

DIAGRAMME ÜBER GEORDNETEN MENGEN
UND EINIGE ANALOGIEN ZUR
THEORIE ABELSCHER GRUPPEN

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
des
Fachbereichs Mathematik-Informatik
der
Universität-Gesamthochschule-Paderborn

vorgelegt von
Michael Höppner

Paderborn 1981

Gutachter: Prof.Dr. H. Lenzing (Paderborn)
Prof.Dr. C.M. Ringel (Bielefeld)

INHALT

0.	Einleitung	2
1.	Diagramme über geordneten Mengen	6
2.	Projektive Diagramme	13
2.1.	Standardform	13
2.2.	Projektivitätskriterien	18
3.	Injektive Diagramme	22
3.1.	Injektivitätskriterien	22
3.2.	Standardform	25
3.3.	Unzerlegbare injektive Diagramme	26
4.	Diagramme und abelsche Gruppen	33
4.1.	Direkte Summen zyklischer Diagramme	34
4.2.	$(\Sigma-)$ Rein-injektive Diagramme	46
5.	Fünf Probleme über Diagramme	53
5.1.	Geschachtelte Basen	53
5.2.	Ulms Theorem	55
5.3.	Baers Problem	56
5.4.	Speckers Problem	57
5.5.	Whiteheads Problem	58
	Literatur	66

0. EINLEITUNG

Die Diagramme über einer teilweise geordneten Menge I mit Werten in einer Kategorie von Moduln über einem Ring R bilden eine covollständige abelsche Kategorie mit einem Generatorsystem von kleinen Projektiven; sie lassen sich daher nicht nur wie üblich als Funktoren, sondern auch als Moduln über einem von R und I abhängigen Ringoid, einer kleinen additiven Kategorie oder auch einem Ring mit mehreren Objekten auffassen. Diagramme machen einen Großteil des konkreten Materials in Mitchells Darstellung der Modultheorie über Ringoiden aus [24,25], an anderer Stelle treten sie etwa in der Darstellungstheorie endlich dimensionaler Algebren auf (siehe z.B. [4]). Wie Mitchell zeigt, haben viele Ergebnisse der klassischen Ring- und Modultheorie Entsprechungen in verallgemeinerten Modulkategorien, die wiederum manch klassisches Resultat in einem anderen Licht erscheinen lassen.

Mitchells Schwerpunkt ist die Bestimmung der verschiedensten homologischen Dimensionen, wobei er notwendigerweise auf Kennzeichnungen projektiver, injektiver und flacher Diagramme zu sprechen kommt. Ein Anliegen dieser Arbeit ist es, die letztgenannten Aspekte etwas genauer zu untersuchen, wobei wir uns wenn irgend möglich auch auf das in der Modultheorie übliche und reizvolle Wechselspiel zwischen Eigenschaften des Grundrings - hier hauptsächlich der geordneten Menge - und Eigenschaften der Modulkategorie einlassen. Es wird nicht verwundern, daß dabei Kettenbedingungen eine große Rolle spielen. Neben diesen in recht allgemeinem Rahmen behandelten homologischen Fragestellungen wollen wir an einem konkreten Beispiel untersuchen, wie weitgehend sich die Theorie einer klassischen Modulkategorie auf geeignete Diagrammkategorien übertragen läßt, oder andersherum betrachtet, in welchem Maße Diagrammkategorien als Modelle einer Modulkategorie dienen können. Als Testfall nehmen wir die elementare Strukturtheorie abelscher Gruppen, die sich auch in anderen Bereichen als Leitlinie bewährt hat, man vergleiche etwa Ringels Untersuchungen zu Moduln über einer endlich dimensional, erblichen und zahmen Algebra [27]. Für Diagramme über einer lokal wohlge-

ordneten Menge weisen wir eine fast nahtlose Übereinstimmung mit der Gruppentheorie nach; der Spezialfall von Diagrammen über der geordneten Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen wurde bereits in [18] vorgestellt. Daß Diagramme jedoch nur ein einfaches Modell der abelschen Gruppen sind, zeigt die abschließende Diskussion einiger tieferliegender Sätze der Gruppentheorie, wo sich etwa beim Whitehead-Problem ein deutlich verschiedenes Verhalten von Diagrammen und Gruppen zeigt.

Wir geben nun einen Überblick über die vorliegende Arbeit: Im Abschnitt 1 stellen wir einige zum Teil bekannte Ergebnisse über Diagrammkategorien $(I, R\text{-Mod})$ zusammen. Insbesondere charakterisieren wir die noetherschen Diagrammkategorien durch ordnungs- und ringtheoretische Eigenschaften von I und R und geben eine entsprechende auf Bass zurückgehende und nach einer Bemerkung von Mitchell [25] offensichtliche Beschreibung des perfekten Falls. Ein analoges Resultat von Brune [6] über die erbliche Situation schließt sich an. In allen drei Fällen treten (lokal) artinsche Mengen auf, d.h. Mengen in denen jede (nach unten beschränkte) nicht-leere Teilmenge minimale Elemente hat, was Anlaß zu einigen Bemerkungen über die Struktur derartiger Mengen bietet.

Abschnitt 2 ist Eigenschaften projektiver Diagramme gewidmet. Wir kommen zunächst auf den in [17] gegebenen Nachweis zurück, daß projektive Diagramme frei sind, d.h. als direkte Summen von darstellbaren Diagrammen eine Standardform haben, womit eine Frage von Mitchell beantwortet wurde [25]. Über den Fall geordneter Mengen hinaus zeigen wir hier mit den Methoden aus [17] ein entsprechendes Ergebnis für projektive Diagramme über Deltas, d.h. kleiner Kategorien mit ausschließlich trivialen Endomorphismen. Als Anwendungen ergeben sich leicht die Struktur unzerlegbarer projektiver Diagramme und ein Ergebnis von Laudal über Mengen der cohomologischen Dimension 0 [21]. Ferner zeigt eine Betrachtung der modultheoretischen Hilfsmittel aus [17] eine engere Beziehung zwischen Kaplanskys Satz über die Freiheit projektiver Moduln über lokalen Ringen und dem Zerlegungssatz von Crawley-Jónsson-Warfield (siehe jeweils [1]) als bisher bekannt.

Wir zeigen dann, daß ein punktweise projektives Diagramm

$P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ mit aufspaltenden Monomorphismen $\lim_{j \in J} P_j \rightarrow P_i$

für jede nach unten offene, nach oben durch i beschränkte Teilmenge J von I genau dann projektiv ist, wenn I artinsch ist. Ein entsprechendes Flachheitskriterium gilt ohne Einschränkung für I [18].

In Abschnitt 3 weisen wir die Gültigkeit eines Injektivitätskriteriums aus [18] in zwei weiteren Fällen nach und zeigen die Grenzen der dort benutzten Beweismethode auf. Weiter zeigen wir, daß injektive Diagramme genau dann eine zum projektiven Fall duale Standardform haben, wenn I noethersch ist. Die bekannte Zerlegungstheorie injektiver Objekte in lokal noetherschen Kategorien machen wir durch den Nachweis anwendbar, daß ein unzerlegbares injektives Diagramm auf seinem nach unten offenen, nach oben gefilterten Träger einen unzerlegbaren injektiven Modul als konstanten Wert haben muß.

Abschnitt 4 behandelt erbliche und noethersche Diagrammkategorien für den Spezialfall linear geordneter Mengen nach dem Muster der abelschen Gruppentheorie, wie von Kaplansky vorgestellt. Insbesondere hat fast jedes Theorem aus [19] eine Entsprechung in unseren Ergebnissen. Aus der Existenz einer maximalen Familie rein-unabhängiger zyklischer Unterdiagramme folgern wir, daß reduzierte punktweise endlich dimensionale Diagramme ebenso wie Diagramme von lokal beschränkter Höhe direkte Summen zyklischer Diagramme sind. Wir bestimmen u.a. alle unzerlegbaren und alle rein-einfachen Diagramme, sowie alle linear geordneten Mengen der rein-globalen Dimension 0. Von den bei Zerlegungsfragen notwendigerweise auftauchenden rein-injektiven Diagrammen zeigen wir, daß sie im reduzierten Fall gerade die in einer gewissen Topologie vollständigen Diagramme sind, und zeigen weiter, daß die reduzierten Σ -rein-injektiven Diagramme in Analogie mit einem gruppentheoretischen Resultat von Baumslag und Blackburn [2] gerade die Diagramme lokal beschränkter Höhe sind.

Abschließend diskutieren wir in Abschnitt 5 die Übertragbarkeit derjenigen Sätze auf Diagramme, die Kaplansky für die bemerkenswertesten Entwicklungen der neueren abelschen Gruppentheorie hält [20]. Zum Ulmschen Satz und zum Speckerschen Problem machen wir nur einige kurze Bemerkungen, die restlichen drei Probleme

behandeln wir im Rahmen erblicher Diagrammkategorien und zeigen, daß die Existenz geschachtelter Basen, wie für freie Moduln über Hauptidealringen, für Diagramme eine leichte Folgerung aus der Freiheit projektiver Diagramme ist. Das Baersche Problem wird für Diagramme im Gegensatz zum Fall abelscher Gruppen auf Grund eines Projektivitätskriteriums von Mitchell [26] nahezu trivial. Etwas ausführlicher diskutieren wir wie in [15] das Whitehead-Problem für Diagramme und zeigen, daß es ebenfalls im Gegensatz zu den abelschen Gruppen ein entscheidbares Problem ist. Whitehead-Diagramme über artinschen Mengen sind generell frei, im allgemeinen gilt dies aber nur für Whitehead-Diagramme von abzählbarem Rang ohne divisible Elemente, darüberhinaus gibt es stets unabhängig von der Mengenlehre Beispiele nicht-freier Whitehead-Diagramme.

Herrn Prof. Dr. H. Lenzing möchte ich für vielfältige Anregungen zu dieser Arbeit herzlich danken.

1. DIAGRAMME ÜBER GEORDNETEN MENGEN

Für jede (teilweise) geordnete Menge I und jede Kategorie $R\text{-Mod}$ von R -Linksmoduln über einem Ring R betrachten wir die Funktorkategorie $(I, R\text{-Mod})$. Einen Funktor $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ nennen wir auch ein *Diagramm* und beschreiben es durch seine Werte $(D_i)_{i \in I}$ und seine Morphismen $(d_{ji}: D_i \rightarrow D_j)_{(i \leq j) \in I}$ für die evidente Kommutativitätsrelationen gelten.

1.1. DEFINITION: Es sei $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein Diagramm.

- a) $\text{supp } D = \{i \in I \mid D_i \neq 0\}$ heißt der *Träger* von D .
- b) D heißt ein *Monodiagramm* (*Epidiagramm*), falls seine Morphismen d_{ji} sämtlich Monomorphismen (Epimorphismen) sind.

1.2. DEFINITION: Für eine konvexe Teilmenge J von I und einen Modul M sei $\Delta_J M: I \rightarrow R\text{-Mod}$ das Diagramm mit konstantem Wert M und identischen Morphismen auf $J = \text{supp } \Delta_J M$. $\Delta_J M$ heißt auch ein *kombinatorisches Diagramm*.

Spezialfälle kombinatorischer Diagramme erhält man durch Betrachten der Linksadjungierten

$$S_i : R\text{-Mod} \rightarrow (I, R\text{-Mod})$$

der Auswertungsfunktoren

$$\text{ev}_i: (I, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod} \quad \text{mit} \quad \text{ev}_i(D) = D_i.$$

Es gilt stets $S_i M = \Delta_{iI} M$, wobei $iI = \{j \in I \mid i \leq j\}$ die *Nachfolgermenge* von $i \in I$ bezeichnet. Wegen der Exaktheit der Funktoren ev_i bewahren die S_i Projektive, und man sieht leicht, daß $(S_i R)_{i \in I}$ ein Generatorsystem von kleinen Projektiven für die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ ist [24].

Für jede nach oben offene Teilmenge J einer Nachfolgermenge ${}_i I$ ist Δ_J^M ein Unterdiagramm von S_i^M ; den Quotienten $S_{i,J}^M = S_i^M / \Delta_J^M$ nennen wir ein *quasi-zyklisches* Diagramm, speziell heißt $E_i^M = \Delta_{\{i\}}^M$ ein *quasi-einfaches* Diagramm.

Dual zu den Funktoren S_i bewahren die Rechtsadjungierten der Auswertungen

$$T_i : R\text{-Mod} \rightarrow (I, R\text{-Mod})$$

Injektive, und für jeden (injektiven) Cogenerator C von $R\text{-Mod}$ ist $(T_i C)_{i \in I}$ ein Cogeneratorsystem (von Injektiven) für die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$. Ferner gilt stets $T_i^M = \Delta_{I_i}^M$ für die *Vorgängermenge* $I_i = \{j \in I \mid j \leq i\}$ von $i \in I$ [24].

Insbesondere ist $(I, R\text{-Mod})$ eine Grothendieck-Kategorie mit genügend vielen kleinen Projektiven. Bezeichnet man mit $R(I)$ das Duale der vollen Unterkategorie von $(I, R\text{-Mod})$ bestehend aus den Objekten $(S_i R)_{i \in I}$, dann ist nach einem Ergebnis von Freyd (siehe [24]) die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ äquivalent zur Kategorie $((R(I), \text{Ab}))$ der additiven Funktoren von $R(I)$ in die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, nach Mitchell [24] also zur Kategorie $R(I)\text{-Mod}$ der Linksmoduln über dem *Ringoid* (der kleinen additiven Kategorie) $R(I)$. Wir bemerken, daß man die Objekte von $R(I)$ mit den Elementen von I identifizieren kann und daß bei naheliegender Komposition für die Morphismenmengen gilt

$$R(I)(i, j) = \begin{cases} R & \text{falls } i \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

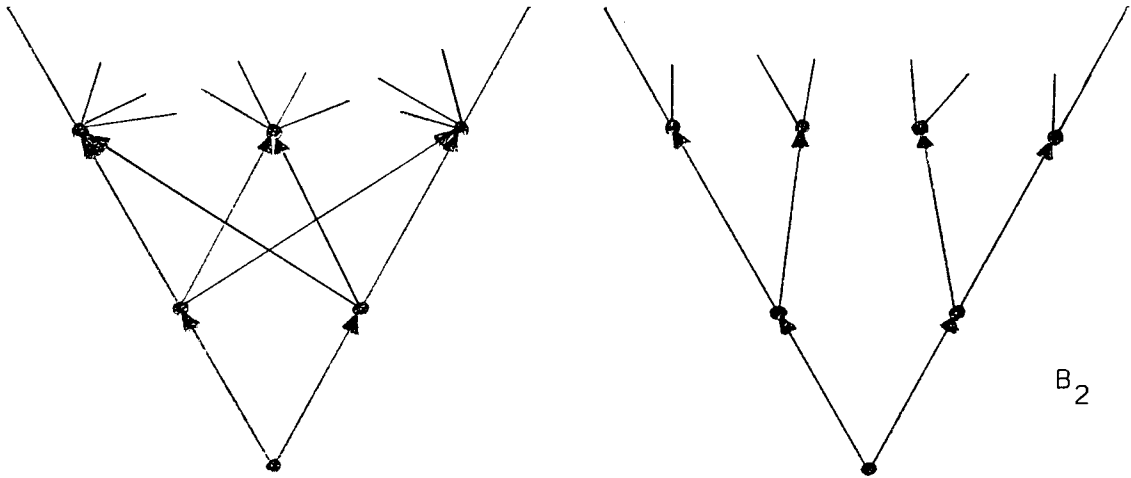
Ferner kann man wegen $(I^{\text{op}}, \text{Mod-}R) = (I^{\text{op}}, R^{\text{op}}\text{-Mod}) = ((R^{\text{op}}(I^{\text{op}}), \text{Ab})) = ((R(I)^{\text{op}}, \text{Ab})) = \text{Mod-}R(I)$ Diagramme über der

zu I dualen geordneten Menge I^{op} mit $R(I)$ -Rechtsmoduln identifizieren.

