

**Ein modellbasiertes Messverfahren zur
Charakterisierung von Piezokeramiken unter
Verwendung eines einzelnen scheibenförmigen
Probekörpers**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
der Universität Paderborn

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Nadine Feldmann, M.Sc.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning

Zweite Gutachterin: Prof. Dr. Andrea Walther

Tag der mündlichen Prüfung: 26.11.2021

Paderborn, Dezember 2021

Diss. EIM-E/363

Modelle sind auch nur Meinungen, die sich als Mathematik getarnt haben.

— Marc-Uwe Kling, Qualityland

Vorwort

But I don't regret
Nor will I forget
All who took that road with me.

— Billy Boyd, *The Last Goodbye*

Diese Dissertation wuchs und wuchs während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachgebiet Elektrische Messtechnik im Rahmen des Projektes *ChaMP* bis sie zu dem wurde, was sie nun ist.

„Entscheiden können wir nur, was wir mit der Zeit, die uns gegeben ist, anfangen.“¹

Daher möchte ich mich zunächst bei meinem Doktorvater und Betreuer Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning für seine jahrelange Unterstützung bedanken. Stets hat er mir die Freiheit gewährt, selbstständig und eigenverantwortlich an diesem Thema zu arbeiten und trotzdem an den richtigen Stellen durch seine Anregungen den Fortgang dieser Arbeit maßgeblich beeinflusst.

„Mögest du stets dort auftauchen, wo man dich am dringendsten braucht und am wenigsten erwartet.“¹

Auch geht mein besonderer Dank an Prof. Dr. Andrea Walter, die nicht nur das Zweitgutachten übernommen hat. Gerade die Kooperation mit der Mathematik macht für mich den Reiz dieser Arbeit aus und hat daher mein persönliches Denken und meine Arbeit sehr bereichert. Frau Walther danke ich daher dafür, dass sie mich auf diesem Weg während der gesamten Entstehungszeit dieser Arbeit begleitet hat.

Vorwort

„Wie wäre es Seite an Seite mit einem Freund? – Ja da hätte ich nichts dagegen.¹“

Natürlich möchte ich mich auch bei allen (auch inzwischen ehemaligen) Mitarbeitern des Fachgebiets für die vielen fachlichen Diskussionen und die entspannte Arbeitsatmosphäre bedanken. Während meiner Tätigkeit bei der Elektrischen Messtechnik konnte ich neben hervorragenden Kollegen auch viele gute Freunde gewinnen. Besonders hervorheben möchte ich dabei zum einen Sarah Johannesmann, die mich bereits seit dem ersten Tag meines Elektrotechnik-Studiums begleitet und zum anderen Leander Claes, der mich all die Jahre als Büromitbewohnerin ertragen musste.

„[...]geringe Aussichten auf Erfolg? Worauf warten wir noch?¹“

Dann danke ich darüber hinaus den restlichen Mitgliedern der „Gemeinschaft der Ringe“ – Veronika Schulze und Benjamin Jurgelucks – den Gefährten, ohne die das ganze Projekt wenn überhaupt nur halb so viel Spaß gemacht hätte. Die Besprechungen nach den Besprechungen in der realen oder der virtuellen Welt zur Beratschlagung verschiedenster Themen haben mir immer gezeigt, dass sich Probleme gemeinsam viel einfacher lösen lassen. Bessere Projektpartner hätte ich mir nicht wünschen können.

„Man bracht Leute mit Verstand für diese... Abenteuer.¹“

Auch geht mein Dank an all die Studenten, die mit ihren Arbeiten auf die unterschiedlichsten Weisen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

„Ich wäre bis zum Ende mit dir gegangen.¹“

Dann geht mein herzlicher Danke auch an die Kommilitonen, die mich auf den unterschiedlichen, verworrenen Wegen meines Studiums begleitet haben und ohne die ich nicht einmal die ersten Meter dieser Reise hätte zurücklegen können.

„Du betrittst die Straße und wenn du nicht auf deine Füße aufpasst
kann man nicht wissen, wohin sie dich tragen.¹“

Zum Schluss bedanke ich mich bei meiner Familie, die meinen Weg von den
ersten kleinen Schritten bis heute begleitet haben und hoffentlich weiterhin
begleiten werden.

¹Zitate entstammen den Werken „Der Hobbit“ und „Der Herr der Ringe“ von J.R.R. Tolkien in der Übersetzung von Wolfgang Krege und der Filmtrilogie „Der Herr der Ringe“ von Peter Jackson.

Kurzfassung

Designprozesse von Schallwandlern werden durch zunehmende Rechenkapazitäten immer mehr durch simulative Betrachtungen unterstützt. Dabei ist vor allem die Wahl der Materialparameter der verwendeten Materialien wichtig für ein realitätsnahes Simulationsergebnis.

Bei Schallwandlern werden häufig Piezokeramiken als aktive Elemente genutzt, welche sich durch eine Verkopplung mechanischer und elektrischer Eigenschaften auszeichnen. Zur Bestimmung ihrer Materialparameter stellt der *IEEE Standard on Piezoelectricity* ein standardisiertes Verfahren dar. Dazu sind fünf Impedanzmessungen an vier unterschiedlich gefertigten Probekörpergeometrien notwendig. Da an jedem einzelnen Probekörper nur eine Untermenge aller notwendigen Materialparameter bestimmt werden kann, werden diese dann zu einem kompletten Materialparametersatz zusammengefügt. Aufgrund der unterschiedlichen Prozessbedingungen, bei denen die jeweiligen Probekörper hergestellt werden, ist dieser Materialparametersatz jedoch inkonsistent und kann nie das Verhalten einer einzelnen Probe beschreiben. Daher wird in der vorliegenden Arbeit ein Messverfahren entwickelt, mit dem es möglich ist, alle relevanten Materialparameter unter besonderer Berücksichtigung von Dämpfung an einem einzelnen Probekörper allein durch Impedanzmessungen zu bestimmen. Als Probekörper wird dazu eine in der Anwendung häufig verwendete Scheibengeometrie verwendet. Um eine hinreichend hohe Sensitivität auf alle Materialparameter zu gewährleisten, wird diese mit einer optimierten Elektrodenanordnung gefertigt. Da in diesem Fall keine analytische Betrachtung mehr möglich ist, wird das Messverfahren durch einen inversen Ansatz realisiert.

Abstract

Design processes of ultrasonic transducers become increasingly simulation-driven due to rising computational capabilities. Therewithin, the choice of the material parameters for modelling the materials used is particularly important for a realistic simulation result.

Piezoceramics, which couple mechanic and electrical properties, are often used as active elements in ultrasonic transducers. The *IEEE Standard on Piezoelectricity* is a standardised procedure for determining these parameters that requires five impedance measurements on four piezoceramics of different geometry. Since only a subset of all necessary material parameters can be determined for each individual specimen, these are then combined to form a complete set of material parameters. Due to different processing conditions for each specimen, this set of material parameters is inconsistent and cannot describe the behaviour of a single specimen appropriately. Therefore, in the present thesis, a method is developed which enables the determination of all relevant material parameters including damping on a single piezoceramic by means of electrical impedance measurements alone. A piezoelectric ceramic with disc-shaped geometry, which is frequently used in applications, is used as a specimen. In order to ensure a sufficiently high sensitivity to all material parameters, it is manufactured with an optimised electrode topology. Because in this case analytical solutions, which relate the measurement quantities to the material parameters, do not exist, the measurement method is implemented using an inverse approach.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Kurzfassung	ix
Abstract	xi
Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole	xxiii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Zielstellung	1
1.2 Einordnung der Arbeit	4
2 Stand der Forschung	7
2.1 Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter	8
2.1.1 Analytische Verfahren	9
2.1.2 Standardisiertes Verfahren	10
2.1.3 Iterative Verfahren	12
2.2 Modellierung von Dämpfung in piezokeramischen Materialien	15
3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien	19
3.1 Der piezoelektrische Effekt	19
3.2 Piezoelektrische Gleichungen	20
3.2.1 Begriffsdefinition	20
3.2.2 Notation	21
3.2.3 Lineare Zustandsgleichungen	23
3.2.4 Differentialgleichung zur dynamischen Beschreibung des piezoelektrischen Effekts	27
3.3 Berücksichtigung von Dämpfung	32
3.3.1 Rayleigh-Dämpfung	33
3.3.2 Dämpfung durch komplexe Konstanten	34
3.3.3 Zener-Modell	35
3.3.4 Vergleich unterschiedlicher Dämpfungsmodelle . . .	36
3.3.5 Erweiterung der Dämpfungsmodelle auf dreidimen- sionale Materialien	38

4	Finite-Elemente-Simulation piezokeramischer Scheiben	43
4.1	Schwache Form der piezoelektrischen Gleichungen	43
4.2	Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen	45
4.2.1	Elemente höherer Ordnung	53
4.2.2	Lösung im Frequenzbereich	55
4.2.3	Lösung im Zeitbereich	56
4.3	Simulation unter Berücksichtigung unterschiedlicher Dämpfungsmodelle	60
4.3.1	Rayleigh-Dämpfung	60
4.3.2	Dämpfung durch komplexe Konstanten	61
4.3.3	Zener-Modell	62
4.4	Unterschiedliche Verfahren zur Impedanzberechnung	62
4.4.1	Impedanzberechnung durch Zeitbereichssimulation	62
4.4.2	Impedanzberechnung durch Frequenzbereichssimulation	64
4.4.3	Vergleich der Verfahren zur Impedanzberechnung	64
5	Realisierung des inversen Verfahrens	67
5.1	Das Vorwärtsmodell	69
5.1.1	Angepasste Elektrodenstruktur	69
5.1.2	Simulationsmodell	72
5.1.3	Einfluss der Elektroden	75
5.2	Impedanzmessung	77
5.2.1	Elektrodenstrukturierung	78
5.2.2	Messung der elektrischen Impedanz	78
5.3	Startwertbestimmung	81
5.3.1	Dickenschwingung	82
5.3.2	Radialschwingung	86
5.3.3	Schätzung der Materialparameter	92
5.3.4	Bestimmung von Resonanzfrequenzen unter Berücksichtigung von Dämpfung	97
5.3.5	Nach-Optimierung der Startwerte	99
5.3.6	Evaluation des Startwertschätzers	103
5.4	Sensitivitätsanalyse zur Entwicklung einer Optimierungsstrategie	107
5.5	Zusammenfassung der entwickelten Optimierungsstrategie	111

6	Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren	117
6.1	Betrachtung simulierter Beispielmaterialien	117
6.1.1	Parameteridentifikation unterschiedlicher Materialien	118
6.2	Materialparameterbestimmung an einer PIC255 Keramik .	121
6.3	Identifikation der Parameter unterschiedlicher Dämpfungsmodelle	125
6.3.1	Dämpfung durch komplexe Konstanten	125
6.3.2	Zener-Modell	127
6.3.3	Weitere Dämpfungsmodelle	127
6.4	Evaluation und Konsistenzprüfung	128
6.4.1	Zielfunktion	129
6.4.2	Physikalische Plausibilität	129
6.4.3	Übertragbarkeit der Materialparameter	131
6.4.4	Vergleich mit Literaturdaten	133
6.5	Unsicherheitsanalyse	135
6.5.1	Beschreibung der vorhandenen Messunsicherheiten .	136
6.5.2	Linearisierung des Vorwärtsmodells	138
6.5.3	Bestimmung der Unsicherheit der Materialparameter	139
6.6	Diskussion der Ergebnisse	143
7	Zusammenfassung und Ausblick	145
7.1	Zusammenfassung	145
7.2	Ausblick	147
	Literaturverzeichnis	149
A	Mathematischer Anhang	167
A.1	Legendre Transformation	167
A.2	Darstellungsformen piezoelektrischer Gleichungen	168
A.3	Ableitung von Tensoren	169
A.3.1	Gradient	169
A.3.2	Divergenz	170
B	Beispielmaterialeparameter	171
B.1	Beispielmaterialeparameter PIC255	171
B.2	Beispielmaterialeparameter APC855	172
B.3	Beispielmaterialeparameter Pz27	173
C	Piezoelektrische Dämpfungsmodelle	175
C.1	Bestimmung der Güte	175

C.2	Spektrale Zerlegung der piezoelektrischen Materialmatrix .	178
D	Untersuchung des Konvergenzverhaltens	181
D.1	Konvergenz unterschiedlicher Dämpfungsmodelle an Beispielmaterialien	181
D.1.1	Dämpfung durch komplexe Konstanten	181
D.1.2	Zener-Modell	182
D.2	Konvergenz unterschiedlicher Dämpfungsmodelle an Impedanzmessungen (PIC255)	183
D.2.1	Dämpfung durch komplexe Konstanten	183
D.2.2	Zener-Modell	184

Abbildungsverzeichnis

2.1	Standardisierte Probekörper nach [DIN50324-2].	11
2.2	Vorgehen zur Bestimmung der piezoelektrischen Materialparameter nach standardisiertem Verfahren [IEEE87]. . . .	12
3.1	Schematische zweidimensionale Darstellung des Einflusses einer äußeren Kraft auf die Gitterstruktur von Quarz. . . .	19
3.2	Beispielhafte Indizierung des Spannungstensors.	21
3.3	Rotationsfläche einer piezoelektrischen Scheibe Ω mit vollflächigen Elektroden Γ_{anr} und Γ_0	30
3.4	Vergleich einer gedämpften und ungedämpften Schwingung.	35
3.5	Mechanisches Ersatzmodell für das Zener-Modell.	36
3.6	Vergleich des Dämpfungsmaßes μ_d für unterschiedliche Dämpfungsmodelle.	37
4.1	Eindimensionale Ansatzfunktionen in globalen und lokalen Koordinaten.	49
4.2	Dreieckselement in lokalen und globalen Koordinaten. . . .	50
4.3	Lagrange- und Legendre-Ansatzfunktionen für unterschiedliche Polynomordnungen p	55
4.4	Vergleich der simulierten Impedanz durch transiente und harmonische Simulation.	65
4.5	Vergleich unterschiedlicher FEM-Implementierungen. . . .	65
5.1	Schematische Darstellung des Optimierungsprozesses. . . .	68
5.2	Einfluss der Variation von ε_{11}^S auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden.	69
5.3	Schematische Darstellung der Ringelektrodenanordnung. . .	70
5.4	Einfluss der Variation von ε_{11}^S auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit Ringelektrodenanordnung. . . .	71
5.5	Geometrie des zweidimensionalen Modells einer piezoelektrischen Scheibe.	72
5.6	Gitter des zweidimensionalen Modells einer piezoelektrischen Scheibe mit Elementgröße $h = 60 \mu\text{m}$	72

Abbildungsverzeichnis

5.7	Quadratische Abweichung und Berechnungszeit für unterschiedliche Elementgrößen und Polynomordnungen.	74
5.8	Positionsmessung an der Oberfläche der Piezokeramik an einer Elektrodenkante.	76
5.9	Einfluss der Elektroden bei Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.	76
5.10	Einfluss der Elektroden bei Piezokeramiken mit Ringelektroden.	77
5.11	Prinzipielle Darstellung der Impedanzmessung mit <i>Auto-Balancing-Bridge</i> nach [Key16].	80
5.12	Blockschaltbild zur <i>Auto-Balancing-Bridge</i> nach [Key16].	80
5.13	Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden.	81
5.14	Variation der Dämpfungsparameter des Dämpfungsmodells mit komplexen Konstanten.	96
5.15	Resonanzfrequenzen bei einer gedämpften Impedanz.	98
5.16	Einfluss der Variation von c_{33}^E auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden.	99
5.17	Ergebnisse der Startwert-Optimierung am Beispielmateriale PIC255.	105
5.18	Ergebnisse der Startwert-Optimierung an einer PIC255-Scheibe.	106
5.19	Optimierungsstrategie zur Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter.	112
6.1	Impedanz der Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden aus Beispielmateriale.	118
6.2	Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale PIC255.	119
6.3	Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale Pz27.	120
6.4	Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale APC855.	121
6.5	Beispielhafte Messungen von Z_1 an fünf unterschiedlichen PIC255 Piezokeramik-Proben mit Ringelektroden.	122
6.6	Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255.	123
6.7	Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Rayleigh-Dämpfung.	124
6.8	Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Dämpfung durch komplexe Konstanten.	126

6.9	Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Zener-Modell.	128
6.10	Frequenzabhängige summierte Zielfunktion im Optimum. .	129
6.11	Optimierte und gemessene Impedanzen mit unterschiedlichen Dämpfungsmodellen für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.	132
6.12	Optimierte und gemessene Phase der Impedanz mit unterschiedlichen Dämpfungsmodellen für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.	133
6.13	Simulierte Impedanzen mit unterschiedlichen Literaturwerten.	134
6.14	Iterative Entwicklung der Unsicherheiten.	141
6.15	Einfluss der Temperatur auf die Materialparameter.	141
6.16	Gemessene Impedanzen (PIC255) und 95 %-Quantil des besten Simulationsergebnisses mit Dämpfung durch komplexe Konstanten.	144
D.1	Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale PIC255 mit komplexen Konstanten.	181
D.2	Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale PIC255 mit Zener-Modell.	182
D.3	Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255 mit komplexen Konstanten.	183
D.4	Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255 mit Zener-Modell.	184

Tabellenverzeichnis

3.1	Bestimmung der Indizes für die Voigt'sche Notation.	23
4.1	Gewichte und Gauß-Punkte für die Quadratur eines Einheitsdreiecks.	52
5.1	Charakteristische Frequenzen eines Impedanzverlaufs	97
5.2	Einfluss der einzelnen Materialparameter auf den Impedanzverlauf.	100
5.3	Reihenfolge der Optimierungsschritte der Nach-Optimierung der Startwerte.	103
5.4	Ergebnisse der Startwert-Optimierung am Beispielmateriale PIC255.	104
5.5	Ergebnisse der Startwert-Optimierung an einer PIC255-Scheibe.	106
5.6	Unterteilung in Frequenzbereiche für das Beispielmateriale PIC255.	108
5.7	Sensitivität der Impedanz bezüglich einzelner Materialparameter in unterschiedlichen Frequenzbereichen (siehe Tabelle 5.6).	109
5.8	Sortierte Sensitivität der Impedanz bezüglich einzelner Materialparameter in unterschiedlichen Frequenzbereichen (siehe Tabelle 5.6).	110
6.1	Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Rayleigh-Dämpfung.	124
6.2	Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Dämpfung durch komplexe Konstanten	126
6.3	Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Zener-Modell.	127
6.4	Literaturwerte der Materialparameter für PIC255.	135
6.5	Unsicherheitsbeiträge durch die Temperatur.	142
6.6	Gesamtunsicherheit der Materialparameter.	143

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
ADU	Analog-Digital-Umsetzer
ca.	circa
CuNi	Kupfer-Nickel
DUT	<i>Device under test</i>
el	Elektrode
FD	Finite Differenzen
FEM	Finite-Elemente-Methode
GUM	<i>Guide to the expression of uncertainty in measurement</i>
PZT	Blei-Zirkonat-Titanat
PVDF	Polyvinylidenfluorid
RoHS	<i>Restriction of (the use of certain) Hazardous Substances in electrical and electronic Equipment</i>

Mathematische Symbole und Konventionen

Symbol	Bedeutung
$\{\cdot\}$	Menge
$ \cdot $	Betrag einer Zahl / Mächtigkeit einer Menge
x	Skalar
\boldsymbol{x}	Vektor
$\underline{\boldsymbol{x}}$	Matrix
$\underline{\underline{\boldsymbol{x}}}$	Tensor dritter Stufe
$x^y, x _y$	x bei konstantem y
\check{x}	Skaliertes x
x_{ij}	Element ij der Matrix $\underline{\boldsymbol{x}}$

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Symbol	Bedeutung
x^{opt}	x im Optimum
$\underline{\mathbf{x}}^{\text{t}}$	Transponierte Matrix
$\underline{\mathbf{x}}^{-1}$	Inverse Matrix
$\underline{\mathbf{x}}^{\dagger}$	Pseudoinverse der Matrix
Δx	Differenz in x
∂_x	Ableitung nach x
x_{di}	Größe x bezogen auf den Dickenmode
x_{rad}	Größe x bezogen auf den Radialmode
$x_{\text{res}}(x_{\text{anti}})$	Größe x im (Anti)resonanzfall
$x_{\text{p}}, x^{\text{p}}$	Planare Größe
∂_x^n	n -te Ableitung nach x
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Norm
$\mathcal{B}\{\cdot\}$	Differentialoperator in kartesischen Koordinaten
$\cos(\cdot)$	Kosinus
diag	Diagonaloperator
$\mathcal{D}\{\cdot\}$	Divergenz eines Vektors in Zylinderkoordinaten
div	Divergenzoperator
e	Eulersche Zahl
\in	Ist Element von
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Fourier-Transformation
$\underline{\mathcal{G}}\{\cdot\}$	Gradient eines Vektors in Zylinderkoordinaten
j	Imaginäre Einheit
Im $\{\cdot\}$	Imaginärteil
$J_n(\cdot)$	Besselfunktion der Ordnung n
lim	Limes
$\ln(\cdot)$	Natürlicher Logarithmus
$\log_{10}(\cdot)$	Logarithmus zur Basis 10
$\Lambda(\cdot)$	Dreiecksfunktion
$N_n(\cdot)$	Neumannfunktion der Ordnung n
$\mathcal{N}\{\boldsymbol{\mu}, \underline{\boldsymbol{\Sigma}}\}$	Normalverteilung mit Mittelwert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$
$\mathcal{J}_1(\cdot)$	Onoe-Funktion
π	Kreiszahl
Re $\{\cdot\}$	Realteil
$\sin(\cdot)$	Sinus
$\underline{\mathcal{T}}\{\cdot\}$	Divergenz eines Tensors in Zylinderkoordinaten
$\tan(\cdot)$	Tangens

Symbol	Bedeutung
∇	Nabla-Operator
\approx	Ist näherungsweise gleich
\sim	Folgt der Verteilung

Formelzeichen

Zeichen	Einheit	Bedeutung
\mathbf{a}	Ω	Additiver Unsicherheitsterm
A	m^2	Fläche
\mathbf{B}		Eigenvektormatrix
c	N m^{-2}	Elastische Steifigkeitskonstante
c	m s^{-1}	Schallgeschwindigkeit
C_0^T	F	Freie Kapazität
C_1, C_2		Beliebige Konstanten
\mathbf{C}	N s m^{-1}	Rayleigh-Dämpfungsmatrix
d, e, g, h		Piezoelektrische Konstanten
d		Verhältnis der Steifigkeiten
D	A s m^{-2}	Dielektrische Verschiebung
E	V m^{-1}	Elektrische Feldstärke
E_L	N m^{-2}	Longitudinaler Elastizitätsmodul
E_T	N m^{-2}	Transversaler Elastizitätsmodul
f	s^{-1}	Frequenz
f_{ap}	s^{-1}	Frequenz im Arbeitspunkt
$f_{\text{m,s,r,a,p,n}}$	s^{-1}	Versch. Resonanzfrequenzen
F	N	Äußere Kraft
F_i		Intensive Feldgröße
F_e		Extensive Feldgröße
\mathbf{g}		Quellterme bei der FEM
G	J	Gibbs-Energie
h_{pc}	m	Dicke der piezoelektrischen Scheibe
h		Elementgröße des Gitters
i, j, k, l, m, n		Laufindizes
i	A	Elektrische Stromstärke
\mathbf{I}		Einheitsmatrix
J		Zielfunktion
\mathbf{J}		Jacobimatrix

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Zeichen	Einheit	Bedeutung
k		Mechanischer Kopplungsfaktor
$\underline{\mathbf{K}}$		Steifigkeitsmatrix der FEM
$\underline{\mathbf{M}}$		Massematrix der FEM
\mathbf{n}		Normalenvektor
$\underline{\mathbf{N}}$		Normalenmatrix in Voigt'scher Notation
p		Polynomordnung
\mathbf{p}		Parametervektor
\mathbf{p}^{opt}		Parametervektor im Optimum
q	m^{-1}	Wellenausbreitungskonstante
Q	C	Elektrische Ladung
Q_{mech}		Mechanische Güte
r, φ, z		Koordinaten des zylindrischen Koordinatensystems
r_i	m	Elektrodenradien
r_{pc}	m	Radius der piezoelektrischen Scheibe
$\underline{\mathbf{R}}, \mathbf{R}$		Matrix/Vektor der Formfunktionen
s	$\text{m}^2 \text{N}^{-1}$	Elastizitätskonstante
S		Mechanische Dehnung
t	s	Zeit
T	N m^{-2}	Mechanische Spannung
u	m	Mechanische Verschiebung
u	V	Elektrische Spannung
U	J	Innere Energie
\mathbf{v}, w		Testfunktion für die schwache Form
$\underline{\mathbf{W}}$		Skalierungsmatrix
x, y, z		Koordinaten des kartesischen Koordinatensystems
Z	Ω	Elektrische Impedanz
Z^{opt}	Ω	Elektrische Impedanz im Optimum
α_0		Konstanter Dämpfungsparameter
α_{M}	s^{-1}	Rayleigh-Dämpfungskonstante (masseproportional)
α_{K}	s	Rayleigh-Dämpfungskonstante (steifigkeitsproportional)
β, γ		Parameter des Newmark-Verfahrens
Γ		Rand der Fläche Ω
ε	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$	Permittivität

Zeichen	Einheit	Bedeutung
η	N s m^{-2}	Dynamische Viskosität
η		Argument der Besselfunktion
ϑ	K	Temperatur
Θ, Ψ		Beliebige Funktionen
κ	$\text{V m A}^{-1} \text{s}^{-1}$	Inverse Permittivität
λ	m	Wellenlänge
$\underline{\Lambda}$		Eigenwertmatrix
μ		Schrittweite
$\boldsymbol{\mu}$		Mittelwert
μ_d		Dämpfungsmaß
ν		Poissonzahl
ξ, η		Lokale Koordinaten
ξ_i		Modaler Dämpfungsfaktor
ϖ		Quadratur-Gewichte
ρ	kg m^{-3}	Dichte
$\underline{\Sigma}$		Kovarianzmatrix
τ	s	Relaxationszeit
ϕ	V	Elektrisches Potential
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz
Ω		Integrationsgebiet
Υ		Sensitivität

Einleitung

1.1 Motivation und Zielstellung

Die Erzeugung und Detektion von Schall spielt in vielen technischen Anwendungen eine große Rolle. Als aktives Element eines Schallwandlers werden dabei häufig Piezokeramiken verwendet. Diese ermöglichen die Wandlung von elektrischer und mechanischer Energie und sind sowohl in sensorischen als auch aktorischen Anwendungen zu finden. Im aktorischen Bereich können Anwendungen wie Ultraschallreinigung, Ultraschallschweißen oder Lithotripsie zur medizinischen Zertrümmerung von Gallen-, Harn oder Nierensteinen genannt werden. Dabei ist allerdings in nennenswertem Maße mit nicht-linearen Effekten zu rechnen. In dieser Arbeit sollen ausschließlich lineare Eigenschaften betrachtet werden, wie sie bei sensorischen Anwendungen von Bedeutung sind. Hier sind typische Anwendungsfelder beispielsweise Durchfluss-, Abstands- oder Füllstandssensoren, die Erkennung von Luftblasen in Dialysesystemen oder der Einsatz als Tonabnehmer für Instrumente. Für typische Anwendungen in Luft und Flüssigkeiten erstreckt sich der charakteristische Frequenzbereich von einigen Kilohertz bis in den Megahertzbereich, was auch den in dieser Arbeit betrachteten Bereich widerspiegelt.

Der Entwurf von Ultraschallwandlern ist in den letzten Jahrzehnten geprägt von einem Wandel hin zu simulationsgestütztem Design. Dies wird ermöglicht durch die steigende Verfügbarkeit von Rechenkapazitäten und die Entstehung einer Vielzahl kommerzieller, intuitiv bedienbarer Simulationswerkzeuge, sodass eine aufwendige Prototypen-Entwicklung zumindest teilweise durch simulative Untersuchungen abgelöst werden

1 Einleitung

kann. Neben der Kenntnis der Möglichkeiten und Limitationen der zum Einsatz kommenden numerischen Werkzeuge, ist es vor allem notwendig, die Parameter zur Beschreibung des Verhaltens der verwendeten Materialien möglichst gut zu kennen, da dieses das Ergebnis der Simulation wesentlich beeinflussen.

