federdom und/oder Lenkerlager) ist üblich. Die Target-Signale, auch als Kanäle bezeichnet, können im Rahmen der Iteration zusätzlich relativ gewichtet werden.

Neben den Target-Signalen können auch sog. **Slave-Drives** vorgegeben werden. Hierbei handelt es sich um im Fahrversuch gemessene Einflussgrößen auf den Prüfling, die im Rahmen der Target-Simulation durch einen entsprechenden Aktor unverändert reproduziert werden. Während der Systemidentifikation wird der betreffende Eingang nicht aktuiert. Beispiele hierfür sind die Kräfte im Federdom oder der Lenkwinkel. Je nachdem, inwieweit Wechselwirkungen mit den Target-Signalen bestehen, muss der Slave-Drive auch als Target-Signal aufgenommen werden. So wird der Eingriff bei der Iteration berücksichtigt und der TWR-Algorithmus versucht nicht, dessen Auswirkung durch andere Systemeingänge zu erzielen. In [OBL02] wird dieses Vorgehen für die Nachbildung eines aktiven Fahrwerkeingriffs gewählt. Speziell für die Einbindung aktiver Fahrwerksysteme besteht außerdem die Möglichkeit, alle Eingangsgrößen des betreffenden Steuergeräts im Fahrversuch aufzuzeichnen. Wird das Steuergerät in den Prüfstand integriert, kann es mit diesen Messdaten beaufschlagt und (weiter-) entwickelt werden. Neben diesen beiden Möglichkeiten nennen Brune und Pötter [BP08] auch den Lösungsansatz, den aktiven Fahrwerkeingriff im Rahmen der Betriebsfestigkeitsversuche durch Vorgabe eines konstanten Aktorsollwerts nicht zu berücksichtigen. Der in [BP08] betrachtete Verstellämpfer zeigt jedoch nennenswerten Einfluss des Aktors auf die Federdomkraft, sodass die konstante Sollwertvorgabe als unzulässig erachtet wird. Brune und Pötter resümieren, dass sich durch die Integration des Verstellämpfers in den Prüfstand neue Herausforderungen ergeben, z. B. die Ausrüstung des Prüfstands mit Bus-Schnittstellen und die sog. Restbussimulation. Zudem kann sowohl die Systemidentifikation als auch die Target-Simulation infolge der aktiven Eingriffe fehlschlagen. Der starke Einfluss aktiver Fahrwerkeingriffe auf die Betriebsfestigkeitsbeurteilung wird auch in [TTU03; LA04] aufgezeigt.

Bei der Target-Simulation werden an (Halb-) Achsprüfständen üblicherweise die Sollwerte für die Positions- oder Kraftregelungen der einzelnen Aktoren gebildet. Eine Anpassung der Parameter der unterlagerten Regelungen findet im Rahmen der Drive-File-Generierung nicht statt, da hierdurch auch das Streckenmodell  $\mathbf{G}(j\omega)$  geändert würde.

Bei den Positions- und Kraftregelungen der einzelnen Aktoren handelt es sich meist um Einzelaktorregelungen, d. h. sie sind unabhängig voneinander entworfen und es findet keine Kompensation der Verkopplungen zwischen den einzelnen Richtungen statt. Die Regelungen besitzen laut [Cuy06] in der Regel eine 3 dB-Bandbreite von etwa 15 Hz im Falle der Positions- und etwa 22 Hz im Falle der Kraftregelung. Die Kraftregelung ist durch eine Kaskadenregelung mit innerer Positionsregelschleife realisiert. Sie wird für die Iteration der Target-Signale der Positionsregelung vorgezogen, da so ein engerer Zusammenhang zwischen dem Drive- und dem Target-Signal besteht. Die Positionsregelung wird für die FHG verwendet, wo systeminhärente Nichtlinearitäten den Kraftregelungsentwurf

erheblich beeinträchtigen. Im Falle eines Achsprüfstands wird in vertikaler Richtung ein Positionsregler verwendet, da diese Richtung u. a. durch den Zug- und Druckanschlag des Stoßdämpfers stark nichtlineares Verhalten aufweist. Eingesetzt werden einfache PID-Regler, die experimentell am Prüfstand durch den Bediener ausgelegt werden. Soweit möglich werden sie von Prüfling zu Prüfling beibehalten, da sie durch die übergeordnete ILR von untergeordneter Bedeutung sind. De Cuyper [Cuy06, S. 52] gibt als typisches Anregungssignal im Rahmen der Systemidentifikation für kraftgeregelte Aktoren weißes Rauschen oder steigende Amplituden für steigende Frequenzen an. Bei positionsgeregelten Aktoren wird typischerweise bis 5 Hz mit konstanter, dann fallender Amplitude identifiziert.

Die Target-Simulation wird so lange durchgeführt, bis die Response-Signale  $y$  die Target-Signale  $y_r$  hinreichend gut wiedergeben. Zur Beurteilung der Abbildungsgüte können die Zeitverläufe sowie die Frequenzspektren der Target- und Response-Signale verglichen werden. Außerdem lassen sich Kennwerte für die Beurteilung berechnen. Bei Beschleunigungsvorgaben, wie sie z. B. bei Komfortuntersuchungen an Vierstempelanlagen üblich sind, wird für jedes Target der Quotient des quadratischen Mittelwerts (RMS) der Abweichung  $e_k$  und des RMS des Target-Verlaufs  $y_r$  gebildet. Dieser Wert wird als **relativer RMS-Fehler** bezeichnet. Er liegt in der Praxis üblicherweise im Bereich von 5-10 % [Cuy06]. Alternativ kann auch die sog. **RMS response** als Quotient von RMS des gemessenen Signals vom Prüfstand  $y_k$  und RMS des Target-Signals  $y_r$  berechnet werden. Im Bereich der Betriebsfestigkeitsprüfung werden hingegen Kraftvorgaben eingesetzt. Zur Beurteilung der Iterationsgüte wird in diesem Fall die **relative Schädigung** herangezogen. Aus der Rainflow-Matrix einer BZF und der Bauteil-Wöhler-Linie lässt sich ein Kennwert für die Schädigung des Bauteils ermitteln. Dieser Wert wird sowohl für das Target- als auch das Response-Signal berechnet. Die relative Schädigung ist der Quotient der beiden Schädigungskennwerte. Im Idealfall beträgt sie 1; praktisch stellt ein Wert zwischen 0,5 und 2 ein erfolgreiches Iterationsergebnis dar [Cuy06], wobei in der Praxis auch deutlich bessere Werte angestrebt und erreicht werden. Ein etwaiger Phasenverzug zwischen Target-Signal und Response-Signal hat bei der Beurteilung keine Bedeutung. Üblich ist außerdem die Gegenüberstellung der Target- und Response-Signale mithilfe etablierter Zählverfahren der Betriebsfestigkeit. Beispielsweise kann ein Vergleich durch die Betrachtung der jeweiligen Spannenpaar- und Klassendurchgangsdiagramme erfolgen. Für Details zur Spannenpaarzählung (auch: Bereichspaarzählung) und Klassendurchgangszählung (auch: Klassengrenzenüberschreitungszählung) siehe z. B. [DIN2; Hai06; KJPZ12].

Je mehr Iterationen bis zum Erzielen eines hinreichend guten Ergebnisses notwendig sind, desto mehr wird hierbei auch der Prüfling bereits vor dem eigentlichen Betriebsfestigkeitsversuch geschädigt. Hierdurch wird auch die anschließende Lebensdaueranalyse verfälscht, da durch die Vorschädigung im eigentlichen Betriebsfestigkeitsversuch eine kürzere Lebensdauer resultiert. Die Zahl der notwendigen Iterationen hängt vor allem vom Ausmaß der Nichtlinearitäten des Prüflings und des Antriebssystems ab. Je höher die Nichtlinearität, desto mehr Iterationen sind erforderlich.

Die vom Antriebssystem unabhängigen Nichtlinearitäten des Prüflings lassen sich im Falle einer Achse zum einen auf den Stoßdämpfer mit seinen Endanschlägen zurückführen. Die Endanschläge treten allerdings nur bei höheren vertikalen Auslenkungen aus der Mittelstellung in Erscheinung und sind daher vor allem für den niedrigen Frequenzbereich (0-10 Hz) von Bedeutung. Zum anderen existieren Nichtlinearitäten vor allem in der Längs-

und Querrichtung durch die in der Achse verbauten Elastomerlager. Sie besitzen eine Resonanzfrequenz von etwa 15 Hz. [Cuy06]

Daneben gibt es weitere Nichtlinearitäten, die vom jeweiligen Prüfstandssystem abhängen. Bei konventionellen Achsprüfständen ist die Aktorik jeweils so angebracht, dass sie hauptsächlich in einer Richtung wirkt, siehe Bild 2-5. Aus diesem Grund werden diese Prüfstände auch als *Orthogonalsysteme* bezeichnet. Motivation dieser Anordnung ist, dass die Verkopplung der einzelnen Richtungen untereinander möglichst gering gehalten werden soll. Außerdem kann die Aktorik gezielt an die Anforderungen der jeweiligen Belastungsrichtung angepasst werden.

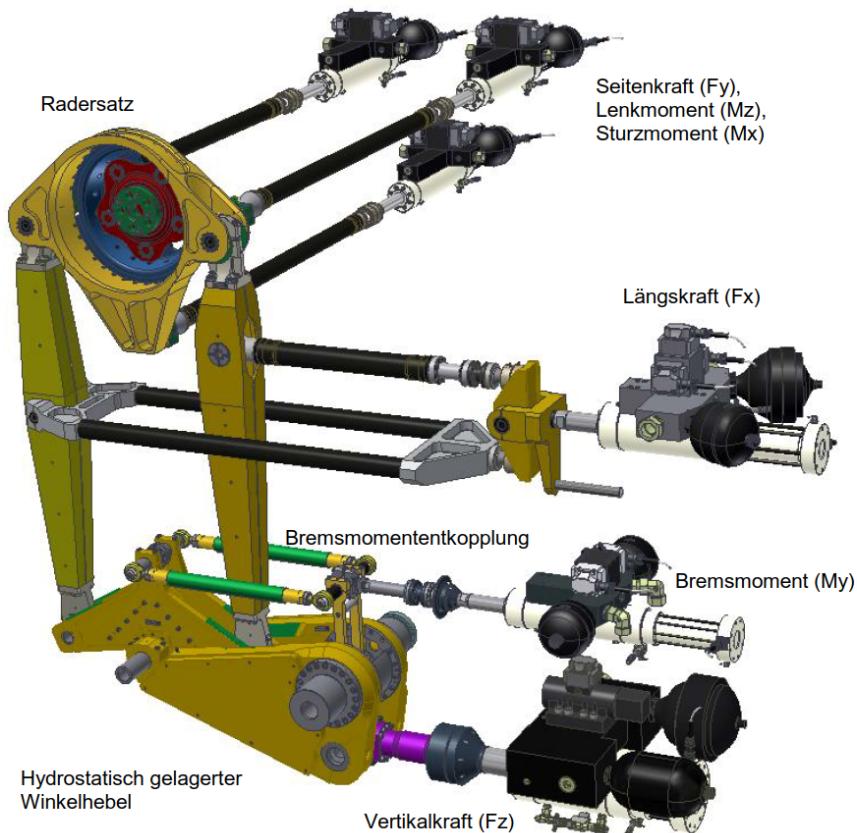


Bild 2-5: Anregungseinheit (sechs FHG) eines Achsprüfstands der inova GmbH [ino17]<sup>5</sup>

Trotz dieser Anordnung der Aktorik bestehen kinematische Verkopplungen zwischen den einzelnen Richtungen, d. h. der allein für die Anregung in vertikaler Richtung angebrachte Aktor führt nicht zu einer reinen vertikalen Bewegung, sondern auch zu Auslenkungen in der Längs- und Querrichtung. Bild 2-6 zeigt diese Problematik exemplarisch für das in [Cuy06] verwendete Prüfsystem.

Da die Aktoren unabhängig voneinander geregelt werden und keine übergeordnete Compensation der Verkopplungen erfolgt, hat jedes Drive-Signal nicht allein auf das primär damit assoziierte Target-Signal Einfluss, was die Drive-File-Generierung erschwert. Auch dieser Effekt ist vor allem für große Amplituden und damit Frequenzbereiche bis etwa 10 Hz von Bedeutung. Hinzu kommen weitere Nichtlinearitäten, z. B. der Hydraulik.

<sup>5</sup>Im abgedruckten Bild wurde die Beschriftung gegenüber dem Original korrigiert.

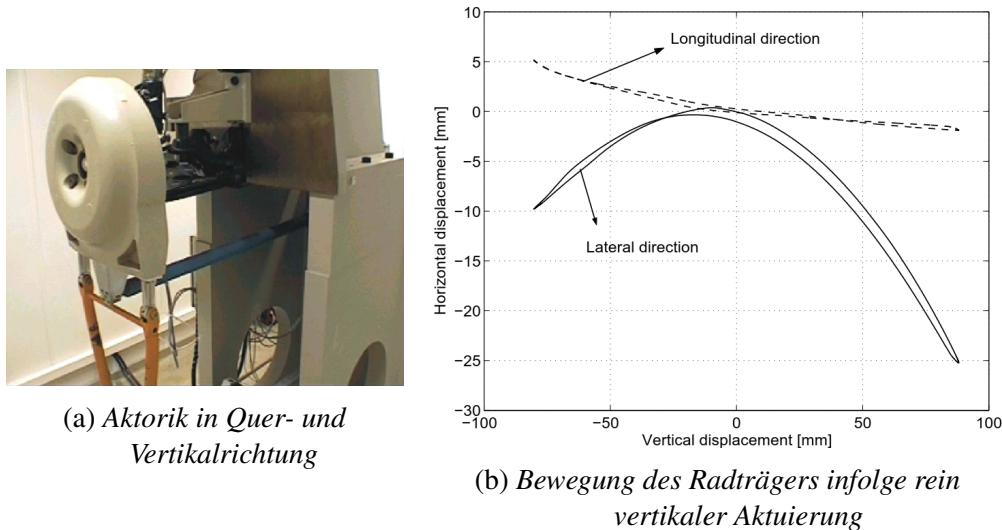


Bild 2-6: Kinematische Verkopplung der Aktorik bei dem Prüfsystem aus [Cuy06]

Die Nichtlinearitäten sind also im Frequenzbereich bis 20 Hz am ausgeprägtesten. Das ist auch der Frequenzbereich, in dem praktisch Konvergenzprobleme beobachtet werden. Treten Konvergenzprobleme im darüberliegenden Frequenzbereich auf, ist dies meist auf Modellierungsfehler infolge unzureichender Anregung im höheren Frequenzbereich bei der Systemidentifikation zurückzuführen.

Neben den Nichtlinearitäten des Gesamtsystems aus Prüfling und Antrieb ist die Erfahrung des Durchführenden ein weiterer wesentlicher Faktor für den Zeitbedarf einer Drive-File-Generierung. Pro Achse werden vom Prototypen bis zur Serienreife ca. zehn volle Tests durchlaufen, wobei jeder Test einer Betriebsdauer von 200 000-300 000 km entspricht. Jeder Test besteht aus etwa einer Woche Drive-File-Generierung und einer Woche eigentlichem Achstest. Für die Entwicklung von Vorder- und Hinterachse eines Fahrzeugs wird daher eine Prüfstandsnutzungszeit von insgesamt 40 Wochen angegeben. Trotz dieses hohen Zeit- und damit auch Kostenaufwands wird das iterative Verfahren bei hohen Güteanforderungen in der Industrie für Betriebs- und Komfortuntersuchungen eingesetzt. Gründe hierfür sind die hohe Vergleichbarkeit der Versuche untereinander und die erfahrungsgemäß verlässlichen Ergebnisse der Untersuchungen. [Cuy06]

Die Vorteile dieser Technik bestehen darin, dass keinerlei Einschränkungen bei der Modell-invertierung vorliegen, z. B. im Falle nichtminimalphasiger Systeme oder hoher Totzeiten, und dass das Verfahren relativ einfach anzuwenden und wenig theoretischer Hintergrund (aber Erfahrung) seitens des Anwenders erforderlich ist [Cuy06]. Zudem können auch Target-Signale verwendet werden, die mit den Regelgrößen vorliegender Echtzeit-Regelungen so gut wie keinen Zusammenhang besitzen [Plu07].

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Achsprüfstände in der Industrie aufgrund der hohen Nichtlinearität von Prüfling und Prüfsystem, der Verkopplung der Bewegungsfreiheitsgrade sowie der unzulänglichen Systemmodellierung mit dem beschriebenen Iterationsverfahren und nicht mit einer Regelung betrieben werden. Auch die hohen Anforderungen an die Güte und die Systembandbreite erschweren die Umsetzung einer solchen Regelung. Hinzu kommt, dass in der Praxis viele verschiedene Target-Signale gleichzeitig verfolgt werden.

Der hohe Zeitbedarf der Achsprüfung hat einige wissenschaftliche Arbeiten motiviert, bei denen versucht wird, die Konvergenzgeschwindigkeit des TWR-Algorithmus unter Beibehaltung oder Verbesserung der Abbildungsgüte zu erhöhen. Der nächste Abschnitt gibt eine Übersicht über die verschiedenen Ansätze. Darüber hinaus gibt es weitere Maßnahmen, mit denen versucht wird, auf anderem Wege den geschilderten, zeitaufwändigen Gesamtprozess in der Komfort- und Betriebsfestigkeitsuntersuchung zu optimieren. Eine Auswahl dieser Maßnahmen fasst Abschnitt 2.1.4 zusammen.

### 2.1.3 Maßnahmen zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit

Ein möglicher Ansatz zur Beschleunigung des Iterationsprozesses besteht in der Verbesserung des Streckenmodells  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Die Qualität des Streckenmodells ist in hohem Maße von den für die Identifikation eingesetzten Anregungssignalen abhängig. Folglich gibt es Arbeiten, die sich mit der automatisierten Optimierung dieser Signale beschäftigen [KNW99] oder allgemein deren Auswahl diskutieren [GPC10; CTVP14]. In der industriellen Praxis ist die Verwendung von FRF-Matrizen für die Beschreibung des Systemverhaltens etabliert. Einige Quellen untersuchen anstelle dieser Frequenzbereichsmodelle auch Zustandsraummodelle im Zeitbereich, siehe z. B. [Raa97; RW98; CV02]. Als Vorteile dieser Methode wird genannt, dass kürzere Messungen für die Identifikation dieser Modelle notwendig sind und dass eine Adaptierung des Modells im Ablauf der Iteration möglich ist. Außerdem fallen die bekannten Probleme der Frequenzbereichsmethodik mit Offsets und niedrigen Frequenzen weg. In [Raa97; RW98] werden MISO-ARX-Modelle für jeden Übertragungspfad gebildet, in ein zeitdiskretes Zustandsraummodell überführt und in dieser Form für die Drive-File-Generierung verwendet. Bei dem Beispielsystem in [Raa97] sind mit dem Zustandsraummodell weniger Iterationen erforderlich, um gegebene Target-Signale nachzubilden. Es handelt sich um einen Komponentenprüfstand für Halterungen aus Stahl, mit denen Treibstofftanks am Fahrzeug befestigt werden. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist auch bei dem Beispiel in [CV02], einem Prüfstand für Fahrzeugsitze, etwas besser als bei der etablierten FRF-Methodik. Kommerziell am erfolgreichsten ist eine Erweiterung von Adaptive Inverse Control [WW08], bei der ein FIR-Filter für das inverse Streckenmodell verwendet wird [Plu07]. Es existieren auch Arbeiten, in denen die Modellstruktur untersucht wird. Beispielsweise werden in [MVE16] drei verschiedene Zeitbereichsmodelle für das Ein-/Ausgangsverhalten genannt, wobei zwei davon die Aktoerverkopplung berücksichtigen. Zwar ist die Identifikation dieser zwei Modelle mit einem höheren Rechenaufwand verbunden, Prüfstandsergebnisse von einem Halbachsprüfstand zeigen jedoch, dass hierdurch die Zahl der notwendigen Iterationen reduziert werden kann. Eine weitere Möglichkeit zur Steigerung der Modellgüte besteht darin, das Streckenmodell  $\mathbf{G}(j\omega)$  im laufenden Iterationsprozess zu adaptieren. Ein solcher Ansatz wird in [CTVP13] aufgezeigt. Dort wird  $\mathbf{G}(j\omega)$  durch eine diagonale Übertragungsmatrix modifiziert, die aus dem Vergleich von prädizierten und realen Systemantworten oder -eingängen hervorgeht. Simulationen an einem MKS-Achsprüfstandsmodell zeigen die Funktionsfähigkeit des Ansatzes. Im vorliegenden Beispiel wird eine stabile Iteration erreicht, wohingegen der klassische Iterationsalgorithmus divergiert. In [CCLD99] wird hingegen ein gewichtetes Modell aus dem vorab identifizierten und einem nach der ersten Iteration gebildeten Modell verwendet, bei dem versucht wird, die Kreuzkorrelation zwischen den Eingängen

durch Phasenverschiebungen gering zu halten und so der Anforderung nach unkorrelierten Eingängen gerecht zu werden.

Neben der Verbesserung des Streckenmodells  $\mathbf{G}(j\omega)$  ist auch die Modifikation des TWR-Algorithmus selbst möglich. Beispielsweise wird der Algorithmus nach (2-14) in [SVS08] für nichtlineare Streckenmodelle angepasst. In dieser Quelle wird ein spezielles nichtlineares Streckenmodell mit einem linearen und einem nichtlinearen Anteil definiert und ein geeigneter Identifikationsansatz beschrieben. Hier wird anstelle der Invertierung des Streckenmodells für die Ermittlung der Drive-Signale der nächsten Iteration ein Optimierungsproblem formuliert, das mit dem Newton-Verfahren gelöst wird. Verglichen mit dem linearen Ansatz nach (2-14) wird an einem Viertelfahrzeugprüfstand eine schnellere Konvergenzgeschwindigkeit und eine höhere Abbildungsgüte erzielt. Der Ansatz wird in [XZZ13] aufgegriffen, wobei die Modellinvertierung dort mithilfe eines Gauß-Newton-Verfahrens mit Nebenbedingungen erfolgt. Das Vorgehen wird an einem 10-FHG-Modell der Fahrzeugvertikaldynamik validiert. Eine weitere nichtlineare Adaptierung des TWR-Algorithmus, die ebenfalls auf einer Aufteilung des Systemverhaltens in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil beruht, findet sich in [RH06; HR07]. Die Validität des Algorithmus wurde bislang nur an Simulationen gezeigt. In [ME17] wird der TWR-Algorithmus so modifiziert, dass zwischen den Iterationen am Prüfstand die Drive-Signale an Simulationsmodellen des Ein-/Ausgangsverhaltens iteriert werden und erst nach Erfüllen eines Gütekriteriums auf dem Prüfstand eingesetzt werden. Tests an einem Halbachsprüfstand zeigen kürzere Konvergenzzeiten gegenüber dem etablierten Vorgehen bei monoton abnehmender Abweichung zwischen Target- und Response-Signal.

Als weitere Möglichkeit zur Verringerung des Zeitbedarfs für die Target-Simulation wird in einigen Quellen der TWR-Algorithmus um eine Regelung unter Echtzeitbedingungen erweitert. Dieser Ansatz wurde vor allem an der KU Leuven verfolgt. Beispielsweise entwickeln und vergleichen Vaes, Swevers und Sas [VSS05] drei verschiedene MISO-Regler für die Nachbildung zweier gemessener Beschleunigungen eines Fahrzeuggrades (Quer- und Vertikalrichtung) mithilfe eines hydraulischen Shakersystems: der erste Regler besteht aus auf Basis der Diagonalelemente des Systems unabhängig entworfenen SISO-Reglern. Der zweite Regler ist ein  $\mathcal{H}_\infty$ -Regler, der anhand des vollständigen MIMO-Modells des Systems synthetisiert wurde. Bei dem dritten Regler wird die Verkopplung des Systems durch einen Kompensationsterm aufgehoben und einzelne Regler für die entkoppelten Richtungen entworfen. Während die beiden erstgenannten Regler eine unzureichende Performance aufweisen, kann der Regler mit Kompensation der Systemverkopplungen die Abweichung zwischen Target- und Response-Signal deutlich reduzieren. Vergleichbare Versuche werden in [VSSS05] an einem vereinfachten Halbfahrzeugprüfstand durchgeführt, wobei die Beschleunigung der linken und der rechten Seite der Aufbaumasse die Zielgröße darstellt. Ein nach der  $\mu$ -Synthese entworfener MIMO-Regler wird dort mit einem Regler verglichen, bei dem durch Lösung eines nichtkonvexen Optimierungsproblems eine näherungsweise Entkopplung des Ein-/Ausgangsverhaltens erreicht wird. Für die entkoppelten Richtungen wird jeweils ein SISO- $\mathcal{H}_\infty$ -Regler entworfen. Bei dem betrachteten Beispielsystem wird die Leistungsfähigkeit der beiden Regler als vergleichbar beurteilt, wobei die Einfachheit des zweitgenannten Reglerentwurfs im Vergleich zum ersten betont wird. Gegenüber der alleinigen Verwendung des TWR-Algorithmus kann die Anzahl der Iterationen von 12 auf 3 reduziert werden. In [Cuy06] werden ebenfalls drei verschiedene Ansätze zur Erweiterung des Algorithmus um eine Echtzeit-Regelung untersucht. Sie unter-

scheiden sich zum einen dadurch, ob die Eingriffe der Offline-Iteration vor oder nach dem Echtzeit-Regler aufgeschaltet werden und ob die Offline-Iteration auf Basis des invertierten Modells des offenen oder des geschlossenen Regelkreises erfolgt. Auch hier wird an einem Halbachsprüfstand mit zwei FHG eine Beschleunigung der Target-Simulation erreicht. Weitere Veröffentlichungen der Forschergruppe auf diesem Themengebiet existieren, siehe z. B. [CVD<sup>+</sup>02; CVS03]. Ein weiterer MIMO-Regler wird in [KWU09; KWSU09; KWU11] für einen Fahrzeugvibrationsprüfstand mit vier elektromechanischen Shaker als Anregungseinheiten entwickelt. Gegenüber der klassischen Vierstempelanlage, bei der die Reifen mit servohydraulischen Aktoren angeregt werden, sind diese Shaker direkt mit dem Fahrzeugaufbau verbunden. Ziel ist die Nachbildung von im Fahrversuch gemessenen Beschleunigungen. Anlass für den Entwurf eines MIMO-Reglers ist hier die Instabilität und hohe Verkopplung des Systems bei Verwendung von SISO-PID-Reglern. Für die Shaker wird anhand eines Zustandsraummodells 22. Ordnung ein Entkopplungsregler nach Falb und Wolovich [FW67] entworfen. Verbliebene Unzulänglichkeiten bei der Nachbildung der Target-Signale werden durch einen TWR-Algorithmus korrigiert. Die Einbeziehung einer Echtzeit-Regelung ermöglicht, dass zeitliche Änderungen des Prüflingsverhaltens z. B. infolge Alterung nicht zwangsläufig eine erneute Iteration erfordern. Je nach Ausmaß können auch andere Störeinflüsse durch den Regler unter Beibehalten der generierten Drive-Files ausgeglichen werden.

Der nächste logische Schritt nach der Kombination einer Echtzeit-Regelung mit dem iterativen Verfahren ist das Ersetzen des TWR-Algorithmus durch eine Regelung und Vorsteuerung ohne Offline-Iteration. Ein solcher Ansatz wird in [MP97; MFC98] verfolgt. Dort wird für einen einfachen, eindimensionalen Viertelfahrzeugprüfstand eine Vorsteuerung und Regelung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur nach dem  $\mathcal{H}_\infty$ -Konzept entworfen und anhand von Simulationen validiert. Beispiele für komplexere Anwendungen liegen nicht vor.

Zu den recherchierten Echtzeit-Regelungen bleibt abschließend festzuhalten, dass es sich durchweg um lineare Regler handelt, die alle auf Basis einer linearen Approximation des Übertragungsverhaltens  $G(j\omega)$ , vgl. (2-10), entworfen wurden. Diese wird dem tatsächlichen Übertragungsverhalten (2-2) eines realen Prüfstands, insb. eines Achsprüfstands, nur sehr begrenzt gerecht. Die Verwendung nichtlinearer Streckenmodelle und nichtlinearer Regelungsentwurfsmethoden dürfte die Leistungsfähigkeit der Echtzeit-Regelungen erheblich erhöhen.

Plummer [Plu07] bewertet die Versuche der Echtzeit-Regelung unter expliziter Nennung der Quellen [CVD<sup>+</sup>02; CVS03; VSS05] sinngemäß so, dass die Ansätze zwar einen sichtbaren Erfolg aufweisen, der damit verbundene hohe Zeitaufwand für die komplizierte Streckenmodellierung und die Wahl erforderlicher Gewichtungen den Einsatz der Verfahren in der industriellen Praxis aber unwahrscheinlich machen. Folglich werde das etablierte iterative Vorgehen der Echtzeit-Regelung vorgezogen, da die üblicherweise verwendeten Target-Signale sehr stark vom dynamischen Verhalten des Prüflings beeinflusst werden, das typischerweise nichtlinear und von höherer Ordnung ist. Dennoch gebe es genug Anlass, die Echtzeit-Regelungen weiterzuverfolgen. So sei es nur mit ihnen möglich, zeitveränderliches Bauteilverhalten im Rahmen der Prüfung zu kompensieren. Außerdem würde es die Arbeit des Anwenders vereinfachen. Durch den gänzlichen Wegfall des Iterationsprozesses würde sich der Nutzen entsprechender Prüfstände, z. B. durch die Möglichkeit zur Durchführung von Model-in-the-Loop (MiL)-Simulationen, deutlich erhöhen. Hierfür sei

eine Weiterentwicklung der eingesetzten Antriebe unabdingbar. Seiner Einschätzung nach sind speziell für die Regelung von Beanspruchungen Regelungsverfahren erforderlich, bei denen durch Einsatz von Systemwissen eine Vorsteuerung des Prüflingsverhaltens durchgeführt wird. Er stellt allerdings in Frage, ob dies angesichts des in der Regel komplexen und unsicheren Prüflingverhaltens möglich ist.

#### 2.1.4 Weitere Maßnahmen zur Verbesserung des Prozesses

Abgesehen von den zuvor dargestellten Methoden zur Verbesserung bzw. Erweiterung des TWR-Algorithmus bestehen weitere Möglichkeiten, den hohen Zeitbedarf der Betriebsfestigkeitsversuche zu reduzieren und damit z. B. die Entwicklungszeit einer Achse zu verringern. Dieser Abschnitt geht kurz auf einige dieser Ansätze ein.

Eine Möglichkeit besteht darin, auf einen Teil der erforderlichen Fahrversuche zugunsten von synthetisch generierten Target-Signalen zu verzichten. Beispielsweise werden in [BLOO05; BMK<sup>+</sup>09; Bur14] aus den im Fahrversuch mit einer Fahrzeugvariante gemessenen Radkräften und -momenten anhand von Modellen des Fahrzeugs die Straßenanregungen zurückberechnet. Aus den Straßenanregungen, die von der spezifischen Fahrzeugvariante unabhängig sind, werden die Radkräfte und -momente für andere Fahrzeugvarianten berechnet. Mit den so ermittelten Target-Signalen können ohne neue Messfahrten Prüfstandsversuche oder numerische Betriebsfestigkeitsuntersuchungen durchgeführt werden. Der in [BLOO05; BMK<sup>+</sup>09] vorgestellte Ansatz stellt eine Abwandlung des TWR-Algorithmus zur Drive-File-Generierung dar und wird von den Autoren als *hybrid road approach* bezeichnet. Ein ähnlicher Ansatz wird in [TDPC11] verfolgt: dort werden anstelle der Straßenanregungen die Verschiebungen des Radträgers aus gemessenen Radkräften und -momenten an einem MKS-Modell mithilfe des TWR-Algorithmus bestimmt. Auch der komplett Verzicht auf Target-Signale aus dem Fahrversuch wurde untersucht: in [WOL09] werden die Betriebslasten gänzlich virtuell ermittelt. Als Vorteile werden die hohe Reproduzierbarkeit und die gleichbleibende Qualität der ermittelten Betriebslasten genannt. Insbesondere kann durch den Wegfall der Messfahrten die Betriebsfestigkeitsprüfung einer Komponente vor Fertigstellung eines Gesamtsystemprototypen beginnen. Es wird angegeben, dass sich die Versuchsdauer durch dieses Vorgehen um mindestens 30 % reduziert habe und die Prüfstandsversuche im typischen Entwicklungsprozess sechs Wochen früher durchgeführt werden können.

Eine strukturelle Änderung des betrachteten Testsystems wird in [JA15] durch das Hinzufügen passiver Elemente, wie z. B. Federn, vorgenommen. Dadurch wird eine bessere Steuerbarkeit und eine Reduktion der erforderlichen, zum Teil hohen Aktorkräfte zur Erzielung gegebener Target-Signale erreicht. Die passiven Elemente werden dabei anhand von Finite Elemente (FE)-Simulationen und der Lösung einer Mehrzieloptimierung mittels genetischer Algorithmen parametrisiert. Als ein Nachteil der Methode wird das Auftreten von Spannungskonzentrationen an den Verbindungsstellen der passiven Elemente genannt.

Auch die Überarbeitung des Aktorikkonzepts stellt eine Möglichkeit zur Verbesserung des gesamten Prozesses dar. Beispielsweise fiel im Jahr 2004 bei der Volkswagen AG die Entscheidung für den Aufbau eines hexapodbasierten Achsprüfstands [DSB09]. Bild 2-7 zeigt sowohl ein Bild eines MKS-Modells des Prüfstands sowie ein Foto des aufgebauten Systems.

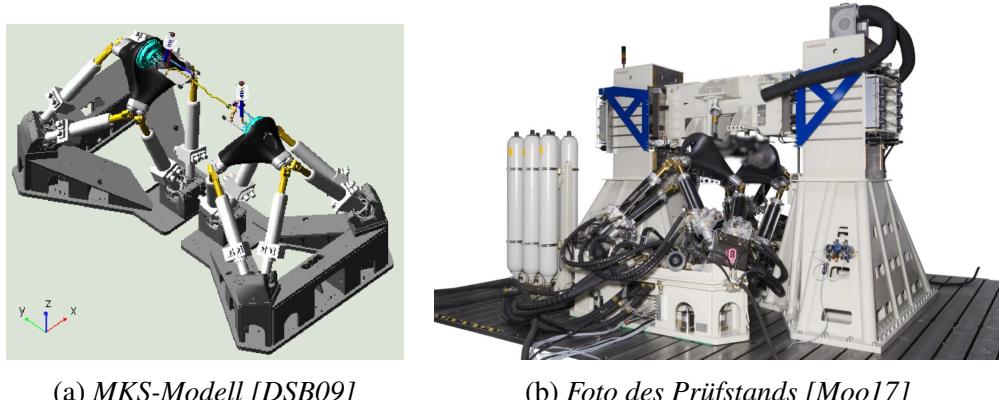


Bild 2-7: Hexapod-Achsprüfstand der Volkswagen AG

Für den Prüfstand wurde ein umfangreiches MKS-Modell in ADAMS/Car implementiert, anhand dessen die Konstruktion der eingesetzten Hexapoden optimiert wurde. Dabei wurde durch die Simulation verschiedener Target-Signale von unterschiedlichen Hexapodkonfigurationen diejenige ausgewählt, bei der die erforderlichen Aktorkräfte möglichst gering waren. Das MKS-Modell ist außerdem zur Vorbereitung von Tests auf dem realen System gedacht. Es enthält neben den MKS-Modellen der Radaufhängung und der Hexapoden auch Modelle der iterativen Prüfstandsregelung und der Hydraulik [SD08; DSB09].

An diesem System wird eine Abbildung gegebener Target-Signale bis 80 Hz angestrebt. Zu erzielten Ergebnissen am Prüfstand und dem Verbleib des Systems existieren keine Veröffentlichungen.

Das genannte System weist einige Unterschiede zum Hexapod des HNI auf. Neben der äußereren Gestalt sowie den physikalischen Eigenschaften unterscheidet sich auch die topologische Struktur von der des HNI-Hexapod. So sind bei diesem System nicht nur am unteren, sondern auch am oberen Ende der Zylinderstangen Kardangelenke verbaut.

## 2.2 Kraft- und Interaktionsregelung und Anwendung bei Parallelkinematiken

Dieses Unterkapitel betrachtet die (Kraft-) Regelungsverfahren, die dem Fachgebiet der Robotik entstammen. Der erste Abschnitt stellt eine Einführung dar und führt in die notwendigen Grundlagen zum Thema ein. Außerdem erfolgt ein kurzer Rückblick über die vor dieser Dissertation durchgeführten Arbeiten am betrachteten System. Daran schließen sich zwei Unterabschnitte zu den beiden Kraftregelungsansätzen an, zwischen denen in der Robotik grundsätzlich unterschieden wird: der indirekten und der direkten Kraftregelung. Diese Unterabschnitte enthalten einen Überblick über eine recht große Zahl von Verfahren, wobei jeweils der Kerngedanke dargelegt wird. Da die Thematik der Kraftregelung von Manipulatoren insb. in Folge der Veröffentlichungen von Whitney [Whi77], Salisbury [Sal80], Mason [Mas81], Raibert und Craig [RC81] sowie Hogan [Hog85] hohe Aufmerksamkeit genoss, gehen einige der genannten Verfahren auf Veröffentlichungen zurück, die einige Zeit zurückliegen. Neuere Quellen finden sich in Abschnitt 2.2.4, in dem Anwendungsbeispiele dieser Verfahren speziell für PKM zusammengestellt sind.

### 2.2.1 Einführung

PKM werden - neben der bereits genannten Anwendung als MAST-Systeme sowie als Aktorik in einem Achsprüfstand bei Volkswagen - vor allem als Werkzeugmaschinen eingesetzt. Außerdem haben sie sich als Bewegungsplattform für Fahr- und Flugsimulatoren durchgesetzt. Bild 2-8 zeigt entsprechende Beispielsysteme. Vereinzelt ist auch die (mindestens geplante) Verwendung von Hexapoden als Werkzeug- und Materialprüfmaschinen dokumentiert, vgl. Abschnitt 2.2.4. Einen umfassenderen Überblick über die Anwendungsgebiete von PKM liefern die Grundlagenwerke [Neu06; Mer06].



(a) *ABB IRB 360 FlexPicker [ABB17]*



(b) *Fahrtsimulator der Daimler AG [Dai17]*

*Bild 2-8: Parallelkinematische Manipulatoren in der Anwendung (Beispiele)*

Im Rahmen dieser Einführung erfolgt zunächst eine Abgrenzung von PKM und SKM. Je ein Beispielsystem mit  $f = 3$  FHG zeigt Bild 2-9. Darin bezeichnet  $\mathbf{q}$  die sog. Antriebs- oder **Gelenkkoordinaten** (engl. joint space coordinates), d. h. die Verschiebungen und Verdrehungen der einzelnen Aktoren. Neben den Gelenkkoordinaten gibt es die sog. **Aufgabenkoordinaten**  $\mathbf{z}$  (engl. operational bzw. task space coordinates). Je nach Anzahl der FHG des Manipulators bezeichnen sie die Position und/oder Orientierung, im Folgenden auch *Pose*, des Endeffektors bzw. dessen **Tool Center Point (TCP)** im Arbeitsraum. Die eigentliche Aufgabe des Manipulators wird in der Regel in den Aufgabenkoordinaten  $\mathbf{z}$  definiert. In Bild 2-9 bezeichnen außerdem:  $I$  das Inertialsystem,  $O$  den Ursprung von  $I$ ,  $E$  das endeffektorfeste Koordinatensystem sowie  $T$  den TCP.

Bei dem SKM stellen die einzelnen Bewegungssachsen bzw. die Aktoren eine Abfolge dar. Jede Achse ergänzt den gesamten Mechanismus um einen weiteren FHG. Die Gesamtzahl der Verschiebungen und Verdrehungen der Gelenke, ausgedrückt durch  $\mathbf{q}$ , führt zu einer Bewegung des Endeffektors. Im Falle des SKM handelt es sich um eine offene kinematische Kette, wobei sich die Gelenkkoordinaten als generalisierte Koordinaten bei Herleitung der Bewegungsgleichungen verwenden lassen. Die Bewegungsgleichungen für SKM lauten unter Vernachlässigung von Reibung allgemein

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_q - \mathbf{J}_g^T(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2-16)$$

Für eine kurze Einführung in die Mehrkörperdynamik sei an dieser Stelle auf Anhang A1 hingewiesen. Zusätzlich skizziert Anhang A2 das Aufstellen von Bewegungsgleichungen mithilfe des Prinzips von Jourdain, wobei auch auf die Bedeutung der Terme auf der linken Seite von (2-16) eingegangen wird. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen

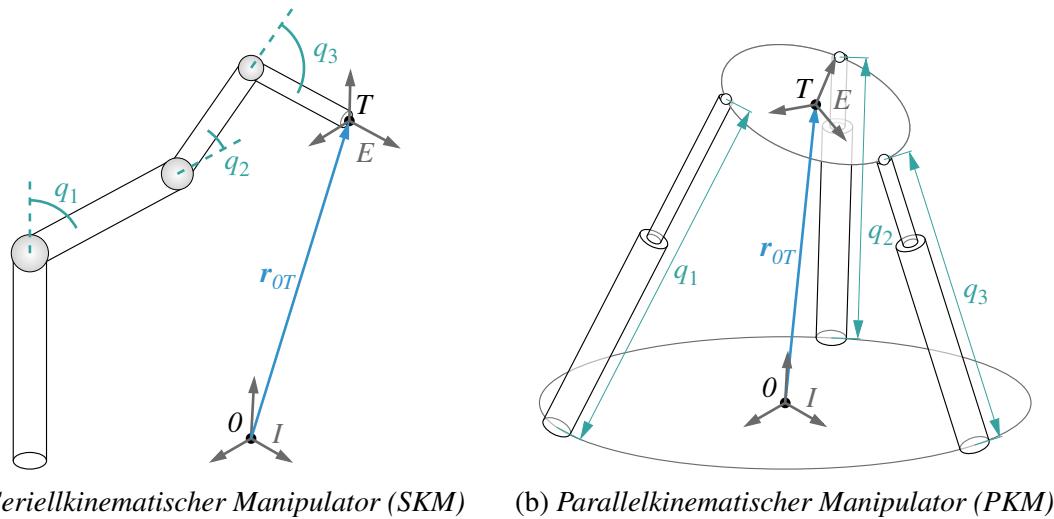


Bild 2-9: Vergleich von serieller und paralleler Kinematik

die Aktorkräfte und/oder -momente  $\mathbf{F}_q$ , die die eigentliche Eingangsgröße in das System darstellen, sowie die Kontaktkräfte und/oder -momente zur Umgebung  $\tau$ . Die Kontaktkräfte und -momente liegen in Aufgabenkoordinaten vor und müssen mit der sog. geometrischen Jacobimatrix  $\mathbf{J}_g$  in die Gelenkkoordinaten überführt werden.

Im Gegensatz zum SKM greifen bei einem PKM, vgl. Bild 2-9b, alle Bewegungsachsen direkt am Endeffektor an. Hier liegt eine geschlossene kinematische Kette vor. Die Bewegungsgleichungen bestimmter PKM mit sechs FHG, auf die sich die nachfolgenden Ausführungen beziehen und zu denen auch der Hexapod zählt, lauten allgemein

$$\mathbf{M}_v(z) \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_v(z, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v(z) = \mathbf{J}_g^{-T}(z) \cdot \mathbf{F}_q - \boldsymbol{\tau}, \quad (2-17)$$

wobei hier die Antriebskräfte und -momente  $\mathbf{F}_q$  mithilfe der geometrischen Jacobimatrix  $\mathbf{J}_g$  in Aufgabenkoordinaten umgerechnet werden müssen. Verglichen mit (2-16) wurde an dieser Stelle bewusst zwischen den zeitlichen Ableitungen  $\dot{z}$  und  $\ddot{z}$  und den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und Beschleunigungen  $\dot{\mathbf{v}}$  unterschieden. Die Identitäten  $\mathbf{v} = \dot{z}$  und  $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{z}$  sind für die Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen allgemein nicht gegeben. Dies gilt auch für den in dieser Dissertation betrachteten PKM mit sechs FHG. Je nach Wahl der Beschreibungsweise für die Orientierung des Endeffektors (z. B. Kardan- oder Eulerwinkel, Einheitsquaternionen), existiert eine Umrechnungsvorschrift für die betreffenden Größen. Die spezifische Umsetzung im vorliegenden Fall wird im Detail in Kapitel 4 beschrieben. Infolge der genannten Problematik ergibt sich für die Bewegungsgleichungen bei Durchführung der Herleitung nach Abschnitt A2 von (2-17) abweichend die Darstellung

$$\mathbf{M}(z) \cdot \ddot{z} + \mathbf{C}(z, \dot{z}) \cdot \dot{z} + \mathbf{g}(z) = \mathbf{J}_a^{-T}(z) \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{H}^T(z) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2-18)$$

mit der sog. analytischen Jacobimatrix  $\mathbf{J}_a$  und der an dieser Stelle nicht näher spezifizierten Umrechnungsmatrix  $\mathbf{H}^T$  für die Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$ .

Über SKM und PKM hinaus gibt es hybride Kinematiken, bei denen beide Konzepte in einem Mechanismus kombiniert werden. Häufig wird ein SKM mit großem Arbeitsraum mit einem (kinematisch darauf folgenden) verhältnismäßig kleinen PKM kombiniert, der den Endeffektor des gesamten Mechanismus trägt, siehe z. B. [MSH<sup>+</sup>17].

Je nachdem, ob ein SKM oder ein PKM betrachtet wird, ist die Umrechnung zwischen den Gelenk- und den Aufgabenkoordinaten in die eine oder andere Richtung (bis auf wenige Ausnahmen bei einfachen Systemen) nicht eindeutig. Die Berechnung der Aufgabenkoordinaten  $z$  aus den Gelenkkoordinaten  $q$ , die Lösung der sog. *direkten Kinematik* (engl. direct bzw. forward kinematics), ist im Falle eines SKM mithilfe linearer Algebra einfach möglich. Das gleiche gilt im Falle eines PKM für die *indirekte Kinematik* (engl. indirect bzw. inverse kinematics), d. h. die Umrechnung der Aufgabenkoordinaten  $z$  in die Gelenkkoordinaten  $q$ . Die jeweils umgekehrte Richtung ist nicht eindeutig lösbar. Bei einem PKM gibt es damit für einen gegebenen Satz gemessener Gelenkkoordinaten  $q$  ohne weitere Information mehrere mögliche Endeffektorposen bzw. Aufgabenkoordinaten  $z$ . Diese Problematik wird in der Fachliteratur auch als **direktes kinematisches Problem (DKP)** bezeichnet.

Für eine 6-UPS-Plattform<sup>6</sup>, wie bei dem Hexapod des HNI gibt es laut Merlet [Mer06] im Allgemeinen maximal 40 reelle oder komplexe Lösungen für das DKP. Der Beweis hierfür wurde im Jahr 1992 von Ronga und Vust erbracht [RV95]. Für eine allgemeine Stewart-Plattform (d. h. die Koppelpunkte der Aktoren sind weitgehend beliebig auf dem Endeffektor verteilt) konnte Dietmaier im Jahr 1998 ein Beispiel für einen Satz von Gelenkkoordinaten  $q$  herleiten, bei dem 40 reelle Lösungen vorliegen [Die98]. Dabei handelt es sich natürlich um einen konstruierten Sonderfall. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass bei bestimmten geometrischen Besonderheiten weniger als 40 Lösungen existieren. Hierunter fallen bspw. spezielle Formen der Bodenkonstruktion sowie des Endeffektors und deren relative Orientierung in der Konstruktionslage. Es gibt eine sehr hohe Zahl an Arbeiten, die sich mit der Ermittlung des minimalen Gleichungssatzes zur Lösung des DKP und der Anzahl an Lösungen für bestimmte Sonderformen der Stewart-Plattform und PKM im Allgemeinen beschäftigen. Beim HNI-Hexapod liegen sämtliche Gelenkpunkte der Bodenkonstruktion sowie sämtliche Gelenkpunkte der Endeffektorplattform auf Ebenen; in diesem Fall liegen maximal 36 reelle Lösungen vor, siehe [HE01]. Ob weitere Besonderheiten und damit noch weniger Lösungen vorliegen, wäre ein interessanter Anknüpfungspunkt für weitere Untersuchungen.

Als Abhilfemaßnahmen für die Lösung der Problematik nennt Merlet [Mer06] die Anbringung zusätzlicher Sensorik sowie die numerische Lösung des DKP mithilfe iterativer Verfahren, z. B. dem Newton-Raphson-Verfahren oder der Intervallanalyse. Die numerischen Lösungen haben einige Nachteile. Beispielsweise ist nicht sichergestellt, dass numerisch unter der Vielzahl möglicher Lösungen die korrekte gefunden wird, auch dann nicht, wenn der Startpunkt der Iteration sehr nah bei der korrekten Lösung liegt. Außerdem sind die Ergebnisse verfahrensbedingt stark verrauscht. Für das Zielsystem wurde das DKP durch Einsatz eines Zustandsbeobachters umgangen [Kno17]. Der Zustand des Hexapod enthält u. a. die Aufgabenkoordinaten  $z$ . Auf Basis der gemessenen Gelenkkoordinaten  $q$  sowie der bekannten Systemeingangsgröße  $\mathbf{u} = \mathbf{F}_q$  (eigentlich: der gemessenen Zylinderdifferenzdrücke  $\Delta p$ ) kann mithilfe des Streckenmodells nach (2-18) der aktuelle Systemzustand und damit die Aufgabenkoordinaten  $z$  sowie deren zeitliche Ableitung  $\dot{z}$  rekonstruiert werden. Aus ihnen lassen sich auch die Verschiebungsgeschwindigkeiten der einzelnen Aktoren  $\dot{q}$  rekonstruieren. Zur Zustandsbeobachtung wurde sowohl ein hierarchischer Sliding Mode Beobachter nach Drakunov [DR11] als auch ein Kalman-Filter mit

<sup>6</sup>Gelenkabfolge jedes einzelnen Aktors: Kardangelenk (engl. universal joint), Schubgelenk (engl. prismatic joint), Kugelgelenk (engl. spherical joint), vgl. auch S. 2.

konstanter Beobachtermatrix implementiert. Die ersten Arbeiten zu diesem Thema gehen auf die Masterarbeit von Simon Olma [OF13] zurück. Für Details zu diesem Thema sei an dieser Stelle auch auf [FOT14] verwiesen.

Zur Positionsregelung des TCP eines PKM kommen sowohl Regelungen im Operational Space (OS), d. h. in den Aufgabenkoordinaten  $z$ , als auch Regelungen im Joint Space (JS), d. h. in den Gelenkkoordinaten  $q$ , in Frage. In beiden Fällen liegt die durchzuführende Bewegung in Form der Soll-Zeitverläufe der Aufgabenkoordinaten  $z_r$  vor. Bei einer Regelung im JS werden diese in Soll-Zeitverläufe für die Gelenkkoordinaten  $q_r$  umgerechnet. Die Regelung erfolgt dann in diesen Größen, wobei dies bei einem Hexapod die Längen der einzelnen Zylinder sind. Durch diese Vorgehensweise entfällt die Notwendigkeit der Lösung des DPK. Im Gegensatz dazu erfolgt bei einer Regelung im OS ein Soll-/Ist-Vergleich direkt in den Aufgabenkoordinaten  $z$ . Um eine solche Regelung realisieren zu können, müssen die Systemzustände zur Laufzeit über einen Beobachter rekonstruiert werden. Wird auf die Implementierung eines Beobachters verzichtet, muss das DPK zur Laufzeit numerisch gelöst werden, wobei die oben genannten Nachteile bestehen. Bild 2-10 zeigt einen schematischen Vergleich der beiden Ansätze, wobei für die Regelung im OS die beobachterbasierte Lösung dargestellt ist.  $\hat{z}$  stellt eine Rekonstruktion der typischerweise nicht als Messgröße vorliegenden Aufgabenkoordinaten  $z$  dar.

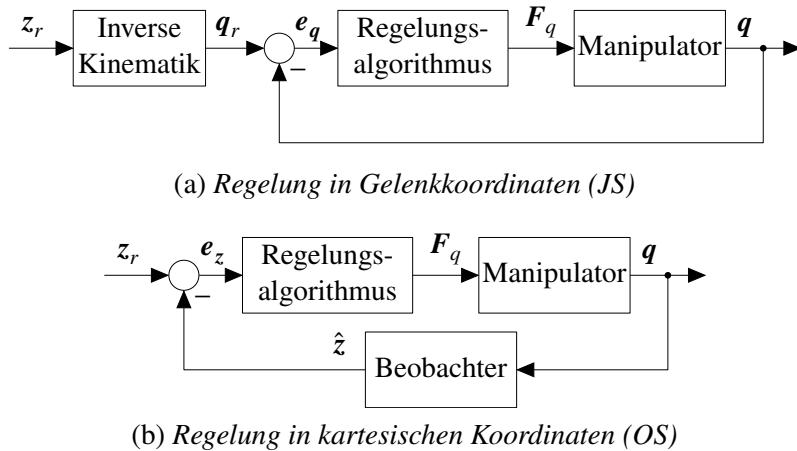


Bild 2-10: Vergleich der grundlegenden Positionsregelungsansätze für PKM

Zwar sind die Regelungen im JS durch das Umgehen des DPK einfacher umzusetzen, Paccot, Andreff und Martinet [PAM09] sehen Regelungen im OS jedoch als geeigneter für hochdynamische Anwendungen an. Sowohl für die Regelung im JS als auch die Regelung im OS erfolgt ein Regelungsentwurf nach oder ähnlich zur exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (siehe auch Anhang A3 für die theoretischen Grundlagen). Für die Regelung im OS folgt durch Anwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung nach Abschnitt A3 mit der Ausgangsgröße  $y = z$  bei  $\tau = \mathbf{0}$ , dass die Differenzordnung jedes Ausgangs  $\delta_i = 2$  beträgt. Der totale relative Grad entspricht der Systemordnung, d. h.  $\delta = n$ . Das System ist demnach für  $\tau = \mathbf{0}$ , d. h. in Abwesenheit eines Umgebungskontakts, exakt Zustandslinearisierbar. Wird  $\tau$  wie in der Literatur üblich als ideal mess- und kompensierbare Größe betrachtet, so folgen die Aktorkräfte

$$\mathbf{F}_q = \hat{\mathbf{J}}_a^T(\hat{z}) \cdot (\hat{\mathbf{M}}(\hat{z}) \cdot \mathbf{u}_p + \hat{\mathbf{C}}(\hat{z}, \dot{\hat{z}}) \cdot \dot{\hat{z}} + \hat{\mathbf{g}}(\hat{z}) + \hat{\mathbf{H}}^T(\hat{z}) \cdot \tau), \quad (2-19)$$

wobei  $\hat{\Delta}$  einen geschätzten bzw. beobachteten Wert oder eine aus solchen Werten berechnete Größe kennzeichnet. In den folgenden Ausführungen wird auf diese Kennzeichnung zur besseren Lesbarkeit weitgehend verzichtet. Die Aktorkräfte (2-19) führen bei Einsetzen in (2-18) und

- idealer Zustandsbeobachtung ( $\hat{z} = z, \dots$ ) bzw. idealer Messung,
- idealem Regelstreckenmodell ( $\hat{\mathbf{M}}(\hat{z}) = \mathbf{M}(z), \dots$ ),
- übereinstimmenden Anfangswerten,
- vernachlässigbarer Aktordynamik sowie
- Abwesenheit von Störgrößen

zu dem linearisierten Systemverhalten

$$\mathbf{u}_p = \ddot{z}. \quad (2-20)$$

Das linearisierte System verhält sich also in jeder Richtung wie ein doppelter Integrator und die einzelnen Richtungen sind ideal entkoppelt. Aufbauend auf der neuen, linearen Eingangsgröße  $\mathbf{u}_p$  kann ein einfacher, linearer Regelungs- und Vorsteuerungsentwurf erfolgen. Als Ansatz eignet sich bspw.

$$\mathbf{u}_p = \underbrace{\ddot{z}_r}_{\text{Vorsteuerung}} + \underbrace{\mathbf{K}_D \cdot (\dot{z}_r - \dot{\hat{z}}) + \mathbf{K}_P \cdot (z_r - \hat{z})}_{\text{Regelung}} \quad (2-21)$$

mit geeigneten Regelungsverstärkungen  $\mathbf{K}_D, \mathbf{K}_P$ . Beispielsweise folgt bei Wahl von

$$\mathbf{K}_P = \omega_p^2 \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_D = 2 D_p \omega_p \cdot \mathbf{I}, \quad \omega_p = 2\pi \cdot f_{GRK,p}, \quad D_p = 1 \quad (2-22)$$

eine 6 dB-Bandbreite von  $f_{GRK,p}$  für den geschlossenen Positionsregelkreis. Bemerkenswert ist, dass der Einfluss von  $\tau$  auf den Ausgang durch (2-19) ideal aufgehoben wurde. Solange die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten werden, verhält sich das positionsgeregelte System folglich „unendlich steif“ gegenüber allen externen Belastungen, die durch die Messgröße  $\tau$  erfasst werden, siehe auch [SSVO10].

In der Dissertationsschrift von Sarah Knoop geb. Flottmeier [Kno17] wurden verschiedene flachheitsbasierte Positionsregelungen für den Hexapod ohne Umgebungskontakt unter der Zielsetzung einer möglichst hohen Regelungsbandbreite entworfen. Der Begriff der Flachheit trifft für das frei bewegte System zu. Anhand von (2-19) ist dagegen leicht ersichtlich, dass das System mit Umgebungskontakt, d. h.  $\tau \neq \mathbf{0}$ , nicht flach ist. In [Kno17] wurden sowohl Regelungen im OS als auch Regelungen im JS entworfen und am Simulationsmodell verglichen. Darüber hinaus wurde anhand von Simulationen untersucht, ob die jeweils zugrunde liegende Zustandslinearisierung, z. B. die nach (2-19), besser auf Basis der Soll- oder der Istwerte des jeweiligen Systemzustands berechnet werden sollte. Der jeweilige Ansatz wird als *Feedforward-Linearisierung* bzw. *Feedback-Linearisierung* bezeichnet. Die erste Methode wird auch als Vorwärtsentkopplung, Kraft-/Momentenvorsteuerung oder auch Nonlinear Feedforward Control, die zweite als Inverse Dynamics Control bezeichnet. Beide Varianten werden unter dem Namen Computed Torque Control zusammengefasst, vgl. [Hol07]. Ein derartiger Regelungsentwurf, der auch die Aktorwechselwirkungen berücksichtigt, wird als Centralized Control bezeichnet. Er

grenzt sich von der Einzelaktorregelung ohne Berücksichtigung der Verkopplungen, dem sog. Decentralized Control, ab. [SSVO10]

Als unterlagerte Aktorregelung wurde in [Kno17] jeweils ein Regler für den Differenzdruck  $\Delta p$  der einzelnen Hydraulikzylinder entworfen. Der geschlossene Differenzdruckregelkreis verhält sich im Kleinsignalbereich in guter Näherung wie ein Übertragungsglied dritter Ordnung mit einer 3 dB-Bandbreite von 213 Hz. Die Aktorregelung gibt die Stellsignale der hydraulischen Antriebe, die Servoventilspannungen  $u_V$ , aus und wurde ebenfalls nach Abschnitt A3 entworfen. Um zu verhindern, dass nicht stellbare Bewegungstrajektorien als Sollwerte aufgeschaltet werden, wurde in [Kno17] außerdem ein echtzeitfähiges Führungsgrößenfilter nach Hippe [Hip06] für das Zielsystem entworfen. Es filtert den gegebenen Sollgrößenverlauf und stellt sicher, dass die Stellgrößenbeschränkungen stets eingehalten werden. So wird das volle Potenzial des PKM ausgeschöpft und Windup-Effekte sowie das nur für Mehrgrößensysteme vorliegende Direktionalitätsproblem werden vermieden. Bild 2-11 stellt die resultierende Regelungsstruktur dar. In [KOF<sup>+</sup>16] wurde die Struktur um die Berücksichtigung der Kontaktkräfte und -momente zur Umgebung erweitert.

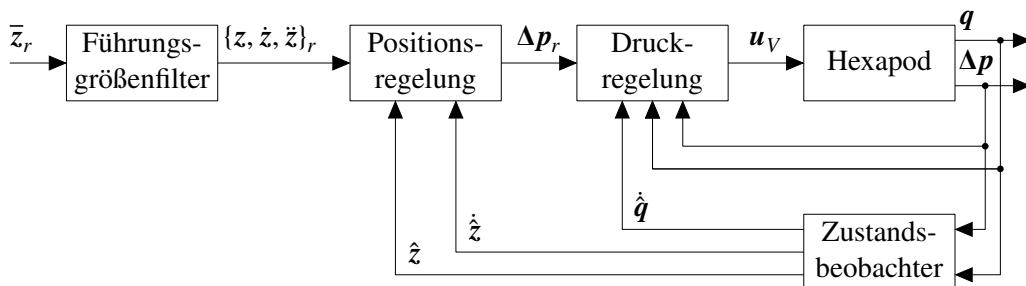


Bild 2-11: Struktur der Positionsregelung für den Hexapod ohne Umgebungskontakt, vgl. [Kno17, S. 146]

Die Hypothese der Autoren von [PAM09], dass Regelungen im OS das volle dynamische Potenzial von PKM besser ausschöpfen, konnte durch [Kno17] bestätigt werden. Außerdem stellte sich dort die Feedback-Linearisierung als bessere Variante heraus. Mithilfe der entworfenen Regelung können reproduzierbar Ergebnisse hoher Güte erzielt werden. Für die Positionsregelung wurde eine Bandbreite von bis zu 60 Hz in einzelnen FHG nachgewiesen.

Diese für den frei im Raum bewegten Hexapod entworfene Regelung ist ohne Modifikationen für den Achsprüfbetrieb, d. h. bei Umgebungskontakt, nur bedingt geeignet. Hierfür müssen die Modelle der Kinematik und Dynamik sowohl der Aktorik (Hexapod) als auch der Umgebung (Radaufhängung) im relevanten Frequenzbereich sehr genau sein. Sind Hexapod und Radaufhängung nicht hinreichend gut im Modell abgebildet, kann es durch unzulässig hohe Kontaktkräfte zur Beschädigung der Anregungseinheit oder der Radaufhängung kommen. Zur Lösung dieser Problematik muss eine geeignete Regelung für den Hexapod im Umgebungskontakt entwickelt werden. Eine solche Interaktionsregelung hat diverse Vorteile gegenüber einer Positionsregelung. Zum einen können Beschädigungen von Hexapod und Prüfling vermieden werden. Zum anderen kann, je nach Regelungsverfahren, auch eine direkte Vorgabe der Kontaktkräfte und -momente erfolgen, z. B. für die Nachbildung von im Fahrversuch gemessenen Kräften und Momenten. Darüber hinaus kommen in der Praxis zum Teil auch Regelungen zum Einsatz, die Positions- und Kraftregelung zu einer sog. hybriden Kraft-/Positionsregelung kombinieren.

Generell kommen durch den Kontakt zu einer Umgebung - neben den in den Differentialgleichungen (2-16), (2-17) und (2-18) bereits aufgeführten Kontaktkräften und -momenten  $\tau$  - zu den Bewegungsdifferentialgleichungen des Manipulators weitere Gleichungen hinzu. Bei einer ideal starren Umgebung sind dies bspw. algebraische Gleichungen, die die Zwangsbedingungen beschreiben. In diesem Fall resultiert ein differential-algebraisches Gleichungssystem.

Die theoretischen Grundlagen zur Interaktionsregelung sind vor allem im Bereich der Regelung von Handhabungs- und Werkzeugmaschinen zu finden. Bei diesen Anwendungsfällen ist häufig eine Unterscheidung der jeweils vorliegenden Situation in

- Freie Bewegung,
- Transitions- bzw. Übergangsphase und
- Eingeschränkte Bewegung (Kontakt)

erforderlich. Mit Ausnahme des Rüstvorgangs, der in dieser Ausarbeitung nicht betrachtet wird, liegt im hier vorliegenden Anwendungsfall stets die Kontaktsituation vor. Die Situation freier Bewegung und die Übergangsphase werden daher in den folgenden Ausführungen nicht berücksichtigt.

Außerdem werden die Verfahren für das Beispiel eines PKM betrachtet, dessen Bewegungsgleichungen sich ausschließlich durch die kartesischen Koordinaten des Endeffektors sowie die translatorischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen beschreiben lässt (Beispielsystem: der 3-RCC-Mechanismus in [CPP06], vgl. auch Bild 2-25). Dadurch können im Folgenden die Bewegungsgleichungen (2-17) verwendet werden, wobei zusätzlich  $v = \dot{z}$  und  $\dot{v} = \ddot{z}$  gilt. Dies vereinfacht die folgenden Ausführungen deutlich, da sonst fortlaufend auf die Besonderheiten für die Orientierungs- und Drehmomentregelung eingegangen werden muss. Hintergrund der Unterschiede zwischen der Positions- und Orientierungsregelung wie auch der Kraft- und Drehmomentregelung ist das Fehlen eines Verschiebungsvektors für die Rotationen analog zu dem für die Positionen. Ein Winkelkoordinatensatz für die Verdrehung eines Körpers, aus dessen zeitlicher Differentiation die Winkelgeschwindigkeit des Körpers resultiert (wie bei Translationen), existiert nicht. Insbesondere sind die Kardanwinkel kein Vektor, und das Bilden der Differenz zwischen den Kardanwinkeln der Soll- und Istantorientierung des Endeffektors ist nur in Sonderfällen geometrisch sinnvoll. Praktisch wird dieser Ansatz, wie auch in [Kno17], häufig dennoch verfolgt. Bessere Ansätze sind

- die Verwendung derjenigen Kardanwinkel, die sich aus der Rotationsmatrix zwischen der Soll- und Istantorientierung des Endeffektors berechnen lassen,
- die Berechnung des Fehlers anhand der momentanen Drehachse und des zugehörigen Drehwinkels dieser Rotation (engl. angle axis error) sowie
- die Verwendung von Einheitsquaternonen.

Sowohl beim angle axis error wie auch bei den Einheitsquaternonen wird die Rotation nicht durch drei, sondern vier Größen beschrieben. Die einzige singularitätsfreie Lösung stellt die Verwendung der Einheitsquaternonen dar. Für eine ausführliche Darstellung sowie die Diskussion verschiedener Ansätze zur Orientierungs- und Drehmomentregelung siehe insb. [SV99; Nat10]. Bei Verzicht auf die gesonderte Darstellung der Rotationen kann das Grundprinzip sämtlicher Verfahren kürzer und verständlicher aufbereitet werden.

Über die Problematik bei den Rotationen hinaus wird in [SBZS98] ausgeführt, dass die Berechnung der Positions-, Geschwindigkeits- und Kraftfehler nicht eindeutig definiert ist. Das Bilden der Differenzen der entsprechenden Soll- und Istwerte stellt hierfür lediglich einen möglichen Ansatz dar. Bei kleinen Abweichungen, von denen im Falle eines (guten) Regelungssystems ausgegangen werden kann, hat dieser Sachverhalt allerdings keine nennenswerte Bedeutung in der Praxis.

Grundlage einiger der folgenden Verfahren ist die Linearisierung des Systemverhaltens durch Vorgabe der Aktorkräfte nach der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T (\mathbf{M}_v \mathbf{u}_p + \mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{g}_v + \boldsymbol{\tau}) , \quad (2-23)$$

d. h. es gilt

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{v}} \quad (2-24)$$

im Falle eines idealen Streckenmodells, der Abwesenheit von Störgrößen, idealer Messung bzw. Beobachtung der relevanten Größen sowie vernachlässigbarer Aktordynamik und übereinstimmenden Anfangswerten.

Für die Durchführung von Kontaktkraftreglungsaufgaben ist es vorteilhaft, wenn die Bewegungsgleichungen in Aufgabenkoordinaten vorliegen. Während bei einem SKM die Bewegungsgleichungen (2-16) erst aufwändig unter erheblichem Berechnungsaufwand transformiert werden müssen, liegen sie bei bestimmten PKM mit sechs FHG direkt in dieser Form vor, was einen Vorteil dieser PKM gegenüber SKM darstellt.

Die Ausführungen in den folgenden beiden Unterabschnitten basieren vor allem auf den Grundlagenwerken [SV99; SSVO10; SK16]. In der Fachliteratur werden üblicherweise SKM behandelt. Demgegenüber wird in dieser Arbeit mit dem Hexapod ein PKM betrachtet. *Aus diesem Grund wurden nachfolgend sämtliche Regelungsansätze unter Beibehaltung des jeweiligen Grundgedankens in der für PKM mit Bewegungsgleichungen nach (2-17) zutreffenden Form aufbereitet. Die aufgeführten Gleichungen sind daher nicht in exakt dieser Form in den genannten Quellen wiederzufinden.* Der Transfer und die Aufbereitung der Regelungsansätze für PKM mit Bewegungsgleichungen nach (2-17) stellt einen wesentlichen wissenschaftlichen Beitrag dieser Arbeit dar.

Viele der dargelegten Regelungsansätze setzen die Kenntnis der im TCP vorliegenden Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  voraus. Sie können, wie in dem hier betrachteten Anwendungsbeispiel, durch einen Sensor im Kontaktpunkt gemessen werden. Außerdem besteht die Möglichkeit, sie aus den Aktorkräften  $\mathbf{F}_q$  zu berechnen. Voraussetzung hierfür ist ein hinreichend genaues Modell des Manipulators. Die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$  können dabei entweder direkt gemessen werden oder wiederum aus anderen Größen berechnet sein (z. B. aus den Motorströmen im Falle eines Gleichstrommotors oder aus den Zylinderdifferenzdrücken wie bei dem vorliegenden, hydraulischen System). Auch eine Schätzung der Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  ist möglich, siehe z. B. [MFL14].

Nachfolgend werden zuerst die Verfahren der indirekten Kraftregelung, anschließend die der direkten Kraftregelung für PKM aufbereitet.

## 2.2.2 Indirekte Kraftregelungen

Die indirekten Kraftregelungsverfahren unterteilen sich in die Impedanzregelung, die Admittanzregelung sowie die Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitsregelung. Bei der **Impedanzregelung** nach Hogan [Hog85] wird die Linearisierung (2-23) mit der Eingangsgröße

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{v}}_r + \mathbf{K}_m^{-1} \cdot (\mathbf{K}_d \cdot (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}) + \mathbf{K}_c \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}) - \boldsymbol{\tau}) \quad (2-25)$$

verwendet. Durch Einsetzen der Gleichungen in (2-17) resultiert unter der Annahme eines idealen Modells sowie idealer Messung und der Abwesenheit von Störungen das Systemverhalten

$$\mathbf{K}_m \cdot (\dot{\mathbf{v}}_r - \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{K}_d \cdot (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}) + \mathbf{K}_c \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (2-26)$$

Es ist ersichtlich, dass durch den Impedanzregelungsansatz nach (2-23) und (2-25) ein gewünschtes transientes Verhalten des Manipulators im Umgebungskontakt durch die Matrizen  $\mathbf{K}_m$ ,  $\mathbf{K}_d$  und  $\mathbf{K}_c$  eingestellt werden kann. Sie können als Trägheit, Dämpfung und Steifigkeit interpretiert werden. Dabei müssen die Verstärkungen  $\mathbf{K}_m$  und  $\mathbf{K}_c$  positiv definit,  $\mathbf{K}_d$  positiv semidefinit sei. Sie werden häufig als Diagonalmatrizen gewählt. Das resultierende Gesamtsystem verhält sich dann wie ein entkoppeltes Masse-Feder-Dämpfer-System in jeder Richtung. Im Falle der freien Bewegung wird der durch  $\mathbf{z}_r$ ,  $\mathbf{v}_r$  und  $\dot{\mathbf{v}}_r$  gegebenen Solltrajektorie gefolgt.

Die Bezeichnung des Verfahrens ergibt sich aus der Analogie der mechanischen Größen Kraft (Potenzialvariable) und Geschwindigkeit (Flussvariable) mit den elektrischen Größen Spannung und Stromstärke und der Tatsache, dass hier gezielt das Übertragungsverhalten

$$\frac{\boldsymbol{\tau}(s)}{\mathbf{v}_r(s) - \mathbf{v}(s)} = \mathbf{Z}(s) \quad (2-27)$$

und damit die (mechanische) Impedanz des Systems vorgegeben wird. In (2-25) wurde die Impedanz

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{K}_m \cdot s + \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_c \cdot \frac{1}{s} \quad (2-28)$$

eingestellt.

In einigen Quellen wird der geschilderte Regelungsansatz als „aktive Impedanzregelung“ bezeichnet, da das Verhalten des Manipulators im Kontakt aus dem Regelgesetz resultiert. Ergibt sich das Impedanzverhalten hingegen durch die nachgiebige Konstruktion des Manipulators, z. B. elastische Gelenke, oder durch Anbringen passiver Elemente (Federn, Dämpfer, Massen) am Ende des Endeffektors (sog. Remote Center of Compliance, vgl. auch [CSD78]), handelt es sich um eine sog. „passive Impedanz“. Auch durch passive Impedanz können Manipulationsaufgaben ermöglicht werden. Gegenüber der „aktiven Impedanzregelung“ besitzt dieses Vorgehen geringe Flexibilität. [SSVO10, S. 366]

Eine Impedanzregelung kann grundsätzlich auch ohne Messung der Kontaktkraft  $\boldsymbol{\tau}$  erreicht werden. Durch Vernachlässigung der Kontaktkraft  $\boldsymbol{\tau}$  in (2-23) und (2-25) folgt abweichend von (2-26) das Systemverhalten

$$\mathbf{K}_m \cdot (\dot{\mathbf{v}}_r - \dot{\mathbf{v}}) + \mathbf{K}_d \cdot (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}) + \mathbf{K}_c \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}) = \mathbf{K}_m \cdot \mathbf{M}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2-29)$$

Zwar kommt dieser Ansatz ohne die Kraftmessung aus, das Systemverhalten ist aber gegenüber (2-26) durch die Matrix  $M_v^{-1}$  auf der rechten Seite nichtlinear und nicht richtungsentkoppelt. Bild 2-12 stellt das Strukturbild der Impedanzregelung mit und ohne Messung der Kontaktkräfte  $\tau$  dar.

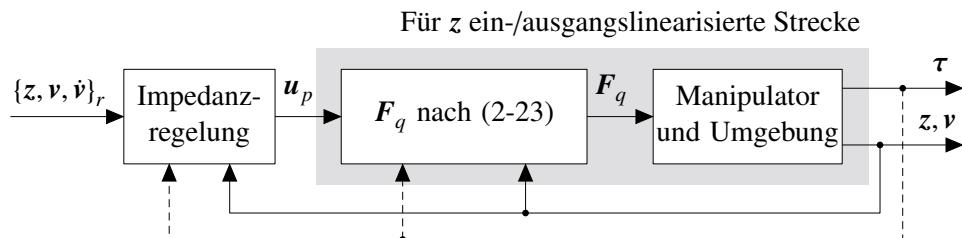


Bild 2-12: Impedanzregelung

Sehr ähnlich zur Impedanzregelung ist die **Admittanzregelung**, die in manchen Quellen auch als positionsbasierte Impedanzregelung bezeichnet wird. Bei der Impedanzregelung führt die Abweichung zwischen der geforderten und der tatsächlichen Bewegungstrajektorie in Abhängigkeit der vorgegebenen Matrizen  $K_m$ ,  $K_d$  und  $K_c$  zu einer Kontaktkraft zwischen Endeffektor und Umgebung, wobei das Systemverhalten (2-26) resultiert. Im Gegensatz dazu wird bei der Admittanzregelung die Gleichung (2-26) durch Ersetzen der Größen  $z$  durch  $z_a$  (inklusive der jeweiligen Ableitungen) dazu genutzt, um die Sollbewegungstrajektorie bei Vorliegen einer Kontaktkraft zu modifizieren. Die modifizierte, durch  $z_a, v_a, \dot{v}_a$  gegebene Bewegungstrajektorie wird dann als Sollvorgabe für einen unterlagerten Positionsregler verwendet. Aufbauend auf der Linearisierung (2-23) kann dieser bspw. das Regelungsgesetz

$$u_p = \dot{v}_a + K_{a,v} \cdot (v_a - v) + K_{a,p} \cdot (z_a - z) \quad (2-30)$$

verfolgen. Das Strukturbild der Admittanzregelung zeigt Bild 2-13.

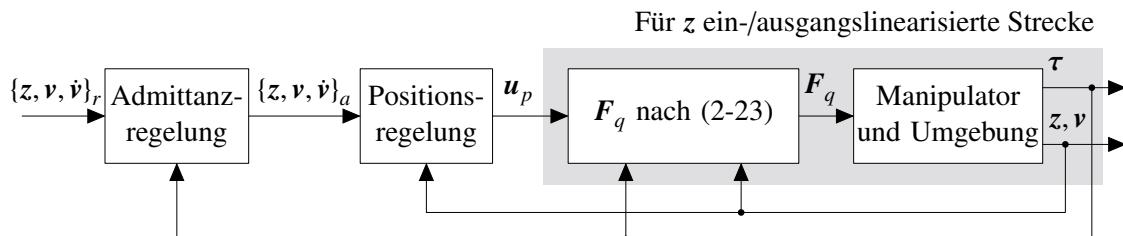


Bild 2-13: Admittanzregelung

Der bisherigen, idealen Betrachtung folgend besitzen Impedanz- und Admittanzregelung das gleiche Übertragungsverhalten, wenn die Anfangswerte  $z_a(0) = z(0)$  und  $v_a(0) = v(0)$  gewählt werden. In diesem Fall sind  $z_a$  und  $z$  und die zeitlichen Ableitungen identisch. Die Admittanzregelung besitzt durch die unbeobachtbaren Reglerzustände  $z_a$  und  $v_a$  jedoch eine höhere Ordnung als die Impedanzregelung. In der praktischen Anwendung ist die Linearisierung nach (2-23) z. B. durch Mess- und Modellfehler und/oder Störgrößen jedoch zwangsläufig unvollkommen, wodurch sich auch das Verhalten von Impedanz- und Admittanzregelung unterscheidet.

Nach Ott et al. [OMN10] zeigen impedanzgeregelte Manipulatoren gutes Verhalten bei Kontakt mit einer steifen Umgebung, wohingegen das Verhalten bei freier Bewegung eher schlecht ist. Demgegenüber arbeitet die Admittanzregelung in freier Bewegung sehr genau, bei Kontakt mit einer steifen Umgebung können Instabilitäten aber nicht ausgeschlossen werden. Die Autoren schlagen daher die Kombination der beiden Regelungsalgorithmen durch fortlaufendes Umschalten zwischen den beiden Strategien vor, um die Vorteile beider Verfahren nutzen zu können. Durch einen Parameter  $n \in [0,1]$  kann die Aktivitätsdauer des jeweiligen Reglers in einer Schaltperiode eingestellt werden. Im Extremfall  $n = 1$  ist fortlaufend die Admittanz-, für  $n = 0$  die Impedanzregelung aktiv. Simulationen an einem 1-FHG-Beispielsystem mit konstanter Umgebungssteifigkeit zeigen, dass ein solcher Regler selbst bei konstantem  $n$  zwischen diesen beiden Extremen Vorteile gegenüber der reinen Admittanzregelung (robusteres Verhalten im steifen Umgebungskontakt) und der reinen Impedanzregelung (kleinere stationäre Regelabweichung) hat. Weiteres Potenzial sehen die Autoren in der Adaption des Parameters  $n$  an die vorliegende Umgebungssituation.

Einen Sonderfall der Impedanzregelung stellt die **Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitsregelung** nach Salisbury [Sal80] dar. Die Aktorkräfte werden dabei nach der Gleichung

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \cdot (-\mathbf{K}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{K}_p (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}) + \mathbf{g}_v) \quad (2-31)$$

gebildet, wobei  $\mathbf{K}_p$  und  $\mathbf{K}_v$  positiv definite, diagonale Reglerverstärkungen sind. Die Berechnung der Aktorkräfte nach (2-31) wird in der Literatur auch als PD-Regelung mit Kompensation der Gewichtskräfte bezeichnet. Für den stationären Zustand folgt

$$\boldsymbol{\tau}_{stat} = \mathbf{K}_p (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_{stat}) , \quad (2-32)$$

was sich durch Einsetzen von (2-31) in die Bewegungsgleichungen nach (2-17) ergibt. Hieraus folgt, dass die Regelung bei Abwesenheit einer Umgebung, d. h.  $\boldsymbol{\tau}_{stat} = \mathbf{0}$ , stationär genau arbeitet. Liegt hingegen ein Umgebungskontakt vor, d. h.  $\boldsymbol{\tau}_{stat} \neq \mathbf{0}$ , so weicht der erreichte Positionsvektor  $\mathbf{z}$  permanent vom Sollwert  $\mathbf{z}_r$  ab. Infolge des fortlaufenden Reglereingriffs stellt sich eine Kontaktkraft  $\boldsymbol{\tau}_{stat}$  ein, die proportional zur Reglerverstärkung  $\mathbf{K}_p$  ist. Die Verstärkung  $\mathbf{K}_p$  und der mit dem skizzierten Regelungsansatz betriebene Manipulator kann daher als Steifigkeit interpretiert werden. Hinsichtlich der Wahl von  $\mathbf{K}_p$  lässt sich festhalten, dass bei relativ steifer Umgebung eher niedrige Werte, bei nachgiebiger Umgebung höhere Werte angesetzt werden sollten. Im ersten Fall tendiert die Position  $\mathbf{z}_{stat}$  gegen die Position der (nahezu starren) Umgebung, im zweiten Fall nähert sie sich der vorgegebenen Sollposition  $\mathbf{z}_r$  an.

Die Steifigkeitsregelung ist zwar sehr einfach zu implementieren, besitzt jedoch den Nachteil, dass sie sich nur für die Einregelung eines konstanten Sollzustands, nicht für das Folgen von Sollzeitverläufen eignet. Außerdem findet keine gezielte Beeinflussung des transienten Systemverhaltens statt.

Als weiterer Sonderfall der Impedanzregelung wird in vielen Quellen neben der Steifigkeitsregelung auch die Dämpfungsregelung nach Whitney [Whi77] genannt.

Die aufgezählten Verfahren werden als indirekte Kraftregelungen bezeichnet, da die Kontaktkraft nur indirekt durch die Änderung der Reglerverstärkungen oder der Bewegungssollwerte beeinflusst werden kann. Die direkte Vorgabe einer Sollkraft oder eines Sollkraft-Zeitverlaufs ist nicht möglich. Stattdessen wird ein gewünschtes Bewegungsverhalten des

Manipulators bei Umgebungskontakt erzielt. In Abhängigkeit der gewählten Reglerverstärkungen ergibt sich ein Kompromiss aus Positionsregelungsgenauigkeit und in Kauf genommener Kontaktkraft. Diese Verfahren eignen sich für diejenigen Anwendungen, in denen die Kontaktkräfte klein zu halten sind, eine genaue Einregelung gegebener Sollwerte aber nicht erforderlich ist [WSB96].

### 2.2.3 Direkte Kraftregelungen

Im Gegensatz zu den indirekten Kraftregelungsverfahren ermöglichen die direkten Kraftregelungsverfahren die Einregelung gegebener Sollkräfte oder Sollkraft-Zeitverläufe. Dies wird über eine Rückkopplung der gemessenen Kontaktkraft zur Umgebung  $\tau$  ermöglicht. Die Leistungsfähigkeit der Verfahren ist stark abhängig von der jeweiligen Kontaktsituation, d. h. der Geometrie und den mechanischen Eigenschaften der Umgebung. Die modellbasierte Synthese direkter Kraftregelungsalgorithmen setzt die analytische Beschreibung der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  und damit der Umgebung bzw. der Umgebungsimpedanz voraus [SK16].

Nach [SV99] untergliedern sich die direkten Kraftregelungen in explizite und implizite Verfahren. Bei einer expliziten Kraftregelung liegen, abgesehen von etwaigen Einzelaktorregelungen und der Zustandslinearisierung, keine unterlagerten Regelschleifen vor. Im Falle einer impliziten Kraftregelung existieren weitere Regelschleifen unterhalb der äußeren Kraftregelung, üblicherweise Geschwindigkeits- oder Positionsregelungen. Einfache Einstiegsbeispiele zu diesen Ansätzen finden sich bspw. in [SSVO10], Abschnitt 9.4. Sie basieren auf dem mittels (2-23) linearisierten System, d. h. es gilt  $u_p = \dot{v}$ . Zu beachten ist, dass die Linearisierung (2-23) grundsätzlich nur eine Entkopplung der Positionsgrößen  $z$  erreicht. Die Kontaktkräfte zur Umgebung  $\tau$ , d. h. die für die eigentliche Kraftreglungsaufgabe relevanten Systemgrößen, werden durch diesen Linearisierungsansatz nicht entkoppelt. Als Anschauungsbeispiel sei hier das relativ einfache Umgebungsmodell

$$\tau = \mathbf{K}_u \cdot (z - z_u) \quad (2-33)$$

mit einer Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_u$  sowie der Umgebungsposition  $z_u$  genannt, wobei  $z_u$  als konstant angenommen wird. Ist die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_u$  nicht diagonal, so bewirkt die Bewegung des Endeffektors in eine isolierte Richtung auch Kräfte in anderen Richtungen. Für die elementaren Betrachtungen in diesem Abschnitt wird jedoch angenommen, dass  $\mathbf{K}_u$  Diagonalgestalt besitzt, sodass sowohl die Positions- als auch die Kraftgrößen durch die Linearisierung (2-23) ideal entkoppelt werden. Diese Annahme stellt eine erhebliche Vereinfachung der Realität (insb. hinsichtlich der hier betrachteten Anwendung) dar. Anhand der Beispiele aus [SSVO10] können aber einige grundlegende Erkenntnisse zu den direkten Kraftregelungen gewonnen werden, weshalb sie an dieser Stelle kurz dargestellt werden.

Das Strukturbild einer **expliziten Kraftregelung** zeigt Bild 2-14. Das Streckenmodell (2-17) sowie die Kompensation der Nichtlinearitäten (2-23) sind darin durch die (bei idealem Modell, idealer Messung/Beobachtung und in Abwesenheit von Störgrößen) äquivalente Darstellung durch zwei aufeinander folgende Integratoren ersetzt worden.

Anhand des Strukturbildes lässt sich leicht erkennen, dass aufgrund der zwei Integratoren im Vorwärtszweig zur Stabilisierung des Regelkreises eine Rückführung der Geschwin-

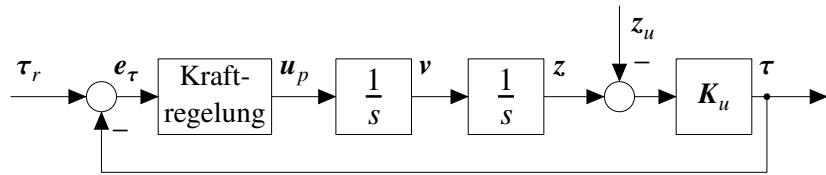


Bild 2-14: Explizite Kraftregelung

digkeit  $v$  erforderlich ist. Das reale Differenzieren der gemessenen Kräfte ist durch vorliegendes Messrauschen hingegen keine praktikable Lösung. Durch die Rückführung der Geschwindigkeit liegt ein unterlagerter Geschwindigkeitsregelkreis vor, dessen Sollwert vom überlagerten Kraftregler erzeugt wird.

Auf diese Weise folgt also unmittelbar (eine spezielle Form) der **impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung**. Bild 2-15 stellt das Strukturbild einer solchen Regelung dar.

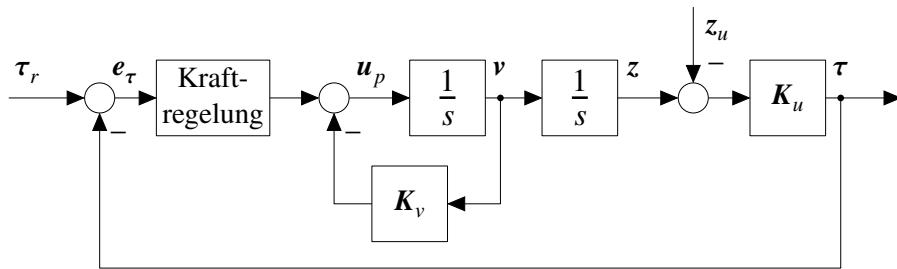


Bild 2-15: Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung

Da ein Integrator im Vorwärtszweig vorliegt, genügt hier für stationär genaues Führungsverhalten der Kraftregelung theoretisch ein einfacher P-Regler. Dies ist aber nur bei idealer Linearisierung des Systems mittels (2-23) der Fall. Liegen bspw. Abweichungen zwischen dem Streckenmodell (2-23) und der realen Strecke vor, so ist auch in diesem Fall für stationäre Genauigkeit ein I-Anteil im Kraftregler erforderlich.

Die **implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung** zeigt Bild 2-16.

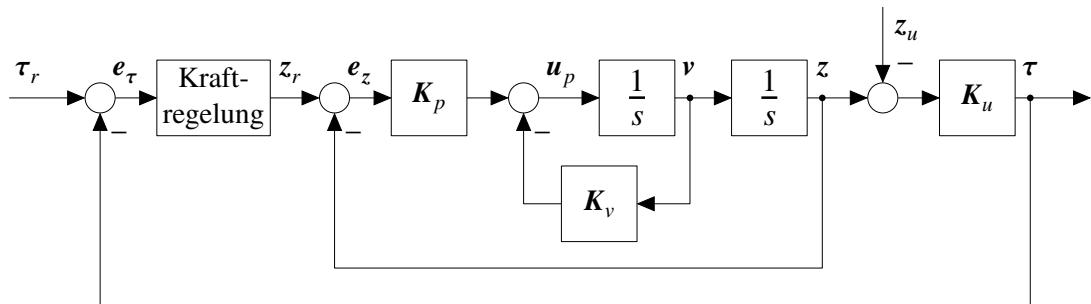


Bild 2-16: Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung

Bei diesem Ansatz ist für stationäre Genauigkeit des Führungsverhaltens ein I-Anteil im Kraftregler erforderlich. Gegenüber einer Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung ist aufgrund des prinzipbedingt langsameren inneren Reglers eine geringere Kraftregelungsbandbreite zu erwarten. Außerdem lässt sich zeigen, dass die Fehlerdynamik

des Kraftreglers eine höhere Ordnung aufweist. Von Vorteil ist, dass dieser Ansatz auf einer für Industrieroboter üblichen Positionsregelung basiert und an derartigen Systemen damit relativ einfach umzusetzen ist.

Damit sind die grundlegenden Beispiele aus [SSVO10] dargelegt. Die Auswahl eines linearen Reglers aus P-, I- und/oder D-Bestandteilen für Regelungen mit geschlossener Kraftregelschleife ist Gegenstand einiger häufig zitierten Publikationen. Hierzu zählen bspw. die Arbeiten von Eppinger und Seering [ES87] sowie Volpe und Khosla [VK93].

Eppinger und Seering [ES87] diskutieren die Auswahl eines Reglers anhand einfacher, rein eindimensionaler Beispielsysteme. Es handelt sich stets um lineare Ersatzsysteme für den Kontakt eines Manipulators mit einer Umgebung, die über einen Kraftsensor gekoppelt sind. Der Kraftsensor wird als Feder-Dämpfer-Element, ggf. mit zusätzlicher Masse, abstrahiert. Nur in einem Beispiel liegt ein nichtlineares Element in Form einer Diskontinuität vor, die den möglichen Kontaktverlust von Manipulator und Umgebung beschreibt. Dieser Fall besitzt für die in dieser Arbeit betrachtete Anwendung keine Relevanz. Für alle linearen Beispiele folgern Eppinger und Seering anhand der Wurzelortskurve, dass nur die Dynamik zwischen dem Angriffspunkt der Aktorkraft und dem Sensormodell größere Bedeutung für die Stabilität besitzt, da in diesem Falle „mehr Pole als Nullstellen hinzukommen“. Das gleiche gilt für begrenzte Aktordynamik. Dynamik außerhalb davon, z. B. dynamisches Verhalten des Fundaments oder des Kontaktpartners, spielt für die Stabilität eine untergeordnete Rolle, da stets die „gleiche Anzahl an Polen und Nullstellen hinzukommen“. Die Kraftregelungsbandbreite sei im Wesentlichen begrenzt durch

- die Vibrationsmoden des Manipulators,
- ggf. vorhandene, signifikante Dynamik des Kontaktpartners, des Kraftsensors und des Fundaments sowie
- die Bandbreite der Aktorik.

Eine Tiefpassfilterung des Kraftregelfehlers und einen I-Anteil im Regler sehen die Autoren als nachteilig für die Stabilität an, da „destabilisierende Pole im geschlossenen Kraftregelkreis hinzukommen“. Die Verwendung eines D-Anteils oder eine Lead-Filterung des Kraftregelfehlers seien hingegen von großem Vorteil, da hierdurch „Nullstellen für niedrige Frequenzen hinzukommen“, wodurch eine höhere Kraftregelungsbandbreite erzielt werden kann.

Volpe und Khosla [VK93] nehmen vergleichbare Untersuchungen an einem linearen Modell vierter Ordnung für das Übertragungsverhalten von der Aktor- zur Kontaktkraft vor. Dieses Modell wurde in vorangegangenen Arbeiten für einen Manipulator in einer spezifischen Kontaktsituation experimentell validiert. Es entspricht einem der durch Eppinger und Seering [ES87] betrachteten Systeme. Volpe und Khosla kommen zu gegensätzlichen Aussagen zu Eppinger und Seering, zu deren Veröffentlichung sie direkten Bezug nehmen. So werde durch einen I-Anteil ein wünschenswerter, dominanter reeller Pol hinzugefügt. Der Regler sei außerdem besonders einfach und die stationäre Genauigkeit sichergestellt. Bei einem D-Anteil läge eine Art Bandpassfilterung im Bereich der Systemresonanzfrequenz vor, die Rauschen und Oszillationen bei der Resonanzfrequenz zusätzlich verstärkt. Zudem sei die Berechnung der zeitlichen Ableitung des Kraftmesswerts in der Praxis problematisch. Volpe und Khosla konnten außerdem zeigen, dass für dieses einfache Beispielsystem auch bei einem P-Regler Instabilitäten resultieren können. Eppinger und Seering hatten

bei diesem Modell hingegen stets stabiles Verhalten erwartet. Ihre Aussagen stützen Volpe und Khosla durch Experimente an dem System, für welches das Modell vierter Ordnung identifiziert wurde.

Es gibt zahlreiche weitere Veröffentlichungen auf dem Themengebiet der Realisierung stabiler Regler und der Stabilitätsbetrachtung für Kraftregelungen im Allgemeinen. Hierzu zählen u. a. die Arbeiten von An und Hollerbach [AH87a; AH87b; AH89], Wen und Murphy [WM91], Qian und de Schutter [QS92a; QS92b; QS92c], Youcef-Toumi und Gutz [YG89] sowie Ferretti et al. [FMR95].

Offenbar ist die Angabe allgemeingültiger Aussagen zur Wahl des Reglertyps selbst bei vermeintlich einfachen eindimensionalen, linearen Modellen nicht einfach. Die getroffenen Aussagen sind außerdem in hohem Maße vom der Analyse zugrunde liegenden Modell bzw. dem jeweils betrachteten Anwendungsfall abhängig. Eine Übertragbarkeit dieser an einfachen Modellen gewonnenen Erkenntnisse auf den HNI-Achsprüfstand ist fragwürdig.

Die skizzierten direkten Kraftregelungen mit und ohne untergeordnete Regelschleifen eignen sich nicht für Kontaktsituationen, in denen einzelne Richtungen keinen Umgebungs-kontakt aufweisen. Eine Einflussnahme auf das Systemverhalten in solchen Richtungen ist mit den genannten Verfahren nicht möglich. Es lässt sich zeigen, dass sich in unbeschränkten Richtungen die Position  $z_i = 0$  (unterlagerte Positionsregelung) bzw. die Geschwindigkeit  $v_i = 0$  (unterlagerte Geschwindigkeitsregelung) einstellt, vgl. [SSVO10]. Für die Regelung von Robotern in Kontaktaufgaben in der Praxis sind die dargelegten Verfahren daher noch weiter zu modifizieren. Hier sind vor allem die parallele sowie die hybride Kraft-/Positionsregelung zu nennen. Insbesondere bei der hybriden Kraft-/Positionsregelung existieren zahlreiche unterschiedliche Erscheinungsformen, und auch die Abgrenzung zur parallelen Kraft-/Positionsregelung ist in der Literatur nicht immer einheitlich. Hier wird die mehrheitlich vorzufindende Definition dieser Verfahren verwendet, wie sie auch in [SSVO10] vorliegt.

Die **parallele Kraft-/Positionsregelung** geht durch Hinzufügen einer Sollwertvorgabe für die Position aus der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung hervor. Auf diese Weise können gleichzeitig Sollwerte bzw. Sollwert-Zeitverläufe für die Kraft  $\tau_r$  und die Position  $z_r$  (ggf. auch die zeitlichen Ableitungen  $v_r$  und  $\dot{v}_r$ ) vorgegeben werden. Das Strukturbild zeigt Bild 2-17.

Das Verfahren wurde von Chiaverini und Sciavicco [CS93] vorgeschlagen. Natürlich kann das Verfahren in einer Richtung nicht sowohl die Sollkraft als auch die Sollposition einregeln. Der Kraftregler wird so ausgelegt, dass er die Positionsregelung dominiert, z. B. durch einen I-Anteil. Bei Verwendung dieses Regelungsansatzes folgt die Regelung in unbeschränkten Richtungen der Positionsvorgabe. Wird die Bewegung in einer Richtung durch Umgebungskontakt eingeschränkt, wird die Kraftregelung aktiv und die Kraftvorgabe eingeregelt. Bei Verwendung eines PI-Kraftreglers mit dem P-Anteil  $K_p^{-1} K_{\tau,P}$  und dem I-Anteil  $K_p^{-1} K_{\tau,I}$  mit diagonalen Reglerverstärkungen folgt für das Systemverhalten

$$\ddot{e}_z + K_v \cdot \dot{e}_z + K_p \cdot e_z + K_{\tau,P} \cdot e_\tau + K_{\tau,I} \cdot \int e_\tau dt = \mathbf{0}. \quad (2-34)$$

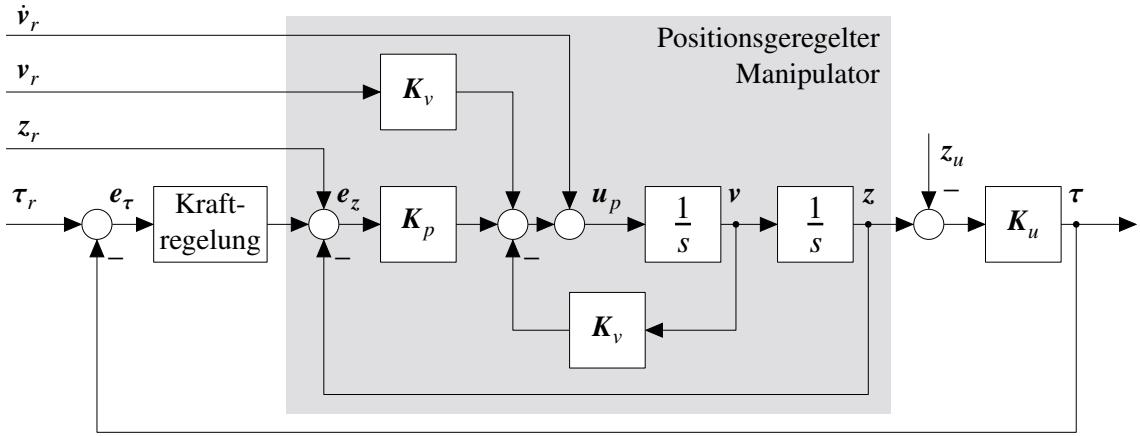


Bild 2-17: Parallele Kraft-/Positionsregelung

Für positionsgeregelte Richtungen folgt damit eine Fehlerdifferentialgleichung zweiter Ordnung, die für jede Reglerverstärkung  $K_{p,i}, K_{v,i} > 0$  stabil ist. In kraftgeregelten Richtungen ist Stabilität bei dem Umgebungsmodell nach (2-33) unter der Bedingung

$$K_{\tau,I,i} < K_{v,i} \cdot (K_{u,i}^{-1} \cdot K_{p,i} + K_{\tau,P,i}) \quad (2-35)$$

gegeben, die unter der Annahme einer Sollbeschleunigung  $\dot{v}_{r,i}$  und -geschwindigkeit  $v_{r,i}$  von 0 in [SV99] hergeleitet wurde. Die Bedingung folgt bspw. durch Anwendung des Hurwitz-Kriteriums auf das System dritter Ordnung, dass sich aus (2-34) nach Ersetzung von  $e_z$  durch  $e_\tau$  mithilfe von (2-33) ergibt. Ist  $\dot{v}_{r,i}$  und/oder  $v_{r,i}$  ungleich 0, z. B. bei Vorgabe eines Soll-Zeitverlaufs für die Bewegungstrajektorie in dieser Richtung, stellt dies eine Störgröße für den betreffenden Regler dar, die durch den I-Anteil ausgeglichen werden muss [SV99].

Die in Bild 2-17 dargestellte Struktur sieht keine direkte Modifikation der unterlagerten Sollwerte  $v_r$  und  $\dot{v}_r$  durch den Kraftregler vor. Eine angepasste Regelungsstruktur, bei der auch Sollwerte für diese Größen vorgegeben werden, wurde für die translatorischen Richtungen in [BN95], für die rotatorischen Richtungen in [NSV98] veröffentlicht. In [SV99] wird die Struktur als *vollständig parallele Komposition* bezeichnet. Bild 2-18 zeigt das zugehörige Strukturbild, wobei der grau hinterlegte Anteil aus Bild 2-17 zusammengefasst wurde.

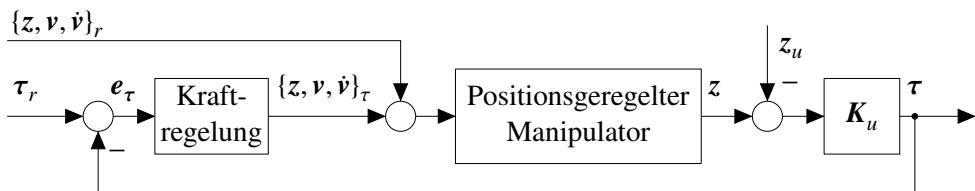


Bild 2-18: Parallele Kraft-/Positionsregelung in vollständig paralleler Komposition

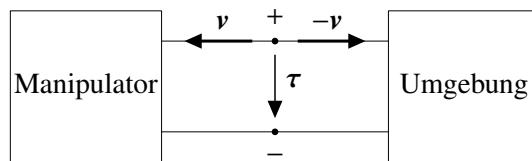
Die Kraftregelung berechnet die Korrekturgrößen  $z_\tau$ ,  $v_\tau$  und  $\dot{v}_\tau$  anhand der Differentialgleichung [SV99]

$$K_{A\tau} \cdot \dot{v}_\tau + K_{V\tau} \cdot v_\tau = e_\tau . \quad (2-36)$$

Darin sind  $K_{A\tau}$  und  $K_{V\tau}$  diagonale Reglerverstärkungsmatrizen. Durch (2-36) ergibt sich automatisch ein I-Anteil für die Kraftregelung. Die berechneten Korrekturen  $z_\tau$ ,  $v_\tau$  und  $\dot{v}_\tau$  werden elementweise zu der durch  $z_r$ ,  $v_r$  und  $\dot{v}_r$  gegebenen Sollbewegung hinzugefügt. Die resultierenden Größen dienen als Eingang der unterlagerten Positionsregelung. In [CSV97] wird auch eine modifizierte Fassung mit Adaption der Umgebungssteifigkeit angegeben. Der dargelegte Ansatz eignet sich insb. dann, wenn kein genaues Umgebungsmodell vorliegt [SK16].

Bei der parallelen Kraft-/Positionsregelung tritt die Umgebung nur indirekt bei der Wahl der Kraftregelungsparameter in Erscheinung. Anders verhält es sich bei der **hybriden Impedanzregelung** nach Anderson und Spong [AS88]. Es handelt sich um ein systematisches Vorgehen, nach dem für jede Richtung in Abhängigkeit des vorliegenden Umgebungsverhaltens entweder eine Positions- oder eine Kraftregelung für den Manipulator entworfen wird. Die folgenden Ausführungen beruhen neben [AS88] auch auf den beiden Lehrwerken [LDA04; SHV06].

Bild 2-19 zeigt die Kopplung des geregelten Manipulators mit seiner Umgebung, wobei die beiden Kontaktpartner als Eintore abstrahiert wurden.



*Bild 2-19: Kontakt zwischen Manipulator und Umgebung nach [SHV06]*

Die Geschwindigkeit  $v$  stellt die Flussvariable, die Kraft  $\tau$  die Potenzialvariable dar. Der Zusammenhang zwischen der Fluss- und der Potenzialvariable kann durch eine Impedanz  $Z(s)$  nach (2-27) beschrieben werden. Die Betrachtung des Werts  $|Z(0)|$  erlaubt eine Klassifikation von Impedanzen. Eine Impedanz ist

- inertial, wenn  $|Z(0)| = 0$ ,
- resistiv, wenn  $|Z(0)| = c$  und  $0 < c < \infty$ ,
- kapazitiv, wenn  $|Z(0)| = \infty$ .

Die Impedanz im Beispiel (2-28) ist kapazitiv.

Die in Abschnitt 2.2.2 beschriebene Impedanzregelung wurde unabhängig von der vorliegenden Umgebungsimpedanz  $Z_u(s)$  entworfen. Dagegen wird bei der hybriden Impedanzregelung die jeweilige Umgebungsimpedanz  $Z_u(s)$  strukturell beim Regelungsentwurf berücksichtigt. Hierfür muss lediglich deren stationäres Verhalten  $|Z_u(0)|$  qualitativ bekannt sein. Eine genaue Kenntnis von  $Z_u(s)$  ist nicht erforderlich. Im Gegensatz zur Impedanzregelung nach Abschnitt 2.2.2 folgt in Abhängigkeit von  $|Z_u(0)|$  bei der hybriden Impedanzregelung entweder eine Positions- oder eine Kraftregelung.

Für die Synthese der hybriden Impedanzregelung wird zunächst ein hinreichend gutes Modell der Umgebungsimpedanz  $Z_u(s)$  ermittelt. In Abhängigkeit der Umgebungsimpedanz  $Z_u(s)$  erfolgt die Festlegung der Regelgröße und der Manipulatorimpedanz  $Z_m(s)$  für jede Richtung. Die Festlegung erfolgt so, dass das Übertragungsverhalten stationär genau ist. Hierfür lässt sich allgemein das folgende Dualitätsprinzip formulieren:

- Kapazitive Umgebung: Kraftregelung mit nicht-kapazitivem Manipulator,
- Inertiale Umgebung: Positionsregelung mit nicht-inertialem Manipulator,
- Resistive Umgebung: Kraftregelung mit inertialem Manipulator oder Positionsregelung mit kapazitivem Manipulator.

Sinngemäß nach Anderson und Spong [AS88] übersetzt „besagt das Dualitätsprinzip, dass weder zwei verschiedene Flussgrößen noch zwei verschiedene Potenzialgrößen an der Schnittstelle eines Eintors simultan eingestellt werden können“.

Aufbauend auf der Linearisierung nach (2-23) folgt für positionsgeregelte Richtungen der Regler aus

$$u_{p,i} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s \left( v_{r,i} - Z_{m,i}^{-1}(s) \cdot \tau_i \right) \right\}, \quad (2-37)$$

für kraftgeregelte Richtungen aus

$$u_{p,i} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s Z_{m,i}^{-1}(s) (\tau_{r,i} - \tau_i) \right\}, \quad (2-38)$$

vgl. [LDA04, S. 494 ff.], wobei  $\mathcal{L}^{-1}$  der inverse Laplace-Operator ist. Dabei ist  $Z_{m,i}(s)$  die Manipulatorimpedanz in der jeweils betrachteten Richtung. Die ideale Differentiation in (2-37) und (2-38) tritt durch Vorgabe von  $\dot{v}_{r,i}$  und eine entsprechend gewählte Manipulatorimpedanz  $Z_{m,i}(s)$  bei der Umsetzung nicht in Erscheinung.

Verkopplungen zwischen den einzelnen Richtungen sind nach [AS88] nicht vorgesehen. Bei gesammelter Notation von (2-37) und (2-38) in Vektorform hat die Manipulatorimpedanz  $\mathbf{Z}_m(s)$  daher Diagonalgestalt.

Anderson und Spong [AS88] betonen, dass es für das Erzielen einer gewünschten Systemantwort auch bei diesem Entwurfsverfahren erforderlich ist, die Reglerverstärkungen je nach vorliegender Umgebung unterschiedlich zu wählen. So braucht bspw. ein Roboter für das Verpacken von Eiern weit mehr interne Nachgiebigkeit als für das Verpacken von Aufschnitt. Die Reglerverstärkungen könnten z. B. durch eine adaptive Regelung oder anhand von Kennfeldern angepasst werden.

Liu und Goldenberg [LG91] beschreiben ebenfalls eine hybride Impedanzregelung. Dabei wird der Arbeitsraum in einen positionsgeregelten Subraum und einen kraftgeregelten Subraum aufgeteilt. In den positionsgeregelten Richtungen wird wie bei der Impedanzregelung das Systemverhalten nach (2-26), in den kraftgeregelten Richtungen das Systemverhalten

$$\mathbf{M}_d \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_\tau \quad (2-39)$$

mit der gewünschten Trägheit  $\mathbf{M}_d$  und Dämpfung  $\mathbf{D}_d$  angestrebt. Durch Kombination der beiden Gleichungen resultiert eine Beschleunigungstrajektorie, die als Sollvorgabe für eine unterlagerte PI-Beschleunigungsregelung verwendet wird. Die Regelung wird erfolgreich an einem 2-FHG-Roboter mit Direktantrieben erprobt. Ähnliche Ansätze sind auch durch Yao et al. [YCW94] sowie Adhikary und Mahanta [AM17] beschrieben worden, wobei die Autoren Gleitzustandsregelungen einsetzen.

Bei der **hybriden Kraft-/Positionsregelung**, die auf Raibert und Craig [RC81] zurückgeht, besteht das Ziel darin, die unbeschränkten FHG des Manipulators positionsgeregelt, die beschränkten FHG kraftgeregelt zu betreiben.

Bei Manipulatoraufgaben mit einfach zu beschreibenden Kontaktsituationen, z. B. bei einer ebenen Kontaktfläche, ist die Partitionierung in positions- und kraftgeregelte FHG trivial. Es werden zwei grundsätzlich unabhängige Regler für die Kraft und die Position entworfen und mithilfe einer Selektionsmatrix  $S$  für die Regelung des Manipulators eingesetzt. Die Selektionsmatrix  $S$  besitzt Diagonalgestalt; je nachdem, ob ein bestimmter FHG positions- oder kraftgeregelt betrieben wird, hat der entsprechende Eintrag auf der Diagonale den Wert 0 oder 1, siehe Bild 2-20.

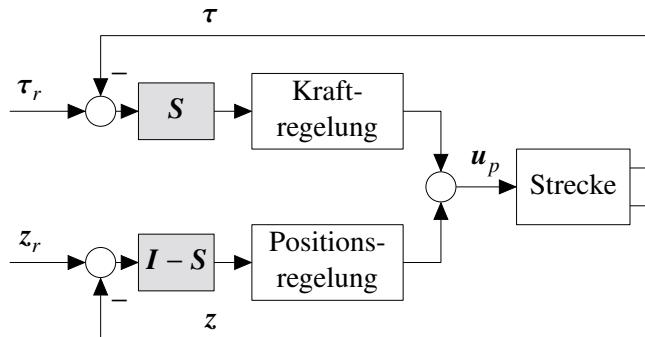


Bild 2-20: Konzept der hybriden Kraft-/Positionsregelung nach Raibert und Craig [RC81]

Die Definition der Manipulatoraufgabe muss mit den von der Umgebung gesetzten Beschränkungen konform sein. Dies schließt sowohl die Sollwerte der hybriden Kraft-/Positionsregelung als auch die Festlegung der Selektionsmatrix  $S$  ein. Mason [Mas81] hat zu diesem Zweck zwei Begriffe eingeführt, die auf der folgenden Beobachtung beruhen: Unabhängig von der spezifischen Aufgabe lässt sich festhalten, dass für jede mögliche Bewegungsrichtung eines Manipulators entweder eine Positionsbeschränkung (Beispiel: starre Wand) oder eine Kraftbeschränkung (Beispiel: freie Bewegung) vorliegt. Diese Bedingungen werden als **natürliche Beschränkungen** (engl. natural constraints) bezeichnet, da sie durch die jeweilige Aufgabe vorgegeben sind. In jeder Richtung kann die jeweils andere, unbeschränkte Variable (Kraft oder Position) durch den Manipulator beeinflusst werden. Die Gesamtheit dieser gezielt einstellbaren Variablen sind die **künstlichen Beschränkungen** (engl. artificial constraints). Sie sind komplementär zu den natürlichen Beschränkungen. Aus den natürlichen und künstlichen Beschränkungen resultiert ein kraft- und ein bewegungsgeregelter Unterraum, die im Folgenden mit  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{P}$  benannt sind. Zwischen den zum kraftgeregelten Unterraum  $\mathcal{F}$  gehörenden Kräften  $\tau$  und dem zum bewegungsgeregelten Unterraum  $\mathcal{P}$  gehörenden Geschwindigkeiten  $v$  gilt im Falle dieser idealisierten Betrachtung die **Bedingung der Reziprozität** (engl. reciprocity condition)

$$v^T \cdot \tau = 0 . \quad (2-40)$$

Sie leitet sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit her, nach dem die Summe der Zwangskräfte eines Systems keine virtuelle Arbeit verrichtet. Zu Beginn der Forschung auf dem Gebiet der hybriden Regelung wurde von vielen Forschern außerdem das Konzept der sog. „Orthogonalität“ zugrunde gelegt, das sich letztlich als Trugschluss erwies, vgl. [Duf90].

Im Falle einfacher Manipulatoraufgaben kann häufig ein orthogonales, ggf. zeitvariantes Bezugssystem mit Positionsvektor  $z$  und Drehmatrix  ${}^{IE}A$  bezüglich des Inertialsystems

eingeführt werden, das im Englischen als compliance frame oder auch task frame bezeichnet wird. Die Manipulatoraufgabe kann dann in Form natürlicher und künstlicher Beschränkungen entlang und um die orthogonalen Richtungen dieses Bezugssystems formuliert werden (sog. task frame-Formalismus). Akademische Beispiele finden sich bspw. in [SK16].

Es ist offensichtlich, dass die Selektionsmatrix  $S$  so zu wählen ist, dass die Regelung die künstliche Beschränkung bewirkt. Folglich ist eine Kraft- bzw. Positionsregelung in denjenigen Richtungen zu verwenden, die eine natürliche Positions- bzw. Kraftbeschränkung aufweisen.

Für reale Kontaktsituationen eignet sich diese Einteilung nur bedingt, da der Umgebungskontakt nicht ideal starr ist. Vielmehr können sowohl die Umgebung als auch der Manipulator eine Impedanz aufweisen, Reibung im Kontakt vorliegen oder nichtlineare kinematische Zwangsbedingungen existieren. Handlungsempfehlungen lassen sich auf dieser Basis dennoch treffen. Bei einer nachgiebigen Umgebung ist es bspw. ratsam, in eher steifen Richtungen die Position als natürliche Beschränkung zu betrachten, bei eher weichen Richtungen die Kraft.

Der Veröffentlichung von Raibert und Craig [RC81] folgten zahlreiche Publikationen, die diesen Grundgedanken analysierten und weiterentwickelten. Zhang und Paul [ZP85] übertrugen den Ansatz vom OS in den JS, was für SKM zweckmäßiger ist. Stabilitätsprobleme des Ansatzes wurden durch An und Hollerbach [AH87b] sowie Zhang [Zha89] aufgedeckt. Fisher und Mujtaba [FM92] führten diese auf die inkorrekte Formulierung des Regelungsgesetzes zurück und beschrieben einen korrigierten, stabilen Algorithmus. Die Formulierung der hybriden Regelung im OS unter expliziter Einbeziehung des Manipulatormodells, das bei Raibert und Craig [RC81] keine Berücksichtigung findet, wurde durch Khatib beschrieben [Kha87]. Khatib gibt als Berechnungsvorschrift für die Aktorkräfte

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \left( \mathbf{M}_v \left( (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{u}_p - \mathbf{S} \mathbf{K}_{v,F} \mathbf{v} \right) + \mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{g}_v + \mathbf{S} \mathbf{u}_f \right) \quad (2-41)$$

mit

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{v}}_r + \mathbf{K}_D \cdot (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}) + \mathbf{K}_P \cdot (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}) , \quad \mathbf{u}_f = \boldsymbol{\tau}_r + \mathbf{K}_F \cdot (\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}) \quad (2-42)$$

an, wobei der Term  $\mathbf{M}_v \mathbf{S} \mathbf{K}_{v,F} \mathbf{v}$  eine Dämpfung in den kraftgeregelten Richtungen herbeiführen soll. Für  $\mathbf{K}_{v,F} \neq \mathbf{0}$  sind daher in den kraftgeregelten Richtungen sowohl eine Kraft- als auch eine Geschwindigkeitsregelschleife aktiv. Im Falle einer konstanten, diagonalen Massenmatrix  $\mathbf{M}_v$  handelt es sich um eine implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung, vgl. auch [VK93].

Weitere grundlegende Veröffentlichungen zum Thema sind bspw. in [SK16] aufgeführt. Ein umfassender Überblick, der auch aktuellere Quellen zum Thema enthält, wurde von Ortenzi et al. [OSKM17] verfasst.

Das beschriebene Vorgehen mit Aufteilung der kraft- und bewegungsgeregelten Richtungen mittels einer einzelnen, binären Selektionsmatrix  $S$  bezeichnet Natale [Nat10] als **geometrische Formulierung** der hybriden Kraft-/Positionsregelung. Dieses Vorgehen eignet sich nur für einfache Kontaktsituationen, da nur in diesem Fall eine Partitionierung des Raums in bewegungs- und kraftgeregelte Richtungen mittels einer binären Selektionsmatrix  $S$  möglich ist.

Der Abgrenzung von Natale [Nat10] folgend muss für komplexere Kontaktsituationen hingegen die **analytische Formulierung** der hybriden Kraft-/Positionsregelung herangezogen werden, vgl. z. B. [Yos87; MW88; KK88; VV87]. Für den Entwurf einer solchen Regelung ist neben dem Modell des Manipulators auch ein detailliertes Modell des Kontaktpartners erforderlich, dessen Erstellung je nach betrachtetem Anwendungsfall sehr anspruchsvoll sein kann [SSVO10]. Mithilfe der beiden Modelle lässt sich eine ideale Entkopplung der kraft- und bewegungsgeregelten Unterräume auch für komplexere Kontaktsituationen erreichen. Als nachteilig an dieser Methode bewertet Natale [Nat10], dass bei einer solchen Regelung die physikalische Bedeutung der Regelungsvariablen verloren gehen kann.

Um eine Idee der grundsätzlichen Vorgehensweise zur Entkopplung der kraft- und bewegungsgeregelten Unterräume durch die analytische Formulierung der hybriden Kraft-/Positionsregelung zu erhalten, wird an dieser Stelle der Regelungsentwurf für einen reibungsfreien, in einzelnen Richtungen ideal starren Umgebungskontakt erläutert. Bei der Herleitung wird angenommen, dass die Kontaktgeometrie ideal bekannt ist. Es resultieren zwei lageabhängige Matrizen  $S_{\lambda r}$  und  $S_{y k}$  zur Beschreibung der bewegungs- bzw. kraftgeregelteren Richtungen, die aus den im Allgemeinen nichtlinearen, durch den KontaktPartner gegebenen kinematischen Zwangsbedingungen folgen. Die ausführliche Herleitung findet sich bspw. in [SSVO10; SK16].

Steht ein Manipulator in Kontakt mit einer ideal starren Umgebung, so unterliegt er kinematischen Zwangsbedingungen, die sich durch eine Mannigfaltigkeit der Form

$$\varphi(z) = \mathbf{0} \quad (2-43)$$

ausdrücken lassen. In diesem Beispiel handelt es sich um holonome, skleronome Zwangsbedingungen, d. h. zeitinvariante Beschränkungen der Lagegrößen. Effektiv reduziert sich die Anzahl der FHG des Manipulators mit jeder vorliegenden kinematischen Zwangsbedingung um 1. Seine Bewegung ist auf die durch (2-43) und deren zeitliche Ableitung beschriebene Bindungsmannigfaltigkeit beschränkt, vgl. [MW88]. Kontaktkräfte entstehen genau dann, wenn der Manipulator versucht, die Zwangsbedingungen nach (2-43) zu verletzen. Im Allgemeinen wird zwischen unilateralen und bilateralen bzw. ein- und zweiseitigen Zwangsbedingungen unterschieden, je nachdem, ob der Manipulator sich vom KontaktPartner entfernen kann oder die Bewegung sowohl zum KontaktPartner hin wie auch von ihm weg eingeschränkt ist. An dieser Stelle ist diese Unterteilung aber nicht weiter von Bedeutung. Die zeitliche Ableitung von (2-43)

$$J_c \cdot v = \mathbf{0}, \quad J_c(z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z^T} \quad (2-44)$$

führt auf die sog. **Jacobimatrix der Zwangsbedingungen**  $J_c$ .

Analog zu (2-43) können alle mit den kinematischen Zwangsbedingungen verträglichen, d. h. zulässigen Positionen des Endeffektors durch eine Gleichung der Form

$$z = \varrho(y_k) \quad (2-45)$$

mit den generalisierten Koordinaten  $y_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  beschrieben werden. Aus (2-43) und (2-45) lassen sich die beiden Gleichungen

$$\tau = S_{\lambda r} \cdot \lambda_r, \quad S_{\lambda r}(z) = J_c^T \quad (2-46)$$

und

$$\nu = S_{yk} \cdot \ddot{y}_k, \quad S_{yk}(z) = \frac{\partial \underline{\varrho}(\mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}_k^T} \quad (2-47)$$

mit den lageabhängigen Matrizen  $S_{\lambda r}$  und  $S_{yk}$  herleiten. Aufgrund des Prinzips der virtuellen Arbeit, vgl. auch die Bedingung der Reziprozität (2-40), besteht zwischen  $S_{\lambda r}$  und  $S_{yk}$  die Beziehung

$$S_{yk}^T \cdot S_{\lambda r} = \mathbf{0}. \quad (2-48)$$

Analog zu  $\mathbf{y}_k$  bei den Bewegungsgrößen stellt  $\lambda_r \in \mathbb{R}^{6-n_k}$  generalisierte Kontaktkräfte dar; in der Literatur finden sich auch die Begriffe Kraft- oder Lagrange-Multiplikator. Während der kraftgeregelte Unterraum  $\mathcal{F}$ , in dem  $\tau$  liegt, eindeutig durch die gegebene Kontakt situation bestimmt ist, sind die Zwangsbedingungen (2-43),  $S_{\lambda r}$  sowie die generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r$  nicht eindeutig definiert. In der Konsequenz führt jede zulässige Wahl von  $S_{\lambda r}$  zu einer anderen physikalischen Interpretation der generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r$ . Die gleichen Aussagen lassen sich analog für den bewegungsgeregelten Unterraum  $\mathcal{P}$  sowie  $S_{yk}$ , Gleichung (2-45) und die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  tätigen. [SSVO10]

Mithilfe der Gleichungen nach (2-46) und (2-47) sowie der zeitlichen Ableitung von (2-47)

$$\dot{\nu} = S_{yk} \cdot \ddot{y}_k + \dot{S}_{yk} \cdot \dot{y}_k \quad (2-49)$$

lässt sich die Bewegungsgleichung des Manipulators (2-17) in eine Bewegungsgleichung reduzierter Ordnung

$$\mathbf{M}_k \cdot \ddot{y}_k = S_{yk}^T \cdot (\mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{n}) \quad (2-50)$$

und eine algebraische Gleichung für die generalisierten Kontaktkräfte

$$\lambda_r = \mathbf{M}_r \cdot S_{\lambda r}^T \cdot \mathbf{M}_v^{-1} \cdot (\mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{n}) \quad (2-51)$$

mit den Hilfsgrößen

$$\mathbf{M}_k = S_{yk}^T \mathbf{M}_v S_{yk}, \quad \mathbf{M}_r = (S_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} S_{\lambda r})^{-1}, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{C}_v S_{yk} + \mathbf{M}_v \dot{S}_{yk}) \dot{y}_k + \mathbf{g}_v \quad (2-52)$$

überführen. Hervorzuheben ist, dass die Bewegungsgleichung reduzierter Ordnung (2-50) keine Abhängigkeit von den Kontaktkräften und -momenten  $\tau$  mehr aufweist. Sie beschreibt die Bewegung des Endeffektors auf der Bindungsmannigfaltigkeit. Aufbauend auf diesen beiden Gleichungen lässt sich herleiten, dass eine ideale Entkopplung der Positions- und Kraftvariablen  $\mathbf{y}_k$  und  $\lambda_r$  bzw. der bewegungs- und kraftgeregelten Unterräume durch Wahl der Aktorkräfte

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \cdot (\mathbf{M}_v \cdot S_{yk} \cdot \mathbf{u}_k + S_{\lambda r} \cdot \mathbf{u}_r + \mathbf{n}) \quad (2-53)$$

erreicht werden kann. Durch Einsetzen von (2-53) in (2-50) und (2-51) folgt

$$\mathbf{u}_k = \ddot{y}_k, \quad \mathbf{u}_r = \lambda_r, \quad (2-54)$$

das System ist also exakt ein-/ausgangslinearisiert. Auf Basis der neuen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_k$  und  $\mathbf{u}_r$  lassen sich nun Regelungsgesetze formulieren. Beispielsweise kann für die Kraft

$$\mathbf{u}_r = \lambda_{r,r} + \mathbf{K}_{P,f} \cdot (\lambda_{r,r} - \lambda_r) + \mathbf{K}_{I,f} \cdot \int (\lambda_{r,r} - \lambda_r) dt \quad (2-55)$$

und die Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}_k = \ddot{\mathbf{y}}_{k,r} + \mathbf{K}_{P,v} \cdot (\dot{\mathbf{y}}_{k,r} - \dot{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{K}_{I,v} \cdot \int (\dot{\mathbf{y}}_{k,r} - \dot{\mathbf{y}}_k) dt \quad (2-56)$$

gewählt werden. Auf diese Weise ergibt sich eine **hybride Kraft-/Geschwindigkeitsregelung**. Anstelle der Geschwindigkeit kann auch die Position des Manipulators in unbeschränkten Richtungen geregelt werden. Durch Kombination des PD-Positionsregelungsansatzes

$$\mathbf{u}_k = \ddot{\mathbf{y}}_{k,r} + \mathbf{K}_{D,p} \cdot (\dot{\mathbf{y}}_{k,r} - \dot{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{K}_{P,p} \cdot (\mathbf{y}_{k,r} - \mathbf{y}_k) \quad (2-57)$$

mit dem Kraftregelungsansatz nach (2-55) folgt die **hybride Kraft-/Positionsregelung**. Aufgrund der durch die Zwangsbedingungen vorliegenden Ordnungsreduktion der Zustandsgleichungen des Manipulators, vgl. (2-50), wird dieser Ansatz in [LDA04] als (zustands-) reduzierte Kraft-/Positionsregelung bezeichnet. Das zugehörige Strukturbild zeigt Bild 2-21.

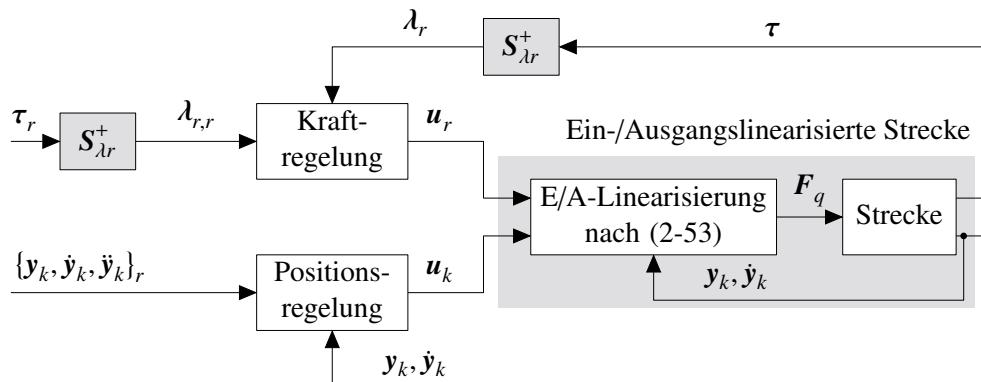


Bild 2-21: Hybride Kraft-/Positionsregelung bei ideal starrer Umgebung

Die Pseudoinverse  $S_{\lambda r}^+$  in Bild 2-21 ist nicht erforderlich, wenn die generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r$  geschickt festgelegt werden. Entsprechen sie messbaren physikalischen Größen, kann direkt die Vorgabe und die Messung dieser Größen anstelle von  $\tau$  erfolgen. Bei Verwendung der dargestellten Regelungsstruktur ist sicherzustellen, dass die Kraftsollwerte  $\tau_r$  im Unterraum  $\mathcal{F}$  liegen. Anstelle der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  und der zeitlichen Ableitung  $\dot{\mathbf{y}}_k$  können auch die Position und Geschwindigkeit des TCP  $\mathbf{z}, \mathbf{v}$  gemessen und entsprechende Sollwerte vorgegeben werden. Voraussetzung ist, dass eine eindeutige Umrechnungsvorschrift in die generalisierten Bewegungsgrößen existiert. Hinsichtlich der zugehörigen Sollwerte gilt, dass die resultierende Bewegung im Unterraum  $\mathcal{P}$  liegen muss.

Dem Linearisierungsterm (2-53) und den Regelungsgesetzen (2-55) bis (2-57) kann entnommen werden, dass ein hinreichend genaues Modell des Manipulators für die Implementierung einer solchen Regelung erforderlich ist ( $\mathbf{J}_g^T, \mathbf{M}_v, \mathbf{C}_v, \mathbf{g}_v$ ) und darüber hinaus

die Matrizen  $S_{\lambda r}$  und  $S_{yk}$  sowie die zeitliche Ableitung  $\dot{S}_{yk}$  vorliegen müssen. Die Matrizen  $S_{\lambda r}$  und  $S_{yk}$  können auch zur Laufzeit aus gemessenen Werten für die Kontaktkraft  $\tau$  und die Geschwindigkeit  $v$  geschätzt, d. h. an die aktuell vorliegende Situation adaptiert werden, vgl. [SK16, S. 211]. Voraussetzung hierfür ist ein nominales Kontaktmodell. Es ist offensichtlich, dass bei ungenauem Modell der Kontaktgeometrie, einem fehlerbehafteten Modell des Manipulators, bei Vorliegen von Störgrößen oder Messfehlern die Entkopplung der kraft- und positionsgeregelten Richtungen nicht ideal gelingt.

Der dargelegte Regelungsansatz setzt die Formulierung der Zwangsbedingungen im OS voraus, die für PKM nach (2-17) naheliegend ist. Ein konzeptionell ähnlicher Regelungsentwurf, der ebenfalls eine Entkopplung der generalisierten Koordinaten  $y_k$  und der generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r$  erreicht, wurde durch Yoshikawa [Yos87; YST88] beschrieben. Abweichend von (2-45) wird dort vorausgesetzt, dass die zulässigen Positionen des Endeffektors durch eine Gleichung der Form

$$\mathbf{y}_k = \varrho_z(z) \quad (2-58)$$

beschrieben werden können. Mit (2-46) und

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \bar{S}_{yk} \cdot \mathbf{v}, \quad \bar{S}_{yk} = \frac{\partial \varrho_z(z)}{\partial z^T} \quad (2-59)$$

führt in diesem Fall die Wahl der Aktorkräfte

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \cdot \left( \mathbf{M}_v \cdot \begin{bmatrix} \bar{S}_{yk} \\ S_{\lambda r}^T \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\bar{S}}_{yk} \\ \dot{S}_{\lambda r}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \right) + \mathbf{C}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v + S_{\lambda r} \cdot \mathbf{u}_r \right) \quad (2-60)$$

zu dem linearen, entkoppelten Systemverhalten nach (2-54). Yoshikawa bezeichnet diesen Ansatz als *dynamic hybrid control method*. Die praktische Umsetzung ist mit Schwierigkeiten verbunden, da die Oberflächengeometrie des Kontaktpartners (beschrieben durch die Matrizen  $S_{\lambda r}$ ,  $\bar{S}_{yk}$ ,  $\dot{S}_{\lambda r}$  und  $\dot{\bar{S}}_{yk}$ ) in der Regel nicht genau bekannt ist. Yoshikawa und Sudou [YS93] geben zur Lösung dieser Problematik ein Online-Schätzverfahren für  $S_{\lambda r}$ ,  $\bar{S}_{yk}$ ,  $\dot{S}_{\lambda r}$  und  $\dot{\bar{S}}_{yk}$  an und erproben es an einem 3-Achs-Roboter. Das Verfahren beruht auf der Messung der Endeffektorposition und der Kontaktkräfte und ist für eine einzelne unbekannte Zwangsbedingungs-Mannigfaltigkeit geeignet. Momente werden nicht betrachtet, die Erweiterung auf den sechsdimensionalen Fall wird im Ausblick für zukünftige Arbeiten angekündigt. Die Herleitung eines entkoppelnden Reglers für im JS formulierten Zwangsbedingungen und zulässige Positionen nach (2-58) wurde durch McClamroch und Wang [MW88] durchgeführt. Kankaanranta und Koivo [KK88] sowie Vujić und Vukobratović [VV87] beschreiben ebenfalls konzeptionell ähnliche Ansätze.

Aghili [Agh05] beschreibt eine hybride Kraft-/Positionsregelung für starren Umgebungs kontakt, deren Herleitung auf der Matrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_c^+ \mathbf{J}_c \quad (2-61)$$

mit  $\mathbf{J}_c$  nach (2-44) beruht. Die Matrix  $\mathbf{P}$ , die auf die Arbeiten von West und Asada [WA85] zurückgeht, ist idempotent<sup>7</sup>, d. h. es gilt

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}. \quad (2-62)$$

<sup>7</sup> Auch die bereits eingeführte binäre, diagonale Selektionsmatrix  $S$  ist idempotent.

Sie wird auch als Projektionsmatrix bezeichnet. Ist  $\mathbf{P}$  zusätzlich symmetrisch, so wird von einer orthogonalen Projektionsmatrix gesprochen. Ein Vektor  $\mathbf{x}$  mit homogenen physikalischen Einheiten kann mithilfe von  $\mathbf{P}$  orthogonal zerlegt werden, d. h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} \oplus \mathbf{x}_{\perp}. \quad (2-63)$$

Dabei ist

$$\mathbf{x}_{\parallel} := \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \quad (2-64)$$

die Projektion des Vektors  $\mathbf{x}$  auf den Nullraum von  $\mathbf{J}_c$ ,

$$\mathbf{x}_{\perp} := (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x} \quad (2-65)$$

dessen Projektion auf das orthogonale Komplement dieses Nullraums. Da der Bildraum von  $\boldsymbol{\tau}$  dem orthogonalen Komplement des Nullraums von  $\mathbf{J}_c$  entspricht, ist

$$\boldsymbol{\tau}_{\parallel} \equiv \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad (2-66)$$

sodass sich durch Linksmultiplikation von (2-17) mit  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_v \cdot \dot{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}_q}_{\boldsymbol{\tau}_{q,\parallel}} - \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{h}}_{\mathbf{h}_{\parallel}}, \quad \boldsymbol{\tau}_q = \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q, \quad \mathbf{h} = \mathbf{C}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v \quad (2-67)$$

ergibt. Aghili bezeichnet diese Gleichung als *projizierte inverse Dynamik*. Jede mit den Zwangsbedingungen vereinbare Geschwindigkeit liegt im Nullraum von  $\mathbf{J}_c$ , d. h. der Bildraum von  $\mathbf{v}$  entspricht dem Nullraum von  $\mathbf{J}_c$ . Es folgt, dass

$$\mathbf{v}_{\perp} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2-68)$$

und

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}. \quad (2-69)$$

Durch Linksmultiplikation von (2-69) mit  $\mathbf{M}_v$  und Addition der Gleichung zu (2-67) folgt

$$\underbrace{(\mathbf{M}_v + \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_v - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_v)^T)}_{\mathbf{M}_c} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau}_{q,\parallel} - \mathbf{h}_{\parallel} + \underbrace{\mathbf{M}_v \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{C}_c}. \quad (2-70)$$

Aghili gibt zwei weitere Möglichkeiten für die Wahl der Matrizen  $\mathbf{M}_c$  und  $\mathbf{C}_c$  an, wobei die drei Alternativen mit unterschiedlichem numerischen Aufwand verbunden sind. Es lässt sich zeigen, dass die Matrix  $\mathbf{M}_c$  stets invertierbar ist, sodass (2-70) nach  $\dot{\mathbf{v}}$  aufgelöst werden kann, weshalb Aghili diese Gleichung auch als *direkte Dynamik* bezeichnet. Durch Linksmultiplikation des Manipulatormodells (2-17) mit  $\mathbf{I} - \mathbf{P}$  und Einsetzen der Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{v}}$  aus (2-70) folgen die Reaktionskräfte

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \cdot (\boldsymbol{\tau}_{q,\parallel} - \mathbf{h}_{\parallel} + \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{v}) + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\tau}_q}_{\boldsymbol{\tau}_{q,\perp}} - \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{h}}_{\mathbf{h}_{\perp}} \quad (2-71)$$

mit

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{M}_c^{-1}. \quad (2-72)$$

Der Ansatz zur Positionsregelung folgt aus (2-67) unter Ersetzung von  $\dot{\mathbf{v}}$  gemäß (2-49) zu

$$\boldsymbol{\tau}_{q,\parallel} = \mathbf{h}_{\parallel} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_v \cdot (\mathbf{S}_{yk} \cdot \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{S}}_{yk} \cdot \dot{\mathbf{y}}_k), \quad (2-73)$$

der Kraftregelungsansatz aus (2-71) zu

$$\boldsymbol{\tau}_{q,\perp} = \mathbf{h}_{\perp} + \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\tau}_{q,\parallel} - \mathbf{h}_{\parallel} + \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{S}_{\lambda r} \cdot \mathbf{u}_r. \quad (2-74)$$

Durch Superposition der beiden Ansätze resultieren die Aktorkräfte für die hybride Kraft-/ Positionsregelung

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \boldsymbol{\tau}_q, \quad \boldsymbol{\tau}_q = \mathbf{h} + \boldsymbol{\mu} \mathbf{C}_c \mathbf{v} + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}) \mathbf{P} \mathbf{M}_v (\mathbf{S}_{yk} \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{S}}_{yk} \dot{\mathbf{y}}_k) + \mathbf{S}_{\lambda r} \mathbf{u}_r. \quad (2-75)$$

Zur Wahrung der Konsistenz mit den bisherigen Ausführungen wurde hier abweichend von [Agh05] die dort zu findende Größe  $\mathbf{u}_\tau$  durch  $\mathbf{S}_{\lambda r} \mathbf{u}_r$  ersetzt, sodass die Kraftregelung wieder direkt in der Größe  $\lambda_r$  vorliegt. Für die Kraft und Position können mit den neuen Systemeingängen  $\mathbf{u}_r$  und  $\mathbf{u}_k$  Regelungsalgorithmen, bspw. (2-55) und (2-57), formuliert werden.