In dieser Arbeit werden wir einerseits nur den Standpunkt der nicht-additiven Diagramme einnehmen, andererseits aber einer Anregung von Mitchell [24, 25] folgen und zum Teil ohne weitere Definition ausgiebig Gebrauch von modultheoretischen Konzepten wie endlich erzeugt, noethersch, etc. machen. In der Regel ist nur darauf zu achten, daß die Diagramme $S_i R$ den Hom-Funktoren des Ringoids, im klassischen Fall also dem Ring R entsprechen. Zunächst sind wir an Charakterisierungen homologischer Eigenschaften der Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ - kurz des Ringoids $R(I)$ - durch homologische Eigenschaften des Rings R und ordnungstheoretischer Eigenschaften der Menge I interessiert. Wir geben derartige Kennzeichnungen für noethersche, perfekte und erbliche Ringoide $R(I)$ und geben einige Hinweise zur Struktur der dabei auftretenden geordneten Mengen I .

- 1.3. DEFINITION:
- a) Eine geordnete Menge I heißt (*stark*) *artinsch*, wenn jede nicht-leere Teilmenge J von I (endlich viele) minimale Elemente hat.
 - b) I heißt *lokal (stark) artinsch*, wenn für jedes $i \in I$ die Nachfolgermenge $_i I$ (*stark*) *artinsch* ist.
 - c) I heißt *noethersch*, wenn die duale Menge I^{op} *artinsch* ist.

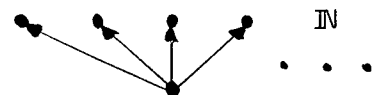
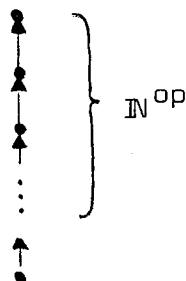
Die beiden folgenden unendlichen geordneten Mengen sind *artinsch*, aber nur die linke ist auch *stark artinsch*. Die rechte Menge nennen wir auch den *linären Baum* B_2 .



Wir kommen später auf die Struktur artinscher Mengen zurück und weisen zunächst auf ihre homologische Bedeutung hin. Das folgende Lemma ist evident.

1.4. LEMMA: Für eine geordnete Menge I sind äquivalent

- 1) I ist lokal stark artinsch
- 2) Jede nicht-leere nach unten beschränkte, nach oben offene Teilmenge J von I hat endlich viele minimale Elemente.
- 3) Jede aufsteigende Kette $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemeinsam nach unten beschränkter, nach oben offener Teilmengen von I ist stationär.
- 4) I enthält keine vollen Teilmengen der folgenden Typen



≡≡

Wie üblich nennen wir das Ringoid $R(I)$ *links-noethersch*, wenn jedes der kleinen projektiven Diagramme $S_i R: I \rightarrow R\text{-Mod}$ noethersch in der Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ ist.

1.5. SATZ: Für eine geordnete Menge I und einen Ring R sind äquivalent

- 1) $R(I)$ ist linksnoethersch
- 2) R ist linksnoethersch und I ist lokal stark artinsch.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) folgt leicht aus Lemma 1.4.

2) $\Rightarrow$ 1) Es sei D ein Unterdiagramm von $S_i R$, dann ist jedes D_i ein endlich erzeugtes Linksideal von R , und es reicht zu zeigen, daß D nur endlich viele Werte $D_{j_1}, \dots, D_{j_n}$ annimmt; in diesem Fall ist D als Quotient von $\bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{l_k} S_{l_k} (D_{j_k})$ endlich erzeugt, wobei l_k die endlich vielen minimalen Elemente von $\{j \mid D_{j_k} \leq D_j\}$ durchläuft. Angenommen $M = \{D_j \mid i \leq j\}$ ist unendlich, dann ist auch $M \setminus \{D_i\}$ unendlich, und unter den endlich vielen minimalen Elementen von $J = \{j \mid i \leq j \text{ und } D_i < D_j\}$ gibt es mindestens ein i_1 , so daß auch $M_1 = \{D_j \mid i_1 \leq j\}$ unendlich ist. Induktiv erhält man so eine echt aufsteigende Kette von Idealen $D_i < D_{i_1} < D_{i_2} < \dots$, was unmöglich ist. $\equiv$

Bekanntlich heißt das Ringoid $R(I)$ *links-perfekt*, wenn jedes Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ eine projektive Hülle hat. Nach einem bekannten Ergebnis von Bass (siehe [1]), das auch in verallgemeinerten Modulkategorien gilt [25], ist dies genau dann der Fall, wenn jedes flache Diagramm $F: I \rightarrow R\text{-Mod}$ projektiv ist, bzw. wenn jedes Diagramm $S_i R: I^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod-}R$ der absteigenden Kettenbedingung für zyklische Unterdiagramme genügt. Daraus ergibt sich leicht der folgende

1.6. SATZ: Für eine geordnete Menge I und einen Ring R sind äquivalent

- 1) $R(I)$ ist links-perfekt
- 2) R ist links-perfekt und I ist artinsch. $\equiv$

Das Ringoid $R(I)$ heißt wie gewöhnlich *links-erblich*, wenn die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ die globale Dimension 1 hat. Das folgende Ergebnis findet man bei Brune [6]. Dabei heißt eine geordnete Menge I etwas von der üblichen Terminologie abweichend ein *Baum*, wenn sie keine Teilmenge vom Typ  enthält.

1.7. SATZ: Für eine geordnete Menge I und einen Ring R sind äquivalent

- 1) $R(I)$ ist links-erblich
- 2) R ist halbeinfach und I ist ein lokal artinscher Baum. $\equiv$

Wir machen nun noch eine Strukturaussage über stark artinsch geordnete Mengen I mit einem minimalen Element o .

1.8. LEMMA: Eine geordnete Menge I enthält genau dann nicht den binären Baum B_2 , wenn es zu jeder nicht-leeren Teilmenge J von I eine weitere nicht-leere Teilmenge J' von J gibt, die in J nach oben offen und gefiltert ist.

Beweis: Angenommen $\emptyset \neq J$ enthält keine gefilterte Teilmenge, dann muß jedes Element $i \in J$ in J zwei Nachfolger j, k haben, die in J keinen gemeinsamen Nachfolger haben. Per Induktion zeigt man nun, daß J den binären Baum "bis zur Höhe n ", insgesamt also den ganzen binären Baum enthält.

Die Umkehrung ist klar. $\equiv$

1.9. SATZ: Ist $I = {}_0 I$ eine stark artinsch geordnete Menge, dann gibt es nach oben offene Teilmengen $J_1 < J_2 < \dots < J_n = I$ von I , so daß $J_{k+1} \setminus J_k$ stets nach oben gefiltert ist.

Beweis: Setze $J_1 = \emptyset$ und nehme an, daß $J_1 < \dots < J_k$ bereits konstruiert seien, aber $J_k \neq I$ gilt. Da I als stark artinsche Menge nicht den binären Baum enthält, gibt es nach Lemma 1.8. eine nach oben offene und gefilterte Teilmenge J'_{k+1} von $I \setminus J_k$. Es ist dann $J_{k+1} = J_k \cup J'_{k+1}$ eine nach oben offene Teilmenge von I , und nach Voraussetzung bricht das Konstruktionsverfahren nach endlich vielen Schritten ab. $\equiv$

Beachtet man, daß eine nach unten beschränkte, nach oben gefilterte Teilmenge eines Baums linear geordnet ist, so folgt

1.10. KOROLLAR: Für einen Baum $I = {}_0 I$ sind äquivalent

- 1) I ist stark artinsch
- 2) I ist endliche disjunkte Vereinigung von Wohlordnungen.

$\equiv$

Ein stark artinscher Baum $I = {}_0 I$ besteht also im wesentlichen aus einem endlichen zykellosen Graphen mit "wohlgeordneten Kanten". Für spätere Zwecke notieren wir noch

1.11. SATZ: Eine noethersch und stark artinsch geordnete Menge $I = {}_0 I$ ist endlich.

Beweis: Angenommen I ist unendlich, dann gibt es unter den endlich vielen minimalen Elementen von $I \setminus \{0\}$ mindestens ein i_1 , so daß auch $i_1 I$ unendlich ist. Induktiv erhält man so eine echt aufsteigende Kette $0 < i_1 < i_2 < \dots$, was unmöglich ist. $\equiv$

2. PROJEKTIVE DIAGRAMME

Für eine geordnete Menge I und eine Modulkategorie $R\text{-Mod}$ ist $(S_i R)_{i \in I}$ ein Generatorsystem von kleinen Projektiven für die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$. Insbesondere hat $(I, R\text{-Mod})$ genügend viele Projektive und jedes projektive Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist direkter Summand eines projektiven Diagramms von *Standardform* $F = \bigoplus_{i \in I} S_i Q_i$ mit geeigneten projektiven Moduln Q_i . Wir zeigen, daß jedes projektive Diagramm von Standardform ist, und geben ein Projektivitätskriterium für Diagramme an, das die artinschen Mengen charakterisiert.

2.1. Standardform

Für ein Diagramm von Standardform benutzen wir auch folgende

2.1.1. DEFINITION: Für jede Familie $(Q_i)_{i \in I}$ projektiver Moduln heißt $F = \bigoplus_{i \in I} S_i Q_i: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein *freies* Diagramm.

Nach Mitchell [24], bzw. Cheng und Mitchell [7] sowie Brune [6] ist jedes projektive Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ frei, falls $R = K$ ein Körper, bzw. I eine artinsche Menge ist. In [17] wird gezeigt, daß diese Beschränkungen für R oder I überflüssig sind; wir zeigen hier, daß die dort entwickelte Methode auch auf weitere Typen von Funktorkategorien anwendbar ist.

Es sei $\mathcal{M}$ eine *Modulkategorie*, d.h. eine covollständige abelsche Kategorie mit einem Generatorsystem von kleinen Pro-

jektiven. Ist $r: M \rightarrow M$ ein Subfunktor der Identität, so daß rM stets im Jacobsonradikal $\text{rad } M$ enthalten ist, dann nennen wir

$$\hat{}: M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \hat{M} = M / rM$$

oder auch den kanonischen Epimorphismus $v_M: M \rightarrow \hat{M}$ eine *Reduktion modulo Radikal*. Nach Nakayamas Lemma ist v_P für jeden kleinen projektiven Modul P eine projektive Hülle. Das folgende Theorem basiert auf Ideen von Kaplansky, Beck und Gruson.

2.1.2. THEOREM [17]: Es sei M eine Modulkategorie und

$\hat{}: M \rightarrow M$ eine Reduktion modulo Radikal. Gibt es für einen projektiven Modul P eine direkte Zerlegung $\hat{P} = \bigoplus_{s \in S} Q_s$, so daß für jedes $s \in S$ eine projektive Hülle $h_s: P_s \rightarrow Q_s$ existiert, dann gibt es einen Isomorphismus f , so daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{s \in S} P_s & \xrightarrow{f} & P \\ (h_s) \downarrow & & \downarrow v_P \\ \bigoplus_{s \in S} Q_s & = & \hat{P} \end{array} \quad \equiv$$

Bevor wir aus diesem Ergebnis die Freiheit projektiver Diagramme ableiten, geben wir noch eine modultheoretische Folgerung an. Bekanntlich heißt ein Ringoid A *lokal*, wenn jedes AeA einen lokalen Endomorphismenring hat. In diesem Fall ist $A / \text{rad } A$ halbeinfach und jeder einfache A -Modul ist von der Form $A(A, -) / \text{rad } A(A, -)$. Damit erhalten wir einen bekannten Satz von Kaplansky (siehe [1]) als

2.1.3. KOROLLAR: Jeder projektive Modul über einem lokalen

Ringoid A ist frei. ≡

Kaplanskys ursprüngliches Ergebnis läßt sich bekanntlich auch aus dem Crawley-Jönsson-Warfield-Theorem herleiten [1]. Wir zeigen nun umgekehrt, daß aus der Ringoid-Version des Satzes von Kaplansky auch ein Teil des Crawley-Jönsson-Warfield-Theorems folgt.

2.1.4. KOROLLAR: Es sei A ein Ringoid und $(M_s)_{s \in S}$ eine Familie endlich erzeugter A -Moduln mit lokalen Endomorphismenringen. Dann gibt es für jeden direkten Summanden N von $\bigoplus_{s \in S} M_s$ eine Teilmenge S' von S mit $N \cong \bigoplus_{s \in S'} M_s$.

Beweis: Die volle Unterkategorie $\mathcal{E}$ von $A\text{-Mod}$ mit den Objekten $(M_s)_{s \in S}$ ist ein lokales Ringoid und der Funktor $H: A\text{-Mod} \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{E}$ mit $H(M) = \text{Hom}_A(-, M)|_{\mathcal{E}}$ vertauscht mit direkten Summen. Daher ist $H(N)$ ein projektiver $\mathcal{E}$ -Modul, und es gibt nach Korollar 2.1.3. eine Teilmenge S' von S mit $H(N) = \bigoplus_{s \in S'} H(M_s) = H(\bigoplus_{s \in S'} M_s)$. Es reicht nun zu zeigen, daß H auf der vollen Unterkategorie $P(\mathcal{E})$ von $A\text{-Mod}$ bestehend aus den direkten Summanden von direkten Summen von Moduln M_s völlig treu ist. Betrachte dazu den Linksadjungierten

$$T: \text{Mod-}\mathcal{E} \rightarrow A\text{-Mod}$$

von H . T ist durch $T(\mathcal{E}(-, M)) = M$ eindeutig bestimmt, und es gilt $TH(N) = N$, folglich $\text{Hom}_A(N, N') = \text{Hom}_A(TH(N), N') = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(H(N), H(N'))$ für alle $N, N' \in P(\mathcal{E})$. $\equiv$

Wir kommen nun zu dem angekündigten Struktursatz für projektive Diagramme und erinnern an folgende

2.1.5. DEFINITION: Eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$, in der jeder Endomorphismus eine Identität ist, heißt ein *Delta*.

Im Gegensatz zu geordneten Mengen können zwei Punkte eines Deltas durch *mehrere* aber *parallele* Pfeile verbunden sein, wie z.B. bei Köchern (mit Relationen) ohne orientierte Zykeln. Wie für geordnete Mengen zeigt man aber, daß die Linksadjungierten

$$S_i: R\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{D}, R\text{-Mod})$$

der Auswertungen von Diagrammen über einem Delta $\mathcal{D}$ projektive bewahren und daß $(S_i)_{i \in \mathcal{D}}$ ein Generatorsystem von kleinen Projektiven für $(\mathcal{D}, R\text{-Mod})$ ist. Für einen Modul M und einen Pfeil $f: j \rightarrow k$ aus $\mathcal{D}$ gilt allerdings

$$a) (S_i M)_j = M^{(\mathcal{D}(i,j))} \quad \text{und}$$

$$b) (M \xrightarrow{u_g} (S_i M)_j \xrightarrow{(S_i M)_f} (S_i M)_k) = u_{f \cdot g},$$

wobei $g: i \rightarrow j$ ein weiterer Pfeil aus $\mathcal{D}$ sei und u_g bzw. $u_{f \cdot g}$ die jeweiligen Einbettungen bezeichnen. Das folgende Theorem enthält das entsprechende Ergebnis für geordnete Mengen aus [17], für Deltas $\mathcal{D}$, deren Anfangsstücke $\mathcal{D}_i = \{j \rightarrow i \mid j \in \mathcal{D}\}$ endlich sind, findet man es bei Mitchell [24].

2.1.6. THEOREM: Für jedes projektive Diagramm $P: \mathcal{D} \rightarrow R\text{-Mod}$

über einem Delta $\mathcal{D}$ gibt es eine Familie projektiver Moduln

$$(\hat{P}_i)_{i \in \mathcal{D}}, \quad \text{so daß } P = \bigoplus_{i \in \mathcal{D}} S_i \hat{P}_i \text{ gilt. D.h. } P \text{ ist frei.}$$

Beweis: Wir zeigen wie bei geordneten Mengen, daß Theorem 2.1.2. anwendbar ist.

1) Für ein beliebiges Diagramm $D: \mathcal{D} \rightarrow R\text{-Mod}$ und einen Punkt $i \in \mathcal{D}$ definieren wir die *Graduierung* von D durch

$$\hat{D}_i = D_i / \sum_{j \rightarrow i, j \neq i} \text{Bild}(D_j \rightarrow D_i).$$

Zusammen mit den Nullmorphisamen erhält man so ein Diagramm $\hat{D}$ und einen kanonischen Morphismus $v_D: D \rightarrow \hat{D}$. Ferner ist $\hat{D} = \bigoplus_{i \in \mathcal{D}} E_i \hat{D}_i$ eine direkte Summe der quasi-einfachen Diagramme $E_i \hat{D}_i$ mit Wert $\hat{D}_i$

an der Stelle i und Wert 0 sonst.