Dabei muss stets ein vollständiger Materialparametersatz bekannt sein, auch wenn nicht alle Parameter direkt für die Beschreibung des aktiven Elements notwendig sind. Das Verhalten einer freischwingenden Piezokeramik ist gegebenenfalls nur von einer Teilmenge des kompletten Materialparametersatzes abhängig. Wird das Element jedoch beispielsweise durch Klebung oder Klemmung in einem Schallwandler eingesetzt, ändert sich mit den Randbedingungen auch das Schwingverhalten und zuvor irrelevante Materialparameter beeinflussen dann das Materialverhalten signifikant.

Die Bestimmung dieses vollständigen Materialparametersatzes kann durch ein standardisiertes Verfahren erfolgen. Dazu werden Messungen der frequenzabhängigen elektrischen Impedanz benötigt, welche sich besonders eignen, da sie im Vergleich zu beispielsweise vibrometrischen Messungen der Oberflächenauslenkung oder -geschwindigkeit, einfach durchzuführen und robust sind. Diese Impedanzmessungen werden an vier unterschiedlichen Probekörpergeometrien durchgeführt, die jeweils so gewählt sind, dass sie annähernd eine analytisch beschreibbare Eigenschwingung ausführen. Aus den aus der Impedanz ableitbaren Resonanzfrequenzen und den geometrischen Abmessungen kann so direkt auf die Materialparameter geschlossen werden. Die einzelnen Eigenschwingungen und damit die Verläufe der frequenzabhängigen Impedanz sind jedoch immer nur abhängig von einer Untermenge des kompletten Materialparametersatzes. Die Sensitivität der Impedanz auf die restlichen Parameter ist in diesen Fällen typischerweise sehr klein. Die bestimmten Teilmengen der Materialparameter werden dann zu einem kompletten Satz vereinigt. Dabei wird jedoch davon ausgegangen, dass jeweils das exakt gleiche Material nur in einer anderen Geometrie vermessen wird. Da der Herstellungs- und Polarisationsprozess jedoch nicht

hinreichend reproduzierbar ist, führt diese Annahme zu inkonsistenten Datensätzen.

Daher ist es Ziel dieser Arbeit, die Bestimmung aller relevanten Materialparameter an einer einzelnen, scheibenförmigen Piezokeramik ausschließlich durch Impedanzmessung zu realisieren. Die scheibenförmige Geometrie wird gewählt, da sie für Schallwandler mit nur einem aktiven Element eine hohe anwendungstechnische Bedeutung hat. Das Verfahren fordert damit keine Fertigung spezieller Probekörpergeometrien, für die sich die Produktionsbedingungen von den in der Applikation genutzten Piezokeramiken unterscheiden. Diese einfache Scheibengeometrie ist jedoch nicht sensitiv bezüglich aller Materialparameter. Um die Sensitivität bei gegebener Geometrie zu steigern, bleibt als Freiheitsgrad die Elektrodenstruktur. Diese wurde dahingehend optimiert, dass die mittlere Sensitivität auf alle Parameter maximiert wird. Damit ergibt sich eine Anordnung mit nicht-uniformen Randbedingungen, was dazu führt, dass die Impedanz zwar sensitiv auf alle notwendigen Materialparameter ist, jedoch nicht mehr analytisch bestimmt werden kann. Daher kommt an dieser Stelle eine Finite-Elemente-Simulation zum Einsatz. Die Materialparameterbestimmung geschieht dann im inversen Verfahren, das heißt durch Optimierung der Modellparameter, bis das Simulationsmodell die gemessene Impedanz im Sinne einer zu definierenden Kostenfunktion bestmöglich abbildet.

Darüber hinaus stellt sich die Frage nach der Modellierung des Dämpfungsverhaltens piezokeramischer Materialien. Wo bei dem Modell für den linearen, ungedämpften Fall weitestgehend Konsens herrscht, existiert kein allgemein etabliertes Modell für die Beschreibung von Dämpfungsmechanismen in piezokeramischen Materialien. Viele klassisch in der Mechanik verwendete Modelle für gedämpfte Systeme sind darüber hinaus nur eindimensional definiert und damit nicht geeignet, um das transversal isotrope Material einer Piezokeramik darzustellen. Daher soll das entwickelte Messverfahren dazu genutzt werden, zu evaluieren, welches Dämpfungsmodell das Materialverhalten möglichst gut beschreibt und eine gemessene Impedanz möglichst gut abbilden kann.

1 Einleitung

Daraus ergeben sich für diese Arbeit folgende wissenschaftliche Fragestellungen:

- Können allein durch eine modifizierte Elektrodentopologie die Materialparameter einer piezokeramischen Scheibe vollständig und konsistent bestimmt werden?
- Wie kann eine Optimierungsstrategie zur Lösung des inversen Problems zur Bestimmung der piezoelektrischen Materialparameter realisiert werden?
- Welche Dämpfungsmodelle beschreiben das piezokeramische Materialverhalten über einen großen Frequenzbereich am besten?
- Welche Messunsicherheiten lassen sich für die im inversen Verfahren bestimmten Materialparameter angeben und wie können diese berechnet werden?

In der vorliegenden Arbeit sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, durch das entwickelte Messverfahren alle relevanten Materialparameter zu bestimmen und so perspektivisch das bisherige Messverfahren mit all seinen Nachteilen abzulösen.

1.2 Einordnung der Arbeit

Diese Arbeit ist im Rahmen eines kooperativen Forschungsprojektes zwischen dem Fachgebiet *Elektrische Messtechnik* der Universität Paderborn und der Arbeitsgruppe *Mathematische Optimierung* der Humboldt-Universität zu Berlin entstanden, welches von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter der Projektnummer 321120716 gefördert wird. Damit baut sie auf Vorarbeiten in beiden Fachbereichen auf. Die prinzipielle Möglichkeit der Sensitivitätssteigerung durch eine optimierte Elektrodentopologie konnte bereits von Jens Rautenberg und Kshitij Kulshreshtha beschrieben werden, die gezeigt haben, dass dies mit Hilfe von drei ringförmigen

Elektroden möglich ist [Kul15]. Durch Carsten Unverzagt und Benjamin Jurgelucks konnte diese Topologie dann konkretisiert und realisiert werden [Unv13; Jur19]. In der Dissertation von Unverzagt finden sich erste Ansätze zur Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren [Unv18].

Die vorliegende Arbeit setzt an einigen der dort bereits beschriebenen Punkten an. Die Simulation wird wie bereits bei Jurgelucks mit Hilfe des Simulationswerkzeugs CFS++ realisiert. Darüber hinaus werden weitere Aspekte, wie der Einfluss der Polynomordnung der Ansatzfunktionen bei der Finite-Elemente-Approximation auf das Simulationsergebnis evaluiert, die vorher keine Beachtung fanden, jedoch essentiell sind. Die Beschreibung einer problemangepassten Optimierungsstrategie wird in dieser Arbeit neu entwickelt, um eine Materialcharakterisierung für unterschiedliche piezokeramische Materialien nach dem gleichen Vorgehen zu ermöglichen. Zusätzlich wird der Aspekt der Dämpfung eingehend diskutiert. Unterschiedliche Dämpfungsmodelle werden so erweitert, dass sie die transversale Isotropie des piezokeramischen Materials abbilden. Das entwickelte inverse Verfahren ermöglicht dann eine Identifikation der Parameter unterschiedlicher Dämpfungsmodelle über einen großen Frequenzbereich. Dies erlaubt eine Bewertung, welches Modell zur Beschreibung von Piezokeramiken geeignet ist. Darüber hinaus werden ausgewählte Aspekte betrachtet, die einen Einfluss auf die Messunsicherheit der Materialparameter haben. Im Ergebnis soll ein neues Messverfahren entstehen, welches die für eine Finite-Elemente-Simulation relevanten linearen Materialparameter (inklusive der Parameter eines Dämpfungsmodells) vollständig und konsistent anhand einer Piezokeramik applikationstypischer Geometrie mittels einer Messung der elektrischen Impedanz ermöglicht.

Stand der Forschung

1880 wiesen Pierre und Jaques Curie zum ersten Mal experimentell die Verschiebung des Ladungsschwerpunktes durch eine mechanische Verformung nach [Cur80]. Kurz darauf sagte der Mathematiker Lippmann durch thermodynamische Betrachtungen den inversen Effekt voraus [Lip81], was im selben Jahr experimentell bestätigt werden konnte [Cur81]. Diese Effekte sind heute unter dem Namen piezoelektrischer beziehungsweise inverser piezoelektrischer Effekt bekannt. Die ersten Anwendungen für piezoelektrische Kristalle ergaben sich im ersten Weltkrieg in ultraschallbasierten U-Boot-Detektoren, welche auf Puls-Echo-Messungen basierten. Danach wurden die Anwendungen der neuen Werkstoffe vielfältiger: sie wurden und werden seitdem beispielsweise zur Erzeugung hoch-stabiler Frequenzen, in Mikrofonen oder zur zerstörungsfreien Prüfung eingesetzt. Im zweiten Weltkrieg wurden die ersten keramischen, piezoelektrischen Materialien entwickelt. Dazu wird das zu Beginn isotrope Keramikmaterial über die Curie-Temperatur erhitzt und in ein starkes elektrisches Feld eingebracht, was zu einer Ausrichtung der einzelnen Domänen entlang dieses Feldes führt. Erst dadurch entsteht das piezoelektrische Verhalten der Keramik [Hey08]. Zunächst auf Basis von Barium-Titanat, dann auch basierend auf Blei-Zirkonat-Titanat wurden die Werkstoffe durch unterschiedliche Dotierungen angepasst für den jeweiligen Anwendungsfall hergestellt. Heutzutage finden piezoelektrische Keramiken in Durchfluss-, Füllstands- und Konzentrationsmesssystemen sowie Abstandssensorik bis hin zu aktorischen Anwendungen wie Ultraschallreinigung oder medizinischer Lithotripsie vielfältigen Einsatz. Die Entwicklung neuer Werkstoffe rückt aktuell immer stärker in den Fokus, da die RoHS-Richtlinie [RoHS11]

seit 2002 den Einsatz von Blei in technischen Anwendungen nur im Rahmen noch zugelassener Ausnahmegenehmigungen gestattet, da diese bleihaltigen Materialien derzeit technisch und wirtschaftlich noch nicht substituiert werden können.

2.1 Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter

Die Charakterisierung des piezoelektrischen Materialverhaltens und damit die Bestimmung der einem Materialmodell zugeordneten Materialparameter ist seit der Entdeckung des piezoelektrischen Effekts stets von Bedeutung gewesen. Besonders piezoelektrische Keramiken stehen dabei im Fokus, da ihre Eigenschaften im Gegensatz zu kristallinen Werkstoffen, stark durch die Produktionsbedingungen beeinflusst werden. Dabei weisen Piezokeramiken eine transversale Isotropie auf, das heißt, dass das Material eine Vorzugsrichtung aufweist, in der es sich anders verhält als orthogonal dazu. Diese Vorzugsrichtung ergibt sich bei einer gegebenen Geometrie erst durch das angelegte elektrische Feld im Polarisationsprozess.

Damit reduziert sich die Anzahl der für die Materialbeschreibung notwendigen Parameter für den linearen, verlustfreien Fall auf zehn: fünf zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens, zwei zur Beschreibung des elektrischen Verhaltens und drei Parameter für die Beschreibung der piezoelektrischen Kopplung. Für eine Erläuterung der Parameter sei auf Kapitel 3 verwiesen.

Das standardisierte Vorgehen zur Materialparameterbestimmung wird im *IEEE Standard on Piezoelectricity* [IEEE87] beschrieben. Dieses fußt auf zuvor entwickelten analytischen Verfahren. Inzwischen zählen aber auch iterative Parameteridentifikationsverfahren zum Stand der Technik. Diese werden im Folgenden kurz erläutert.

2.1.1 Analytische Verfahren

Die mathematische Beschreibung des mechanischen und elektrischen Verhaltens von Piezokeramiken ist analytisch nur für einfache Randbedingungen und mit Hilfe von Näherungen möglich. Eine eindimensionale Betrachtung ermöglicht das bekannte Mason-Modell [Mas48], welches Methoden der Netzwerktheorie nutzt. Dieses beschreibt das piezoelektrische Material über ein Dreitor, mit zwei mechanischen und einem elektrischen Tor. Dabei beschreiben die mechanischen Tore die mechanische Last auf beiden Seiten. Auch eine Erweiterung auf Scheibengeometrien, welche dann als Viertor beschrieben werden, ist möglich [Iul98]. Hier wird das vierte Tor genutzt um die mechanische Last an der Mantelfläche der Scheibe zu modellieren und so eine zweidimensionale, axialsymmetrische Betrachtung zu ermöglichen. Ein weiteres eindimensionales Modell, welches häufig genutzt wird, ist das Butterworth-van-Dyke-Modell [But14; Dyk28]. Dies wird abgebildet durch ein elektrisches Ersatzmodell aus einer statischen Kapazität, die mit einem RLC -Schwingkreis parallel geschaltet wird. Mit Hilfe dieses Modells kann jeweils ein Resonanz-Antiresonanz-Paar abgebildet werden. Diese Art eindimensionaler Ersatzmodelle werden aufgrund ihrer Einfachheit häufig für erste Abschätzungen genutzt, finden in dieser Arbeit jedoch keine Anwendung.

Für einzelne Schwingungsmoden wie zum Beispiel dem radialen Mode einer piezokeramischen Scheibe geben beispielsweise Piao et al. oder Meitzler et al. analytische Ausdrücke für die elektrische Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz an [Pia17; Mei73]. Auch für andere einfache Geometrien und Moden ist dies möglich (zum Beispiel [She07]). Die Kopplung unterschiedlicher Eigenschwingungen ist jedoch nur schwer analytisch beschreibbar [Mos60; Iul98; Lin98; Bri10]. Erweiterungen der beschriebenen Verfahren erfolgten beispielsweise durch das Einbeziehen von Verlusten durch komplexe Materialparameter [She92; Kwo97]. Dazu kann unter anderem eine Betrachtung der Bandbreite der Resonanzstelle herangezogen werden, welche direkt mit der Schwinggüte zusammenhängt [Lan64]. Sher-

rit hingegen definiert eine komplexe Resonanzfrequenz einer gedämpften Piezokeramik. Der Realteil der komplexen Resonanzfrequenz wird wie bisher bestimmt. Dieser wird jedoch durch einen Imaginärteil ergänzt, welcher sich aus dem Minimum und Maximum des Imaginärteils der Impedanz bestimmen lässt. Sind die Resonanzfrequenzen entsprechend als komplexe Größen gegeben, können durch Auswerten der analytischen Gleichungen für ungedämpfte Materialien direkt komplexe Materialparameter bestimmt werden [She92].

Generell gilt, dass falls eine analytische Beschreibung der charakteristischen Frequenzen in Abhängigkeit der Materialparameter durch ein vereinfachtes Modell gegeben ist, die Möglichkeit besteht, im Umkehrschluss aus den gegebenen Resonanzfrequenzen wiederum, wenn nötig durch weitere Approximationen, Rückschlüsse auf die Materialparameter zu ziehen.

2.1.2 Standardisiertes Verfahren

Durch die geschickte Wahl von Probekörpergeometrien können Fälle geschaffen werden, bei denen einige Frequenzbereiche sehr gut durch analytische Näherungen beschrieben werden - vorausgesetzt die Parameter des Materials sind hinreichend gut bekannt. Andersherum lassen sich so jedoch auch durch Messung und Bestimmung der einzelnen Eigen- oder Resonanzfrequenzen die Materialparameter berechnen. Da jedoch durch die einfache Geometrie nur wenige Materialparameter für das Schwingverhalten relevant sind, sind dazu mehrere unterschiedliche Probekörpergeometrien notwendig. 1961 konnten die diesbezüglichen Betrachtungen in einem Standard zur Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter [Com61] als Vorgänger für den *IEEE Standard on Piezoelectricity* [IEEE87] und die darauf basierenden Normen [DIN50324-1; DIN50324-2; DIN50324-3] zusammengefasst werden.

2.1 Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter

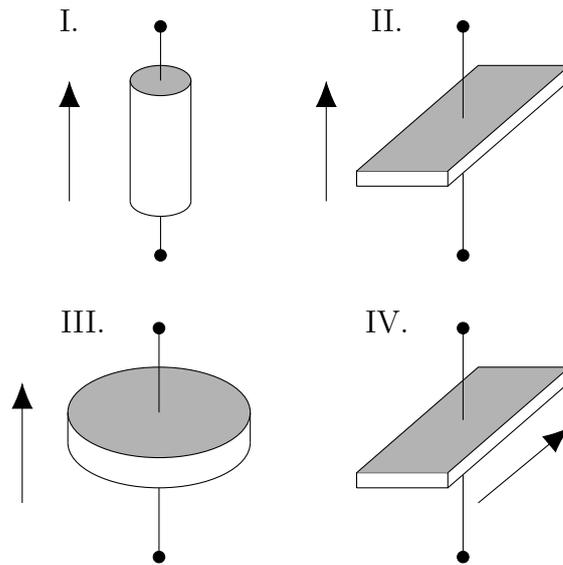


Abbildung 2.1: Standardisierte Probekörpern nach [DIN50324-2]. Pfeil gibt die Polarisationsrichtung an.

Dabei werden zur vollständigen Identifikation aller zehn Materialparameter¹ vier unterschiedliche Probekörper benötigt, an denen fünf Eigenschwingungen ausgewertet werden (siehe Abbildung 2.1 und Abbildung 2.2):

- I. hoher Zylinder; Polarisationsrichtung in Richtung des elektrischen Feldes (ε_{33}^T , s_{33}^E , d_{33})
- II. flacher, langer Quader; Polarisationsrichtung in Richtung des elektrischen Feldes (ε_{33}^T , s_{11}^E , d_{31})
- IIIa. flache Scheibe im Radialmode; Polarisationsrichtung in Richtung des elektrischen Feldes (ε_{33}^T , s_{12}^E)
- IIIb. flache Scheibe im Dickenmode; Polarisationsrichtung in Richtung des elektrischen Feldes (s_{13}^E)
- IV. flacher, langer Quader; Polarisationsrichtung orthogonal zum elektrischen Feld (ε_{11}^T , s_{44}^E , d_{15})

¹Im *Standard on Piezoelectricity* sind diese zehn Materialparameter fünf elastische Nachgiebigkeiten s_{ij}^E , zwei dielektrische Permittivitäten ε_{ii}^T und drei piezoelektrische Konstanten d_{ij} . Zur genaueren Erläuterung siehe Unterabschnitt 3.2.3.

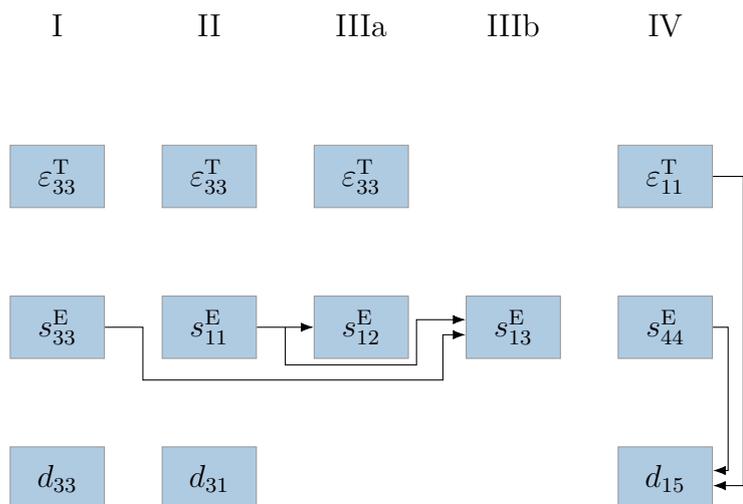


Abbildung 2.2: Vorgehen zur Bestimmung der piezoelektrischen Materialparameter nach standardisiertem Verfahren [IEEE87].

Für die Bestimmung der angegebenen Materialparameter (siehe Angaben in Klammern) sind die Messung der Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen sowie der Kapazität und auch die jeweiligen Materialparameter, welche aus den vorherigen Messungen bestimmt wurden, notwendig [Rup19]. Einige Parameter können aus Messungen an verschiedenen Probekörpern gewonnen werden, sodass diese beispielsweise gemittelt werden müssen, wenn sich unterschiedliche Werte ergeben. Eine automatisierte Berechnung der Materialparameter aus gemessenen Impedanzverläufen ist unter anderem in der Software PRAP von TASI Technical Software Inc. [PRAP] umgesetzt. Damit ermöglicht das standardisierte Verfahren die Bestimmung aller relevanten Materialparameter, sofern Probekörper des gleichen Materials in den notwendigen Geometrien vorliegen.

2.1.3 Iterative Verfahren

Neben Verfahren zur direkten Berechnung der Materialparameter aus den gemessenen Resonanzfrequenzen, entwickelten sich auch indirekte Verfahren beruhend auf iterativen Vorgehensweisen (beispielsweise [Smi76b];

2.1 Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter

Don10]). Damit gewann auch die Bestimmung der Materialparameter im inversen Verfahren an Bedeutung. Dabei wird ein parametrierbares Vorwärtsmodell der relevanten Teile eines realen Messsystems entwickelt, dessen Eingangparameter p solange angepasst werden, bis es das Verhalten Z des realen Systems bezüglich einer gewählten Zielfunktion J möglichst gut abbildet:

$$\min_p J(Z^{\text{mes}}, Z^{\text{sim}}(\mathbf{p})). \quad (2.1)$$

Im Falle der Materialcharakterisierung bei Piezokeramiken heißt das, dass der Materialparametervektor \mathbf{p} , aus dem die elektrische Impedanz Z mit Hilfe des Vorwärtsmodells berechnet werden kann, solange angepasst wird, bis gemessene und simulierte Impedanz möglichst gut übereinstimmen.

In den 1950er Jahren begann die zunehmende Nutzung von Computern zur Simulation physikalischer Probleme. Basierend auf den mathematischen Prinzipien der Variationsrechnung [Sch51] entwickelte sich dabei unter anderem die Finite-Elemente-Methode (FEM), welche auf Grund ihrer flexiblen Einsatzmöglichkeiten schnell große Verbreitung fand. Für piezoelektrische Materialien wurde dabei die Entwicklung numerischer Methoden maßgeblich von Holland und Eer Nisse geprägt [Hol68]. Dies gewann auch für die Materialparameterbestimmung an Bedeutung. Das zuvor meist analytische Vorwärtsmodell kann durch FEM-Simulationen ersetzt werden, sodass die Charakterisierung nicht mehr ausschließlich auf den Resonanzfrequenzen der Eigenschwingungen, sondern auf dem gesamten Impedanzverlauf durchgeführt werden konnte, was erstmals auch das Einbeziehen von verkoppelten Moden ermöglichte. Ansätze zur Charakterisierung von Piezokeramiken bedienen sich unterschiedlicher Optimierungsalgorithmen und Regularisierungsmethoden. So kommen sowohl ableitungsfreie Algorithmen wie der Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus bei Kybartas und Lukosevicius [Kyb02], als auch gradientenbasierte Algorithmen [And07; Lah05] zum Einsatz. Kybartas und Lukosevicius untersuchten weiterhin den Einfluss des Durchmesser-Dicken-Verhältnisses einer piezokeramischen

2 Stand der Forschung

Scheibe auf die Sensitivität der Impedanz bezüglich der Materialparameter. Dabei stellte sich heraus, dass eine erhöhte Verkopplung von Moden tendenziell zu einer höheren Sensitivität führt. Eine gute Übereinstimmung von Messung und Simulation kann jedoch nicht erreicht werden, da als Zielfunktion ein Korrelationskoeffizient genutzt wird, mit dem es nicht möglich ist, Abweichungen im Betrag zu minimieren. Auch Betrachtungen basierend auf Sensitivitätsstudien [Pér10; Pér14; Pér16] und mehrstufigen Optimierungsverfahren [Rup09; Unv18] zeigen sich vielversprechend. Ähnlich gehen Andrade et al. vor, indem sie eine Gewichtungsfunktion für einzelne Frequenzen annehmen. Überlegungen zum optimalen Design des Experiments werden von Lahmer [Lah08a; Lah08b] aufgegriffen, um die Anzahl der Messungen an unterschiedlichen Frequenzstützstellen zu reduzieren.

Da man nun nicht mehr auf bestimmte Eigenschwingungen und einfache Probekörpergeometrien der standardisierten Verfahren [IEEE87] angewiesen ist, ergibt sich zumindest theoretisch die Möglichkeit, alle relevanten Materialparameter an einem einzelnen Probekörper zu bestimmen [Chi88; She91]. Dies hat vor allem den Vorteil, dass die Untersuchungen an einer Materialprobe durchgeführt werden können. Bei mehreren Probekörpern muss stets von leicht unterschiedlichen Prozessbedingungen und von unterschiedlichen, durch die Geometrie bedingten Polarisationsbedingungen ausgegangen werden [Ale95]. Das heißt, dass sich ein einzelner Parametersatz stets aus Messungen an eigentlich unterschiedlichen Materialien zusammensetzt, was zu unplausiblen und inkonsistenten Ergebnissen führen kann, wie es auch beim standardisierten Verfahren der Fall ist. Sherrit et al. verfolgen daher den Ansatz, nach und nach unterschiedliche Probekörper aus dem gleichen Material zu schneiden [She11]. Jedoch muss hier auch das Aufbringen der Elektroden und eine Nachpolarisation an jedem einzelnen Probekörper durchgeführt werden, was wiederum zu Materialveränderungen führen kann.

Eine FEM-basierte Charakterisierung an einem einzelnen Probekörper bringt jedoch andere Nachteile mit sich. Der Vorteil, dass sich die Wahl

2.2 Modellierung von Dämpfung in piezokeramischen Materialien

des Probekörpers an der Anwendung orientieren kann, sorgt dafür, dass sich die Geometrie auf relativ einfache Topologien beschränkt. Daraus folgt jedoch, dass einige Materialparameter nur eine geringe Sensitivität auf die elektrische Impedanz aufweisen und somit nur mit großer Unsicherheit im inversen Verfahren bestimmt werden können. Da diese Parameter zwar zur Beschreibung der frei schwingenden Piezokeramik von keiner großen Relevanz sind, jedoch im verbauten Zustand im Schallwandler großen Einfluss haben können, müssen auch diese hinreichen bekannt sein. An dieser Stelle ist ein Kompromiss zwischen der Anzahl der Probekörper und der Sensitivität auf die Materialparameter zu finden. Rupitsch et al. reduzieren beispielsweise bei hinreichend hoher Sensitivität die Anzahl der Probekörper auf zwei [Rup11a; Rup15]. Alternativ kann an einem einzelnen Probekörper nicht nur die Impedanz, sondern auch die Oberflächengeschwindigkeit gemessen werden, um die Sensitivität auf einige Materialparameter zu erhöhen [Rup09]. Diese Messungen sind jedoch apparativ sehr aufwendig und teuer, sowie fehleranfällig [Rup15].

Unverzagt et al. untersuchten die Möglichkeit einer Ringelektrodenanordnung, welche bezüglich der Sensitivität optimiert wurde [Unv13; Kul15; Jur19]. Damit können trotz der sehr einfachen scheibenförmigen Geometrie, wie sie in der Anwendung häufig zu finden ist, durch eine nicht gleichförmige Anregung an einem einzelnen Probekörper alle Materialparameter mit hinreichend hoher Sensitivität bestimmt werden. An diesem Punkt soll mit dieser Arbeit angesetzt werden, um die gewonnene optimale Elektrodenstruktur zur Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren zu nutzen.

2.2 Modellierung von Dämpfung in piezokeramischen Materialien

Die Ursache und die Beschreibung von Dämpfung in piezoelektrischen und piezokeramischen Materialien ist bis heute Thema wissenschaftlicher

Diskussionen. Die Problematik, welche Verlustmechanismen existieren, welche dominant sind und welche eventuell voneinander abhängig sind, sind dabei weitestgehend ungeklärt. Dargestellt werden können Verluste über einen Imaginärteil der Materialparameter [Lan64; Gon16; Meu17; Ye08; Hol67]. Widersprüchliche Aussagen findet man vor allem in Bezug auf die piezoelektrischen Konstanten und die Frage, ob diese rein reell sind. So kann zum einen dafür argumentiert werden, dass \underline{h} oder \underline{e} reell sein [Bur53; Müs72], auch wenn dies nicht durch Messungen bestätigt werden konnte [Fuk71]. Weiter verbreitet ist die Ansicht, dass die piezoelektrischen Verlustmechanismen abhängig sind von dielektrischen und mechanischen Dämpfungseigenschaften [Smi76a; Ber06; Hag12; Arl82]. Für Materialparameteridentifikationsanwendungen werden unter anderem auch Modelle genutzt, bei dem alle Verlustmechanismen über nur einen Parameter beschrieben werden, um die Anzahl der zu bestimmenden Größen möglichst gering zu halten [Rup19]. Auch können alle Dämpfungsmechanismen zusammengefasst werden, sodass eine Formulierung über einen komplexen Kopplungsfaktor möglich ist [San99]. Da für die hier beschriebene Anwendung für eine gute Materialbeschreibung eine möglichst geringe Anzahl an Materialparameter genutzt werden soll, soll sich auf mechanische Dämpfung beschränkt werden, in der alle anderen Dämpfungsmechanismen mit abgebildet werden [San97; Let93].