Aghili nennt einige Vorteile dieser Vorgehensweise. Beispielsweise ist die gewichtete euklidische Norm der Aktorkräfte minimal. Außerdem ist das Vorgehen auch bei passiven (d. h. nicht aktuierten) Gelenken sowie bei redundanten oder flexiblen Manipulatoren anwendbar. Ebenso funktioniert es im Falle redundanter Zwangsbedingungen und bei singulären Manipulatorkonfigurationen. West und Asada [WA85] nennen außerdem, dass mithilfe von Projektionsmatrizen auch mehrere Umgebungskontakte sowie Kontakte abseits des TCP behandelt werden können. Andere Veröffentlichungen greifen diesen Ansatz auf. Beispielsweise wird er in [AS16] für unilaterale sowie sog. Reibkegel-Zwangsbedingungen, in [MR12] für unteraktuierte Systeme beschrieben. Ortenzi et al. [OSKM15] greifen die Methode ebenfalls auf und erstellen aufbauend darauf ein Optimalsteuerungsproblem, dessen Lösung die Aktorkräfte für das Folgen einer gegebenen Trajektorie (durch Ausnutzung der Umgebungzwangsbedingungen) nochmals reduziert.

In [SK16] wird auch ein passivitätsbasierter Ansatz für die hybride Regelung vorgeschlagen. Die Systemeingänge  $\mathbf{F}_q$  werden in diesem Fall nach der Formel

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \cdot & \left( \mathbf{g}_v + \mathbf{S}_{\lambda r} \mathbf{u}_r + \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \dot{\mathbf{u}}_p + (\mathbf{C}_v \mathbf{S}_{yk} + \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yk}) \mathbf{u}_p \right. \\ & \left. + (\mathbf{S}_{yk}^+)^T \mathbf{K}_p (\mathbf{u}_p - \dot{\mathbf{y}}_k) \right) \end{aligned} \quad (2-76)$$

vorgegeben. Durch Einsetzen von (2-76) in das Manipulatormodell (2-17) folgt die nach wie vor verkoppelte und nichtlineare Systemdynamik. Durch Linksmultiplikation der erhaltenen Gleichung mit  $\mathbf{S}_{yk}^T$  bzw.  $\mathbf{S}_{\lambda r}^T \cdot \mathbf{M}_v^{-1}$  lässt sich analog zu (2-50) und (2-51) die reduzierte Systemdynamik sowie ein Ausdruck für die generalisierten Kräfte bilden. Anhand dieser Gleichungen können Stabilitätsbetrachtungen durchgeführt werden, siehe [SK16]. Eine

asymptotisch stabile, hybride Kraft-/Positionsregelung lässt sich demnach durch die Wahl von  $\mathbf{u}_r$  nach (2-55) und

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{y}}_{k,r} + \alpha \cdot (\mathbf{y}_{k,r} - \mathbf{y}_k), \quad \dot{\mathbf{u}}_p = \ddot{\mathbf{y}}_{k,r} + \alpha \cdot (\ddot{\mathbf{y}}_{k,r} - \ddot{\mathbf{y}}_k) \quad (2-77)$$

erreichen. Hierfür muss die Matrix  $\mathbf{K}_p$  symmetrisch und positiv definit sein. Bei  $\alpha$  handelt es sich um eine positive Reglerverstärkung.

Über die ideal starre Umgebung hinaus ist in [SSVO10] auch eine angepasste Herleitung für einen ideal elastischen Umgebungskontakt enthalten. Die zugehörige Herleitung enthält allerdings, abgesehen von der Annahme einer idealen Feder als Kontaktbeschreibung, weitere stark vereinfachende Annahmen. Die Vorgehensweise zum Regelungsentwurf ist ähnlich zur zuvor beschriebenen. Zu den aufgelisteten Messgrößen kommt dort die Messung bzw. Schätzung der Größe  $\lambda_r$  hinzu. Auch de Schutter und Bruyninckx [SB96] betrachten den Fall einer rein elastischen Umgebung.

Die bisher dargelegten Regelungsansätze eignen sich nur für den Fall rein kinematischer Zwangsbedingungen zur Umgebung. De Luca und Manes [LM91; LM94] haben einen Regelungsentwurf für solche Kontaktsituationen entwickelt, in denen auch die Umgebung ein dynamisches Verhalten besitzt. Der zuvor dargelegte, in [SSVO10] ausführlich beschriebene Regelungsentwurf geht daraus als Sonderfall hervor. Neben dem Manipulatormodell nach (2-17) und holonomen, skleronomen Zwangsbedingungen nach (2-43) sind bei dynamischem Umgebungsverhalten auch die Bewegungsgleichungen der Umgebung

$$\mathbf{M}_u(\mathbf{y}_d) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{n}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) = \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2-78)$$

mit den Umgebungskoordinaten  $\mathbf{y}_d \in \mathbb{R}^{n_d}$  beim Regelungsentwurf zu berücksichtigen, wobei de Luca und Manes bei ihrer Herleitung voraussetzen, dass  $n_d \leq 6$  gilt. In [LM91] wird hierbei von einer nicht-redundanten Umgebung gesprochen. Die zulässigen Endeffektorposen liegen infolgedessen auf einer  $n_d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. In diesem Fall gibt es neben den Reaktionskräften auch solche Kräfte, über die ein Energieaustausch zwischen dem Manipulator und der Umgebung stattfindet. Diese Größen werden in [LM94] als aktive Kräfte bezeichnet und erhalten im Folgenden den Bezeichner  $\lambda_a \in \mathbb{R}^{n_d}$ . Die Zusammenhänge (2-46), (2-47) erweitern sich dann zu

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}_{\lambda a}(\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k) \cdot \lambda_a + \mathbf{S}_{\lambda r}(\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k) \cdot \lambda_r, \quad (2-79)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}_{yd}(\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k) \cdot \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S}_{yk}(\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k) \cdot \dot{\mathbf{y}}_k. \quad (2-80)$$

Gegenüber (2-46), (2-47) gilt hier für die generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r \in \mathbb{R}^{6-n_d-n_k}$ . Auch hier bestehen Wahlfreiheiten bei der Festlegung von  $\lambda_a$ ,  $\lambda_r$ ,  $\mathbf{y}_d$  und  $\mathbf{y}_k$  sowie der Matrizen  $\mathbf{S}_{\lambda a}$ ,  $\mathbf{S}_{\lambda r}$ ,  $\mathbf{S}_{yd}$  und  $\mathbf{S}_{yk}$ . Analog zu (2-48) gelten die Beziehungen

$$[\mathbf{S}_{yd} \quad \mathbf{S}_{yk}]^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_{yk}^T \cdot [\mathbf{S}_{\lambda a} \quad \mathbf{S}_{\lambda r}] = \mathbf{0}, \quad (2-81)$$

vgl. [LM94]. Durch Einsetzen von (2-79) in die Bewegungsgleichungen des Manipulators (2-17) und der Umgebung (2-78) folgt

$$\mathbf{M}_v \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v = \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{S}_{\lambda a} \cdot \lambda_a - \mathbf{S}_{\lambda r} \cdot \lambda_r, \quad (2-82)$$

$$\mathbf{M}_u \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{n}_u = \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda a} \cdot \lambda_a + \underbrace{\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda r} \cdot \lambda_r}_{=0}. \quad (2-83)$$

Ausgangspunkt zweier möglicher Regelungsentwürfe für den Manipulator ist die zeitliche Ableitung von (2-80),

$$\dot{\nu} = S_{yd} \cdot \ddot{y}_d + \dot{S}_{yd} \cdot \dot{y}_d + S_{yk} \cdot \ddot{y}_k + \dot{S}_{yk} \cdot \dot{y}_k . \quad (2-84)$$

Durch Auflösen der Gleichung (2-82) nach  $\dot{\nu}$ ,

$$\dot{\nu} = M_v^{-1} \cdot (-C_v \cdot \nu - g_v + J_g^{-T} \cdot F_q - S_{\lambda a} \cdot \lambda_a - S_{\lambda r} \cdot \lambda_r) , \quad (2-85)$$

sowie der Gleichung (2-83) nach  $\ddot{y}_d$  und Einsetzen der erhaltenen Zusammenhänge in (2-84) folgt nach einigen Umformungen die Systembeschreibung

$$Q_a \cdot \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{y}_k \end{bmatrix} + n_a = J_g^{-T} \cdot F_q \quad (2-86)$$

mit

$$Q_a = \left[ (M_v \cdot S_{yd} \cdot M_u^{-1} \cdot S_{yd}^T + I) \cdot S_{\lambda a} \quad S_{\lambda r} \quad M_v \cdot S_{yk} \right] , \quad (2-87)$$

$$n_a = M_v \cdot (\dot{S}_{yk} \cdot \ddot{y}_k + \dot{S}_{yd} \cdot \dot{y}_d - S_{yd} \cdot M_u^{-1} \cdot n_u) + C_v \cdot \nu + g_v . \quad (2-88)$$

Wird hingegen (2-83) nach  $\lambda_a$  aufgelöst, in (2-85) eingesetzt und im Anschluss mit (2-84) gleichgesetzt, so folgt die Systembeschreibung

$$Q_d \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{y}_k \end{bmatrix} + n_d = J_g^{-T} \cdot F_q \quad (2-89)$$

mit

$$Q_d = \left[ M_v \cdot S_{yd} + S_{\lambda a} \cdot (S_{yd}^T \cdot S_{\lambda a})^{-1} \cdot M_u \quad S_{\lambda r} \quad M_v \cdot S_{yk} \right] , \quad (2-90)$$

$$n_d = M_v \cdot (\dot{S}_{yk} \cdot \ddot{y}_k + \dot{S}_{yd} \cdot \dot{y}_d) + C_v \cdot \nu + g_v + S_{\lambda a} \cdot (S_{yd}^T \cdot S_{\lambda a})^{-1} \cdot n_u . \quad (2-91)$$

Durch Wahl der Aktorkräfte

$$F_q = J_g^T \cdot \left( Q_a \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_r \\ u_k \end{bmatrix} + n_a \right) \quad (2-92)$$

folgt

$$u_a = \lambda_a , \quad u_r = \lambda_r , \quad u_k = \ddot{y}_k , \quad (2-93)$$

bei Wahl von

$$F_q = J_g^T \cdot \left( Q_d \cdot \begin{bmatrix} u_d \\ u_r \\ u_k \end{bmatrix} + n_d \right) \quad (2-94)$$

folgt

$$u_d = \ddot{y}_d , \quad u_r = \lambda_r , \quad u_k = \ddot{y}_k . \quad (2-95)$$

Werden die Aktorkräfte durch Auswertung von (2-92) oder (2-94) gebildet, so resultiert ein linearisiertes Systemverhalten, auf dessen Grundlage ein einfacher, linearer Regelungsentwurf erfolgen kann, vgl. (2-55) und (2-57). Bei beiden Ansätzen sind stets die gewählten reaktiven Kräfte  $\lambda_r$  und die kinematischen Koordinaten  $y_k$  zu regeln. Je nach Anwendungsfall kann außerdem zwischen einer Kraftregelung der aktiven Kräfte  $\lambda_a$ , aufbauend auf (2-92), und einer Bewegungsregelung der dynamischen Koordinaten  $y_d$ , ausgehend von (2-94), frei gewählt werden. Die Regelung wird durch die Transformationen zwischen den physikalischen Größen, z. B.  $\tau$  und  $z$ , und den generalisierten Größen  $\lambda_a$ ,  $\lambda_r$ ,  $y_d$  und  $y_k$  vervollständigt. Es lässt sich zeigen, dass die Aktorkräfte (2-92) und (2-94) auch bei strikter Durchführung des Regelungsentwurfs der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (siehe Anhang A3) resultieren. Der Nachweis ist in Anhang A4 gegeben.

Ein weiterer Regelungsansatz für Umgebungskontakte mit nicht vernachlässigbaren, dynamischen Eigenschaften wurde durch Featherstone [Fea03] beschrieben. Er nimmt für die Dynamik der Umgebung bzw. des Kontaktpartners die allgemein gehaltene Gleichung

$$\dot{v}_u = \bar{M}_u^{-1} \cdot \tau + \dot{\bar{v}}_u \quad (2-96)$$

an. Die Bewegungsgleichungen des Manipulators sind wieder durch (2-17) gegeben. Voraussetzung der folgenden Herleitungen ist, dass es sich um einen Manipulator mit insgesamt sechs FHG handelt, dessen Massenmatrix  $M_v$  symmetrisch und positiv definit ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass zwischen den beiden Körpern ein reibungsfreier Kontakt vorliegt und dass sich die Relativgeschwindigkeit der beiden in Kontakt stehenden Körper durch eine Gleichung der Form

$$v_{rel} = v - v_u = S_1 \cdot \dot{y}_{rel} \quad (2-97)$$

beschreiben lässt.  $\dot{y}_{rel}$  ist dabei eine spezielle Geschwindigkeitsgröße zur Beschreibung der Relativbewegung. In Analogie zu den bisher dargelegten Ansätzen gilt auch hier (Prinzip der virtuellen Arbeit)

$$S_1^T \cdot \tau = \mathbf{0} . \quad (2-98)$$

Featherstone schafft eine reziproke Basis für die bewegungs- und kraftgeregelten Unterräume  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{F}$ , indem er die Bedingung

$$[S_1 \ S_2]^T \cdot [T_1 \ T_2] = I \quad (2-99)$$

erfüllt. Die reziproke Basis ist dann durch die Spalten der Matrizen  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T_1$  und  $T_2$  gegeben. Aufbauend auf den Matrizen  $S_1$  und  $T_2$  wählt er

$$S_2 = M_v^{-1} T_2 (T_2^T M_v^{-1} T_2)^{-1}, \quad T_1 = M_v S_1 (S_1^T M_v S_1)^{-1} . \quad (2-100)$$

Mithilfe der Transformationen für Bewegungs- (Index  $p$ ) und Kraftgrößen (Index  $f$ ) in diese spezielle Basis

$$X_p = [T_1 \ T_2]^T, \quad X_f = [S_1 \ S_2]^T, \quad X_p^{-1} = X_f^T, \quad X_f^{-1} = X_p^T \quad (2-101)$$

zeigt er, dass die Wahl der Aktorkräfte

$$F_q = J_g^T \cdot (M_v \cdot S_1 \cdot u_p + C_v \cdot v + g_v + T_2 \cdot u_f) \quad (2-102)$$

zu

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{v}}_1, \quad \mathbf{u}_f = \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{S}_2^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 \quad (2-103)$$

mit

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{T}_1^T \cdot \dot{\mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{T}_2^T \cdot \dot{\mathbf{v}}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{S}_2^T \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2-104)$$

führt. Featherstone sieht in (2-102) eine geeignete Grundlage der Regelungssynthese für Systeme, die in Kontakt zu einer Umgebung mit unbekannter Dynamik stehen. Während  $\mathbf{u}_p$  die Eingangsgröße für die Regelung der Endeffektorbeschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}_1$  darstellt, kann  $\mathbf{u}_f$  als Ausgangspunkt des Regelungsentwurfs für die Kontaktkraft  $\boldsymbol{\tau}_2$  dienen. Der Positionsregelungsentwurf kann aufbauend auf  $\dot{\mathbf{v}}_1$  bspw. nach (2-57) erfolgen. Da  $\mathbf{u}_p$  sich linear zu  $\dot{\mathbf{v}}_1$  verhält, genügt unter idealen Bedingungen theoretisch eine Vorsteuerung zur Erzielung einer gewünschten Sollbewegung des Endeffektors.  $\mathbf{u}_f$  verhält sich hingegen nicht linear zu der Kontaktkraft  $\boldsymbol{\tau}_2$ , aber linear zur Summe aus dieser Größe und dem Term  $\mathbf{S}_2^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2$ , den Featherstone als die Kraft bezeichnet, die für das Aufrechterhalten des Kontakts zur Umgebung erforderlich ist. Hier ist also unbedingt ein Regler erforderlich, um gewünschte Kräfte  $\boldsymbol{\tau}_2$  herbeizuführen; eine Vorsteuerung allein genügt nicht. Bei einem Regler nach (2-55) mit  $\mathbf{K}_{P,f} = \mathbf{0}$ , d. h.

$$\mathbf{u}_f = \boldsymbol{\tau}_{2,r} + \mathbf{K}_{I,f} \cdot \int \mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}_2} dt, \quad \mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}_2} = \boldsymbol{\tau}_{2,r} - \boldsymbol{\tau}_2, \quad (2-105)$$

folgt für das Verhalten des geschlossenen Kraftregelkreises

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}_2} + \mathbf{K}_{I,f} \cdot \int \mathbf{e}_{\boldsymbol{\tau}_2} dt = \mathbf{S}_2^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2. \quad (2-106)$$

Je kleiner die Massenmatrix  $\mathbf{S}_2^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_2$  und/oder  $\dot{\mathbf{v}}_2$  im Vergleich zu  $\boldsymbol{\tau}_2$  ist, desto besser ist das resultierende Verhalten. Bemerkenswert ist, dass die Berechnung der Aktorkräfte (2-102) unabhängig vom Modell der Umgebung (2-96) ist. Mit bestimmten Regelgrößen ist es folglich möglich, auch mit einem gegenüber [LM94] reduzierten Modellwissen entkoppelnde Regelungen zu realisieren.

Aufbauend auf seinen Ausführungen in [Fea03] beschreibt Featherstone auch einen erweiterten Ansatz für Manipulatoren mit weniger als sechs FHG, d. h. solche Fälle, in denen nicht nur aus der Umgebung, sondern auch aus dem Manipulator eingeschränkte Bewegungsmöglichkeiten folgen, siehe [Fea04].

Theoretisch lässt sich auch für den Eingang  $\mathbf{u}_f$  lineares Verhalten der Form  $\mathbf{u}_f = \boldsymbol{\tau}_2$  herbeiführen. Hierzu muss der Term  $\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{u}_f$  in (2-102) durch  $\mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{u}_f + \mathbf{S}_2^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2)$  ersetzt werden. Für die Realisierung ist dann eine Messung der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{v}}$  bzw.  $\dot{\mathbf{v}}_2$  erforderlich. Diese Möglichkeit wird weder in [Fea03] noch in [Fea04] erwähnt.

Ausgehend von den identischen Grundgleichungen (2-17), (2-96), (2-97) und (2-98) erreichen Featherstone, Sonck und Khatib [FSK98] mithilfe einer Projektionsmatrix für Bewegungsgrößen  $\mathbf{P}_p$  und einer Projektionsmatrix für Kraftgrößen  $\mathbf{P}_f$  ebenfalls eine Entkopplung. Die Projektionsmatrizen lauten

$$\mathbf{P}_p(\mathbf{G}_p) = \mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{S}_1)_{\mathbf{G}_p}^{+}, \quad \mathbf{P}_f(\mathbf{G}_f) = \mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{T}_2)_{\mathbf{G}_f}^{+}. \quad (2-107)$$

Darin sind  $(S_1)_{G_p^{-1}}^+$  und  $(T_2)_{G_f^{-1}}^+$  die mit  $G_p^{-1}$  bzw.  $G_f^{-1}$  gewichteten Pseudoinversen der Matrizen  $S_1$  und  $T_2$ . Die Berechnungsformel für die gewichtete Pseudoinverse einer Matrix  $X$  mit der Gewichtung  $G$  lautet allgemein

$$X_G^+ = (X^T G X)^{-1} X^T G . \quad (2-108)$$

$G_p$  und  $G_f$  sind lineare Abbildungen von  $\mathcal{P}$  nach  $\mathcal{F}$  bzw. von  $\mathcal{F}$  nach  $\mathcal{P}$ . Zur Sicherstellung der Invarianz der Projektion muss  $G_p$  wie eine Trägheitsmatrix und  $G_f$  wie eine inverse Trägheitsmatrix transformieren [FSK98]. Für die Wahl der Aktorkräfte wird

$$F_q = J_g^T \left( M_v \left( u_p + \bar{M}^{-1} u_f + \dot{\bar{v}}_u \right) + C_v v + g_v \right), \quad \bar{M}^{-1} = M_v^{-1} + \bar{M}_u^{-1} \quad (2-109)$$

angegeben. Es lässt sich zeigen, dass mit diesem Ansatz

$$\dot{v}_{rel} = P_p(\bar{M}^{-1}) \cdot u_p + \bar{M}^{-1} \cdot (I - P_f(\bar{M})) \cdot u_f , \quad (2-110)$$

$$\tau = P_f(\bar{M}) \cdot u_f + \bar{M} \cdot (I - P_p(\bar{M}^{-1})) \cdot u_p \quad (2-111)$$

folgt, wobei

$$\dot{v}_{rel} = \dot{v} - \dot{v}_u - \dot{S}_1 \cdot \ddot{y}_{rel} = S_1 \cdot \ddot{y}_{rel} \quad (2-112)$$

die um die Restbeschleunigung bereinigte Relativbeschleunigung von Manipulator und Umgebung ist. Werden  $u_p$  und  $u_f$  nach

$$u_p = P_p(G_p) \cdot u_{p,u}, \quad u_f = P_f(G_f) \cdot u_{f,u} \quad (2-113)$$

mit einem *beliebig* gewichteten Paar von Projektionsmatrizen aus neuen Eingangsgrößen  $u_{p,u}$  und  $u_{f,u}$  berechnet, so vereinfachen sich die Gleichungen (2-110) und (2-111) zu

$$\dot{v}_{rel} = P_p(G_p) \cdot u_{p,u}, \quad \tau = P_f(G_f) \cdot u_{f,u} , \quad (2-114)$$

sodass die relative Beschleunigung  $\dot{v}_{rel}$  nur vom Eingang  $u_{p,u}$  und die Kontaktkräfte  $\tau$  nur vom Eingang  $u_{f,u}$  abhängen. Ebenso lässt sich zeigen, dass bei Vorgabe von

$$u_{p,u} = S_1 \cdot u_{y_{rel}}, \quad u_{f,u} = T_2 \cdot u_\lambda \quad (2-115)$$

das entkoppelte Systemverhalten

$$\ddot{y}_{rel} = u_{y_{rel}}, \quad \lambda = u_\lambda \quad (2-116)$$

resultiert<sup>8</sup>. Für  $u_\lambda$  und  $u_{y_{rel}}$  können wieder Regelungen analog zu (2-55) und (2-57) erfolgen. Im Gegensatz zu [Fea03] ist für die Berechnung der Aktorkräfte nach (2-109) jedoch die Kenntnis der Bewegungsgleichungen der Umgebung ( $\bar{M}^{-1}, \dot{\bar{v}}_u$ ) erforderlich. Featherstone, Sonck und Khatib nennen als Vorteil des Verfahrens, dass es sowohl die Modellierung als auch die Regelung von dynamischen Kontaktsituationen mit mehreren Kontaktstellen ermöglicht.

Als Fazit zu den direkten Kraftregelungen lässt sich festhalten, dass nur durch die hybride Kraft-/Positionsregelung eine ideale Entkopplung der kraft- und bewegungsgeregelten

<sup>8</sup>Dieser Ansatz wird in [FSK98] nicht explizit genannt.

FHG erreicht wird. Allerdings sind für ihre Umsetzung sehr genaue Modelle des Manipulators und des Kontaktpartners erforderlich. Daher kann ihre praktische Umsetzung abhängig von der betrachteten Anwendung mit einem hohen Modellierungs- und Berechnungsaufwand verbunden sein. Sowohl die Synthese der Regelungsstrategie als auch die Wahl der zugehörigen Sollwerte ist komplex [Cra05]. Bei realen Kontaktsituationen ist diese Vorgehensweise nur bedingt verwendbar, da die kleinste Modellabweichung von der Realität (z. B. gegenseitige Verdrehung der in Kontakt stehenden Körper) dazu führt, dass die Entkopplung der kraft- und positionsgeregelten Richtungen nicht mehr gewährleistet ist. Unter Umständen kann dadurch die Regelung instabil werden. Für den Fall rein kinematischer Zwangsbedingungen zur Umgebung, vgl. (2-43), leiten Cheah, Kawamura und Arimoto [CKA03] Bedingungen an das Ausmaß der Unsicherheit sowie die Regelkreisverstärkungen her, unter denen die Regelung trotz Unsicherheiten in der Kinematik stabil ist. Auch adaptive Regelungen sind dokumentiert, siehe z. B. [ALN93]. Viele der aufgeführten Ansätze zur hybriden Kraft-/Positionsregelung eignen sich darüber hinaus nicht für Situationen mit mehreren Kontaktstellen zur Umgebung.

In der Praxis ist die hybride Kraft-/Positionsregelung daher wenig verbreitet [Cra05]. Hier ist vor allem die parallele Kraft-/Positionsregelung zu finden. Dabei wird zwar keine ideale Entkopplung der geregelten Größen erreicht und die erzielbare Dynamik ist prinzipbedingt aufgrund der relativ langsamen, unterlagerten Positionsregelung geringer. Die Robustheit der Regelung gegenüber Modellunsicherheiten und Störgrößen ist jedoch wesentlich höher.

## 2.2.4 Anwendungsbeispiele

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung von Anwendungsbeispielen für PKM in Kontaktaufgaben. Die Gliederung folgt der des gesamten Unterkapitels 2.2 zu den Kraftregelungsverfahren, d. h. es werden zuerst Beispiele indirekter, dann direkter Kraftregelungsverfahren genannt. In beiden Fällen wurde der Fokus auf relativ aktuelle und für die hier betrachtete Anwendung relevante Beispiele gelegt.

Ein Beispiel für eine Impedanzregelung, die genau wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben durchgeführt wurde, ist die Arbeit von Sadjadian und Taghirad [ST06]. Die Impedanzregelung wird dort für eine drei FHG aufweisende „hydraulische Schulter“ implementiert und anhand von Simulationen validiert. Bild 2-22 zeigt den betrachteten PKM.

Eine Admittanzregelung für einen elektrohydraulischen Hexapod wurde an der Universität Athen von Davliakos und Papadopoulos [DP07; DP09] entworfen. Zu diesem Zweck wurden die Bewegungsgleichungen des Hexapod in den Antriebskoordinaten  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  sowie ein Modell der Hydraulik aufgestellt. Das Regelungskonzept sieht vor, dieses Modell in invertierter Form unter Verwendung zahlreicher Messgrößen für die (dynamische) Vorsteuerung des Systems zu verwenden. Ausgang der Vorsteuerung sind die Ventilströme  $i_v$ , Eingang die Solltrajektorie in den Antriebskoordinaten. Hinzu kommt ein einfacher PD-Positionsregler im JS. Die Sollwertbildung für die Vorsteuerung und Regelung erfolgt mithilfe eines Admittanzmodells analog zu (2-26), wobei sich in diesem Falle alle Größen nicht auf den OS, sondern den JS beziehen. Auch hier wird von entkoppelten Richtungen ausgegangen, d. h. die Matrizen des Umgebungsmodells in (2-26) sind Diagonalmatrizen.



Bild 2-22: „Hydraulische Schulter“ aus [ST06]

Die Umgebungskraft für das Admittanzmodell kann laut [DP09] entweder gemessen oder über das Modell

$$\tau_{u,q} = K_u \cdot (\mathbf{q}_u - \mathbf{q}) \quad (2-117)$$

approximiert werden. Das Strukturbild der Regelung zeigt Bild 2-23.

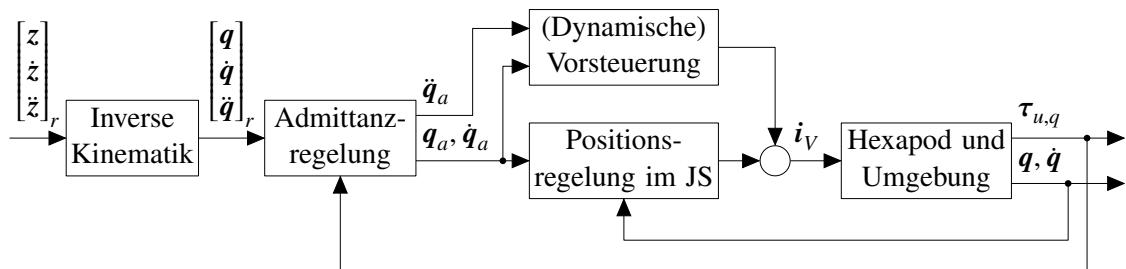


Bild 2-23: Admittanzregelung im JS nach [DP09]

Wie bei der Regelung im JS nach Bild 2-10a wird hierbei geschickt das direkte kinematische Problem umgangen. Anhand von Simulationen mit dem Umgebungsmodell nach (2-117) mit

$$K_u = 5 \cdot 10^4 \cdot I \quad \text{N m}^{-1}, \quad (2-118)$$

d. h. gleicher, entkoppelter Steifigkeit in allen Richtungen des JS, wird die Funktionalität des Ansatzes (auch bei Messrauschen) gezeigt. Dabei wurden die Parameter des Admittanzmodells so gewählt, dass die Stellgrößenbeschränkungen ( $i_V < |i_{V,max}|$ ) stets eingehalten werden. Beim Verfahren gegen eine starre Wand stellt sich im stationären Zustand eine geringe Kontaktkraft ein, die Ist-Position weicht von der Soll-Position ab. Vergleiche mit einem einfachen PD-Regler zeigen, dass der vorgestellte Ansatz auch bei größeren Parameterabweichungen wesentlich besseres Verhalten aufweist.

Als Beispiel für eine Admittanzregelung mit OS-Admittanzmodell sei an dieser Stelle der Regelungsentwurf von Caccavale, Siciliano und Villani [CSV03] für die hybride Kinematik

„Tricept“ genannt, siehe Bild 2-24. Der Tricept besteht aus einer von drei Linearaktoren getragenen Plattform, an der wiederum ein aktuiertes, sphärisches Gelenk montiert ist, sodass das System insgesamt sechs FHG besitzt.

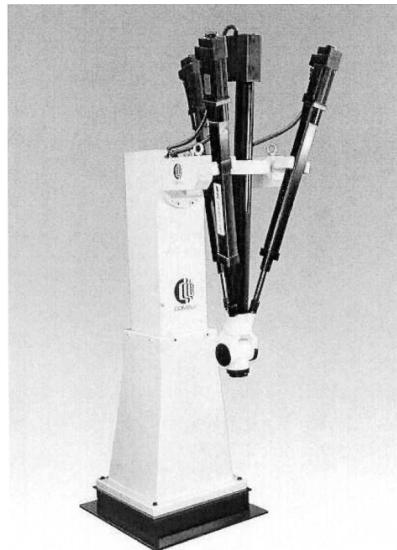


Bild 2-24: Tricept aus [CSV03]

Für die rotatorischen Richtungen wird sowohl die Positionsregelung als auch das Admittanzmodell mithilfe von Einheitsquaternionen formuliert. Hier erfolgt die Validierung des Verfahrens ebenfalls anhand einer Simulation, bei der die Referenztrajektorie des Manipulators durch eine ebene Wand (Steifigkeit  $5 \text{ kN m}^{-1}$ ) blockiert wird.

Eine Steifigkeitsregelung ist in [BMZ02] dokumentiert. Gegenüber (2-31) wurde zusätzlich die Sollgeschwindigkeit berücksichtigt. Die Regelung wird dort für das Simulationsmodell eines rein translatorisch arbeitenden PKM für Montagezwecke implementiert und erprobt. In [LLL93] wird ebenfalls eine Steifigkeitsregelung, in diesem Falle für einen Hexapod zur spanenden Werkstückbearbeitung, angegeben. Eine Erprobung im Rahmen von Simulationen oder Experimenten ist nicht dokumentiert.

Ein PKM, für den in [CS03; CPP06] eine parallele Kraft-/Positionsregelung beschrieben wird, ist der 3-RCC-Mechanismus. Der Endeffektor wird durch drei Linearaktoren getragen, die über Drehgelenke an die Basis und über Drehschubgelenke an den Endeffektor gekoppelt sind. Die Linearaktoren selbst können als Drehschubgelenke abstrahiert werden. Die Arbeiten wurden an der Università Politecnica delle Marche (Ancona, Italien) durchgeführt. Bild 2-25 zeigt den PKM sowie die eingesetzte Regelungsstruktur.

Für das System wurde eine Co-Simulationsumgebung aus ADAMS-MKS-Modell und dem Regelungsalgorithmus in MATLAB/Simulink aufgebaut. Anhand dieser wurden diverse Tests zum Systemverhalten durchgeführt, bspw. im Falle von Parameter- und Messfehlern. Es werden typische Kraftreglungsaufgaben betrachtet, etwa das Verfahren einer Trajektorie entlang einer abgewinkelten Oberfläche bei simultanem Halten einer definierten Kontaktkraft sowie das Einfügen von Stiften in dafür vorgesehene Bohrungen (engl. peg in hole). Als Umgebungssteifigkeit wird  $10 \text{ MN m}^{-1}$  genannt. Für die Regelung werden diagonale Reglerverstärkungen verwendet. Die jeweiligen Werte werden angegeben, deren Zustandekommen aber nicht erläutert.

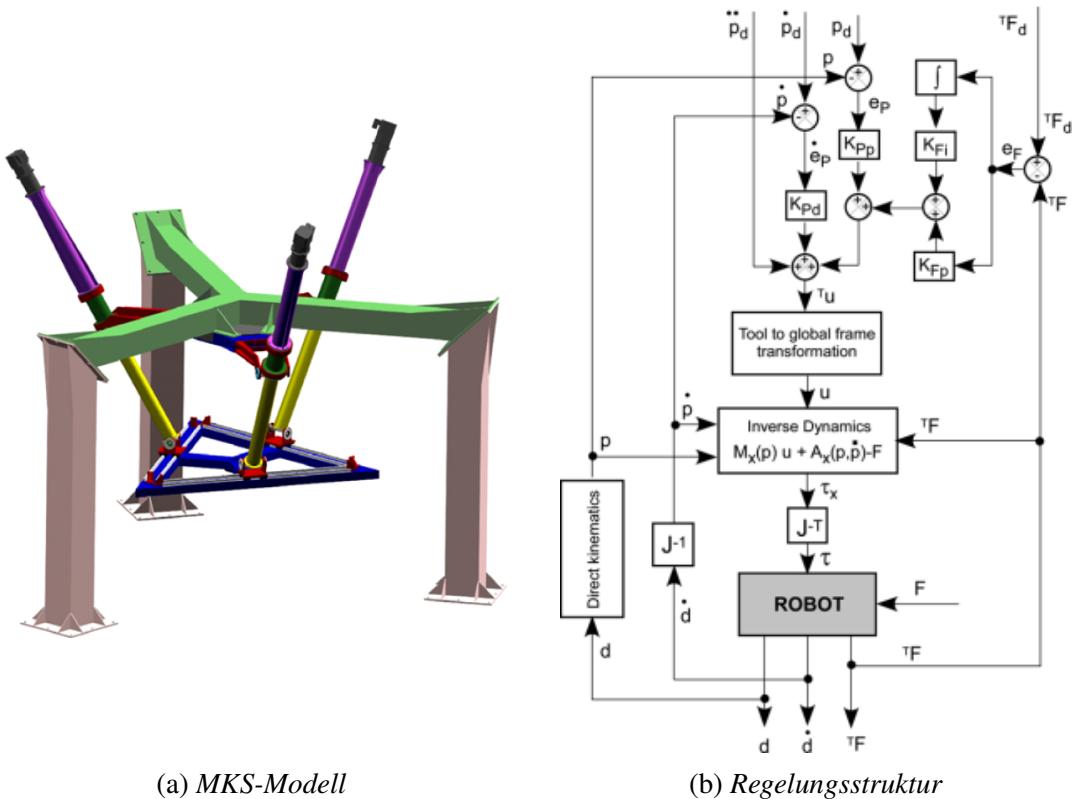


Bild 2-25: 3RCC-Parallelkinematik [CPP06]

[DDD10] stellt eine vergleichbare Arbeit für einen Hexapod dar. In der Veröffentlichung wird nicht nur ein gleich aufgebauter Regler verwendet, auch einzelne Passagen der Arbeit weisen hohe Ähnlichkeit zu denen in [CPP06] auf.

Die Regelungsstruktur wurde darüber hinaus auch an der LASMEA-CNRS-Université Blaise Pascal (Aubière, Frankreich) durch Bellakehal et al. [BAMT11a; BAMT11b] aufgegriffen. Der Fokus der Arbeiten liegt auf der Erfassung der Endeffektorpose  $z$  mittels eines Kamerasytems. Das Regelungskonzept mit kamerabasierter Positionsschätzung wurde für diverse PKM-Beispielsysteme innerhalb von Computersimulationen getestet, darunter auch ein elektromechanischer Hexapod für Lehrzwecke. Der Regler wird mit dem Faustformelverfahren nach Ziegler und Nichols parametriert. Das simulierte Szenario sieht immer gleich aus: anhand einer gegebenen Bewegungstrajektorie nähert sich der jeweilige Endeffektor einer ebenen Oberfläche an. Nach Auftreffen auf die Oberfläche korrigiert der Kraftregler die gegebene Solltrajektorie so, dass eine konstante Kontaktkraft erzielt wird. Je PKM werden vier verschiedene Fälle simuliert, die sich durch die Qualität des Kamerasytems und/oder des Kraftsensors unterscheiden. Zu erwähnen ist, dass die Solltrajektorie zwar innerhalb der Umgebung, jedoch stets in einer parallel zu dessen Oberfläche liegenden Ebene geplant ist, was günstig für die Kraftregelung ist. Als Kontaktpartner in den Simulationen wird eine ebene Fläche mit der Steifigkeit  $10^4 \text{ N m}^{-1}$  betrachtet. In allen betrachteten Fällen kann die Regelung innerhalb kurzer Zeit die gewünschte Kontaktkraft zur Oberfläche und gleichzeitig die (durch den Kraftregler korrigierte) Solltrajektorie abfahren. Die experimentelle Validierung des Verfahrens wird im Fazit in Aussicht gestellt.

Am Institut für Fertigungs- und Werkzeugmaschinen der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover wurde ein Hexapod aufgebaut, an dem im Rahmen der Dissertation von Christian Holz [Hol07] ebenfalls eine hybride Kraft-/Positionsregelung implementiert wurde. Als Zielsetzung wird u. a. genannt, das System für die spanende Bearbeitung einzusetzen. Die Messung der Kontaktkräfte und -momente erfolgt mithilfe eines entsprechenden Sensors an der Endeffektorplattform. Als Aktoren kommen Lineardirektantriebe zum Einsatz, aufgrund dessen der Hexapod auch den Namen PaLiDa trägt (PKM mit Lineardirektantrieben). Die Regelungsstruktur ist in Bild 2-26 dargestellt.

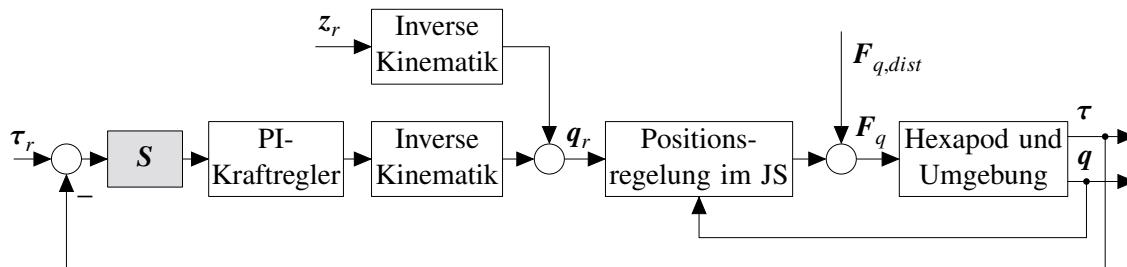


Bild 2-26: Kraft-/Positionsregelung der PaLiDA [Hol07]

Als unterlagerte Regelung kommt eine Positionsregelung im JS zum Einsatz. Sie erhält einerseits Positionssollwerte, die direkt mithilfe der inversen Kinematik aus der gegebenen Sollpose des Endeffektors  $z$ , berechnet werden. Diese Sollwerte werden durch die Kraftregelschleife modifiziert, wobei zur Regelung ein (für alle Richtungen unabhängiger) PI-Regler eingesetzt wird. Laut [Hol07] erfolgt die Summation der Positionsvorgabe mit der Kraftregelvorgabe nicht in OS-Koordinaten, da hierfür die Lösung des DKK erforderlich wäre. Die Funktionalität der Regelung wird anhand von Prüfstandsversuchen getestet. Dabei wird die Kontaktaufnahme und das Halten einer Kraft zu einer unnachgiebigen Oberfläche betrachtet. Bei ausschließlicher Kraftregelung in  $z$ -Richtung wird nach Kontakt- aufnahme zur Umgebung die Sollkraft von 20 N nach ca. 3 s erreicht, Wechselwirkungen mit anderen Richtungen bestehen nicht. Für Kraftregelung in  $x$ -Richtung stellen sich sowohl in der  $x$ - als auch der  $y$ -Richtung Kräfte ein, wobei die Regelungsdynamik mit der der  $z$ -Richtung vergleichbar ist. Aus dem in [Hol07] gegebenen Zeitverlauf geht nicht hervor, ob die Kraft in  $x$ -Richtung stationär genau eingeregelt wird. Außerdem bleibt die Frage offen, ob die Kraft in  $y$ -Richtung aus einer schräg gestellten Oberfläche resultiert oder durch die gewählte Regelungsstruktur bedingt ist. Der Kraftregler nimmt hinsichtlich der Kraft in  $y$ -Richtung keine Korrekturmaßnahmen vor, da er ausschließlich in  $x$ -Richtung aktiviert wurde. Die Vorgabe von Sollmomenten wird nicht betrachtet. Es wird betont, dass der PI-Regler bewusst langsam ausgelegt wurde, um eine sanfte Kontaktaufnahme zu gewährleisten.

Ein weiteres Beispiel einer Kraft-/Drehmomentregelung mit unterlagerter Bewegungsregelung im JS sind die Arbeiten von Reisinger [Rei08; RWKS11] im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 562 (Parallelroboter für Handhabung und Montage) an der Technischen Universität Braunschweig. Er nutzt einen PI-Regler für die Kraft, aus dessen Ausgang mithilfe eines  $PT_3$ -Trajektoriengenerators die Sollwerte der unterlagerten Bewegungsregelung im JS gebildet werden. Durch Nutzung der unterlagerten Bewegungsregelung im JS kann das direkte kinematische Problem umgangen werden. In den genannten Arbeiten werden

alle drei Phasen der Kraftregelung (freie Bewegung, Transitions- bzw. Übergangsphase und Kontakt, vgl. Abschnitt 2.2) betrachtet. Die Durchführung der Roboteraufgabe wird dabei durch Einführung sog. Aktionsprimitive, d. h. atomare Teilaufgaben, vereinfacht, zwischen denen im Betrieb situationsbedingt umgeschaltet wird. Es erfolgt eine ausführliche Behandlung der Transitionsphase, die mit dem Stoßprozess von Moreau modelliert wird. Die experimentelle Validierung der Regelung erfolgt anhand von Blockplatzierungs- und Konturfolgeversuchen, die mit einem PKM mit sechs FHG durchgeführt wird.

In [LPBC14; LPBC18] wird die Implementierung einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für einen Hexapod beschrieben. Die geplante Anwendung besteht in der Durchführung des Nooru-Mohamed-Tests. Dabei handelt es sich um eine Bauteilprüfung, bei der die Materialprobe einer Reihe kombinierter Zug-/Druck- und Scherbeanspruchungen ausgesetzt wird. Bild 2-27 zeigt das Prüfsystem, wobei der passive Hexapod der Kraftmessung dient.

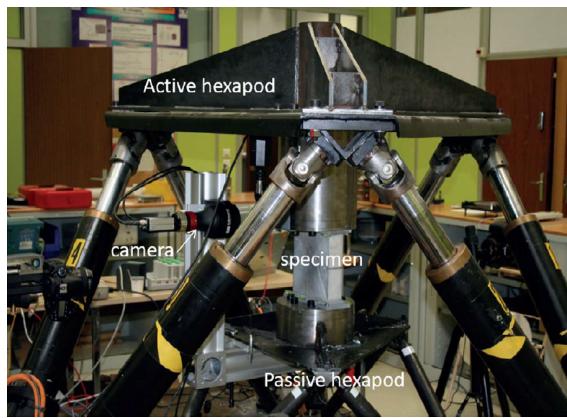


Bild 2-27: Prüfsystem für Bauteilprüfungen mittels Nooru-Mohamed-Test [LPBC18]

Da der Nooru-Mohamed-Test quasistatisch abläuft, reicht das statische Modell des PKM für die Regelungssynthese aus. Auch die Jacobimatrix  $J_g$  kann als konstant angenommen werden. Für die Position wird ein PI-, für die Kraft ein I-Regler verwendet. Die Regelungsstruktur zeigt Bild 2-28.

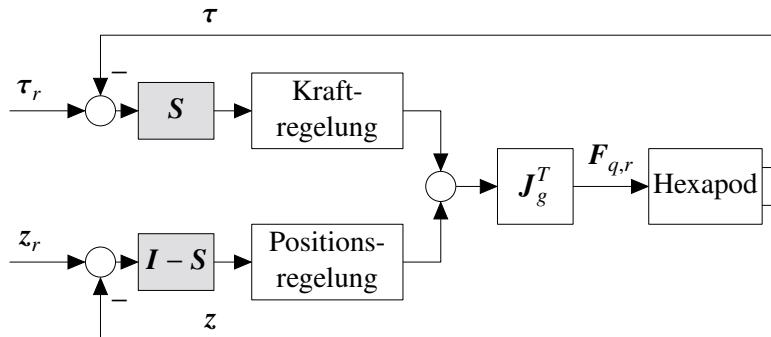


Bild 2-28: Regelungsstruktur nach [LPBC18]

Die Regelung des Hexapod wird nur anhand von Simulationen (Co-Simulation von ADAMS und MATLAB/Simulink) validiert, da am Testsystem weitere Änderungen vor der Inbetriebnahme erforderlich waren. Die experimentelle Validierung erfolgt in [LPBC18] an einem einfacheren PKM, der aus fünf in einer Ebene liegenden Stäben besteht.

Ein ähnlich aufgebautes Prüfsystem wird in [WFC14] beschrieben. Es erfolgt eine Sollkraft- bzw. -momentvorgabe in allen sechs Richtungen. Für die Regelung wird ein JS-PID-Kraftregler eingesetzt, der sich an die vorliegende Umgebungssteifigkeit adaptiert. Für die Bildung der Aktorsollwerte  $\mathbf{F}_{q,r}$  wird die Bewegungsgleichung (2-17) nach  $\mathbf{F}_q$  aufgelöst. Die Sollwerte  $\mathbf{F}_{q,r}$  folgen durch Einsetzen der geschätzten Istwerte der Position  $\mathbf{z}$  und ihrer zeitlichen Ableitungen sowie der gewünschten Kontaktkraft  $\tau_r$  in die erhaltene Gleichung. Die Schätzung der Istposition  $\mathbf{z}$  erfolgt mittels Newton-Raphson-Verfahren. Bild 2-29 zeigt das zugehörige Strukturbild.

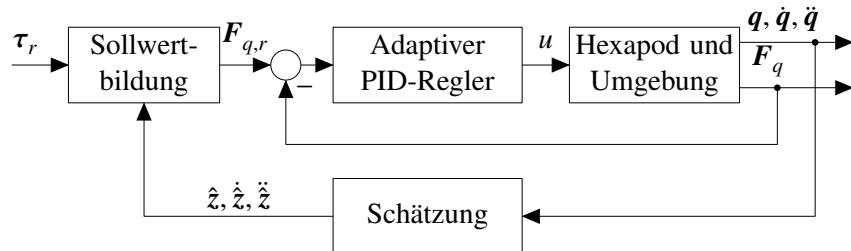


Bild 2-29: Regelungsstruktur mit Kraftregelung im JS nach [WFC14]

Anhand einer Co-Simulation von ADAMS-MKS-Modell und MATLAB/Simulink wird die Funktionalität des Ansatzes gezeigt. Es wird nicht untersucht, ob die JS-Regelung die gewünschten OS-Belastungen auch bei größeren Abweichungen des Manipulatormodells nach (2-17) vom realen System erzielt. In [GWF<sup>+</sup>16] werden experimentelle Ergebnisse für das System gezeigt, die bei sehr langsam ablaufenden Prüfmanövern eine sehr gute Übereinstimmung von Soll- und Istbelastung aufweisen.

Eine hybride Kraft-/Positionsregelung in der nach Fisher und Mujtaba [FM92] korrigierten Fassung wurde von Madani und Moallem [MM11] für einen flexiblen PKM implementiert. Sämtliche Glieder und Gelenke des planaren Manipulators sind, mit der Ausnahme des mit der Umgebung in Kontakt stehenden Bauteils, starr ausgeführt. Das flexible Glied wird in der Veröffentlichung als „Biegebalken“ abstrahiert.

Ein Anwendungsfall einer hybriden Kraft-/Positionsregelung in analytischer Formulierung mit rein kinematischen Zwangsbedingungen ist in [SFS95] beschrieben. Dort wird der von Yoshikawa [Yos87] beschriebene Regelungsansatz für einen PKM implementiert. Bei dem PKM handelt es sich um das planare Äquivalent einer Stewart-Plattform, d. h. einen von drei Linearaktoren getragenen Endeffektor, wobei sich jeder Aktor aus der Abfolge eines Dreh-, eines Schub- und eines Drehgelenks zusammensetzt. Anhand von Simulationen wird die Eignung des Verfahrens für das Stirnfräsen evaluiert.

Unter anderem auf den Arbeiten von Yoshikawa [Yos87] baut auch die Dissertation von Linke [Lin03] auf. Dort werden die Anforderungen an einen Lastsimulator zur Quantifizierung der mechanischen Eigenschaften chirurgischer Wirbelsäulenimplantate genannt: der Lastsimulator muss alle sechs FHG bei hybrider Zieldefinition (Kraft/Position) aktuieren können. Für eine realitätsnahe Prüfung wird der Frequenzbereich 1-7 Hz angegeben. Infolgedessen wird in der Ausarbeitung die Modellierung und der Entwurf einer hybriden Entkopplungsregelung für einen Hexapod mit hydraulischen Aktoren im Kontakt mit einer elastischen Umgebung (diagonale Steifigkeitsmatrix bei spezieller Koordinatenkonvention) beschrieben. Die Messung der Kontaktkräfte erfolgt dabei durch Kraftsensoren an den Enden der Kolbenstangen der hydraulischen Gleitlaufzylinder, nicht durch einen

6-FHG-Kraftaufnehmer wie beim HNI-Hexapod. Aufgrund diverser Unzulänglichkeiten des Prüfsystems (geringe Leistungsfähigkeit und stark unterschiedliches Verhalten der einzelnen Zylinder, Stick-Slip-Effekte) erfolgt die experimentelle Verifikation der Algorithmen nur im quasistatischen Betrieb. Linke zieht das Fazit, dass „unter den in dieser Arbeit betrachteten Randbedingungen [die hybride Entkopplung] eher von theoretischem Nutzen ist, als von praktischem. Die realen Bedingungen unterscheiden sich so stark von den üblichen vereinfachenden Annahmen, dass die Methode der dynamischen Entkopplung nicht mehr zu dem Ziel einer zumindest weitgehend entkoppelten Regelstrecke führt“ [Lin03, S. 159].

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass auch Veröffentlichungen existieren, bei denen die Regelungsgüte von Robotern in Kontaktaufgaben durch den Einsatz von ILR verbessert wird. Ein Beispiel hierfür ist [VZL10], wo eine Kombination von hybrider Kraft-/Geschwindigkeitsregelung und ILR für die Durchführung von Konturfolgeaufgaben mit einem seriellen Manipulator beschrieben wird. Aktuelle Beispiele sind [PGMN16; BWL17].

## 2.3 Modellierung und Simulation von Achsprüfungen

Das Ziel dieser Arbeit ist der Entwurf von Regelungsalgorithmen für die parallelkinematische Anregungseinheit des betrachteten Prüfstands, die sich für den Achsprüfbetrieb eignen. Der Entwurf und die Erprobung der Regelung wird anhand eines Simulationsmodells des Gesamtsystems aus Hexapod und Prüfling durchgeführt. Im Anschluss erfolgt die Übertragung der Regelung auf den Prüfstand.

Wie sich im vorangegangenen Abschnitt gezeigt hat, ist sowohl das Manipulator- als auch das Umgebungsmodell bei der Regelungssynthese von großer Bedeutung. Je nach Regelungsansatz sind die Modelle auch Teil des Regelungsalgorithmus. Bei einem idealen Modell der Regelstrecke lässt sich eine ideale Entkopplung von bewegungs- und kraftgeregelten Subräumen erreichen. Aufgrund dessen soll im Rahmen dieser Arbeit ein möglichst detailliertes Modell des betrachteten Systems erstellt werden, um auch beim Regelungsentwurf darauf zurückgreifen zu können.

An diesem Punkt stellt sich die Frage, welche Literatur es speziell zum Thema der Modellierung von Achsprüfständen sowie der Simulation von Achserprobungen gibt. Der erste Unterabschnitt fasst daher einige ausgewählte Literaturbeispiele für die numerische Simulation von Achsprüfungen, deren Zweck und die Ergebnisse der jeweiligen Studien zusammen.

Für die Regelungssynthese von hohem Wert ist die Kenntnis der Zustandsgleichungen des Systems. Im vorliegenden Fall sind dies vor allem die Bewegungsgleichungen des mechanischen Grundsystems, die sich z. B. mithilfe des Prinzips von Jourdain (vgl. Anhang A2) herleiten lassen.

Aufgrund des zeitweise sehr hohen Interesses an PKM liegen zahlreiche Arbeiten insb. auch zum Thema der Modellierung von Hexapoden vor. Als Beispiel sei hier die vielzitierte Arbeit von Dasgupta und Mruthyunjaya [DM98] genannt, in der ein 13 massebehaftete Starrkörper umfassendes Modell (Endeffektor sowie je sechs untere und obere Aktorkom-

ponenten) sowohl für den Fall der 6-UPS- als auch für die 6-SPS-Plattform<sup>9</sup> beschrieben sind. Über diese Arbeit hinaus existieren zahlreiche weitere Veröffentlichungen, in denen die Modellierung von Hexapoden behandelt wird, z. B. [YSD10]. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist jedoch problemlos nach Abschnitt A2 möglich und erfolgte in der vorliegenden Arbeit auch für ein Modell mit 13 massebehafteten Starrkörpern auf ebendiesem Weg. Auf eine ausführliche Betrachtung von Literatur zum Thema der Hexapodmodellierung wird daher an dieser Stelle verzichtet.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen der MacPherson-Radaufhängung ist je nach gewünschter Modellierungstiefe hingegen sehr anspruchsvoll. In Abschnitt 2.3.2 schließt sich ein umfassender Stand der Technik in der Modellierung der MacPherson-Radaufhängung an.

Dieses Unterkapitel schließt mit einem kurzen Einblick in die Modellierung von Elastomerlagern ab, da deren Berücksichtigung bei der Modellierung der Radaufhängung die Güte des Modells erheblich steigern kann.

### 2.3.1 Anwendungsbeispiele

Für die simulierte Erprobung von Achsen am Computer gibt es diverse Beispiele. Zwei Veröffentlichungen wurden mit [SD08; DSB09] bereits in Abschnitt 2.1.4 genannt. Das MKS-Modell in ADAMS/Car wurde in diesen Quellen vor allem für die Systemauslegung verwendet. Dort wurde - im Gegensatz zu den nachfolgenden Beispielen - ebenfalls ein Hexapod als Anregungseinheit eingesetzt.

In [LE00; KLSZ02] wird eine vollständig numerische Betriebsfestigkeitsanalyse durchgeführt und die Stärken und Schwächen dieser Methode beurteilt. Zu diesem Zweck wird eine digitalisierte Straße mit einem virtuellen Fahrzeugprototyp befahren. Das Fahrzeugmodell wurde in ADAMS implementiert, wobei das physikalisch motivierte Reifenmodell RMOD-K [Oer11] zum Einsatz kommt. Durch das MKS-Fahrzeugmodell werden während der virtuellen Testfahrt Schnittkräfte berechnet, die zur Berechnung der Strukturspannungen mithilfe der FE-Methode verwendet werden. Die Ergebnisse der FE-Berechnungen dienen als Grundlage der anschließenden Betriebsfestigkeitsanalyse. Eine Simulation des gesamten Prüfstands ist bei der gewählten Vorgehensweise nicht erforderlich.

Ein Beispiel für die MKS-Modellierung eines vollständigen konventionellen Testsystems inklusive Aktorik und Prüfling sind die Arbeiten von Oppermann et al. bei der BMW AG [OBL02]. Die Modellierung erfolgt ebenfalls in ADAMS. Im Rahmen von Simulationen werden an diesem virtuellen Prüfstand wie an seinem realen Gegenstück Target-Signale aus dem Fahrversuch mithilfe des TWR-Algorithmus nachgebildet. Auch die im Fahrversuch gemessenen Eingriffe eines aktiven Stabilisators finden dabei durch die Verwendung als Slave-Drives Berücksichtigung, vgl. Abschnitt 2.1.2. Als Einsatzzweck des Modells wird die Verbesserung der zugrunde liegenden Teilmodelle angegeben. Außerdem kann aufgrund der hohen Vergleichbarkeit von virtuellem und realem Prüfstandssystem eine Entwicklung von Iterationsstrategien am virtuellen Prüfstand erfolgen. Die Nachbildung der verwendeten Target-Signale gelingt im Modell; leider erfolgt aus diversen Gründen kein Test der am virtuellen Prüfstand gebildeten Drive-Signale am realen System. In

<sup>9</sup>Siehe S. 2 für die Erläuterung von 6-UPS- und 6-SPS-Plattform.

Folgearbeiten [OHO<sup>+</sup>05; OHW06] wird darüber hinaus auch die numerische Betriebsfestigkeitsbeurteilung betrachtet, deren zunehmende Bedeutung (schon damals) betont wurde. Arbeiten, die ebenfalls numerische Betriebsfestigkeitsuntersuchung an vollständigen MKS-Prüfstandsmodellen sowie die virtuelle Drive-File-Generierung thematisieren, wurden auch bei der DaimlerChrysler AG [NHDS04] durchgeführt. In [BLM<sup>+</sup>14; BHMM16] wird die Lastdatengenerierung für Prüfstandsversuche anhand von MKS-Gesamtfahrzeugsimulations unter Einbeziehung aktiver Fahrwerkregelsysteme thematisiert (Daimler AG). Auch für Porsche sind derartige Aktivitäten dokumentiert [BM07], wobei die Co-Simulation von Regelsystem und MKS-Fahrzeugmodell für die Lastdatengenerierung als geeignet beurteilt wird, da die Simulationsergebnisse sehr gut mit Messungen aus dem Fahrversuch übereinstimmen. Sowohl die Co-Simulation als auch die notwendigen Modelle werden als sehr komplex angesehen. MKS-Simulationsmodelle inklusive Fahrwerkregelungsalgorithmen wurden auch bei Toyota erstellt und deren Nutzbarkeit für die numerische Betriebsfestigkeitsbeurteilung analysiert [SNK<sup>+</sup>10].

Ein weiteres Beispiel für einen vollständig virtuellen Prüfstand beschreibt [WJB07]. Dort wird die numerische Simulation einer kompletten Achsprüfung am Beispiel des 12-Kanal-Achsprüfstands des Fraunhofer LBF beschrieben. Auch dieser Arbeit liegt ein MKS-Modell zugrunde. Als Einsatzzwecke des Modells wird die Simulation von Achsprüfungen in frühen Entwicklungsphasen sowie die Analyse und Optimierung bestehender und neuer Prüfkonzepte angegeben. Außerdem ist mit einem solchen Modell die Möglichkeit einer virtuellen Voriteration von Drive-Files gegeben, sodass weniger Iterationen am realen System erforderlich sind und der Iterationsstart bereits vor Vorliegen eines physikalischen Prototypen erfolgen kann. Auch die simulationsgestützte Ableitung vereinfachter Bauteilversuche mit vergleichbarer Schädigung ist möglich, vor allem vor dem Hintergrund einer weit höheren Zahl an Systemgrößen in der Simulation im Vergleich zum Fahrversuch.

Die Veröffentlichungen von Weigel et al. [WWBD07; WWJ<sup>+</sup>11] geben einen Einblick in die Achserprobung bei Mercedes-Benz Vans. Auch dort kommen Computersimulationen zum Einsatz. Im vorliegenden Fall handelt es sich um ein MKS-Modell eines 13-Kanal-Achsprüfstands (jeweils drei Kräfte und Momente am Radträger je Achsseite, Antriebsmoment) in MATLAB/Simscape, das in Co-Simulation mit einem Modell der Hydraulik und der Regelung (MATLAB/Simulink) eingesetzt wird. Neben der virtuellen Voriteration, die durch den Wegfall physikalischer Iterationen sowie den frühen, virtuellen Iterationsstart eine erhebliche Entwicklungszeitverkürzung mit sich bringt, werden weitere Vorteile, u. a. die Erzeugung von Rauschsignalen für die Systemidentifikation, die Optimierung von Regelkreisparametern sowie der Test von Iterationsstrategien genannt. Es wird betont, dass nicht das Ziel verfolgt wird, Achserprobungen gänzlich durch Simulationen zu ersetzen. Stattdessen soll der gesamte Prüfprozess durch die Unterstützung mit Simulationen effizienter gestaltet werden. In dieser Quelle sind auch einige Details zu den eingesetzten Reglern angegeben, die die Aussagen im Stand der Technik zur Achsprüfung (Abschnitt 2.1) stützen: die vertikale Richtung wird mit einem PID-Positionsregler betrieben, während Längs- und Querkraft sowie das Sturz- und Spurmoment (Momente um die Längs- und Vertikalachse) kraftgeregelt aktuiert werden. Bei den Kraftreglern handelt es sich jeweils um eine Kaskadenregelung mit innerer Positionsregelschleife. Die Regelung des Bremsmoments (Moment um die Querachse) erfolgt je nach Bremszustand drehmomentgeregelt (bei betätigter Bremse) oder winkelgeregelt (bei ungebremster Fahrt). Außerdem wird die Validierung des enthaltenen Achsmodells beschrieben. Hierzu werden die im

Fahrversuch gemessenen Schnittkräfte und -momente zwischen Aktorik und Radträger in das Achsmodell eingeleitet. Da sich die Achse am „Ende der Kraftflusskette“ befindet, kann die Validierung ohne Betrachtung der restlichen Systemkomponenten (z. B. der Anregungseinheiten) erfolgen. Die Autoren heben die hohe Bedeutung der Modellgüte für eine erfolgreiche virtuelle Simulation von Achserprobungen hervor. Als Haupteinflussfaktoren wurden hierbei durch den Vergleich von Simulationen und Validierungsmessungen die Modellierung der Radaufhängung, insb. die Elastomerlager und Dämpfung, ermittelt.

You und Fricke [YF11] entwickeln einen Ansatz, den sie als Hybrid System Rapid Convergence (HSRC) bezeichnen. Sie beschreiben zunächst zwei mechatronische HiL-Simulationen. Das eine Beispiel ist ein Viertelfahrzeugprüfstand, bei dem das Rad in vertikaler Richtung angeregt wird. Außerdem wird ein Fahrzeug-Stoßdämpferprüfstand beschrieben, bei dem ausschließlich die Dämpfer aufgebaut sind. Sie sind über vier eindimensional arbeitende Aktoren mit einem Simulationsmodell des Restfahrzeugs gekoppelt. HSRC wird als Möglichkeit beschrieben, eine Kopplung von realen und virtuellen Teilsystemen auch für komplexere Anwendungsfälle zu realisieren. Die Kopplung erfolgt nicht wie bei der mechatronischen HiL-Simulation in Echtzeit, sondern durch sequentielles Durchführen von Computersimulation und Prüfstandsmessung. Zentraler Bestandteil ist der TWR-Algorithmus, mit dessen Hilfe iterativ eine zunehmende Übereinstimmung der virtuellen und der physikalischen Systemantworten herbeigeführt wird. Als Beispiel dient u. a. ein Achsprüfstand, der mit einem virtuellen MKS-Fahrzeugmodell (ADAMS/Car) gekoppelt ist. You und Fricke nennen diverse Vorteile dieses Verfahrens. So ist im Gegensatz zur mechatronischen HiL-Simulation bspw. keine schnelle Prüfstandsregelung für die Realisierung erforderlich; stattdessen kann auf den bewährten TWR-Algorithmus zurückgegriffen werden. Außerdem können auch sehr rechenaufwändige Modelle des virtuellen Restsystems zum Einsatz kommen. Schwer zu modellierende Teilsysteme können wiederum einfach als physikalisches Teilsystem in der Prüfung berücksichtigt werden. Nachteilig ist der durch die Iteration bedingte, deutlich höhere Zeitaufwand. HSRC ist Teil des Angebots von MTS Systems Corporation. Das Beispiel belegt den Bedarf nach HiL-Prüfständen in der Fahrwerkstechnik.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ganze Achserprobungen aufgrund der damit verbundenen Vorteile vor allem hinsichtlich der Effizienzsteigerung in der Achsentwicklung zunehmend auch simuliert werden. Zu diesem Zweck werden umfangreiche MKS-Modelle von ganzen Fahrzeugen und/oder der in einem typischen Achsprüfstand vorliegenden Komponenten verwendet. Es herrscht weitgehend Konsens, dass Fahr- und Prüfstandsversuche nicht ganz wegfallen können, deren Anzahl durch Computersimulationen jedoch deutlich reduziert werden kann. Zu dieser Einschätzung kommen auch Ersoy, Elbers und Schick [EG17, S. 285] und Adamski [Ada14, S. 100]. Die Simulationen dienen dabei vor allem für Voruntersuchungen und zur Optimierung der durchgeführten Tests. Je nach Anwendungsfall sind hierfür hochdetaillierte Modelle aller beteiligter Komponenten erforderlich. Der Zweck des Fahr- und Prüfstandsversuchs verschiebt sich infolgedessen zunehmend in Richtung der Feinabstimmung von Radaufhängungseigenschaften.

### 2.3.2 Radaufhängung nach dem MacPherson-Prinzip

Das Fahrwerk stellt die Verbindung zwischen dem Aufbau eines Fahrzeugs bzw. dessen Karosserie und den Rädern her. Wesentlicher Bestandteil sind Feder und (Stoß-) Dämpfer für jedes Rad, durch die Aufbaubewegungen infolge einer vertikalen Radbewegung (z. B. durch eine unebene Fahrbahn) reduziert und damit Fahrsicherheit und -komfort gewährleistet werden. Es existieren verschiedene Konstruktionen, über die die Aufhängung des Rades am Aufbau erfolgen kann. Neben Starrachsen sowie Verbundlenker- bzw. Halbstarrachsen kann die Radführung auch über Einzelradaufhängungen umgesetzt werden. Ein guter Überblick findet sich bspw. in [EG17; SHB18; Ada14].

Ohne Vorliegen einer Radaufhängung besitzt jeder Radträger sechs FHG, d. h. er kann sich frei im Raum bewegen. Im Falle einer ungelenkten Hinterachse müssen fünf dieser FHG durch konstruktive Maßnahmen eingeschränkt werden, sodass nur noch die Einfederung des Radträgers zugelassen wird. Eine Vorderradaufhängung erfordert hingegen mit der Lenkbewegung einen weiteren FHG, sodass in diesem Fall nur vier der sechs FHG des Radträgers eingeschränkt werden müssen. Der gesamte Mechanismus einer Radaufhängung weist daher idealisiert einen bzw. zwei FHG auf. Bei Einbeziehung des Rades bzw. der Radnabe kommt ein weiterer FHG hinzu: dieser besteht zwischen dem Radträger und der Radnabe und spiegelt die Rollmöglichkeit des Rades wider.

Die Sperrung der FHG des Radträgers kann bspw. durch einfache Stablenker umgesetzt werden. Dabei handelt es sich abstrahiert um einen einfachen Stab mit Kugelgelenken an den Enden. Als Beispiel dient hier die Fünflenkerachse, bei der der Radträger über fünf Stablenker mit dem Fahrzeugaufbau verbunden ist. Wird eines der beiden Kugelgelenke durch ein Drehgelenk ersetzt, so liegt ein Quer- oder auch Dreieckslenker vor, der zwei FHG einschränken kann. Bei der Doppelquerlenkerachse werden zwei Querlenker und ein Stablenker kombiniert, sodass fünf der sechs FHG des Radträgers gegenüber dem Aufbau eingeschränkt werden. Im Falle einer Trapezlenkerachse wird ein sog. Trapezlenker eingesetzt, bei dem auch das zweite Kugelgelenk durch ein Drehgelenk ersetzt wird, sodass der Trapezlenker allein vier FHG einschränkt. Der verbliebene einzuschränkende FHG wird durch einen Stablenker gesperrt. Je nachdem, ob es sich im spezifischen Fall um eine Vorder- oder Hinterachse handelt, ist einer der Stablenker nicht fest mit der Karosserie, sondern mit dem Lenkgestänge verbunden. Über das Lenkgestänge wird die Lenkbewegung des Fahrers auf beide Räder der Vorderachse eingeleitet. [Ada14]

Abweichend von dieser Idealbetrachtung werden zur Steigerung des Fahrkomforts und der gezielten Beeinflussung der Fahrdynamik in der Praxis anstelle von idealen Gelenken vielerorts Elastomerlager verbaut. Hinzu kommt, dass die einzelnen Teilkörper der Radaufhängung ebenfalls Nachgiebigkeiten besitzen. Hierdurch ergeben sich über die bisherige Diskussion hinaus weitere FHG, die bei diesen grundlegenden Betrachtungen der Kinematik aber häufig ignoriert oder nur näherungsweise berücksichtigt werden, z. B. durch Aufspaltung eines Starrkörpers in einige (wenige) Teilkörper, die elastisch verbunden sind. Dieser Sachverhalt führt zum Begriff der Elastokinematik. Matschinsky versteht hierunter „die sorgfältige Abstimmung der Federraten aller beteiligten elastischen Lager und der räumlichen Anordnung der Achslenker sowie der Elastizitäten der Achslenker und der betroffenen Fahrgestellpartien (Hilfsrahmen oder Fahrschemel, Karosserieträger usw.) aufeinander mit dem Ziel, die durch die Elastizitäten entstehenden und unvermeidlichen

Verformungen unter äußerer Belastung zu kompensieren oder sogar in wünschenswerte Bewegungen umzuwandeln“ [Mat07, S. 287].

Über die genannten Möglichkeiten zur Einschränkung der FHG des Rades hinaus bestehen weitere, sodass sich eine Vielzahl unterschiedlicher Radaufhängungskonzepte entwickelt hat. Während sich die Kinematik bei einigen Aufhängungskonzepten analytisch lösen lässt, ist dies bei anderen, z. B. der Mehrlenkerachse, nicht möglich. In diesem Fall muss die Lösung der Bindungsgleichungen auf numerischem Wege erfolgen oder eine vollelastische Modellierung vorgenommen werden. Durch eine vollelastische Modellierung lässt sich eine höhere Modellgüte erreichen, das Lösen der steifen Differentialgleichungen ist aber mit hohem Rechenaufwand verbunden. Bei der numerischen Lösung der Bindungsgleichungen ist das Finden der zutreffenden Lösung der nichtlinearen Gleichungen problematisch [Ril94].

Einen Aufschluss über den Anteil der verschiedenen Aufhängungskonzepte in den 2005 und 2010 produzierten Fahrzeugen gibt Bild 2-30.

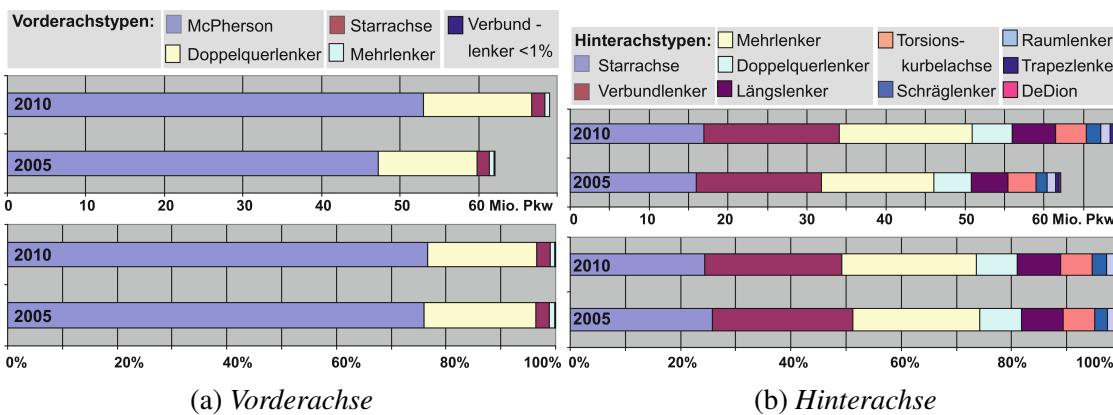


Bild 2-30: Anteil der Achstypen in den weltweit 2005 und 2010 produzierten Fahrzeugen bis 3,5 t Gesamtmasse [EG17, S. 741]

Während bei den Hinterachsen viele verschiedene Konzepte konkurrieren, wurde bei etwa drei Viertel aller Fahrzeuge eine Vorderachse nach dem MacPherson-Prinzip verbaut. Die MacPherson-Radaufhängung wurde 1949 durch Earle Steele MacPherson patentiert [FMC51]. Bild 2-31 zeigt ein Schema des Aufhängungskonzepts.

Bei dieser Aufhängungsvariante werden zwei FHG über das (MacPherson-) Federbein eingeschränkt. Das Dämpferrohr ist fest mit dem Radträger verbunden. Auf ihm wird auch die Aufbaufeder abgestützt. Die Verbindung zwischen der Dämpferstange und dem Fahrzeugaufbau im sog. Federdom besteht in einem Elastomerlager, das häufig als Kugelgelenk abstrahiert wird. Zwei weitere FHG werden durch einen Querlenker gesperrt. Der Querlenker ist bei der realen Radaufhängung nicht über ein Drehgelenk, sondern über zwei Elastomerlager mit dem Fahrzeugaufbau verbunden. Außerdem ist der Radträger über einen Stablenker, die sog. Spurstange, mit dem Lenkgestänge verbunden. Als Abwandlung des MacPherson-Federbeins existiert auch die Variante des Dämpferbeins. In diesem Fall wird die Aufbaufeder nicht auf dem Dämpferrohr, sondern z. B. auf dem Querlenker abgestützt. Die wesentlichen Vorteile dieses Aufhängungskonzepts bestehen in der kompakten und kostengünstigen Bauweise, der relativ geringen Masse und den günstigen Radführungseigenschaften.

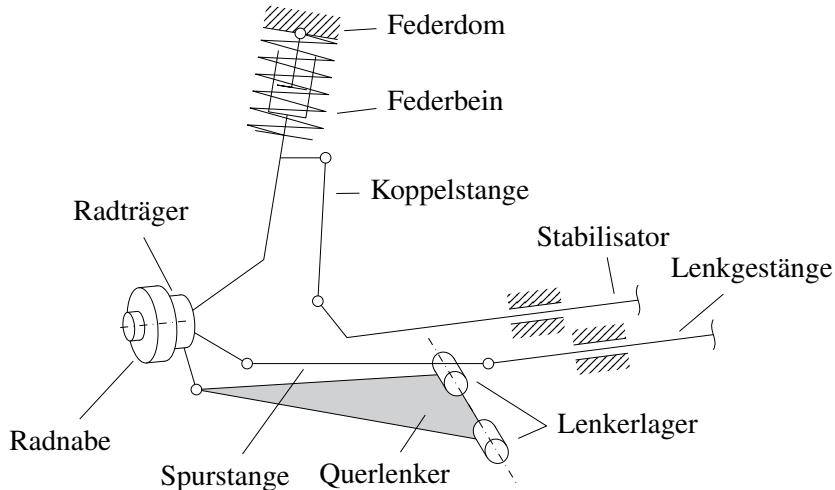


Bild 2-31: Schematische Darstellung der MacPherson-Einzelradaufhängung

Die MacPherson-Radaufhängung gehört zu denjenigen Konzepten, deren Kinematik sich auch bei Annahme idealisierter Gelenke analytisch lösen lässt. Der gesamte Mechanismus besitzt drei FHG, die die Hub-, Abroll- sowie Lenkbewegung des Rades ermöglichen. Ein MKS-Modell einer solchen Radaufhängung ohne Berücksichtigung des Stabilisators besitzt hingegen typischerweise 13 FHG.  $n_I = 2$  dieser 13 FHG sind isolierte FHG, da sich sowohl die Dämpfer- als auch die Spurstange um ihre Längsachse drehen können, ohne dadurch die Bewegung des Mechanismus (maßgeblich) zu beeinflussen. Abzüglich der isolierten FHG besitzt die Einzelradaufhängung also  $f = 11$  FHG, was sich auch durch Anwendung von Formel (A2-1) berechnen lässt: der Mechanismus besitzt insgesamt  $n_K = 6$  Starrkörper (Radnabe, Radträger inkl. Dämpferrohr, Dämpferstange, Querlenker, Spurstange, Lenkgestänge), die über  $n_G = 6$  Gelenke verbunden sind. Dies sind

- das Drehgelenk zwischen Radnabe und Radträger,
- die drei Kugelgelenke zwischen dem Radträger und dem Querlenker bzw. der Spurstange sowie zwischen der Spurstange und dem Lenkgestänge,
- das Drehschubgelenk zwischen Dämpferrohr und -stange sowie
- das Schubgelenk, über das das Lenkgestänge mit dem Fahrzeugaufbau gekoppelt ist.

Sowohl der Querlenker als auch die Dämpferstange sind über Elastomerlager an den Fahrzeugaufbau gekoppelt, die keine (ideale) Zwangsbedingung herbeiführen und die Anzahl der FHG gegenüber idealen Gelenken erhöht. Somit ergeben sich insgesamt  $n_Z = 23$  Zwangsbedingungen und damit  $f = 11$  FHG.

In der Literatur finden sich verschiedene Ansätze, um die Kinematik und Dynamik der MacPherson-Einzelradaufhängung zu beschreiben. Sie unterscheiden sich je nach Anwendungszweck erheblich in ihrer Komplexität und reichen von einfachen linearen und eindimensionalen Modellen hin zu detaillierten dreidimensionalen Modellen.

Der klassische, eindimensionale Modellansatz für eine Einzelradaufhängung ist das Viertelfahrzeugmodell. Dabei handelt es sich um einen Zweimassenschwinger, wobei sich die beiden Massen, Fahrzeugaufbau und Rad, ausschließlich vertikal bewegen können. Das Modell besitzt demnach zwei FHG. Ein Literaturbeispiel für das klassische Viertelfahrzeugmodell ist [MY11]. Dort wird die Güte eines solchen Modells mit linearer Parametrierung

mit der eines nichtlinear parametrierten Modells durch den Vergleich mit Messungen an einem Viertelfahrzeugprüfstand mit MacPherson-Einzelradaufhängung gegenübergestellt. Das nichtlinear parametrisierte Modell zeigt wesentlich bessere Übereinstimmungen mit den Messwerten. Der Vorteil des eindimensionalen Modellansatzes besteht in dessen Einfachheit und der damit verbundenen minimalen Berechnungszeiten. Ein wesentlicher Nachteil besteht in der Vernachlässigung der nichtlinearen Radaufhängungskinematik.

Die Kinematik lässt sich näherungsweise durch die Verwendung eines zweidimensionalen Modells für die Radaufhängung berücksichtigen. In der Literatur existieren zahlreiche zweidimensionale Modellierungen der MacPherson-Radaufhängung. Diese Modelle verfolgen das Ziel, die Modellgüte für spezifische Anwendungsfälle zu erhöhen. Bei allen Modellen dieser Art zeigt die Normale der Betrachtungsebene in Fahrzeulgängsrichtung, sodass von vorne oder hinten auf die Radaufhängung geschaut wird. Bestimmendes Merkmal dieser Modelle ist die Berücksichtigung der idealisiert kreisförmigen Bewegungsbahn des Verbindungspunkts von Querlenker und Radträger. Dieser resultiert aus der vereinfachenden Annahme, dass der Querlenker über ein Drehgelenk an den Fahrzeugaufbau gekoppelt ist. Ein relativ frühes Beispiel für ein solches Modell ist in [SAK94] gegeben. Es enthält zusätzlich ein Modell für das Elastomerlager im Federdom, wodurch es insgesamt drei FHG besitzt. Außerdem berücksichtigt es weitere Nichtlinearitäten wie die Endanschläge und das richtungsabhängige Verhalten des Stoßdämpfers. Dieses Modell wird mit seiner Taylor-Approximation 1. Ordnung sowie einem sehr vereinfachten eindimensionalen Modell verglichen. Das eindimensionale Modell weist dort nur geringe Abweichungen zu den anderen beiden Modellen auf und wird für die meisten Anwendungsfälle als hinreichend befunden. Ein weiterer Vergleich von ein- und zweidimensionalem Modellansatz findet sich in [SAS11]. Ein ebenfalls zweidimensionales Modell für die Radaufhängung ist in [HJS99] dokumentiert. Es verwendet zwei generalisierte Koordinaten: die Hubbewegung des Aufbaus sowie die Drehung des Querlenkers um seine Drehachse durch die beiden Lagerungspunkte an der Karosserie. Das Modell wird sowohl in der genannten Veröffentlichung als auch in den Folgearbeiten [SHH00; HSH02; SHHY04] für den Regelungsentwurf für einen semiaktiven Dämpfer verwendet. Die Erprobung der Verfahren erfolgt im Rahmen einer HiL-Simulation mit real aufgebautem, semiaktivem Dämpfer. Ein sehr ähnliches Modell mit den gleichen FHG wird in [FBX08] aufgestellt. Während im Modell in [HJS99] das Federbein auf dem Querlenker abgestützt wird, ist es in dieser Quelle direkt mit dem Radträger verbunden. In den Folgearbeiten [FBX09; FBX10] wird es ebenfalls im Rahmen der Regelungssynthese für einen semiaktiven Dämpfer eingesetzt. Auch in den Quellen [DC16; DCC16] sind sowohl das Modell als auch der Einsatzzweck vergleichbar. In [YC17] wird ein solches Modell und seine linearisierten Gleichungen mit einem Viertelfahrzeugmodell sowie einem zweidimensionalen ADAMS-MKS-Modell verglichen. Die Vergleiche erfolgen auch für entsprechend erweiterte Halbfahrzeugmodelle. Abweichend von den bisher genannten Quellen werden in [HMG12] die vertikale Bewegung des Radträgers und des Aufbaus als generalisierte Koordinaten verwendet. Vergleiche mit einem zweidimensionalen ADAMS-MKS-Modell zeigen gute Übereinstimmungen. Das entwickelte Modell wird in [HMG13] für die Analyse der Radaufhängungskinematik und -dynamik verwendet. Ein derartiges Modell wird auch in [ING16] eingesetzt, um das Potenzial des Markow-Entscheidungsprozesses für die aktive Fahrwerkregelung aufzuzeigen.

Im Gegensatz zu den ein- und zweidimensionalen Modellen finden sich nur wenige Arbeiten, in denen die MacPherson-Radaufhängung als räumlicher Mechanismus betrachtet wird. Die kinematischen Zwangsbedingungen der räumlichen Radaufhängungskinematik werden z. B. in [FBX10] und [MLV04; ML12] aufgestellt und mithilfe des iterativen Newton-Raphson-Verfahrens numerisch gelöst. In [ML12] wird damit ein virtueller Fahrzeugkinematikprüfstand aufgebaut, in [FBX10] wird die Auswirkung aktiver Fahrwerkseingriffe auf die Radbewegung analysiert. Das Newton-Raphson-Verfahren besitzt einige Nachteile, z. B. ist nicht sichergestellt, dass das Verfahren konvergiert und es ist unklar, ob die unter vielen möglichen vom Verfahren gefundene Lösung die gesuchte ist. Aus diesem Grund wird in [RCKB16] statt des iterativen Newton-Verfahrens die symbolische Berechnung der Gröbner-Basis der kinematischen Zwangsbedingungen eingesetzt. Ein weiteres Anwendungsbeispiel für ein Kinematikmodell der Radaufhängung ist [HSS08], das zur Optimierung der Radaufhängungskonstruktion mithilfe genetischer Algorithmen verwendet wird. Die Zielsetzung besteht dabei darin, ungewünschte Lenkwinkeländerungen durch den abrollenden Reifen, z. B. beim Überfahren von Hindernissen, zu minimieren. Explizite Gleichungen für die räumliche Radaufhängungskinematik in Abhängigkeit zweier generalisierter Koordinaten wurden erstmalig durch Cronin [Cro81] beschrieben. Wie bei den zweidimensionalen Modellen wird auch in dieser Quelle angenommen, dass der Querlenker über ein Drehgelenk mit dem Fahrzeugaufbau verbunden ist. Als generalisierte Koordinaten werden der Drehwinkel dieses Gelenks (zur Beschreibung der Einfederung des Rades) sowie die Verschiebung des Lenkgestänges verwendet. In [JB98; CB03] werden die Gleichungen aufgegriffen und versucht, die dynamischen Parameter des Mechanismus zu identifizieren. Die gleichen generalisierten Koordinaten wie in [Cro81] werden auch für das in [Unt13; SHB18] dokumentierte Modell der Radaufhängung verwendet. Das wohl detaillierteste Modell wurde durch Rill [Ril94] entwickelt. Gegenüber den zuvor genannten Quellen besitzt der Querlenker dort einen weiteren Dreh-FHG um die vertikale Achse durch das (in Fahrtrichtung betrachtet) vordere Elastomerlager, über welches das Verhalten des hinteren Elastomerlagers näherungsweise im Modell berücksichtigt wird. An dieser Stelle werden zur Steigerung des Fahrkomforts üblicherweise relativ weiche Lager verbaut [WR11]. Durch das Hinzufügen dieses dritten FHG kann die Elastokinematik der Radaufhängung folglich besser abgebildet werden. Das Modell wird in der genannten Quelle als Teil eines PKW-Fahrdynamikmodells verwendet.

### 2.3.3 Elastomerlager

Anstelle (nahezu) idealer Gelenke befindet sich in einer Radaufhängung (je nach Bauart) eine bestimmte Anzahl an nachgiebigen Elastomerlagern. Im Falle der im Prüfstand verbauten Achse liegen je Achsseite drei Elastomerlager vor. Dies sind zum einen die zwei zylindrischen Elastomerlager, die den Querlenker mit dem Fahrzeugaufbau verbinden. Nach [EG17] sind hierfür auch die Begriffe Hülsenlager, Lenkerlager und Silentbloc gebräuchlich. Das dritte Elastomerlager befindet sich im Federdom. Je nachdem, ob ein Feder- oder ein Dämpferbein vorliegt (Unterscheidung siehe Abschnitt 2.3.2), wird dieses Lager laut [EG17] als Federbeinstützlager oder Dämpferlager bezeichnet (auch Kopflager, Top-Mount). Bild 2-32 zeigt einige Beispiele für beide genannten Lagertypen. Abgesehen davon kommen Elastomerbauteile in Form des Zug- und Druckanschlags zur Begrenzung des Feder- bzw. Dämpferwegs zum Einsatz.

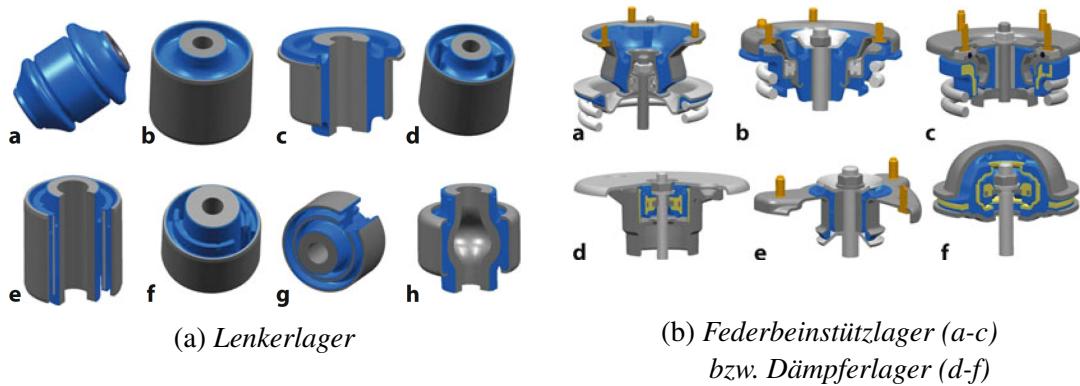


Bild 2-32: Exemplarische Ausführungen verschiedener Elastomerlager [EG17]

Die mechanischen Eigenschaften der Elastomerlager können durch gezielte Zusammensetzung des Materials, durch spezielle Fertigungsabläufe und durch konstruktive Maßnahmen weitgehend beeinflusst werden. Wird bspw. ein Lenkerlager rotationssymmetrisch aufgebaut, so hat es eine Haupt- sowie zwei sich gleich verhaltende Nebenrichtungen. Durch Einvulkanisieren von Blechen oder Aussparungen im Elastomer (siehe hierzu auch Bild 2-32a), lassen sich gezielt unterschiedliche Radialraten einstellen. Im Vergleich zu einem idealen Drehgelenk lassen Lenkerlager auch die „kardanische Verformung“ zu, d. h. kleinere Drehungen um andere Achsen, die nicht der Lager-Hauptachse entsprechen [Mat07, S. 117].

Elastomerlager besitzen viele Vorteile gegenüber starr ausgeführten Gelenken. Sehr häufig wird hier die erhebliche Verbesserung des NVH-Verhaltens des gesamten Fahrzeugs genannt, die sich aus den guten schall- und schwingsungsdämpfenden Eigenschaften des Elastomerwerkstoffes ergibt. Elastomerlager besitzen Nachgiebigkeiten in allen Richtungen, führen zu einer geringeren Bauteilbelastung durch den Abbau niederfrequenter Stoßkräfte und können kurzzeitig überlastet werden. Außerdem sind sie wartungsfrei und sehr robust, d. h. wenig anfällig in Bezug auf Wasser und Verunreinigungen. Zu guter Letzt sind sie sehr kostengünstig. Nachteilig ist die Alterung des Elastomermaterials sowie die Temperaturabhängigkeit der Lager. [EG17]

Die Auslegung der Elastomerlager geschieht meist vor dem Hintergrund einer gewünschten Elastokinematik der Radaufhängung. Hierdurch können der Fahrkomfort, die Fahrsicherheit sowie das Fahrverhalten des Fahrzeugs verbessert werden. Als weiteres Ziel besteht die Umsetzung einer gewünschten Geräuschisolation.

Liegen größere Federwege vor, so kann ein Elastomerlager um eine hydraulische Dämpfung ergänzt werden. Bei dem Querlenkerlager, das die Längsbewegung des Rades abfedert, handelt es sich um ein solches sog. Hydrolager. Bild 2-33 veranschaulicht dessen Funktionsweise.

Die hydraulisch gedämpfte Federrichtung des Lagers ist durch den blauen Pfeil angedeutet. Oben und unten befindet sich jeweils eine mit Flüssigkeit gefüllte Kammer, die durch einen Kanal miteinander verbunden sind. Erfolgt eine Anregung in der eingetragenen Richtung, so fließt die Flüssigkeit von der einen in die andere Kammer. Die Flüssigkeit im Kanal stellt eine schwingende Masse dar.

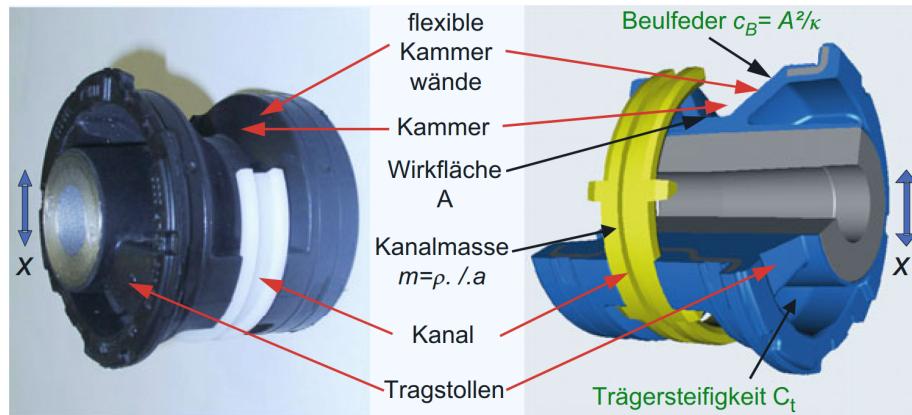


Bild 2-33: Hydraulisch gedämpftes Lenkerlager ohne Außenhülse [EG17, S. 229]<sup>10</sup>

Elastomerlager mit hydraulischer Dämpfung können auch aktuiert werden. An Lenkerlagern gibt es diese Anwendung bisher selten. An Motorlagern, wo solche Lager ebenfalls eingesetzt werden, gibt es hingegen bereits derartige Aktorik [Mat07, S. 117].

Elastomerlager besitzen ein stark frequenzabhängiges Verhalten, sodass die Abbildung über eine Parallelschaltung aus Feder und Dämpfer (sog. Kelvin-Voigt-Modell) nicht ausreicht. Zur Beschreibung des Bauteilverhaltens wird meist eine Kombination verschiedener Materialmodelle eingesetzt. Die drei grundlegenden Modelle sind:

- Hooke-Element (Feder) zur Abbildung idealer Elastizität,
- Newton-Element (Dämpfer) zur Abbildung idealer Viskosität und
- St. Venant-Element (Reibeelement) zur Abbildung idealer Plastizität.

Für die Abbildung des Elastomerverhaltens nennt Rill [Ril12] die parallele Anordnung einer Feder und eines oder mehrerer Maxwell-Elemente (Reihenschaltung aus Feder und Dämpfer). Amelunxen [Ame14] nennt als weiteres zur Kombination verwendetes Materialmodell das Jenkin-Element (auch Prandtl-Element), einer Reihenschaltung aus einer Feder und einem Reibeelement. Sowohl die Alterung als auch die Temperaturabhängigkeit der Lager werden typischerweise nicht berücksichtigt.

Bild 2-34 zeigt den Vergleich eines einfachen Elastomerlagermodells, das in [MW14] als Gehmann-Modell bezeichnet wird, mit einem Kelvin-Voigt-Modell.

Gegenüber dem Kelvin-Voigt-Modell sind die Steifigkeit und Dämpfung des Gehmann-Modells frequenzabhängig. Die dynamische Steifigkeit und Dämpfung lauten

$$c^* = c_1 + c_2 \cdot \left( \frac{d\omega}{c_2} \right)^2 / \left( 1 + \left( \frac{d\omega}{c_2} \right)^2 \right), \quad d^* = d / \left( 1 + \left( \frac{d\omega}{c_2} \right)^2 \right). \quad (2-119)$$

Aus den Gleichungen geht hervor, dass die dynamische Steifigkeit  $c^*$  für hohe Frequenzen gegen die Summe der beiden Federkonstanten und die dynamische Dämpfung  $d^*$  gegen Null strebt. Für kleine Frequenzen nähern sich die beiden Werte denen des Kelvin-Voigt-Modells ( $c_1, d$ ) an. Mit steigender Frequenz unterscheidet sich das Verhalten des Gehmann-Modells daher zunehmend von dem des Kelvin-Voigt-Modells.

<sup>10</sup>Im abgedruckten Bild wurde die Kennzeichnung der Kammer in der rechten Abbildung gegenüber dem Original korrigiert.

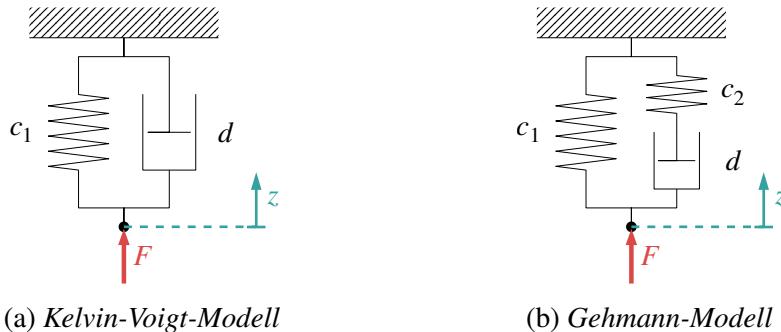


Bild 2-34: Vergleich von Kelvin-Voigt- und Gehmann-Modell, nach [MW14]

Ein solches Gehmann-Modell wird in der zuvor genannten Quelle [SAK94] zur Modellierung des Federbeinstützlers eingesetzt. In [Ril97; Ril12] wird lediglich ein Maxwell-Element für die Modellierung des Stoßdämpfers (Dämpfer) inklusive des Dämpferlagers (Feder) verwendet.

Bei weiterführenden Elastomerlagermodellen werden die drei Grundmodelle (Feder, Dämpfer, Reibelement) teils beliebig kombiniert und um weitere Kraftanteile erweitert. Ein Beispiel hierfür ist das Modell nach Pfeffer [PH02], das in [SLK13] aufgegriffen wird. Hier kommt neben einem linearen Teilsystem aus zwei Federn und zwei Dämpfern auch ein nichtlinearer Kraftanteil (eine Logarithmusfunktion) zur Abbildung der Amplitudenabhängigkeit hinzu. Weitere Beispiele sind [SDR10; YB10; Ber98]. Einen Überblick über ältere Literatur zum Thema enthält die Dissertation von Troulis [Tro02], der nach umfassender Recherche das Modell nach Berg [Ber98] für sein MKS-Modell einer MacPherson-Radaufhängung (für den komfortrelevanten Frequenzbereich 0-100 Hz) verwendet.

Die bisherigen Ausführungen haben die eindimensionale Modellierung von Elastomerlagern betrachtet. Um das sechsdimensionale Elastomerverhalten (je drei Verschiebungen und Verdrehungen) gut zu beschreiben, werden üblicherweise FE-Modelle verwendet. Aufgrund des damit verbundenen Rechenaufwands werden sie in MKS-Simulationen stattdessen näherungsweise über sechsdimensionale Kontaktelemente abgebildet. In MKS-Programmen werden diese Elemente als „Bushings“ bezeichnet. Die Richtungen werden als entkoppelt betrachtet, wobei jede Richtung eine Steifigkeit und Dämpfung aufweist. Häufig werden nichtlineare Kraft-Weg- bzw. Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinien hinterlegt. Hinzu kommen sechs Kraft- oder Wegoffsets zur Berücksichtigung von Vorspannungen. Bei hochfrequenter Anregung besitzen diese vereinfachten Modelle nur eingeschränkte Gültigkeit. [BH15; SHB18]

Bei kleinen Auslenkungen kann auch eine konstante Parametrierung anstelle von Kennlinien verwendet werden. Weisen die beiden Nebenrichtungen die gleichen Eigenschaften auf, sind in diesem Fall 12 Parameter erforderlich. Sonst erhöht sich die Anzahl der Parameter auf 18. Bei nichtlinearer Parametrierung sind 8 bzw. 12 Kennlinien und 4 bzw. 6 konstante Offsets erforderlich. Abweichend hiervon gibt es Quellen, in denen die Dämpfungen als konstant angenommen werden [Ada14]. Über die genannten Parameter hinaus muss für jedes Elastomerlager die Einbauposition und -orientierung im Modell hinterlegt werden. In Summe besitzt ein Elastomerlager also bis zu 24 durch Kennlinien oder Konstanten zu parametrisierende Eigenschaften.

Die Steifigkeiten und Dämpfungen beziehen sich immer auf die Relativverschiebung bzw. -geschwindigkeit der beiden durch das Lager verbundenen Körper, ausgedrückt in lokalen Lagerkoordinaten. Aus der Matrix der Relativverdrehung dieser beiden Körper werden die XYZ-Kardanwinkel berechnet (vgl. Anhang A1.4), die als Eingang für die Drehmomentberechnung des Kontaktmodells dienen. Die Berechnung der Relativgrößen wird bspw. in [RS17, S. 36] beschrieben.

In zwei der in Abschnitt 2.3.1 genannten Quellen sind auch Angaben zu der Parametrisierung der Elastomerlager enthalten. In [WJB07] wurden gemessene Kraft-Weg- bzw. Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinien verwendet. Ein Beispiel für die Verwendung konstanter Dämpfungen und gemessener Kraft-Weg-Kennlinien ist mit [LE00] gegeben. Eine weitere Quelle, in der die Modellierung der Elastomerlager explizit genannt wird, ist [KSH<sup>+</sup>15]. Darin wird ein dreidimensionales Elastokinematikmodell für die Doppelquerlenkeraufhängung inklusive vier Elastomerlagern beschrieben. Die Elastomerlager werden dabei lediglich über je drei Linear- und Drehfedern modelliert. Auch dort kommen die XYZ-Kardanwinkel als Eingangsgröße des Elastomermodells zum Einsatz.

Bei Troulis [Tro02] erfolgt die Übertragung des eindimensionalen, komplexeren Modells nach Berg [Ber98] durch die einfache „Verkettung“ dreier solcher translatorischer Modelle sowie eines Drehgelenks.

## 2.4 Zusammenfassung

Dieses Unterkapitel fasst die Ergebnisse der Literaturrecherche zusammen.

Hinsichtlich *konventioneller Achsprüfstände* lässt sich festhalten, dass diese hauptsächlich dem Zweck der Betriebsfestigkeitsprüfung dienen. Um die Prüfzeiten gering zu halten, erfolgt die Betriebsfestigkeitsprüfung nicht bei betriebstypischen, sondern deutlich anspruchsvolleren Lastsituation, z. B. Schlechtwegstrecken. Daraus ergeben sich besonders hohe Anforderungen an die Dynamik der eingesetzten Aktorik. Die Zielgrößen der Prüfstandsversuche, die sog. Target-Signale, sind bspw.

- die Kräfte und Momente auf die Radträger,
- die Belastung einzelner Lenker und der Federdomlager sowie
- die zurückgelegten Dämpferwege.

Sie werden mindestens bis zu einer Frequenz von 50 Hz nachgebildet. Die Stellsignale der Antriebe, die sog. Drive-Signale, werden nicht mithilfe einer Regelung, sondern durch den iterativen TWR-Algorithmus gebildet. Dabei handelt es sich um einen Sonderfall der ILR. Nach Identifikation eines linearen Systemmodells in Form einer FRF erfolgt die sog. Drive-File-Generierung. Unter Zuhilfenahme der FRF werden die Drive-Signale durch wiederholte Prüfstandsversuche so lange systematisch angepasst, bis die Prüfstands-messung eine hinreichend gute Übereinstimmung mit den Target-Signalen zeigt. Zur Gütebeurteilung wird z. B. die relative Schädigung herangezogen. Das iterative Vorgehen begründet sich mit dem nichtlinearen Verhalten sowohl des Prüflings als auch der eingesetzten Aktorik. Die Durchführung der Prüfstandsversuche mit dem TWR-Algorithmus ist sehr zeitaufwändig, es können jedoch sehr hohe Güten bei der Abbildung von Target-Signalen auch ohne vertieftes Modellwissen erreicht werden. Verschiedenste Weiterentwicklungen

des Verfahrens zielen auf die Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit und damit eine Reduktion des hohen Zeitaufwands der Prüfstandsversuche ab; die Implementierung einer Regelung anstelle des TWR-Algorithmus ist nur für sehr einfache Beispiele dokumentiert. Der Einsatz des Verfahrens für eine mechatronische HiL-Simulation scheidet aufgrund des iterativen Vorgehens aus. Eine echtzeitfähige, schnelle Regelung würde die Entwicklungszeiten und -kosten in der Achsprüfung erheblich senken. Auch die Vorschädigung des Prüflings durch den Iterationsvorgang würde dabei entfallen.

Die Verfahren zur *Interaktionsregelung aus der Robotik* unterteilen sich in die indirekten und direkten Kraftregelungen. Mithilfe der indirekten Kraftregelungsverfahren wird erreicht, dass der Manipulator ein gewünschtes Bewegungsverhalten bei Umgebungskontakt aufweist. Beispielsweise ist das Zeitverhalten des Positionsregelfehlers bei der Impedanzregelung mit einem Feder-Masse-Dämpfer-System vergleichbar, dessen Eingangsgröße die Kontaktkraft zur Umgebung ist. Die indirekten Verfahren eignen sich nicht für das gezielte Einstellen eines gegebenen Sollkraft-Zeitverlaufs und scheiden daher für die hier betrachtete Anwendung aus. Ein gewünschter Kraft-Zeitverlauf lässt sich hingegen mit einer direkten Kraftregelung realisieren. Hier sind vor allem die parallele Kraft-/Positionsregelung sowie die hybride Kraft-/Positionsregelung zu nennen. Bei der parallelen Kraft-/Positionsregelung handelt es sich um eine Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung. Sowohl Kraft- als auch Positionsregelung erhalten einen Sollwert, wobei die Kraftregelung priorisiert wird. Es erfolgt keine Entkopplung der kraftgeregelten FHG; bedingt durch die unterlagerte Positionsregelung sind außerdem relativ geringe Bandbreiten für die Kraftregelung zu erwarten. Ein genaues Modell der Umgebung ist nicht erforderlich. Es tritt nur mittelbar bei der Auslegung der Kraftregelung in Erscheinung. Das Konzept der hybriden Kraft-/Positionsregelung nach Raibert und Craig [RC81] sieht vor, die unbeschränkten FHG eines Manipulators positionsgeregelt, die beschränkten kraftgeregelt zu betreiben. Zu diesem Zweck werden zwei unabhängig voneinander entworfene Regler für die Kraft und die Position mithilfe einer Selektionsmatrix kombiniert. Bei der Selektionsmatrix handelt es sich um eine binäre Diagonalmatrix, mit der zwischen den beiden Regelungen gewählt werden kann. Die Auswahl ist nicht etwa beliebig, sondern ergibt sich aus den durch die Umgebung gesetzten Rahmenbedingungen. Die hybride Kraft-/Positionsregelung mit binärer Selektionsmatrix unter Einbeziehung des Manipulatormodells wurde durch Khatib [Kha87] angegeben. Die ideale Entkopplung gelingt damit allerdings nur für einfachste Kontaktsituationen, bei denen eine Aufteilung der kraft- und positionsgeregelten Richtungen über eine binäre Selektionsmatrix möglich ist. Eine ideale Entkopplung von kraft- und positionsgeregelten Richtungen gelingt theoretisch nur durch Einbeziehung weiterer Informationen in die Regelungssynthese. Dies können bspw. die Gleichungen der durch die Umgebung gesetzten kinematischen Zwangsbedingungen an die Bewegung des Manipulators sein. Den Entwurf entkoppelnder Regler für diesen Fall haben z. B. Yoshikawa [Yos87], McClamroch und Wang [MW88] sowie Aghili [Agh05] beschrieben. Der Regelungsentwurf für Kontaktsituationen, in denen (wie im hier betrachteten Fall) auch die Umgebung ein dynamisches Verhalten besitzt, wurde von de Luca und Manes [LM94] durchgeführt. Neben zwangsläufig entweder positions- oder kraftgeregelten Richtungen ergibt sich in diesem Fall die Möglichkeit, die verbliebenen Richtungen entweder mit einer Kraft- oder einer Positionsregelung zu betreiben. Auch hier gilt, dass eine Entkopplung nur bei einem idealen Modell, idealer Messung bzw. Beobachtung relevanter Größen sowie in Abwesenheit von Störgrößen ideal gelingt. Featherstone [Fea03; Fea04] konnte zeigen, dass sich bei Wahl spezifischer Regelgrößen auch entkoppelnde Regelungen

mit einem gegenüber [LM94] reduzierten Modellwissen erzielen lassen. Die dort genannten Regelgrößen sind für die hier betrachtete Anwendung allerdings weniger brauchbar. Featherstone, Sonck und Khatib [FSK98] beschreiben außerdem einen Regelungsansatz für Kontaktsituationen mit mehreren Kontaktstellen.

Sowohl die indirekten als auch die direkten Kraftregelungsverfahren basieren auf vielen vereinfachenden Annahmen, die bei praktischen Anwendungen nur teilweise erfüllt sind. Im Gegensatz zur Positionsregelung muss für die Beurteilung einer Kraftregelung anhand der üblichen Kriterien (z. B. Bandbreite, Stabilität) neben dem Manipulatormodell auch das Umgebungsmodell einbezogen werden [SK16]. Es ist offensichtlich, dass das angenommene Umgebungsmodell generell eine sehr hohe Bedeutung für die Kraftregelungssynthese besitzt. Zur Anwendung sowohl der indirekten als auch der direkten Kraftregelungsverfahren bei PKM existieren einige Literaturbeispiele. Viele der Beispiele beschränken sich allerdings auf Simulationen. Liegt eine experimentelle Validierung vor, handelt es sich entweder um sehr einfache Kontaktsituationen (z. B. ebene Kontaktflächen) und/oder die erreichten Regelungsbandbreiten sind relativ gering. Es existieren keine Beispiele, bei denen die leistungsfähigen Regelungsmethoden, z. B. nach de Luca und Manes [LM94], angewendet werden.

Die *Modellierung und Simulation von Achsprüfungen* ist auch in der Industrie keine Seltenheit und gewinnt zunehmend an Bedeutung. Die Zielsetzungen sind vielfältig. Hierzu zählen

- die numerische Betriebsfestigkeitsanalyse,
- die Verbesserung von Komponentenmodellen durch Abgleich mit Prüfstandsmessungen,
- die (Weiter-) Entwicklung von Systemidentifikation und Target-Simulation (insb. der Iterationsstrategie),
- die Synthese neuer Prüfkonzepte sowie
- die virtuelle Drive-File-Generierung.

Allen in Abschnitt 2.3.1 genannten Beispielen ist gemein, dass das mechanische Grundsystem, z. B. die Anregungseinheiten und der Prüfling, durch ein topologieorientiertes MKS-Modell in der Simulationsumgebung eingebunden sind. Die für die Simulation erforderlichen Modelle werden als sehr komplex beurteilt. Ihre Güte, insb. die der Elastomer- und Radaufhängungsmodelle, ist entscheidend für die erfolgreiche Simulation von Achserprobungen. Die Herleitung von Bewegungsgleichungen für ein vollständiges System aus Aktorik und Prüfling ist nicht dokumentiert. Für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen für die MacPherson-Radaufhängung existieren zahlreiche Literaturbeispiele, von denen sich die meisten allerdings auf einfache ein- oder zweidimensionale Modelle der Radaufhängung beschränken. Der grundlegenden Arbeit zur räumlichen Kinematik der Radaufhängung von Cronin [Cro81] folgend ist hier vor allem das Modell nach Rill [Ril94] zu nennen. Dort besitzt der Mechanismus neben der Drehung des Querlenkers (Einfederung) und der Verschiebung der Lenkstange (Lenkbewegung) einen elastischen FHG zur näherungsweisen Berücksichtigung der Elastizität der Querlenkerlager. Die Radnabe besitzt gegenüber dem Radträger einen weiteren FHG (Abrollbewegung). In der im Prüfstand verbauten Radaufhängung sind (pro Achsseite) drei Elastomerlager verbaut. Das Verhalten von Elastomerlagern ist stark frequenzabhängig; eine Modellierung mithilfe eines

Kelvin-Voigt-Modells (Parallelschaltung aus Feder und Dämpfer) ist unzureichend. In der Literatur sind deshalb verschiedene Ansätze dokumentiert, in denen z. B. Federn, Dämpfer und Reibelemente auf unterschiedliche Weise kombiniert werden, um das Verhalten besser abzubilden. Diese genaueren Modelle betrachten meist nur eine einzelne Richtung. Eine gute Abbildung des räumlichen Verhaltens von Elastomerlagern mit drei translatorischen und drei rotatorischen FHG ist bspw. mit der FE-Methode möglich. In MKS-Modellen wird dagegen häufig auf Kennlinien für die Kraft-Weg- sowie die Kraft-Geschwindigkeits-Charakteristik zurückgegriffen, deren Gültigkeit in höheren Frequenzbereichen eingeschränkt ist.

## 2.5 Handlungsbedarf und Konkretisierung der Zielsetzung

Der Stand von Technik und Forschung offenbart einige Handlungsbedarf. Die mit dem hier betrachteten Prüfsystem angestrebte mechatronische HiL-Simulation erfordert eine hinreichend schnelle Regelung der Anregungseinheiten. Der Regelungsentwurf kann weder von anderen HiL-Prüfständen noch von konventionellen Achsprüfständen übernommen werden. Dies begründet sich damit, dass HiL-Prüfstände in der Fahrwerkstechnik bisher nur für sehr einfache Anwendungsfälle mit meist eindimensional arbeitender Aktorik existieren, siehe z. B. [YF11]. Beispiele für HiL-Prüfstände mit mehrdimensional arbeitender, geregelter Aktorik sind nicht dokumentiert. Konventionelle Achsprüfstände arbeiten mit einer iterierten Vorsteuerung, die sich prinzipbedingt nicht für Echtzeitanwendungen eignet. Eine Regelung, mit der Target-Signale bis zu mindestens 50 Hz hinreichend gut nachgebildet werden können, existiert nicht. Folglich muss eine neuartige Regelung für das betrachtete System entwickelt werden.

Der Entwurf eines leistungsfähigen Reglers setzt ein detailliertes Modell der Regelstrecke voraus. Es dient der modellbasierten Synthese und Erprobung der Regelung und kann darüber hinaus als Teil des Reglers von großem Nutzen sein. Besondere Bedeutung haben im Falle eines mechanischen Systems die Bewegungsgleichungen der Regelstrecke. Im hier betrachteten Fall schließt das mechanische System insb. den Hexapod, die MacPherson-Radaufhängung sowie das Kraftmessrad ein. Für die MacPherson-Radaufhängung gibt es bisher nur Modelle mit maximal drei FHG für den Radträger. Es muss untersucht werden, ob dies für den Regelungsentwurf genügt. Zum Zweck des Regelungsentwurfs besteht daher die Notwendigkeit, die Bewegungsgleichungen sämtlicher Teilsysteme herzuleiten und so eine Grundlage für den modellbasierten Regelungsentwurf zu schaffen.

Das bereits in Abschnitt 1.3 genannte Ziel des Entwurfs einer Regelung für den Hexapod im Achsprüfbetrieb lässt sich nun konkretisieren. Zu Beginn muss ein umfassendes Modell der Regelstrecke erstellt und die Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Das Modell der Radaufhängung soll die Elastomerlager, die eine große Bedeutung für die Modellgüte haben, besser berücksichtigen als bisherige Modelle. Als Ausgangspunkt der Modellierung eignet sich das Modell nach Rill [Ril94]. Insgesamt ist eine sehr hohe Modellgüte anzustreben, da bei Verwendung des Modells im Regler (z. B. zur Herbeiführung einer exakten Ein-/Ausgangslinearisierung) bessere Regelergebnisse zu erwarten sind. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen sowohl für den Manipulator (Hexapod) als auch für die MacPherson-Radaufhängung stellt aufgrund der hohen Komplexität dieser Mechanismen eine große Herausforderung dar. Dies liegt an

- dem nichtlinearen Zusammenhang der verschiedenen physikalischen Größen,
- den vorliegenden Wechselwirkungen zwischen diesen Größen,
- Systembestandteilen mit stark nichtlinearem Verhalten (z. B. Elastomerlager in der Radaufhängung),
- der Vielzahl erforderlicher Modellparameter sowie
- der großen Anzahl an FHG.

Insbesondere die bisher dokumentierten Modelle bzw. Bewegungsgleichungen für die MacPherson-Radaufhängung sind für die geplante Anwendung nicht hinreichend.

Die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung ist für die Realisierung besonders leistungsfähiger Regelungen das Mittel der Wahl. Dies gilt selbstverständlich auch bei der Interaktionsregelung von Manipulatoren. Die analytische Formulierung der hybriden Kraft-/Positionsregelung führt die ideale Entkopplung der Regelgrößen herbei. Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Dissertationsschrift priorisiert verfolgt. Die Realisierung einer Regelung nach de Luca und Manes [LM94] bietet sich dabei besonders an, da sie für die Regelungsaufgabe mit diversen unterschiedlichen Target-Signalen als die ideale Lösung erscheint. Theoretisch ist hiermit eine ideale Entkopplung von sechs Regelgrößen bei hoher Regelungsbandbreite möglich. Durch den bei diesem Ansatz explizit berücksichtigten dritten Subraum, in dem zwischen der Positions- und Kraftregelung gewählt werden kann, bestehen Freiheiten bei der Festlegung der Regelgrößen. Beispielsweise sollte die freie Wahl zwischen der vom Dämpfer zurückgelegten Verschiebungstrajektorie sowie der vertikalen Kraft möglich sein. Es ist zu prüfen, welche der in Abschnitt 2.1 genannten Target-Signale konventioneller Achsprüfstände sich dabei als Regelgröße realisieren lassen. Auch die spezifische Umsetzung dieses Regelungsansatzes für das betrachtete Prüfsystem ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar.

Nachteilig an der Regelung nach de Luca und Manes [LM94] ist, dass neben dem Manipulatormodell auch ein genaues Modell des Kontaktpartners erforderlich ist. Es sollen daher auch andere Ansätze für das Zielsystem entworfen werden, die mit weniger Modellwissen auskommen. Interessant ist vor allem die geometrische Formulierung der hybriden Kraft-/Positionsregelung nach Khatib [Kha87]. Insbesondere bei Verwendung einer expliziten Kraftregelung neben der Positionsregelung ist hier ebenfalls mit recht hohen Bandbreiten zu rechnen. Diese Regelung ermöglicht ohne weitere Modifikation allerdings nur die Vorgabe von Sollwerten für die Radträgergrößen, wobei keine ideale Entkopplung zwischen den Größen vorliegt. Das gleiche Problem besteht bei der parallelen Kraft-/Positionsregelung nach Chiaverini und Sciavicco [CS93]. Aufgrund ihrer Einfachheit in der Realisierung soll sie auch für das Prüfsystem implementiert und mit den anderen beiden Reglern verglichen werden. Aufgrund der unterlagerten Positionsregelung im Kraftregler ist allerdings mit einer relativ geringen Bandbreite zu rechnen. Insbesondere bei diesem Regler besteht die Frage, welches vereinfachte Ersatzmodell sich für die Auslegung der überlagerten Kraftregelung eignet.

Die Regler werden vor allem anhand ihrer Bandbreite bewertet. Erreicht ein Regler eine Bandbreite von mindestens 50 Hz für alle Regelgrößen, so wäre durch seine Verwendung am Prüfstand theoretisch die Durchführung von Betriebsfestigkeitsuntersuchungen möglich. Voraussetzung hierfür ist, dass eine Beschränkung auf sechs Regelgrößen (d. h. Target-Signale) erfolgt. Genügt die Bandbreite nicht, kann ggf. ein angepasster TWR-Algorithmus

entwickelt werden. Neben der gewünschten Dynamik des geschlossenen Regelkreises sind auch die Stabilität und eine möglichst hohe Robustheit Anforderungen an die zu entwickelnde Regelung. Für ihre Anwendbarkeit am Prüfstand muss die Regelung außerdem echtzeitfähig sein. Lunze [Lun16] nennt allgemein für Mehrgrößenregelungen darüber hinaus weitere Güteforderungen. Hierzu gehört bspw. eine schwache Verkopplung zwischen den Regelgrößen sowie die Integrität des Regelkreises, d. h. stabiles Verhalten bei Ausfall einzelner Sensoren oder Aktoren.

Die Arbeit schließt die Implementierung und Erprobung der Regelung auf dem Zielsystem ein. Um den sicheren Betrieb des Prüfstands zu gewährleisten, ist gegenüber dem Simulationsmodell eine umfangreiche Systemsteuerung und -überwachung erforderlich. Die zu diesem Zweck im Rahmen dieser Arbeit umfassend weiterentwickelte Systemsteuerung und -überwachung wird im Folgenden nicht explizit thematisiert.

### 3 Vorbetrachtung an zweidimensionaler Kontakt situation

Von den in Abschnitt 2.2.3 des Stands von Technik und Forschung genannten Regelungsverfahren gelingt ausschließlich den hybriden Kraft-/Positionsregelungen in analytischer Formulierung eine ideale Entkopplung der bewegungs- und kraftgeregelten FHG einer gegebenen Kontaktaufgabe. Nicht nur für die hier betrachtete Anwendung erscheinen sie daher als das ideale Vorgehen für die Kontaktregelung.

Dieses Kapitel veranschaulicht sämtliche dieser Ansätze anhand einfacher, zweidimensionaler Beispielsysteme. Im Zweidimensionalen gilt abweichend von den Angaben in Abschnitt 2.2.3, dass  $\lambda_r \in \mathbb{R}^{3-n_d-n_k}$ . Hier wird angenommen, dass ein bilateraler Kontakt zwischen Manipulator und Umgebung besteht, d. h. der Manipulator steht stets im Kontakt zur Umgebung und kann sich nicht von dieser fortbewegen. Der Zweck dieses Kapitels besteht in der Veranschaulichung der eher abstrakten Ausführungen in Abschnitt 2.2.3 anhand dieser einfachen Beispiele. Beispielsweise wird die Herleitung der Terme  $S_{\lambda r}$  und  $S_{yk}$  für die Berechnung der Aktorkräfte (2-53) der hybriden Kraft-/Positionsregelung nach [SK16] für das vorliegende Beispiel erläutert. Auf eine Darstellung der Regelergebnisse für diese einfachen Beispielsysteme (z. B. in Form eines Vergleichs der Soll- und Ist-Zeitverläufe der jeweiligen Regelgrößen) wird verzichtet, da sie für die weitere Arbeit keine nennenswerte Relevanz besitzen.

Der erste Unterabschnitt dieses Kapitels betrachtet den Fall, in dem die Umgebung eine kinematische Zwangsbedingung bewirkt. Im zweiten Unterabschnitt besitzt die Umgebung zusätzlich eine nicht vernachlässigbare Dynamik. Zum Abschluss des Kapitels erfolgt eine kurze Zusammenfassung. In beiden genannten Fällen wird ein zweidimensionales Äquivalent des Hexapod als Manipulator betrachtet, siehe Bild 3-1.

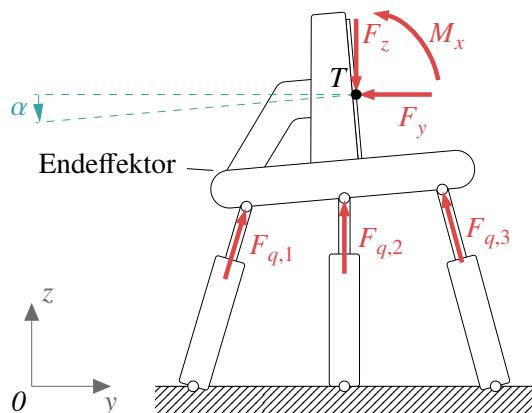


Bild 3-1: Ersatzbild des Manipulators

Die Bewegungsgleichungen des Manipulators können in der Form (2-17) ausgedrückt werden, d. h.

$$\mathbf{M}_v(z) \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_v(z, v) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v(z) = \mathbf{J}_g^{-T}(z) \cdot \mathbf{F}_q - \boldsymbol{\tau}. \quad (3-1)$$

Hier werden die verallgemeinerten Positions-, Geschwindigkeits- und Kraftvektoren im Punkt  $T$ , dem TCP,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r_y \\ r_z \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \\ \omega_{E,x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

verwendet. Die Eingangsgröße des Systems sind die Zylinderkräfte  $\mathbf{F}_q$ . Auf die Angabe der Terme für  $\mathbf{M}_v$ ,  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{g}_v$  und  $\mathbf{J}_g^{-T}$  wird an dieser Stelle verzichtet. Bei Interesse ist die Herleitung der Modellgleichungen in Anhang A5.2 gegeben.

### 3.1 Kinematische Zwangsbedingung

Bild 3-2 zeigt das physikalische Ersatzbild für die in diesem Abschnitt betrachtete Situation. Der Kontaktpartner ist hier ein einfacher, masseloser Stab, der im Punkt  $A$  mit einer starren Wand und im Punkt  $T$  mit dem Endeffektor des Manipulators (jeweils über ein Drehgelenk) verbunden ist.

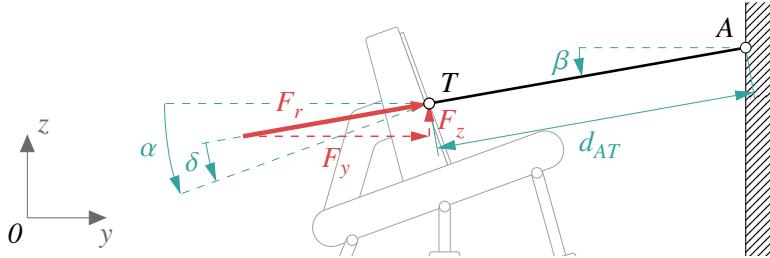


Bild 3-2: Umgebung mit kinematischer Zwangsbedingung

Der masselose Stab kann nur die Kraft  $F_r$  in Stabrichtung aufnehmen. Darüber hinaus enthält Bild 3-2 die Zerlegung dieser Kontaktkraft in die Komponenten  $F_y$  und  $F_z$  (Inertialsystem  $I$ ), den Absolutdrehwinkel des Manipulators  $\alpha$  und des Stabes  $\beta$  sowie die relative Verdrehung von Manipulator und Umgebung  $\delta = \alpha - \beta$ .  $d_{AT}$  ist die konstante Entfernung der Punkte  $A$  und  $T$  bzw. die Länge des Stabes. Das System besitzt zwei kinematische FHG, bspw.  $\beta$  und  $\delta$ . Damit gilt  $n_k = 2$  und für die generalisierten Koordinaten und Kontaktkräfte folgt  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda_r \in \mathbb{R}^1$ .

Für den Vektor  ${}_I\mathbf{r}_{TA}$  gilt gleichermaßen

$${}_I\mathbf{r}_{TA} = {}_I\mathbf{r}_{0A} - {}_I\mathbf{r}_{0T} \quad (3-3)$$

und

$${}_I\mathbf{r}_{TA} = -{}^{IK}\mathbf{A} \cdot {}_K\mathbf{r}_{AT} \quad (3-4)$$

mit

$${}_I\mathbf{r}_{0T} = \begin{bmatrix} r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \quad {}_I\mathbf{r}_{0A} = \begin{bmatrix} r_{A,y} \\ r_{A,z} \end{bmatrix}, \quad {}_K\mathbf{r}_{AT} = \begin{bmatrix} -d_{AT} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-5)$$

Die Bewegung des Manipulators bzw. dessen TCP wird durch den masselosen Stab auf die Kreisbahn mit Radius  $d_{AT}$  um den Lagerpunkt A eingeschränkt, d. h.

$$|{}_I\mathbf{r}_{OA} - {}_I\mathbf{r}_{OT}| = |{}^{IK}\mathbf{A} \cdot {}_K\mathbf{r}_{AT}| . \quad (3-6)$$

Die kinematische Zwangsbedingung lautet demnach

$$\varphi(z) = (r_{A,y} - r_y)^2 + (r_{A,z} - r_z)^2 - d_{AT}^2 = 0 . \quad (3-7)$$

Die zeitliche Ableitung der kinematischen Zwangsbedingung führt zu

$$2 \cdot [r_{A,y} - r_y \quad r_{A,z} - r_z \quad 0] \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (3-8)$$

Nach Division durch die Konstante  $2 d_{AT}$  folgt als Jacobimatrix der Zwangsbedingungen

$$\mathbf{J}_c(z) = \frac{1}{d_{AT}} \cdot [r_{A,y} - r_y \quad r_{A,z} - r_z \quad 0] . \quad (3-9)$$

Mithilfe der Zusammenhänge

$$\sin \beta = \frac{r_{A,z} - r_z}{d_{AT}}, \quad \cos \beta = \frac{r_{A,y} - r_y}{d_{AT}}, \quad (3-10)$$

die anhand von Bild 3-2 hergeleitet werden können, kann die Jacobimatrix der Zwangsbedingungen auch in der Form

$$\mathbf{J}_c(z) = [\cos \beta \quad \sin \beta \quad 0] \quad (3-11)$$

aufgeschrieben werden. Hieraus folgt

$$\mathbf{S}_{\lambda r}(z) = \mathbf{J}_c^T(z) = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3-12)$$

Die physikalische Bedeutung der auf diesem Wege festgelegten generalisierten Kontaktkraft  $\lambda_r$  wird mithilfe von Bild 3-2 und Gleichung (2-46) deutlich: es handelt sich um die bereits in Bild 3-2 eingetragene resultierende Kontaktkraft  $F_r$  zwischen Manipulator und Stab, die in Richtung des Stabes wirkt. Diese physikalische Bedeutung konnte durch die Division von (3-8) durch  $2 d_{AT}$  herbeigeführt werden. Ohne diese Division besitzt  $\lambda_r$  die Einheit  $\text{N m}^{-1}$ .

Bei Verwendung des Absolutwinkels  $\beta$  und des Relativwinkels  $\delta$  als generalisierte Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  lautet der Geschwindigkeitsvektor des TCP

$$\mathbf{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{AT} \sin \beta & 0 \\ -d_{AT} \cos \beta & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{yk}(\mathbf{y}_k)} \cdot \dot{\mathbf{y}}_k, \quad \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} . \quad (3-13)$$

Andere Möglichkeiten bestehen, z. B. können  $\beta$  und  $\alpha$  als generalisierte Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  verwendet werden. Alle Einträge in der zugehörigen Matrix  $S_{yk}$  sind mit Ausnahme einer 0

unten links identisch zu denen in (3-13). In beiden Fällen ist die Bedingung der Reziprozität (2-48) erfüllt. Außerdem gilt

$$\dot{\mathbf{S}}_{yk}(\mathbf{y}_k, \dot{\mathbf{y}}_k) = d_{AT} \cdot \dot{\beta} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-14)$$

Aufbauend auf diesen Ergebnissen kann eine hybride Kraft-/Positionsregelung für  $\mathbf{y}_k$  und  $\lambda_r$  durch Wahl der Aktorkräfte (2-53) nach [SK16] oder (2-75) nach Aghili [Agh05] sowie der passivitätsbasierte Ansatz nach (2-76) implementiert werden. Für die *dynamic hybrid control method* nach Yoshikawa [Yos87; YST88] werden die Aktorkräfte nach (2-60) gebildet. Die hierfür erforderliche Matrix  $\bar{\mathbf{S}}_{yk}$  und deren zeitliche Ableitung kann bspw. aus dem Zusammenhang von  $\dot{\beta}$  und der Bahngeschwindigkeit  $v_t$ ,

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{d_{AT}} \cdot v_t, \quad (3-15)$$

mit

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_t \end{bmatrix} = {}^{KI}\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_y \sin \beta + v_z \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

und  $\delta = \dot{\alpha} - \dot{\beta}$  zu

$$\bar{\mathbf{S}}_{yk} = \frac{1}{d_{AT}} \cdot \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & d_{AT} \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{\mathbf{S}}}_{yk} = \frac{\dot{\beta}}{d_{AT}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

bestimmt werden<sup>11</sup>, vgl. auch Bild 3-3.

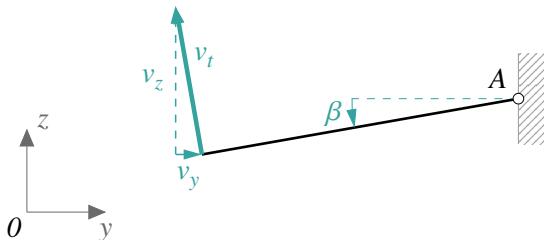


Bild 3-3: Zur Herleitung von  $\dot{\beta}$

Diese Lösung stimmt mit der Pseudoinverse überein, d. h.  $\bar{\mathbf{S}}_{yk} = \mathbf{S}_{yk}^+$ .

Die Implementierung aller in Abschnitt 2.2.3 genannten hybriden Kraft-/Positionsregelungen in analytischer Formulierung für das betrachtete Beispielsystem mit kinematischer Zwangsbedingung ist damit dargelegt. Sie führen zu neuen Stelleingängen für die festgelegten generalisierten Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  ( $\beta$  und  $\delta$  oder  $\alpha$ ) sowie die generalisierte Kontaktkraft  $\lambda_r$ , die der Kraft  $F_r$  in Bild 3-2 entspricht. Anhand eines entsprechenden Simulationsmodells konnten alle genannten Ansätze erprobt und die Richtigkeit der angegebenen Gleichungen bestätigt werden. Im Simulationsmodell führen alle Ansätze zu vergleichbar guten Regelergebnissen.

<sup>11</sup>Für  $\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$  sind abweichend hiervon die ersten zwei Einträge der zweiten Zeile beider Matrizen 0.

### 3.2 Dynamische Umgebung

Das zweidimensionale Ersatzbild für den Kontakt zu einer Umgebung mit nicht vernachlässigbarer Dynamik zeigt Bild 3-4. Im gewählten Beispiel ist der Kontaktpartner ein massebehafteter Stab, der außerdem über ein Feder-Dämpfer-System (Steifigkeit  $c$ , Dämpfung  $d$ , Länge der entspannten Feder  $d_{BC,nom}$ ) mit dem Inertialsystem verbunden ist.

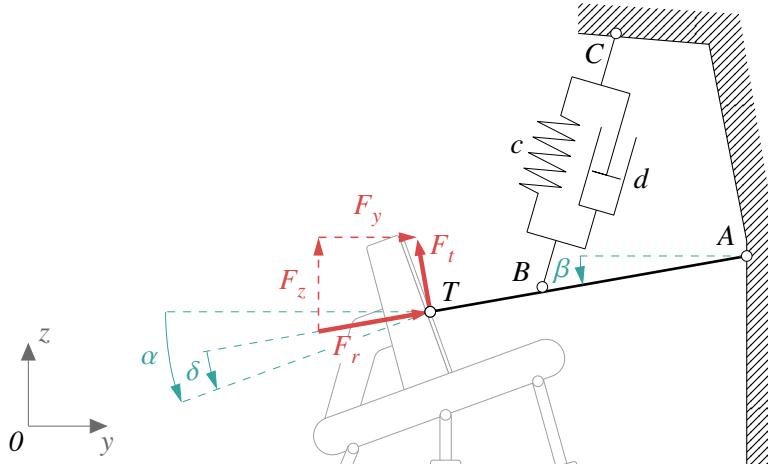


Bild 3-4: Umgebung mit nicht vernachlässigbarer Dynamik

In diesem Fall wird von dem Stab nicht nur die Kraft  $F_r$  in Stabrichtung aufgenommen. Hinzu kommt die tangentiale Kraftkomponente  $F_t$ . Diese beiden Kräfte entsprechen den in das stabfeste System transformierten Kräften  $F_y$  und  $F_z$ , d. h. es gilt

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} = {}^{IK}\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix}, \quad {}^{IK}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (3-18)$$

Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\delta$  haben die gleiche Bedeutung wie zuvor.

Die Bewegungsgleichungen der Umgebung lauten

$$\mathbf{M}_u(\mathbf{y}_d) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{n}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) = \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-19)$$

mit  $n_d = 1$  und  $\mathbf{y}_d = \beta \in \mathbb{R}^1$  (Herleitung siehe Anhang A5.3). Sie kommen in diesem Abschnitt zu den Bewegungsgleichungen des Manipulators (3-1) und den holonomen, skleronomen Zwangsbedingungen (3-7) hinzu.

Der Endeffektor des Manipulators besitzt durch das Kugelgelenk in Punkt  $T$  mit dem Winkel  $\delta$  einen kinematischen FHG gegenüber der Umgebung, d. h.  $n_k = 1$ . Dieser Winkel wird im Folgenden für die Beschreibung der Relativbewegung von Manipulator und Umgebung verwendet, sodass  $\mathbf{y}_k = \delta \in \mathbb{R}^1$ . Damit folgt für die generalisierten Kontaktkräfte  $\lambda_r \in \mathbb{R}^1$  und  $\lambda_a \in \mathbb{R}^1$ , wobei hier in Erweiterung der Wahl aus Abschnitt 3.1  $\lambda_r = F_r$  und  $\lambda_a = F_t$  gewählt wird, vgl. auch Bild 3-4. Die Kräfte und Geschwindigkeiten im TCP lauten in Abhängigkeit der festgelegten generalisierten Koordinaten und Kontaktkräfte

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}}_{S_{\lambda a}} \cdot \lambda_a + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}}_{S_{\lambda r}} \cdot \lambda_r, \quad \boldsymbol{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{AT} \sin\beta \\ -d_{AT} \cos\beta \\ 1 \end{bmatrix}}_{S_{yd}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{S_{yk}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_k, \quad (3-20)$$

wobei die Matrizen  $S_{\lambda a}$ ,  $S_{\lambda r}$ ,  $S_{yd}$  und  $S_{yk}$  die Bedingungen (2-81) erfüllen. Andere Festlegungen der Größen  $\lambda_a$ ,  $\lambda_r$ ,  $y_d$  und  $y_k$  sind möglich; es muss jedoch stets die Erfüllung der Bedingungen (2-81) sichergestellt sein. Die zeitlichen Ableitungen von  $S_{yd}$  und  $S_{yk}$  lauten

$$\dot{S}_{yd}(y_d, \dot{y}_d) = d_{AT} \cdot \dot{\beta} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{S}_{yk} = \mathbf{0}. \quad (3-21)$$

Auf Basis dieser Ausführungen kann die hybride Kraft-/Positionsregelung nach de Luca und Manes [LM94] implementiert werden. Für den Ansatz nach Featherstone [Fea03] mit den Aktorkräften nach (2-102) sind die Matrizen  $S_1$  und  $T_2$  erforderlich. Aus der Tatsache, dass der Manipulator und die Umgebung im Punkt  $T$  über ein Drehgelenk miteinander verbunden sind, folgt, dass sich die verallgemeinerten Geschwindigkeitsvektoren von Manipulator  $v$  und Umgebung  $v_u$  nur in der Winkelgeschwindigkeit unterscheiden. Die translatorischen Geschwindigkeiten in  $y$ - und  $z$ -Richtung stimmen dagegen überein. Die relative Winkelgeschwindigkeit der in Kontakt stehenden Körper beträgt  $\dot{\delta} = \dot{\alpha} - \dot{\beta}$ . Nach (2-97) folgt daher

$$v_{rel} = v - v_u = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{S_1} \cdot \underbrace{\dot{\delta}}_{\dot{y}_{rel}}. \quad (3-22)$$

$S_1$  entspricht hier also der Matrix  $S_{yk}$  des Ansatzes nach de Luca und Manes. Die Matrix  $T_2$  kann bspw. als

$$T_2 = \begin{bmatrix} IK A \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

festgelegt werden. In diesem Fall gilt  $T_2 = [S_{\lambda r} \quad S_{\lambda a}]$ . Der andere Ansatz zur hybriden Kraft-/Positionsregelung nach Featherstone [FSK98] mit den Aktorkräften (2-109) kann mit den gleichen Matrizen  $S_1$  und  $T_2$  implementiert werden. Über diese Matrizen hinaus ist noch das Umgebungsmodell nach (3-19) in die Form (2-96) zu überführen, da die Größen  $\bar{M}_u^{-1}$  und  $\ddot{v}_u$  für die Berechnung der Aktorkräfte erforderlich sind. Für den verallgemeinerten Geschwindigkeitsvektor  $v_u$  und den verallgemeinerten Beschleunigungsvektor  $\ddot{v}_u$  des Punktes  $T$  gilt

$$v_u = S_{yd} \cdot \dot{y}_d, \quad \ddot{v}_u = S_{yd} \cdot \ddot{y}_d + \dot{S}_{yd} \cdot \dot{y}_d. \quad (3-24)$$

Durch Auflösen der Bewegungsgleichungen der Umgebung (3-19) nach den generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{y}_d$  und Einsetzen der erhaltenen Gleichung in  $\ddot{v}_u$  nach (3-24) folgen für  $\bar{M}_u^{-1}$  und  $\ddot{v}_u$  unmittelbar die Berechnungsformeln

$$\bar{M}_u^{-1} = S_{yd} \cdot M_u^{-1} \cdot S_{yd}^T, \quad \ddot{v}_u = \dot{S}_{yd} \cdot \dot{y}_d - S_{yd} \cdot M_u^{-1} \cdot n_u. \quad (3-25)$$

Mithilfe des Ansatzes nach de Luca und Manes [LM94] resultiert mit den hier getroffenen Festlegungen eine lineare Eingangsgröße für die kinematische Koordinate  $y_k = \delta$  sowie die reaktive Kraft  $\lambda_r = F_r$ . Für den dritten Systemeingang folgt bei Berechnung der Aktorkräfte nach (2-92), dass  $\lambda_a = F_t$ . Bei Berechnung der Aktorkräfte nach (2-94) gilt

hingegen  $y_d = \beta$ . Aufbauend auf diesen Systemeingängen kann ein Regelungsentwurf für  $\delta$  und  $F_r$ , sowie  $F_t$  oder  $\beta$  erfolgen. Die Ansätze nach Featherstone weisen unterschiedliche Regelgrößen auf: nach [FSK98] sind dies  $\delta$  und  $F_r$  sowie  $F_t$ , nach [Fea03]  $\alpha$ ,  $F_r$  und  $F_t$ .