2) Jedes einfache Diagramm $S: \mathcal{D} \rightarrow R\text{-Mod}$ ist ebenfalls quasi-einfach, genauer $S = E_i M$ für einen einfachen Modul M , und jeder Morphismus $f: \mathcal{D} \rightarrow E_i M$ faktorisiert über v_D , d.h. v_D ist eine Reduktion modulo Radikal.

3) Für ein Diagramm $S_i M$ und einen Pfeil $g: i \rightarrow k$ aus $\mathcal{D}$ gilt

$$(M \xrightarrow{u_1} (S_i M)_i \xrightarrow{(S_i M)_i \rightarrow^g (S_i M)_k} (S_i M)_k) = u_g \quad (*)$$

wobei u_1 und u_g wieder die jeweiligen Einbettungen bezeichnen.

Es gilt daher $\sum_{j \rightarrow k, j \neq i} \text{Bild}((S_i M)_j \rightarrow (S_i M)_k) = (S_i M)_k$ bzw.

$$\hat{S}_i M = E_i M.$$

4) Für ein Unterdiagramm U von $S_i M$ mit $S_i M = U + \text{Kern } v_{S_i M}$ gilt zunächst $U_i = M$ und wegen $(*)$ auch $U = S_i M$, d.h.

$v_{S_i M}$ ist ein wesentlicher Epimorphismus.

5) $\hat{}_i: (\mathcal{D}, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$

ist linksadjungiert zu dem exakten Funktor

$$E_i: R\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{D}, R\text{-Mod}),$$

folglich bewahrt $\hat{}_i$ Projektive, so daß für ein projektives

Diagramm $P: \mathcal{D} \rightarrow R\text{-Mod}$ die Reduktion $v_{S_i P_i}^{\hat{}_i}: S_i \hat{P}_i \rightarrow E_i \hat{P}_i$ stets eine projektive Hülle ist. $\equiv$

2.1.7. KOROLLAR: Ein projektives Diagramm $P: \mathcal{D} \rightarrow R\text{-Mod}$ über einem Delta $\mathcal{D}$ ist genau dann unzerlegbar, wenn es von der Form $P = S_i Q$ mit einem unzerlegbaren projektiven Modul Q ist. $\equiv$

Auf Anwendungen von Theorem 2.1.6. kommen wir im nächsten Abschnitt sowie im Kapitel 5 zurück.

2.2. Projektivitätskriterien

Wir betrachten jetzt wieder ausschließlich Diagramme über einer geordneten Menge I . Aus der Freiheit projektiver Diagramme folgt insbesondere, daß solche Diagramme punktweise projektive Monodiagramme sind, sowie

2.2.1. KOROLLAR: Ein kombinatorisches Diagramm $\Delta_J P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann projektiv, wenn

- a) P ein projektiver Modul ist und
- b) J eine nach oben offene Teilmenge von I ist, so daß jede Zusammenhangskomponente ein kleinstes Element hat.

≡≡

Demnach ist für eine zusammenhängende geordnete Menge I der projektive Limes $\varinjlim_{i \in I} (I, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$ genau dann exakt, d.h. $\Delta_I R: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist projektiv oder I ist von der *R-cohomologischen Dimension* 0, wenn I ein kleinstes Element besitzt. Dies ist ein bekanntes Ergebnis von Laudal [21]. Zur Bestimmung der Mengen mit *R-cohomologischer Dimension* 1 benutzen Cheng und Mitchell ebenfalls die Freiheit projektiver Diagramme [7].

Das folgende Ergebnis von Mitchell ist in gewisser Weise dual zum Baerschen Testtheorem für Injektivität und wird wie dieses mit Zorns Lemma bewiesen.

2.2.2. SATZ [26]: Ein Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ über einer geordneten Menge I ist genau dann projektiv, wenn für jedes $i \in I$ die Einschränkung auf die Vorgängermenge $P: I_i \rightarrow R\text{-Mod}$ projektiv ist.

≡≡

Auf Grund des letzten Satzes muß der kombinatorische Teil eines Projektivitätskriteriums für Diagramme schon in den Vorgängermengen I_i formulierbar sein, wie etwa die beiden Bedingungen des folgenden

2.2.3. SATZ: Ist $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein projektives Diagramm, dann gilt für jedes $i \in I$ und jede nach unten offene, nach oben durch i beschränkte Teilmenge J von I

- a) P_i ist ein projektiver Modul und
- b) der kanonische Morphismus $\lim_{j \in J} P_j \rightarrow P_i$ ist ein aufspaltender Monomorphismus.

Beweis: Es sei M ein beliebiger Modul.

a) wurde bereits oben bemerkt, folgt aber auch, da wegen der Exaktheit der Auswertungen und deren Adjungierten T_i stets $0 = \text{Ext}^1(P, T_i M) = \text{Ext}^1(P_i, M)$ gilt [22].

b) Dual zu den quasi-zyklischen Diagrammen definiere man $T_{J,i} M$ durch die exakte Folge $0 \rightarrow T_{J,i} M \rightarrow T_i M \rightarrow \Delta_J M \rightarrow 0$ und betrachte die lange exakte Folge

$$\dots \rightarrow (P, T_i M) \xrightarrow{f} (P, \Delta_J M) \rightarrow \text{Ext}^1(P, T_{J,i} M) \rightarrow \text{Ext}^1(P, T_i M) \rightarrow \dots$$

f identifiziert sich mit dem M -Dualen des kanonischen Morphismus

$\lim_{j \in J} P_j \rightarrow P_i$, so daß unter der Voraussetzung a) die Bedingung

b) äquivalent mit $0 = \text{Ext}^1(P, T_{J,i} M)$ für jeden Modul M ist.

≡≡

Es sei $\mathbb{N}^{\text{op}}$ dual zur geordneten Menge der natürlichen Zahlen und K ein Körper, dann erfüllt

$$\Delta_{\mathbb{N}^{\text{op}}} K: \mathbb{N}^{\text{op}} \rightarrow K\text{-Mod}$$

die beiden obigen Bedingungen, ist aber nach Korollar 2.2.1. nicht frei. Der nächste Satz zeigt, daß dieses Beispiel typisch ist.

2.2.4. THEOREM: Es sei R ein beliebiger Ring. Für eine geordnete Menge I sind äquivalent

- 1) I ist artinsch
- 2) Ein Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann projektiv, wenn es die Bedingungen a) und b) aus Satz 2.2.3. erfüllt.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) findet man bei Brune [6]; wir geben hier ein leicht verkürztes Argument.

Es sei $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein Diagramm mit a) und b), und $v: P \rightarrow \hat{P}$ sei die in 2.1.6. eingeführte kanonische Reduktion. Da es für jedes $i \in I$ eine exakte Folge $\lim_{j \leq i} P_j \rightarrow P_i \rightarrow \hat{P}_i \rightarrow 0$ gibt, kann man stets einen Morphismus $f_i: \hat{P}_i \rightarrow P_i$ mit $v_i \cdot f_i = 1$ wählen. Für das Diagramm $F = \bigoplus_{i \in I} S_i \hat{P}_i$ ist der durch $(f_i)_{i \in I}$ induzierte Morphismus $g: F \rightarrow P$ ein Monomorphismus, ferner ist die Reduktion $\hat{g}$ ein Isomorphismus. Angenommen g ist kein Isomorphismus, dann wähle man ein $i \in I$ minimal, so daß $g_i: F_i \rightarrow P_i$ kein Isomorphismus ist. Das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen zeigt, daß es kein solches i geben kann.

$$\begin{array}{ccccccc} \lim_{j \leq i} F_j & \rightarrow & F_i & \rightarrow & \hat{F}_i & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \lim_{j \leq i} P_j & \rightarrow & P_i & \rightarrow & \hat{P}_i & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Daher ist $P = F$ ein projektives Diagramm.

2) $\Rightarrow$ 1) Es sei K eine abzählbare absteigende Kette in I und $\bar{K}$ die davon erzeugte nach oben offene Teilmenge von I . Wir zeigen nun mittels a) und b), daß $\Delta_{\bar{K}} R$ ein projektives Diagramm ist, so daß $\bar{K}$ bzw. K ein minimales Element haben muß.

a) ist trivialerweise erfüllt.

b) Es sei $J \leq i$ eine nach unten offene Teilmenge von I . Falls

$J \cap \bar{K} = \emptyset$, ist wegen $\lim_{j \in J} (\Delta_{\bar{K}} R)_j = 0$ nichts zu zeigen. Ist dagegen $j \in J \cap \bar{K}$, dann gilt auch $i \in \bar{K}$, also $(\Delta_{\bar{K}} R)_i = R$. Da ferner jedes Element aus $\bar{K}$ Nachfolger eines Elements aus der linear geordneten Menge K ist, ist $\bar{K}$ ebenso wie $J \cap \bar{K}$ nach unten gefiltert, insbesondere zusammenhängend. Daher ist $\lim_{j \in J} (\Delta_{\bar{K}} R)_j \rightarrow (\Delta_{\bar{K}} R)_i$ die Identität auf R . $\equiv$

Über Theorem 2.2.4. hinaus ist eine interne Beschreibung projektiver Diagramme nur in Einzelfällen bekannt; siehe etwa Korollar 5.5.10. Eine entsprechende Beschreibung injektiver Diagramme gilt jedoch nicht nur für noethersche Mengen (Theorem 3.1.3.), und ohne jede Einschränkung hat man das folgende Flachheitskriterium

2.2.5. THEOREM [18]: Ein Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann flach, wenn für jedes $i \in I$ und jede nach unten offene, nach oben durch i beschränkte Teilmenge J von I

- a) P_i ein flacher Modul ist und
- b) der kanonische Morphismus $\lim_{j \in J} P_j \rightarrow P_i$ ein reiner Monomorphismus ist. $\equiv$

2.2.6. KOROLLAR: Ein Diagramm $P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann flach, wenn für jedes $i \in I$ die Einschränkung auf die Vorgängermenge $P: I_i \rightarrow R\text{-Mod}$ flach ist. $\equiv$

3. INJEKTIVE DIAGRAMME

Für eine geordnete Menge I und einen injektiven Cogenerator C einer Modulkategorie $R\text{-Mod}$ ist $(T_i C)_{i \in I}$ ein Cogeneratorsystem von Injektiven für die Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$. Insbesondere ist jedes injektive Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ direkter Summand eines injektiven Diagramms von *Standardform* $E = \prod_{i \in I} T_i M_i$ mit geeigneten injektiven Moduln M_i . Wir untersuchen zunächst Injektivitätskriterien für Diagramme, zeigen dann, daß injektive Diagramme genau dann Standardform haben, wenn I noethersch ist, und geben schließlich sämtliche unzerlegbaren injektiven Diagramme an.

3.1. Injektivitätskriterien

3.1.1. SATZ: Ein Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann injektiv, wenn für jedes $i \in I$ die Einschränkung auf die Nachfolgermenge $Q: {}_i I \rightarrow R\text{-Mod}$ injektiv ist.

Beweis: Einschränkungen auf Nachfolgermengen ${}_i I$ bewahren die Standardinjektiven $T_j M$, direkte Produkte und direkte Summanden, also jeden Injektiven.

Die Umkehrung folgt aus dem Baerschen Testtheorem für Injektivität.

≡≡

Der kombinatorische Teil eines Injektivitätskriteriums für Diagramme muß demnach schon in den Nachfolgermengen ${}_i I$ formulierbar sei, wie die Eigenschaften a) und b) des folgenden Satzes, der in Formulierung und Beweis dual zu Satz 2.2.3. ist.

3.1.2. SATZ: Ist $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein injektives Diagramm, dann gilt für jedes $i \in I$ und jede nach oben offene, nach unten durch i beschränkte Teilmenge J von I

a) Q_i ist ein injektiver Modul und

b) der kanonische Morphismus $Q_i \rightarrow \varprojlim_{j \in J} Q_j$ ist ein aufspaltender Epimorphismus. ≡

Ein injektives Diagramm ist daher stets ein punktweise injektives Epi-Diagramm. In einigen Fällen gilt auch die Umkehrung von Satz 3.1.2.

3.1.3. THEOREM: Es sei R ein links-noetherscher oder rechts-perfekter Ring oder es sei I eine noethersche oder lokal stark artinsche Menge. Dann ist ein Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ genau dann injektiv, wenn es die Bedingungen a) und b) aus Satz 3.1.2. erfüllt.

Beweis: Es sei M ein beliebiger Modul. Für das quasi-zyklische Diagramm $S_{i,J}^M$ gilt wegen a) und b) $0 = \text{Ext}^1(S_{i,J}^M, Q)$. Wie beim Baerschen Testtheorem reicht es nun zu zeigen, daß jedes Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ein Unterdiagramm der Form $S_{i,J}^M$ enthält, es reicht sogar zu zeigen, daß D ein Unterdiagramm hat, das auf seinem Träger monomorph ist.

Die beiden noetherschen Fälle werden in [18] behandelt.

Ist R rechtsperfekt und $0 \neq \text{Kern } d_{ji}$ für $(i < j) \in \text{supp } D$, dann wähle man einen einfachen Untermodul U von $\text{Kern } d_{ji}$ und setze $J = \{k \in I \mid d_{ki}(U) = 0\}$. J ist nach oben offen, und für das von U erzeugte Unterdiagramm $\bar{U}$ von D gilt $\bar{U} = S_{i,J}U$.

Ist dagegen I lokal stark artinsch und $0 \neq U = \text{Kern } d_{ji}$, dann

definiere man J und $\bar{U}$ wie eben. Ist auch $\bar{U}$ kein Monodiagramm auf seinem Träger, dann gibt es ein $k \notin J$ mit $0 \notin U' = \text{Kern } d_{ki}$, und für die nach oben offene Teilmenge $J' = \{i \in I \mid d_{li}(U') = 0\}$ von I gilt $i < J < J'$. Nach Voraussetzung kommt man nach endlich vielen derartiger Schritte zu einem Unterdiagramm D' von D , das auf seinem Träger monomorph ist. ≡≡

3.1.4. BEMERKUNGEN: 1) Es ist nicht bekannt, ob Theorem 3.1.3. auch ohne jede Kettenbedingung richtig ist; im allgemeinen versagt jedenfalls die Beweismethode, da es Diagrammkategorien ohne genügend viele Unterdiagramme S_{i,J^M} gibt.

Beispiel: Es sei $I = [0,1]$ das reelle Intervall und $R = C[0,1]$ der Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Ferner sei $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ durch $D_i = C[i,1]$ und die Einschränkungabbildungen definiert. Falls $0 \notin S_{i,J^M}$ ein Unterdiagramm von D ist, kann o.E. $M = R.f$ für eine nicht-triviale Funktion $f: [i,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{\bar{J}} = 0$ angenommen werden, wobei $\bar{J}$ den Abschluß von J in I bezeichnet. Es gibt daher ein $j \notin i$ mit $f(j) \neq 0$, aber auch eine stetige Funktion $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g.f \neq 0$ aber $g.f(k) = 0$ für alle $k \geq j$. Es gilt daher $f \notin \text{Kern } d_{ji}$ sowie $0 \notin g.f \in \text{Kern } d_{ji}$, ein Widerspruch.

2) Eine Kennzeichnung der Diagrammkategorien $(I, R\text{-Mod})$ mit genügend vielen Unterdiagrammen S_{i,J^M} wäre nicht nur für eine Erweiterung des Injektivitätskriteriums 3.1.3., sondern auch im Hinblick auf Satz 3.3.6. von Interesse.

3.2. Standardform

Abweichend vom projektiven Fall braucht ein injektives Diagramm über einer geordneten Menge I nicht von der Standardform $E = \prod_{i \in I} T_i M_i$ mit geeigneten injektiven Moduln M_i zu sein, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

3.2.1. BEISPIELE: Es sei $\mathbb{N}$ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen und K ein Körper.

1) Nach Theorem 3.1.3. ist $\Delta_{\mathbb{N}} K: \mathbb{N} \rightarrow K\text{-Mod}$ ein injektives Diagramm, aber offensichtlich nicht von Standardform.