Jedes dissipative System muss notwendigerweise auch dispersiv sein, um die Kausalitätsbedingungen nach Kramers-Kronig zu erfüllen [Kra27; Kro26]. Daher existiert eine Vielzahl an Modellen, welche unterschiedliches frequenzabhängiges Materialverhalten modellieren. Im Rahmen von FEM-Simulationen ist besonders das Rayleigh-Dämpfungsmodell [Ray94] vorherrschend. Dieses ist vor allem durch eine vorteilhaften Eigenschaften für das bei der Simulation zu lösende Gleichungssystem motiviert. Darüber hinaus kann die Dämpfungsmatrix einfach aus den sowieso berechneten Masse- und Steifigkeitsmatrizen zusammengesetzt werden. Durch die Nutzung des Rayleigh-Dämpfungsmodells kann so mit nur geringfügiger Erhöhung der Rechenzeit Dämpfung implementiert werden. Jedoch

2.2 Modellierung von Dämpfung in piezokeramischen Materialien

ist diese Art von Dämpfung stets nur in einem Arbeitspunkt sinnvoll. Sowohl für sehr große als auch kleine Frequenzen strebt die Dämpfung gegen unendlich und ist damit unphysikalisch. Für piezokeramische Materialien findet sich in der Anwendung alternativ die Beschreibung über frequenzunabhängige, komplexe Materialparameter. Auch dieses Modell ist nicht physikalisch, liefert jedoch für geringe Dämpfungen wie sie bei Keramiken üblich sind, gute Ergebnisse. Daher werden hier auch Ansätze verfolgt, dieses unphysikalische Modell geringfügig anzupassen, damit trotzdem die Kausalitätsbedingungen erfüllt sind. Als physikalisch motiviertes Modell kommt vor allem das Zener-Modell zum Tragen, welches sowohl Relaxations- als auch Retardationsmechanismen abbildet [Pow98; She98]. Abwandlungen sind als Maxwell- und Kelvin-Voigt-Modell bekannt und beschreiben jeweils nur entweder Relaxation oder Retardation, jedoch nicht beides.

Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

3

3.1 Der piezoelektrische Effekt

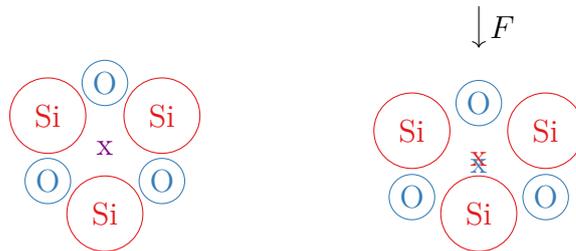


Abbildung 3.1: Schematische zweidimensionale Darstellung des Einflusses einer äußeren Kraft F auf die Gitterstruktur von Quarz.

\times : negativer Ladungsschwerpunkt

\times : positiver Ladungsschwerpunkt

\times : gemeinsamer Ladungsschwerpunkt

Der piezoelektrische Effekt beschreibt das Auftreten einer elektrischen Spannung auf Grund einer mechanischen Deformation und vice versa. Dieser Effekt entsteht durch die Verschiebung von Ladungsschwerpunkten unter mechanischer Last. Historisch gesehen wurde dieser Effekt zunächst bei kristallinen Materialien beobachtet, von denen heute vor allem Quarz eine technische Bedeutung hat [Hey08]. Hier lässt sich das Prinzip des piezoelektrischen Effekts besonders gut erläutern. Abbildung 3.1 verdeutlicht dabei den Einfluss einer äußeren Kraft F auf den Ladungsschwerpunkt einer Gitterstruktur. Ohne äußere Einwirkungen liegen positiver und negativer Ladungsschwerpunkt übereinander. Bei einer Verformung der Gitterstruktur ist dies nicht mehr der Fall, sodass ein elektrischer Dipol entsteht [Lea10]. Neben kristallinen Materialien können auch Keramiken

piezoelektrisches Verhalten aufweisen. Dies wurde zunächst in den 1940er Jahren an Bariumtitanat festgestellt [Rob47]. Später fanden vor allem bleibasierte Materialien als Piezokeramiken Anwendung [Jaf52; Saw53; Uch12]. Dabei sind Keramiken aufgrund ihrer isotropen Struktur zunächst nicht piezoelektrisch. Erst durch einen sogenannten Polarisationsprozess, bei dem die Keramik bei Temperaturen über der Curie-Temperatur einem starken elektrischen Feld ausgesetzt wird, richten sich die zunächst ungeordneten Domänen aus. Diese Ausrichtung bleibt auch nach Abschalten der angelegten Spannung erhalten und bedingt das piezoelektrische Verhalten [Tic80]. Darüber hinaus ist das Material nun nicht mehr isotrop, sondern transversal isotrop, wobei die Vorzugsrichtung die Richtung des elektrischen Feldes bei der Polarisation ist (siehe Unterabschnitt 3.2.3).

Seit einigen Jahren gibt es aus ökologischen Gründen Bestrebungen, die bleihaltigen Materialien durch bleifreie Alternativen zu ersetzen. Dies betrifft auch die meisten Piezokeramiken. Nur durch eine Ausnahmegegenehmigung sind diese aktuell in einigen Anwendungen zulässig. Diese Regelung treibt die Entwicklung neuer Materialien voran, wobei vor allem Bismuth-Verbindungen erfolgreiche Alternativen bieten.

Auch Polymere können piezoelektrisches Verhalten aufweisen. Hier ist vor allem PVDF als Werkstoff zu benennen, worauf jedoch nicht näher eingegangen werden soll [Coc12].

3.2 Piezoelektrische Gleichungen

3.2.1 Begriffsdefinition

Das reale Verhalten eines Materials ist gegeben durch seine **Materialeigenschaften**. Soll dieses mathematisch abgebildet werden, bedarf es einem **Materialmodell**. Dieses bildet die Materialeigenschaften (oder einen Teil dieser) für einen gewissen Gültigkeitsbereich näherungsweise ab. Jedes Modell wird parametrisiert durch einen Satz **Materialparametern**, welche

das Materialverhalten erst quantifizierbar machen. Diese sind stets nur in Zusammenhang mit der Definition eines Materialmodells sinnvoll definiert.

In dieser Arbeit liegt der Fokus zum einen auf der Bestimmung der Materialparameter und zum anderen auf der Modellbildung für das piezoelektrische Dämpfungsverhalten. Die zu bestimmenden Materialparameter sind vor dem Hintergrund des jeweiligen Materialmodells zu interpretieren.

3.2.2 Notation

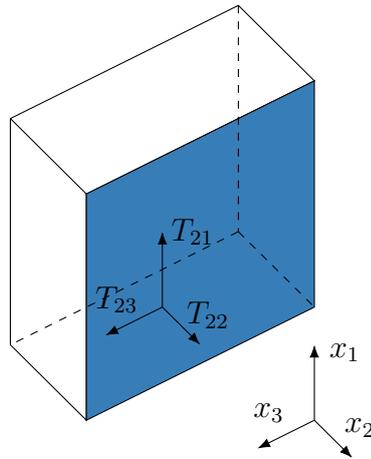


Abbildung 3.2: Beispielhafte Indizierung des Spannungstensors.

Zur mathematischen Beschreibung piezoelektrischer Phänomene werden mechanische und elektrische Größen verkoppelt. Dies geschieht zunächst über die elektrische Feldstärke E und die dielektrische Verschiebung D , sowie die mechanische Spannung T und Dehnung S . Im dreidimensionalen Fall können die Komponenten der elektrischen Größen E_i , D_j mit $i, j = \{1, 2, 3\}$ in jeweils einem Vektor \mathbf{E} , \mathbf{D} zusammengefasst werden. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird durch die Permittivitätsmatrix $\underline{\epsilon}$ mit den Elementen ϵ_{ij} dargestellt:

$$D_j = \epsilon_{ij} E_i \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D} = \underline{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

wobei Gleichung 3.1 hier im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention $\sum_i x_i y_i$ abkürzend durch $x_i y_i$ geschrieben wird [Ein16].

Bei den mechanischen Größen T und S müssen zusätzlich auch Scherbewegungen beachtet werden, was hier bereits für die Feldgrößen zu jeweils zwei notwendigen Indizes führt. Beispielhaft ist die Indizierung für eine Fläche mit Normalenvektor in x_2 -Richtung in Abbildung 3.2 gezeigt. T_{kl} und S_{mn} mit $k, l, m, n = \{1, 2, 3\}$ können dann jeweils in den Matrizen $\underline{\mathbf{T}}$ und $\underline{\mathbf{S}}$ zusammengefasst werden. Der Zusammenhang dieser beiden Größen über das Hook'sche Gesetz wird dann über den Steifigkeitstensor $\underline{\mathbf{c}}$ mit den Elementen c_{klmn} realisiert:

$$T_{kl} = c_{klmn} S_{ml} \quad (3.3)$$

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{S}}. \quad (3.4)$$

Für diese gilt die Symmetrie $c_{klmn} = c_{lknm} = c_{mnkl}$, welche genutzt werden kann, um die Tensor-Matrix-Gleichung zu reduzieren. Die dazu verwendete Voigt'sche Notation [Voi66] bildet stets einen Doppelindex kl beziehungsweise mn so auf einen einfachen Index i beziehungsweise j ab, wie es in Tabelle 3.1 angegeben ist. Damit lassen sich nun mechanische Spannung und Dehnung jeweils als Vektor mit 6 Elementen und die Steifigkeit als 6×6 -Matrix schreiben:

$$T_j = c_{ij} S_i \quad (3.5)$$

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{S}}. \quad (3.6)$$

Typischerweise sind die Scherungen in Voigt'scher Notation noch mit einem Faktor zwei definiert:

$$S_4 = 2c_{23} = 2c_{32} \quad (3.7)$$

$$S_5 = 2c_{13} = 2c_{31} \quad (3.8)$$

$$S_6 = 2c_{12} = 2c_{21}. \quad (3.9)$$

Tabelle 3.1: Bestimmung der Indizes für die Voigt'sche Notation.

Tensorindizes <i>kl/ mn</i>	Voigt'sche Notation <i>i/ j</i>
11	1
22	2
33	3
23 bzw. 32	4
31 bzw. 13	5
12 bzw. 21	6

3.2.3 Lineare Zustandsgleichungen

Zur Herleitung der linearen Zustandsgleichungen lässt sich von grundsätzlichen thermodynamischen Energiebetrachtungen ausgehen. Dabei gilt allgemein für adiabate Zustandsänderungen

$$dU = \sum F_i dF_e, \quad (3.10)$$

wobei U die innere Energie und F_i, F_e die jeweiligen intensiven und extensiven Größen bezeichnet [Val; Nol16]. Für den piezoelektrischen, das heißt elektrischen und mechanischen Fall, heißt das

$$dU = E_i dD_i + T_{ij} dS_{ij}. \quad (3.11)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

Hält man jeweils eine der extensiven Größen konstant, ergeben sich die Zusammenhänge

$$T_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial S_{ij}} \right)^D \quad (3.12)$$

$$E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial D_i} \right)^S, \quad (3.13)$$

wobei die hochgestellte Größe jeweils konstant angenommen wird. Geht man von näherungsweise linearem Verhalten aus, lässt sich durch Taylorreihenentwicklung im Entwicklungspunkt null

$$T_{ij} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial D_k} \right)^S D_k + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)^D S_{kl} \quad (3.14a)$$

$$E_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_k} \right)^S D_k + \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_{kl}} \right)^D S_{kl} \quad (3.14b)$$

die mechanische Spannung und das elektrische Feld approximativ bestimmen. Mit Hilfe von Gleichung 3.12 und Gleichung 3.13 ergibt sich daraus [Ber64; Smi05]

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_k \partial S_{ij}} D_k + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)^D S_{kl} \quad (3.15a)$$

$$E_i = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_k} \right)^S D_k + \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial S_{kl}} S_{kl}. \quad (3.15b)$$

Führt man die üblichen Kenngrößen

$$h_{ikl} = h_{kij} = -\frac{\partial^2 U}{\partial D_k \partial S_{ij}} \quad (3.16)$$

$$c_{ijkl}^D = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)^D \quad (3.17)$$

$$\kappa_{ik}^S = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_k} \right)^S \quad (3.18)$$

3.2 Piezoelektrische Gleichungen

ein, ergeben sich die piezoelektrischen Gleichungen

$$T_{ij} = -h_{ijk}D_k + c_{ijkl}^D S_{kl} \quad (3.19a)$$

$$E_i = \kappa_{ik}^S D_k - h_{kij} S_{ikl} S_{kl} \quad (3.19b)$$

oder in Voigt'scher Notation

$$\mathbf{T} = -\underline{\mathbf{h}}^t \mathbf{D} + \underline{\mathbf{c}}^D \mathbf{S} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{E} = \underline{\boldsymbol{\kappa}}^S \mathbf{D} - \underline{\mathbf{h}} \mathbf{S} \quad (3.20b)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy}]^t \\ &= [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6]^t \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, 2S_{yz}, 2S_{xz}, 2S_{xy}]^t \\ &= [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]^t \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_x, E_y, E_z]^t \\ &= [E_1, E_2, E_3]^t \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [D_x, D_y, D_z]^t \\ &= [D_1, D_2, D_3]^t \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\underline{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}, \quad \underline{\mathbf{c}}^D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}}^S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (3.25)$$

Unterschiedliche Formen der piezoelektrischen Gleichungen können aus unterschiedlichen thermodynamischen Potentialen durch Legendre-Transformation (siehe Abschnitt A.1) bestimmt werden [Smi05]:

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{d}}^t \mathbf{E} + \underline{\mathbf{s}}^E \mathbf{T} \quad (3.26a)$$

$$-\mathbf{D} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E} + \underline{\mathbf{d}} \mathbf{T} \quad (3.26b)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{g}}^t \mathbf{D} + \underline{\mathbf{s}}^D \mathbf{T} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{E} = \underline{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{D} - \underline{\mathbf{g}} \mathbf{T} \quad (3.27b)$$

$$\mathbf{T} = -\underline{\mathbf{e}}^t \mathbf{E} + \underline{\mathbf{c}}^E \mathbf{S} \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{D} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \mathbf{E} + \underline{\mathbf{e}} \mathbf{S}. \quad (3.28b)$$

Für piezokeramische Materialien sind die Materialmatrizen $\underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{c}}^E$ und $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S$ jedoch nicht vollbesetzt. Da die polarisierten Materialien transversal isotrop sind, müssen die Matrizen invariant gegenüber Drehungen um die Polarisationsachse sein. Drehungen um 90° müssen lediglich eine Vertauschung der Achsen mit sich bringen. Aus diesen physikalischen Symmetrien resultieren auch Symmetrien der Materialmatrizen, sodass sich diese wie folgt darstellen lassen:

$$\underline{\mathbf{c}}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$

mit $c_{66}^E = 0,5 \cdot (c_{11}^E - c_{12}^E)$. Damit sind nur zehn Parameter notwendig, um das piezokeramische Material vollständig zu beschreiben.

3.2.4 Differentialgleichung zur dynamischen Beschreibung des piezoelektrischen Effekts

Zur Beschreibung eines piezoelektrischen Materials lässt sich ein Differentialgleichungssystem aufstellen. Dazu wird unter der Annahme der elektrostatischen Näherung eine Gleichung für das elektrische Verhalten

$$\operatorname{div} \{\mathbf{D}\} = 0 \quad (3.30)$$

und eine für das mechanische Verhalten

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \operatorname{div} \{\underline{\mathbf{T}}\} = \underline{\mathbf{B}}^t \{\mathbf{T}\} \quad (3.31)$$

genutzt, wobei \mathbf{u} die Auslenkung und

$$\underline{\mathbf{B}} \{\cdot\} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

den Tensor-Divergenzoperator in Voigt'scher Notation in kartesischen Koordinaten beschreiben. Quellen in Form von elektrischen Ladungen oder äußeren Kräften werden hier zunächst nicht beschrieben. Durch Einsetzen der konstitutiven Gleichung 3.28a und 3.28b ergibt sich

$$0 = \operatorname{div} \left\{ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^S \mathbf{E} + \underline{\mathbf{e}} \mathbf{S} \right\} \quad (3.33a)$$

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \underline{\mathbf{B}}^t \left\{ -\underline{\mathbf{e}}^t \mathbf{E} + \underline{\mathbf{c}}^E \mathbf{S} \right\}. \quad (3.33b)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

Mit Hilfe von

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = \underline{\mathbf{B}} \{ \mathbf{u} \} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (3.35)$$

lässt sich ein verkoppeltes Differentialgleichungssystem der Auslenkung \mathbf{u} und des elektrischen Potentials ϕ schreiben [Lah08a; Kal07]:

$$0 = \operatorname{div} \{ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^S \nabla \phi - \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{B}} \{ \mathbf{u} \} \} \quad (3.36a)$$

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \underline{\mathbf{B}}^t \{ \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi + \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathbf{B}} \{ \mathbf{u} \} \}. \quad (3.36b)$$

Im Frequenzbereich ergibt sich unter der Annahme harmonischer Vorgänge durch Fouriertransformation mit der Kreisfrequenz ω

$$0 = \operatorname{div} \{ \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^S \nabla \phi - \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{B}} \{ \mathbf{u} \} \} \quad (3.37a)$$

$$-\rho \omega^2 \mathbf{u} = \underline{\mathbf{B}}^t \{ \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi + \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathbf{B}} \{ \mathbf{u} \} \}. \quad (3.37b)$$

Beschreibung in Zylinderkoordinaten

Eine Beschreibung in Zylinderkoordinaten setzt an den Grundgleichungen

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (3.38)$$

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \operatorname{div} \{ \underline{\mathbf{T}} \} \quad (3.39)$$

$$\operatorname{div} \{ \underline{\mathbf{D}} \} = 0 \quad (3.40)$$

an. Mit der Definition der Tensor-Divergenz in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \{ \underline{\mathbf{S}} \} = \begin{bmatrix} \partial_r S_{rr} + \frac{1}{r} [\partial_\varphi S_{\varphi\varphi} + S_{rr} - S_{\varphi\varphi}] + \partial_z S_{zr} \\ \partial_r S_{r\varphi} + \frac{1}{r} [\partial_\varphi S_{\varphi\varphi} + S_{r\varphi} + S_{\varphi r}] + \partial_z S_{z\varphi} \\ \partial_r S_{rz} + \frac{1}{r} [\partial_\varphi S_{\varphi z} + S_{rz}] + \partial_z S_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.2 Piezoelektrische Gleichungen

und der Vektor-Divergenz in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \{\mathbf{D}\} = \partial_r D_r + \frac{1}{r}(\partial_\varphi D_\varphi + D_r) + \partial_z D_z \quad (3.42)$$

sowie dem Vektor-Gradienten (siehe Abschnitt A.3)

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_r u_r & \frac{1}{r}(\partial_\varphi u_r - u_\varphi) & \partial_z u_r \\ \partial_r u_\varphi & \frac{1}{r}(\partial_\varphi u_\varphi + u_r) & \partial_z u_\varphi \\ \partial_r u_z & \frac{1}{r}\partial_\varphi u_z & \partial_z u_z \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

lassen sich die Grundgleichungen in Voigt'scher Notation mit

$$\mathbf{u} = [u_r, u_\varphi, u_z]^t \quad (3.44)$$

$$\mathbf{T} = [T_{rr}, T_{\varphi\varphi}, T_{zz}, T_{\varphi z}, T_{rz}, T_{r\varphi}]^t \quad (3.45)$$

$$\mathbf{S} = [S_{rr}, S_{\varphi\varphi}, S_{zz}, S_{\varphi z}, S_{rz}, S_{r\varphi}]^t \quad (3.46)$$

$$\mathbf{D} = [D_r, D_\varphi, D_z]^t \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

formulieren. Damit ergibt sich für Gleichung 3.38

$$\mathbf{S} = \underline{\mathcal{G}} \{\mathbf{u}\} \quad (3.49)$$

mit

$$\underline{\mathcal{G}} \{\cdot\} = \begin{bmatrix} \partial_r & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r}\partial_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2r}\partial_\varphi \\ \frac{1}{2}\partial_z & 0 & \frac{1}{2}\partial_r \\ \frac{1}{2}\partial_\varphi & \frac{1}{2}\left(\partial_r - \frac{1}{r}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

Für die Bewegungsgleichung (Gleichung 3.39) erhält man

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \underline{\mathcal{T}} \{ \mathbf{T} \} \quad (3.51)$$

mit

$$\underline{\mathcal{T}} \{ \cdot \} = \begin{bmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} & \frac{1}{r}(\partial_\varphi - 1) & 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\partial_\varphi & 0 & \partial_z & 0 & \partial_r + \frac{2}{r} \\ 0 & 0 & \partial_z & \frac{1}{r}\partial_\varphi & \partial_r + \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

und für Gleichung 3.40

$$\underline{\mathcal{D}} \{ \mathbf{D} \} = 0 \quad (3.53)$$

mit

$$\underline{\mathcal{D}} \{ \cdot \} = \left[\partial_r + \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r}\partial_\varphi \quad \partial_z \right]. \quad (3.54)$$

Die piezoelektrischen Differentialgleichungen in Zylinderkoordinaten lauten dann mit den oben definierten Operatoren und Vektoren in Voigt'scher Notation

$$0 = \underline{\mathcal{D}} \{ \underline{\epsilon}^S \nabla \phi - \underline{e} \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} \} \quad (3.55a)$$

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \underline{\mathcal{T}} \{ \underline{e}^t \nabla \phi + \underline{c}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} \}. \quad (3.55b)$$

Beschreibung einer piezoelektrischen Scheibe

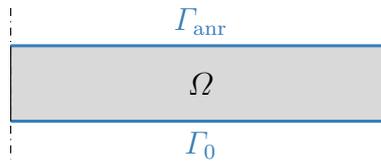


Abbildung 3.3: Rotationsfläche einer piezoelektrischen Scheibe Ω mit vollflächigen Elektroden Γ_{anr} und Γ_0 .

3.2 Piezoelektrische Gleichungen

Zur Beschreibung einer piezoelektrischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden erweist sich eine Beschreibung in Zylinderkoordinaten als sinnvoll. Abbildung 3.3 zeigt solch eine Anordnung, wobei auf der unteren Elektrode das Potential 0 und auf der oberen Elektrode ein beliebiges Potential ϕ_{arr} eingepreßt wird. Dadurch kann eine zweidimensionale Betrachtung herangezogen werden, da keine Auslenkung und keine Änderungen in azimuthaler Richtung zu erwarten sind ($\mathbf{u}_\varphi = 0$ und $\partial_\varphi = 0$). Die Konstanten und Vektoren der konstitutiven Gleichungen ergeben sich in diesem reduzierten Fall zu

$$\mathbf{u} = [u_r, u_z]^t \quad (3.56)$$

$$\mathbf{T} = [T_{rr}, T_{\varphi\varphi}, T_{zz}, T_{rz}]^t \quad (3.57)$$

$$\mathbf{S} = [S_{rr}, S_{\varphi\varphi}, S_{zz}, S_{rz}]^t \quad (3.58)$$

$$\mathbf{D} = [D_r, D_z]^t \quad (3.59)$$

$$\mathbf{E} = [E_r, E_z]^t \quad (3.60)$$

$$\underline{\mathbf{c}}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\underline{\mathbf{e}}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Die notwendigen Differentialoperatoren vereinfachen sich zu

$$\underline{\mathcal{G}}\{\cdot\} = \begin{bmatrix} \partial_r & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \partial_z \\ \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2}\partial_r \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\underline{\mathcal{T}}\{\cdot\} = \begin{bmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} & 0 & \partial_z & -\frac{1}{r} \\ 0 & \partial_z & \partial_r + \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\underline{\mathcal{D}}\{\cdot\} = \begin{bmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} & \partial_z \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Zudem müssen Rand- und Anfangsbedingungen gesetzt werden. Zum einen muss mechanische Spannungsfreiheit an den Rändern gewährleistet werden. Zum anderen muss im elektrischen Äquivalent die Normalenkomponente der dielektrischen Verschiebung verschwinden. Das elektrische Potential auf den Elektroden wird als gegebene feste Anregung ϕ_{anr} angenommen.

$$\underline{\mathbf{N}}^t \mathbf{T} = 0 \text{ auf dem gesamten Rand} \quad (3.67)$$

$$\underline{\mathbf{D}}^t \mathbf{n} = 0 \text{ auf der Mantelfläche} \quad (3.68)$$

$$\phi = 0 \text{ auf der unteren Elektrode } \Gamma_0 \quad (3.69)$$

$$\phi = \phi_{\text{anr}} \text{ auf der oberen Elektrode } \Gamma_{\text{anr}}, \quad (3.70)$$

mit dem Flächennormalenvektor $\mathbf{n} = [n_r, n_\varphi, n_z]$ und

$$\underline{\mathbf{N}}^t = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Die Anfangsbedingungen lassen sich als Ruhezustand beschreiben: Potential, Auslenkung und Geschwindigkeit in alle Richtungen sind null [Kal07].

3.3 Berücksichtigung von Dämpfung

Neben dem oben beschriebenen, verlustfreien Fall gibt es unterschiedliche Möglichkeiten gedämpfte Systeme zu beschreiben. Die unterschiedlichen Dämpfungsmodelle folgen dabei unterschiedlichen Motivationen und Herangehensweisen. Zunächst soll eine Übersicht dreier Dämpfungsmodelle gegeben werden, wobei anfangs eine eindimensionale Betrachtung durchgeführt wird und erst danach die Erweiterung auf das mehrdimensionale

Modell erfolgen soll. Zusätzlich soll sich diese Arbeit ausschließlich mit mechanischer Dämpfung befassen, da diesem Dämpfungsmechanismus die größte Relevanz zugeschrieben wird [San97; Let93].

3.3.1 Rayleigh-Dämpfung

Rayleigh-Dämpfung beschreibt eine rein mechanische Dämpfung. Es beruht auf zwei geschwindigkeitsproportionalen gewichteten Termen, welche einen masse- und einen steifigkeitsproportionalen Anteil darstellen. Die Gewichtung geschieht mit den beiden Rayleigh-Dämpfungsparametern α_M und α_K . Das zugehörige eindimensionale Differentialgleichungssystem lautet dann:

$$0 = \partial_x(\varepsilon^S \partial_x \phi - e \partial_x u) \quad (3.72a)$$

$$\rho \partial_t^2 u = -\alpha_M \rho \partial_t u + \partial_x(e \partial_x \phi + c^E \partial_x u + \alpha_K c^E \partial_x \partial_t u). \quad (3.72b)$$

Im Frequenzbereich kann diese Gleichung noch auf andere Art und Weise dargestellt werden:

$$0 = \partial_x(\varepsilon^S \partial_x \phi - e \partial_x u) \quad (3.73a)$$

$$-\rho \omega u = -j \omega \alpha_M \rho u + \partial_x(e \partial_x \phi + c^E \partial_x u + j \omega \alpha_K c^E \partial_x u). \quad (3.73b)$$

Mit der Annahme $\alpha_M = \omega \tilde{\alpha}_M$ und $\alpha_K = \tilde{\alpha}_K / \omega$ sowie durch Teilen beider Gleichungen durch $(1 - j \tilde{\alpha}_M)$ lässt sich das Gleichungssystem in die Form des ungedämpften Systems jedoch mit komplexen Parametern bringen:

$$0 = \partial_x(\varepsilon_{\text{Ray}}^S \partial_x \phi - e_{\text{Ray}} \partial_x u) \quad (3.74a)$$

$$-\rho \omega u = \partial_x(e_{\text{Ray}} \partial_x \phi + c_{\text{Ray}}^E \partial_x u) \quad (3.74b)$$

mit [Lah08a]

$$c_{\text{Ray}}^{\text{E}} = \frac{1 + j\tilde{\alpha}_{\text{K}}}{1 - j\tilde{\alpha}_{\text{M}}} c^{\text{E}} = \frac{1 + j\alpha_{\text{K}}\omega}{1 - j\frac{\alpha_{\text{M}}}{\omega}} c^{\text{E}} \quad (3.75)$$

$$e_{\text{Ray}} = \frac{1}{1 - j\tilde{\alpha}_{\text{M}}} e = \frac{1}{1 - j\frac{\alpha_{\text{M}}}{\omega}} e \quad (3.76)$$

$$\varepsilon_{\text{Ray}}^{\text{S}} = \frac{1}{1 - j\tilde{\alpha}_{\text{M}}} \varepsilon^{\text{S}} = \frac{1}{1 - j\frac{\alpha_{\text{M}}}{\omega}} \varepsilon^{\text{S}}. \quad (3.77)$$

Vor allem im Kontext von FEM-Simulationen wird diese Art von Dämpfung typischerweise genutzt. Das liegt vor allem daran, dass diese rechenzeitoptimiert implementiert werden kann (siehe dazu Unterabschnitt 4.3.1). Allerdings ist das Rayleigh-Dämpfungsmodell nicht physikalisch motiviert und birgt daher mögliche unphysikalische Effekte [Hal06].