Auch diese drei Ansätze wurden anhand eines entsprechenden Simulationsmodells getestet. Während sich das Beispielsystem bei den Verfahren nach [LM94] und [FSK98] für die jeweiligen Zielgrößen auch ideal vorsteuern lässt, ist dies bei dem Verfahren nach [Fea03] prinzipbedingt nicht möglich. Durch den Term  $S_2^T M_v S_2 \cdot \dot{v}_2$  in (2-103) ist ein Regler erforderlich, um eine hinreichende Übereinstimmung von Soll- und Istwerten herbeizuführen. Vorteilhaft bei diesem Ansatz ist, dass für die Implementierung nur die Matrizen  $S_1$  und  $T_2$  erforderlich sind, nicht aber die Bewegungsgleichungen der Umgebung.

### 3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Implementierung sämtlicher in Abschnitt 2.2.3 des Stands von Technik und Forschung erläuterten Verfahren zur hybriden Kraft-/Positionsregelung an einfachen, zweidimensionalen Beispielsystemen veranschaulicht. Abschnitt 3.1 betrachtete ein Umgebungsmodell mit kinematischer Zwangsbedingung, Abschnitt 3.2 eine Umgebung mit nicht vernachlässigbarer Dynamik. Auch die im Stand von Technik und Forschung angesprochenen Wahlfreiheiten bei der Festlegung der für die Implementierung erforderlichen Matrizen wurden exemplarisch gezeigt, wobei stets auf eine physikalische Bedeutung aller Größen geachtet wurde.

Sämtliche Verfahren wurden an den jeweils betrachteten Beispielsystemen erprobt. Mithilfe der neuen Systemeingänge gelingt bei einem idealen Modell der Regelstrecke im Regler, idealer Messung, keinen Störgrößen sowie idealer Aktordynamik für alle Ansätze außer dem Regelungs- und Vorsteuerungsentwurf nach [Fea03] auch der rein vorgesteuerte Betrieb für die jeweiligen Regelgrößen.



## 4 Modellierung des Prüfstands

Im Rahmen der durchgeführten Arbeiten zu dieser Dissertationsschrift wurde eine umfangreiche Simulationsumgebung für den Prüfstand erstellt, mit deren Hilfe die Prüfstandsregelung entwickelt und erprobt wurde. Sie enthält auch ein MKS-Modell des gesamten HiL-Achsprüfstands in MATLAB/Simscape, wobei die Auswahl von MATLAB/Simscape sich vor allem in der besonders einfachen Möglichkeit zur Co-Simulation des Modells mit den in MATLAB/Simulink vorliegenden Regelungsalgorithmen begründet. Abschnitt 4.1 gibt einen kurzen Einblick in den Aufbau sowie die Eigenschaften der entwickelten Simulationsumgebung.

Die Modellbildung in MATLAB/Simscape erfolgt durch ungerichtete Verknüpfung von physikalischen Elementen, z. B. Gelenken und Massen. Nachteilig ist, dass sich aus dieser topologieorientierten Modellierung nicht die Systemgleichungen gewinnen lassen. Aus diesem Grund schließt sich an den ersten Abschnitt die Herleitung der Bewegungsgleichungen der relevanten, mechanischen Teilsysteme des betrachteten Prüfsystems an. Dies sind der Hexapod (Abschnitt 4.2) und die MacPherson-Radaufhängung (Abschnitt 4.3). Im Anschluss wird aus diesen beiden Komponenten das Gesamtsystem gebildet (Abschnitt 4.4). Die rechte Seite des Prüfstands, d. h. die rechte Seite der Fahrzeugachse sowie der Störzyylinder, ist zwar im Simulationsmodell enthalten, die zugehörigen Bewegungsgleichungen werden im Rahmen dieser Arbeit aber nicht behandelt.

### 4.1 Simulationsmodell des betrachteten Prüfsystems

Dieser Abschnitt geht auf die Simulationsumgebung des betrachteten Prüfsystems ein, die für die Entwicklung und Erprobung der Prüfstandsregelung verwendet wurde. Bild 4-1 zeigt ein Bildschirmfoto der mechanischen Teilkomponenten.

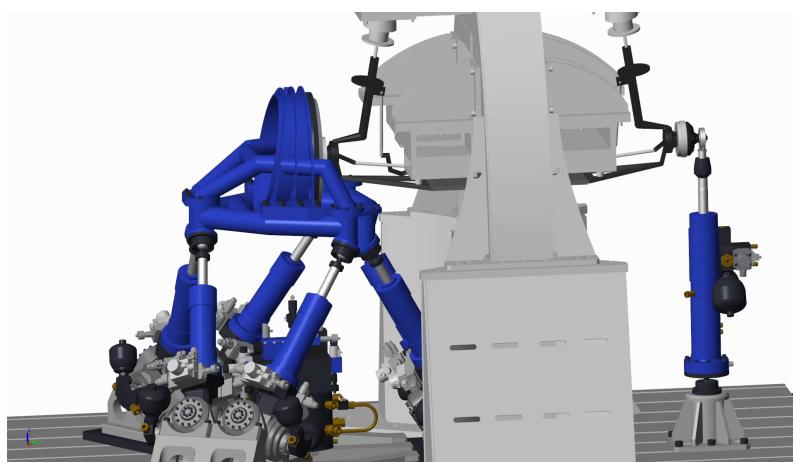


Bild 4-1: Bildschirmfoto des MKS-Modells

Das Modell besitzt einen modularen Aufbau. Die wesentlichen Teilsysteme sind:

- Fahrzeugachse,

- Hexapod,
- Kraftmessrad,
- Anregungszylinder auf der rechten Achsseite,
- Aktorik und Sensorik,
- Regelung und Beobachtung,
- Ablaufsteuerung und Sollwertgenerierung.

Für viele dieser Komponenten enthält das Modell unterschiedliche Varianten und Untervarianten. Durch ausgedehnte Nutzung von *Variant Subsystems* kann vor Simulationsbeginn mithilfe von Auswahlvariablen einfach zwischen den verschiedenen Ausprägungsformen gewählt werden. Auf diese Weise lässt sich die Auswirkung einer bestimmten Systemeigenschaft, einer Komponente oder eines Regelungsalgorithmus auf das Systemverhalten schnell untersuchen. Die verschiedenen Varianten können sich dabei u. a. in ihrer Komplexität unterscheiden. Beispielsweise kann für die Aktorik eine Wahl zwischen einem detaillierten Modell des Druckaufbaus in den Zylindern und der auch am Prüfstand eingesetzten Druckregelung, einem vereinfachten Aktordynamikmodell dritter Ordnung sowie idealer Aktorik gewählt werden. Auch bei der Sensorik kann aus verschiedenen Alternativen gewählt werden. Die (virtuellen) Messgrößen im Modell können bspw. mit Messrauschen versehen werden, das am Prüfstand gemessen wurde, oder die Messung kann als ideal angenommen werden. Bei der Fahrzeugachse können zahlreiche Vereinfachungen vorgenommen werden, z. B. lassen sich die Querlenkerlager durch ein einfaches Drehgelenk ersetzen. Hierdurch nimmt zwar die Realitätsnähe ab, im Rahmen der Herleitung der Bewegungsgleichungen für den Prüfstand in den folgenden Unterkapiteln waren die damit möglichen, vereinfachten Zwischenschritte aber sehr hilfreich.

Alle Teilsysteme sind zudem in Simulink-Bibliotheken abgelegt und werden aus diesen in das Modell geladen. Das auf dem Echtzeitrechner des Prüfstands laufende Modell greift auf die gleichen Bibliotheken zurück; wird ein spezifischer Block im Simulationsmodell geändert und die Änderung in die Bibliothek übertragen, so überträgt sie sich automatisch in das Modell auf dem Echtzeitrechner. Hierfür waren weitreichende Anpassungen an beiden Modellen erforderlich, bspw. der Abgleich verwendeter Signalbusse. Die Vorteile dieser Vorgehensweise überwiegen den damit verbundenen Zeitaufwand jedoch deutlich. Natürlich sind nicht alle Teilsysteme im Simulationsmodell sowie auf dem Prüfstand identisch; hier ist insb. die Ablaufsteuerung zu nennen, die jeweils durch einen in MATLAB/Stateflow programmierten Zustandsautomaten realisiert ist. Die Ablaufsteuerung des Simulationsmodells stellt eine stark reduzierte Form der Ablaufsteuerung auf dem Echtzeitrechner dar, da viele Funktionen, z. B. die Systemüberwachung und der Einschaltprozess des realen Systems, keine Relevanz für die Simulation besitzen.

Die mechanischen Komponenten des Prüfstands sind im Simulationsmodell durch die Methode der Mehrkörpersysteme abgebildet. Es handelt sich daher um ein System aus mehreren, idealen Starrkörpern, deren Masseneigenschaften im jeweiligen Schwerpunkt zusammengefasst sind. Die Körper sind über ideale Gelenke verkoppelt. Hinzu kommen masselose Kraftelemente und Zwangsbedingungen.

Diese Modellierungsmethodik besitzt nur einen begrenzten Gültigkeitsbereich. So nimmt die Modellgüte mit steigender Frequenz ab, u. a. deshalb, weil die als starr angenommenen Körper in der Realität nicht ideal starr sind. Häufig wird eine obere Grenze von 30 Hz für

die Modellgültigkeit angegeben, z. B. für Fahrzeugmodelle, wenn die Lagersteifigkeiten und ersten Karosserieeigenformen in das Modell einbezogen werden [Ada14, S. 101]. Auch Rill [Ril94] gibt diesen Frequenzbereich an. Zusätzlich nennt er, dass sowohl der Komfort als auch die aktive Sicherheit eines Fahrzeugs hauptsächlich durch Bewegungen in diesem Frequenzbereich bestimmt werden.

Für die Methode der Mehrkörpersysteme spricht, dass die Berechnung der entwickelten Modelle mit verhältnismäßig wenig Rechenaufwand verbunden ist. Bei Verwendung der Modelle zur Regelung des Prüfstands ist dies von großem Vorteil, da in diesem Falle die Echtzeitfähigkeit der Prüfstandssoftware gewährleistet sein muss, die wesentlich von der Komplexität der in jedem Rechenschritt durchzuführenden Berechnungen abhängt. Zu diesem Zweck ist auch das explizite Vorliegen der Modellgleichungen in Minimalkoordinaten unabdingbar, weshalb im Folgenden die Bewegungsgleichungen für die relevanten, mechanischen Teilsysteme, d. h. den Hexapod, die MacPherson-Radaufhängung sowie das gekoppelte Gesamtsystem, hergeleitet werden. Ziel der Modellierung ist die Bildung echtzeitfähiger Modelle, die die interessierenden Systemeigenschaften hinreichend gut abbilden. Als Referenz bei der Modellbildung dient ein detailliertes, auf die jeweils betrachtete Teilkomponente reduziertes MKS-Modell.

## 4.2 Starrkörper-Dynamikmodell des Hexapod

Bild 4-2 zeigt ein abstrahiertes Ersatzmodell des Hexapod.

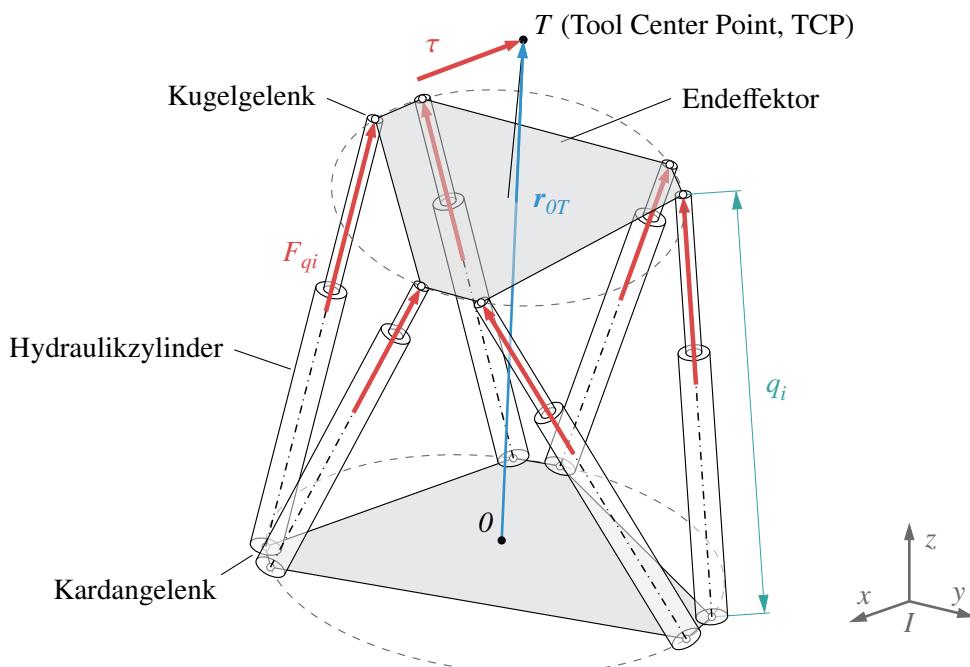


Bild 4-2: Ersatzmodell des Hexapod

Die Endeffektorplattform wird von sechs Linearaktoren getragen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um hydraulische Gleitlaufzylinder. Sie sind über Kardangelenke mit der Aufspannplatte und über Kugelgelenke mit der Endeffektorplattform verbunden. Zwischen

den Zylinderstangen und -rohren liegt jeweils ein Dreh- sowie ein Schub-FHG vor. In Bild 4-2 sind auch die für die Modellierung und Regelung des Hexapod relevanten Messgrößen eingetragen.

Die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$  lassen sich aus den Zylinderdifferenzdrücken  $\Delta p_i$  berechnen. Mit der Kolbenfläche  $A_{Zyl}$  lauten sie in Vektorform

$$\mathbf{F}_q = [F_{q1} \ \dots \ F_{q6}]^T = A_{Zyl} \cdot [\Delta p_1 \ \dots \ \Delta p_6]^T. \quad (4-1)$$

Der Vektor

$$\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T \quad (4-2)$$

enthält die Kontaktkräfte und -momente zwischen dem Endeffektor und seiner Umgebung im sog. TCP. Am Prüfstand erfolgt deren Messung mithilfe eines Kraftmessrades, bei der die Messwerte 18 einzelner Dehnungsmessstreifen (DMS) in die Größe  $\boldsymbol{\tau}$  umgerechnet werden. Neben den Zylinderkräften  $\mathbf{F}_q$  und den Kontaktkräften und -momenten  $\boldsymbol{\tau}$  liegen die einzelnen Zylinderlängen  $q_i$  als Messgröße vor, die ebenfalls in einen Vektor gesammelt werden,

$$\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_6]^T. \quad (4-3)$$

Die Lage des sog. TCP wird durch den Vektor seiner kartesischen Koordinaten bezüglich des festgelegten Inertialsystems

$${}_I\mathbf{r}_{OT} = [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (4-4)$$

beschrieben. Dieser Vektor ist ebenfalls in Bild 4-2 eingetragen.

Bild 4-3 zeigt die topologische Struktur des Hexapod ohne Umgebungskontakt. Das Bild enthält auch eine Aufschlüsselung der  $n_K = 13$  starren Körper, der  $n_G = 18$  Gelenke und der  $n_Z = 66$  Zwangsbedingungen. Eine Erläuterung der verwendeten Symbole sowie eine kurze Einführung weiterer für die folgenden Ausführungen relevanter Zusammenhänge befindet sich in Anhang A1.

Mithilfe der MKS-Topologie und dem Grübler-Kutzbach-Kriterium nach (A2-1) lässt sich die Anzahl der FHG des Endeffektors bestimmen. Nach (A2-3) besitzt der Hexapod (in Abwesenheit eines Umgebungskontakts)

$$n_L = n_G - n_K = 5 \quad (4-5)$$

kinematische Schleifen, die bereits in Bild 4-3 eingetragen wurden. Es liegen  $n_I = 6$  isolierte FHG vor, denn jede Zylinderstange kann aufgrund des an ihrem oberen Ende befindlichen Kugelgelenks frei um den Dreh-FHG des Drehschubgelenks rotieren. Keiner dieser insgesamt sechs FHG trägt maßgeblich zur Bewegung des Endeffektors bei. Isolierte FHG werden bei der Modellierung in der Regel vernachlässigt und in geeigneter Weise eliminiert. Hier gelingt dies, indem in der Modellierung die Drehschub- durch einfache Schubgelenke ersetzt werden. Es ergeben sich insgesamt

$$f = 6 \cdot n_K - n_Z - n_I = 6 \quad (4-6)$$

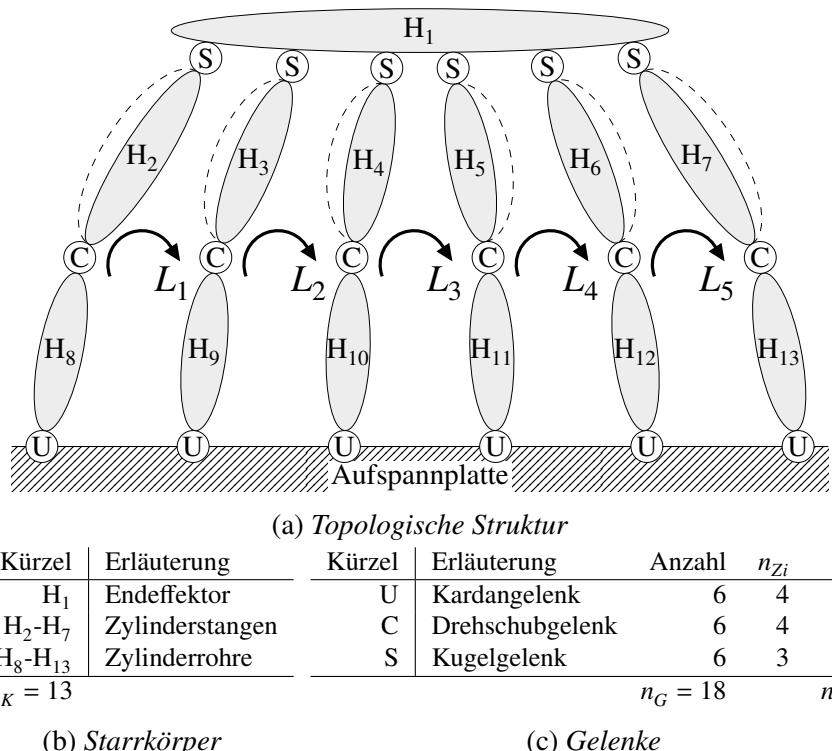


Bild 4-3: Topologie und Eigenschaften des Hexapodmodells

FHG für den Hexapod bzw. dessen Endeffektorplattform. Demnach müssen sechs Minimalkoordinaten festgelegt werden. Hier werden die kartesischen Koordinaten des TCP sowie die XYZ-Kardanwinkel (siehe Anhang A1.4, auch für die Definition der Drehmatrix  ${}^{IE}A$  vom endeffektorfesten System  $E$  in das Inertialsystem  $I$ ) gewählt, die die Lage und Orientierung der Endeffektorplattform beschreiben, d. h.

$$z = \begin{bmatrix} {}_I r_{ot}^T & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T. \quad (4-7)$$

Die Singularität der XYZ-Kardanwinkel für  $|\beta| = \pi/2$  hat für das betrachtete System keine praktische Relevanz, da eine derart große Verdrehung um die entsprechende Achse aufgrund der Endanschläge der Hydraulikzylinder physikalisch nicht möglich ist.

Im Folgenden wird zunächst eine detaillierte Modellierung des Hexapod mit allen  $n_K = 13$  Starrkörpern vorgenommen. Daran schließt sich die Beschreibung eines einfachen, nur einen Körper umfassenden Modells des Hexapod an. Dabei hat nur der Endeffektor eine Masse und Trägheit. Im Folgenden werden die Kürzel

- $\Sigma_{H13}$  für das 13 Starrkörper umfassende Modell sowie
  - $\Sigma_{H1}$  für das Modell, das nur den Endeffektor berücksichtigt,

verwendet. Außerdem werden zwei weitere Modellvarianten mit jeweils sieben Starrkörpern angegeben. In diesen Modellen wurden entweder die Masseneigenschaften der Zylinderrohre oder -stangen vernachlässigt. Bei allen vier Modellen ergeben sich identisch aufgebaute Bewegungsgleichungen. Die Bewegungsgleichungen und wichtige Zusammenhänge am Hexapod werden in Abschnitt 4.2.3 erläutert. Im darauffolgenden Kapitel wird die Parametrierung des Modells  $\Sigma_{H1}$  optimiert. Zum Abschluss erfolgt eine Validierung und ein Vergleich der Modelle anhand des gegebenen MKS-Modells des Hexapod.

Eine Erläuterung der nachfolgend verwendeten Notation ist in Anhang A1.2 zu finden. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen sowohl für den Hexapod als auch die Radaufhängung (im anschließenden Unterkapitel) wird auf die Kurznotation

$$\boldsymbol{e}_x = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad \boldsymbol{e}_y = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \boldsymbol{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (4-8)$$

für die Einheitsvektoren in den einzelnen Achsenrichtungen zurückgegriffen.

#### 4.2.1 13-Starrkörper-Modell

Für das Verständnis der Herleitung des Modells  $\Sigma_{H13}$  ist Bild 4-4 hilfreich. Darin sind alle für die Herleitung relevanten Vektoren am Beispiel eines Linearaktors eingetragen. Diese Vektoren stellen (in körperfesten Koordinaten) gleichzeitig die geometrischen Parameter des Modells dar.

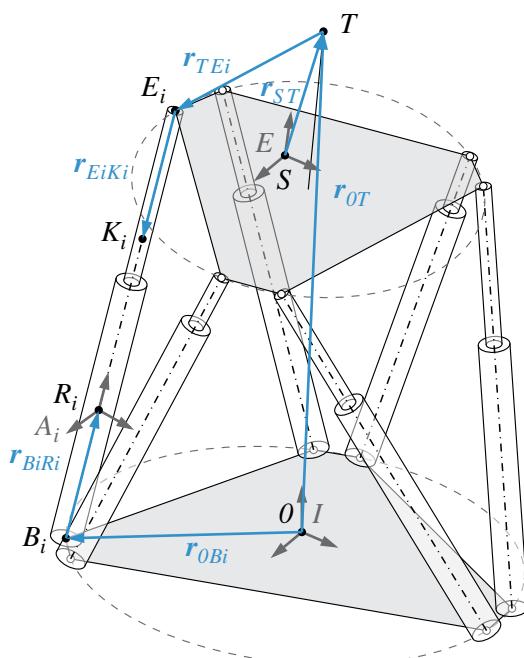


Bild 4-4: Geometrische Zusammenhänge am Starrkörpermodell des Hexapod

Die in Bild 4-4 eingetragenen Punkte  $S$  und  $T$  kennzeichnen den Schwerpunkt des Endeffektors sowie den bereits eingeführten TCP.  $R_i$  und  $K_i$  sind die Schwerpunkte des Rohres und der (Kolben-) Stange des betrachteten Aktors  $i$ . Die Punkte  $B_i$  und  $E_i$  kennzeichnen das untere und obere Ende dieses Aktors  $i$ . Sie entsprechen den Drehpunkten des dort befindlichen Kardan- bzw. Kugelgelenks. Der Ursprung des gewählten Inertialsystems ist der Punkt  $O$ . Im Folgenden sind alle im Inertialsystem ausgedrückten Größen mit dem Index  $I$  versehen, Größen im endeffektorfesten Koordinatensystem besitzen den Index  $E$  und solche im körperfesten System des Aktors  $i$  den Index  $A_i$ .

## Positionsgrößen

Die Rotationsmatrix des Endeffektors  ${}^E A$  ergibt sich direkt aus den Kardanwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  anhand von Formel (A1-10).

Zur Herleitung der Rotationsmatrix  ${}^{Ai} A$  des Aktors  $i$  ist es hilfreich, den Vektor vom Kardan- zum Kugelgelenk in normierter Form  ${}_i e_{BiEi}$  zu bestimmen. Er berechnet sich aus

$${}_i e_{BiEi} = \frac{{}_I r_{BiEi}}{q_i} \quad (4-9)$$

mit der Aktor- bzw. Gelenklänge

$$q_i = \sqrt{{}_I r_{BiEi}^T \cdot {}_I r_{BiEi}} \quad (4-10)$$

und dem Vektor vom Kardan- zum Kugelgelenk

$${}_I r_{BiEi} = {}_I r_{0Ei} - {}_I r_{0Bi} . \quad (4-11)$$

Für den Vektor  ${}_I r_{0Ei}$  gilt

$${}_I r_{0Ei} = {}_I r_{OT} + {}_I r_{TEi} , \quad {}_I r_{TEi} = {}^{IE} A \cdot {}_E r_{TEi} . \quad (4-12)$$

${}_I r_{0Bi}$  und  ${}_E r_{TEi}$  sind gegebene, zeitinvariante Modellparameter. Die  $z$ -Achse des aktorfesten Koordinatensystems  $Ai$  wird nun so festgelegt, dass sie stets in Richtung des Vektors  ${}_I e_{BiEi}$  zeigt. Ein Einheitsvektor in Richtung der  $z$ -Achse des körperfesten Systems  $e_z$  wird demnach mit der gesuchten Rotationsmatrix  ${}^{Ai} A$  auf den Vektor  ${}_I e_{BiEi}$  abgebildet, d. h. es gilt

$${}^{Ai} A \cdot e_z = {}_I e_{BiEi} . \quad (4-13)$$

Die Rotationsmatrix  ${}^{Ai} A$  lässt sich weiter zerlegen in

$${}^{Ai} A = {}^{Ai0} A \cdot A_{xi}(\varphi_{xi}) \cdot A_{yi}(\varphi_{yi}) . \quad (4-14)$$

Darin ist  ${}^{Ai0} A$  eine konstante Rotationsmatrix, die die Nullstellung des Kardangelenks bezüglich des Inertialkoordinatensystems beschreibt. Die Elementardrehmatrizen  $A_{xi}(\varphi_{xi})$  und  $A_{yi}(\varphi_{yi})$  beschreiben die Drehung des Kardangelenks um diese Nullstellung als Abfolge der Drehungen um die Winkel  $\varphi_{xi}$  und  $\varphi_{yi}$ . Die folgenden Herleitungen vereinfachen sich etwas, wenn

$${}^{Ai0} A = I \quad (4-15)$$

gesetzt wird. Hierdurch verändert sich die physikalische Bedeutung und Ausprägung der Winkel  $\varphi_{xi}$  und  $\varphi_{yi}$ , da die Kardandrehungen dann ausgehend vom Inertialsystem  $I$  erfolgen. Hinsichtlich der Bewegungsgleichungen hat diese Vereinfachung aber keinerlei Einfluss, solange keine Singularitäten auftreten. Im vorliegenden Fall treten diese nur auf, wenn die Aktoren in der Ebene der Aufspannplatte liegen, was physikalisch nicht möglich ist. Durch Einsetzen von (4-14) in (4-13) und Umstellen der Gleichung folgt

$$A_{yi}(\varphi_{yi}) \cdot e_z = A_{xi}^T(\varphi_{xi}) \cdot {}_I e_{BiEi} . \quad (4-16)$$

Aus den ersten beiden Zeilen dieses Gleichungssystems lassen sich nun die beiden Verdrehwinkel des Kardangelenks zu

$$\varphi_{xi} = -\arctan \frac{{}_I r_{BiEi,y}}{{}_I r_{BiEi,z}} , \quad \varphi_{yi} = \arcsin {}_I e_{BiEi,x} \quad (4-17)$$

bestimmen. Damit ist die Drehmatrix  ${}^{Ai} A$  des Aktors  $i$  bekannt.

## Geschwindigkeitsgrößen

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Endeffektorplattform lässt sich anschaulich mithilfe des Ansatzes

$$\overset{IE}{I}\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{e}_x \cdot \dot{\alpha} + \mathbf{A}_x(\alpha) \cdot \mathbf{e}_y \cdot \dot{\beta} + \mathbf{A}_x(\alpha) \cdot \mathbf{A}_y(\beta) \cdot \mathbf{e}_z \cdot \dot{\gamma} = \frac{\partial \overset{IE}{I}\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \cdot \dot{\mathbf{z}} \quad (4-18)$$

mit

$$\frac{\partial \overset{IE}{I}\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{H}_{\omega}] , \quad \mathbf{H}_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

bestimmen. Der Ansatz für den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Aktors  $i$  lautet

$$\overset{IAi}{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_x \cdot \dot{\varphi}_{xi} + \mathbf{A}_x(\varphi_{xi}) \cdot \mathbf{e}_y \cdot \dot{\varphi}_{yi} = \frac{\partial \overset{IAi}{I}\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \cdot \dot{\mathbf{z}}, \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial \overset{IAi}{I}\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} + \mathbf{e}_{\varphi_{xi}} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad \mathbf{e}_{\varphi_{xi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{xi} \\ \sin \varphi_{xi} \end{bmatrix}. \quad (4-21)$$

Die noch unbekannten partiellen Ableitungen  $\partial \dot{\varphi}_{xi}/\partial \dot{\mathbf{z}}^T$  und  $\partial \dot{\varphi}_{yi}/\partial \dot{\mathbf{z}}^T$  resultieren aus den zeitlichen Ableitungen von (4-17). Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{xi} &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{{}_I r_{BiEi,y}}{{}_I r_{BiEi,z}}\right)^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{{}_I r_{BiEi,y}}{{}_I r_{BiEi,z}} \right) = \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \cdot \dot{\mathbf{z}}, \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} &= \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -{}_I r_{BiEi,z} & {}_I r_{BiEi,y} \end{bmatrix}}{{}_I r_{BiEi,y}^2 + {}_I r_{BiEi,z}^2} \end{aligned} \quad (4-22)$$

und

$$\dot{\varphi}_{yi} = \frac{\mathbf{e}_x^T}{\sqrt{1 - {}_I e_{BiEi,x}^2}} \cdot {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi} = \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \cdot \dot{\mathbf{z}}. \quad (4-23)$$

Mit

$${}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{{}_I \mathbf{r}_{BiEi}}{q_i} \right) = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}, \quad \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} = \frac{1}{q_i} \left( \mathbf{I} - {}_I \mathbf{e}_{BiEi} {}_I \mathbf{e}_{BiEi}^T \right) \quad (4-24)$$

folgt

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} = \frac{\mathbf{e}_x^T}{\sqrt{1 - {}_I e_{BiEi,x}^2}} \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T}, \quad (4-25)$$

wobei die partielle Ableitung  $\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}/\partial \dot{\mathbf{z}}^T$  aus der zeitlichen Ableitung von (4-11)

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0Ei} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0T} + {}_I \dot{\mathbf{r}}_{TEi} \quad (4-26)$$

mit

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x & \dot{r}_y & \dot{r}_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T, \quad {}_I\dot{\mathbf{r}}_{TEi} = {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{TEi} \quad (4-27)$$

zu

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{TEi} \cdot \frac{\partial {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (4-28)$$

bestimmt werden kann.

Die Schwerpunktgeschwindigkeiten der einzelnen Körper lassen sich mithilfe der berechneten Rotationsmatrizen und Winkelgeschwindigkeiten sowie den gegebenen Parametervektoren ermitteln. Die Geschwindigkeit des Endeffektorschwerpunkts beträgt

$${}_I\mathbf{v}_S = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OS} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{ST} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT} - {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{ST}, \quad {}_I\mathbf{r}_{ST} = {}^{IE}\mathbf{A} \cdot {}_E\mathbf{r}_{ST}, \quad (4-29)$$

die Schwerpunktgeschwindigkeit des Zylinderrohrs  $i$  ist

$${}_I\mathbf{v}_{Ri} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0Bi} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0Ri} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{BiRi} = {}^{IAi}{}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{BiRi}, \quad {}_I\mathbf{r}_{BiRi} = {}^{IAi}\mathbf{A} \cdot {}_{Ai}\mathbf{r}_{BiRi} \quad (4-30)$$

und die Schwerpunktgeschwindigkeit der Zylinderstange  $i$  beträgt

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{v}_{Ki} &= {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0Ki} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{TEi} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{EiKi}, \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{EiKi} &= {}^{IAi}{}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{EiKi}, \quad {}_I\mathbf{r}_{EiKi} = {}^{IAi}\mathbf{A} \cdot {}_{Ai}\mathbf{r}_{EiKi}. \end{aligned} \quad (4-31)$$

Daraus folgen die für die Jacobimatrizen der Translation erforderlichen partiellen Ableitungen (Der Operator  $\square$  steht für die Kreuzproduktmatrix, siehe Anhang A1.6)

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OS}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} + {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{ST} \cdot \frac{\partial {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0Ri}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{BiRi} \cdot \frac{\partial {}^{IAi}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}, \quad (4-32)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0Ki}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OT}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{TEi} \cdot \frac{\partial {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{EiKi} \cdot \frac{\partial {}^{IAi}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T}. \quad (4-33)$$

## Beschleunigungsgrößen

Für die Vervollständigung der Bewegungsgleichungen des Modells  $\Sigma_{H13}$  werden in diesem Abschnitt noch die sog. Restbeschleunigungen sämtlicher Körper hergeleitet. Beispielsweise ergibt sich durch zeitliche Differentiation der Drehwinkelgeschwindigkeit des Endeffektors nach (4-18)

$${}^{IE}{}_I\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}({}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \cdot \ddot{\mathbf{z}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IE}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{z}}}_{\text{Restbeschleunigung}}. \quad (4-34)$$

Häufig wird auf die Herleitung dieser Größen aufgrund des damit verbundenen, hohen Aufwands sowohl zu deren Herleitung als auch zur Auswertung während der Simulationslaufzeit verzichtet. Aufgrund des in diesem Falle recht überschaubaren Aufwands werden in diesem Abschnitt die zeitlichen Differentiale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{II}{}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \right), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0i}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \right) \quad (4-35)$$

für sämtliche Körper dennoch angegeben.

Der für die Berechnung der Restwinkelbeschleunigung des Endeffektors erforderliche Term lautet

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right) = [\mathbf{0} \quad \dot{H}_\omega],$$

$$\dot{H}_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 & -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (4-36)$$

der des Aktors  $i$  beträgt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{I,i} \omega}{\partial \dot{z}^T} \right) = \mathbf{e}_x \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial \dot{z}^T} \right) + \dot{\mathbf{e}}_{\varphi_{xi}} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{z}^T} + \mathbf{e}_{\varphi_{xi}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{z}^T} \right) \quad (4-37)$$

mit

$$\dot{\mathbf{e}}_{\varphi_{xi}} = \dot{\varphi}_{xi} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_{xi} \\ \cos \varphi_{xi} \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

und

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial \dot{z}^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T} + \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T} \right), \quad (4-39)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial \dot{z}^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T} + \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T} \right). \quad (4-40)$$

Die Unbekannten  $d(\partial \dot{\varphi}_{xi} / \partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T) / dt$ ,  $d(\partial \dot{\varphi}_{yi} / \partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T) / dt$  und  $d(\frac{d}{dt} (\frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T})) / dt$  folgen durch zeitliches Differenzieren von (4-22), (4-25) und (4-28) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{xi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) &= \frac{-2 \cdot ({}_I r_{BiEi,y} \cdot {}_I \dot{r}_{BiEi,y} + {}_I r_{BiEi,z} \cdot {}_I \dot{r}_{BiEi,z})}{({}_I r_{BiEi,y}^2 + {}_I r_{BiEi,z}^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -{}_I r_{BiEi,z} \\ {}_I r_{BiEi,y} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \frac{1}{{}_I r_{BiEi,y}^2 + {}_I r_{BiEi,z}^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -{}_I \dot{r}_{BiEi,z} & {}_I \dot{r}_{BiEi,y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{[2 \cdot {}_I r_{BiEi,y} \cdot {}_I r_{BiEi,z} \quad - {}_I r_{BiEi,y}^2 + {}_I r_{BiEi,z}^2]}{({}_I r_{BiEi,y}^2 + {}_I r_{BiEi,z}^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & {}_I \dot{r}_{BiEi,y} & -{}_I \dot{r}_{BiEi,z} \\ 0 & {}_I \dot{r}_{BiEi,z} & {}_I \dot{r}_{BiEi,y} \end{bmatrix}, \quad (4-41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_{yi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) &= \mathbf{e}_x^T \cdot (1 - {}_I e_{BiEi,x}^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi,x} \cdot {}_I e_{BiEi,x} \cdot \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_x^T}{\sqrt{1 - {}_I e_{BiEi,x}^2}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) \quad (4-42) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}}{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}^T} \right) &= -(\mathbf{I} - {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot {}_I \mathbf{e}_{BiEi}^T) \cdot \frac{1}{q_i^3} \cdot ({}_I \mathbf{r}_{BiEi}^T \cdot {}_I \dot{\mathbf{r}}_{BiEi}) \\ &\quad - ({}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi} \cdot {}_I \mathbf{e}_{BiEi}^T + {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot {}_I \dot{\mathbf{e}}_{BiEi}^T) \cdot \frac{1}{q_i} \quad (4-43) \end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{BiEi}}{\partial \dot{z}^T} \right) = - {}_I \ddot{r}_{TEi} \cdot \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} - {}_I \dot{r}_{TEi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right). \quad (4-44)$$

Damit sind die Restwinkelbeschleunigungen aller 13 Starrkörper bekannt. Die Restbeschleunigungen der Schwerpunkte können aus (4-32) und (4-33) hergeleitet werden und betragen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{OS}}{\partial \dot{z}^T} \right) = {}_I \ddot{r}_{ST} \cdot \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} + {}_I \tilde{r}_{ST} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right), \quad (4-45)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{ORi}}{\partial \dot{z}^T} \right) = - {}_I \ddot{r}_{BiRi} \cdot \frac{\partial {}^{IAi} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} - {}_I \tilde{r}_{BiRi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IAi} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right), \quad (4-46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{OKi}}{\partial \dot{z}^T} \right) &= - {}_I \ddot{r}_{TEi} \cdot \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} - {}_I \tilde{r}_{TEi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right) \\ &\quad - {}_I \ddot{r}_{EiKi} \cdot \frac{\partial {}^{IAi} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} - {}_I \tilde{r}_{EiKi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IAi} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \right). \end{aligned} \quad (4-47)$$

### Eingeprägte Kräfte und Momente

Mit den hergeleiteten Größen kann nun die linke Seite der Bewegungsgleichungen nach (A2-23) mit den Jacobimatrizen

$${}_I \mathbf{J}_{RE} = \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T}, \quad {}_I \mathbf{J}_{RRi} = \frac{\partial {}^{IAi} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T}, \quad {}_I \mathbf{J}_{RKi} = {}_I \mathbf{J}_{RRi}, \quad (4-48)$$

$${}_I \mathbf{J}_{TE} = \frac{\partial {}_I \dot{r}_{OS}}{\partial \dot{z}^T}, \quad {}_I \mathbf{J}_{TRi} = \frac{\partial {}_I \dot{r}_{ORi}}{\partial \dot{z}^T}, \quad {}_I \mathbf{J}_{TKi} = \frac{\partial {}_I \dot{r}_{OKi}}{\partial \dot{z}^T}, \quad (4-49)$$

$$\mathbf{J}_E = \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{J}_{TE} \\ {}_I \mathbf{J}_{RE} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{Ri} = \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{J}_{TRi} \\ {}_I \mathbf{J}_{RRi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{Ki} = \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{J}_{TKi} \\ {}_I \mathbf{J}_{RKi} \end{bmatrix} \quad (4-50)$$

aufgestellt werden, wobei sich die Massenmatrix nach (A2-14), der Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräfte nach (A2-17) und der Vektor der verallgemeinerten Gewichtskräfte nach (A2-22) berechnet. Abweichend von (A2-18) werden die Elemente  $\mathbf{C}_i(z, \dot{z})$  nach der Formel

$$\mathbf{C}_i(z, \dot{z}) = \mathbf{J}_i^T \cdot \left( \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{J}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}_I \tilde{\omega} \cdot \mathbf{I}_i^{(C_i)} \cdot \frac{\partial {}^{IE} {}_I \omega}{\partial \dot{z}^T} \end{bmatrix} \right) \quad (4-51)$$

bestimmt, da sich die Berechnung auf diese Weise verhältnismäßig einfach gestaltet. In diesem Falle ist die Schiefsymmetrie der Matrix  $\dot{\mathbf{M}} - 2 \cdot \mathbf{C}$  nicht sichergestellt.

Zur Vervollständigung der Bewegungsgleichungen müssen noch die Zylinderkräfte  $\mathbf{F}_q$  sowie die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  auf der rechten Seite der Gleichung ergänzt werden. Bild 4-5 zeigt alle relevanten Informationen für die nachfolgende Herleitung.

An der Endeffektorplattform greifen nur die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  an. Zwischen dem Kraftangriffspunkt  $T$  und dem Endeffektorschwerpunkt  $S$  besteht der Hebelarm  ${}_I r_{ST}$ , sodass die Kontaktkräfte eine Momentenwirkung auf den Schwerpunkt besitzen und entsprechend berücksichtigt werden müssen. Hinzu kommt, dass der Vektor der

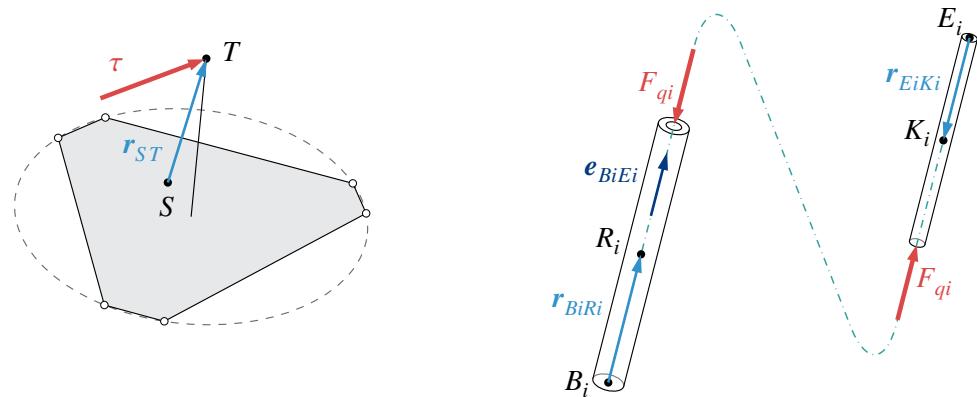
(a) Endeffektor: Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  (b) Zylinderrohre und -stangen: Aktorkräfte  $F_q$ 

Bild 4-5: Herleitung der eingeprägten Kräfte und Momente

Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  so definiert wurde, dass positive Kräfte bzw. Momente in Richtung der Achsen des Inertialsystems auf die Umgebung wirken. Auf den Endeffektor wirken die zugehörigen Gegenkräfte und -momente, d. h. die Kräfte und Momente  $\tau$  fließen in den Bewegungsgleichungen des Hexapod mit negativem Vorzeichen ein. Die eingeprägten Kräfte auf den Endeffektor lauten damit

$${}_I \mathbf{F}_E^e = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad {}_I \mathbf{M}_E^{e(S)} = - \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - {}_I \mathbf{r}_{ST} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}. \quad (4-52)$$

Die Aktorkräfte  $F_q$  wirken in Richtung des Einheitsvektors  ${}_I \mathbf{e}_{BiEi}$  nach (4-9) auf die Zylinderstangen und in entgegengesetzter Richtung auf die Zylinderrohre. Am realen System sind sowohl die Zylinderrohre als auch die Zylinderstangen nicht exakt rotationssymmetrisch. Die zugehörigen Schwerpunkte liegen daher nicht auf der Verbindungsgeraden zwischen  $B_i$  und  $E_i$ , sodass die Aktorkräfte  $F_q$  auch Momente auf diese beiden Körper ausüben. Diese Momentenwirkung lässt sich durch das Kreuzprodukt eines Vektors, der vom jeweiligen Schwerpunkt auf einen (beliebigen) Punkt auf der Kraftwirklinie zeigt, mit der Kraftwirkrichtung  ${}_I \mathbf{e}_{BiEi}$  ermitteln. Hier werden für die Berechnung der Momente zweckmäßigerweise die Vektoren  ${}_I \mathbf{r}_{BiRi}$  bzw.  ${}_I \mathbf{r}_{EiKi}$  verwendet, die diese Voraussetzung erfüllen. Die eingeprägten Kräfte und Momente der Rohre lauten somit

$${}_I \mathbf{F}_{Ri}^e = - {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot F_{qi}, \quad {}_I \mathbf{M}_{Ri}^{e(Ri)} = {}_I \mathbf{r}_{BiRi} \times {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot F_{qi}, \quad (4-53)$$

die der Stangen

$${}_I \mathbf{F}_{Ki}^e = {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot F_{qi}, \quad {}_I \mathbf{M}_{Ki}^{e(Ki)} = - {}_I \mathbf{r}_{EiKi} \times {}_I \mathbf{e}_{BiEi} \cdot F_{qi}. \quad (4-54)$$

Die Bewegungsgleichungen des Modells  $\Sigma_{H13}$  sind damit vollständig. Um auch die rechte Seite der Gleichungen in kompakter Form aufzuschreiben zu können, lassen sich noch zwei Matrizen einführen. Die Aktorkräfte  $F_q$  und die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  treten dann jeweils im Produkt mit einer Matrix in der Bewegungsgleichung auf. Die Eingriffsmatrix der Kontaktkräfte und -momente lautet

$$\mathbf{H}^T(z) = \mathbf{J}_E^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{ST} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4-55)$$

wobei das negative Vorzeichen, das aus der dem Inertialkoordinatensystem entgegengesetzten Wirkrichtung von  $\tau$  folgt, später Berücksichtigung finden wird und nicht in (4-55) enthalten ist. Für die Aktorkräfte ergibt sich die Eingriffsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a^{-T}(z) = & \sum_{i=1}^6 \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \begin{bmatrix} -I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & -I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \\ {}_I\mathbf{r}_{B1R1} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & {}_I\mathbf{r}_{B6R6} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \end{bmatrix} \\ & + \mathbf{J}_{Ki}^T \cdot \begin{bmatrix} I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \\ -{}_I\mathbf{r}_{E1K1} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & -{}_I\mathbf{r}_{E6K6} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4-56)$$

In der Robotik wird die Matrix  $\mathbf{J}_a$  auch als **analytische Jacobimatrix** bezeichnet, siehe z. B. [SSVO10]. Sie ist von fundamentaler Bedeutung, da sie den Zusammenhang der Antriebsgeschwindigkeiten  $\dot{q}$  und der ersten zeitlichen Ableitung der Aufgabenkoordinaten  $\dot{z}$  herstellt. Verglichen mit der etablierten Literatur folgt auf diesem Berechnungsweg nicht direkt die analytische Jacobimatrix, sondern ihre transponierte Inverse, weshalb diese Rechenoperationen zur Wahrung der Konsistenz in (4-56) ergänzt wurden.

#### 4.2.2 1-Starrkörper-Modell

Für dieses vergleichsweise einfache Modell werden sowohl die Rohre als auch die Stangen der Hydraulikzylinder als masselos angenommen. Nur der Endeffektor wird als starrer, massebehafteter Körper im Modell berücksichtigt. Die in Bild 4-3 gezeigte Topologie vereinfacht sich hierdurch stark: als einziger Starrkörper verbleibt der (frei schwebende) Endeffektor  $H_1$  mit sechs FHG. Alle anderen Starrkörper und die Gelenke entfallen. Aufbauend auf den Ergebnissen aus den vorangegangenen Abschnitten ist das Modell  $\Sigma_{H1}$  schnell hergeleitet.

Die linke Seite der Gleichungen des Modells  $\Sigma_{H1}$  geht aus der des Modells  $\Sigma_{H13}$  hervor, indem nur die Anteile des Endeffektors bei Auswertung der Gleichungen (A2-14), (A2-17) und (A2-22) für  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{g}$  berücksichtigt werden. In diesem einfachen Fall kann die Berechnung der Matrixelemente  $\mathbf{C}_i(z, \dot{z})$  nach (A2-18) erfolgen, sodass auch die Schiefsymmetrie von  $\dot{\mathbf{M}} - 2 \cdot \mathbf{C}$  sichergestellt ist.

Die Aktorkräfte werden bei diesem Modell so behandelt, als würden sie direkt am Endeffektor angreifen. Die eingeprägten Kräfte und Momente des Endeffektors lauten damit

$${}_I\mathbf{F}_E^e = - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{BiEi} \cdot F_{qi}, \quad (4-57)$$

$${}_I\mathbf{M}_E^{e(S)} = - \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{ST} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 {}_I\mathbf{r}_{SEi} \times {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{BiEi} \cdot F_{qi} \quad (4-58)$$

mit

$${}_I\mathbf{r}_{SEi} = {}_I\mathbf{r}_{ST} + {}_I\mathbf{r}_{TEi}. \quad (4-59)$$

Die transponierte Inverse der analytischen Jacobimatrix lautet bei diesem Modellansatz

$$\mathbf{J}_a^{-T}(z) = \mathbf{J}_E^T \cdot \begin{bmatrix} I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & I\boldsymbol{\epsilon}_{B2E2} & \cdots & I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \\ {}_I\mathbf{r}_{SE1} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & {}_I\mathbf{r}_{SE2} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B2E2} & \cdots & {}_I\mathbf{r}_{SE6} \times I\boldsymbol{\epsilon}_{B6E6} \end{bmatrix}. \quad (4-60)$$

Sie lässt sich in diesem Fall auch aus der Definition

$$\mathbf{J}_a^{-1}(z) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z^T} \quad (4-61)$$

bestimmen. Die Eingriffsmatrix  $\mathbf{H}^T$  der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  ist identisch mit der des Modells  $\Sigma_{H13}$ , siehe (4-55).

Verglichen mit den Ausführungen in [Kno17] wurden die Bewegungsgleichungen um die Berücksichtigung der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  erweitert. Hinzu kommt, dass die Bewegungsgleichungen nicht im Schwerpunkt des Endeffektors, sondern im für die Regelungsaufgabe relevanten TCP formuliert wurden. Dies macht die Gleichungen komplexer, z. B. ist die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  nun keine Blockdiagonalmatrix mehr. Durch die direkte Formulierung im TCP entfällt aber im Folgenden die Notwendigkeit der fortwährenden Umrechnung sämtlicher Größen zwischen diesen beiden Bezugspunkten. Die für die eigentliche Regelungsaufgabe nicht relevanten Koordinaten des Schwerpunkts treten so nur in Form des Modellparameters  ${}_E\mathbf{r}_{ST}$  auf.

### 4.2.3 Resultierende Modellgleichungen

Sowohl für das Modell  $\Sigma_{H13}$  als auch das Modell  $\Sigma_{H1}$  lauten die Bewegungsgleichungen der Endeffektorplattform

$$\mathbf{M}(z) \cdot \ddot{z} + \mathbf{C}(z, \dot{z}) \cdot \dot{z} + \mathbf{g}(z) = \mathbf{J}_a^{-T}(z) \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{H}^T(z) \cdot \tau. \quad (4-62)$$

Für die Auswertung der Modellgleichungen ist die Kenntnis der insgesamt 12 Vektoren  ${}_E\mathbf{r}_{TEi}$  und  ${}_I\mathbf{r}_{OBi}$  erforderlich, vgl. Bild 4-4. Bei Modell  $\Sigma_{H1}$  kommt die Schwerpunktlage sowie die Masse und Trägheit des Endeffektors hinzu, im Falle des Modells  $\Sigma_{H13}$  zusätzlich die Schwerpunktlage sowie die Masse und Trägheit sämtlicher Rohre und Stangen. Im vorliegenden Fall wurde angenommen, dass sämtliche Rohre und sämtliche Stangen jeweils den gleichen körperfesten Schwerpunktvektor sowie die gleichen Massen- und Trägheitseigenschaften besitzen. Das Modell  $\Sigma_{H1}$  besitzt damit bis zu 46, das Modell  $\Sigma_{H13}$  bis zu 66 Parameter. Da die Punkte  ${}_E\mathbf{r}_{TEi}$  und  ${}_I\mathbf{r}_{OBi}$  bei dem betrachteten System jeweils (nahezu) auf einer Kreisbahn liegen, reduziert sich die Parameterzahl bei der vorliegenden Implementierung auf 29 bzw. 49 Parameter. Über diese Parameter hinaus müssen die 12 Anfangsbedingungen  $z_0, \dot{z}_0$  vorgegeben werden.

Mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z^T & \dot{z}^T \end{bmatrix}^T \quad (4-63)$$

ergeben sich aus (4-62) die nichtlinearen Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\left[ -\mathbf{M}^{-1}(z) \cdot (\mathbf{C}(z, \dot{z}) \cdot \dot{z} + \mathbf{g}(z)) \right]}_{f(\mathbf{x})} + \underbrace{\left[ \mathbf{M}^{-1}(z) \cdot \mathbf{J}_a^{-T}(z) \right]}_{G_u(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{F}_q + \underbrace{\left[ \mathbf{M}^{-1}(z) \cdot \mathbf{H}^T(z) \right]}_{G_d(\mathbf{x})} \cdot \tau. \quad (4-64)$$

Es handelt sich um ein eingangsaffines System, da das System linear in seinen Eingangsgrößen ist.

Sowohl der verallgemeinerte Geschwindigkeits- wie auch der verallgemeinerte Beschleunigungsvektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} \quad (4-65)$$

treten in diesen Gleichungen nicht auf, können aber aus  $\boldsymbol{z}$ ,  $\dot{\boldsymbol{z}}$  und  $\ddot{\boldsymbol{z}}$  berechnet werden. Die Kinematikmatrix

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{\boldsymbol{z}}^T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{H}_\omega \end{bmatrix} \quad (4-66)$$

mit  $\boldsymbol{H}_\omega$  nach (4-19) stellt diesen Zusammenhang her. Die Umrechnungsformeln lauten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) \cdot \dot{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) \cdot \ddot{\boldsymbol{z}} + \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}) \cdot \dot{\boldsymbol{z}}. \quad (4-67)$$

Die Transformation der Kräfte und Momente zwischen den beiden Systemen erfolgt über die Transponierte der Kinematikmatrix  $\boldsymbol{H}^T$ , vgl. auch (4-62).

In der Robotik hat neben der analytischen Jacobimatrix  $\boldsymbol{J}_a = \partial \boldsymbol{z} / \partial \boldsymbol{q}^T$  (4-61) auch die **geometrische Jacobimatrix**  $\boldsymbol{J}_g$  große Bedeutung [SSVO10]. Sie hängt über

$$\boldsymbol{J}_g^{-1}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{v}^T} = \boldsymbol{J}_a^{-1}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{z}) \quad (4-68)$$

mit der Kinematikmatrix  $\boldsymbol{H}$  und der analytischen Jacobimatrix  $\boldsymbol{J}_a$  zusammen. Die geometrische Jacobimatrix stellt den Zusammenhang zwischen den Antriebsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{q}}$  und den (Winkel-) Geschwindigkeiten des TCP sowie den Kräften in den Aktorkoordinaten und den entsprechenden Kräften und Momenten im TCP her. Es gilt

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_g^{-1}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\tau}_q = \boldsymbol{J}_g^{-T}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{F}_q. \quad (4-69)$$

Mithilfe dieser Zusammenhänge lässt sich auch eine Zustandstransformation durchführen. Bei Verwendung des Zustandsvektors

$$\boldsymbol{x}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^T & \boldsymbol{v}^T \end{bmatrix}^T \quad (4-70)$$

lauten die nichtlinearen Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_v = & \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{v} \\ -\boldsymbol{M}_v^{-1}(\boldsymbol{z}) \cdot (\boldsymbol{C}_v(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}_v(\boldsymbol{z})) \end{bmatrix}}_{f_v(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}_v^{-1}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{J}_g^{-T}(\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}}_{G_{uv}(\boldsymbol{x})} \cdot \boldsymbol{F}_q \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{M}_v^{-1}(\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}}_{G_{dv}(\boldsymbol{x})} \cdot \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4-71)$$

mit

$$\boldsymbol{M}_v(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{H}^{-T} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}^{-1}, \quad \boldsymbol{g}_v(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{H}^{-T} \cdot \boldsymbol{g}, \quad (4-72)$$

$$\boldsymbol{C}_v(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{H}^{-T} \cdot \left( \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{H}^{-1} + \boldsymbol{M} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}^{-1}) \right). \quad (4-73)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\boldsymbol{M}_v(z) \cdot \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{C}_v(z, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}_v(z) = \boldsymbol{J}_g^{-T}(z) \cdot \boldsymbol{F}_q - \boldsymbol{\tau}. \quad (4-74)$$

Abgesehen von den bisherigen Ausführungen wurden auch Modelle für den Hexapod aufgestellt, bei denen vier Eulerparameter bzw. Einheitsquaternionen anstelle der drei Cardanwinkel als Minimalkoordinaten verwendet werden. Zwischen den vier Eulerparametern  $e_0 \dots e_3$  besteht der algebraische Zusammenhang

$$e_0^2 + \boldsymbol{e}^T \cdot \boldsymbol{e} = 1, \quad \boldsymbol{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T. \quad (4-75)$$

Die Drehmatrix des Endeffektors berechnet sich hieraus anhand der Gleichung

$${}^{IE} \boldsymbol{A} = (2e_0^2 - 1) \cdot \boldsymbol{I} + 2 \cdot (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^T + e_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}). \quad (4-76)$$

Die Herleitung der Modelle konnte auf Basis der allgemeinen Ausführungen zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen für die Rotation starrer Körper mittels Eulerparametern von Sherif, Nachbagauer und Steiner [SNS15] durchgeführt werden. Die Bewegungsgleichungen werden im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht aufgegriffen und daher hier nicht näher erläutert.

#### 4.2.4 Parametrierung des 1-Starrkörper-Modells

Bei der Herleitung des Modells  $\Sigma_{H1}$  wurden alle Starrkörper mit Ausnahme der Endeffektorplattform vernachlässigt. Werden die Masse  $m_E$ , die Trägheitsmatrix

$${}_E \boldsymbol{I}_E^{(S)} = \begin{bmatrix} I_{xx,E} & I_{xy,E} & I_{xz,E} \\ I_{xy,E} & I_{yy,E} & I_{yz,E} \\ I_{xz,E} & I_{yz,E} & I_{zz,E} \end{bmatrix} \quad (4-77)$$

sowie die Schwerpunktkoordinaten  ${}_E \boldsymbol{r}_{ST}$  des Endeffektors bei dieser vereinfachten Modellierungsvariante unverändert vom Modell  $\Sigma_{H13}$  übernommen, so ist die Güte dieses Modells deutlich schlechter als die des detaillierteren Modells  $\Sigma_{H13}$ . Die Modellgüte kann hier durch eine Anpassung dieser insgesamt 10 Parameter erheblich gesteigert werden.

Die Parameter werden anhand einer gegebenen Simulation des MKS-Referenzmodells optimiert. Hierzu wird die linke Seite der Bewegungsgleichung nach (4-62) so umformuliert, dass sie linear in einem festzulegenden Parametervektor  $\boldsymbol{p}$  ist [SK16], d. h. es gilt

$$\boldsymbol{Y}(z, \dot{z}, \ddot{z}) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}_a^{-T}(z) \cdot \boldsymbol{F}_q - \boldsymbol{H}^T(z) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{Y}(z, \dot{z}, \ddot{z}) \in \mathbb{R}^{6 \times 10}. \quad (4-78)$$

Für das betrachtete System muss der  $10 \times 1$ -Parametervektor

$$\boldsymbol{p} = [m_E \ m_E \cdot {}_E \boldsymbol{r}_{ST}^T \ I_{xx,E} \ I_{xy,E} \ I_{xz,E} \ I_{yy,E} \ I_{yz,E} \ I_{zz,E}]^T \quad (4-79)$$

gewählt werden. Wie aus (4-79) ersichtlich ist, wird auf diesem Weg nicht der Schwerpunktvektor  ${}_E \boldsymbol{r}_{ST}$  selbst identifiziert. Er tritt in der linken Seite der Bewegungsgleichungen (4-62) ausschließlich im Produkt mit der Endeffektormasse  $m_E$  auf. Damit das System linear in den zu identifizierenden Parametern ist, muss also das Produkt dieser Größen im

Vektor  $\mathbf{p}$  stehen. Der Schwerpunktvektor  ${}_E\mathbf{r}_{ST}$  kann hieraus nach erfolgter Identifikation zurückberechnet werden. Für die rechte Seite von (4-62) wird die Abkürzung

$$\boldsymbol{\xi}(z, \mathbf{F}_q, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{J}_a^{-T}(z) \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{H}^T(z) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\xi}(z, \mathbf{F}_q, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^6. \quad (4-80)$$

eingeführt.  $\boldsymbol{\xi}$  enthält nur geometrische Parameter, die aus Konstruktionsskizzen stammen. Sie werden daher als hinreichend genau angenommen und nicht identifiziert. Liegt eine hinreichend hohe Zahl  $N$  verschiedener Mess- bzw. Simulationswerte für  $z, \dot{z}, \ddot{z}, \mathbf{F}_q$  und  $\boldsymbol{\tau}$  für ein möglichst über alle Frequenzen angeregtes System vor, so lässt sich aus der Aneinanderreihung der linken und rechten Seiten der Gleichung (4-62) für alle Messzeitpunkte

$$\bar{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{p} = \bar{\boldsymbol{\xi}}, \quad \bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{6N \times 10}, \quad \bar{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^{6N} \quad (4-81)$$

der Parametervektor  $\mathbf{p}$  mithilfe der Pseudoinverse aus der Gleichung

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{Y}}^+ \cdot \bar{\boldsymbol{\xi}}, \quad \bar{\mathbf{Y}}^+ = (\bar{\mathbf{Y}}^T \cdot \bar{\mathbf{Y}})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Y}}^T \quad (4-82)$$

bestimmen. Diese Lösung minimiert die quadrierte Abweichung zwischen der linken und der rechten Gleichungsseite über alle Messzeitpunkte.  $\bar{\mathbf{Y}}$  wird als Regressormatrix bezeichnet.

Zur Bestimmung der Parameter  $\mathbf{p}$  wurde mithilfe des positionsgeregelten MKS-Modells des Hexapod ohne Umgebungskontakt eine Abfolge von Sprüngen in allen sechs FHG simuliert. Aus den sich dabei ergebenden Zeitverläufen der Größen  $z, \dot{z}, \ddot{z}, \mathbf{F}_q$  und  $\boldsymbol{\tau}$  ergibt sich der (für diese Anregung) optimale Parametervektor  $\mathbf{p}$  für das Modell  $\Sigma_{H1}$  nach (4-82). Das mit diesem Parametervektor versehene Modell wird in den folgenden Ausführungen mit  $\Sigma_{H1}^*$  bezeichnet. Das Modell  $\Sigma_{H1}$  ist demgegenüber weiterhin mit den Angaben aus den Konstruktionsunterlagen parametrierter.

Die Parameteroptimierung lässt sich auch rekursiv formulieren, sodass eine Implementierung auf dem Echtzeitrechner möglich ist, vgl. [IM11]. Die Implementierung und Erprobung dieses Verfahrens für das Simulationsmodell des betrachteten Systems wurde umfassend in der Masterarbeit von Nico Rüddenklau [RK16] untersucht.

Diese bzw. eine ähnlich aufgebaute Regressormatrix wird auch bei den Verfahren Adaptive Computed Torque Control sowie Adaptive Inertia-Related Control verwendet, um die Parameterschätzung mit der Regelung der Endeffektorpose  $z$  zu kombinieren. Die Anwendung dieser Verfahren sowie eines Sliding-Mode-Reglers für den Hexapod (ohne Umgebungskontakt) wurde in der Masterarbeit von Udo Nolte [NKO18] untersucht. Da in der Simulation keine nennenswerte Verbesserung der Positionsregelgüte selbst bei großen Störungen und Parameterfehlern herbeigeführt werden konnte, wurden die Verfahren nicht weiterverfolgt.

#### 4.2.5 Modellvalidierung anhand des MKS-Hexapodmodells

Im Folgenden wird die Modellgüte für insgesamt fünf unterschiedliche Modellierungsvarianten für den Hexapod verglichen. Zu den Kürzeln  $\Sigma_{H13}$ ,  $\Sigma_{H1}$  und  $\Sigma_{H1}^*$  kommen hinzu:

- $\Sigma_{H7S}$ : 7-Starrkörper-Modell (Endeffektor und Zylinderstangen massebehaftet) und
- $\Sigma_{H7R}$ : 7-Starrkörper-Modell (Endeffektor und Zylinderrohre massebehaftet).

Die 7-Starrkörper-Modelle gehen aus den Gleichungen des Modells  $\Sigma_{H13}$  nach Abschnitt 4.2.1 hervor, indem die Massen und Trägheiten der Zylinderrohre bzw. der Zylinderstangen als Null angenommen werden. Sämtliche Modelle (außer die Masse, Trägheit und der Schwerpunktvektor des Modells  $\Sigma_{H1}^*$ ) wurden anhand der gegebenen Herstellerunterlagen parametriert. Als Referenz wird das detaillierte, 13 massebehaftete Starrkörper umfassende MKS-Modell des Hexapod herangezogen, das das Kürzel  $\Sigma_{HR}$  erhält.

Aufgrund der Abwesenheit konservativer Kraftelemente ist ein Vergleich der Modelle nach (4-62) mit identischen Anfangsbedingungen und Eingangsgrößen  $F_q$  und  $\tau$  und eigenen Systemzuständen nicht geeignet, da sich mit der Simulationszeit durch die verbliebenen Modellgenauigkeiten eine zunehmende Drift zwischen den Zuständen einstellt. Stattdessen werden die von jedem Modell berechneten (Winkel-) Beschleunigungen verglichen, die sich für einen gegebenen Systemzustand und -eingang ergeben. Hierzu wird die Bewegungsgleichung (4-62) nach

$$\ddot{z} = \mathbf{M}^{-1}(z) \cdot (-\mathbf{C}(z, \dot{z}) \cdot \dot{z} - \mathbf{g}(z) + \mathbf{J}_a^{-T}(z) \cdot F_q - \mathbf{H}^T(z) \cdot \tau) \quad (4-83)$$

umgestellt und mit den Eingangs- und Zustandsgrößen des Referenzmodells  $\Sigma_{HR}$  ausgewertet, d. h.  $z = z_{\Sigma_{HR}}$  und  $\dot{z} = \dot{z}_{\Sigma_{HR}}$ . Zur besseren Interpretierbarkeit wird die auf diesem Weg berechnete Größe  $\ddot{z}$  noch mithilfe von (4-67) in den verallgemeinerten Beschleunigungsvektor  $a$  umgerechnet. Die Abweichung  $\Delta a$  der berechneten Werte  $a$  einer Modellierungsvariante von denen des Referenzmodells  $a_{\Sigma_{HR}}$  liefert eine Aussage über die jeweilige Modellgüte. Bild 4-6 veranschaulicht die Vorgehensweise.

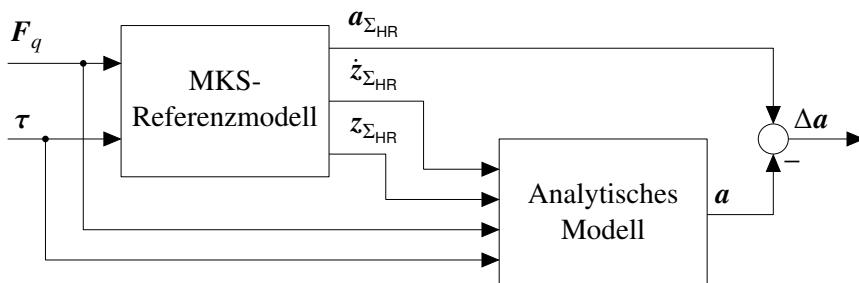


Bild 4-6: Vorgehen zur Beurteilung der Modellgüte

Die Modellgüte wird hier für zwei verschiedene Manöver untersucht, die im positionsgeregelten Betrieb des Referenzmodells des Hexapod ohne Umgebungskontakt durchgeführt wurden. Dies sind

- eine Abfolge von Sprunganregungen in allen sechs FHG, vgl. Bild 4-7, sowie
- eine Schlechtweganregung.

Für diese beiden Manöver wird die Beschleunigungsabweichung  $\Delta a$  nach Bild 4-6 gebildet. Zu den sich ergebenden sechs Zeitverläufen wird jeweils der RMS gebildet und in Bezug zu dem jeweiligen RMS der Referenz gesetzt. Das so gebildete Gütemaß ist Null, wenn das betrachtete Modell ideal mit dem Referenzmodell übereinstimmt. Je größer die Abweichung von der Referenz ist, desto höher wird der Wert. Bild 4-8 zeigt das Ergebnis für beide Manöver.

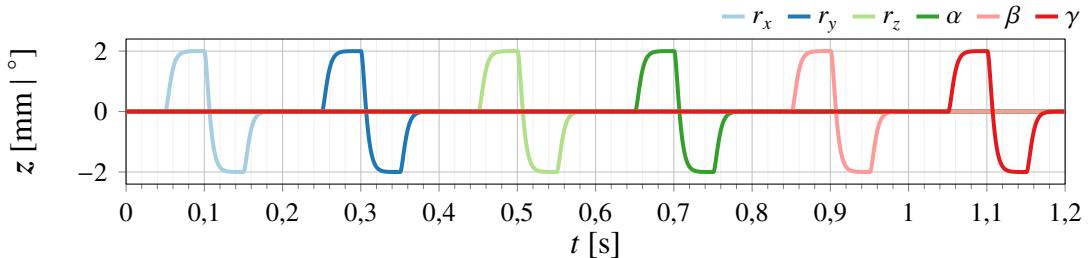


Bild 4-7: Rechteckanregung

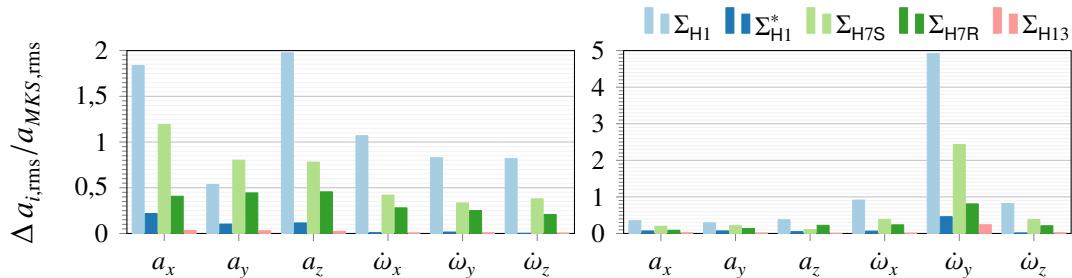


Bild 4-8: Modellgüte in Abhängigkeit der Modellierung bei Rechteckanregung (links) und Schlechtweganregung (rechts)

Wie zu erwarten hat das Modell  $\Sigma_{H1}$  im relativen Vergleich stets die geringste, das Modell  $\Sigma_{H13}$  stets die höchste Modellgüte. Die beiden 7-Starrkörper-Modelle liegen dazwischen, wobei das Modell mit massebehafteten Zylinderrohren  $\Sigma_{H7R}$  bessere Ergebnisse liefert als das Modell mit massebehafteten Zylinderstangen  $\Sigma_{H7S}$ , was sich auf die deutlich höhere Masse der Zylinderrohre zurückführen lässt. Eine bemerkenswert hohe Modellgüte, die zwischen den Modellen  $\Sigma_{H7R}$  und  $\Sigma_{H13}$  liegt, weist das Modell  $\Sigma_{H1}^*$  auf. Bei der Sprungabfolge ist ein gutes Ergebnis nicht verwunderlich, da die Parameter anhand einer solchen Anregung optimiert wurden. Die hohe Modellgüte bestätigt sich aber auch bei der praxisnahen Schlechtweganregung.

Natürlich ist auch eine Parameteroptimierung für die 7-Starrkörper-Modelle wie beim Modell  $\Sigma_{H1}^*$  angebracht. Allerdings ist die Bildung der Regressormatrix  $\bar{Y}$  in diesem Fall wesentlich anspruchsvoller als für das Modell  $\Sigma_{H1}$ . Gleichzeitig ist der Berechnungsaufwand der 7-Starrkörper-Modelle nur geringfügig kleiner als für das Modell  $\Sigma_{H13}$ .

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt das Fazit, dass die Optimierung der Parameter (Modell  $\Sigma_{H1}^*$ ) eine erhebliche Verbesserung der Modellgüte gegenüber dem Ausgangsmodell  $\Sigma_{H1}$  herbeigeführt hat. Wie zu erwarten weist das Modell  $\Sigma_{H13}$  die höchste Güte auf. Der Rechenaufwand für die Modelle  $\Sigma_{H7R}$ ,  $\Sigma_{H7S}$  und  $\Sigma_{H13}$  ist deutlich höher als für das Modell  $\Sigma_{H1}^*$ . Für die Regelung des Hexapod am Prüfstand wird daher das Modell  $\Sigma_{H1}^*$  eingesetzt. Der Mehrwert der Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  im Regler kann innerhalb der Simulationsumgebung untersucht werden. Beispielsweise zeigt sich bei der Anregung nach Bild 4-7, dass die Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  anstelle des Modells  $\Sigma_{H1}^*$  im Regler von Vorteil ist. So ergeben sich bei Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  im Regler bei einem weiterhin 13 massebehafteten Starrkörper umfassenden Streckenmodell insb. bei Anregung der rotatorischen Richtungen deutliche Abweichungen zwischen den Soll- und Istwerten in einigen translatorischen und rotatorischen Richtungen. Wird hingegen das Modell

$\Sigma_{H13}$  im Regler verwendet, so stimmen Soll- und Istwert im gesamten Zeitverlauf ideal überein. Selbstverständlich stellt diese Anregung einen Extremfall dar, bei dem sich die Modellabweichung besonders stark auswirkt.

### 4.3 Starrkörper-Dynamikmodell der MacPherson-Radaufhängung

In diesem Abschnitt wird ein Starrkörpermodell der MacPherson-Radaufhängung beschrieben, das gemeinsam mit dem Modell des Hexapod nach Abschnitt 4.2 als Streckenmodell für den Regelungsentwurf dienen wird. Das zu entwickelnde Modell soll die räumliche Kinematik und Dynamik der Radaufhängung hinreichend gut wiedergeben und die realen Kraftverhältnisse möglichst genau abbilden. Der Vorteil gegenüber dem ebenfalls vorliegenden, verhältnismäßig einfach zu erstellenden MKS-Radaufhängungsmodell besteht darin, dass aus der Herleitung explizite Modellgleichungen folgen, die sich für den modellbasierten Regelungs- und Vorsteuerungsentwurf verwenden lassen.

Vor dem Hintergrund einer potenziellen Anwendung am Prüfstand, die eine Echtzeitfähigkeit der verwendeten Modelle erfordert, soll das Modell möglichst einfach zu berechnen sein. Starrkörpermodelle sind, verglichen mit einer genaueren Modellierung durch z. B. FE-Simulation oder flexible MKS, mit wenig Rechenaufwand verbunden. Daher wird im Folgenden aufbauend auf den Ausführungen von Rill [Ril94] ein Starrkörpermodell der MacPherson-Radaufhängung mit elf FHG beschrieben. Wie bereits in der Einführung dieses Kapitels erwähnt ist der Gültigkeitsbereich derartiger Modelle auf Frequenzen bis etwa 30 Hz eingeschränkt. Der Berechnungsaufwand ist allerdings bereits für das entwickelte Modell recht hoch, sodass diese Einschränkung an dieser Stelle in Kauf genommen wird. Bei Einbeziehung des Modells in den Regelalgorithmus muss die geringere Modellgenauigkeit im höheren Frequenzbereich infolgedessen durch den Regler kompensiert werden.

Das Ersatzmodell der MacPherson-Einzelradaufhängung ist in Bild 4-9 dargestellt.

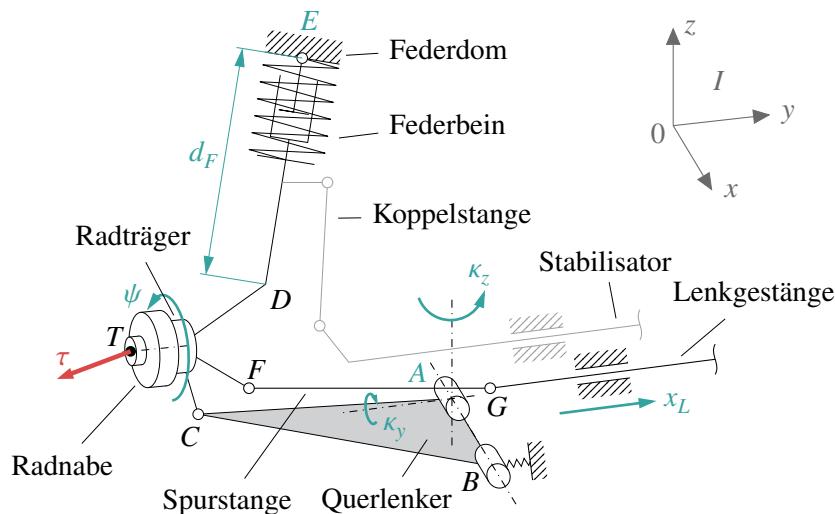


Bild 4-9: Ersatzmodell der MacPherson-Radaufhängung

Der im Bild grau dargestellte Stabilisator ließe sich als masseloses Kraftelement abstrahieren oder durch Berücksichtigung sämtlicher seiner Teilkörper ebenfalls in die nach-

folgenden Herleitungen aufnehmen. Da in dieser Arbeit allerdings stets die isolierte Einzelradaufhängung ohne Kopplung zur Gegenseite betrachtet wird, wird der Stabilisator im Folgenden vernachlässigt. Das Mehrkörpermodell besteht damit aus insgesamt sechs Starrkörpern. Tabelle 4-1 gibt eine Auflistung der Starrkörper inklusive der zugehörigen Indizes, die in der nachfolgenden Herleitung als Bezeichnung sowohl des jeweiligen körperfesten Koordinatensystems als auch des zugehörigen Körperschwerpunkts dienen.

Index	Erläuterung
1	Radnabe
2	Radträger (inkl. Dämpferrohr)
3	Querlenker
4	Dämpferstange
5	Spurstange
6	Lenkgestänge

Tabelle 4-1: Starrkörper und verwendete Indizes

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Körperschwerpunkte ebenso wie die körperfesten Koordinatensysteme nicht in Bild 4-9 enthalten. Aus dem gleichen Grund ist auch der Punkt  $H$ , der die Position des Drehgelenks zwischen Radträger und Radnabe repräsentiert, nicht eingetragen. Bei dem einzigen in Bild 4-9 eingetragenen Koordinatensystem handelt es sich um das fahrzeugfeste Koordinatensystem, das hier aufgrund der stationären Prüfstandsanwendung auch als Inertialsystem betrachtet werden kann. Es wurde so festgelegt, dass es mit dem Inertialsystem des Hexapod  $I$  übereinstimmt. Die weiteren in Bild 4-9 eingezeichneten Größen sind:

- der Dämpferweg  $d_F$ ,
- die Verschiebung des Lenkgestänges  $x_L$ ,
- der Drehwinkel der Radnabe  $\psi$ ,
- die Drehwinkel des vorderen Querlenkerlagers um die Quer- und Hochachse  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$  sowie
- die kartesischen Verschiebungen  $x_A$ ,  $y_A$  und  $z_A$  sowie  $x_E$ ,  $y_E$  und  $z_E$  der Punkte  $A$  und  $E$ , die im Bild vereinfacht durch farbliche Markierung dieser Punkte angedeutet sind.

Diese Größen stellen die FHG des entwickelten Modells dar. Davon beschreiben  $d_F$ ,  $x_L$  und  $\psi$  größere Bewegungen, nämlich die Einfederung, die Lenkbewegung sowie die Abrollbewegung des Rades. Demgegenüber sind die anderen Größen, die die elastischen Verformungen der in  $A$  bzw.  $E$  befindlichen Elastomerlager quantifizieren, relativ klein.

Das resultierende Modell besitzt maximal diese elf FHG bzw. Minimalkoordinaten. Die nachfolgende Herleitung wird für das Modell mit allen elf FHG durchgeführt. Nachträglich ist es einfach möglich, daraus ein auf die Anwendung zugeschnittenes Modell mit weniger FHG zu erzeugen. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass die Gleichungen der nicht verwendeten FHG aus den Bewegungsgleichungen entfernt werden. Naheliegenderweise müssen jedoch stets die Minimalkoordinate  $d_F$  sowie  $x_L$  (außer bei blockierter Lenkung) und  $\psi$  (außer bei gebremstem Rad) gewählt werden.

Die Topologie des Mehrkörpersystems zeigt Bild 4-10. Dem Bild kann auch die Auflistung der insgesamt  $n_K = 6$  starren Körper sowie die Erläuterung aller  $n_G = 8$  Gelenke und der Zwangsbedingungen  $n_Z = 23 \dots 31$  entnommen werden.

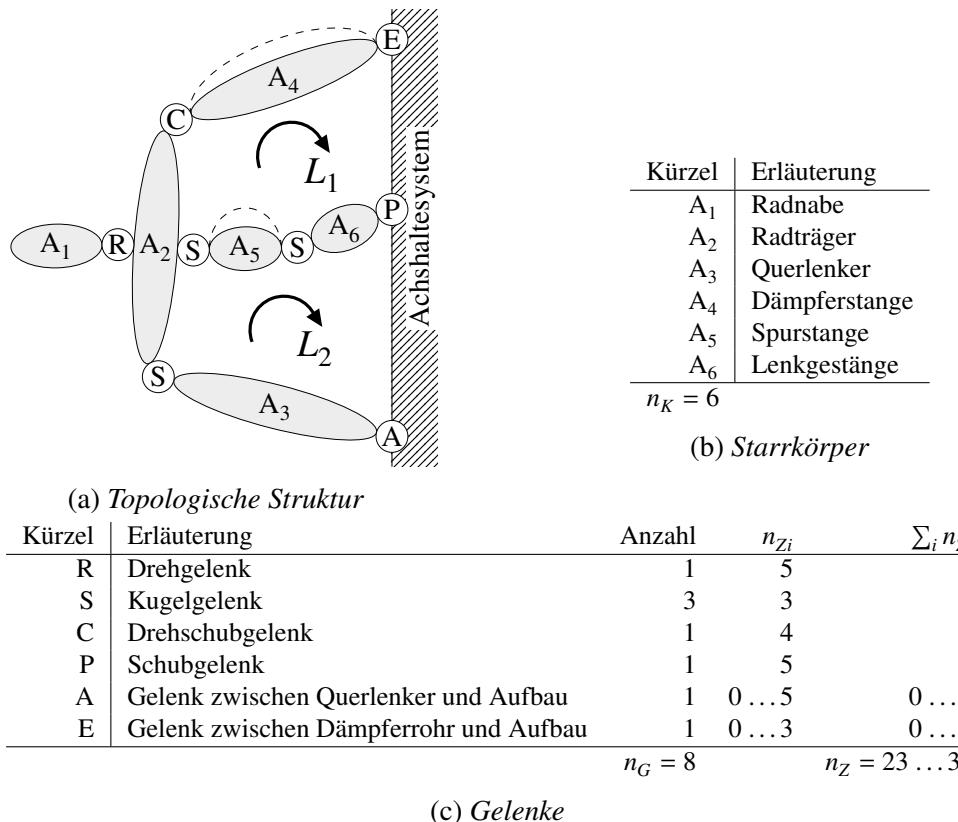


Bild 4-10: Topologie und Eigenschaften des Radaufhängungsmodells

Je nach Auswahl der Minimalkoordinaten weist auch die MacPherson-Radaufhängung, wie der Hexapod, geschlossene kinematische Schleifen auf. Die Anzahl der kinematischen Schleifen beträgt

$$n_L = n_G - n_K = 2, \quad (4-84)$$

wenn die Gelenke A und E jeweils mindestens eine Zwangsbedingung aufweisen. Für  $n_{Zi} = 0$  bei einem dieser Gelenke reduziert sich  $n_G$  auf 7 und die Anzahl der kinematischen Schleifen auf  $n_L = 1$ , für  $n_{Zi} = 0$  bei beiden Gelenken gilt  $n_G = 6 = n_K$  und es liegt eine offene Kinematik vor. Die Modellierung der Elastomerlager durch Hinzunahme zusätzlicher FHG und entsprechende Kraftmodelle steigert also nicht nur die Modellgüte, sondern führt auch zur Vermeidung kinematischer Schleifen. Auf der anderen Seite sind die Elastomerlager sehr steif, was die numerische Lösung der resultierenden Differentialgleichungen gegenüber der Modellierung mit idealen Gelenken erschwert.

Wie beim Hexapod liegen isolierte FHG vor. Dies sind die Rotationen der Dämpfer- und Spurstange um die Verbindungsachse der sie umgebenden Gelenke. Zur Elimination dieser  $n_I = 2$  isolierten FHG wird das Drehschubgelenk durch ein Schubgelenk und eines der Kugelgelenke an der Spurstange durch ein Kardangelenk ersetzt. Damit ergeben sich für

das Mehrkörpersystem je nach freigegebenen Minimalkoordinaten bei ungebremstem Rad und freier Lenkung

$$f = 6 \cdot n_K - n_Z - n_I = 3 \dots 11 \quad (4-85)$$

FHG. Als Vektor der Minimalkoordinaten wird für das 11-FHG-Modell der Vektor

$$\mathbf{y}_d = [d_F \ x_L \ \psi \ x_A \ y_A \ z_A \ x_E \ y_E \ z_E \ \kappa_y \ \kappa_z]^T \quad (4-86)$$

verwendet.

Es folgt die Herleitung der Bewegungsgleichungen für die MacPherson-Radaufhängung. Gegenüber der hier verfolgten Strategie lässt sich das Modell auch deutlich einfacher mit insgesamt 13 FHG und damit inklusive der zwei isolierten FHG aufstellen. Hierzu können als Minimalkoordinaten neben  $d_F$ ,  $x_L$  und  $\psi$  die jeweils drei Kardanwinkel für die Spurstange, den Radträger und den Querlenker sowie der Drehwinkel des Drehschubgelenks zwischen Radträger und Dämpferstange verwendet werden. Das resultierende Modell besitzt allerdings den Nachteil, dass die Vernachlässigung einzelner Minimalkoordinaten zumindest bei den neun Kardanwinkeln nicht möglich ist. Auch ist die Messung dieser Minimalkoordinaten im Vergleich erheblich schwieriger als derer nach (4-86).

Anstelle des Dämpferwegs  $d_F$  kann auch der Drehwinkel des Querlenkers um die durch die Punkte  $B$  und  $A$  beschriebene Achse, im Folgenden mit  $\varphi$  bezeichnet, verwendet werden. Für den im weiteren Verlauf dieser Dissertationsschrift diskutierten Regelungsansatz ist die Wahl des Dämpferwegs  $d_F$  aber vorteilhaft, da es sich bei  $d_F$  um ein typisches Target-Signal bei Betriebsfestigkeitsversuchen handelt, vgl. auch Abschnitt 2.1. Der Drehwinkel  $\varphi$  hat dabei hingegen üblicherweise keine Relevanz. Für das grundsätzliche Vorgehen zur Herleitung der Bewegungsgleichungen mit der Minimalkoordinate  $\varphi$  anstelle  $d_F$  siehe z. B. [Ril94].

### 4.3.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für die MacPherson-Radaufhängung basiert auf den Erläuterungen von Rill [Ril94]. Ähnliche, demgegenüber vereinfachte räumliche Modelle finden sich z. B. auch in [RS10; SHB18].

In [Ril94] werden die Drehmatrizen und Winkelgeschwindigkeitsvektoren sowie die Jacobimatrizen von Querlenker, Radträger und Radnabe hergeleitet. Die Gleichungen werden in ein Gesamtfahrzeugmodell integriert. Hinsichtlich der Einzelradaufhängung handelt es sich um ein Modell mit zwei massebehafteten Starrkörpern (Radträger und Radnabe), wobei die Schwerpunkte von Radträger und Radnabe als identisch angenommen werden. Querlenker, Dämpferstange, Spurstange und Lenkgestänge werden als masselos angenommen bzw. ihre Massen- und Träigkeitseigenschaften anteilig auf die anderen Massen verrechnet. Unter der Zielsetzung eines vertretbaren Berechnungsaufwands wird auf die Herleitung einiger rechenaufwändiger Terme verzichtet, z. B. der Restbeschleunigungen und der „exakten“ Berechnung des Drehinkelgeschwindigkeitsvektors des Radträgers<sup>12</sup>. Die Minimalkoordinaten einer Einzelradaufhängung des Modells sind  $\varphi$ ,  $\kappa_z$ ,  $x_L$  und  $\psi$ .

<sup>12</sup>Vergleiche Formel (4-136) in der nachfolgenden Herleitung.

Im Vergleich dazu erfolgt hier die Herleitung der Gleichungen für alle sechs Starrkörper. Dabei wird das Ziel verfolgt, das gegebene MKS-Modell der MacPherson-Einzelradaufhängung möglichst exakt abzubilden. Aus diesem Grund werden hier insgesamt sieben neue FHG im Modell berücksichtigt, um die Nachgiebigkeiten der Elastomerlager besser berücksichtigen zu können. Darüber hinaus werden auch die Restbeschleunigungen aller sechs Starrkörper angegeben. Anstelle der Querlenkerdrehung  $\varphi$  wird in diesem Modell der Dämpferweg  $d_F$  verwendet, da er für die spätere Regelungsaufgabe zielführender ist.

## Positionsgrößen

Die **Drehmatrix des Querlenkers** bezüglich des fahrzeugfesten Bezugssystems  ${}^I A$  besteht aus der Abfolge der Drehung um die fahrzeugfeste  $y$ -Achse mit dem Winkel  $\kappa_y$ , der Drehung um die mitgedrehte  $z$ -Achse mit dem Winkel  $\kappa_z$  sowie der Drehung um die Achse  ${}_3 e_{BA}$  mit dem Winkel  $\varphi$ . Folglich berechnet sich  ${}^I A$  zu

$${}^I A = {}^{I3} A \cdot {}^{3a3} A, \quad {}^{I3} A = A_y(\kappa_y) \cdot A_z(\kappa_z), \quad {}^{3a3} A = A_{{}_3 e_{BA}}(\varphi) \quad (4-87)$$

mit den Definitionen gemäß Anhang A1.3. Gegenüber der Herleitung in [Ril94] ist  $\varphi$  bei der hier vorgenommenen Modellierung keine Minimalkoordinate und muss aus den Modellparametern und den Minimalkoordinaten bestimmt werden. Hierfür ist eine alternative Formulierung der Drehmatrix  ${}^{3a3} A$  hilfreich. Geeignet ist bspw. die Zerlegung

$${}^{3a3} A = {}^{3a3b} A \cdot A_z(\varphi) \cdot {}^{3c3} A \quad (4-88)$$

mit

$${}^{3a3b} A = [e_{3b,y} \times {}_3 e_{BA} \quad e_{3b,y} \quad {}_3 e_{BA}]^T, \quad e_{3b,y} = \frac{{}_I r_{AC,0} \times {}_3 e_{BA}}{|{}_I r_{AC,0} \times {}_3 e_{BA}|}, \quad (4-89)$$

$${}^{3c3} A = {}^{3a3b} A^T. \quad (4-90)$$

Der Abstand der Punkte  $C$  und  $E$  lässt sich zum einen aus

$${}_2 r_{CE} = {}_2 r_{CD} + d_F \cdot {}_2 e_{DE}, \quad (4-91)$$

zum anderen aus

$${}_{3b} r_{CE} = {}_{3b} r_{AE} - A_z(\varphi) \cdot {}_{3c} r_{AC} \quad (4-92)$$

mit

$${}_{3b} r_{AE} = {}^{3a3b} A^T \cdot {}^{I3} A^T \cdot {}_I r_{AE}, \quad {}_{3c} r_{AC} = {}^{3c3} A \cdot {}_3 r_{AC}, \quad (4-93)$$

$${}_I r_{AE} = {}_I r_{0E} - {}_I r_{0A}, \quad {}_I r_{0E} = {}_I r_{0E,0} + \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}, \quad {}_I r_{0A} = {}_I r_{0A,0} + \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (4-94)$$

berechnen. Durch Gleichsetzen der quadrierten Vektorlängen von (4-91) und (4-92)

$${}_2 r_{CE}^T \cdot {}_2 r_{CE} = {}_{3b} r_{CE}^T \cdot {}_{3b} r_{CE} \quad (4-95)$$

folgt nach einigen algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \left( {}_{3c}r_{AC,x} \cdot {}_{3b}r_{AE,x} + {}_{3c}r_{AC,y} \cdot {}_{3b}r_{AE,y} \right) \cdot \cos \varphi \\ & + 2 \cdot \left( {}_{3c}r_{AC,y} \cdot {}_{3b}r_{AE,x} - {}_{3c}r_{AC,x} \cdot {}_{3b}r_{AE,y} \right) \cdot \sin \varphi \\ & = {}_2\mathbf{r}_{CE}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE} - {}_{3c}\mathbf{r}_{AC}^T \cdot {}_{3c}\mathbf{r}_{AC} - {}_{3b}\mathbf{r}_{AE}^T \cdot {}_{3b}\mathbf{r}_{AE} + 2 \cdot {}_{3c}r_{AC,z} \cdot {}_{3b}r_{AE,z}. \end{aligned} \quad (4-96)$$

Hierbei handelt es sich um eine Gleichung der Form  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$ , die sich nach  $x$  bzw. in diesem Falle  $\varphi$  lösen lässt, siehe Anhang A6.

Auch die **Drehmatrix des Radträgers**  ${}^{I2}\mathbf{A}$  wird für die Berechnung in zwei Teildrehungen aufgespalten. Es gilt

$${}^{I2}\mathbf{A} = {}^{IZ}\mathbf{A} \cdot {}^{Z2}\mathbf{A}, \quad {}^{IZ}\mathbf{A} = \mathbf{A}_x(\alpha_Z) \cdot \mathbf{A}_y(\beta_Z), \quad {}^{Z2}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{{}_2\mathbf{e}_{CE}}(\delta) \quad (4-97)$$

mit den Definitionen nach Anhang A1.3. Z ist ein für die Herleitung erforderliches Zwischenkoordinatensystem. Die in (4-97) enthaltenen Winkel  $\alpha_Z, \beta_Z$  und  $\delta$  sind noch unbekannt. Die Berechnung von  $\alpha_Z$  und  $\beta_Z$  basiert auf der Gleichung

$${}_I\mathbf{r}_{CE} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE} = {}^{IZ}\mathbf{A} \cdot {}^{Z2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE} = \mathbf{A}_x(\alpha_Z) \cdot \mathbf{A}_y(\beta_Z) \cdot {}_Z\mathbf{r}_{CE}. \quad (4-98)$$

Da  ${}^{Z2}\mathbf{A}$  um die Achse CE dreht, gilt in diesem Sonderfall, dass

$${}_Z\mathbf{r}_{CE} = {}_2\mathbf{r}_{CE}. \quad (4-99)$$

Damit folgt

$$\mathbf{A}_x^T(\alpha_Z) \cdot {}_I\mathbf{r}_{CE} = \mathbf{A}_y(\beta_Z) \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE} \quad (4-100)$$

mit

$${}_I\mathbf{r}_{CE} = {}_I\mathbf{r}_{AE} - {}_I\mathbf{r}_{AC}, \quad {}_I\mathbf{r}_{AC} = {}^{I3}\mathbf{A} \cdot {}_3\mathbf{r}_{AC}. \quad (4-101)$$

Bei der ersten und zweiten Zeile von (4-100) handelt es sich wieder um Gleichungen der Form  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$ , aus denen sich  $\beta_Z$  ( $a = {}_2r_{CE,x}$ ,  $b = {}_2r_{CE,z}$ ,  $c = {}_Ir_{CE,x}$ ) und  $\alpha_Z$  ( $a = {}_Ir_{CE,y}$ ,  $b = {}_Ir_{CE,z}$ ,  $c = {}_2r_{CE,y}$ ) berechnen lassen, vgl. Anhang A6.

Auch für den unbekannten Drehwinkel  $\delta$  folgt aus

$${}_I\mathbf{r}_{GF}^T \cdot {}_I\mathbf{r}_{GF} = d_5^2 = \text{konst.} \quad (4-102)$$

durch Einsetzen der Zusammenhänge

$${}_I\mathbf{r}_{GF} = {}_I\mathbf{r}_{CF} - {}_I\mathbf{r}_{CG}, \quad {}_I\mathbf{r}_{CF} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{CF}, \quad {}_I\mathbf{r}_{CG} = {}_I\mathbf{r}_{AG} - {}_I\mathbf{r}_{AC}, \quad (4-103)$$

$${}_I\mathbf{r}_{AG} = {}_I\mathbf{r}_{0G} - {}_I\mathbf{r}_{0A}, \quad {}_I\mathbf{r}_{0G} = {}_I\mathbf{r}_{0G,0} + \mathbf{e}_y \cdot x_L \quad (4-104)$$

und einige algebraische Umformungen eine Gleichung der Form  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$ , vgl. Anhang A6. Die Koeffizienten lauten in diesem Fall

$$a = {}_I\mathbf{r}_{CG}^T \cdot {}^{I2}\mathbf{A} \cdot \left( \mathbf{I} - {}_2\mathbf{e}_{CE} \cdot {}_2\mathbf{e}_{CE}^T \right) \cdot {}_2\mathbf{r}_{CF}, \quad (4-105)$$

$$b = {}_I\mathbf{r}_{CG}^T \cdot {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\tilde{\mathbf{e}}_{CE} \cdot {}_2\mathbf{r}_{CF}, \quad (4-106)$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left( {}_2\mathbf{r}_{CF}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CF} + {}_I\mathbf{r}_{CG}^T \cdot {}_I\mathbf{r}_{CG} - d_5^2 \right) - {}_I\mathbf{r}_{CG}^T \cdot {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{e}_{CE} \cdot {}_2\mathbf{e}_{CE}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CF}. \quad (4-107)$$

Das Rad besitzt gegenüber dem Radträger einen Dreh-FHG, sodass sich die **Drehmatrix der Radnabe**  ${}^{I_1}A$  aufbauend auf der Drehmatrix des Radträgers durch die Gleichung

$${}^{I_1}A = {}^{I_2}A \cdot {}^{2_1}A \quad (4-108)$$

mit

$${}^{2_1}A = {}^{2_0}A \cdot A_y(-\psi) \quad (4-109)$$

formulieren lässt.  ${}^{2_0}A$  ist eine konstante Verdrehung zwischen den Koordinatensystemen 2 und 1. Sie bewirkt, dass die Drehung mit  $\psi$  um die richtige Achse stattfindet. Das Minuszeichen wurde eingefügt, um bei Vorwärtsfahrt einen zunehmenden Winkel  $\psi$  zu erhalten.

Die Dämpferstange ist über ein Schubgelenk mit dem Radträger verbunden. Eine gegenseitige Verdrehung findet nicht statt, sodass die **Drehmatrix der Dämpferstange**  ${}^{I_4}A$  mit der des Radträgers übereinstimmt, d. h.

$${}^{I_4}A = {}^{I_2}A . \quad (4-110)$$

Der zwischen Lenkgestänge und Radträger befindlichen Spurstange verbleiben nach Elimination des isolierten FHG zwei Dreh-FHG. Aus diesem Grund kann die **Drehmatrix der Spurstange**  ${}^{I_5}A$  bspw. durch

$${}^{I_5}A = A_x(\alpha_5) \cdot A_y(\beta_5) \quad (4-111)$$

mit den Drehwinkeln  $\alpha_5$  und  $\beta_5$  beschrieben werden. Zur Berechnung dieser Winkel eignet sich der Ansatz

$${}_I r_{GF} = {}^{I_5}A \cdot {}_5 r_{GF} \quad (4-112)$$

mit  ${}_I r_{GF}$  nach (4-103). Durch Einsetzen von (4-111) und Umformen folgt unmittelbar

$$A_x^T(\alpha_5) \cdot {}_I r_{GF} = A_y(\beta_5) \cdot {}_5 r_{GF} . \quad (4-113)$$

Die ersten beiden Zeilen entsprechen wieder Gleichungen der Form  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$  für  $\alpha_5$  und  $\beta_5$ , vgl. Anhang A6. Bei geschickter Wahl des Koordinatensystems 5 ergeben sich hieraus besonders einfache Gleichungen für die gesuchten Winkel. Liegt bspw. die  $z$ -Achse des Systems 5 auf der Verbindungsachse der Punkte  $G$  und  $F$ , so gilt  ${}_5 r_{GF} = d_5 \cdot e_z$  und für die Verdrehwinkel folgt

$$\alpha_5 = \arctan -\frac{{}_I r_{GF,y}}{{}_I r_{GF,z}} , \quad \beta_5 = \arcsin \frac{{}_I r_{GF,x}}{{}_I r_{GF,z}} . \quad (4-114)$$

Das Lenkgestänge besitzt gegenüber dem fahrzeugfesten System  $I$  bei der vorliegenden Modellierung nur einen translatorischen FHG, sodass für die **Drehmatrix des Lenkgestänges**  ${}^{I_6}A$

$${}^{I_6}A = I \quad (4-115)$$

gilt. Mithilfe der ermittelten Drehmatrizen können auch die **Ortsvektoren der Körperschwerpunkte** bestimmt werden. Sie lauten

$${}_I\mathbf{r}_{01} = {}_I\mathbf{r}_{02} + {}_I\mathbf{r}_{2H} + {}_I\mathbf{r}_{H1}, \quad {}_I\mathbf{r}_{02} = {}_I\mathbf{r}_{0A} + {}_I\mathbf{r}_{AC} + {}_I\mathbf{r}_{C2}, \quad (4-116)$$

$${}_I\mathbf{r}_{03} = {}_I\mathbf{r}_{0A} + {}_I\mathbf{r}_{A3}, \quad {}_I\mathbf{r}_{04} = {}_I\mathbf{r}_{0E} + {}_I\mathbf{r}_{E4}, \quad (4-117)$$

$${}_I\mathbf{r}_{05} = {}_I\mathbf{r}_{0G} + {}_I\mathbf{r}_{G5}, \quad {}_I\mathbf{r}_{06} = {}_I\mathbf{r}_{0G} + {}^{I6}\mathbf{A} \cdot {}_6\mathbf{r}_{G6} \quad (4-118)$$

mit

$${}_I\mathbf{r}_{A3} = {}^{I3}\mathbf{A} \cdot {}_3\mathbf{r}_{A3}, \quad {}_I\mathbf{r}_{C2} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{C2}, \quad {}_I\mathbf{r}_{H1} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{r}_{H1}, \quad (4-119)$$

$${}_I\mathbf{r}_{E4} = {}^{I4}\mathbf{A} \cdot {}_4\mathbf{r}_{E4}, \quad {}_I\mathbf{r}_{G5} = {}^{I5}\mathbf{A} \cdot {}_5\mathbf{r}_{G5}, \quad {}_I\mathbf{r}_{2H} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{2H}. \quad (4-120)$$

Der Ortsvektor des Punktes  $T$ , in dem die Kraft  $\tau$  angreift, lässt sich analog zu

$${}_I\mathbf{r}_{0T} = {}_I\mathbf{r}_{01} + {}_I\mathbf{r}_{1T}, \quad {}_I\mathbf{r}_{1T} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{r}_{1T} \quad (4-121)$$

bestimmen.

## Geschwindigkeitsgrößen

Der **Winkelgeschwindigkeitsvektor des Querlenkers**  ${}^I\omega$  folgt aus der Drehmatrix  ${}^{I3}\mathbf{A}$  als

$$\begin{aligned} {}^{I3}\omega &= \mathbf{e}_y \cdot \dot{\kappa}_y + \mathbf{A}_y(\kappa_y) \cdot \mathbf{e}_z \cdot \dot{\kappa}_z + {}_I\mathbf{e}_{BA} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\partial {}^{I3}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \\ \frac{\partial {}^{I3}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial \dot{\kappa}_y}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\kappa_y} \cdot \frac{\partial \dot{\kappa}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I\mathbf{e}_{BA} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{e}_{\kappa_y} = \begin{bmatrix} \sin \kappa_y \\ 0 \\ \cos \kappa_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-122)$$

mit

$${}_I\mathbf{e}_{BA} = {}^{I3}\mathbf{A} \cdot {}_3\mathbf{e}_{BA}, \quad \frac{\partial \dot{\kappa}_y}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 9} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \dot{\kappa}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 10} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-123)$$

und der noch unbekannten Größe  $\partial \dot{\varphi} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$ . Deren Herleitung basiert auf der Tatsache, dass gleichermaßen

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE} \quad (4-124)$$

und

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \quad (4-125)$$

mit

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} = {}^{I_3}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{AC}, \quad (4-126)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE} = {}^{I_2}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{CE} + {}_I\mathbf{v}_{rel,CE}, \quad {}_I\mathbf{v}_{rel,CE} = {}^{I_2}\mathbf{A} \cdot {}_2\dot{\mathbf{r}}_{CE} = {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \dot{\mathbf{d}}_F, \quad (4-127)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_F = \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = [1 \quad \mathbf{0}_{1 \times 10}], \quad (4-128)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} = \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = [\mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}_{3 \times 2}], \quad (4-129)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = [\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}_{3 \times 5}] \quad (4-130)$$

gilt. Durch Gleichsetzen von (4-124) und (4-125) folgt damit

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d = {}^{I_3}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{AC} + {}^{I_2}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{CE} + {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d. \quad (4-131)$$

Wird zusätzlich  ${}^I\omega$  durch (4-122) ersetzt, so resultiert

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d &= \left( \mathbf{e}_y \times {}_I\mathbf{r}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}_y}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\kappa_y} \times {}_I\mathbf{r}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I\mathbf{e}_{BA} \times {}_I\mathbf{r}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_d \\ &\quad + {}^{I_2}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{CE} + {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d. \end{aligned} \quad (4-132)$$

Die in dieser Gleichung ebenfalls enthaltene, unbekannte Größe  ${}^{I_2}\omega$  entfällt durch Linksmultiplikation mit  ${}_I\mathbf{r}_{CE}^T$ , da  ${}^{I_2}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{CE}$  einen Vektor senkrecht zu  ${}_I\mathbf{r}_{CE}$  ergibt und das Skalarprodukt orthogonaler Vektoren Null ist. Nach dieser Operation verbleibt  $\partial \dot{\phi} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  als einzige unbekannte Größe, für die

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \mathbf{h}_\varphi^T \cdot \mathbf{H}_\varphi, \quad \mathbf{h}_\varphi^T = \frac{{}_I\mathbf{r}_{CE}^T}{{}_I\mathbf{r}_{CE}^T \cdot ({}_I\mathbf{e}_{BA} \times {}_I\mathbf{r}_{AC})}, \\ \mathbf{H}_\varphi &= \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - \mathbf{e}_y \times {}_I\mathbf{r}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}_y}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - \mathbf{e}_{\kappa_y} \times {}_I\mathbf{r}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \end{aligned} \quad (4-133)$$

folgt. Entsprechend der Aufteilung der Drehmatrix  ${}^{I_2}\mathbf{A}$  gemäß (4-97) wird auch der **Winkelgeschwindigkeitsvektor des Radträgers**  ${}^{I_2}\omega$  in zwei Bestandteile aufgetrennt, d. h.

$${}^{I_2}\omega = {}^{I_Z}\omega + {}^{Z_2}\omega = \frac{\partial {}^{I_2}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}^{I_2}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}^{I_Z}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{Z_2}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-134)$$

Der Anteil  ${}^{I_Z}\omega$  folgt aus  ${}^{I_Z}\mathbf{A}$  als

$$\begin{aligned} {}^{I_Z}\omega &= \mathbf{e}_x \cdot \dot{\alpha}_Z + \mathbf{A}_x(\alpha_Z) \cdot \mathbf{e}_y \cdot \dot{\beta}_Z = \mathbf{e}_x \dot{\alpha}_Z + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \dot{\beta}_Z = \frac{\partial {}^{I_Z}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \\ \frac{\partial {}^{I_Z}\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{e}_{\alpha_Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha_Z \\ \sin \alpha_Z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4-135)$$

der Anteil  ${}^{Z2}{}_I\omega$  aus  ${}^{Z2}\mathbf{A}$  (vgl. [SHB18, S. 36] für die allgemeingültige Formel) als

$$\begin{aligned} {}^{Z2}{}_I\omega &= {}^{I2}\mathbf{A} \cdot \left[ {}_2\mathbf{e}_{CE} \cdot \dot{\delta} + (\mathbf{I} \cdot \sin \delta + (1 - \cos \delta) \cdot {}_2\tilde{\mathbf{e}}_{CE}) \cdot {}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE} \right] \\ &= \frac{\partial {}^{Z2}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}^{Z2}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = {}_I\mathbf{e}_{CE} \cdot \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{Z2}{}_I\omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \end{aligned} \quad (4-136)$$

mit

$$\frac{\partial {}^{Z2}{}_I\omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} \cdot \sin \delta + (1 - \cos \delta) \cdot {}_2\tilde{\mathbf{e}}_{CE}) \cdot \frac{\partial {}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-137)$$

Gegenüber [Ril94] wurde der Anteil  $\partial {}^{Z2}{}_I\omega_2 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  nicht vernachlässigt. Die noch zu bestimmenden Unbekannten sind  $\partial {}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$ ,  $\partial \dot{\alpha}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$ ,  $\partial \dot{\beta}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  und  $\partial \dot{\delta} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$ , deren Berechnungsformeln nachfolgend in dieser Reihenfolge hergeleitet werden.

Da der Radträger als Starrkörper betrachtet wird, gilt  ${}_2\dot{\mathbf{r}}_{CD}, {}_2\dot{\mathbf{e}}_{DE} = \mathbf{0}$ . Aus (4-91) folgt daher

$${}_2\dot{\mathbf{r}}_{CE} = {}_2\mathbf{e}_{DE} \cdot \dot{d}_F. \quad (4-138)$$

Mit den skalaren Hilfsgrößen

$$h_1 = |{}_2\mathbf{r}_{CE}|^2 = {}_2\mathbf{r}_{CE}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE}, \quad h_2 = {}_2\mathbf{e}_{DE}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE}, \quad (4-139)$$

$$\dot{h}_1 = 2 \cdot {}_2\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \cdot {}_2\mathbf{r}_{CE} = 2 \cdot h_2 \cdot \dot{d}_F \quad (4-140)$$

ergibt sich

$${}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE} = \frac{d}{dt}({}_2\mathbf{e}_{CE}) = \frac{d}{dt}\left({}_2\mathbf{r}_{CE} \cdot h_1^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial {}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d \quad (4-141)$$

mit der gesuchten Größe

$$\frac{\partial {}_2\dot{\mathbf{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \left( {}_2\mathbf{e}_{DE} \cdot h_1^{-\frac{1}{2}} - {}_2\mathbf{r}_{CE} \cdot h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h_2 \right) \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-142)$$

Mit der nun bekannten Größe  $\partial {}^{Z2}{}_I\omega_2 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  lassen sich auch  $\partial \dot{\alpha}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  und  $\partial \dot{\beta}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$  bestimmen. Durch Einsetzen einiger der Zusammenhänge für  ${}^{I2}\omega$  in (4-131) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d &= {}^{I3}\omega \times {}_I\mathbf{r}_{AC} + \left( \mathbf{e}_x \times {}_I\mathbf{r}_{CE} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I\mathbf{r}_{CE} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_d \\ &\quad + {}^{Z2}{}_I\omega_2 \times {}_I\mathbf{r}_{CE} + {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d. \end{aligned} \quad (4-143)$$

Dabei wurde auch berücksichtigt, dass die Vektoren  ${}_I\mathbf{e}_{CE}$  und  ${}_I\mathbf{r}_{CE}$  parallel sind, wodurch der Summand  ${}_I\mathbf{e}_{CE} \times {}_I\mathbf{r}_{CE} \cdot \dot{\delta}$  entfällt. Durch Linksmultiplikation von (4-143) mit  $\mathbf{h}_3^T = ({}_I\mathbf{e}_{DE} \times ({}_{\alpha_Z} \times {}_I\mathbf{r}_{CE}))^T$  bzw.  $\mathbf{h}_4^T = ({}_I\mathbf{e}_{DE} \times (\mathbf{e}_x \times {}_I\mathbf{r}_{CE}))^T$  ergeben sich hieraus für  $\dot{\alpha}_Z$  und  $\dot{\beta}_Z$  die Zusammenhänge

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \mathbf{h}_{\alpha_Z}^T \cdot \mathbf{H}_5, \quad \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \mathbf{h}_{\beta_Z}^T \cdot \mathbf{H}_5 \quad (4-144)$$

mit

$$\mathbf{h}_{\alpha_Z}^T = \frac{\mathbf{h}_3^T}{\mathbf{h}_3^T \cdot (\mathbf{e}_x \times {}_I \mathbf{r}_{CE})}, \quad \mathbf{h}_{\beta_Z}^T = \frac{\mathbf{h}_4^T}{\mathbf{h}_4^T \cdot (\mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE})}, \quad (4-145)$$

$$\mathbf{H}_5 = {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{CE} \cdot \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-146)$$

Die letzte verbliebene Unbekannte ist  $\partial \dot{\delta} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T$ . Es gilt gleichermaßen

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{AF} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CF} \quad (4-147)$$

und

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{AF} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG} + {}_I \dot{\mathbf{r}}_{GF} \quad (4-148)$$

mit

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{CF} = {}^{I2} \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{CF}, \quad {}_I \dot{\mathbf{r}}_{GF} = {}^{I5} \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{GF}, \quad (4-149)$$

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0G} - {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0A} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-150)$$

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{0G} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = [\mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{0}_{3 \times 9}]. \quad (4-151)$$

Durch Gleichsetzen von (4-147) und (4-148), sukzessives Einsetzen bekannter Größen und Umformen folgt

$$\begin{aligned} {}_I \mathbf{e}_{CE} \times {}_I \mathbf{r}_{CF} \cdot \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d &= \\ \left( {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \frac{\partial {}^{I3} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{CF} \left( \frac{\partial {}^{IZ} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \dot{\mathbf{y}}_d + {}^{I5} \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{GF}. \end{aligned} \quad (4-152)$$

Hieraus ergibt sich durch Linksmultiplikation mit  ${}_I \mathbf{r}_{GF}^T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \mathbf{h}_\delta^T \cdot \mathbf{H}_\delta, \quad \mathbf{h}_\delta^T = \frac{{}_I \mathbf{r}_{GF}^T}{{}_I \mathbf{r}_{GF}^T \cdot ({}_I \mathbf{e}_{CE} \times {}_I \mathbf{r}_{CF})}, \\ \mathbf{H}_\delta &= {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \left( \frac{\partial {}^{IZ} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \end{aligned} \quad (4-153)$$

Aufbauend auf dem Winkelgeschwindigkeitsvektor des Radträgers ergibt sich der **Winkelgeschwindigkeitsvektor der Radnabe**  ${}^{I1} \boldsymbol{\omega}$  durch Vektoraddition nach

$${}^{I1} {}_I \boldsymbol{\omega} = {}^{I2} \boldsymbol{\omega} + {}^{21} \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial {}^{I1} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}^{I1} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}^{I2} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{21} {}_I \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-154)$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor  ${}^{21} \boldsymbol{\omega}$  folgt unmittelbar aus (4-109) zu

$${}^{21} {}_2 \boldsymbol{\omega} = - {}^{210} A \cdot \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = [\mathbf{0}_{1 \times 2} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times 8}] \quad (4-155)$$

und führt zu

$${}^{21}{}_I\omega = {}^{I2}A \cdot {}^{21}_I\omega = \frac{\partial {}^{21}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \frac{\partial {}^{21}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = - {}^{I2}A \cdot {}^{210}{}_I\omega \cdot \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-156)$$

Für den **Winkelgeschwindigkeitsvektor der Dämpferstange**  ${}^{I4}{}_I\omega$  gilt aufgrund der Abwesenheit eines rotatorischen FHG zwischen Dämpferstange und Radträger

$${}^{I4}{}_I\omega = {}^{I2}{}_I\omega, \quad \frac{\partial {}^{I4}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}^{I2}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-157)$$

Der **Winkelgeschwindigkeitsvektor der Spurstange**  ${}^{I5}{}_I\omega$  lautet, vgl. auch (4-135),

$$\begin{aligned} {}^{I5}{}_I\omega &= \mathbf{e}_x \cdot \dot{\alpha}_5 + \mathbf{e}_{\alpha_5} \cdot \dot{\beta}_5 = \frac{\partial {}^{I5}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \\ \frac{\partial {}^{I5}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\alpha_5} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{e}_{\alpha_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha_5 \\ \sin \alpha_5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4-158)$$

Die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}_5$  und  $\dot{\beta}_5$  folgen durch zeitliche Ableitung von (4-114)

$$\dot{\alpha}_5 = \frac{1}{1 + \left( \frac{{}^I r_{GF,y}}{{}^I r_{GF,z}} \right)^2} \cdot \frac{d}{dt} \left( - \frac{{}^I r_{GF,y}}{{}^I r_{GF,z}} \right) = \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-159)$$

$$\dot{\beta}_5 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{{}^I r_{GF,x}}{{}^I r_{GF,z}} \right)^2}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{{}^I r_{GF,x}}{{}^I r_{GF,z}} \right) = \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d \quad (4-160)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} &= \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}} \cdot \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}} \cdot \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \\ \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}} &= \frac{\begin{bmatrix} 0 & -{}^I r_{GF,z} & {}^I r_{GF,y} \end{bmatrix}}{({}^I r_{GF,y})^2 + ({}^I r_{GF,z})^2}, \quad \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}} = \frac{\mathbf{e}_x^T}{\sqrt{{}^I r_{GF,z}}^2 - {}^I r_{GF,x}^2}}. \end{aligned} \quad (4-161)$$

Die fehlende Größe  $\frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}$  folgt aus

$$\begin{aligned} {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF} &= - {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AG} + {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}^I \dot{\mathbf{r}}_{CF} \\ &= - \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d + {}^{I3}{}_I\omega \times {}^I \mathbf{r}_{AC} + {}^{I2}{}_I\omega \times {}^I \mathbf{r}_{CF} = \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d \end{aligned} \quad (4-162)$$

und beträgt

$$\frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = - \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AG}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}^I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}^I \tilde{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \frac{\partial {}^{I2}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-163)$$

Das Lenkgestänge besitzt keinen Dreh-FHG bezüglich des Fahrzeugaufbaus. Der **Winkelgeschwindigkeitsvektor des Lenkgestänges**  ${}^{I6}{}_I\omega$  beträgt daher

$${}^{I6}{}_I\omega = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial {}^{I6}{}_I\omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \mathbf{0}. \quad (4-164)$$

Die zeitliche Ableitung von (4-116) bis (4-118) führt zu den **Geschwindigkeitsvektoren der Körperschwerpunkte**

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{01} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{2H} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{H1} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02} + {}^{I2}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{2H} + {}^{I1}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{H1} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-165)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{02} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{C2} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}^{I2}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{C2} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-166)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{03} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{A3} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} + {}^{I3}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{A3} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-167)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{04} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{E4} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} + {}^{I4}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{E4} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{04}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-168)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{05} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0G} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{G5} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0G} + {}^{I5}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{G5} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{05}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (4-169)$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{06} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0G} \quad (4-170)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{2H} \cdot \frac{\partial {}^{I2}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{H1} \cdot \frac{\partial {}^{I1}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-171)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{C2} \cdot \frac{\partial {}^{I2}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-172)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{A3} \cdot \frac{\partial {}^{I3}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-173)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{04}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{E4} \cdot \frac{\partial {}^{I4}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-174)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{05}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{G5} \cdot \frac{\partial {}^{I5}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-175)$$

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{06}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-176)$$

Analog dazu ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor des Punktes  $T$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{0T} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{1T}, \quad {}_I\dot{\mathbf{r}}_{1T} = {}^{I1}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{1T}, \quad (4-177)$$

für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}_I\tilde{\mathbf{r}}_{1T} \cdot \frac{\partial {}^{I1}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-178)$$

### Beschleunigungsgrößen

In diesem Abschnitt werden noch die Restbeschleunigungen aller beteiligter Körper, d. h. die zeitlichen Differentiale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Ii}_I\boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0i}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-179)$$

gebildet. Rill [Ril94] vernachlässigt diese Terme, da sie gerade bei Radaufhängungen aufgrund kleiner Relativgeschwindigkeiten und -beschleunigungen verhältnismäßig klein sind. Hierfür spricht auch, dass die Modellierung ohnehin diverse Vereinfachungen gegenüber der Realität aufweist (z. B. Starrkörperannahme, ideale Gelenke, masselose Kraftelemente, vereinfachte Elastomerlagermodelle). Rill argumentiert weiter, es ergäbe „wenig Sinn, auf der einen Seite Fehler auf Grund von idealisierten Modellvorstellungen in Kauf zu nehmen und auf der anderen Seite Terme mit großem Rechenaufwand vermeintlich exakt zu berechnen“ [Ril94, S. 34].

Die für die Berechnung der Restbeschleunigungen erforderlichen Terme werden nachfolgend dennoch angegeben. Dies ermöglicht auch einen Vergleich der Modellgüte mit und ohne Berücksichtigung der Restbeschleunigungen im nachfolgenden Abschnitt 4.3.3.

Für den **Querlenker** folgt aus (4-122)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_3 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \dot{\mathbf{e}}_{\kappa_y} \frac{\partial \dot{\kappa}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}^I \dot{\mathbf{e}}_{BA} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}^I \mathbf{e}_{BA} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \quad \dot{\mathbf{e}}_{\kappa_y} = \dot{\kappa}_y \begin{bmatrix} \cos \kappa_y \\ 0 \\ -\sin \kappa_y \end{bmatrix}. \quad (4-180)$$

Die zeitliche Ableitung von (4-123) führt zu

$${}^I \dot{\mathbf{e}}_{BA} = {}^I {}^3 \omega \times {}^I \mathbf{e}_{BA} = (\mathbf{e}_{BA} \cdot \dot{\varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \dot{\kappa}_z) \times {}^I \mathbf{e}_{BA} = \mathbf{e}_z \times {}^I \mathbf{e}_{BA} \cdot \dot{\kappa}_z, \quad (4-181)$$

die Ableitung von (4-133) zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \dot{\mathbf{h}}_\varphi^T \cdot \mathbf{H}_\varphi + \mathbf{h}_\varphi^T \cdot \dot{\mathbf{H}}_\varphi \quad (4-182)$$

mit

$$\dot{\mathbf{h}}_\varphi^T = \frac{1}{{}^I \mathbf{r}_{CE}^T \cdot ({}^I \mathbf{e}_{BA} \times {}^I \mathbf{r}_{AC})} \cdot \left( {}^I \dot{\mathbf{r}}_{CE}^T - \left( {}^I \dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \cdot ({}^I \mathbf{e}_{BA} \times {}^I \mathbf{r}_{AC}) + {}^I \mathbf{r}_{CE}^T \cdot ({}^I \dot{\mathbf{e}}_{BA} \times {}^I \mathbf{r}_{AC} + {}^I \mathbf{e}_{BA} \times {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AC}) \right) \cdot \mathbf{h}_\varphi^T \right), \quad (4-183)$$

$$\mathbf{H}_\varphi = -\mathbf{e}_y \times {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial \dot{\kappa}_y}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - (\dot{\mathbf{e}}_{\kappa_y} \times {}^I \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{e}_{\kappa_y} \times {}^I \dot{\mathbf{r}}_{AC}) \cdot \frac{\partial \dot{\kappa}_z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}^I \dot{\mathbf{e}}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-184)$$

$${}^I \dot{\mathbf{e}}_{DE} = {}^I {}^2 \omega \times {}^I \mathbf{e}_{DE}. \quad (4-185)$$

Aus der zeitlichen Differentiation von (4-134), (4-135) und (4-136) resultiert die Berechnung der Restwinkelbeschleunigung des **Radträgers**. Die Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I {}^2 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I {}^Z \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z2} {}^I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-186)$$

mit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I {}^Z \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \mathbf{e}_x \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \dot{\mathbf{e}}_{\alpha_Z} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \quad (4-187)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z2} {}^I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = {}^I \mathbf{e}_{CE} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + {}^I \dot{\mathbf{e}}_{CE} \cdot \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z2} {}^I \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-188)$$

und

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\alpha_Z} = \dot{\alpha}_Z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_Z \\ \cos \alpha_Z \end{bmatrix}, \quad {}_I\dot{\boldsymbol{e}}_{CE} = {}^{I_2}\boldsymbol{\omega} \times {}_I\boldsymbol{e}_{CE} + {}^{I_2}\boldsymbol{A} \cdot {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE}. \quad (4-189)$$

In diesen Gleichungen sind mit  $d(\partial {}^{Z_2}{}_I\boldsymbol{\omega}_2 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$ ,  $d(\partial \dot{\alpha}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$ ,  $d(\partial \dot{\beta}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  und  $d(\partial \dot{\delta} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  erneut vier Unbekannte enthalten.  $d(\partial {}^{Z_2}{}_I\boldsymbol{\omega}_2 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  folgt durch zeitliches Differenzieren von (4-137),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z_2}{}_I\boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) &= {}^{I_2}\boldsymbol{A} (\mathbf{I} \dot{\delta} \cos \delta + (1 - \cos \delta) {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE} + {}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_{CE} \dot{\delta} \sin \delta) \frac{\partial {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \\ &\quad + {}^{I_2}\boldsymbol{A} (\mathbf{I} \sin \delta + (1 - \cos \delta) {}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_{CE}) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + {}^{I_2}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial {}^{Z_2}{}_I\boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \end{aligned} \quad (4-190)$$

wobei diese Gleichung mit  $d(\partial {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  eine weitere Unbekannte enthält. Diese lässt sich durch Differenzieren von (4-142) gewinnen. Zunächst folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) &= - \left( \frac{1}{2} \cdot {}_2\boldsymbol{e}_{DE} \cdot h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot \dot{h}_1 + {}_2\dot{\boldsymbol{r}}_{CE} \cdot h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h_2 \right. \\ &\quad \left. + {}_2\boldsymbol{r}_{CE} \cdot \left( -\frac{3}{2} \cdot h_1^{-\frac{5}{2}} \cdot \dot{h}_1 \cdot h_2 + h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot {}_2\boldsymbol{e}_{DE}^T \cdot {}_2\dot{\boldsymbol{r}}_{CE} \right) \right) \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \end{aligned} \quad (4-191)$$

Durch Einsetzen von  ${}_2\dot{\boldsymbol{r}}_{CE}$  nach (4-138) und  $\dot{h}_1$  nach (4-140) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_2\dot{\boldsymbol{e}}_{CE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) &= - \left( {}_2\boldsymbol{e}_{DE} \cdot h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h_2 \cdot \dot{d}_F + {}_2\boldsymbol{e}_{DE} \cdot h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h_2 \cdot \dot{d}_F \right. \\ &\quad \left. + {}_2\boldsymbol{r}_{CE} \cdot \left( -3 \cdot h_1^{-\frac{5}{2}} \cdot h_2^2 \cdot \dot{d}_F + h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot {}_2\boldsymbol{e}_{DE}^T \cdot {}_2\boldsymbol{e}_{DE} \cdot \dot{d}_F \right) \right) \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \\ &= -h_1^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[ 2 \cdot {}_2\boldsymbol{e}_{DE} \cdot h_2 + {}_2\boldsymbol{r}_{CE} \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot h_2^2}{h_1} \right) \right] \cdot \dot{d}_F \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \end{aligned} \quad (4-192)$$

Für  $d(\partial \dot{\alpha}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  und  $d(\partial \dot{\beta}_Z / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  ergibt sich durch Differentiation von (4-144)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \dot{\boldsymbol{h}}_{\alpha_Z}^T \cdot \mathbf{H}_5 + \boldsymbol{h}_{\alpha_Z}^T \cdot \dot{\mathbf{H}}_5, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_Z}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \dot{\boldsymbol{h}}_{\beta_Z}^T \cdot \mathbf{H}_5 + \boldsymbol{h}_{\beta_Z}^T \cdot \dot{\mathbf{H}}_5 \quad (4-193)$$

mit

$$\dot{\mathbf{h}}_{\alpha_Z}^T = \frac{\dot{\mathbf{h}}_3^T - (\dot{\mathbf{h}}_3^T \cdot (\mathbf{e}_x \times {}_I \mathbf{r}_{CE}) + \mathbf{h}_3^T \cdot (\mathbf{e}_x \times {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CE})) \cdot \mathbf{h}_{\alpha_Z}^T}{\mathbf{h}_3^T \cdot (\mathbf{e}_x \times {}_I \mathbf{r}_{CE})}, \quad (4-194)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_{\beta_Z}^T = \frac{\dot{\mathbf{h}}_4^T - (\dot{\mathbf{h}}_4^T \cdot (\mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE}) + \mathbf{h}_4^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE} + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CE})) \cdot \mathbf{h}_{\beta_Z}^T}{\mathbf{h}_4^T \cdot (\mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE})}, \quad (4-195)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_5 &= {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3} \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{I3} \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \\ &\quad + {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CE} \cdot \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{CE} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \end{aligned} \quad (4-196)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_3^T = ({}_I \dot{\mathbf{e}}_{DE} \times (\mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE}) + {}_I \mathbf{e}_{DE} \times (\dot{\mathbf{e}}_{\alpha_Z} \times {}_I \mathbf{r}_{CE} + \mathbf{e}_{\alpha_Z} \times {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CE}))^T, \quad (4-197)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_4^T = ({}_I \dot{\mathbf{e}}_{DE} \times (\mathbf{e}_x \times {}_I \mathbf{r}_{CE}) + {}_I \mathbf{e}_{DE} \times (\mathbf{e}_x \times {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CE}))^T. \quad (4-198)$$

Das Differenzieren von (4-153) führt zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \dot{\mathbf{h}}_\delta^T \cdot \mathbf{H}_\delta + \mathbf{h}_\delta^T \cdot \dot{\mathbf{H}}_\delta \quad (4-199)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_\delta^T &= \frac{1}{{}_I \mathbf{r}_{GF}^T \cdot ({}_J \mathbf{e}_{CE} \times {}_I \mathbf{r}_{CF})} \cdot \left( {}_I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T - \right. \\ &\quad \left. ({}_I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T \cdot ({}_J \mathbf{e}_{CE} \times {}_I \mathbf{r}_{CF}) + {}_I \mathbf{r}_{GF}^T \cdot ({}_I \dot{\mathbf{e}}_{CE} \times {}_I \mathbf{r}_{CF} + {}_I \mathbf{e}_{CE} \times {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CF})) \cdot \mathbf{h}_\delta^T \right), \end{aligned} \quad (4-200)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\delta &= {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^{I3} \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{I3} \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + {}_I \dot{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \left( \frac{\partial {}^{IZ} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \\ &\quad + {}_I \tilde{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{IZ} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{Z2} {}_I \omega_2}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \right), \end{aligned} \quad (4-201)$$

womit durch Vorliegen von  $d(\partial \dot{\delta} / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  sämtliche Terme für die Berechnung von  $d(\partial {}^{I2} \omega / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  nach (4-186) bekannt sind.

Für die Berechnung der Restwinkelbeschleunigung der **Radnabe** ist die Größe

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{I1} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{I2} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{21} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-202)$$

erforderlich.  $d(\partial {}^{I2} {}_I \omega / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  ist bekannt. Der zweite Anteil geht aus (4-156) hervor. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{21} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = - {}^{I2} \dot{\mathbf{A}} \cdot {}^{210} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} = {}^{I2} \tilde{\omega} \cdot \frac{\partial {}^{21} {}_I \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad (4-203)$$

da

$${}^{I2} \dot{\mathbf{A}} = {}^{I2} \tilde{\omega} \cdot {}^{I2} \mathbf{A}. \quad (4-204)$$

Der Restwinkelbeschleunigungsterm der **Dämpferstange** entspricht der des Radträgers, d. h.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_4 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_2 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \quad (4-205)$$

der der **Spurstange**, vgl. (4-158), beträgt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_5 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \mathbf{e}_x \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) + \dot{\mathbf{e}}_{\alpha_5} \cdot \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \mathbf{e}_{\alpha_5} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-206)$$

mit

$$\dot{\mathbf{e}}_{\alpha_5} = \dot{\alpha}_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_5 \\ \cos \alpha_5 \end{bmatrix}. \quad (4-207)$$

Die unbekannten Größen  $d(\partial \dot{\alpha}_5 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  und  $d(\partial \dot{\beta}_5 / \partial \dot{\mathbf{y}}_d^T) / dt$  folgen aus (4-161). Es resultieren

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \right) \cdot \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right), \quad (4-208)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \right) \cdot \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} + \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \quad (4-209)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \right) &= \frac{-2 \cdot ({}^I r_{GF,y} \cdot {}^I \dot{r}_{GF,y} + {}^I r_{GF,z} \cdot {}^I \dot{r}_{GF,z})}{({}^I r_{GF,y}^2 + {}^I r_{GF,z}^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -{}^I r_{GF,z} \\ {}^I r_{GF,y} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \frac{1}{{}^I r_{GF,y}^2 + {}^I r_{GF,z}^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -{}^I \dot{r}_{GF,z} & {}^I \dot{r}_{GF,y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{[2 \cdot {}^I r_{GF,y} \cdot {}^I r_{GF,z} \quad -{}^I r_{GF,y}^2 + {}^I r_{GF,z}^2]}{({}^I r_{GF,y}^2 + {}^I r_{GF,z}^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & {}^I \dot{r}_{GF,y} & -{}^I \dot{r}_{GF,z} \\ 0 & {}^I \dot{r}_{GF,z} & {}^I \dot{r}_{GF,y} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4-210)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_5}{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}^T} \right) = \frac{{}^I r_{GF,x} \cdot {}^I \dot{r}_{GF,x}}{\left( {}^I r_{GF,z}^2 - {}^I r_{GF,x}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \mathbf{e}_x^T \quad (4-211)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I \dot{\mathbf{r}}_{GF}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) &= -{}^I \dot{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{\partial {}^I_3 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}^I \tilde{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_3 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \\ &\quad - {}^I \dot{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \frac{\partial {}^I_2 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} - {}^I \tilde{\mathbf{r}}_{CF} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I_2 \omega}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right). \end{aligned} \quad (4-212)$$

Für die **Restbeschleunigungen der Schwerpunkte** sind noch die zeitlichen Differentiale der partiellen Ableitungen nach (4-171) bis (4-176) erforderlich. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{01}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{02}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) - {}_I \dot{r}_{2H} \cdot \frac{\partial {}_I^2 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{2H} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^2 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right) \\ &\quad - {}_I \dot{r}_{H1} \cdot \frac{\partial {}_I^1 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{H1} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^1 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right), \end{aligned} \quad (4-213)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{02}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) &= - {}_I \dot{r}_{AC} \cdot \frac{\partial {}_I^3 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{AC} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^3 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right) \\ &\quad - {}_I \dot{r}_{C2} \cdot \frac{\partial {}_I^2 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{C2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^2 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right), \end{aligned} \quad (4-214)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{03}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) = - {}_I \dot{r}_{A3} \cdot \frac{\partial {}_I^3 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{A3} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^3 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right), \quad (4-215)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{04}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) = - {}_I \dot{r}_{E4} \cdot \frac{\partial {}_I^4 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{E4} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^4 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right), \quad (4-216)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{05}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) = - {}_I \dot{r}_{G5} \cdot \frac{\partial {}_I^5 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{G5} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^5 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right), \quad (4-217)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{06}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) = \mathbf{0}_{3 \times 11}. \quad (4-218)$$

Der entsprechende Term für die Berechnung des Beschleunigungsvektors von Punkt  $T$  folgt aus (4-178) und beträgt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{0T}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{01}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) - {}_I \dot{r}_{1T} \cdot \frac{\partial {}_I^1 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} - {}_I \tilde{r}_{1T} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I^1 \omega}{\partial \dot{y}_d^T} \right). \quad (4-219)$$

Der verallgemeinerte Beschleunigungsvektor des Punkts  $T$  kann damit nach der Formel

$$\mathbf{a} = \left[ {}_I \ddot{r}_{0T} \right] = \left[ \frac{\partial {}_I \dot{r}_{0T}}{\partial \dot{y}_d^T} \right] \cdot \ddot{y}_d + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{0T}}{\partial \dot{y}_d^T} \right) \right] \cdot \dot{y}_d \quad (4-220)$$

berechnet werden.

## Eingeprägte Kräfte und Momente

Auf die Modellierung der Kraftelemente und die eingeprägten Kräfte und Momente wird hier nicht im Detail eingegangen. Sowohl MKS- als auch analytisches Modell der Radaufhängung enthalten

- einen Stoßdämpfer mit nichtlinearer Dämpfung (Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie) sowie nichtlinearen Zug- und Druckpuffern (Kraft-Weg-Kennlinien),
- eine gegenüber dem Stoßdämpfer leicht verschobene und schräg gestellte Aufbaufe der mit linearer Charakteristik,
- insgesamt drei Elastomerlager (zwei Querlenkerlager sowie das Federbeinstützlager) mit jeweils sechs Kraft-Weg-Kennlinien und sechs konstanten Dämpfungen,

- eine konstante Lenksteifigkeit und -dämpfung.

Für die Berechnung der Elastomerlagerkräfte wird darüber hinaus die relative Verdrehung der Elastomerlagerachsen gegenüber den zwei über das Lager verbundenen Körpern berücksichtigt. Je Lager kann diese Angabe bspw. über drei Winkelangaben je verbundenem Körper erfolgen.

### 4.3.2 Resultierende Modellgleichungen

Aufbauend auf den im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen können die Jacobimatrizen der Körper

$$\mathbf{J}_{Ti} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0i}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{J}_{Ri} = \frac{\partial {}_I^{II} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Ti} \\ \mathbf{J}_{Ri} \end{bmatrix} \quad (4-221)$$

gebildet und damit auch die Massenmatrix  $\mathbf{M}_u(\mathbf{y}_d)$  nach (A2-14), die Zentrifugal- und Coriolismatrix  $\mathbf{C}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)$  nach (A2-17) und die verallgemeinerten Gewichtskräfte  $\mathbf{g}_u(\mathbf{y}_d)$  nach (A2-22) berechnet werden. Wie schon beim Hexapodmodell werden hier bei der Berechnung von  $\mathbf{C}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)$  abweichend von (A2-18) die Elemente  $\mathbf{C}_{u,i}(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)$  analog zu (4-51) gebildet.