2) $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T_n K: \mathbb{N} \rightarrow K\text{-Mod}$ ist ebenfalls injektiv, da das Ringoid $K(\mathbb{N})$ links-noethersch ist. Angenommen $D = \prod_{n \in \mathbb{N}} T_n M_n$, dann gilt stets $K = \text{Kern } d_{n+1,n} = M_n$ und daher auch $K^{(\mathbb{N})} = D_0 = K^{\mathbb{N}}$, was unmöglich ist.

3.2.2. THEOREM: Es sei R ein beliebiger Ring. Für eine geordnete Menge I sind äquivalent

- 1) I ist noethersch
- 2) Jedes injektive Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ hat Standardform
- 3) Jedes nicht-triviale Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ hat ein nicht-triviales Unterdiagramm $E_i M_i$.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) ist dual zu den Betrachtungen von Brune [6] für den projektiven Fall. Für ein beliebiges Diagramm D definiere man die *Cograduierung* $\tilde{D}_i$ an der Stelle i durch

$$0 \rightarrow \tilde{D}_i \rightarrow D_i \rightarrow \varinjlim_{i < j} D_j,$$

was zusammen mit den Nullmorphisamen ein Diagramm $\tilde{D}$ ergibt. Nun

argumentiere man entweder wie in Theorem 2.2.4. 1) $\Rightarrow$ 2) beim Nachweis der projektiven Standardform oder folgendermaßen. Falls $0 \neq x \in D_i$ wähle man $j \in I$ maximal, so daß $0 \neq d_{ji}(x)$. Offenbar gilt dann $d_{ji}(x) \in \tilde{D}_j$, d.h. die kanonische Einbettung $u_D: \tilde{D} \rightarrow D$ ist wesentlich. Man zeigt nun leicht, daß für ein injektives Diagramm Q sowohl $u_Q: \tilde{Q} \rightarrow Q$ als auch $u_{\prod_{i \in I} T_i \tilde{Q}_i}: \tilde{Q} \rightarrow \prod_{i \in I} T_i \tilde{Q}_i$ eine injektive Hülle von $\tilde{Q}$ ist.

2) $\Rightarrow$ 3) Die injektive Hülle Q eines nicht-trivialen Diagramms D hat Standardform und enthält daher ein nicht-triviales Unterdiagramm $E_i M$. Dann ist aber auch $0 \neq D \cap E_i M = E_i N$ für einen geeigneten Modul N .

3) $\Rightarrow$ 1) Es sei J eine nicht-leere Teilmenge von I und $E_i M$ ein nicht-triviales Unterdiagramm von $\Delta_J R$. Dann muß aber i ein maximales Element von J sein. ≡≡

3.3. Unzerlegbare Injektive

Ein injektiver Modul ist bekanntlich genau dann unzerlegbar, wenn er *uniform* ist, d.h. wenn jeder nicht-triviale echte Untermodul wesentlich ist. Dual dazu heißt ein Modul *couniform*, wenn jeder nicht-triviale echte Untermodul überflüssig ist. Im allgemeinen braucht ein unzerlegbarer projektiver Modul aber nicht *couniform* zu sein, auch wenn das in einer Übungsaufgabe in [1] behauptet wird; man betrachte nur den $\mathbb{Z}$ -Modul $\mathbb{Z}$. Wir beschreiben nun injektive kombinatorische, uniforme sowie injektive unzerlegbare Diagramme und notieren jeweils die duale Aussage für flache bzw. *couniforme* Diagramme.

3.3.1. SATZ: Ein kombinatorisches Diagramm $\Delta_J Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$

ist genau dann injektiv, wenn

- a) Q ein injektiver Modul ist und
- b) J eine nach unten offene und auf Zusammenhangskomponenten nach oben gefilterte Teilmenge von I ist.

Beweis: O.E. sei J zusammenhängend.

Für ein injektives Diagramm $\Delta_J Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist nach Satz 3.1.2.

Q ein injektiver Modul und J nach unten offen, ferner ist es

für das Filtrierendsein von J wegen des Zusammenhangs hinrei-

chend, wenn für $i, j_s \in J$ mit $i \leq j_s$ stets ein $k \in J$ mit $j_s \leq k$

existiert ($s = 1, 2$). Setzt man in einem solchen Fall

$K = \{k \in I \mid j_1 \leq k \text{ oder } j_2 \leq k\}$, dann muß

$$((\Delta_J Q)_i \rightarrow \varinjlim_{k \in K} (\Delta_J Q)_k) = (Q \xrightarrow{f} Q^z)$$

ein (direkter) Epimorphismus sein, wobei f die Diagonale und z

die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $K \cap J$ bezeichnet.

Aus dem Zusammenhang von $K \cap J$ folgt nun die Existenz eines

$k \in K \cap J$ wie gewünscht.

Ist umgekehrt J eine nach unten offene, nach oben gefilterte

Teilmenge von I , dann ist der Funktor

$$\varinjlim_J : (I, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod}$$

exakt, so daß sein Rechtsadjungierter

$$\Delta_J: R\text{-Mod} \rightarrow (I, R\text{-Mod})$$

Injektive bewahrt.

≡≡

Der Nachweis des Filtrierendseins von J in obigem Satz ist auch mit Hilfe des Halb-Injektivitätskriteriums aus [16] möglich.

3.3.1. SATZ': Ein kombinatorisches Diagramm $\Delta_J P: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann flach, wenn

- a) P ein flacher Modul ist und
- b) J eine nach oben offene und auf Zusammenhangskomponenten nach unten gefilterte Teilmenge von I ist.

Beweis: Ist $\Delta_J P$ flach, dann argumentiere man wie eben, nur mit dem Flachheitskriterium 2.2.5.

Die Umkehrung folgt ebenfalls aus 2.2.5. ≡≡

3.3.2. SATZ: Ein Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann uniform, wenn

- a) D_i für alle $i \in I$ ein uniformer Modul ist,
- b) $\text{supp } D$ nach oben gefiltert ist und
- c) $D|_{\text{supp } D}$ ein Monodiagramm ist.

Beweis: Zunächst sei D ein uniformes Diagramm.

Für $s = 1, 2$ seien $0 \neq x_s \in D_{i_s}$ und D^s die von x_s erzeugten Unterdiagramme von D . Wegen $D^1 \cap D^2 \neq 0$ muß $\text{supp } D$ nach oben gefiltert sein.

Es sei nun $j < k$, $x \in \text{Kern } d_{kj}$ und $y \in D_k$. Für die von x bzw. y erzeugten Unterdiagramme D' bzw. D'' von D gilt dann $D' \cap D'' = 0$, folglich $x=0$ oder $y=0$. Insbesondere ist D auf seinem Träger monomorph und punktweise uniform.

Umgekehrt sei jetzt D ein Diagramm mit a), b) und c). Angenommen für zwei Unterdiagramme gilt $D^1 \cap D^2 = 0$ aber $D^1 \neq 0$ und $D^2 \neq 0$. Wähle $i, j, k \in \text{supp } D$, so daß $D_i^1 \neq 0$, $D_j^2 \neq 0$ und $i, j \leq k$ gilt. Aus $D_k^1 = 0$ oder $D_k^2 = 0$ ergibt sich ein Widerspruch. ≡≡

3.3.2. SATZ': Ein Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ ist genau dann couniform, wenn

- a) D_i für alle $i \in I$ ein couniformer Modul ist,
- b) $\text{supp } D$ nach unten gefiltert ist und
- c) $D|_{\text{supp } D}$ ein Epidiagramm ist.

Beweis: Zunächst sei D ein couniformes Diagramm.

Für $s = 1, 2$ seien $i_s \in \text{supp } D$ und D^s die von $\{D_j \mid j \leq i_s\} \cup \{D_j \mid j \not\leq i_1 \text{ und } j \not\leq i_2\}$ erzeugten Unterdiagramme von D . Wegen $D^1 + D^2 = D$ gilt $D^1 = D$ oder $D^2 = D$, d.h. $\text{supp } D$ muß nach unten gefiltert sein.

Es sei nun $j < i$ und $j \in \text{supp } D$, ferner seien D' bzw. D'' die von $\{D_k \mid k \leq j \text{ oder } k \not\leq i\}$ bzw. $\{D_k \mid k \leq j \text{ und } k \not\leq i\}$ erzeugten Unterdiagramme von D . Wegen $D' + D'' = D$ und $j \notin \text{supp } D''$ gilt $D' = D$, so daß $D_j \rightarrow D_i$ ein Epimorphismus ist. Angenommen für ein $i \in I$ gilt $D_i^1 + D_i^2 = D_i$ für geeignete Moduln D_i^s ($s = 1, 2$). Es seien dann D^s die von $\{d_{ij}^{-1}(D_i^s) \mid j \leq i\} \cup \{D_j \mid j \not\leq i\}$ erzeugten Unterdiagramme von D . Da $D|_{\text{supp } D}$ ein Epidiagramm ist, gilt $D^1 + D^2 = D$, folglich o.E. $D_i^1 = D_i$, so daß D auch punktweise couniform ist.

Die Umkehrung beweist man wie eben. ≡≡

Aus den beiden letzten Sätzen ergibt sich leicht

3.3.3. THEOREM: Für ein Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D ist injektiv und unzerlegbar
- 2) $D = \Delta_J Q$ für einen injektiven unzerlegbaren Modul Q und eine nach unten offene, nach oben gefilterte Teilmenge J von I .

≡≡

3.3.3. THEOREM': Für ein Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D ist flach und couniform
 - 2) $D = \Delta_J P$ für einen flachen und couniformen Modul P und eine nach oben offene, nach unten gefilterte Teilmenge J von I .
- ≡≡

Im Hinblick auf Zerlegungsfragen wäre es wünschenswert, "co-uniform" durch "unzerlegbar" oder wenigstens "rein-einfach" zu ersetzen.

Theorem 3.3.3. legt es nahe, den Begriff *Standardform* auf injektive Diagramme vom Typ $E = \prod_J \Delta_J Q_J$ auszudehnen. Von den Beispielen 3.2.1. wäre dann zwar $\Delta_{\mathbb{N}} K$, aber immer noch nicht $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T_n K$ von Standardform.

Nach Matlis bzw. Faith und Walker (siehe [1]) ist jedes injektive Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ genau dann eine direkte Summe unzerlegbarer Diagramme, wenn das Ringoid $R(I)$ links-noethersch ist, d.h. wenn R links-noethersch ist und I lokal stark artinsch ist (Satz 1.5.). Da Endomorphismenringe unzerlegbarer Injektiver lokal sind, ergibt sich aus dem Satz von Azumaya (siehe [1]) die Eindeutigkeit derartiger Zerlegungen. Wir vergleichen nun noch die Standardform eines injektiven Diagramms mit seiner Zerlegung in unzerlegbare Diagramme.

3.3.4. SATZ: Es sei I eine noethersch und lokal stark artinsch geordnete Menge und R ein links-noetherscher Ring. Dann gilt für jede Familie $(Q_i)_{i \in I}$ (injektiver) Moduln

$$\prod_{i \in I} T_i Q_i = \bigoplus_{i \in I} T_i Q_i .$$

Beweis: Man beachte nur, daß für jedes $i \in I$ die Nachfolgermenge iI nach Satz 1.11. endlich ist. $\equiv$

Bekanntlich bilden die unzerlegbaren injektiven R -Moduln einen Ersatz für das *Spektrum* von R . Der folgende Satz zeigt, wie der kombinatorische Teil eines Spektrums von $R(I)$ zu definieren ist.

3.3.5. SATZ: Ist $f: \Delta_J^M \rightarrow \Delta_K^N$ ein nicht-trivialer Morphismus zwischen unzerlegbaren Injektiven in $(I, R\text{-Mod})$, dann gilt $K \leq J$.

Beweis: $S = \text{supp}(\text{Bild } f)$ ist eine nicht-leere nach unten offene Teilmenge von J bzw. I und eine nach oben offene Teilmenge von K . Ist nun $k \in K$ beliebig, dann wähle man ein beliebiges $s \in S$ und einen gemeinsamen Nachfolger l von k, s in K . Dann gilt auch $l \in S$ und keS , folglich $K = S \leq J$. $\equiv$

Nennt man für eine geordnete Menge I

$$\text{spec } I = \{J \leq I \mid J \text{ nach unten offen und nach oben gefiltert}\}$$

versehen mit der Inklusion als Ordnung das *Spektrum* von I , dann ist die monotone Einbettung

$$f: I \rightarrow \text{spec } I \quad \text{mit} \quad f(i) = I_i$$

gerade die Vervollständigung von I durch Ideale, falls I ein Verband ist [3]. Für die geordnete Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erhält man z.B. das Spektrum $\text{spec } \mathbb{Q}$ aus den erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ durch Verdoppeln der rationalen Punkte.

Für nicht-noethersche Ringoide $R(I)$ geben wir nun noch an, wann jedes injektive Diagramm $Q: I \rightarrow R\text{-Mod}$ einen unzerlegbaren direkten Summanden besitzt. Wegen der Existenz injektiver Hüllen ist dies auch gleichbedeutend damit, daß jedes Diagramm D ein uniformes Unterdiagramm besitzt. Die entsprechende Frage für Modulkategorien $R\text{-Mod}$ wird von Warfield [29] durch Angabe einer idealtheoretischen Bedingung für den Ring R beantwortet.

3.3.6. SATZ: Eine Diagrammkategorie $(I, R\text{-Mod})$ hat genau dann genügend viele uniforme Unterdiagramme, wenn

- a) $R\text{-Mod}$ genügend viele uniforme Untermoduln hat,
- b) I nicht den binären Baum B_2 enthält und
- c) es genügend viele Unterdiagramme $S_{i,J}^M$ gibt.

Beweis: Hat $(I, R\text{-Mod})$ genügend viele uniforme Unterdiagramme, dann beachte man nur, daß uniforme Diagramme monomorph auf ihrem nach oben gefilterten Träger sind (Satz 3.3.2.) und daß Unterdiagramme uniformer Diagramme wieder uniform sind. Daraus ergibt sich c); a) bzw. b) folgen aus der Betrachtung uniformer Unterdiagramme von E_i^M , M ein beliebiger Modul, bzw. $\Delta_J S$, S ein einfacher Modul, wobei noch Lemma 1.8. zu beachten ist.

Umgekehrt wähle man zu einem Diagramm D zunächst ein Unterdiagramm $D' = S_{i,J}^M$, wobei wegen a) und b) M o.E. uniform und $\text{supp } D'$ o.E. nach oben gefiltert angenommen werden kann. Nach Satz 3.3.2. ist dann aber D' uniform. ≡≡

4. DIAGRAMME UND ABELSCHES GRUPPEN

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf *linear* und *lokal stark artinsch* geordnete Mengen L . Eine solche Menge muß eine abzählbare initiale Teilmenge enthalten, so daß als Prototyp für L die zur geordneten Menge der natürlichen Zahlen duale Menge $\mathbb{N}^{\text{op}}$ mit in den Intervallen $[n+1, n]$ "eingespannten Wohlordnungen" angesehen werden kann. Ferner betrachten wir ausschließlich Diagramme über L mit Werten in einer Kategorie $K\text{-Mod}$ von *Vektorräumen* über einem Körper K . Nach den Sätzen 1.5./1.7. ist dann das Ringoid $K(L)$ links-noethersch und links-erblich, und wie im Fall eines diskreten Bewertungsrings ist der Verband der Unterdiagramme eines Standardprojektiven $S_i K$ linear, und jedes dieser Unterdiagramme ist auch frei und zyklisch. Wie wir später sehen, besteht sogar eine Analogie zu vollständigen diskreten Bewertungsringen.

Wir zeigen nun, daß die Diagrammkategorien $(L, K\text{-Mod})$ der elementaren Theorie der abelschen Gruppen genügen, d.h. daß bei richtiger Interpretation alle Zerlegungssätze, die man etwa bei Kaplansky [19] findet, auch für Diagramme richtig sind. Genauer sind von Kaplanskys Theoremen 1-23 alle außer 14, 15, 18 und 19 in unseren Ergebnissen enthalten. Die Übertragung der entsprechenden Sätze kann recht schematisch an Hand eines "Wörterbuchs" vorgenommen werden, wie es in [18] für Diagramme über der geordneten Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen angegeben ist. Daß dieser Übersetzungsprozeß mit Vorsicht vorgenommen werden muß, zeigen später die Begriffe "beschränkte Ordnung" und "beschränkte Höhe". Wir bemühen uns hier um weitestgehende Abkürzungen, die die Diagramm-

situation gestattet und verwenden ansonsten gruppentheoretische Argumente aus [10,13,19]. Bei den Zerlegungsfragen kommen wir automatisch auf rein-injektive Diagramme zu sprechen und charakterisieren abschließend die Σ -rein-injektiven Diagramme. Auf die nicht mehr elementaren "Five theorems on abelian groups [20]", bei denen sich für Diagramme einige Abweichungen vom klassischen Fall ergeben, gehen wir im Abschnitt 5 ein.