3.3.2 Dämpfung durch komplexe Konstanten

Komplexe Materialparameter sind im Allgemeinen eine Möglichkeit Dämpfung zu beschreiben. Die einfachste Variante sind dabei konstante, frequenzunabhängige Materialparameter, die um einen Imaginärteil ergänzt werden:

$$c_{\text{komp}}^{\text{E}} = c^{\text{E}}(1 + j\alpha_0). \quad (3.78)$$

Die Motivation für dieses Dämpfungsmodell liegt hauptsächlich in seiner Einfachheit. Harmonische Schwingungen mit einer komplexen Konstanten im Exponenten beschreiben eine abklingende Schwingung und damit ein gedämpftes System (siehe Abbildung 3.4). Allerdings ist auch dieses Modell nicht kausal im Sinne der Kramers-Kronig-Beziehungen und damit streng genommen unphysikalisch [Coh07].

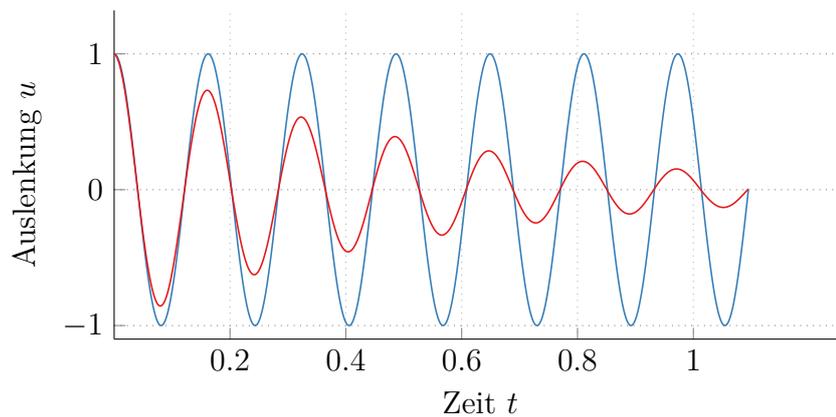


Abbildung 3.4: Vergleich einer gedämpften (rot) und ungedämpften (blau) Schwingung.

3.3.3 Zener-Modell

Im Gegensatz zu den beiden oben erwähnten Beschreibungen für Dämpfung ist das Zener-Modell physikalisch motiviert und genügt somit der Kausalitätsbedingung nach Kramers-Kronig [Nus72; Coh07; Kra27; Kro26]. Es bildet Relaxations- und Retardationsvorgänge im Material ab. Ein äquivalentes Modell für die dielektrische Permittivität ist auch unter dem Namen Debye-Modell bekannt [Pow98]. Durch ein mechanisches Ersatzmodell aus zwei Federn und einem Dämpfer (siehe Abbildung 3.5) kann das Materialverhalten veranschaulicht werden. Dabei kann eine Feder durch

$$T = cS \quad (3.79)$$

und ein Dämpfer durch

$$T = \eta \partial_t S \quad (3.80)$$

beschrieben werden. Weiterhin gilt, dass die Dehnung der einzelnen Stränge gleich ist und sich aus den Dehnungen der Einzelelemente der Stränge zusammensetzt. Für die mechanische Spannung gilt, dass diese sich in den einzelnen Strängen zu einer Gesamtspannung addiert, in den einzelnen

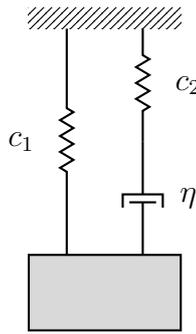


Abbildung 3.5: Mechanisches Ersatzmodell für das Zener-Modell.

Strängen jedoch gleich ist [War93]. Damit ergibt sich die Differentialgleichung für das Zener-Modell

$$T + \tau \partial_t T = c_1 (S + d \tau \partial_t S) \quad (3.81)$$

mit der Relaxationszeit $\tau = \eta c_2^{-1}$ und dem Steifigkeitsverhältnis $d = (c_1 + c_2) \cdot c_1^{-1}$. Im Frequenzbereich lässt sich daraus die komplexe, frequenzabhängige Steifigkeit berechnen:

$$c_{\text{Zen}}^{\text{E}} = c^{\text{E}} \frac{1 + j\omega d \tau}{1 + j\omega \tau}. \quad (3.82)$$

3.3.4 Vergleich unterschiedlicher Dämpfungsmodelle

Zum Vergleich der unterschiedlichen Dämpfungsmodelle wird zunächst ein Dämpfungsmaß definiert. Dies soll durch die Schwächung eines Signals über den Ort geschehen und hier für rein mechanische, eindimensionale Freiraum-Wellengleichungen hergeleitet werden. Dazu nehme man zunächst eine ungedämpfte Beschreibung an:

$$\rho \partial_t^2 u = c^{\text{E}} \partial_x^2 u. \quad (3.83)$$

3.3 Berücksichtigung von Dämpfung

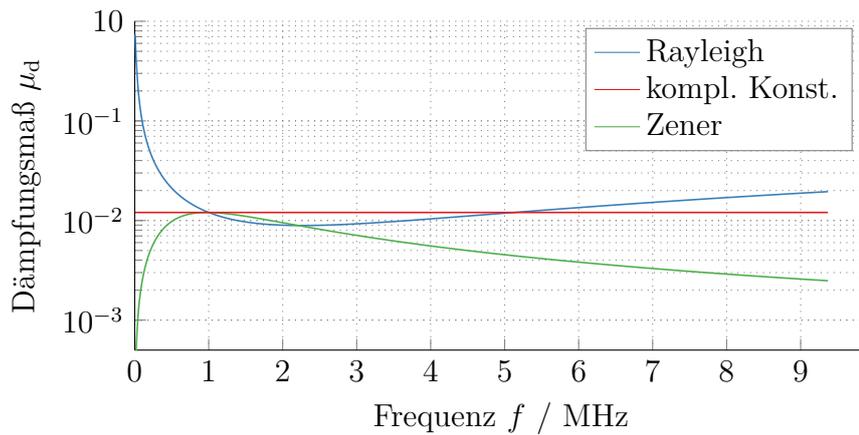


Abbildung 3.6: Vergleich des Dämpfungsmaßes μ_d für unterschiedliche Dämpfungsmodelle.

$$(\alpha_M = 1,267 \cdot 10^5 \text{ s}, \alpha_K = 6,259 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}, \alpha_0 = 0,024, \tau = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}, d = 1,05)$$

Als Ansatz wählt man zeitlich und örtlich harmonische Wellen mit der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl q , sodass sich

$$-\rho\omega^2 u = -c^E q^2 u \quad (3.84)$$

ergibt. Daraus folgt die Dispersionsbeziehung

$$q = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{c^E}}. \quad (3.85)$$

Für eine über den Ort abklingende Welle wird die Wellenzahl komplex, was in Übereinstimmung mit der komplexen Steifigkeit steht, welche für die unterschiedlichen Dämpfungsmodelle definiert wurde. Als Dämpfungsmaß wird im Folgenden

$$\mu_d = -\frac{\text{Im}\{q\}}{\text{Re}\{q\}} \quad (3.86)$$

betrachtet. Für geringe Dämpfung, wie sie in Piezokeramiken typischerweise auftritt, kann dies durch Linearisierung mit

$$\mu_d \approx \frac{\operatorname{Im}\{c^E\}}{2 \operatorname{Re}\{c^E\}} \quad (3.87)$$

approximiert werden. Für die drei beschriebenen Dämpfungsmodelle ist dieses Dämpfungsmaß in Abbildung 3.6 dargestellt, wobei die jeweiligen Dämpfungsparameter so gewählt sind, dass sich bei 1 MHz der gleiche Wert ergibt.

3.3.5 Erweiterung der Dämpfungsmodelle auf dreidimensionale Materialien

Die beschriebenen Dämpfungsmodelle sind zunächst eindimensional definiert. Zur Erweiterung der Dämpfungsmodelle auf dreidimensionale Materialien soll hier nun eine Herangehensweise basierend auf der spektralen Zerlegung der Materialmatrix beschrieben werden [The98; The00b; The00a; Bau16; Car94]. Auch hier soll ausschließlich rein mechanische Dämpfung betrachtet werden, da diese mit möglichst wenigen zu optimierenden Parametern gut das Verhalten der Piezokeramik abbilden kann. Eine Betrachtung bezüglich der gesamten piezoelektrischen Materialmatrix, das heißt für eine Herangehensweise zur Beschreibung mechanischer, dielektrischer und piezoelektrischer Dämpfung, ist in Abschnitt C.2 zu finden. Im hier betrachteten, rein mechanischen Fall wird für die Zerlegung jedoch nur die Steifigkeitsmatrix herangezogen:

$$\underline{c}^E = \underline{B}\underline{A}\underline{B}^{-1}, \quad (3.88)$$

mit der Matrix der Eigenvektoren $\underline{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots]$ und der Diagonalmatrix der Eigenwerte \underline{A} von \underline{c}^E . Da es sich bei der Steifigkeitsmatrix um eine reelle

3.3 Berücksichtigung von Dämpfung

und symmetrische Matrix handelt, ist die Eigenvektormatrix orthogonal, sodass die Inverse durch die transponierte Matrix beschrieben werden kann:

$$\underline{\mathbf{c}}^E = \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{B}}^t \quad (3.89)$$

$$= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^t. \quad (3.90)$$

Setzt man dies in die konstituierenden Gleichungen

$$\mathbf{T} = \underline{\mathbf{c}}\mathbf{S} \quad (3.91)$$

$$= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^t \mathbf{S} \quad (3.92)$$

$$= \sum_{i=1}^6 \lambda_i \tilde{\mathbf{S}}_i \quad (3.93)$$

ein, ergeben sich die Eigendehnungen $\tilde{\mathbf{S}}_i$. Jeder dieser Eigendehnungen kann nun ein eigener Verlustmechanismus mit jeweiligen Parametern zugeordnet werden. Für die Steifigkeitsmatrix transversal isotroper Materialien, welche für radialsymmetrische Systeme auf eine 4×4 -Matrix reduziert werden kann (siehe Abschnitt 3.2.4), ergibt sich für die Eigenwerte und -vektoren

$$\lambda_1 = c_{44} \quad (3.94)$$

$$\lambda_2 = c_{11} - c_{12} \quad (3.95)$$

$$\lambda_3 = \frac{c_{11} + c_{12} + c_{33}}{2} + \sqrt{\frac{(c_{11} + c_{12} - c_{33})^2}{4} + 2c_{13}^2} \quad (3.96)$$

$$\lambda_4 = \frac{c_{11} + c_{12} + c_{33}}{2} - \sqrt{\frac{(c_{11} + c_{12} - c_{33})^2}{4} + 2c_{13}^2} \quad (3.97)$$

3 Mathematische Beschreibung piezokeramischer Materialien

$$\mathbf{b}_1 = [0, 0, 0, 1]^t \quad (3.98)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, -1, 0, 0]^t \quad (3.99)$$

$$\mathbf{b}_3 = \left(\sqrt{2 + \left(\frac{2c_{13}}{\lambda_3 - c_{33}} \right)^2} \right)^{-1} \left[1, 1, \frac{2c_{13}}{\lambda_3 - c_{33}}, 0 \right]^t \quad (3.100)$$

$$\mathbf{b}_4 = \left(\sqrt{2 + \left(\frac{2c_{13}}{\lambda_4 - c_{33}} \right)^2} \right)^{-1} \left[1, 1, \frac{2c_{13}}{\lambda_4 - c_{33}}, 0 \right]^t. \quad (3.101)$$

Hier wird ersichtlich, dass die erste Eigendehnung ausschließlich eine Scherdehnung ist. Die zweite vereint radiale und azimutale Komponenten, wohingegen die dritte und vierte Eigendehnung zusätzlich noch Komponenten in Dickenrichtung beinhalten. Daher soll davon ausgegangen werden, dass die dritte und vierte Eigendehnung dem gleichen Dämpfungsmechanismus unterliegen, sodass nur drei unterschiedliche Parametersätze für das jeweilige Dämpfungsmodell betrachtet werden. Dies geschieht dann indem das jeweilige frequenzabhängige Verhalten des gewählten Dämpfungsmodells mit den Eigenwerten multipliziert wird. Für ein Zener-Modell ergibt sich dann beispielsweise

$$\tilde{\lambda}_1 = c_{44} \frac{1 + j\omega\tau_1 d_1}{1 + j\omega\tau_1} \quad (3.102)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = (c_{11} - c_{12}) \frac{1 + j\omega\tau_2 d_2}{1 + j\omega\tau_2} \quad (3.103)$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \left(\frac{c_{11} + c_{12} + c_{33}}{2} + \sqrt{\frac{(c_{11} + c_{12} - c_{33})^2}{4} - 2c_{13}^2} \right) \frac{1 + j\omega\tau_3 d_3}{1 + j\omega\tau_3} \quad (3.104)$$

$$\tilde{\lambda}_4 = \left(\frac{c_{11} + c_{12} + c_{33}}{2} - \sqrt{\frac{(c_{11} + c_{12} - c_{33})^2}{4} - 2c_{13}^2} \right) \frac{1 + j\omega\tau_3 d_3}{1 + j\omega\tau_3}, \quad (3.105)$$

sodass sich hier sechs zusätzliche Dämpfungsparameter ergeben. Für das Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten geschieht dies analog mit

3.3 Berücksichtigung von Dämpfung

den Parametern $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{0,2}$ und $\alpha_{0,3}$. Die Steifigkeitsmatrix, welche dieses Dämpfungsmodell beschreibt kann dann wieder durch

$$\tilde{\underline{c}}^E = \underline{B} \tilde{\underline{\Lambda}} \underline{B}^t \quad (3.106)$$

berechnet und für die Simulation genutzt werden.

Da das klassische Rayleigh-Dämpfungsmodell als Referenz für ein typischerweise in einem Simulationswerkzeug verfügbares Modell dient, soll es nicht durch diesen Ansatz auf ein transversal isotropes Modell erweitert werden.

Finite-Elemente-Simulation piezokeramischer Scheiben

4

Unterschiedliche Verfahren erlauben das Lösen partieller Differentialgleichungen (zum Beispiel Finite-Differenzen-Verfahren, Finite-Volumen-Verfahren, Finite-Integrationstechniken [Ise12]). In der Anwendung kommt jedoch häufig die Finite-Elemente-Methode (FEM) zum Einsatz, da diese sehr flexibel unterschiedliche physikalische Phänomene und aufwändige Geometrien abbilden kann. Die Lösung, die mit diesem Verfahren gefunden wird, wird als schwache Lösung bezeichnet, da die notwendigen Ableitungen nur in einem generalisierten Sinne existieren müssen [Ise12]. In diesem Kapitel wird das Simulationsverfahren im Allgemeinen, sowie notwendige Aspekte der Simulation piezokeramischer Scheiben im Speziellen beschrieben.

4.1 Schwache Form der piezoelektrischen Gleichungen

Für die Simulation mittels FEM muss das gekoppelte Differentialgleichungssystem (Gleichung 3.36) zunächst in eine schwache Form gebracht werden. Dies führt dazu, dass die Anforderungen an die Differenzierbarkeit der Funktion verringert werden. Dazu werden die Gleichungen mit den Testfunktionen v und w multipliziert, welche unendlich oft differenzierbar

4 Finite-Elemente-Simulation piezokeramischer Scheiben

gewählt werden. Danach kann über das gesamte Gebiet Ω integriert werden, sodass sich

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{v}^t (\partial_t^2 \mathbf{u} + \alpha_M \partial_t \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^t (\mathcal{I} \{ \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi + \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} + \alpha_K \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \partial_t \mathbf{u} \} \}) \, d\Omega \quad (4.1a)$$

$$\int_{\Omega} w \mathcal{D} \{ -\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \nabla \phi + \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} \} \, d\Omega = 0 \quad (4.1b)$$

ergibt. Mit Hilfe des ersten Green'schen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \Theta \operatorname{div} \{ \operatorname{grad} \{ \Psi \} \} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \{ \Theta \} \operatorname{grad} \{ \Psi \} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \Theta \mathbf{n} \operatorname{grad} \{ \Psi \} \, d\Omega \quad (4.2)$$

mit den Funktionen Θ und Ψ , dem Rechengebiet Ω und seinem Rand Γ , dem Normalenvektor \mathbf{n} und der abkürzenden Schreibweise $\int_{\Omega} \mathbf{v}^t \mathbf{u} \, d\Omega = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \langle \partial_t^2 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \alpha_M \rho \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ &\quad - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^t \underline{\mathbf{N}}^t (\underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi + \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} + \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \partial_t \mathbf{u} \} + \alpha_K \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \}) \, d\Gamma \\ &\quad + \langle \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi, \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{v} \} \rangle + \langle \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \}, \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{v} \} \rangle \\ &\quad + \alpha_K \langle \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathcal{G}} \{ \partial_t \mathbf{u} \}, \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{v} \} \rangle \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \nabla \phi, \nabla w \rangle - \langle \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \}, \nabla w \rangle \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{n}^t (\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathcal{G}} \{ \mathbf{u} \} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \nabla \phi) w \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.3b)$$

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

Da sich die Anteile der Randintegrale auf Grund der Randbedingungen der mechanischen Spannungsfreiheit zu null ergeben, vereinfacht sich die schwache Form zu

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho \langle \partial_t^2 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \alpha_M \rho \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \langle \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \phi, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle + \langle \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{u} \}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle \\
 &\quad + \alpha_K \langle \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \partial_t \mathbf{u} \}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$0 = \langle \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^S \nabla \phi, \nabla w \rangle - \langle \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{u} \}, \nabla w \rangle. \tag{4.4b}$$

Für eine Scheibengeometrie, wie sie in Abbildung 3.3 gezeigt ist, gilt zusätzlich

$$\phi = 0 \text{ auf der unteren Elektrode } \Gamma_0 \tag{4.5}$$

$$\phi = \phi_{\text{anr}} \text{ auf der oberen Elektrode } \Gamma_{\text{anr}}. \tag{4.6}$$

Die schwache Form benötigt nun nur noch die Existenz der ersten örtlichen Ableitung, nicht mehr auch die der Zweiten, wie in Gleichung 3.36a und 3.36b. Die Existenz der zusätzlich hinzukommenden Ableitungen der Testfunktionen \mathbf{v} und w können stets durch geeignete Wahl dieser gewährleistet werden.

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

Zur Approximation der schwachen Lösung der piezoelektrischen Gleichungen kann ein Finite-Elemente-Verfahren angewendet werden [Wag17; Hol68; Zie05; Zha17]. Dazu wird zunächst das gesamte Rechengebiet in n_{elem} Elemente unterteilt. Das daraus entstehende Gitter, auch *mesh* genannt, beinhaltet die Zusammensetzung der Elemente und deren Eckpunkte n_K ,

4 Finite-Elemente-Simulation piezokeramischer Scheiben

auch Knoten genannt. Die gesuchten Feldgrößen werden dann je Element mit Hilfe sogenannter Form- oder Ansatzfunktionen $R^i(r, z)$ genähert:

$$\phi(r, z) = \mathbf{R}^t(r, z)\boldsymbol{\phi}^K \quad (4.7)$$

$$w(r, z) = \mathbf{R}^t(r, z)\mathbf{w}^K \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u}(r, z) = \underline{\mathbf{R}}^t(r, z)\mathbf{u}^K \quad (4.9)$$

$$\mathbf{v}(r, z) = \underline{\mathbf{R}}^t(r, z)\mathbf{v}^K. \quad (4.10)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\phi}^K$ (und analog \mathbf{w}^K) setze sich aus den Knotenpotentialen an den jeweiligen Knotenpunkten n_K des Gitters zusammen:

$$\boldsymbol{\phi}^K = [\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^{n_K}]^t. \quad (4.11)$$

Der Vektor \mathbf{u}^K (und analog \mathbf{v}^K) setzt sich aus den Knotenverschiebungen in allen Raumrichtungen (im Fall radialer Symmetrie also \mathbf{u}_r und \mathbf{u}_z) zusammen:

$$\mathbf{u}^K = [\mathbf{u}_r^0, \mathbf{u}_r^1, \dots, \mathbf{u}_r^{n_K}, \mathbf{u}_z^0, \mathbf{u}_z^1, \dots, \mathbf{u}_z^{n_K}]^t. \quad (4.12)$$

Die Ansatzfunktionen $R^i(r, z)$ werden im Vektor

$$\mathbf{R} = [R^0(r, z), R^1(r, z), \dots, R^{n_K}(r, z)]^t \quad (4.13)$$

beziehungsweise in der Matrix

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R^0(r, z) & \cdots & R^{n_K}(r, z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R^0(r, z) & \cdots & R^{n_K}(r, z) \end{bmatrix}^t \quad (4.14)$$

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

zusammengefasst [Wag17]. Setzt man nun Gleichung 4.7 bis 4.10 in die schwache Form (Gleichung 4.4) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho \int_{\Omega} \partial_t^2 \mathbf{u}^{\text{Kt}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}^t \partial_t^2 \mathbf{v}^{\text{K}} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{e}}^t \nabla \{ \mathbf{R}^t \phi^{\text{K}} \} \right)^t \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \mathbf{v}^{\text{K}} \} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{c}}^{\text{E}} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \mathbf{u}^{\text{K}} \} \right)^t \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \mathbf{v}^{\text{K}} \} d\Omega \quad (4.15a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} \left(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{S}} \nabla \{ \mathbf{R}^t \phi^{\text{K}} \} \right)^t \nabla \{ \mathbf{R}^t \mathbf{w}^{\text{K}} \} d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} \left(\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \mathbf{u}^{\text{K}} \} \right)^t \nabla \{ \mathbf{R}^t \mathbf{w}^{\text{K}} \} d\Omega. \quad (4.15b)
 \end{aligned}$$

Da nur die Ansatzfunktionen, jedoch nicht die Knotenpotentiale beziehungsweise Knotenauslenkungen eine örtliche Abhängigkeit aufweisen, können diese vor die Ableitungsoperatoren gestellt werden. Außerdem müssen die Gleichungen für beliebige Testfunktionen \mathbf{v} und w erfüllt sein, sodass gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{\text{Kt}} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}^t d\Omega \\
 &+ \phi^{\text{Kt}} \int_{\Omega} \nabla \{ \mathbf{R}^t \}^t \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \} d\Omega \\
 &+ \mathbf{u}^{\text{Kt}} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \}^t \underline{\mathbf{c}}^{\text{E}} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \} d\Omega \quad (4.16a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \phi^{\text{Kt}} \int_{\Omega} \nabla \{ \mathbf{R}^t \}^t \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{S}} \nabla \{ \mathbf{R}^t \} d\Omega \\
 &- \mathbf{u}^{\text{Kt}} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{R}^t \}^t \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \{ \mathbf{R}^t \} d\Omega. \quad (4.16b)
 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich damit [Kal07]

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t^2 \mathbf{u}^{\text{K}} \\ \partial_t^2 \phi^{\text{K}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{uu} & \underline{\mathbf{K}}_{u\phi} \\ \underline{\mathbf{K}}_{u\phi}^t & -\underline{\mathbf{K}}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\text{K}} \\ \phi^{\text{K}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

mit

$$\underline{\mathbf{M}} = \rho \int_{\Omega} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}^t d\Omega \quad (4.18)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{uu} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{g}} \{ \underline{\mathbf{R}}^t \}^t \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \underline{\mathbf{R}}^t \} d\Omega \quad (4.19)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{\phi\phi} = \int_{\Omega} \nabla \{ \underline{\mathbf{R}}^t \}^t \underline{\mathbf{\epsilon}}^S \nabla \{ \underline{\mathbf{R}}^t \} d\Omega$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{u\phi} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{g}} \{ \underline{\mathbf{R}}^t \}^t \underline{\mathbf{e}}^t \nabla \{ \underline{\mathbf{R}}^t \} d\Omega. \quad (4.20)$$

Die rechte Seite, welche hier null ist, kann durch Quellterme der einzelnen Knoten ergänzt werden, um eine elektrische oder mechanische Anregung in Form einer elektrischen Ladung oder einer äußeren Krafteinwirkung zu realisieren.

Die Ansatzfunktionen $R^i(r, z)$ werden typischerweise lokal gewählt, das heißt für jeden Knoten i sind die Ansatzfunktionen null, außer für die direkt am Knoten angrenzenden Elemente. Für den am einfachsten darstellbaren eindimensionalen Fall ist dies für lineare Ansatzfunktionen in Abbildung 4.1a dargestellt [Kal07]. Nimmt man nun die Betrachtung elementweise vor, so ist es sinnvoll, die jeweiligen Ansatzfunktionen in globalen Koordinaten x auf ein Einheitssegment in lokalen Koordinaten ξ zu transformieren. Damit ergeben sich für den eindimensionalen Fall zwei Element-Ansatzfunktionen $\tilde{R}^0(\xi)$ und $\tilde{R}^1(\xi)$ aus Abbildung 4.1b im transformierten Koordinatensystem. Gleiches gilt für den axialsymmetrischen Fall, welcher durch ein zweidimensionales Gitter abgebildet werden kann. Wird von Dreieckselementen ausgegangen, gehören zu jedem Element drei Knoten. Daher werden drei Element-Ansatzfunktionen benötigt, welche in den transformierten Koordinaten (ξ, η) auf einem Einheitsdreieck (siehe

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

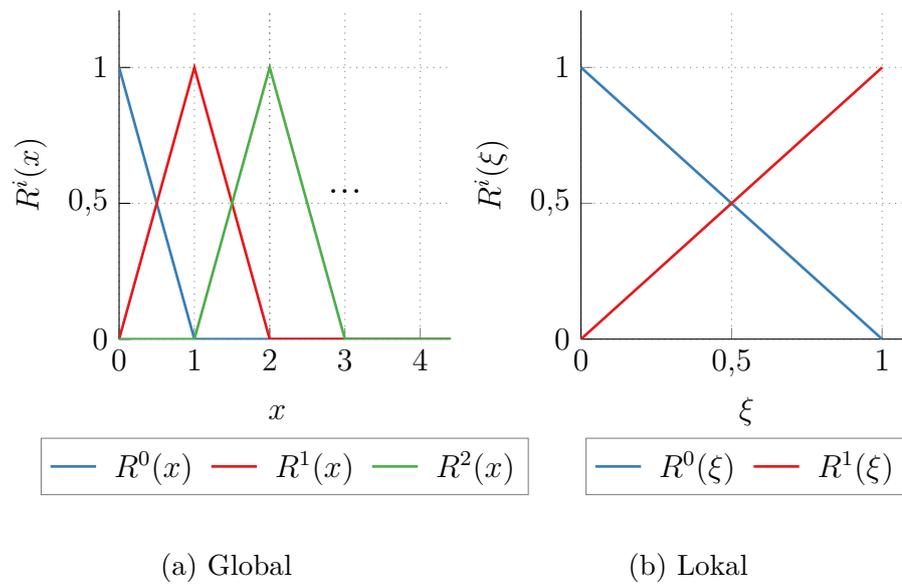


Abbildung 4.1: Eindimensionale Ansatzfunktionen in globalen und lokalen Koordinaten.