Die resultierenden Bewegungsgleichungen des 11-FHG-Radaufhängungsmodells lauten

$$\mathbf{M}_u(\mathbf{y}_d) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{n}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) = \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (4-222)$$

wobei die Nomenklatur des Umgebungsmodells (2-78) aus dem Stand von Technik und Forschung übernommen wurde. In dieser Gleichung ist  $\mathbf{S}_{yd}$  die Jacobimatrix des Punktes  $T$  mit

$$\mathbf{S}_{yd} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{TT} \\ \mathbf{J}_{RT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{TT} = \frac{\partial {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}, \quad \mathbf{J}_{RT} = \frac{\partial {}_I^{II} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T}. \quad (4-223)$$

$\boldsymbol{\tau}$  bezeichnet die im Punkt  $T$  angreifenden Kräfte und Momente, die die Eingangsgröße des Systems darstellen. Nach dem Vorbild des Umgebungsmodells nach (2-78) werden dabei die verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräfte, die verallgemeinerten Gewichtskräfte sowie alle eingeprägten Kräfte und Momente mit Ausnahme der im Punkt  $T$  angreifenden Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  in dem Term  $\mathbf{n}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)$  zusammengefasst.

Die Zustandsgleichungen des Radaufhängungsmodells mit  $\mathbf{x}_d = [\mathbf{y}_d^T \quad \dot{\mathbf{y}}_d^T]^T$  lauten

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d \\ -\mathbf{M}_u^{-1}(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{n}_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) \end{bmatrix}}_{f_u(\mathbf{x}_d)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_u^{-1}(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d) \end{bmatrix}}_{G_u(\mathbf{x}_d)} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (4-224)$$

Über die bei den eingeprägten Kräften und Momenten genannten Parameter hinaus sind für die Auswertung dieser Gleichungen die kartesischen Koordinaten von insgesamt 15 Punkten im Raum, die konstante Drehmatrix  ${}^{210}A$ , vgl. (4-109), die Anfangsbedingungen der Zustandsgrößen  $\mathbf{y}_d$  und  $\dot{\mathbf{y}}_d$  sowie die Massen und Trägheitstensoren der sechs Starrkörper erforderlich.

Die Parametrisierung dieses Modells ohne Vorliegen spezifischer Herstellerinformationen gestaltet sich aufgrund der Vielzahl an Modellparametern schwierig. Für das Federbein wurden vor Einbau der Achse in den Prüfstand eindimensionale Modelle erstellt und mithilfe von Prüfstandsmessungen identifiziert. Die zugehörigen Arbeiten wurden durch Frederik Ikemeyer im Rahmen seiner Studienarbeit [IK15] durchgeführt. Darüber hinaus wurden die für die Kinematik relevanten Raumkoordinaten der 15 Punkte näherungsweise gemessen und mit einer nichtlinearen Optimierung verbessert, vgl. auch [KOT<sup>+</sup>17]. Für die Elastomerlager verwendet das Modell die Parameter einer ähnlichen Fahrzeugachse. Infolgedessen verhält sich die Radaufhängung im Simulationsmodell nur näherungsweise wie das reale Gegenstück. Dies lässt sich bspw. durch das Aufprägen eines am Prüfstand gemessenen Last-Zeit-Verlaufs auf das Simulationsmodell zeigen.

Die Identifikation der Elastomerlager sowie die Feinabstimmung aller weiteren Modellparameter ist mit einem hohen Zeit- und Kostenaufwand verbunden und bietet viel Potenzial für weitere Arbeiten. In diesem Zusammenhang ist eine zukünftige enge Zusammenarbeit mit Automobilherstellern und -zulieferern von Vorteil.

Aus dem dokumentierten Modell mit elf FHG lassen sich leicht einfache Modelle mit weniger FHG erstellen. Hierfür müssen die zu den gesperrten FHG gehörenden Terme aus (4-222) gestrichen werden. Je gesperrtem FGH entfällt eine Bewegungsdifferentiagleichung. Die FHG  $d_F$  sowie  $x_L$  (außer bei blockierter Lenkung) und  $\psi$  (außer bei festgebremstem Rad) müssen jedoch stets beibehalten werden.

### 4.3.3 Modellvalidierung anhand des MKS-Radaufhängungsmodells

Die Modellvalidierung des hergeleiteten Radaufhängungsmodells muss nicht wie bei dem Hexapod durch Abgleich der Systemzustände zwischen dem MKS-Referenzmodell und dem damit zu vergleichenden Modell erfolgen (vgl. Bild 4-6). Bei Modellvergleichen kann bekanntermaßen schon infolge kleinsten Abweichungen prinzipiell eine Drift entstehen. Hier ist dies nicht der Fall, denn die vorliegenden Kraftelemente bewirken, dass keine nennenswerte Drift zwischen den beiden Modellen entsteht. Die Modelle lassen sich durch Vorgabe identischer Eingangsgrößen  $\tau$  vergleichen. Nur der FGH  $\psi$  wird zum Zweck des Modellvergleichs sowohl im MKS-Referenzmodell, das nachfolgend das Kürzel  $\Sigma_{AR}$  erhält, als auch im damit verglichenen Modell nach den vorangegangenen Herleitungen eliminiert.

Die Beurteilung der Modellgüte erfolgt wieder anhand zweier Manöver:

- einer Abfolge von Kraftsprüngen analog zu den Positionssprüngen in Bild 4-7,
- der Schlechtweganregung.

Für beide Manöver zeigt Bild 4-11 den Vergleich der bereits für Bild 4-8 verwendeten Gütemaße, d. h. den RMS der Abweichung zwischen der Beschleunigung der Referenz  $\Sigma_{AR}$  und den betrachteten Modellierungsvarianten bezogen auf den RMS der Beschleunigung von  $\Sigma_{AR}$ . Das einfachste mit  $\Sigma_{AR}$  verglichene Modell weist nur die FHG  $d_F$  und  $x_L$  auf. Ausgehend von dieser Minimalauswahl an FHG wurden die Gütemaße aller möglichen FHG-Kombinationen berechnet (Ausnahme: FGH  $\psi$ ). Insgesamt ergeben sich so 256 mögliche FHG-Kombinationen und durchzuführende Simulationen. In Bild 4-11 ist für eine bestimmte Anzahl an Modell-FHG immer die beste unter allen Alternativen eingetragen.

Als beste wird diejenige Alternative angesehen, für die die Summe der sechs einzelnen Gütwerte minimal ist. Das Referenzmodell  $\Sigma_{AR}$  entspricht stets dem unvereinfachten, alle Details umfassenden Modell der Einzelradaufhängung. Da hier nur die Einzelradaufhängung in isolierter Form betrachtet wird, enthält das Modell keinen Stabilisator. Grundsätzlich ließe sich auch untersuchen, ob einzelne Starrkörper bzw. deren Masse und Trägheit vernachlässigt werden können. Vorstellbar ist dies bspw. für die Spur-, Lenk- und Dämpferstange. An dieser Stelle wird der Einfluss dieser Parameter nicht untersucht; bei allen Simulationen waren stets alle sechs Starrkörper massebehaftet. Darüber hinaus kann es sinnvoll sein, die für die Berechnung der eingeprägten Kräfte und Momente erforderlichen Kraftelemente bei Wegfall bestimmter FHG zu modifizieren. Ein derartiger Versuch wurde bspw. in der Studienarbeit von Udo Nolte [NK17] für das Modell mit den FHG  $\varphi^{13}$ ,  $x_L$ ,  $\kappa_z$  und  $\psi$  unternommen und es konnte gezeigt werden, dass die Modifikation der Kraftelemente eine Verbesserung der Modellqualität herbeiführen kann. Aufgrund des damit verbundenen hohen Aufwands erfolgt hier keine Anpassung der Kraftelemente; es werden stets die für das 11-FHG-Modell zutreffenden Kraftelemente in unveränderter Form verwendet.

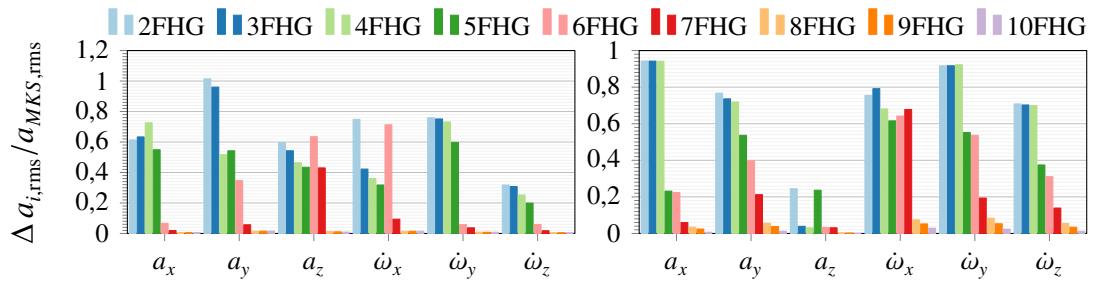


Bild 4-11: Modellgüte in Abhängigkeit der Modell-FHG bei Rechtekanregung (links) und Schlechtweganregung (rechts)

Aus Bild 4-11 geht hervor, dass die Modellgüte bei beiden betrachteten Anregungssituationen ab acht FHG relativ betrachtet sehr hoch ist, bei nur bis zu 4 FHG hingegen relativ schlecht. Dazwischen ergibt sich ein gemischtes Bild. Dies begründet sich damit, dass durch das Hinzufügen eines spezifischen FHG die Modellgüte in einer Richtung zwar steigen kann, sie sich dabei gleichzeitig in einer anderen Richtung aber auch wieder verringern kann. Eine eindeutige allgemeine Aussage wie bei dem Modell des Hexapod ist hier nicht möglich.

Aufgrund der Vielzahl möglicher FHG-Kombinationen kann die Güte für alle erdenklichen Modelle nur unter erheblichem Zeitaufwand verglichen werden. Für die folgenden Vergleiche werden zwei spezifische Konfigurationen ausgewählt und untersucht. Dies sind

- $\Sigma_{A3}$ : Radaufhängungsmodell mit den FHG  $\varphi$ ,  $x_L$  und  $\kappa_z$  nach [Ril94] und
- $\Sigma_{A10}$ : Radaufhängungsmodell mit allen FHG nach Abschnitt 4.3.1 außer  $\psi$ .

Bei beiden Modellen werden nachfolgend die Massen und Trägheiten aller sechs Starrkörper berücksichtigt. Das Modell  $\Sigma_{A3}$  unterscheidet sich daher von der Modellierung  $\Sigma_{A10}$

<sup>13</sup>Für die Beschreibung der Einfederung wurde anstelle des Dämpferwegs  $d_F$  in [NK17] noch die Querlenkerdrehung  $\varphi$  wie auch in [Ril94] verwendet.

im Wesentlichen dadurch, dass die Elastomerlager nur in recht einfacher Form durch den FHG  $\kappa_z$  Berücksichtigung finden.

Bild 4-12 zeigt die sich infolge der Kraftsprungabfolge ergebenden Positions- bzw. Drehwinkel-Zeitverläufe des Radträgers. Die Anregung erfolgt isoliert in einer einzelnen Richtung über jeweils 0,2 s (vgl. Bild 4-7), wobei hier Kraft- bzw. Drehmomentvorgaben anstelle Positions- bzw. Winkelvorgaben verwendet werden.

Das Referenzmodell  $\Sigma_{AR}$  zeigt ein deutlich nichtlineares Verhalten. Bei Kraftanregung einer isolierten Richtung bewegt sich der Radträger nicht nur in dieser Richtung, sondern auch mehr oder weniger stark in den anderen Richtungen. Beispielsweise hat die Anregung in den relativ elastischen Richtungen (z. B.  $r_z$ -Richtung für  $t = 0,4 - 0,6$  s und  $\gamma$ -Richtung  $t = 1 - 1,2$  s) eine verhältnismäßig große Bewegung des Radträgers in allen Richtungen zur Folge.

Während der Zeitverlauf von  $\Sigma_{A10}$  keine sichtbaren Abweichungen zur Referenz  $\Sigma_{AR}$  aufweist, zeigen die Berechnungen des Modells  $\Sigma_{A3}$  hierzu deutliche Unterschiede. So gehen hochfrequente Signalanteile verloren. Das Modell reagiert mit deutlich stärkerer Dämpfung auf die Anregung. Außerdem wird der Radträger bei Anregung in einer spezifischen Richtung teils geringer in dieser Richtung ausgelenkt, siehe z. B. die Richtungen  $r_y$  ( $t = 0,2 - 0,4$  s),  $\alpha$  ( $t = 0,6 - 0,8$  s) und  $\beta$  ( $t = 0,8 - 1$  s). Auch die Wechselwirkung zwischen den Richtungen wird schlechter abgebildet, siehe z. B. die  $r_y$ -Richtung bei Anregung in  $r_x$  ( $t = 0 - 0,2$  s),  $\beta$  ( $t = 0,8 - 1$  s) und  $\gamma$  ( $t = 1 - 1,2$  s). Das Modell  $\Sigma_{A3}$  bildet die Referenz zwar nicht so gut ab wie das Modell  $\Sigma_{A10}$ , die Abweichungen zur Referenz sind absolut betrachtet aber recht gering. Von Vorteil ist, dass das Modell durch die vereinfachte Modellierung der Elastomerlager weniger Zustandsgrößen besitzt und die Modellgleichungen einfacher sind.

Bild 4-13 zeigt die entsprechenden Zeitverläufe für die Schlechtweganregung. Dargestellt ist ein 1 s umfassender Ausschnitt aus dem eigentlichen Target-Signal. Der Radträger bewegt sich infolge des Last-Zeit-Verlaufs dort besonders stark. Beispielsweise finden in vertikaler Richtung  $r_z$  mehrere Wechsel von etwa 1050 mm auf etwa 1170 mm statt.

Das Modell  $\Sigma_{A10}$  weist wiederum keine sichtbaren Abweichungen zur Referenz  $\Sigma_{AR}$  auf.  $\Sigma_{A3}$  bildet die Richtungen  $r_y$ ,  $r_z$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  gut ab. Deutlichere Abweichungen liegen in den Richtungen  $r_x$  und  $\gamma$  vor. Die Abweichungen zu dem zehn FHG umfassenden Modell  $\Sigma_{A10}$  sind bei dieser Anregungssituation weniger signifikant als bei der Sprungabfolge in Bild 4-12.

Die Vernachlässigung der Restbeschleunigungen hat bei Betrachtung der Positions- und Drehwinkel-Zeitverläufe des Punktes  $T$  für beide Modelle  $\Sigma_{A3}$  und  $\Sigma_{A10}$  nur sehr geringe Konsequenzen. Werden die beiden sich dabei ergebenden Zeitverläufe zusätzlich in die Bilder 4-12 und 4-13 aufgenommen, so ist nur vereinzelt ein minimaler Unterschied zu den jeweiligen Modellen mit berechneten Restbeschleunigungen erkennbar. Die Zeitverläufe sind weitgehend deckungsgleich. Angesichts des hohen Herleitungsaufwands für diese Terme und den nur geringen Unterschieden in den Positions- und Drehwinkel-Zeitverläufen scheint die Vernachlässigung durchaus sinnvoll zu sein.

Zum Abschluss wird an dieser Stelle noch die Kohärenz nach (2-13) für die translatorischen und rotatorischen Beschleunigungen über die gesamte Schlechtweganregung (nicht nur den oben gezeigten Ausschnitt) berechnet und zwischen den Modellen verglichen. Die

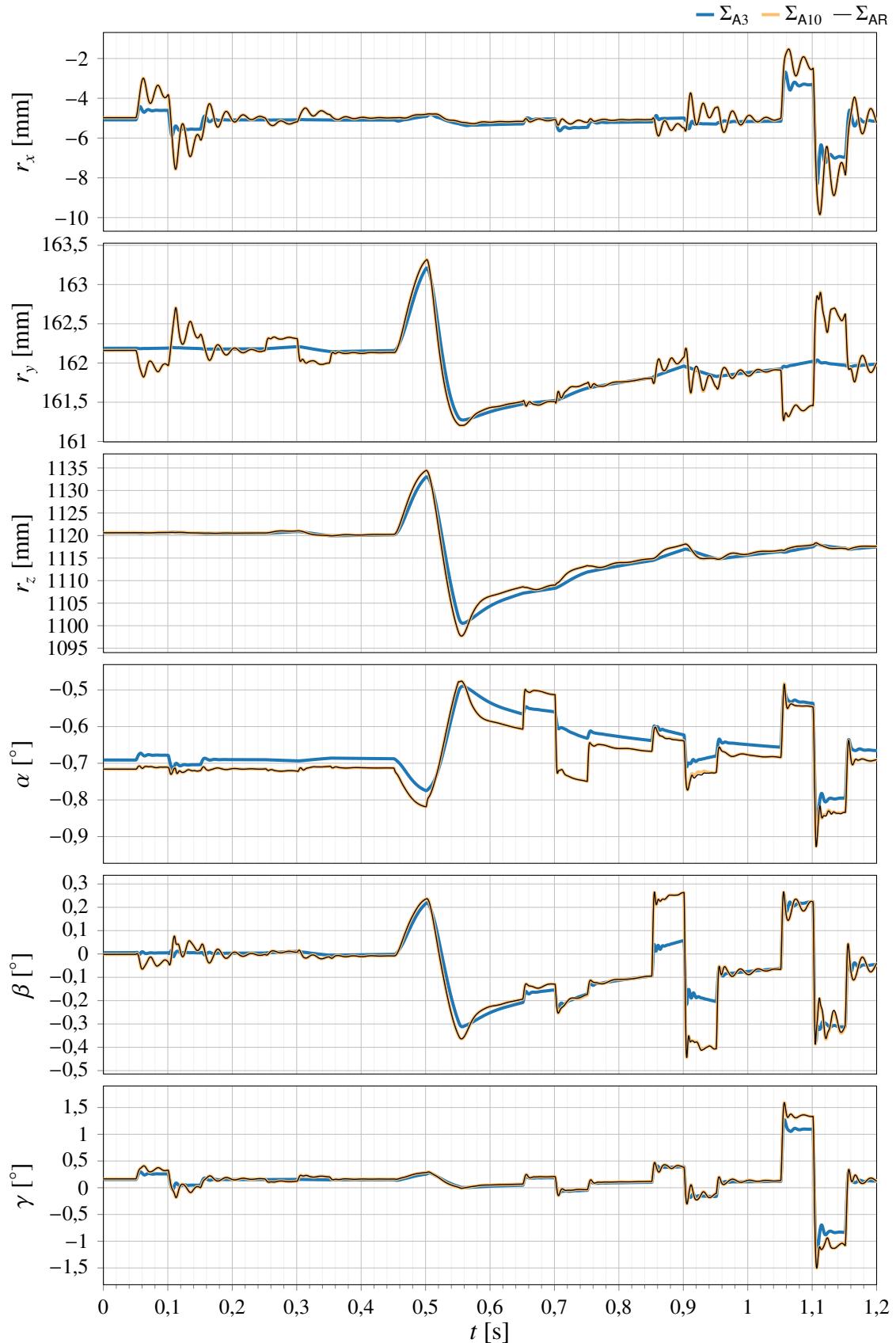


Bild 4-12: Zeitverlauf der kartesischen Koordinaten (Punkt T) und der Kardanwinkel des Radträgers bei sequentieller Kraftrechteckanregung

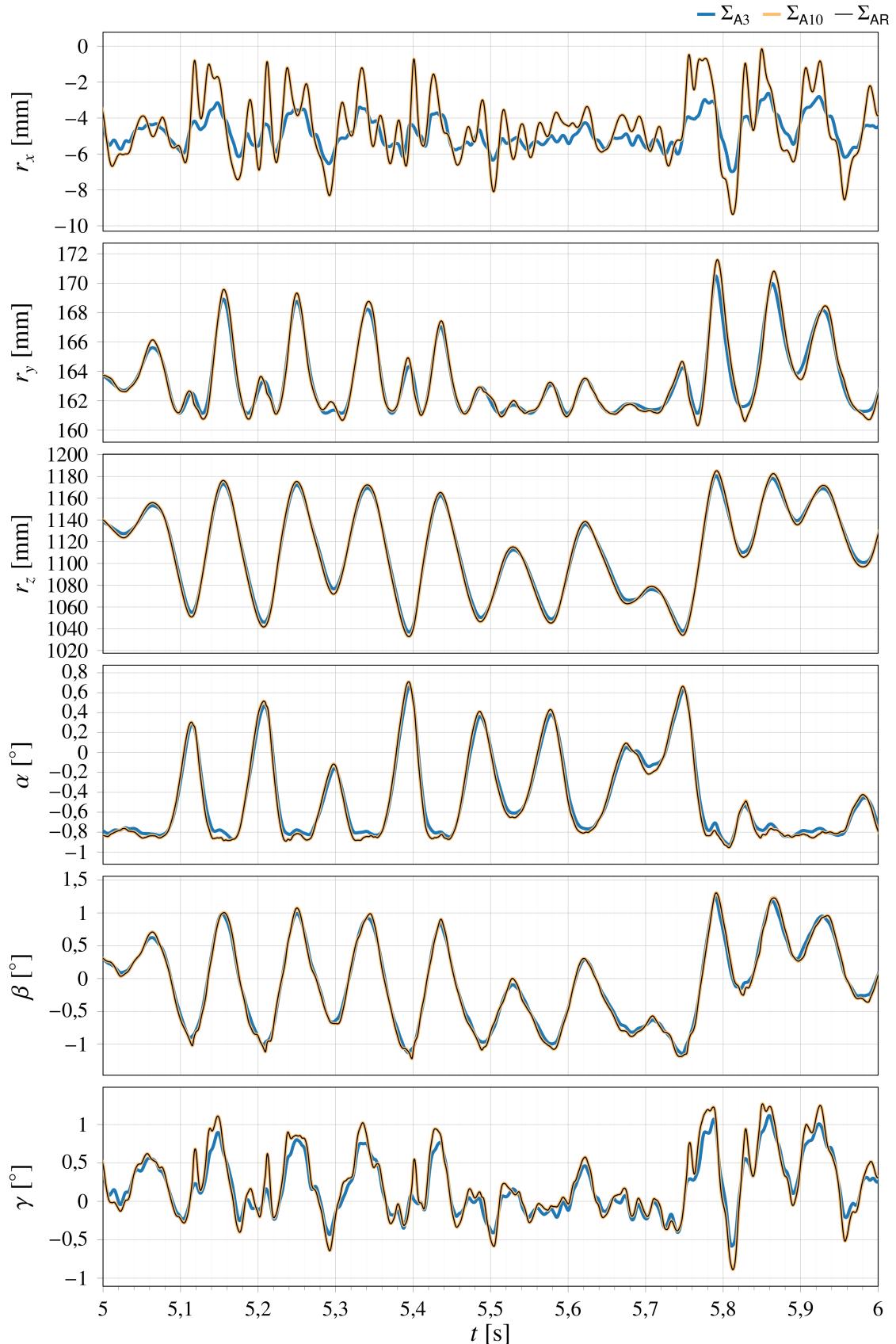


Bild 4-13: Zeitverlauf der kartesischen Koordinaten (Punkt T) und der Kardanwinkel des Radträgers bei der Schlechtweganregung

Kohärenz wird stets in Bezug zur Referenz  $\Sigma_{AR}$  angegeben. Ein ideales Modell liegt vor, wenn die Kohärenz über das gesamte Frequenzband 1 beträgt. Je niedriger die Kohärenz für eine Frequenz, desto schlechter gibt das betrachtete Modell die Referenz für diese Frequenz wieder. Bild 4-14 zeigt das Ergebnis der Berechnungen. Es enthält auch die Kohärenzen für die Modelle mit vernachlässigten Restbeschleunigungen (Kürzel  $\Sigma_{A3}^*$  und  $\Sigma_{A10}^*$ ).

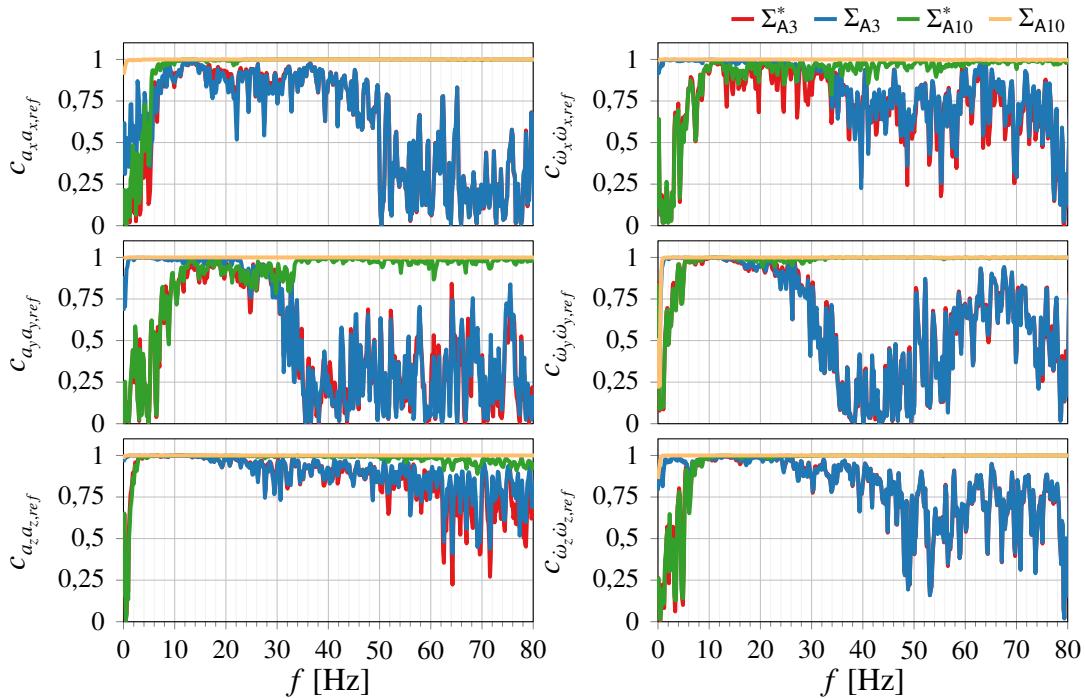


Bild 4-14: Kohärenz von Referenz- und berechneter Beschleunigung des Radträgers bei Schlechtweganregung (links: Translation, rechts: Rotation)

Das Modell  $\Sigma_{A10}$  besitzt nahezu in allen FHG über alle Frequenzen eine Kohärenz von 1. Nur bei sehr kleinen Frequenzen liegen Abweichungen vor. Die Ursache hierfür können minimale, konstante Offsets der Beschleunigungen zur Referenz  $\Sigma_{AR}$  sein. Auf eine Fensterung der Messdaten vor Berechnung der Kohärenz, die diese Abweichung ebenfalls reduzieren könnte, wurde bewusst verzichtet.  $\Sigma_{A3}$  besitzt eine hohe Modellgüte bis etwa 30 Hz. Darüber nimmt sie vor allem in den Richtungen  $r_x$ ,  $r_y$  und  $\beta$  ab. Die Bedeutung der Elastomerlager ist in diesen Richtungen am größten. Die vertikale Richtung, für die die Elastomerlager verhältnismäßig unbedeutend sind, wird auch durch das Modell  $\Sigma_{A3}$  recht gut abgebildet, wobei auch hier eine Reduktion der Modellgüte mit steigender Frequenz zu beobachten ist. Anhand des Plots ist auch die Auswirkung der Restbeschleunigungen offensichtlich. So liegt eine deutlich höhere Güte für Frequenzen bis etwa 10 Hz bei Berechnung der Restbeschleunigungen vor. Darüber hinaus sind die Unterschiede zwischen den Modellen mit und ohne Berechnung der Restbeschleunigungen deutlich weniger ausgeprägt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das entwickelte Modell der MacPherson-Radaufhängung mit sechs Starrkörpern und insgesamt acht FHG zur Berücksichtigung der Elastomerlager eine sehr hohe Modellgüte besitzt und das detaillierte MKS-Modell nahezu ideal abbildet. Die Positions- und Drehwinkel-Zeitverläufe des Radträgers weisen

für die betrachteten Beispieldurchführungen keine sichtbaren Abweichungen zur Referenz auf. Bei Berücksichtigung der Restbeschleunigungen ist auch die Kohärenz der Beschleunigungen in sämtlichen Richtungen für alle Frequenzen nahezu ideal 1. Durch die geschickte Wahl der Minimalkoordinaten besteht die Möglichkeit, das Modell auf die betrachtete Anwendung durch Auswahl der relevanten FHG zuzuschneiden. Das Modell besitzt einen erheblichen Mehrwert gegenüber den bisher dokumentierten Modellen, vgl. Abschnitt 2.3.2. Im Vergleich weist es eine **höhere Genauigkeit** sowie eine wesentlich **bessere Frequenzabdeckung** auf. Dies begründet sich damit, dass die Querlenkerlager sowie das Federbeinstützlager durch die hinzugefügten FHG besser im Modell berücksichtigt werden. Insbesondere die Beschleunigungen werden hierdurch deutlich besser abgebildet. Aufgrund der engen Verknüpfung mit den Kräften ist zu erwarten, dass sich dies auch beim Kraftregelungsentwurf bemerkbar macht. Insbesondere im niedrigen Frequenzbereich ist die allein für dieses Modell durchgeführte Berechnung der Restbeschleunigungen vorteilhaft; sie hat eine wesentlich höhere Modellqualität zur Folge. Nachteilig ist der höhere Aufwand zur Parametrierung der hinzugekommenen Kraftelemente. Außerdem weist das Modell einen höheren Rechenaufwand auf. Für moderne Rechnerhardware ist aber auch die Berechnung des Modells mit elf FHG unter Echtzeitbedingungen problemlos möglich.

Jedes Modell stellt eine mehr oder weniger starke Vereinfachung der Realität dar. Auch das hier zugrunde gelegte MKS-Referenzmodell besitzt diverse Vereinfachungen, z. B. werden sämtliche Körper als starr betrachtet und die Elastomerlager verhältnismäßig einfach mit Kennlinien modelliert. Sobald ein hinreichender Parametersatz vorliegt, kann eine Validierung mithilfe von Prüfstandsmessungen erfolgen. Bisher dokumentierte Vergleiche zwischen MKS-Modellen und Fahrversuchen, wie sie auch in Abschnitt 2.3.1 genannt wurden, lassen bei hoher Parametergüte jedoch eine sehr hohe Modellqualität erwarten.

Die Bewegungsgleichungen eines zweidimensionalen MacPherson-Radaufhängungsmodells, das von diesem räumlichen Modell abgeleitet wurde, befindet sich in Anhang A5.4. Das Modell weist fünf FHG auf, von denen vier FHG der Berücksichtigung der Lagerelastizitäten von Federbeinstützlager und Querlenkerlager dienen. Es erweitert ebenfalls den bisherigen Stand von Technik und Forschung für die zweidimensionale Modellierung dieses Radaufhängungstyps, vgl. Abschnitt 2.3.2.

## 4.4 Kopplung der Teilmodelle zum Gesamtsystemmodell

In diesem Abschnitt werden die beiden Teilmobile für den Hexapod und die Radaufhängung zu einem Modell kombiniert. Es bestehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Bildung des Gesamtmodells aus den Teilmobilen nach Abschnitt 4.2 und 4.3, die sich aus der Betrachtung bzw. Modellierung des Kraftmessrades ergeben. Es ist naheliegend, das Kraftmessrad als dynamische Bindung des Endeffektors und der Radnabe (z. B. mit definierter Steifigkeit und Dämpfung) aufzufassen. Aufgrund ihrer sehr hohen Steifigkeit kann sie alternativ als ideal starre Bindung der beiden Körper abstrahiert werden. Im Folgenden werden beide Modellierungsvarianten angegeben. In Abschnitt 4.4.1 wird die ideal starre Bindung betrachtet, in Abschnitt 4.4.2 die dynamische Bindung.

Die Modelle sind stets in Minimalkoordinaten angegeben, da diese Form für den darauf folgenden Regelungsentwurf zweckmäßig ist. Grundsätzlich können beide Modellvari-

antnen auch durch differential-algebraische Gleichungssysteme bzw. Deskriptor-Systeme beschrieben werden.

#### 4.4.1 Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe

Die Topologie des resultierenden Gesamtsystems für den Fall der starren Bindung und den mit 13 Starrkörpern modellierten Hexapod zeigt Bild 4-15.

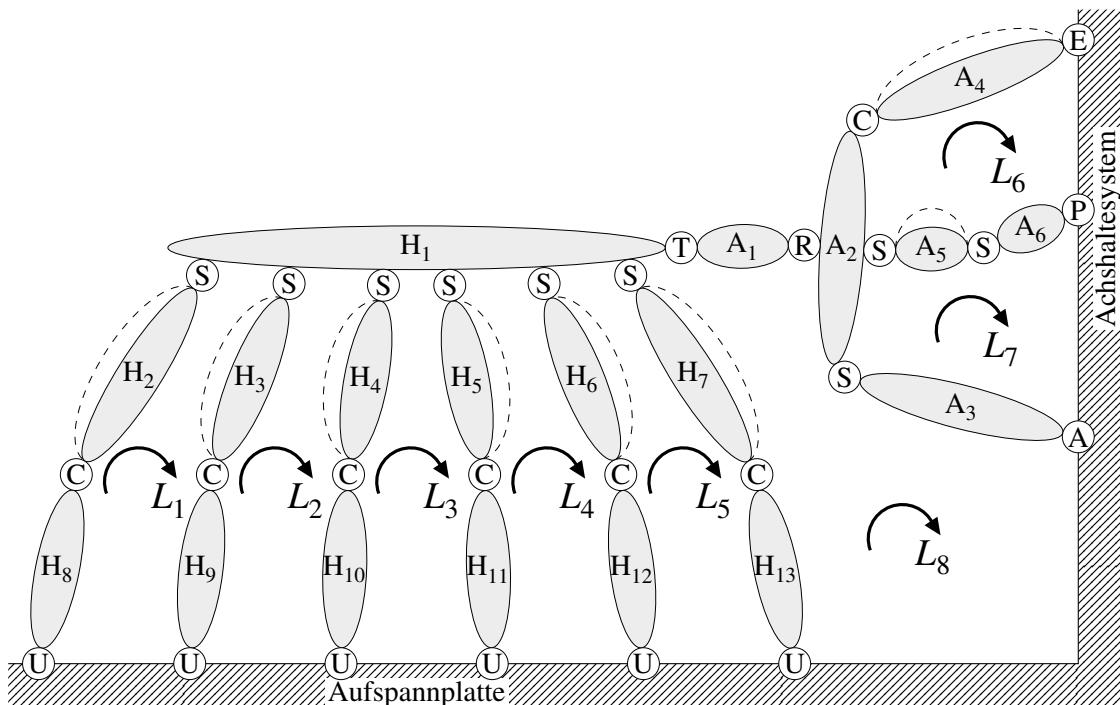


Bild 4-15: Topologische Struktur des Gesamtmodells aus Hexapod und Radaufhängung bei Modellierung des Kraftmessrades als ideal starre Bindung

Sie entspricht der Topologie der Teilsysteme nach den Bildern 4-3 und 4-10, die über das Gelenk  $T$  gekoppelt sind. Dieses Gelenk repräsentiert das Kraftmessrad und hat  $n_Z = 6$  Zwangsbedingungen zur Folge. Die Starrkörper entsprechen denen der Teilmodelltopologien, wobei der Körper  $A_1$  neben der Radnabe auch den radnabenseitigen Teil des Kraftmessrades sowie das notwendige Adapterstück zur Verbindung der beiden Teile einschließt. Der Körper  $H_1$  besteht aus dem Endeffektor des Hexapod sowie dem hexapodseitigen Teil des Kraftmessrades. Die Bezeichnungen „Radnabe“ und „Endeffektor“ werden im Folgenden beibehalten. Insgesamt besitzt das Gesamtsystem bei starrer Bindung  $n_K = 13 + 6 = 19$  Starrkörper sowie  $n_G = 18 + 8 + 1 = 27$  Gelenke. In diesem Fall liegen  $n_Z = 66 + (23 \dots 31) + 6 = 95 \dots 103$  Zwangsbedingungen vor. Das Mehrkörpersystem besitzt demnach, wie bereits in Bild 4-15 dargestellt, insgesamt  $n_L = 8$  kinematische Schleifen und weist je nach FHG-Auswahl im Radaufhängungsmodell  $f = 3 \dots 11$  FHG auf. Die Körper  $H_1$  und  $A_1$  lassen sich theoretisch aufgrund der starren Verbindung zu einem einzelnen Körper zusammenfassen. An den ermittelten Werten für  $n_L$  und  $f$  ändert sich dadurch nichts.

Im Falle der starren Bindung muss die Bewegung des Endeffektors die Zwangsbedingungen der Radaufhängung erfüllen. Es ist naheliegend, die Minimalkoordinaten des Radaufhängungsmodells für das Gesamtmodell zu übernehmen, d. h.

$$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} d_F & x_L & \psi & x_A & y_A & z_A & x_E & y_E & z_E & \kappa_y & \kappa_z \end{bmatrix}^T. \quad (4-225)$$

Die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems lassen sich aus denen der Teilsysteme nach (4-74) und (4-222) bilden. Der Punkt  $T$  der Radaufhängung wurde so festgelegt, dass er (bei der starren Bindung) dem TCP des Hexapod entspricht. Aufgrund der starren Bindung von Radnabe und Endeffektor gilt außerdem, dass  ${}^{IE}\mathbf{A} = {}^{II}\mathbf{A}$ . Zwischen den Minimalkoordinaten des Radaufhängungsmodells und dem Ortsvektor sowie der Orientierung des Punktes  $T$  bestehen die Beziehungen

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{r}_{0T} \\ \boldsymbol{\alpha}_{XYZ}({}^{II}\mathbf{A}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{S}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_{yd} \ddot{\mathbf{y}}_d + \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d \quad (4-226)$$

mit

$$\dot{\mathbf{S}}_{yd} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^I\mathbf{r}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}^{II}\mathbf{A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_d^T} \right) \end{bmatrix}, \quad (4-227)$$

vgl. Abschnitt 4.3. Wird  $\dot{\mathbf{v}}$  in (4-74) eingesetzt und die resultierende Gleichung nach  $\boldsymbol{\tau}$  aufgelöst, so folgt

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{M}_v \cdot \mathbf{S}_{yd} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{M}_v \cdot \dot{\mathbf{S}}_{yd} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{C}_v \cdot \mathbf{v} - \mathbf{g}_v + \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q. \quad (4-228)$$

Durch Einsetzen von  $\boldsymbol{\tau}$  in (4-222) resultiert die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems zu

$$\mathbf{M}_G(\mathbf{y}_d) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{n}_G(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) = \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{J}_g^{-T}(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{F}_q \quad (4-229)$$

mit

$$\mathbf{M}_G(\mathbf{y}_d) = \mathbf{M}_u + \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{S}_{yd}, \quad (4-230)$$

$$\mathbf{n}_G(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) = \mathbf{n}_u + \mathbf{S}_{yd}^T \cdot (\mathbf{M}_v \cdot \dot{\mathbf{S}}_{yd} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{C}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v). \quad (4-231)$$

Anstelle der Eingangsgröße  $\boldsymbol{\tau}$  (vgl. Modell der Radaufhängung) besitzt das Modell des Gesamtsystems die Eingangsgröße  $\mathbf{F}_q$ . Für die Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  zwischen den Körpern  $H_1$  und  $A_1$  lässt sich durch Auflösen von (4-229) nach  $\ddot{\mathbf{y}}_d$ ,

$$\ddot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{M}_G^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q - \mathbf{n}_G), \quad (4-232)$$

und Einsetzen der erhaltenen Gleichung in (4-228) der Ausdruck

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E}_\tau \mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q + \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{n}_G - \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{C}_v \mathbf{v} - \mathbf{g}_v \quad (4-233)$$

$$= \mathbf{E}_\tau (\mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{C}_v \mathbf{v} - \mathbf{g}_v) + \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{n}_u \quad (4-234)$$

mit

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{I} - \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \quad (4-235)$$

bestimmen. Es lässt sich weiterhin zeigen, dass auch der Term  $\mathbf{n}_u$  in die Klammer aufgenommen werden kann. Die Bestimmungsgleichung für  $\tau$  lautet damit

$$\tau = \mathbf{E}_\tau \left( \mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q + \mathbf{M}_v \left( \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{n}_u - \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d \right) - \mathbf{C}_v \mathbf{v} - \mathbf{g}_v \right). \quad (4-236)$$

Da  $\mathbf{E}_\tau \mathbf{J}_g^{-T} \neq \mathbf{0}$  ist, gilt  $\tau = \tau(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, \mathbf{F}_q)$ . Wie im Falle der starren Bindung zu erwarten war, liegt bei Betrachtung von  $\tau$  als Ausgangsgröße also ein Durchgriff vor, d. h. die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  hängen nicht nur vom Systemzustand, sondern auch direkt von der Eingangsgröße des Systems  $\mathbf{F}_q$  ab.

Das Gesamtmodell mit starrer Bindung von Endeffektor und Radnabe besitzt die Zustands-Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_{Gs} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d \\ -\mathbf{M}_G^{-1}(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{n}_G(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d) \end{bmatrix}}_{f_{Gs}(\mathbf{x}_{Gs})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_G^{-1}(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d) \cdot \mathbf{J}_g^{-T}(\mathbf{y}_d) \end{bmatrix}}_{G_{Gs}(\mathbf{x}_{Gs})} \cdot \mathbf{F}_q \quad (4-237)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{Gs} = [\mathbf{y}_d^T \quad \dot{\mathbf{y}}_d^T]^T$ .

Gegenüber den einzelnen Modellen für den Hexapod und die MacPherson-Radaufhängung kommen bei diesem Gesamtsystemmodell keine weiteren Parameter hinzu.

#### 4.4.2 Dynamische Bindung von Endeffektor und Radnabe

Wird das Kraftmessrad als dynamische Bindung modelliert, so entfällt in Bild 4-15 das Gelenk  $T$ . Endeffektor und Radnabe können sich relativ zueinander bewegen; die Kopplung erfolgt in diesem Fall nur über die Bindungskräfte, d. h. die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$ . Durch den Wegfall des Gelenks  $T$  mit  $n_Z = 6$  Zwangsbedingungen reduziert sich bei dieser Modellierung die Zahl der kinematischen Schleifen um 1 (die Schleife  $L_8$  in Bild 4-15 entfällt) auf  $n_L = 7$  und die Anzahl der FHG erhöht sich um 6 auf  $f = 9 \dots 17$ . Als Minimalkoordinaten des Modells mit 17 FHG kommt bspw. die Kombination der Minimalkoordinaten beider Teilsysteme in Betracht, d. h.

$$\mathbf{y}_{Gd} = [\mathbf{y}_d^T \quad \mathbf{z}^T]^T. \quad (4-238)$$

Ein geeigneter Zustandsvektor ist

$$\mathbf{x}_{Gd} = [\mathbf{y}_{Gd}^T \quad \dot{\mathbf{y}}_{Gd}^T]^T. \quad (4-239)$$

Bild 4-16 zeigt schematisch die dynamische Bindung von Endeffektor und Radträger.

Hier sind die Drehmatrizen  ${}^{IE}\mathbf{A}$  und  ${}^{I1}\mathbf{A}$  von Endeffektor und Radnabe im Allgemeinen nicht identisch. Darüber hinaus weichen der endeffektorfeste sowie der radnabenfeste Kontaktpunkt  $T$  voneinander ab. Zur Unterscheidung erhält der radnabenfeste Kontaktpunkt im Folgenden den Bezeichner  $T_1$ .

Die Drehmatrix vom radnaben- in das endeffektorfeste System berechnet sich nach

$${}^{E1}\mathbf{A} = {}^{EI}\mathbf{A} \cdot {}^{I1}\mathbf{A} \quad (4-240)$$

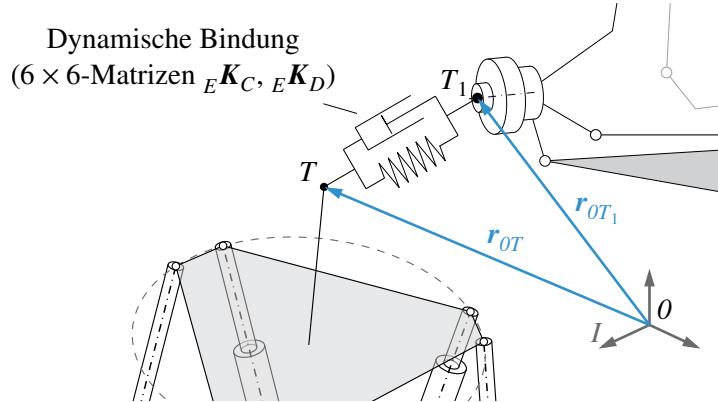


Bild 4-16: 6-FHG-Kontaktmodell

mit den Kardanwinkeln

$$\alpha_K = \alpha_{XYZ} \left( {}^{E1} A \right) \quad (4-241)$$

der relativen Verdrehung der Systeme  $E$  und 1. Die relative Verschiebung der beiden in Kontakt stehenden Punkte  $T$  und  $T_1$  bezüglich des Inertialsystems  $I$  beträgt

$${}_I \xi = {}_I \mathbf{r}_{TT_1} = {}_I \mathbf{r}_{0T_1} - {}_I \mathbf{r}_{0T}, \quad (4-242)$$

für die Relativgeschwindigkeit  ${}_I \dot{\xi}$  und die Relativwinkelgeschwindigkeit  ${}_I \omega$  gilt

$${}_I \dot{\xi} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{TT_1} = {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0T_1} - {}_I \dot{\mathbf{r}}_{0T}, \quad {}_I \omega = {}^{E1} {}_I \omega = {}^I {}_I \omega - {}^{IE} {}_I \omega. \quad (4-243)$$

Aufbauend auf den genannten Größen wird ein verallgemeinerter Verschiebungs- und ein verallgemeinerter Relativgeschwindigkeitsvektor im Inertialsystem definiert. Die Vektoren lauten

$$\mathbf{z}_K (\mathbf{y}_{Gd}) = \begin{bmatrix} {}_I \xi \\ \alpha_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_K (\mathbf{x}_{Gd}) = \begin{bmatrix} {}_I \dot{\xi} \\ {}_I \omega \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{T_1} - \mathbf{v} \quad (4-244)$$

mit  $\mathbf{v}$  nach (4-67) und dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{Gd}$  nach (4-239). Die entsprechenden Vektoren im endeffektorfesten System sind

$${}^E \mathbf{z}_K = \begin{bmatrix} {}^E \xi \\ \alpha_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{EI} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}_K, \quad {}^E \mathbf{v}_K = \begin{bmatrix} {}^E \dot{\xi} \\ {}^E \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{EI} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{EI} A \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_K, \quad (4-245)$$

worauf aufbauend an dieser Stelle angenommen wird, dass sich die Kontaktkräfte und -momente  ${}_E \tau$  näherungsweise durch Linearkombination dieser Größen nach

$${}_E \tau = {}_E \mathbf{K}_C \cdot {}^E \mathbf{z}_K + {}_E \mathbf{K}_D \cdot {}^E \mathbf{v}_K + {}_E \tau_0 \quad (4-246)$$

mit konstanten Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen  ${}_E \mathbf{K}_C \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  und  ${}_E \mathbf{K}_D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  sowie der Konstanten  ${}_E \tau_0 \in \mathbb{R}^6$  beschreiben lassen. Hieraus folgen die Kontaktkräfte und -momente im inertialfesten System zu

$$\tau (\mathbf{x}_{Gd}) = \begin{bmatrix} {}^{IE} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE} A \end{bmatrix} \cdot {}_E \tau = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{z}_K + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{v}_K + \tau_0 \quad (4-247)$$

mit den von der Pose des Hexapod  $z$  abhängigen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen

$$\mathbf{K}_C(z) = \begin{bmatrix} {}^{IE}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_C \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4-248)$$

$$\mathbf{K}_D(z) = \begin{bmatrix} {}^{IE}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_D \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{EI}\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (4-249)$$

und

$$\boldsymbol{\tau}_0(z) = \begin{bmatrix} {}^{IE}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot {}_E\boldsymbol{\tau}_0. \quad (4-250)$$

Die Zustandsgleichungen des Gesamtmodells mit dynamischer Bindung von Endeffektor und Radnabe lauten

$$\dot{\mathbf{x}}_{Gd} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d \\ \dot{\mathbf{z}} \\ {}^M\mathbf{M}_u^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}_u) \\ -{}^M\mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T \cdot \boldsymbol{\tau}) \end{bmatrix}}_{f_{Gd}(\mathbf{x}_{Gd})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ {}^M\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{J}_a^{-T} \end{bmatrix}}_{G_{Gd}(\mathbf{x}_{Gd})} \cdot \mathbf{F}_q. \quad (4-251)$$

Die auf diese Weise durchgeführte Kopplung der beiden Teilmodelle von Hexapod und Radaufhängung veranschaulicht Bild 4-17.

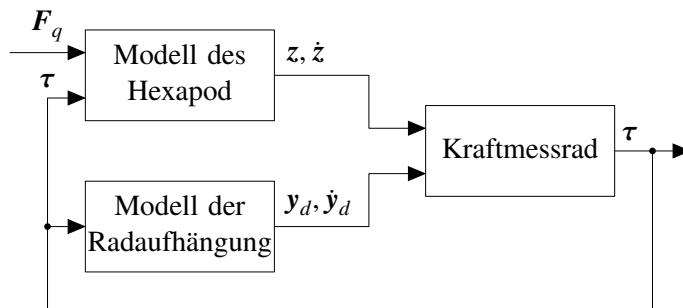


Bild 4-17: Gesamtsystemmodell mit dynamischer Bindung

Der Vorteil dieses Modellierungsansatzes gegenüber der starren Modellierung besteht darin, dass die Eingangsgröße  $\mathbf{F}_q$  keine direkte Auswirkung auf  $\boldsymbol{\tau}$  besitzt, d. h. es liegt kein Durchgriff vor.  $\boldsymbol{\tau}$  ist nur vom aktuell vorliegenden Systemzustand des Gesamtmodells abhängig. Nachteilig ist, dass durch diese Modellierung des Kraftmessrades mit  ${}_E\mathbf{K}_C$ ,  ${}_E\mathbf{K}_D$  und  ${}_E\boldsymbol{\tau}_0$  (bis zu) 78 weitere Modellparameter erforderlich sind. Zudem ist das Kraftmessrad sehr steif und die Einträge von  ${}_E\mathbf{K}_C$  sind dementsprechend groß. Dies hat betragsmäßig große Eigenwerte zur Folge, die zu Problemen bei der numerischen Simulation führen. Sehr geringe Rechenschrittweiten sind demzufolge erforderlich, sodass die Modellrechenzeiten stark ansteigen.

#### 4.4.3 Modellvalidierung anhand des MKS-Prüfstandsmodells

In diesem Abschnitt wird das Gesamtsystemmodell, ähnlich wie schon die Teilsystemmodelle zum Hexapod und der MacPherson-Radaufhängung, anhand eines äquivalent

aufgebauten MKS-Modells, im Folgenden mit  $\Sigma_{GR}$  bezeichnet, validiert. In dieser Ausarbeitung erfolgt die Validierung exemplarisch für das Modell mit starrer Bindung; für das Modell mit dynamischer Bindung lassen sich ähnliche Aussagen bei Vergleich mit einem entsprechend aufgebauten MKS-Referenzmodell wie für das Modell mit starrer Bindung treffen.

Abschnitt 4.3.3 folgend werden hier stellvertretend für zahlreiche Auswahlmöglichkeiten die folgenden beiden Modelle miteinander verglichen:

- $\Sigma_{G4}$ : Gesamtsystemmodell mit den FHG  $\varphi$ ,  $x_L$ ,  $\kappa_z$  und  $\psi$  nach [Ril94] und
- $\Sigma_{G11}$ : Gesamtsystemmodell mit allen elf FHG nach Abschnitt 4.4.1.

Bei beiden Modellen wird, ebenso wie in  $\Sigma_{GR}$ , die Hexapodmodellierung mit 13 Starrkörpern ( $\Sigma_{H13}$ ) verwendet. Darüber hinaus erfolgt auch wieder der Vergleich für die entsprechenden Modelle mit vernachlässigten Restbeschleunigungen. Diese Modelle tragen im Folgenden die Kürzel  $\Sigma_{G4}^*$  und  $\Sigma_{G11}^*$ .

Hier besteht ein ähnliches Problem wie bei der Validierung des Hexapodmodells in Abschnitt 4.2.5: durch den FHG  $\psi$  der Raddrehung ist eine zunehmende Drift der betrachteten Modelle von  $\Sigma_{GR}$  selbst bei kleinen Modellfehlern unvermeidbar. Sie besteht in der zunehmenden Verdrehung der Radnabe und des Endeffektors gegenüber dem Radträger. Der Modellvergleich durch Übernahme der Systemzustände der Referenz, wie er beim Hexapod durchgeführt wurde, vgl. Bild 4-6, scheitert hier aus, da das Modell  $\Sigma_{G4}$  deutlich weniger Zustände hat und der Vergleich so stark verfälscht wird. Stattdessen wird die Drift der Modelle durch folgende Vorgehensweise klein gehalten: Während der Simulation hält eine Winkelregelung mit Sollwertvorgabe  $\beta_r = 0$  die entsprechende Verdrehung des Endeffektors auf einen Wert nahe 0. Das mit den Aktorkräften  $F_q$  des Referenzmodells beaufschlagte Modell nach Abschnitt 4.4.1 enthält außerdem gegenüber  $\Sigma_{GR}$  eine virtuelle, am Inertialsystem abgestützte, sehr steife Feder (und eine Dämpfung), die die Verdrehung des Endeffektors um den Winkel  $\beta = 0$  sehr klein hält. Natürlich erfolgt hierdurch eine Verfälschung des mit  $\Sigma_{GR}$  verglichenen Modells. Der Vergleich mit Einbeziehung des FHG  $\psi$  wird aber zumindest näherungsweise möglich. Dieses Vorgehen wurde auch in der Studienarbeit von Udo Nolte [NK17] für den Modellvergleich verwendet und scheint eine für die Validierung geeignete Herangehensweise zu sein, wenn der FHG  $\psi$  einbezogen werden soll.

Da die beiden Teilmodelle bereits für sich genommen validiert wurden und die Vergleichbarkeit der Modelle aufgrund der beschriebenen Problematik ohnehin recht begrenzt ist, werden an dieser Stelle lediglich exemplarisch die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  für die Schlechtweganregung verglichen. Bild 4-18 zeigt einen Ausschnitt der entsprechenden Zeitverläufe.

Den Zeitverläufen in Bild 4-18 lässt sich entnehmen, dass eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den vom Modell  $\Sigma_{G11}$  berechneten Kontaktkräften und -momenten  $\tau$  mit der Referenz  $\Sigma_{GR}$  vorliegt. Die Kraft  $F_z$  wird auch von den anderen drei Modellen recht gut wiedergegeben, wobei stellenweise auch größere Abweichungen vorliegen. Die anderen Kräfte und Momente hingegen werden relativ schlecht abgebildet. Zu einem gewissen Teil begründen sich diese Abweichungen auch durch die Maßnahmen zur Unterbindung der Modelldrift. Sicher ist, dass das Modell  $\Sigma_{G11}$  trotz dieser Maßnahmen sehr gute Ergebnisse liefert. Auch die Kohärenzen von  $\tau$ , siehe Bild 4-19, stützen die getätigten Aussagen.

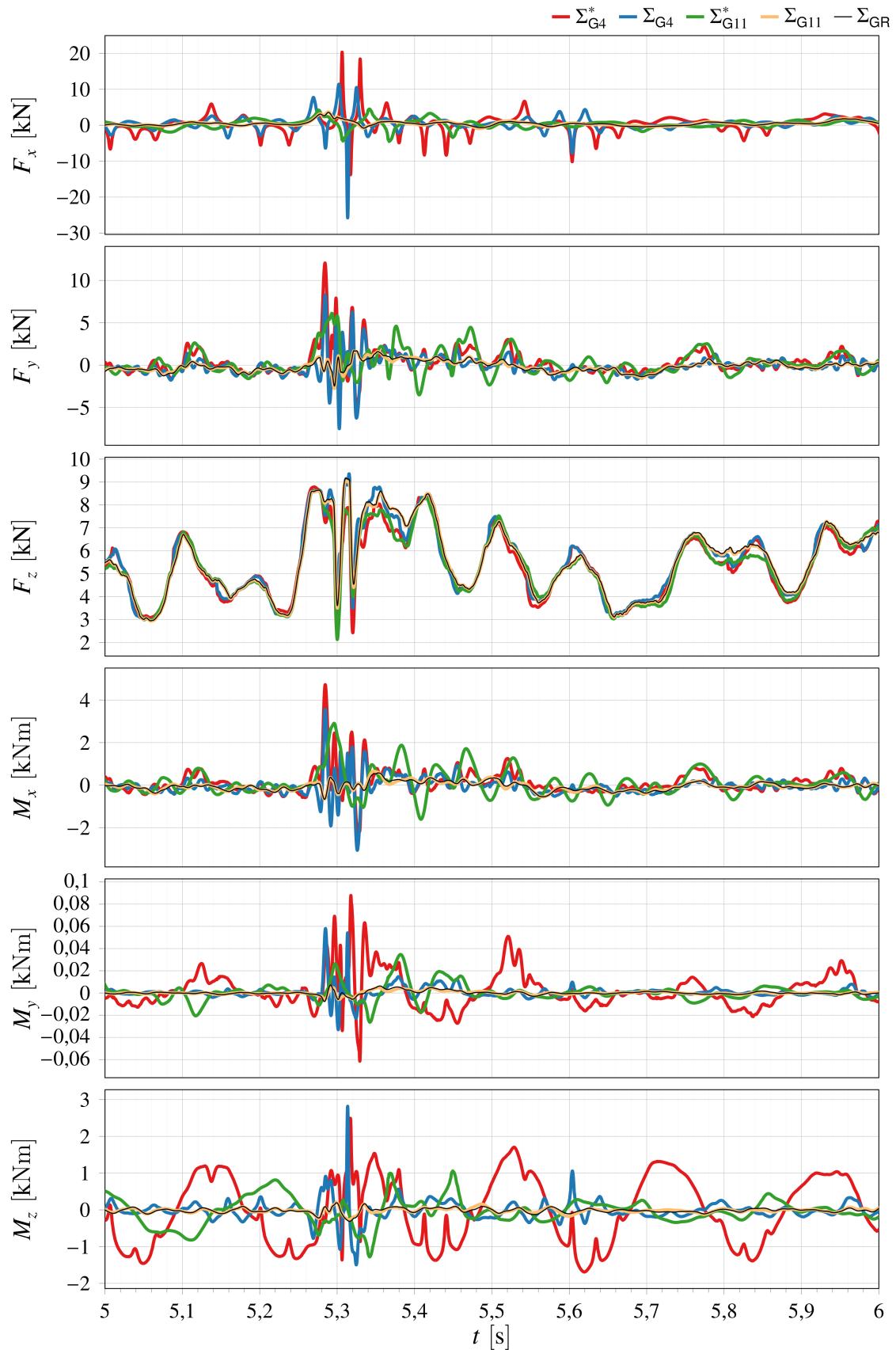


Bild 4-18: Zeitverlauf der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  bei Schlechtweganregung

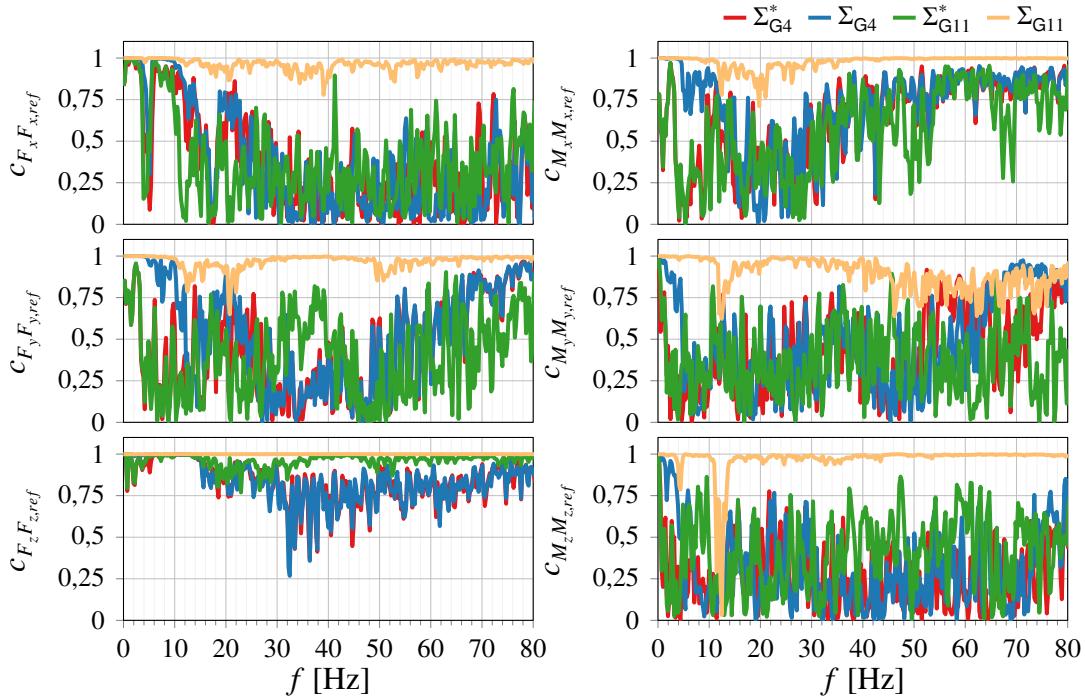


Bild 4-19: Kohärenz der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  bei Schlechtweganregung

Hieraus geht ebenfalls die hohe Modellgüte von  $\Sigma_{G11}$  hervor. Die Güte aller anderen Modelle ist, abgesehen von der Kraft  $F_z$ , demgegenüber deutlich verringert. Wie beim Radaufhängungsmodell lässt sich auch hier die Beobachtung machen, dass die Berechnung der Restbeschleunigungen die Modellgüte im Frequenzbereich bis etwa 10 Hz deutlich erhöhen kann.

## 4.5 Zusammenfassung

Für die Synthese und Erprobung der zu entwickelnden Regelungen wurden diverse Modelle aufgestellt. Die Simulationsumgebung enthält neben den Regelungs- und Beobachteralgorithmen sowie der Ablaufsteuerung und Sollwertgenerierung im Wesentlichen die Modelle der mechanischen Systemkomponenten. Dies sind: die Fahrzeugachse, der Hexapod sowie das Kraftmessrad, der einzelne Anregungszylinder auf der rechten Achsseite sowie die Aktorik und Sensorik. Das Modell ist modular aufgebaut und erlaubt die komfortable Auswahl zwischen Komponentenmodellen unterschiedlicher Modellierungstiefe. Für alle mechanischen Teilsysteme kann zwischen einer topologie- sowie einer signalflußorientierten Modellierung gewählt werden. Für die signalflußorientierten Modelle wurden die Bewegungsgleichungen des Hexapod, der MacPherson-Radaufhängung sowie des resultierenden Gesamtsystems mithilfe des Prinzips von Jourdain inklusive sämtlicher Restbeschleunigungsterme hergeleitet.

Die Bewegungsgleichungen des Hexapod verwenden sechs Minimalkoordinaten. Insgesamt wurden fünf verschiedene Modelle angegeben, die sich hinsichtlich der Berücksichtigung von Massen und Trägheiten unterscheiden. Von diesen Modellen hat das Modell, das alle 13 Starrkörper (Endeffektor, Zylinderrohre und -stangen) berücksichtigt, die höchste

Modellgüte. Ebenfalls gute Ergebnisse im Vergleich mit dem 13 Starrkörper umfassenden MKS-Modell des Hexapod zeigt das Modell, in dem nur ein Starrkörper (Endeffektor) enthalten ist und dessen Parameter gegenüber den Konstruktionsdaten optimiert wurden. Da dieses Modell wesentlich weniger rechenaufwändig ist, wird es für die Regelung des Hexapod am Prüfstand eingesetzt.

Für die MacPherson-Radaufhängung wurde in dieser Arbeit ein Modell hergeleitet, das die elastischen Eigenschaften der insgesamt drei Elastomerlager deutlich besser erfasst als in der Literatur dokumentierte Modelle. Die Anzahl der FHG des Modells ist variierbar und kann auf die jeweils betrachtete Anwendung zugeschnitten werden. Maximal besitzt das Modell elf FHG und weist damit, abgesehen von zwei isolierten FHG, die gleiche Anzahl an FHG wie das zum Vergleich herangezogene MKS-Modell auf. Davon dienen (bis zu) acht FHG der Berücksichtigung von Lagerelastizitäten (bisher dokumentierte Modelle: maximal ein FHG). Gegenüber der Literatur wurden außerdem mehr Starrkörper berücksichtigt und diverse Vereinfachungen aufgehoben. So wurden bspw. auch die Restbeschleunigungen sämtlicher Starrkörper angegeben, deren Berechnung eine nennenswerte Verbesserung der Modellgüte im niedrigen Frequenzbereich zur Folge hat. Sowohl das MKS-Modell als auch die hergeleiteten Bewegungsgleichungen enthalten diverse, teils nichtlineare Kraftelemente, darunter der Stoßdämpfer mit nichtlinearer Dämpfung sowie Zug- und Druckpuffern, eine Aufbaufeder, Lenksteifigkeit und -dämpfung sowie drei räumliche Elastomerlagermodelle. Modellvergleiche anhand von Simulationen zeigen, dass die Modellgüte durch das Hinzufügen der sieben neuen FHG für die Abbildung der Elastomerlager erheblich gesteigert werden konnte. Das Modell mit allen elf FHG bildet das MKS-Referenzmodell ideal ab. Es stellt wohl das bestmögliche Modell dar, das sich mit den Mitteln der Starrkörperdynamik für eine MacPherson-Radaufhängung erstellen lässt. Ein besseres, aber auch wesentlich rechenaufwändigeres Modell könnte bspw. mit der Methode der flexiblen MKS oder der FE-Methode erstellt werden. Aufgrund der sehr hohen Zahl erforderlicher Modellparameter gestaltet sich der Abgleich des Modells mit der im Prüfstand verbauten Radaufhängung schwierig. In Zukunft sollte (auch) aus diesem Grund die Kooperation mit Automobilherstellern und -zulieferern in Erwägung gezogen werden. Aus diesem räumlichen Modell der MacPherson-Radaufhängung wurde auch ein zweidimensionales Modell mit Lagerelastizitäten hergeleitet, das den bisherigen Stand von Technik und Forschung erweitert (siehe Anhang A5.4).

Für das Gesamtsystem aus Hexapod und MacPherson-Radaufhängung wurden zwei unterschiedliche Modellierungsalternativen beschrieben. Der Unterschied der beiden Varianten besteht in der Kopplung der beiden Teilsysteme, die entweder ideal starr oder durch eine dynamische Bindung erfolgt. Während bei der ideal starren Bindung keine weiteren Modellparameter über die Parameter von Hexapod und Radaufhängung hinaus erforderlich sind, kommen bei der beschriebenen dynamischen Bindung (bis zu) 78 weitere Parameter für die Steifigkeit und Dämpfung des Kraftmessrades sowie eine ggf. vorhandene Vorspannung hinzu. Simulationen zeigen auch hier sehr gute Übereinstimmungen mit dem MKS-Referenzmodell, insb. bei Verwendung des Radaufhängungsmodells mit elf FHG und berechneten Restbeschleunigungstermen.

## 5 Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für den Hexapod

Dieses Kapitel thematisiert den Regelungsentwurf für den Hexapod im Achsprüfbetrieb. Zum Einsatz kommen hybride Kraft-/Positionsregelungsverfahren, wie sie im Stand von Technik und Forschung, vgl. Abschnitt 2.2.3, genannt wurden. Hier wird die von Natale [Nat10] inspirierte Einteilung der Verfahren zur hybriden Kraft-/Positionsregelung aufgegriffen, nach der zwischen analytischer und geometrischer Formulierung unterschieden werden kann. Die *analytische Formulierung* verwendet detaillierte Modelle von Manipulator und Umgebung und führt mit deren Hilfe lineare, entkoppelte Eingänge für die Regelgrößen (Kraft/Position) herbei. Je nach betrachteter Umgebung müssen manche FHG kraft-, andere positionsgeregelt werden. Nur unter bestimmten Bedingungen ist die Wahl zwischen einer Positions- und einer Kraftregelung physikalisch sinnvoll. Bei der *geometrischen Formulierung* wird stets eine binäre, diagonale Selektionsmatrix  $S$  verwendet, mit deren Hilfe der Nutzer für jede Richtung den Regelmodus (üblicherweise Kraft/Position in einem bestimmten Kontaktpunkt) vorgeben kann. Die Wahl des Regelmodus muss konform mit der vorliegenden Umgebung sein. Prinzipbedingt sind die Regelgrößen hierbei nur in Sonderfällen entkoppelt.

Von den in Abschnitt 2.2.3 des Stands von Technik und Forschung genannten hybriden Kraft-/Positionsregelungsverfahren in analytischer Formulierung kommen für die Regelung des Prüfstands nur die Verfahren nach de Luca und Manes [LM94] sowie Featherstone [Fea03; FSK98] in Betracht, da die hier betrachtete Umgebung, die MacPherson-Radaufhängung, nicht vernachlässigbares dynamisches Verhalten aufweist. Für die Implementierung der Ansätze nach [LM94] und [FSK98] sind jeweils die Bewegungsgleichungen der Umgebung bzw. der MacPherson-Radaufhängung erforderlich. Der Ansatz nach [Fea03] benötigt etwas weniger Informationen, zeigt aber schon bei den Simulationen am zweidimensionalen Modell (siehe Kapitel 3) prinzipbedingt schlechtere Ergebnisse. Gegen den Ansatz [FSK98] spricht, dass die resultierenden Regelgrößen für Achsprüfungen wenig geeignet sind. Außerdem ist fraglich, ob sich die Verfahren nach Featherstone auf den Fall übertragen lassen, dass keine Relativbewegung zwischen dem Endeffektor und der Umgebung vorliegt, wie es bei dem hier betrachteten Achsprüfstand der Fall ist. Die Relativbewegung drückt sich bei der Herleitung der Regelungsansätze nach Featherstone in der Gleichung (2-97), d. h. der Existenz der Matrix  $S_1$ , aus. Aus den genannten Gründen werden die Verfahren nach Featherstone hier nicht weiterverfolgt. Der Ansatz nach de Luca und Manes [LM94] hat die beschriebenen Nachteile nicht und wird daher für den Einsatz am HNI-Achsprüfstand ausgewählt. Die Implementierung des Ansatzes nach de Luca und Manes wird inklusive zweier allgemeingültiger Erweiterungen in Abschnitt 5.1 ausführlich erläutert.

Der Ansatz nach de Luca und Manes ist auf Umgebungen beschränkt, die maximal sechs dynamische Koordinaten  $y_d$  aufweisen ( $n_d \leq 6$ ). Für die hier betrachtete Umgebung ist diese Bedingung bei Berücksichtigung der Elastomerlager nicht erfüllt. In Abschnitt 5.1 muss daher das Umgebungsmodell mit Elastomerlagern in geeigneter Weise transformiert werden, um mit diesem auf  $n_d \leq 6$  dynamische Koordinaten transformierten

Umgebungsmodell die Gleichungen für die Aktorkräfte nach de Luca und Manes (2-92) bzw. (2-94) auswerten zu können. Hierbei geht entweder ein Teil des Modellwissens über die Umgebung verloren oder es resultieren andere, für die Achsprüfung wenig relevante (Positions-) Regelgrößen. Diese Einschränkung wird in Abschnitt 5.2 durch Anwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung aufgehoben. Es wird eine Berechnungsvorschrift für die Aktorkräfte hergeleitet, die auch für Umgebungen mit mehr als sechs dynamischen Koordinaten  $y_d$  eine ideale Entkopplung von sechs Regelgrößen mit den vorliegenden sechs Eingangsgrößen ermöglicht. Unterabschnitt 5.2.1 betrachtet den Fall der ideal starren, Unterabschnitt 5.2.2 den Fall der dynamischen Bindung von Endeffektor und Umgebung. Diese Fallunterscheidung wurde bereits bei der Formulierung des Gesamtmodells aus Hexapod und MacPherson-Radaufhängung getätigt, vgl. Abschnitt 4.4.

Die Umsetzung der bis dahin behandelten Regelungsentwürfe bedingt sehr genaue Modelle sowohl des Manipulators als auch der Umgebung sowie - im Falle der dynamischen Bindung von Endeffektor und Umgebung - der Kraftmesseinrichtung. Während für den eingesetzten Manipulator häufig ein hinreichend gutes Modell vorliegt, ist insb. die Erfordernis eines genauen Umgebungsmodells nachteilig. Dies liegt einerseits daran, dass die Umgebung ein sehr komplexes, nichtlineares Verhalten aufweisen kann und darüber hinaus zahlreiche Parameter erforderlich sein können. Andererseits ist die Kraftregelung auf die beim Entwurf angenommene Umgebung zugeschnitten. Weicht das Umgebungsmodell von der Realität ab, so weisen die neuen Eingangsgrößen kein lineares Verhalten zu den Regelgrößen auf. In der Konsequenz muss bei einem Wechsel des Kontaktpartners, im vorliegenden Fall bspw. der Austausch des Prüflings, das Umgebungsmodell neu parametriert oder sogar neue Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Für die praktische Anwendung ist es daher erstrebenswert, die Abhängigkeit des Reglers von einem genauen Umgebungsmodell so weit wie möglich aufzuheben.

Die erste Möglichkeit besteht darin, stark vereinfachte, generalisierte Umgebungsmodelle für den Regelungsentwurf einzusetzen. Derartige Modelle lassen sich auch mithilfe verhältnismäßig einfacher, (teil-) automatisierter Prüfstandsmessungen experimentell für den aktuell vorliegenden KontaktPartner identifizieren. In Unterabschnitt 5.2.3 wird die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung für ein solches vereinfachtes Umgebungsmodell beschrieben. Durch die Berechnungsvorschrift der Aktorkräfte  $F_q$  werden weiterhin Eingangsgrößen gebildet, die sich linear zu den Regelgrößen verhalten. Die Gültigkeit des Reglers ist in diesem Fall allerdings auf eine Umgebung um den bei der Identifikation vorliegenden Systemzustand beschränkt. In Abschnitt 5.3 wird auf die Ein-/Ausgangslinearisierung für Kraftgrößen verzichtet. Auf Basis der Linearisierung (2-19) mit dem neuen Systemeingang  $u_p$ , der sich linear zur Pose des Endeffektors  $z$  verhält, werden drei unterschiedliche Ansätze diskutiert, die sich in der vom Regler ausgegebenen Größe unterscheiden. Der erste baut auf dem nach (2-21) positionsgeregelten System auf und gibt Sollpositionen  $z_r$  aus, während der zweite Ansatz einen unterlagerten Geschwindigkeitsregler verwendet und Sollgeschwindigkeiten  $\dot{z}_r$  berechnet. Der letzte Ansatz verzichtet auf unterlagerte Regelschleifen und gibt direkt die Größe  $u_p$  aus.

Abschnitt 5.4 verfolgt einen anderen Grundgedanken. Für einen der in Abschnitt 5.1 hergeleiteten Regler wird dort eine Näherungslösung angegeben, deren Ziel darin besteht, das erforderliche Modellwissen über die Umgebung durch vorliegende, aktuelle Messwerte zu ersetzen.

Nach Diskussion der verschiedenen Regelungsentwürfe wird in Abschnitt 5.5 deren Kombination mit einer ILR beschrieben. Dadurch können auch besonders hohe Bandbreiten- und Güteanforderungen bei sich wiederholenden Signalen erfüllt werden, wie sie bspw. bei der Betriebsfestigkeitsprüfung vorliegen. Die ILR ist nicht an einen der beschriebenen Regler gebunden, sondern kann prinzipiell mit allen genannten Regelungsentwürfen kombiniert werden. Die Verwendung im Rahmen einer HiL-Simulation ist hingegen nicht möglich.

Zum Abschluss des Kapitels erfolgt eine Zusammenfassung. Sie schließt eine Gegenüberstellung der erläuterten Regelungsansätze anhand eines eindimensionalen Ersatzsystems für den Achsprüfstand ein.

## 5.1 Analytische Formulierung nach de Luca und Manes

Dieser Abschnitt beschreibt zwei allgemeingültige Erweiterungen des von de Luca und Manes [LM94] beschriebenen Ansatzes zur hybriden Kraft-/Positionsregelung und dessen Implementierung für den HNI-Achsprüfstand. Der im Stand von Technik und Forschung erläuterte Ansatz nutzt die Aktorkräfte nach (2-92) bzw. (2-94) um (neben den kinematischen Koordinaten  $y_k$  und den reaktiven Kräften  $\lambda_r$ ) alle aktiven Kräfte  $\lambda_a$  oder alle dynamischen Koordinaten  $y_d$  zu regeln. Eine beliebige, richtungsabhängige Auswahl zwischen diesen Größen ist nicht vorgesehen. Im folgenden Unterabschnitt wird aufbauend auf (2-92) und (2-94) eine Berechnungsformel für die Aktorkräfte entwickelt, die diese Wahl mithilfe einer Selektionsmatrix  $S$  ermöglicht.

Die Berechnungsvorschriften für die Aktorkräfte (2-92) und (2-94) sind so zu interpretieren, dass die Ist-Aktorkräfte  $F_q$  ideal dieser Berechnung entsprechen müssen, um gegebene Sollwerte einzuregelnder Kräfte und Positionen herbeizuführen. An realen Systemen können die Ist-Aktorkräfte  $F_q$  jedoch nicht beliebig vorgegeben werden. Es liegen Stellgrößenbeschränkungen vor, die sich u. a. in einer begrenzten Bandbreite des Stellglieds offenbaren. Liegt bspw. ein Regelkreis für die Aktorkräfte vor, so sind durch den überlagerten Regelalgorithmus Soll-Aktorkräfte  $F_{q,r}$  anstelle der Ist-Aktorkräfte  $F_q$  vorzugeben. Im vorliegenden Fall kann der geschlossene Aktorregelkreis gut durch ein lineares Übertragungsglied dritter Ordnung abstrahiert werden, vgl. Abschnitt 2.2.1. Folglich unterscheiden sich die Ist-Aktorkräfte  $F_q$  von den Soll-Aktorkräften  $F_{q,r}$  mit der Frequenz zunehmend. Wird diese Problematik ignoriert und die Soll-Aktorkräfte  $F_{q,r}$  dennoch nach (2-92) oder (2-94) berechnet, so beeinträchtigt dies das Regelungsergebnis; im Extremfall kann instabiles Verhalten resultieren. Sämtlichen Regelungsansätzen, die im Stand von Technik und Forschung genannt wurden, ist gemein, dass sie keine Berücksichtigung der Aktordynamik vorsehen. Dies geht u. a. aus dem beim Regelungsentwurf zugrunde gelegten Manipulatormodell nach (2-16) für SKM bzw. (2-17) für PKM hervor. Abschnitt 5.1.2 erweitert die Regelung um die Berücksichtigung allgemeiner, linearer Stelldynamik, wie sie bei dem in dieser Arbeit betrachteten System vorliegt.

Sowohl das Hinzufügen der Selektionsmatrix  $S$  als auch die Einbeziehung linearer Aktordynamik in den Regelungsentwurf sind nicht auf das vorliegende System beschränkt, sondern stellen eine allgemeingültige Erweiterung der Regelung nach de Luca und Manes [LM94] dar.

An diese Weiterentwicklungen schließt sich die Implementierung der Regelung für das Zielsystem an. Die Eignung des Ansatzes für den Anwendungsfall wird anhand des in

Kapitel 4 entwickelten Streckenmodells beurteilt. Dabei wird zunächst ein idealisiertes Streckenmodell betrachtet. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass das enthaltene Radaufhängungsmodell keine Elastomerlager besitzt, d. h. die Radaufhängung weist nur die FHG  $d_F$ ,  $x_L$  und  $\psi$  auf. Im Anschluss wird zu dem Streckenmodell mit allen drei Elastomerlagern übergegangen. Die Regelstrecke weist dann elf FHG<sup>14</sup> auf. Im Streckenmodell wird außerdem das Modell des Hexapod mit 13 massebehafteten Starrkörpern verwendet (Modell  $\Sigma_{H13}$ ) und die Bindung zwischen Endeffektor und Radnabe wird als ideal starr abstrahiert. Für die beiden Streckenmodelle mit starrer Bindung werden nachfolgend die Kürzel

- $\Sigma_{G3}$ : Gesamtmodell ohne Elastomerlager (FHG  $d_F$ ,  $x_L$  und  $\psi$ ) und
- $\Sigma_{G11}$ : Gesamtmodell mit Elastomerlagern (elf FHG)

verwendet.

Für die Anwendung bei Modellierung des Kraftmessrades als dynamische Bindung, vgl. Abschnitt 4.4.2, ist der Regelungsentwurf nach de Luca und Manes wenig geeignet. Bei dieser Modellierungsalternative entfallen allein sechs FHG auf das Kontaktmodell, während der Regelungsansatz auf Umgebungen mit  $n_d \leq 6$  beschränkt ist. Der Regelungsentwurf für den Fall der dynamischen Bindung kann jedoch mit der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung erfolgen und wird im anschließenden Unterkapitel 5.2 behandelt.

### 5.1.1 Erweiterung: Selektionsmatrix $S$ zur Wahl zwischen $\lambda_a$ und $y_d$

Als Vorbild für die Wahlmöglichkeit zwischen einer Positions- und einer Kraftregelung in den Richtungen, in denen beide Varianten möglich sind, dient das Grundkonzept der hybriden Kraft-/Positionsregelung von Raibert und Craig nach Bild 2-20. In den anderen Richtungen werden entweder die reaktiven Kräfte  $\lambda$ , oder die kinematischen Koordinaten  $y_k$  geregelt. Eine Umschaltung in den jeweils anderen Regelmodus ist in diesen Richtungen physikalisch nicht sinnvoll, da in den entsprechenden Richtungen entweder keine Bewegung möglich ist oder keine Kraft zur Umgebung vorliegt.

Ausgangspunkt der folgenden Herleitung ist die Berechnungsformel für die Aktorkräfte nach (2-94), d. h. der Fall der sich linear zu  $\ddot{y}_d$ ,  $\lambda_r$  und  $\ddot{y}_k$  verhaltenden Eingangsgrößen. Das Ziel besteht darin, die Eingangsgröße  $\mathbf{u}_d$  in (2-94) durch eine neue, hybride Eingangsgröße  $\mathbf{u}_h$  zu ersetzen. Zu diesem Zweck wird auch eine binäre, diagonale Selektionsmatrix  $S \in \mathbb{N}^{n_d \times n_d}$  eingeführt. Bei einer 0 an  $i$ -ter Stelle soll in der Richtung  $i$  die assoziierte dynamische Koordinate  $y_{d,i}$ , bei einer 1 die assoziierte aktive Kraft  $\lambda_{a,i}$  geregelt werden.

Die neue Eingangsgröße  $\mathbf{u}_h$  wird so festgelegt, dass die Beziehungen

$$\mathbf{u}_{d,g} = (\mathbf{I} - S) \cdot \mathbf{u}_h, \quad \mathbf{u}_{a,g} = S \cdot \mathbf{u}_h \quad (5-1)$$

gelten. Bei  $\mathbf{u}_{d,g}$  und  $\mathbf{u}_{a,g}$  handelt es sich um die z. B. nach (2-55) und (2-57) gebildeten Eingangsgrößen, die eine Vorsteuerung und Regelung der mithilfe von  $S$  ausgewählten dynamischen Koordinaten  $y_d$  und aktiven Kräfte  $\lambda_a$  bewirken. In Analogie zu  $\mathbf{u}_h$  wird

---

<sup>14</sup>Insgesamt weist eine MacPherson-Einzelradaufhängung 13 FHG auf. Die Dämpfer- und Spurstange haben je einen isolierten FHG. Da die isolierten FHG keine nennenswerte Auswirkung auf die Dynamik des Mechanismus besitzen, wird nachfolgend stets von elf FHG gesprochen.

eine weitere Größe  $\mathbf{u}_h^-$  eingeführt, die alle nicht geregelten dynamischen Koordinaten und aktiven Kräfte enthält. Sie wird so gewählt, dass

$$\mathbf{u}_{d,u} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_h^-, \quad \mathbf{u}_{a,u} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}_h^- \quad (5-2)$$

gilt.  $\mathbf{u}_h^-$  und demnach auch  $\mathbf{u}_{d,u}$  und  $\mathbf{u}_{a,u}$  sind unbekannt.

Um die Eingangsgröße  $\mathbf{u}_d$  durch die neue, hybride Eingangsgröße  $\mathbf{u}_h$  ersetzen zu können, muss (mindestens)  $\mathbf{u}_{d,u}$  aus  $\mathbf{u}_h$  bzw.  $\mathbf{u}_{d,g}$  und  $\mathbf{u}_{a,g}$  gebildet werden. Dies gelingt mithilfe des Umgebungsmodells nach (2-78) bzw. (2-83). Aus (2-83) folgt nach Multiplikation mit  $\mathbf{M}_u^{-1}$ , dass

$$\ddot{\mathbf{y}}_d = \underbrace{\mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda a}}_{\mathbf{K}_1} \cdot \lambda_a - \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{n}_u. \quad (5-3)$$

Werden  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  und  $\lambda_a$  in (5-3) durch  $\mathbf{u}_d$  und  $\mathbf{u}_a$  ersetzt, so folgt

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{u}_a - \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{n}_u. \quad (5-4)$$

Für die teils unbekannten Größen  $\mathbf{u}_d$  und  $\mathbf{u}_a$  gelten die Zusammenhänge

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_{d,g} + \mathbf{u}_{d,u}, \quad \mathbf{u}_{d,g} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}_d, \quad \mathbf{u}_{d,u} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_d, \quad (5-5)$$

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_{a,g} + \mathbf{u}_{a,u}, \quad \mathbf{u}_{a,g} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_a, \quad \mathbf{u}_{a,u} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}_a. \quad (5-6)$$

Hiermit folgt aus (5-4) die Gleichung

$$\mathbf{u}_{d,g} + \mathbf{u}_{d,u} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{u}_{a,g} + \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{u}_{a,u} - \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{n}_u, \quad (5-7)$$

die sich nun mit den Ersetzungen nach (5-1) und (5-2) auch in der Form

$$(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{u}_h^- = (\mathbf{K}_2 - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u}_h - \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{n}_u, \quad \mathbf{K}_2 = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{S} \quad (5-8)$$

notieren lässt. Ist  $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1$  regulär, so folgt

$$\mathbf{u}_h^- = (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)^{-1} \cdot ((\mathbf{K}_2 - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u}_h - \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \mathbf{n}_u), \quad (5-9)$$

woraus sich mithilfe der Zusammenhänge nach (5-2) sowohl  $\mathbf{u}_{d,u}$  als auch  $\mathbf{u}_{a,u}$  bestimmen lassen. Aufbauend auf diesen Ausführungen kann die Ersetzung von  $\mathbf{u}_d$  in (2-94) durch  $\mathbf{u}_h$  zu

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_{d,g} + \mathbf{u}_{d,u} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{u}_h}_{\substack{\text{Positionsgeregelte} \\ \text{Richtungen}}} + \underbrace{\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_h^-}_{\substack{\text{Kraftgeregelte} \\ \text{Richtungen}}} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{u}_h - \mathbf{b}_h \quad (5-10)$$

mit

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{I} + \mathbf{S} ((\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)^{-1} \cdot (\mathbf{K}_2 - \mathbf{I}) - \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \mathbf{S} (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)^{-1} \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{I}), \quad (5-11)$$

$$\mathbf{b}_h = \mathbf{S} (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{n}_u \quad (5-12)$$

bestimmt werden. Für die Bildung der Aktorkräfte folgt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \cdot \left( \mathbf{Q}_h \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \mathbf{n}_h \right) \quad (5-13)$$

mit

$$\mathbf{Q}_h = \mathbf{Q}_d \cdot \text{diag}(\mathbf{A}_h, \mathbf{I}, \mathbf{I}) = [\mathbf{Q}_{dl} \cdot \mathbf{A}_h \quad \mathbf{S}_{\lambda r} \quad \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{S}_{yk}], \quad (5-14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_h &= \mathbf{n}_d - \mathbf{Q}_{dl} \cdot \mathbf{b}_h \\ &= \mathbf{M}_v \cdot (\dot{\mathbf{S}}_{yk} \ddot{\mathbf{y}}_k + \dot{\mathbf{S}}_{yd} \ddot{\mathbf{y}}_d) + \mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{g}_v + \mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{n}_u - \mathbf{Q}_{dl} \mathbf{b}_h \end{aligned} \quad (5-15)$$

und

$$\mathbf{Q}_{dl} = \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{S}_{\lambda a} \cdot (\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \cdot \mathbf{M}_u. \quad (5-16)$$

Für die neuen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{u}_r$  und  $\mathbf{u}_k$  gilt

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{y}_h, \quad \mathbf{u}_r = \boldsymbol{\lambda}_r, \quad \mathbf{u}_k = \ddot{\mathbf{y}}_k \quad (5-17)$$

mit

$$\mathbf{y}_h = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\lambda}_a. \quad (5-18)$$

Diese Herleitung stellt eine mögliche Lösung dar. Beispielsweise ist es theoretisch genauso möglich, die Herleitung auf Basis von (2-92) anstelle von (2-94) durchzuführen.

Mithilfe der nach (5-13) gebildeten Aktorkräfte werden die reaktiven Kräften  $\boldsymbol{\lambda}_r$  und die kinematischen Koordinaten  $y_k$  geregelt. In den verbliebenen Richtungen ist es nun möglich, mithilfe der Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  jeweils frei zwischen einer Regelung der zugehörigen dynamischen Koordinate  $y_{d,i}$  und der zugehörigen aktiven Kraft  $\lambda_{a,i}$  zu wählen. Aufbauend auf den neuen Systemeingängen kann die Vorsteuerung und Regelung für Kraftgrößen z. B. nach (2-55), für Positionsgrößen z. B. nach (2-57) erfolgen.

### 5.1.2 Erweiterung: Einbeziehung der Aktordynamik

Ist die Aktorik hinreichend schnell und damit vernachlässigbar, so verhalten sich die mit den Aktorkräften (5-13) herbeigeführten, neuen Systemeingänge  $\mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{u}_r$  und  $\mathbf{u}_k$  linear zu den jeweiligen Regelgrößen. Sowohl Kraft- als auch Positionsregelung können in diesem Fall anhand des in Bild 5-1 gezeigten, schematischen Strukturbildes entworfen werden.  $y_r$  und  $y$  sind Soll- und Istwert der Regelgröße,  $u$  der (nichtlineare) Stelleingang und  $v$  ist der durch die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung herbeigeführte, sich linear zur Regelgröße  $y$  verhaltende Systemeingang, d. h. es gilt  $v = y^{(\delta)}$ .

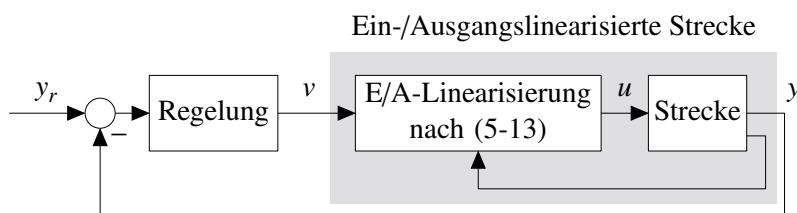


Bild 5-1: Geschlossener Regelkreis bei vernachlässigbarer Aktordynamik (Schema)

Die auf die Regelstrecke zugeschnittene Ein-/Ausgangslinearisierung nach (5-13) führt dazu, dass die Reihenschaltung dieser beiden nichtlinearen Übertragungsglieder das Übertragungsverhalten

- $G_S(s) = 1$ , wenn die Regelgröße eine Kraft ist ( $\delta = 0$ ), oder
- $G_S(s) = 1/s^2$ , wenn die Regelgröße eine Position ist ( $\delta = 2$ ),

besitzt. Auf Grundlage der ein-/ausgangslinearisierten Strecke kann daher ein einfacher, linearer Regelungsentwurf erfolgen.

Für die Kraftregelung liegt ein Durchgriff vor. Lohmann und Trächtler [LT91] argumentieren, dass das Vorhandensein eines Durchgriffs stets aus der Vernachlässigung schneller dominanter Zeitvorgänge (Zeitkonstante  $T$ ) folgt. Im vorliegenden Fall wurde die Aktordynamik vernachlässigt. Wird ein lineares, zeitinvariantes System betrachtet, eine derartige Vereinfachung vorgenommen und eine konstante Ausgangsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{y} \quad (5-19)$$

am System mit Durchgriff

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (5-20)$$

entworfen, kann auch das realitätsnähere System ohne Durchgriff unter bestimmten Bedingungen durch die so entworfene Ausgangsrückführung stabilisiert werden. Lohmann und Trächtler [LT91] zeigen, dass dies dann der Fall ist, wenn  $T$  hinreichend klein ist und neben der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises auch die Matrix  $-\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{K}$  nur Eigenwerte in der linken Halbebene aufweist.

Hier stellt sich analog dazu die Frage, unter welchen Bedingungen die für ideale Aktordynamik entworfene Regelung auch für das entsprechende System mit Aktordynamik funktional ist. Außerdem ist zu prüfen, welche Konsequenzen die Einbeziehung der Aktordynamik in den Regelungsentwurf mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung bei dem vorliegenden System hat.

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Regelungssynthese für das hier betrachtete, nicht-lineare Regelstreckenmodell unter Einbeziehung der Aktordynamik durchzuführen ist und unter welchen Bedingungen ein solcher Regler realisiert werden kann. Außerdem wird eine andere Maßnahme beschrieben, die die Beibehaltung der Aktorkräfte nach (5-13), d. h. den Regelungsentwurf anhand von Bild 5-1, auch für das System mit Aktordynamik ermöglicht. Dabei folgen auch Bedingungen an die Zeitkonstante der Aktorik in Abhängigkeit der Dynamik der äußeren Kraft- und Positionsregelkreise, unter denen die Regelung stabil ist.

Im vorliegenden Fall liegt durch den geschlossenen Druck- bzw. Kraftregelkreis in guter Näherung eine lineare Aktordynamik dritter Ordnung zwischen dem Soll-Stelleingang  $u_r$  sowie dem Ist-Stelleingang  $u$  vor, vgl. Abschnitt 2.2.1. Folglich muss zwischen dem Ist-Stelleingang  $u$  und dem Soll-Stelleingang  $u_r$ , der den eigentlichen Eingang der Regelstrecke darstellt, Unterschieden werden. Bild 5-2 zeigt ein Schema des geschlossenen Regelkreis mit berücksichtigter Aktordynamik. Gegenüber Bild 5-1 ist vor dem Eingang der Strecke die Aktorik mit endlicher Dynamik hinzugekommen.

Die begrenzte Aktordynamik kann genau zwei Auswirkungen haben:

1. Deckt sie den anwendungsrelevanten Frequenzbereich ohne nennenswerte Änderung des Amplituden- oder Phasenverlaufs ab, so kann sie als ideal abstrahiert werden. Dann gelingt die Linearisierung und der Reglerentwurf nach Bild 5-1 kann ohne Modifikationen übernommen werden.

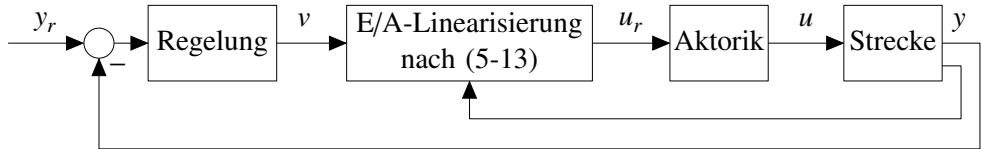


Bild 5-2: Geschlossener Regelkreis mit Aktordynamik (Schema)

2. Ist dies nicht der Fall, so misslingt die Linearisierung der Regelstrecke nach (5-13) und der erhaltene Stelleingang  $v$  verhält sich nicht - wie beabsichtigt - linear zur Regelgröße  $y$ . Je nach Ausmaß der Nichtlinearität kann ein instabiler Regelkreis resultieren.

Die Problematik wurde auch von Knoop [Kno17] für den positionsgeregelten Hexapod ohne Umgebungskontakt beschrieben. Es kann jedoch anhand einer Simulation gezeigt werden, dass die Blöcke „Ein-/Ausgangslinearisierung“ und „Aktordynamik“ (vgl. Bild 5-2) unzulässigerweise vertauscht werden können, obwohl es sich bei der Linearisierung nach (2-19) um ein nichtlineares Übertragungsglied handelt. Der geschlossene Positionsregelkreis weist dann zwar Verkopplungen in den Regelgrößen auf, diese sind jedoch gering. Aufbauend darauf wird ein linearer Regelungsentwurf (2-21) für die Regelstrecke 5. Ordnung ( $\text{PT}_3$ -Aktordynamik und  $G_S(s) = 1/s^2$ ) durchgeführt.

Im Folgenden werden zwei Vorgehensweisen erläutert, nach denen sich eine (lineare) Aktordynamik beim Regelungsentwurf berücksichtigen lässt. Als Ausgangsgröße des nichtlinearen Reglers resultieren dabei Soll-Aktorkräfte  $\mathbf{F}_{q,r}$ .

Lässt sich der Zusammenhang zwischen Soll-Aktorkräften  $\mathbf{F}_{q,r}$  und Ist-Aktorkräften  $\mathbf{F}_q$  in guter Näherung durch eine lineare Differentialgleichung ausdrücken, so gilt

$$\sum_{i=0}^{n_A} a_i \mathbf{F}_q^{(i)} = b_0 \mathbf{F}_{q,r}. \quad (5-21)$$

$n_A$  bezeichnet dabei die Ordnung der Aktordynamik,  $\mathbf{F}_q^{(i)}$  die  $i$ -te zeitliche Ableitung der Ist-Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$ . Die vorzugebenden Soll-Aktorkräfte folgen damit aus (5-13) und (5-21) zu

$$\mathbf{F}_{q,r} = \frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{n_A} a_i \mathbf{F}_q^{(i)}. \quad (5-22)$$

Für den bisher betrachteten Fall idealer Aktordynamik gilt:  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $n_A = 0$ . Die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{u}_r$  und  $\mathbf{u}_k$  müssen vor der Herleitung von  $\mathbf{F}_{q,r}$  durch  $\mathbf{y}_h$ ,  $\lambda_r$  und  $\ddot{\mathbf{y}}_k$  rück-substituiert werden, vgl. (5-17) und (5-18). Die höchste zeitliche Ableitung dieser Größen wird nach Abschluss der Herleitung wieder durch neue lineare Eingänge ersetzt. Gleichung (5-22) stellt die Erweiterung der Aktorkräfte nach (5-13) für solche Systeme dar, die eine nach (5-21) hinreichend beschreibbare Aktordynamik aufweisen. Die Differenzordnung jeder Regelgröße (generalisierte Kraft oder Position) steigt damit um die Ordnung der Aktordynamik  $n_A$  (ausgehend von 0 für Kräfte und 2 für Positionen). Die neuen linearen Stelleingänge weisen folglich das Verhalten

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{y}_h^{(n_A)}, \quad \mathbf{u}_r = \lambda_r^{(n_A)}, \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{y}_k^{(n_A+2)} \quad (5-23)$$

mit  $\mathbf{y}_h$  nach (5-18) auf. Der totale relative Grad erhöht sich durch die Aktordynamik ebenso wie die Systemordnung um  $6 \cdot n_A$ , sodass die Ordnung der internen Dynamik gegenüber dem Fall idealer Aktorik unverändert bleibt.

Während (5-22) die ideale Lösung für Systeme mit Aktordynamik nach (5-21) darstellt, kann unter Umständen auch

- der Ansatz einer Aktordynamik niedrigerer Ordnung (mit identischer Eckfrequenz) beim Regelungsentwurf oder
- die Vernachlässigung der Aktordynamik, d. h. die Berechnung der Aktorkräfte nach (5-13),

hinreichend für das System sein. Einflussfaktoren sind bspw. die Bandbreite der eingesetzten Aktorik sowie die angestrebte Bandbreite der geschlossenen Regelkreise für die generalisierten Kräfte und Positionen.

Die Implementierung der Regelung auf Basis von (5-22) bedingt die  $n_A$ -malige zusätzliche, zeitliche Differentiation der Aktorkräfte (5-13) und damit zahlreicher nichtlinearer Terme von Manipulator- und Umgebungsmodell. Außerdem ist für die Auswertung des Regelalgorithmus die Messung bzw. Beobachtung weiterer zeitlicher Ableitungen der generalisierten Kräfte und Positionen erforderlich. Nach dem bisher verwendeten Schema, vgl. auch Formel (A3-10), ist die Messung oder anderweitige Bestimmung der zeitlichen Ableitung der (generalisierten) Kontaktkräfte für die Ordnungen 0 bis  $n_A - 1$  und der (generalisierten) Positionen für die Ordnungen 0 bis  $n_A + 1$  für die Implementierung der Regelung erforderlich (Bei vernachlässigbarer Aktordynamik, d. h.  $n_A = 0$ , müssen die Kontaktkräfte abweichend hiervon mindestens bis Ordnung 0 vorliegen). Vorteilhaft ist, dass auf diese Weise der Durchgriff für Kraftausgänge verschwindet. Je höher die Ordnung  $n_A$  der beim Regelungsentwurf zu berücksichtigenden Aktordynamik ist, desto besser funktioniert auch die Kraftregelung bei Modellunsicherheiten und Störungen. Abweichungen zwischen der Soll- und der Istkraft fallen bereits in ihren zeitlichen Ableitungen auf und können daher wesentlich besser durch den Regler kompensiert werden. Allerdings steigt mit der Ordnung der Aktordynamik  $n_A$  auch die Komplexität des Reglers. Dabei stellen nicht nur die zusätzlich zu messenden Größen ein Problem dar; auch die Herleitung und Berechnung der hinzukommenden, zeitlichen Ableitungen von Manipulator- und Umgebungsmodelltermen ist unter Umständen mit erheblichem Aufwand verbunden.

Liegt eine Aktordynamik dritter Ordnung vor, so müssen die einzuregelnden Kräfte und die generalisierten Koordinaten sowie deren ersten zwei bzw. vier zeitlichen Ableitungen für die Auswertung des Regelalgorithmus vorliegen. Dies macht das Vorgehen wenig praktikabel. Möglicherweise genügt es jedoch, eine Aktordynamik erster Ordnung im Regler zu berücksichtigen. Mit  $a_0 = b_0 = 1$  und  $a_1 = T_A$ , wobei  $T_A$  die Zeitkonstante des Aktors ist, ergibt sich bspw. die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{F}_{q,r} = \left( \mathbf{J}_g^T + T_A \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_g^T) \right) \left( \mathbf{Q}_h \begin{bmatrix} \mathbf{y}_h \\ \lambda_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix} + \mathbf{n}_h \right) + T_A \mathbf{J}_g^T \left( \mathbf{Q}_h \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{Q}}_h \begin{bmatrix} \mathbf{y}_h \\ \lambda_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{n}}_h \right) \quad (5-24)$$

für die Soll-Aktorkräfte, wobei für die neuen Stelleingänge

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{S} \cdot \lambda_a + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d, \quad \mathbf{u}_r = \lambda_r, \quad \mathbf{u}_k = \ddot{\mathbf{y}}_k \quad (5-25)$$

gilt. Durch Herleitung von  $\dot{\mathbf{Q}}_h$  und  $\dot{\mathbf{n}}_h$  lässt sich zeigen, dass bei Einbeziehung einer Aktordynamik erster Ordnung zusätzlich die Terme

- $\dot{M}_v$ ,
- $\dot{C}_v$ ,
- $\dot{g}_v$ ,
- $d(\mathbf{J}_g^T)/dt$ ,
- $\dot{M}_u$ ,
- $\dot{n}_u$ ,
- $\dot{S}_{\lambda r}$ ,
- $\dot{S}_{\lambda a}$ ,
- $\ddot{S}_{yk}$ ,
- $\ddot{S}_{yd}$ ,
- $d((\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1})/dt$

sowie

$$\frac{d}{dt} ((\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)^{-1}) = - \frac{d}{dt} ((\mathbf{S} - \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{I} - \mathbf{S}))^{-1})$$

zu berechnen sind. Der Term  $d(\mathbf{J}_g^T)/dt$  kann anhand der Formel

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J}_g^T) = \mathbf{J}_g^T \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_g^{-T}) \cdot \mathbf{J}_g^T \quad (5-26)$$

berechnet werden, da  $\mathbf{J}_g^T$  selbst nicht analytisch vorliegt. Theoretische Ansätze zur Herleitung von  $\mathbf{J}_g^T$  auch für PKM liegen vor, siehe z. B. [DBS97; KYC00], die Herleitung ist aber mit hohem Zeit- und Berechnungsaufwand verbunden. Sowohl die direkte Berechnung von  $\mathbf{J}_g^T$  als auch die Auswertung der Gleichungen zur Laufzeit auf dem Echtzeitrechner stellen bei dem gegebenen System eine Herausforderung dar. Die Inverse  $\mathbf{J}_g^{-T}$  folgt im Falle eines PKM hingegen automatisch bei Herleitung des Manipulatormodells und kann in verhältnismäßig einfacher Form analytisch angegeben werden, vgl. auch Abschnitt 4.2. In der Literatur wird daher empfohlen,  $\mathbf{J}_g^T$  durch numerische Invertierung von  $\mathbf{J}_g^{-T}$  zur Laufzeit zu berechnen, siehe u. a. Dutré et al. [DBS97] und Merlet [Mer06, S. 162f.]. Anstelle von  $d(\mathbf{J}_g^T)/dt$  kann daher die einfachere Gleichung für  $d(\mathbf{J}_g^{-T})/dt$  ermittelt und anhand von (5-26) umgerechnet werden.

Die Korrektheit des beschriebenen Ansatzes zur Einbeziehung von Aktordynamik beim Regelungsentwurf konnte anhand der in Kapitel 3 betrachteten Modelle bestätigt werden. Ein anderer, in der Realisierung wesentlich einfacherer Lösungsansatz besteht darin, die Linearisierung (5-13) beizubehalten. Die nach dieser Formel berechneten Aktorkräfte werden nicht direkt an die Aktorregelung weitergegeben, sondern zunächst durch ein Lead-Glied weiterverarbeitet, das die gleiche Ordnung  $n_A$  wie die Aktordynamik besitzt. Das Lead-Glied kompensiert und ersetzt die Polstellen der Aktorik durch schnellere. Effektiv wird damit die langsame Aktorik (virtuell) durch hinreichend schnelle Aktorik ersetzt. Die Übertragungsfunktion des Lead-Gliedes enthält die inverse Übertragungsfunktion des geschlossenen Druckregelkreises und lautet bspw. für eine Aktordynamik dritter Ordnung (Übertragungsfunktion  $G_{St}$ )

$$G_L(s) = G_{St}^{-1}(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{a_{3,L} s^3 + a_{2,L} s^2 + a_{1,L} s + 1}}_{\text{Neue, „virtuelle“ Aktordynamik } G_{St,v}(s)} . \quad (5-27)$$

Die Parameter  $a_{1,L}$ ,  $a_{2,L}$  und  $a_{3,L}$  müssen so gewählt werden, dass die Reihenschaltung von  $G_L$  und  $G_{St}$ , d. h. das Übertragungsglied  $G_{St,v}$ , hinreichend schnell für die Realisierung der Regelung nach (5-13) ist. Bild 5-3 zeigt das Schema des geschlossenen Regelkreises bei Verwendung dieses Lösungsansatzes.

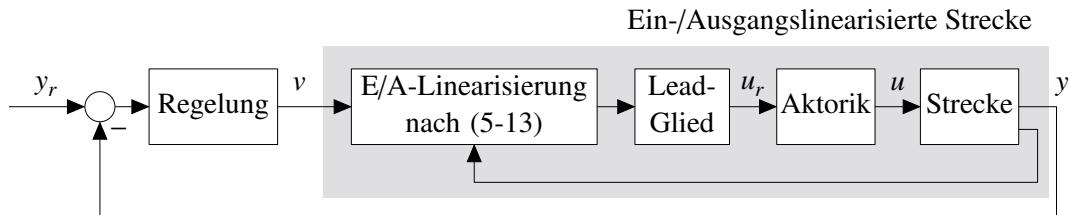


Bild 5-3: Geschlossener Regelkreis mit Aktordynamik und Lead-Glied (Schema)

Die Reihenschaltung aus Ein-/Ausgangslinearisierung (5-13) und Lead-Glied (5-27) stellt eine realisierbare, erweiterte Ein-/Ausgangslinearisierung für einen Manipulator mit begrenzter Aktordynamik dar. Je schneller das Übertragungsglied  $G_{S_{t,v}}$  gewählt wird, desto breiter ist der Frequenzbereich, in dem sich Lead-Glied und Aktordynamik wie ein ideales Übertragungsglied verhalten. Bei sehr hoher Dynamik des Übertragungsglieds geht Bild 5-3 in Bild 5-1 über und die anhand von Bild 5-1 ausgelegten Regler können ohne Anpassungen übernommen werden. Es ist sicherzustellen, dass die durch das Lead-Glied berechneten Stellgrößen weiterhin innerhalb der Stellgrößenbeschränkungen liegen.

Der erstgenannte Ansatz mit den Soll-Aktorkräften  $\mathbf{F}_{q,r}$  nach (5-22) stellt die korrekte Lösung für die Einbeziehung nicht vernachlässigbarer Aktordynamik bei der Regelungssynthese dar. Die praktische Umsetzung dieses Ansatzes ist allerdings mit einem beträchtlichen Mehraufwand im Vergleich zur Situation idealer bzw. vernachlässigbarer Aktorik verbunden. Zum einen müssen weitere, umfassende Terme analytisch hergeleitet werden. Zum anderen erfordert die Auswertung des Regelungsalgorithmus physikalische Größen, die bisher am HNI-Achsprüfstand nicht vorliegen. Die Umsetzung am Prüfstand erfordert folglich weitere Sensorik und/oder eine aufwändige Weiterentwicklung des bestehenden Beobachters. In dieser Dissertationsschrift wird daher im Bedarfsfall auf die Lösung mittels Nachschaltung eines Lead-Gliedes zurückgegriffen, bei der die genannten Gegebenheiten auf eine vergleichsweise einfache Art elegant umgangen werden können. Der bei Erfüllung aller zuvor genannten Voraussetzungen prinzipiell zu bevorzugende, in dieser Arbeit erläuterte Regelungsansatz sollte in Folgearbeiten aufgegriffen werden.

Eine weitere Abhilfemaßnahme, die in ihrer Konsequenz der zweiten Lösungsmöglichkeit für nicht vernachlässigbare Aktordynamik entspricht, besteht in der Verbesserung des geschlossenen Aktorregelkreises, z. B. durch Weiterentwicklung der bestehenden Druckregelung und/oder Einbau leistungsfähigerer Komponenten in das Prüfsystem.

### 5.1.3 Regelung der idealisierten Radaufhängung ohne Elastomerlager

In diesem Abschnitt wird die Regelung des HNI-Achsprüfstands mithilfe des weiterentwickelten Ansatzes nach de Luca und Manes [LM94] beschrieben. Dabei wird das Gesamtmodell  $\Sigma_{G3}$  zugrunde gelegt. Somit weist die Radaufhängung der Regelstrecke nur diejenigen FHG auf, die nicht zur Beschreibung von Elastomerlagern dienen. Es gilt  $n_d = 3$  und

$$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} d_F & x_L & \psi \end{bmatrix}^T. \quad (5-28)$$

Der Grund für die Verwendung eines auf diese FHG reduzierten Streckenmodells besteht darin, dass die Leistungsfähigkeit des Reglers besser evaluiert werden kann, da das Rad-

aufhängungsmodell im Regler in Übereinstimmung mit dem Regelstreckenmodell gewählt werden kann. Bei dem unvereinfachten Streckenmodell  $\Sigma_{G11}$  mit elf FHG ist dies, wie sich im nachfolgenden Abschnitt zeigen wird, nur nach erneuter Anpassung des Algorithmus möglich. Darüber hinaus liegen bei der Regelstrecke  $\Sigma_{G3}$  auch reaktive Kontaktkräfte und -momente in  $T$  vor (im Gegensatz zur Situation mit Lagerelastizitäten, siehe nächster Abschnitt), sodass der Ansatz nach (5-13) gut erprobt werden kann. Im Anschluss können die Vereinfachungen des Streckenmodells aufgehoben und auch für dieses Modell ein funktionaler Regler angegeben werden.

Für beide Streckenmodelle  $\Sigma_{G3}$  und  $\Sigma_{G11}$  gilt, dass ausschließlich dynamische Koordinaten  $y_d$ , keine kinematischen Koordinaten  $y_k$  vorliegen. Selbst der FHG  $\psi$  ist keine kinematische Koordinate  $y_k$ , da die Radnabe nicht masselos ist. Folglich ist  $n_k = 0$  und  $S_{yk}$  existiert nicht.

Die Systemordnung für dieses vereinfachte Modell beträgt  $n = 2 n_d = 6$ . Der totale relative Grad liegt zwischen 6 (wenn alle dynamischen Koordinaten  $y_d$  geregelt werden) und 0 (wenn alle aktiven Kräfte  $\lambda_a$  geregelt werden). Die interne Dynamik weist dementsprechend eine Ordnung zwischen 0 und 6 auf. Nur bei Regelung aller dynamischen Koordinaten  $y_d$  liegt eine exakte Zustandslinearisierung vor.

Die Matrizen  $S_{yd}, \dot{S}_{yd} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  entsprechen der Jacobimatrix der MacPherson-Radaufhängung und ihrer zeitlichen Ableitung nach (4-223), wobei nur die Einträge bzw. Spalten zu den Minimalkoordinaten nach (5-28) verwendet werden. Die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  setzen sich nach (2-79) aus den aktiven Kräften  $\lambda_a \in \mathbb{R}^3$  und den reaktiven Kräften  $\lambda_r \in \mathbb{R}^3$  zusammen. Bei der Festlegung von  $\lambda_a$  und  $\lambda_r$  bzw.  $S_{\lambda a} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  und  $S_{\lambda r} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  bestehen Wahlfreiheiten, vgl. Abschnitt 2.2.3. Die Bedingung der Reziprozität (2-81) muss allerdings stets erfüllt sein. Ausgangspunkt der Festlegung von  $S_{\lambda a} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  und  $S_{\lambda r} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  ist daher die Jacobimatrix  $S_{yd}$ .

Mithilfe des Ansatzes nach (5-13) kann in  $n_d = 3$  Richtungen zwischen einer Positions- und einer Kraftregelung gewählt werden kann. Als Zielsetzung wird hier verfolgt, mithilfe der Selektionsmatrix  $S = \text{diag}[s_1 \ s_2 \ s_3]$  die in Tabelle 5-1 genannten Wahlmöglichkeiten zu realisieren.

	$s_1$	$s_2$	$s_3$
Positionsgrößen	$d_F$	$x_L$	$\psi$
Kraftgrößen	$F_z$	$M_z$	$M_y$

Tabelle 5-1: Verknüpfung der Positions- und Kraftgrößen über die Selektionsmatrix  $S$

Beispielsweise soll mit dem ersten Diagonalelement von  $S$  zwischen der Positionsregelung des Dämpferwegs  $d_F$  und der Vertikalkraft  $F_z$  gewählt werden können. Es folgt die Beschreibung einer möglichen Realisierung dieses Ziels.

Die reaktiven Kräfte  $\lambda_r$  werden hier so festgelegt, dass sie eine physikalische Bedeutung besitzen. Naheliegend ist, diejenigen Einträge aus  $\tau$  zu wählen, die nicht bei der Auswahl mittels  $S$  berücksichtigt wurden, d. h.

$$\lambda_r = [F_x \ F_y \ M_x]^T . \quad (5-29)$$

Mit dieser Wahl folgt aus (2-79), dass

$$\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{\lambda a31} & s_{\lambda a32} & s_{\lambda a33} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{\lambda a51} & s_{\lambda a52} & s_{\lambda a53} \\ s_{\lambda a61} & s_{\lambda a62} & s_{\lambda a63} \end{bmatrix}}_{S_{\lambda a}} \cdot \lambda_a + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\lambda r31} & s_{\lambda r32} & s_{\lambda r33} \\ 0 & 0 & 1 \\ s_{\lambda r51} & s_{\lambda r52} & s_{\lambda r53} \\ s_{\lambda r61} & s_{\lambda r62} & s_{\lambda r63} \end{bmatrix}}_{S_{\lambda r}} \cdot \lambda_r . \quad (5-30)$$

Da  $S_{yk}$  aufgrund des Fehlens kinematischer Koordinaten  $y_k$  nicht existiert, bestehen nach (2-81) keine Bedingungen an die Matrix  $S_{\lambda a}$ . Hier wird

$$S_{\lambda a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-31)$$

gewählt. Auf diese Weise enthält  $F_z$  nur die erste,  $M_z$  nur die zweite und  $M_y$  nur die dritte Komponente aus  $\lambda_a$ , wobei die Abfolge mit der in Tabelle 5-1 übereinstimmt.

Für die Matrix  $S_{\lambda r}$  muss nach (2-81)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_{yd11} & s_{yd21} & s_{yd31} & s_{yd41} & s_{yd51} & s_{yd61} \\ s_{yd12} & s_{yd22} & s_{yd32} & s_{yd42} & s_{yd52} & s_{yd62} \\ s_{yd13} & s_{yd23} & s_{yd33} & s_{yd43} & s_{yd53} & s_{yd63} \end{bmatrix}}_{S_{yd}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\lambda r31} & s_{\lambda r32} & s_{\lambda r33} \\ 0 & 0 & 1 \\ s_{\lambda r51} & s_{\lambda r52} & s_{\lambda r53} \\ s_{\lambda r61} & s_{\lambda r62} & s_{\lambda r63} \end{bmatrix}}_{S_{\lambda r}} = \mathbf{0} \quad (5-32)$$

erfüllt sein. Hiermit gleichbedeutend ist, dass

$$\begin{bmatrix} s_{yd11} & s_{yd21} & s_{yd41} \\ s_{yd12} & s_{yd22} & s_{yd42} \\ s_{yd13} & s_{yd23} & s_{yd43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{yd31} & s_{yd51} & s_{yd61} \\ s_{yd32} & s_{yd52} & s_{yd62} \\ s_{yd33} & s_{yd53} & s_{yd63} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{\lambda r31} & s_{\lambda r32} & s_{\lambda r33} \\ s_{\lambda r51} & s_{\lambda r52} & s_{\lambda r53} \\ s_{\lambda r61} & s_{\lambda r62} & s_{\lambda r63} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5-33)$$

und es folgt unter der Bedingung, dass die Matrix

$$\begin{bmatrix} s_{yd31} & s_{yd51} & s_{yd61} \\ s_{yd32} & s_{yd52} & s_{yd62} \\ s_{yd33} & s_{yd53} & s_{yd63} \end{bmatrix}$$

regulär ist, dass

$$\begin{bmatrix} s_{\lambda r31} & s_{\lambda r32} & s_{\lambda r33} \\ s_{\lambda r51} & s_{\lambda r52} & s_{\lambda r53} \\ s_{\lambda r61} & s_{\lambda r62} & s_{\lambda r63} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_{yd31} & s_{yd51} & s_{yd61} \\ s_{yd32} & s_{yd52} & s_{yd62} \\ s_{yd33} & s_{yd53} & s_{yd63} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} s_{yd11} & s_{yd21} & s_{yd41} \\ s_{yd12} & s_{yd22} & s_{yd42} \\ s_{yd13} & s_{yd23} & s_{yd43} \end{bmatrix}. \quad (5-34)$$

Damit ist auch  $S_{\lambda r}$  bekannt.

Der Soll-/Istwert-Vergleich der Kraftregelung erfolgt in den generalisierten Kraftgrößen  $\lambda_a$  und  $\lambda_r$ , nicht in den Kontaktkräften und -momenten  $\tau$ . Für die Umrechnung zwischen den Istwerten  $\tau$  und  $\lambda_a$ ,  $\lambda_r$  gilt

$$\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{\lambda a} & S_{\lambda r} \end{bmatrix}}_{S_\lambda} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -s_{\lambda r 31} & -s_{\lambda r 32} & 1 & -s_{\lambda r 33} & 0 & 0 \\ -s_{\lambda r 61} & -s_{\lambda r 62} & 0 & -s_{\lambda r 63} & 0 & 1 \\ -s_{\lambda r 51} & -s_{\lambda r 52} & 0 & -s_{\lambda r 53} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_\lambda^{-1}} \cdot \tau. \quad (5-35)$$

Aufgrund der vorliegenden speziellen Struktur der Inversen  $S_\lambda^{-1}$  eignet sie sich auch zur Umrechnung gegebener Sollwerte für  $\tau$ , in die generalisierten Sollgrößen  $\lambda_{a,r}$ ,  $\lambda_{r,r}$ . So sind die Sollwerte für  $F_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  jeweils ausschließlich in den damit assoziierten Einträgen der aktiven Kräfte  $\lambda_{a,r}$  enthalten. Ist bspw. der erste Diagonaleintrag von  $S$  Null, so wird der Dämpferweg  $d_F$  und nicht die Vertikalkraft  $F_z$  geregelt. In diesem Fall findet sich der (beliebig vorzugebende) Sollwert für  $F_z$  nur im ersten Eintrag von  $\lambda_{a,r}$  wieder, der im Rahmen der Regelung mit dem festgelegten  $S$  keine weitere Bedeutung besitzt.

Anhand von (5-35) ist leicht zu erkennen, dass  $\lambda_a$  im Gegensatz zu  $\lambda_r$  keine physikalische Bedeutung hat. Es handelt sich jeweils um eine zusammengesetzte Größe aus  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_x$  sowie  $F_z$ ,  $M_y$  oder  $M_z$ .

Alle relevanten Größen und Umrechnungen für die Implementierung der Regelung sind damit beschrieben. An dieser Stelle wird noch kurz eine Verallgemeinerung der Berechnung von  $S_{\lambda r}$  angegeben. Sie ist weniger anschaulich als das oben skizzierte Vorgehen, das verallgemeinerte Vorgehen kann aber auch dann eingesetzt werden, wenn ein Umgebungsmodell mit vier, fünf oder sechs FHG im Regler verwendet wird.

Bei  $S_{\lambda a} \in \mathbb{N}^{6 \times n_d}$  handelt es sich um eine sog. dünnbesetzte Matrix. Die Einträge

$$(3; 1), \quad (6; 2), \quad (5; 3)$$

besitzen den Wert 1. Aus der Matrix lässt sich ablesen, welche Kraft bzw. welches Moment aus dem Vektor  $\tau$  (Zeilenindex) mit welchem Element des Vektors der dynamischen Koordinaten  $y_d$  (Spaltenindex) korrespondiert. Aus der alleinigen Angabe eines Vektors

$$\mathbf{i}_a = [3 \ 6 \ 5], \quad (5-36)$$

der die Zeilenindizes enthält, kann die Matrix  $S_{\lambda a} \in \mathbb{N}^{6 \times n_d}$  eindeutig konstruiert werden. Der zu einem Zeilenindex gehörige Spaltenindex entspricht dabei der Stelle in  $\mathbf{i}_a$ , an der der Zeilenindex steht.

Entsprechend  $\mathbf{i}_a$  sind in

$$\mathbf{i}_r = [1 \ 2 \ 4] \quad (5-37)$$

die Indizes der Einträge von  $\tau$  enthalten, die den reaktiven Kräften  $\lambda_r$  entsprechen. Der Vektor  $\mathbf{i}_r$  geht aus  $\mathbf{i}_a$  hervor, denn  $\mathbf{i}_r$  umfasst diejenigen ganzen Zahlen aus dem Intervall

[1; 6], die nicht in  $\mathbf{i}_a$  enthalten sind. Anhand von  $\mathbf{i}_r$  lässt sich (analog zu  $\mathbf{S}_{\lambda a}$  aus  $\mathbf{i}_a$ ) eine dünnbesetzte Matrix  $\mathbf{M}_{\lambda r} \in \mathbb{N}^{6 \times (6-n_d)}$  konstruieren. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich

$$\mathbf{M}_{\lambda r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5-38)$$

Auf dieser Grundlage lässt sich herleiten, dass  $\mathbf{S}_{\lambda r}$  anhand der Formel

$$\mathbf{S}_{\lambda r} = -\mathbf{S}_{\lambda a} \cdot (\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \cdot \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \mathbf{M}_{\lambda r} + \mathbf{M}_{\lambda r} \cdot \mathbf{I}_{(6-n_d) \times (6-n_d)} \quad (5-39)$$

berechnet werden kann. Bei einem Umgebungsmodell mit vier oder fünf FHG im Regler enthält  $\mathbf{i}_a$  vier bzw. fünf Einträge,  $\mathbf{i}_r$  entsprechend weniger. Weist das Umgebungsmodell sechs FHG auf, so hat  $\mathbf{i}_a$  sechs Einträge und  $\mathbf{i}_r$  ist leer. In diesem Fall entfällt  $\mathbf{S}_{\lambda r}$ , d. h. es gibt nur dynamische Koordinaten  $y_d$  und aktive Kräfte  $\lambda_a$ , keine reaktiven Kräfte  $\lambda_r$ .

Das Strukturbild der implementierten Regelungsstruktur zeigt Bild 5-4.

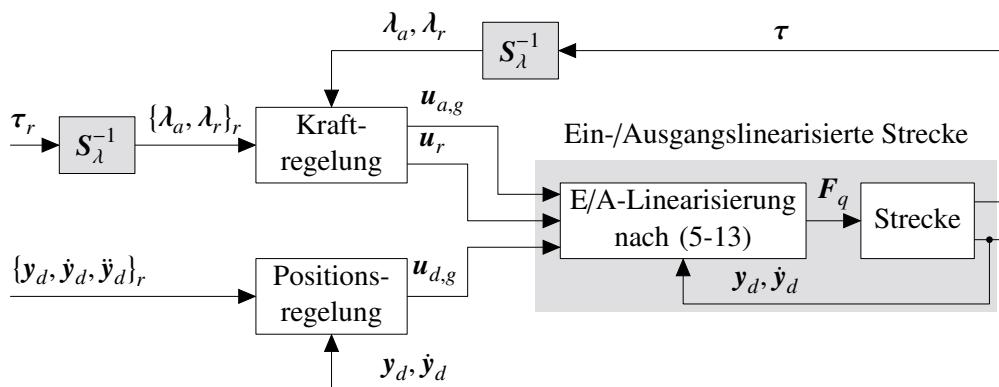


Bild 5-4: Implementierte hybride Kraft-/Positionregelung nach [LM94]

Die neuen Stelleingänge  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_{a,g}$  und  $\mathbf{u}_{d,g}$  können bspw. nach (2-55) und (2-57) gebildet werden. Für die Realisierung dieser Regelung sind die Größen  $y_d$ ,  $\dot{y}_d$  und  $\tau$  erforderlich. Sie müssen gemessen oder beobachtet werden. Ein Beobachter für  $z$ ,  $\dot{z}$ , wie er bisher zum Einsatz kommt, ist prinzipiell nicht notwendig, da sich diese Größen aus den Zuständen  $\mathbf{y}_d$  und  $\dot{\mathbf{y}}_d$  berechnen lassen, vgl. Abschnitt 4.3.

Die gemäß diesen Erläuterungen implementierte Regelung wird nun in der Simulation am Streckenmodell  $\Sigma_{G3}$  erprobt. Dabei werden vier verschiedene Ausprägungen der Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  untersucht:

- $\mathbf{S}_{31} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0]$ ,
- $\mathbf{S}_{32} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0]$ ,
- $\mathbf{S}_{33} = \text{diag} [1 \ 0 \ 0]$  und
- $\mathbf{S}_{34} = \text{diag} [0 \ 0 \ 0]$ .

Die Regelung des Moments  $M_y$  ist prinzipiell ebenfalls möglich. An dieser Stelle wird nur der Fall des unbremsten Rades betrachtet, d. h. der FHG  $\psi$  ist nicht gesperrt.

Zum Vergleich wird die Schlechtweganregung herangezogen, die bereits in Kapitel 4 zur Modellvalidierung eingesetzt wurde. Die nachfolgenden Soll-/Ist-Vergleiche werden anhand des immer gleichen zeitlichen Abschnitts aus dieser Sollvorgabe durchgeführt. Der gewählte Abschnitt ist für die Regelung besonders anspruchsvoll. Für den Drehwinkel  $\psi$  sowie die Verschiebung  $x_L$  des Lenkgestänges enthält die Schlechtweganregung keine Sollvorgaben. Diese Werte werden, soweit erforderlich, konstant auf Null gesetzt.

Im ersten Schritt wird die Aktordynamik vernachlässigt, d. h. es werden ideale Stellglieder angenommen. Folglich gilt  $\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_{q,r}$ . In diesem Fall können die jeweils mittels  $S$  gewählten Regelgrößen aus  $y_d$  und  $\lambda_a$  sowie  $\lambda_r$  ideal vorgesteuert werden. Für  $S_{31}, S_{32}, S_{33}$  und  $S_{34}$  können also selbst mit den Reglerverstärkungen  $K_{P,f}, K_{I,f}, K_{D,p}, K_{P,p} = \mathbf{0}$  nur durch die Vorgabe von  $\ddot{y}_{d,r}, \lambda_{a,r}$  bzw.  $\lambda_{r,r}$  die Soll-Zeitverläufe herbeigeführt werden. Es kommt nur zu einer sehr geringen Drift zwischen den Soll- und Ist-Positionen, die sich auf Ungenauigkeiten bei der numerischen Integration zurückführen lässt. So kann der in einem bestimmten Zeitraum entstehende Fehler um den Faktor  $k$  reduziert werden, wenn die Rechenschrittweite um den Faktor  $k$  verkleinert wird.

Dieses Ergebnis ist insoweit erst einmal nicht überraschend, da die Strecke mit ihrem idealen Modell vorgesteuert wird. Es beweist aber die Richtigkeit der hergeleiteten Berechnungsformel für die Aktorkräfte mit Selektionsmatrix  $S$  nach (5-13). Ebenso ist damit nachweislich die Festlegung von  $S_{\lambda r}$  und  $S_{\lambda a}$  bzw.  $\lambda_r$  und  $\lambda_a$  nach dem beschriebenen Vorgehen korrekt.

Die Kraft- und Positionsregler werden anhand des Bildes 5-1 als Eingrößenregelkreise entworfen. Hier werden Regelungen nach (2-55) und (2-57) verwendet. Da die Linearisierung die gleiche Streckenübertragungsfunktion für Kräfte und Positionen in allen Richtungen herbeiführt, werden die Kraft- und Positionsregelungsparameter für alle Richtungen identisch gewählt, d. h.

$$\mathbf{K}_{P,f} = K_{P,f} \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_{I,f} = K_{I,f} \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_{D,p} = K_{D,p} \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_{P,p} = K_{P,p} \cdot \mathbf{I}. \quad (5-40)$$

Die Übertragungsfunktion der Kraftregelstrecke fällt nach der Ein-/Ausgangslinearisierung besonders einfach aus, vgl. Abschnitt 5.1.2. Zur Regelung eignet sich bspw. ein P-Regler ( $K_{I,f} = 0$ ). Der geschlossene Kraftregelkreis verhält sich in diesem Fall wie ein P-Glied. Der Regelkreis ist nicht stationär genau, da die Verstärkung  $K_{P,f} / (1 + K_{P,f})$  beträgt. Bei hohen Verstärkungen geht der Fehler gegen Null. Er lässt sich zudem durch eine zusätzliche Verstärkung des Mess- oder Sollwertes für die Kraft vor dem Soll-/Istwert-Vergleich kompensieren. Mit einem P-Regler lassen sich theoretisch beliebig hohe Frequenzanteile in der vorgegebenen Sollkraft ideal nachbilden. Praktisch ist dies bspw. aufgrund begrenzter Aktordynamik nicht möglich. Statt des P-Reglers muss ein Regler verwendet werden, der eine begrenzte Bandbreite für den geschlossenen Kraftregelkreis herbeiführt. Dies ist beim I-Regler ( $K_{P,f} = 0$ ) der Fall. Für diesen verhält sich der geschlossene Kraftregelkreis wie ein  $PT_1$ -Übertragungsglied, dessen Eckkreisfrequenz gerade der Reglerverstärkung  $K_{I,f}$  entspricht. Eine 3 dB-Bandbreite von  $f_{GRK,f}$  folgt demnach bei der Festlegung von  $K_{I,f} = 2\pi \cdot f_{GRK,f}$ . Der Regler arbeitet außerdem stationär genau. Theoretisch lassen sich bei Zutreffen des einfachen Streckenmodells  $G_S(s) = 1$  sowohl mit einem I- als auch einem P-Regler beliebig hohe Verstärkungen  $K_{I,f}$  bzw.  $K_{P,f}$  ansetzen, ohne dass das System instabil wird.

Für den geschlossenen Positionsregelkreis resultiert bei Verwendung des Reglers nach (2-57) das  $\text{PT}_2$ -Übertragungsverhalten

$$F_W(s) = \frac{Y_d(s)}{Y_{d,r}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K_{P,p}} s^2 + \frac{K_{D,p}}{K_{P,p}} s + 1}. \quad (5-41)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Standardform eines  $\text{PT}_2$ -Gliedes folgen die Zusammenhänge

$$K_{D,p} = 2 D_p \omega_p, \quad K_{P,p} = \omega_p^2 \quad (5-42)$$

zwischen den Reglerverstärkungen sowie Eckkreisfrequenz und Dämpfung des geschlossenen Regelkreises. Bei Wahl von  $\omega_p = 2\pi \cdot f_{GRK,p}$  und  $D_p = 1$  resultiert eine 6 dB-Bandbreite von  $f_{GRK,p}$  für den Positionsregelkreis.

Den folgenden Simulationsergebnissen liegt dieser PD-Positionsregler sowie der I-Kraftregler mit

$$K_{I,f} = 2\pi \cdot 50, \quad \omega_p = 2\pi \cdot 50, \quad D_p = 1 \quad (5-43)$$

zugrunde. Dieser Regler erhält zur einfacheren Kennzeichnung der Bilder in diesem Kapitel den Kürzel  $\Sigma_{R,LM3}$ .

Bild 5-5 zeigt den sich ergebenden Zeitverlauf der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$ , die damit assoziierten dynamischen Koordinaten  $y_d$  (soweit zutreffend) sowie den zugehörigen Sollwert-Zeitverlauf (Position oder Kraft) für die Selektionsmatrix  $S_{31}$ . Der Regler enthält dabei die Bewegungsgleichungen des 13-Starrkörper-Hexapodmodells  $\Sigma_{H13}$ .

Die Soll- und Ist-Zeitverläufe stimmen ideal überein. Erwähnenswert ist, dass zu den Zeitpunkten  $t = 3,8$  s und  $t = 6,6$  s der Druckpuffer des Federbeins einsetzt. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Kraft  $F_z$  stark anwächst und der Dämpferweg  $d_F$  verhältnismäßig klein ist. Das Ereignis ist in allen folgenden Plots wiederzufinden, in denen der Dämpferweg  $d_F$  anstelle der Vertikalkraft  $F_z$  geregelt wird. Da der Druckpuffer auch im Radaufhangungsmodell des Reglers enthalten ist, hat dies keinen Einfluss auf die Regelgüte.

Einen Eindruck der Bedeutung des Manipulatormodells für die Regelung vermittelt Bild 5-6. Es zeigt die Soll- und Ist-Zeitverläufe für die gleichen Rahmenbedingungen wie in Bild 5-5 mit dem Unterschied, dass das 1-Starrkörper-Modell des Hexapod  $\Sigma_{H1}^*$  im Regler verwendet wird.

Aus dem Bild geht hervor, dass die Vereinfachung des Manipulatormodells trotz der hohen Reglerverstärkungen die Regelgüte in den kraftgeregelten Richtungen, bspw. für das Moment  $M_x$  zwischen  $t = 4,6$  und 5 s, geringfügig beeinträchtigt. Dies lässt sich auf den Durchgriff der Aktorkräfte  $F_q$  auf die Kontaktkräfte  $\tau$  zurückführen (Differenzordnung  $\delta_i = 0$ ), wodurch Abweichungen zwischen der Regelstrecke und dem Manipulator- und Umgebungsmodell im Regler unmittelbare Auswirkung auf das Regelergebnis haben. Die Regelung des Dämpferwegs  $d_F$  weist hingegen keine reduzierte Regelgüte gegenüber Bild 5-5 auf. Hier beträgt die Differenzordnung  $\delta_i = 2$  und die Modellabweichung kann wesentlich besser durch den Regler abgefangen werden. Für die Erzielung einer Regelgüte, die mit der Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  vergleichbar ist, müssen höhere Reglerverstärkungen für den Kraftregler verwendet werden.