4.1. Direkte Summen zyklischer Diagramme

In Analogie zu abelschen Gruppen definieren wir

4.1.1. DEFINITION: Ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ heißt *divisibel* (*torsionsfrei*), wenn es ein Epi-Diagramm (Monodiagramm) ist.

Wie üblich nennen wir nun ein Diagramm *reduziert*, wenn es kein divisibles Unterdiagramm enthält. Man zeigt leicht, daß jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein größtes divisibles Unterdiagramm $\text{div } D$ enthält und daß $D/\text{div } D$ ein reduziertes Diagramm ist. Weiterhin nennen wir ein Diagramm D ein *Torsionsdiagramm*, wenn es nur triviale Morphismen in torsionsfreie Diagramme gestattet. Offenbar ist das genau dann der Fall, wenn es zu jedem $x \in D_i$ ein $j \geq i$ mit $d_{ji}(x) = 0$ gibt. Ferner zeigt man leicht, daß jedes Diagramm D ein größtes Torsionsunterdiagramm tD enthält und daß D/tD torsionsfrei ist. In diesem Zusammenhang definieren wir noch

4.1.2. DEFINITION: Es sei $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein Diagramm.

a) Für $0 \neq x \in D_i$ heißt $\text{ord } x = j \in L$ die *Ordnung* von x , falls

j minimal mit $d_{ji}(x) = 0$ ist. Falls kein solches $j \in L$ existiert, setzen wir $\text{ord } x = \infty$.

b) $0 \neq x \in D_i$ heißt von *endlicher Ordnung*, falls das Intervall $[i, \text{ord } x]$ endlich ist.

Das von einem Element $0 \neq x \in D_i$ erzeugte zyklische Unterdiagramm von $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist demnach von der Form $S_{i,j}^L K$, falls $j = \text{ord } x$ ist. Wir schreiben dafür künftig auch kurz $S_{i,j}^K$ und schließen darin auch den Fall $S_{i,\infty}^K = S_i^K$ ein; entsprechendes gelte für quasi-zyklische Diagramme. Auf Grund der Kriterien 2.2.5. und 3.1.3. gilt nun

4.1.3. SATZ: Ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist genau dann injektiv (flach), wenn es divisibel (torsionsfrei) ist. $\equiv$

Der divisible Teil $\text{div } D$ eines Diagramms $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist demnach stets ein direkter Summand von D und selbst eine direkte Summe unzerlegbarer divisibler Diagramme $\Delta_J K$ für geeignete nach unten offene Teilmengen J von L (Theorem 3.3.3.), da $K(L)$ links-noethersch ist. Man beachte, daß die $\Delta_J K$ nicht sämtlich Standardinjektive $T_i K$ zu sein brauchen. Für alle Zerlegungsfragen reicht es künftig, reduzierte Diagramme zu betrachten; der folgende Satz ist dafür grundlegend.

4.1.4. SATZ: Jedes nicht-divisible Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ hat einen zyklischen direkten Summanden.

Beweis: Ist $d_{ji}: D_i \rightarrow D_j$ kein Epimorphismus, dann kann o.E. j minimal bzgl. i mit dieser Eigenschaft angenommen werden.

Das von $\{D_i \mid 1 \leq i\}$ erzeugte Unterdiagramm D^1 von D ist als Diagramm über ${}_iL$ divisibel, so daß es über ${}_iL$, dann aber auch über L eine direkte Zerlegung $D = D^1 \oplus D^2$ mit einem geeigneten Komplement D^2 gibt, derart daß $\text{je supp } D^2$ minimal ist. Jedes $0 \neq x \in D_j$ erzeugt dann ein zyklisches Unterdiagramm D^3 von D^2 , das als Diagramm über ${}_jL$ divisibel ist. D^3 ist daher ein direkter Summand von D . ≡≡

4.1.5. KOROLLAR: Die unzerlegbaren Diagramme $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind genau die kombinatorischen Diagramme $\Delta_J K$ mit beliebigen konvexen Teilmengen J von L . Insbesondere ist ein unzerlegbares Diagramm entweder divisibel oder zyklisch und torsionsfrei oder ein zyklisches Torsionsdiagramm und hat mit K einen lokalen Endomorphismenring. ≡≡

Für artinsche Mengen L tritt insofern noch ein Sonderfall auf, als das konstante Diagramm $\Delta_L K$ sowohl divisibel, als auch zyklisch und torsionsfrei ist. Wir sehen aber gleich, daß der artinsche Fall hinsichtlich aller Zerlegungsfragen trivial ist. Dazu erinnern wir daran, daß ein Ringoid $K(L)$ *links-rein-halbeinläch* heißt, wenn die Diagrammkategorie $(L, K\text{-Mod})$ die rein-globale Dimension 0 hat, was gleichbedeutend damit ist, daß jedes Diagramm eine direkte Summe endlich präsentierter Diagramme ist. Nach einem Standardargument ist es dafür bereits hinreichend, wenn jedes Diagramm einen endlich präsentierten Summanden hat. In leichter Verallgemeinerung eines Resultats von Brune [5] erhalten wir

4.1.6. THEOREM: Es sei K ein beliebiger Körper. Für eine linear geordnete Menge L sind äquivalent

- 1) L ist artinsch
- 2) $K(L)$ ist links-rein-halbeinfach.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) folgt aus Satz 4.1.4. und der Tatsache, daß für eine artinsche lineare Menge auch die unzerlegbaren divisiblen Diagramme zyklisch sind. Auf Grund des Noetherschseins von $K(L)$ sind ferner die zyklischen Diagramme stets endlich präsentiert.

2) $\Rightarrow$ 1) Für jede nicht-leere und o.E. nach oben offene Teilmenge J von L muß das unzerlegbare Diagramm $\Delta_J K$ endlich präsentiert sein, insbesondere muß $J = \text{supp } \Delta_J K$ ein kleinstes Element besitzen. $\equiv$

Für Zerlegungsfragen kann also künftig o.E. angenommen werden, daß L nicht-artinsch ist. Als weitere Folgerung aus Satz 4.1.4. erhalten wir

4.1.7. KOROLLAR: Jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ besitzt ein reines Unterdiagramm D' , so daß D' eine direkte Summe zyklischer Diagramme und der Quotient D/D' divisibel ist. D' kann o.E. maximal mit diesen Eigenschaften angenommen werden.

Beweis: Man wähle eine maximale Familie $(D^s)_{s \in S}$ zyklischer Unterdiagramme von D , so daß $D' = \bigoplus_{s \in S} D^s$ rein in D ist. Angenommen $D'' = D/D'$ ist nicht divisibel, dann gibt es einen zyklischen direkten Summanden U von D'' , und die Inklusion

$U \rightarrow D''$ läßt sich nach D liften. Dann hätte aber D ein reines Unterdiagramm $D' \oplus U'$ mit $U \cong U'$, im Widerspruch zur Maximalität von D' . ≡≡

4.1.8. DEFINITION: Ein maximales reines Unterdiagramm D' von $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ wie in Korollar 4.1.7. heißt *Basisdiagramm*.

Die Betrachtung rein-exakter Folgen

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j \in L} S_j^K \rightarrow \bigoplus_{i \in L} S_i^K \rightarrow \Delta_L K \rightarrow 0$$

zeigt, daß Basisdiagramme nicht eindeutig bestimmt sind; es gilt aber

4.1.9. SATZ: Je zwei Basisdiagramme eines Diagramms

$D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind isomorph.

Beweis: Es sei $D' = \bigoplus_{i \in L} \bigoplus_{i < j} S_{i,j} Q_{i,j}$ ein Basisdiagramm von D .

Es reicht zu zeigen, daß die Dimensionen der Vektorräume $Q_{i,j}$ eindeutig bestimmt sind. Für jedes $i \in L$ sei ein Funktor

$$F^i: (L, K\text{-Mod}) \rightarrow ({}_i L, K\text{-Mod})$$

durch $F^i D = D / D^i$ definiert, wobei D^i das von $\{D_j \mid j < i\}$ erzeugte Unterdiagramm von D sei. F^i ist linksadjungiert zur kanonischen Einbettung

$$G^i: ({}_i L, K\text{-Mod}) \rightarrow (L, K\text{-Mod})$$

und bewahrt daher rein-exakte Folgen. Ist L nicht-artinsch, ist insbesondere i kein minimales Element von L , dann gilt

$F^i D'' = 0$ für jedes divisible Diagramm D'' und folglich $F^i D' \cong F^i D$

für jedes Basisdiagramm von D . Andererseits gilt aber

$F^i D' = \bigoplus_{i \leq 1} \bigoplus_{1 < j} S_{1,j} Q_{1,j}$ mit eindeutig bestimmten Dimensionen der

Vektorräume $Q_{1,j}$. Für artinsche Mengen L ist wegen Theorem

4.1.6. ohnehin nichts zu zeigen. ≡≡

Für das weitere Vorgehen benötigen wir Kenntnisse über rein-injektive Diagramme, die wir später vertiefen. Definiert man eine Dualität

$$*: (L, K\text{-Mod}) \rightarrow (L^{\text{op}}, \text{Mod-}K)$$

durch $(D^*)_i = (D_i)^* = \text{Hom}_K(D_i, K)$, dann gibt es eine in $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ und $M: L^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod-}K$ natürliche Isomorphie

$$(M \otimes D)^* = \text{Hom}_{K(L)}(M, D^*),$$

aus der wie üblich folgt, daß eine exakte Folge $\mathcal{E}$ genau dann rein-exakt ist, wenn die duale Folge $\mathcal{E}^*$ exakt-direkt ist, und daß ein Diagramm D genau dann rein-injektiv ist, wenn die kanonische Einbettung $D \rightarrow D^{**}$ aufspaltet. Daraus ergibt sich

4.1.10. LEMMA: Ein punktweise endlich-dimensionales oder ein kombinatorisches Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist rein-injektiv. ≡≡

Das voranstehende Lemma ist wie die Vorbetrachtung auch ohne die in diesem Abschnitt verabredeten Einschränkungen für die geordneten Mengen L richtig. Wir behalten aber diese Beschränkungen bei und beachten, daß Basisdiagramme punktweise endlich-dimensionaler Diagramme wieder endlich-dimensional, also rein-injektiv und folglich direkte Summanden sind.

4.1.11. KOROLLAR: Jedes reduzierte punktweise endlich-dimensionale Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist eine direkte Summe zyklischer Diagramme. ≡≡

Insbesondere sind die endlich erzeugten Diagramme direkte

Summen zyklischer Diagramme; ferner sind alle zyklischen Diagramme sogar zyklisch präsentiert. Daraus ergibt sich das folgende Reinheitskriterium

4.1.12. SATZ: Für ein Unterdiagramm U von $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) U ist rein in D
- 2) $d_{ij}(U_j) = U_i \cap d_{ij}(D_j)$ für alle $j \leq i$ in L .

Beweis: Die exakte Folge $0 \rightarrow U \rightarrow D \rightarrow D/U \rightarrow 0$ ist genau dann rein-exakt, wenn jedes endlich präsentierte Diagramm E relativ projektiv dazu ist. Nach der Vorbemerkung ist dazu notwendig und hinreichend, wenn in einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & S_i K & \rightarrow & S_j K & \rightarrow & E \rightarrow 0 \\
 & & f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & D & \rightarrow & D/U \rightarrow 0
 \end{array}$$

der Morphismus f stets eine Fortsetzung auf $S_j K$ hat. Dies ist aber gerade Bedingung 2). ≡≡

Wie üblich nennen wir ein Diagramm *rein-einfach*, wenn es genau zwei reine Unterdiagramme hat. Ein rein-einfaches Diagramm ist insbesondere unzerlegbar, und umgekehrt sind die unzerlegbaren Diagramme $\Delta_J K$ nach obigem Satz sämtlich rein-einfach.

4.1.13. KOROLLAR: Die rein-einfachen Diagramme $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind genau die kombinatorischen Diagramme $\Delta_J K$ mit zusammenhängenden Teilmengen J von I , d.h. genau die unzerlegbaren Diagramme. ≡≡

Ein reduziertes punktweise endlich-dimensionales Diagramm ist nach Korollar 4.1.11. von der Form $D = \bigoplus_{i \in L} \bigoplus_{i < j} S_{i,j} Q_{i,j}$ mit endlich-dimensionalen Vektorräumen $Q_{i,j}$, wobei gemäß unserer Verabredung auch der Fall $j = \infty$ zulässig ist. Ferner sind die Träger der nicht-trivialen $S_{i,j} Q_{i,j}$ bis auf jeweils endlich viele genau so stark nach oben beschränkt, wie ihre unteren Grenzen, genauer gibt es für alle $l \in L$ höchstens endlich viele (i,j) mit $i \leq l < j$ und $Q_{i,j} \neq 0$. Diagramme dieses Typs fallen unter den Teil b) der folgenden

4.1.14. DEFINITION: Es sei $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein Diagramm.

- a) Für $0 \neq x \in D_i$ heißt $ht\ x = j \in L$ die *Höhe* von x , falls j minimal mit $x \in d_{ij}(D_j)$ ist. Falls kein solches $j \in L$ existiert, nennen wir x von *unendlicher Höhe* oder *divisibel*.
- b) D heißt von (*lokal*) *beschränkter Höhe*, falls D (jedes D_i) nur Elemente beschränkter Höhe enthält.

Diagramme von lokal beschränkter Höhe über nicht-artinschen Mengen sind natürlich reduziert. Ferner ist mit jedem Diagramm D auch jeder Quotient von lokal beschränkter Höhe, so daß man als leichte Folgerung aus Korollar 4.1.7. erhält

4.1.15. THEOREM: Jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ von lokal beschränkter Höhe ist eine direkte Summe zyklischer Diagramme.

≡≡

Aus dem voranstehenden Theorem ergibt sich ein Zerlegungskriterium, dessen gruppentheoretisches Analogon ein bekanntes Ergebnis von Kulikov ist (siehe [10]).

4.1.16. SATZ: Ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist genau dann eine direkte Summe zyklischer Diagramme, wenn es eine Filtrierung

$$0 = D^0 \leq D^1 \leq \dots \leq D^n \leq \dots \leq D$$

mit $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D^n$ gibt, so daß jedes D^n von in D beschränkter Höhe ist.

Beweis: Die Notwendigkeit einer derartigen Filtrierung folgt aus der Existenz einer abzählbaren initialen Teilmenge von L . Umgekehrt kann bei Vorlage einer derartigen Filtrierung durch Übergang zu $\bar{D}^n = \{x \in D_j \mid d_{ij}(x) \in D_i^n\}$ o.E. angenommen werden, daß D^n rein in D ist. Nach Voraussetzung ist D^{n+1}/D^n ein Diagramm beschränkter Höhe und als direkte Summe zyklischer Diagramme auch rein-projektiv, so daß stets $D^{n+1} \cong D^n \oplus (D^{n+1}/D^n)$ gilt. Nach einem bekannten Satz von Auslander ist dann auch $D \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D^{n+1}/D^n$ eine direkte Summe zyklischer Diagramme. $\equiv$

4.1.17. KOROLLAR: Jedes Unterdiagramm einer direkten Summe zyklischer Diagramme aus $(L, K\text{-Mod})$ ist selbst von dieser Form; insbesondere hat $K(L)$ die linke rein-globale Dimension 1, sofern L nicht-artinsch ist. $\equiv$

Diagramme von lokal beschränkter Höhe über der geordneten Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sind ähnlich wie reduzierte punktweise endlich-dimensionale Diagramme direkte Summen quasi-zyklischer Diagramme $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{n < m} S_{n,m} Q_{n,m}$, so daß für alle $l \in \mathbb{Z}$ die Menge $\{(n,m) \mid n \leq l < m \text{ und } Q_{n,m} \neq 0\}$ endlich ist. Daher gilt auch $D = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{n < m} S_{n,m} Q_{n,m}$, und D ist in diesem Fall nicht nur rein-projektiv, sondern auch rein-injektiv. Wie wir später zeigen (Theorem 4.2.6.), ist dies auch für andere Indexmengen als

$\mathbb{Z}$ richtig, und stimmt insofern mit dem Ergebnis, daß eine beschränkte abelsche Gruppe rein-injektiv und eine direkte Summe zyklischer Gruppen ist, überein. Wir diskutieren nun einige Abweichungen im Verhalten von Diagrammen gegenüber dem von abelschen Gruppen. Diagramme von *endlicher* beschränkter Ordnung sind natürlich auch von lokal beschränkter Höhe; für Diagramme mit nur beschränkten Wohlordnungstypen der Intervalle $[i, \text{ord } x]$ ($i \in \mathbb{L}$, $0 \neq x \in D_i$) oder auch für Diagramme mit beschränkten Ordnungen $\text{ord } x$ ist dies im allgemeinen falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

$D : \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$ sei definiert durch

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{n \leq m} K_n \xrightarrow{f} \bigoplus_{n \leq m+1} K_n \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{n \leq 0} K_n \xrightarrow{f} \bigoplus_{n \leq 0} K_n \xrightarrow{f} \bigoplus_{n \leq 0} K_n \xrightarrow{f} \dots \quad (m \leq 0, K_n = K)$$

mit natürlichen Inklusionen und $f(x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots) = (x_0 + x_{-1}, x_{-2}, \dots)$.