Abbildung 4.2) definiert werden [Zha17]. Lineare Ansatzfunktionen können beispielsweise durch

$$\tilde{R}^0(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (4.21)$$

$$\tilde{R}^1(\xi, \eta) = \xi \quad (4.22)$$

$$\tilde{R}^2(\xi, \eta) = \eta \quad (4.23)$$

gegeben sein. Auch die Koordinatentransformation von (ξ, η) zu (r, z) des Dreieckselements mit den Knoten (r_0, z_0) , (r_1, z_1) und (r_2, z_2) lässt sich nun definieren:

$$\begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R}^0(\xi, \eta) \\ \tilde{R}^1(\xi, \eta) \\ \tilde{R}^2(\xi, \eta) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

4 Finite-Elemente-Simulation piezokeramischer Scheiben

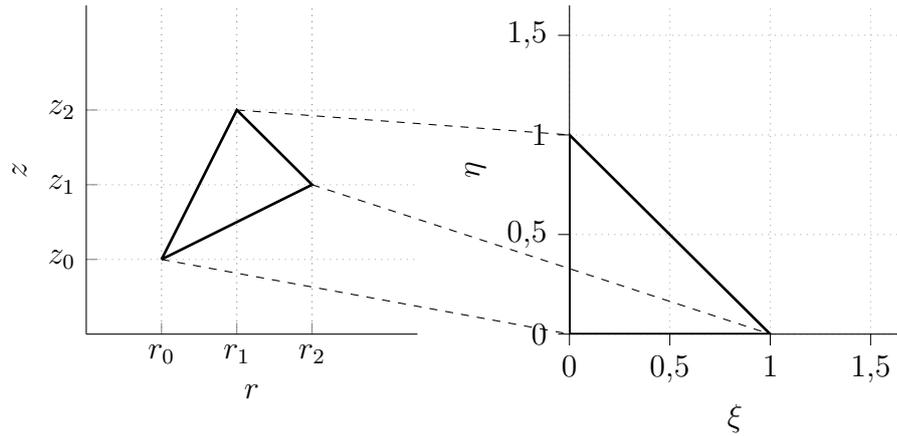


Abbildung 4.2: Dreieckselement in lokalen und globalen Koordinaten.

Damit kann auf Elementebene beispielsweise die Element-Massematrix $\tilde{\mathbf{M}}$ berechnet werden. Dazu muss das benötigte Integral ebenfalls in die lokalen Koordinaten (ξ, η) transformiert werden:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \rho \int_{\Omega} \underline{\mathbf{R}}(r, z) \underline{\mathbf{R}}(r, z)^t d\Omega \quad (4.25)$$

$$= \rho \int_{\Omega} \underline{\mathbf{R}}(r, z) \underline{\mathbf{R}}(r, z)^t r dr dz \quad (4.26)$$

$$= \rho \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \tilde{\underline{\mathbf{R}}}(\xi, \eta) \tilde{\underline{\mathbf{R}}}(\xi, \eta)^t r(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (4.27)$$

wobei $|\mathbf{J}|$ die Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation ist, welche die Beziehung zwischen der Dreiecksfläche in globalen und lokalen Koordinaten herstellt:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial_{\xi} r & \partial_{\eta} r \\ \partial_{\xi} z & \partial_{\eta} z \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Die Gleichungen für die Einträge der Jacobi-Matrix sowie für $r(\xi, \eta)$ in Gleichung 4.27 ergeben sich mit Hilfe von Gleichung 4.24 und bedürfen nur einer Ableitung der linearen Ansatzfunktionen.

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

Für die Berechnung der Element-Steifigkeitsmatrizen $\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{uu}$, $\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{u\phi}$ und $\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{\phi\phi}$ müssen zusätzlich noch die jeweiligen Differentialoperatoren $\underline{\mathcal{G}}$ und $\underline{\nabla}$ in lokale Koordinaten transformiert werden [Zha17]. Dafür gilt:

$$\begin{bmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{J}}^{-1t} \begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & \hat{J}_{12} \\ \hat{J}_{21} & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

und damit

$$\underline{\tilde{\mathcal{G}}} \{ \} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11}\partial_\xi + \hat{J}_{12}\partial_\eta & 0 \\ r^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{J}_{21}\partial_\xi + \hat{J}_{22}\partial_\eta \\ \hat{J}_{21}\partial_\xi + \hat{J}_{22}\partial_\eta & \hat{J}_{11}\partial_\xi + \hat{J}_{12}\partial_\eta \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\underline{\tilde{\nabla}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11}\partial_\xi + \hat{J}_{12}\partial_\eta \\ \hat{J}_{21}\partial_\xi + \hat{J}_{22}\partial_\eta \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Zusammenfassend können damit die Element-Matrizen wie folgt berechnet werden:

$$\underline{\tilde{\mathbf{M}}} = \rho \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \underline{\tilde{\mathbf{R}}}(\xi, \eta) \underline{\tilde{\mathbf{R}}}(\xi, \eta)^t r(\xi, \eta) |\underline{\mathbf{J}}| d\xi d\eta \quad (4.32)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{uu} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \underline{\tilde{\mathcal{G}}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t \underline{\mathbf{c}}^E \underline{\tilde{\mathcal{G}}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t r(\xi, \eta) |\underline{\mathbf{J}}| d\xi d\eta \quad (4.33)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{u\phi} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \underline{\tilde{\nabla}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t \underline{\mathbf{e}}^S \underline{\tilde{\mathcal{G}}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t r(\xi, \eta) |\underline{\mathbf{J}}| d\xi d\eta \quad (4.34)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{\phi\phi} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \underline{\tilde{\nabla}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t \underline{\mathbf{e}}^S \underline{\tilde{\nabla}} \{ \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^t(\xi, \eta) \}^t r(\xi, \eta) |\underline{\mathbf{J}}| d\xi d\eta. \quad (4.35)$$

Diese Integrale werden typischerweise numerisch gelöst [Zha17]. Dafür bietet sich beispielsweise das Gauß-Quadratur-Verfahren an, welches die

Tabelle 4.1: Gewichte und Gauß-Punkte für die Quadratur eines Einheitsdreiecks.

Gewichtsfaktor	Lokale Koordinaten	
ϖ_i	ξ_i	η_i
$-9/32$	$1/3$	$1/3$
$25/96$	$3/5$	$1/5$
$25/96$	$1/5$	$3/5$
$25/96$	$1/5$	$1/5$

Integration durch die gewichtete Summe der an unterschiedlichen Punkten ausgewerteten Integranden realisiert:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1} \varpi_i f(\xi_i, \eta_i). \quad (4.36)$$

Im axialsymmetrischen Fall ist darauf zu achten, dass durch den r^{-1} -Term keine polynomiale Ordnung des zu integrierenden Ausdrucks angenommen werden kann, sodass keine exakte Quadraturformel existiert [Cla00]. Je höher allerdings der Exaktheitsgrad der Quadratur gewählt wird, desto geringer ist der zu erwartende Fehler [Coo02]. Jedoch muss beachtet werden, dass das Integral für $r = 0$ singulär wird und daher nicht für die Quadratur genutzt werden kann. Beispielsweise kann eine 4-Punkte-Quadratur wie in Tabelle 4.1 angewendet werden.

Die so berechneten Element-Matrizen müssen nun in die Gesamtmatrizen integriert werden. Dieser Vorgang wird Assemblieren genannt. Dabei wird eine Zuordnung der lokalen Elementknoten $i, j \in \{1, 2, 3\}$ zu den globalen Knoten $k, l \in \{n_{K1}, n_{K2}, n_{K3}\}$ mit $n_{K1}, n_{K2}, n_{K3} \in \{1, \dots, n_K\}$ vorgenommen. Dann gilt:

$$\underline{\mathbf{M}}_{k,l} = \underline{\tilde{\mathbf{M}}}_{i,j}. \quad (4.37)$$

Analog gilt dies für die Steifigkeitsmatrizen.

Natürliche Randbedingungen sind hier Neumann-Randbedingungen, bei denen die normalen Ableitungen am Rand null sind, da die Randintegrale in Gleichung 4.4 zu null gesetzt werden. Dies beschreibt einen spannungsfreien Rand. Dirichlet-Randbedingungen können direkt in die Matrizen integriert werden. Dazu wird für den jeweiligen Knoten die entsprechende Zeile zu null und das entsprechende Diagonalelement zu eins gesetzt. Zu dem jeweiligen Element des Anregungsvektors wird der Wert, den die Auslenkung beziehungsweise das Potential in diesem Knoten annehmen soll, addiert.

4.2.1 Elemente höherer Ordnung

Neben linearen Ansatzfunktionen, wie sie beispielhaft in Abbildung 4.1a dargestellt sind, kommen häufig auch Funktionen höherer Ordnung zum Einsatz. Bekannte Beispiele sind hier Lagrange- oder Legendre-Polynome der Ordnung p . Lagrange-Ansatzfunktionen sind definiert durch

$$R_p^i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^p \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (4.38)$$

mit den Element-Eckpunkten $\xi_{\{i,j\}}$. Vorteilhaft ist hier die Interpolationseigenschaft der Lagrange-Polynome (Abbildung 4.3a) Die berechneten Werte der Knotenverschiebungen und -potentiale entsprechen direkt den Verschiebungen und Potentialen an den Knoten. Problematisch ist jedoch, dass für jede Polynomordnung eine komplett neue Basis, das heißt

die Menge der Ansatzfunktionen bestimmt werden müssen. Dies ist bei Legendre-Polynomen $R^i(\xi)$

$$R^i(\xi) = \int_{-1}^{\xi} l_{i-2}(y) dy \quad (4.39)$$

$$l_0(\xi) = 1 \quad (4.40)$$

$$l_1(\xi) = \xi \quad (4.41)$$

$$l_i(\xi) = \frac{1}{2^i i!} \partial_{\xi}^i (\xi^i - 1)^i \quad (4.42)$$

nicht der Fall. Die Ansatzfunktionen kleinerer Polynomordnungen sind stets in der Basis der höheren Polynomordnung enthalten (siehe Abbildung 4.3b). Dieses hierarchische Verhalten kann vorteilhaft genutzt werden, wenn die Polynomordnung geändert werden soll oder wenn unterschiedliche Rechengebiete durch unterschiedliche Polynomordnungen abgebildet werden sollen. Jedoch besitzen sie nicht die Interpolationseigenschaft der Lagrange-Polynome. Die Wahl der Elementgröße h und des Polynomgrads p kann das Konvergenzverhalten der Simulation stark beeinflussen. Für elastische Probleme soll jedoch eine Polynomordnung von mindestens $p = 2$ gewählt werden [Bäk02]. Der bei gegebener Elementgröße h und Wellenzahl q minimale Polynomgrad kann durch

$$p > \frac{qh}{2} - \frac{1}{2} + (qh)^{\frac{1}{3}} \quad (4.43)$$

bestimmt werden [Hau16; Ain04]. Eine Betrachtung zur Konvergenz für die in dieser Arbeit verwendete Simulation ist in Abschnitt 5.1 zu finden.

4.2 Finite-Elemente-Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen

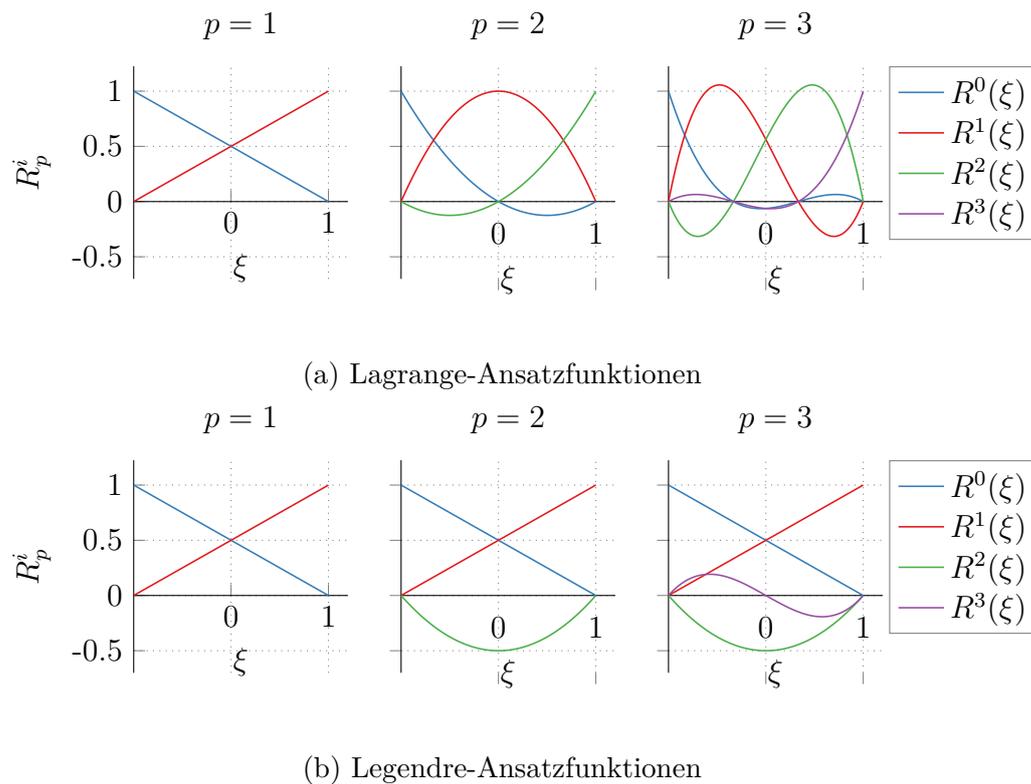


Abbildung 4.3: Lagrange- und Legendre-Ansatzfunktionen für unterschiedliche Polynomordnungen p .

4.2.2 Lösung im Frequenzbereich

Für eine Lösung im Frequenzbereich kann die zeitliche Ableitung in eine Multiplikation mit $j\omega$ überführt werden, sodass das Gleichungssystem nach dem gesuchten Vektor $[\mathbf{u}^{\mathbf{K}}, \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{K}}]^t$ aufgelöst werden kann:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^t & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{K}} \\ \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{K}} \end{bmatrix} = \mathbf{g}. \quad (4.44)$$

Nun kann für unterschiedliche Kreisfrequenzen die Knotenauslenkung beziehungsweise das Knotenpotential bestimmt werden. Damit die Matrizen trotz der Frequenzabhängigkeit nicht in jedem Frequenzschritt vollständig neu assembliert werden müssen, können Dirichlet-Randbedingungen vorher

getrennt in die Massematrix $\underline{\mathbf{M}}$ und in die Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ eingebaut werden. Mit sich ändernder Frequenz muss dann nur die Massematrix mit der Kreisfrequenz multipliziert werden und die Matrizen werden addiert. Um diese Addition auszugleichen, wird der Anregungsvektor \mathbf{g} angepasst:

$$\mathbf{g}_D = (-\omega^2 + 1)\mathbf{g}. \quad (4.45)$$

Auch für gedämpfte Systeme beispielsweise mit Rayleigh-Dämpfung kann dies in ähnlicher Weise

$$\mathbf{g}_D = (-\omega^2 + 1 + j\omega(\alpha_M + \alpha_K))\mathbf{g} \quad (4.46)$$

geschehen. So müssen für jede Frequenz nur Additionen und Multiplikationen, jedoch keine Neu-Assemblierung der Matrizen vorgenommen werden. Elementweise Zugriffe auf die Matrizen und Vektoren sind nicht notwendig, was die Rechenzeit verringert.

4.2.3 Lösung im Zeitbereich

Die Lösung der Differentialgleichung ist bei harmonischer Anregung durch Fouriertransformation möglich. Für transiente Lösungen muss zusätzlich zur örtlichen Diskretisierung durch die FEM eine Diskretisierung der Zeit vorgenommen werden. Für die hier betrachteten piezoelektrischen Gleichungen eignet sich zur Zeitdiskretisierung vor allem das Newmark-Verfahren [New59], da dieses speziell für mechanische Bewegungsgleichungen entwickelt wurde. Der elektrische Teil der gekoppelten Gleichungen enthält aufgrund der elektrostatischen Näherung keine Zeitabhängigkeit.

Grundlagen des Newmark-Verfahrens

Das Newmark-Verfahren beschreibt eine Klasse an möglichen Zeitschrittverfahren, die sich alle durch folgende Update-Regeln auszeichnen:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \partial_t u_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \partial_t^2 u_n + \beta \partial_t^2 u_{n+1} \right] \quad (4.47)$$

$$= \tilde{u}_n + \Delta t^2 \beta \partial_t^2 u_{n+1} \quad (4.48)$$

$$\partial_t u_{n+1} = \partial_t u_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \partial_t^2 u_n + \gamma \partial_t^2 u_{n+1} \right] \quad (4.49)$$

$$= \partial_t \tilde{u}_n + \Delta t \gamma \partial_t^2 u_{n+1}, \quad (4.50)$$

mit $u_n = u[t_n]$ und $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Unterschiedliche Werte für β und γ beschreiben dabei unterschiedliche Zeitschrittverfahren. Für $2\beta \geq \gamma \geq 0,5$ ist das Newmark-Verfahren unabhängig von der Wahl der Schrittweite Δt stabil. Zwei Verfahren sind dabei von besonderem Interesse.

Newmark-Verfahren mit linearer Beschleunigung Unter der Annahme eines linearen Verlaufs der Beschleunigung $\partial_t^2 u$ müssen bei einer Taylorreihen-Entwicklung stets nur maximal dritte Ableitungen der Auslenkung u berücksichtigt werden. Damit ergibt sich:

$$\partial_t u(t) \approx \partial_t u_n + (t - t_n) \partial_t^2 u_n + \frac{(t - t_n)^2}{2} \partial_t^3 u_n \quad (4.51)$$

$$u(t) \approx u_n + (t - t_n) \partial_t u_n + \frac{(t - t_n)^2}{2} \partial_t^2 u_n + \frac{(t - t_n)^3}{6} \partial_t^3 u_n. \quad (4.52)$$

Durch Approximation der dritten Ableitungen mittels Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\partial_t^3 u_n \approx \frac{\partial_t^2 u_{n+1} - \partial_t^2 u_n}{\Delta t} \quad (4.53)$$

und den Übergang von t auf t_{n+1} ergibt sich

$$\partial_t u_{n+1} \approx \partial_t u_n + \frac{\Delta t}{2} [\partial_t^2 u_n + \partial_t^2 u_{n+1}] \quad (4.54)$$

$$u_{n+1} \approx u_n + \Delta t \partial_t^2 u_n + \Delta t^2 \left[\frac{1}{3} \partial_t^2 u_{n+1} + \frac{1}{6} \partial_t^2 u_{n+1} \right], \quad (4.55)$$

was einem Newmark-Verfahren mit $\beta = 1/6$ und $\gamma = 1/2$ entspricht. Damit ist es nur für bestimmte Schrittweiten Δt stabil.

Newmark-Verfahren mit konstanter Beschleunigung Unter der Annahme einer konstanten Beschleunigung müssen jeweils nur maximal zweite Ableitungen der Auslenkung u berücksichtigt werden:

$$\partial_t u(t) \approx \partial_t u_n + (t - t_n) \partial_t^2 u_n \quad (4.56)$$

$$u(t) \approx u_n + (t - t_n) \partial_t u_n + \frac{(t - t_n)^2}{2} \partial_t^2 u_n. \quad (4.57)$$

Nähert man nun $\partial_t^2 u(t)$ durch einen Mittelwert an den zwei Punkten t_n und t_{n+1}

$$\partial_t^2 u(t) \approx \frac{1}{2} (\partial_t^2 u_{n+1} + \partial_t^2 u_n) \quad (4.58)$$

ergibt sich durch Einsetzen und erneuten Übergang von t nach t_{n+1}

$$\partial_t u_{n+1} \approx \partial_t u_n + \frac{\Delta t}{2} (\partial_t^2 u_{n+1} + \partial_t^2 u_n) \quad (4.59)$$

$$u_{n+1} \approx u_n + \Delta t \partial_t u_n + \Delta t^2 \left[\frac{1}{4} \partial_t^2 u_n + \frac{1}{4} \partial_t^2 u_{n+1} \right]. \quad (4.60)$$

Damit erhält man ein Newmark-Verfahren mit den Parametern $\beta = 1/4$ und $\gamma = 1/2$, welches unabhängig von der Wahl der Schrittweite stabil ist.

Newmark-Verfahren für mechanische und piezoelektrische Differentialgleichungen

Da bei den piezoelektrischen Gleichungen auf Grund der elektrostatischen Näherung nur der mechanische Teil eine Zeitabhängigkeit aufweist, muss für die Zeitdiskretisierung ausschließlich der mechanische Teil betrachtet werden. Soll nun die schwache Form der piezoelektrischen Gleichungen (Gleichung 4.4)

$$\rho \langle \partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{e}^t \nabla \phi_{n+1}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle + \langle \mathbf{c}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{u}_{n+1} \}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle = 0 \quad (4.61a)$$

$$\langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \nabla \phi_{n+1}, \nabla w \rangle - \langle \mathbf{e} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{u}_{n+1} \}, \nabla w \rangle = 0 \quad (4.61b)$$

diskretisiert werden, geschieht dies durch Einsetzen von Gleichung 4.48 und Gleichung 4.50:

$$\begin{aligned} \rho \langle \partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v} \rangle + \Delta t \gamma \langle \mathbf{c}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1} \}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle \\ + \langle \mathbf{e}^t \nabla \phi_{n+1}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle = - \langle \mathbf{c}^E \underline{\mathbf{g}} \{ \tilde{\mathbf{u}}_n \}, \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{v} \} \rangle \end{aligned} \quad (4.62a)$$

$$\langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^S \nabla \phi_{n+1}, \nabla w \rangle - \Delta t^2 \beta \langle \mathbf{e} \underline{\mathbf{g}} \{ \mathbf{u}_{n+1} \}, \nabla w \rangle = \langle \mathbf{e} \underline{\mathbf{g}} \{ \tilde{\mathbf{u}}_n \}, \nabla w \rangle. \quad (4.62b)$$

Damit ergibt sich das iterative Vorgehen bei der Lösung der zeitabhängigen piezoelektrischen Gleichungen wie folgt [Kal07]:

1. $\partial_t^2 \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \partial_t \mathbf{u}_n + \Delta t (1 - \gamma) \partial_t^2 u_n$
 $\tilde{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n + \Delta t \partial_t u_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \partial_t^2 u_n$
2. Lösen von Gleichung 4.62
3. $\partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1} = \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_n + \Delta t \gamma \partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \beta \partial_t^2 \mathbf{u}_{n+1}$

4.3 Simulation unter Berücksichtigung unterschiedlicher Dämpfungsmodelle

Die simulative Realisierung des Einbeziehens von Dämpfung hängt stark vom gewählten Dämpfungsmodell ab.

4.3.1 Rayleigh-Dämpfung

Das Rayleigh-Dämpfungsmodell findet bei FEM-Simulationen sehr häufig Anwendung, da sich hier die Element-Dämpfungsmatrix direkt durch gewichtete Summation der Element-Masse- und Steifigkeitsmatrix ergibt, so dass die bereits assemblierten Matrizen genutzt werden können. Zusätzlich ergibt sich ein Vorteil durch die Diagonalisierbarkeit der Dämpfungsmatrix. Im Allgemeinen sind die Moden gedämpfter Systeme nicht wie bei ungedämpften Systemen orthogonal. Für das Rayleigh-Dämpfungsmodell gilt diese Orthogonalität jedoch weiterhin. Um dies zu zeigen, geht man zunächst vom ungedämpften System aus Gleichung 4.17 aus [Cra06]. Das zugehörige generalisierte Eigenwertproblem ist

$$\left(\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}\right) \mathbf{u} = 0, \quad (4.63)$$

mit den Eigenwerten ω_i und den Eigenvektoren \mathbf{u}_i , welche in

$$\underline{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}(\omega_i) \quad (4.64)$$

$$\underline{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots] \quad (4.65)$$

zusammengefasst werden können. Damit lässt sich jeder Verschiebungsvektor als gewichtete Summe der Eigenvektoren schreiben:

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.66)$$

4.3 Simulation unter Berücksichtigung unterschiedlicher Dämpfungsmodelle

wobei $\tilde{\mathbf{u}}$ die Verschiebung in sogenannten modalen Koordinaten ist. Für normierte Eigenvektoren gilt dann

$$\underline{\mathbf{u}}^t \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{I}} \quad (4.67)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^t \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{A}}, \quad (4.68)$$

sodass das generalisierte Eigenwertproblem diagonalisierbar ist und somit die einzelnen Differentialgleichungen entkoppelt werden können. Wird nun ein masse- und ein steifigkeitsproportionaler Dämpfungsanteil hinzugefügt ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\underline{\mathbf{M}} \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{C}} \partial_t \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.69)$$

mit

$$\underline{\mathbf{C}} = \alpha_M \underline{\mathbf{M}} + \alpha_K \underline{\mathbf{K}}. \quad (4.70)$$

Für diese Definition der Dämpfungsmatrix $\underline{\mathbf{C}}$ gilt

$$\underline{\mathbf{u}}^t \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{u}} = \alpha_M \underline{\mathbf{u}}^t \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{u}} + \alpha_K \underline{\mathbf{u}}^t \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{u}} \quad (4.71)$$

$$= \alpha_M \underline{\mathbf{I}} + \alpha_K \underline{\mathbf{A}}, \quad (4.72)$$

sodass auch diese Matrix diagonalisierbar ist und auch das mit Rayleigh-Dämpfung beaufschlagte Differentialgleichungssystem entkoppelt werden kann. Das Rayleigh-Dämpfungsmodell kann im Zeitbereich (zum Beispiel mit dem oben beschriebenen Newmark-Verfahren) gelöst oder auch im Frequenzbereich durch komplexe Materialparameter abgebildet werden.

4.3.2 Dämpfung durch komplexe Konstanten

Mit komplexen Konstanten kann im Frequenzbereich analog zum rein reellen Fall umgegangen werden, sodass sich die Art und Weise der Berechnung

nicht verändert, sondern durch die Komplexwertigkeit nur die Rechenzeit erhöht wird.

4.3.3 Zener-Modell

Auch andere frequenzabhängige Modelle wie das Zener-Modell können auf einfache Art und Weise nur im Frequenzbereich implementiert werden. Hier müssen dann in jedem Frequenzschritt die komplexen Parameter angepasst werden, was stets eine komplette Assemblierung der Element-Matrizen mit sich bringt und daher längere Rechenzeiten verursacht. Im Zeitbereich ergibt sich für das Zener-Modell stets eine Faltung, sodass die gesamte Historie der Feldgrößen mit einbezogen werden müssten, was zu erheblichem Speicher- und Rechenaufwand führt [Car88]. Daher werden für diesen Fall nur Simulationen im Frequenzbereich betrachtet.

4.4 Unterschiedliche Verfahren zur Impedanzberechnung

Die frequenzabhängige Impedanz einer Piezokeramik kann simulativ im Zeit- oder im Frequenzbereich bestimmt werden. Die Berechnung im Zeitbereich hat den Vorteil, dass durch das Zeitschrittverfahren (siehe Abschnitt 4.2.3) die für die FEM notwendigen Matrizen nur ein einziges Mal erzeugt werden müssen. Dadurch kann recht schnell die gesamte Impedanz bestimmt werden. Die Frequenzbereichssimulation muss für jeden Frequenzpunkt die Matrizen neu berechnen. Allerdings müssen hier nur die Frequenzpunkte berechnet werden, die auch wirklich benötigt werden. Probleme mit Aliasing durch Unterabtastung treten nicht auf.

4.4.1 Impedanzberechnung durch Zeitbereichssimulation

Im Zeitbereich wird als Anregesignal ein Potential $\phi(t)$ in Form eines Dreieckspuls genutzt [Kal07]. Dies kann beispielsweise auf Γ_{anr} als Dirichlet-

4.4 Unterschiedliche Verfahren zur Impedanzberechnung

Randbedingung eingepreßt werden. Der gegenüberliegende Elektrode Γ_0 wird dann ein *ground*-Potential $\phi = 0$ zugewiesen. Durch Fouriertransformation können die zeitabhängigen Größen dann zur Berechnung einer frequenzabhängigen Impedanz beitragen:

$$Z(\omega) = \frac{\phi(\omega)}{j\omega Q(\omega)}, \quad (4.73)$$

mit

$$Q = \int_{\Gamma} \mathbf{D} d\Gamma \quad (4.74)$$

$$= \int_{\Gamma} -\underline{\epsilon}^S \nabla \phi + \underline{\mathbf{e}} \mathcal{B} \{ \mathbf{u} \} d\Gamma. \quad (4.75)$$

Da der Dreieckspuls eine unendlich hohe Abtastfrequenz mit sich bringen müsste, ist ein gewisser Aliasingeffekt unvermeidbar. Damit dieser im betrachteten Frequenzbereich jedoch vernachlässigbar bleibt, ist hier eine Abtastfrequenz von $f_{\text{abt}} = 50$ MHz gewählt. Damit ist bei einem Dreieckspuls Λ mit einer Breite von 200 ns die periodische Wiederholung im Spektrum bei 4 MHz (das heißt $f = 0,5 \cdot f_{\text{abt}} = 4$ MHz) auf unter 0,5% abgeklungen [Kam08]:

$$\Lambda \left(\frac{t}{200 \text{ ns}} \right) \circ \bullet 200 \text{ ns} \frac{\sin(200 \text{ ns} \cdot \pi f)^2}{(200 \text{ ns} \cdot \pi f)^2} \quad (4.76)$$

Die Betrachtung bezieht sich zunächst auf das Eingangssignal, kann jedoch auch als erste Abschätzung für die Impedanz genutzt werden. Durch Vergleich mit der harmonischen Analyse lässt sich der Aliasingfehler identifizieren.