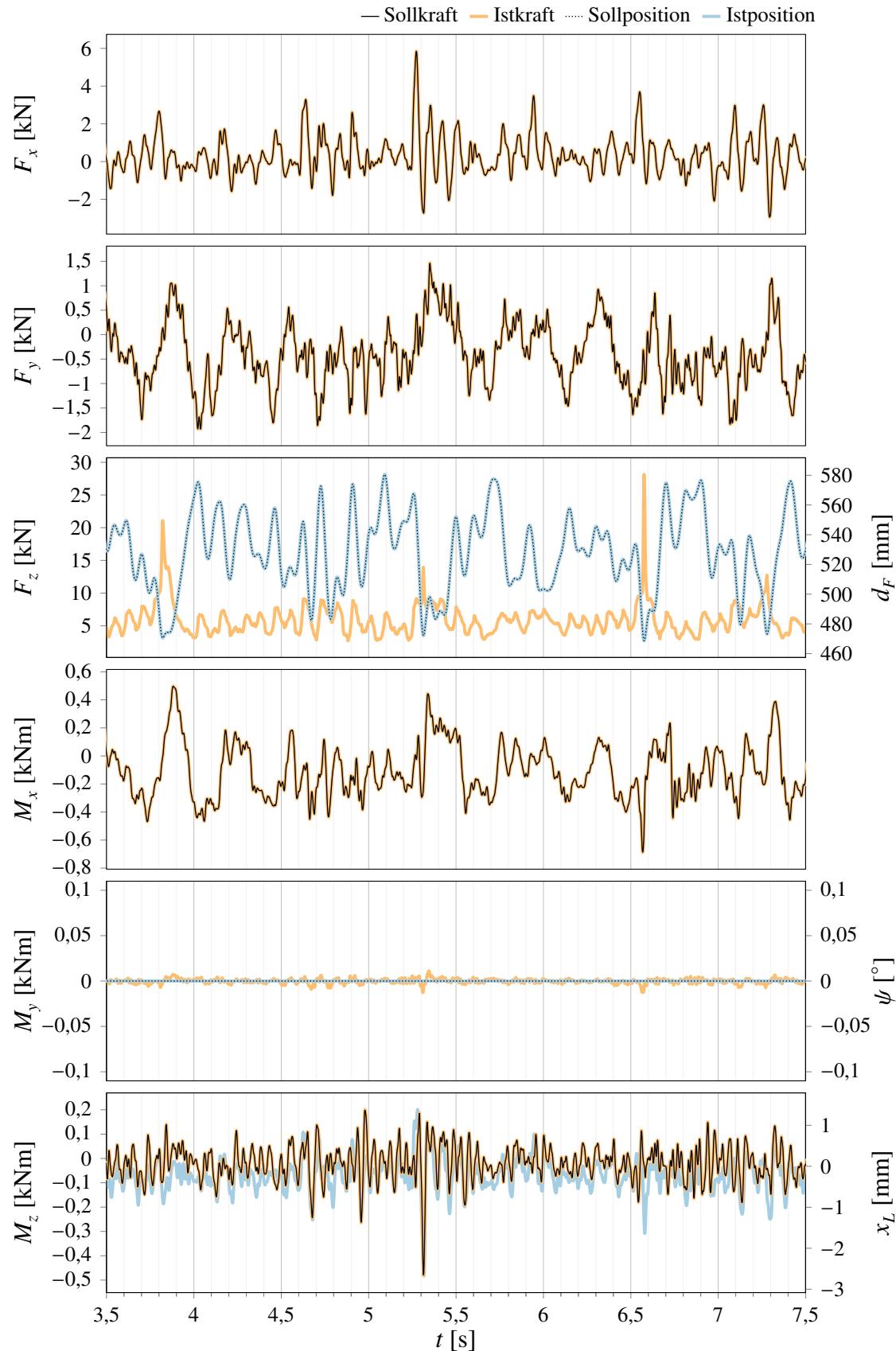


Bild 5-5: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{31} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0]$

(Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

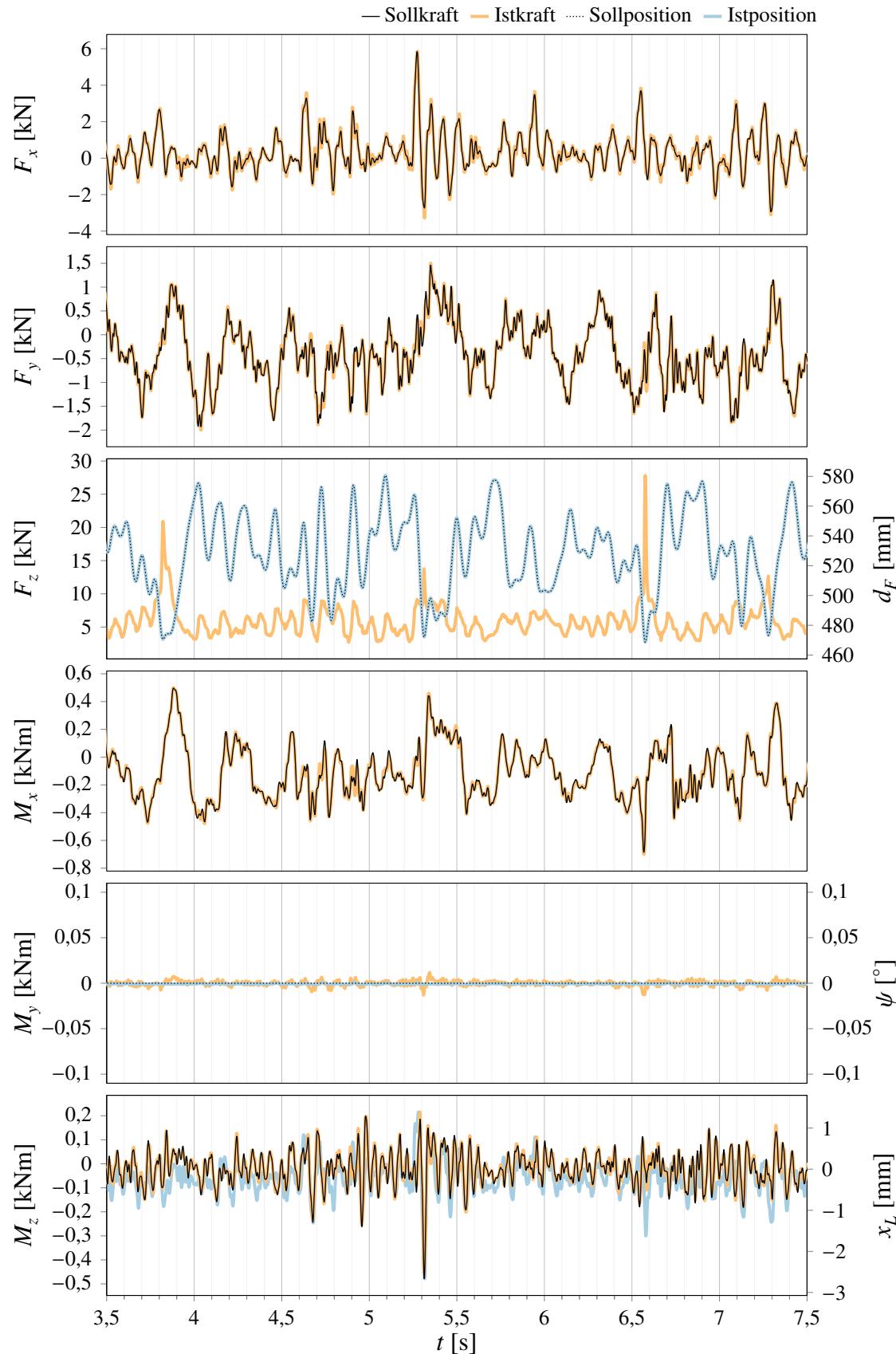


Bild 5-6: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{31} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

Zu den Zeitverläufen für die Selektionsmatrizen  $S_{32}$ ,  $S_{33}$  und  $S_{34}$  lassen sich vergleichbare Aussagen tätigen wie für die Zeitverläufe zu  $S_{31}$  (Bilder 5-5 und 5-6). Aus Platzgründen befinden sich die entsprechenden Bilder für diese Selektionsmatrizen im Anhang, siehe Bilder A7-1 bis A7-6.

Bild 5-7 stellt die relativen RMS-Fehler für die vier Selektionsmatrizen bei Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  sowie des Modells  $\Sigma_{H1}^*$  für den Hexapod im Regler gegenüber. Dieser Kennwert ist als Quotient aus dem RMS der Regelabweichung  $e$  und dem RMS des Sollwerts  $\tau_r$  bzw.  $y_{d,r}$  definiert. Zu beachten ist, dass er hier für die Regelung von  $\psi$  und  $x_L$  gegen unendlich strebt, da der Sollwert jeweils konstant Null ist. In den in Bild 5-7 dargestellten Säulendiagrammen wurden diese Werte nicht eingetragen. Die hinreichende Regelgüte dieser Größen geht auch aus den entsprechenden Zeitverläufen hervor. Die für die Beurteilung von Belastungsgrößen üblicherweise herangezogene relative Schädigung wird an dieser Stelle nicht betrachtet, da der Lehrstuhl noch nicht über eine geeignete Schädigungsanalysesoftware verfügt.

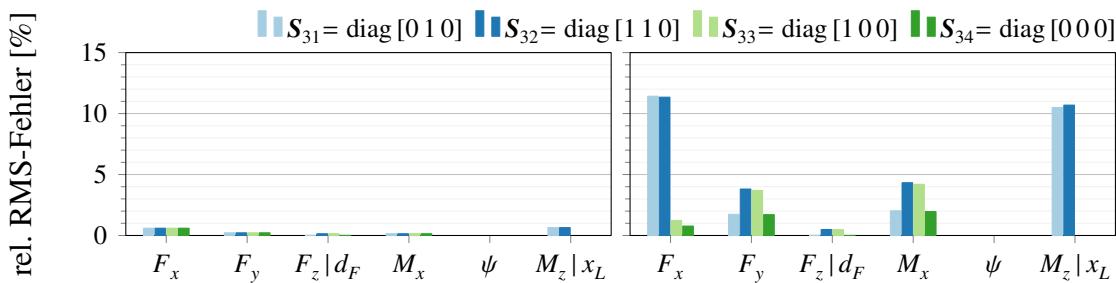


Bild 5-7: Relativer RMS-Fehler mit den Modellen  $\Sigma_{H13}$  (links) bzw.  $\Sigma_{H1}^*$  (rechts) im Regler (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

Aus Bild 5-7 geht hervor, dass die in Abschnitt 2.1.2 genannte Grenze von 5-10 % für den relativen RMS-Fehler bei Regelung mithilfe des Hexapodmodells  $\Sigma_{H13}$  problemlos eingehalten werden kann. Sämtliche Werte liegen dort unter 1 %. Wird hingegen das demgegenüber einfachere Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$  im Regler verwendet, so liegen die relativen RMS-Fehler höher. Für die Selektionsmatrizen  $S_{31}$  und  $S_{32}$ , die sich durch die Regelung des Moments  $M_z$  anstelle der Lenkstangenverschiebung  $x_L$  auszeichnen, wird die Obergrenze des RMS-Fehlers leicht überschritten. Die Werte können durch weitere Erhöhung der Kraftregelungsverstärkung verbessert werden. Die Verwendung des relativen RMS-Fehlers für die Beurteilung von Belastungsgrößen ist allerdings nicht üblich. Eine verlässliche Aussage über die Tauglichkeit der Regelungen für die Betriebsfestigkeitsuntersuchung ist nur durch Ermittlung der relativen Schädigung möglich.

In den bisherigen Ausführungen wurde die Aktordynamik im Rahmen der Regelungssynthese vernachlässigt. Zum Abschluss dieses Abschnitts ist daher zu prüfen, ob die entworfene Regelung auch dann funktional ist, wenn die Aktordynamik im Streckenmodell enthalten ist. Andernfalls muss der Regelungsentwurf die Aktordynamik einbeziehen, wie es in Abschnitt 5.1.2 vorgeschlagen wurde.

Der geschlossene Aktorregelkreis verhält sich in guter Näherung wie ein Übertragungsglied dritter Ordnung mit einer 3 dB-Bandbreite von 213 Hz, vgl. Abschnitt 2.2.1. Werden die Parameter der überlagerten I-Kraft- und PD-Positionsregelungen (5-43) beibehalten, so

zeigt das System instabiles Verhalten. Die Aktordynamik kann beim Regelungsentwurf also nicht vernachlässigt werden.

An dieser Stelle stellt sich die interessante Frage, wie hoch die Aktordynamik für das Gelingen des Regelungsentwurfs ohne weitere Modifikationen (vgl. Abschnitt 5.1.2) sein muss. Zu ihrer Beantwortung wurde eine Reihe von Simulationen durchgeführt. Dabei wurde jeweils für einen festen Parametersatz der äußeren Kraft- und Positionsregelungen für die beiden praxisrelevanten Selektionsmatrizen  $S_{31}$  und  $S_{32}$  geprüft, ab welcher Bandbreite eine gegebene Aktordynamik zu stabilem Verhalten führt. Untersucht wurden hierbei PT<sub>1</sub>-, PT<sub>2</sub>- und PT<sub>3</sub>-Glieder, wobei die PT<sub>2</sub>- und PT<sub>3</sub>-Glieder aus zusammengesetzten PT<sub>1</sub>-Gliedern mit der gleichen Eckfrequenz bestehen. Die ermittelte, kritische Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  hat daher die Bedeutung einer 3 dB-, 6 dB- bzw. 9 dB-Bandbreite. Zur Anregung wurde das bereits bekannte Schlechtwegprofil verwendet. Der Regler enthält bei allen Simulationen stets das Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ .

Bild 5-8 zeigt das Simulationsergebnis. Die aufgetragenen Werte sind dabei als Stabilitätsgrenze zu interpretieren. In der Praxis ist folglich ein nochmal etwas höherer Wert für die Aktordynamik erforderlich. Für PT<sub>1</sub>-, PT<sub>2</sub>- und PT<sub>3</sub>-Aktordynamik sind jeweils vier Verläufe zu sehen, da bei der Kraftregelung sowohl der Fall eines P-Anteils von  $K_{P,f} = 0$  als auch  $K_{P,f} = 0,75$  für beide Selektionsmatrizen  $S_{31}$  und  $S_{32}$  untersucht wurde.

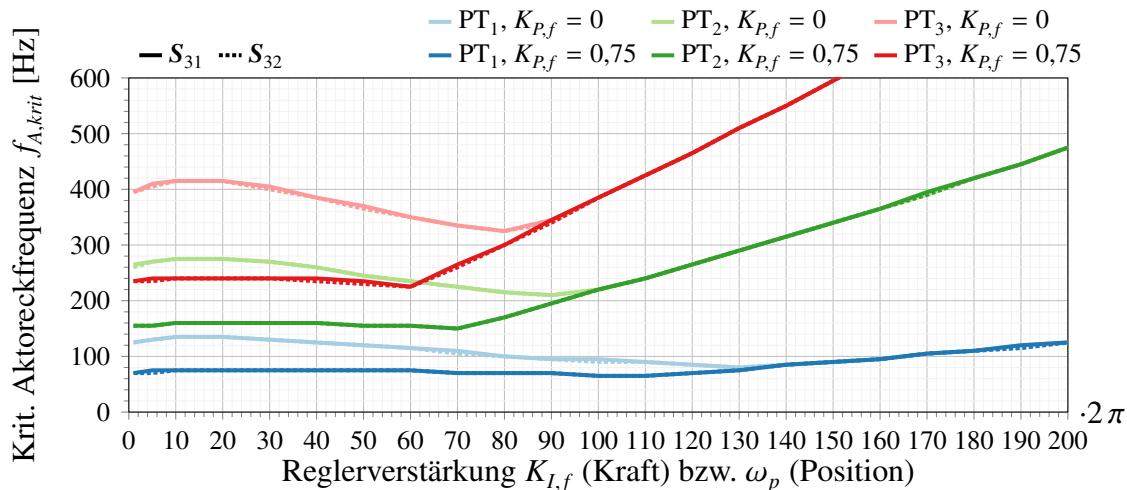


Bild 5-8: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  in Abhängigkeit der Parametrierung der äußeren Regelkreise (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

Die Abszisse in Bild 5-8 kann für  $K_{P,f} = 0$  als 3 dB- bzw. 6 dB-Bandbreite der äußeren Regelkreise verstanden werden. Offenbar besteht nur für höhere Frequenzen ein in guter Näherung linearer Zusammenhang zwischen  $f_{A,krit}$  und der Dynamik der äußeren Regelkreise. Für kleinere Frequenzen ist der Zusammenhang nichtlinear. Der Verlauf besitzt ein Minimum vor dem Übergang in den linearen Bereich. Über die Erweiterung des Kraftreglers um einen P-Anteil kann  $f_{A,krit}$  für kleinere Bandbreiten der äußeren Positions- und Kraftregelungen gesenkt werden. Der lineare Bereich wird hierdurch größer; eine Verlagerung der Geraden nach unten ist jedoch nicht zu beobachten. Die Selektionsmatrix ( $S_{31}$  oder  $S_{32}$ ) scheint keinen nennenswerten Einfluss auf  $f_{A,krit}$  zu haben. Diese Aussagen gelten für PT<sub>1</sub>-, PT<sub>2</sub>- und PT<sub>3</sub>-Aktordynamik gleichermaßen. Für einen funktionalen

Regler muss durch das Lead-Glied (vgl. Abschnitt 5.1.2) herbeigeführt werden, dass die Reihenschaltung aus Lead-Glied und Aktordynamik eine Eckfrequenz oberhalb von  $f_{A,krit}$  besitzt.

Möglicherweise können diese unter erheblichem Berechnungsaufwand ermittelten Stabilitätsgrenzen zumindest teilweise mit vergleichsweise einfachen Berechnungen an linearen Ersatzsystemen bestimmt werden. Unter der Annahme, dass die Ein-/Ausgangslinearisierung und die Aktordynamik vertauscht werden können, vgl. Bild 5-2, folgt für die geschlossenen Kraft- und Positionsregelkreise

$$G_f(s) = \frac{K_{P,f} s + K_{I,f}}{(G_{St}^{-1} + K_{P,f}) s + K_{I,f}}, \quad G_p(s) = \frac{K_{P,p}}{G_{St}^{-1} s^2 + K_{D,p} s + K_{P,p}}. \quad (5-44)$$

Auf Basis dieser Übertragungsfunktionen können bspw. durch Anwendung des Hurwitz-Kriteriums Bedingungen an die Aktoreckfrequenz  $f_A$  hergeleitet werden, unter denen eine stabile Regelung resultiert. Für die  $PT_1$ -Aktordynamik folgt aus dem geschlossenen Positionsregelkreis, dass

$$f_{A,PT_1} > \frac{1}{2 D_p} f_{GRK,p}. \quad (5-45)$$

Der geschlossene Kraftregelkreis ist für diese Aktordynamik unabhängig von  $f_A$  (für alle  $K_{I,f} > 0, K_{P,f} > -1$ ) stabil. Bei  $PT_2$ -Aktordynamik lassen sich die Bedingungen

$$f_{A,PT_2} > \frac{D_p^2 + 1}{D_p} f_{GRK,p}, \quad f_{A,PT_2} > \frac{1}{2(K_{P,f} + 1)} f_{GRK,f} \quad (5-46)$$

herleiten. Für die  $PT_3$ -Aktordynamik folgen aus dem geschlossenen Kraftregelkreis die Bedingungen

$$f_{A,PT_3} > \frac{9}{8 - K_{P,f}^2 + 7 K_{P,f}} f_{GRK,f}, \quad K_{P,f} < 8. \quad (5-47)$$

Die Anwendung des Hurwitz-Kriteriums auf den geschlossenen Positionsregelkreis resultiert hingegen in nichtlineare Bedingungen an  $f_{A,PT_3}$ . Um die Konsistenz mit Bild 5-8 zu wahren, wurde bei diesen Herleitungen vorausgesetzt, dass die  $PT_2$ - und  $PT_3$ -Aktormodelle aus zusammengesetzten  $PT_1$ -Gliedern mit der gleichen Eckfrequenz bestehen.

Werden die aus dieser Herleitung folgenden Bedingungen in Bild 5-8 eingetragen, so liegen sie - auch im näherungsweise linearen Bereich - stets unter den in der Simulation ermittelten. Diese relativ einfach ermittelten Stabilitätsgrenzen können daher nicht verlässlich für das nichtlineare System herangezogen werden. Unter Umständen können sie jedoch als notwendiges Stabilitätskriterium dienen.

In Bild 5-8 wurden die Fälle  $K_{P,f} = 0$  sowie  $K_{P,f} = 0,75$  betrachtet. Mithilfe von Simulationen wurde darüber hinaus untersucht, inwiefern die Stabilitätsgrenze bzw. die kritische Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  durch Variation von  $K_{P,f}$  beeinflusst werden kann. Bild 5-9 zeigt das Ergebnis für die  $PT_3$ -Aktordynamik.

Offenbar kann durch Erhöhung des Faktors  $K_{P,f}$  der lineare Bereich vergrößert und die minimal erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  gesenkt werden. Dies gilt bis zum Verstärkungsfaktor  $K_{P,f} = 1,25$ . Für Verstärkungsfaktoren  $K_{P,f} \geq 1,5$  ist die Simulation hingegen

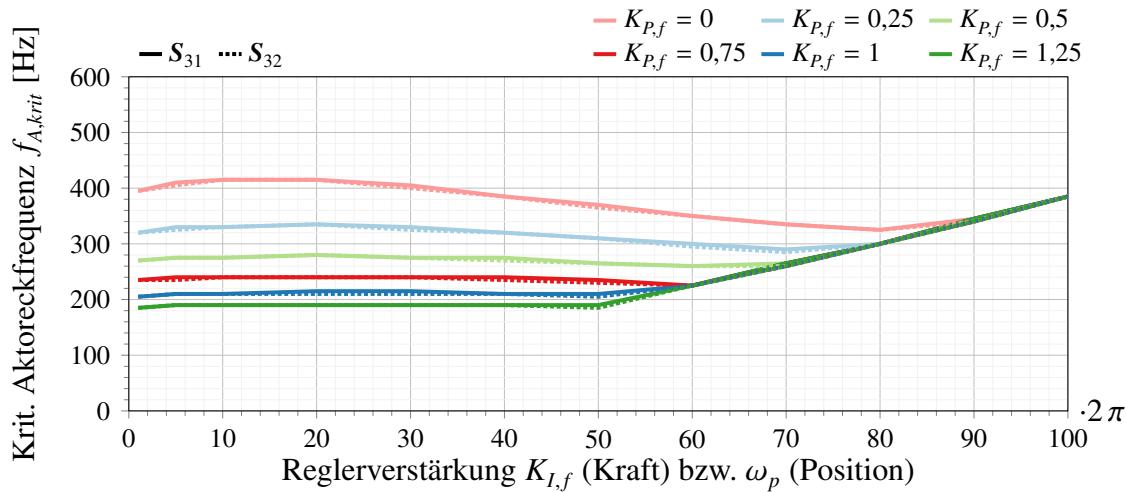


Bild 5-9: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  für  $PT_3$ -Aktordynamik bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$  (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

stets instabil. Dies kann auch an numerischen Instabilitäten liegen. Da im Modell aber der gleiche Rechenzyklus von 8 kHz wie am Prüfstand mit einem besseren Lösungsverfahren (klassisches Runge-Kutta-Verfahren gegenüber explizitem Euler-Verfahren) eingesetzt wird, spielt diese Ursache letztendlich praktisch keine Rolle.

Wie mit den Simulationen zu den Bildern 5-8 und 5-9 durch Hinzunahme des P-Anteils im Kraftregler gezeigt werden konnte, kann es sinnvoll sein, von der am linearen Ersatzmodell als ideal befundenen Reglerparametrierung abzuweichen. Beispielsweise ist die Wahl eines reinen I-Reglers für die Kraft bei idealer Aktordynamik plausibel und bewirkt eine gewünschte 3 dB-Bandbreite für den geschlossenen Kraftregelkreis. Bei endlicher Aktordynamik kann sich die Hinzunahme eines P- oder auch D-Anteils jedoch günstig auf die Stabilität der Regelung auswirken. Mit einem P- und insb. durch einen D-Anteil kann der Kraftregler erheblich besser auf Abweichungen zwischen dem Ist- und Sollwert einwirken, sodass die Regelung eher in der Lage ist, dem Sollwert zu folgen. Bei Hinzunahme eines D-Anteils muss allerdings die gemessene Kraft  $\tau$  differenziert werden, was sich in der Praxis aufgrund des vorliegenden Messrauschens als problematisch erweisen kann.

Bild 5-10 zeigt die resultierende Struktur der hybriden Kraft/Positionsregelung mit Lead-Glied.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Regelung mit drei FHG im Radaufhängungsmodell des Reglers ist nicht ausreichend, wenn in der Regelstrecke das Radaufhängungsmodell  $\Sigma_{G11}$  mit allen elf FHG vorliegt, d. h. die Radaufhängung inklusive Elastomerlagern simuliert wird. Das Gesamtsystem ist dann auch bei vernachlässigter Aktordynamik nicht stabil. Für das Regelstreckenmodell ohne Vereinfachungen muss der Regler folglich modifiziert werden.

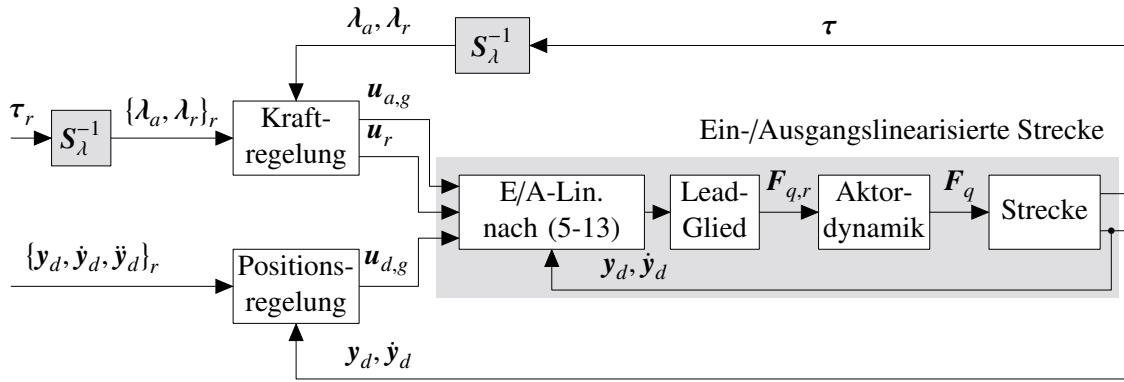


Bild 5-10: Implementierte hybride Kraft-/Positionsregelung nach [LM94] inklusive Kompen-sation der Aktordynamik mittels Lead-Glied

### 5.1.4 Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern

In diesem Abschnitt weist das Streckenmodell keine Vereinfachungen auf. Es enthält den aus 13 massebehafteten Starrkörpern bestehenden Hexapod sowie die MacPherson-Radaufhängung mit Elastomerlagern und besitzt  $n_d = 11$  dynamische Koordinaten. Bei idealer Aktorik beträgt die Systemordnung  $n = 22$ . Es gilt weiterhin, dass die Differenzordnung eines Positionsausgangs 2, die eines Kraftausgangs 0 ist. Dementsprechend liegt je nach gewählten Regelgrößen eine interne Dynamik der Ordnung 10 bis 22 vor.

Die auf der Arbeit von de Luca und Manes [LM94] aufbauende Regelung mit den Aktorkräften (5-13) bedingt, dass für die Anzahl der Minimalkoordinaten des Umgebungsmodells  $n_d \leq 6$  gilt. Bei Auswertung von (5-13) dürfen also noch maximal sechs dynamische Koordinaten  $y_d$  vorliegen. Grundsätzlich bestehen drei Möglichkeiten zur Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern mit elf FHG, wobei der wesentliche Unterschied in den Regelgrößen bzw. dem dabei verwendeten Modellwissen über die Umgebung besteht:

1. Das Radaufhängungsmodell im Regler wird auf eine Teilmenge von maximal sechs wesentlichen Koordinaten aus  $y_d$  reduziert. Die restlichen Minimalkoordinaten werden als konstant angenommen.
2. Das Radaufhängungsmodell wird mit allen elf Minimalkoordinaten  $y_d$  berechnet und erst im Anschluss auf eine Teilmenge von maximal sechs wesentlichen Koordinaten aus  $y_d$  reduziert.
3. Das Radaufhängungsmodell wird mit allen elf Minimalkoordinaten  $y_d$  berechnet und erst anschließend in sechs *andere* Bewegungsgrößen transformiert.

Bei den ersten beiden Ansätzen bleiben die ursprünglichen Koordinaten erhalten, es geht jedoch ein Teil des Modellwissens verloren. Beim dritten Ansatz wird das vollständige Modellwissen über die Umgebung in der Regelung berücksichtigt, es resultieren aber andere Regelgrößen für die Bewegung. Im Folgenden werden die drei Vorgehensweisen untersucht und verglichen.

### Vorgehensweise 1: Modellreduktion auf eine Teilmenge der elf dynamischen Koordinaten $y_d$

Dieser Ansatz geht davon aus, dass die Zerlegung von  $y_d$  mittels zweier Binärmatrizen  $\mathbf{T}_r$  und  $\mathbf{T}_c$  nach

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{T}_r \mathbf{y}_{dr} + \mathbf{T}_c \mathbf{y}_{dc}, \quad \mathbf{T}_r, \mathbf{T}_c, \mathbf{y}_{dc} = \text{konst.} \quad (5-48)$$

ein Radaufhängungsmodell herbeiführt, welches das elf FHG aufweisende Ursprungsmo dell hinreichend gut wiedergibt. Dann ließe sich anstelle von (2-78) auch das mittels (5-48) transformierte Umgebungsmodell

$$\mathbf{M}_{ur} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_{dr} + \mathbf{n}_{ur} = \mathbf{S}_{ydr}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5-49)$$

mit

$$\mathbf{M}_{ur} = \mathbf{T}_r^T \mathbf{M}_u \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{n}_{ur} = \mathbf{T}_r^T \mathbf{n}_u, \quad \mathbf{S}_{ydr}^T = \mathbf{T}_r^T \mathbf{S}_{yd}^T \quad (5-50)$$

zur Regelung verwenden. Voraussetzung hierfür ist, dass der reduzierte Vektor der dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_{dr}$  maximal sechs Elemente umfasst. Die Terme  $\mathbf{M}_u$ ,  $\mathbf{n}_u$  und  $\mathbf{S}_{yd}^T$  werden dabei mit  $y_d$  nach (5-48) und  $\dot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{T}_r \dot{\mathbf{y}}_{dr}$  berechnet. Auf diese Weise wird das Modell auf maximal sechs wesentliche Minimalkoordinaten des Umgebungsmodells reduziert.

Wird ein Radaufhängungsmodell mit sechs FHG ( $n_d = 6$ ) im Regler verwendet, so entfallen neben den kinematischen Koordinaten  $y_k$  auch die reaktiven Kräfte  $\lambda_r$ . Es bestehen in diesem Fall insgesamt

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56$$

Möglichkeiten zur Auswahl von drei zusätzlichen aus den insgesamt acht weiteren FHG des Radaufhängungsmodells. Diese sind:  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $z_A$ ,  $x_E$ ,  $y_E$ ,  $z_E$ ,  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$ . Die  $6 \times 6$ -Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  verknüpft jeweils eine der Größen aus  $\boldsymbol{\tau}$  mit einer der sechs ausgewählten Minimalkoordinaten  $y_d$ .

Bei Übernahme der Verknüpfung von  $d_F$  und  $F_z$ ,  $x_L$  und  $M_z$  sowie  $\psi$  und  $M_y$  aus dem vorangegangenen Abschnitt (vgl. Tabelle 5-1) verbleiben die Kräfte  $F_x$  und  $F_y$  sowie das Moment  $M_x$ , denen jeweils einer der drei neuen FHG des Radaufhängungsmodells im Regler zugewiesen werden muss. Prinzipiell kommen hierdurch  $3! = 6$  zusätzliche Variationsmöglichkeiten für jede der oben genannten 56 FHG-Kombinationsmöglichkeiten hinzu. Der positionsgeregelte Betrieb von einem der drei neuen FHG ist aber weder für Betriebsfestigkeitsuntersuchungen (vgl. typische Target-Signale in Abschnitt 2.1) noch für HiL-Versuche von Interesse. Daher werden stets  $F_x$ ,  $F_y$  und  $M_x$  geregelt. In diesem Fall lässt sich zeigen, dass nur die Auswahl der drei FHG, nicht aber deren Zuordnung zu  $F_x$ ,  $F_y$  und  $M_x$  eine Rolle spielt. Im Folgenden werden von den vielen möglichen Ausprägungen von  $\mathbf{S}$  nur die zwei für die Praxis relevanten Fälle betrachtet. Die Regelgrößen sind dabei die relative Verdrehung von Radnabe und Radträger  $\psi$ , die Kräfte  $F_x$ ,  $F_y$  und die Momente  $M_x$ ,  $M_z$  sowie entweder die Vertikalkraft  $F_z$  oder der Dämpferweg  $d_F$ . Die bestmögliche FHG-Auswahl für das Radaufhängungsmodell im Regler kann bspw. mithilfe von Simulationen

ermittelt werden. Falls hierfür die Betrachtung eines einzelnen Anregungssignals genügt, sind bei zwei Selektionsmatrizen insgesamt  $56 \cdot 2 = 112$  Simulationen durchzuführen und auszuwerten.

Die Auswertung der durchgeführten Simulationen zeigt, dass die in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehensweise für den HNI-Achsprüfstand nicht geeignet ist, da die Simulationen sämtlicher 112 möglichen FHG-Kombinationen instabil verlaufen. Der hier beschriebene Lösungsweg, der in der Reduktion des Umgebungsmodells im Regler auf sechs wesentliche Minimalkoordinaten  $\mathbf{y}_{dr}$  und die Regelung der eigentlich elf FHG umfassenden Regelstrecke mit dem so entworfenen Regler besteht, scheidet damit für die vorliegende MacPherson-Radaufhängung mit Elastomerlagern aus. Möglicherweise eignet sich dieser Ansatz zur Regelung des Systems, wenn zusätzlich die Parameter des Radaufhängungsmodells (insb. die der Elastomerlagermodelle) auf die verringerte FHG-Anzahl angepasst und optimiert werden. Diese Möglichkeit wird im Folgenden nicht weiter untersucht, bietet aber Anknüpfungspunkte für weiterführende Untersuchungen.

### **Vorgehensweise 2: Berechnung des Modells mit elf FHG, anschließende Modellreduktion auf eine Teilmenge der elf dynamischen Koordinaten $\mathbf{y}_d$**

Stabile Simulationsergebnisse mit dem transformierten Umgebungsmodell (5-49) lassen sich erzielen, wenn die Terme  $\mathbf{M}_u$ ,  $\mathbf{n}_u$  und  $\mathbf{S}_{yd}^T$  abweichend von dem vorher beschriebenen Vorgehen mit vollständigen Vektoren  $\mathbf{y}_d$  und  $\dot{\mathbf{y}}_d$  berechnet werden. Anstelle von nur 12 müssen daher 22 physikalische Größen gemessen werden. Auf diese Weise wird das vollständige Radaufhängungsmodell mit allen elf FHG im Regler berücksichtigt; durch die darauf folgende Transformation in das reduzierte Umgebungsmodell geht jedoch ein Teil des Modellwissens verloren.

Bei Anwendung dieser Vorgehensweise und Beibehalten der Reglerparameter (5-43) liegen für die dynamischen Koordinaten

$$\mathbf{y}_{dr1} = [d_F \ x_L \ \psi \ y_A \ y_E \ \kappa_z]^T \quad (5-51)$$

sehr gute Regelergebnisse im Falle der Schlechtweganregung vor. Das zweitbeste, nur minimal schlechtere Ergebnis resultiert bei den Minimalkoordinaten

$$\mathbf{y}_{dr2} = [d_F \ x_L \ \psi \ x_A \ y_A \ y_E]^T \quad (5-52)$$

im Radaufhängungsmodell des Reglers. Die Regler bei Auswahl anderer FHG sind entweder deutlich schlechter oder weisen instabiles Verhalten auf. Im Folgenden wird für den Regler mit den Positionsgrößen  $\mathbf{y}_{dr1}$  nach (5-51) das Kürzel  $\Sigma_{R,LM6a}$ , für den Regler mit den Koordinaten  $\mathbf{y}_{dr2}$  nach (5-52) das Kürzel  $\Sigma_{R,LM6b}$  verwendet.

Für den Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  wurden die Verknüpfungen nach Tabelle 5-2 festgelegt, sodass zwischen den jeweils einer Spalte genannten Positions- und Kraftgröße mittels des zugehörigen Diagonaleintrags in der Selektionsmatrix  $\mathbf{S} = \text{diag}[s_1 \dots s_6]$  gewählt werden kann.

Bei dieser Festlegung gilt

$$\mathbf{i}_a = [3 \ 6 \ 5 \ 2 \ 1 \ 4] \quad (5-53)$$

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
Positionsgrößen	$d_F$	$x_L$	$\psi$	$y_A$	$y_E$	$\kappa_z$
Kraftgrößen	$F_z$	$M_z$	$M_y$	$F_y$	$F_x$	$M_x$

Tabelle 5-2: Verknüpfung der Positions- und Kraftgrößen über  $S$  (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$ )

und

$$S_{\lambda a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5-54)$$

Über die konstante Matrix  $S_{\lambda a}$  erfolgt demnach lediglich eine Vertauschung der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$ , sodass die gewünschte Zuordnung zu den dynamischen Koordinaten  $y_{dr}$  vorliegt. Den Vergleich der Soll- und Ist-Zeitverläufe für die beiden Selektionsmatrizen

- $S_{6p} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$  und
- $S_{6f} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$

für den Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  bei vernachlässigter Aktordynamik zeigen die Bilder 5-11 und 5-12. In beiden Fällen ist das Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$  im Regler hinterlegt.

Die Zeitverläufe zeigen, dass mit diesem Vorgehen sehr gute Regelungsergebnisse erzielt werden. Die geringen Abweichungen zwischen den Verläufen der Soll- und Istwerte sind auf die Transformation des Umgebungsmodells und den damit einhergehenden, teilweise Verlust des Modellwissens zur Umgebung zurückzuführen. Bei Regelung des Dämpferwegs  $d_F$  (Selektionsmatrix  $S_{6p}$ ) treten Oszillationen in der Vertikalkraft  $F_z$  auf. Die entsprechenden Zeitverläufe bei Verwendung des vereinfachten Hexapodmodells  $\Sigma_{H1}^*$  mit nur einem Starrkörper im Regler zeigen die Bilder A7-7 und A7-8 im Anhang. Da bereits das Radaufhängungsmodell gegenüber der Regelstrecke Vereinfachungen aufweist, fällt hier die Vereinfachung des Manipulatormodells im Regler weniger stark ins Gewicht. Die Zeitverläufe sind ähnlich gut wie bei Verwendung des Modells  $\Sigma_{H13}$  im Regler. Die relativen RMS-Fehler liegen hier sowohl für die Verwendung von  $\Sigma_{H13}$  als auch  $\Sigma_{H1}^*$  für alle FHG unter 6 % und liegen damit im genannten Toleranzbereich, siehe Bild A7-9 im Anhang. Die Verwendung des Manipulatormodells  $\Sigma_{H13}$  im Regler erzielt dabei eine bessere Signalabbildung. Gegenüber dem vorherigen Abschnitt sind die relativen RMS-Fehler teilweise geringer, vgl. jeweils  $S_{31}$  und  $S_{32}$  aus Bild 5-7 mit  $S_{6p}$  und  $S_{6f}$ . Dies lässt sich auf die nachgiebig modellierten Gelenke zurückführen. Weil zur Beurteilung der Response-Signale bei Betriebsfestigkeitsuntersuchungen typischerweise auf die relative Schädigung zurückgegriffen wird, wird auf diese Darstellungsform für die nachfolgend diskutierten Ansätze nicht eingegangen. Bei Interesse sind die entsprechenden Bilder im Anhang zu finden. Die Zeitverläufe der Regelgrößen und das Säulendiagramm für den Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  nach (5-52) befinden sich ebenfalls im Anhang, siehe Bilder A7-11 bis A7-15.

Die beschriebene Vorgehensweise erhält die Möglichkeit zur Regelung der dynamischen Koordinaten  $y_{dr}$ . Dies ist bei der Betriebsfestigkeitsuntersuchung besonders für den Dämpferweg  $d_F$  sowie die Raddrehung  $\psi$  (bei ungebremstem Rad) interessant. Allerdings wird

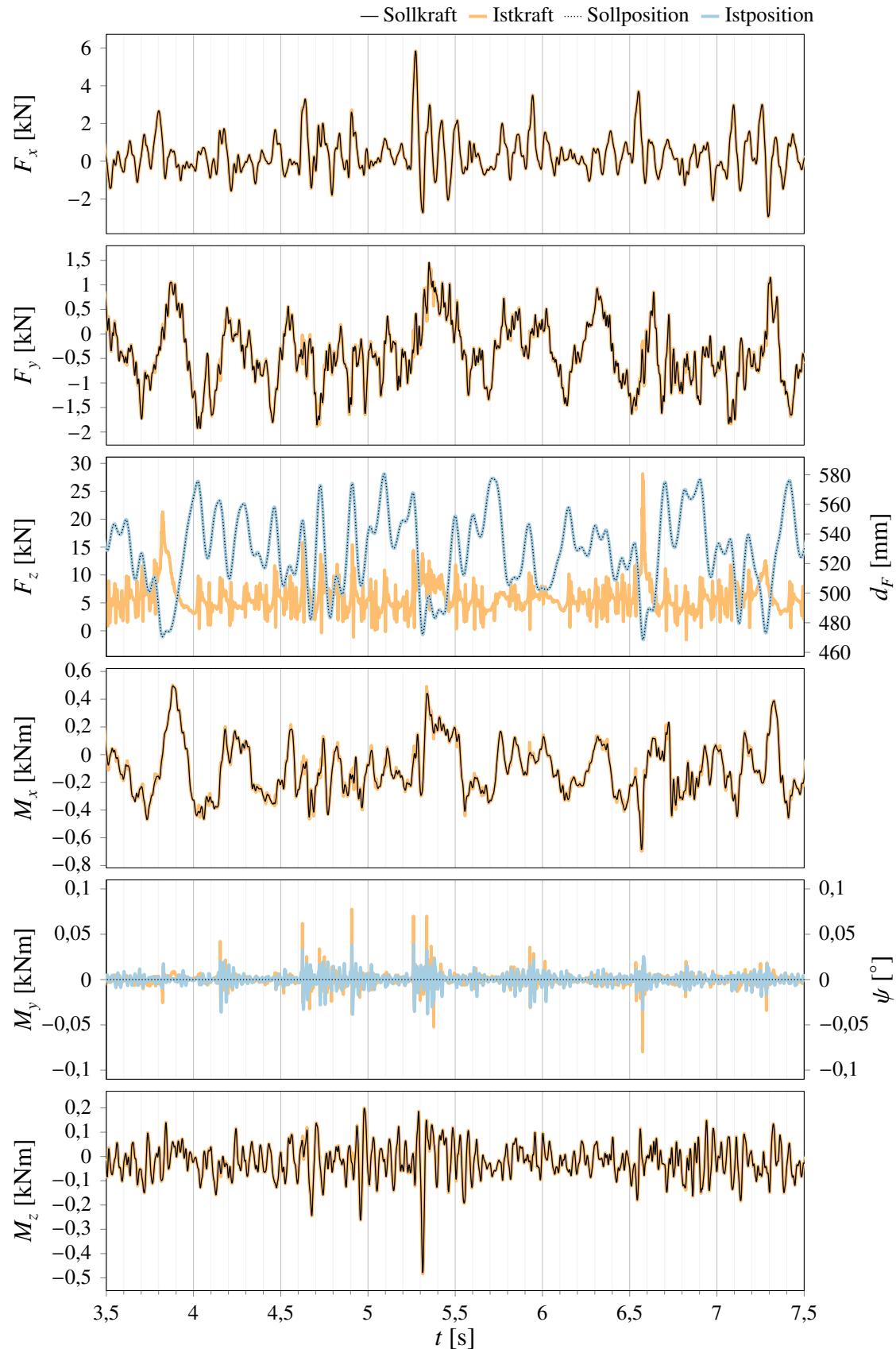


Bild 5-11: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p} = \text{diag} [0 1 0 1 1 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,\text{LM6a}}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

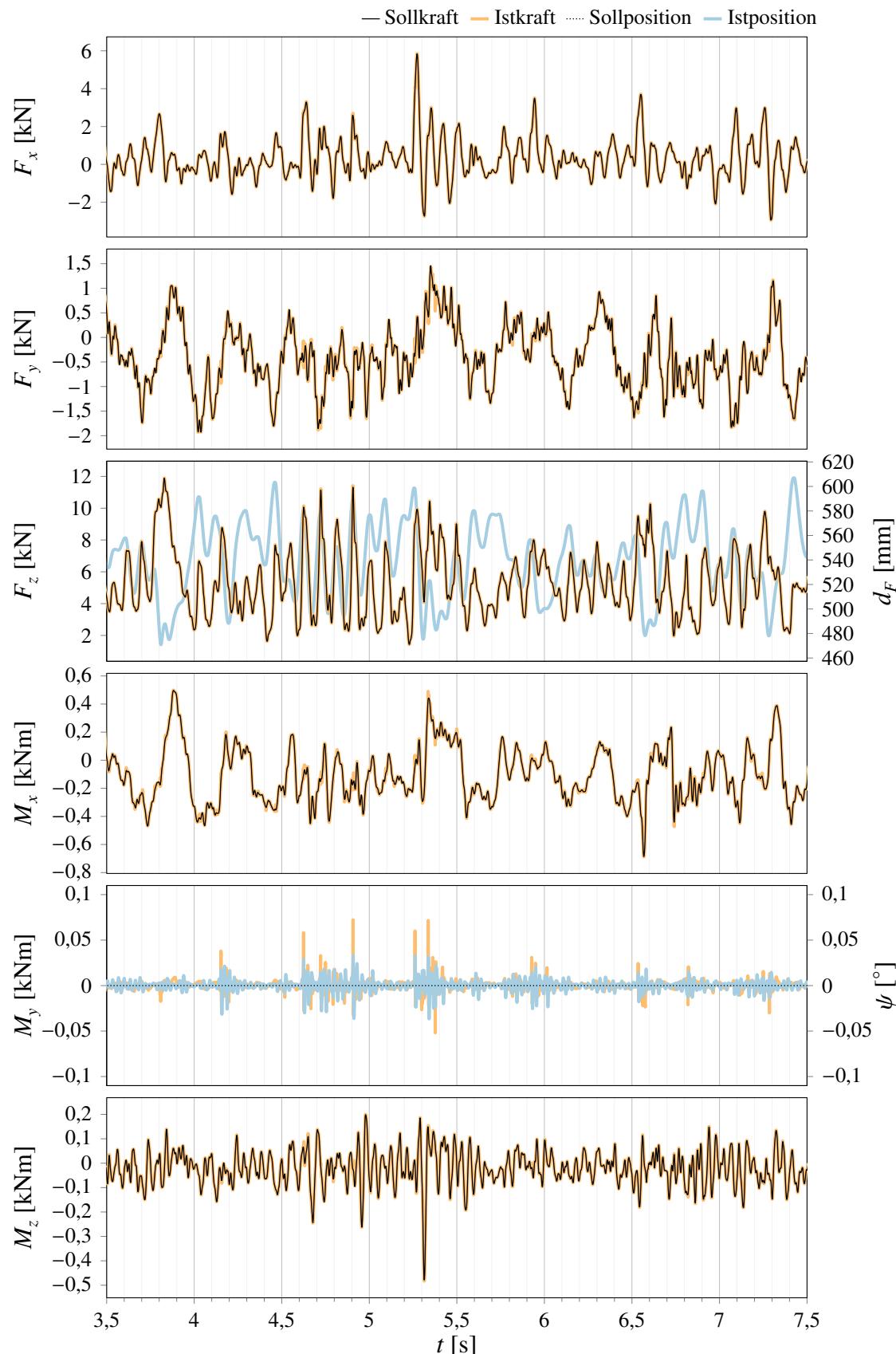


Bild 5-12: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

ein Teil des Modellwissens durch die durchgeführte Transformation aufgegeben, was minimale Beeinträchtigungen der Regelgüte zur Folge hat.

### Vorgehensweise 3: Berechnung des Modells mit elf FHG, anschließende Modelltransformation in sechs andere Koordinaten

Die dritte Herangehensweise sieht ebenfalls vor, das Radaufhängungsmodell mit allen elf FHG im Regler zu berechnen. Anschließend wird eine Modelltransformation durchgeführt, bei der das vollständige Wissen über die Umgebung erhalten bleibt. Die im Folgenden beschriebene Transformation ist wie die anderen beiden Ansätze mit dem Regelungsansatz nach de Luca und Manes vereinbar. Durch Auflösen von (2-78) nach  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  und Einsetzen in (2-84) folgt

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \boldsymbol{\tau} - (\mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{n}_u - \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d), \quad (5-55)$$

wobei der Term  $\mathbf{S}_{yk} \ddot{\mathbf{y}}_k + \dot{\mathbf{S}}_{yk} \dot{\mathbf{y}}_k$  entfällt, da keine kinematische Koordinate  $y_k$  vorliegt. Diese Gleichung entspricht strukturell dem von Featherstone [FSK98; Fea03] zugrunde gelegten Umgebungsmodell (2-96). Ist die inverse Massenmatrix  $\mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T$  regulär, so kann die Gleichung in die für den Regelungsentwurf nach [LM94] übliche Form des Umgebungsmodells mit den neuen Umgebungskoordinaten  $z$  unter Zuhilfenahme von (4-67) herbeigeführt werden, d. h.

$$\mathbf{M}_{u,z} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{n}_{u,z} = \mathbf{H}^T \boldsymbol{\tau} \quad (5-56)$$

mit

$$\mathbf{M}_{u,z} = \mathbf{H}^T (\mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T)^{-1} \mathbf{H}, \quad (5-57)$$

$$\mathbf{n}_{u,z} = \mathbf{M}_{u,z} \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{n}_u - \dot{\mathbf{S}}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d + \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{z}}). \quad (5-58)$$

Tabelle 5-3 listet die Zuordnung von Positions- und Kraftgrößen über die Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  auf.

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
Positionmgrößen	$r_x$	$r_y$	$r_z$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Kraftmgrößen	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$

Tabelle 5-3: Verknüpfung der Positions- und Kraftgrößen über  $\mathbf{S}$  (Regler  $\Sigma_{R,LM6Z}$ )

Aufgrund der veränderten Abfolge der Einträge in Tabelle 5-3 werden nachfolgend die Selektionsmatrizen

- $\mathbf{S}_{6p}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$  und
- $\mathbf{S}_{6f}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

verwendet, deren Bedeutung aber den bisherigen Matrizen  $\mathbf{S}_{6p}$  und  $\mathbf{S}_{6f}$  entspricht: in der vertikalen Richtung wird im ersten Fall die Positionmgröße (hier: kartesische Koordinate  $r_z$ ), im zweiten Fall die Kraft  $F_z$  geregelt. In beiden Fällen erfolgt eine Regelung des Kardanwinkels  $\beta$ . Außerdem werden die Kräfte und Momente  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_x$  und  $M_z$  geregelt.

Mit den Angaben aus Tabelle 5-3 und (daraus folgend)  $S_{\lambda a} = \mathbf{I}$  kann die hybride Kraft-/Positionsregelung aufbauend auf (5-13) mit den Ersetzungen

$$S_{yd} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{M}_u^{-1} \rightarrow \mathbf{M}_{u,z}^{-1}, \quad \mathbf{n}_u \rightarrow \mathbf{n}_{u,z}$$

erfolgen. In dem vorliegenden Sonderfall (keine kinematischen Koordinaten  $\mathbf{y}_k$ , keine reaktiven Kräfte  $\lambda_r$ ) gilt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T \cdot (\mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{u}_h + \mathbf{n}_h) \quad (5-59)$$

mit

$$\mathbf{Q}_h = (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{u,z}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{C}_h^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H}^{-T} \mathbf{M}_{u,z})) , \quad (5-60)$$

$$\mathbf{n}_h = \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + (\mathbf{I} - (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{u,z}) \mathbf{S} \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{H}^{-T}) \mathbf{n}_{u,z} \quad (5-61)$$

und

$$\mathbf{C}_h = (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-T} \mathbf{M}_{u,z}) \mathbf{S} - \mathbf{I} . \quad (5-62)$$

Die so berechneten Aktorkräfte führen zu dem linearen Verhalten

$$\mathbf{u}_h = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} . \quad (5-63)$$

Der Regler auf Basis der Aktorkräfte (5-59) trägt nachfolgend das Kürzel  $\Sigma_{R,LM6z}$ .

Die Herleitung dieser Gleichungen mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung ist recht anschaulich. Durch Ersetzen des in (5-56) enthaltenen  $\boldsymbol{\tau}$  durch das nach dieser Größe umgestellte Manipulatormodell (2-18) folgt nach einigen Umformungen

$$\ddot{\mathbf{z}} = (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{u,z})^{-1} (\mathbf{J}_a^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{g} - \mathbf{n}_{u,z}) . \quad (5-64)$$

Wird anstelle dessen (5-56) nach  $\dot{\mathbf{z}}$  umgestellt und in das Manipulatormodell (2-18) eingesetzt, resultiert der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{M}_{u,z} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{u,z})^{-1} (\mathbf{J}_a^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{g} + \mathbf{M} \mathbf{M}_{u,z}^{-1} \mathbf{n}_{u,z}) . \quad (5-65)$$

Durch Anwendung der in Abschnitt A3 beschriebenen Vorgehensweise lässt sich für den Ausgang

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{z} + \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (5-66)$$

mit den Zusammenhängen (5-64), (5-65) für  $\ddot{\mathbf{z}}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  nach einigen Rechenschritten zeigen, dass die auf diesem Weg hergeleiteten Aktorkräfte denen nach (5-59) entsprechen. Im Vergleich zu der zuvor genannten Lösung resultieren bei diesem Vorgehen allerdings nicht mehr der Dämpferweg  $d_F$  und die Raddrehung  $\psi$  als mögliche Regelgrößen. Anstelle dessen werden lineare Eingänge für die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}_z$  sowie die zweite zeitliche Ableitung des Kardanwinkels  $\beta$  erhalten, auf deren Basis die vertikale Position des Punktes  $T$  von Endeffektor bzw. Radnabe und der Kardanwinkel  $\beta$  geregelt werden kann. Vorteilhaft ist, dass gegenüber der zuvor beschriebenen Lösung kein Modellwissen verloren geht. Die Bilder 5-13 und 5-14 zeigen die Simulationsergebnisse für den Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$ , wobei das Manipulatormodells  $\Sigma_{H13}$  im Regler vorliegt.

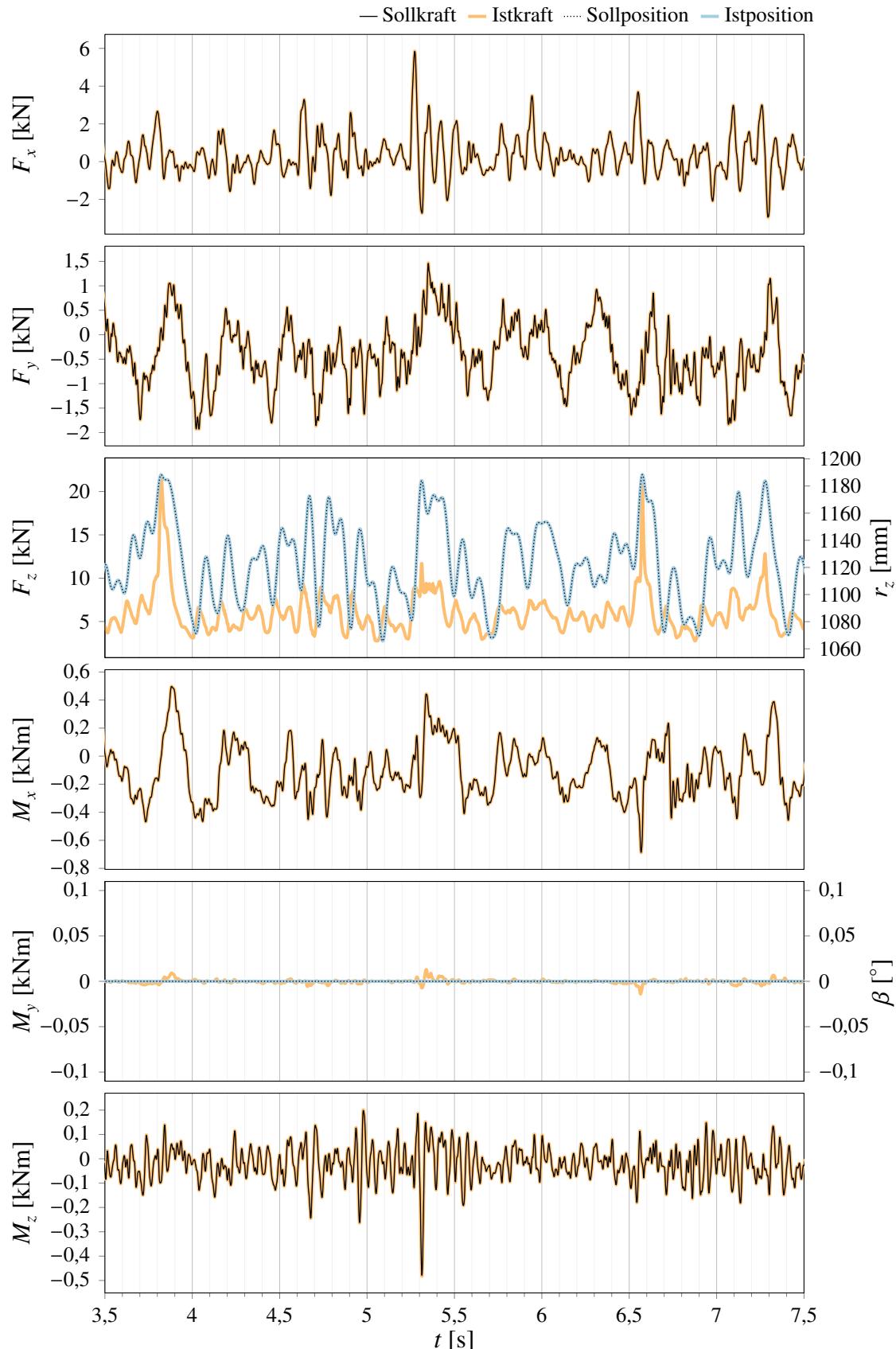


Bild 5-13: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,\text{LM6z}}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

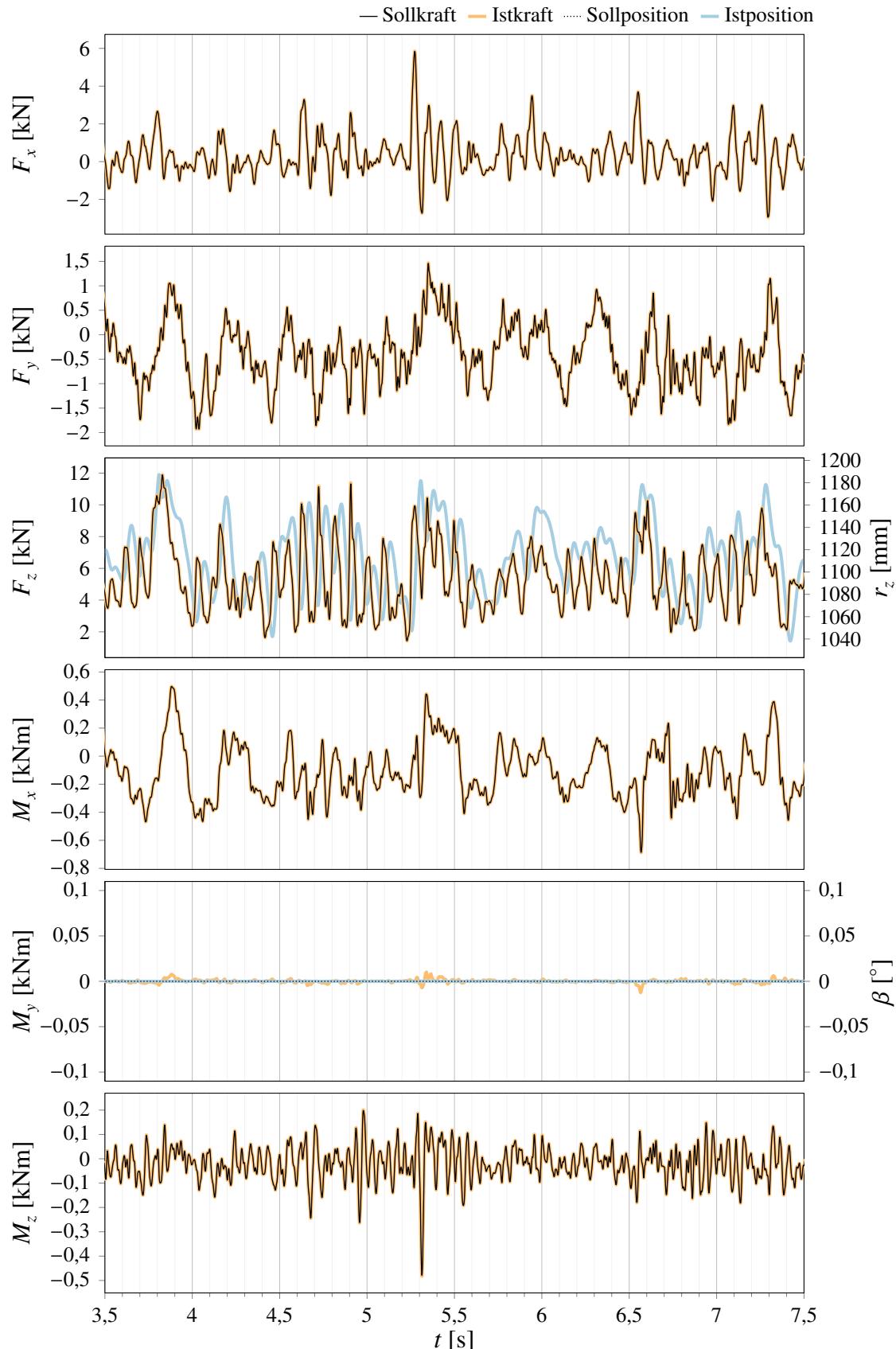


Bild 5-14: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

Die Simulationsergebnisse belegen, dass die Istwert-Zeitverläufe ideal mit den Sollwert-Zeitverläufen übereinstimmen. Die in den Bildern 5-11 und 5-12 für den Regelungsentwurf nach dem vorangegangenen Abschnitt (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$ ) stellenweise erkennbaren Abweichungen zwischen den Sollwert- und Istwert-Zeitverläufen treten hier nicht auf. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass das gesamte Modellwissen über die Umgebung in der Regelung berücksichtigt wird. Auch die auffälligen Oszillationen der Vertikalkraft  $F_z$ , vgl. Bild 5-11, liegen nicht vor. Bei dem auf eine Masse abstrahierten Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$  liegen durch die Modellvereinfachung minimale Abweichungen vor, siehe Bilder A7-18 und A7-19. Die relativen RMS-Fehler, siehe Bild A7-20, liegen auf dem Niveau der Regelung  $\Sigma_{R,LM6a}$ .

### Hinzunahme der Aktordynamik in das Streckenmodell

Wird die Aktordynamik in das Streckenmodell aufgenommen, so ergeben sich die in Bild 5-15 dargestellten Stabilitätsgrenzen für die hybriden Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  und  $\Sigma_{R,LM6z}$ . Beide enthaltenen Darstellungen sind entsprechend Bild 5-8 aufgebaut. Auch diesen Bildern liegt das Manipulatormodell  $\Sigma_{H13}$  in Regelung und Strecke zugrunde. Das entsprechende Bild für den Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  befindet sich im Anhang (Bild A7-16).

Verglichen mit Bild 5-8, der Darstellung für die idealisierte Radaufhängung ohne Elastomerlager, liegt die für eine stabile Regelung erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  für beide Ansätze höher als für den Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  im vorangegangenen Abschnitt. Für die Regelung  $\Sigma_{R,LM6z}$  in den TCP-Größen  $z$  und  $\tau$  können vergleichbare Aussagen wie für die idealisierte Radaufhängung getätigter werden. So liegt kein nennenswerter Einfluss der Selektionsmatrix ( $S_{6p}^*$  oder  $S_{6f}^*$ ) vor und das Hinzufügen eines P-Anteils in den Kraftregler kann die erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  jeweils merklich senken. Bei der hybriden Regelung von  $y_{dr1}$  und  $\tau$  (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$ ) hat die Ausprägung der Selektionsmatrix hingegen eine Bedeutung. Mit  $K_{P,f} = 0$  ist die erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  stets bis etwa zum Abszissenwert  $50 \cdot 2\pi$  für die Regelung der Vertikalkraft  $F_z$ , darüber für die Regelung des Dämpferwegs  $d_F$  kleiner. Für  $K_{P,f} = 0,75$  ist die erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  hingegen immer für die Regelung der Vertikalkraft  $F_z$  geringer. Unabhängig von der Selektionsmatrix wirkt sich das Hinzufügen eines P-Anteils zur Kraftregelung vorteilhaft aus. Den Einfluss der Kraftreglerverstärkung  $K_{P,f}$  auf die Stabilitätsgrenze für PT<sub>3</sub>-Aktordynamik zeigen die Bilder A7-10 und A7-21 im Anhang. Für den Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  ist auch der Übergang in einen linearen Bereich für hohe Frequenzen zu erkennen, wie er in Bild 5-8 vorliegt. Die ermittelte Stabilitätsgrenze scheint im linearen Bereich mit der des Reglers  $\Sigma_{R,LM3}$  übereinzustimmen. Insgesamt lassen sich vergleichbare Beobachtungen wie zu den Bildern 5-9 sowie 5-15 tätigen. Beide Regler werden für Verstärkungsfaktoren  $K_{P,f} \geq 1,5$  instabil. Dies gilt auch für den Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  (Bild A7-17).

Offensichtlich ist die vorliegende PT<sub>3</sub>-Aktordynamik mit 213 Hz Eckfrequenz für eine stabile Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern nicht ausreichend. Es kann also nicht von vernachlässigbar schneller Aktorik ausgegangen werden, wie dies gemäß Stand von Technik und Forschung (Abschnitt 2.2) üblicherweise getan wird. Zur Regelung des Systems ist es zwingend erforderlich, auf einen der in Abschnitt 5.1.2 vorgeschlagenen Entwürfe zurückzugreifen. Zum Beispiel ist bei Verwendung eines Lead-Glieds, vgl. Abschnitt 5.1.2, eine resultierende Aktordynamik mit einer Eckfrequenz oberhalb von  $f_{A,krit}$  realisierbar, sodass die Regelung trotz der begrenzten Aktordynamik stabil arbeitet.

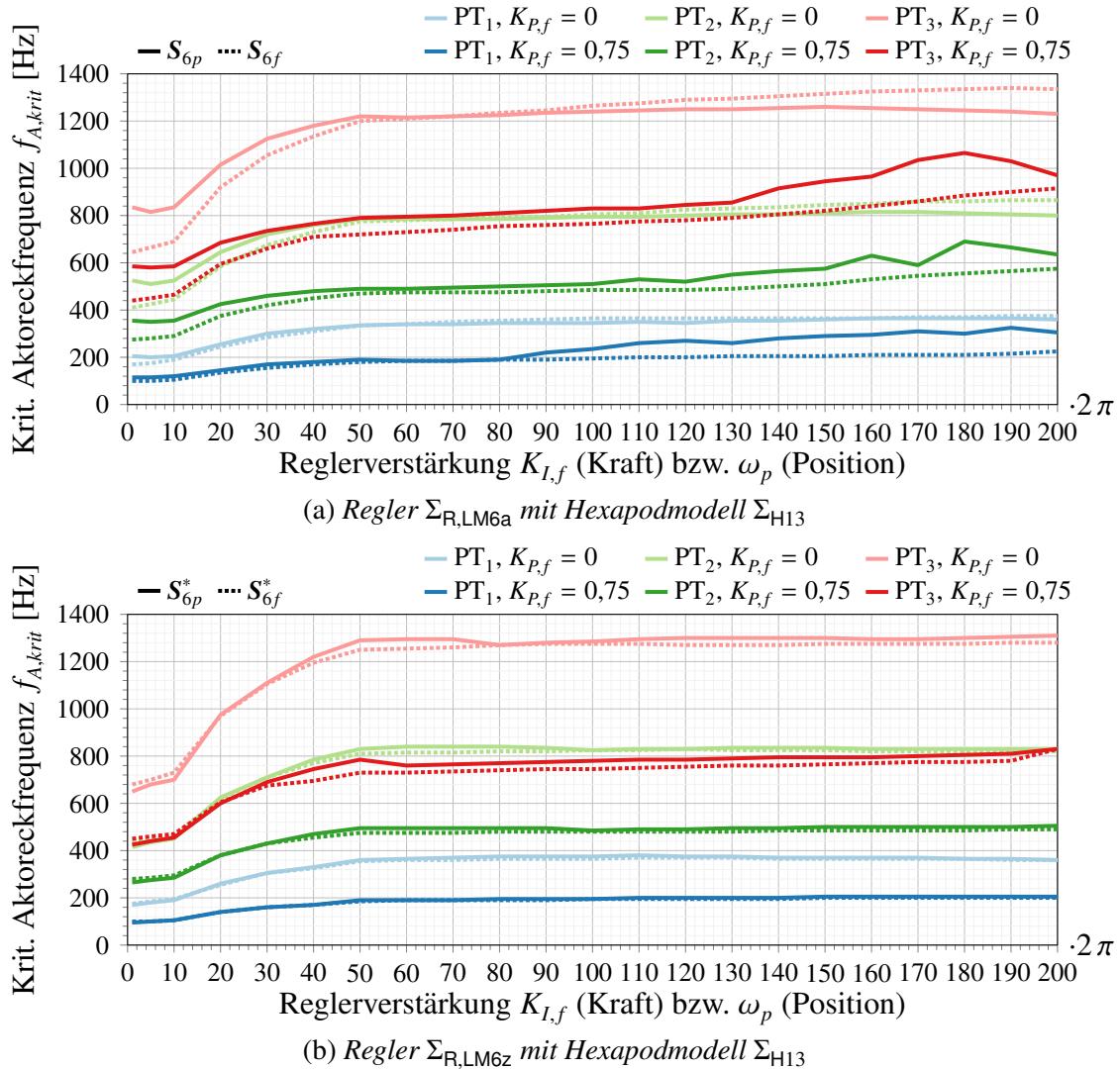


Bild 5-15: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  in Abhängigkeit der Parametrierung der äußeren Regelkreise (Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

## Fazit

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Regelungsentwürfe weisen jeweils einen Nachteil auf. Entweder wird ein Teil des Wissens über die Umgebung verworfen (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  und  $\Sigma_{R,LM6b}$ ) oder die (Positions-) Regelgrößen sind für die Betriebsfestigkeitsuntersuchung von vermindertem Nutzen (Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$ ). Im nachfolgenden Unterkapitel, Abschnitt 5.2.1, wird aufgezeigt, wie die praxisnahen Regelgrößen (Dämpferweg  $d_F$  und Radnabendrehung  $\psi$ ) bei gleichzeitiger Verwendung des gesamten Wissens über die Umgebung erhalten werden können. Dies ist mit dem von de Luca und Manes [LM94] beschriebenen Entwurf nicht möglich.

## 5.2 Entwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung

In diesem Abschnitt wird der Regelungsentwurf für die beiden in Abschnitt 4.4 angegebenen Streckenmodellierungen nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung durchgeführt, vgl. Anhang A3.

Bei Anwendung am Modell mit ideal starrer Bindung zwischen Endeffektor und Radnabe folgt eine Berechnungsvorschrift für die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$ , mit deren Hilfe lineare Eingänge für sechs wählbare Größen aus den  $n_d = 11$  dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$  und den sechs Kontaktkräften und -momenten  $\boldsymbol{\tau}$  herbeigeführt werden. Somit kann auch für Regelgrößen aus  $\mathbf{y}_d$  mit diesem Vorgehen das vollständige Modell der Radaufhängung im Regler berücksichtigt werden. Der Ansatz ist daher auch für komplexe Umgebungsmodelle mit mehr als sechs dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$  ( $n_d > 6$ ) geeignet. Der von de Luca und Manes [LM94] beschriebene Ansatz ist im Fall  $n_d > 6$  nur durch eine teilweise Aufgabe von Modellwissen oder eine ggf. für die Regelung ungünstige Koordinatentransformation anwendbar, vgl. Abschnitt 5.1.

Die Gleichungen für den Fall der dynamischen Bindung zwischen Endeffektor und Radnabe sind in Abschnitt 5.2.2 gegeben. In beiden Fällen ist ein genaues Modell der Radaufhängung erforderlich. Liegt ein solches Modell nicht vor, kann es in Einzelfällen hinreichend sein, für die Regelungssynthese ein vergleichsweise einfaches Ersatzmodell des Kraftaufbaus anzusetzen. Im letzten Unterabschnitt 5.2.3 wird daher die Ein-/Ausgangslinearisierung für ein solches vereinfachtes Modell angegeben. Der Vorteil eines derartigen Modells besteht darin, dass es sich mithilfe von Prüfstandsmessungen vergleichsweise einfach identifizieren lässt und damit zumindest in einer Umgebung um den gewählten Identifikationszustand hinreichend gute Regelergebnisse erzielt werden.

### 5.2.1 Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$  für die hybride Kraft-/Positionsregelung des Gesamtmodells bei ideal starrer Bindung von Endeffektor und Radnabe. Das vollständige Umgebungsmodell mit  $n_d = 11$  dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$  soll dabei in die Berechnungsvorschrift einfließen. Außerdem soll eine binäre Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  die Wahl zwischen

- der Positionsregelung einer sechs Größen umfassenden Untermenge aus den dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$  und
- der Kraftregelung der sechs Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  im TCP

erlauben. Die Verknüpfung von Positions- und Kraftgrößen, zwischen denen jeweils paarweise gewählt werden kann, ist vorab festzulegen.

Die Berechnungsvorschrift für die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$  ergibt sich, wenn die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung nach Anhang A3 auf den Ausgangsvektor

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{X} \mathbf{y}_d + \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (5-67)$$

angewandt wird. Darin ist  $\mathbf{X}$  eine dünnbesetzte Matrix, über die die Verknüpfung von sechs Größen aus  $\mathbf{y}_d$  mit  $\boldsymbol{\tau}$  erfolgt. Bei Verwendung der Positionsgrößen  $\mathbf{y}_{dr1}$  nach (5-51) mit der

in Tabelle 5-2 gegebenen Zuordnung dieser Größen zu den Kontaktkräften und -momenten  $\tau$  besitzen die Einträge

$$(1; 8), \quad (2; 5), \quad (3; 1), \quad (4; 11), \quad (5; 3), \quad (6; 2)$$

der Matrix  $X$  den Wert 1. Die Auswahl der Größen aus  $y_d$  mittels  $X$  hat nur für diejenigen Einträge eine Bedeutung, für die eine Positionsregelung in Betracht gezogen wird. Alle anderen Einträge entfallen durch die Multiplikation mit  $I - S$ . Soll wie bisher stets  $\psi$  anstelle von  $M_y$  geregelt werden und eine Wahl zwischen  $d_F$  und  $F_z$  möglich sein, so ist lediglich darauf zu achten, dass nach der Multiplikation von  $y_d$  mit  $X$  der Dämpferweg  $d_F$  an dritter und der Drehwinkel  $\psi$  an fünfter Stelle des so erhaltenen Vektors steht.

Während der Systemeingang  $F_q$  erst in der zweiten zeitlichen Ableitung der dynamischen Koordinaten  $y_d$  enthalten ist ( $\delta_i = 2$ ), liegt für die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  ein Durchgriff vor ( $\delta_i = 0$ ), vgl. (4-232) und (4-236). Aufbauend auf diesen beiden Gleichungen kann die Berechnungsvorschrift für die Aktorkräfte angegeben werden. Sie lautet

$$F_q = \dot{\mathbf{D}}^{-1} \cdot (\mathbf{u}_h - \dot{\mathbf{c}}) \quad (5-68)$$

mit

$$\dot{\mathbf{c}} = (S - I) X M_G^{-1} \mathbf{n}_G + S E_\tau \left( M_v \left( S_{yd} M_u^{-1} \mathbf{n}_u - \dot{S}_{yd} \dot{\mathbf{y}}_d \right) - C_v v - g_v \right), \quad (5-69)$$

$$\dot{\mathbf{D}}^{-1} = J_g^T \cdot \left( (I - S) X M_G^{-1} S_{yd}^T + S E_\tau \right)^{-1}. \quad (5-70)$$

Damit resultiert das lineare Verhalten

$$\mathbf{u}_h = (I - S) X \ddot{\mathbf{y}}_d + S \tau \quad (5-71)$$

von der neuen Eingangsgröße  $\mathbf{u}_h$  zu den Regelgrößen (5-67).  $\mathbf{u}_h$  kann zum Zweck der Regelung und Vorsteuerung nach (2-55) und (2-57) gebildet werden. Der auf diese Weise entwickelte Regler trägt im Folgenden das Kürzel  $\Sigma_{R,EALin}$ .

Die Simulationsergebnisse für diesen Regler mit den Selektionsmatrizen  $S_{6p}^*$  und  $S_{6f}^*$  (vgl. Abschnitt 5.1.4) zeigen die Bilder 5-16 und 5-17. Im Regler wird das Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$  verwendet.

Verglichen mit den entsprechenden Bildern 5-11 und 5-12 des Reglers  $\Sigma_{R,LMea}$  fällt auf, dass die dort erkennbaren, minimalen Abweichungen der Soll- und Istwerte für die Kräfte und Momente bei dem Regler  $\Sigma_{R,EALin}$  nicht auftreten. Die Oszillationen der Vertikalkraft  $F_z$  bei Regelung des Dämpferwegs  $d_F$  liegen allerdings auch bei diesem Regler vor und sind sogar noch etwas auffälliger. Durch die Vereinfachung des Hexapodmodells im Regler (Bilder A7-24 und A7-25) ergibt sich auch für dieses Vorgehen eine minimal verringerte Regelgüte. Abweichungen fallen am ehesten bei der Querkraft  $F_y$  auf.

Die Stabilitätsgrenzen bzw. die kritische Aktoreckfrequenz für  $PT_1$ -,  $PT_2$ - und  $PT_3$ -Aktordynamik zeigt Bild 5-18.

Die Kurvenverläufe der Selektionsmatrix  $S_{6f}^*$  weisen ähnliche Eigenschaften wie bei den anderen Regelungsentwürfen für das Streckenmodell  $\Sigma_{G11}$  auf. Demgegenüber liegen die Anforderungen bei Verwendung der Selektionsmatrix  $S_{6p}^*$  deutlich höher. Dies ist insb. für  $K_{P,f} = 0,75$  der Fall. Ab dem Abszissenwert  $40 \cdot 2\pi$  kann hier eine deutliche Erhöhung

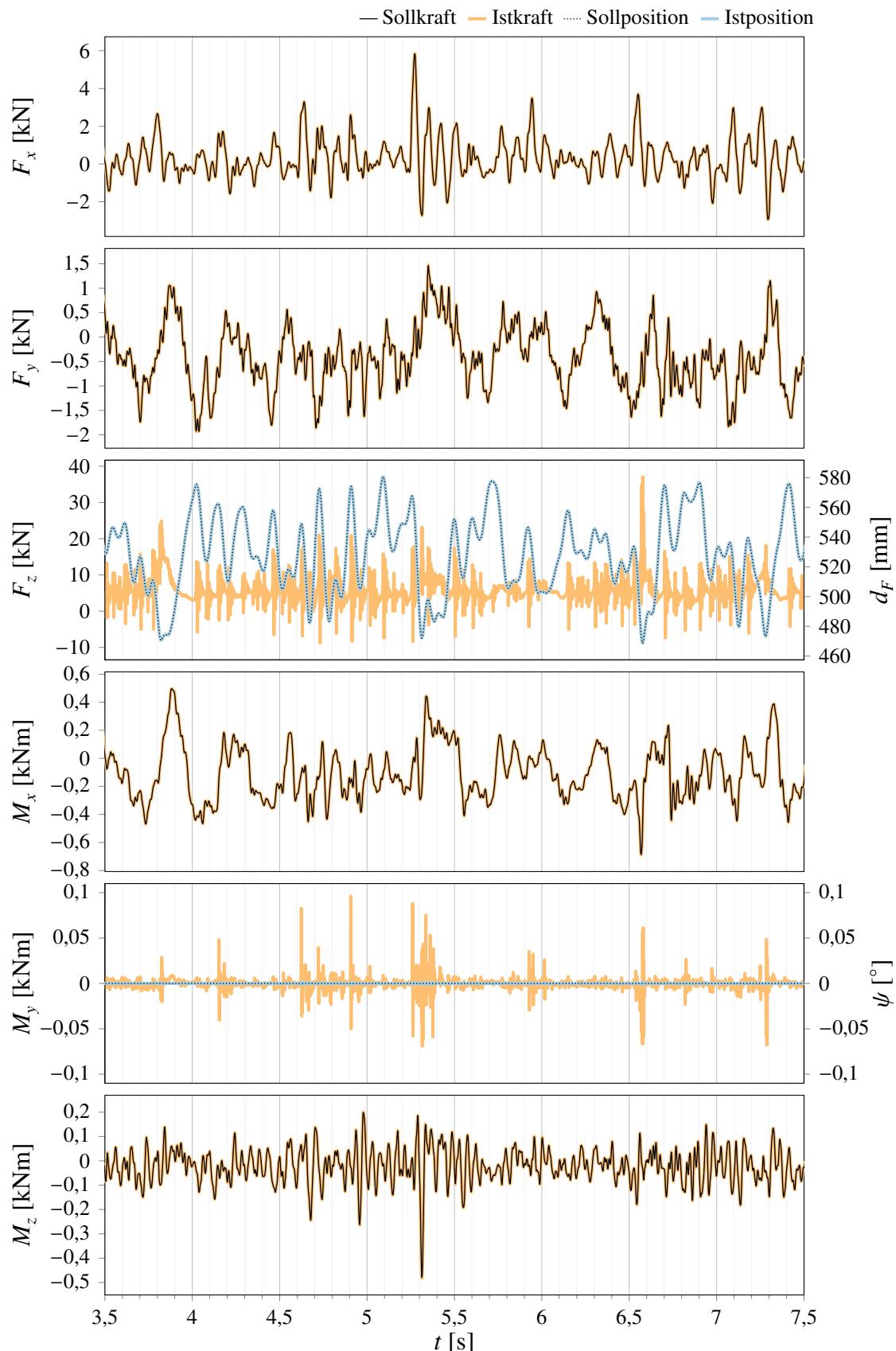


Bild 5-16: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,\text{EALin}}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

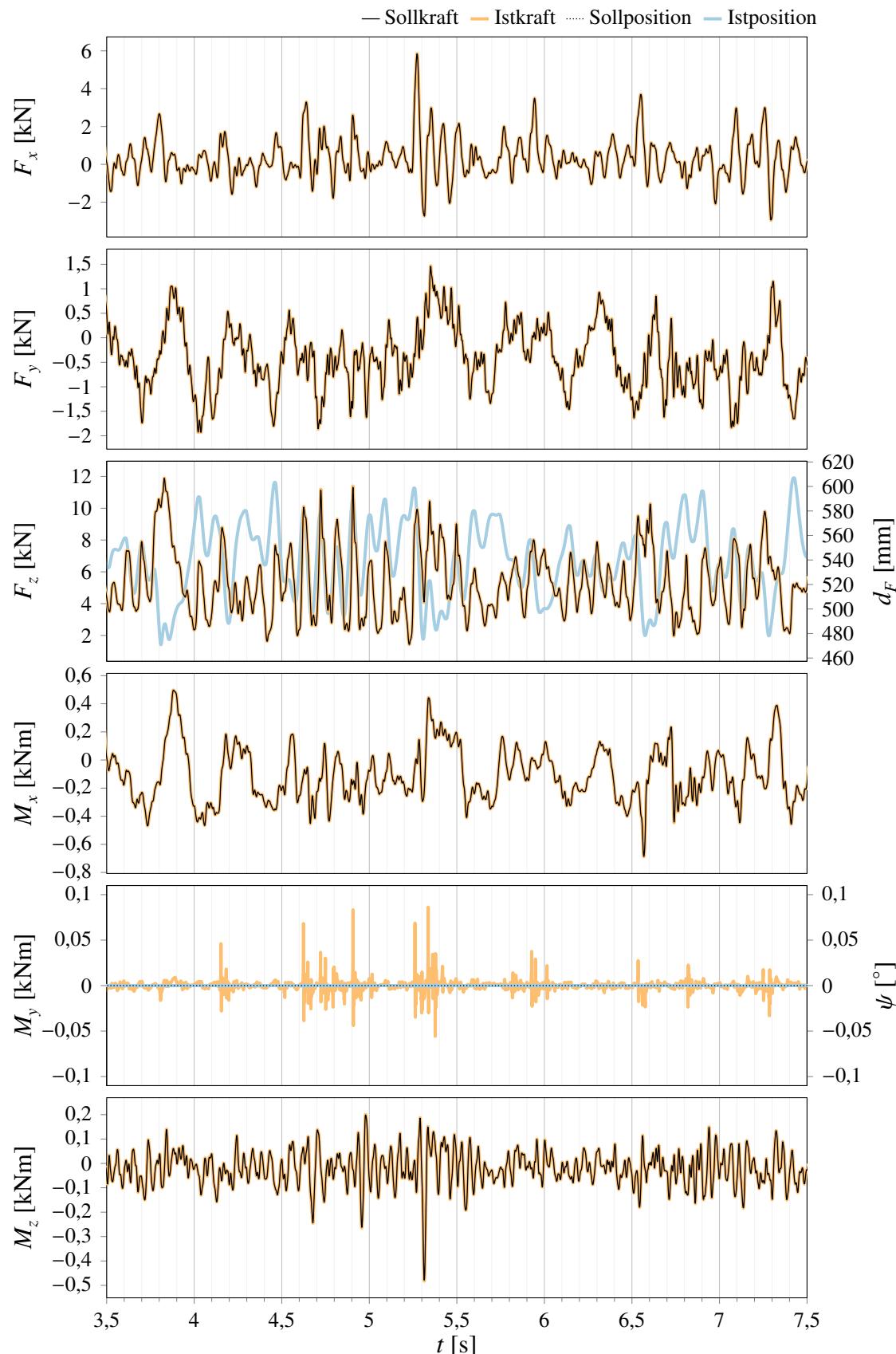


Bild 5-17: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$   
(Regler  $\Sigma_{R,\text{EALin}}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

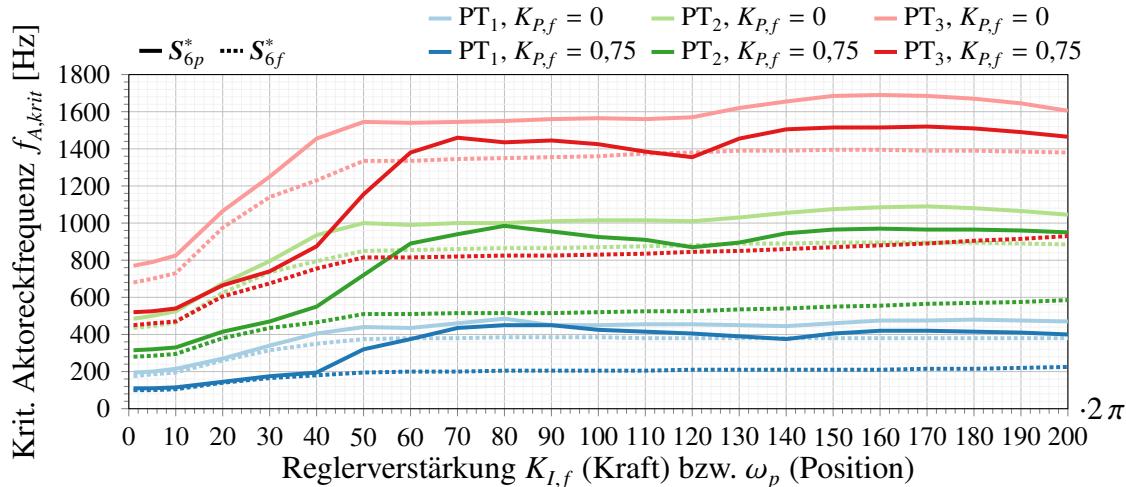


Bild 5-18: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  in Abhängigkeit der Parametrierung der äußeren Regelkreise (Regler  $\Sigma_{R,EALin}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

der erforderlichen Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  beobachtet werden. Der Effekt liegt auch für den Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  vor (Bild 5-15a), ist dort aber weniger stark ausgeprägt. Für den Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  in den Positionsgrößen  $z$  scheint er hingegen nicht zu existieren. Vermutlich lässt sich dieser Effekt ebenso wie die Oszillationen der Vertikalkraft  $F_z$  bei dieser Selektionsmatrix durch Betrachtung der internen Dynamik erklären. In dieser Hinsicht scheint die Regelung der vertikalen Koordinate  $r_z$  des TCP anstelle des Dämpferwegs  $d_F$ , wie sie bei dem Regelungsentwurf  $\Sigma_{R,LM6z}$  zwangsläufig folgt, von Vorteil zu sein.

Den Einfluss der Kraftreglerverstärkung  $K_{P,f}$  auf die Stabilitätsgrenze stellt Bild A7-23 dar. Bei Regelung der Vertikalkraft  $F_z$  (Selektionsmatrix  $S_{6f}^*$ ) kann die erforderliche Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  mit  $K_{P,f}$  verringert werden. Für die Selektionsmatrix  $S_{6p}^*$  dominiert hingegen der oben beschriebene Effekt, sodass  $K_{P,f}$  keinen wesentlichen Einfluss auf  $f_{A,krit}$  hat. Auch für diesen Regler resultiert instabiles Verhalten für  $K_{P,f} \geq 1,5$ .

Die in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Methoden lassen sich in unveränderter Form hier ebenfalls anwenden, um einen bei nicht vernachlässigbarer Aktordynamik stabilen Regler herbeizuführen.

Der Regelungsentwurf nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung ist - ganz im Gegensatz zu dem in Abschnitt 5.1 auf das System angewandten Verfahren - nicht auf die Regelung der dynamischen Koordinaten  $y_d$  und die Kontaktkräfte und -momente im TCP  $\tau$  beschränkt. Prinzipiell können auch andere Zielgrößen verfolgt werden. Einzige Bedingung an die zu regelnden Größen ist, dass für sie eine Ausgangsgleichung aufgestellt werden kann. Diese Gleichung muss anstelle einer der bisher verwendeten Regelgrößen in den Ausgangsvektor (5-67) aufgenommen werden, auf dessen Basis der Regelungsentwurf mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung vorzunehmen ist. Als weitere potenzielle Regelgrößen kommen dabei bspw. die Belastung des Querlenkers, der Spurstange oder des Federdoms in Betracht, vgl. Abschnitt 2.1. Das Verfahren ist damit allgemeiner als das in Abschnitt 5.1 auf den Achsprüfstand angewandte Verfahren nach de Luca und Manes [LM94] aus dem Stand von Technik und Forschung.

Ist die interne Dynamik stabil, so können aufbauend auf den erhaltenen linearen Eingängen sechs Größen geregelt werden, da mit den sechs Aktoren sechs Eingangsgrößen vorliegen. Für mehr als sechs Regelgrößen liegt ein unteraktuiertes System vor. In der Branche ist die Vorgabe von mehr als sechs Regelgrößen bzw. Targets (je Achsseite) allerdings durchaus üblich. Hierfür wären weitere Aktoren im Prüfstand zu verbauen, z. B. zur Aktuierung der Lenkstange oder des Lenkrades. Das gezielte Einstellen von mehr als sechs Zielgrößen mit sechs Aktoren ist nur in Sonderfällen physikalisch möglich. Mithilfe eines Optimierungsalgorithmus kann in diesen Fällen ein optimaler Kompromiss durch relative Gewichtung der Targets herbeigeführt werden.

### 5.2.2 Dynamische Bindung von Endeffektor und Radnabe

Bisher wurde das im Prüfstand verbaute Kraftmessrad als eine ideal starre Bindung abstrahiert. Aufgrund der hohen Steifigkeit der Kraftmessdosen erscheint diese Modellierung plausibel. In diesem Abschnitt wird dagegen die Situation betrachtet, in der zwischen dem Endeffektor und der Umgebung eine nicht als ideal starr abstrahierbare Kraftmesseinrichtung verbaut ist, die sich nach Abschnitt 4.4.2 beschreiben lässt. Die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  nach (4-247) weisen in diesem Fall, verglichen mit der ideal starren Bindung (4-236), keinen Durchgriff der Eingangsgröße  $F_q$  auf.

Die Anwendung des Regelungsentwurfs nach de Luca und Manes [LM94] ist bei dem dynamischen Kontaktmodell ungeeignet, da alleine sechs FHG für die Beschreibung der relativen Verschiebung und Verdrehung der Punkte  $T$  und  $T_1$  erforderlich sind, vgl. auch Bild 4-16. Ein auf dieses Kontaktmodell zugeschnittener Regelungsentwurf ist erforderlich. Mithilfe der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung können auch für diese Kontaktmodellierung hybride Kraft-/Positionsregelungen angegeben werden.

Der im Folgenden beschriebene Regelungsentwurf baut auf der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung nach (2-19) für die Ausgangsgröße  $y = z$  auf. Durch diesen prinzipiell optionalen Zwischenschritt verkürzen sich die nachfolgenden Ausführungen etwas und die Terme werden übersichtlicher. In (2-19) wird dabei  $\tau$  nach (4-247) eingesetzt. Damit gilt  $F_q = F_q(x_{Gd})$ , wobei  $x_{Gd}$  der Zustandsvektor des Gesamtmodells mit dynamischer Bindung nach (4-239) ist. Das Manipulatorverhalten lässt sich infolgedessen durch die einfache Gleichung (2-20),  $u_p = \dot{z}$ , beschreiben, wobei  $u_p$  die neue (Zwischen-) Eingangsgröße des Systems ist. Zunächst wird die Ausgangsgröße

$$y = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot z + \mathbf{S} \cdot \tau \quad (5-72)$$

betrachtet, d. h. für jede Richtung kann mithilfe der Selektionsmatrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{N}^{6 \times 6}$  zwischen der jeweiligen Kraft- und Positionsgröße im TCP gewählt werden. Jeder der insgesamt sechs Ausgänge wird dem Schema aus Anhang A3 folgend so oft nach der Zeit  $t$  differenziert, bis die Eingangsgröße  $u_p$  in der jeweils erhaltenen Gleichung enthalten ist. Im Falle eines Kraftausgangs ist dies nach einer Ableitung der Fall, d. h. die Differenzordnung eines Kraftausgangs beträgt  $\delta_i = 1$ . Es gilt

$$\dot{\tau} = \dot{\mathbf{K}}_C \cdot z_K + \mathbf{K}_C \cdot \dot{z}_K + \dot{\mathbf{K}}_D \cdot v_K + \mathbf{K}_D \cdot a_K \quad (5-73)$$

mit den zeitlichen Ableitungen der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \begin{bmatrix} {}^{IE}\dot{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\dot{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_C \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{IE}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_C \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\dot{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5-74)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_D = \begin{bmatrix} {}^{IE}\dot{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\dot{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_D \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{EI}\mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{IE}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{IE}\mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot {}_E\mathbf{K}_D \cdot \begin{bmatrix} {}^{EI}\dot{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{EI}\dot{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad (5-75)$$

bezüglich des Inertialsystems und

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_{T_1} - \mathbf{a}. \quad (5-76)$$

Der neue Systemeingang  $\mathbf{u}_p$  ist dabei in der Beschleunigung des TCP  $\mathbf{a}$  enthalten. In Anlehnung an (4-18) gilt hier

$$\dot{\mathbf{z}}_K = \begin{bmatrix} {}^I\dot{\xi} \\ \dot{\alpha}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^I\dot{\xi} \\ \mathbf{H}_{K,\omega}^{-1} \cdot {}_E\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^I\dot{\xi} \\ \mathbf{H}_{K,\omega}^{-1} \cdot {}^I\boldsymbol{\omega} \cdot {}^{EI}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{K,\omega}^{-1} \cdot {}^{EI}\mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_K^{-1}} \cdot \mathbf{v}_K \quad (5-77)$$

mit

$$\mathbf{H}_{K,\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta_K \\ 0 & \cos \alpha_K & -\sin \alpha_K \cdot \cos \beta_K \\ 0 & \sin \alpha_K & \cos \alpha_K \cdot \cos \beta_K \end{bmatrix}. \quad (5-78)$$

Bei einem Positionsausgang ist  $\delta_i = 2$ . Nach diesen ein bzw. zwei zeitlichen Ableitungen von (5-72) folgt

$$\ddot{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_C \cdot \mathbf{z}_K + \mathbf{K}_C \cdot \dot{\mathbf{z}}_K + \dot{\mathbf{K}}_D \cdot \mathbf{v}_K + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{a}_K). \quad (5-79)$$

Durch Ersetzen von  $\mathbf{a}$  nach (4-67) und  $\ddot{\mathbf{z}}$  durch die Eingangsgröße  $\mathbf{u}_p$  wird damit aus (5-79) bei Verwendung der Nomenklatur aus Anhang A3

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u}_p \quad (5-80)$$

mit

$$\ddot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}_{Gd}) = \mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_C \cdot \mathbf{z}_K + (\mathbf{K}_C \cdot \mathbf{H}_K^{-1} + \dot{\mathbf{K}}_D) \cdot \mathbf{v}_K + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{a}_{T_1} - \mathbf{K}_D \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{z}}), \quad (5-81)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}_{Gd}) = \mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{H}). \quad (5-82)$$

Darin ist  $\mathbf{a}_{T_1}$  der verallgemeinerte Beschleunigungsvektor des Punktes  $T_1$ , der ebenfalls aus den aktuellen Systemzuständen zu berechnen ist. Es gilt  $\mathbf{a}_{T_1} = \mathbf{a}_{T_1}(\mathbf{x}_{Gd})$ , da sich  $\mathbf{a}_{T_1}$  nach (4-220) mit

$$\ddot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{M}_u^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{yd}^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}_u) \quad (5-83)$$

und  $\boldsymbol{\tau}$  nach (4-247) berechnet, vgl. auch die dritte Zeile aus den Zustandsgleichungen des Gesamtmodells mit dynamischer Bindung von Endeffektor und Radnabe (4-251). Wird die Eingangsgröße  $\mathbf{u}_p$  des linearisierten Manipulatormodells nach

$$\mathbf{u}_p = \ddot{\mathbf{D}}^{-1} \cdot (\mathbf{u}_{h,dyn} - \ddot{\mathbf{c}}) \quad (5-84)$$

mit dem neuen Eingang  $\mathbf{u}_{h,dyn}$  gewählt, wobei  $\mathring{\mathbf{D}}$  invertierbar sein muss, so gilt

$$\mathbf{u}_{h,dyn} = \mathring{\mathbf{y}} . \quad (5-85)$$

Aufbauend auf der erzielten Linearisierung kann die Regelung von Kräften und Positionen gemäß der Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  bspw. durch

$$\mathbf{u}_{h,dyn,i} = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{r,i} + K_{\boldsymbol{\tau},i} \cdot (\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}) \quad (5-86)$$

in den kraftgeregelten Richtungen sowie

$$\mathbf{u}_{h,dyn,i} = \ddot{z}_{r,i} + K_{D,i} \cdot (\dot{z}_{r,i} - \dot{z}_i) + K_{P,i} \cdot (z_{r,i} - z_i) \quad (5-87)$$

in den positionsgeregelten Richtungen erfolgen. Zu beachten ist, dass es sich wieder lediglich um eine Ein-/Ausgangslinearisierung handelt. Mit der Systemordnung  $n$  sowie  $n_f = \text{spur } \mathbf{S}$  kraftgeregelten und  $n_p = 6 - n_f$  positionsgeregelten FHG folgt für den totalen relativen Grad

$$\delta = n_f + 2 \cdot n_p < n = \dim \mathbf{x}_{Gd} . \quad (5-88)$$

Es liegt eine interne Dynamik hoher Ordnung vor, die für das Gelingen des beschriebenen Regelungsansatzes stabil sein muss. Sollen  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $r_z$ ,  $M_x$ ,  $\beta$  und  $M_z$  geregelt werden (Selektionsmatrix  $\mathbf{S}_{6p}^*$ ), so gilt  $\delta = 8$ . Wird die Vertikalkraft  $F_z$  anstelle der vertikalen Position  $r_z$  geregelt (Selektionsmatrix  $\mathbf{S}_{6f}^*$ ), so ist der relative Grad  $\delta = 7$ . Für ideale Aktordynamik beträgt die Systemordnung  $n = 34$ , sodass die interne Dynamik die Ordnung 26 (Positionsregelung von  $r_z$ ) bzw. 27 (Kraftregelung von  $F_z$ ) besitzt.

Nach der gleichen Methodik lässt sich auch eine hybride Kraft-/Geschwindigkeitsregelung herleiten. Da die Differenzordnung im Falle eines Geschwindigkeitsausgangs wie bei einem Kraftausgang  $\delta_i = 1$  beträgt, ist der totale relative Grad in diesem Fall  $\delta = 6$  und die interne Dynamik besitzt unabhängig von der Selektionsmatrix  $\mathbf{S}$  die Ordnung 28 bei idealer Aktordynamik. Die Ordnung der internen Dynamik ist damit bei einer hybriden Kraft-/Geschwindigkeitsregelung um  $n_p$  größer als bei einer Kraft-/Positionsregelung.

Bild 5-19 zeigt das Strukturbild der beschriebenen Regelung für die dynamische Bindung von Endeffektor und Umgebung.

Die Richtigkeit des hergeleiteten Ansatzes konnte durch eine simulative Erprobung mit Messgrößen für  $z_{T_1}$ ,  $v_{T_1}$  und  $a_{T_1}$  unter Verwendung fiktiver Kraftmessradparameter (voll besetzte Matrizen  $\mathbf{K}_C$ ,  $\mathbf{K}_D$ ) bestätigt werden.

Der dargelegte Regelungsansatz ermöglicht die richtungsabhängige Regelung der Position oder der Kraft im Punkt  $T$ , vgl. Bild 4-16. Es liegt eine ideale Entkopplung der Regelgrößen vor. Für das Gelingen dieses Regelungsansatzes muss die Modellierung der betrachteten Kontaktsituation nach Abschnitt 4.4.2 valide sein. Sämtliche Zustandsgrößen des Gesamtsystems  $\mathbf{x}_{Gd}$  müssen vorliegen. Sie können entweder beobachtet oder gemessen werden. Verglichen mit der Situation eines als ideal starr abstrahierbaren Kraftmessrades erfordert die Regelung nicht nur die Modelle von Manipulator und Umgebung, sondern auch das Modell der Kraftmesseinrichtung (Parameter  $E\mathbf{K}_C$ ,  $E\mathbf{K}_D$  sowie  $E\boldsymbol{\tau}_0$ ). Vor der Implementierung muss die interne Dynamik auf Stabilität untersucht werden.

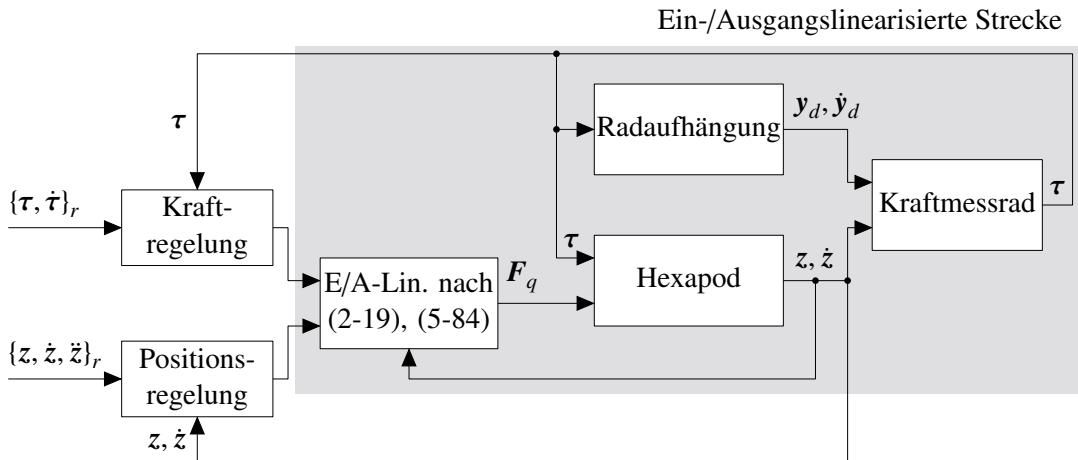


Bild 5-19: Implementierte hybride Kraft-/Positionsregelung für die dynamische Bindung

Prinzipiell kann im Falle der dynamischen Bindung zwischen Endeffektor und Umgebung ebenfalls eine hybride Regelung der Koordinaten  $y_d$  und der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  erfolgen. Hierfür muss die Ausgangsgröße

$$y = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \cdot X \cdot y_d + \mathbf{S} \cdot \tau \quad (5-89)$$

mit der bereits aus (5-67) bekannten dünnbesetzten Matrix  $X$  angesetzt werden. Für die Positionsgrößen ergibt sich in diesem Fall eine höhere Differenzordnung, da erst die dritte zeitliche Ableitung von  $y_d$  die Eingangsgröße  $F_q$  enthält ( $\delta_i = 3$ ),

$$\ddot{y}_d = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{M}_u^{-1} \right) \cdot \left( \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \tau - \mathbf{n}_u \right) + \mathbf{M}_u^{-1} \cdot \left( \dot{\mathbf{S}}_{yd}^T \cdot \tau + \mathbf{S}_{yd}^T \cdot \dot{\tau} - \dot{\mathbf{n}}_u \right) \quad (5-90)$$

mit  $\dot{\tau}$  nach (5-73). Verglichen mit der hybriden Regelung der Radnabengrößen  $z, \tau$  ist die Ordnung der internen Dynamik in diesem Fall niedriger. Auch andere Regelgrößen sind vorstellbar (z. B. Belastung des Querlenkers, der Spurstange oder Bewegungsgrößen der Radnabe anstelle des Endeffektors), wenn eine entsprechende Ausgangsgleichung vorliegt und die resultierende interne Dynamik stabil ist.

Im vorliegenden Fall erscheint die Annahme einer starren Bindung aufgrund der sehr hohen Steifigkeit des Kraftmessrades als zulässig, sodass der hier beschriebene Regelungsansatz nicht weiter verfolgt werden muss. Zeigt sich aber, dass die Modellierung des Kraftmessrades als dynamische Bindung zutreffender ist, so ist der hier dokumentierte Regelungsansatz einzusetzen.

### 5.2.3 Vereinfachte Umgebungsmodelle

Der Regelungsentwurf nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung eignet sich auch, wenn ein Modell der Form

$$\tau = \tau(z, \dot{z}) \quad (5-91)$$

hinreichend genau für die Beschreibung der Umgebung ist, sich das Umgebungsverhalten also näherungsweise durch die Manipulatorzustände  $z, \dot{z}$  beschreiben lässt. Zur Identifikation des Modells eignen sich bspw. Rausch-, Rampen- und/oder Chirp-Anregungen.  $\dot{c}$

und  $\dot{\mathbf{D}}$  vereinfachen sich dann gegenüber (5-81), (5-82). Für den Eingang  $\mathbf{u}_p$  des für die Ausgangsgröße  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$  linearisierten Systems folgt die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{u}_p = \dot{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{u}_{h,dyn} - \dot{\mathbf{c}}), \quad \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{S} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{z}^T} \dot{\mathbf{z}}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{I} - \mathbf{S} \left( \mathbf{I} - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \dot{\mathbf{z}}^T} \right). \quad (5-92)$$

Für dieses Kontaktmodell läge eine Systemordnung von  $n = 12$  vor (bei vernachlässigbarer Aktordynamik). Die Ordnung der internen Dynamik entspricht der Anzahl kraftgeregelter FHG, falls deren Beurteilung anhand des vereinfachten Modells (5-91) zulässig ist.

Das Strukturbild der Regelung mit dem vereinfachten Umgebungsmodell zeigt Bild 5-20.

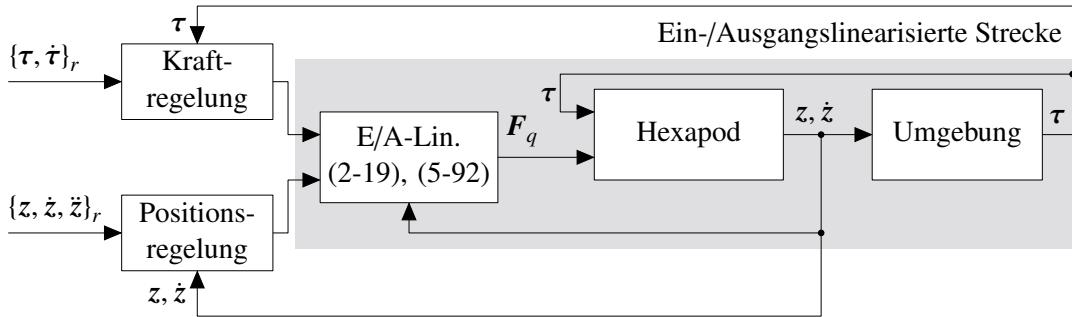


Bild 5-20: Hybride Kraft-/Positionsregelung bei vereinfachtem Umgebungsmodell

Dieser Ansatz wurde in der Studienarbeit von Nikolai Fast [FK17] in der gegenüber (5-91) nochmal etwas vereinfachten Form

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_D \cdot \dot{\mathbf{z}} \quad (5-93)$$

mit im Inertialsystem konstanten Matrizen  $\mathbf{K}_C$ ,  $\mathbf{K}_D$  untersucht. Darüber hinaus wurde das Konzept auch für die Kraftmodelle

- $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{z}$  (bei vernachlässigbarer Aktordynamik liegt in diesem Fall keine interne Dynamik vor) sowie
- $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_D \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_M \cdot \ddot{\mathbf{z}}$

implementiert und am Simulationsmodell erprobt. Außerdem wurden konventionelle Vorsteuerungsansätze sowie dezentrale Kraftregler (d. h. die Reglermatrix besitzt Diagonalgestalt) untersucht. Die MacPherson-Radaufhängung weist allerdings ein hoch nichtlineares Verhalten auf. Die Annahme einfacher Zusammenhänge für die Kontaktkräfte und -momente, wie sie diesem Abschnitt zugrunde liegen, scheint für die gegebene Anwendung nicht hinreichend zu sein. Dies zeigt bspw. auch die Gegenüberstellung des Zeitverhaltens von Modellen der Form (5-91) mit dem des MKS-Modells der Radaufhängung. Die Anwendung am HNI-Achsprüfstand scheidet daher aus. Für einfachere Kontaktsituationen, d. h. bei Vorliegen einer Umgebung mit weniger komplexem Verhalten, kann es sich hingegen um die ideale Herangehensweise handeln.

### 5.3 Entwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen

Die bisher dargelegten Regelungsansätze stellen die ideale Herangehensweise für die Regelung des Hexapod im Kontakt mit einer nach (2-78) beschreibbaren Umgebung

dar. Die Regelungen konnten auch für die hier betrachtete Umgebung, die MacPherson-Radaufhängung erfolgreich angewendet werden, da deren Bewegungsgleichungen in Abschnitt 4.3 inklusive genauer Modellierung der Lagerelastizitäten hergeleitet wurden. Auch die vorliegende Aktordynamik konnte in den Regelungsentwurf einbezogen werden, vgl. (5-22).

Die praktische Umsetzung dieser Regler stellt jedoch eine Herausforderung dar. Beispielsweise bedingen sie die zusätzliche Messung oder Schätzung weiterer zeitlicher Ableitungen der (generalisierten) Kräfte und Positionen. Bei der vorliegenden  $PT_3$ -Aktordynamik sind für die Umsetzung der Regler die dynamischen Koordinaten  $y_d$  bis zur vierten sowie die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  bis zur zweiten zeitlichen Ableitung erforderlich. Außerdem sind die in Manipulator- und Umgebungsmodell auftretenden Ausdrücke drei zusätzliche Male hinsichtlich der Zeit zu differenzieren. Anstelle dessen kann der Berechnung der Aktorkräfte für das System mit vernachlässigbarer Aktordynamik eine zusätzliche Lead-Glied-Filterung nachgeschaltet werden, was die praktische Umsetzung wesentlich einfacher gestaltet, vgl. Bild 5-3. In beiden Fällen ist ein genaues Umgebungsmodell zur Laufzeit im Regler zu berechnen. Die Herleitung und die Identifikation eines solchen Umgebungsmodells kann mit hohem Aufwand verbunden sein, vgl. Abschnitt 4.3. Die Regelung ist auf die modellierte Umgebung zugeschnitten. Die Anwendbarkeit für eine andere Umgebung ist ohne Modifikationen des Regelalgorithmus nicht gegeben. Im betrachteten Anwendungsfall ist bei Austausch des Prüflings

- ein anderer Parametersatz zu hinterlegen (wenn es sich um eine MacPherson-Radaufhängung handelt) oder
- die Bewegungsgleichungen dieses neuen Prüflings müssen ebenfalls hergeleitet und die Parameter identifiziert werden (bei einem anderen Radaufhängungstyp).

Hinzu kommt, dass selbst im Falle vernachlässigbarer Aktordynamik der vollständige Zustandsvektor, d. h.  $y_d$  und  $\dot{y}_d$ , für die Auswertung des Regelalgorithmus erforderlich sind. Diese Größen müssen gemessen und/oder beobachtet werden.

Für die praktische Anwendung am Prüfstand sind möglichst einfache Regler vorzuziehen, die mit wenig, im Idealfall sogar ohne Modellwissen über die Umgebung auskommen. Gegenüber den in Abschnitt 5.1 und 5.2 ausführlich diskutierten Verfahren können derartige Regler keine oder nur eine näherungsweise Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen erzielen. Auch die Dynamik des geschlossenen Regelkreises wird im Vergleich zu den bisher genannten Ansätzen, die (im Rahmen der Möglichkeiten der Aktorik) beliebig schnelles Verhalten erlauben, geringer ausfallen.

Die bisher eingesetzten nichtlinearen Regelungsentwurfsmethoden führen lineare Eingänge für die Regelgrößen herbei. Aufbauend auf diesen neuen Eingangsgrößen ist ein einfacher Regelungsentwurf mit den Methoden der linearen Regelungstechnik möglich. Demgegenüber werden in diesem Abschnitt Regelungen angegeben, die sich an den in der praktischen Anwendung existierenden Regelungsansätzen orientieren. Wesentliches Unterscheidungsmerkmal der untersuchten Ansätze ist der Aufbau der Kraftregelung, insb. das Vorliegen unterlagerter Regelkreise. Ausgangspunkt aller Ansätze ist die durch (2-19) gegebene Linearisierung des Systems für die Pose  $z$ , die zu dem linearen Verhalten  $u_p = \dot{z}$  führt. Im folgenden Abschnitt 5.3.1 wird die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung näher betrachtet. Zu diesem Regler werden auch die bisher am Prüfstand erzielten Ergebnisse gezeigt und diskutiert. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit zur

Kraftregelung auf Basis einer unterlagerten Geschwindigkeitsregelung. Dieser Ansatz sowie eine Ausführungsform der expliziten Kraftregelung, die direkt auf der Linearisierung für die Endeffektorpose  $z$  nach (2-19) aufbaut, wird anschließend erläutert (Abschnitt 5.3.2). Die explizite Kraftregelung weist mit Ausnahme des Differenzdruckreglers, den alle Regler gleichermaßen verwenden, keine weiteren unterlagerten Regelschleifen auf. Im Sinne einer hybriden Kraft-/Positionsregelung wird dann entweder die vom jeweiligen Kraftregler gebildete Ausgangsgröße  $u_p$  oder (im Falle einer Positionsregelung der betrachteten Richtung) der jeweilige Ausgang des Positionsreglers nach (2-21) vorgegeben. Vorbild ist das Strukturbild 2-20.

### 5.3.1 Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung

Dieser Abschnitt thematisiert die Kraftregelung auf Basis der bestehenden Positionsregelung nach (2-19) und (2-21). Bild 5-21 zeigt die Regelungsstruktur.

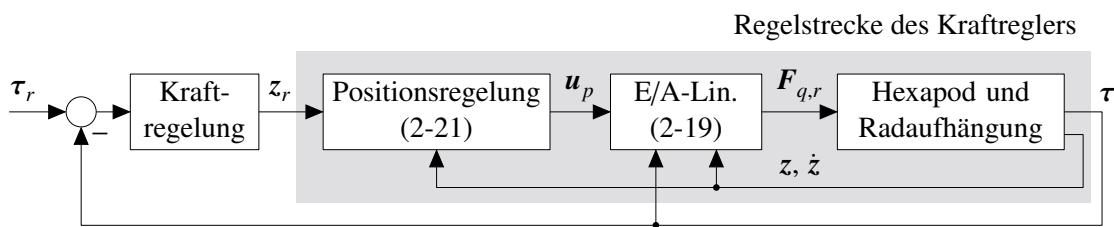


Bild 5-21: Strukturbild der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung

Die Positionsregelung wurde um die Kraftregelung ergänzt. Nach dem Strukturbild ist vorgesehen, dass sie Sollwerte für die Pose des Hexapod  $z$  bildet. Um das gewünschte Verhalten des geschlossenen Positionsregelkreises möglichst unverändert beizubehalten, muss neben der Sollpose  $z_r$  auch deren zeitliche Ableitung  $\dot{z}_r$  bereitgestellt werden. Hier wird diese Größe durch einen realen Differenzierer aus dem Ausgang des Kraftreglers gebildet. Darüber hinaus besteht prinzipiell die Möglichkeit, die Vorsteuergröße des Positionsregelkreises  $\ddot{z}_r$  vorzugeben. Anstelle realer Differenzierung kann der Kraftregler auch so entworfen werden, dass er direkten Sollwerte für alle Eingangsgrößen des Positionsreglers bildet. Ein Beispiel ist die vollständig parallele Komposition der parallelen Kraft-/ Positionsregelung, vgl. (2-36).

Das skizzierte Regelungsschema scheint auf den ersten Blick sehr naheliegend und intuitiv. So wird bei Abweichung zwischen Soll- und Istwert der Kontaktkraft durch den Kraftregler eine Bewegung des Endeffektors in die zugehörige Richtung herbeigeführt, wodurch sich die Kontaktkraft in der gewünschten Weise anpasst. Während jedoch die Zuordnung der durchzuführenden Korrekturbewegung in den translatorischen Richtungen (d. h. bei den Kontaktkräften) eindeutig ist, existiert ein solcher, einfacher Zusammenhang bei rotatorischen Richtungen (d. h. bei den Kontaktmomenten) nicht. In der einfachsten Realisierung einer Regelung für die Kontaktmomente kann angenommen werden, dass bei Vorliegen einer Regelabweichung von  $M_x$ ,  $M_y$  bzw.  $M_z$  eine Änderung des Kardanwinkels um die jeweilige Achse  $\alpha$ ,  $\beta$  bzw.  $\gamma$  durchzuführen ist. Dieses Vorgehen ist jedoch nur im Sonderfall verschwindend geringer Kardanwinkel korrekt und im besten Fall für kleine

Kardanwinkel praktikabel. Die Thematik wurde bereits im Stand von Technik und Forschung angesprochen und wird ausführlicher bspw. in [SV99; Nat10] diskutiert. An dieser Stelle wird angenommen, dass dieses Vorgehen näherungsweise korrekt ist.

Neben der Kraftregelung besteht natürlich grundsätzlich auch die Möglichkeit der Realisierung einer Kraftvorsteuerung. Sie kann Sollwerte für den unterlagerten Positionsregler bereitstellen ( $z_r$ ,  $\dot{z}_r$  und  $\ddot{z}_r$ ), zu denen der jeweilige Ausgang des Kraftreglers hinzuaddiert wird. Die Übergänge dieses Regelungsansatzes zur parallelen Kraft-/Positionsregelung sind daher fließend.

Es existiert eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Ausgestaltung einer solchen Kraftregelung und -vorsteuerung. Die Motivation dieses Abschnitts besteht in der (im Vergleich zu den bisher genannten Ansätzen) einfacheren Realisierung einer Regelung für den Hexapod. Dabei wird in Kauf genommen, dass die Kopplung der Regelgrößen nicht ideal aufgehoben wird.

Bei den Parametern der Regler nach den Abschnitten 5.1 und 5.2 liegt aufgrund der herbeigeführten linearen Eingänge ein anschaulicher Zusammenhang mit dem Verhalten des geschlossenen Regelkreises vor. Die Parameter können so gewählt werden, dass eine gewünschte Bandbreite für den geschlossenen Kraft- bzw. Positionsregelkreis vorliegt, vgl. bspw. (5-43). Die Festlegung der Reglerparameter ist ähnlich einfach wie bei der Positionsregelung des Hexapod ohne Umgebungskontakt. Bei einer Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung ist dies nicht der Fall. Hier liegen keine linearen Eingänge vor. Das System ist weiterhin verkoppelt. Um dennoch einen Anhaltspunkt bei der Regelungssynthese zu haben, bietet es sich an, die lineare Näherung der Regelstrecke in einem repräsentativen Betriebspunkt zu ermitteln. Sie kann analytisch aus dem nicht-linearen Streckenmodell berechnet werden. Praktikabler für die praktische Anwendung ist die numerische Berechnung der linearen Näherung auf Basis eines MKS-Modells des Prüfsystems (z. B. mithilfe von MATLAB/Simulink und MATLAB/Simscape), da hierfür vergleichsweise wenig Aufwand erforderlich ist. Außerdem entfällt das sonst erforderliche, zeitaufwändige Aufstellen der Bewegungsgleichungen. Bei Austausch des Prüflings ist daher nur das Einfügen des entsprechenden MKS-Modells in der Simulationsumgebung und eine erneute Berechnung der linearen Näherung notwendig. Nachteilig ist, dass die numerisch bestimmte lineare Näherung der Regelstrecke nur für einen einzigen Betriebspunkt gültig ist und im Grunde für jeden Betriebspunkt einzeln durchzuführen ist. Bei einer Regelstrecke mit stark nichtlinearem Verhalten ist zu prüfen, inwiefern ein anhand der linearen Näherung eines Betriebspunkts entworfener Regler auch für das nichtlineare System funktional ist. Das Systemverhalten in der Umgebung des gewählten Betriebspunkts wird durch ein lineares Zustandsraummodell beschrieben, d. h.

$$\dot{\bar{x}}_{Gs} = \bar{A}_{Gs} \bar{x}_{Gs} + \bar{B}_{Gs} \bar{u}_{Gs}, \quad \bar{y}_{Gs} = \bar{C}_{Gs} \bar{x}_{Gs} + \bar{D}_{Gs} \bar{u}_{Gs} \quad (5-94)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\bar{x}_{Gs} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d^T & \dot{\mathbf{y}}_d^T & \mathbf{F}_q^T & \dot{\mathbf{F}}_q^T & \ddot{\mathbf{F}}_q^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{40}, \quad (5-95)$$

dem Eingangsvektor  $\bar{u}_{Gs} = z_r$  und dem Ausgangsvektor  $\bar{y}_{Gs} = \tau$ . Anhand des Zustandsvektors lässt sich ablesen, dass die lineare Näherung für das Streckenmodell inklusive PT<sub>3</sub>-Aktordynamik durchgeführt wurde.

Aufbauend auf dieser linearen Näherung des Regelstreckenmodells kann der Regelungs-entwurf z. B. mit den Methoden der linearen Regelungstechnik durchgeführt werden. Die Anwendbarkeit des Reglers für das nichtlineare System ist im Nachgang durch Simulationen zu prüfen. Mithilfe des Zustandsraummodells können prinzipiell auch Zustandsregler entworfen werden, die bspw. durch Polvorgabe entworfen werden können. Auf das lineare Modell kann auch wieder die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung zur Entkopplung des Führungsverhaltens angewendet werden, d. h. der Regelungsentwurf nach Falb und Wolovich [FW67] erfolgen, vgl. auch Abschnitt 5.2.3. Im Allgemeinen kann jeder System-eingang dann auf jede Regelgröße wirken, d. h. es handelt sich um zentrale Regelungen. Zustandsregler setzen jedoch die Messung oder Beobachtung sämtlicher Systemzustände  $\bar{x}_{G_S}$  voraus, die am Prüfstand größtenteils nicht vorliegen.

An dieser Stelle erfolgt eine Beschränkung auf solche Regler, die mit den aktuell verfügbaren Messgrößen am Prüfstand und ohne angepassten Beobachterentwurf auskommen. Außerdem muss der Parametrierungsaufwand vertretbar bleiben, da die Regelung am Prüfstand in Betrieb genommen werden soll. In einem ersten Schritt werden daher dezentrale Eingrößenregler für jede Regelgröße entworfen, d. h. der Kraftregler besitzt Diagonalge-stalt. Damit ist die Annahme verbunden, dass die Verkopplungen der Regelgrößen die Regelgüte nicht maßgeblich beeinträchtigen.

Die Regelstrecke des Kraftreglers besitzt den Eingang  $z_r$  und den Ausgang  $\tau$ , vgl. Bild 5-21. Bild 5-22 zeigt das Übertragungsverhalten für alle Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  außer  $M_y$ . Anstelle  $M_y$  wird am Prüfstand stets der Drehwinkel geregelt, da durch den Dreh-FHG zwischen Radnabe und Radträger kein nennenswertes Bremsmoment vorliegt. Bei der Linearisierung wurde in allen FHG ein Positionsregler mit  $f_{GRK,p} = 50 \text{ Hz}$  und  $D_p = 1$  angesetzt, sodass die 6 dB-Bandbreite des geschlossenen Positionsreglers 50 Hz beträgt, vgl. auch (2-22). Als Betriebspunkt wurde diejenige Position des Endeffektors gewählt, bei der das Federbein in der Mitte seines Verfahrwegs positioniert ist und alle Kräfte und Momente  $\tau$  außer der Vertikalkraft  $F_z$  gleich Null sind. Diese Situation liegt auch sämtlichen anderen, in den folgenden Abschnitten beschriebenen Linearisierungen bzw. Identifikationsmessungen am Prüfstand zugrunde.

Jeder Übertragungspfad besitzt die Differenzordnung 3 und bis etwa 10 Hz annähernd P-Verhalten. Darüber hinaus ist vor allem für  $F_x$  und  $F_z$  eine Absenkung der Amplitu-de bei gleichzeitiger Anhebung der Phase zu beobachten, bis ein ausgeprägtes, lokales Minimum in der Amplitude erreicht wird. Für  $F_x$  liegt dieses Minimum bei 37,5 Hz, für  $F_z$  bei 19,25 Hz bei einer Amplitudenabsenkung von 11,7 dB bzw. 16,7 dB gegenüber der stationären Verstärkung. Daraufhin steigt die Amplitude deutlich über die stationäre Verstärkung hinaus an, bis ein Maximum erreicht ist. Danach fällt der Amplituden- und Phasenverlauf kontinuierlich ab. Das Maximum liegt sowohl für  $F_x$  als auch für  $F_z$  bei der Frequenz 130 Hz vor. Die Erhöhung der Amplitude gegenüber der stationären Verstärkung beträgt 26,8 dB bzw. 39,6 dB. Für  $F_y$  und  $M_z$  liegen qualitativ ähnliche, aber weniger stark ausgeprägte Verläufe vor. Bei dem Sturzmoment  $M_x$  ist diese Charakteristik hingegen nur sehr schwach ausgeprägt.

Anhand des Bodediagramms (Bild 5-22) kann nun ein Regelungsentwurf vorgenommen werden. Mit einem einfachen PI(D)-Regler sind hierbei aber in den Richtungen mit einem ausgeprägten Maximum im Amplitudenverlauf keine sonderlich hohen Bandbreiten für die geschlossenen Kraftregelkreise zu erwarten. Dies ist nur durch eine zusätzliche Formung des Frequenzgangs möglich. Beispielsweise können sog. Notch- bzw. Kerbfilter eingesetzt

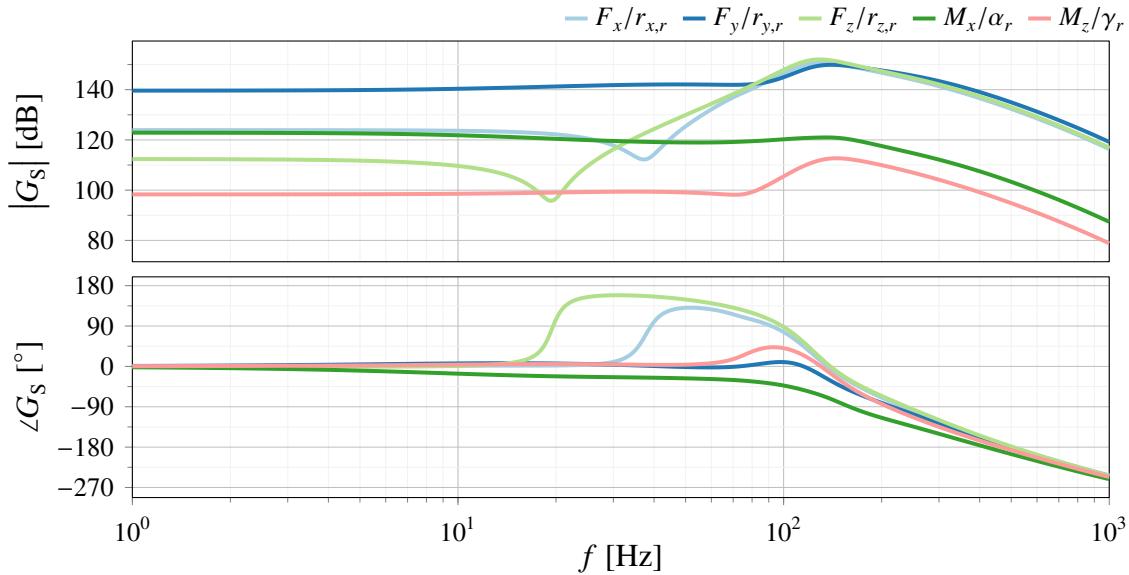


Bild 5-22: Übertragungsverhalten der offenen Regelkreise für die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung ( $f_{GRK,p} = 50 \text{ Hz}$ ,  $D_p = 1$ )

werden, um die für den Regelungsentwurf ungünstige Amplitudenerhöhung gezielt zu reduzieren. Es lässt sich allerdings nicht ausschließen, dass an einem Betriebspunkt ausgelegte, zusätzliche Filter in anderen Betriebspunkten unerwünschte negative Auswirkungen auf den Frequenzgang besitzen. Der Erfolg dieser Maßnahme ist vor dem Hintergrund des fortlaufend wechselnden Betriebspunkts nicht zwangsläufig sichergestellt und wird an dieser Stelle daher nicht weiter verfolgt.

Der Frequenzgang der Regelstrecke kann aber nicht nur über Kerbfilter günstig beeinflusst werden. So hat auch die Parametrierung des unterlagerten Positionsreglers, der hier einen Teil der Strecke des Kraftreglers darstellt, entscheidenden Einfluss auf den Amplituden- und Phasenverlauf. Bild 5-23 zeigt einige ausgewählte Beispiele für den Einfluss des Positionsreglers auf den Frequenzgang. Zusätzlich zum bereits in Bild 5-22 enthaltenen Frequenzgang für  $f_{GRK,p} = 50 \text{ Hz}$  ist dort auch der Amplituden- und Phasenverlauf der Regelstrecke für eine unterlagerte Positionsregelung mit einer 3 dB-Bandbreite von 10 Hz zu sehen. Zwei weitere Kurven zeigen außerdem, wie sich diese Frequenzgänge verändern, wenn der mithilfe realer Differentiation gebildete Sollwert  $\dot{z}_r$  nicht an den Positionsregler weitergegeben wird ( $K_{D,r} = 0$ ). Der Positionsregler erhält in diesem Fall nur den Positions- soweit  $z_r$ ; die Sollgeschwindigkeit  $\dot{z}_r$  und die Sollbeschleunigung  $\ddot{z}_r$  sind jeweils 0. Für alle Verläufe gilt  $D_p = 1$ .

Aus Bild 5-23 kann entnommen werden, dass die grundlegende Gestalt des Frequenzgangs für alle untersuchten Parametrierungen der Positionsregelung gleich ist: ausgehend von einem konstanten Verlauf hat die Amplitude ein ausgeprägtes Minimum, dann ein Maximum und fällt danach kontinuierlich ab. Das Minimum liegt in allen Fällen bei der etwa gleichen Frequenz, was auf eine spezifische Eigenschaft des nicht veränderten Teils der Strecke, z. B. eine Eigenfrequenz des mechanischen Teilsystems, schließen lässt. Gegenüber dem Fall  $f_{GRK,p} = 50 \text{ Hz}$  ist das Amplitudenmaximum bei den anderen Parametrierungen weniger stark ausgeprägt. Dies ist günstig für den Entwurf des überlagerten

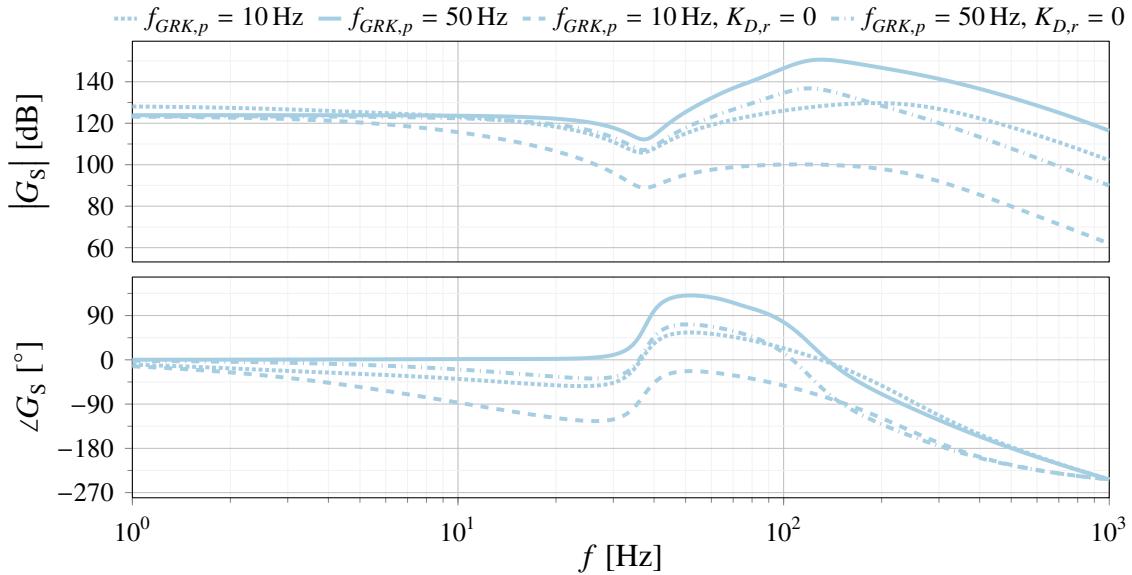


Bild 5-23: Übertragungspfad von  $r_{x,r}$  nach  $F_x$  in Abhängigkeit der unterlagerten Positionsregelung

PI-Kraftreglers. Die Erfordernis eines I-Anteils im Kraftregler für die Sicherstellung eines stationär genau arbeitenden Reglers ergibt sich aus der Tatsache, dass die Regelstrecke selbst kein I-Verhalten aufweist. Für  $f_{GRK,p} = 10 \text{ Hz}$ ,  $K_{D,r} = 0$  liegt das Maximum des Amplitudenverlaufs unter der stationären Verstärkung. Hier ist der Phasenverlauf gegenüber den anderen Fällen jedoch deutlich abgesenkt. Für die Parametrierung  $f_{GRK,p} = 10 \text{ Hz}$  ist das Maximum gegenüber  $f_{GRK,p} = 50 \text{ Hz}$ ,  $K_{D,r} = 0$  etwas geringer und der Phasenverlauf fällt weniger schnell ab. Die Parametrierung  $f_{GRK,p} = 10 \text{ Hz}$  stellt aus allen dargestellten Beispielen einen guten Kompromiss dar. Für die anderen Richtungen lassen sich vergleichbare Überlegungen anstellen. Für die Regelung der Vertikalkraft  $F_z$  ist bspw. ebenfalls ein langsamer unterlagelter Positionsregler von Vorteil. Bei den anderen Richtungen kann auch die Wahl eines schnelleren Positionsreglers vorteilhaft sein.

Aus diesen modellbasierten Vor betrachtungen lässt sich folgern, dass der unterlagerte Positionsregler (entgegen der Intuition) nicht zwingend möglichst schnell ausgelegt werden muss, sondern dass es von Vorteil sein kann, diesen bewusst langsam zu wählen. In der Folge können für den Kraftregler höhere Verstärkungen gewählt werden, sodass die Eingriffe des Kraftreglers stärker als die Positions- und Geschwindigkeitsrückkopplungen in  $\mathbf{u}_p$  eingehen und ein besseres Kraftregelergebnis erzielt werden kann.

Die Parametrierung des Kraftreglers kann auf Basis der ermittelten Linearisierung erfolgen. Bei einem linearen System würde ein so entworfener Regler in allen Betriebspunkten gleich gute Ergebnisse liefern. Bei dem vorliegenden System handelt es sich hingegen um ein ausgeprägt nichtlineares System mit stark vom Betriebspunkt abhängigem Verhalten. Die Funktionalität des am linearen Modell entworfenen Reglers für das nichtlineare System ist im Nachgang mithilfe von Simulationen zu überprüfen. Darüber hinaus stellt jedes Modell ohnehin nur ein vereinfachtes Abbild des realen Systems dar und weist damit nur eine begrenzte Genauigkeit auf. Notwendige Vereinfachungen beim Regelungsentwurf für ein mechanisches System sind bspw. die Annahme starrer Körper oder kennlinienbasierte

Elastomerlagermodelle. Aus den vorgenannten Gründen wird auf eine ausführlichere Diskussion zur Wahl der Reglerparameter am Simulationsmodell verzichtet und direkt zu den am Prüfstand mit diesem Regler erzielten Ergebnissen übergegangen.

Liegt in Zukunft ein hinreichend guter Parametersatz für den Prüfling vor und wurde das Simulationsmodell anhand von Messungen am Prüfstand validiert, so kann das Streckenmodell stärker in den Regelungsentwurf einbezogen werden. Aufschlussreich dürfte hierbei auch die Untersuchung der Verkopplung der einzelnen Regelgrößen sein, wie sie bspw. in [Lun16, S. 199 ff.] beschrieben wird. Bei guter Übereinstimmung von Modell und Realität kann auch eine Kompensation dieser Verkopplungen in Erwägung gezogen werden, siehe z. B. Reihen- oder Serienentkopplung [Föl13, S. 225 ff.], [Lun16, S. 408 ff.]. Im Anhang ist mit Bild A7-26 auch der Frequenzgang der Nebenrichtungen zu sehen, die einen Eindruck über das Ausmaß der Verkopplungen vermitteln. Noch vielversprechender als diese linearen Kompensationsmethoden für die praktische Anwendung am Prüfstand ist der Einsatz eines Reglers nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung, wie er in den Abschnitten 5.1 und 5.2 entwickelt wurde, da er die mit Abstand besten Regelergebnisse erwarten lässt.

Am Prüfstand wurden sämtliche Kraftregler auf Basis der modellbasierten Voruntersuchungen experimentell ausgelegt. Selbst bei Verwendung von PI-Reglern bestehen viele Variationsmöglichkeiten bei der Parametrierung, wenn die unterlagerte Positionsregelung in die Untersuchungen einbezogen wird. Bei den Experimenten am Prüfstand wurde neben dem I- und dem P-Anteil des Kraftreglers auch die Bandbreite der unterlagerten Positionsregelung über den Parameter  $f_{GRK,p}$  variiert. Der Parameter  $D_p$ , der als Dämpfung der Positionsregelung interpretiert werden kann, wurde hingegen stets auf dem Wert 1 belassen. Auf einen D-Anteil im Kraftregler wurde verzichtet. Dieser erfordert eine reale Differentiation der stark verrauschten Messwerte des Kraftmessrades.

Die experimentelle Auslegung der Kraftregelung wurde für jede Richtung einzeln anhand von Rechtecksignalen durchgeführt und anschließend an der praxisnahen Schlechtweganregung erprobt. Die Reglerauslegung erfolgte in einem speziell dafür vorgesehenen Betriebsmodus des Prüfstands. In diesem Modus werden fortlaufend die vorliegenden Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  zum Prüfling überwacht, mit definierten Grenzen verglichen und im Falle des Überschreitens einer Grenze das System in einen sicheren Zustand überführt. Hintergedanke dieser Überwachung ist das rechtzeitige Abfangen kritischer Systemzustände, wie sie bspw. bei einem schlecht parametrierten Kraftregler resultieren können.