D läßt sich auch wie folgt veranschaulichen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & & & & K & \rightarrow & K & \rightarrow & K & \rightarrow & \dots \\ & & & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & K & \rightarrow & K & & K & & K & & \dots \\ & & & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ K & \rightarrow & K & \rightarrow & K & & K & & K & & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots, \end{array}$$

dabei werden die Spalten aufsummiert. Fügt man zu $\mathbb{Z}$ ein zusätzliches größtes Element hinzu, dann läßt sich D in kanonischer Weise als Torsionsdiagramm über dieser größeren Menge auffassen, genauer ist D ein abzählbar erzeugtes Diagramm von beschränkter Ordnung in beiden oben diskutierten Sinnen. D ist nicht von lokal beschränkter Höhe, hat aber auch keine divisiblen Elemente; ferner ist D keine direkte Summe zyklischer Diagramme (Satz 4.1.16.) und ebensowenig ist D rein-injektiv (siehe Theorem 4.2.4.). Im Gegensatz zu abelschen p -Gruppen muß man daher bei Diagrammen zwischen "beschränkter Ordnung" und "beschränkter Höhe" unterscheiden. Für Zerlegungsfragen und Charakterisierungen Rein-

Injektiv ist offenbar die "beschränkte Höhe" die relevante Eigenschaft, und entsprechend sind die Theoreme 6 und 8 aus [19] für Diagramme zu formulieren. Das obige Beispiel zeigt auch, daß das Analogon für Theorem 11 [19] nur lauten kann

4.1.18. SATZ: Jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ohne divisible Elemente, das von abzählbar vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird, ist eine direkte Summe zyklischer Diagramme.

Beweis: Es sei $x \in D_i$ beliebig. Wegen der endlichen Ordnung von x gibt es höchstens endlich viele nicht-triviale $x_j = d_{ji}(x)$, und da D keine divisible Elemente hat, läßt sich jeweils ein $y_j \in D_{ht\ x_j}$ mit $d_{j\ ht\ x_j}(y_j) = x_j$ wählen. Das von diesen y_j endlich erzeugte Unterdiagramm ist rein in D , folglich eine direkte Summe zyklischer Diagramme und ein direkter Summand von D . Ist nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem von D , dann zeigt man per Induktion leicht die Existenz einer Familie $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ direkter Summanden von D , so daß jedes D^n eine direkte Summe zyklischer Diagramme ist und stets $x_1, x_2, \dots, x_n \in D^1 \oplus D^2 \oplus \dots \oplus D^n$ gilt. Es gilt daher $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D^n$. $\equiv \equiv$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Kriterium für die Freiheit eines Diagramms, dessen Analogon für abelsche Gruppen als Pontryagins Kriterium bekannt ist (siehe [10]).

4.1.18. DEFINITION: Für ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ heißt $\text{rang } D = \sup\{\dim_K D_i \mid i \in L\}$ der Rang von D .

4.1.19. SATZ: Ein torsionsfreies Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ von abzählbarem Rang ist genau dann frei, wenn jedes Unterdiagramm von endlichem Rang frei ist.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus der Erbllichkeit von $K(L)$. Umgekehrt ist das torsionsfreie Diagramm D stets in dem flachen Diagramm $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Delta_L K$ enthalten. Filtriert man F durch $F^n = \bigoplus_{m=1}^n \Delta_L K$ und setzt man $D^n = D \cap F^n$, dann ist wegen $D/D^n = D/(D \cap F^n) \cong (D + F^n)/F^n \leq F/F^n$ stets D^n rein in D . Nach Voraussetzung ist nicht nur D^n , sondern auch D^{n+1}/D^n stets frei, so daß wieder nach Auslander auch $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D^{n+1}/D^n$ frei ist. ≡≡

4.1.20. KOROLLAR: Jedes torsionsfreie Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ von abzählbarem Rang ist eine direkte Summe eines divisiblen und eines freien Diagramms.

Beweis: O.E. sei D reduziert. Jedes Unterdiagramm U von endlichem Rang ist als reduziertes punktweise endlich-dimensionales Diagramm eine direkte Summe zyklischer Diagramme und ist als torsionsfreies Diagramm daher frei. ≡≡

Wir bemerken noch, daß Satz 4.1.19. mit demselben Beweis auch für Vektorraum-wertige Diagramme über nach unten gefilterten lokal artinschen Bäumen, d.h. in einer nach unten gefilterten erblichen Situation richtig ist. Korollar 4.1.20. werden wir in Theorem 5.5.9. noch verschärfen.

4.2. (Σ -) rein-injektive Diagramme

Aus den Bemerkungen vor Lemma 4.1.10. folgt, daß jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein reines Unterdiagramm seines rein-injektiven Bidualen D^{**} ist. Es erweist sich im folgenden als zweckmäßig, diese Einbettung erst einmal etwas zu vergrößern.

4.2.1. LEMMA: Jedes Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist ein reines Unterdiagramm einer direkten Summe $P = P' \oplus P''$, wobei P' divisibel und P'' ein direktes Produkt zyklischer Diagramme ist.

Beweis: Es sei $(E^S)_{S \in S}$ ein Repräsentantensystem endlich präsentierter Diagramme aus $(L^{\text{op}}, \text{Mod-}K)$, ferner sei stets $H_S = \text{Hom}(E^S, D^*)$. Dann ist der kanonische Morphismus $\bigoplus_{S \in S} E^S \xrightarrow{(h)} D^*$ ein reiner Epimorphismus, so daß D^{**} ein direkter Summand von $\prod_{S \in S} (E^S)^* \cong \prod_{S \in S} H_S^*$ ist. Nun ist aber jedes $(E^S)^*$ punktweise endlich-dimensional, also eine direkte Summe eines divisiblen Diagramms und einer direkten Summe zyklischer Diagramme, wegen der endlichen Dimension also auch eines direkten Produkts zyklischer Diagramme. ≡≡

Das Lemma zeigt noch einmal, daß die Diagrammkategorie $(L, K\text{-Mod})$ genügend viele Rein-Injektive hat. Nach einem Standardargument gibt es dann zu jedem Diagramm D eine *rein-injektive Hülle* $P(D)$; ist nämlich D ein reines Unterdiagramm des rein-injektiven Diagramms P , dann kann man für $P(D)$ jedes maximale Element von $\{Q \mid D \leq Q \leq P \text{ und } D \text{ rein-wesentlich in } Q\}$ wählen. Dabei heißt eine reine Inklusion $D \xrightarrow{i} Q$ *rein-wesentlich*,

wenn jeder Morphismus $Q \xrightarrow{f} Q'$, für den das Kompositum $f \circ i$ ein reiner Monomorphismus ist, selbst wenigstens ein Monomorphismus ist. Als Folgerung erhalten wir ein für abelsche Gruppen bekanntes Ergebnis von Sasiada (siehe [10]); wie üblich bezeichne dabei $\text{Pext}^1(Q, D)$ die Gruppe der reinen Erweiterungen $0 \rightarrow D \rightarrow X \rightarrow Q \rightarrow 0$.

4.2.2. SATZ: Ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ist genau dann rein-injektiv, wenn $\text{Pext}^1(Q, D) = 0$ für alle divisiblen Diagramme Q gilt.

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß $P(D)/D$ divisibel ist, wenn $P(D)$ eine rein-injektive Hülle von D ist. Angenommen $P(D)/D$ ist nicht divisibel, dann hat dieser Quotient einen zyklischen direkten Summanden Z , der sich nach $P(D)$ liften läßt, genauer gibt es eine direkte Zerlegung $P(D) = P' \oplus Z'$ mit $Z' \cong Z$ und $D \cap Z' = 0$, so daß auch $D \oplus Z'$ rein in $P(D)$ ist. Dann muß aber auch der kanonische Morphismus $D \rightarrow P(D) \rightarrow P'$ ein reiner Monomorphismus sein, im Widerspruch dazu, daß $P(D)$ eine rein-injektive Hülle ist. ≡≡

4.2.3. KOROLLAR: Ist $P: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein rein-injektives Diagramm mit einem reinen Unterdiagramm D , und ist ferner $\text{div}(P/D) = U/D$ für ein weiteres Unterdiagramm U von P mit $D \leq U \leq P$, dann ist U rein-injektiv.

Beweis: Man betrachte nur die lange exakte Folge
$$\dots \rightarrow \text{Hom}(Q, P/U) \rightarrow \text{Pext}^1(Q, U) \rightarrow \text{Pext}^1(Q, P) \rightarrow \dots$$
 mit einem divisiblen Diagramm Q und beachte, daß P/U reduziert ist. ≡≡

Wir sind nun an internen Eigenschaften rein-injektiver Diagramme interessiert. Für ein beliebiges Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ wird auf jedem D_i durch $(d_{ij}D_j)_{j \leq i}$ eine Filtrierung definiert, die D_i in der üblichen Weise zu einem topologischen Vektorraum macht. Da L eine abzählbare initiale Teilmenge besitzt, gibt es auf den D_i 's abzählbare Umgebungsfilterbasen. Ferner sind sämtliche Diagrammmorphismen $d_{ij}: D_j \rightarrow D_i$ stetig. Etwas vereinfachend sprechen wir von der *d-Topologie* auf D . Die folgenden Aussagen sind Standard:

- a) Für ein reines Unterdiagramm U von D stimmt seine eigene *d-Topologie* mit der von D induzierten überein.
- b) Ein Unterdiagramm U von D ist punktweise dicht bzgl. der *d-Topologie* von D , falls D/U divisibel ist.
- c) Ein Diagramm D ist genau dann punktweise hausdorffsch in der *d-Topologie*, wenn es keine divisiblen Elemente hat.
- d) Ein Diagramm D ist genau dann punktweise hausdorffsch und vollständig in der *d-Topologie*, wenn stets $D_i \cong \varprojlim_{j \leq i} D_i / d_{ij}D_j$ gilt. Insbesondere sind alle nicht-divisiblen quasi-zyklischen Diagramme $S_{i,j}^M$ hausdorffsch und vollständig.

4.2.4. THEOREM: Es sei L eine nicht-artinsch geordnete

Menge. Für ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D ist reduziert und rein-injektiv
- 2) D ist direkter Summand eines direkten Produkts zyklischer Diagramme.
- 3) D ist punktweise hausdorffsch und vollständig in der *d-Topologie*.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Nach Lemma 4.2.1. gibt es ein divisibles Diagramm P' , ein direktes Produkt zyklischer Diagramme P'' und ein geeignetes Diagramm $\bar{D}$, so daß $D \oplus \bar{D} = P' \oplus P'' = P$ gilt. Sind nun p bzw. $\bar{p}$ die Projektionen von P auf D längs $\bar{D}$ bzw. auf $\bar{D}$ längs D , dann ist $P' = \text{div } P = p(\text{div } P) \oplus \bar{p}(\text{div } P)$, andererseits aber auch $0 = p(\text{div } P) = D \cap \text{div } P$ und $\bar{p}(\text{div } P) = \bar{D} \cap \text{div } P$. Folglich gilt $P' \leq \bar{D}$ und $P'' = P/P' = D \oplus (\bar{D}/P')$.

2) $\Rightarrow$ 3) da direkte Produkte und direkte Summanden vollständiger Diagramme vollständig sind.

3) $\Rightarrow$ 1) Nach Lemma 4.2.1. sei D rein in $P' \oplus P''$ mit einem divisiblen Diagramm P' und einem direkten Produkt zyklischer Diagramme P'' . Da D keine divisiblen Elemente hat, kann auf Grund der Reinheit o.E. $P' = 0$ angenommen werden, so daß D eine rein-injektive Hülle P in P'' hat. P ist dann notwendigerweise reduziert und nach dem bereits Bewiesenen hausdorffsch und vollständig in seiner d -Topologie. Ferner ist D als vollständiges reines Unterdiagramm abgeschlossen in P , andererseits aber auch dicht in P , da P/D divisibel ist (Korollar 4.2.3.). Es muß daher $P = D$ gelten. $\equiv$

4.2.5. BEMERKUNGEN: 1) Ist $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ ein Diagramm ohne divisible Elemente, dann zeigt man wie in Theorem 4.2.4. 3) $\Rightarrow$ 1), daß die rein-injektive Hülle $P(D)$ reduziert, also hausdorffsch und vollständig ist. Da $P(D)/D$ divisibel, D also dicht in $P(D)$ ist, ist in diesem Fall der Übergang zur rein-injektiven Hülle gerade die Vervollständigung bzgl. der d -Topologie, wie von den abelschen Gruppen her bekannt (siehe [10]).

2) Ebenfalls in Übereinstimmung mit der Theorie der abelschen

Gruppen läßt sich zeigen, daß ein Diagramm D genau dann rein-injektiv ist, wenn es *algebraisch-kompakt* ist, d.h. wenn jedes Gleichungssystem in D lösbar ist, sofern es endlich lösbar ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Ausblick auf Diagramme D , für die alle Copotenzen $D^{(S)}$ rein-injektiv sind. die sogenannten Σ -*rein-injektiven* Diagramme. Nach einem Ergebnis von Baumslag und Blackburn [2] ist eine reduzierte abelsche Gruppe genau dann Σ -rein-injektiv, wenn sie beschränkt ist.

4.2.6. THEOREM: Es sei L eine nicht-artinsch geordnete Menge. Für ein Diagramm $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D ist Σ -rein-injektiv und reduziert
- 2) D ist von lokal beschränkter Höhe
- 3) D ist diskret in der d -Topologie.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Angenommen es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem D_i mit $\text{ht } x_n \leq i_n$ und $\dots < i_n < \dots < i_1 < i$. Mit D ist aber auch $D^{(\mathbb{N})}$ reduziert und rein-injektiv, also hausdorffsch und vollständig. Nun ist aber $((x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $D_i^{(\mathbb{N})}$, die zwar in $D_i^{\mathbb{N}}$, aber eben nicht in $D_i^{(\mathbb{N})}$ den Limes $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$ hat.

2) $\Rightarrow$ 3) ist klar.

3) $\Rightarrow$ 1) Mit D ist auch jede Copotenz $D^{(S)}$ diskret und damit hausdorffsch und vollständig in der d -Topologie. $\equiv$

Das Analogon des eigentlichen Satzes von Baumslag und Blackburn ist der folgende

4.2.7. SATZ: Es sei L eine nicht-artinsch geordnete Menge.

Für eine Familie reduzierter und rein-injektiver Diagramme

$(D^S)_{S \in L}$ aus $(L, K\text{-Mod})$ sind äquivalent

1) $\bigoplus_{S \in L} D^S$ ist rein-injektiv

2) Für jedes $i \in L$ gibt es eine endliche Menge $S_i = \{s_1, \dots, s_n\}$,
so daß $\bigoplus_{S \in L \setminus S_i} D_i^S$ nur Elemente von gleichmäßig beschränk-
ter Höhe enthält.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) Leichte Varianten von Theorem 4.2.6. 1) $\Rightarrow$ 2)

zeigen, daß für jedes $i \in L$ höchstens endlich viele D_i^S nicht in
der Höhe beschränkt sein können und daß die restlichen D_i^S sogar
von gleichmäßig beschränkter Höhe sein müssen.