4.4.2 Impedanzberechnung durch Frequenzbereichssimulation

Im Frequenzbereich muss für jeden Frequenzpunkt die frequenzabhängige FEM-Matrix berechnet werden. Jedoch muss hier nur die Anzahl der tatsächlich benötigten Frequenzen betrachtet werden, da keine Aliasing- oder Auflösungsprobleme auftreten können. Außerdem ist es mit dem in Unterabschnitt 4.2.2 beschriebenen Vorgehen möglich, dass Teile der Matrizen vorher berechnet werden und für jeden Frequenzpunkt nur noch Multiplikationen mit Konstanten und Additionen von Matrizen durchgeführt werden müssen, welche auch auf dünn-besetzten Matrizen effizient möglich sind. Potential und Ladung ergeben sich dann direkt als frequenzabhängig und können ohne Transformation mit Hilfe von Gleichung 4.73 zur Impedanzbestimmung genutzt werden.

4.4.3 Vergleich der Verfahren zur Impedanzberechnung

Die Unterschiede zwischen Zeit- und Frequenzbereichssimulation sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Abweichungen bis zur ersten Dickenresonanz (ca. 2 MHz bis 3 MHz) gering sind. Für höhere Frequenzen ergeben sich deutliche Unterschiede, die jedoch mit der Erhöhung der Abtastfrequenz der Zeitbereichssimulation abnehmen.

Neben den Betrachtungen in Zeit- und Frequenzbereich soll die Richtigkeit der numerischen Berechnung auch durch den Vergleich unterschiedlicher Implementierungen der Simulation validiert werden. Zum einen kommt das Simulationswerkzeug CFS++ (*Coupled Field Simulation in C++*) der TU Wien zum Einsatz [Kal10; openCFS20]. Zum anderen wird als Vergleichssoftware eine Implementierung in Python [Ros95] der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Gleichungen und eine Implementierung mit Hilfe der Software FEniCS [Log12] gewählt. Die sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse ist in Abbildung 4.5 zu sehen.

4.4 Unterschiedliche Verfahren zur Impedanzberechnung

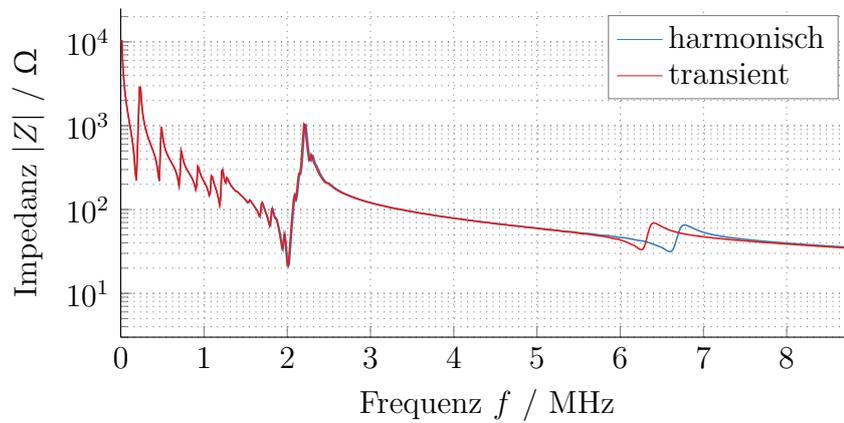


Abbildung 4.4: Vergleich der simulierten Impedanz durch transiente und harmonische Simulation.

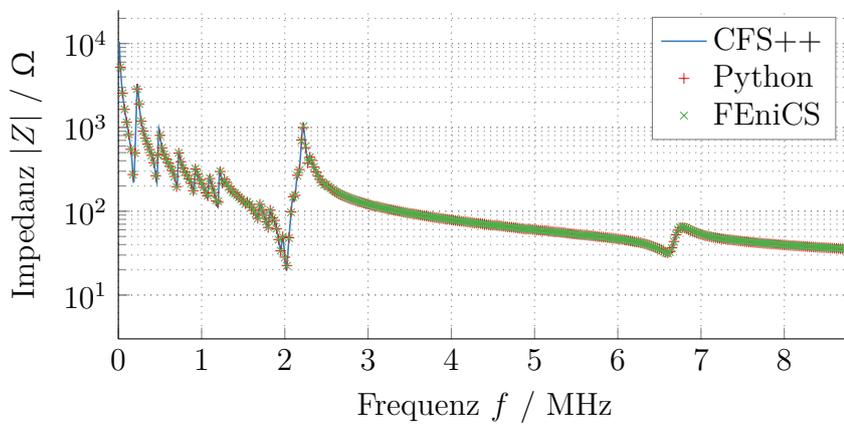


Abbildung 4.5: Vergleich unterschiedlicher FEM-Implementierungen.

Realisierung des inversen Verfahrens

Als inverses Verfahren beschreibt man ein Vorgehen, bei dem man von einer gegebenen Wirkung auf die Ursache schließt. Mathematisch wird die zugehörige Lösung als Optimierungsproblem beschrieben, bei dem eine Ursache gesucht wird, welche in Bezug auf ein sogenanntes Vorwärtsmodell die gemessene Wirkung bestmöglich abbildet:

$$\mathbf{p}^{\text{opt}} = \arg \min_{\mathbf{p}} J(y^{\text{mes}}, \mathbf{p}), \quad (5.1)$$

wobei \mathbf{p} die Ursache, y^{mes} die gemessene Wirkung, J eine geeignete Zielfunktion und \mathbf{p}^{opt} die Ursache, welche die Zielfunktion minimieren, beschreiben. Das allgemeine Vorgehen zur Lösung solch eines Problems ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Diese Art von Problemen entstehen beispielsweise, wenn Größen nicht direkt messbar sind. In diesem Fall kann jedoch deren Wirkung auf eine andere Größe erfasst werden, welche besser zugänglich sind. Die Bestimmung der nicht direkt messbaren Größen erfolgt dann über das Lösen eines inversen Problems [Lou89].

Dies ist auch in der vorliegenden Arbeit der Fall. Die Materialparameter einer piezokeramischen Probe werden aus der Messung der elektrischen Impedanz bestimmt. Dabei gilt für alle folgenden Betrachtungen, wenn nicht anders erwähnt:

- Es werden piezokeramische Scheiben mit einem Durchmesser von 10 mm und einer Dicke von 1 mm genutzt.
- Die Dichte wird aus der Bestimmung der Masse und des Volumens gewonnen und ist daher nicht Teil des zu optimierenden Parametersatzes des inversen Verfahrens.

5 Realisierung des inversen Verfahrens

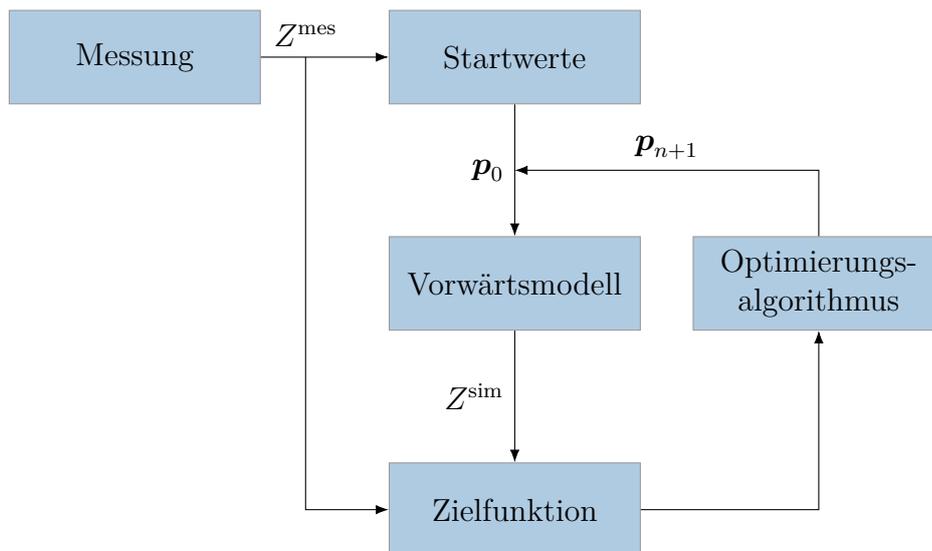


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Optimierungsprozesses.

- Die Frequenzauflösung, die für die Optimierung gewählt wird, beträgt 6250 Hz.
- Der betrachtete Frequenzbereich erstreckt sich von ca. 125 kHz bis 5,6 MHz.

Bei inversen Problemen stellt sich immer auch die Frage nach der Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösung. Als erstes untersuchte diese Phänomene Hadamard [Had02].

Wenn diese drei Kriterien erfüllt sind, gilt das Problem als *gut-gestellt*. Vor allem bei realen Systemen, welche immer gewissen Messunsicherheiten unterliegen, kann nicht damit gerechnet werden, dass das Vorwärtsmodell die Realität exakt abbildet. Daher wird die Zielfunktion typischerweise nicht null, sondern nur hinreichend klein.

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Bestandteile des inversen Problems - das Vorwärtsmodell, das Messsystem, die Startwertschätzung und das Optimierungsverfahren - für die Materialparameterbestimmung piezokeramischer Scheiben durch Impedanzmessung beschrieben.

5.1 Das Vorwärtsmodell

Die vorgestellte FEM-Simulation dient als Ausgangspunkt für das Lösen eines inversen Problems zur Materialparameterbestimmung. Dazu muss zunächst eine geeignete Messanordnung, die eine Bestimmung aller relevanten Parameter ermöglicht, gefunden und diese dann in einem Simulationsmodell abgebildet werden.

5.1.1 Angepasste Elektrodenstruktur

Eine geeignete Messanordnung ist unter anderem dadurch bestimmt, dass die Messgröße sensitiv auf die zu bestimmenden Parameter ist. Das heißt in diesem Fall, dass eine Änderung der Materialparameter sich in der Messgröße Impedanz niederschlägt. Dies muss für jeden der zu bestimmenden Parameter gelten. Bei piezokeramischen Scheiben mit vollflächigen Elektroden, wie man sie typischerweise erwerben kann [PI19], ist dies jedoch nicht der Fall. In der piezoelektrischen Scheibe ergibt sich durch die symmetrische Struktur ein nahezu homogenes elektrisches Feld. Da die Feldlinien damit jedoch nur eine z -Komponente haben, bleiben Änderun-

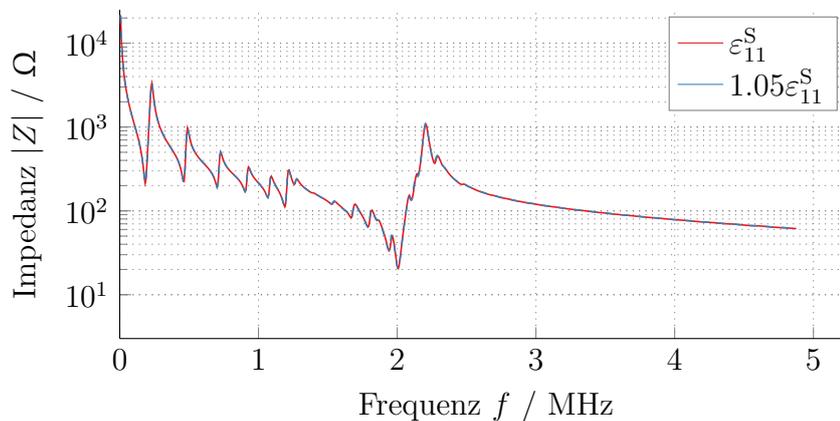


Abbildung 5.2: Einfluss der Variation von ε_{11}^S auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden.

5 Realisierung des inversen Verfahrens

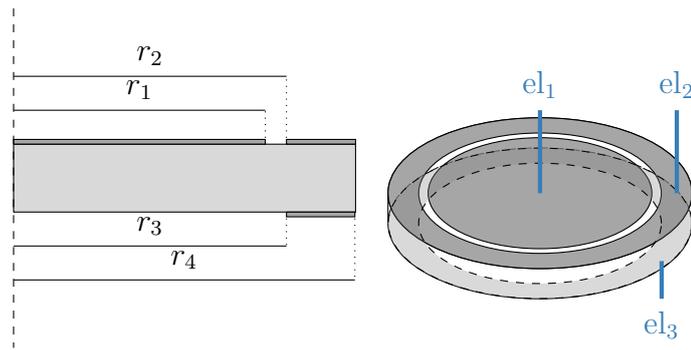


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung der Ringelektrodenanordnung.

gen in Parametern, welche diese Richtung nicht direkt beschreiben in der Impedanz unbemerkt.

Am deutlichsten ist dies im Fall von ε_{11}^S zu sehen. In Abbildung 5.2 wird deutlich, dass eine Änderung von ε_{11}^S keine nennenswerte Änderung in der Impedanz hervorruft, sodass der Wert der Permittivität auch nicht durch Impedanzmessung an einer scheibenförmigen Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden bestimmt werden kann. Eine Möglichkeit zur Erhöhung der Sensitivität wäre die Wahl einer anderen Geometrie. Da allerdings scheibenförmige Keramiken in der Anwendung eine große Relevanz haben und die Parameterbestimmung direkt an der in der jeweiligen Applikation genutzten, uniken Piezokeramik erfolgen soll, wird an der Geometrie festgehalten. Was jedoch als Freiheitsgrad offen steht, ist die Elektrodenstruktur [Unv13; Kul15]. Durch eine inhomogene Elektrodenstruktur kann sich ein elektrisches Feld ausbilden, welches Komponenten in alle Richtungen aufweist, sodass zu erwarten ist, dass die Sensitivität der Impedanz auf die Materialparameter erhöht werden kann. Um weiterhin eine radiale Symmetrie, welche die Rechenzeit-Vorteile einer zweidimensionalen Simulation mit sich bringt, beizubehalten, wird eine Anordnung mit drei Ringelektroden gewählt.

Abbildung 5.3 zeigt die schematische Darstellung der Elektrodenanordnung. Die Radien r_i sind dabei so bestimmt, dass sich eine möglichst hohe

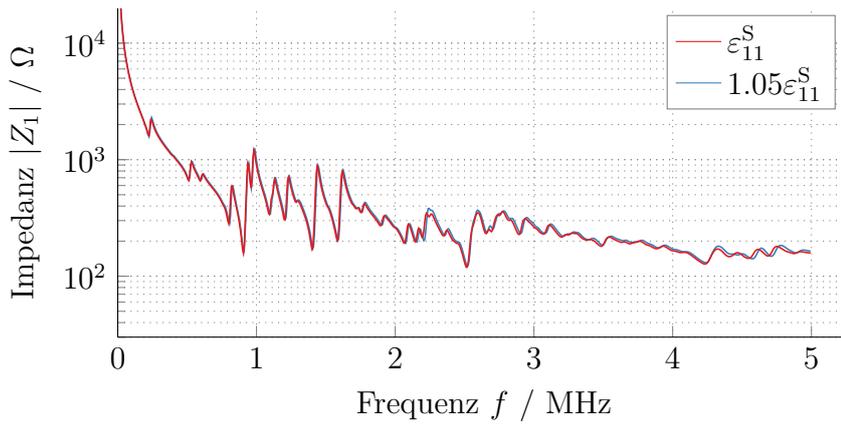


Abbildung 5.4: Einfluss der Variation von ε_{11}^S auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit Ringelektrodenanordnung.

Sensitivität auf alle Materialparameter ergibt. Eine geeignete Konfiguration ergibt sich zu [Jur19; Fel20b]

$$\mathbf{r} = [3,68 \text{ mm} \quad 3,99 \text{ mm} \quad 3,99 \text{ mm} \quad 4,99 \text{ mm}]^t. \quad (5.2)$$

Zwischen den drei Elektroden werden drei Impedanzen gemessen, wobei immer jeweils zwei Elektroden kurzgeschlossen werden und zur dritten gemessen wird [Fel19b]. Folgende Bezeichnungen sollen im Folgenden verwendet werden:

- Z_1 : Impedanz zwischen el_2 kurzgeschlossen mit el_3 und el_1
- Z_2 : Impedanz zwischen el_1 kurzgeschlossen mit el_3 und el_2
- Z_3 : Impedanz zwischen el_1 kurzgeschlossen mit el_2 und el_3

Beispielhaft zeigt Abbildung 5.4 die Variation des Parameters ε_{11}^S für Z_1 . Hier ergibt sich eine zwar geringe, aber doch sichtbare Veränderung der Impedanz und somit eine gesteigerte Sensitivität bezüglich des Parameters ε_{11}^S der Ringelektrodenanordnung gegenüber einer vollflächigen Elektrode.

5.1.2 Simulationsmodell

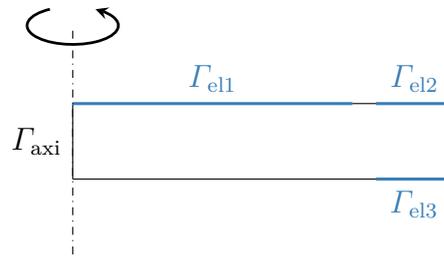


Abbildung 5.5: Geometrie des zweidimensionalen Modells einer piezoelektrischen Scheibe.

Das hier genutzte Vorwärtsmodell basiert auf einer oben beschriebenen Lösung der piezoelektrischen Differentialgleichungen durch die Finite-Elemente-Methode. Dabei kann auf Grund der radialsymmetrischen Geometrie eine zweidimensionale Betrachtung genutzt werden. Das Geometriemodell entspricht dann einem Rechteck, wobei eine Seitenkante die Rotationsachse bildet (Abbildung 5.5). Dieses Rechengebiet muss für die FEM-Simulation diskretisiert werden. Dies ist mit dem Programm *Gmsh* [Geu09] automatisiert möglich. Für das hier genutzte Vorwärtsmodell wird ein unstrukturiertes Gitter erzeugt, welches beispielhaft in Abbildung 5.6 dargestellt ist.

Diese örtliche Diskretisierung beeinflusst maßgeblich das Ergebnis der Simulation. Dabei kann einer Verfeinerung zum einen durch eine kleinere Elementgröße h und zum anderen auch durch eine höhere Polynomordnung der Ansatzfunktionen p erzielt werden. Eine geeignete Konfiguration für

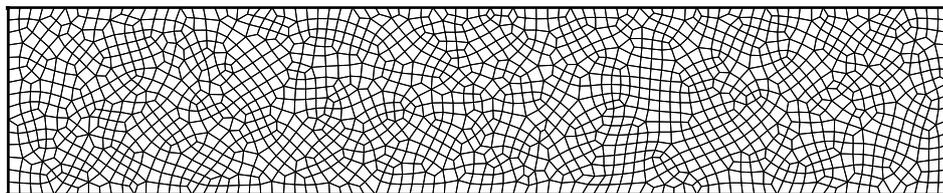


Abbildung 5.6: Gitter des zweidimensionalen Modells einer piezoelektrischen Scheibe mit Elementgröße $h = 60 \mu\text{m}$.

Elementgröße und Polynomordnung, die zum einen einen annehmbaren numerischen Fehler mit sich bringt und zum anderen trotzdem in einer akzeptablen Rechenzeit lösbar ist, soll durch Vergleich mit einer Referenzsimulation gefunden werden. Die Referenzimpedanz wird durch Simulation mit sehr kleiner Elementgröße und hoher Polynomordnung durchgeführt. Damit sind die zu erwartenden numerischen Abweichungen sehr gering, sodass die Abweichungen zwischen Simulationen mit anderen Konfigurationen und dieser Referenz Rückschlüsse auf die Qualität dieser Konfigurationen gibt. Für die Referenz wird hier die Elementgröße $h = 60 \mu\text{m}$ (entspricht ca. 33 Elementen pro Wellenlänge für die erste Dickenresonanz) und die Polynomordnung $p = 5$ gewählt. Die quadratische Abweichung

$$\|\log_{10}(|Z_{\text{sim}}(p, h)|) - \log_{10}(|Z_{\text{sim}}(p = 5, h = 60 \mu\text{m})|)\|^2 \quad (5.3)$$

summiert über die drei Impedanzen und alle Frequenzen bis 5,6 MHz und die jeweils zugehörige Berechnungszeit ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

Zusätzlich zur Abweichung kann auf Grund der Elementgröße und der Polynomordnung abgeschätzt werden, bis zu welcher Frequenz diese Konfiguration geeignet ist und über der größere numerische Abweichungen zu erwarten sind. Wird wie in Hauck [Hau16] die vereinfachte Annahme

$$p > \frac{qh}{2} - \frac{1}{2} \quad (5.4)$$

genutzt und die Wellenzahl q ersetzt, ergibt sich

$$f < \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pi h} \sqrt{\frac{c^D}{\rho}}. \quad (5.5)$$

Somit kann eine Frequenz angegeben werden, für die das wie gewählt parametrisierte Modell gute Ergebnisse liefert. Für die Referenz ergibt sich damit $f \leq 128 \text{ MHz}$, für $h = 200 \mu\text{m}$ und $p = 1$ etwa $f \leq 1 \text{ MHz}$. Da im Folgenden ein Frequenzbereich bis ca. 5,6 MHz untersucht werden soll,

5 Realisierung des inversen Verfahrens

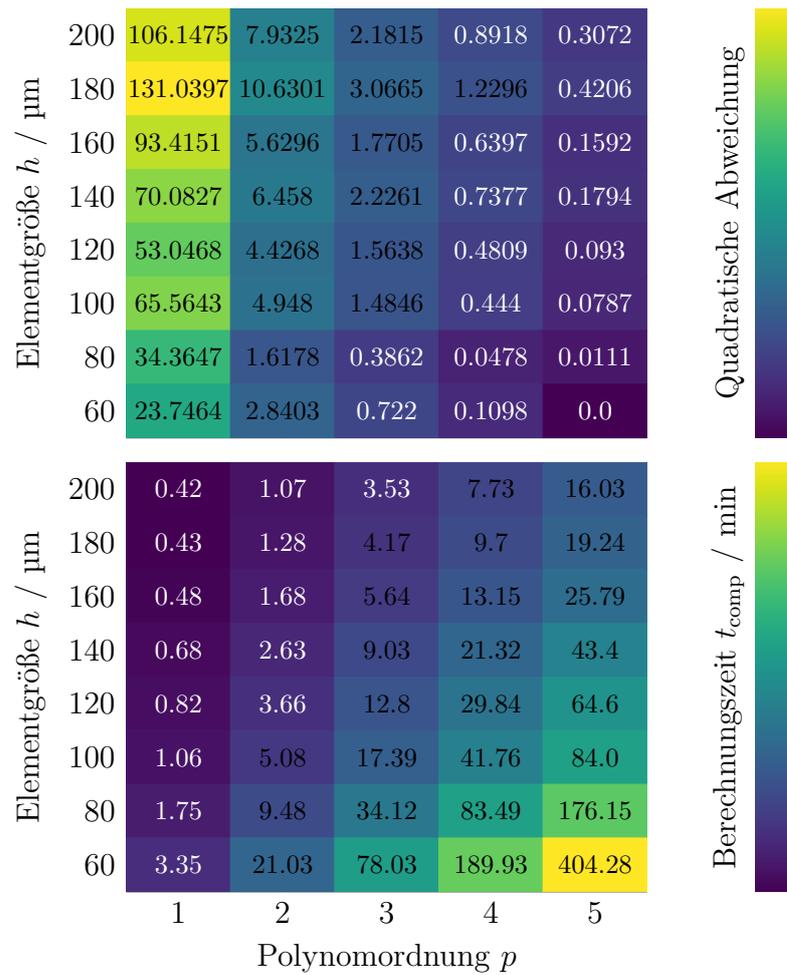


Abbildung 5.7: Quadratische Abweichung und Berechnungszeit für unterschiedliche Elementgrößen und Polynomordnungen.

muss darauf geachtet werden, dass Polynomordnung und Elementgröße entsprechend gewählt werden.

Durch diese Betrachtungen lässt sich die Wahl einer geeigneten Konfiguration des Simulationsmodells begründen. Für die Lösung des inversen Problems muss im Rahmen der Optimierung typischerweise eine große Anzahl an Simulationen durchgeführt werden, sodass stets ein Kompromiss zwischen Berechnungszeit und Abweichung geschlossen werden muss. Für Berechnungen, für die eine geringe Berechnungszeit im Vordergrund steht,

wird auf eine Elementgröße von $h = 200 \mu\text{m}$ und eine Polynomordnung von $p = 3$ zurückgegriffen, da so in unter 4 min eine möglichst geringe Abweichung erreicht werden kann. Dies ist vor allem in den ersten Schritten der Optimierung der Fall. Im späteren Verlauf der Optimierung wird dann die Polynomordnung um eins erhöht, um die numerischen Abweichungen weiter zu verringern ($h = 200 \mu\text{m}, p = 4$). Mit einer angenommenen Steifigkeit $c^D = 150 \text{ GPa}$ und Dichte $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ergibt sich Gleichung 5.5 dann zu $f < 31 \text{ MHz}$, was den in dieser Arbeit betrachteten Frequenzbereich abdeckt.

5.1.3 Einfluss der Elektroden

Die Elektroden stellen stets eine geringe mechanische Last auf der Außenseite der Piezokeramik dar. Da diese sich jedoch als sehr klein herausstellt, soll untersucht werden, ob diese im Folgenden vernachlässigt werden kann und die Elektroden allein als elektrische Randbedingung beschrieben werden können. Dazu wird das Simulationsmodell um Elektroden aus Kupfer-Nickel (CuNi) an den jeweiligen Stellen erweitert. Dabei werden die Dichte, der Elastizitätsmodul und die Poissonzahl der Elektroden mit

$$\rho_{\text{CuNi}} = 8900 \text{ kg/m}^3 \quad (5.6)$$

$$E_{\text{CuNi}} = 1,241 \text{ GPa} \quad (5.7)$$

$$\nu_{\text{CuNi}} = 0,32 \quad (5.8)$$

angenommen [Eve71]. Abbildung 5.8 zeigt eine Positionsmessung der Oberfläche einer Piezokeramik am Übergang von einem Bereich mit zu einem ohne Elektrode. Die Referenzierung für die Null-Position wird im Bereich ohne Elektrode gesetzt. Der negative Bereich deutet auf eventuelle Materialabtragung bei der Ablation der Elektrode hin, was jedoch nur in geringem Ausmaß der Fall ist, sodass sich kein relevanter Einfluss erwarten lässt. Die Elektrode wird daher im Folgenden durch eine ca. $4,64 \mu\text{m}$ dicke Kupfer-Nickel-Schicht modelliert.

5 Realisierung des inversen Verfahrens

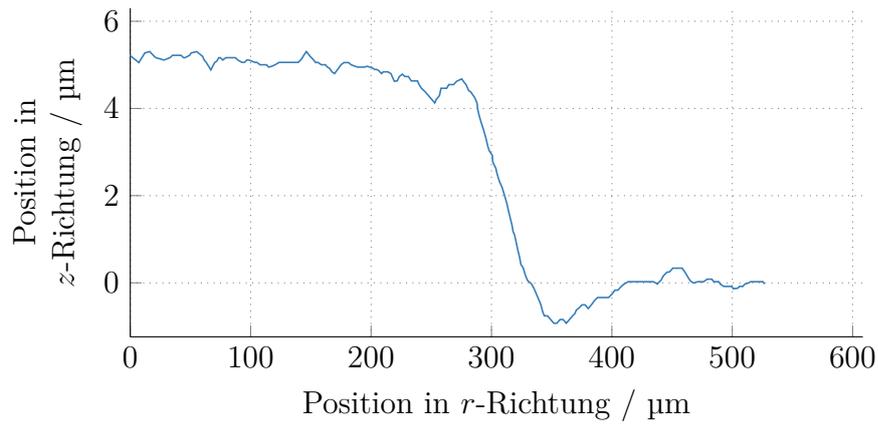


Abbildung 5.8: Positionsmessung an der Oberfläche der Piezokeramik an einer Elektrodenkante.