Am Prüfstand wurde der Regler mithilfe einer am Modell entwickelten, konservativen Reglerparametrierung in Betrieb genommen und in den beschriebenen Auslegungsmodus überführt. Dort konnten mithilfe der Rechtecksignale die Regler parametriert und relativ schnell wesentlich bessere Regelergebnisse erzielt werden. Als problematisch erweist sich dabei allerdings, dass die Systemantwort für diesen Regler ein stark amplitudenabhängiges Verhalten aufweist. Wird ein Regler anhand der Sprungantwort mit einer definierten Sprunghöhe ausgelegt, so kann für genau diese Anregungssituation ein sehr schneller Regler gefunden werden. Der so ermittelte Regler kann für eine andere Sprunghöhe aber ein ganz anderes, möglicherweise schlechteres Verhalten aufweisen und/oder zur Überschreitung der festgelegten Kraftgrenzen und damit zur Auslösung der oben genannten Sicherheitsroutine führen. Eine Auslegung mit hoher Anregungsamplitude erscheint zweckmäßig. Ein Nachteil dieser Regelungsstruktur ist auch, dass die einzelnen Regelgrößen

Verkopplungen zueinander aufweisen. So kann in der vergleichsweise steifen Querrichtung (Kraft  $F_y$ ) zwar bei isolierter Anregung dieser Richtung ein sehr schneller Regler gefunden werden. Der Regler ist aber sehr anfällig für Anregungen insb. in den weicheren Richtungen (Kräfte  $F_x$  und  $F_z$ ), bei denen zum Einstellen eines definierten Kraftniveaus relativ hohe Wege zurückgelegt werden müssen. Diese Problematik lässt sich ggf. auch durch konstruktive Anpassung der Kraftmesseinrichtung deutlich abschwächen: Durch Reduktion der Steifigkeit des Messrades in denjenigen Richtungen, in denen die Umgebung eine hohe Steifigkeit aufweist, kann eine breitbandige Kraftregelung wesentlich einfacher realisiert werden.

Die Funktionalität der durch isolierte Anregung einer Richtung gewonnenen Reglerparametrierung für das nachzubildende Target-Signal muss im Anschluss experimentell überprüft werden. Kommt es bei der Nachbildung des Target-Signals zu Instabilitäten oder unzulässig hohen Kontaktkräften und können die Stellgrößenbeschränkungen (maximale Differenzdrücke, Zylinderhübe und Ventilschieberwege und -beschleunigungen) als Ursache ausgeschlossen werden, so müssen die Regler nachgebessert werden. In der Praxis können bei isolierter Anregung einer einzelnen Richtung durchweg schnellere Regler realisiert werden, als sie dann später im Falle simultaner Anregung aller Richtungen bei einem gegebenen Target-Signal eingesetzt werden können.

Die am Modell gemachten Beobachtungen konnten durch die Experimente am Prüfstand bestätigt werden. So ist es vorteilhaft, für die Regelung der Längs- und Vertikalkraft  $F_x$  und  $F_z$  einen unterlagerten Positionsregler mit  $f_{GRK,p} = 10 \text{ Hz}$  anzusetzen. In den anderen Richtungen können auch höhere Bandbreiten für den Positionsregler von Vorteil sein. Dies gilt z. B. für den Regler der Querkraft  $F_y$ .

Bild 5-24 zeigt den am Prüfstand gemessenen Soll-/Istwertvergleich für die Schlechtweganregung bei Verwendung der experimentell parametrierten Regler. Die Amplitude des Target-Signals wurde unverändert beibehalten. Allerdings ist es bei den ermittelten Reglerparametern für die erfolgreiche Durchführung des Versuchs erforderlich, das Target-Signal vor der Aufschaltung auf den Regler mit einem  $\text{PT}_2$ -Filter mit 10 Hz Eckfrequenz zu filtern. Die so erhaltene Sollwertvorgabe ist weniger anspruchsvoll als das unmodifizierte Target-Signal.

Die gemessenen Zeitverläufe zeigen, dass die Regelung der weichen Längs- und Vertikalrichtung (Kräfte  $F_x$  und  $F_z$ ) sehr gut gelingt. Auch schnelle Änderungen des Kraftniveaus werden von beiden Reglern gut nachgebildet. Insgesamt liegt ein gutes Führungsverhalten vor. Die Regelung der Querkraft  $F_y$  ist offensichtlich anfällig gegenüber schnellen Veränderungen in den anderen Richtungen. Vor allem im Zeitraum 3,8-4 s ist der beschriebene Effekt erkennbar, in dem große Veränderungen der Vertikalkraft  $F_z$  sowie des Sturzmoments  $M_x$  vorliegen. Dies lässt sich ebenso wie die Abweichungen im übrigen Signalverlauf auf die Verkopplung der Regelgrößen zurückführen. Ein vergleichbarer Effekt ist in abgeschwächter Form auch beim Sturzmomentregler (Moment  $M_x$ ) zu beobachten. In diesen beiden Richtungen liegt eine relativ hohe Steifigkeit vor. Da Verkopplungen zwischen den Regelgrößen bestehen, tritt die aus den Kräften  $F_x$  und  $F_z$  resultierende Bewegung der Radnabe für die Querkraft  $F_y$  und das Sturzmoment  $M_x$  als Störgröße in Erscheinung, die den Effekt erklärt. Die Regler für  $F_y$  und  $M_x$  stellen ideale Kandidaten für die Entwicklung von Regelungsmaßnahmen dar, die auf eine Reduktion der Verkopplungen unter den Regelgrößen abzielen. Die Regelung des Drehwinkels  $\beta$  kann mit konstant minimaler Abweichung den Sollwert von 0 halten. Das Spurmoment  $M_z$  ist über den gesamten

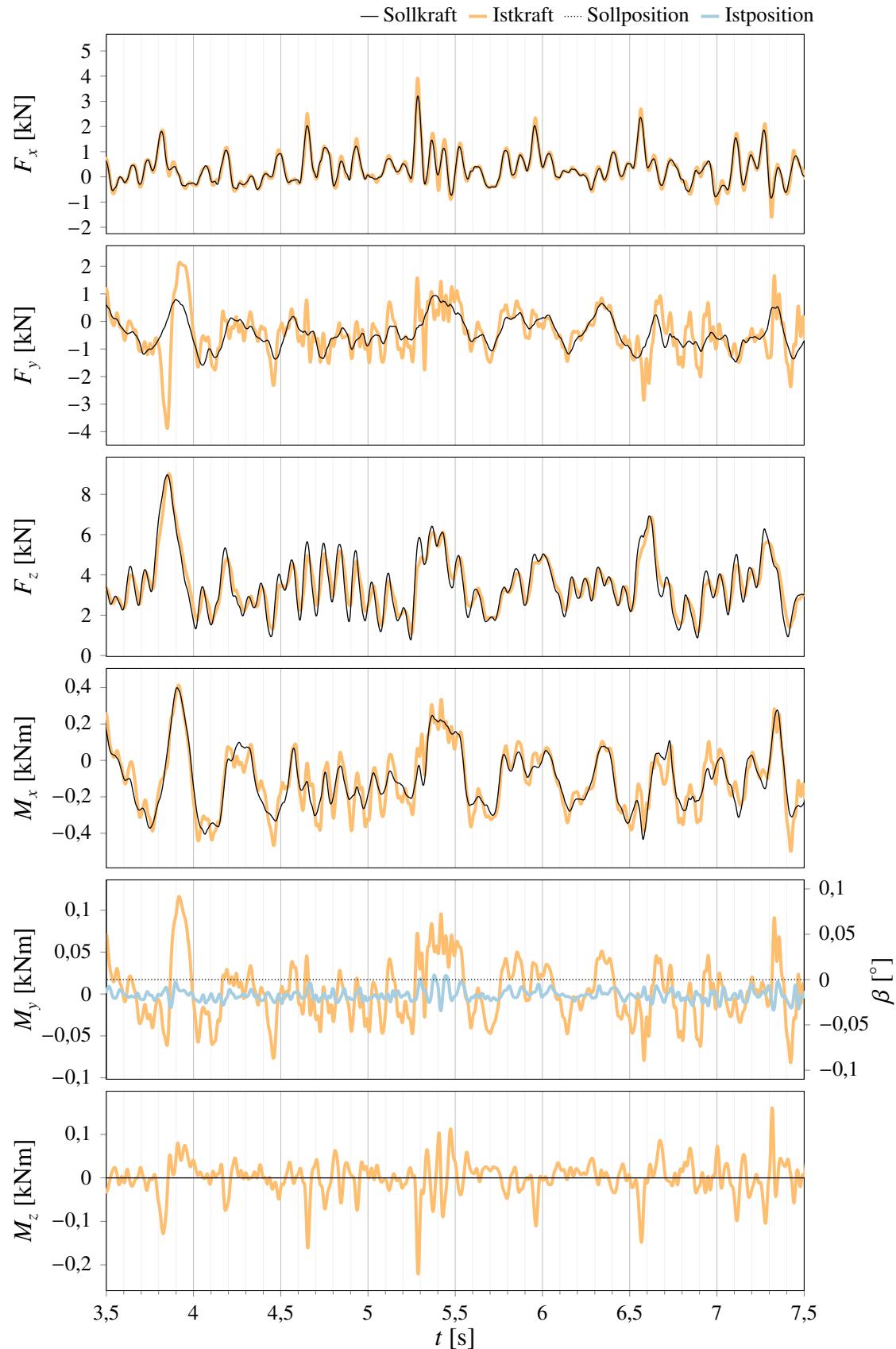


Bild 5-24: Soll-/Ist-Vergleich für die mit 10 Hz vorgefilterte Schlechtweganregung (Prüfstandsmessung)

Signalverlauf weitestgehend klein. Der Sollwert für das Spurmoment wurde gegenüber den bisher gezeigten Simulationsergebnissen zu 0 gesetzt, da die enthaltenen Sollmomente sehr große Bewegungen zur Folge haben. Dies deutet darauf hin, dass das vorliegende Target-Signal für einen Prüfstand aufgezeichnet wurde, der die Nachbildung der Lenkbewegung durch zusätzliche Aktorik erlaubt oder bei dem die Lenkstange fixiert wurde. Es ist außerdem zu beachten, dass das hier für die Beurteilung der Regelung herangezogene Target-Signal aus einem Fahrversuch mit einer anderen Radaufhängung stammt. Die Verwendung eines Target-Signals, das an exakt der im Prüfstand verbauten MacPherson-Radaufhängung gemessenen wurde, würde eine Beeinträchtigung des Regelungsergebnisses durch abweichende mechanische Eigenschaften der Prüflinge ausschließen.

Die Schlechtweganregung kann mit den experimentell festgelegten Reglerparametern bei Vorfilterung des Signals mit einem  $PT_2$ -Glied mit 10 Hz Eckfrequenz erfolgreich vollständig durchlaufen werden. Wird die Eckfrequenz des Filters erhöht, so muss die Amplitude des Signals jedoch reduziert werden. Andernfalls resultiert instabiles Verhalten bzw. die festgelegten Grenzen für die Kontaktkräfte und -momente werden überschritten, was aber problemlos durch die Systemsteuerung und -überwachung abgefangen werden kann. Die Bilder A7-27 und A7-28 im Anhang zeigen den gleichen zeitlichen Ausschnitt aus der Schlechtweganregung wie Bild 5-24 für Vorfilter mit den Eckfrequenzen 20 Hz und 40 Hz. Das Target-Signal wurde dort mit dem Faktor 0,75 bzw. 0,4 skaliert. Das mit 40 Hz vorgefilterte Signal enthält auch noch die nicht zu 0 gesetzte Sollwertvorgabe für das Spurmoment  $M_z$ . Die Feststellungen zu Bild 5-24 werden durch diese beiden Bilder bestätigt. Die vorgenommene Skalierung des Target-Signals bei höheren Filtereckfrequenzen führt die Leistungsanforderung an den Prüfstand offensichtlich auf ein vergleichbares Niveau wie bei der Filterung mit 10 Hz zurück. Die Notwendigkeit der Skalierung begründet sich daher mit hoher Wahrscheinlichkeit durch physikalische Gegebenheiten des Prüfstands, z. B. die Stellgrößenbeschränkungen (maximale Differenzdrücke und Hübe der Hydraulikzylinder, maximale Ventilschieberwege und -beschleunigungen). Beispielsweise könnte das amplitudenabhängige Verhalten der eingesetzten Servoventile, vgl. Bild A8-1 im Anhang, eine Rolle spielen. Weitere mögliche Einflussfaktoren auf das Verhalten des Prüfstands sind

- die Parameter der Kraft- sowie der unterlagerten Positions- und Druckregler,
- die Qualität und Bandbreite des eingesetzten Beobachters,
- das bei der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (für die Pose) des Hexapod ange setzte Modell sowie
- bisher nicht modellierte bekannte und unbekannte Effekte, z. B. bestimmte Resonanzfrequenzen des realen technischen Systems.

Für nicht bei der Regelung selbst zu suchende Ursachen sprechen auch andere Messungen am Prüfstand. So wurde bei der Erprobung einer ILR am Prüfstand (Details siehe Abschnitt 5.5) auch ein anderes, weniger hochfrequente Spektralanteile enthaltendes Target-Signal eingelernt. Der damals eingesetzte Kraftregler war langsamer als der für die Aufzeichnung der Schlechtweganregungen verwendete. Den Soll-/Ist-Vergleich der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  für das vollständige Signal zeigt Bild A7-34 im Anhang. Darin ist  $k$  die Anzahl der durchgeföhrten Iterationen, sodass für  $k = 0$  das Ergebnis ohne ILR vorliegt. Bei Durchführung der Versuche wurden nur die wichtigsten Signale aufgezeichnet, da für die Berechnungen der Korrektur der ILR eine Messung der Soll- und Istwerte mit dem

Rechenzyklus des Prüfstands von 8 kHz erforderlich ist. Aus diesem Grund enthält Bild A7-34 keine Messwerte für  $\beta$ . Das Bild zeigt, dass das Target-Signal schon ohne ILR gut reproduziert werden kann. Die ILR erhöht hier hauptsächlich die Flankensteilheit bei schnellen Kraftänderungen bzw. allgemein die Abbildungsgüte für höherfrequente Signalanteile. Der Prüfstand verhielt sich ab Iteration  $k = 7$  etwa zum Zeitpunkt  $t = 12$  s reproduzierbar instabil bzw. die festgelegten Überwachungsgrenzen für die Kontaktkräfte und -momente wurden überschritten. Es ist daher davon auszugehen, dass die Stellgrößenbeschränkungen und/oder andere, physikalische Gegebenheiten ursächlich für das instabile Verhalten bei höheren Skalierungen sind.

Der Frequenzgang der geschlossenen Kraftregelkreise mit den bei der Schlechtweganregung verwendeten Parametern zeigt Bild 5-25. Er wurde durch Aufschalten eines simultanen, unkorrelierten Rauschsignals auf alle fünf Kraftregelkreise bestimmt und stellt eine Mittelung aus mehreren überlappenden Messungen dar. Das Rauschsignal wurde vor Übergabe an den Regler durch ein  $PT_2$ -Glied mit einer Eckfrequenz von 60 Hz gefiltert. Dem Frequenzgang kann also bis zur Frequenz von 60 Hz vertraut werden, da die Frequenzanteile in den Anregungssignalen darüber hinaus klein sind und das Messrauschen das Berechnungsergebnis verfälscht. Tabelle 5-4 zeigt die maximal enthaltenen Anregungsamplituden.

Kraft bzw. Moment	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_z$
Amplitude [N] bzw. [Nm]	750	1500	750	200	75

Tabelle 5-4: Maximale Anregungsamplituden bei der Frequenzgangmessung

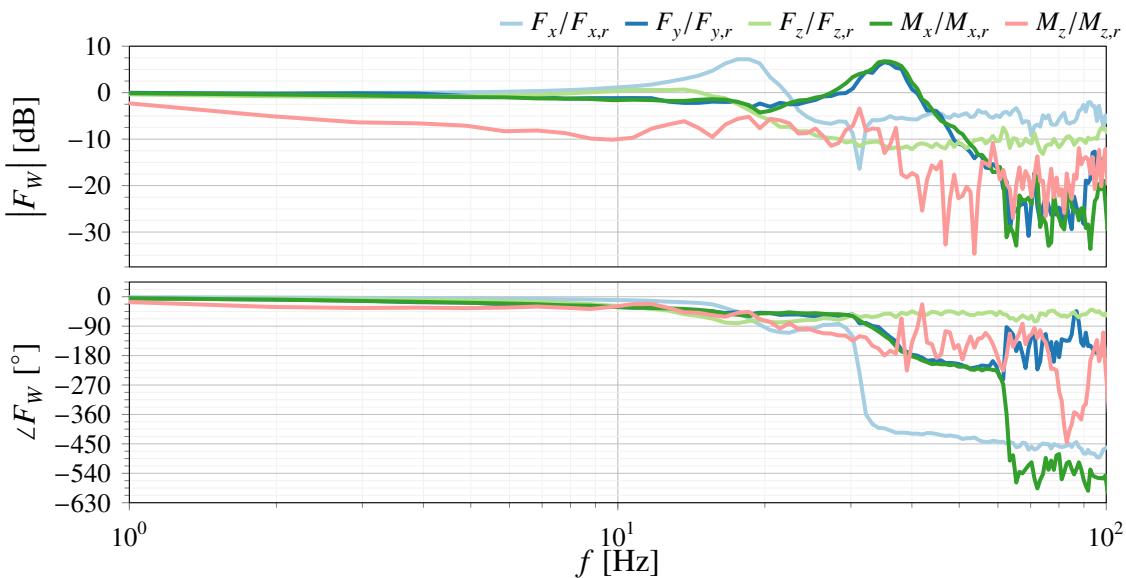


Bild 5-25: Frequenzgänge der geschlossenen Kraftregelkreise (Prüfstandsmessung)

Offensichtlich weisen die Frequenzgänge für  $F_x$ ,  $F_y$  und  $M_x$  Überhöhungen auf. Das Amplitudenmaximum liegt für  $F_x$  bei etwa 19 Hz, für  $F_y$  und  $M_x$  bei etwa 35 Hz bei 7 dB bzw. 6,7 dB. Die relativ hohe Eckfrequenz für die Regler von  $F_y$  und  $M_x$  spricht dafür, dass

die in Bild 5-24 vorliegenden Abweichungen auf vorliegende Verkopplungen zurückzuführen sind. Ein näherungsweise konstanter Amplitudenverlauf bis zur Eckfrequenz von etwa 18 Hz liegt für die Vertikalkraft  $F_z$  vor. Für die Regelung des Spurmoments  $M_z$  beträgt die Verstärkung schon für 1 Hz unter -3 dB. Dieser Regler wurde bei den Schlechtwegversuchen bewusst niedrig gewählt, da (deutlich) höhere Reglerverstärkungen offenbar instabiles Verhalten des Prüfstands begünstigt haben. Vor der Weiterentwicklung des Reglers sollte ein leistungsfähiger Aktor (z. B. direkt am Lenkgestänge oder an der Lenksäule) in den Prüfstand eingebaut werden, mit dem die Lenkeingriffe des Fahrers durch eine Positionsregelung nachgebildet werden. Bisher fehlt dieser Aktor im Prüfstand, sodass um die vertikale Achse nahezu kein Gegenmoment vorliegt. Sobald der Aktor verbaut ist, sind mindestens für die Regelung des Spurmoments  $M_z$ , wahrscheinlich sogar für alle Kraft- bzw. Drehmomentregler deutlich bessere Regelergebnisse zu erwarten. Im vorliegenden Zustand sollte wahrscheinlich besser der Kardanwinkel  $\gamma$  anstelle des Spurmoments  $M_z$  geregelt werden.

Wird der Kraftregler allein anhand der Frequenzgänge in Bild 5-25 beurteilt, wäre der vorliegende Regler noch nicht für die Durchführung von Betriebsfestigkeitsprüfungen geeignet. Es ist einfach möglich, die Reglerparameter so zu wählen, dass deutlich höhere Regelungsbänder erzielt werden und die Überhöhungen im Amplitudenverlauf geringer ausfallen. Bisher war es mit derartig festgelegten Parametern aber nicht möglich, die Schlechtweganregung stabil nachzubilden. Mit der Bild 5-25 zugrunde liegenden Parametrierung war dies hingegen möglich. Gerade vor dem Hintergrund des recht einfach aufgebauten Kraftreglers sind die Regelungsergebnisse insb. für  $F_x$ ,  $F_z$  und  $M_x$  gut. Hinsichtlich der Frequenzgangmessung ist überdies zu prüfen, ob der simultanen Anregung aller kraftgeregelten Richtungen eine sequentielle, einaxiale Anregung vorzuziehen ist.

Das Führungsverhalten der Regelungen kann durch eine Vorsteuerung weiter verbessert werden. Beispielsweise kann bei Positionsregelung in vertikaler Richtung die zuvor am Prüfstand gemessene oder modellierte Kinematik der Radaufhängung vorgesteuert werden. Diese Maßnahme wird in [KOT<sup>+</sup>17] diskutiert. Die Veröffentlichung enthält auch die vermessene Kinematik der aktuell verbauten Radaufhängung und beschreibt einen Optimierungsansatz für die geometrischen Modellparameter des Radaufhängungsmodells. Darüber hinaus können auch dynamische Eigenschaften der Achse vorgesteuert werden, bspw. durch eine gemittelte oder zustandsabhängige Steifigkeit und Dämpfung. Diese ließen sich auch mit relativ einfachen Messungen am Prüfstand ermitteln. Außerdem dürfte auch die Vorgabe eines Sollwerts für  $\ddot{z}$  durch die Kraftregelung und/oder -vorsteuerung erhebliche Verbesserungen der Regelgüte mit sich bringen. Auch das Einsetzen der Sollwerte  $\tau_r$  für die Kontaktkräfte und -momente anstelle der Messwerte  $\tau$  in der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung der Pose  $z$  (2-19) in kraftgeregelten Richtungen kann eine solche Vorsteuermaßnahme darstellen.

Trotz vermeintlich langsamer innerer Positionsregelung sind mit diesem Regelungsansatz je nach betrachteter Richtung relativ hohe Kraftregelungsbänder erzielbar, siehe auch [KTO<sup>+</sup>17] für eine synthetische Rechteckanregung. Der Schwerpunkt liegt dort bei der Regelung der Querkraft  $F_y$ . In dieser Veröffentlichung wird durch isolierte Anregung der Kraft  $F_y$  gezeigt, dass für diese Kraft ein sehr gutes und breitbandiges Führungsverhalten erreicht werden kann. Auch dies spricht dafür, dass die Abweichungen in Bild 5-24 allein auf Verkopplungen zurückzuführen sind.

Als Fazit lässt sich zu diesem Regelungsansatz festhalten, dass das nichtlineare und verkoppelte Verhalten des Prüflings den Regelungsentwurf sowohl im Modell als auch am Prüfstand bei diesem Regler erheblich erschweren. Zwar sind mithilfe von Rechtecksignalen einzelne Richtungen für sich genommen gut und relativ schnell parametrierbar und im Kleinsignalbereich auch Bandbreiten über 50 Hz vorstellbar. Das Regelverhalten ist jedoch stark von der Anregungsamplitude abhängig. Außerdem geht ein besseres Regelergebnis in einer Richtung meist mit einem schlechteren Regelergebnis in einer anderen Richtung einher. Dies erweist sich besonders bei realitätsnahen Anregungssignalen als problematisch und macht eine nachträgliche Reduktion der Reglerparameter erforderlich.

Im Gegensatz zu rein modellbasierten Untersuchungen sind die am Prüfstand erzielten und erzielbaren Ergebnisse von zahlreichen Einflussfaktoren abhängig, die sich sogar im Ablauf eines Versuchs ändern können. Zu diesen Einflussfaktoren zählen auch Umgebungsbedingungen, wie z. B. die Temperatur und Viskosität des Hydrauliköls. Die Ursache instabilen Verhaltens kann aufgrund der Vielzahl möglicher Einflussgrößen meist nur schwer eingegrenzt werden. In dieser Thematik ist auch noch zu klären, ob das Modell bestimmte Effekte vernachlässigt, die das Regelverhalten am Prüfstand maßgeblich beeinflussen und die folglich beim Regelungsentwurf berücksichtigt werden müssen. Vorstellbar sind hier insb. bisher nicht modellierte Eigenschaften der Mechanik und Hydraulik (z. B. zusätzliche Eigenfrequenzen), der Sensorik und der Servoventile (insb. deren amplitudenabhängiges Verhalten, vgl. Bild A8-1).

Da die Parametrierung des Kraftreglers am Prüfstand schon bei den vorliegenden, wenigen Parametern recht komplex ist, sollte in Zukunft die bisher manuell durchgeführte, experimentelle Reglerauslegung durch einen automatisierten Einlernvorgang ersetzt werden. Dieser kann die Reglerparameter mithilfe von Rechteck- oder Rauschanregungen für unterschiedliche Anregungsniveaus auslegen. Denkbar ist auch, die Reglerparameter in Abhängigkeit der Anregungsamplitude oder dem aktuell vorliegenden Systemzustand zu variieren, z. B. durch einen Gain-Scheduling-Regler. Es kann außerdem versucht werden, den Regler mithilfe eines am Prüfstand gemessenen Frequenzgang des offenen Regelkreises auszulegen. Er lässt sich relativ einfach durch Rauschanregung des Prüfstands im positionsgeregelten Betrieb ermitteln. Zu prüfen ist, welche Anregungsamplitude für das Rauschsignal zu wählen ist und ob ein einzelner Betriebspunkt genügt oder ob der Frequenzgang in mehreren Betriebspunkten zu ermitteln ist.

Aufbauend darauf kann auch die Ergänzung des Reglers um Kerbfilter in Erwägung gezogen werden. Außerdem besteht hohes Potenzial in einer zusätzlichen Vorsteuerung und anderen Maßnahmen, um die Verkopplung der verschiedenen (Kraft-) Regelgrößen zu reduzieren. Weiterhin sollte auch die vollständig parallele Komposition der parallelen Kraft-/Positionsregelung untersucht werden, vgl. (2-36).

Eine Verbesserung des Kraftregelverhaltens ist auch durch die Weiterentwicklung der unterlagerten Regler zu erwarten. Mögliche Maßnahmen schließen ein:

- Identifikation besserer Parameter für das 1-Starrkörper-Hexapodmodell im Regler,
- Online-Identifikation dieser Parameter,
- Verwendung des 13-Starrkörper-Hexapodmodells zur Regelung und
- Verbesserung des Differenzdruckreglers.

Auch die Weiterentwicklung des Beobachters kann sich positiv auf die Kraftregelung auswirken.

### 5.3.2 Weitere Ansätze

Bild 5-26 zeigt die Strukturbilder zweier weiterer Verfahren zur Kraftregelung, die auf der Ein-/Ausgangslinearisierung der Bewegung des Hexapod (2-21) aufbauen. Dies sind

- die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung sowie
- die explizite Kraftregelung.

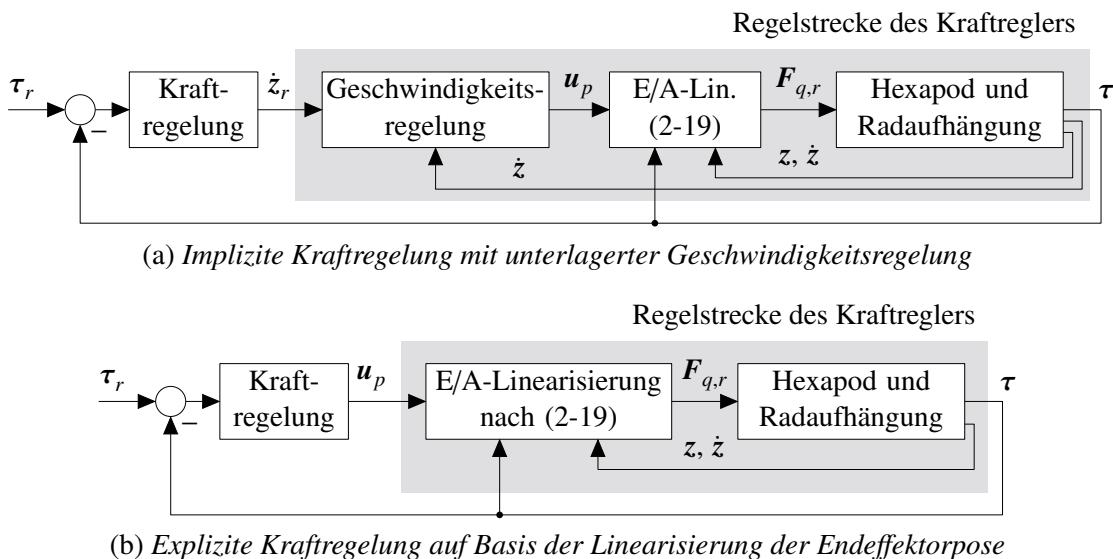


Bild 5-26: Strukturbilder weiterer Regelungsansätze ohne Entkopplung der Regelgrößen

Der Geschwindigkeitsregler in Bild 5-26a bildet seinen Ausgang  $\mathbf{u}_p$  nach der Vorschrift

$$\mathbf{u}_p = \underbrace{\ddot{\mathbf{z}}_r}_{\text{Vorsteuerung}} + \underbrace{\mathbf{K}_v \cdot (\dot{\mathbf{z}}_r - \dot{\mathbf{z}})}_{\text{P-Regler}} . \quad (5-96)$$

Analog zum I-Kraftregler in Abschnitt 5.1.3 kann über den Reglerparameter  $\mathbf{K}_v$  die 3 dB-Eckkreisfrequenz des geschlossenen Geschwindigkeitsregelkreises gewählt werden. Der überlagerte Kraftregler bildet den Sollwert des Geschwindigkeitsreglers. Bei der expliziten Kraftregelung bildet er hingegen direkt die Größe  $\mathbf{u}_p$ .

Auch hier kann wieder die Linearisierung der Regelstrecke in einem Betriebspunkt als Ausgangspunkt des Regelungsentwurfs dienen. Bild A7-29 im Anhang zeigt das Übertragungsverhalten der Regelstrecke für beide Regelungsansätze. Einen Aufschluss über die Verkopplungen zwischen den Regelgrößen liefern die Bilder A7-30 und A7-31. Für den geschlossenen Geschwindigkeitsregelkreis wurde bei der Linearisierung eine Eckfrequenz von 100 Hz angesetzt. Wie bereits im Stand von Technik und Forschung (Abschnitt 2.2.3) ausgeführt wurde, arbeitet die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung auch ohne I-Anteil im Kraftregler stationär genau. Dies bestätigen auch

die in Bild A7-29a dargestellten Frequenzgänge für das Simulationsmodell. Am Prüfstand verhält sich der Regler ohne I-Anteil hingegen nicht stationär genau. Hier besteht ein Zusammenhang mit verbliebenen Modell- oder Parameterabweichungen des für die Ein-/Ausgangslinearisierung (2-21) verwendeten Hexapodmodells. Eine mögliche Ursache besteht auch in dem Verhalten des aktuell am Prüfstand eingesetzten Sliding-Mode-Beobachters. Dieser schätzt nicht exakt die Geschwindigkeit 0 bei unbewegtem System. Aus diesem Grund muss eine Verbesserung des Beobachters durch Überarbeitung des Algorithmus und/oder Berücksichtigung weiterer Messgrößen (z. B. Hinzunahme eines Beschleunigungsaufnehmers) angestrebt werden.

Für beide Ansätze konnten bisher weder im Modell noch am Prüfstand nennenswerte Vorteile gegenüber dem impliziten Kraftregler mit unterlagerter Positionsregelung (Abschnitt 5.3.1) festgestellt werden. Sie wurden allerdings zum Zeitpunkt dieser Arbeit aus Zeitgründen insb. am Prüfstand noch nicht so umfassend erprobt wie der zuvor diskutierte Regler. Die beiden Regelungsansätze sind aus theoretischer Sicht sehr interessant und sollten in Zukunft weiter untersucht werden. So ist bei der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung theoretisch kein I-Anteil im Kraftregler erforderlich. Das ist günstig für den Phasenverlauf des offenen Regelkreises und lässt höhere Bandbreiten für den Kraftregler erwarten. Außerdem ist ein Reglerparameter je Richtung weniger zu wählen (im Vergleich zum Kraftregler mit unterlagerter Positionsregelung).

Von Nachteil an diesen Ansätzen ist die Problematik, die sich aus der experimentellen Bestimmung des Frequenzgangs am Prüfstand ergibt. Die Regelstrecke des impliziten Kraftreglers mit unterlagerter Positionsregelung kann durch Umschalten in den positionsgeregelten Betrieb und Durchführung einer Rauschmessung recht einfach durchgeführt werden. Die Endeffektorbewegung wird durch das aufgeschaltete Rauschsignal beschrieben und kann so leicht kontrolliert werden. Bei den beiden in diesem Abschnitt vorgeschlagenen Reglern ist diese Identifikationsmessung hingegen nicht trivial, da ein Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsrauschen zum Einsatz kommen muss. Es ist sicherzustellen, dass sich die Endeffektorbewegung dabei in einem sicheren, kontrollierten Rahmen hält.

Grundsätzlich besteht auch bei diesen Reglern die Möglichkeit zur Synthese von Vorsteuerungsmaßnahmen. Bei der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung kann auch der Sollwert  $\ddot{z}$ , durch den Regler gebildet werden. Dieser Wert kann bspw. mittels realer Differentiation aus dem Ausgang des Kraftreglers gebildet werden. Demgegenüber ist jedoch ein Ansatz ähnlich zur vollständig parallelen Komposition der parallelen Kraft-/Positionsregelung, vgl. (2-36), vorzuziehen, bei dem beide Sollwerte ohne reale Differentiation gebildet werden können.

Auch bei den beiden in diesem Abschnitt genannten Regelungsansätzen sind die Kraftregelgrößen nicht entkoppelt. Die Bilder A7-30 und A7-31 im Anhang zeigen die Wechselwirkungen der verschiedenen Streckeneingänge auf die Krafregelgrößen. Wie bei dem impliziten Kraftregler mit unterlagerter Positionsregelung erfolgt außerdem eine Regelung der Drehmomente im Kontaktspunkt durch Anpassung der Kardanwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  des Endeffektors. Es ist zu prüfen, in welchen Grenzen dieses Konzept bei größeren Abweichungen aus der unverdrehten Lage ( $\alpha = \beta = \gamma = 0^\circ$ ) heraus funktional ist.

## 5.4 Entwurf ohne Umgebungsmodell

Die im vorherigen Abschnitt diskutierten Regelungsansätze sind zwar anschaulich, gehen jedoch mit einer deutlich aufwändigeren Parametrierung einher als dies bei den in den Abschnitten 5.1 und 5.2 diskutierten Ansätzen der Fall ist. Außerdem ist die Drehmomentregelung auf Basis der Kardanwinkel nur für kleine Winkel korrekt und es liegt eine Verkopplung der Kraftregelgrößen vor, die sich allerdings theoretisch (zumindest näherungsweise) kompensieren ließe. Wünschenswert für die praktische Anwendung am Prüfstand ist ein Regelungsansatz, der in der Parametrierung vergleichbar einfach ausfällt wie die Regler mit Ein-/Ausgangslinearisierung (Abschnitte 5.1 und 5.2) und ebenfalls eine Entkopplung der Regelgrößen aufweist, aber ohne das prüflingsspezifische Umgebungsmodell funktional ist.

In diesem Abschnitt wird eine einfache Realisierung des Reglers mit den Aktorkräften nach (5-59) angestrebt, der aufbauend auf der Veröffentlichung von de Luca und Manes [LM94] als Ausgangspunkt des Regelungsentwurfs für die verallgemeinerte Position  $z$  des TCP bzw. der Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  hergeleitet werden konnte. Für den Sonderfall  $S = \mathbf{0}$ , d. h. Positionsregelung aller sechs Größen, folgt hieraus

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T \left( (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{u,z}) \mathbf{u}_h + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{n}_{u,z} \right). \quad (5-97)$$

Die darin enthaltene Größe  $\mathbf{n}_{u,z}$  ist nach (5-58) aus den aktuellen Systemzuständen  $\mathbf{y}_d$  und  $\dot{\mathbf{y}}_d$  zu berechnen. Liegen Messwerte für  $\ddot{\mathbf{z}}$  und  $\tau$  vor, kann sie jedoch auch anhand der Gleichung

$$\mathbf{n}_{u,z} = \mathbf{H}^T \tau - \mathbf{M}_{u,z} \ddot{\mathbf{z}}, \quad (5-98)$$

die aus (5-56) hervorgeht, berechnet werden. Durch Ersetzen von  $\mathbf{n}_{u,z}$  in (5-97) durch diese Gleichung folgt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T \left( \mathbf{M} \mathbf{u}_h + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{M}_{u,z} \mathbf{u}_h + \mathbf{H}^T \tau - \mathbf{M}_{u,z} \ddot{\mathbf{z}} \right). \quad (5-99)$$

Da die Aktorkräfte (5-97) den linearen Zusammenhang  $\mathbf{u}_h = \ddot{\mathbf{z}}$  herbeiführen, heben sich die Terme  $\mathbf{M}_{u,z} \mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{M}_{u,z} \ddot{\mathbf{z}}$  auf und (5-99) vereinfacht sich zu

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T \left( \mathbf{M} \mathbf{u}_h + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T \tau \right). \quad (5-100)$$

Diese Gleichung wurde bereits im Stand von Technik und Forschung für die Positionsregelung des Hexapod bei Umgebungskontakt angegeben, siehe (2-19). Durch Verwendung des Messwerts  $\tau$  ist die Berechnung der Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$  unabhängig vom Umgebungsmodell. Die angegebene Berechnungsformel ist allerdings nicht kausal, da ein Messwert für  $\tau$  verwendet wird, der bei Auswertung des Algorithmus noch nicht zur Verfügung steht. Einzusetzen sind hier eigentlich diejenigen Kontaktkräfte und -momente  $\tau$ , die infolge der Beschleunigung der Umgebung mit dem Ausgang  $\mathbf{u}_h$  des linearen Positionsreglers im aktuellen Systemzustand  $\mathbf{y}_d$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_d$  zustande kommen, vgl. auch (5-97). Grundsätzlich kann aber auf den aktuell vorliegenden Messwert für  $\tau$  zurückgegriffen werden. Dieses Vorgehen hat sich auch am Prüfstand als Ausgangspunkt für die Regelung der Endeffektorpose  $z$  (2-21) bewährt.

Für den anderen Sonderfall  $S = \mathbf{I}$ , d. h. Kraftregelung aller sechs Größen, folgt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T \left( \mathbf{M} \mathbf{M}_{u,z}^{-1} \left( \mathbf{H}^T \mathbf{u}_h - \mathbf{n}_{u,z} \right) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T \mathbf{u}_h \right). \quad (5-101)$$

Auch hier kann die Notwendigkeit für die Berechnung des Umgebungsmodells im Regler theoretisch umgangen werden. Durch Ersetzen von  $\mathbf{n}_{u,z}$  nach (5-98) folgt unter der Berücksichtigung des sich einstellenden, linearen Verhaltens  $\mathbf{u}_h = \boldsymbol{\tau}$ , dass

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T \mathbf{u}_h) . \quad (5-102)$$

Auch diese Gleichung ist unabhängig vom Umgebungsmodell, aber nicht kausal, vgl. (5-100). Für eine beliebige Auswahl kraft- und positionsgeregelter FHG, d. h. eine beliebige, binäre Diagonalmatrix  $\mathbf{S}$ , lässt sich zeigen, dass bei Ersetzung von  $\mathbf{n}_{u,z}$  gemäß (5-98) die Formel zur Berechnung der Aktorkräfte (5-59) in der stark vereinfachten Form

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T (\mathbf{M} ((\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{u}_p + \mathbf{S} \ddot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T (\mathbf{S} \mathbf{u}_f + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau})) \quad (5-103)$$

angegeben werden kann.

Die hergeleitete Formel weist eine hohe Ähnlichkeit zu den durch Khatib [Kha87] angegebenen Aktorkräften (2-41) für die hybride Kraft-/Positionsregelung auf. Abgesehen von der Verwendung des PKM-Modells (2-18) in den Größen  $z$ ,  $\dot{z}$  und  $\ddot{z}$  anstelle des Modells (2-17) in  $z$ ,  $v$  und  $\dot{v}$  besteht der Unterschied der beiden Berechnungsvorschriften darin, dass in (5-103) zusätzlich die Terme  $\mathbf{S} \ddot{\mathbf{z}}$  und  $(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau}$  enthalten sind. Das Fehlen dieser Terme in (2-41) lässt sich damit begründen, dass Khatib bei seiner Herleitung von der durch Mason [Mas81] beschriebenen Situation zweier Subräume ausgeht, d. h. es gibt eindeutig trennbare

- kraftgeregelte Richtungen, in denen keine Bewegung stattfindet, d. h.  $\mathbf{S} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ , sowie
- bewegungsgeregelte Richtungen, in denen eine freie Bewegung möglich ist und keine Kontaktkraft vorliegt, d. h.  $(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ .

Bei einer Umgebung mit nicht vernachlässigbarer Dynamik, vgl. (2-78) bzw. (2-96), trifft dies für den dritten Subraum, in dem sowohl der kraft- als auch der bewegungsgeregelte Betrieb möglich ist, nicht zu. Hier findet auch in kraftgeregelten Richtungen eine Bewegung statt, d. h. die Beschleunigung ist ungleich Null, und in bewegungsgeregelten Richtungen liegt eine Kontaktkraft vor. Der Ansatz von Khatib [Kha87] muss bei Vorliegen einer dynamischen Umgebung erweitert werden. Der ideale Lösungsansatz für derartige Kontaktsituationen ist durch (5-59) gegeben; (5-103) stellt eine Näherungslösung dar, die theoretisch ohne Umgebungsmodell funktional ist.

Abgesehen von  $\mathbf{S} \ddot{\mathbf{z}}$  und  $(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau}$  enthält (2-41) zusätzlich den Term  $\mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{K}_{v,F} \dot{\mathbf{z}}$ , über den die Dämpfung in den kraftgeregelten Richtungen bei Bedarf beeinflusst werden kann. Bei Übernahme dieses Grundgedankens folgt als Berechnungsformel für die Aktorkräfte unter Verwendung zusätzlicher Mess- oder Schätzwerte für  $\ddot{\mathbf{z}}$  anstelle des Umgebungsmodells

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q = \mathbf{J}_a^T & (\mathbf{M} ((\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{u}_p + \mathbf{S} (\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{K}_{v,F} \dot{\mathbf{z}})) \\ & + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{g} + \mathbf{H}^T (\mathbf{S} \mathbf{u}_f + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau})) . \end{aligned} \quad (5-104)$$

Soll ein Schätzwert für die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{z}}$  anstelle eines aktuellen Messwerts zur Auswertung dieser Gleichung verwendet werden, so kann dieser bspw. durch Umstellen des Manipulatormodells (2-18) nach dieser Größe und Einsetzen der beobachteten Größen  $z$  und  $\dot{z}$  sowie der Messgrößen  $\mathbf{F}_q$  und  $\boldsymbol{\tau}$  erhalten werden.

Durch Einsetzen von (5-104) in das Manipulatormodell (2-18) folgt unter den üblichen Annahmen (ideale Messung, ideales Modell, ideale Aktorik, keine Störgrößen), dass

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{H}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \left( (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{u}_p + \mathbf{S} (\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{K}_{v,F} \dot{\mathbf{z}}) \right) + \mathbf{H}^T \left( \mathbf{S} \mathbf{u}_f + (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \boldsymbol{\tau} \right). \quad (5-105)$$

Wird die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{z}}$  gemessen bzw. geschätzt und in den Regelalgorithmus einbezogen, so folgt das gewünschte Verhalten

$$u_{p,k} = \ddot{z}_k \quad (5-106)$$

in positions- und

$$u_{f,k} = \tau_k \quad (5-107)$$

in kraftgeregelten Richtungen  $k$ , falls  $\mathbf{K}_{v,F} = \mathbf{0}$ . Das Setzen von  $\mathbf{K}_{v,F} \neq \mathbf{0}$  ist (bei dieser idealen Betrachtung) nachteilig. So gehen in diesem Fall zusätzlich die Geschwindigkeiten  $\mathbf{S} \dot{\mathbf{z}}$ , d. h. die in den kraftgeregelten Richtungen vorliegenden Geschwindigkeiten, auf der rechten Seite von sowohl (5-106) als auch (5-107) über einen lageabhängigen Faktor ein. Sie heben das gewünschte lineare Verhalten der Eingangs- zu den Regelgrößen auf.

Wird auf die Berücksichtigung der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{z}}$  in den Aktorkräften (5-104) mangels Mess- oder Schätzwert verzichtet, so lässt sich herleiten, dass für die Eingänge

$$u_{p,k} = \ddot{z}_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^6 s_i \cdot (a_{ki} \ddot{z}_i + b_{ki} \dot{z}_i) \quad (5-108)$$

und

$$u_{f,k} = \tau_k + \sum_{i=1}^6 s_i \cdot (c_{ki} \ddot{z}_i + d_{ki} \dot{z}_i) \quad (5-109)$$

gilt, wobei  $a_{ki}$ ,  $b_{ki}$ ,  $c_{ki}$  und  $d_{ki}$  von der Pose des Endeffektors abhängige Faktoren sind. Damit sind die neuen Eingänge nicht wie beabsichtigt linear zu der jeweiligen Regelgröße, vgl. (5-106) und (5-107), sondern einer Summe aus dieser Größe und den in den kraftgeregelten Richtungen vorliegenden Beschleunigungen und Geschwindigkeiten. Die Terme  $b_{ki}$  und  $d_{ki}$  entfallen für  $\mathbf{K}_{v,F} = \mathbf{0}$ . Der Verzicht auf die Messung und Aufschaltung der Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  hat vergleichbare Folgen.

Zur Berechnung der Aktorkräfte nach (5-104) ist eine Messung oder Schätzung der Beschleunigungen des Endeffektors  $\ddot{\mathbf{z}}$  sowie der Kontaktkräfte und -momente  $\boldsymbol{\tau}$  erforderlich. Dann können aufbauend auf den neuen Systemeingängen  $\mathbf{u}_f$  und  $\mathbf{u}_p$  wieder die Regler (2-55) und (2-57) angesetzt werden. Eine gute Wahl für die Regelung von Kraftgrößen ist ein I-, für Positionsgrößen ein PD-Regler. Auch die Berücksichtigung der PT<sub>3</sub>-Aktor-dynamik beim Regelungsentwurf durch das Lead-Glied (vgl. Abschnitt 5.1.2) ist möglich. Bei idealer, unverzögerter Messung von  $\ddot{\mathbf{z}}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  und Verwendung dieser Größen zur Berechnung der Aktorkräfte ist die Regelung unabhängig von der vorliegenden Umgebung.

Dieser Ansatz wurde am Simulationsmodell für den Fall idealer Aktorik erprobt. Da die Aktorkräfte (5-104) sowohl auf  $\ddot{\mathbf{z}}$  als auch  $\boldsymbol{\tau}$  einen Durchgriff besitzen, bestehen algebraische Schleifen (vgl. oben genannte Akausalität). Aufgrunddessen kann das Modell

ohne weitere Modifikationen nicht simuliert werden. Die algebraischen Schleifen müssen durch geeignete Maßnahmen aufgehoben werden. Typischerweise werden hierfür die betreffenden Signale um einen Zeitschritt (im vorliegenden Fall 0,125 ms) verzögert. Stattdessen kann der Durchgriff auch mithilfe eines sehr schnellen Verzögerungsglieds erster Ordnung aufgehoben werden.

Weder mit der einen noch der anderen Maßnahme funktioniert diese Regelung am Simulationsmodell des Prüfstands bei Verwendung eines I-Kraftreglers und eines PD-Positionsreglers. Die minimale Verzögerung der ansonsten idealen, d. h. unverrauschten Messwerte für  $\dot{z}$  und  $\tau$  hat bereits zur Folge, dass die Regelung nicht mehr stabil läuft. Nur bei sehr starker Vereinfachung der Radaufhängung (keine Lagerelastizitäten, fixierte Lenkstange) ist der Regler trotz Verzögerung funktional, wobei allerdings infolge der verzögerten Messung von  $\ddot{z}$  und  $\tau$  Verkopplungen der Regelgrößen bestehen. Diese treten vor allem bei sprunghafter Änderung der Sollwerte in Erscheinung. Die vermeintlichen Vorteile dieses Regelungsansatzes, nämlich

- die einfache Reglerparametrierung über den anschaulichen Zusammenhang mit der Bandbreite der geschlossenen Kraft- und Positionsregelkreise (vgl. Abschnitt 5.1) sowie
- die Entkopplung der Regelgrößen

bei gleichzeitiger Unabhängigkeit vom Umgebungsmodell sind also am realen System nicht zu erwarten. Dort sind die Messgrößen ebenfalls verzögert und obendrein verrauscht.

Einen möglichen Erklärungsansatz für die beschriebenen Effekte liefern die Fehlerdifferentialgleichungen, die sich bspw. für den rein positionsgeregelten Betrieb (5-100) und den rein kraftgeregelten Betrieb (5-102) bei Annahme einer um die Zeit  $T_M$  verzögerten Messung der dort einfließenden Messgrößen für  $\tau$  bzw.  $\ddot{z}$  ergeben. Unter der Annahme ansonsten idealer Rahmenbedingungen, d. h.

- idealer Messung bzw. Beobachtung von  $z$  und  $\dot{z}$ ,
- einem idealen Streckenmodell im Regler,
- übereinstimmenden Anfangswerten,
- vernachlässigbar schneller Aktorik sowie
- der Abwesenheit von Störgrößen,

folgt mit den bekannten Regelungsansätzen (2-55) und (2-57) im ersten Fall

$$\mathbf{I}(\ddot{\mathbf{z}}_r - \ddot{\mathbf{z}}) + \mathbf{K}_{D,p}(\dot{\mathbf{z}}_r - \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{K}_{P,p}(z_r - z) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\boldsymbol{\tau}(t) - \boldsymbol{\tau}(t - T_M)) , \quad (5-110)$$

im zweiten Fall

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{P,f})(\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{K}_{I,f} \int (\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}) dt = \mathbf{H}^{-T} \cdot \mathbf{M} \cdot (\ddot{\mathbf{z}}(t) - \ddot{\mathbf{z}}(t - T_M)) \quad (5-111)$$

bzw. nach erneuter zeitlicher Differentiation

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{P,f})(\dot{\boldsymbol{\tau}}_r - \dot{\boldsymbol{\tau}}) + \mathbf{K}_{I,f}(\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{H}^{-T} \cdot \mathbf{M} \cdot (\ddot{\mathbf{z}}(t) - \ddot{\mathbf{z}}(t - T_M)) \\ &+ \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{H}^{-T} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{H}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{M}}) \right) \cdot (\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{z}}(t - T_M)) . \end{aligned} \quad (5-112)$$

Die Regelfehler klingen nicht auf den Wert **0** ab, sondern werden permanent durch den jeweils auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Term angeregt. Die Differentialgleichung des Positionsregelfehlers ist von zweiter Ordnung und wird durch die Differenz zwischen der tatsächlichen und der gemessenen Kontaktkraft  $\tau(t) - \tau(t - T_M)$  angeregt. Im Gegensatz zum idealen Ansatz nach (5-59) auf Basis von Hexapod- und Umgebungsmodell sind die einzelnen Richtungen in diesem Fall durch den Faktor  $M^{-1} \cdot H^T$  auf der rechten Seite nicht entkoppelt. Die Fehlerdifferentialgleichung der Kraftregelung ist dagegen von erster Ordnung und wird (unter anderem) permanent durch die Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem um die Zeit  $T_M$  zurückliegenden Wert der Beschleunigung sowie der zeitlichen Ableitung dieser Größe angeregt. Auch hier sind die Richtungen verkoppelt. Gerade bei sich zeitlich schnell ändernden Beschleunigungsdifferenzen kann dies erhebliche Auswirkungen auf das Kraftregelungsverhalten haben.<sup>15</sup>

In weiterführenden Arbeiten ist zu untersuchen, ob die Aktorkräfte nach (5-104), bspw. durch andere Kraft- und Positionsregelungsansätze auf Basis der Größen  $u_f$  und  $u_p$ , dennoch erfolgreich zur hybriden Kraft-/Positionsregelung des Hexapod eingesetzt werden können. Insbesondere die Unabhängigkeit vom Umgebungsmodell macht diesen Regelungsansatz für einen Achsprüfstand mit regelmäßig wechselndem Prüfling sehr interessant.

Der Grundgedanke lässt sich auch auf den in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Ansatz zur hybriden Kraft-/Positionsregelung im Falle einer dynamischen Bindung von Endeffektor und Radnabe übertragen. Für die Auswertung von (5-84) können anstelle beobachteter bzw. gemessener Größen  $y_d$ ,  $\dot{y}_d$  Mess- oder beobachtete Werte für  $z_{T_1}$ ,  $v_{T_1}$  und  $a_{T_1}$  verwendet werden. Während  $a_{T_1}$  explizit in (5-84) erscheint, sind  $z_{T_1}$  und  $v_{T_1}$  neben  $z$  und  $v$  in den Gleichungen für  $z_K$  und  $v_K$  enthalten. Sämtliche anderen Größen in  $\hat{c}$ ,  $\hat{D}$  sind ausschließlich von den Zustandsgrößen des Manipulators,  $z$  und  $v$ , abhängig, für die bereits ein funktionaler Beobachter vorliegt. Bei Erweiterung des bestehenden oder Entwicklung eines zusätzlichen Beobachters für  $z_{T_1}$ ,  $v_{T_1}$  und  $a_{T_1}$  genügt bei hoher Beobachterverstärkung ggf. ein recht einfaches Modell der Umgebung mit sechs FHG für die Umsetzung der Regelung.

## 5.5 Kombination mit ILR für hohe Bandbreitenanforderung

Je nach Art des durchgeführten Prüfstandsversuchs kann eine sehr hohe Abbildungsgüte auch in hohen Frequenzbereichen gefordert sein. Denkbar ist dies vor allem bei Betriebsfestigkeitsprüfungen, bei denen Target-Signale mit Spektralanteilen bis zu 80 Hz nachgebildet werden sollen. Ist die Bandbreite der Regelung für ein gegebenes Target-Signal nicht hinreichend hoch, so lässt sich die Abbildungsgüte bei allen Verfahren durch Ergänzung der Regelung um eine ILR steigern, vgl. auch Abschnitt 2.1.3 des Stands von Technik und Forschung. Diese Möglichkeit besteht jedoch nur dann, wenn die Sollwerte der Regelung bereits vor dem Versuch feststehen. Der Einsatz zur Durchführung einer HiL-Simulation, bei der die Sollwerte der Regelung erst zur Laufzeit durch ein Umgebungsmodell gebildet werden, ist hingegen nicht möglich.

Die Implementierung der ILR für den HNI-Achsprüfstand wurde durch Nikolai Fast im Rahmen seiner Masterarbeit [FK18] vorgenommen. Die implementierte ILR konnte in

<sup>15</sup>Vielen Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Günter Roppeneker für diesen Denkanstoß.

der Masterarbeit an zwei einfachen Beispielsystemen mit je zwei Ein- und Ausgangsgrößen, am MKS-Modell des Prüfstands sowie schließlich auch am Prüfstand erfolgreich erprobt werden. Vorbild der Arbeit war die Dissertationsschrift von de Cuyper [Cuy06], dessen Verfahren in angepasster Form auf dem HNI-Achsprüfstand umgesetzt wurden. Die ILR wurde in [FK18] in Kombination mit der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung verwendet. Sie wurde aber bewusst so implementiert, dass sie sich mit einem beliebigen Regler kombinieren lässt. Im Folgenden werden die wesentlichen Zusammenhänge zur umgesetzten ILR erläutert.

Bild 5-27 zeigt das Schema zur Ergänzung der (Echtzeit-) Regelung um eine ILR. Der Operator  $z^{-1}$  verzögert darin das gesamte Eingangssignal um einen **Iterationsschritt**.

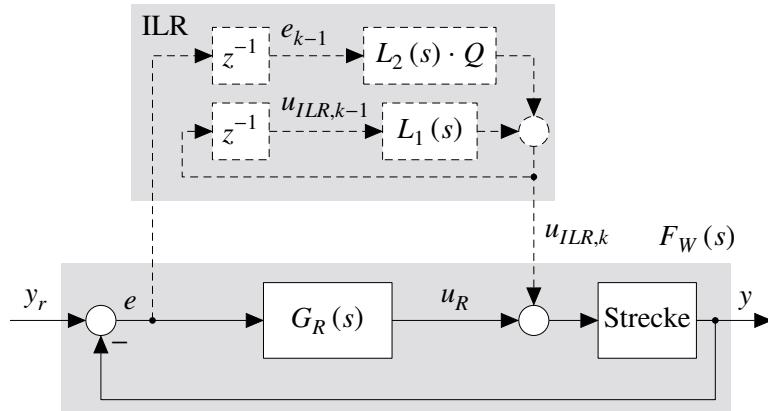


Bild 5-27: Kombination der Regelung mit einer iterativ lernenden Regelung (Schema)

Nach Durchführung eines Prüfstandsversuchs (bzw. einer Simulation) berechnet die ILR ein Korrektursignal mit dem Ziel, durch Aufschaltung dieser Korrektur in der nächsten Versuchsdurchführung die Abbildungsgüte des gegebenen Target-Signals zu steigern. Im dargestellten Fall wird eine Stellgrößenkorrektur  $u_{ILR,k}$  aus der vorherigen Stellgrößenkorrektur  $u_{ILR,k-1}$  ( $u_{ILR,0} = 0$ ) sowie der Regelabweichung  $e_{k-1}$  berechnet. Unter der Annahme einer linearen Streckenübertragungsfunktion lässt sich zeigen, dass  $L_1$  und  $L_2$  idealerweise zu

$$L_1(s) = 1, \quad L_2(s) = G_R \cdot F_W^{-1} \quad (5-113)$$

gewählt werden sollten. In der praktischen Anwendung können aber auch andere Ausprägungen sinnvoll sein. Für die Konvergenz der ILR müssen sowohl  $L_1$  und  $L_2$  stabil sein. Sie dürfen aber nichtkausal sein, da die Berechnungen nicht zur Simulationslaufzeit bzw. während des Prüfstandsversuchs erfolgen. Es können also z. B. auch ideale Differenzierer enthalten sein. Kann die Inverse des Frequenzgangs  $F_W^{-1}$  für  $L_2$  ideal bestimmt werden, so ist das Iterationsergebnis nur durch das Messrauschen, die Aktordynamik sowie iterationsvariante Störgrößen beschränkt.  $Q$  ist der Lernfaktor. Je kleiner  $Q$  ist, desto langsamer konvergiert die Iteration. Gleichzeitig ist aber die Konvergenz wahrscheinlicher. Wie in der Praxis werden sowohl  $u_{ILR,k-1}$  als auch  $e_{k-1}$  vor der Berechnung der neuen Korrektur  $u_{ILR,k}$  phasenfrei tiefpassgefiltert. Im vorliegenden Fall wird hierfür ein Butterworth-Filter vierter Ordnung eingesetzt.

Eine andere Ausprägungsform der ILR sieht vor, dass die Korrekturgröße vor dem Regler aufgeschaltet wird, die ebenfalls aus der Regelabweichung sowie der Korrektur des letzten

Iterationsschritts  $k - 1$  gebildet wird. Die Korrekturgröße entspricht dann nicht einer Stellgrößen- sondern einer Führungsgrößenkorrektur. Während  $L_1$  unverändert bleibt, muss in diesem Fall  $L_2$  der Inversen  $F_W^{-1}$  entsprechen. Zumindest für einen linearen Regler  $G_R$  lässt sich jedoch zeigen, dass die beiden Verfahren äquivalent zueinander sind.

Die Übertragungsfunktion  $F_W$  stellt lediglich eine Linearisierung des nichtlinearen Streckenverhaltens in einem Betriebspunkt dar. Die ILR wird dennoch, wie auch in der Praxis üblich, in der beschriebenen Form für den Achsprüfstand eingesetzt. Für die Berechnungen der ILR muss der inverse Frequenzgang  $F_W^{-1}$  vorliegen. Dieser wird mithilfe einer Prüfstandsmessung ermittelt. Der geschlossene Kraft- bzw. Positionsregelkreis wird mit einem bandbegrenzten weißen Rauschen angeregt. Die Leistungsdichte des Rauschsignals muss hinreichend hoch sein, um das System in hinreichendem Maße anzuregen. Gleichzeitig muss sie klein genug gewählt werden, sodass weder die Stellgrößenbeschränkungen verletzt noch das System in kritische Zustände gebracht wird. Aus dem Sollwert  $y_r$  und dem Istwert  $y$  dieser Messung werden mehrere überlappende und gefensterte Periodogramme berechnet und gemittelt. Zur Fensterung werden Sinus-Fenster mit einer Überlappung von 67 % eingesetzt, da sie von Antoni und Schoukens [AS09] als optimale Wahl für die FRF-Bestimmung angegeben werden. Aus dem Ergebnis werden die Kreuz- und Autoleistungsspektren der Signale berechnet. Dieses Vorgehen ist auch als Welch-Methode bekannt und zielt darauf ab, das Berechnungsergebnis zu verbessern.

Mithilfe der Kreuz- und Autoleistungsspektren kann die Übertragungsfunktion  $F_W$  des geschlossenen Regelkreises mithilfe eines Estimators berechnet werden. Der  $H_1$ -Estimator bietet sich an, da das Eingangs- im Gegensatz zum Ausgangssignal als rauschfrei angenommen werden kann. Die ermittelte FRF muss anschließend zum Erhalt von  $F_W^{-1}$  invertiert werden. Die Berechnung der Inversen ist nicht trivial, bspw. kann die ermittelte FRF singulär sein. Es gibt verschiedene Ansätze zur Lösung dieses Problems, die meist auf Basis einer Singulärwertzerlegung die zu invertierende Größe regularisieren, siehe z. B. [Cuy06; Han07]. Müller und Endisch [ME16] schlagen anstelle der Invertierung der FRF vor, die Ein- und Ausgangssignale des  $H_1$ -Estimators zu vertauschen und auf diese Weise direkt den inversen Frequenzgang zu ermitteln. Es lässt sich leicht zeigen, dass der  $H_1$ -Estimator mit vertauschten Ein- und Ausgängen gerade der Inverse des mittels  $H_2$ -Estimator ermittelten Frequenzgangs entspricht. Es wird folglich angenommen, dass die Systemausgänge, nicht die Systemeingänge rauschbehaftet sind. Bei vernachlässigbarem Rauschen auf den Ausgängen und angesichts der Tatsache, dass auch die Inverse einer singulären, mittels  $H_1$ -Estimator berechneten FRF nur eine Näherungslösung darstellt, macht dieses Vorgehen praktikabel. Es wurde auch für den HNI-Achsprüfstand gewählt.

Am Prüfstand erfolgt die Messung der Ausgangsgröße über einen Analog-Digital-Wandler, der das zugehörige Frequenzspektrum verzerrt. Die Eingangsgröße wird daher ebenfalls über einen Digital-Analog-Wandler ausgegeben und wieder vom Analog-Digital-Wandler eingelesen, um diesen Effekt zu antizipieren.

Die in Bild 5-27 gezeigte ILR wurde in [FK18] mit einem impliziten Kraftregler mit unterlagerter Positionsregelung kombiniert. Sie berechnet Stellgrößenkorrekturen für den unterlagerten Positionsregler, die daher Positions- bzw. Drehwinkelkorrekturen darstellen. Aus diesem Grund entspricht  $G_R$  dem Kraftregler, und die Strecke besteht aus der Radaufhängung sowie dem Hexapod inklusive Positionsregelung.

Die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen ist bei einer ILR grundsätzlich möglich. Voraussetzung dabei ist, dass die Begrenzungen einen direkten Zusammenhang mit der durch die ILR gebildeten Korrekturgröße besitzen. In diesem Fall kann die ILR als Optimierungsproblem formuliert werden und die Stellgrößenbeschränkungen einbeziehen, siehe z. B. [MTT09]. Bei konventionellen Anlagen ist dies möglich, da die Sollwerte für die orthogonal angeordneten Antriebe iterativ eingelernt werden. Allerdings erweist es sich auch bei diesen Anlagen als problematisch, dass im Falle verletzter Stellgrößenbeschränkungen gegebene Target-Signale ggf. nicht mit hinreichender Güte nachgebildet werden können. Eine nachträgliche Anpassung des Target-Signals (z. B. zeit oder frequenzabhängige Skalierung jedes Signals) oder die Verwendung eines anderen Target-Signals ist erforderlich.

Bei dem hexapodbasierten System des HNI bestehen die Begrenzungen in dem maximalen Differenzdruck der sechs Hydraulikzylinder von rund 280 bar sowie im maximalen Hub dieser Zylinder. Hinzu kommen die maximalen Wege und Beschleunigungen der Ventilschieber. Das Einlernen der Zylinderdifferenzdrücke oder -hübe durch die ILR ist ebenso wenig sinnvoll wie das Einlernen der Ventilschieberwege, da ein stark nichtlinearer Zusammenhang mit den typischen Target-Signalen besteht, z. B. den Kontaktkräften und -momenten  $\tau$  im TCP. Demgegenüber ist es zielführender, die Sollwerte einer Regelung einzulernen, die die vorliegenden Nichtlinearitäten teilweise oder ganz aufhebt. In diesem Fall stellt jedoch die Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkungen bei der ILR am Zielsystem eine Herausforderung dar. Diese Problematik bietet interessante Anknüpfungspunkte für zukünftige wissenschaftliche Arbeiten. Bevor diese Frage abschließend geklärt ist, kann mithilfe der entwickelten Simulationsumgebung vor dem Prüfstandsversuch abgeschätzt werden, ob ein gegebenes Target-Signal zur Verletzung der Stellgrößenbeschränkungen führen kann und ggf. Abhilfemaßnahmen getroffen werden müssen. Zudem müssen die Stellgrößenbegrenzungen während der Versuche kontinuierlich im Auge behalten werden. Prinzipiell besteht für konventionelle Anlagen wie auch den HNI-Achsprüfstand jedoch das gleiche Grundproblem: ist ein Target-Signal zu anspruchsvoll für die Anregungseinheiten, so kann es nicht ideal nachgebildet werden. In der Folge muss es entweder in den kritischen Zeitabschnitten modifiziert werden, sodass die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten werden, oder das Target-Signal muss durch ein anderes ersetzt werden.

Bild 5-28 zeigt das Aktivitätsdiagramm zur Nachbildung eines gegebenen Target-Signals mittels ILR.

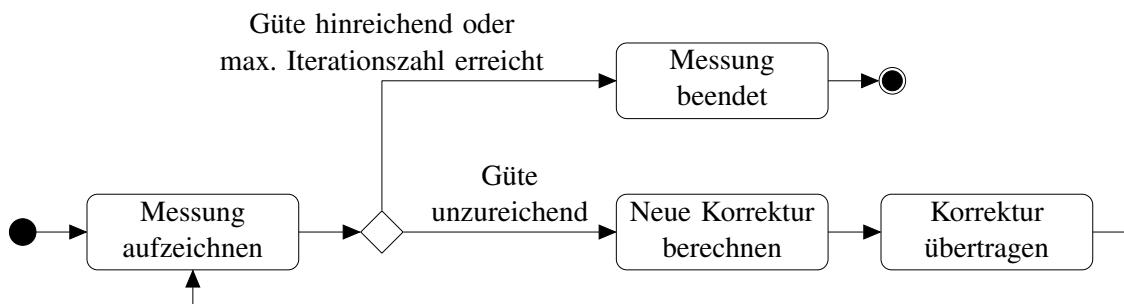


Bild 5-28: UML-Aktivitätsdiagramm für den Prüfstandsbetrieb mit ILR

Mithilfe der beschriebenen ILR können auch am HNI-Achsprüfstand Target-Signale mit besonders hohen Spektralanteilen nachgebildet werden, sodass das System für die Durchführung von Betriebsfestigkeitsprüfungen geeignet ist. Wie an konventionellen Anlagen können mit dem beschriebenen Verfahren prinzipiell beliebige Target-Signale nachgebildet werden, solange die Stellgrößenbegrenzungen des Systems eingehalten werden. Vorteil des vorliegenden Prüfstands ist, dass eine leistungsfähigere Regelung eingesetzt wird. Das mit dieser Regelung erzielte Ergebnis kann als Ausgangspunkt der ILR dienen. Aufgrund dessen ist davon auszugehen, dass die Iteration am HNI-Achsprüfstand deutlich schneller zu hinreichend guten Ergebnissen führt als an konventionellen Achsprüfständen. Außerdem ermöglicht die Kombination von Regelung und ILR (im Gegensatz zu einer reinen ILR) prinzipiell, iterationsvariante Störgrößen auszugleichen.

Die gute Funktionalität der implementierten ILR konnte bereits im Rahmen der Masterarbeit [FK18] anhand von Prüfstandsmessungen gezeigt werden. Sie wurde in Kombination mit dem impliziten Kraftregler mit unterlagerter Positionsregelung erprobt. Die ILR kann gestartet werden, sobald die erforderliche FRF mittels  $H_2$ -Estimator experimentell ermittelt ist. Durch Betrachtung der multiplen Kohärenz sowie Durchführung der Rückwärtsvalidierung (Vergleich der tatsächlichen Systemeingänge mit den aus FRF und den Systemausgängen berechneten) kann die Qualität der gebildeten FRF geprüft werden. Die praktische Umsetzung der ILR am Prüfstand zeigt Bild 5-29.

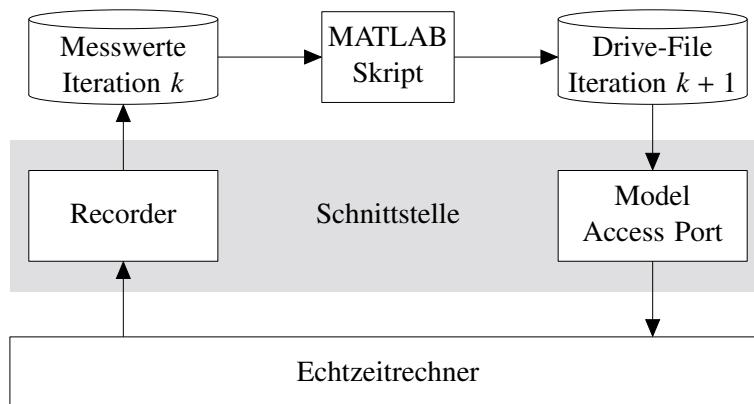


Bild 5-29: Realisierung der iterativ lernenden Regelung am Achsprüfstand

Die ILR kann nach einer Versuchsdurchführung für ein gegebenes Target-Signal am Prüfstand beginnen, vgl. auch Bild 5-28. Dabei werden die Eingangs- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke aufgezeichnet. Bei der beschriebenen Implementierung mit unterlagerter Positionsregelung sind die Sollwerte  $z_s$ , der Systemeingang und die erzielten Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  der Systemausgang. Am dSPACE-System erfolgt die Aufzeichnung dieser Signale mittels eines sog. Recorders. Die aufgezeichneten Signale können in MATLAB eingelesen und weiterverarbeitet werden. Mithilfe der Messwerte für die Response-Signale aus dem Prüfstandsvorlauf ohne ILR (Iteration  $k = 0$ ) und der FRF wird dort eine Sollwertkorrektur für den unterlagerten Positionsregelkreis gebildet. Die berechnete, über Lernfaktoren gewichtete Sollwertkorrektur wird bei der nächsten Prüfstandsmessung zu der Ausgabe des Kraftreglers hinzugefügt, vgl. Bild 5-27. Hierzu muss der in Bild 5-29 sog. Drive-File in einen hierfür reservierten Speicherbereich auf dem Echtzeitrechner übertragen werden. Initial sind sämtliche Werte dieses Speicherbereichs und damit des Korrektursignals Null. Die Übertragung der in MATLAB berechneten Sollwertkorrektur

auf den dSPACE-Echtzeitrechner erfolgt mittels des sog. Model Access Ports, einer von dSPACE bereitgestellten Schnittstelle zum laufenden Echtzeitrechner. Der Model Access Port erlaubt bspw. das Ändern einer Vielzahl an Variablen auf dem Echtzeitrechner, ohne dass hierfür ein erneutes Kompilieren und Hochladen eines modifizierten Codes erforderlich ist. Die Schnittstelle kann z. B. in Python- und Matlab-Code eingebunden und verwendet werden. Durch geschickte Implementierung des Datenaustauschs, z. B. durch Konvertierung der Korrektur in einen Integer-Datentyp vor dem Transfer und die Rückkonvertierung zur Prüfstandslaufzeit, kann dieser selbst bei längeren Signalen in sehr kurzer Zeit erfolgen. Auch die Berechnung des neuen Korrektursignals aus der aktuellen Prüfstandsmessung ist schnell durchgeführt. Für ein 30 s langes Signal beträgt die erforderliche Zeitspanne für Berechnung und Transfer der Korrektur im nächsten Iterationsschritt mit der vorliegenden Hardware etwa 15 s. Nach Übertragung des Korrektursignals kann die nächste Prüfstandsmessung erfolgen. Auch bei diesem Versuch werden die Ein- und Ausgangsgrößen aufgezeichnet und der beschriebene Prozess erneut durchlaufen. Die ILR wird durchgeführt, bis ein definiertes Abbruchkriterium erreicht ist, z. B. die Abbildungsgüte hinreichend hoch ist, vgl. Bild 5-28.

Bild 5-30 zeigt den Verlauf einer ILR am Beispiel einer sequentiellen Rechteckanregung aller kraftgeregelten Größen. Dargestellt ist der Sollwert-Zeitverlauf sowie der Istwert-Zeitverlauf im rein geregelten Betrieb ( $k = 0$ ) und für die ersten und letzten zwei durchgeführten Iterationen. Für die Versuche wurde bewusst ein recht langsamer Kraftregler sowie ein geringer Lernfaktor von  $Q = 0,2 \cdot I$  gewählt, um die Auswirkung der ILR hervorzuheben. Bild 5-30 kann eine zunehmende Nachbildungsqualität mit steigender Iterationszahl  $k$  entnommen werden. Dies trifft besonders für die Abbildung der sprunghafte Sollwertänderung zu. Zu erkennen ist jedoch auch, dass die bessere Abbildungsgüte für eine Regelgröße auch zu einer Verschlechterung einer anderen führen kann. Dies ist besonders für die sprunghafte Änderung der Längskraft  $F_x$  zu beobachten, die deutliche Auswirkungen auf das Spurmoment  $M_z$  besitzt. Eine Verbesserung des Spurmomentverlaufs kann eventuell durch Fortführung der Iteration herbeigeführt werden. Beispielsweise kann die Auswirkung der Querkraft  $F_y$  auf das Sturzmoment  $M_x$ , die bei der im Zeitraum 0,4-0,6 s stattfindenden Anregung auffällt, bis zum zehnten Iterationsschritt weitestgehend aufgehoben werden.

Bild 5-31 zeigt den Verlauf des RMS-Werts der Abweichung  $e_k$  von Response- und Target-Signal in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationen in normierter Form. Aus dieser Darstellung kann entnommen werden, dass die Abweichung bei dieser Anregung in allen Richtungen gegenüber der Ausgangssituation abnimmt. Während der RMS der Abweichung  $e_k$  für  $F_x$ ,  $F_z$  und  $M_x$  monoton fällt, ist dies für  $F_y$  und  $M_z$  nicht der Fall. Die Verkopplungen führen hier dazu, dass eine erzielte Verbesserung in den Richtungen  $F_x$ ,  $F_z$  und  $M_x$  zu einer Verschlechterung des Ergebnisses für  $F_y$  und  $M_z$  führen kann. Durch weitere Iterationen kann auch diese Abweichung weiter gesenkt werden.

Die Bilder A7-32 und A7-33 im Anhang zeigen den Verlauf der ILR für diese Sollwert-Zeitverläufe bei den höheren Lernfaktoren  $Q = 0,5 \cdot I$  und  $Q = 0,8 \cdot I$ . Wie zu erwarten gleichen sich die Ist-Zeitverläufe dort schneller den Soll-Zeitverläufen an. Auch die zwischen den Zielgrößen bestehenden Wechselwirkungen werden schneller kompensiert. Das entsprechende Vergleichsergebnis für ein Target-Signal aus einem Fahrversuch zeigt Bild A7-34 im Anhang, das bereits im Abschnitt 5.3.1 erwähnt wurde. Die Abbildungsgüte für dieses Signal ist bereits im rein geregelten Betrieb ( $k = 0$ ) trotz recht langsam aus-

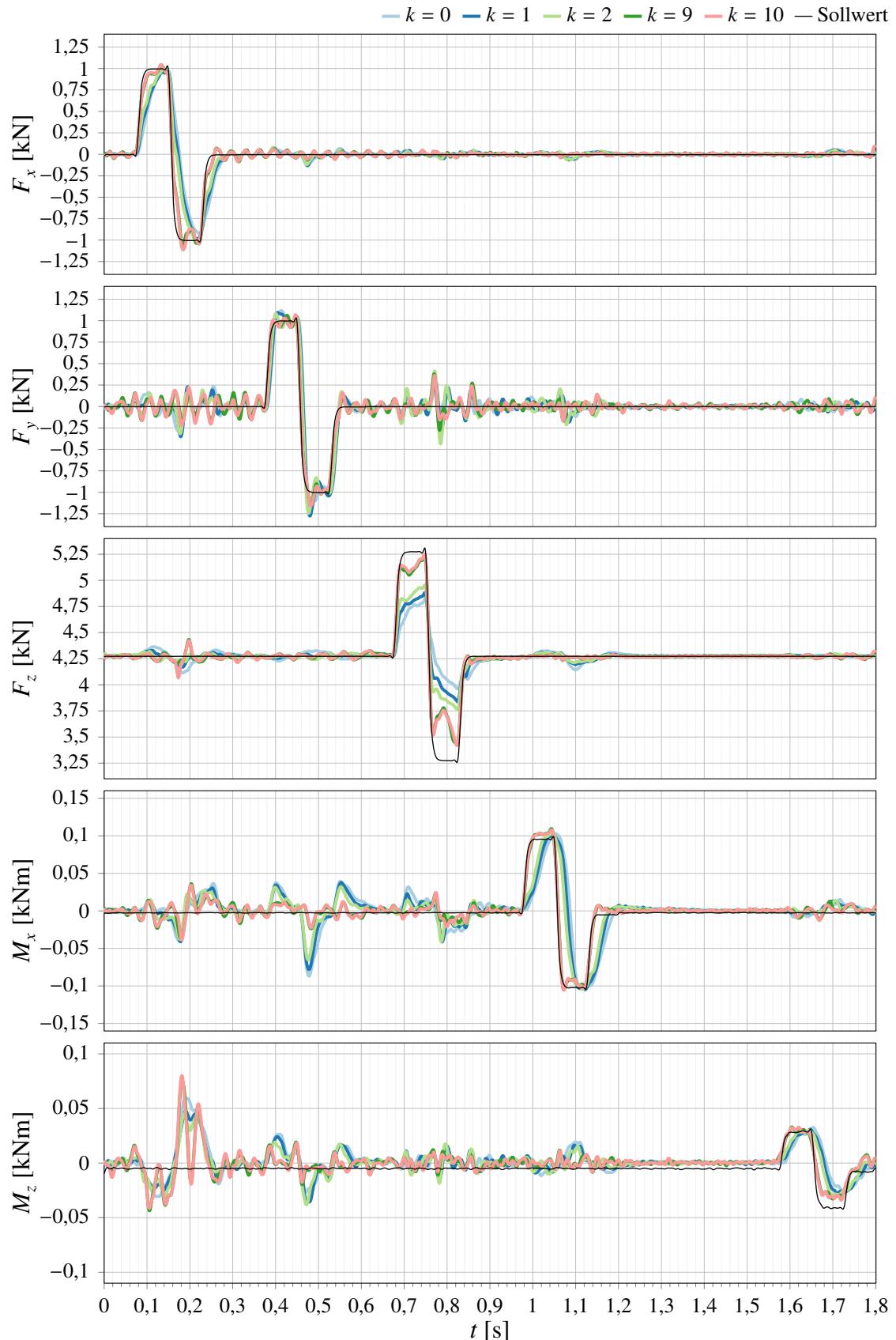


Bild 5-30: Soll-Ist-Vergleich für die Rechteckanregung in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$ , Lernfaktor  $Q = 0,2 \cdot I$  (Prüfstandsmessung)

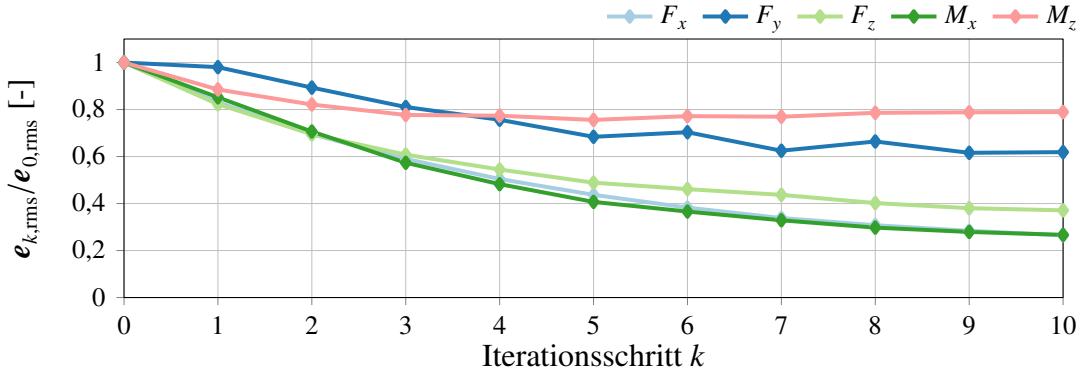


Bild 5-31: Verlauf der Abweichung  $e_k$  für die Rechteckanregung in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$ , Lernfaktor  $\mathbf{Q} = 0,2 \cdot \mathbf{I}$  (Prüfstandsmessung)

gelegter Kraftregler gut. Mit zunehmender Anzahl an Iterationen kann über die ILR die Abbildungsgüte auch für hochfrequente Signalanteile erhöht werden. Für das Einlernen wurde am Prüfstand der Lernfaktor  $\mathbf{Q} = 0,6 \cdot \mathbf{I}$  verwendet. Den Verlauf des RMS-Werts der Abweichung  $e_k$  mit der Iterationszahl  $k$  für diese drei weiteren Anregungen zeigt Bild A7-35 im Anhang. Hieraus kann für das Beispiel der Rechteckanregung die schnellere Verringerung des RMS-Werts der Abweichung  $e_k$  mit höherem Lernfaktor  $\mathbf{Q}$  entnommen werden. Die ILR kann mit minimalen Anpassungen auch mit anderen Reglern kombiniert werden.

## 5.6 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel dargelegten Regelungsansätze lassen sich gut anhand des eindimensionalen Modells für den Achsprüfstand in Bild 5-32 zusammenfassen.

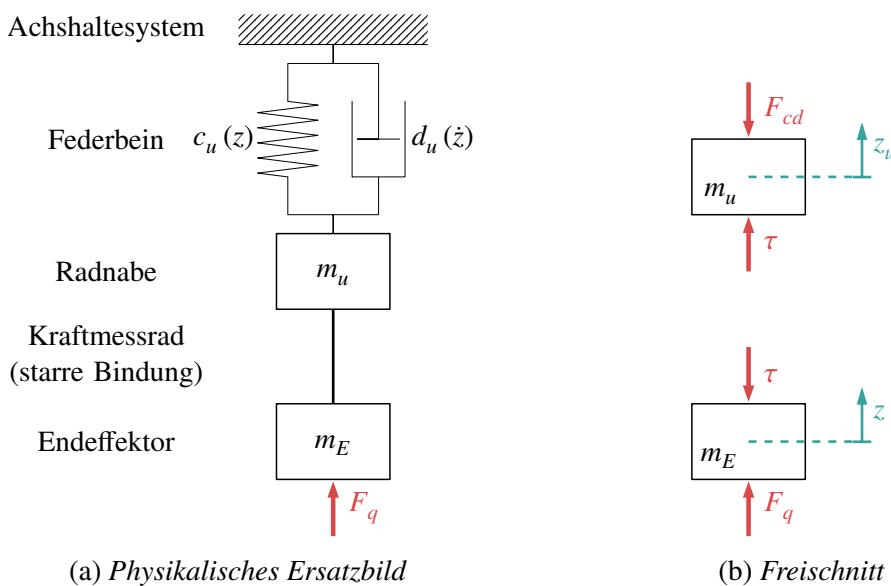


Bild 5-32: Einfaches eindimensionales Modell des Prüfstands

Die Formelzeichen wurden in weitgehender Übereinstimmung mit der bisherigen Notation gewählt. Hier handelt sich durchweg um skalare Größen. Es sind

- $z$  und  $z_u$  die Positionen von Endeffektor und Radnabe,
- $F_q$  die von einem Aktor auf den Endeffektor ausgeübte Kraft (Eingangsgröße des Systems bei idealer Aktordynamik),
- $\tau$  die Kontaktkraft zwischen Endeffektor und Radnabe,
- $m_E$  und  $m_u$  die Masse des Endeffektors und der Radnabe,
- $c_u$  und  $d_u$  die lage- bzw. geschwindigkeitsabhängige Steifigkeit und Dämpfung des Federbeins sowie
- $F_{cd}$  dessen auf Radnabe und Achshältesystem ausgeübte Kraft.

Die Bindung von Endeffektor und Radnabe wurde als starr abstrahiert, d. h. es gilt

$$z_u = z + \Delta z \quad (\Delta z = \text{konst.}), \quad \dot{z}_u = \dot{z}, \quad \ddot{z}_u = \ddot{z}. \quad (5-114)$$

Das Zustandsraummodell lautet bei idealer Aktorik

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ -\frac{1}{m_E+m_u} \cdot (c_u z + d_u \dot{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_E+m_u} \end{bmatrix} \cdot F_q. \quad (5-115)$$

Die Ausgangsgleichung für die Kontaktkraft  $\tau$  ist

$$y_f = \tau = \frac{m_E}{m_E + m_u} \cdot (c_u z + d_u \dot{z}) + \frac{m_u}{m_E + m_u} \cdot F_q, \quad (5-116)$$

für die Endeffektorposition  $z$

$$y_p = z. \quad (5-117)$$

Für  $y_f = \tau$  liegt ein Durchgriff vor, da  $F_q$  direkt in  $\tau$  enthalten ist (Differenzordnung  $\delta = 0$ ), für  $y_p = z$  hingegen nicht ( $\delta = 2$ ).

Bei Anwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (siehe Anhang A3) folgt für die Regelung der Kontaktkraft  $\tau$  der neue lineare Eingang  $u_f = \tau$  für die Vorgabe des Eingangs  $F_q$  nach

$$F_q = \frac{m_E + m_u}{m_u} \cdot u_f - \frac{m_E}{m_u} \cdot (c_u z + d_u \dot{z}), \quad (5-118)$$

für die Regelung der Endeffektorposition  $z$  resultiert der lineare Eingang  $u_p = \ddot{z}$  für

$$F_q = (m_E + m_u) \cdot u_p + c_u z + d_u \dot{z}. \quad (5-119)$$

Aufbauend auf dem Eingang  $u_f$  bzw.  $u_p$  kann eine Kraft- bzw. Positionsregelung erfolgen, z. B. nach (2-55) bzw. (2-57). Dies entspricht dem Regelungsentwurf, der in diesem Kapitel mithilfe der *analytischen Formulierung nach de Luca und Manes* (Abschnitt 5.1) und der *exakten Ein-/Ausgangslinearisierung* (Abschnitt 5.2) für den Achsprüfstand beschrieben wurde.

Der hybride Kraft-/Positionsregelungsentwurf nach de Luca und Manes [LM94] wurde hier um die Wahlmöglichkeit zwischen den dynamischen Koordinaten  $y_d$  und die aktiven Kräfte

$\lambda_a$  gemäß einer festgelegten Verknüpfung dieser Größen erweitert. Diese Wahl erfolgt über eine binäre Selektionsmatrix  $S$ . Der Regelungsansatz sowie diese Erweiterung konnten erfolgreich am Simulationsmodell des HNI-Achsprüfstands erprobt werden. Dabei wurde zuerst eine idealisierte Radaufhängung ohne Lagerelastizitäten betrachtet und danach auf das vollständige Radaufhängungsmodell übergegangen. Der Regelungsentwurf nach de Luca und Manes [LM94] ist auf Umgebungen mit maximal sechs FHG beschränkt. Das Radaufhängungsmodell mit Lagerelastizitäten weist hingegen elf FHG auf. In Abschnitt 5.1.4 wurden drei verschiedene Vorgehensweisen beschrieben, nach denen ein Regelungsentwurf mit den Gleichungen nach de Luca und Manes in einer solchen Situation dennoch möglich sein kann. Einer der Ansätze erwies sich bei der vorliegenden, spezifischen Kontakt situation als ungeeignet. Die anderen beiden Ansätze waren anwendbar. Bei dem einen Ansatz resultieren für die Achsprüfung besser geeignete Regelgrößen, es muss aber ein Teil des Wissens über die Umgebung aufgegeben werden. Der andere Ansatz verwendet das vollständige Umgebungsmodell. Nachteilig ist hier, dass weniger brauchbare Regelgrößen resultieren. Bei Verwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung entfallen die jeweiligen Nachteile. Das im Regler enthaltene Umgebungsmodell wird vollständig berücksichtigt. Während bei dem Ansatz nach de Luca und Manes nur bestimmte Target-Signale bzw. Regelgrößen möglich sind, erlaubt die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung prinzipiell alle im Stand von Technik und Forschung genannten Target-Signale als Regelgrößen. Es handelt sich damit um den idealen Regelungsansatz für den Achsprüfstand. Allgemein stellt die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung einen hervorragenden Ausgangspunkt für die Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung dar, da sie dem Entwickler (im Vergleich zu den aus dem Stand von Technik und Forschung bekannten Verfahren) besonders viele Entwurfsfreiheiten lässt. Die Entwurfsmethode kann auch auf den Fall einer dynamischen Bindung zwischen Endeffektor und Umgebung übertragen (Abschnitt 5.2.2) und für den Regelungsentwurf anhand vereinfachter, experimentell bestimmter Umgebungsmodelle (Abschnitt 5.2.3) eingesetzt werden. Die beschriebenen Regler sind außerdem prädestiniert für die Durchführung numerischer Betriebsfestigkeitsuntersuchungen unter Einbeziehung des Prüfsystems, wie sie z. B. von Oppermann et al. [OBL02] beschrieben wurden, vgl. Abschnitt 2.3.1. Dort wird der TWR-Algorithmus zur Nachbildung gegebener Target-Signale verwendet, was diese simulativen Untersuchungen genauso wie die Prüfstandsversuche zeitaufwändig macht. Mit den beschriebenen Reglern genügt dagegen die Durchführung einer einzelnen Simulation, da durch ihre Anwendung die Target-Signale direkt mit hinreichend hoher Güte nachgebildet werden können.

Eine wesentliche Herausforderung bei der praktischen Anwendung dieser Methoden besteht in begrenzter Aktordynamik. Die Anwendbarkeit der für ideale Aktorik hergeleiteten Regelungen ist bei begrenzter Aktordynamik nicht zwangsläufig gegeben. Bei dem vorliegenden System zeigen Simulationen, dass die Regelungen nach Berücksichtigung der PT<sub>3</sub>-Aktordynamik im Modell nicht mehr funktional sind. Die Vernachlässigung der Aktordynamik beim Regelungsentwurf ist nur bei sehr hoher Stelldynamik zulässig. Ist die Aktorik wie im vorliegenden Fall nicht vernachlässigbar schnell, so ist ein angepasster Regelungsentwurf erforderlich. Liegt bspw. bei dem eindimensionalen Ersatzmodell (Bild 5-32) eine PT<sub>1</sub>-Aktordynamik der Form

$$\frac{F_q}{F_{q,r}} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_A} s + 1} \quad (5-120)$$

vor, so lautet das um die Aktorik erweiterte Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{F}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \frac{1}{m_E + m_u} \cdot (F_q - c_u z - d_u \dot{z}) \\ -\omega_A F_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_A \end{bmatrix} \cdot F_{q,r}. \quad (5-121)$$

Die Ausgangsgleichungen (5-116) und (5-117) bleiben bestehen, wobei in beiden Fällen kein Durchgriff vorliegt. Nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung folgt für die Kraftregelung die Eingangsgröße

$$F_{q,r} = \frac{1}{m_u \omega_A} \cdot \left( (m_E + m_u) u_f + m_E \left( \frac{c_u d_u}{m_E + m_u} - \dot{c}_u \right) z + m_E \left( \frac{d_u^2}{m_E + m_u} - c_u - \dot{d}_u \right) \dot{z} + \left( m_u \omega_A - \frac{m_E d_u}{m_E + m_u} \right) F_q \right), \quad (5-122)$$

für die Positionsregelung

$$F_{q,r} = \frac{1}{\omega_A} \cdot \left( (m_E + m_u) u_p - \left( \frac{c_u d_u}{m_E + m_u} - \dot{c}_u \right) z - \left( \frac{d_u^2}{m_E + m_u} - c_u - \dot{d}_u \right) \dot{z} + \left( \omega_A + \frac{d_u}{m_E + m_u} \right) F_q \right). \quad (5-123)$$

Für den jeweiligen linearen Eingang gilt in diesem Fall abweichend, dass  $u_f = \dot{\tau}$  bzw.  $u_p = \ddot{z}$ . Die Differenzordnung hat sich um die Ordnung der Aktordynamik erhöht. Der Regelungsentwurf mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung ist ebenso für Aktordynamiken höherer Ordnung möglich (Prüfstand: PT<sub>3</sub>). Es ist jedoch zunehmend mehr Modellwissen über den Manipulator und die Umgebung erforderlich, was sich im vorliegenden Beispiel durch das Auftreten von  $\dot{c}_u$  und  $\dot{d}_u$  in (5-122) und (5-123) ausdrückt. Die Herleitung ist für das eindimensionale Modell noch vertretbar, insb. für das ohnehin bereits sehr komplizierte Modell der MacPherson-Radaufhängung (Abschnitt 4.3) aber mit hohem Aufwand in der Herleitung als auch mit steigendem Rechenaufwand während der Simulations- bzw. Prüfstandslaufzeit verbunden. Außerdem besitzt der resultierende, lineare Regelkreis eine erhöhte Ordnung. Es müssen sämtliche Zustandsgrößen des um die Aktordynamik erweiterten Systemmodells vorliegen, entweder durch Messung oder Zustandsbeobachtung. Auch die eigentliche Regelgröße muss bis zu ihrer um 1 verminderten Differenzordnung vorliegen. Die Realisierung einer solchen Regelung ist prinzipiell möglich, jedoch mit sehr hohem Aufwand verbunden. Einen weiteren Lösungsansatz zum Umgang mit der sich aus der begrenzten Aktordynamik ergebenden Problematik stellt das in Abschnitt 5.1.2 vorgeschlagene Lead-Glied dar. Die für ideale Aktorik berechneten Aktorkräfte (5-118) bzw. (5-119) werden dabei vor der Aufschaltung durch das Lead-Glied weiterverarbeitet. Hierdurch resultiert virtuell eine hinreichend hohe Aktordynamik. Beide Ansätze stellen eine Erweiterung des Stands von Technik und Forschung dar, da dort stets von idealer Aktorik ausgegangen wird. Die Erweiterungen sind anwendbar, wenn die Aktordynamik sich in guter Näherung durch eine lineare Differentialgleichung (5-21) beschreiben lässt. In Zukunft ist zu prüfen, inwieweit diese Annahme für das vorliegende System zulässig ist. Unter Umständen muss das Modell der Aktorik und (in der Folge) auch der Regelungsentwurf weiterentwickelt werden. Mögliche Erweiterungen des Aktorikmodells schließen das amplitudenabhängige Verhalten der Servoventile sowie die maximalen Zylinderkräfte und -hübe ein.

Die genannten Regler erzielen besonders gute Ergebnisse, wenn die im Regler hinterlegten Modelle von Manipulator und Umgebung von hoher Güte sind. Das Manipulatormodell ist bis auf die oben genannten Vereinfachungen in der Modellierung der Aktorik für die angestrebte Anwendung sicherlich hinreichend gut bekannt. Das Modell der Umgebung bzw. der MacPherson-Radaufhängung verhält sich sehr ähnlich zu der im Prüfstand verbauten Radaufhängung, die Unterschiede zur Realität sind aktuell aber noch nicht hinreichend gering. Hinzu kommt, dass für deren Anwendung über die bisherige Ausstattung des Prüfstands hinaus eine Erweiterung der Sensorik notwendig ist. Für den Nachweis der Leistungsfähigkeit dieser Regelungen wurde daher auf Computersimulationen zurückgegriffen. Nach Identifikation und Validierung des Umgebungsmodells und weiteren Voruntersuchungen, z. B. zu Stabilität und Robustheit der Regelung, sind bei zukünftiger Anwendung am Prüfstand Ergebnisse zu erwarten, die das Potenzial besitzen, die kosten- und zeitaufwändige Achsprüfung in Zukunft wesentlich effizienter zu gestalten. Die Bandbreite der Regelung kann theoretisch beliebig hoch gewählt werden und ist nur durch die Leistungsfähigkeit der Aktorik sowie die Güte und den Gültigkeitsbereich des Regelstreckenmodells begrenzt. Die Regelung erlaubt eine gezielte Einstellung von sechs Zielgrößen, da sechs Aktoren vorliegen. In der Achsprüftechnik werden zwar häufig mehr Target-Signale (für eine Achsseite) gleichzeitig verfolgt; die Target-Signale sind aber redundant und das Ergebnis stellt prinzipiell einen gewichteten Kompromiss dar. Eine unabhängige Einstellung von mehr als sechs Zielgrößen mit nur sechs Aktoren ist physikalisch nicht möglich. Bei dem vorliegenden eindimensionalen Modell können bspw. auch nicht die Bewegung des Endeffektors  $z$  und die Kontaktkraft zur Umgebung  $\tau$  simultan eingestellt werden.

Der skizzierte Regelungsentwurf ist mit den Bewegungsgleichungen nach (4-222) auf alle Radaufhängungen nach dem MacPherson-Prinzip übertragbar. Damit wäre die Erprobung von rund drei Viertel aller Vorderachsen in aktuellen PKW abgedeckt, vgl. Bild 2-30. Der Verwendung des Regelungsansatzes auch für andere Radaufhängungen steht prinzipiell nichts im Wege. Hierfür müssen lediglich die Bewegungsgleichungen der jeweils betrachteten Radaufhängung hergeleitet werden und ein hinreichend guter Parametersatz vorliegen.

Die hohe Abhängigkeit der beschriebenen Regler von einem Modell der Umgebung hat weitere Regelungsentwürfe motiviert. Die *Regelungsentwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-)Regelgrößen* (Abschnitt 5.3) basieren auf der Linearisierung für die Pose  $z$  des Hexapod. Bei dem eindimensionalen Modell folgen sie direkt durch Umstellen der Bewegungsgleichung des Endeffektors nach  $F_q$ . Es folgt die Eingangsgröße

$$F_q = m_E \cdot u_p + \tau . \quad (5-124)$$

Der Direktvergleich mit (5-119) zeigt, dass das Umgebungsmodell dabei zugunsten eines Messwerts für  $\tau$  entfallen ist. Aufgrund der Differenzordnung von 2 ist eine Positionsregelung auf dieser Basis möglich und wird auch seit Einbau der Achse am Prüfstand erfolgreich eingesetzt. In dieser Ausarbeitung wurden aufbauend auf dem Eingang  $u_p$  drei Kraftregler vorgestellt:

- die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung,
- die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung sowie
- die explizite Kraftregelung (keine unterlagerten Regelschleifen).

Bei diesen Ansätzen liegt kein linearer Eingang für die Kontaktkräfte und -momente  $\tau$  vor, und die Größen sind weiterhin verkoppelt. Für den Regler mit unterlagerter Positionsregelung wurden auch Prüfstandsergebnisse diskutiert. Die bisher mit experimentell ausgelegten Reglerparametern erzielten Ergebnisse sind gut, erfüllen aber noch nicht die hohen Anforderungen an die Betriebsfestigkeitsuntersuchung. Problematisch ist die weiterhin bestehende Verkopplung der Regelgrößen, die sich besonders in denjenigen Richtungen bemerkbar macht, in denen eine hohe Steifigkeit vorliegt (Querkraft  $F_y$  und Sturzmoment  $M_x$ ). Die praktische Arbeit am Prüfstand wird auch dadurch erschwert, dass sich die Ursache instabilen Verhaltens bzw. des Eingreifens der Sicherheitsroutine infolge unzulässig hoher Kontaktkräfte und -momente aufgrund der vielen möglichen Einflussgrößen nur schwer eingrenzen lässt. Wahrscheinlich ist jedoch, dass Instabilitäten mit den vorliegenden Stellgrößenbeschränkungen zusammenhängen, insb. der amplitudenabhängigen Ventildynamik sowie den maximal möglichen Zylinderdifferenzdrücken. Die beiden anderen aufgezählten Ansätze wurden bisher nicht in vergleichbarem Umfang untersucht. Bisher konnten weder in der Simulation noch am Prüfstand nennenswerte Vorteile dieser Verfahren festgestellt werden. Theoretisch besitzen sie jedoch einige Vorzüge gegenüber der impliziten Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung, bspw. die stationäre Genauigkeit der Kraftregelung ohne I-Anteil bei unterlagerter Geschwindigkeitsregelung. Allen drei Ansätzen ist gemein, dass die Drehmomentregelung nur für kleine Kardanwinkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  näherungsweise korrekt ist. Mit allen drei Reglern können prinzipbedingt nur die TCP-Größen  $\tau$  bzw.  $z$  geregelt werden. Andere Target-Signale, z. B. die Regelung der Belastung einzelner Lenker, ist hiermit ohne weitere Anpassungen nicht möglich.

Auch die *Regelung ohne Umgebungsmodell* (Abschnitt 5.4) ist aus der Motivation entstanden, eine hybride Kraft-/Positionsregelung ohne umfangreiches Modellwissen über die Umgebung zu ermöglichen. Prinzipiell kann für die Positionsregelung der Eingang (5-124) verwendet werden, bei dem das Umgebungsmodell durch eine Messung der Kontaktkraft  $\tau$  ersetzt wurde. Analog zu (5-124) kann die Kraftregelung aufbauend auf dem Systemeingang

$$F_q = m_E \cdot \ddot{z} + u_f \quad (5-125)$$

erfolgen. Das Umgebungsmodell entfällt zugunsten des Messwerts für die Beschleunigung  $\ddot{z}$ . Bei idealer Messung von  $\tau$  bzw.  $\ddot{z}$  wird die Reaktion der Umgebung ideal kompensiert, sodass die gleichen Regler wie bei den Entwürfen nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung verwendet werden können. Die neuen Eingangsgrößen  $u_f$  und  $u_p$  können nach (2-55) bzw. (2-57) gebildet werden. Während die Positionsregelung (Differenzordnung 2, falls in diesem Fall noch von einer Differenzordnung gesprochen werden kann) nach diesem Prinzip auch am Prüfstand erfolgreich eingesetzt wird, zeigen erste Untersuchungen am Simulationsmodell, dass die Kraftregelung (Differenzordnung 0) schon bei minimalen Verzögerungen der Messwerte für  $\ddot{z}$  in dieser einfachen Form nicht beibehalten werden kann. Ursache ist der Durchgriff für Kraftregelgrößen. Dieser Ansatz ist theoretisch dennoch sehr interessant, da er ohne Umgebungsmodell auskommt und die Reglerparametrierung über den direkten Zusammenhang mit der Bandbreite der Kraft- bzw. Positionsregelkreise anschaulich ist. Außerdem ist die Drehmomentregelung für beliebige Kardanwinkel korrekt. Vor einem Einsatz am Prüfstand sind weitere Untersuchungen erforderlich.

In Abschnitt 5.5 wurde die *Kombination der Prüfstandsregelung mit einer ILR* beschrieben, die im Rahmen der Masterarbeit von Nikolai Fast [FK18] implementiert und für die

implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung erfolgreich am Prüfstand erprobt wurde. Sie kann dazu eingesetzt werden, die Abbildungsgüte am Prüfstand insb. für hochfrequente Signalanteile über das mit der Regelung erzielbare Niveau hinaus zu steigern. Die ILR ist mit allen beschriebenen Regelungen kombinierbar.

## 6 Zusammenfassung, wissenschaftlicher Beitrag und Ausblick

In diesem Kapitel wird der Inhalt dieser Arbeit zusammengefasst und deren wissenschaftlicher Beitrag aufgezeigt. Zum Abschluss erfolgt ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten.

### 6.1 Zusammenfassung

In dieser Dissertationsschrift wurde der Entwurf einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für einen hydraulischen Hexapod beschrieben, der als Anregungseinheit in einem Achsprüfstand dient. Der Endeffektor, d. h. die Arbeitsplattform des Hexapod ist über ein starres Kraftmessrad mit der Radnabe einer MacPherson-/Radaufhängung verbunden, die den Kontaktpartner darstellt. Aufgabe der Regelung ist das gezielte Nachbilden von Belastungs- und/oder Positions-Zeitverläufen der Radaufhängung, die in der Branche als Target-Signale bezeichnet werden. Häufig handelt es sich dabei um besonders anspruchsvolle Anregungssituationen (z. B. Schlechtwegstrecken), die im Fahrversuch aufgezeichnet wurden. Derartige Prüfstandsversuche stellen einen Teil des Betriebsfestigkeitsnachweises für Fahrzeugachsen dar. Mit dem in dieser Arbeit betrachteten System sollen darüber hinaus in Zukunft auch Hardware-in-the-Loop-Versuche (HiL-Versuche) durchgeführt werden. Vorstellbar ist z. B. die Unterstützung der Fahrwerkregelungsentwicklung durch einen Prüfstand mit real vorhandenem Fahrwerk.

### Stand von Technik und Forschung

Zu Beginn der Arbeit wurde ein umfassender Stand von Technik und Forschung auf diesem Themengebiet recherchiert. Er zeigt, dass die in der Industrie eingesetzten Achsprüfstände mit einer iterativ lernenden Regelung (ILR) betrieben werden. Auf diese Weise gelingt es, auch hochfrequente Anteile in den Target-Signalen von bis zu 50 Hz, an manchen Systemen sogar bis zu 80 Hz, in hinreichender Güte nachzubilden. Erste Verfahren zur Einbeziehung aktiver Fahrwerkskomponenten in die Betriebsfestigkeitsversuche liegen vor. Das hohe Potenzial einer echten HiL-Simulation unter Einbeziehung des Fahrwerks bleibt der Branche bislang verwehrt, da keine hinreichend schnelle Prüfstandsregelung vorliegt.

In der Robotik sind echtzeitfähige Regelungen hingegen alltäglich, da die Anforderungen an die Dynamik geringer sind. Es existieren zahlreiche Verfahren zur Regelung von Robotern in Kontaktsituationen mit unterschiedlichen Zielsetzungen. Für die hier betrachtete Anwendung, die eine Nachbildung von Sollwert-Zeitverläufen erfordert, kommen direkte Kraftregelungen in Betracht. Sie unterteilen sich in die impliziten und expliziten Kraftregelungen. Im Gegensatz zu den expliziten weisen die impliziten Verfahren unterlagerte Regelschleifen für Position oder Geschwindigkeit auf. Als besonders vielversprechend für die Anwendung am Achsprüfstand hat sich die hybride Kraft-/Positionsregelung herausgestellt, wie sie von de Luca und Manes [LM94] beschrieben wurde. Mittels genauer Modelle von Manipulator (Hexapod) und Umgebung (Radaufhängung) wird dabei eine

Ein-/Ausgangslinearisierung des nichtlinearen Systems herbeigeführt, auf deren Basis ein linearer, anschaulicher Regelungsentwurf möglich ist. Die erzielbare Bandbreite ist dabei theoretisch nur durch die Stelldynamik sowie die Güte und den Gültigkeitsbereich des Regelstreckenmodells begrenzt. Wie sich im Rahmen der durchgeführten Recherche herausgestellt hat, sind Beispiele für die praktische Anwendung dieses Ansatzes nicht dokumentiert. In der Industrie kommen andere Verfahren zum Einsatz, die einfacher umzusetzen sind.

Die recherchierten Verfahren zur hybriden Kraft-/Positionsregelung aus dem Stand von Technik und Forschung wurden in dieser Dissertationsschrift anhand zweier einfacher, zweidimensionaler Beispielsysteme in einem eigenständigen Abschnitt der Arbeit (siehe Kapitel 3) anschaulich aufbereitet.

Die Realisierung einer solchen, besonders leistungsfähigen Regelung für den Achsprüfstand setzt insb. ein Modell der MacPherson-Radaufhängung voraus. Der Stand von Technik und Forschung zeigt, dass in der Industrie MKS-Radaufhängungsmodelle für unterschiedlichste Anwendungen zum Einsatz kommen. Je nach betriebenem Aufwand können sie das reale Gegenstück sehr gut wiedergeben. Die eingesetzten MKS-Softwaretools, mit deren Hilfe bei vertretbarem Aufwand sehr detaillierte Modelle auch für komplexe Mechanismen erstellt werden können, eignen sich u. a. auch zur Erprobung von Regelungen. Sie stellen jedoch nicht die Bewegungsgleichungen der modellierten Systeme bereit, d. h. die mathematischen Gleichungen, die deren physikalisches Verhalten beschreiben. Für den Entwurf einer leistungsfähigen Regelung nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung ist das explizite Vorliegen dieser Bewegungsgleichungen jedoch unabdingbar. Rill [Ril94] hat diese für eine MacPherson-Radaufhängung beschrieben, bei der der Radträger gegenüber der Karosserie drei Freiheitsgrade (FHG) aufweist: die Drehung des Querlenkers (Einfederung), die Verschiebung der Lenkstange (Lenkbewegung) sowie einen elastischen FHG zur näherungsweisen Berücksichtigung der Lagerelastizitäten. Eine MacPherson-Radaufhängung weist je Achsseite drei Elastomerlager auf, deren mathematische Beschreibung nach wie vor Gegenstand der Forschung ist.

## Modellierung des Prüfstands

In Kapitel 4 wurden die Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem aus Hexapod, Einzelradaufhängung und Kraftmessrad hergeleitet. Als Referenz diente dabei eine eigens entwickelte Simulationsumgebung für den Prüfstand, das z. B. ein MKS-Modell des Prüfstands einschließt. Das enthaltene MKS-Modell der MacPherson-Radaufhängung entspricht dem derzeitigen Stand der Technik. Es enthält kennlinienbasierte Elastomerlagermodelle. Im Hauptteil dieser Ausarbeitung wurden insgesamt fünf verschiedene Modelle für den Hexapod beschrieben und deren Modellgüte anhand von Simulationen gegenübergestellt. Die beschriebenen Modelle unterscheiden sich in der Anzahl der berücksichtigten massebehafteten Starrkörper oder in der Parametrierung. Das detaillierteste Modell weist 13 massebehaftete Starrkörper auf: den Endeffektor sowie jeweils sechs Zylinderrohre und -stangen. Dieses Modell zeigte im Vergleich zu einem MKS-Referenzmodell die höchste Modellgüte. Es wurde außerdem beschrieben, wie mithilfe einer Parameteroptimierung auch mit einem stark vereinfachten Modell, das die Massen und Trägheiten der Zylinderrohre und -stangen vernachlässigt, sehr hohe Güten erzielt werden können.

Im Anschluss wurden die Bewegungsgleichungen der MacPherson-Radaufhängung hergeleitet. Als Ausgangspunkt der Herleitung diente das von Rill [Ril94] beschriebene Modell. Es wurde in dieser Arbeit um sieben weitere FHG erweitert, um die Lagerelastizitäten möglichst gut im Modell abilden zu können. Außerdem wurden alle sechs Starrkörper der Radaufhängung in den Gleichungen berücksichtigt und die Restbeschleunigungen hergeleitet, die üblicherweise aufgrund des damit verbundenen, hohen Aufwands in der Herleitung vernachlässigt werden. Das Modell erlaubt die Variation der Anzahl an FHG zur Abbildung der Lagerelastizitäten. Anhand von Simulationen konnte gezeigt werden, dass sich eine besonders hohe Modellgüte ab sechs FHG für die Lagerelastizitäten einstellt. Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen stellen einen erheblichen Mehrwert gegenüber den bisher vorliegenden Modellen dar und können aktuelle MKS-Modelle dieses Radaufhängungstyps ideal wiedergeben. Auch eine zweidimensionale Fassung dieses Modells wurde entwickelt.

Beide Teilmodelle (Hexapod und Radaufhängung) wurden daraufhin zu einem Prüfstandsmodell vereint. Es wurden zwei unterschiedliche Modellvarianten beschrieben. Während bei der einen Variante der Endeffektor des Hexapod sowie die Radnabe der Radaufhängung ideal starr gekoppelt sind, erfolgt die Kopplung bei der anderen über ein Feder-Dämpfer-System (sog. dynamische Bindung). Die hohe Güte der hergeleiteten Bewegungsgleichungen konnte durch Vergleich mit dem als Referenz verwendeten MKS-Modell aufgezeigt werden.

### Synthese einer hybriden Kraft-/Positionsregelung für den Hexapod

Mithilfe des entwickelten MKS-Modells sowie der hergeleiteten Bewegungsgleichungen für den Prüfstand wurde in Kapitel 5 die Regelungssynthese für den Hexapod durchgeführt. Zunächst wurde der Regelungsentwurf nach de Luca und Manes für das Zielsystem beschrieben. Er wurde für das idealisierte Modell der Radaufhängung, das keine Lagerelastizitäten aufweist, und schließlich auch für das unvereinfachte Radaufhängungsmodell durchgeführt und die Funktionalität am Simulationsmodell bestätigt. Bei der Radaufhängung mit Elastomerlagern wurden drei verschiedene Ansätze beschrieben, die sich in den möglichen Regelgrößen unterscheiden und dadurch, ob prinzipbedingt auf einen Teil des Wissens über die Umgebung für die Realisierung verzichtet werden muss. Das aus der Literatur bekannte Verfahren wurde dabei um die Wahl zwischen der Kraft- und Positionsregelung in denjenigen Richtungen erweitert, wo physikalisch solch eine Wahlmöglichkeit besteht. Außerdem wurde es um die Berücksichtigung begrenzter Aktordynamik erweitert, wobei in der Ausarbeitung sowohl die exakte Lösung als auch eine einfacher zu realisierende Näherungslösung erläutert wird. Die Verfahren aus der Literatur sind stets nur für ideale Aktorik beschrieben. Beide Erweiterungen stellen allgemeingültige Weiterentwicklungen des Regelungsentwurfs nach de Luca und Manes dar.

Als weiterer Regelungsansatz wurde das Verfahren der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung angewandt. Dieses Vorgehen ist für die Anwendung am Achsprüfstand prädestiniert, da es sechs prinzipiell beliebige Target-Signale als Regelgrößen zulässt. Alle im Stand von Technik und Forschung genannten, üblichen Target-Signale bei der Betriebsfestigkeitsprüfung sind damit realisierbar. Außerdem kann damit das vollständige Umgebungsmodell in der Regelung berücksichtigt werden. Demgegenüber ist die Wahl der Regelgrößen bei dem

Ansatz nach de Luca und Manes, der einen Sonderfall der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung darstellt, auf bestimmte Positions- und/oder Kraftgrößen eingeschränkt. Hinzu kommt, dass die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung auch für die dynamische Bindung von Endeffektor und Radhabe anwendbar und nicht auf den Fall der starren Bindung beschränkt ist. Für beide Ansätze ist ein einfacher linearer Regelungsentwurf möglich, wobei die Wahl eines I-Kraftreglers und eines PD-Positionsreglers eine besonders anschauliche Reglerparametrierung ermöglicht. Mit diesen Ansätzen ist eine prinzipiell beliebig schnelle Regelung von Positions- und Kraftgrößen möglich. In der Praxis ergeben sich allerdings zwangsläufig Begrenzungen, z. B. durch die Leistungsfähigkeit der verbauten Aktorik. Das aktuell vorliegende Modell der MacPherson-Radaufhängung gibt mangels eines passenden Parametersatzes das im Prüfstand verbaute Exemplar noch nicht hinreichend genau wieder. Außerdem ist zur Erprobung weitere Sensorik erforderlich. Die hohe Leistungsfähigkeit der Regelungen wurde anhand von Computersimulationen nachgewiesen. Die entwickelten Regler sind sehr vielversprechende Kandidaten für den Betrieb des Prüfstands und sind auch für die Durchführung numerischer Betriebsfestigkeitsuntersuchungen prädestiniert. In beiden Situationen kann durch die Regler die bisher verwendete, zeitaufwändige ILR ersetzt werden. Für die Nachbildung eines gegebenen Target-Signals ist mit den Reglern nur noch ein einzelner Prüfstandsversuch bzw. die Durchführung einer einzelnen Simulation erforderlich.

Nachteilig an den beschriebenen Reglern ist, dass deren erfolgreiche Umsetzung genaue Modelle von Manipulator und Umgebung voraussetzt. Zudem ist der Regler auf die hinterlegte Umgebung, hier die MacPherson-Radaufhängung, zugeschnitten und nicht für andere Kontaktpartner verwendbar. Beispielsweise ist bei Austausch des Prüflings ein anderer Parametersatz oder sogar andere Bewegungsgleichungen erforderlich, nämlich dann, wenn ein anderer Radaufhängungstyp untersucht werden soll. Aufgrund dessen wurden in dieser Arbeit auch andere Regelungsansätze beschrieben, bei denen das Ziel verfolgt wurde, mit weniger oder ohne Modellwissen über die vorliegende Umgebung eine leistungsfähige hybride Kraft-/Positionsregelung für den Hexapod zu realisieren. Für eine diagonal (d. h. in Form unabhängiger Eingrößenregelkreise) entworfene PI-Kraftregelung mit unterlagter Positionsregelung wurden Prüfstandsmessungen für eine Schlechtwegstrecke durchgeführt. Die Messergebnisse zeigen, dass bereits mit diesem sehr einfachen Ansatz gute Ergebnisse am Prüfstand erzielt werden. Die Regelergebnisse in den steifen Richtungen weisen noch eine Beeinträchtigung durch hohe Sollwertänderungen in relativ weichen Richtungen auf. Der experimentell am Prüfstand ausgelegte Regler erfüllt noch nicht die hohen Anforderungen an die Betriebsfestigkeitsprüfung. Gegenüber den aus dem Stand von Technik und Forschung bekannten, bisher dokumentierten Anwendungsbeispielen für kraftgeregelte Parallelkinematiken (PKM) sind jedoch beachtliche Verbesserungen der Regelung erkennbar. Alleinstellungsmerkmal der vorliegenden Regelung ist eine unterlagerte Positionsregelung in den Aufgabenkoordinaten, die durch einen Zustandsbeobachter ermöglicht wird. Als Schwierigkeit bei der Reglerparametrierung am Prüfstand erwies sich zum einen die (noch) unkomensierte Verkopplung der Kraftregelgrößen sowie die Tatsache, dass sich die Ursache instabilen Systemverhaltens bzw. des Eingreifens der vorliegenden Sicherheitsroutine für unzulässig hohe Kontaktkräfte und -momente aufgrund der Vielzahl möglicher Einflussgrößen nur schwer identifizieren lässt. Wahrscheinlich ist, dass ein Zusammenhang der Instabilitäten mit den Stellgrößenbeschränkungen besteht, insb. der begrenzten, amplitudenabhängigen Ventildynamik sowie dem maximalen Zylinderdruck.

Über den vorgenannten Regler hinaus wurden zwei weitere Regelungsansätze beschrieben, die ebenfalls auf der bereits vom positionsgeregelten Hexapod ohne Umgebungskontakt (siehe Dissertationsschrift von Sarah Knoop [Kno17]) bekannten Linearisierung der Pose des Endeffektors basieren. Sie weisen entweder keine oder eine unterlagerte Regelschleife für die Geschwindigkeit auf. Bislang konnten allerdings keine nennenswerten Vorteile dieser Verfahren gegenüber dem Ansatz mit unterlagerter Positionsregelung festgestellt werden.

Ein gänzlich anderer Ansatz wurde aus dem Regelungsentwurf nach de Luca und Manes durch Ersetzen des Umgebungsmodells durch eine Messung der Kontaktkräfte und -momente (Positionsregelung) bzw. der Beschleunigung des Endeffektors (Kraftregelung) entwickelt. Theoretisch wird auch in diesem Fall die Umgebungsphysik ideal kompensiert und die einfachen Regler (I-Kraftregler und PD-Positionsregler) können weiterhin eingesetzt werden. Während die Positionsregelung am Prüfstand seit Einbau der Achse nach diesem Schema arbeitet, zeigte die Kraftregelung am Simulationsmodell schon bei minimaler Verzögerung des Messwerts für die Beschleunigung instabiles Verhalten, falls der I-Regler beibehalten wird. Weiterführende Untersuchungen zu diesem theoretisch sehr interessanten Ansatz sind erforderlich.

Schließlich wurde auch die Kombination der Regelung mit einer ILR beschrieben. Hierdurch konnte der Stand der Technik für das betrachtete System abgebildet und Betriebsfestigkeitsuntersuchungen für Target-Signale mit hochfrequenten Anteilen sind (im Rahmen der Möglichkeiten der Aktorik) möglich. Die verschiedenen Regelungsentwürfe wurden abschließend anhand eines eindimensionalen Ersatzmodells der Kontaktsituation gegenübergestellt.

## 6.2 Wissenschaftlicher Beitrag

Der wissenschaftliche Beitrag dieser Dissertationsschrift besteht einerseits in der umfassenden Recherche und Aufbereitung des Stand von Technik und Forschung für die betrachtete Anwendung. Hinsichtlich der Betriebsfestigkeitsprüfung in der Fahrwerkstechnik schließt dies die Beschreibung

- des Hintergrunds und der praktischen Durchführung der Prüfstandsversuche,
  - der spezifischen Umsetzung der ILR (sog. TWR-Algorithmus),
  - der Weiterentwicklungen des TWR-Algorithmus sowie
  - allgemeiner Verbesserungen am gesamten Erprobungsprozess
- ein.

Die Verfahren zur Kraft- bzw. Interaktionsregelung von Manipulatoren werden ausführlich aufbereitet. Insbesondere wurden sämtliche erläuterten Verfahren bereits auf bestimmte PKM mit sechs FHG übertragen und sind in dieser Form im Stand von Technik und Forschung angegeben. In der Literatur finden sich diese üblicherweise für serielle Kinematiken (SKM) wie z. B. den Knickarmroboter. Auch ein umfassender Stand in der Modellierung der MacPherson-Radaufhängung sowie von Elastomerlagern ist enthalten.

Während MKS-Modelle für Achsprüfstände auch in der Industrie eingesetzt werden, besteht ein Alleinstellungsmerkmal dieser Arbeit in der Herleitung der Bewegungsglei-

chungen für einen solchen Prüfstand. Es existieren schlicht keine anderen dokumentierten Beispiele, in denen die Bewegungsgleichungen für dieses komplexe mechanische System angegeben sind. Insbesondere das aufbauend auf den Ausführungen von Rill [Ril94] hergeleitete, erweiterte Modell für die MacPherson-Radaufhängung stellt eine erhebliche Weiterentwicklung der bislang vorliegenden Modelle für diese Radaufhängung dar, da es eine deutlich verbesserte Abbildung der Lagerelastizitäten gegenüber den bisher bekannten Modellen erlaubt. Gleiches gilt für das ebenfalls in dieser Arbeit angegebene zweidimensionale Modell der MacPherson-Radaufhängung.

Bisher liegen auch keine dokumentierten Beispiele für die systematische, modellbasierte Synthese einer echtzeitfähigen Regelung für einen Achsprüfstand vor. In dieser Arbeit wird der Regelungsentwurf nach de Luca und Manes [LM94] aufgegriffen und allgemeingültig um die Wahlmöglichkeit zwischen vorab festzulegenden Kraft- und Positionsregelgrößen mithilfe einer binären, diagonalen Selektionsmatrix erweitert. Außerdem wird gezeigt, dass es sich bei diesem Verfahren um einen Sonderfall der bekannten exakten Ein-/Ausgangslinearisierung handelt. Die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung ist für die Anwendung am Achsprüfstand prädestiniert, da sie sämtliche in der Branche üblichen Target-Signale als Regelgrößen zulässt. Bei Vorliegen eines hinreichend guten Umgebungsmodells ist hiermit die Durchführung von Betriebsfestigkeitsversuchen sowohl am Prüfstand als auch in Computersimulationen möglich. Die Erfordernis des zeitaufwändigen TWR-Algorithmus entfällt. Mit diesen leistungsfähigen Regelungsverfahren genügt die Durchführung eines einzelnen Prüfstandsversuchs bzw. einer einzelnen Computersimulation zur Nachbildung eines gegebenen Target-Signals. In der Arbeit werden Realisierungsprobleme, die sich aus begrenzter Aktordynamik ergeben, aufgedeckt und für den Fall linearer Aktordynamik sowohl die exakte als auch eine Näherungslösung angegeben. Die Funktionalität und besondere Eignung dieses Regelungsentwurfs wurde anhand von Computersimulationen nachgewiesen.

Die am Prüfstand erzielten Messungen für die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung erfüllen zwar noch nicht die Anforderungen an die Betriebsfestigkeitsuntersuchung, übertreffen jedoch bereits in der vorliegenden Form die recherchierten, an anderen kraftgeregelten PKM erzielten Ergebnisse (vgl. Abschnitt 2.2.4). Dies ist insb. aufgrund der vorliegenden, nichtlinearen Kontaktsituation erwähnenswert. Gegenüber den aus dem Stand von Technik und Forschung bekannten Anwendungsbeispielen wird eine unterlagerte Positionsregelung in Aufgabenkoordinaten verwendet, bei der die Lösung des direkten kinematischen Problems durch einen Zustandsbeobachter erfolgt. Auch die spezifische Umsetzung der ILR für das Zielsystem ist in dieser Form bisher nicht dokumentiert worden.

### 6.3 Ausblick

Neben der ausstehenden Umsetzung der HiL-Entwurfsumgebung für Fahrwerkregelsysteme am Prüfstand bietet auch die Weiterentwicklung der beschriebenen Prüfstandsregelung zahlreiche Anknüpfungspunkte für weiterführende wissenschaftliche Arbeiten.

Eine erhebliche Erleichterung des Regelungsentwurfs würde ein noch genaueres Modell des Prüfstands ermöglichen. Im Besonderen sollte in der entwickelten Simulationsumgebung ein möglichst genaues Modell des Prüflings hinterlegt werden. So könnten in

Zukunft nicht nur qualitative Erfahrungen zum Regelungsentwurf mithilfe des Modells gewonnen werden (vgl. die Parametrierung der Positionsregelung, Abschnitt 5.3, insb. Bild 5-23). Im Idealfall könnten stattdessen sogar die dort synthetisierten Regler unverändert am Prüfstand übernommen werden. Zukünftige Arbeiten sollten sich daher vor allem mit der Identifikation eines Parametersatzes für das entwickelte Modell der MacPherson-Einzelrad-aufhängung beschäftigen. Aufgrund der Vielzahl erforderlicher Parameter und Kennlinien (vgl. Abschnitt 4.3.2) ist die Identifikation jedoch sehr anspruchsvoll und zeitaufwändig. Um den erheblichen Zeitaufwand zu reduzieren, sollte eine enge Zusammenarbeit mit den Automobilherstellern und -zulieferern angestrebt werden, um zumindest einen Teil dieser Parameter aus Datenblättern oder anderen Identifikationsmessungen übernehmen zu können. Wie die Recherche zum Stand von Technik und Forschung gezeigt hat, existieren durchaus hochwertige Modelle in der Industrie, die sich auch ideal für den Regelungsentwurf eignen würden. Sobald ein zum Prüfling passender Parametersatz vorliegt, können Untersuchungen zur Modellierungstiefe durchgeführt werden. Hier stellt sich die Frage, ob dem in Kapitel 4 beschriebenen MKS-Modell und den Bewegungsgleichungen eine hinreichend gute Abbildung der Realität gelingt. Als problematisch könnte sich dabei die Starrkörpermodellierung sowie die mit Kennlinien noch recht einfach gehaltene Modellierung der Elastomerlager erweisen. Der aktuelle Stand der Technik und Forschung zeigt (vgl. Abschnitt 2.3.3), dass insb. bei der räumlichen Modellierung von Elastomerlagern noch Forschungsbedarf besteht. Die Überprüfung kann durch die Gegenüberstellung von realem und simuliertem Systemverhalten erfolgen. Falls die Modelle nicht hinreichend genau sind, könnten ggf. verbesserte Elastomerlagermodelle oder ein flexibles MKS-Modell die entscheidende Aufwertung herbeiführen. Genügt das Modell, so kann bei Bedarf außerdem untersucht werden, inwieweit sich dieses Modell ohne nennenswerte Reduktion der Modellgüte vereinfachen lässt. Ein hochwertiges Umgebungsmodell verspricht bessere Regelergebnisse. Für ein einfacheres Modell spricht der geringere Aufwand für die Herleitung der Bewegungsgleichungen, die Identifikation der Parameter sowie die geringere Rechenzeit. Einen Anknüpfungspunkt liefern die Ausführungen in Abschnitt 4.3.3. Auch die Verwendung eines einfach gehaltenen Modells in Kombination mit einem Störgrößenbeobachter kann sich für die Regelung des Systems als geeignet erweisen.

Neben dem Prüflingsmodell sind andere Weiterentwicklungen des Simulationsmodells möglich. Beispielsweise besitzen die Servoventile amplitudenabhängiges Verhalten, das durch die aktuell verwendete Modellierung, ein einfaches  $PT_2$ -Glied, nur unzureichend wiedergegeben wird. Allgemein sollte ein genaueres Modell des hydraulischen Teilsystems angestrebt werden. Für die Hydraulikzylinder sollte außerdem ein Stribeck-Reibmodell implementiert und mithilfe von Prüfstandsmessungen identifiziert werden. Auch die End-lagendämpfung und die Endanschläge der Zylinder sind bisher nicht im Modell enthalten. Die Modellierung und Identifikation des Messrades ist ein weiterer möglicher Ansatzpunkt. Bisher unberücksichtigt ist auch der vertikale Freiheitsgrad der Aufspannplatte, die zum Zweck der Schwingungsisolierung auf Luftfedern gelagert ist.

Für die Durchführung von Betriebsfestigkeitsversuchen in der Simulation und am Prüfstand sind außerdem Target-Signale erforderlich, die zu der im Prüfstand verbauten Radaufhängung gehören. Auch hier wäre eine enge Kooperation mit einem Industriepartner wünschenswert. Idealerweise kann dieser auch die für diese Target-Signale an einem konventionellen Achsprüfstand erzielten Response-Signale bereitstellen, um so einen Direktvergleich mit einem solchen System durchführen zu können.

Zu den Regelungsansätzen mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung sollte (neben Identifikation und Validierung des Radaufhängungsmodells) weiter untersucht werden, wie mit der begrenzten Aktordynamik umzugehen ist. Zwar ist in der Arbeit die exakte Lösung für die vorliegende  $PT_3$ -Aktordynamik angegeben, die Realisierung am Prüfstand ist jedoch aufgrund der Vielzahl erforderlicher Mess- bzw. Schätzgrößen sehr aufwändig. Es sollte untersucht werden, ob die Berücksichtigung einer  $PT_1$ -Aktordynamik im Regler für die Strecke mit  $PT_3$ -Aktordynamik ausreicht. Die Lösung ist zwar dann nicht exakt, stellt aber möglicherweise einen brauchbaren Kompromiss aus Realisierbarkeit und Regelgüte dar. Unter Umständen ist auch die vorgeschlagene Näherungslösung über die zusätzliche Filterung mit einem Lead-Glied praktikabel. Es kann sich auch als erforderlich herausstellen, ein genaues Zustandsraummodell des hydraulischen Teilsystems anstelle des linearen Ersatzmodells für die Aktorik in den Entwurf der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung einzubeziehen.

Anstelle dieses Ansatzes sind für die Prüfstandsanwendung allerdings solche vorzuziehen, die kein oder ein stark vereinfachtes Umgebungsmodell erfordern. Möglicherweise genügt anstelle des komplizierten Prüflingsmodells (Abschnitt 4.3) auch ein relativ einfach durch Experimente zu identifizierendes Modell für den Entwurf einer Prüfstandsregelung, bspw. der Frequenzgang, der auch bei der ILR verwendet wird oder Modelle, wie sie in Abschnitt 5.2.3 genannt wurden. Auch nichtlineare Modelle wie z. B. nichtlineare ARX oder Hammerstein-Wiener-Modelle, die sich mithilfe von MATLAB leicht aus Messungen identifizieren lassen, kommen in Frage.

Die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung bietet sehr viel Spielraum für Weiterentwicklungen. Am Prüfstand wurden bisher dezentrale, d. h. als Eingrößenregelung entworfene PI-Kraftregler eingesetzt. Eine Kompensation der vorhandenen Verkopplungen der Regelgrößen wurde nicht erprobt. Für den Regelungsansatz erscheinen Vorsteuermaßnahmen und die Entwicklung eines systematischen, experimentellen Einlernprozesses für die (ggf. betriebspunktabhängigen) Reglerparameter besonders vielversprechend. Ein solcher Einlernprozess wäre für die betrachtete Anwendung besonders interessant, da ein häufiger Wechsel des Prüflings bei industrieller Anwendung üblich ist. Im Gegensatz zum Stand der Technik würde dabei die Regelung eingelernt und nicht die (für ein Target-Signal spezifischen) Stellsignale der Antriebe. Auch Methoden des maschinellen Lernens, z. B. die Bayes'sche Optimierung oder gradientenbasierte Verfahren, stellen hierfür einen vielversprechenden Ansatz dar.

Als Ausgangspunkt des Regelungs- und Vorsteuerungsentwurfs sollte der Frequenzgang des offenen Kraftregelkreises in einem oder mehreren Betriebspunkten am Prüfstand gemessen werden. Hiermit könnte bspw. auch ein Multi-Modell- oder ein  $\mathcal{H}_\infty$ -Entwurf wie in [Cuy06] für das System durchgeführt und erprobt werden. Die implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung und die explizite Kraftregelung auf Basis der Linearisierung der Endeffektorpose (Abschnitt 5.3.2) müssen aufgrund ihrer theoretischen Vorteile gegenüber der positionsbasierten Kraftregelung näher betrachtet werden. Für alle drei Verfahren kann es erforderlich werden, die Drehmomentregelung zu überdenken. Diese ist in der aktuellen Formulierung nur für kleine Kardanwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  näherungsweise korrekt.

Insbesondere der in Abschnitt 5.4 beschriebene Regelungsansatz ist für die Prüfstandsanwendung interessant. Er stellt eine Näherungslösung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung dar, bei dem das Umgebungsmodell durch Mess- bzw. Schätzgrößen für die

Endeffektorbeschleunigung und die Kontaktkräfte und -momente ersetzt wird. Für diesen Regler muss untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein stabiles Gesamtsystem resultiert. Außerdem ist zu prüfen, inwieweit die Regelungsgüte unter fehlerbehafteten Mess- bzw. Schätzgrößen leidet.

Auch die ILR bietet Potenzial für zukünftige Forschungsaktivitäten, falls dieser Ansatz weiter untersucht werden soll. Motivation dürfte wie im Stand von Technik und Forschung (Abschnitt 2.1.3) die Beschleunigung der Konvergenz des Iterationsprozesses sein.

Möglicherweise stellt sich im Rahmen weiterführender Arbeiten heraus, dass je nach Regelgröße ein anderer Kraftregelungsansatz das beste Regelergebnis liefert, bspw. in Abhängigkeit der vorliegenden Steifigkeit. Grundsätzlich ist diese richtungsabhängige Kombination verschiedener Regler für den Prüfstandsbetrieb vorstellbar und wird bereits von der auch im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Systemsoftware ermöglicht. Es kann außerdem sinnvoll sein, die Steifigkeit der Kraftmesseinrichtung oder der Verbindung zwischen dieser und dem Kontaktpartner in den Richtungen mit hoher Steifigkeit konstruktiv herabzusetzen. Auf diese Weise kann die Verkopplung der Regelgrößen reduziert werden, wodurch sich der Entwurf der Kraftregelung einfacher gestaltet.

Eine Verbesserung aller Regelungsansätze ist außerdem bei Verwendung eines genaueren Hexapodmodells im Regler zu erwarten. Am Prüfstand wird bisher ein 1-Starrkörper-Modell zur Regelung eingesetzt. Durch die Verwendung des 13-Starrkörper-Modells oder die Identifikation besserer Parameter für das aktuell eingesetzte 1-Starrkörper-Modell sollte sich die Regelgüte weiter verbessern. Gegen die Nutzung des 13-Starrkörper-Modells spricht die aktuell nur geringe verfügbare zusätzliche Rechenkapazität des Echtzeitrechners. Daneben hat auch die Weiterentwicklung des Druckreglers Potenzial für die Verbesserung der überlagerten Kraft- und Positionsregelungen. Mögliche Ansätze sind z. B. die Verwendung des Backstepping-Verfahrens oder die Vorgabe des bisher ungenutzten Vorsteuereingangs  $\Delta \dot{p}_r$ .

Nicht zuletzt hat auch der Beobachter Einfluss auf das Regelergebnis und kann weiterentwickelt werden. In den bestehenden Beobachter sollten die Messgrößen einer im TCP angebrachten 6-FHG-IMU (d. h. drei translatorische Beschleunigungen und drei Drehraten) aufgenommen werden, um die Genauigkeit der Beobachtung weiter zu steigern. Die bestehende Störgrößenschätzung muss überprüft und für eine Störgrößenkompensation verwendet werden. Insbesondere für die Erprobung des Regelungsentwurfs nach der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung am Prüfstand sollte der Beobachterentwurf unter Einbeziehung des entwickelten Radaufhängungsmodells erfolgen.

Auch die Wechselwirkungen zwischen der linken und der rechten Seite der Achse müssen untersucht werden. Bei Verwendung der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung können bei der aktuellen Aktorik theoretisch 7, bei zwei Hexapoden 12 physikalische Größen entkoppelt geregelt werden. Für andere Regler ist das Ausmaß der Wechselwirkungen zu untersuchen und ggf. Modifikation des Regelkonzepts vorzunehmen.

Das Prüfsystem und die Regelungen bieten darüber hinaus Spielraum für umfangreiche theoretische Betrachtungen, die bisher nicht durchgeführt wurden. Hierzu zählt bspw. auch eine Singularitätsanalyse sowie die weiterführende Untersuchung des DKP für speziell diesen Hexapod. Auch die Stabilität und Robustheit der Regelungen gegenüber Modellunsicherheiten und Störgrößen muss untersucht werden. Zudem sollte analysiert werden, welche Betriebspunkte durch den Hexapod im Kontakt mit der betrachteten Umgebung

bei welcher Belastung erreicht werden können, um vorab beurteilen zu können, ob ein gegebenes Target-Signal mit dem gegebenen Prüfstand nachgebildet werden kann. Hier bietet sich die formale Betrachtung der (Ausgangs-) Steuerbarkeit bzw. der Erreichbarkeit an.

Dieses Thema ist eng verknüpft mit den Stellgrößenbeschränkungen, die bisher beim modellbasierten Regelungsentwurf nicht berücksichtigt wurden. Analog zum positionsge- regelten Hexapod ohne Umgebungskontakt [Kno17] ist ein Führungsgrößenfilter erforderlich, das die Sollwerte der Regelung so anpasst, dass die Stellgrößenbeschränkungen stets eingehalten werden. Liegt ein hochwertiges Umgebungsmodell vor, so kann die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen komfortabel mit dem entwickelten Simulationsmodell überprüft werden. Beispielsweise könnte der mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung entworfene Regler zur Nachbildung eines gegebenen Target-Signals verwendet und die sich im Modell ergebenden Stellgrößenverläufe analysiert werden. Vor Synthese des Führungsgrößenfilters sind noch grundlegende Fragen zu klären. Beispielsweise ist zu prüfen, in welcher Form das Target-Signal bei Verletzen der Stellgrößenbeschränkungen modifiziert werden soll. Das Herunterskalieren aller Signale um den gleichen Faktor ist nur ein möglicher Ansatz. Die Anpassungen sollten die Verlässlichkeit des Betriebsfestigkeits- versuchs möglichst nicht beeinträchtigen. Auch Änderungen der Prüfstandsausstattung (z. B. Einbau von vier anstelle zwei Ventilen je Zylinder) oder konstruktive Änderungen am Hexapod (z. B. Optimierung der Endeffektormasse, größere Kolbenflächen) sollten in Betracht gezogen werden.