2) $\Rightarrow$ 1) Für jedes $i \in L$ ist nach Voraussetzung

$\bigoplus_{S \in L} D_i^S = D_i^{s_1} \oplus \dots \oplus D_i^{s_n} \oplus \bigoplus_{S \in L \setminus S_i} D_i^S$ hausdorffsch und vollständig. $\equiv$

Wir geben noch ein Beispiel dafür an, daß in der Situation
von Satz 4.2.7. die endlichen Ausnahmemengen S_i sämtlich ver-
schieden sein können. Für

$D = \bigoplus_{n \leq 0} D^n: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$ mit $D^n = \prod_{m \leq n} S_{m,n} K: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$
gilt $D_i^n = \begin{cases} K^{\mathbb{N}} & \text{falls } i < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Für festes i sind daher nur die endlich vielen
 D_i^n mit $i < n \leq 0$ von unbeschränkter Höhe, andererseits gilt auch
 $D = \prod_{n \leq 0} D^n$, so daß D auch rein-injektiv ist.

4.2.8. BEMERKUNG: Ein Modul M über einem gewöhnlichen Ring
ist nach Ergebnissen von Gruson und Jensen [14] bzw. Zimmermann
[30] genau dann Σ -rein-injektiv, wenn er der Minimalbedingung
für Untergruppen endlicher Definition oder, was dasselbe ist, für

endlich matrizielle Untergruppen genügt; ferner ist M dann eine direkte Summe unzerlegbarer Moduln. Geigle [11] zeigt beides auch für Moduln über Ringoiden, wobei die Untergruppen endlicher Definition in diesem Fall punktweise zu berechnen sind. Über unsere Sätze 4.1.11. und 4.2.6. hinaus sind daher Diagramme über einer beliebigen Indexmenge I mit Werten in einer Kategorie von Vektorräumen über einem kommutativen Körper Σ -rein-injektiv und direkte Summen unzerlegbarer, sofern sie punktweise endlich-dimensional sind.

5. FÜNF PROBLEME ÜBER DIAGRAMME

Nachdem sich im letzten Abschnitt gezeigt hat, daß Diagramme über einer linear und lokal artinsch geordneten Menge mit Werten in einer Kategorie von Vektorräumen der elementaren Theorie der abelschen Gruppen genügen, fragen wir nun nach Analogien zu den "Five theorems on abelian groups [20]", die Kaplansky für die bemerkenswertesten Entwicklungen der neueren abelschen Gruppentheorie hält. Zum Ulmschen Satz und zum Speckerschen Problem machen wir nur einige kurze Bemerkungen. Die übrigen drei Probleme behandeln wir allgemeiner als in Abschnitt 4 im Rahmen erblicher Diagrammkategorien und geben einfache Beweise für die Existenz geschachtelter Basen und die Freiheit Baerscher Diagramme. Ferner zeigen wir, daß Whiteheads Problem für Diagramme entscheidbar ist, im Gegensatz zur Situation bei den abelschen Gruppen.

5.1. Geschachtelte Basen

Eine Formulierung des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen besagt, daß es zu einem Untermodul U eines endlich erzeugten freien Moduls F über einem Hauptidealring R stets eine Basis B von F gibt, so daß man eine Basis von U aus geeigneten Vielfachen einer Teilmenge von B erhält. Nach einem Ergebnis von Cohen und Gluck [8] kann auf die endliche Erzeugbarkeit von F verzichtet werden, wenn man statt dessen voraussetzt, daß F/U eine direkte Summe zyklischer Moduln ist. Anders ausgedrückt ist jede projektive Auflösung einer direkten Summe $\bigoplus_{s \in S} (R/Ra_s)$ isomorph zu einer direkten Summe von exakten Folgen der Form $0 \rightarrow Ra \rightarrow R \rightarrow R/Ra \rightarrow 0$ oder $0 \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow 0$.

Wir betrachten nun eine erbliche Diagrammkategorie $(I, K\text{-Mod})$, d.h. I sei ein lokal artinscher Baum, und o.E. sei K ein Körper (Satz 1.7.). Jedes zyklische Diagramm ist dann von der Form $Z = \bigoplus_{i \in J} S_i K$ und hat eine projektive *Standardauflösung*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j \in J', J} S_j K \rightarrow S_i K \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

wobei J' die Menge der minimalen Elemente von J sei.

5.1.1. SATZ: Es sei $Z = \bigoplus_{s \in S} S_{i_s, J_s} K$ eine direkte Summe zyklischer Diagramme aus $(I, K\text{-Mod})$. Dann ist jede projektive Auflöser

$$0 \rightarrow Q \rightarrow F \xrightarrow{f} Z \rightarrow 0$$

von Z isomorph zur Summe der Standardauflösungen und einer Folge $0 \rightarrow Q'' \rightarrow Q'' \rightarrow 0 \rightarrow 0$.

Beweis: Es sei $F = \bigoplus_{i \in I} S_i P_i$. Zu jedem erzeugenden Element $1_s \in (S_{i_s, J_s} K)_{i_s}$ wähle man ein Urbild $x_s \in \bigoplus_{i \leq i_s} P_i$ unter f . Da o.E. $x_s \in P_{i_s}$ angenommen werden kann und die $(x_s)_{s \in S}$ linear unabhängig sind, gibt es eine direkte Zerlegung $F = F' \oplus F''$ mit $F' = \bigoplus_{s \in S} S_{i_s} (Kx_s)$. Man betrachte nun das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen, wobei i die kanonische Einbettung und die erste Zeile gerade die Summe der Standardauflösungen sei.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Q' & \rightarrow & F' & \xrightarrow{f} & Z \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow i & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & Q & \rightarrow & F & \xrightarrow{f} & Z \rightarrow 0 \end{array}$$

Es ist dann $Q' = Q \cap F'$ direkt in Q , etwa $Q = Q' \oplus Q''$. Ferner gilt $Q'' \cap F' = Q'' \cap (Q \cap F') = 0$, also auch $F' \oplus Q'' \leq F$. Eine elementweise Betrachtung zeigt nun, daß sogar $F' \oplus Q'' = F$ gilt. $\equiv$

5.2. Ulms Theorem

Ulms Theorem in der Fassung von Kaplansky-Mackey (siehe [19]) besagt, daß eine abzählbar erzeugte reduzierte abelsche p -Gruppe durch die $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ -Dimensionen von $(p^\sigma G \cap \text{soc } G)/(p^{\sigma+1} G \cap \text{soc } G)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Dabei ist σ eine beliebige Ordinalzahl und durch $p^{\sigma+1} G = p(p^\sigma G)$ bzw. $p^\lambda G = \bigcap_{\sigma < \lambda} p^\sigma G$ für Limeszahlen werden die Untergruppen der *verallgemeinerten Höhe* größer oder gleich σ definiert; ferner gilt $\text{soc } G = \{x \in G \mid px = 0\}$. Als eigentlicher Gültigkeitsbereich des Ulmschen Theorems wurde später von Hill die Menge der total projektiven Gruppen angegeben (siehe [10,13]).

Für Elemente von Diagrammen $D: L \rightarrow K\text{-Mod}$ über einer linear und lokal artinsch geordneten Menge L wie in Abschnitt 4 lassen sich ohne Schwierigkeiten ebenfalls verallgemeinerte Höhen definieren. Man setze dazu $D^0 = D$, $D^{\sigma+1} = \{x \in D^\sigma \mid x \text{ divisibel}\}$ für eine Ordinalzahl σ bzw. $D^\lambda = \bigcap_{\sigma < \lambda} D^\sigma$ für eine Limeszahl λ . Zusätzlich filtere man die Diagramme D^σ durch die Höhen der Elemente. Die Kaplansky-Mackey Version des Ulmschen Theorems für Diagramme scheitert aber schon daran, daß es abzählbar erzeugte reduzierte Torsionsdiagramme mit trivialem Sockel gibt, man betrachte etwa $S_0 K: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$ und mache dies Diagramm durch Hinzufügen einer 0 in trivialer Weise zu einem Torsionsdiagramm über $(\mathbb{Z}+1)$. Satz 4.1.18. gibt als Spezialfall einen Hinweis darauf, daß man für Ulms Theorem möglicherweise nicht nur Torsionsdiagramme, sondern Diagramme mit Elementen endlicher Ordnung betrachten muß.

5.3. Baers Problem

Beim Studium gemischter abelscher Gruppen fragte Baer nach einer Beschreibung derjenigen torsionsfreien Gruppen F , die direkter Summand jeder Gruppe G sind, für die $G/tG = F$ gilt. Nach Griffith [12] sind dies gerade die freien Gruppen. Im Gegensatz zum Fall der abelschen Gruppen ist ein entsprechendes Ergebnis für Diagramme eine leichte Folgerung aus einem Projektivitätskriterium.

Wir betrachten wieder eine erbliche Diagrammkategorie $(I, K\text{-Mod})$, K sei wieder o.E. ein Körper. Die flachen Diagramme sind dann abgeschlossen gegenüber der Bildung von Unterdiagrammen, direkten Produkten und Erweiterungen, bilden also eine torsionsfreie Klasse im Sinne abstrakter Torsionstheorien. Die davon erzeugte Torsionstheorie stimmt für eine lineare Menge I mit der in Abschnitt 4 betrachteten überein, und zu den Torsionsdiagrammen gehören u.a. alle Diagramme $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$, für die zu jedem $0 \neq x \in D_i$ ein $j \in I$ mit $d_{ji}(x) = 0$ existiert.

5.3.1. SATZ: Ein flaches Diagramm $F: I \rightarrow K\text{-Mod}$ ist genau dann frei, wenn $\text{Ext}(F, -)$ auf allen Torsionsdiagrammen trivial ist.

Beweis: Nach Satz 2.2.2. reicht es zu zeigen, daß für jedes $i \in I$ die Einschränkung $F|_{I_i}$ frei ist. Dazu setzen wir

$I_i^0 = \{j \in I \mid j < i\}$ und betrachten eine beliebige Erweiterung

$$\mathcal{E}: 0 \rightarrow D \rightarrow X \rightarrow F|_{I_i^0} \rightarrow 0$$

in $(I_i^0, K\text{-Mod})$. $\mathcal{E}$ ist die Einschränkung einer Erweiterung

$$\bar{\mathcal{E}} : 0 \rightarrow \bar{D} \rightarrow \bar{X} \rightarrow F \rightarrow 0$$

in $(I, K\text{-Mod})$, bei der das Torsionsdiagramm $\bar{D}$ aus D durch Hinzufügen von Nullen gebildet sei. Nach Voraussetzung spaltet $\bar{\mathcal{E}}$, also auch $\mathcal{E}$ auf, folglich ist $F|I_i^0$ frei, und nach dem Flachheitskriterium 2.2.5. ist auch $F|I_i$ frei. $\equiv$

Da im Grunde nur die Rein-Projektivität von F zu zeigen ist und da $\text{Ext}(F, -) = \text{Pext}(F, -)$ gilt, kann der Satz von Griffith als dual zum Satz von Sasiada (Satz 4.2.2.) angesehen werden.

In einem anderen Sinne dual zum Baerschen Problem ist die Frage nach denjenigen Torsionsgruppen T , die direkter Summand jeder Gruppe G sind, für die $tG = T$ gilt. Nach Baer bzw. Fomin (siehe [10]) sind dies gerade direkte Summen einer divisiblen und einer beschränkten Gruppe, also genau die rein-injektiven Torsionsgruppen. Reduzierte Torsionsdiagramme mit dieser Aufspaltungseigenschaft brauchen aber weder in der Höhe noch in der Ordnung beschränkt zu sein, wie die beiden folgenden rein-injektiven Torsionsdiagramme zeigen:

$$a) \quad \prod_{n \leq 0} S_{n,0} K: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$$

$$b) \quad \bigoplus_{0 \leq n} S_{0,n} K: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}.$$

5.4. Speckers Problem

Nach Specker ist jede abzählbare Untergruppe der Gruppe F aller nach oben und unten beschränkten Folgen ganzer Zahlen frei, nach Ergebnissen von Nöbeling und später Bergman bzw. Hill ist die Speckersche Gruppe F selbst frei (siehe [10]). Eine ent-

sprechende Frage für Diagramme scheint etwas künstlich zu sein, zumal nicht offensichtlich ist, welche Diagramme $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ speckerssch sein sollen. Klar ist nur, daß $D \leq P = \prod_{s \in S} P^S$ für geeignete projektive Diagramme P^S und $D_i = \{(x_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} P_i^S \mid \{x_s \mid s \in S\} \text{ endlich}\}$ für alle $i \in I$ gelten soll.

Wir diskutieren kurz zwei Fälle für den Fall von Diagrammen $D: \mathbb{Z} \rightarrow K\text{-Mod}$, K ein Körper; bei der Frage nach der Freiheit von D können wir wegen Satz 2.2.2. sogar o.E. $D: \mathbb{N}^{\text{op}} \rightarrow K\text{-Mod}$ annehmen.

- 1) Für $P = (S_n K)^S$, S eine beliebige Menge, ist D trivialerweise frei.
- 2) Für $P = \prod_{n \in \mathbb{N}} S_n K$ kann D nicht frei sein, falls K ein abzählbarer Körper ist. Nach Theorem 2.1.6. müßte dann nämlich $D = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n \hat{D}_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n K$ gelten, so daß $D_0 = K^{(\mathbb{N})}$ abzählbar wäre, andererseits enthält D_0 aber alle $(0,1)$ -Folgen, hat also mindestens die Mächtigkeit der Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

5.5. Whiteheads Problem

Bekanntlich sind abelsche Whitehead-Gruppen von abzählbarem Rang frei (siehe [10]); nach einem Resultat von Shelah ist die Frage nach der Freiheit einer Whitehead-Gruppe aber im allgemeinen unentscheidbar in der üblichen ZFC-Mengenlehre [28] (siehe auch [9]). Unter Zuhilfenahme von Gödels Axiom der Konstruierbarkeit aller Mengen läßt sich generell die Freiheit aller White-

head-Gruppen zeigen, dagegen gibt es nicht-freie Gruppen, die bei Annahme von Martins Axiom Whitehead-Gruppen sind.

Eine entsprechende Fragestellung für Diagramme ist eng verknüpft mit dem Nachweis der Freiheit projektiver Diagramme: Eine Beweisanalyse von Theorem 2.1.2. zeigt, daß in einer erblichen und noetherschen Situation ein abzählbar erzeugtes Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ frei ist, sofern $\text{Ext}(D, S_i R) = 0$ für alle $i \in I$ gilt und es zu jedem $0 \neq x \in D$ einen Morphismus $f: D \rightarrow D$ mit $f(x) = x$ gibt, dessen Bild in einem endlich erzeugten Unterdiagramm von D enthalten ist. Wir beweisen später eine schärfere Fassung und definieren zunächst in Analogie zur Gruppentheorie

5.5.1. DEFINITION: Ein Diagramm $D: I \rightarrow R\text{-Mod}$ heißt *Whitehead-Diagramm* (kurz W-Diagramm), wenn $\text{Ext}^1(D, S_i R) = 0$ für alle $i \in I$ gilt.

Wir beschränken uns wieder auf erbliche Diagrammkategorien $(I, K\text{-Mod})$, d.h. I sei ein lokal artinscher Baum und o.E. K ein Körper, und zeigen daß alle W-Diagramme über I genau dann frei sind, wenn I artinsch ist. Für nicht-artinsche Mengen geben wir unabhängig von der Mengenlehre Beispiele nicht-freier W-Diagramme an, zeigen aber auch, daß W-Diagramme von abzählbarem Rang frei sind. Der Inhalt des folgenden Abschnitts deckt sich etwa mit [15]; W-Diagramme über der geordneten Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen werden auch in [18] behandelt.