Produktionsbedingt werden die Elektroden zusätzlich nicht komplett vollflächig aufgebracht, sondern gehen nicht bis ganz an den Rand, was als Isorand bezeichnet wird. Auch diese Abweichung von den idealen Bedingungen soll berücksichtigt werden. Abbildung 5.9 zeigt den Vergleich zwischen zwei Simulation, bei denen einmal die Elektroden allein durch Randbedingungen modelliert sind und einmal die Elektrode durch eine Kupfer-Nickel-Schicht realisiert wird. Im diesem Falle der vollflächig mit

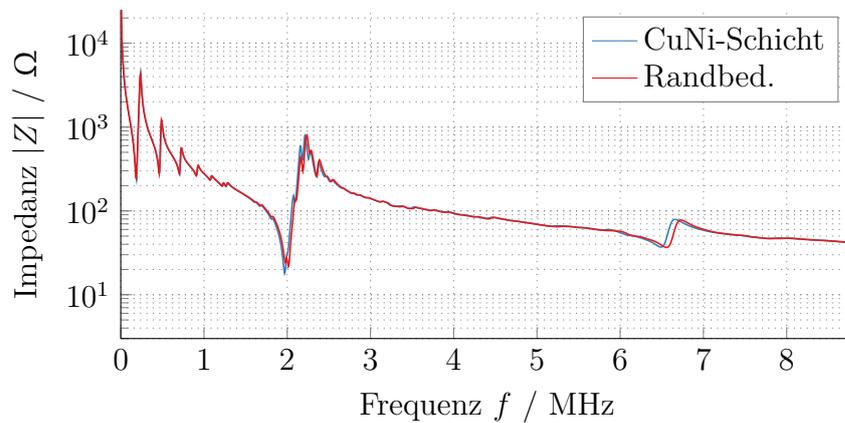


Abbildung 5.9: Einfluss der Elektroden bei Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.

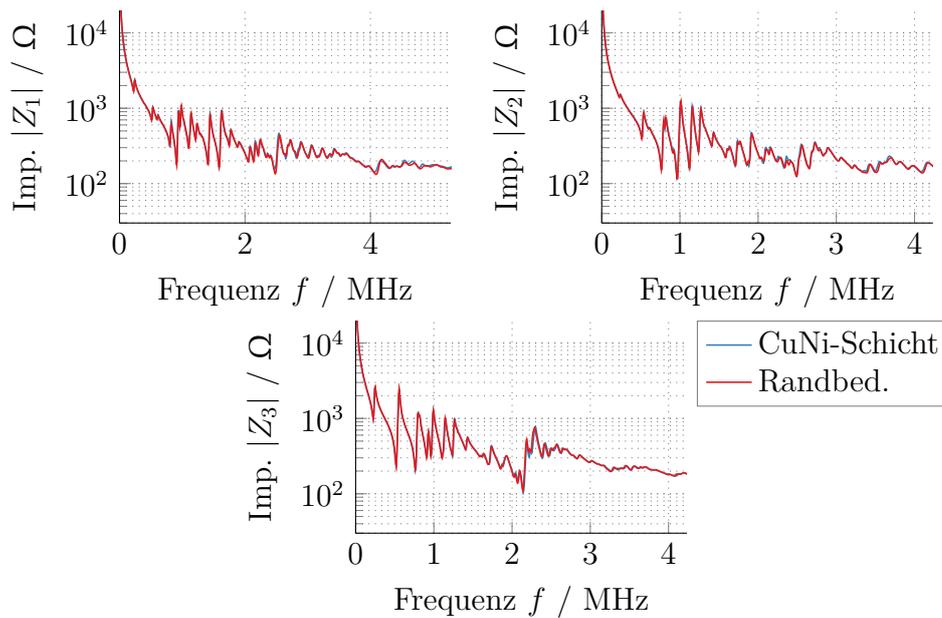


Abbildung 5.10: Einfluss der Elektroden bei Piezokeramiken mit Ringelektroden.

Elektroden bedeckten Piezokeramik ist dieser Einfluss auf die Impedanz durch eine leichte Verschiebung der Dickenresonanzfrequenz zu erkennen. Dies ist durch die zusätzliche Dicke und den durch die Elektrode hervorgerufenen Massebelag zu erklären. Für die Impedanzen mit Ringelektroden fällt der Einfluss entsprechend noch geringer aus (siehe Abbildung 5.10), sodass im Folgenden davon ausgegangen wird, dass die Elektroden zumindest in diesem Fall vernachlässigt werden können [Wei11].

5.2 Impedanzmessung

Für das reale Messsystem ist sowohl die Strukturierung der Elektroden für das gewählte Messobjekt als auch die Bestimmung der elektrischen Impedanz selbst relevant und sollen hier kurz thematisiert werden.

5.2.1 Elektrodenstrukturierung

Die fertigungstechnische Herstellung der Piezokeramikscheiben mit Ringelektrodenanordnung kann auf unterschiedliche Art und Weise geschehen. Prinzipiell gibt es zwei unterschiedliche Herangehensweisen.

Zum einen können Elektroden direkt in der gewünschten Form aufgetragen werden. Dies geschieht meist im sogenannten Dickschichtverfahren, bei denen durch eine Maske die Elektrodenpaste aufgetragen und anschließend durch Erhitzen eingebrannt wird. Diese hohen Temperaturen haben jedoch zur Folge, dass eine Polarisierung nach dem Prozess erfolgen muss. Sind die aufgebracht Elektroden dann wie hier notwendig nicht vollflächig aufgebracht, kann bei der Polarisierung nur ein inhomogenes Feld eingepreßt werden, was zu lokal unterschiedlichem Materialverhalten führt. Daher sind diese Verfahren für die Herstellung von Piezokeramiken mit Ringelektrodenanordnung nicht geeignet.

Zum anderen können die Elektroden im Nachhinein strukturiert werden, das heißt die Elektroden werden zunächst im Dünnschichtverfahren (beispielsweise durch Sputtern) vollflächig aufgetragen und die Keramik polarisiert. Im Anschluss kann durch Laserablation die Elektrode an den gewünschten Flächen wieder abgetragen werden. Da der Laser nur oberflächlich und zeitlich sehr kurz wirkt, kann davon ausgegangen werden, dass die darunterliegende Keramik dadurch in ihren Eigenschaften unverändert bleibt. Dies kann beispielsweise direkt beim Hersteller (zum Beispiel PI Ceramic GmbH, Lederhose, Deutschland) geschehen. Alternativ kann ein Lasergravursystem für den Heimgebrauch als kostengünstige Variante genutzt werden. Dabei sind Verfahrensgeschwindigkeit, Laserleistung und Fokussierung neben Elektrodenmaterial und Laserwellenlänge wesentliche Einflussfaktoren für das hinreichende Abtragen der Elektrode [Fri19].

5.2.2 Messung der elektrischen Impedanz

Eine möglichst präzise Impedanzmessung kann in einer Vierleitermessung [Müh17] realisiert werden, um Anschluss- und Leitungswiderstände

vernachlässigen zu können. Für die eigentliche Messung können dabei unterschiedliche Verfahren zum Einsatz kommen. Für die hier beschriebene Anwendung muss ein Sweep von wenigen Kilohertz bis in den Megahertzbereich möglich sein. Dafür bietet sich das Verfahren der *Auto-Balancing-Bridge* an, welches im verwendeten Keysight Impedance Analyzer E4990E (Keysight Technologies, Santa Rosa, CA, USA) realisiert wird [Key16]. Das prinzipielle Vorgehen ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Der Block *Auto-Balancing* sorgt dafür, dass für die Ströme $i_{\text{DUT}} = i_{\text{r}}$ gilt und das Potential im Knoten K dem Massepotential entspricht [Mei18]. Für niedrige Frequenzen kann dies einfach durch einen Transimpedanzverstärker realisiert werden. Für höhere Frequenzen kommt eine Schaltung, wie sie in Abbildung 5.12 dargestellt ist, zum Einsatz. Im oberen Knoten fließt die Stromdifferenz

$$i_{\text{diff}} = i_{\text{DUT}} - i_{\text{r}} \quad (5.9)$$

$$= \hat{i}_{\text{diff}} \cos(\omega_{\text{osz}} + \varphi) \quad (5.10)$$

hinein, wobei \hat{i} im Folgenden die Amplitude des Signals darstellt, welche alle Verstärkungs- und Skalierungsfaktoren bis zum jeweiligen Punkt beinhaltet. Dieser wird jeweils mit einem Kosinus, beziehungsweise einem Sinussignal der gleichen Frequenz multipliziert und durch die nachfolgenden integrierenden Verstärker gemittelt, sodass sich $\hat{i} \cos(\varphi)$ beziehungsweise $\hat{i} \sin(\varphi)$ ergeben. Diese werden jeweils mit dem Eingangssignal u_{osz} beziehungsweise einer phasenverschobenen Version multipliziert und dann addiert, sodass sich das Ausgangssignal, wenn man es als Strom i_{r} interpretiert zu

$$i_{\text{r}} = \hat{i} (\cos(\varphi) \cos(\omega_{\text{osz}}t) - \sin(\varphi) \sin(\omega_{\text{osz}}t)) \quad (5.11)$$

$$= \hat{i} \cos(\omega_{\text{osz}}t + \varphi) \quad (5.12)$$

ergibt. Dieser Strom wirkt im Knoten K dann dem Strom i_{DUT} entgegen und regelt i_{diff} zu null. Zur Bestimmung der Impedanz werden nun sowohl die Spannung u_{DUT} sowie die Spannung über dem Referenzwiderstand

5 Realisierung des inversen Verfahrens

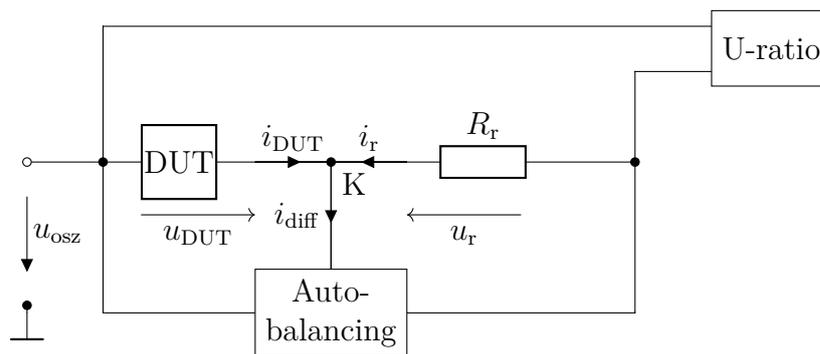


Abbildung 5.11: Prinzipielle Darstellung der Impedanzmessung mit *Auto-Balancing-Bridge* nach [Key16].

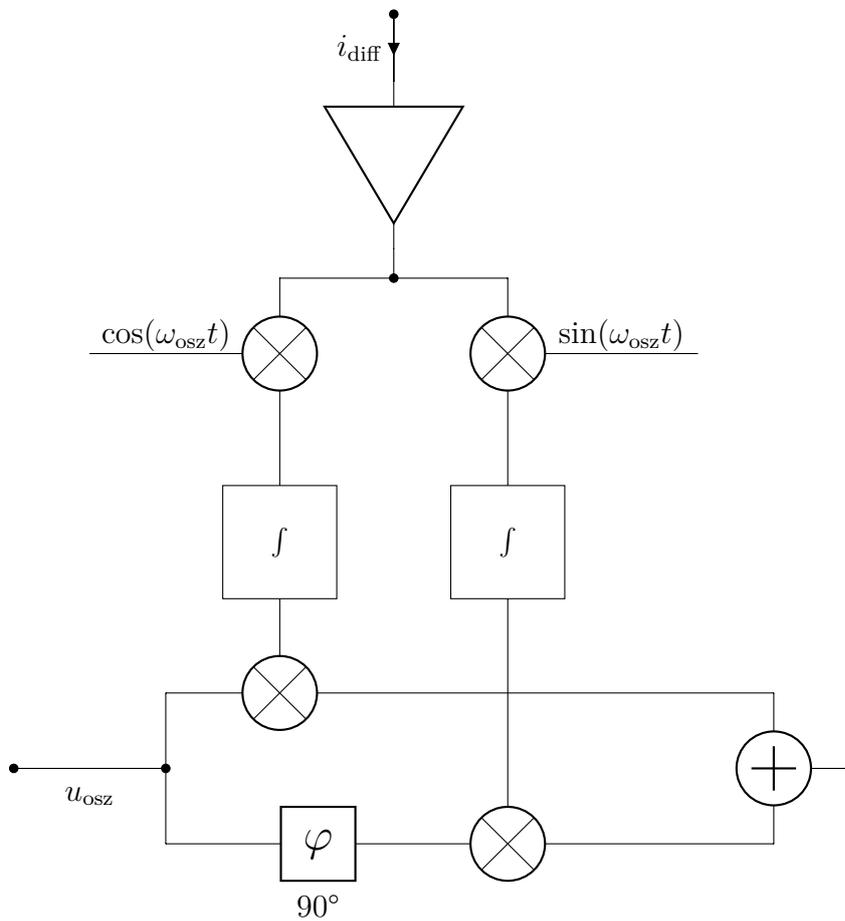


Abbildung 5.12: Blockschaltbild zur *Auto-Balancing-Bridge* nach [Key16].

u_r aufgenommen. Mit Hilfe eines Phasendetektors kann deren Real- und Imaginärteil getrennt mit Hilfe eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU) umgesetzt werden. Die Impedanz Z_{DUT} ergibt sich dann durch

$$Z_{\text{DUT}} = R_r \frac{u_{\text{DUT}}}{u_r}. \quad (5.13)$$

5.3 Startwertbestimmung

Für die Lösung des inversen Verfahrens wird ein lokaler Optimierungsalgorithmus genutzt. Dieser dient dem Finden eines lokalen Minimums in der Umgebung von gegebenen Startwerten. Diese Startwerte können auf unterschiedliche Art und Weise beispielsweise aus Herstellerdaten, Erfahrungswerten oder vereinfachten Abschätzungen gewonnen werden. In dieser Arbeit wird als vereinfachte Anordnung eine Impedanzmessung einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden (Abbildung 5.13) genutzt. Diese Anordnung lässt sich in unterschiedlichen Bereichen durch jeweils unterschiedliche Näherungen beschreiben, sodass direkte Zusammenhänge zwischen charakteristischen Größen der Impedanz (wie beispielsweise den Resonanzfrequenzen) und einigen Materialparametern angegeben werden können, wie es bereits beim standardisierten Verfahren [IEEE87] der Fall ist.

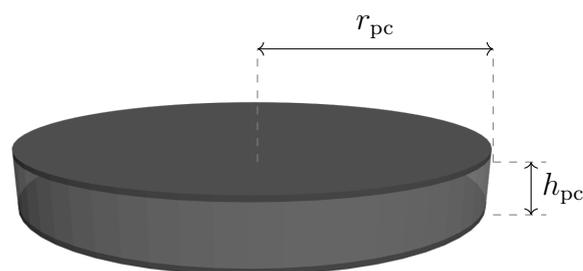


Abbildung 5.13: Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden.

5.3.1 Dickenschwingung

Die erste Näherung besteht in der Betrachtung einer reinen Dickenschwingung. Anschaulich kann dies durch eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke h_{pc} verstanden werden. Daher kann die Betrachtung auf die Komponenten in Dickenrichtung reduziert werden (das heißt Index z beziehungsweise 3). Dies wird mathematisch abgebildet durch [She07]

$$T_3 = c_{33}^{\text{D}} S_3 - h_{33} D_3 \quad (5.14)$$

$$E_3 = \kappa_{33}^{\text{S}} D_3 - h_{33} S_3. \quad (5.15)$$

Als Randbedingung gilt mechanische Spannungsfreiheit an den Grenzflächen:

$$T_3 = 0 \text{ für } z = \pm \frac{h_{\text{pc}}}{2}. \quad (5.16)$$

Durch Einsetzen von $S_3 = \partial_z u_3$ und Gleichung 5.14 in die Bewegungsgleichung

$$\partial_z T_3 = \rho \partial_t^2 u_3 \quad (5.17)$$

ergibt sich unter der Annahme einer in z Richtung konstanten dielektrischen Verschiebung und rein harmonischen Vorgängen $u_3(t, z) = u_3(z) e^{j\omega t}$ die zu lösende Wellengleichung:

$$c_{33}^{\text{D}} \partial_z^2 u_3(z) = -\rho \omega^2 u_3(z). \quad (5.18)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist mit noch zu bestimmenden Konstanten C_1 und C_2 durch

$$u_3(z) = C_1 \cos(q_{\text{di}} z) + C_2 \sin(q_{\text{di}} z) \quad (5.19)$$

$$q_{\text{di}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^{\text{D}}}} \quad (5.20)$$

gegeben [Ise36]. Durch Einsetzen in Gleichung 5.14 erhält man

$$T_3 = c_{33}^D \partial_z u_3(z) - h_{33} D_3 \quad (5.21)$$

$$= -c_{33}^D \cdot q_{di} \cdot C_1 \sin(q_{di} z) + c_{33}^D \cdot q_{di} \cdot C_2 \cos(q_{di} z) - h_{33} D_3. \quad (5.22)$$

Die Auswertung der Randbedingungen (Gleichung 5.16) führt zu

$$\begin{aligned} z = \frac{h_{pc}}{2} : 0 = & -c_{33}^D q_{di} C_1 \sin\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \\ & + c_{33}^D q_{di} C_2 \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) - h_{33} D_3 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} z = -\frac{h_{pc}}{2} : 0 = & c_{33}^D q_{di} C_1 \sin\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \\ & + c_{33}^D q_{di} C_2 \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) - h_{33} D_3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich durch Addition beziehungsweise Subtraktion von Gleichung 5.23 und Gleichung 5.24 bestimmen:

$$0 = -2h_{33} D_3 + 2c_{33}^D q_{di} C_2 \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \quad (5.25)$$

$$0 = -2c_{33}^D q_{di} C_1 \sin\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \quad (5.26)$$

↓

$$C_1 = 0 \quad (5.27)$$

$$C_2 = \frac{h_{33} D_3}{c_{33}^D q_{di} \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right)}. \quad (5.28)$$

Damit ergeben sich

$$u_3(z) = \frac{h_{33} D_3}{c_{33}^D q_{di} \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right)} \sin(q_{di} z) \quad (5.29)$$

$$S_3 = \partial_z u_3(z) = \frac{h_{33} D_3}{c_{33}^D \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right)} \cos(q_{di} z). \quad (5.30)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

Zur Bestimmung der elektrischen Impedanz können der Strom durch das Gauß'sche Gesetz und die Spannung über das Induktionsgesetz berechnet werden:

$$U = - \int_{-\frac{h_{pc}}{2}}^{\frac{h_{pc}}{2}} E_3 dz \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{h_{pc}}{2}}^{\frac{h_{pc}}{2}} (h_{33}S_3 - \kappa_{33}^S D_3) dz \\ &= \int_{-\frac{h_{pc}}{2}}^{\frac{h_{pc}}{2}} \frac{h_{33}^2 D_3}{c_{33}^D \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right)} \cos(q_{di}z) dz - \kappa_{33}^S D_3 h_{pc} \\ &= \frac{h_{33}^2 D_3}{c_{33}^D q_{di} \cos\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right)} \left[\sin\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) + \sin\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \right] - h_{pc} \kappa_{33}^S D_3 \\ &= \frac{2h_{33}^2 D_3}{c_{33}^D q_{di}} \tan\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) - h_{pc} \kappa_{33}^S D_3 \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$I = j\omega Q = j\omega \int D_3 dA = -j\omega D_3 A \quad (5.33)$$

mit $A = \pi \cdot r_{pc}^2$

Die Impedanz der Dickenschwingung Z_{di} ergibt sich mit $k_{di}^2 = h_{33}^2 / \kappa_{33}^S c_{33}^D$ zu

$$Z_{di} = \frac{U}{I} \quad (5.34)$$

$$= \frac{1}{j\omega A} \left[h_{pc} \kappa_{33}^S - \frac{2h_{33}^2}{c_{33}^D q_{di}} \tan\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \right] \quad (5.35)$$

$$= \frac{\kappa_{33}^S h_{pc}}{j\omega A} \left[1 - \frac{2h_{33}^2}{c_{33}^D q_{di} h_{pc} \kappa_{33}^S} \tan\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \right] \quad (5.36)$$

$$= \frac{\kappa_{33}^S h_{pc}}{j\omega A} \left[1 - \frac{2k_{di}^2}{q_{di} h_{pc}} \tan\left(q_{di} \frac{h_{pc}}{2}\right) \right]. \quad (5.37)$$

Zur Bestimmung der Materialparameter aus Messungen der Impedanz und der damit verbundenen Bestimmung der Dicken(anti)resonanzfrequenz

unter Annahme des oben beschriebenen idealen Dickenschwingers können der Resonanz- und der Antiresonanzfall betrachtet werden.

Im Falle der **Antiresonanz** wird die Impedanz maximal. Dies ist der Fall, wenn in Gleichung 5.37 der Tangens gegen unendlich strebt, das heißt wenn sein Argument ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Daraus lässt sich wie folgt der Parameter c_{33}^D ableiten:

$$q_{\text{anti,di}} \frac{h_{\text{pc}}}{2} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2} \quad (5.38)$$

$$\sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^D}} \omega_{\text{anti,di}} \frac{h_{\text{pc}}}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (5.39)$$

$$c_{33}^D = 4\rho h_{\text{pc}}^2 f_{\text{anti,di}}^2. \quad (5.40)$$

Damit lässt sich der Ausdruck für die frequenzabhängige Impedanz weiter vereinfachen zu

$$Z_{\text{di}} = \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega A} \left[1 - \frac{k_{\text{di}}^2}{\frac{\omega}{4f_{\text{anti,di}}}} \tan\left(\frac{\omega}{4f_{\text{anti,di}}}\right) \right]. \quad (5.41)$$

Im Falle der **Resonanz** wird die Impedanz null. So lässt sich der Parameter k_{di} bestimmen:

$$0 = \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega_{\text{res,di}} A} \left[\frac{k_{\text{di}}^2}{\frac{\omega}{4f_{\text{anti,di}}}} \tan\left(\frac{\omega_{\text{res,di}}}{4f_{\text{anti,di}}}\right) - 1 \right] \quad (5.42)$$

$$1 = \frac{k_{\text{di}}^2}{\frac{\omega_{\text{res,di}}}{4f_{\text{anti,di}}}} \tan\left(\frac{\omega_{\text{res,di}}}{4f_{\text{anti,di}}}\right) \quad (5.43)$$

$$k_{\text{di}}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_{\text{res,di}}}{f_{\text{anti,di}}} \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{f_{\text{res,di}}}{f_{\text{anti,di}}}\right) \quad (5.44)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{f_{\text{anti,di}}} \tan\left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{f_{\text{res,di}}}{f_{\text{anti,di}}}\right)\right). \quad (5.45)$$

Da jedoch k_{di} von zwei noch unbekanntem Materialparametern h_{33} und κ_{33}^S abhängt, muss einer dieser beiden auf anderem Wege bestimmt werden,

¹ $\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

um den jeweils anderen aus der Kenntnis von k_{di} zu berechnen. Daher wird aus einer zusätzlichen Messung der Kapazität C_0^{T} bei einer niedrigen Frequenz (im Vergleich zur Dickenresonanzfrequenz) ausgewertet:

$$\varepsilon_{33}^{\text{T}} = \frac{h_{\text{pc}} C_0^{\text{T}}}{A}. \quad (5.46)$$

Mit Hilfe des planaren Kopplungsfaktors k_{p} (vergleiche Gleichung 5.98) lässt sich dann

$$\varepsilon_{33}^{\text{S}} = (\kappa_{33}^{\text{S}})^{-1} = \varepsilon_{33}^{\text{T}}(1 - k_{\text{p}})(1 - k_{\text{di}}) \quad (5.47)$$

berechnen.

Somit können alle drei Parameter bestimmt werden, welche zur Beschreibung einer idealen Dickenschwingung notwendig sind. Diese lassen sich mit Hilfe von Abschnitt A.2 überführen in

$$\varepsilon_{33}^{\text{S}} = (\kappa_{33}^{\text{S}})^{-1} \quad (5.48)$$

$$c_{33}^{\text{E}} = 4\rho h_{\text{pc}}^2 f_{\text{anti,di}}^2 (1 - k_{\text{di}}^2) \quad (5.49)$$

$$e_{33} = k_{\text{di}} \sqrt{c_{33}^{\text{D}} \varepsilon_{33}^{\text{S}}}. \quad (5.50)$$

5.3.2 Radialschwingung

Als nächstes wird die Näherung für einen Radialschwinger betrachtet. Dazu wird zunächst Spannungsfreiheit und ein konstantes elektrisches Potential ϕ an den Elektroden angenommen:

$$T_{zz, z\varphi, zr} = 0 \text{ für } z = \pm \frac{h_{\text{pc}}}{2} \quad (5.51)$$

$$\phi = \pm \frac{\phi_{\text{anr}}}{2} e^{j\omega t} \text{ für } z = \pm \frac{h_{\text{pc}}}{2}. \quad (5.52)$$

5.3 Startwertbestimmung

Das Potential kann in z -Richtung homogen angenommen werden, was einem konstanten elektrischen Feld $E_z = -\text{grad } \phi$ entspricht:

$$\phi = \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} e^{j\omega t} z \quad (5.53)$$

$$E_z = -\frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} e^{j\omega t} \quad (5.54)$$

$$E_x = E_y = 0. \quad (5.55)$$

Die Gleichungen aus Abschnitt 3.2.4 lassen sich in Komponenten schreiben. Damit vereinfachen sich die piezoelektrischen Gleichungen zu

$$T_{rr} = c_{11}^E \partial_r u_r + c_{12}^E \frac{1}{r} u_r + c_{13}^E \partial_z u_z + e_{31} \partial_z \phi \quad (5.56)$$

$$T_{\varphi\varphi} = c_{11}^E \frac{1}{r} \partial_r^2 u_r + c_{12}^E \partial_r u_r + c_{13}^E \partial_z u_z + e_{31} \partial_z \phi \quad (5.57)$$

$$T_{zz} = c_{13}^E \partial_r u_r + c_{13}^E \frac{1}{r} u_r + c_{33}^E \partial_z u_z + e_{31} \partial_z \phi \quad (5.58)$$

$$D_3 = e_{31} \left(\partial_r^2 u_r + \frac{1}{r} u_r \right) + e_{33} \partial_z u_z - \varepsilon_{33}^S \partial_z \phi. \quad (5.59)$$

Mit $T_{zz} = 0$ auf den Rändern ergibt sich

$$\partial_z u_z = -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \partial_r u_r - \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} \frac{1}{r} \partial_r u_r + \frac{e_{33}}{c_{33}} E_z, \quad (5.60)$$

was wiederum zu

$$T_{rr} = c_{11}^P \partial_r u_r + c_{12}^P \frac{1}{r} u_r + e_{31}^P \partial_z \phi \quad (5.61)$$

$$T_{\varphi\varphi} = c_{11}^P \frac{1}{r} u_r + c_{12}^P \partial_r u_r + e_{31}^P \partial_z \phi \quad (5.62)$$

$$D_3 = e_{31}^P \left(\partial_r u_r + \frac{1}{r} u_r \right) - \varepsilon_{33}^P \partial_z \phi \quad (5.63)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

mit den planaren Varianten der Materialparameter

$$c_{11}^p = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} \quad (5.64)$$

$$c_{12}^p = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} \quad (5.65)$$

$$e_{31}^p = e_{31} - \frac{e_{33}c_{13}^E}{c_{33}^E} \quad (5.66)$$

$$\varepsilon_{33}^p = \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \quad (5.67)$$

führt [Pia17]. Die verbleibende Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten ist damit

$$\partial_r T_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \partial_t^2 u_r, \quad (5.68)$$

in die die piezoelektrischen Gleichungen eingesetzt werden. Mit $\partial_r \phi = 0$ ergibt sich

$$c_{11}^p \left[\partial_r^2 u_r + \frac{1}{r} \partial_r u_r - \frac{1}{r^2} u_r \right] = \rho \partial_t^2 u_r. \quad (5.69)$$