Am Prüfstand sollte weiterhin eine Bremsanlage eingebaut werden, um auch das Bremsmoment  $M_y$  mithilfe der Aktorik einregeln zu können. Außerdem sollte auch eine Lenkaktorik verbaut werden. Zudem muss die Sensorik dieses Entwicklungssystems erweitert werden. Neben dem bereits genannten 6-FHG-IMU sind hier insb. Sensoren für die typischen Target-Signale der Achsprüfung zu erwähnen. Auch der Umstieg auf ein leistungsfähigeres Echtzeitsystem bietet sich an.

Zum Zweck der Entwicklung und Erprobung neuer Regelungskonzepte wäre außerdem ein einfacherer Prüfstand sehr hilfreich, bei dem alle Bewegungen in einer Ebene ablaufen. Eine Anregung stellt das in Kapitel 3 präsentierte Beispielsystem dar.

## Literaturverzeichnis

- [ABB17] ABB AG: *IRB 360 FlexPicker*. 2017. <http://new.abb.com/products/robotics/de/industrieroboter/irb-360> (besucht am 11.12.2017)
- [Ada14] ADAMSKI, D.: *Simulation in der Fahrwerktechnik: Einführung in die Erstellung von Komponenten- und Gesamtfahrzeugmodellen*. ATZ/MTZ-Fachbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014
- [Ada18] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018
- [Agh05] AGHILI, F.: A unified approach for inverse and direct dynamics of constrained multibody systems based on linear projection operator: Applications to control and simulation. *IEEE Transactions on Robotics* 21 (2005), Nr. 5, S. 834–849
- [AH87a] AN, C. H.; HOLLERBACH, J. M.: Dynamic Stability Issues in Force Control of Manipulators. *1987 American Control Conference (ACC)*. Minnesota, MN, USA, 1987, S. 821–827
- [AH87b] AN, C. H.; HOLLERBACH, J. M.: Kinematic stability issues in force control of manipulators. *1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Raleigh, NC, USA, 1987, S. 897–903
- [AH89] AN, C. H.; HOLLERBACH, J. M.: The Role of Dynamic Models in Cartesian Force Control of Manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 8 (1989), Nr. 4, S. 51–72
- [AKM84] ARIMOTO, S.; KAWAMURA, S.; MIYAZAKI, F.: Bettering operation of Robots by learning. *Journal of Robotic Systems* 1 (1984), Nr. 2, S. 123–140
- [ALN93] ARIMOTO, S.; LIU, Y. H.; NANIWA, T.: Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. *1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Atlanta, GA, USA, 1993, S. 618–623
- [AM17] ADHIKARY, N.; MAHANTA, C.: Hybrid impedance control of robotic manipulator using adaptive backstepping sliding mode controller with PID sliding surface. *2017 Indian Control Conference (ICC)*. Guwahati, Indien, 2017, S. 391–396
- [Ame14] AMELUNXEN, H.: *Fahrdynamikmodelle für Echtzeitsimulationen im komfortrelevanten Frequenzbereich*. Dissertation. Universität Paderborn, 2014
- [AS09] ANTONI, J.; SCHOUKENS, J.: Optimal Settings for Measuring Frequency Response Functions With Weighted Overlapped Segment Averaging. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 58 (2009), Nr. 9, S. 3276–3287
- [AS16] AGHILI, F.; SU, C.-Y.: Control of constrained robots subject to unilateral contacts and friction cone constraints. *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Stockholm, Schweden, 2016, S. 2347–2352

- [AS88] ANDERSON, R. J.; SPONG, M. W.: Hybrid impedance control of robotic manipulators. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 4 (1988), Nr. 5, S. 549–556
- [Aut18] AUTOMOTIVE TESTING TECHNOLOGY INTERNATIONAL: *MTS and CATARC unveil new test lab.* 2018. <http://www.automotivetestingtechnologyinternational.com/articles.php?ArticleID=1425> (besucht am 01.02.2018)
- [BAMT11a] BELLAKEHAL, S.; ANDREFF, N.; MEZOUAR, Y.; TADJINE, M.: Force/position control of parallel robots using exteroceptive pose measurements. *Meccanica* 46 (2011), Nr. 1, S. 195–205
- [BAMT11b] BELLAKEHAL, S.; ANDREFF, N.; MEZOUAR, Y.; TADJINE, M.: Vision/force control of parallel robots. *Mechanism and Machine Theory* 46 (2011), Nr. 10, S. 1376–1395
- [BEH<sup>+</sup>02] BERGER, C.; EULITZ, K.-G.; HEULER, P.; KOTTE, K.-L.; NAUNDORF, H.; SCHÜTZ, W.; SONSINO, C. M.; WIMMER, A.; ZENNER, H.: Betriebsfestigkeit in Germany — an overview. *International Journal of Fatigue* 24 (2002), Nr. 6, S. 603–625
- [Ber98] BERG, M.: A Non-Linear Rubber Spring Model for Rail Vehicle Dynamics Analysis. *Vehicle System Dynamics* 30 (1998), Nr. 3-4, S. 197–212
- [BH15] BLUNDELL, M.; HARTY, D.: *The multibody systems approach to vehicle dynamics.* Second edition. Oxford, England und Waltham, MA, USA: Butterworth-Heinemann, 2015
- [BHMM16] BRANDES, S. J.; HILF, K.-D.; MÖLLER, R.; MELZ, T.: Durability Simulation with Chassis Control Systems: Model Depth for a Handling Maneuver. *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems* 9 (2016), Nr. 3, S. 1289–1296
- [BLM<sup>+</sup>14] BRANDES, S. J.; LEIDNER, U.; MELZ, T.; MÖLLER, R.; SEUFERT, B.: Lastdaten-generierung anhand MKS-Gesamtfahrzeugsimulationen mit Fahrwerkregelsystemen. *41. Tagung des DVM-Arbeitskreises Betriebsfestigkeit "Von der Lastannahme bis zur Absicherung: Betriebsfestigkeit entlang der Prozesskette".* Ingolstadt, 2014, S. 129–141
- [BLOO05] BÄCKER, M.; LANGTHALER, T.; OLBRICH, M.; OPPERMANN, H.: The Hybrid Road Approach for Durability Loads Prediction. *SAE Technical Paper 2005-01-0628* (2005)
- [BM07] BRETTHAUER, G.; MACK, G.: Bestimmung von Bauteilbelastungen im aktiven Fahrwerk mittels Co-Simulation. *VDI-Berichte* (2007), Nr. 2014, S. 447–462
- [BMK<sup>+</sup>09] BÄCKER, M.; MÖLLER, R.; KIENERT, M.; BAYRAM, B.; OZKAYNAK, M.: Component Load Determination for a CAE-Based Fatigue Life Prediction of a New Bus Type. *MP Materials Testing* 51 (2009), Nr. 5, S. 309–317

- [BMZ02] BRUZZONE, L. E.; MOLFINO, R. M.; ZOPPI, M.: Modelling and control of peg-in-hole assembly performed by a translational robot. *IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC)*. Innsbruck, Österreich, 2002, S. 512–517
- [BN95] BRUNI, F.; NATALE, C.: Sperimentazione di algoritmi di controllo dell’interazione per un robot industriale. *39° Convegno Annuale ANIP-LA*. Bari, Italien, 1995, S. 439–442
- [Bou08] BOUSCAYROL, A.: Different types of Hardware-In-the-Loop simulation for electric drives. *2008 IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. Cambridge, UK, 2008, S. 2146–2151
- [BP08] BRUNE, M.; PÖTTER, K.: Mechatronische Systeme bei der Betriebsfestigkeitsprüfung und -simulation am Beispiel eines variablen Dämpfers. *MP Materials Testing* 50 (2008), Nr. 7-8, S. 390–396
- [Bra11] BRANDT, A.: *Noise and vibration analysis: Signal analysis and experimental procedures*. Chichester, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2011
- [Bur14] BURGER, M.: Calculating road input data for vehicle simulation. *Multibody System Dynamics* 31 (2014), Nr. 1, S. 93–110
- [BWL17] Bös, J.; WAHRBURG, A.; LISTMANN, K. D.: Iteratively Learned and Temporally Scaled Force Control with application to robotic assembly in unstructured environments. *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Singapur, 2017, S. 3000–3007
- [CB03] CHEN, K.; BEALE, D. G.: Base Dynamic Parameter Estimation of a MacPherson Suspension Mechanism. *Vehicle System Dynamics* 39 (2003), Nr. 3, S. 227–244
- [CCLD99] CUYPER, J. de; COPPENS, D.; LIEFOOGHE, C.; DEBILLE, J.: Advanced system identification methods for improved service load simulation on multi axial test rigs. *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering* 44 (1999), Nr. 1, S. 27–39
- [CKA03] CHEAH, C. C.; KAWAMURA, S.; ARIMOTO, S.: Stability of hybrid position and force control for robotic manipulator with kinematics and dynamics uncertainties. *Automatica* 39 (2003), Nr. 5, S. 847–855
- [CNL76] CRYER, B. W.; NAWROCKI, P. E.; LUND, R. A.: A Road Simulation System for Heavy Duty Vehicles. *SAE Technical Paper 760361* (1976)
- [CPP06] CALLEGARI, M.; PALPACELLI, M.-C.; PRINCIPI, M.: Dynamics modelling and control of the 3-RCC translational platform. *Mechatronics* 16 (2006), Nr. 10, S. 589–605
- [Cra05] CRAIG, J. J.: *Introduction to robotics: Mechanics and control*. 3. ed., international ed. Pearson education international. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Prentice Hall, 2005
- [Cra93] CRAIG, J.: Iterative transfer function compensation using a time-domain and a frequency domain approach. *EIS Conference on Progress in computer modelling and laboratory testing*. 1993

- [Cro81] CRONIN, D. L.: MacPherson strut kinematics. *Mechanism and Machine Theory* 16 (1981), Nr. 6, S. 631–644
- [CS03] CALLEGARI, M.; SUARDI, A.: On the force-controlled assembly operations of a new parallel kinematics manipulator. *11th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Rhodos, Griechenland: IEEE, 2003
- [CS93] CHIAVERINI, S.; SCIavicco, L.: The parallel approach to force/position control of robotic manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9 (1993), Nr. 4, S. 361–373
- [CSD78] THE CHARLES STARK DRAPER LABORATORY, INC., 1978. Remote center compliance system. Erfinder: WATSON, P. C., Anmeldung: 13. 10. 1976. US, *Patentschrift US4098001A*. 4. 7. 1978
- [CSV03] CACCAVALE, F.; SICILIANO, B.; VILLANI, L.: The Tricept robot: dynamics and impedance control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 8 (2003), Nr. 2, S. 263–268
- [CSV97] CHIAVERINI, S.; SICILIANO, B.; VILLANI, L.: An adaptive force/position control scheme for robot manipulators. *Applied Mathematics and Computer Science* 7 (1997), Nr. 2, S. 293–303
- [CTVP13] CORNELIS, B.; Toso, A.; VERPOEST, W.; PEETERS, B.: Adaptive modelling for improved control in durability test rigs. *20th International Congress on Sound and Vibration (ICSV20)*. Bangkok, Thailand, 2013, S. 1–8
- [CTVP14] CORNELIS, B.; Toso, A.; VERPOEST, W.; PEETERS, B.: Improved MIMO FRF estimation and model updating for robust Time Waveform Replication on durability test rigs. *2014 International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*. Leuven, Belgien, 2014, S. 759–774
- [Cuy06] CUYPER, J. de: *Linear feedback control for durability test rigs in the automotive industry*. Dissertation. Katholieke Universiteit Leuven, 2006
- [CV02] CUYPER, J. de; VERHAEGEN, M.: State Space Modeling and Stable Dynamic Inversion for Trajectory Tracking on an Industrial Seat Test Rig. *Modal Analysis* 8 (2002), Nr. 7, S. 1033–1050
- [CVD<sup>+</sup>02] CUYPER, J. de; VAES, D.; DEHANDSCHUTTER, W.; SWEVERS, J.; VERHAEGEN, M.; SAS, P.: Experimental  $\mathcal{H}_\infty$  control to improve an industrial off-line tracking control scheme on an automotive suspension test rig. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*. Glasgow, UK, 2002, S. 63–68
- [CVS03] CUYPER, J. de; VERHAEGEN, M.; SWEVERS, J.: Off-line feed-forward and  $\mathcal{H}_\infty$  feedback control on a vibration rig. *Control Engineering Practice* 11 (2003), Nr. 2, S. 129–140
- [Dai17] DAIMLER AG: *Das Fahrsimulationszentrum: Digitale Erprobung ergänzt reale Tests*. 2017. <http://media.daimler.com/marsMediaSite/de/instance/ko/Das-Fahrsimulationszentrum-Digitale-Erprobung-ergaenzt-reale-Tests.xhtml?oid=9914164> (besucht am 11. 12. 2017)

- [DBS97] DUTRÉ, S.; BRUYNINCKX, H.; SCHUTTER, J. de: The analytical Jacobian and its derivative for a parallel manipulator. *1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Albuquerque, NM, USA, 1997, S. 2961–2966
- [DC16] DUTTA, S.; CHOI, S.-B.: A nonlinear kinematic and dynamic modeling of Macpherson suspension systems with a magneto-rheological damper. *Smart Materials and Structures* 25 (2016), Nr. 3, S. 1–11
- [DCC16] DUTTA, S.; CHOI, S.-M.; CHOI, S.-B.: A new adaptive sliding mode control for Macpherson strut suspension system with magneto-rheological damper. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 27 (2016), Nr. 20, S. 2795–2809
- [DDD10] DAUN, Q. J.; DAUN, B. Y.; DAUN, X. C.: Dynamics modelling and hybrid control of the 6-UPS platform. *2010 International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. Xi'an, China, 2010, S. 434–439
- [Die98] DIETMAIER, P.: The Stewart-Gough platform of general geometry can have 40 real postures. *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*. Springer, 1998, S. 7–16
- [DIN1] DIN IEC 60050-351:2014-09, *Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch - Teil 351: Leittechnik (IEC 60050-351:2013)*
- [DIN2] DIN 45667:1969-10-00, *Klassierverfahren für das Erfassen regelloser Schwingungen*
- [DM98] DASGUPTA, B.; MRUTHYUNJAYA, T. S.: Closed-Form Dynamic Equations of the General Stewart Platform through the Newton–Euler Approach. *Mechanism and Machine Theory* 33 (1998), Nr. 7, S. 993–1012
- [Dow72] DOWLING, N. E.: Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories. *Journal of Materials (JMLSA)*. Bd. 7. 1972, S. 71–78
- [DP01] DODDS, C. J.; PLUMMER, A. R.: Laboratory Road Simulation for Full Vehicle Testing: A Review. *SAE Technical Paper 2001-26-0047* (2001)
- [DP07] DAVLIAKOS, I.; PAPADOPOULOS, E.: A model-based impedance control of a 6-dof electrohydraulic Stewart platform. *2007 European Control Conference (ECC)*. Kos, Griechenland, 2007, S. 3507–3514
- [DP09] DAVLIAKOS, I.; PAPADOPOULOS, E.: Impedance Model-based Control for an Electrohydraulic Stewart Platform. *European Journal of Control* 15 (2009), Nr. 5, S. 560–577
- [DR11] DRAKUNOV, S. V.; REYHANOGLU, M.: Hierarchical sliding mode observers for distributed parameter systems. *Journal of Vibration and Control* 17 (2011), Nr. 10, S. 1441–1453
- [DS16] DÜSTERLOH, D.; SCHRAGE, B.: Lenkungsentwicklung am mHiL-Lenkungsprüfstand. *VDI-Berichte* (2016), Nr. 2279, S. 653–666
- [DSB09] DRESSLER, K.; SPECKERT, M.; BITSCH, G.: Virtual durability test rigs for automotive engineering. *Vehicle System Dynamics* 47 (2009), Nr. 4, S. 387–401

- [Duf90] DUFFY, J.: The Fallacy of Modern Hybrid Control Theory that is Based on "Orthogonal Complements" of Twist and Wrench Spaces. *Journal of Robotic Systems* 7 (1990), Nr. 2, S. 139–144
- [EG17] ERSOY, M.; GIES, S.: *Fahrwerkhandbuch*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017
- [ES87] EPPINGER, S.; SEERING, W.: Understanding bandwidth limitations in robot force control. *1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Raleigh, NC, USA, 1987, S. 904–909
- [FBX08] FALLAH, M. S.; BHAT, R.; XIE, W. F.: New nonlinear model of macpherson suspension system for ride control applications. *2008 American Control Conference (ACC)*. Seattle, WA, USA, 2008, S. 3921–3926
- [FBX09] FALLAH, M. S.; BHAT, R.; XIE, W. F.: New model and simulation of Macpherson suspension system for ride control applications. *Vehicle System Dynamics* 47 (2009), Nr. 2, S. 195–220
- [FBX10] FALLAH, M. S.; BHAT, R.; XIE, W.-F.:  $\mathcal{H}_\infty$  robust control of semi-active Macpherson suspension system: New applied design. *Vehicle System Dynamics* 48 (2010), Nr. 3, S. 339–360
- [Fea03] FEATHERSTONE, R.: A Dynamic Model of Contact Between a Robot and an Environment with Unknown Dynamics. *Robotics Research: The Tenth International Symposium*. Hrsg. von JARVIS, R. A.; ZELINSKY, A. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, S. 433–446
- [Fea04] FEATHERSTONE, R.: Modeling and Control of Contact Between Constrained Rigid Bodies. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20 (2004), Nr. 1, S. 82–92
- [FJT14] FLOTTMEIER, S.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Test Rig for the Hardware-in-the-Loop Simulation of Mechatronic Axles. *Proceedings of the 9th International Fluid Power Conference*. Bd. 3. Aachen, 2014, S. 366–377
- [FK17] FAST, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Systematische Auslegung der Kraftregelung für die parallelkinematische Anregungseinheit eines Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2017
- [FK18] FAST, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Entwicklung einer iterativ lernenden Regelung für einen Fahrzeugachsprüfstand mit parallelkinematischer Anregungseinheit*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2018
- [FKT15] FLOTTMEIER, S.; KOHLSTEDT, A.; TRÄCHTLER, A.: Regelung eines hydraulischen Hexapoden zur Echtzeitsimulation von Straßenanregungen. *VDI-Berichte* (2015), Nr. 2233, S. 267–277
- [FM92] FISHER, W. D.; MUJTABA, M. S.: Hybrid Position/Force Control: A Correct Formulation. *The International Journal of Robotics Research* 11 (1992), Nr. 4, S. 299–311

- [FMC51] FORD MOTOR COMPANY LIMITED, 1951. Improvements in a wheel suspension for motor vehicle. Erfinder: MACPHERSON, E. S., Anmeldung: 26. 9. 1949. GB, *Patentschrift GB658387*. 10. 10. 1951
- [FMR95] FERRETTI, G.; MAGNANI, G.; Rocco, P.: On the Stability of Integral Force Control in Case of Contact With Stiff Surfaces. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117 (1995), Nr. 4, S. 547
- [Föll13] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 11., völlig neu bearb. Aufl. Berlin: VDE-Verlag, 2013
- [FOT14] FLOTTMEIER, S.; OLMA, S.; TRÄCHTLER, A.: Sliding Mode and Continuous Estimation Techniques for the Realization of Advanced Control Strategies for Parallel Kinematics. *IFAC Proceedings Volumes* 47 (2014), Nr. 3, S. 182–190
- [FSK98] FEATHERSTONE, R.; SONCK, S.; KHATIB, O.: A general contact model for dynamically-decoupled force/motion control. *Experimental Robotics V: The Fifth International Symposium (Barcelona, Spanien)*. Hrsg. von CASALS, A.; ALMEIDA, A. T. de. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998, S. 128–139
- [FW67] FALB, P.; WOLOVICH, W.: Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 12 (1967), Nr. 6, S. 651–659
- [Gaß39] GASSNER, E.: Festigkeitsversuche mit wiederholter Beanspruchung im Flugzeugbau. *Luftwissen* 6 (1939), Nr. 2, S. 61–64
- [Gaß76] GASSNER, E.: Bedeutung der Betriebsfestigkeit für die Konstruktionsforschung. *Manuskript eines Vortrags beim Werkstoffkolloquium der Technischen Universität Karlsruhe* (1976)
- [GPC10] GATTO, M.; PEETERS, B.; COPPOTELLI, G.: Flexible shaker excitation signals for improved FRF estimation and non-linearity assessment. *2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*. Leuven, Belgien, 2010, S. 2475–2488
- [GW62] GOUGH, V. E.; WHITEHALL, S. G.: Universal Tyre Test Machine. *Proceedings of the 9th International Technical Congress FISITA* (1962), S. 117–137
- [GWF<sup>+</sup>16] GUO, J.; WANG, D.; FAN, R.; CHEN, W.; ZHAO, G.: Development of a material testing machine with multi-dimensional loading capability. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* 10 (2016), Nr. 2, S. 1–14
- [Hai06] HAIBACH, E.: *Betriebsfestigkeit*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2006
- [Han07] HANSEN, P. C.: Regularization Tools version 4.0 for Matlab 7.3. *Numerical Algorithms* 46 (2007), Nr. 2, S. 189–194
- [HE01] HUSTY, M.; EBERHARTER, H.: Kinematic analysis of the hexapod telescope. *2nd Workshop on Computational Kinematics (CK)*. Seoul, Südkorea, 2001, S. 269–278
- [Hip06] HIPPE, P.: *Windup in control: Its effects and their prevention*. Advances in industrial control. London: Springer, 2006

- [HJS99] HONG, K.-S.; JEON, D.-S.; SOHN, H.-C.: A new modeling of the Macpherson suspension system and its optimal pole-placement control. *7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Haifa, Israel, 1999, S. 559–579
- [HLSH15] HONISCH, A.; LUGERT, M.; SCHÖNING, T.; HAKULI, S.: Verbesserung des Lenkgefühls Virtueller Ansatz mit HiL. *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 117 (2015), Nr. 6, S. 26–31
- [HMG12] HUREL, J.; MANDOW, A.; GARCÍA-CEREZO, A.: Nonlinear two-dimensional modeling of a McPherson suspension for kinematics and dynamics simulation. *12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*. Sarajevo, Bosnien und Herzegowina, 2012, S. 1–6
- [HMG13] HUREL, J.; MANDOW, A.; GARCÍA-CEREZO, A.: Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model. *Vehicle System Dynamics* 51 (2013), Nr. 9, S. 1422–1437
- [Hog85] HOGAN, N.: Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I-III. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 107 (1985), Nr. 1, S. 1–24
- [Hol07] HOLZ, C.: *Positions- und Kraftregelung eines linear direkt angetriebenen Hexapoden*. Dissertation. Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2007
- [HR07] HAY, N. C.; ROBERTS, D. E.: Iterative control in automotive testing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 221 (2007), Nr. 2, S. 223–233
- [HSH02] HONG, K.-S.; SOHN, H.-C.; HEDRICK, J. K.: Modified Skyhook Control of Semi-Active Suspensions: A New Model, Gain Scheduling, and Hardware-in-the-Loop Tuning. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 124 (2002), Nr. 1, S. 158–167
- [HSS08] HABIBI, H.; SHIRAZI, K. H.; SHISHESAZ, M.: Roll steer minimization of McPherson-strut suspension system using genetic algorithm method. *Mechanism and Machine Theory* 43 (2008), Nr. 1, S. 57–67
- [IK15] IKEMEYER, F.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Identifikation der Feder- und Dämpferkennlinien eines MacPherson-Federbeins*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2015
- [IM11] ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M.: *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Advanced textbooks in control and signal processing. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011
- [IMA18] IMA MATERIALFORSCHUNG UND ANWENDUNGSTECHNIK GMBH: *Mehraxiale Schwingungsprüfung*. 2018. [http://www.ima-dresden.de/index.php?ILNK=Schwingung\\_mehraxial&iL=1](http://www.ima-dresden.de/index.php?ILNK=Schwingung_mehraxial&iL=1) (besucht am 01.02.2018)
- [ING16] IKONEN, E.; NAJIM, K.; GARCÍA-CEREZO, A.: MacPherson suspension system modeling and control with MDP. *2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. Athen, Griechenland, 2016, S. 1–8
- [ino17] INOVA GMBH: *Technische Beschreibung 2x6 DOF Achsprüfstand*. 2017.

- [Ins18] INSTRON GMBH: *Instron Achsprüfstand*. 2018. <http://www.instron.de/de-de/products/testing-systems/structural-durability/structural-durability-solutions/axle-test-system> (besucht am 25.01.2018)
- [Isi95] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. London: Springer London, 1995
- [ISS99] ISERMANN, R.; SCHAFFNIT, J.; SINSEL, S.: Hardware-in-the-loop simulation for the design and testing of engine-control systems. *Control Engineering Practice* 7 (1999), Nr. 5, S. 643–653
- [JA15] JOHANSSON, A. T.; ABRAHAMSSON, T. J.: A method for improving test rig performance using passive components. *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), S. 614–627
- [JB98] JO, S. S.; BEALE, D. G.: Dynamic Parameter Estimation of a MacPherson Strut Suspension. *Vehicle System Dynamics* 30 (1998), Nr. 2, S. 169–184
- [KCY00] KIM, D.; CHUNG, W.; YOUNG, Y.: Analytic Jacobian of in-parallel manipulators. *2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, CA, USA, 2000, S. 2376–2381
- [Kha87] KHATIB, O.: A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 3 (1987), Nr. 1, S. 43–53
- [KJPZ12] KÖHLER, M.; JENNE, S.; PÖTTER, K.; ZENNER, H.: *Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012
- [KK88] KANKAANRANTA, R. K.; KOIVO, H. N.: Dynamics and simulation of compliant motion of a manipulator. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 4 (1988), Nr. 2, S. 163–173
- [KLSZ02] KAPS, L.; LION, A.; STOLZE, F.-J.; ZHANG, G.: Ganzheitliche Analyse von Fahrzeugprototypen mit Hilfe von virtuellen Fahrzeugmodellen und virtuellen Prüfgeländen. *VDI-Berichte* (2002), Nr. 1701, S. 653–678
- [Kno17] KNOOP, S.: *Flachheitsbasierte Positionsregelungen für Parallelkinematiken am Beispiel eines hochdynamischen Hexapoden*. Dissertation. Universität Paderborn, 2017
- [KNW99] KLINTWORTH, G.; NAUNDORF, H.; WESTHUIZEN, F. van der: Intelligent fuzzy logic-based automatic optimization of system identification signals for service load reconstruction. *MP Materials Testing* 41 (1999), Nr. 3, S. 85–91
- [KOF<sup>+</sup>16] KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; FLOTTMEIER, S.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Control of a hydraulic hexapod for a Hardware-in-the-Loop axle test rig. *at - Automatisierungstechnik* 64 (2016), Nr. 5, S. 365–374
- [KOT<sup>+</sup>17] KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Kinematics-based force/position control of a hexapod in a HiL axle test rig. *17. Internationales Stuttgarter Symposium Automobil- und Motorentechnik*. Stuttgart, 2017, S. 1217–1230

- [KSH<sup>+</sup>15] KRACHT, F. E.; SCHRAMM, D.; HESSE, B.; ZHAO, Y.; UNTERREINER, M.: Development of a chassis model including elastic behavior for real-time applications. *6th International Munich Chassis Symposium 2015*. Hrsg. von PFEFFER, P. E. Proceedings. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015, S. 257–281
- [KTO<sup>+</sup>17] KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; OLMA, S.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Fast hybrid position / force control of a parallel kinematic load simulator for 6-DOF Hardware-in-the-Loop axle tests. *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. München, 2017, S. 694–699
- [KWSU09] KOCH, U.; WIEDEMANN, D.; SUNDQVIST, N.; ULRICH, H.: State-space modelling and decoupling control of electromagnetic actuators for car vibration excitation. *2009 IEEE International Conference on Mechatronics*. Malaga, Spanien, 2009, S. 1–6
- [KWU09] KOCH, U.; WIEDEMANN, D.; ULRICH, H.: Decoupled decentral control of electromagnetic actuators for car vibration excitation. *2009 IEEE International Conference on Mechatronics*. Malaga, Spanien, 2009, S. 1–6
- [KWU11] KOCH, U.; WIEDEMANN, D.; ULRICH, H.: Model-Based MIMO State-Space Control of a Car Vibration Test Rig With Four Electromagnetic Actuators for the Tracking of Road Measurements. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58 (2011), Nr. 12, S. 5319–5323
- [LA04] LEPOLD, A.; AMMON, G.: Aktive Fahrwerkskomponenten und deren Einfluss auf die Betriebsfestigkeit. *VDI-Berichte* (2004), Nr. 1846, S. 351–365
- [LDA04] LEWIS, F. L.; DAWSON, D. M.; ABDALLAH, C. T.: *Robot manipulator control: Theory and practice*. 2. ed., rev. and expanded. Bd. 15. Control engineering series. New York: Dekker, 2004
- [LE00] LION, A.; EICHLER, M.: Gesamtfahrzeugsimulation auf Prüfstrecken zur Bestimmung von Lastkollektiven. *VDI-Berichte* (2000), Nr. 1559, S. 369–398
- [LG91] LIU, G. J.; GOLDENBERG, A. A.: Robust hybrid impedance control of robot manipulators. *1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Sacramento, CA, USA, 1991, S. 287–292
- [Lin03] LINKE, B.: *Hybride Regelung hydraulischer Lastsimulatoren in paralleler Architektur*. Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg, 2003
- [LLL93] LEBRET, G.; LIU, K.; LEWIS, F. L.: Dynamic analysis and control of a stewart platform manipulator. *Journal of Robotic Systems* 10 (1993), Nr. 5, S. 629–655
- [LM91] LUCA, A. de; MANES, C.: Hybrid Force-Position Control for Robots in Contact with Dynamic Environments. *IFAC Proceedings Volumes* 24 (1991), Nr. 9, S. 177–182
- [LM94] LUCA, A. de; MANES, C.: Modeling of robots in contact with a dynamic environment. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 10 (1994), Nr. 4, S. 542–548

- [LPBC14] LE FLOHIC, J.; PACCOT, F.; BOUTON, N.; CHANAL, H.: Enhancing control robustness of a 6 DOF parallel testing machine. *2014 European Control Conference (ECC)*. Strasbourg, Frankreich, 2014, S. 2016–2021
- [LPBC18] LE FLOHIC, J.; PACCOT, F.; BOUTON, N.; CHANAL, H.: Application of hybrid force/position control on parallel machine for mechanical test. *Mechatronics* 49 (2018), S. 168–176
- [LT91] LOHMANN, B.; TRÄCHTLER, A.: Zur Stabilität bei der Regelung von Systemen mit Durchgriff. *at - Automatisierungstechnik* 39 (1991), Nr. 10, S. 379–380
- [Lun16] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016
- [Mas81] MASON, M. T.: Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 11 (1981), Nr. 6, S. 418–432
- [Mat07] MATSCHINSKY, W.: *Radführungen der Straßenfahrzeuge: Kinematik, Elastokinematik und Konstruktion*. 3., aktualisierte und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [ME16] MÜLLER, T.; ENDISCH, C.: Compensation techniques for iterative rig control in multi-axial durability testing. *2016 IEEE 21st International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)*. Berlin, 2016, S. 1–7
- [ME17] MÜLLER, T.; ENDISCH, C.: An Estimation Based Iterative Learning Control Approach for Cross-Coupled Vehicle Test Systems. *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. München, 2017, S. 1375–1381
- [ME68] MATSUISHI, M.; ENDO, T.: Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuoka, Japan* 68 (1968), Nr. 2, S. 37–40
- [Mer06] MERLET, J.-P.: *Parallel Robots*. Second Edition. Bd. 128. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer, 2006
- [MFC98] MIANZO, L.; FRICKE, D.; CHABAAN, R.: Road profile control methods for laboratory vehicle road simulators. *1998 IEEE AUTOTESTCON Proceedings. IEEE Systems Readiness Technology Conference. Test Technology for the 21st Century*. Salt Lake City, UT, USA, 1998, S. 222–228
- [MFL14] MAGRINI, E.; FLACCO, F.; LUCA, A. de: Estimation of contact forces using a virtual force sensor. *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Chicago, IL, USA, 2014, S. 2126–2133
- [MIL1] MIL-STD-810G, *Test Method Standard: Environmental Engineering Considerations and Laboratory Tests*
- [ML12] MÁNTARAS, D. A.; LUQUE, P.: Virtual test rig to improve the design and optimisation process of the vehicle steering and suspension systems. *Vehicle System Dynamics* 50 (2012), Nr. 10, S. 1563–1584
- [MLS94] MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. S.: *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994

- [MLV04] MÁNTARAS, D. A.; LUQUE, P.; VERA, C.: Development and validation of a three-dimensional kinematic model for the McPherson steering and suspension mechanisms. *Mechanism and Machine Theory* 39 (2004), Nr. 6, S. 603–619
- [MM11] MADANI, M.; MOALLEM, M.: Hybrid position/force control of a flexible parallel manipulator. *Journal of the Franklin Institute* 348 (2011), Nr. 6, S. 999–1012
- [MM15] MOCZALA, M.; MAUR, T.: Lenkung auf dem Prüfstand: Echtzeitbasiertes Testen in der ZF TRW Lenkungsentwicklung. *dSPACE Magazin*. Bd. 3. 2015, S. 12–17
- [Moo17] Moog Inc.: *Banco prova per sospensioni*. 2017. <http://www.moog.it/italian/markets/automotive-test-simulation/automotive-structural-testing/banco-prova-per-sospensioni/> (besucht am 07.07.2017)
- [Moo19] Moog Inc.: *Servoventile mit integrierter Elektronik Baureihe D765 (Datenblatt)*. 2019. <https://www.moog.de/literature/ICD/d765seriesvalvesD.pdf> (besucht am 29.03.2019)
- [MP97] MIANZO, L.; PENG, H.: LQ and  $\mathcal{H}_\infty$  preview control for a durability simulator. *1997 American Control Conference (ACC)*. Albuquerque, NM, USA, 1997, S. 699–703
- [MR12] MISTRY, M.; RIGHETTI, L.: Operational space control of constrained and underactuated systems. *Robotics: Science and systems VII* (2012), S. 225–232
- [MSH<sup>+</sup>17] MA, Z.; SEE, H.-H.; HONG, G.-S.; ANG JR, M. H.; POO, A.-N.; LIN, W.; TAO, P.-Y.; SHORT, J. S.: Control and Modeling of an End-effector in a Macro-Mini Manipulator System for Industrial Applications. *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. München, 2017, S. 676–681
- [MTT09] MISHRA, S.; TOPCU, U.; TOMIZUKA, M.: Iterative learning control with saturation constraints. *2009 American Control Conference (ACC)*. St. Louis, MO, USA, 2009, S. 943–948
- [MVE16] MÜLLER, T.; VÖGELE, U.; ENDISCH, C.: Disturbance compensation for iterative control of suspension durability test rigs. *2016 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. 2016, S. 1675–1681
- [MW14] MITSCHKE, M.; WALLENTOWITZ, H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014
- [MW88] McCCLAMROCH, N. H.; WANG, D.: Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33 (1988), Nr. 5, S. 419–426
- [MY11] MAHER, D.; YOUNG, P.: An insight into linear quarter car model accuracy. *Vehicle System Dynamics* 49 (2011), Nr. 3, S. 463–480

- [Nat10] NATALE, C.: *Interaction control of robot manipulators: Six degrees-of-freedom tasks*: Überarb. Fassung von: Dissertation, Seconda Università degli Studi di Napoli. Bd. 3. Springer Tracts in Advanced Robotics. Berlin: Springer, 2010
- [Neu06] NEUGEBAUER, R.: *Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Konstruktion, Anwendung*. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [NHDS04] NEUWIRTH, E.; HUNTER, K.; DITTMANN, K.-J.; SINGH, P.: Operativer Einsatz des Virtuellen Prüfstandes zur Darstellung von Betriebsfestigkeitsprüfungen an Gesamtfahrzeugen mithilfe Mehrkörpersimulation (MKS). *VDI-Berichte* (2004), Nr. 1846, S. 381–407
- [NK17] NOLTE, U.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Entwicklung eines mathematischen Modells für einen HiL-Achsprüfstand mit parallelkinematischer Anregungseinheit und MacPherson-Radaufhängung*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2017
- [NKO18] NOLTE, U.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer); OLMA, S. (Betreuer): *Entwicklung adaptiver und robuster Regelungen für die parallelkinematische Anregungseinheit eines Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2018
- [NSV98] NATALE, C.; SICILIANO, B.; VILLANI, L.: Control of moment and orientation for a robot manipulator in contact with a compliant environment. *1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Leuven, Belgien, 1998, S. 1755–1760
- [OBL02] OPPERMANN, H.; BÄCKER, M.; LANGTHALER, T.: Drivesignalgenerierung am virtuellen Prüfstand - ein weiterer Schritt zur CAE-basierten Lebensdaueranalyse. *VDI-Berichte* (2002), Nr. 1701, S. 701–719
- [Oer11] OERTEL, C.: *RMOD-K Formula Documentation*. 2011
- [OF13] OLMA, S.; FLOTTMEIER, S. (Betreuerin): *Zustands- und Parameterschätzung bei Parallelkinematiken*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2013
- [OHO<sup>+</sup>05] OPPERMANN, H.; HACKMAIR, C.; OLBRICH, M.; BÄCKER, M.; LANGTHALER, T.: Virtueller Betriebslastennachfahrversuch am BMW-Gesamtfahrzeugprüfstand. *VDI-Berichte* (2005), Nr. 1900, S. 247–270
- [OHW06] OPPERMANN, H.; HACKMAIR, C.; WIRTH, C.: Numerische Simulationsmethoden zur Lebensdauerbeurteilung in der virtuellen Fahrzeugentwicklung. *VDI-Berichte* (2006), Nr. 1967, S. 749–775
- [OKG<sup>+</sup>07] ONCU, S.; KARAMAN, S.; GUVENC, L.; ERSOLMAZ, S. S.; OZTURK, E. S.; CETIN, E.; SINAL, M.: Robust Yaw Stability Controller Design for a Light Commercial Vehicle Using a Hardware in the Loop Steering Test Rig. *2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. Istanbul, Türkei, 2007, S. 852–859

- [OKT<sup>+</sup>16a] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Indirect Force Control in Hardware-in-the-Loop Simulations for a Vehicle Axle Test Rig. *14th International Conference on Control, Automation Robotics & Vision (ICARCV)*. Phuket, Thailand, 2016
- [OKT<sup>+</sup>16b] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Sub-structuring and Control Strategies for Hardware-in-the-Loop Simulations of Multiaxial Suspension Test Rigs. *7th IFAC Symposium on Mechatronic Systems*. Loughborough, UK, 2016, S. 141–148
- [OKT<sup>+</sup>18] OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; TRAPHÖNER, P.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Observer-based nonlinear control strategies for Hardware-in-the-Loop simulations of multiaxial suspension test rigs. *Mechatronics* 50 (2018), S. 212–224
- [OMN10] OTT, C.; MUKHERJEE, R.; NAKAMURA, Y.: Unified Impedance and Admittance Control. *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Anchorage, AK, USA, 2010, S. 554–561
- [OSKM15] ORTENZI, V.; STOLKIN, R.; KUO, J. A.; MISTRY, M.: Projected inverse dynamics control and optimal control for robots in contact with the environment: A comparison. *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Hamburg, 2015, S. 4009–4015
- [OSKM17] ORTENZI, V.; STOLKIN, R.; KUO, J. A.; MISTRY, M.: Hybrid motion/force control: A review. *Advanced Robotics* 31 (2017), Nr. 19-20, S. 1102–1113
- [OTK<sup>+</sup>16] OLMA, S.; TRAPHÖNER, P.; KOHLSTEDT, A.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Model-based method for the accuracy analysis of Hardware-in-the-Loop test rigs for mechatronic vehicle axles. *3rd International Conference on System-Integrated Intelligence (SysInt)*. Paderborn, 2016, S. 105–112
- [Owe16] OWENS, D. H.: *Iterative Learning Control*. London: Springer London, 2016
- [PAM09] PACCOT, F.; ANDREFF, N.; MARTINET, P.: A Review on the Dynamic Control of Parallel Kinematic Machines: Theory and Experiments. *The International Journal of Robotics Research* 28 (2009), Nr. 3, S. 395–416
- [PGMN16] PARZER, H.; GATTRINGER, H.; MÜLLER, A.; NADERER, R.: Robot Force/Position Control Combined with ILC for Repetitive High Speed Applications. *International Conference on Robotics in Alpe-Adria Danube Region (RAAD)*. Belgrad, Serbien, 2016, S. 12–19
- [PH02] PFEFFER, P. E.; HOFER, K.: Einfaches nichtlineares Modell für Elastomer und Hydrolager zur Optimierung der Gesamtfahrzeug-Simulation. *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift* 104 (2002), Nr. 5, S. 442–451
- [Plu07] PLUMMER, A. R.: Control techniques for structural testing: A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 221 (2007), Nr. 2, S. 139–169
- [PP12] PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S.: *The Matrix Cookbook*. Technical University of Denmark, 2012

- [QS92a] QIAN, H. P.; SCHUTTER, J. de: Introducing active linear and nonlinear damping to enable stable high gain force control in case of stiff contact. *1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Nice, Frankreich, 1992, S. 1374–1379
- [QS92b] QIAN, H. P.; SCHUTTER, J. de: Stabilizing robot force control through low pass filtering with low cut off frequency. *31st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Tucson, AZ, USA, 1992, S. 1893–1896
- [QS92c] QIAN, H. P.; SCHUTTER, J. de: The role of damping and low pass filtering in the stability of discrete time implemented robot force control. *1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Nice, Frankreich, 1992, S. 1368–1373
- [Raa97] RAATH, A. D.: A new time domain parametric dynamic system identification approach to multiaxial service load simulation testing in components. *International Journal of Fatigue* 19 (1997), Nr. 5, S. 409–414
- [RC81] RAIBERT, M. H.; CRAIG, J. J.: Hybrid Position/Force Control of Manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 103 (1981), Nr. 2, S. 126–133
- [Rei08] REISINGER, T.: *Kontaktregelung von Parallelrobotern auf der Basis von Aktionsprimitiven*. Dissertation. Technische Universität Braunschweig, 2008
- [RH06] ROBERTS, D. E.; HAY, N. C.: Dynamic response simulation through system identification. *Journal of Sound and Vibration* 295 (2006), Nr. 3-5, S. 1017–1027
- [Ril12] RILL, G.: *Road vehicle dynamics: Fundamentals and modeling*. Ground vehicle engineering series. Boca Raton Fla.: CRC Press Taylor & Francis, 2012
- [Ril94] RILL, G.: *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. Braunschweig: Vieweg, 1994
- [Ril97] RILL, G.: Vehicle Modeling for Real Time Applications. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences* 19 (1997), Nr. 2, S. 192–206
- [RK16] RÜDDENKLAU, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Parameteridentifikation für die parallelkinematische Anregungseinheit eines hochdynamischen Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2016
- [RKCB16] REDDY, K. V.; KODATI, M.; CHATRA, K.; BANDYOPADHYAY, S.: A comprehensive kinematic analysis of the double wishbone and MacPherson strut suspension systems. *Mechanism and Machine Theory* 105 (2016), S. 441–470
- [RS10] RILL, G.; SCHAEFFER, T.: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2010
- [RS17] RILL, G.; SCHAEFFER, T.: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017
- [RV95] RONGA, F.; VUST, T.: Stewart platforms without computer? *Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1992)* (1995), S. 197–212

- [RW98] RAATH, A. D.; WAVEREN, C.: A time domain approach to load reconstruction for durability testing. *Engineering Failure Analysis* 5 (1998), Nr. 2, S. 113–119
- [RWKS11] REISINGER, T.; WOBBE, F.; KOLBUS, M.; SCHUMACHER, W.: Integrated Force and Motion Control of Parallel Robots – Part 2: Constrained Space. *Robotic Systems for Handling and Assembly*. Hrsg. von SCHÜTZ, D.; WAHL, F. Bd. 67. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Berlin Heidelberg, 2011, S. 253–273
- [SAK94] STENSSON, A.; ASPLUND, C.; KARLSSON, L.: The Nonlinear Behaviour of a MacPherson Strut Wheel Suspension. *Vehicle System Dynamics* 23 (1994), Nr. 1, S. 85–106
- [Sal80] SALISBURY, J.: Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates. *19th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) including the Symposium on Adaptive Processes*. Albuquerque, NM, USA, 1980, S. 95–100
- [SAS11] SANDU, C.; ANDERSEN, E. R.; SOUTHWARD, S.: Multibody dynamics modelling and system identification of a quarter-car test rig with McPherson strut suspension. *Vehicle System Dynamics* 49 (2011), Nr. 1-2, S. 153–179
- [SB02] SCHUPBACH, R. M.; BALDA, J. C.: A versatile laboratory test bench for developing powertrains of electric vehicles. *2002 IEEE 56th Vehicular Technology Conference*. Vancouver, Kanada, 2002, S. 1666–1670
- [SB96] SCHUTTER, J. de; BRUYNINCKX, H.: Force Control of Robot Manipulators. *The Control Handbook*. Hrsg. von LEVINE, W. S. Boca Raton, Fla.: CRC, 1996, S. 1351–1358
- [SBZS98] SCHUTTER, J. de; BRUYNINCKX, H.; ZHU, W.-H.; SPONG, M. W.: Force control: A bird's eye view. *Control Problems in Robotics and Automation*. Hrsg. von SICILIANO, B.; VALAVANIS, K. P. Bd. 230. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 1998, S. 1–17
- [SD08] SPECKERT, M.; DRESSLER, K.: Simulation and optimization of suspension testing systems. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006* (2008), S. 254–258
- [SDR10] SEDLACZEK, K.; DRONKA, S.; RAUH, J.: Advanced modular modelling of rubber bushings for vehicle simulations. *Vehicle System Dynamics* 49 (2010), Nr. 5, S. 741–759
- [Ser18] SERVOTEST TESTING SYSTEMS LTD: *4- & 6-post ride simulators for automobile, SUV, bus & truck testing*. 2018. <http://www.servotestsystems.com/vehicle-component-test/ride-simulation-4-6-post-for-car-suv-bus-truck.html> (besucht am 01.02.2018)
- [Sex11] SEXTRO, W.: *Mehrkörperdynamik*. Skript zur Vorlesung. Universität Paderborn, 2011
- [SFS95] SATYA, S. M.; FERREIRA, P. M.; SPONG, M. W.: Hybrid control of a planar 3-dof parallel manipulator for machining operations. *Transactions-North American Manufacturing Research Institution of SME* (1995), S. 273–280

- [SHB18] SCHRAMM, D.; HILLER, M.; BARDINI, R.: *Vehicle Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018
- [SHH00] SOHN, H.-C.; HONG, K.-S.; HEDRICK, J. K.: Semi-active control of the Macpherson suspension system: hardware-in-the-loop simulations. *2000 IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, AK, USA, 2000, S. 982–987
- [SHHY04] SOHN, H.-C.; HONG, K. T.; HONG, K.-S.; YOO, W. S.: An adaptive LQG control for semi-active suspension systems. *International Journal of Vehicle Design* 34 (2004), Nr. 4, S. 309–326
- [SHV06] SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M.: *Robot modeling and control*. Hoboken, NJ: Wiley, 2006
- [SK16] SICILIANO, B.; KHATIB, O., Hrsg.: *Springer Handbook of Robotics*. 2nd Edition. Cham: Springer, 2016
- [SLK13] SCHEIBLEGGER, C.; LIN, J.; KARRER, H.: New Nonlinear Bushing Model for Ride Comfort and Handling Simulation: Focussing on Linearization and the Implementation into MBS Environment. *Proceedings of the FISITA 2012 World Automotive Congress*. Bd. 198. Lecture Notes in Electrical Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 461–473
- [SNK<sup>+</sup>10] SAWA, N.; NIMIYA, Y.; KUBOTA, Y.; ITSUBO, T.; HONMA, K.: Fatigue Life Prediction on Rough Road Using Full Vehicle Co-simulation Model with Suspension Control. *SAE Technical Paper 2010-01-0952* (2010)
- [SNS15] SHERIF, K.; NACHBAGAUER, K.; STEINER, W.: On the rotational equations of motion in rigid body dynamics when using Euler parameters. *Nonlinear Dynamics* 81 (2015), Nr. 1-2, S. 343–352
- [Son08] SONSINO, C. M.: Betriebsfestigkeit—Eine Einführung in die Begriffe und ausgewählte Bemessungsgrundlagen. *MP Materials Testing* 50 (2008), Nr. 1-2, S. 77–90
- [SSVO10] SICILIANO, B.; SCIavicco, L.; VILLANI, L.; ORIOLO, G.: *Robotics: Modelling, planning and control*. Advanced textbooks in control and signal processing. London: Springer, 2010
- [ST06] SADJADIAN, H.; TAGHIRAD, H. D.: Impedance Control of the Hydraulic Shoulder A 3-DOF Parallel Manipulator. *2006 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Kunming, China, 2006, S. 526–531
- [Ste65] STEWART, D.: A Platform with Six Degrees of Freedom. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 180 (1965), Nr. 1, S. 371–386
- [SV99] SICILIANO, B.; VILLANI, L.: *Robot force control*. The Kluwer international series in engineering and computer science. Boston, Mass: Kluwer Academic Publishers, 1999
- [SVS08] SMOLDERS, K.; VOLCKAERT, M.; SWEVERS, J.: Tracking control of nonlinear lumped mechanical continuous-time systems: A model-based iterative learning approach. *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008), Nr. 8, S. 1896–1916

- [TDPC11] Toso, A.; DARNIS, B.; PRESCOTT, B.; CUYPER, J. de: Integration of Time Waveform Replication Process in a Multibody Software for Reverse Load Identification. *Volume 8: 11th International Power Transmission and Gearing Conference; 13th International Conference on Advanced Vehicle and Tire Technologies*. Washington, DC, USA, 2011, S. 903–909
- [TKO<sup>+</sup>19] TRAPHÖNER, P.; KOHLSTEDT, A.; OLMA, S.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Hardware-in-the-Loop-Simulation einer Fahrzeugachse mit aktiver Wankstabilisierung mithilfe eines hydraulischen Hexapoden. *VDI-Fachtagung Mechatronik*. 2019, S. 85–90
- [TOK<sup>+</sup>17] TRAPHÖNER, P.; OLMA, S.; KOHLSTEDT, A.; JÄKER, K.-P.; TRÄCHTLER, A.: Universelle Entwicklungs- und Prüfumgebung für mechatronische Fahrzeugachsen. *Wissenschafts- und Industrieforum Intelligente Technische Systeme (WInTeSys) 2017*. Paderborn, 2017, S. 157–168
- [Tro02] TROULIS, M.: *Übertragungsverhalten von Radaufhängungen für Personenkraftwagen im komfortrelevanten Frequenzbereich: Simulationsmodell, experimentelle Untersuchungen und Konzeption einer Prüfeinrichtung*. Dissertation. Universität Karlsruhe, 2002
- [TTU03] TRAUNBAUER, J.; THANNER, G.; UNGER, B.: Betriebsfestigkeitsprüfung aktiver Fahrwerksysteme. *30. Tagung des DVM-Arbeitskreises Betriebsfestigkeit "Mechatronik und Betriebsfestigkeit"*. Stuttgart, 2003, S. 109–118
- [Unt13] UNTERREINER, M.: *Modellbildung und Simulation von Fahrzeugmodellen unterschiedlicher Komplexität*. Dissertation. Universität Duisburg-Essen, 2013
- [VK93] VOLPE, R.; KHOSLA, P.: A theoretical and experimental investigation of explicit force control strategies for manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), Nr. 11, S. 1634–1650
- [VSS05] VAES, D.; SWEVERS, J.; SAS, P.: Experimental validation of different MIMO-feedback controller design methods. *Control Engineering Practice* 13 (2005), Nr. 11, S. 1439–1451
- [VSSS05] VAES, D.; SMOLDERS, K.; SWEVERS, J.; SAS, P.: Multivariable control for reference tracking on half car test rig. *44th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Sevilla, Spanien, 2005, S. 6498–6503
- [VV87] VUJIĆ, D.; VUKOBRAZOVIĆ, M.: Contribution to solving dynamic robot control in a machining process. *Mechanism and Machine Theory* 22 (1987), Nr. 5, S. 421–429
- [VZL10] VISIOLI, A.; ZILIANI, G.; LEGNANI, G.: Iterative-Learning Hybrid Force/Velocity Control for Contour Tracking. *IEEE Transactions on Robotics* 26 (2010), Nr. 2, S. 388–393
- [WA85] WEST, H.; ASADA, H.: A method for the design of hybrid position/Force controllers for manipulators constrained by contact with the environment. *1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. St. Louis, MO, USA, 1985, S. 251–259

- [WFC14] WANG, D.; FAN, R.; CHEN, W.: Simulation Research on Adaptive Control of a Six-degree-of-freedom Material-testing Machine. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 11 (2014), Nr. 2, S. 8
- [WGD09] WANG, Y.; GAO, F.; DOYLE, F. J.: Survey on iterative learning control, repetitive control, and run-to-run control. *Journal of Process Control* 19 (2009), Nr. 10, S. 1589–1600
- [Whi77] WHITNEY, D. E.: Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 99 (1977), Nr. 2, S. 91
- [WJB07] WALLMICHRATH, M.; JÖCKEL, M.; BRUDER, T.: Numerische Simulation einer kompletten Achsprüfung. *MP Materials Testing* 49 (2007), Nr. 9, S. 439–446
- [WM91] WEN, J. T.; MURPHY, S.: Stability analysis of position and force control for robot arms. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (1991), Nr. 3, S. 365–371
- [Woe16] WOERNLE, C.: *Mehrkörpersysteme*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016
- [Wöh58] WÖHLER, A.: Bericht über die Versuche, welche auf der Königl. Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen-Achsen während der Fahrt angestellt wurden. *Zeitschrift für Bauwesen* 8 (1858), Nr. 8, S. 641–652
- [WOL09] WARNECKE, U.; OSTERHAGE, K.; LIEVEN, W.: Optimierte Betriebsfestigkeitsauslegung durch Verwendung virtuell ermittelter Betriebslasten für Prüfstandsversuche. *MP Materials Testing* 51 (2009), Nr. 7-8, S. 493–497
- [WR11] WALLENTOWITZ, H.; REIF, K.: *Handbuch Kraftfahrzeugelektronik: Grundlagen, Komponenten, Systeme, Anwendungen*. 2., verb. und aktualisierte Aufl. ATZ-MTZ-Fachbuch. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011
- [WSB96] WIT, C. C. de; SICILIANO, B.; BASTIN, G.: *Theory of robot control*. Communications and Control Engineering. Berlin: Springer, 1996
- [WW08] WIDROW, B.; WALACH, E.: *Adaptive inverse control: A signal processing approach*. Reissue edition. IEEE Press series on power engineering. Piscataway, NJ, USA und Hoboken, NJ, USA: IEEE Press Wiley-Interscience, 2008
- [WWBD07] WEIGEL, N.; WEIHE, S.; BITSCH, G.; DRESSLER, K.: Einsatz von Simulationswerkzeugen zur Auslegung und Optimierung von Prüfkonzzepten. *MP Materials Testing* 49 (2007), Nr. 9, S. 455–461
- [WWJ<sup>+</sup>11] WEIGEL, N.; WEIHE, S.; JUNG, G.; MÖLLER, R.; BRUDER, T.: Einsatz virtueller Prüfstände zur Auslegung und Bewertung von Achserprobungen. *Materials Testing* 53 (2011), Nr. 7-8, S. 443–449
- [XZZ13] XU, G.; ZHOU, J. Y.; ZHOU, H.: A New Nonlinear Iterative Learning Controller for Road Simulator. *Applied Mechanics and Materials* 373-375 (2013), S. 1546–1550

- [YB10] YARMOHAMADI, H.; BERBYUK, V.: Computational model of conventional engine mounts for commercial vehicles: Validation and application. *Vehicle System Dynamics* 49 (2010), Nr. 5, S. 761–787
- [YC17] YU, C.-C.; CHIU, C.-C.: Ride responses of macpherson suspension systems. *MATEC Web of Conferences* 123 (2017)
- [YCW94] YAO, B.; CHAN, S. P.; WANG, D.: Unified formulation of variable structure control schemes for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 2, S. 371–376
- [YF11] YOU, S. S.; FRICKE, D.: Advances of Virtual Testing and Hybrid Simulation in Automotive Performance and Durability Evaluation. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing* 4 (2011), Nr. 1, S. 98–110
- [YG89] YOUSSEF-TOUMI, K.; GUTZ, D. A.: Impact and force control. *1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Scottsdale, AZ, USA, 1989, S. 410–416
- [Yos87] YOSHIKAWA, T.: Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators—Description of hand constraints and calculation of joint driving force. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 3 (1987), Nr. 5, S. 386–392
- [YS93] YOSHIKAWA, T.; SUDOU, A.: Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators-on-line estimation of unknown constraint. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9 (1993), Nr. 2, S. 220–226
- [YSD10] YIME, E.; SALTAREN, R.; DIAZ, J.: Robust adaptive control of the Stewart-Gough robot in the task space. *2010 American Control Conference (ACC)*. Baltimore, MD, USA, 2010, S. 5248–5253
- [YST88] YOSHIKAWA, T.; SUGIE, T.; TANAKA, M.: Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators-controller design and experiment. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 4 (1988), Nr. 6, S. 699–705
- [Zha89] ZHANG, H.: Kinematic stability of robot manipulators under force control. *1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Scottsdale, AZ, USA, 1989, S. 80–85
- [ZL92] ZENNER, H.; LIU, J.: Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschätzung nach dem Nennspannungskonzept. *Konstruktion* 44 (1992), Nr. 1, S. 9–17
- [ZP85] ZHANG, H.; PAUL, R. P.: Hybrid control of robot manipulators. *1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. St. Louis, MO, USA, 1985, S. 602–607

## Literaturverzeichnis der studentischen Arbeiten

Am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik der Universität Paderborn wurden im Kontext des Achsprüfstands zahlreiche studentische Arbeiten angefertigt. In der vorliegenden Dissertationsschrift wurden die nachfolgend aufgelisteten Arbeiten referenziert. Dabei sind die in [NK17], [FK17] und [FK18] erzielten Ergebnisse zum Teil in die vorliegende Dissertation eingeflossen. Insbesondere fasst Abschnitt 5.5 die wesentlichen Ergebnisse aus [FK18] zusammen, wobei die Bilder 5-27, 5-28, 5-31, A7-33, A7-34 und A7-35 in ähnlicher Form auch dort abgedruckt sind. Darüber hinaus sind die Bilder 5-30 und A7-32 aus Messergebnissen entstanden, die im Rahmen der genannten Masterarbeit gemeinsam durch den Studierenden und den Betreuer am Achsprüfstand aufgezeichnet wurden. Die Definition der Zielsetzung, die Bearbeitung sowie die Auswertung, Interpretation und Visualisierung von Ergebnissen dieser drei Arbeiten erfolgten unter wissenschaftlicher Anleitung des Autors dieser Dissertation. Die anderen studentischen Arbeiten wurden lediglich der Vollständigkeit halber in der Ausarbeitung referenziert. Inhalte anderer studentischer Arbeiten sind nicht in die vorliegende Dissertation eingeflossen.

- [FK17] FAST, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Systematische Auslegung der Kraftregelung für die parallelkinematische Anregungseinheit eines Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2017
- [FK18] FAST, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Entwicklung einer iterativ lernenden Regelung für einen Fahrzeugachsprüfstand mit parallelkinematischer Anregungseinheit*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2018
- [IK15] IKEMEYER, F.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Identifikation der Feder- und Dämpferkennlinien eines MacPherson-Federbeins*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2015
- [NK17] NOLTE, U.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Entwicklung eines mathematischen Modells für einen HiL-Achsprüfstand mit parallelkinematischer Anregungseinheit und MacPherson-Radaufhängung*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2017
- [NKO18] NOLTE, U.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer); OLMA, S. (Betreuer): *Entwicklung adaptiver und robuster Regelungen für die parallelkinematische Anregungseinheit eines Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2018
- [OF13] OLMA, S.; FLOTTMEIER, S. (Betreuerin): *Zustands- und Parameterschätzung bei Parallelkinematiken*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2013
- [RK16] RÜDDENKLAU, N.; KOHLSTEDT, A. (Betreuer): *Parameteridentifikation für die parallelkinematische Anregungseinheit eines hochdynamischen Hardware-in-the-Loop-Achsprüfstands*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, 2016



## Anhang

### Inhaltsverzeichnis

<b>A1 Grundlagen zu Mehrkörpersystemen</b>	<b>257</b>
A1.1 Darstellung von MKS-Topologien	257
A1.2 Notation	257
A1.3 Elementardrehmatrizen	258
A1.4 XYZ-Kardanwinkel	259
A1.5 Eigenschaften von Drehmatrizen	259
A1.6 Kreuzproduktmatrix	260
<b>A2 Aufstellen von Bewegungsgleichungen mithilfe des Prinzips von Jourdain</b>	<b>261</b>
<b>A3 Regelungsentwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung</b>	<b>265</b>
<b>A4 Herleitung der Gleichungen nach de Luca und Manes mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung</b>	<b>269</b>
<b>A5 Zweidimensionale Modelle</b>	<b>275</b>
A5.1 Relativgeschwindigkeit und Moment in der Ebene	275
A5.2 Manipulator	276
A5.3 Umgebung „Stab mit nicht vernachlässigbarer Dynamik“	278
A5.4 Radaufhängung	280
<b>A6 Lösung der Gleichung <math>a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c</math></b>	<b>287</b>
<b>A7 Zusätzliche Abbildungen zu Kapitel 5</b>	<b>289</b>
A7.1 Analytische Formulierung nach de Luca und Manes	289
A7.1.1 Regelung der Radaufhängung ohne Elastomerlager	289
A7.1.2 Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern	296
A7.2 Entwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung	308
A7.2.1 Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe	308
A7.3 Entwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen	311
A7.3.1 Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung	311
A7.3.2 Weitere Ansätze	314
A7.4 Kombination mit ILR für hohe Bandbreitenanforderung	317
<b>A8 Übertragungsverhalten der Servoventile</b>	<b>321</b>



## A1 Grundlagen zu Mehrkörpersystemen

### A1.1 Darstellung von MKS-Topologien

Bild A1-1 erläutert die für die Darstellung der Topologie von Mehrkörpersystemen verwandten Symbole. Die Symbole orientieren sich an [SHB18]. Im Gegensatz zur genannten Quelle wird hier jedes Gelenk durch ein einzelnes Symbol und nicht durch einwertige Gelenke mit virtuellen masselosen Zwischenkörpern dargestellt.

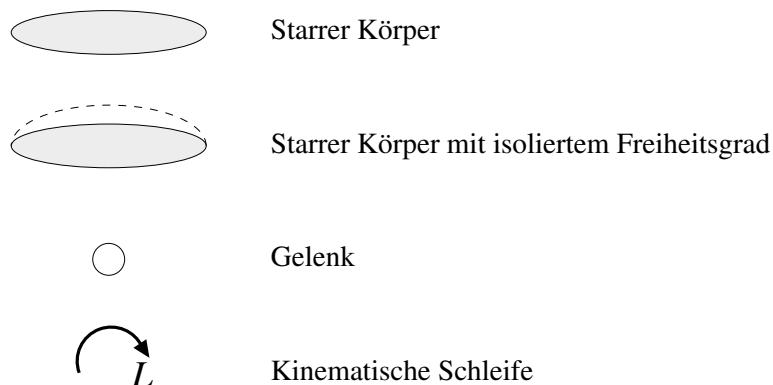


Bild A1-1: Symbole für die Darstellung von MKS-Topologien

### A1.2 Notation

Die verwendete Notation wird hier kurz anhand von Beispielen erklärt. Sie orientiert sich an der Notation, wie sie bspw. von Herrn Prof. Sextro in der Vorlesung „Mehrkörperfodynamik“ an der Universität Paderborn verwendet wird [Sex11]. Hier wird exemplarisch ein starrer Körper mit zwei Bezugssystemen, einem Inertialsystem  $I$  sowie einem körperfesten System  $K$  betrachtet, wobei der Punkt  $O$  der Ursprung des Inertialsystems  $I$  ist, vgl. Bild A1-2.

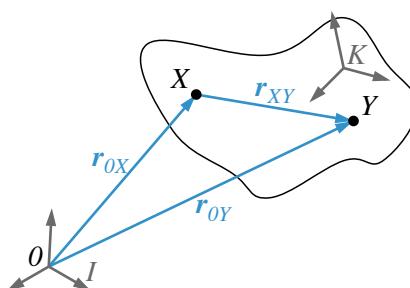


Bild A1-2: Starrer Körper im Raum mit Bezugssystemen und -punkten

${}_K\mathbf{r}_{XY}$  bezeichnet den Vektor von Punkt  $X$  zu Punkt  $Y$ , ausgedrückt im Bezugssystem  $K$ . Der Einheitsvektor in dieser Richtung trägt den Bezeichner  ${}_K\mathbf{e}_{XY}$ . Er berechnet sich nach der Formel

$${}_K\mathbf{e}_{XY} = \frac{{}_K\mathbf{r}_{XY}}{|{}_K\mathbf{r}_{XY}|}. \quad (\text{A1-1})$$

Die Transformation des Vektors  ${}_K\mathbf{r}_{XY}$  in das Bezugssystem  $I$  erfolgt über die Drehmatrix  ${}^{IK}\mathbf{A}$  nach

$${}_I\mathbf{r}_{XY} = {}^{IK}\mathbf{A} \cdot {}_K\mathbf{r}_{XY}. \quad (\text{A1-2})$$

Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes  $Y$  berechnet sich aus dem Geschwindigkeitsvektor des Punktes  $X$  anhand der Gleichung

$${}_I\mathbf{v}_{OY} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OY} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{OX} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{XY}. \quad (\text{A1-3})$$

Liegen die Punkte  $X$  und  $Y$  auf einem starren Körper, so gilt für deren Relativgeschwindigkeit

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{XY} = \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{r}_{XY}) = \frac{d}{dt}({}^{IK}\mathbf{A} \cdot {}_K\mathbf{r}_{XY}) = {}^{IK}\dot{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{{}_K\mathbf{r}_{XY}}_{{}^{IK}\mathbf{A}^T \cdot {}_I\mathbf{r}_{XY}} + {}^{IK}\mathbf{A} \cdot \underbrace{{}_K\dot{\mathbf{r}}_{XY}}_{=0, \text{ da starrer Körper}} \quad (\text{A1-4})$$

$$= \underbrace{{}^{IK}\dot{\mathbf{A}} \cdot {}^{IK}\mathbf{A}^T}_{{}^{IK}\tilde{\omega}, \text{ vgl. Anhang A1.6}} \cdot {}_I\mathbf{r}_{XY} = {}^{IK}\mathbf{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{XY} \quad (\text{A1-5})$$

mit der im Bezugssystem  $I$  ausgedrückten Relativwinkelgeschwindigkeit  ${}^{IK}\mathbf{\omega}$  der Systeme  $I$  und  $K$  (in diesem Beispiel handelt es sich dabei um die Absolutwinkelgeschwindigkeit des körperfesten Systems  $K$ ).

### A1.3 Elementardrehmatrizen

Die Drehmatrix um eine beliebige Achse  $\mathbf{e}$  ( $|\mathbf{e}| = 1$ ) mit dem Winkel  $\varphi$  lautet

$$\mathbf{A}_e(\varphi) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot (1 - \cos \varphi) + \mathbf{I} \cdot \cos \varphi + \tilde{\mathbf{e}} \cdot \sin \varphi, \quad (\text{A1-6})$$

vgl. [Woe16, S. 57].  $\tilde{\mathbf{e}}$  ist dabei die Kreuzproduktmatrix, siehe Anhang A1.6.

Aus (A1-6) folgen die Elementardrehmatrizen, d. h. die Drehmatrizen für eine alleinige Rotation um die  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Achse mit dem Winkel  $\varphi$

$$\mathbf{A}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (\text{A1-7})$$

$$\mathbf{A}_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (\text{A1-8})$$

$$\mathbf{A}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A1-9})$$

## A1.4 XYZ-Kardanwinkel

Mithilfe der Kardanwinkel kann eine allgemeine Drehung durch die Abfolge dreier Elementardrehungen ausgedrückt werden. Bei Wahl der Drehreihenfolge  $x-y-z$  bezüglich der mitgedrehten Achsen liegen die sog. XYZ-Kardanwinkel vor. [Woe16]

Die Kardanwinkel lassen sich bspw. dazu einsetzen, die Drehung des körperfesten Systems  $K$  eines Starrkörpers bezüglich eines Inertialkoordinatensystems  $I$  zu beschreiben. Für die Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors vom körperfesten System  $K$  in das Inertialsystem  $I$  dient die Rotationsmatrix

$${}^{IK}A = A_x(\alpha) \cdot A_y(\beta) \cdot A_z(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\beta s_\alpha \\ s_\alpha s_\gamma - c_\alpha c_\gamma s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A1-10})$$

mit den Elementardrehungen nach Anhang A1.3 und den Abkürzungen  $s_x = \sin x$ ,  $c_x = \cos x$ . Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind die Drehwinkel um die mitgedrehten Achsen  $x$ - $y$ - $z$ .

Die Berechnung der Kardanwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aus einer gegebenen Rotationsmatrix  ${}^{IK}A$  folgt aus ([Woe16], Formeln 3.167-3.169)

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - {}^{IK}A_{13}^2}, & \sin \beta &= {}^{IK}A_{13}, \\ \cos \alpha &= \frac{{}^{IK}A_{33}}{\cos \beta}, & \sin \alpha &= -\frac{{}^{IK}A_{23}}{\cos \beta}, \\ \cos \gamma &= \frac{{}^{IK}A_{11}}{\cos \beta}, & \sin \gamma &= -\frac{{}^{IK}A_{12}}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (\text{A1-11})$$

zu

$$\alpha = -\arctan \frac{{}^{IK}A_{23}}{{}^{IK}A_{33}}, \quad \beta = \arctan \frac{{}^{IK}A_{13}}{\sqrt{1 - {}^{IK}A_{13}^2}}, \quad \gamma = -\arctan \frac{{}^{IK}A_{12}}{{}^{IK}A_{11}}. \quad (\text{A1-12})$$

Aus (A1-11) ist auch die Singularität der XYZ-Kardanwinkel für  $|\beta| = \pi/2$  offensichtlich. Im Hauptteil dieser Ausarbeitung wird für die Berechnung der XYZ-Kardanwinkel die Kurzschreibweise  $\alpha_{XYZ}({}^{IK}A)$  verwendet. Die Funktion gibt die Kardanwinkel in der Reihenfolge  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zurück.

## A1.5 Eigenschaften von Drehmatrizen

Drehmatrizen sind orthogonal, d. h. es gilt

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I. \quad (\text{A1-13})$$

Daraus folgt, dass die Inverse einer Drehmatrix ihrer Transponierten entspricht,

$$A^{-1} = A^T. \quad (\text{A1-14})$$

Außerdem gilt

$$\det A = 1. \quad (\text{A1-15})$$

## A1.6 Kreuzproduktmatrix

Für den exemplarischen Vektor  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^T$  lautet die Kreuzproduktmatrix

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A1-16})$$

Die Kreuzproduktmatrix ist schiefsymmetrisch, d. h.  $\tilde{\mathbf{w}}^T = -\tilde{\mathbf{w}}$ .

Für jeden beliebigen Vektor  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  gilt

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A1-17})$$

## A2 Aufstellen von Bewegungsgleichungen mithilfe des Prinzips von Jourdain

Für das Aufstellen von Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme gibt es verschiedene Formalismen, zu denen bspw. die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art sowie das Prinzip von Jourdain zählen. Das Prinzip von Jourdain (auch: Prinzip der virtuellen Leistung) besagt, dass die virtuelle Leistung aller Reaktionskräfte eines Mechanismus verschwindet [Woe16]. Im Gegensatz zum Prinzip von d'Alembert (auch: Prinzip der virtuellen Arbeit) eignet es sich auch zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen, d. h. solchen Zwangsbedingungen, die auch von der Geschwindigkeit abhängen. Beide Prinzipien besagen, dass „die Reaktionskräfte keine Komponenten im Tangentialraum der Bindungsmannigfaltigkeit besitzen“ [Woe16, S. 147].

Um die Bewegungsgleichungen eines Mechanismus aufzustellen, ist ein Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$  der Minimal- bzw. generalisierten Koordinaten des betrachteten Systems aus  $n_K$  Einzelkörpern festzulegen. Dabei ist  $f$  die Zahl der FHG des gesamten Mechanismus, die sich mithilfe des Grübler-Kutzbach-Kriteriums

$$f = 6 \cdot n_K - n_Z - n_I \quad (\text{A2-1})$$

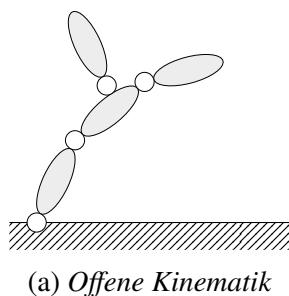
berechnen lässt [Ada14].  $n_I$  ist dabei die Anzahl der isolierten FHG,  $n_Z$  die Anzahl der Zwangsbedingungen, die sich mithilfe der Gleichung

$$n_Z = 6 \cdot n_G - \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi} \quad (\text{A2-2})$$

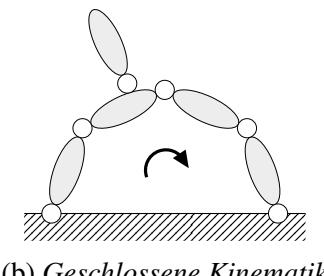
aus der Anzahl der Gelenke  $n_G$  und der Anzahl der Gelenk-FHG  $f_{Gi}$  bestimmen lässt. Die Anzahl der kinematischen Schleifen berechnet sich aus [SHB18]

$$n_L = n_G - n_K . \quad (\text{A2-3})$$

Für  $n_L = 0$  liegt eine offene, für  $n_L > 0$  eine geschlossene kinematische Struktur vor, vgl. Bild A2-1 und Anhang A1.1 für die Erläuterung der verwendeten Symbole.



(a) *Offene Kinematik*



(b) *Geschlossene Kinematik*

Bild A2-1: Vergleich von offener und geschlossener Kinematik

Gegenüber offenen kinematischen Strukturen ist das Aufstellen der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten für geschlossene kinematische Strukturen komplizierter, unter

Umständen gar nicht möglich. In diesem Fall muss der Mechanismus durch ein differential-algebraisches Gleichungssystem aus Bewegungsgleichungen und Schließ- bzw. Zwangsbedingungen beschrieben werden. Dies muss z. B. zur Simulation des Mechanismus mithilfe iterativer Verfahren unter höherem Rechenaufwand numerisch gelöst werden. [Ada14]

Die Bewegungsgleichungen können aus dem Prinzip von Jourdain hergeleitet werden und lauten für ein Mehrkörpersystem aus  $n_K$  Körpern

$$\sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T ({}_I \dot{\mathbf{p}}_i - {}_I \mathbf{F}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^T \left( \dot{\mathbf{L}}_i^{(C_i)} - \mathbf{M}_i^{e(C_i)} \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{A2-4})$$

Darin bezeichnen  ${}_I \mathbf{J}_{Ti} \in \mathbb{R}^{3 \times f}$  und  $\mathbf{J}_{Ri} \in \mathbb{R}^{3 \times f}$  die Jacobimatrizen der Translation bzw. der Rotation,  ${}_I \dot{\mathbf{p}}_i \in \mathbb{R}^3$  und  $\dot{\mathbf{L}}_i^{(C_i)} \in \mathbb{R}^3$  die zeitliche Änderung des Impulses bzw. des Drehimpulses sowie  ${}_I \mathbf{F}_i^e \in \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{M}_i^{e(C_i)} \in \mathbb{R}^3$  die eingeprägten Kräfte und Momente jedes Körpers  $i$ . Alle im ersten Summanden befindlichen translatorischen Größen sind stets bezüglich des Inertialsystems anzugeben (Index  $I$ ). Die im zweiten Summanden befindlichen rotatorischen Größen hingegen können bspw. auch bezüglich eines körperfesten Systems eingesetzt werden. Aus diesem Grund wurde bei allen rotatorischen Größen auch im Folgenden auf Indizes verzichtet. Durch Einsetzen der bekannten Zusammenhänge für die zeitliche Änderung des Impulses und des Drehimpulses

$${}_I \dot{\mathbf{p}}_i = m_i {}_I \ddot{\mathbf{r}}_{Ci}, \quad \dot{\mathbf{L}}_i^{(C_i)} = \mathbf{I}_i^{(C_i)} {}^{IK} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^{IK} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i^{(C_i)} {}^{IK} \boldsymbol{\omega}_i \quad (\text{A2-5})$$

in (A2-4) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T (m_i {}_I \ddot{\mathbf{r}}_{Ci} - {}_I \mathbf{F}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^T \left( \left( \mathbf{I}_i^{(C_i)} {}^{IK} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^{IK} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i^{(C_i)} {}^{IK} \boldsymbol{\omega}_i \right) - \mathbf{M}_i^{e(C_i)} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A2-6})$$

mit der Masse  $m_i$ , dem Schwerpunktvektor  ${}_I \mathbf{r}_{Ci}$ , dem Trägheitstensor

$$\mathbf{I}_i^{(C_i)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-7})$$

sowie dem Winkelgeschwindigkeitsvektor  ${}^{IK} \boldsymbol{\omega}_i$ . Der Tilde-Operator bedeutet hier, dass es sich um die Kreuzproduktmatrix des Vektors handelt (Definition siehe Anhang A1.6).

An dieser Stelle wird angenommen, dass der Schwerpunktvektor nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann gilt für den Zusammenhang des Vektors der translatorischen Geschwindigkeiten  ${}_I \dot{\mathbf{r}}_{Ci}$  mit der zeitlichen Ableitung des Vektors der Minimalkoordinaten

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{Ci} = {}_I \mathbf{J}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{A2-8})$$

und folglich

$${}_I \ddot{\mathbf{r}}_{Ci} = {}_I \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} ({}_I \mathbf{J}_{Ti}) \cdot \dot{\mathbf{y}}. \quad (\text{A2-9})$$

Für die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung gilt analog unter Annahme einer nicht explizit zeitabhängigen Orientierung des Körpers  $i$

$${}^{IK} \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} \quad (\text{A2-10})$$

und

$${}^{IK}\dot{\omega}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{Ri}) \cdot \dot{\mathbf{y}} . \quad (\text{A2-11})$$

Das Einsetzen dieser Zusammenhänge in (A2-6) führt zu

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \left( m_i \left( {}_I \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} ({}_I \mathbf{J}_{Ti}) \cdot \dot{\mathbf{y}} \right) - {}_I \mathbf{F}_i^e \right) \\ & + {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T \left( \mathbf{I}_i^{(C_i)} \left( \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{Ri}) \cdot \dot{\mathbf{y}} \right) + {}^{IK}\tilde{\omega}_i \mathbf{I}_i^{(C_i)} {}^{IK}\omega_i - \mathbf{M}_i^{e(C_i)} \right) = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (\text{A2-12})$$

Diese Gleichung kann durch Einführung der Jacobimatrix

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{J}_{Ti} \\ {}_I \mathbf{J}_{Ri} \end{bmatrix} , \quad (\text{A2-13})$$

und der symmetrischen  $f \times f$  Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n_K} \mathbf{J}_i^T \cdot \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{J}_i \quad (\text{A2-14})$$

mit

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i^{(C_i)} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-15})$$

in die Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \cdot \dot{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot {}_I \mathbf{F}_i^e + {}_I \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{M}_i^{e(C_i)} \quad (\text{A2-16})$$

überführt werden. Dabei ist  $\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \cdot \dot{\mathbf{y}}$  der Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräfte. Für die Wahl der Matrix

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n_K} \mathbf{C}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (\text{A2-17})$$

bestehen durch ihre Abhängigkeit von  $\dot{\mathbf{y}}$  und die Multiplikation mit  $\dot{\mathbf{y}}$  in (A2-16) Freiheiten. Werden die Elemente der Matrizen  $\mathbf{C}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$  der einzelnen Körper als

$$c_{i,mn} = \sum_{k=1}^f c_{i,mnk} \cdot \dot{y}_k \quad (\text{A2-18})$$

mit den sog. Christoffelsymbolen der ersten Art

$$c_{i,mnk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{i,mn}}{\partial y_k} + \frac{\partial M_{i,mk}}{\partial y_n} - \frac{\partial M_{i,nk}}{\partial y_m} \right) , \quad (\text{A2-19})$$

gewählt, so ist die Matrix

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - 2 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (\text{A2-20})$$

schiefsymmetrisch und für jeden beliebigen Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^f$  gilt [SSVO10]

$$\mathbf{w}^T \cdot (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - 2 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})) \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (\text{A2-21})$$

Die Eigenschaft (A2-20) wird als *Passivität* bezeichnet und ist bspw. für den Stabilitätsnachweis von Roboterregelungen sehr hilfreich [MLS94, S.172]. Zusätzlich zu den bisher genannten Größen kann ein Vektor der verallgemeinerten Gewichtskräfte

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i \cdot g \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^{n_K} \mathbf{J}_i^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i \cdot g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-22})$$

eingeführt werden, mit dem

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n_K} {}_I \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot {}_I \mathbf{F}_i^{e \setminus g} + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{M}_i^{e \setminus g(C_i)} \quad (\text{A2-23})$$

folgt. Das negative Vorzeichen vor den Summanden in (A2-22) folgt aus der Tatsache, dass der Term  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  in (A2-23) verglichen mit (A2-16) auf der anderen Seite der Gleichung hinzugefügt wurde.

### A3 Regelungsentwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung

Dieser Abschnitt beschreibt die Grundzüge des Regelungsentwurfsverfahrens der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung (kurz: exakte Linearisierung) für eingangsaffine, nichtlineare Systeme. Der Regelungsentwurf erfolgt hierbei nicht auf Grundlage einer linearen Näherung der Regelstrecke. Stattdessen wird (aufbauend auf dem nichtlinearen Streckenmodell) eine ebenfalls nichtlineare Berechnungsvorschrift für den Systemeingang hergeleitet, die wiederum neue Eingangsgrößen besitzt. Diese neuen Eingangsgrößen weisen lineares, entkoppeltes Verhalten zu den Ausgangsgrößen des nichtlinearen Systems auf. Auf Basis dieser neuen Systemeingänge kann daher ein einfacher, linearer Regelungsentwurf für das nichtlineare System erfolgen. Das Entwurfsverfahren stellt eine Verallgemeinerung des für lineare Systeme bekannten Entkopplungsreglers nach Falb und Wolovich [FW67] dar. Die folgenden, grundlegenden Ausführungen basieren auf den Grundlagenwerken von Isidori [Isi95] und Adamy [Ada18].

Betrachtet wird ein nichtlineares, eingangsaffines MIMO-System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}). \quad (\text{A3-1})$$

Darin sind  $\mathbf{x}$  die Zustände,  $\mathbf{u}$  die Eingänge und  $\mathbf{y}$  die Ausgänge des Systems. Es liegen  $n = \dim \mathbf{x}$  Zustandsgrößen und jeweils  $m$  Ein- und Ausgangsgrößen vor, d. h.  $m = \dim \mathbf{u} = \dim \mathbf{y}$ .

Zum Zweck der Herleitung ist die Einführung der sog. Lie-Derivierten

$$L_f h = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) = \text{grad}^T h(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \quad (\text{A3-2})$$

von Nutzen. In den genannten Lehrbüchern wird sie stets nur für eine Vektorfunktion  $f(\mathbf{x})$  verwendet. Es lässt sich aber aus (A3-2) erkennen, dass sie ohne Weiteres ebenso für Matrixfunktionen  $f(\mathbf{x})$  anwendbar ist. Im Folgenden können hierdurch sämtliche Zusammenhänge besonders kompakt aufgeschrieben werden.

Sämtliche Systemausgänge  $\mathbf{y}$  werden so oft zeitlich differenziert, bis in jeder abgeleiteten Ausgangsgröße  $y_i$  mindestens eine Eingangsgröße aus  $\mathbf{u}$  auftritt. Im Folgenden wird angenommen, dass mindestens drei Differentiationen erforderlich sind, sodass die allgemeine Formel erkennbar wird. Durch zeitliche Differentiation eines Ausgangs  $y_i$  folgt

$$y_i = c_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A3-3})$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) = L_a c_i(\mathbf{x}) + \underbrace{L_B c_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{=0^T} \quad (\text{A3-4})$$

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial L_a c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dots = L_a^2 c_i(\mathbf{x}) + \underbrace{L_B L_a c_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{=0^T} \quad (\text{A3-5})$$

$$\vdots \\ y_i^{(\delta_i)} = \frac{\partial L_a^{\delta_i-1} c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \dot{\mathbf{x}} = L_a^{\delta_i} c_i(\mathbf{x}) + \underbrace{L_B L_a^{\delta_i-1} c_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{\neq 0^T} \quad (\text{A3-6})$$

Dabei ist  $y_i^{(\delta_i)}$  die  $\delta_i$ -te Ableitung des Ausgangs  $y_i$ ,  $\delta_i$  ist dessen Differenzordnung bzw. relativer Grad. Er entspricht der niedrigsten Ableitung der Ausgangsgröße  $y_i$ , auf die irgendein Eingang direkt wirkt. Insgesamt ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1^{(\delta_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\delta_m)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_a^{\delta_1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_a^{\delta_m} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_B L_a^{\delta_1-1} c_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_B L_a^{\delta_m-1} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A3-7})$$

Die Berechnungsvorschrift für den Eingang des nichtlinearen Systems  $\mathbf{u}$  folgt durch Umstellen dieser Gleichung nach  $\mathbf{u}$  und Ersetzen der Größe  $\hat{\mathbf{y}}$  durch die neue Eingangsgröße  $\mathbf{v}$  zu

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x})) . \quad (\text{A3-8})$$

Voraussetzung hierfür ist, dass  $\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{x})$  regulär und damit invertierbar ist. Ist  $\ddot{\mathbf{D}}(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x}$  regulär, so ist der relative Grad wohldefiniert. Andernfalls ist die exakte Linearisierung des gegebenen Systems nicht für alle Zustände möglich. Für die neue Eingangsgröße  $\mathbf{v}$  gilt

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}} , \quad (\text{A3-9})$$

d. h. die neue Eingangsgröße  $v_i$  verhält sich linear zu der Ausgangsgröße  $y_i$  des nichtlinearen Systems. Außerdem wirkt jede Eingangsgröße  $v_i$  nur auf die Ausgangsgröße  $y_i$ ; das Ein-/Ausgangsverhalten ist entkoppelt. Für ein reales System ist dies natürlich durch Mess- und Beobachtungsfehler, Modellvereinfachungen und -fehler sowie Störgrößen nur näherungsweise gegeben. Aufbauend auf  $\mathbf{v}$  kann nun ein linearer Regelungsentwurf für das eigentlich nichtlineare System erfolgen. Dabei legt  $\delta_i$  die Ordnung der linearen Differentialgleichung des Regelkreises bezüglich des Ausgangs  $y_i$  fest. Je niedriger  $\delta_i$  ist, desto direkter wirkt die Eingangsgröße  $\mathbf{u}$  auf die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}$  [Ada14, S. 324]. Ein möglicher Regelungsansatz ist

$$v_i = y_{i,r}^{(\delta_i)} + k_{i,\delta_i-1} \left( y_{i,r}^{(\delta_i-1)} - y_i^{(\delta_i-1)} \right) + \dots + k_{i,1} \left( \dot{y}_{i,r} - \dot{y}_i \right) + k_{i,0} \left( y_{i,r} - y_i \right) , \quad (\text{A3-10})$$

wobei über die Reglerparameter  $k_{i,\delta_i-1}$  bis  $k_{i,0}$  (innerhalb der Möglichkeiten der Aktorik) eine beliebige Dynamik vorgegeben werden kann.

Die relativen Grade  $\delta_i$  können gesammelt als vektorieller relativer Grad

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_m] \quad (\text{A3-11})$$

angegeben werden. Entspricht der sog. totale relative Grad

$$\delta = \sum_{i=1}^m \delta_i \leq n \quad (\text{A3-12})$$

des nichtlinearen Systems (A3-1) der Systemordnung  $n$ , so ist das System exakt zustandslinearisierbar.

Für  $\delta < n$  liegt hingegen sowohl eine (beobachtbare und lineare) externe Dynamik der Ordnung  $\delta$  sowie eine (nicht beobachtbare und im Allgemeinen nichtlineare) interne Dynamik der Ordnung  $n - \delta$  vor. Stimmt das Streckenmodell im Regler, das für die Berechnung der Linearisierung (A3-8) verwendet wird, ideal mit der tatsächlichen Strecke überein, so ist die externe Dynamik von der internen Dynamik unabhängig. Die Zustände der externen Dynamik stellen die Eingangsgrößen der internen Dynamik dar vgl. [Ada18, S. 323]. Die interne Dynamik besitzt (bei idealem Streckenmodell im Regler) zwar keinerlei Bedeutung für das Ein-/Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises, muss aber zur Stabilitätsbeurteilung des geregelten Systems ebenfalls auf Stabilität geprüft werden. Hinsichtlich der Untersuchung der Stabilität der internen Dynamik bzw. deren Ruhelagen siehe z. B. [Isi95; Ada18].

Die Güte des zur Regelung verwendeten Streckenmodells ist bei diesem Entwurfsverfahren von großer Bedeutung. Bildet das Streckenmodell im Regler die reale Strecke nicht ideal ab, so hat die interne Dynamik Auswirkungen auf das Ein-/Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Bei linearen Systemen „können nun hinzukommende schwach gedämpfte oder langsame Eigenbewegungen das eigentlich geplante Übertragungsverhalten empfindlich stören. Im nichtlinearen Fall ... [kommt] erschwerend hinzu, dass bei Abweichungen des Modells von der realen Regelstrecke das Regelkreisverhalten nicht mehr linear ist.“ [Ada18, S. 344].



## A4 Herleitung der Gleichungen nach de Luca und Manes mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung

In diesem Teil des Anhangs wird gezeigt, dass die von de Luca und Manes [LM94] angegebenen Gleichungen für die Berechnung des Systemeingangs  $\mathbf{F}_q$  nach (2-92) bzw. (2-94) mit denjenigen übereinstimmen, die bei Durchführung der exakten Linearisierung nach Anhang A3 erhalten werden.

Durch Linksmultiplikation von (2-89) mit  $\mathbf{S}_{yd}^T$  bzw.  $\mathbf{S}_{yk}^T$  folgen die insgesamt  $n_d + n_k$  Gleichungen

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{M}_u) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_k \\ & + \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yk} \cdot \dot{\mathbf{y}}_k + \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yd} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S}_{yd}^T (\mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{g}_v) + \mathbf{n}_u = \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q \end{aligned} \quad (\text{A4-1})$$

und

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_k \\ & + \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yk} \cdot \dot{\mathbf{y}}_k + \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \dot{\mathbf{S}}_{yd} \cdot \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{S}_{yk}^T (\mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{g}_v) = \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q . \end{aligned} \quad (\text{A4-2})$$

Sie stellen die Bewegungsgleichungen reduzierter Ordnung des Gesamtsystems dar, die sich auch in der Form

$$\overline{\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_d \\ \ddot{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{yd}^T \\ \mathbf{S}_{yk}^T \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{n}_d) \quad (\text{A4-3})$$

mit

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{M}_u & \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \\ \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} & \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_A & \overline{\mathbf{M}}_B \\ \overline{\mathbf{M}}_C & \overline{\mathbf{M}}_D \end{bmatrix} \quad (\text{A4-4})$$

notieren lassen. Der Sonderfall einer Kontakt situation ohne kinematische Koordinaten  $\mathbf{y}_k$  liegt bei dem in dieser Arbeit betrachteten System vor, vgl. (4-229).

Die  $6 - n_d - n_k$  algebraischen Gleichungen für die generalisierten reaktiven Kontaktkräfte  $\lambda_r$  resultieren aus der Linksmultiplikation von (2-89) mit  $\mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1}$ . In der erhaltenen Gleichung muss  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  gemäß der ersten Zeile von (A4-3) unter Verwendung der inversen Massenmatrix

$$\overline{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} & -\overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \\ -\overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_C \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} & \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_C \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A4-5})$$

$$\overline{\mathbf{M}}_E = \overline{\mathbf{M}}_A - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_C, \quad (\text{A4-6})$$

siehe z. B. [PP12, S. 46] für die verwendete Berechnungsformel, ersetzt werden. Es folgt

$$\lambda_r = \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \left( \mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{n}_d \right), \quad (\text{A4-7})$$

$$\mathbf{M}_r = \left( \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{S}_{\lambda r} \right)^{-1}, \quad \mathbf{X} = \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right). \quad (\text{A4-8})$$

Die Sonderfälle von (A4-3) und (A4-7) für den Fall einer rein kinematischen Zwangsbedingung zur Umgebung sind durch (2-50) und (2-51) gegeben.

Für die generalisierten aktiven Kontaktkräfte  $\lambda_a$  ergeben sich die  $n_d$  algebraischen Bestimmungsgleichungen durch Umstellen des Umgebungsmodells (2-83). Auch hierbei ist wieder  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  gemäß der ersten Zeile von (A4-3) zu ersetzen. Es resultiert

$$\lambda_a = \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \left( \mathbf{M}_u \mathbf{X} \left( \mathbf{J}_g^{-T} \mathbf{F}_q - \mathbf{n}_d \right) + \mathbf{n}_u \right). \quad (\text{A4-9})$$

Für die Bestimmung der Linearisierung (2-94), die auf eine **Regelung der dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$**  abzielt, muss die Ausgangsgröße

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_d^T & \lambda_r^T & \mathbf{y}_k^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{A4-10})$$

angesetzt werden. Während die dynamischen und kinematischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d, \mathbf{y}_k$  jeweils zwei Mal zeitlich differenziert werden müssen, bis die Eingangsgröße  $\mathbf{F}_q$  in der erhaltenen Gleichung enthalten ist, vgl. auch (A4-3), ist  $\mathbf{F}_q$  bereits ohne zeitliche Differentiation in  $\lambda_r$  enthalten. Es liegt ein Durchgriff für diese Ausgangsgröße vor. Insgesamt ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} = \underbrace{-\mathbf{Y} \mathbf{n}_d + \mathbf{Y} \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q}_{\ddot{\mathbf{c}}} + \underbrace{\mathbf{\dot{D}} \cdot \mathbf{u}}_{\ddot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u}} \quad (\text{A4-11})$$

mit der Hilfsgröße

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \\ \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \left( \mathbf{S}_{yk}^T - \overline{\mathbf{M}}_C \mathbf{X} \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-12})$$

Durch Auflösen von (A4-11) nach  $\mathbf{F}_q$  und Ersetzen von  $\ddot{\mathbf{y}}$  durch die neue Eingangsgröße

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d^T & \mathbf{u}_r^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{A4-13})$$

folgt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \left( \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{n}_d \right), \quad (\text{A4-14})$$

falls  $\mathbf{Y}$  regulär ist. (2-94) stimmt hiermit überein, wenn

$$\mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{Q}_d \quad (\text{A4-15})$$

gilt. Die Invertierung von  $\mathbf{Y}$  für diese Überprüfung kann vermieden werden, indem anstelle dessen die äquivalente Bedingung

$$\underbrace{\mathbf{Y} \mathbf{Q}_d}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{I}} \quad (\text{A4-16})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A4-17})$$

geprüft wird. Die aus der Matrixmultiplikation  $\mathbf{Y} \mathbf{Q}_d$  folgende  $3 \times 3$ -Blockmatrix  $\mathbf{Z}$  kann blockweise geprüft werden, wobei die Elemente die in (A4-17) genannten Bedingungen erfüllen müssen: die Diagonalelemente müssen  $\mathbf{I}$ , die Nichtdiagonalelemente  $\mathbf{0}$  betragen.

Wesentliche Grundlage der nachfolgenden Herleitungen sind die Beziehungen nach (2-81). Da jedes Element aus  $\mathbf{Z}$  Produkte von  $\mathbf{X}$  mit den einzelnen Elementen aus  $\mathbf{Q}_d$  enthält, ist es zweckmäßig, vorab diese Produkte einzeln zu betrachten. Die Elemente der Matrix

$$\mathbf{Q}_d = [\mathbf{Q}_{d1} \quad \mathbf{Q}_{d2} \quad \mathbf{Q}_{d3}] \quad (\text{A4-18})$$

lauten

$$\mathbf{Q}_{d1} = \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u, \quad \mathbf{Q}_{d2} = \mathbf{S}_{\lambda r}, \quad \mathbf{Q}_{d3} = \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk}, \quad (\text{A4-19})$$

siehe (2-90). Bei Linksmultiplikation dieser Elemente mit  $\mathbf{X}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{Q}_{d1} &= \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right) \left( \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \right) \\ &= \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{M}_u - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \right) \\ &= \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \overline{\mathbf{M}}_A - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_C \right) = \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \overline{\mathbf{M}}_E = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (\text{A4-20})$$

$$\mathbf{X} \mathbf{Q}_{d2} = \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right) \mathbf{S}_{\lambda r} = \mathbf{0}, \quad (\text{A4-21})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{Q}_{d3} &= \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right) \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \\ &= \overline{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \overline{\mathbf{M}}_B - \overline{\mathbf{M}}_B \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_D \right) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A4-22})$$

Für die Elemente der Blockmatrix  $\mathbf{Z}$  folgt damit

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{d1} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{d2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_{13} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{d3} = \mathbf{0}, \quad (\text{A4-23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{21} &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \mathbf{Q}_{d1} \\ &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{Q}_{d1} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \right) = \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{S}_{yd} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A4-24})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{22} &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \mathbf{Q}_{d2} \\ &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{Q}_{d2} = \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{S}_{\lambda r} = \mathbf{M}_r \mathbf{M}_r^{-1} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (\text{A4-25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{23} &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \mathbf{Q}_{d3} \\ &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{Q}_{d3} = \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A4-26})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{31} &= \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \left( \mathbf{S}_{yk}^T - \overline{\mathbf{M}}_C \mathbf{X} \right) \mathbf{Q}_{d1} \\ &= \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \left( \mathbf{S}_{yk}^T \left( \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} + \mathbf{S}_{\lambda a} \left( \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right)^{-1} \mathbf{M}_u \right) - \overline{\mathbf{M}}_C \right) \\ &= \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \left( \overline{\mathbf{M}}_C - \overline{\mathbf{M}}_C \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A4-27})$$

$$\mathbf{Z}_{32} = \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} (\mathbf{S}_{yk}^T - \overline{\mathbf{M}}_C X) \mathbf{Q}_{d2} = \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{Q}_{d2} = \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{S}_{\lambda r} = \mathbf{0}, \quad (\text{A4-28})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{33} &= \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} (\mathbf{S}_{yk}^T - \overline{\mathbf{M}}_C X) \mathbf{Q}_{d3} = \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{Q}_{d3} = \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yk} \\ &= \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} \overline{\mathbf{M}}_D = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (\text{A4-29})$$

Folglich gilt  $\mathbf{Z} = \mathbf{I}$ .

Die Linearisierung (2-92), auf deren Basis eine **Regelung der generalisierten aktiven Kräfte  $\lambda_a$**  entworfen werden kann, folgt bei Verwendung des Ausgangsvektors

$$\mathbf{y} = [\lambda_a^T \quad \lambda_r^T \quad \mathbf{y}_k^T]^T. \quad (\text{A4-30})$$

Die Ausgangsgröße  $\lambda_a$  enthält einen Durchgriff, sodass keine zeitliche Differentiation für die Regelungssynthese erforderlich ist. Für  $\lambda_r$  und  $\mathbf{y}_k$  gelten die gleichen Aussagen wie zuvor. In diesem Fall ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \dot{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} = \underbrace{-\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{n}_d + (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{c}}} + \underbrace{\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{J}_g^{-T} \cdot \mathbf{F}_q}_{\ddot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u}} \quad (\text{A4-31})$$

mit

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u X \\ \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u X \right) \\ \overline{\mathbf{M}}_D^{-1} (\mathbf{S}_{yk}^T - \overline{\mathbf{M}}_C X) \end{bmatrix}. \quad (\text{A4-32})$$

Wird (A4-31) unter Einführung der neuen Eingangsgröße

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u}_a^T \quad \mathbf{u}_r^T \quad \mathbf{u}_k^T]^T \quad (\text{A4-33})$$

nach  $\mathbf{F}_q$  aufgelöst, so folgt

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{J}_g^T \left( \bar{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{n}_d - \bar{\mathbf{Y}}^{-1} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A4-34})$$

unter der Bedingung, dass die Inverse von  $\bar{\mathbf{Y}}$  existiert. Die in Stand von Technik und Forschung gegebene Gleichung für die Aktorkräfte (2-92) entspricht (A4-34), falls die beiden Bedingungen

$$\bar{\mathbf{Y}}^{-1} = \mathbf{Q}_a, \quad \mathbf{n}_d - \bar{\mathbf{Y}}^{-1} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{n}_a \quad (\text{A4-35})$$

erfüllt sind. Auch hier wird die Invertierung von  $\bar{\mathbf{Y}}$  durch Überprüfung von

$$\underbrace{\bar{\mathbf{Y}} \mathbf{Q}_a}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{I}} \quad (\text{A4-36})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{11} & \bar{\mathbf{Z}}_{12} & \bar{\mathbf{Z}}_{13} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{21} & \bar{\mathbf{Z}}_{22} & \bar{\mathbf{Z}}_{23} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{31} & \bar{\mathbf{Z}}_{32} & \bar{\mathbf{Z}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A4-37})$$

umgangen und die Matrix  $\bar{\mathbf{Z}}$  blockweise auf Übereinstimmung mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  überprüft. Zwei der drei Elemente der Matrix

$$\mathbf{Q}_a = [\mathbf{Q}_{a1} \ \mathbf{Q}_{a2} \ \mathbf{Q}_{a3}] = [(\mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T + \mathbf{I}) \mathbf{S}_{\lambda a} \ \mathbf{Q}_{d2} \ \mathbf{Q}_{d3}] \quad (\text{A4-38})$$

stimmen mit denen von  $\mathbf{Q}_d$  überein, vgl. (2-87) und (2-90), sodass an dieser Stelle vor Berechnung der Elemente von  $\bar{\mathbf{Z}}$  die Berechnung des Produkts

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{Q}_{a1} &= \bar{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \mathbf{S}_{yd}^T - \bar{\mathbf{M}}_B \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right) \left( \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T + \mathbf{I} \right) \mathbf{S}_{\lambda a} \\ &= \bar{\mathbf{M}}_E^{-1} \left( \left( \bar{\mathbf{M}}_A - \bar{\mathbf{M}}_B \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} \bar{\mathbf{M}}_C \right) \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T - \bar{\mathbf{M}}_B \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} \mathbf{S}_{yk}^T \right) \mathbf{S}_{\lambda a} \\ &= \bar{\mathbf{M}}_E^{-1} \bar{\mathbf{M}}_E \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} = \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \end{aligned} \quad (\text{A4-39})$$

genügt. Da auch der zweite und dritte Eintrag der Matrix  $\bar{\mathbf{Y}}$  mit denjenigen von  $\mathbf{Y}$  übereinstimmt, gilt

$$\bar{\mathbf{Z}}_{22} = \mathbf{Z}_{22} = \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{23} = \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{32} = \mathbf{Z}_{32} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{33} = \mathbf{Z}_{33} = \mathbf{I}. \quad (\text{A4-40})$$

Für die verbliebenen Elemente der Blockmatrix  $\bar{\mathbf{Z}}$  ergibt sich

$$\bar{\mathbf{Z}}_{11} = (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \mathbf{Q}_{a1} = (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} = \mathbf{I}, \quad (\text{A4-41})$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_{12} = (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \mathbf{Q}_{a2} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{13} = (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \mathbf{Q}_{a3} = \mathbf{0}, \quad (\text{A4-42})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{21} &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{X} \right) \mathbf{Q}_{a1} \\ &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( \mathbf{Q}_{a1} - \mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{M}_u \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right) \\ &= \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{\lambda r}^T \mathbf{M}_v^{-1} \left( (\mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T + \mathbf{I}) \mathbf{S}_{\lambda a} - \mathbf{S}_{\lambda a} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A4-43})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{31} &= \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} (\mathbf{S}_{yk}^T - \bar{\mathbf{M}}_C \mathbf{X}) \mathbf{Q}_{a1} \\ &= \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} \left( \mathbf{S}_{yk}^T (\mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T + \mathbf{I}) \mathbf{S}_{\lambda a} - \bar{\mathbf{M}}_C \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} \right) \\ &= \bar{\mathbf{M}}_D^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_C - \bar{\mathbf{M}}_C) \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A4-44})$$

Damit ist gezeigt, dass  $\mathbf{Q}_a$  die Inverse von  $\bar{\mathbf{Y}}$  ist, und die erste Bedingung ist erfüllt. Mit diesem Ergebnis kann die Erfüllung der zweiten Bedingung nach (A4-35) nun in der einfacheren Form

$$\mathbf{n}_d - \mathbf{Q}_a (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{n}_a = \mathbf{0} \quad (\text{A4-45})$$

überprüft werden. Durch Einsetzen von  $\mathbf{n}_d$  nach (2-91) und  $\mathbf{n}_a$  nach (2-88) folgt

$$\mathbf{S}_{\lambda a} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{n}_u - \mathbf{Q}_{a1} (\mathbf{S}_{yd}^T \mathbf{S}_{\lambda a})^{-1} \mathbf{n}_u + \mathbf{M}_v \mathbf{S}_{yd} \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{n}_u = \mathbf{0}. \quad (\text{A4-46})$$

Nach Einsetzen von  $\mathbf{Q}_{a1}$  nach (A4-38) folgt  $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , sodass auch diese Bedingung erfüllt ist.

Folglich resultieren bei Anwendung des in Abschnitt A3 erläuterten Verfahrens der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung auf die vorliegende Systembeschreibung ebenfalls die von de Luca und Manes [LM94] angegebenen Berechnungsformeln für die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$ . Hierfür ist das Aufstellen der Bewegungsgleichungen reduzierter Ordnung nach (A4-3) sowie der Ausgangsgleichungen (A4-11) bzw. (A4-31) aus den Bewegungsgleichungen von Manipulator (2-17) und Umgebung (2-78) unter Einbeziehung der Zusammenhänge (2-79) und (2-80) erforderlich. Sowohl (2-79), (2-80) als auch die Zusammenhänge der Matrizen  $\mathbf{S}_{yd}$ ,  $\mathbf{S}_{yk}$ ,  $\mathbf{S}_{\lambda r}$  und  $\mathbf{S}_{\lambda a}$  gemäß (2-81) sind wesentliche Grundlage der Herleitung des Reglers.

Die Herleitung auf dem von de Luca und Manes [LM94] dokumentierten Weg führt wesentlicher schneller zu den Gleichungen für die Aktorkräfte  $\mathbf{F}_q$ . Dies liegt insb. daran, dass die Invertierung von  $\mathbf{Y}$  bzw.  $\bar{\mathbf{Y}}$  entfällt. Festzuhalten ist auch, dass für die Regelung der aktiven Kräfte  $\lambda_a$  mit dem linearen Eingang  $\mathbf{u}_a$ , d. h. die Aktorkräfte nach (2-92), eine interne Dynamik der Ordnung  $2n_d$  vorliegt, deren Stabilität in [LM94] nicht untersucht wurde. Im zweidimensionalen Beispielsystem aus Abschnitt 3.2 liegt dementsprechend bei Regelung von  $\lambda_a = F$ , eine interne Dynamik zweiter Ordnung vor, die in der Drehbewegung des Stabes um den Punkt A besteht. Für den linearen Eingang  $\mathbf{u}_d$  bzw. die Regelung der dynamischen Koordinaten  $\mathbf{y}_d$  liegt hingegen eine exakte Zustandslinearisierung vor.

## A5 Zweidimensionale Modelle

Dieser Teil des Anhangs enthält die Herleitung für die in Kapitel 3 verwendeten Modelle sowie ein zweidimensionales Modell für die MacPherson-Einzelradaufhängung. Der erste Abschnitt gibt Formeln für die Relativgeschwindigkeit zweier Punkte auf einem starren Körper sowie das Moment bezüglich eines Punktes, das sich aus einer an einem anderen Punkt angreifenden Kraft ergibt, an. Diese Formeln werden in den drei sich anschließenden Abschnitten aufgegriffen. In den Abschnitten A5.2 bis A5.4 werden die Bewegungsgleichungen

- des in Kapitel 3 verwendeten Manipulators,
- der in Abschnitt 3.2 vorliegenden Umgebung mit Dynamik sowie
- eines zweidimensionalen Ersatzmodells der MacPherson-Radaufhängung

hergeleitet.

### A5.1 Relativgeschwindigkeit und Moment in der Ebene

Für die Relativgeschwindigkeit zweier körperfester Punkte  $X$  und  $Y$  gilt im Raum, vgl. (A1-5) und Bild A1-2,

$${}_I \boldsymbol{v}_{XY} = {}^{IK} {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \boldsymbol{r}_{XY} . \quad (\text{A5-1})$$

Liegen sämtliche Vektoren bspw. in der  $y$ - $z$ -Ebene, so folgt mit

$${}^{IK} {}_I \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}_I \boldsymbol{r}_{XY} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}_I r_{XY,y} \\ {}_I r_{XY,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A5-2})$$

hieraus, dass

$${}_I \boldsymbol{v}_{XY} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ {}_I r_{XY,y} \\ {}_I r_{XY,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - {}_I r_{XY,z} \omega \\ {}_I r_{XY,y} \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - {}_I r_{XY,z} \\ {}_I r_{XY,y} \end{bmatrix} \cdot \omega . \quad (\text{A5-3})$$

Werden nur die relevanten  $y$ - und  $z$ -Einträge der Vektoren betrachtet, so folgt für die Relativgeschwindigkeit zweier körperfester Punkte in der Ebene

$${}_I \boldsymbol{v}_{XY} = \begin{bmatrix} - {}_I r_{XY,z} \\ {}_I r_{XY,y} \end{bmatrix} \cdot \omega . \quad (\text{A5-4})$$

Für das Moment bezüglich des Punktes  $X$ , das eine im Punkt  $Y$  angreifende Kraft ausübt, gilt allgemein

$${}_I \boldsymbol{M}^{(X)} = {}_I \boldsymbol{r}_{XY} \times {}_I \boldsymbol{F} . \quad (\text{A5-5})$$

Liegen auch die Kräfte  ${}_I\mathbf{F}$  in der  $y$ - $z$ -Ebene, d. h.

$${}_I\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-6})$$

so folgt

$${}_I\mathbf{M}^{(X)} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}_I r_{XY,y} \\ {}_I r_{XY,z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_I r_{XY,y} F_z - {}_I r_{XY,z} F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -{}_I r_{XY,z} & {}_I r_{XY,y} \end{bmatrix} \cdot {}_I\mathbf{F}. \quad (\text{A5-7})$$

Werden wieder nur die  $y$ - und  $z$ -Einträge betrachtet, so folgt für die Berechnung des (skalaren) Moments die Gleichung

$$\mathbf{M}^{(X)} = \begin{bmatrix} -{}_I r_{XY,z} & {}_I r_{XY,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-8})$$

## A5.2 Manipulator

In den Ausführungen zu Kapitel 3 wird das zweidimensionale Äquivalent eines Hexapod als Manipulator zugrunde gelegt. Bild A5-1 zeigt den freigeschnittenen Endeffektor dieses Manipulators.

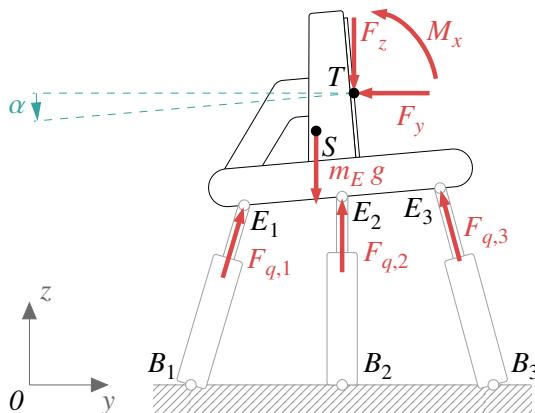


Bild A5-1: Freischnitt des Manipulators

Bei der Herleitung werden u. a. die Größen  $z$ ,  $v$  und  $\tau$  nach (3-2) sowie die Aktorkräfte  $F_{q,1}$ ,  $F_{q,2}$  und  $F_{q,3}$  verwendet. Die Punkte  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  bzw.  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  kennzeichnen die Verbindungspunkte der Linearaktoren mit der Aufspannplatte bzw. dem Endeffektor.  $S$  kennzeichnet den Schwerpunkt des Endeffektors, der die Masse  $m_E$  und das Trägheitsmoment  $I_{xx}^S$  besitzt. Die Bewegungsgleichungen des Manipulators werden mithilfe des Prinzips von Jourdain hergeleitet. Dabei wird als Minimalkoordinate der verallgemeinerte Positionsvektor  $z$  verwendet.

Die Drehmatrix vom inertial- in das endeffektorfeste System lautet

$${}^{IE}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-9})$$

Aufbauend auf  ${}_I\mathbf{r}_{OT}$  nach (3-5) beträgt der Ortsvektor des Schwerpunkts

$${}_I\mathbf{r}_{OS} = {}_I\mathbf{r}_{OT} - {}_I\mathbf{r}_{ST}, \quad {}_I\mathbf{r}_{ST} = {}^{IE}\mathbf{A} \cdot {}_E\mathbf{r}_{ST} = \begin{bmatrix} {}_E\mathbf{r}_{ST,y} \cos \alpha - {}_E\mathbf{r}_{ST,z} \sin \alpha \\ {}_E\mathbf{r}_{ST,y} \sin \alpha + {}_E\mathbf{r}_{ST,z} \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-10})$$

aus dem sich die Jacobimatrix der Translation zu

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{OS}}{\partial \mathbf{z}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -{}_E\mathbf{r}_{ST,y} \sin \alpha - {}_E\mathbf{r}_{ST,z} \cos \alpha \\ {}_E\mathbf{r}_{ST,y} \cos \alpha - {}_E\mathbf{r}_{ST,z} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A5-11})$$

bestimmen lässt. Da die Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors  $\omega_{E,x}$  gerade der zeitlichen Ableitung des Drehwinkels  $\alpha$  entspricht, lautet die Jacobimatrix der Rotation

$$\mathbf{J}_R = \frac{\partial \omega_{E,x}}{\partial \mathbf{v}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-12})$$

Mit der Jacobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \quad (\text{A5-13})$$

folgt die Massenmatrix  $\mathbf{M}_v$  nach (A2-14) zu

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{z}) = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} m_E \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{xx}^S \end{bmatrix} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} m_E \mathbf{I} & -m_E \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} \\ -m_E \left( \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} \right)^T & I_{xx}^S + m_E \left( \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} \right)^T \frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-14})$$

Für die Matrix  $\mathbf{C}_v$ , die der Berechnung der verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräfte dient, vgl. (A2-17), ergibt sich nach einigen Berechnungsschritten

$$\mathbf{C}_v(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = m_E \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}_I\mathbf{r}_{ST} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha}. \quad (\text{A5-15})$$

Der Vektor der verallgemeinerten Gewichtskräfte  $\mathbf{g}_v$  berechnet sich nach (A2-22) zu

$$\mathbf{g}_v(\mathbf{z}) = -\mathbf{J}_T^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -m_E \cdot g \end{bmatrix} = m_E \cdot g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\partial {}_I\mathbf{r}_{ST,z}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-16})$$

Mithilfe von Bild A5-1 können die eingeprägten Kräfte  ${}_I\mathbf{F}^{e \setminus g}$  und Momente  $\mathbf{M}^{e \setminus g(S)}$  bestimmt werden (jeweils exklusive der Anteile aus der Gewichtskraft  $m_E \cdot g$ , die bereits in  $\mathbf{g}_v$  enthalten sind). Es gilt

$${}_I\mathbf{F}^{e \setminus g} = - \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^3 {}_I\mathbf{e}_{BiEi} \cdot F_{q,i}, \quad (\text{A5-17})$$

$$\mathbf{M}^{e \setminus g(S)} = - \begin{bmatrix} -{}_I\mathbf{r}_{ST,z} & {}_I\mathbf{r}_{ST,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} - M_x + \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} -{}_I\mathbf{r}_{SEi,z} & {}_I\mathbf{r}_{SEi,y} \end{bmatrix} {}_I\mathbf{e}_{BiEi} F_{q,i}, \quad (\text{A5-18})$$

vgl. auch (A5-8). Aufbauend auf diesen Angaben folgen die Bewegungsgleichungen des Manipulators mit  $\tau$  nach (3-2) und  $\mathbf{F}_q = [F_{q,1} \ F_{q,2} \ F_{q,3}]^T$  nach einigen Umformungen zu

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_v(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}_v(\mathbf{z}) = \mathbf{J}_g^{-T}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{F}_q - \tau \quad (\text{A5-19})$$

mit

$$\mathbf{J}_g^{-T}(z) = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{B3E3} \\ [-{}_I\boldsymbol{r}_{SE1,z} \quad {}_I\boldsymbol{r}_{SE1,y}] {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{B1E1} & \cdots & [-{}_I\boldsymbol{r}_{SE3,z} \quad {}_I\boldsymbol{r}_{SE3,y}] {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{B3E3} \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-20})$$

Für  ${}_I\boldsymbol{\epsilon}_{BiEi}$  und  ${}_I\boldsymbol{r}_{SEi,z}$  gilt

$${}_I\boldsymbol{\epsilon}_{BiEi} = \frac{{}_I\boldsymbol{r}_{BiEi}}{|{}_I\boldsymbol{r}_{BiEi}|}, \quad {}_I\boldsymbol{r}_{SEi} = {}_I\boldsymbol{r}_{ST} + {}_I\boldsymbol{r}_{TEi} \quad (\text{A5-21})$$

mit

$${}_I\boldsymbol{r}_{BiEi} = {}_I\boldsymbol{r}_{OT} + {}_I\boldsymbol{r}_{TEi} - {}_I\boldsymbol{r}_{OBi}, \quad {}_I\boldsymbol{r}_{TEi} = {}^{IE}\mathbf{A} \cdot {}_E\boldsymbol{r}_{TEi}. \quad (\text{A5-22})$$

Die Parameter des Manipulatormodells sind die jeweils drei Vektoren  ${}_I\boldsymbol{r}_{OBi}$  und  ${}_E\boldsymbol{r}_{TEi}$ , der Schwerpunktvektor  ${}_I\boldsymbol{r}_{ST}$  sowie die Masse  $m_E$  und das Trägheitsmoment  $I_{xx}^S$  des Endeffektors.

### A5.3 Umgebung „Stab mit nicht vernachlässigbarer Dynamik“

Den Freischnitt der Umgebung mit nicht vernachlässigbarer Dynamik aus Bild 3-4 zeigt Bild A5-2.

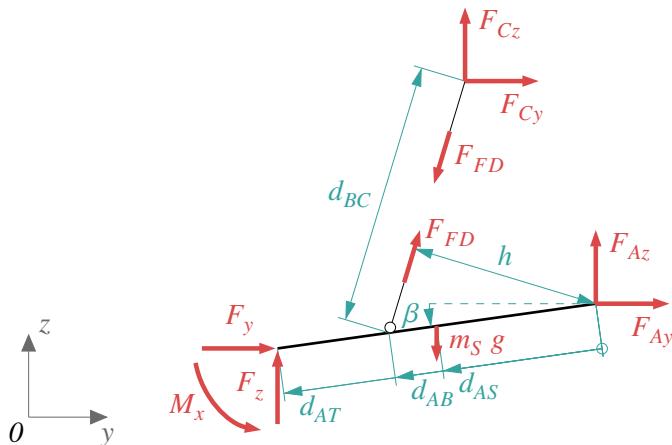


Bild A5-2: Freischnitt der dynamischen Umgebung

Die in diesem Bild eingetragenen Größen sind: die Gewichtskraft  $F_g = m_S g$ , die Summe aus Feder- und Dämpferkraft

$$F_{FD} = c (d_{BC} - d_{BC,nom}) + d \dot{d}_{BC}, \quad (\text{A5-23})$$

der zugehörige, zeitvariante Hebelarm  $h$  bezüglich des Punktes A und die Wirkrichtung  ${}_I\boldsymbol{\epsilon}_{BC}$  der Kraft  $F_{FD}$ , die Kontaktkräfte und -momente zum Manipulator  $\tau = [F_y \quad F_z \quad M_x]^T$ , die Reaktionskräfte  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$ ,  $F_{Cy}$  und  $F_{Cz}$ , die Längen  $d_{AB}$ ,  $d_{AS}$ ,  $d_{AT}$  und  $d_{BC}$  sowie der Drehwinkel  $\beta$ , der als generalisierte Koordinate verwendet wird. Davon sind  $d_{AB}$ ,  $d_{AS}$ ,  $d_{AT}$  sowie  $m_S$ ,  $c$ ,  $d$  und  $d_{BC,nom}$  konstante Modellparameter. Hinzu kommt das Trägheitsmoment  $I_{xx}^S$  bezüglich des Schwerpunkts S.

Die Bewegungsgleichungen können nach dem Prinzip von Jourdain hergeleitet werden. Es ist aber geschickter, stattdessen den Drallsatz bezüglich des Punktes A aufzustellen. Er lautet

$$I_{xx}^A \cdot \ddot{\beta} = F_g d_{AS} \cos\beta + F_y d_{AT} \sin\beta - F_z d_{AT} \cos\beta + M_x - h F_{FD} \quad (\text{A5-24})$$

mit  $I_{xx}^A = I_{xx}^S + m_S d_{AS}^2$ . Der Abgleich mit (2-78) führt zu

$$\underbrace{I_{xx}^A}_{M_u} \cdot \ddot{\beta} + \underbrace{h F_{FD} - F_g d_{AS} \cos\beta}_{n_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{AT} \sin\beta & -d_{AT} \cos\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix}}_{S_{yd}^T(\mathbf{y}_d)} \cdot \tau \quad (\text{A5-25})$$

$$\underbrace{M_u \cdot \ddot{\beta}}_{\mathbf{M}_u} + \underbrace{n_u(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d)}_{\mathbf{S}_{yd}^T(\mathbf{y}_d)} = \underbrace{\tau}_{\cdot} \quad (\text{A5-26})$$

Für die Auswertung dieser Bewegungsgleichung müssen die (noch) unbekannte, zeitvariable Länge  $d_{BC}$  sowie deren zeitliche Ableitung  $\dot{d}_{BC}$  und der Hebelarm  $h$  bestimmt werden. Mit

$${}_I \mathbf{r}_{BC} = {}_I \mathbf{r}_{AC} - {}_I \mathbf{r}_{AB} \quad (\text{A5-27})$$

folgt

$$\begin{aligned} d_{BC} &= |{}_I \mathbf{r}_{BC}| = \sqrt{{}_I \mathbf{r}_{BC}^T \cdot {}_I \mathbf{r}_{BC}} = \sqrt{{}_I \mathbf{r}_{AC}^T \cdot {}_I \mathbf{r}_{AC} - 2 \cdot {}_I \mathbf{r}_{AC}^T \cdot {}_I \mathbf{r}_{AB} + {}_I \mathbf{r}_{AB}^T \cdot {}_I \mathbf{r}_{AB}} \\ &= \sqrt{d_{AC}^2 - 2 \cdot {}_I \mathbf{r}_{AC}^T \cdot {}_I \mathbf{r}_{AB} + d_{AB}^2} \end{aligned} \quad (\text{A5-28})$$

und

$$\dot{d}_{BC} = -\frac{{}_I \mathbf{r}_{AC}^T \cdot {}_I \dot{\mathbf{r}}_{AB}}{d_{BC}}. \quad (\text{A5-29})$$

Dabei ist der Vektor  ${}_I \mathbf{r}_{AC}$  ein konstanter Modellparameter. Für den Vektor  ${}_I \mathbf{r}_{AB}$  und dessen zeitliche Ableitung gilt

$${}_I \mathbf{r}_{AB} = {}^{IK} \mathbf{A} \cdot {}_K \mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_{AB} \\ 0 \end{bmatrix} = -d_{AB} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-30})$$

$${}_I \dot{\mathbf{r}}_{AB} = d_{AB} \cdot \dot{\beta} \cdot \begin{bmatrix} \sin\beta \\ -\cos\beta \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-31})$$

Das Moment  $M_{FD}^{(A)}$  der Kraft  $F_{FD}$  bezüglich des Punktes A beträgt

$$M_{FD}^{(A)} = -h F_{FD} = \begin{bmatrix} -{}_I r_{AB,z} & {}_I r_{AB,y} \end{bmatrix} \cdot {}_I \mathbf{F}_{FD}, \quad {}_I \mathbf{F}_{FD} = {}_I \mathbf{e}_{BC} \cdot F_{FD}, \quad (\text{A5-32})$$

vgl. auch (A5-8). Hieraus folgt mit  ${}_I \mathbf{r}_{AB}$  nach (A5-30),  ${}_I \mathbf{r}_{BC}$  nach (A5-27) und

$${}_I \mathbf{e}_{BC} = \frac{{}_I \mathbf{r}_{BC}}{d_{BC}} \quad (\text{A5-33})$$

der Zusammenhang<sup>16</sup>

$$M_{FD}^{(A)} = -\underbrace{\frac{\begin{bmatrix} {}_I r_{AB,z} & -{}_I r_{AB,y} \end{bmatrix} \cdot {}_I \mathbf{r}_{AC}}{d_{BC}} \cdot {}_I \mathbf{F}_{FD}}_{\text{Hebelarm } h \text{ in Bild A5-2}}. \quad (\text{A5-34})$$

<sup>16</sup>Es gilt  $\begin{bmatrix} -{}_I r_{AB,z} & {}_I r_{AB,y} \end{bmatrix} \cdot {}_I \mathbf{r}_{AB} = 0$ .

Alternativ lässt sich der Hebelarm  $h$  auch mithilfe einer Lotgeraden oder nach der Gleichung

$$h = \frac{\partial d_{BC}}{\partial \beta} \quad (\text{A5-35})$$

berechnen.

## A5.4 Radaufhängung

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für ein zweidimensionales Modell der MacPherson-Radaufhängung hergeleitet. Die Herleitung basiert auf den Ausführungen in Abschnitt 4.3. Bild A5-3 zeigt das Ersatzmodell.

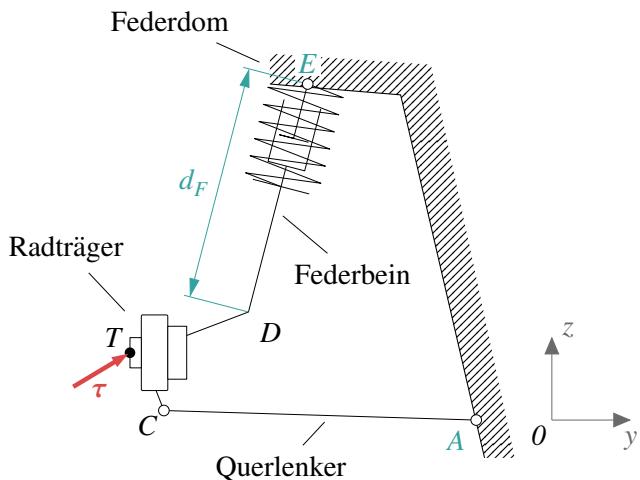


Bild A5-3: Zweidimensionales Ersatzmodell der MacPherson-Radaufhängung

Der zweidimensionale Mechanismus besteht aus drei Starrkörpern: dem Radträger (inklusive Dämpferrohr), dem Querlenker und der Dämpferstange. Die Körper besitzen die Schwerpunkte 1, 2 bzw. 3 (nicht im Bild enthalten). Die Kopplung von Radträger und Querlenker im Punkt  $C$  besteht in einem Drehgelenk. Das Federbein entspricht einem Schubgelenk. Das Modell erlaubt, in den Punkten  $A$  und  $E$  entweder ideale Drehgelenke oder dynamische Bindungen (Feder-Dämpfer-Elemente) anzusetzen. Je nach Auswahl ergeben sich damit  $f = 1 \dots 5$  FHG. Als Minimalkoordinaten werden der Dämpferweg  $d_F$  sowie die Verschiebungen der Punkte  $A$  und  $E$  in der  $y$ - und  $z$ -Richtung des fahrzeugfesten Systems  $I$  verwendet, d. h.

$$\mathbf{y}_A = [d_F \quad y_A \quad z_A \quad y_E \quad z_E]. \quad (\text{A5-36})$$

Die körperfesten Systeme tragen im folgenden die Bezeichner 1 (Radträger), 2 (Querlenker) und 3 (Dämpferstange).

## Positionsgrößen

Die Drehmatrizen des Radträgers  ${}^1 A$ , des Querlenkers  ${}^2 A$  sowie der Dämpferstange  ${}^3 A$  lauten

$${}^1 A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad {}^2 A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad {}^3 A = {}^1 A. \quad (\text{A5-37})$$

Da Radträger und Dämpferstange über ein Schubgelenk miteinander verbunden sind, das die gegenseitige Verdrehung der Körper verhindert, stimmen diese beiden Drehmatrizen überein. Die unbekannten Drehwinkel  $\varphi$  und  $\alpha$  müssen aus den Minimalkoordinaten  $y_A$  und den Modellparametern berechnet werden.

Für die Berechnung von  $\varphi$  werden die (quadrierten) Beträge der Vektoren  ${}_I r_{CE}$  und  ${}_1 r_{CE}$  gleichgesetzt, d. h.

$${}_1 r_{CE}^T \cdot {}_1 r_{CE} = {}_I r_{CE}^T \cdot {}_I r_{CE}. \quad (\text{A5-38})$$

Für diese Vektoren gilt

$${}_1 r_{CE} = {}_1 r_{CD} + d_F \cdot {}_1 e_{DE} \quad (\text{A5-39})$$

und

$${}_I r_{CE} = {}_I r_{AE} - {}_I r_{AC} \quad (\text{A5-40})$$

mit

$${}_I r_{AC} = {}^{I2} A \cdot {}_2 r_{AC}, \quad {}_I r_{AE} = {}_I r_{0E} - {}_I r_{0A}, \quad (\text{A5-41})$$

$${}_I r_{0A} = {}_I r_{0A,0} + \begin{bmatrix} y_A \\ z_A \end{bmatrix}, \quad {}_I r_{0E} = {}_I r_{0E,0} + \begin{bmatrix} y_E \\ z_E \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-42})$$

Durch Einsetzen dieser Zusammenhänge in (A5-38) resultiert

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \left( {}_I r_{AE,y} \cdot {}_2 r_{AC,y} + {}_I r_{AE,z} \cdot {}_2 r_{AC,z} \right) \cdot \cos \varphi \\ & + 2 \cdot \left( {}_I r_{AE,y} \cdot {}_2 r_{AC,z} - {}_I r_{AE,z} \cdot {}_2 r_{AC,y} \right) \cdot \sin \varphi \\ & = {}_1 r_{CE}^T \cdot {}_1 r_{CE} - {}_I r_{AE}^T \cdot {}_I r_{AE} - {}_2 r_{AC}^T \cdot {}_2 r_{AC}. \end{aligned} \quad (\text{A5-43})$$

Außerdem folgt aus der zweiten Zeile von

$${}_I r_{CE} = {}^{I1} A \cdot {}_1 r_{CE}, \quad (\text{A5-44})$$

dass

$${}_I r_{CE,z} = {}_1 r_{CE,y} \cdot \sin \alpha + {}_1 r_{CE,z} \cdot \cos \alpha. \quad (\text{A5-45})$$

Die Gleichungen (A5-43) und (A5-45) weisen die Form  $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$  auf und lassen die Bestimmung der unbekannten Drehwinkel  $\varphi$  und  $\alpha$  von Querlenker und Radträger zu, vgl. Anhang A6. Damit sind die Drehmatrizen  ${}^{I1} A$ ,  ${}^{I2} A$  und  ${}^{I3} A$  bekannt.

Mithilfe der Drehmatrizen können die Ortsvektoren der Körperschwerpunkte zu

$${}_I\mathbf{r}_{01} = {}_I\mathbf{r}_{0A} + {}_I\mathbf{r}_{AC} + {}_I\mathbf{r}_{C1}, \quad {}_I\mathbf{r}_{02} = {}_I\mathbf{r}_{0A} + {}_I\mathbf{r}_{A2}, \quad (\text{A5-46})$$

$${}_I\mathbf{r}_{03} = {}_I\mathbf{r}_{0E} + {}_I\mathbf{r}_{E3} \quad (\text{A5-47})$$

mit

$${}_I\mathbf{r}_{C1} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{r}_{C1}, \quad {}_I\mathbf{r}_{A2} = {}^{I2}\mathbf{A} \cdot {}_2\mathbf{r}_{A2}, \quad {}_I\mathbf{r}_{E3} = {}^{I3}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{r}_{E3} \quad (\text{A5-48})$$

angegeben werden. Für den Punkt  $T$  ergibt sich

$${}_I\mathbf{r}_{0T} = {}_I\mathbf{r}_{01} + {}_I\mathbf{r}_{1T}, \quad {}_I\mathbf{r}_{1T} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{r}_{1T}. \quad (\text{A5-49})$$

### Geschwindigkeitsgrößen

Die Winkelgeschwindigkeitsvektoren von Querlenker, Radträger und Dämpferstange lauten

$${}^{I1}\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad {}^{I2}\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad {}^{I3}\boldsymbol{\omega} = {}^{I1}\boldsymbol{\omega} \quad (\text{A5-50})$$

mit den Unbekannten  $\partial \dot{\varphi}/\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$  und  $\partial \dot{\alpha}/\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$ , die im Folgenden aus  $\mathbf{y}_A$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_A$  und den Modellparametern bestimmt werden. Es gilt

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} + {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE}, \quad (\text{A5-51})$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE} = {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \quad (\text{A5-52})$$

mit

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-53})$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A5-54})$$

$${}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC} = \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}, \quad {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE} = \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha} + {}_I\dot{\mathbf{v}}_{rel,CE}, \quad (\text{A5-55})$$

und

$${}_I\dot{\mathbf{v}}_{rel,CE} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\dot{\mathbf{r}}_{CE} = {}^{I1}\mathbf{A} \cdot {}_1\mathbf{e}_{DE} \cdot \dot{d}_F = {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \dot{d}_F, \quad (\text{A5-56})$$

$$\dot{d}_F = \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A5-57})$$

Durch Gleichsetzen von (A5-51) und (A5-52) und Einsetzen der genannten Zusammenhänge resultiert

$$\frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A = \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi} + \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha} + {}_I\mathbf{e}_{DE} \cdot \dot{d}_F, \quad (\text{A5-58})$$

woraus durch Linksmultiplikation mit  $\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T$  bzw.  $\dot{\mathbf{r}}_{AC}^T$  und Umformen die gesuchten Größen zu

$$\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \cdot \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - \mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right)}{\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{AC,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{AC,y} \end{bmatrix}}, \quad \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{AC}^T \cdot \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - \mathbf{e}_{DE} \cdot \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right)}{\dot{\mathbf{r}}_{AC}^T \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{CE,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{CE,y} \end{bmatrix}} \quad (\text{A5-59})$$

folgen.

Die Geschwindigkeiten der Körperschwerpunkte lauten

$$\dot{\mathbf{r}}_{01} = \dot{\mathbf{r}}_{0A} + \dot{\mathbf{r}}_{AC} + \dot{\mathbf{r}}_{C1} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad (\text{A5-60})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{02} = \dot{\mathbf{r}}_{0A} + \dot{\mathbf{r}}_{A2} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \dot{\mathbf{r}}_{03} = \dot{\mathbf{r}}_{0E} + \dot{\mathbf{r}}_{E3} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A. \quad (\text{A5-61})$$

Mit (A5-53), (A5-54), (A5-55) und

$$\dot{\mathbf{r}}_{C1} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{C1,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{C1,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{A2} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{A2,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{A2,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{E3} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{E3,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{E3,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha} \quad (\text{A5-62})$$

können die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{AC,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{AC,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{C1,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{C1,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}, \quad (\text{A5-63})$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{0A}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{A2,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{A2,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}, \quad (\text{A5-64})$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{0E}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{E3,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{E3,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \quad (\text{A5-65})$$

bestimmt werden. Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes  $T$  beträgt

$$\dot{\mathbf{r}}_{0T} = \dot{\mathbf{r}}_{01} + \dot{\mathbf{r}}_{1T} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \dot{\mathbf{r}}_{1T} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{1T,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{1T,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha}, \quad (\text{A5-66})$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{r}}_{1T,z} \\ \dot{\mathbf{r}}_{1T,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}. \quad (\text{A5-67})$$

## Beschleunigungsgrößen

Für die Winkelbeschleunigungsvektoren der Körper

$$\overset{I}{\omega} = \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_A + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad (\text{A5-68})$$

$$\overset{I}{\omega} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_A + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad \overset{I}{\omega} = \overset{I}{\omega} \quad (\text{A5-69})$$

und die Beschleunigungsvektoren der Schwerpunkte

$${}_I\ddot{\mathbf{r}}_{01} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_A + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad (\text{A5-70})$$

$${}_I\ddot{\mathbf{r}}_{02} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_A + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_A, \quad (\text{A5-71})$$

$${}_I\ddot{\mathbf{r}}_{03} = \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_A + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}_A \quad (\text{A5-72})$$

aus (A5-50), (A5-60) und (A5-61) sind die zeitlichen Ableitungen von  $\partial \dot{\varphi} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$ ,  $\partial \dot{\alpha} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$ ,  $\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$ ,  $\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$  und  $\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T$  zu bestimmen.  $d(\partial \dot{\varphi} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T) / dt$  und  $d(\partial \dot{\alpha} / \partial \dot{\mathbf{y}}_A^T) / dt$  folgen durch Anwendung der Quotientenregel aus (A5-59) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) &= \frac{\left( {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) - {}_I\mathbf{r}_{CE}^T {}_I\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \left( {}_I\mathbf{r}_{CE}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \right)}{\left( {}_I\mathbf{r}_{CE}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \right)^2} \\ &- \frac{{}_I\mathbf{r}_{CE}^T \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \left( {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} + {}_I\mathbf{r}_{CE}^T \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC,y} \end{bmatrix} \right)}{\left( {}_I\mathbf{r}_{CE}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A5-73})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) &= \frac{\left( {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC}^T \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) - {}_I\mathbf{r}_{AC}^T {}_I\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \left( {}_I\mathbf{r}_{AC}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} \right)}{\left( {}_I\mathbf{r}_{AC}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} \right)^2} \\ &- \frac{{}_I\mathbf{r}_{AC}^T \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AE}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} - {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE} \frac{\partial \dot{d}_F}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \left( {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} + {}_I\mathbf{r}_{AC}^T \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{CE,y} \end{bmatrix} \right)}{\left( {}_I\mathbf{r}_{AC}^T \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{CE,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{CE,y} \end{bmatrix} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A5-74})$$

mit

$${}_I\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{DE} = \begin{bmatrix} - {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE,z} \\ {}_I\boldsymbol{\epsilon}_{DE,y} \end{bmatrix} \cdot \dot{\alpha}. \quad (\text{A5-75})$$

Die anderen drei zeitlichen Ableitungen folgen aus (A5-63), (A5-64) und (A5-65) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) &= \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{AC,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{AC,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) + \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{C1,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{C1,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{AC,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} + \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{C1,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{C1,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}, \end{aligned} \quad (\text{A5-76})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{02}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) = \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{A2,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{A2,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) + \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{A2,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{A2,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}, \quad (\text{A5-77})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I\dot{\mathbf{r}}_{03}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) = \begin{bmatrix} - {}_I\mathbf{r}_{E3,z} \\ {}_I\mathbf{r}_{E3,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) + \begin{bmatrix} - {}_I\dot{\mathbf{r}}_{E3,z} \\ {}_I\dot{\mathbf{r}}_{E3,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}. \quad (\text{A5-78})$$

Die entsprechende partielle Ableitung für den Beschleunigungsvektor des Punktes  $T$  lautet

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{0T}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial {}_I \dot{r}_{01}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) + \begin{bmatrix} - {}_I \mathbf{r}_{1T,z} \\ {}_I \mathbf{r}_{1T,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T} \right) + \begin{bmatrix} - {}_I \dot{r}_{1T,z} \\ {}_I \dot{r}_{1T,y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_A^T}. \quad (\text{A5-79})$$

### Eingeprägte Kräfte und Momente

Dieses Modell sowie das zur Validierung der Gleichungen herangezogene MKS-Gegenstück enthalten

- einen Stoßdämpfer mit nichtlinearer Dämpfung (Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie) sowie nichtlinearen Zug- und Druckpuffern (Kraft-Weg-Kennlinien),
- eine Aufbaufeder mit linearer Charakteristik und
- zwei Elastomerlager (ein Querlenkerlager sowie das Federbeinstützlager) mit jeweils drei Kraft-Weg-Kennlinien und drei konstanten Dämpfungen.