5.5.2. LEMMA: Jedes W-Diagramm $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ ist ein Monodiagramm.

Beweis: Angenommen es gibt ein $0 \neq x \in \text{Kern } d_{ji}$, dann ist das von x erzeugte Unterdiagramm U von D wegen der Erbllichkeit ebenfalls ein W -Diagramm und hat eine projektive Auflösung

$$0 \rightarrow \bigoplus_{l \in L} S_l K \rightarrow S_i K \rightarrow U \rightarrow 0$$

für eine geeignete Menge paarweise unvergleichbarer Elemente $L \subseteq I$. Man betrachte nun die lange exakte Folge

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(S_i K, S_n K) \rightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{l \in L} S_l K, S_n K\right) \rightarrow \text{Ext}(U, S_n K) \rightarrow 0.$$

Für jedes $n \in L$ müßte nun $K = \text{Ext}(U, S_n K) = 0$ gelten, ein Widerspruch. ≡≡

5.5.3. SATZ: Für ein Monodiagramm $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D ist ein W -Diagramm
- 2) $\text{Ext}(D, E_i K) = 0$ für alle $i \in I$
- 3) Der kanonische Morphismus $\lim_{j \in I}^0 D_j \rightarrow D_i$ ist für alle $i \in I$ und $I_i^0 = \{j \in I \mid j < i\}$ ein i -Monomorphismus
- 4) D ist flach
- 5) $\text{Ext}(D, S_i M) = 0$ für alle $i \in I$ und jeden Vektorraum M .

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) auf Grund der Erbllichkeit, da $E_i K$ ein Quotient von $S_i K$ ist.

2) $\Rightarrow$ 3) vergleiche Satz 2.2.3.

3) $\Rightarrow$ 4) Nach dem Flachheitskriterium 2.2.5. reicht es, Bedingung 3) für alle nach unten offenen, nach oben durch i beschränkten Teilmengen J von I zu zeigen. O.E. kann angenommen werden, daß J endlich viele maximale Elemente $j_1, \dots, j_n$ hat. Nun gilt

$\lim_{j \in I}^0 D_j = \bigoplus_{j \in J} \left(\bigcup_{j \in J} D_j \right)$, wobei die Summe über die (nach oben ge-

filterten) Zusammenhangskomponenten von I_i^0 genommen wird, und

analog gilt $\lim_{j \in J} D_j = D_{j_1} \oplus \dots \oplus D_{j_n}$. Sofern alle $j_1, \dots, j_n$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von I_i^0 liegen, ist nach Voraussetzung nichts zu zeigen, wir nehmen daher o.E. an, daß diese Elemente alle in derselben Komponente liegen und daß i minimal mit $j_1, \dots, j_n < i$ ist. Falls $n \geq 3$ gibt es ein i' mit $j_1, j_2 < i' < i$ sowie ein $j' \in \{j_3, \dots, j_n\}$ mit $j' \neq i'$. Da j_1, j_2 in verschiedenen Komponenten von $I_{i'}^0$ liegen, gilt nach Voraussetzung $D_{j_1} \oplus D_{j_2} \leq D_{i'}$, und 4) folgt per Induktion.

4) $\Rightarrow$ 5) auf Grund der Bemerkungen nach Lemma 4.1.10.

5) $\Rightarrow$ 1) ist klar. $\equiv$

5.5.4. KOROLLAR: Jedes endlich präsentierte W -Diagramm

$D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ ist frei. $\equiv$

Für eine positive Lösung des Whitehead-Problems muß also jedes flache Diagramm frei, d.h. projektiv sein, was bekanntlich genau für die *perfekten* Diagrammkategorien richtig ist. Aus Satz 1.6. folgt nun

5.5.5. KOROLLAR: Jedes W -Diagramm aus $(I, K\text{-Mod})$ ist genau

dann frei, wenn I artinsch ist. $\equiv$

Als weitere Folgerung entnehmen wir Satz 5.5.3., daß $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ genau dann ein W -Diagramm ist, wenn alle Einschränkungen auf Vorgängermengen $D|I_i$ W -Diagramme sind. Auf Grund des entsprechenden Projektivitätskriteriums 2.2.2. können wir uns daher bei der Frage nach der Freiheit von W -Diagrammen auf lokal artinsche Bäume I_0 mit einem *größten Element* 0 beschränken. Nach Satz 1.5. sind die Diagrammkategorien $(I_0, K\text{-Mod})$

sämtlich *noethersch*.

Die folgenden Diagramme sind sämtlich nicht-freie W-Diagramme.

5.5.6. BEISPIELE: 1) $D^1 = \prod_{n \in \mathbb{N}} S_n K: \mathbb{N}^{\text{op}} \rightarrow K\text{-Mod}$

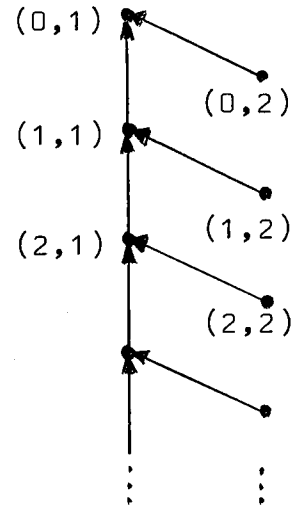
2) $D^2 = \Delta_{\mathbb{N}^{\text{op}}} K: \mathbb{N}^{\text{op}} \rightarrow K\text{-Mod}$

3) Es sei $\mathbb{N}'' = \mathbb{N} \times \{1, 2\}$ wie nebenstehend geordnet und D^3 das Unterdiagramm von

$D = \prod_{n \in \mathbb{N}} S_{(n,2)} K: \mathbb{N}'' \rightarrow K\text{-Mod}$, das von den

Elementen $(1, 1, \dots) \in \prod_{n \leq m} K_n = D_{(m,1)} \quad (K_n = K)$

und $1 \in K = D_{(m,2)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erzeugt wird.



Jede nicht-artinsche Menge I enthält eine zu $\mathbb{N}^{\text{op}}$ und, sofern sie genügend verzweigt ist, auch eine zu $\mathbb{N}''$ isomorphe Teilmenge J . Für die Inklusion $i: J \rightarrow I$ und die Abbildung $r: I \rightarrow J$ mit $r(x) = \sup \{j \in J \mid j \leq x\}$ gilt stets $r \cdot i(x) = x$ und $i \cdot r(x) \leq x$. Man zeigt leicht, daß

$$\hat{i}: (J, K\text{-Mod}) \rightarrow (I, K\text{-Mod}) \quad \text{mit} \quad \hat{i}(M) = M \cdot r$$

linksadjungiert zu

$$\hat{i}: (I, K\text{-Mod}) \rightarrow (J, K\text{-Mod}) \quad \text{mit} \quad \hat{i}(D) = D \cdot i$$

ist. D.h. $\hat{i}$ ist gerade die Kanerweiterung längs i und bewahrt daher darstellbare Funktoren und Colimites, also projektive und flache Diagramme. Auf Grund der Exaktheit von $\hat{i}$ und $\hat{i}$ gilt auch $\text{Ext}(\hat{i}M, D) = \text{Ext}(M, \hat{i}D)$ und wegen $\hat{i} \cdot \hat{i}(M) = M$ entdeckt $\hat{i}$ Projektive. Die Beispiele 5.5.6. lassen sich daher per Kanerweiterung in jede (geeignete) nicht-artinsche Menge I übertragen.

Das zweite Beispiel ist kein Gegenbeispiel im eigentlichen Sinne. Bekanntlich ist eine abelsche Whitehead-Gruppe G *separabel*, d.h. jedes Element von G liegt in einem endlich erzeugten freien direkten Summanden von G . Andererseits ist für jeden vollständigen diskreten Bewertungsring der Quotientenkörper ein Whitehead-Modul, so daß auch bei der Behandlung des klassischen Whitehead-Problems im allgemeinen divisible Elemente ausgeschlossen werden müssen. Für Diagramme über $\mathbb{N}^{\text{op}}$ ist aber das konstante Diagramm $\Delta_{\mathbb{N}^{\text{op}}} K$ ein Analogon des Quotientenkörpers [18], so daß dieses Beispiel ein modul-theoretisches Äquivalent hat. Das dritte Beispiel scheint ein Spezifikum von Diagrammen zu sein, sollte aber im gleichen Lichte wie das zweite gesehen werden. Etwas allgemeiner als in Abschnitt 4 definieren wir

5.5.7. DEFINITION: Es sei $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ ein Monodiagramm.

- a) $0 \neq x \in D_i$ heißt von *unendlicher Höhe*, falls es eine absteigende Folge $\dots < i_n < \dots < i_1 < i$ mit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} d_{ii_n} D_{i_n}$ gibt.
- b) $0 \neq x \in D_i$ heißt von *unendlicher Breite*, falls es für abzählbar viele $n \in \mathbb{N}$ paarweise unvergleichbare $i_1, \dots, i_n < i$ und nicht-triviale $x_j \in D_{i_j}$ mit $x = d_{ii_1}(x_1) + \dots + d_{ii_n}(x_n)$ gibt.
- c) $0 \neq x \in D_i$ heißt *divisibel*, wenn es von unendlicher Höhe oder unendlicher Breite ist.

5.5.8. SATZ: Für ein W-Diagramm $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ sind äquivalent

- 1) D hat keine divisiblen Elemente
- 2) Zu jedem $0 \neq x \in D_i$ gibt es paarweise unvergleichbare $i_1, \dots, i_n < i$ und Elemente $0 \neq x_j \in D_{i_j} \setminus \sum_{1 \leq j < i} D_{i_j}$ mit $x = x_1 + \dots + x_n$

- 3) D ist separabel
- 4) Zu jedem $x \in D$ gibt es einen Morphismus $f: D \rightarrow D$ mit $f(x) = x$, dessen Bild in einem endlich erzeugten Unterdiagramm U von D enthalten ist.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) ist klar.

2) $\Rightarrow$ 3) Es sei $x = x_1 + \dots + x_n$ eine Zerlegung von x wie angegeben. Man wähle jeweils eine direkte Zerlegung $D_{i,j} = \hat{D}_{i,j} \oplus \sum_{1 < i_j} D_1$ mit $x_j \in \hat{D}_{i,j}$ und betrachte das folgende Diagramm, in dem u die Einbettung und v, w die jeweiligen kanonischen Reduktionen seien

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{j=1}^n S_{i_j} \hat{D}_{i_j} & \xrightarrow{u} & D \xrightarrow{-f} \bigoplus_{j=1}^n S_{i_j} \hat{D}_{i_j} \\
 & \searrow v & \downarrow w \quad \swarrow v \\
 & & \bigoplus_{j=1}^n E_{i_j} \hat{D}_{i_j}
 \end{array}$$

Da D ein W -Diagramm ist, gibt es eine kommutative Ergänzung f , und da v eine projektive Hülle ist (siehe den Beweis von Theorem 2.1.6.), muß $f \cdot u$ ein Isomorphismus sein. Folglich ist

$\bigoplus_{j=1}^n S_{i_j} \hat{D}_{i_j}$ ein freier direkter Summand von D , der x enthält.

3) $\Rightarrow$ 4) ist klar.

4) $\Rightarrow$ 3) Es sei f eine kleine Identität für $x \in D$ wie angegeben. Auf Grund der noetherschen Situation ist U nach Korollar 5.5.4. frei, und wegen der Erbllichkeit ist auch $\text{Bild } f$ frei, also sogar ein direkter Summand von D .

3) $\Rightarrow$ 1) ist klar. ≡≡

Betrachtet man nur noch W -Diagramme ohne divisible Elemente, dann bleibt das erste Beispiel aus 5.5.5. zu beachten. Im Sinne von Definition 4.1.18., die entsprechend anzuwenden ist, hat es

eine zu große Mächtigkeit.

5.5.9. THEOREM: Jedes W -Diagramm $D: I \rightarrow K\text{-Mod}$ von abzählbarem Rang ohne divisible Elemente ist frei.

Beweis: Es sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ ein Erzeugendensystem von D_0 , 0 das größte Element von I . Per Induktion findet man freie direkte Summanden F^n von D mit $D = F^1 \oplus \dots \oplus F^n \oplus D^n$ für ein geeignetes Komplement D^n und $x_1, \dots, x_n \in F^1 \oplus \dots \oplus F^n$. Es ist dann $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F^n$ ein reines Unterdiagramm von D , so daß der Quotient D/F als flaches Diagramm insbesondere ein Monodiagramm ist. Wegen $(D/F)_0 = 0$ muß $D = F$ gelten. $\equiv$

In der Theorie abelscher Gruppen wird Theorem 5.5.9. üblicherweise mit Korollar 5.5.4. und Pontryagins Kriterium 4.1.19. bewiesen, das uns aber nur für nach unten gefilterte Mengen zur Verfügung steht. Für den Spezialfall einer linear und lokal artinsch geordneten Menge L ergibt sich noch das folgende Projektivitätskriterium.

5.5.10. KOROLLAR: Jedes Monodiagramm $P: L \rightarrow K\text{-Mod}$ von abzählbarem Rang mit $\bigcap_{j \leq i} P_j = 0$ für alle $i \in L$ ist frei. $\equiv$

LITERATUR

- [1] F. Anderson und K. Fuller: Rings and Categories of Modules.
Springer, Berlin, 1973
- [2] G. Baumslag und N. Blackburn: Direct summands of unrestricted direct sums of abelian groups. Archiv Math.
10 (1959) 403-408
- [3] G. Birkhoff: Lattice Theory. Amer.Math.Soc., Providence,
1973
- [4] K. Bongartz und P. Gabriel: Covering spaces in representation theory. Erscheint demnächst
- [5] H. Brune: Some left pure semisimple categories which are not right pure semisimple. Comm. Alg. 7 (1979)
1795-1803
- [6] - : On projective representations of ordered sets.
Erscheint demnächst
- [7] C. Cheng und B. Mitchell: DCC posets of cohomological dimension one. J. pure appl. Alg. 13 (1978)
125-137
- [8] J. Cohen und H. Gluck: Stacked bases for modules over principal ideal rings. J. Alg. 14 (1970) 493-505
- [9] P. Eklof: Whitehead's problem is undecidable. Amer. Math. Monthly 83 (1976) 775-788
- [10] L. Fuchs: Infinite Abelian Groups I, II. Academic Press,
New York. 1970, 1973
- [11] W. Geigle: Funktorielle Kennzeichnung Σ -rein-injektiver Moduln und rein-halbeinfacher Ringoide. Diplomarbeit, Paderborn, 1981
- [12] P. Griffith: A solution to the splitting mixed group problem of Baer. Trans. Amer.Math.Soc. 139
(1969) 261-269
- [13] - : Infinite Abelian Group Theory. University of Chicago Press, Chicago, 1970

- [14] L. Gruson und C. Jensen: Deux application de la theorie de L-dimension. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B 282 (1976) A 23-A 24
- [15] M. Höppner: On the freeness of Whitehead-diagrams. Erscheint demnächst
- [16] M. Höppner und H. Lenzing: Flache und halbinjektive Funktoren. manuscripta math. 20 (1977) 315-322
- [17] -, - : Projective diagrams over partially ordered sets are free. J. pure appl. Alg. 20 (1981) 7-12
- [18] -, - : Diagrams over ordered sets: a simple model of abelian group theory. Abelian Group Theory. Springer Lect. Notes Math. 874 (1981) 417-430
- [19] I. Kaplansky: Infinite Abelian Groups. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1969
- [20] - : Five theorems on abelian groups. Topics in Algebra. Springer Lect. Notes Math. 697 (1978) 47-51
- [21] O. Laudal: Note on the projective limit of small categories. Proc. Amer.Math.Soc. 33 (1972) 307-309
- [22] B. Mitchell: On the dimension of objects and categories I. J. Alg. 9 (1968) 314-340
- [23] - : Theory of Categories. Academic Press, New York, 1969
- [24] - : Rings with several objects. Advances Math. 8 (1972) 1-161
- [25] - : Some applications of module theory to functor categories. Bull. Amer.Math.Soc. 84 (1978) 867-885
- [26] - : A remark on projectives in functor categories. J. Alg. 69 (1981) 24-31
- [27] C. Ringel: Infinite dimensional representations of finite dimensional hereditary algebras. Symposia Math. 23 (1979) 321-412

- [28] S. Shelah: Infinite abelian groups, Whitehead's problem,
and some constructions. Israel J. Math. 18 (1974)
243-256
- [29] R. Warfield: Decomposition of injective modules. Pacific
J. Math. 31 (1969) 263-276
- [30] W. Zimmermann: Rein injektive direkte Summen von Moduln.
Comm. Alg. 5 (1977) 1083-1117