Für beide Elastomerlager ist die relative Verdrehung der Lagerachsen zu den beiden über das Elastomerlager verbundenen Körpern erforderlich. Auf die Modellierung der Kraftelemente wird an dieser Stelle nicht im Detail eingegangen.

### Resultierende Modellgleichungen

Mithilfe dieser Herleitungen lassen sich die Modellgleichungen in der gleichen Form wie die des räumlichen Modells der MacPherson-Radaufhängung angeben, vgl. (4-222). Zu den Parametern des Modells zählen neben sämtlichen Parametern, die für die Modellierung der Kraftelemente erforderlich sind, die Konstruktionslagen der Punkte  $A, C, D, E, T, 1, 2$  und  $3$ . Dieses Modell wurde ähnlich wie das räumliche Modell mithilfe eines gleich aufgebauten MKS-Modells validiert.



## A6 Lösung der Gleichung $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$

Die Lösung der Gleichung

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c \quad (\text{A6-1})$$

lautet

$$x(a, b, c) = \begin{cases} -\arctan \frac{a}{b} + \arcsin \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } b < 0 \\ -\arctan \frac{a}{b} + \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A6-2})$$

vgl. [Ril12, S. 147].



## A7 Zusätzliche Abbildungen zu Kapitel 5

### A7.1 Analytische Formulierung nach de Luca und Manes

#### A7.1.1 Regelung der Radaufhängung ohne Elastomerlager

Die Rahmenbedingungen der folgenden, zusätzlichen Abbildungen zu Abschnitt 5.1 entsprechen den in diesem Abschnitt genannten. Das Streckenmodell besteht demnach aus

- einem Hexapod mit 13 massebehafteten Starrkörpern ( $\Sigma_{H13}$ ) und
- der MacPherson-Radaufhängung mit den drei FHG  $d_F, x_L, \psi$ .

Es ist weiterhin der stets gleiche Ausschnitt aus der Schlechtweganregung zu sehen. Die Selektionsmatrizen lauten:

- $S_{31} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0]$ ,
- $S_{32} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0]$ ,
- $S_{33} = \text{diag} [1 \ 0 \ 0]$  und
- $S_{34} = \text{diag} [0 \ 0 \ 0]$ .

Für die Selektionsmatrizen  $S_{32}, S_{33}$  und  $S_{34}$  ist im folgenden der Soll-/Ist-Vergleich

- für das 13-Starrkörper-Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$  im Regler sowie
- das 1-Starrkörper-Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$  im Regler

zu finden. Die entsprechenden Bilder für  $S_{31}$  sind bereits in Abschnitt 5.1.3 enthalten.

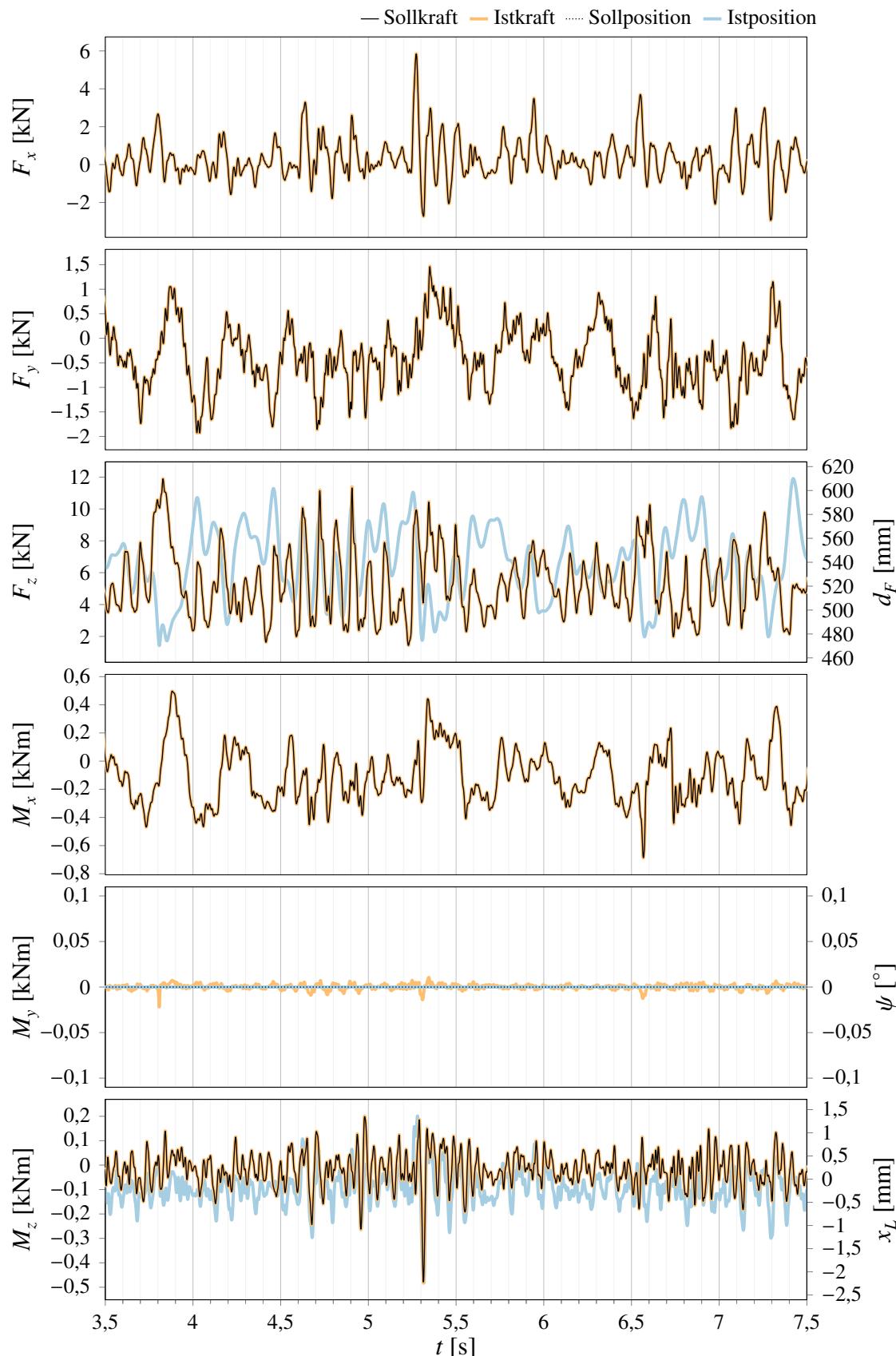


Bild A7-1: Soll-Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{32} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

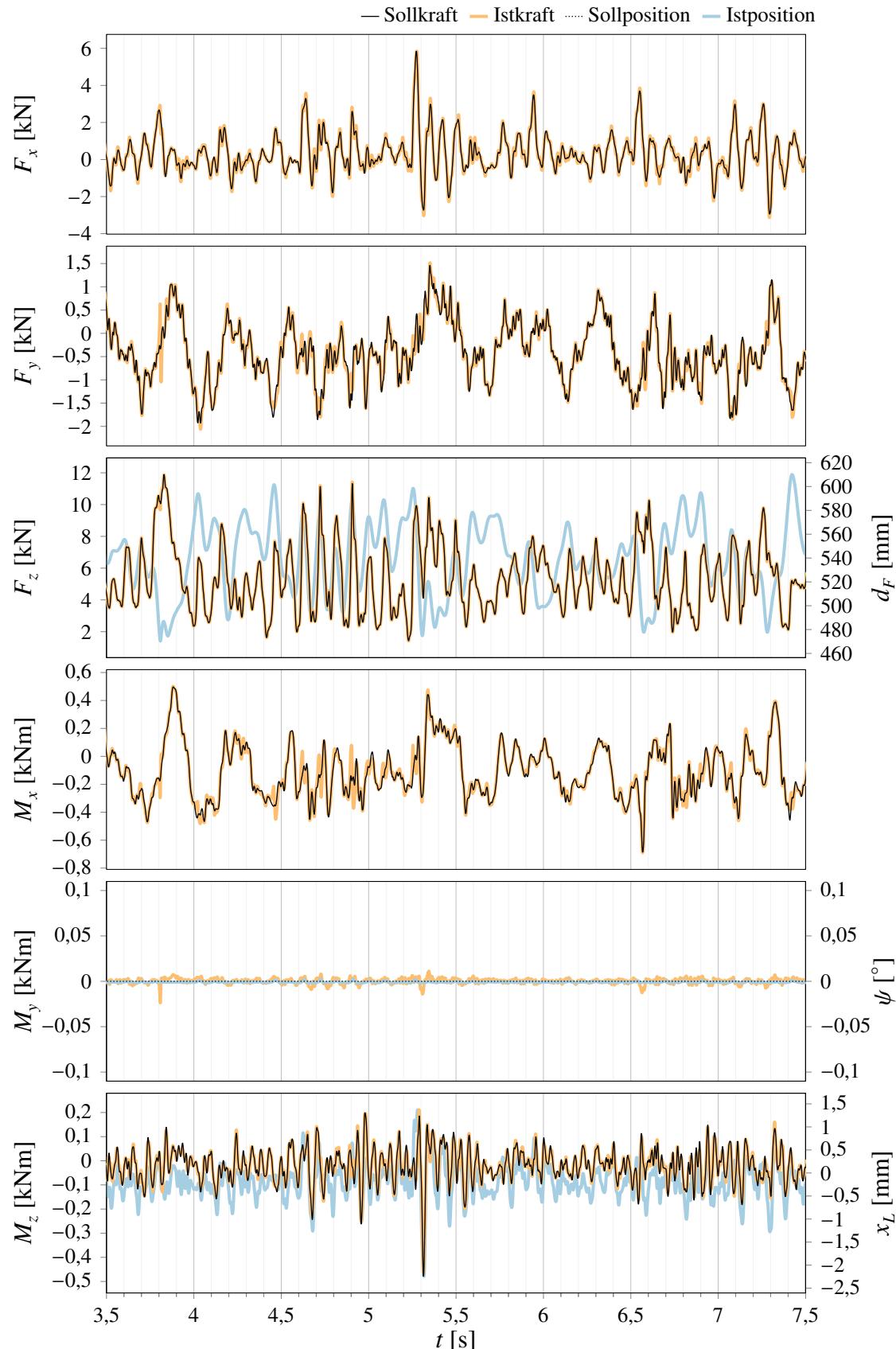


Bild A7-2: Soll-Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{32} = \text{diag}[1 \ 1 \ 0]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

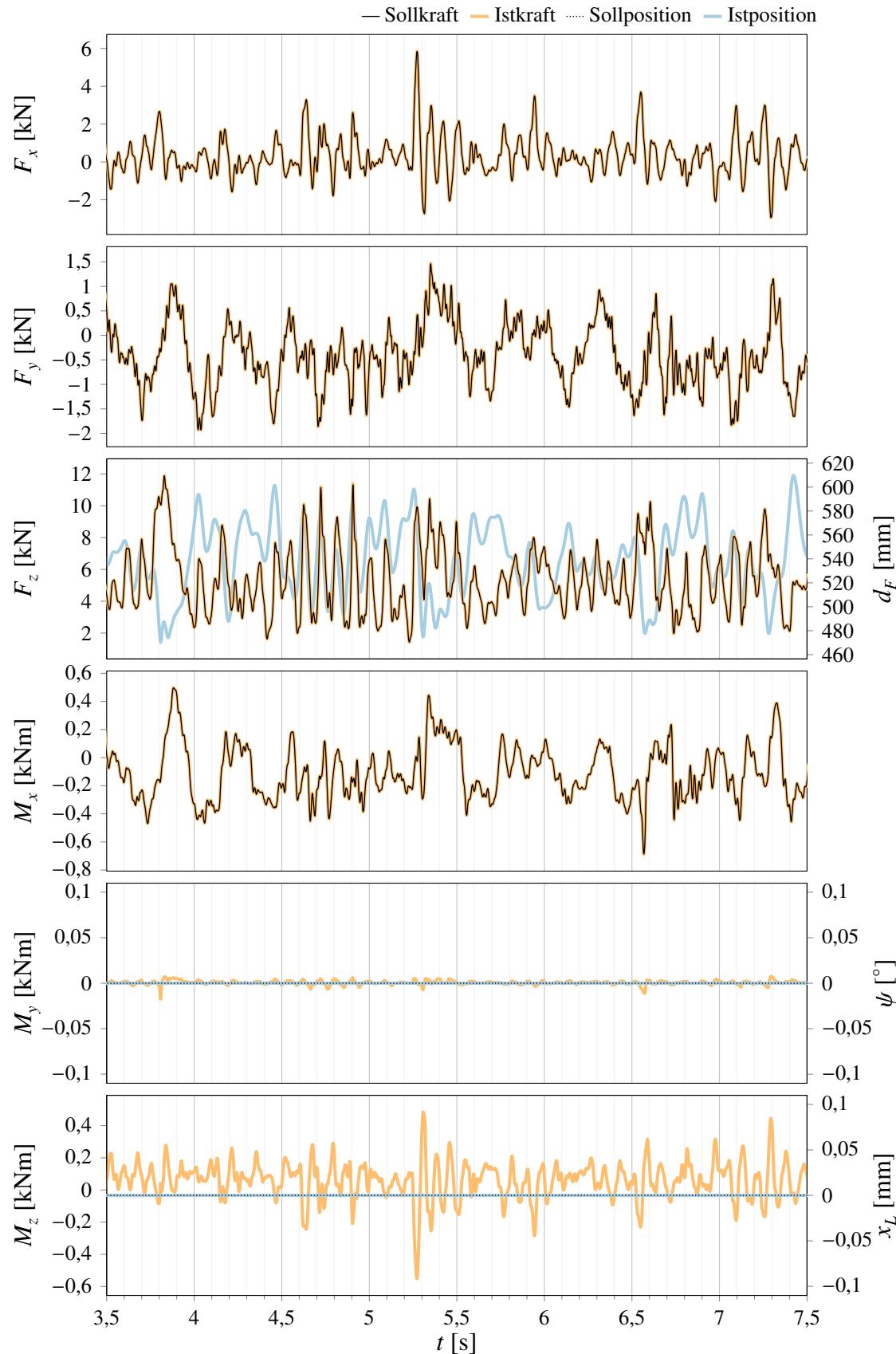


Bild A7-3: Soll-Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{33} = \text{diag} [1 \ 0 \ 0]$   
(Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

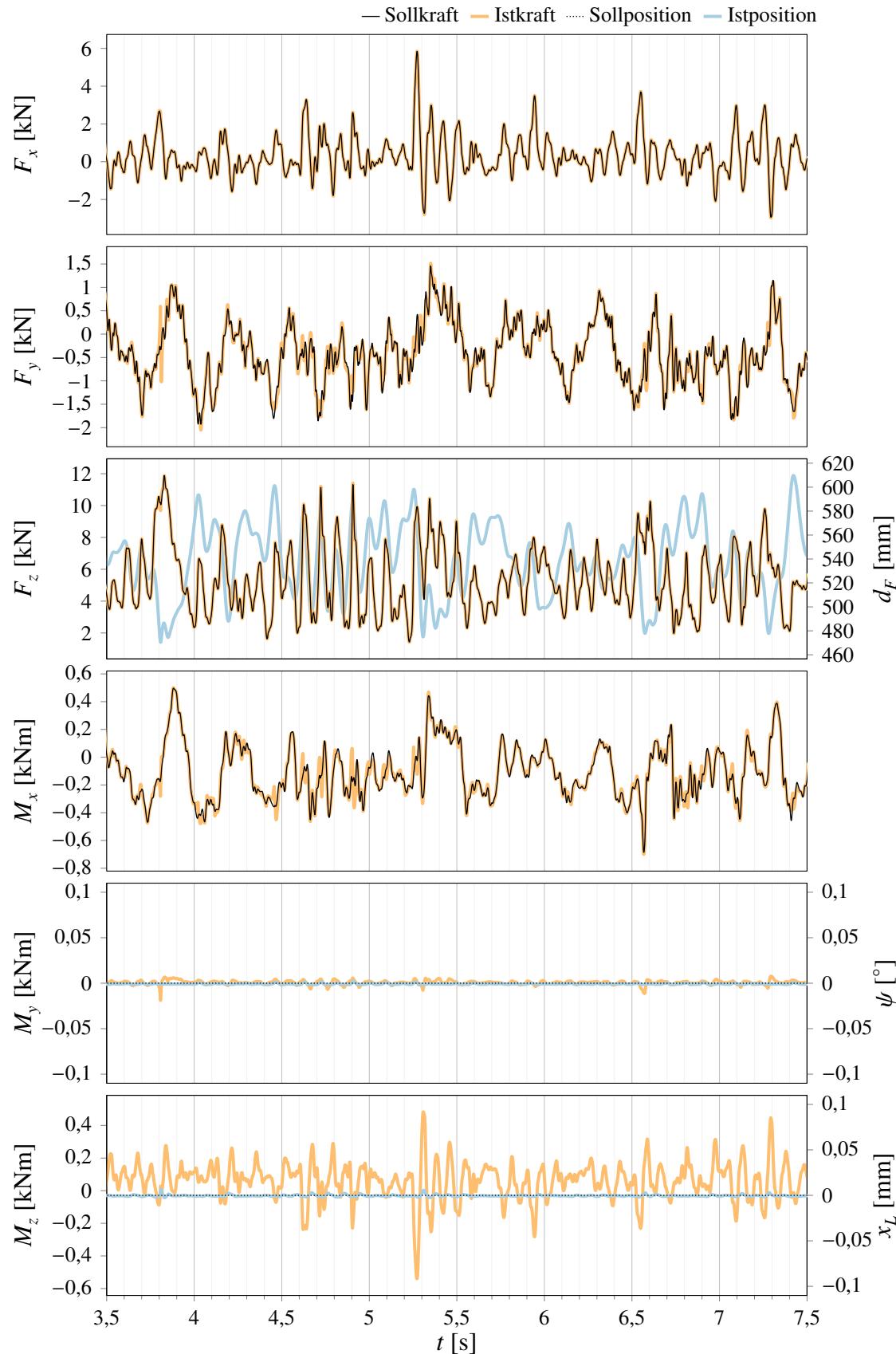


Bild A7-4: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{33} = \text{diag}[1 \ 0 \ 0]$   
(Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

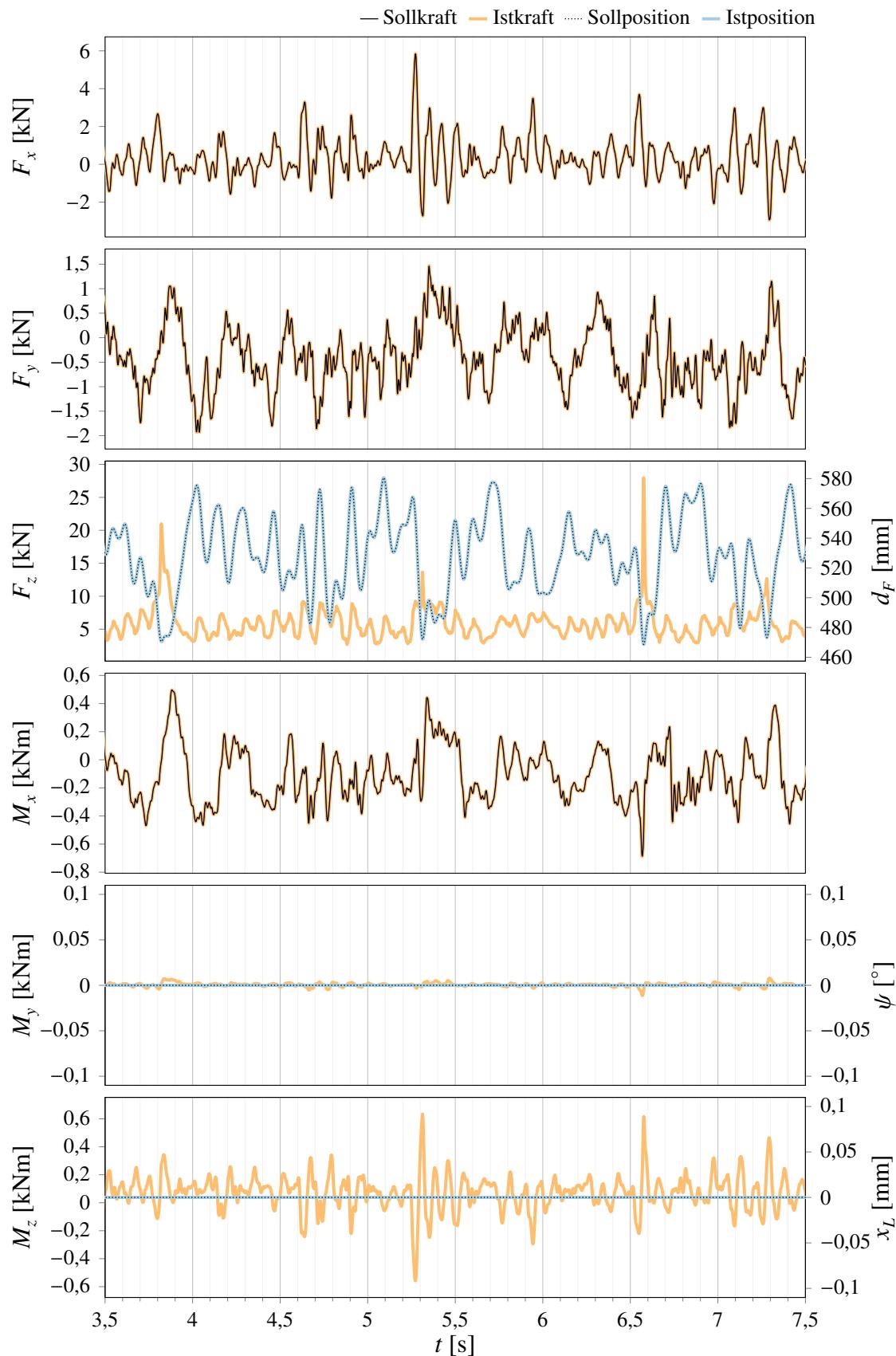


Bild A7-5: Soll-Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{34} = \text{diag} [0 \ 0 \ 0]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

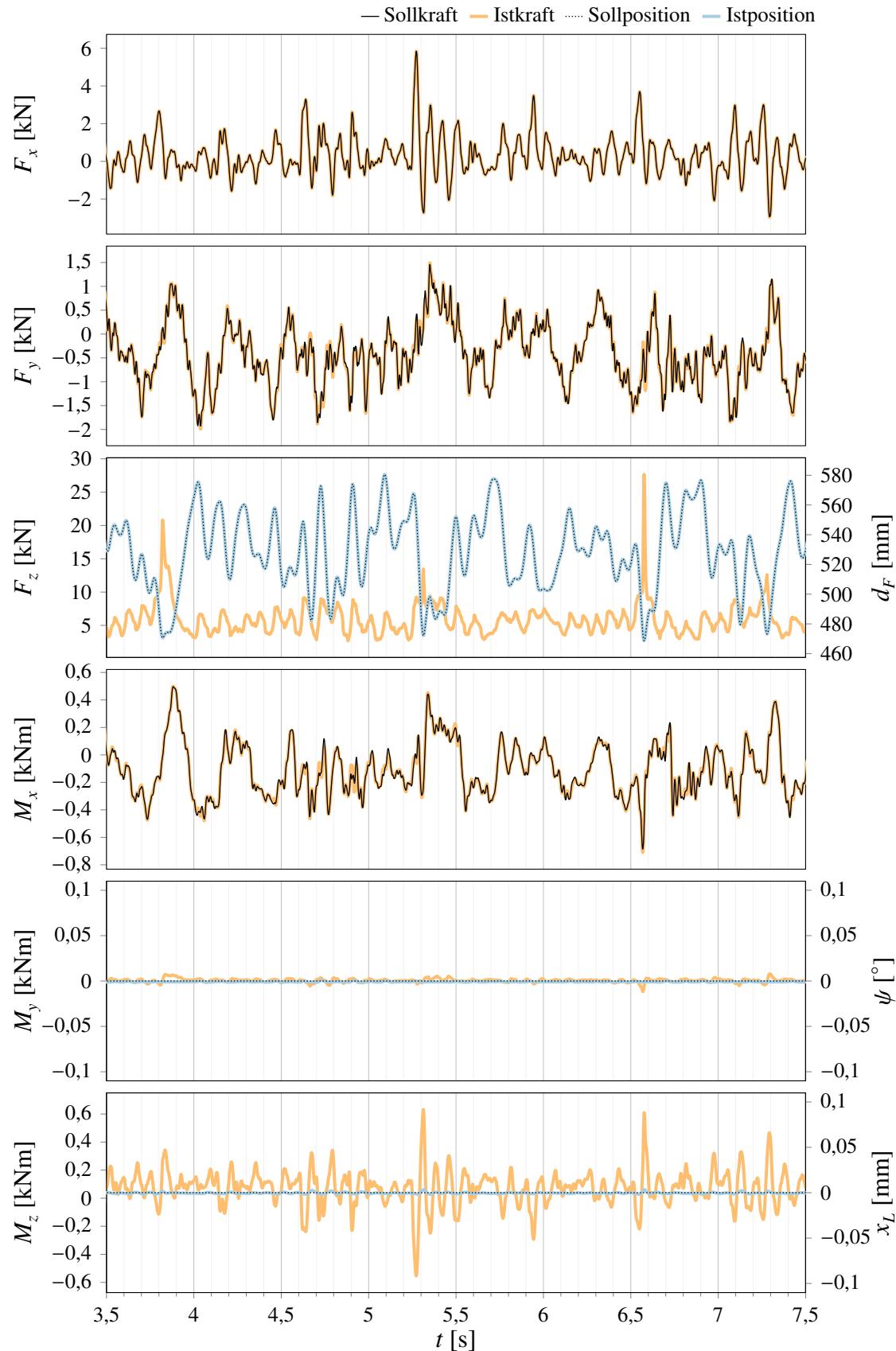


Bild A7-6: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{34} = \text{diag} [0 \ 0 \ 0]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM3}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G3}$ )

### A7.1.2 Regelung der Radaufhängung mit Elastomerlagern

Dieser Abschnitt enthält die zusätzlichen Abbildungen zu Abschnitt 5.1.4 des Hauptteils dieser Dissertationsschrift. Die betrachteten Selektionsmatrizen lauten

- $S_{6p} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$  und
- $S_{6f} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$

für die Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  und  $\Sigma_{R,LM6b}$  bzw.

- $S_{6p}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$  und
- $S_{6f}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

für den Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$ . Nachfolgend sind für die Regelungen  $\Sigma_{R,LM6a}$ ,  $\Sigma_{R,LM6b}$  und  $\Sigma_{R,LM6z}$  diese Abbildungen zu finden, sofern sie nicht bereits im Hauptteil enthalten sind:

1. die Soll-/Ist-Vergleiche für jeweils beide Selektionsmatrizen bei Verwendung der Hexapodmodelle  $\Sigma_{H13}$  und  $\Sigma_{H1}^*$  im Regler,
2. das Säulendiagramm mit der Gegenüberstellung der relativen RMS-Fehler,
3. der Plot für die kritische Aktoreckfrequenz  $f_{A,krit}$  für PT<sub>1</sub>-, PT<sub>2</sub>- und PT<sub>3</sub>-Aktordynamik sowie
4. der Verlauf von  $f_{A,krit}$  bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$  für PT<sub>3</sub>-Aktordynamik.

Für den Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  mit den Positionsgrößen  $y_{dr2}$  nach (5-52) wurden die Wahlmöglichkeiten mittels Selektionsmatrix  $S = \text{diag} [s_1 \dots s_6]$  gemäß Tabelle A7-1 vorgegeben.

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
Positionsgrößen	$d_F$	$x_L$	$\psi$	$x_A$	$y_A$	$y_E$
Kraftgrößen	$F_z$	$M_z$	$M_y$	$F_x$	$F_y$	$M_x$

Tabelle A7-1: Verknüpfung der Positions- und Kraftgrößen über  $S$  (Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$ )

Damit gilt

$$i_a = [3 \ 6 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4] \quad (\text{A7-1})$$

und

$$S_{\lambda a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A7-2})$$

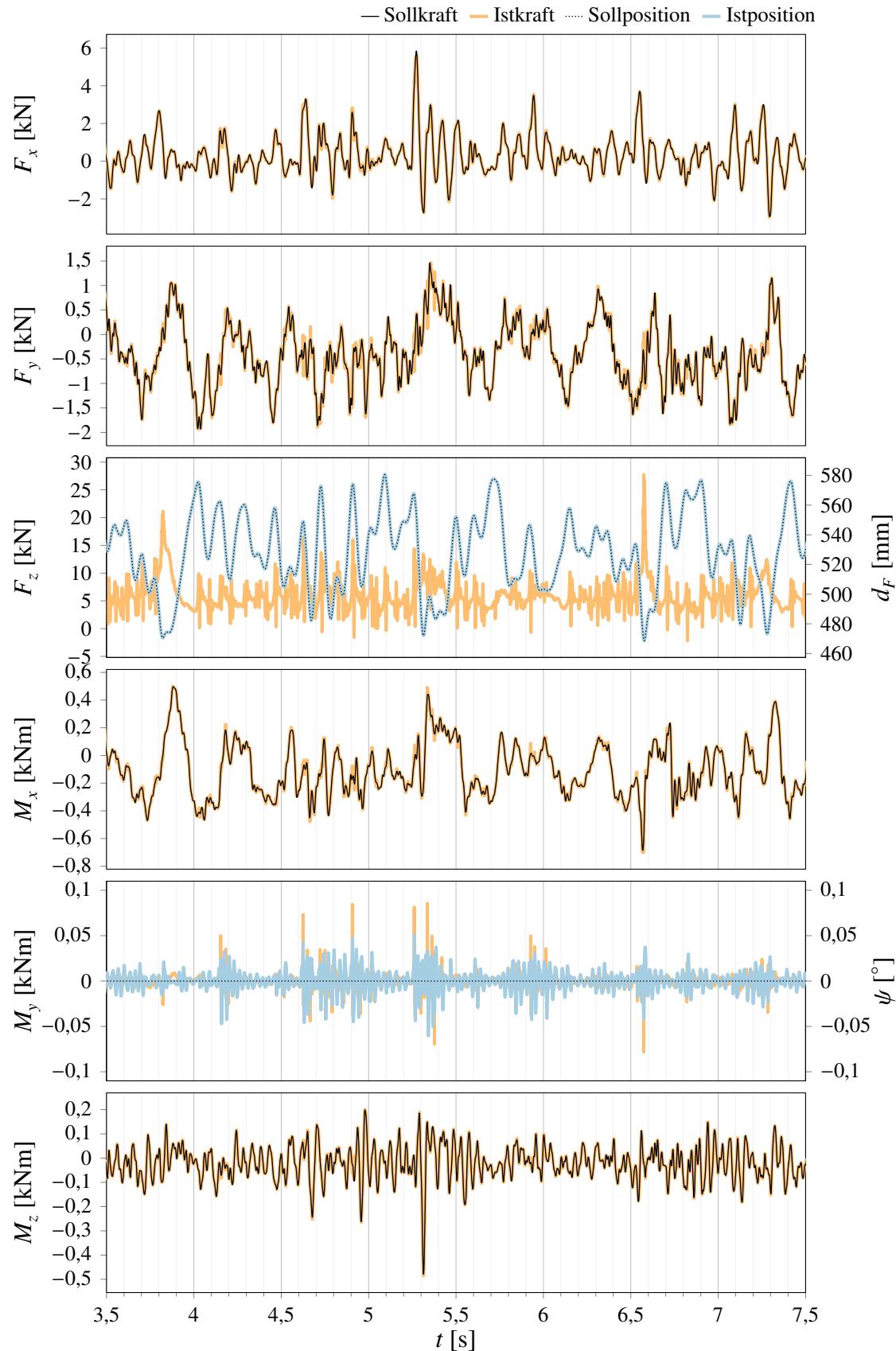


Bild A7-7: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

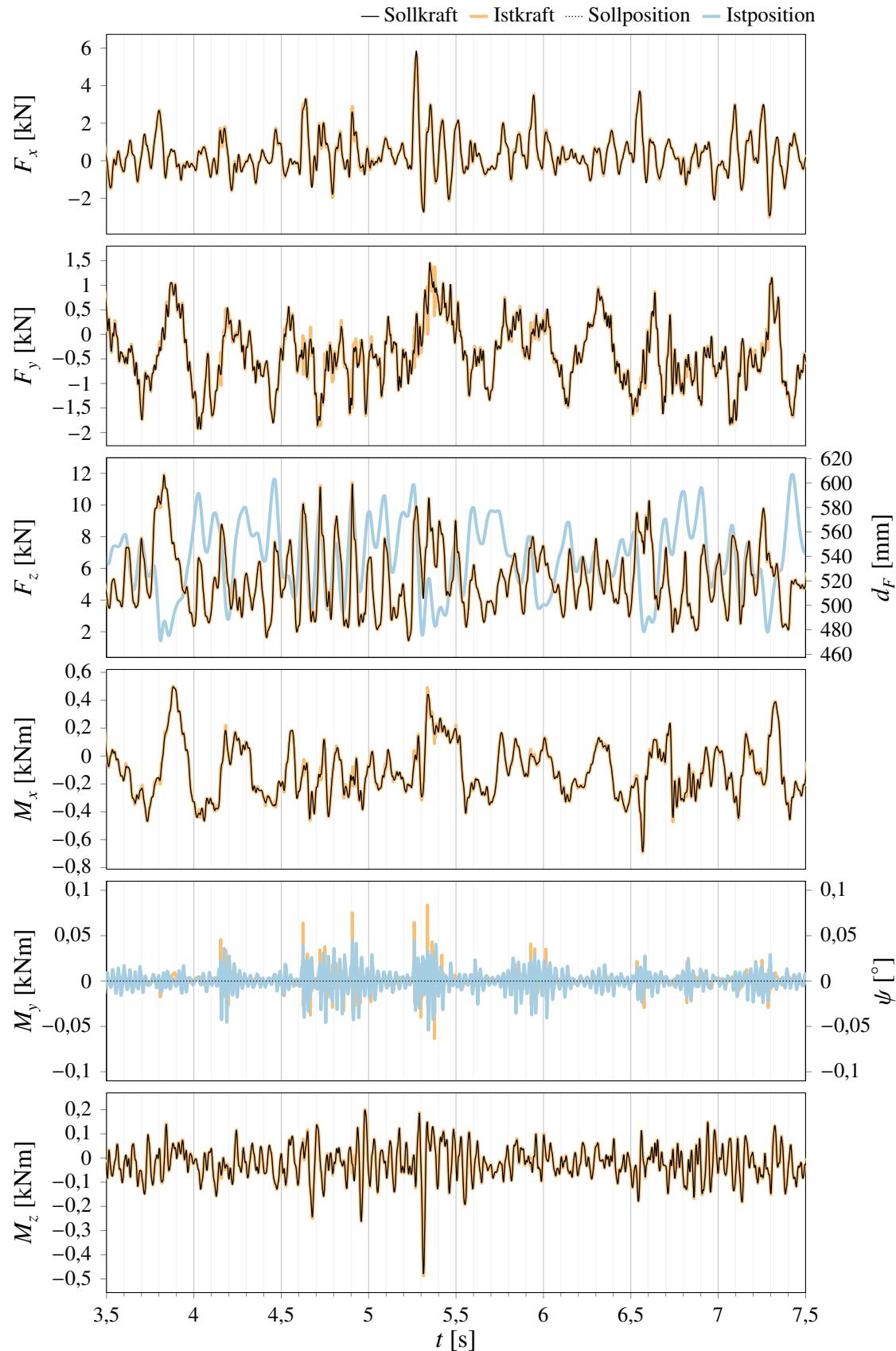


Bild A7-8: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f} = \text{diag}[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

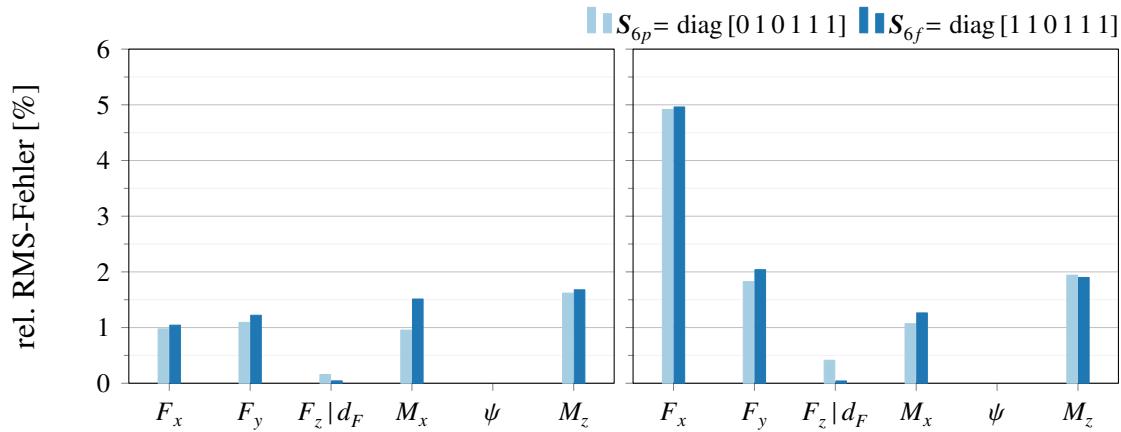


Bild A7-9: Rel. RMS-Fehler mit den Modellen  $\Sigma_{H13}$  (links) bzw.  $\Sigma_{H1}^*$  (rechts) im Regler (Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

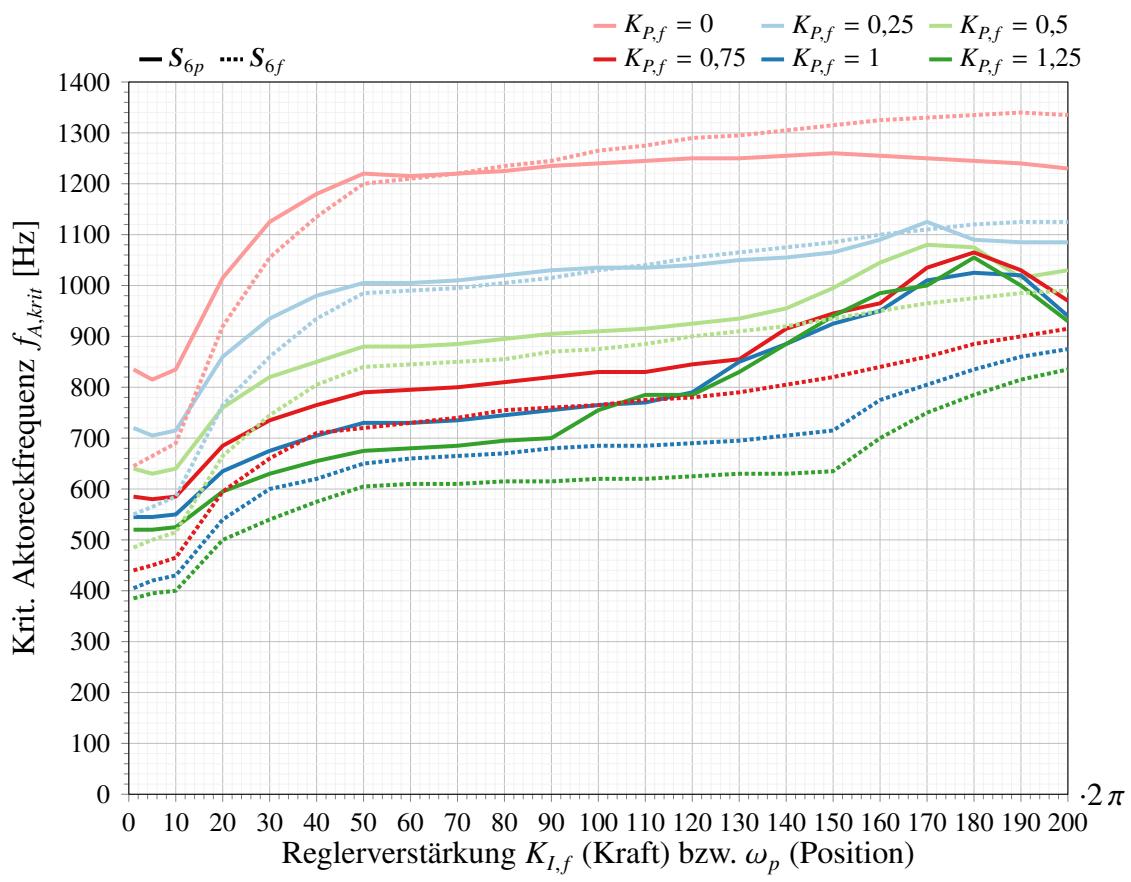


Bild A7-10: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  für PT<sub>3</sub>-Aktordynamik bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$   
(Regler  $\Sigma_{R,LM6a}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

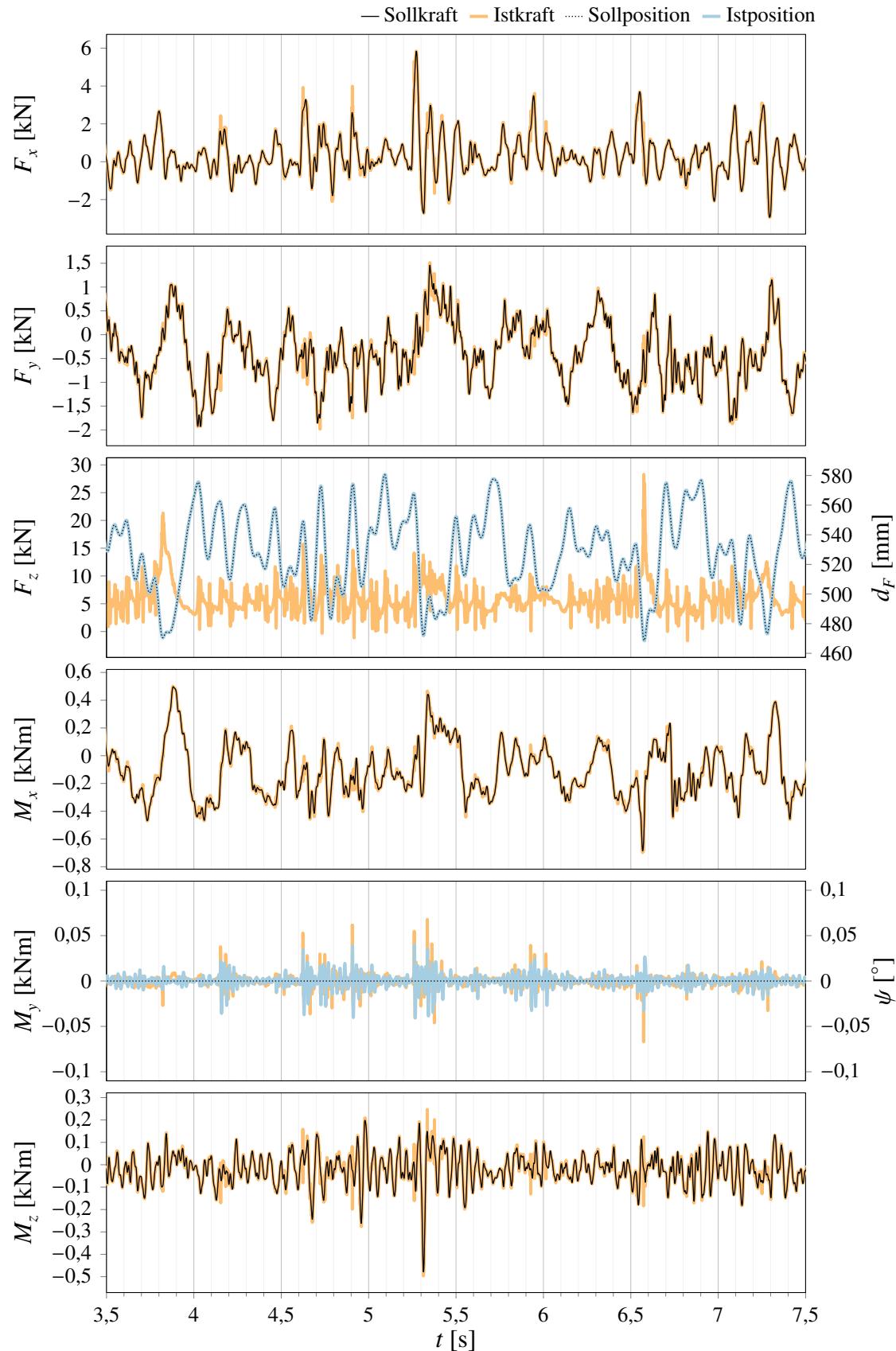


Bild A7-11: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LMB}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

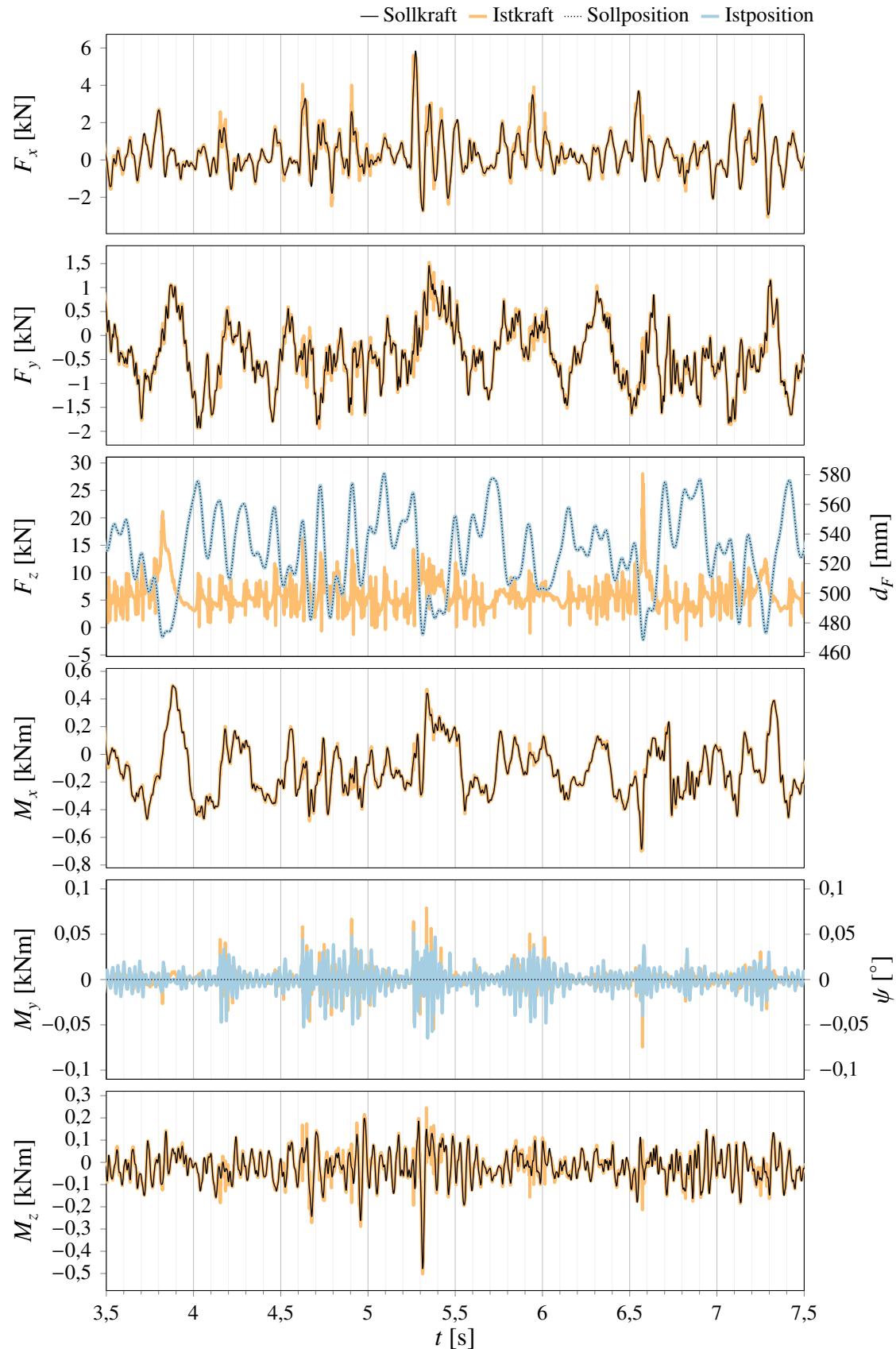


Bild A7-12: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p} = \text{diag} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LMB}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

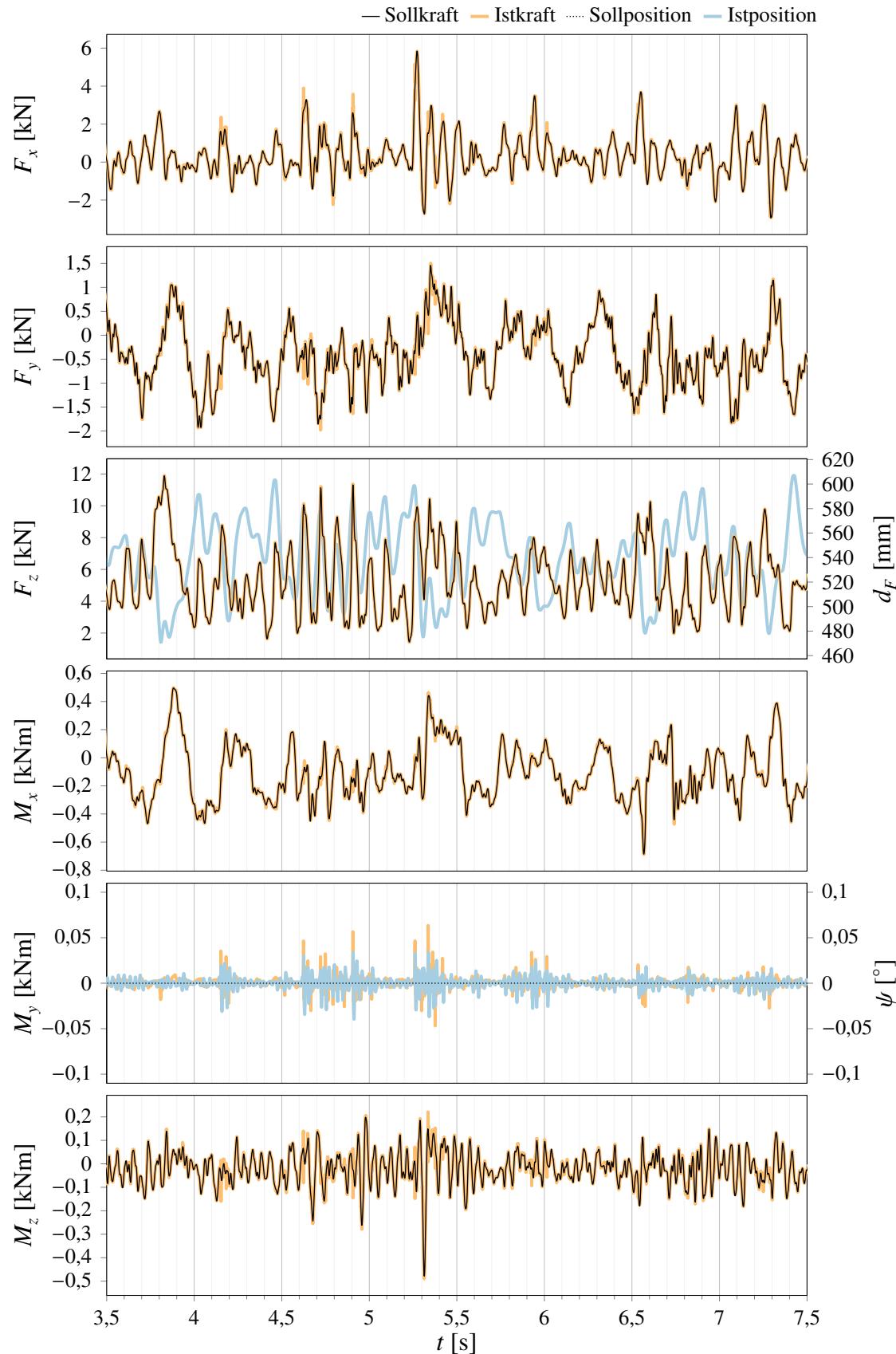


Bild A7-13: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f} = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

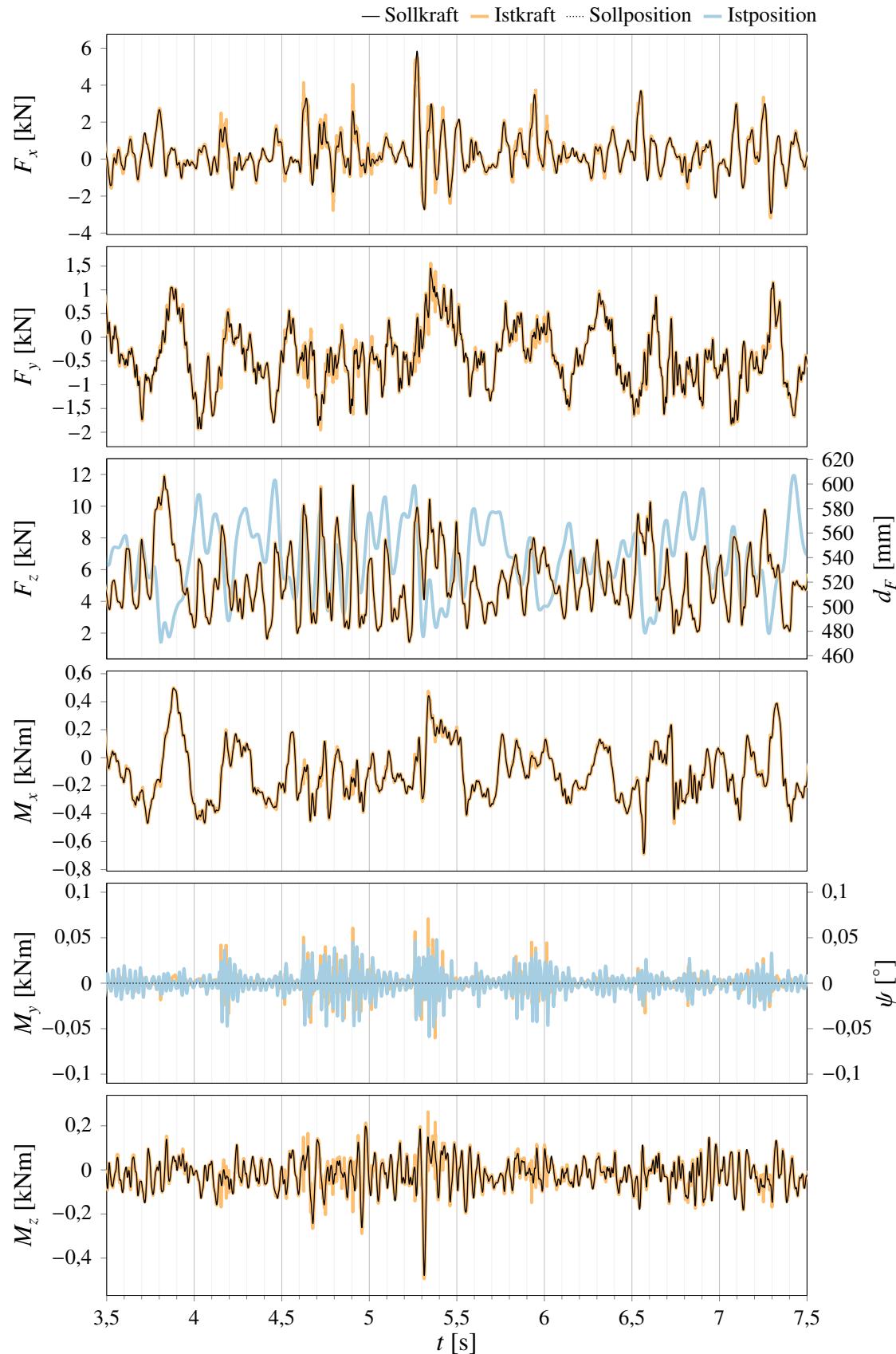


Bild A7-14: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f} = \text{diag} [1 1 0 1 1 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LMB}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

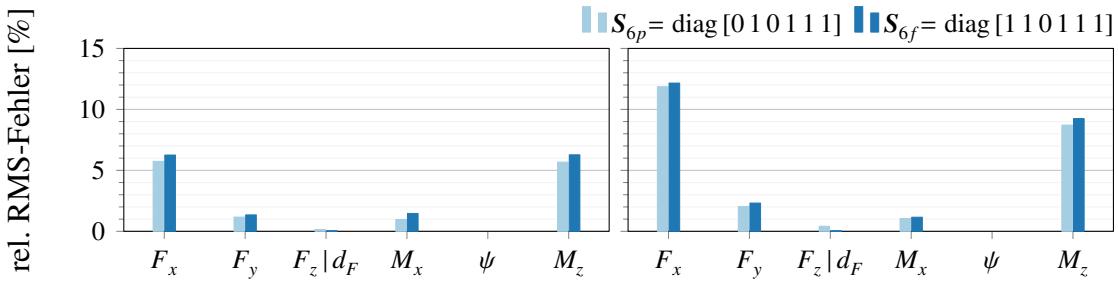


Bild A7-15: Rel. RMS-Fehler mit den Modellen  $\Sigma_{H13}$  (links) bzw.  $\Sigma_{H1}^*$  (rechts) im Regler (Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

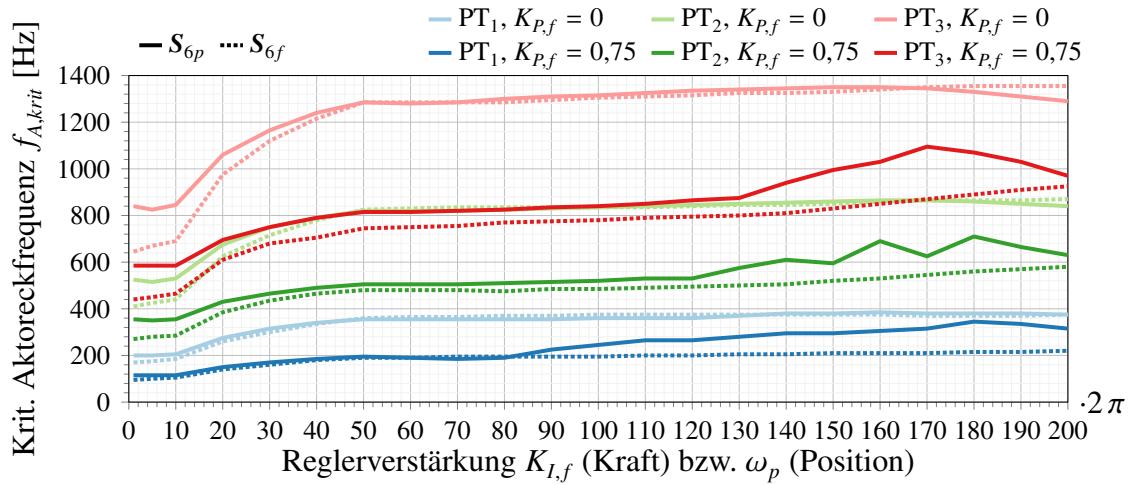


Bild A7-16: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  in Abhängigkeit der Parametrierung der äußeren Regelkreise (Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

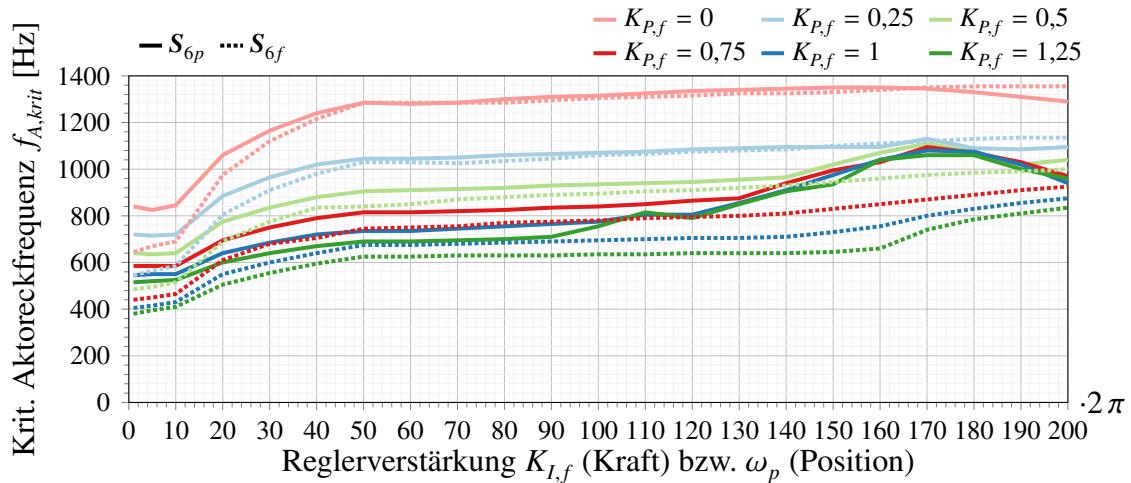


Bild A7-17: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  für  $PT_3$ -Aktordynamik bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$  (Regler  $\Sigma_{R,LM6b}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

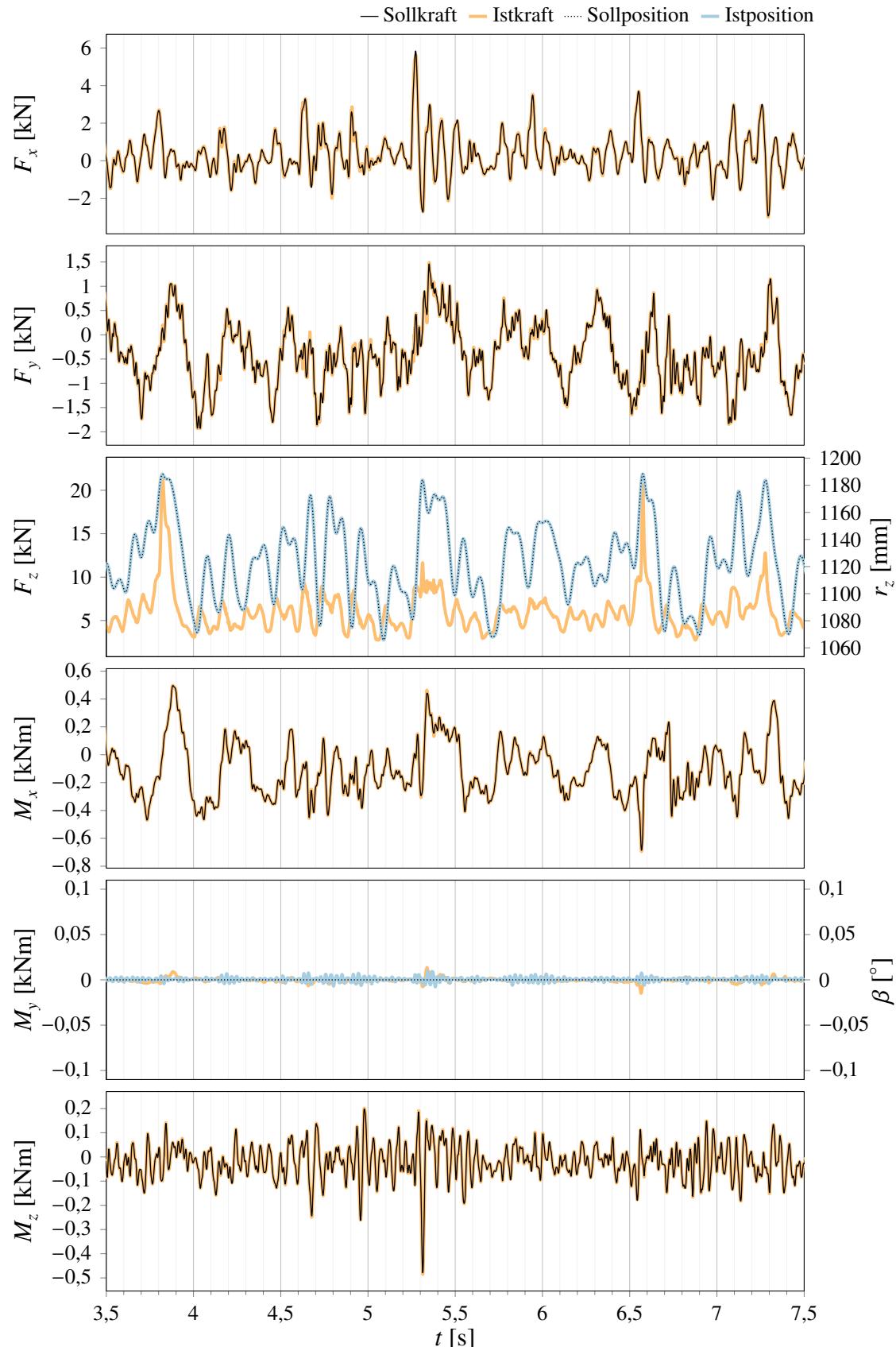


Bild A7-18: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p}^* = \text{diag} [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

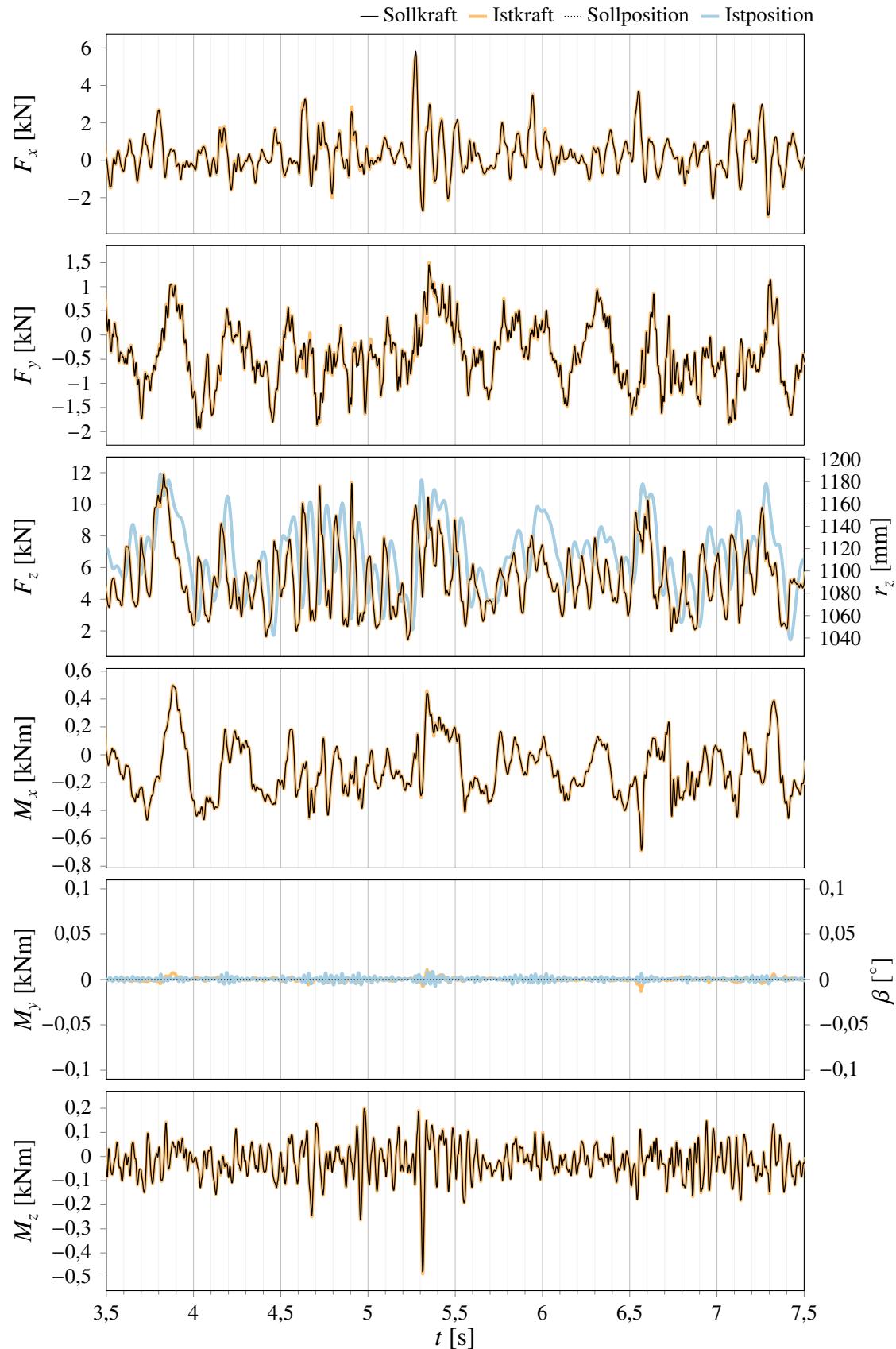


Bild A7-19: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f}^* = \text{diag} [1 1 1 1 0 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

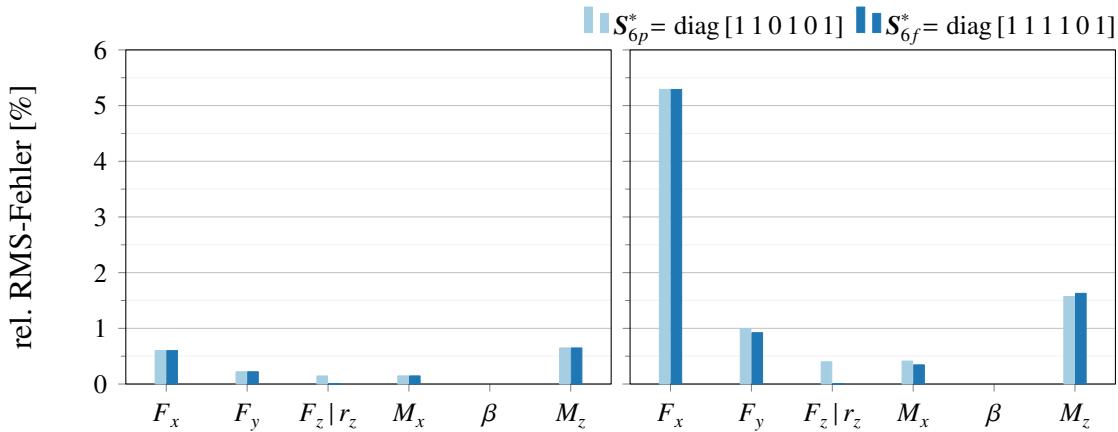


Bild A7-20: Rel. RMS-Fehler mit den Modellen  $\Sigma_{H13}$  (links) bzw.  $\Sigma_{H1}^*$  (rechts) im Regler (Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

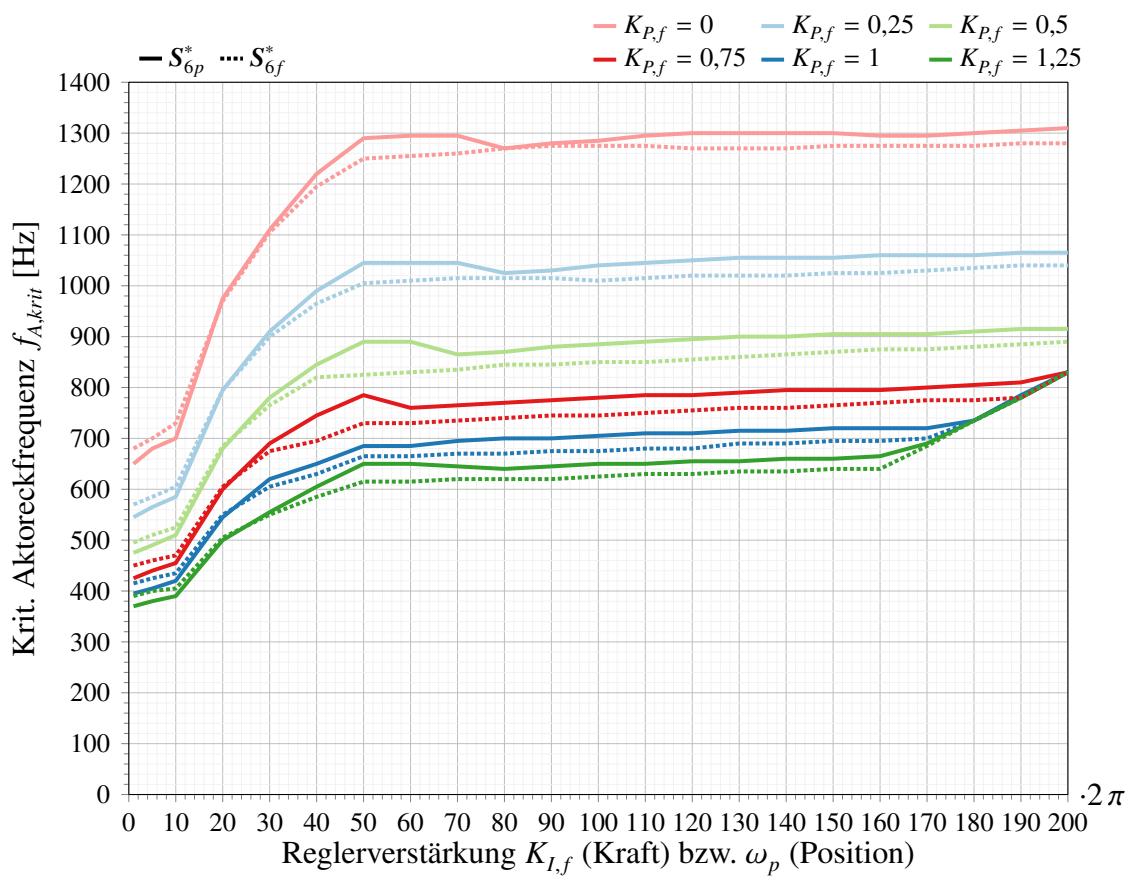


Bild A7-21: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  für PT<sub>3</sub>-Aktordynamik bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$   
(Regler  $\Sigma_{R,LM6z}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

## A7.2 Entwurf mit exakter Ein-/Ausgangslinearisierung

### A7.2.1 Ideal starre Bindung von Endeffektor und Radnabe

Dieser Abschnitt enthält die zusätzlichen Abbildungen zum Regelungsentwurf für die starre Bindung aus Endeffektor und Umgebung mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung.

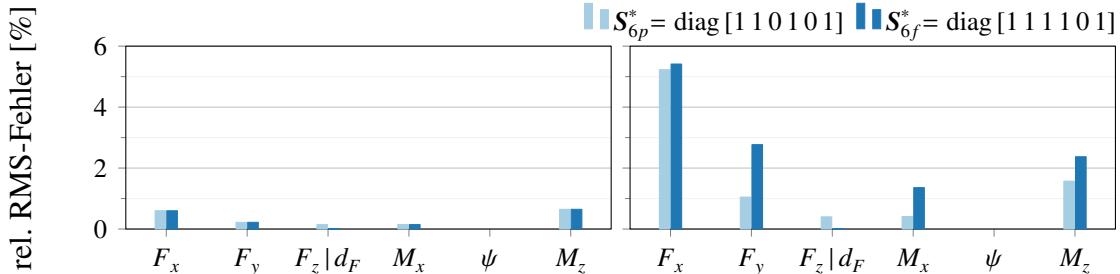


Bild A7-22: Rel. RMS-Fehler mit den Modellen  $\Sigma_{H13}$  (links) bzw.  $\Sigma_{H1}^*$  (rechts) im Regler (Regler  $\Sigma_{R,EALin}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

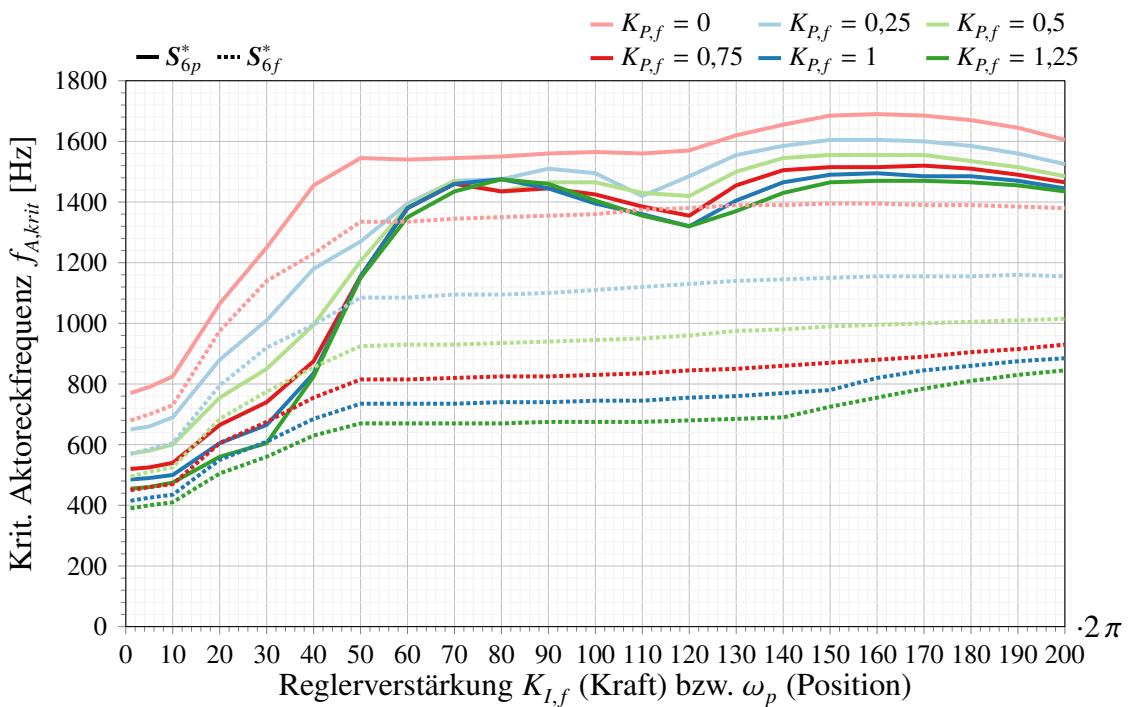


Bild A7-23: Erforderliche Aktorbandbreite  $f_{A,krit}$  für  $PT_3$ -Aktordynamik bei Variation der Reglerverstärkung  $K_{P,f}$   
(Regler  $\Sigma_{R,EALin}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H13}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

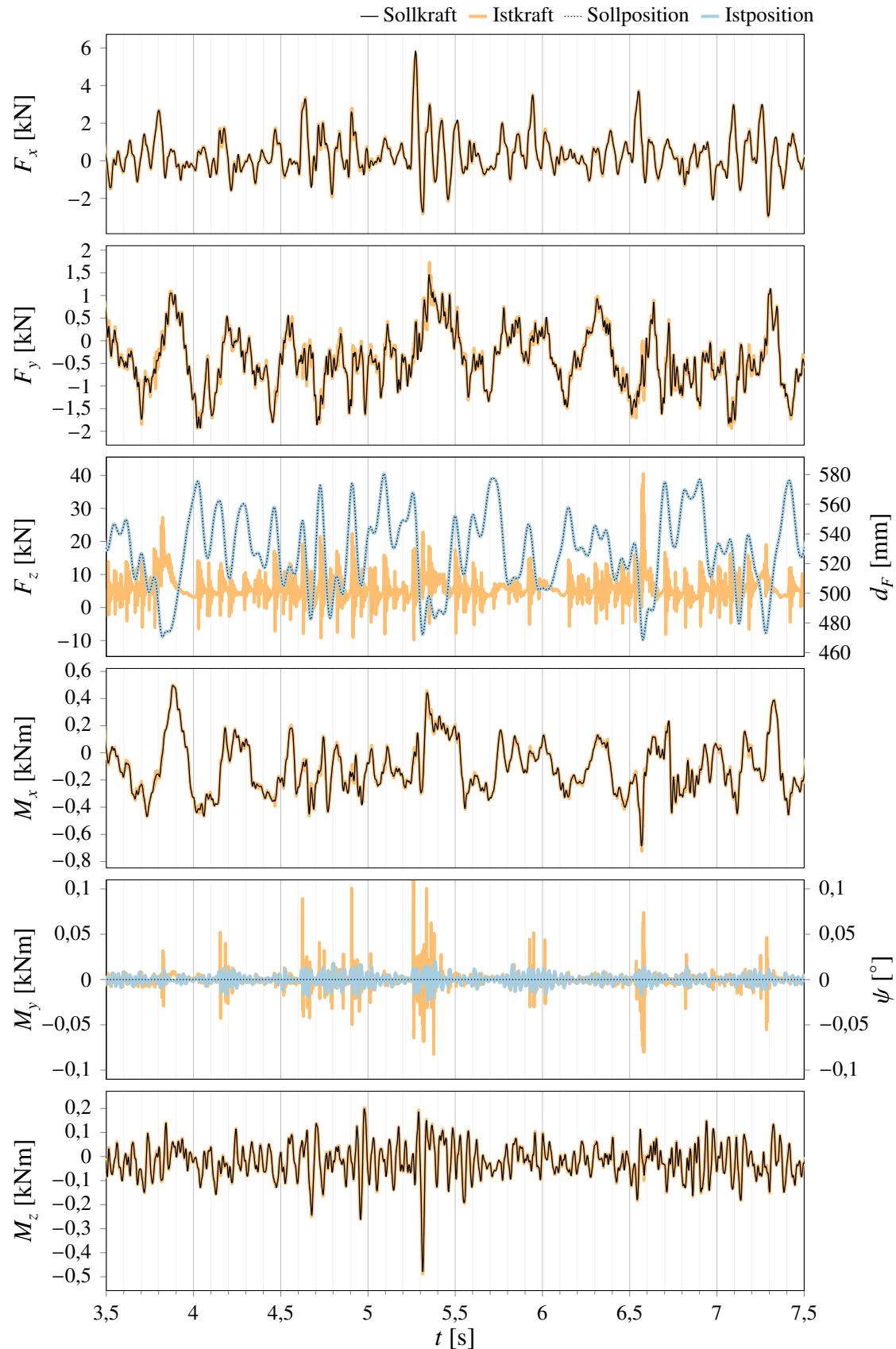


Bild A7-24: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6p}^* = \text{diag} [1 1 0 1 0 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,EALin}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}^*$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

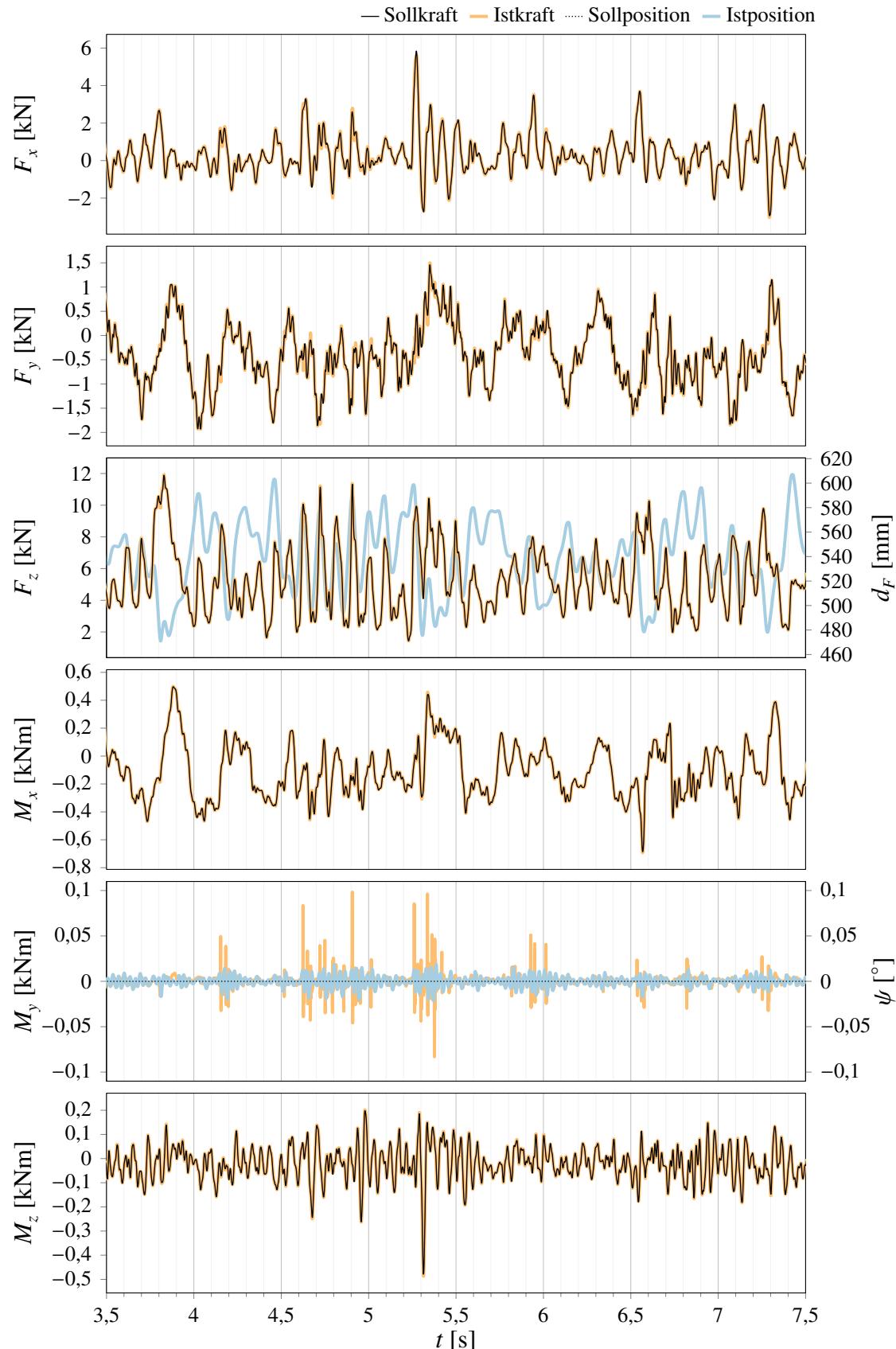


Bild A7-25: Soll-/Ist-Vergleich für die Selektionsmatrix  $S_{6f}^* = \text{diag} [1 1 1 1 0 1]$   
 (Regler  $\Sigma_{R,EALin}$  mit Hexapodmodell  $\Sigma_{H1}$ , Strecke  $\Sigma_{G11}$ )

### A7.3 Entwürfe ohne Entkopplung der (Kraft-) Regelgrößen

#### A7.3.1 Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung

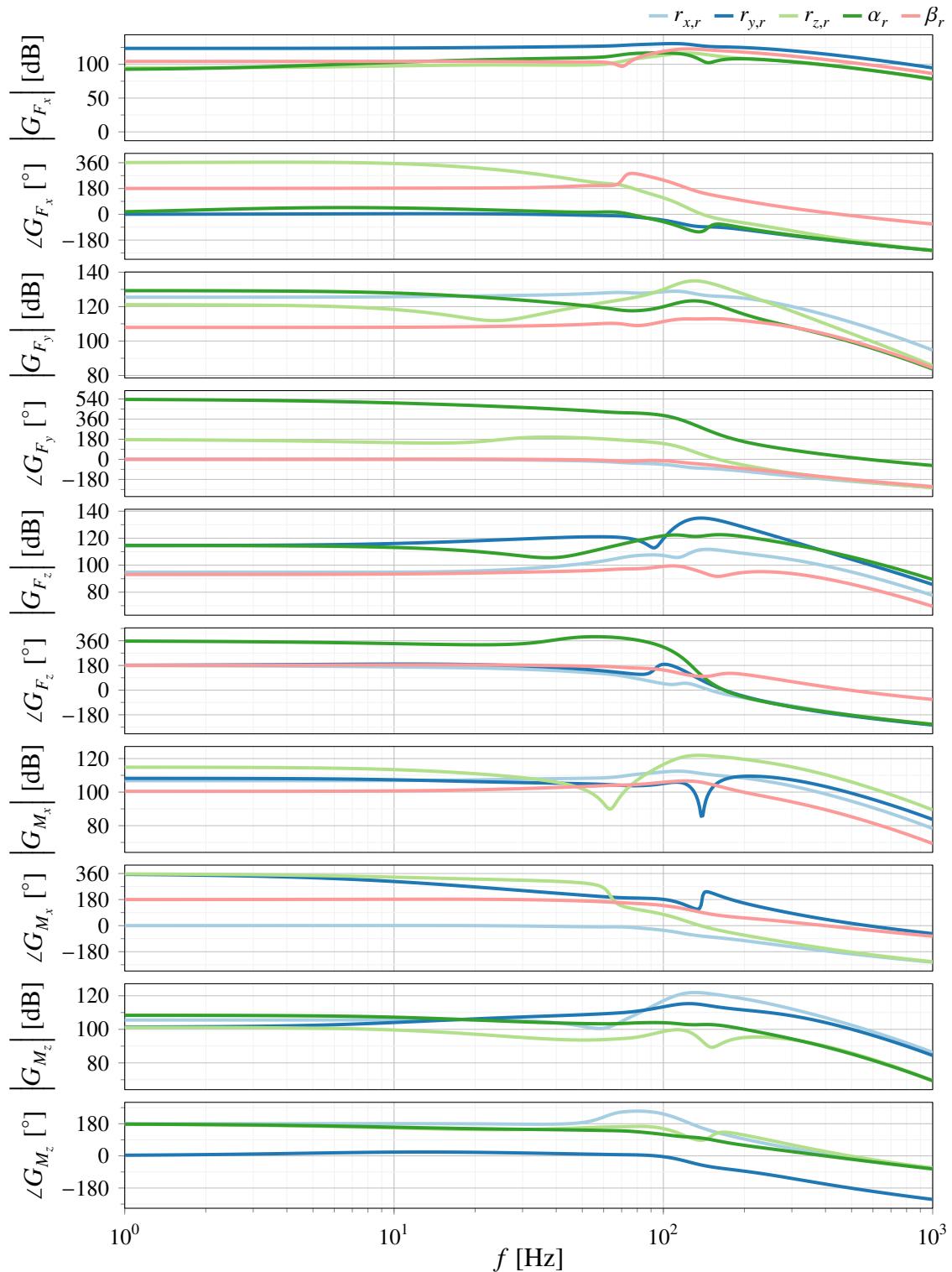


Bild A7-26: Verkopplungen bei impliziter Kraftregelung mit unterlagerter Positionsregelung

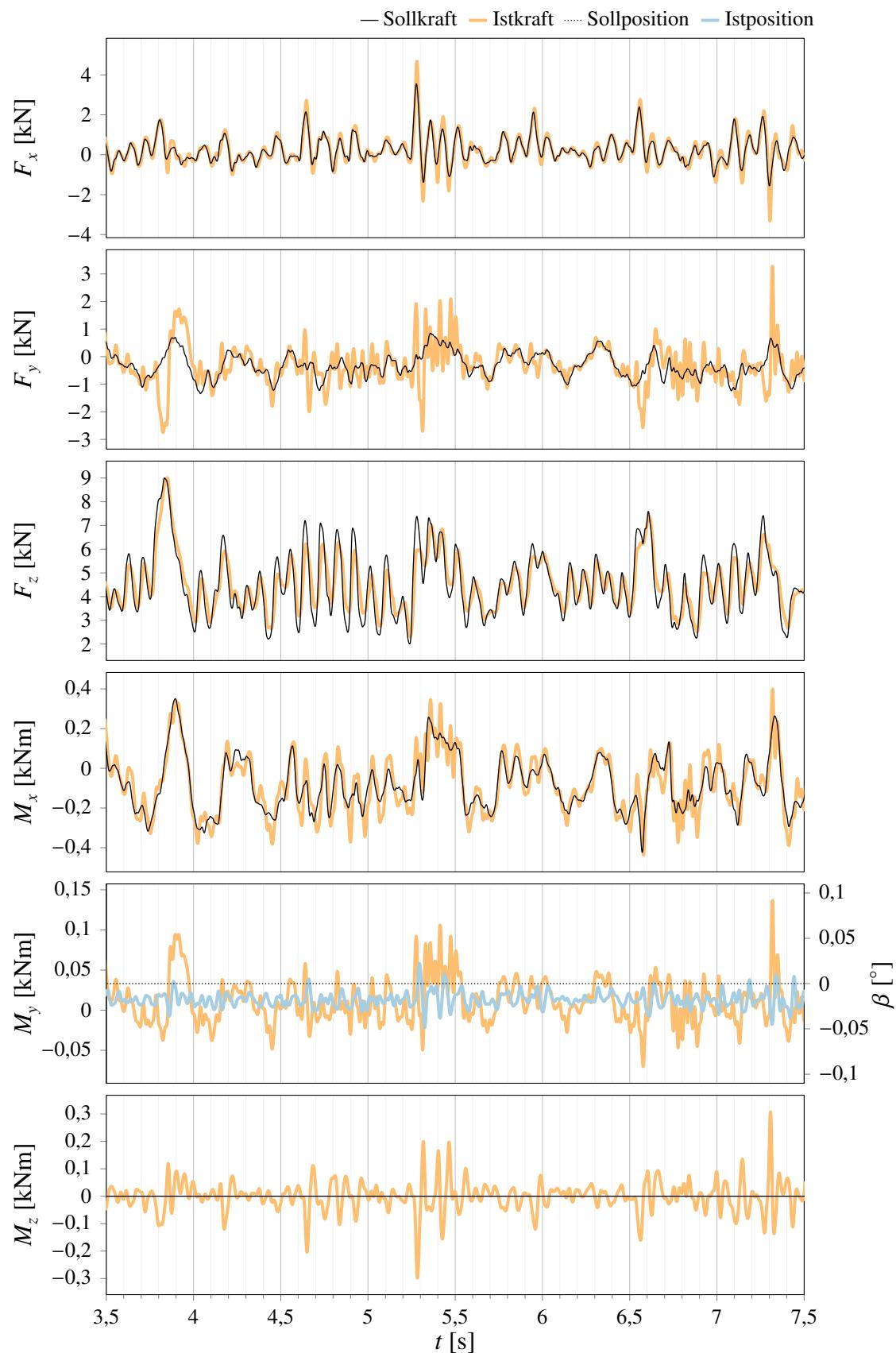


Bild A7-27: Soll-/Ist-Vergleich für die mit 20 Hz vorgefilterte und um den Faktor 0,75 skalierte Schlechtweganregung (Prüfstandsmessung)

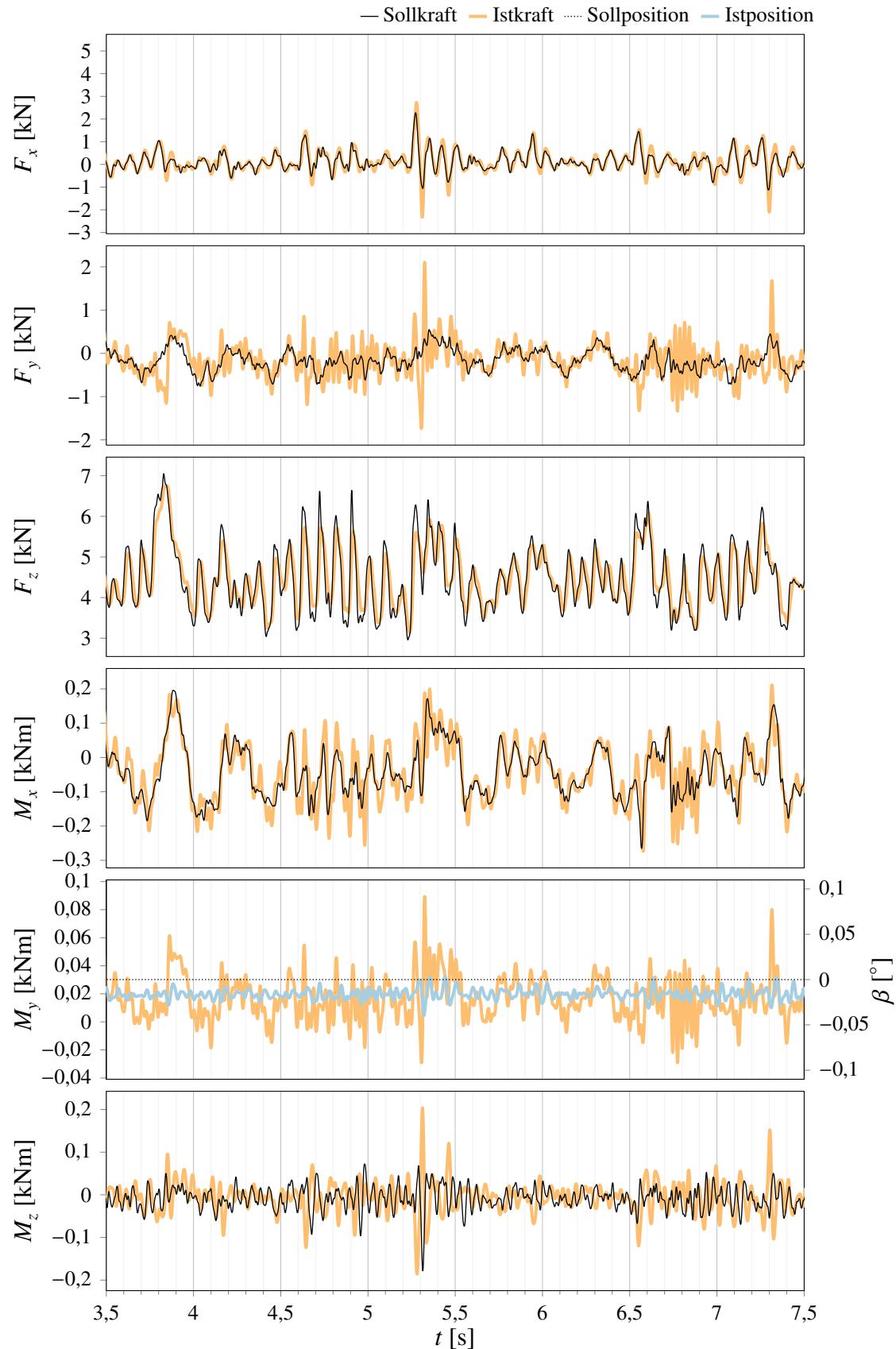
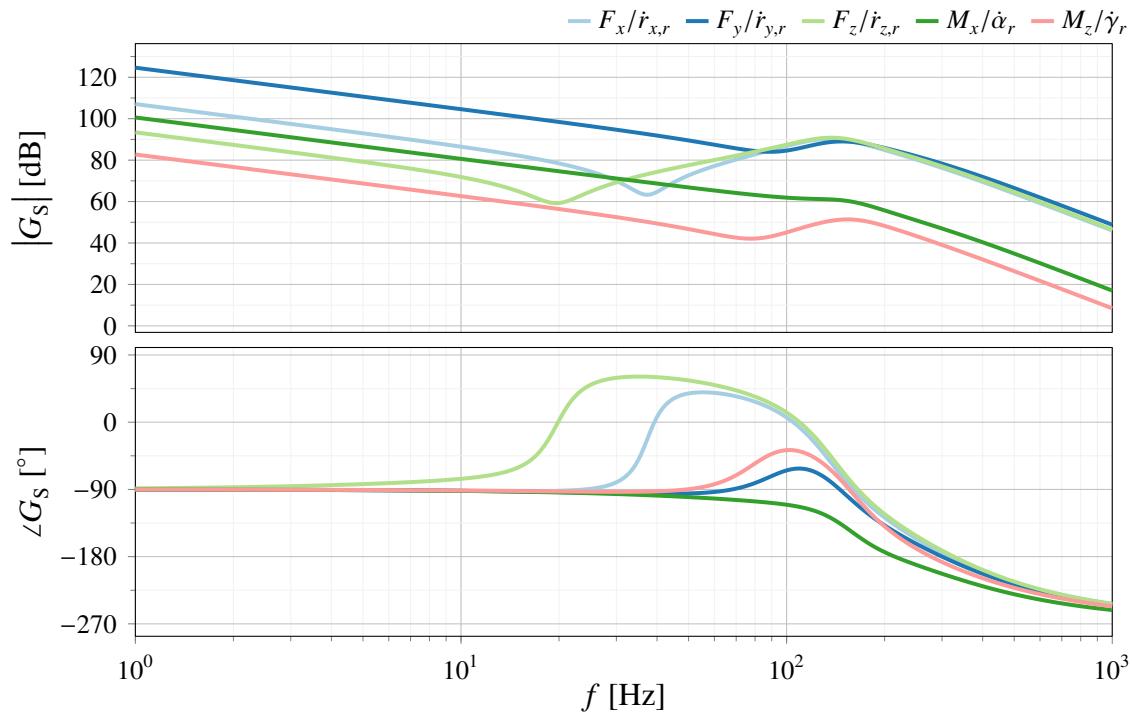
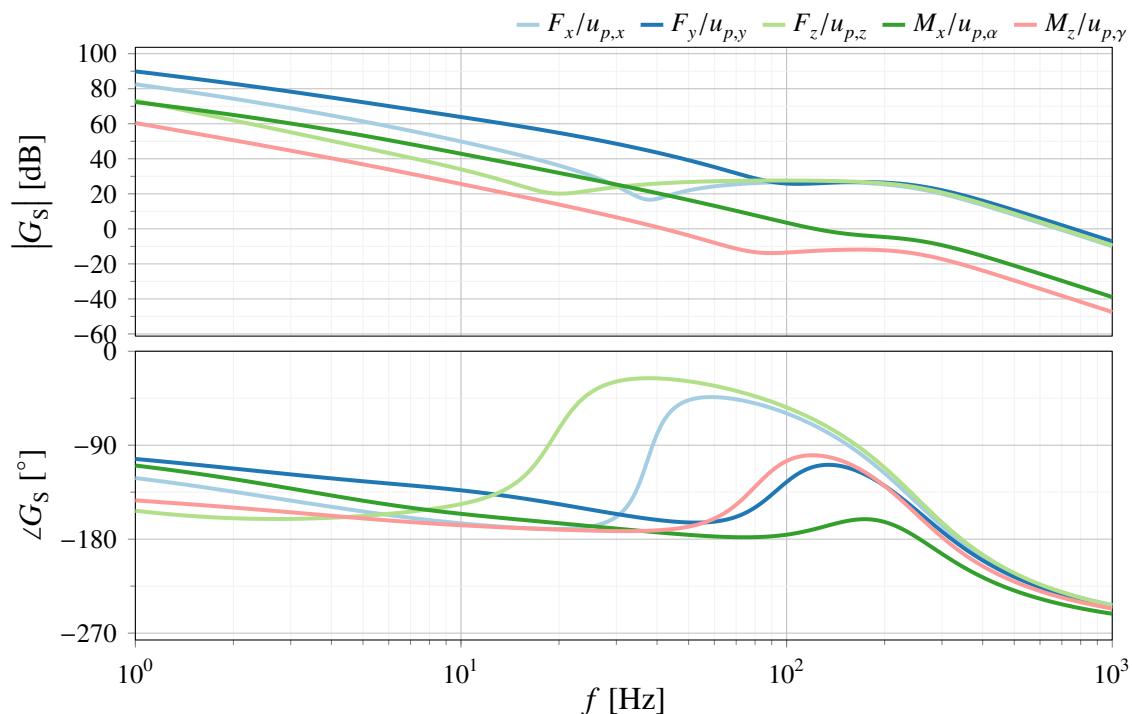


Bild A7-28: Soll-/Ist-Vergleich für die mit 40 Hz vorgefilterte und um den Faktor 0,4 skalierte Schlechtweganregung (Prüfstandsmessung)

### A7.3.2 Weitere Ansätze



(a) *Implizite Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung*



(b) *Explizite Kraftregelung auf Basis der Linearisierung der Endeffektorpose*

Bild A7-29: Übertragungsverhalten der offenen Regelkreise der weiteren Regelungsansätze ohne Entkopplung, vgl. Abschnitt 5.3.2

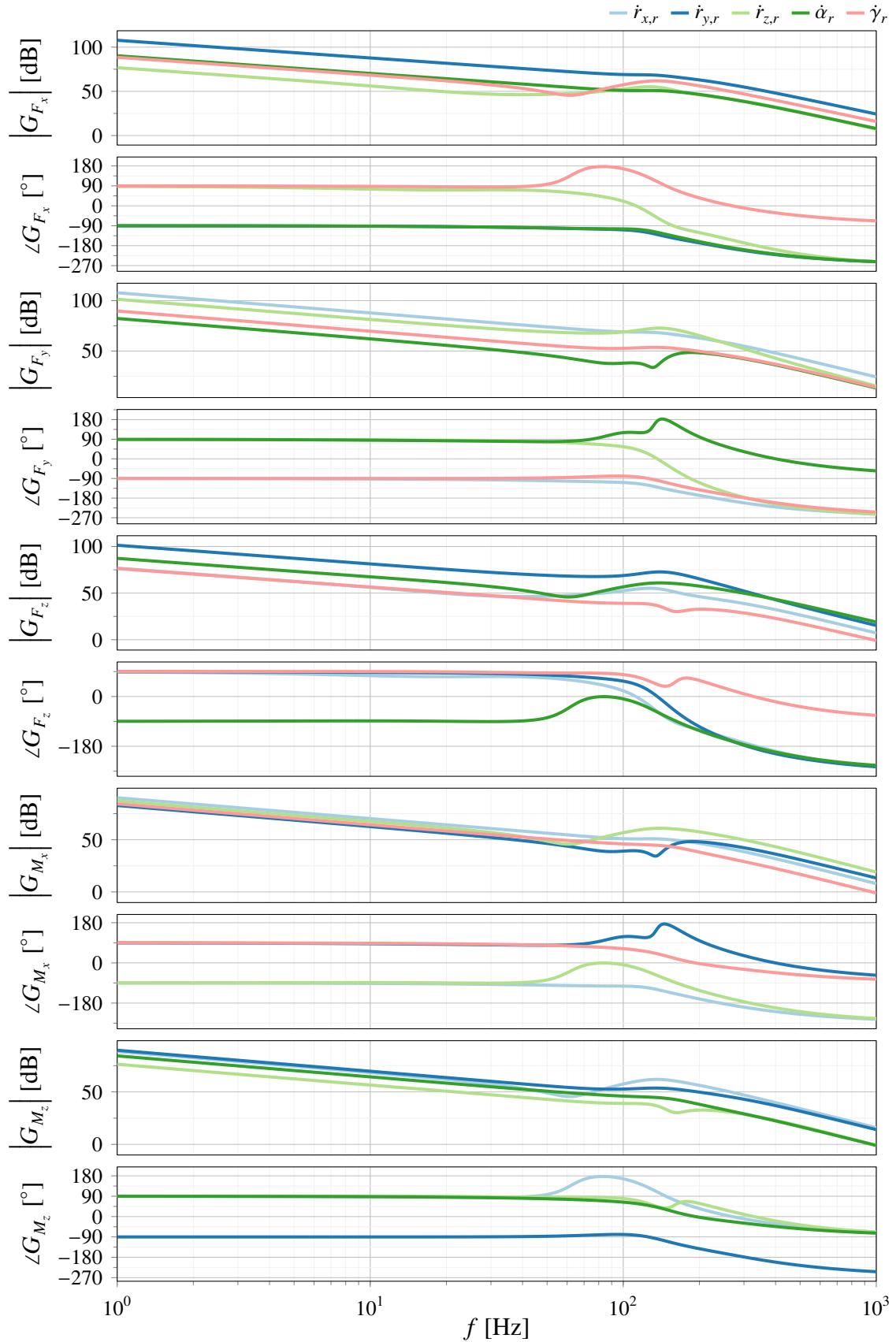


Bild A7-30: Verkopplungen bei impliziter Kraftregelung mit unterlagerter Geschwindigkeitsregelung

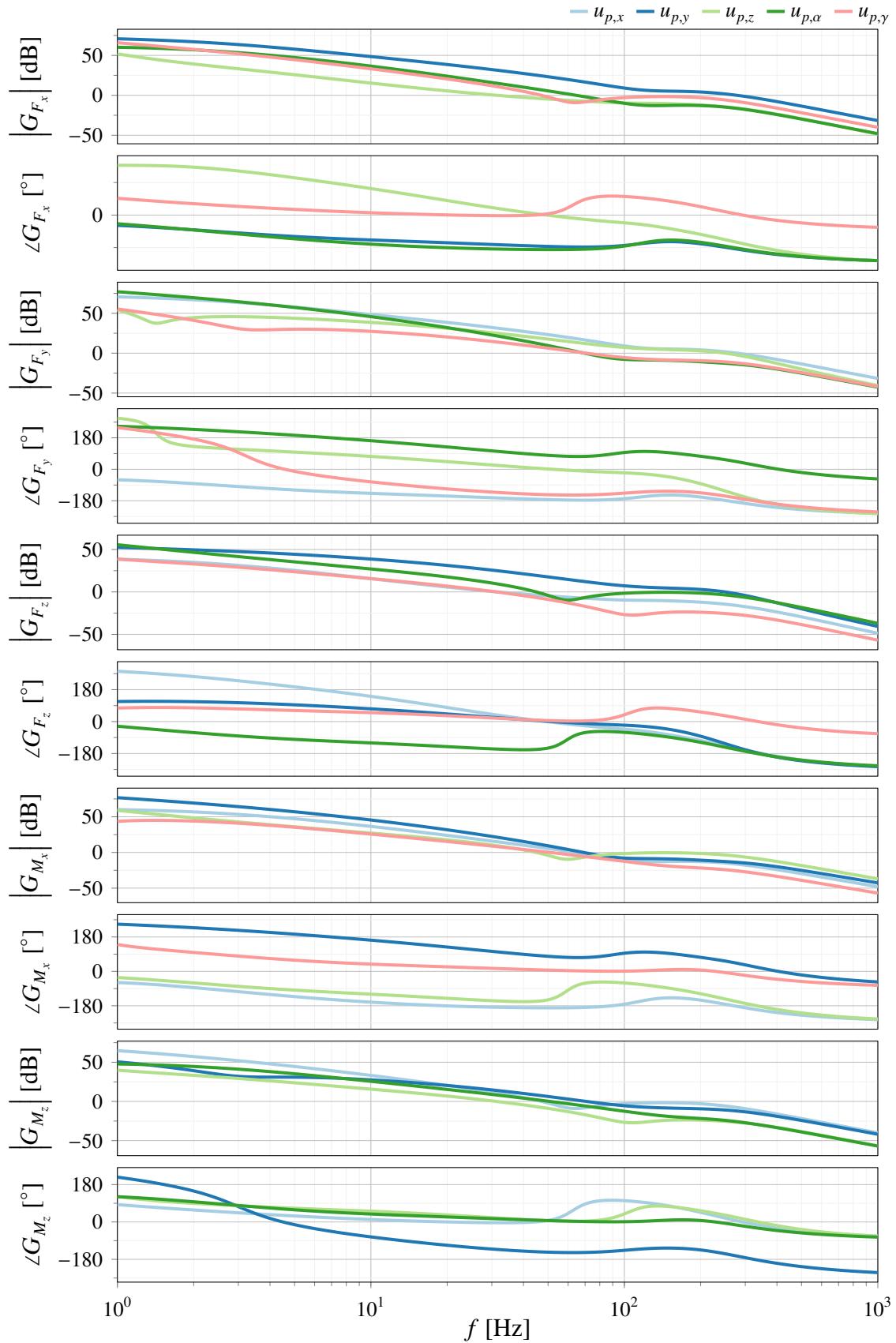


Bild A7-31: Verkopplungen bei expliziter Kraftregelung auf Basis der Linearisierung der Endeffektorpose

## A7.4 Kombination mit ILR für hohe Bandbreitenanforderung

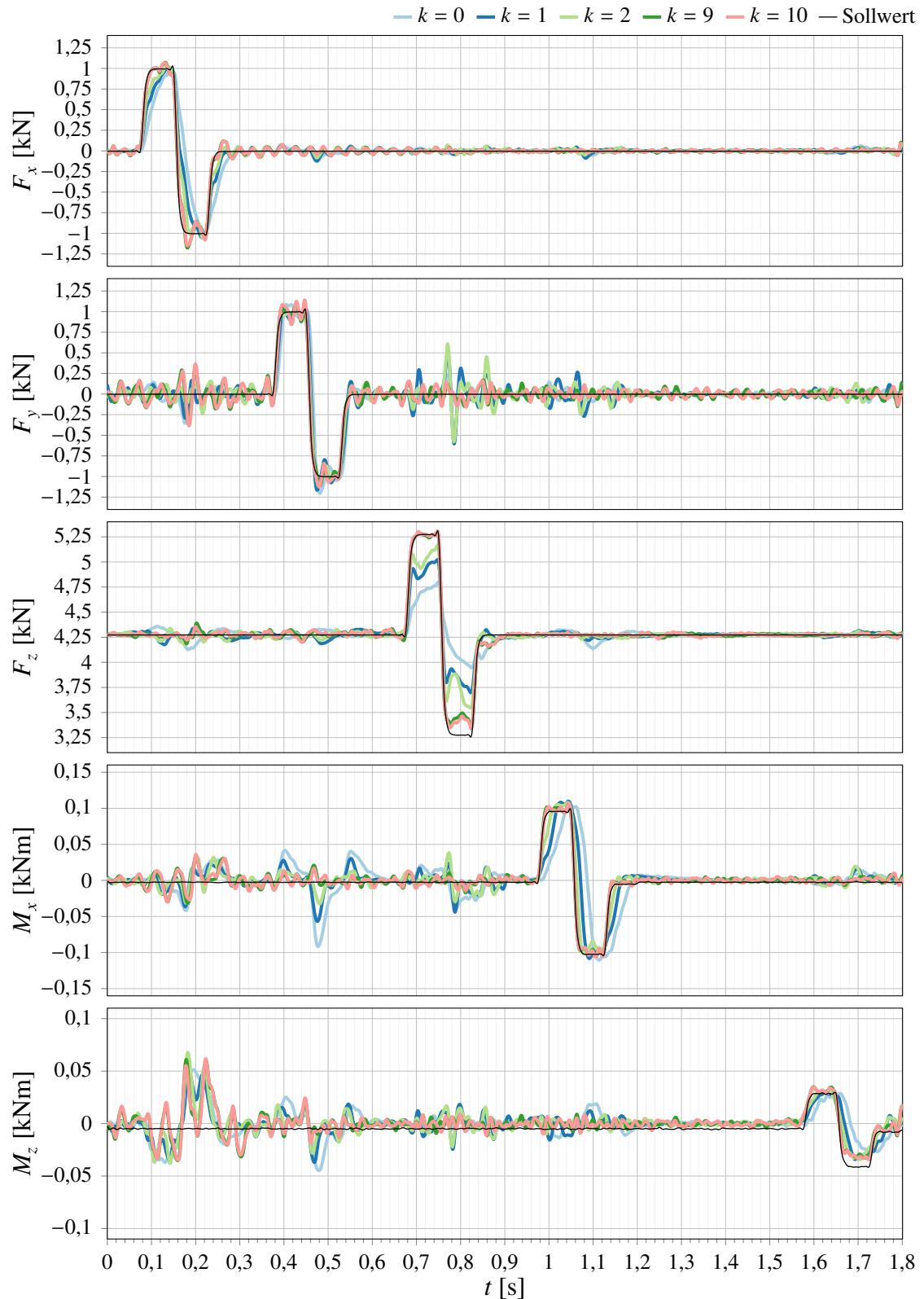


Bild A7-32: Soll/Ist-Vergleich für die Rechteckanregung in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$ , Lernfaktor  $\mathbf{Q} = 0,5 \cdot \mathbf{I}$  (Prüfstandsmessung)

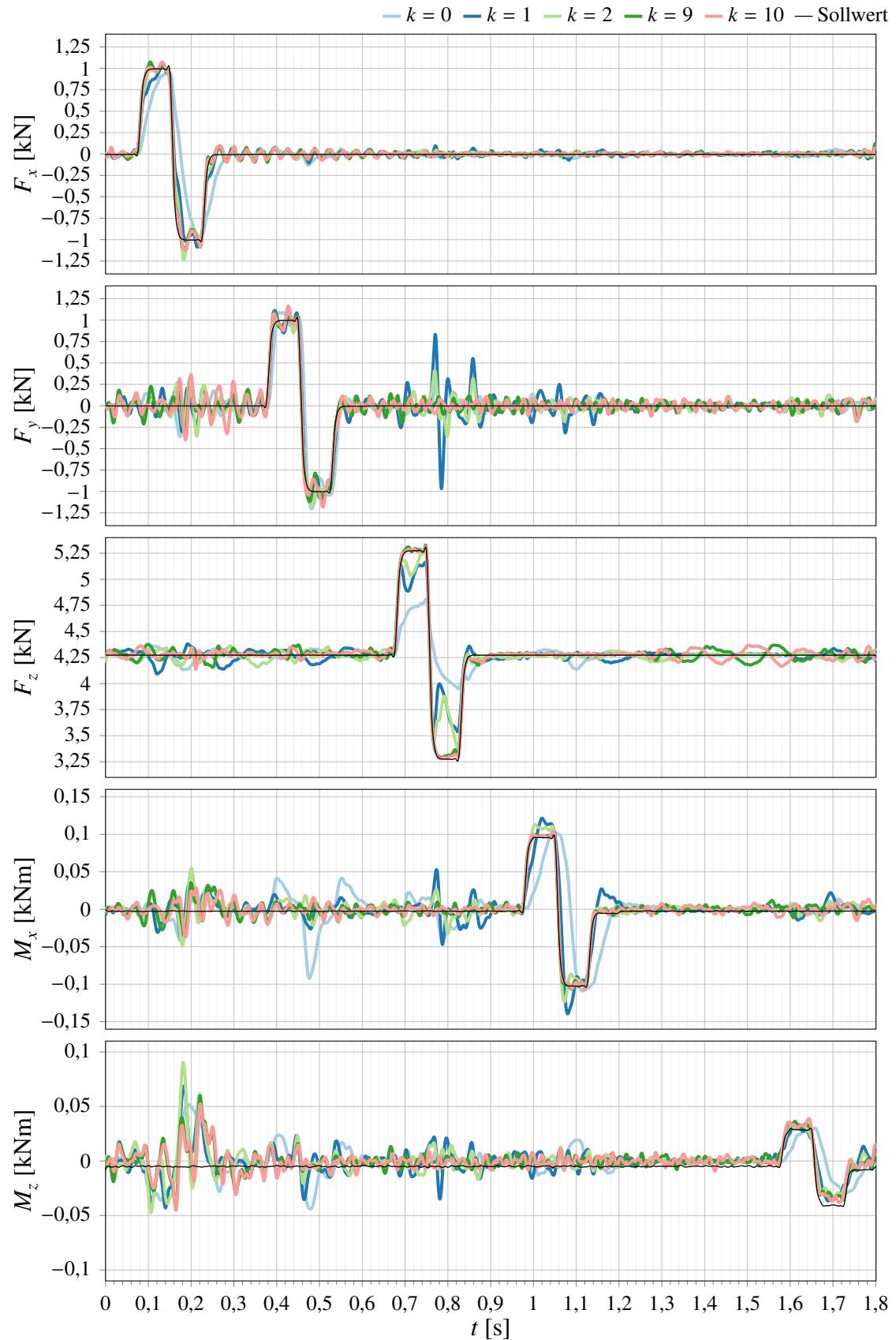


Bild A7-33: Soll-/Ist-Vergleich für die Rechteckanregung in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$ , Lernfaktor  $\mathbf{Q} = 0,8 \cdot \mathbf{I}$  (Prüfstandsmessung)

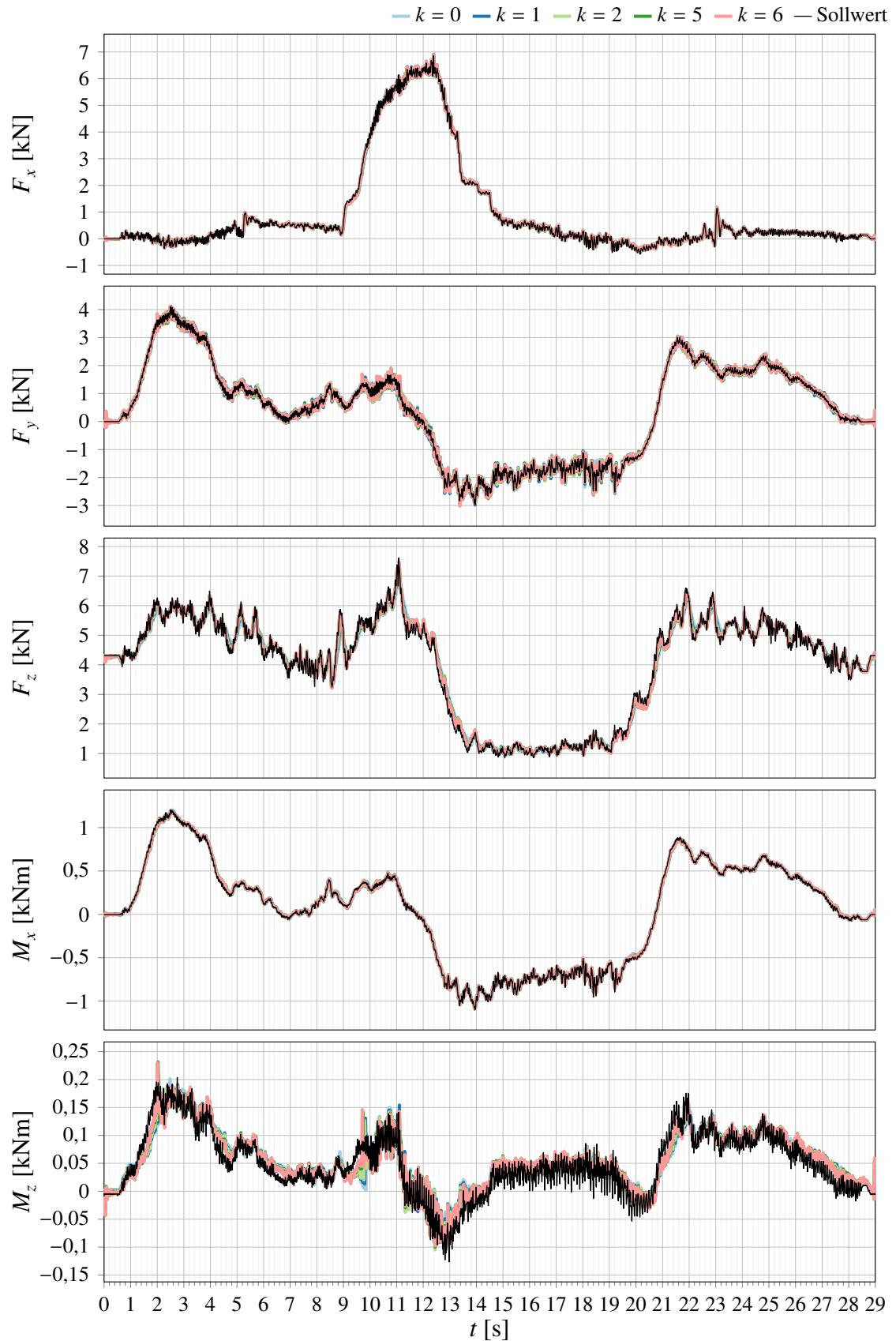


Bild A7-34: Soll-/Ist-Vergleich für ein Target-Signal aus einem Fahrversuch in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$ , Lernfaktor  $Q = 0,6 \cdot I$  (Prüfstandsmessung)

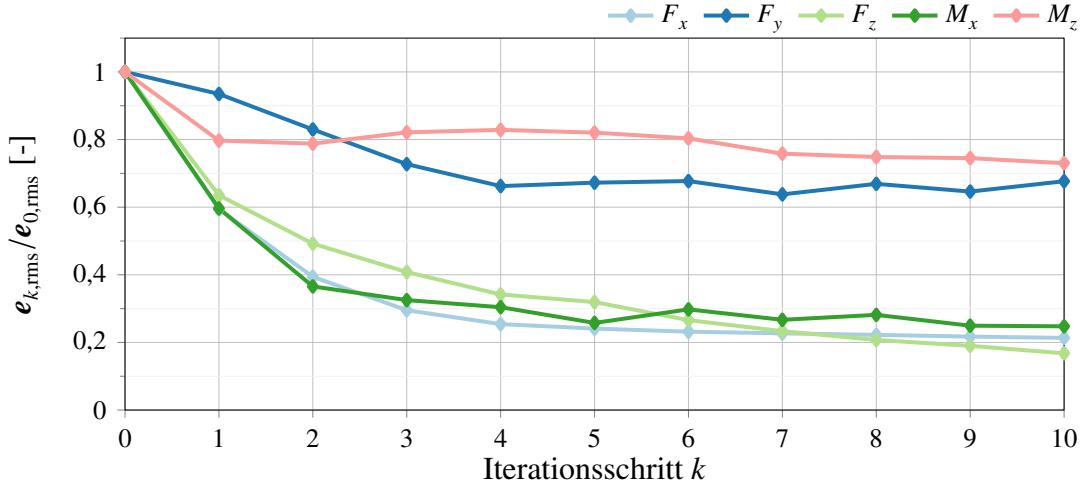
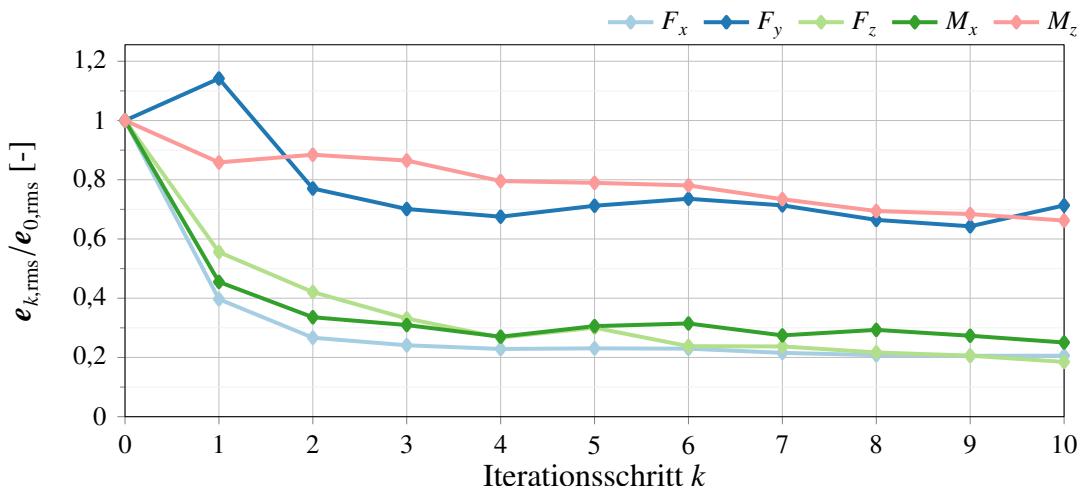
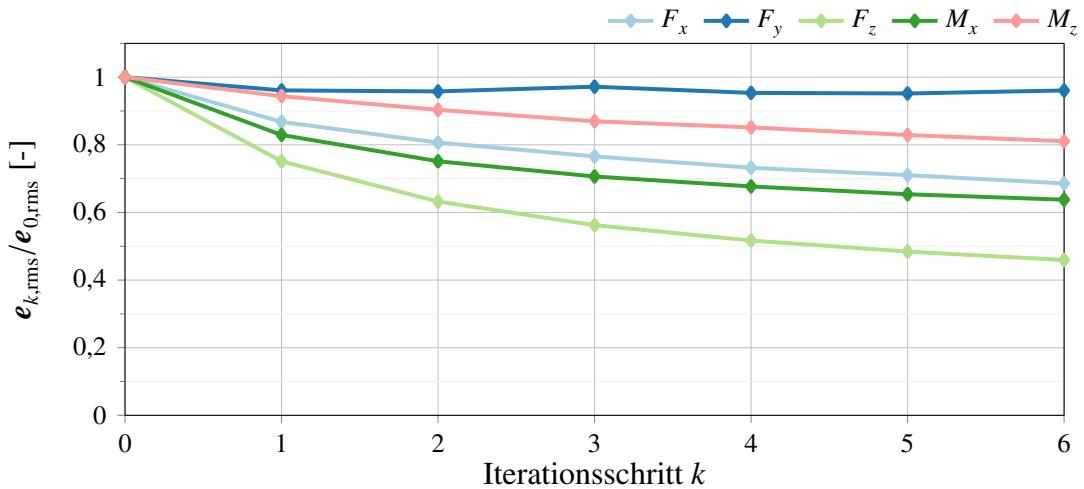
(a) Rechteckanregung nach Bild A7-32, Lernfaktor  $Q = 0,5 \cdot I$ (b) Rechteckanregung nach Bild A7-33, Lernfaktor  $Q = 0,8 \cdot I$ (c) Target-Signal nach Bild A7-34, Lernfaktor  $Q = 0,6 \cdot I$ 

Bild A7-35: Verlauf der Abweichung  $e_k$  in Abhängigkeit der Anzahl an Iterationsschritten  $k$  (Prüfstandsmessungen)

## A8 Übertragungsverhalten der Servoventile

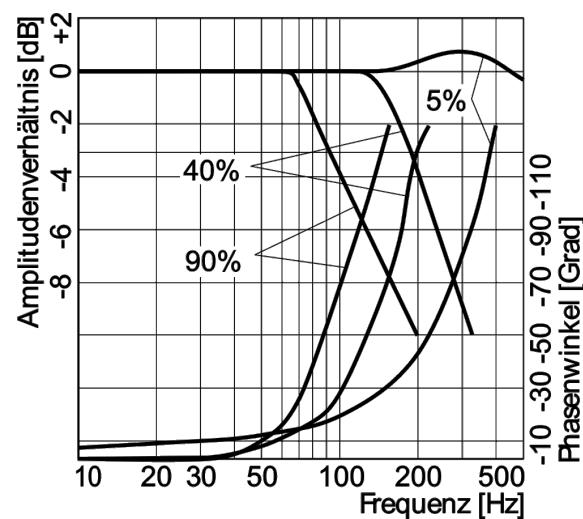


Bild A8-1: Übertragungsverhalten der am Hexapod eingesetzten Servoventile für 5 %, 40 % und 90 % Eingangssignal (Betriebsdruck 210 bar, Ölviskosität  $32 \text{ mm}^2/\text{s}$ , Öltemperatur  $40^\circ\text{C}$ ) [Moo19]



## **Erklärung zur Zitation von Inhalten aus studentischen Arbeiten**

In Ergänzung zu meinem Antrag auf Zulassung zur Promotion in der Fakultät für Maschinenbau der Universität Paderborn erkläre ich gemäß §11 der Promotionsordnung und unter Beachtung der Regelung zur Zitation studentischer Arbeiten:

Die von mir vorgelegte Dissertation habe ich selbstständig verfasst, **und ich habe keine anderen** als die dort angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Es sind **Inhalte** studentischen Ursprungs (studentische Arbeiten) in dieser Dissertation enthalten.

*Ich habe die verwendeten Arbeiten entsprechend der Regelung „Zitation aus studentischen Arbeiten in Dissertationen“ zitiert.*

Paderborn, im Dezember 2020

*Andreas Kohlstedt*



**Das Heinz Nixdorf Institut –  
Interdisziplinäres Forschungszentrum  
für Informatik und Technik**

Das Heinz Nixdorf Institut ist ein Forschungszentrum der Universität Paderborn. Es entstand 1987 aus der Initiative und mit Förderung von Heinz Nixdorf. Damit wollte er Ingenieurwissenschaften und Informatik zusammenführen, um wesentliche Impulse für neue Produkte und Dienstleistungen zu erzeugen. Dies schließt auch die Wechselwirkungen mit dem gesellschaftlichen Umfeld ein.

Die Forschungsarbeit orientiert sich an dem Programm „Dynamik, Mobilität, Vernetzung: Eine neue Schule des Entwurfs der technischen Systeme von morgen“. In der Lehre engagiert sich das Heinz Nixdorf Institut in Studiengängen der Informatik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaftswissenschaften.

Heute wirken am Heinz Nixdorf Institut neun Professoren mit insgesamt 150 Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern. Pro Jahr promovieren hier etwa 20 Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler.

**Heinz Nixdorf Institute –  
Interdisciplinary Research Centre  
for Computer Science and Technology**

The Heinz Nixdorf Institute is a research centre within the University of Paderborn. It was founded in 1987 initiated and supported by Heinz Nixdorf. By doing so he wanted to create a symbiosis of computer science and engineering in order to provide critical impetus for new products and services. This includes interactions with the social environment.

Our research is aligned with the program “Dynamics, Mobility, Integration: Enroute to the technical systems of tomorrow.” In training and education the Heinz Nixdorf Institute is involved in many programs of study at the University of Paderborn. The superior goal in education and training is to communicate competencies that are critical in tomorrow's economy.

Today nine Professors and 150 researchers work at the Heinz Nixdorf Institute. Per year approximately 20 young researchers receive a doctorate.



## Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- Bd. 368 SCHIERBAUM, T.: Systematik zur Kostenbewertung im Systementwurf mechatronischer Systeme in der Technologie Molded Interconnect Devices (MID). Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 368, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-87-8
- Bd. 369 BODDEN, E.; DRESSLER, F.; DUMITRESCU, R.; GAUSEMEIER, J.; MEYER AUF DER HEIDE, F.; SCHEYTT, C.; TRÄCHTLER, A. (Hrsg.): Intelligente technische Systeme. Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 369, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-88-5
- Bd. 370 KÜHN, A.: Systematik zur Release-Planung intelligenter technischer Systeme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 370, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-89-2
- Bd. 371 REINOLD, P.: Integrierte, selbstoptimierende Fahrdynamikregelung mit Einzelradaktorik. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 371, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-90-8
- Bd. 372 BÄUMER, F. S.: Indikatorbasierte Erkennung und Kompensation von ungenauen und unvollständig beschriebenen Softwareanforderungen. Dissertation, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 372, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-91-5
- Bd. 373 ECKELT, D.: Systematik zum innovationsorientierten Intellectual Property Management. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 373, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-92-2
- Bd. 374 GAUSEMEIER, J. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 13. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 23. und 24. November 2017, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 374, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-93-9
- Bd. 375 WESTERMANN, T.: Systematik zur Reifegradmodell-basierten Planung von Cyber-Physical Systems des Maschinen- und Anlagenbaus. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 375, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-94-6
- Bd. 376 JÜRGENHAKE, C.: Systematik für eine prototypenbasierte Entwicklung mechatronischer Systeme in der Technologie MID (Molded Interconnect Devices). Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 376, Paderborn, 2017 – ISBN 978-3-942647-95-3
- Bd. 377 WEBER, J.: Modellbasierte Werkstück- und Werkzeugpositionierung zur Reduzierung der Zykluszeit in NC-Programmen. Dissertation, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 377, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-942647-96-0
- Bd. 378 OESTERSÖTEBIER, F.: Modellbasierter Entwurf intelligenter mechatronischer Systeme mithilfe semantischer Technologien. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 378, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-942647-97-7
- Bd. 379 ABELDGAWAD, K.: A System-Level Design Framework for Networked Driving Simulation. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 379, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-942647-98-4
- Bd. 380 JUNG, D.: Local Strategies for Swarm Formations on a Grid. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 380, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-942647-99-1
- Bd. 381 PLACZEK, M.: Systematik zur geschäftsmodellorientierten Technologiefrühauklärung. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 381, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-00-2

---

Bezugsadresse:  
Heinz Nixdorf Institut  
Universität Paderborn  
Fürstenallee 11  
33102 Paderborn

## Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- |         |   |         |   |
|---------|---|---------|---|
| Bd. 382 | KÖCHLING, D.: Systematik zur integrativen Planung des Verhaltens selbstoptimierender Produktionssysteme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 382, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-01-9  | Bd. 389 | MITTAG, T.: Systematik zur Gestaltung der Wertschöpfung für digitalisierte hybride Marktleistungen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 389, Paderborn, 2019 – ISBN 978-3-947647-08-8   |
| Bd. 383 | KAGE, M.: Systematik zur Positionierung in technologieinduzierten Wertschöpfungsnetzwerken. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 383, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-02-6   | Bd. 390 | GAUSEMEIER, J. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 15. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 21. und 22. November 2019, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 390, Paderborn, 2019 – ISBN 978-3-947647-09-5 |
| Bd. 384 | DÜLME, C.: Systematik zur zukunftsorientierten Konsolidierung variantenreicher Produktprogramme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 384, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-03-3  | Bd. 391 | SCHIERBAUM, A.: Systematik zur Ableitung bedarfsgerechter Systems Engineering Leitfäden im Maschinenbau. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 391, Paderborn, 2019 – ISBN 978-3-947647-10-1  |
| Bd. 385 | GAUSEMEIER, J. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 14. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 8. und 9. November 2018, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 385, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-04-0 | Bd. 392 | PAI, A.: Computationally Efficient Modelling and Precision Position and Force Control of SMA Actuators. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 392, Paderborn, 2019 – ISBN 978-3-947647-11-8   |
| Bd. 386 | SCHNEIDER, M.: Spezifikationstechnik zur Beschreibung und Analyse von Wertschöpfungssystemen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 386, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-05-7   | Bd. 393 | ECHTERFELD, J.: Systematik zur Digitalisierung von Produktprogrammen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 393, Paderborn, 2020 – ISBN 978-3-947647-12-5   |
| Bd. 387 | ECHTERHOFF, B.: Methodik zur Einführung innovativer Geschäftsmodelle in etablierten Unternehmen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 387, Paderborn, 2018 – ISBN 978-3-947647-06-4  | Bd. 394 | LOCHBICHLER, M.: Systematische Wahl einer Modellierungstiefe im Entwurfsprozess mechatronischer Systeme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 394, Paderborn, 2020 – ISBN 978-3-947647-13-2  |
| Bd. 388 | KRUSE, D.: Teilautomatisierte Parameteridentifikation für die Validierung von Dynamikmodellen im modellbasierten Entwurf mechatronischer Systeme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 388, Paderborn, 2019 – ISBN 978-3-947647-07-1               | Bd. 395 | LUKEI, M.: Systematik zur integrativen Entwicklung von mechatronischen Produkten und deren Prüfmittel. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 395, Paderborn, 2020 – ISBN 978-3-947647-14-9  |

---

Bezugsadresse:  
Heinz Nixdorf Institut  
Universität Paderborn  
Fürstenallee 11  
33102 Paderborn