Unter der Annahme zeitlich harmonischer Schwingungen, welche mathematisch durch $u_r(r, t) = u_r(r) e^{-j\omega t}$ beschrieben werden können, lässt sich diese Gleichung mit $q_{\text{rad}} = \omega \sqrt{\rho/c_{11}^p}$ vereinfachen zu

$$\partial_r^2 u_r + \frac{1}{r} \partial_r u_r + \left[q_{\text{rad}}^2 - \frac{1}{r^2} \right] u_r = 0. \quad (5.70)$$

Diese Form ist bekannt als Bessel'sche Differentialgleichung, deren Lösung

$$u_r(r) = C_1 J_1(q_{\text{rad}} r) + C_2 N_1(q_{\text{rad}} r) \quad (5.71)$$

5.3 Startwertbestimmung

bekannt ist [Wal17]. Die Tatsache, dass die Neumannfunktion für $r \rightarrow 0$ gegen $-\infty$ strebt, führt zu $C_2 = 0$. Die zweite Konstante C_1 lässt sich durch die Randbedingung der Spannungsfreiheit an den Rändern bestimmen:

$$0 = T_{rr} \text{ für } r = r_{\text{pc}} \quad (5.72)$$

$$0 = C_1 c_{11}^{\text{p}} \partial_r J_1(\eta) + C_1 c_{12}^{\text{p}} \frac{J_1(\eta)}{r_{\text{pc}}} + e_{31}^{\text{p}} \partial_3 \phi \quad (5.73)$$

$$= C_1 c_{11}^{\text{p}} J_0(\eta) q_{\text{rad}} - c_{11}^{\text{p}} \frac{C_1}{r_{\text{pc}}} J_1(\eta) + c_{12}^{\text{p}} \frac{C_1}{r_{\text{pc}}} J_1(\eta) + e_{31}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} \quad (5.74)$$

$$= c_{11}^{\text{p}} C_1 \left[J_0(\eta) q_{\text{rad}} - (1 - \nu^{\text{p}}) \frac{J_1(\eta)}{r_{\text{pc}}} \right] + e_{31}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} \quad (5.75)$$

$$C_1 = \frac{e_{31}^{\text{p}} \phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}} c_{11}^{\text{p}}} \left[(1 - \nu^{\text{p}}) \frac{J_1(\eta)}{r_{\text{pc}}} - q_{\text{rad}} J_0(\eta) \right]^{-1} \quad (5.76)$$

mit

$$\eta = q_{\text{rad}} r_{\text{pc}} \quad (5.77)$$

$$\nu^{\text{p}} = \frac{c_{12}^{\text{p}}}{c_{11}^{\text{p}}}. \quad (5.78)$$

Mit Gleichung 5.59 ergibt sich nun D_3 mit der bestimmten Konstante C_1 zu

$$D_3 = e_{31}^{\text{p}} C_1 \left[\partial_r J_1(q_{\text{rad}} r) + \frac{J_1(q_{\text{rad}} r)}{r} \right] - \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}}. \quad (5.79)$$

Damit lässt sich die Ladung Q über das Gauß'sche Gesetz und Gleichung 5.79 berechnen:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_{\text{pc}}} D_3 r dr \quad (5.80)$$

$$= 2\pi \left[e_{31}^{\text{p}} C_1 \cdot (I_1 + I_2) - \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} \int_0^{r_{\text{pc}}} r dr \right]. \quad (5.81)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

Die Integrale I_1 und I_2 werden der Übersicht halber zunächst separat gelöst [Mat18]:

$$I_1 = \int \partial_r J_1(q_{\text{rad}} r) \cdot r dr = \frac{1}{q_{\text{rad}}} J_0(q_{\text{rad}} r) + r J_1(q_{\text{rad}} r) - \frac{1}{q_{\text{rad}}} \quad (5.82)$$

$$I_2 = \int J_1(q_{\text{rad}} r) dr = \frac{1}{q_{\text{rad}}} - \frac{J_0(q_{\text{rad}} r)}{q_{\text{rad}}} \quad (5.83)$$

$$I_1 + I_2 = r J_1(q_{\text{rad}} r) \Big|_0^{r_{\text{pc}}} = r_{\text{pc}} J_1(\eta). \quad (5.84)$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich

$$Q = 2\pi e_{31}^{\text{p}} r_{\text{pc}} C_1 J_1(\eta) - \pi \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} r_{\text{pc}}^2. \quad (5.85)$$

Unter der Annahme harmonischer Vorgänge und mit Gleichung 5.76 lässt sich daraus der Strom bestimmen.

$$I = j\omega Q \quad (5.86)$$

$$= j\omega \left[2\pi e_{31}^{\text{p}} r_{\text{pc}} \frac{e_{31}^{\text{p}} \phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}} c_{11}^{\text{p}}} \left[(1 - \nu^{\text{p}}) \frac{J_1(\eta)}{r_{\text{pc}}} - q_{\text{rad}} J_0(\eta) \right]^{-1} J_1(\eta) - \pi \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} r_{\text{pc}}^2 \right] \quad (5.87)$$

$$= j\omega \left[2\pi (e_{31}^{\text{p}})^2 r_{\text{pc}}^2 \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}} c_{11}^{\text{p}} (1 - \nu^{\text{p}}) J_1(\eta) - \eta J_0(\eta)} - \pi \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}}}{h_{\text{pc}}} r_{\text{pc}}^2 \right] \quad (5.88)$$

$$= j\omega \left[2(k^{\text{p}})^2 \frac{J_1(\eta)}{(1 - \nu^{\text{p}}) J_1(\eta) - \eta J_0(\eta)} - 1 \right] \pi \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}} r_{\text{pc}}^2}{h_{\text{pc}}} \quad (5.89)$$

$$= j\omega \left[2(k^{\text{p}})^2 \frac{1}{1 - \nu^{\text{p}} - \mathcal{J}_1(\eta)} - 1 \right] \pi \varepsilon_{33}^{\text{p}} \frac{\phi_{\text{anr}} r_{\text{pc}}^2}{h_{\text{pc}}} \quad (5.90)$$

mit

$$(k^{\text{p}})^2 = \frac{(e_{31}^{\text{p}})^2}{c_{11}^{\text{p}} \varepsilon_{33}^{\text{p}}} \quad (5.91)$$

und der Onoe-Funktion

$$\mathcal{J}_1(x) = \frac{xJ_0(x)}{J_1(x)}. \quad (5.92)$$

Im **Resonanzfall** gilt $I \rightarrow \infty$, was äquivalent zu

$$1 - \nu^p - \mathcal{J}_1(\eta_{\text{res,rad}}) = 0 \quad (5.93)$$

ist. Analog gilt im **Antiresonanzfall** ($I = 0$)

$$2(k^p)^2 = 1 - \nu^p - \mathcal{J}_1(\eta_{\text{anti,rad}}). \quad (5.94)$$

Zur Berechnung von k_p werden nun noch ν^p und $\eta_{\text{anti,rad}}$ benötigt. Zur Bestimmung dieser Materialkenngrößen aus einem Impedanzverlauf, werden einige Größen mit Hilfe des Verhältnisses von zweiter und erster Radialresonanz $f_{\text{ap}} = f_{\text{res,rad}}^{(2)}/f_{\text{res,rad}}^{(1)}$ durch Polynome approximiert, welche sich aus den oben genannten mathematischen Ausdrücken für die Resonanz- und Antiresonanzbedingung ergeben. Dies ist notwendig, da für die oben genannten Gleichungen im Resonanz- und Antiresonanzfall keine analytische Lösung möglich ist. Die Größen $\eta_{\text{res,rad}}$ und ν^p lassen sich dann durch die Polynome

$$\nu^p = -1.236f_{\text{ap}}^3 + 11.16f_{\text{ap}}^2 - 34.48f_{\text{ap}} + 36.26 \quad (5.95)$$

$$\eta_{\text{res,rad}} = -0.227f_{\text{ap}}^3 + 2.23f_{\text{ap}}^2 - 7.898f_{\text{ap}} + 11.529 \quad (5.96)$$

hinreichend genau approximieren [Mei73]. Daraus lässt sich im Folgenden $\eta_{\text{anti,rad}}$ bestimmen [IEEE87]:

$$\eta_{\text{anti,rad}} = \eta_{\text{res,rad}} \left(1 + \frac{f_{\text{anti,rad}}^{(1)} - f_{\text{res,rad}}^{(1)}}{f_{\text{res,rad}}^{(1)}} \right) \quad (5.97)$$

Der planare Kopplungsfaktor lässt sich so definieren als

$$k_p^2 = \frac{(k^p)^2}{\frac{1+\nu^p}{2} + (k^p)^2}. \quad (5.98)$$

und kann für die Berechnung der benötigten Permittivität ε_{33}^S (vergleiche Gleichung 5.47) herangezogen werden.

5.3.3 Schätzung der Materialparameter

Da durch den Fall der vollflächigen Elektroden eine hinreichende Sensitivität der Impedanz auf alle Materialparameter nicht gegeben ist, können durch die vereinfachten Näherungen auch nicht alle Parameter abgeleitet werden. Daher wird hier zunächst ein isotropes Material angenommen, welches durch weniger Parameter abgebildet werden kann. Obwohl Isotropie im Gegensatz zur Piezoelektrizität steht, ist diese Annahme für eine erste Startwertschätzung annehmbar.

In den obigen Kapiteln wurde bereits beschrieben, wie man ε_{33}^S , c_{33}^E , e_{33} und ν^p aus dem Verlauf der Impedanz einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden bestimmt. Damit soll zunächst die komplette Steifigkeitsmatrix \underline{c}^E approximiert werden. Aus c_{33}^E und ν^p kann der Elastizitätsmodul

$$E = c_{33}^E (1 - 2\nu^p) \frac{1 + \nu^p}{1 - \nu^p} \quad (5.99)$$

bestimmt werden. Eine isotrope Steifigkeitsmatrix lässt sich nun ausdrücken über

$$\underline{c}^E = C \begin{bmatrix} 1 - \nu^p & \nu^p & \nu^p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu^p & 1 - \nu^p & \nu^p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu^p & \nu^p & 1 - \nu^p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0.5 - \nu^p & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0.5 - \nu^p & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0.5 - \nu^p \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

mit

$$C = \frac{E}{(1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p)}. \quad (5.101)$$

Die Permittivitätsmatrix $\underline{\epsilon}^S$ und die Matrix piezoelektrischer Konstanten \underline{e} werden zunächst durch

$$\underline{\epsilon}^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

und [Unv18]

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}e_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}e_{33} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5}e_{33} & -\frac{1}{5}e_{33} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

angenähert. Die Parameter der unterschiedlichen Dämpfungsmodelle müssen ebenfalls zunächst aus der Impedanz der vollflächigen Piezokeramik geschätzt werden.

Schätzung der Parameter des Rayleigh-Dämpfungsmodells

Für die Startwerte der Parameter des Rayleigh-Dämpfungsmodells wird zunächst eine Formulierung aus [DIN50324-2] genutzt, wonach sich der Gütefaktor Q_{mech} zu

$$Q_{\text{mech}} = \frac{1}{2\pi f_{\text{res}} |Z(f_{\text{res}})| C_0^T k_{\text{eff}}^2} \quad (5.104)$$

mit

$$k_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{f_{\text{anti}}^2 - f_{\text{res}}^2}{f_{\text{anti}}^2}} \quad (5.105)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

ergibt (siehe Abschnitt C.1). Da die erste Dickenresonanzfrequenz meist die ausgeprägteste und prägnanteste Resonanz ist, soll für die Betrachtung der Dämpfung diese genutzt werden. Für jede Eigenkreisfrequenz ω_i lässt sich der modale Dämpfungsfaktor [Bat06]

$$\xi = \frac{\alpha_M + \alpha_K \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (5.106)$$

bestimmen, wobei hier der Zusammenhang [Rau12]

$$\xi = \frac{1}{2Q_{\text{mech}}} \quad (5.107)$$

gilt. Die Berechnung für α_M und α_K kann dann über

$$\alpha_M + \alpha_K(\omega_i + \Delta\omega)^2 = 2(\omega_i + \Delta\omega)\xi_i \quad (5.108)$$

$$\alpha_M + \alpha_K(\omega_i - \Delta\omega)^2 = 2(\omega_i - \Delta\omega)\xi_i \quad (5.109)$$

durch möglichst kleine Variation der Eigenkreisfrequenz um $\pm\Delta\omega$ erfolgen. Für $\Delta\omega \rightarrow 0$ erhält man

$$\alpha_M = \xi_i \omega_i^{-1} \quad (5.110)$$

$$\alpha_K = \xi_i \omega_i, \quad (5.111)$$

wobei die Eigenkreisfrequenz durch die erste Dickenresonanzfrequenz angenommen wird.

Schätzung weiterer Dämpfungsparameter

Die Bestimmung der Parameter der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Modelle geschieht ausgehend von den bestimmten Rayleigh-Dämpfungsparametern α_M und α_K . Die Parameter des Zener-Modells und des Modells mit komplexen Konstanten sollen dann so gewählt werden, dass das Dämpfungsmaß μ_d in einem Frequenzpunkt gleich sind (vergleiche Abbildung 3.6 in Ab-

schnitt 3.3). Für Rayleigh-Dämpfung ergibt sich das Dämpfungsmaß μ_d nach Gleichung 3.87 zu

$$2\mu_{d,\text{Rayl}} = \frac{\alpha_K \omega + \frac{\alpha_M}{\omega}}{1 - \alpha_M \alpha_K}. \quad (5.112)$$

Für das Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten gilt

$$2\mu_{d,\text{konst}} = \alpha_0, \quad (5.113)$$

sodass durch Gleichsetzen für eine festgelegte Frequenz ω_{ap} der Parameter α_0 durch

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_K \omega_{\text{ap}} + \frac{\alpha_M}{\omega_{\text{ap}}}}{1 - \alpha_M \alpha_K} \quad (5.114)$$

aus den zuvor geschätzten Rayleigh-Parametern abgeleitet werden kann. Für das Zener-Modell ergibt sich als Dämpfungsmaß

$$2\mu_{d,\text{Zener}} = \frac{\omega \tau (d - 1)}{1 + \omega^2 \tau^2 d}. \quad (5.115)$$

Durch Gleichsetzen kann nun der Parameter d in Abhängigkeit von τ bestimmt werden:

$$d = \frac{2\mu_{d,\text{Rayl}} + \omega_{\text{ap}} \tau_{\text{ap}}}{\omega_{\text{ap}} \tau (1 - \omega_{\text{ap}} \tau_{\text{ap}} 2\mu_{d,\text{Rayl}})}, \quad (5.116)$$

wobei für $\tau_{\text{ap}} = 1/\omega_{\text{ap}}$ gilt [Pri03]. Damit lässt sich der Ausdruck weiter zu

$$d = \frac{1 + 2\mu_{d,\text{Rayl}}}{1 - 2\mu_{d,\text{Rayl}}} \quad (5.117)$$

vereinfachen.

Die Arbeitspunktfrequenz kann für das Modell mit komplexen Konstanten und das Zener-Modell für die jeweiligen Eigenwerte (siehe Unterabschnitt 3.3.5) unterschiedlich bestimmt werden. Beispielhaft soll dies hier

5 Realisierung des inversen Verfahrens

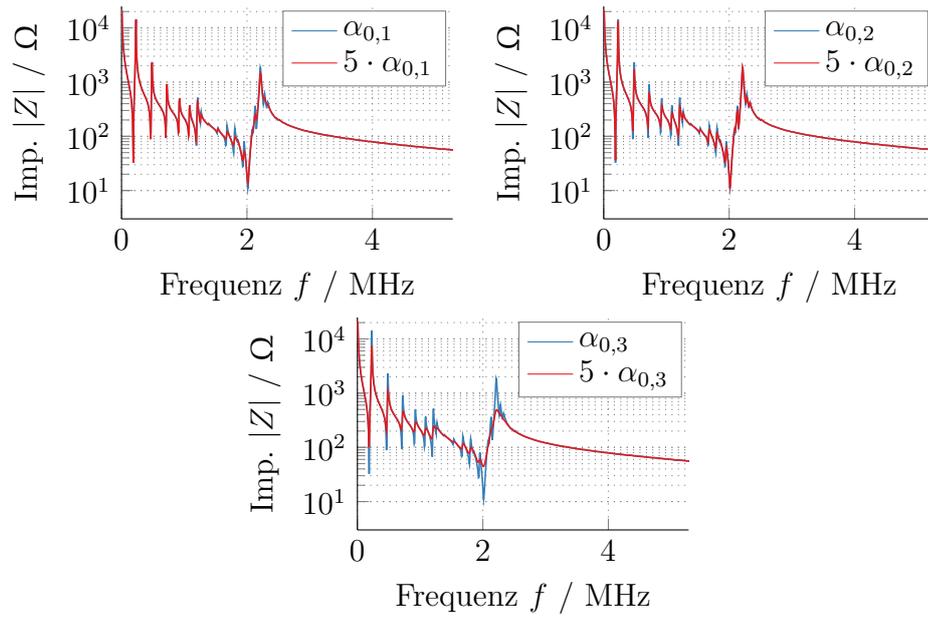


Abbildung 5.14: Variation der Dämpfungsparameter des Dämpfungsmodells mit komplexen Konstanten.

für das Modell mit konstanten Dämpfungsparametern dargelegt werden. Abbildung 5.14 zeigt die Impedanzen, bei denen jeweils die Parameter α_0 der unterschiedlichen Eigenwerte variiert werden. Hier wird deutlich, dass $\alpha_{0,1}$, welcher mit dem Eigenwert $\lambda_1 = c_{44}$ assoziiert ist, hauptsächlich im Bereich kurz vor der ersten Dickenresonanz und im Bereich der überlagerten Radialschwingungen wirksam wird. $\alpha_{0,2}$ hat hauptsächlich Auswirkungen auf die Radialresonanzen und $\alpha_{0,3}$ ist vor allem im Bereich der Dickenresonanz relevant. Dies entspricht erwartungsgemäß den Bereichen hoher Sensitivität der Materialparameter, die den jeweiligen Eigenwert bedingen. Damit sollen die Arbeitspunktkreisfrequenzen wie folgt festgelegt werden:

$$\omega_{\text{ap},1} = 2\pi \frac{f_{\text{res,di}}^{(1)} + f_{\text{res,rad}}^{(3)}}{2} \quad (5.118)$$

$$\omega_{\text{ap},2} = 2\pi f_{\text{res,rad}}^{(2)} \quad (5.119)$$

$$\omega_{\text{ap},3} = 2\pi f_{\text{res,di}}^{(1)} \quad (5.120)$$

Daraus lassen sich dann aus den geschätzten Rayleigh-Dämpfungsparametern die Parameter für die anderen Dämpfungsmodelle ableiten.

5.3.4 Bestimmung von Resonanzfrequenzen unter Berücksichtigung von Dämpfung

Die Bestimmung der Startwerte für die Optimierung basiert zu großen Teilen auf den Resonanzfrequenzen, welche aus der elektrischen Impedanz bestimmt werden. Der Begriff der Resonanzfrequenz ist aber nur bei ungedämpften Systemen eindeutig definiert. Im gedämpften Fall können unterschiedliche Frequenzen, welche in Tabelle 5.1 beschrieben und in Abbildung 5.15 dargestellt werden, als Resonanzfrequenz betrachtet werden. Es gilt stets $f_m \leq f_s \leq f_r \leq f_a \leq f_p \leq f_n$. Für den ungedämpften Fall gilt $f_m = f_s = f_r \leq f_a = f_p = f_n$. Damit ergibt sich für die Schätzung der Startwerte die Frage danach, welche Frequenz als f_{res} und f_{anti} genutzt werden soll. In standardisierten Verfahren werden an diesen Stellen die Serien- und Parallelresonanzfrequenzen empfohlen [IEEE87]. In Anbetracht von Gleichung 5.42 lässt sich jedoch auch argumentieren, dass die (Anti-)Resonanzfrequenz durch $(\max\{\omega \operatorname{Re}\{Z\}\}) \max\{\operatorname{Re}\{\frac{1}{\omega Z}\}\}$

Tabelle 5.1: Charakteristische Frequenzen eines Impedanzverlaufs

Name	Bezeichnung	Bedeutung
Minimalimpedanzfrequenz	f_m	$\min\{ Z \}$
Serienresonanzfrequenz	f_s	$\max\{\operatorname{Re}\{\frac{1}{Z}\}\}$
Resonanzfrequenz	f_r	$\operatorname{Im}\{\frac{1}{Z}\} = 0$
Antiresonanzfrequenz	f_a	$\operatorname{Im}\{Z\} = 0$
Parallelresonanzfrequenz	f_p	$\max\{\operatorname{Re}\{Z\}\}$
Maximalimpedanzfrequenz	f_n	$\max\{ Z \}$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

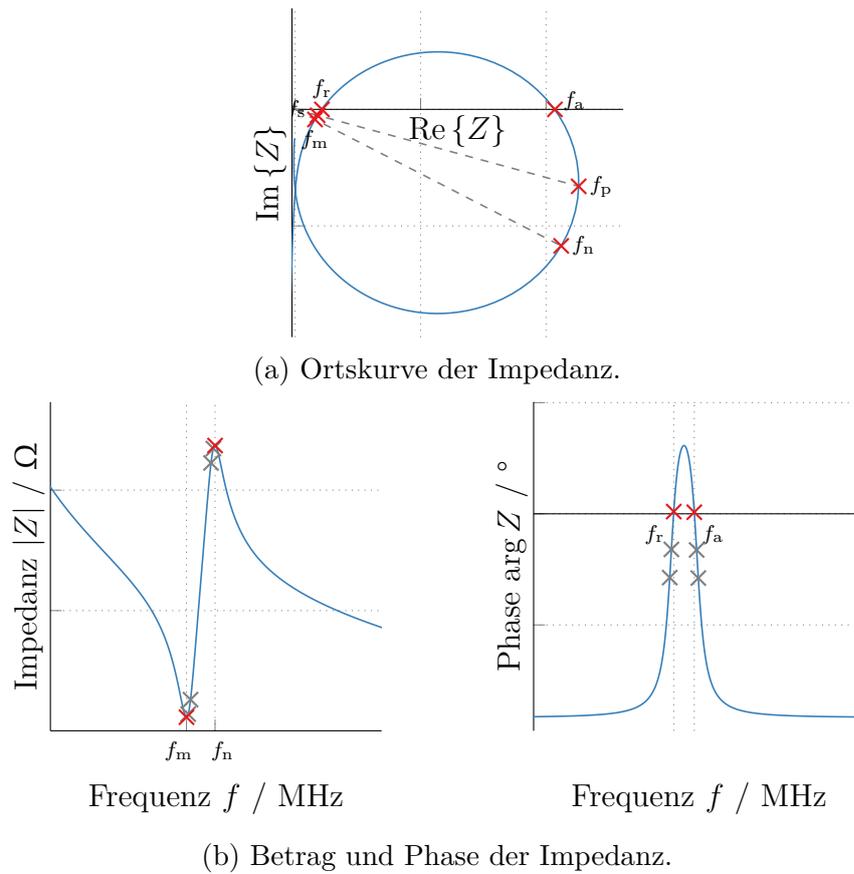


Abbildung 5.15: Resonanzfrequenzen bei einer gedämpften Impedanz.

bestimmt werden kann [She92]. Hier dient dies vor allem der numerischen Stabilität, sodass gilt:

$$f_{\text{res}} = \arg \max \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\omega Z} \right\} \right\} \quad (5.121)$$

$$f_{\text{anti}} = \arg \max \{ \omega \operatorname{Re} \{ Z \} \} . \quad (5.122)$$

5.3.5 Nach-Optimierung der Startwerte

Die ersten Schätzungen der Startwerte, welche zunächst auf einem isotropen Materialmodell basieren, können vorab noch durch eine Nach-Optimierung verbessert werden [Fel18]. Ziel dieser Startwertoptimierung ist dabei nicht eine möglichst adäquate Bestimmung der Materialparameter, sondern eine rechenzeitminimierte und simple Annäherung an die gemessene Impedanz, sodass die folgende Optimierung bereits in der Nähe des gesuchten Minimums startet. Daher wird für die Simulation eine Zeitbereichssimulation (ausschließlich mit Rayleigh-Dämpfung) genutzt, da diese mit einem einmaligen Simulationsdurchlauf die gesamte Impedanz liefert. Diese vereinfachte Startwert-Optimierung basiert weiterhin hauptsächlich auf einzelnen Resonanzfrequenzen. Dazu wird zunächst eine Sensitivitätsstudie durchgeführt, die die Abhängigkeit unterschiedlicher Resonanzstellen von einzelnen Materialparametern darstellt. Ausgegangen wird dabei von einem simulierten Impedanzverlauf, welcher mit den Materialparametern in einem Arbeitspunkt simuliert wird. Diese Materialparameter werden dann jeweils um $\pm 5\%$ variiert, um den Einfluss einzelner Parameter abzuschätzen. Dies ist beispielhaft für den Parameter c_{33}^E in Abbildung 5.16 zu sehen. Es ist zu erkennen, dass c_{33}^E sehr starken Einfluss auf die Lage der Dickenresonanz

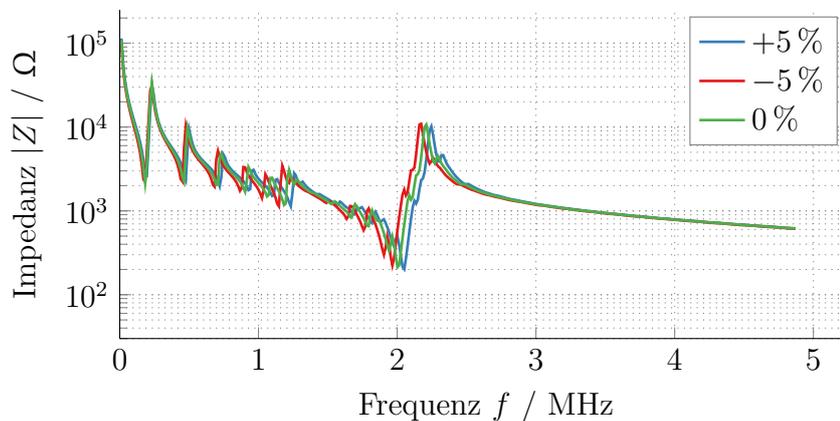


Abbildung 5.16: Einfluss der Variation von c_{33}^E auf die Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden.

5 Realisierung des inversen Verfahrens

Tabelle 5.2: Einfluss der einzelnen Materialparameter auf den Impedanzverlauf. –: kein Einfluss, ◦: nur geringer Einfluss.

	1. Radialresonanz	<i>n</i>. Radialresonanz	Dickenresonanz
c_{11}^E	f_{res}	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	–
c_{12}^E	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	–	–
c_{13}^E	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	–
c_{33}^E	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	$f_{\text{res}}, Z(f_{\text{res}}) $	f_{res}
c_{44}^E	–	–	–
ε_{11}^S	–	–	–
ε_{33}^S	Verschiebung des gesamten Impedanzverlaufes nach oben/unten		
e_{15}	–	–	–
e_{31}	◦	◦	–
e_{33}	◦	◦	f_{anti}
α_M	$ Z(f_{\text{res}}) $	$ Z(f_{\text{res}}) $	–
α_K	–	–	$ Z(f_{\text{res}}) $

und -antiresonanz hat, jedoch auch die Radialresonanzen beeinflusst. Die Ergebnisse dieser Sensitivitätsstudien sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Einige Parameter haben offensichtlich keinen oder nur sehr geringen Einfluss auf den Impedanzverlauf. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass sich durch die vollflächige Elektrodenform ein fast ausschließlich homogenes Feld in z -Richtung einstellt.

Zur Verbesserung der Startwerte kann nun vor der eigentlichen Optimierung eine Startwert-Optimierung genutzt werden. Mit Hilfe eines Gradientenverfahrens können die Resonanzfrequenzen des simulierten Impedanzverlaufes auf die des gemessenen geschoben werden [Pér10]. Allgemein sieht dieses für einen beliebigen Parameter p wie folgt aus:

$$p_{n+1} = p_n + \mu_{\text{opt}}(f_{\text{res}}^{\text{mes}} - f_{\text{res}}^{\text{sim}}). \quad (5.123)$$

Die Schrittweite μ_{opt} bestimmt sich, indem im Arbeitspunkt der Materialparameter (das heißt die Schätzung der Materialparameter aus dem

isotropen Modell) durch einen Zentralen Differenzenquotienten die Sensitivität bestimmt wird. Dazu wird eine Simulation mit um μ_{FD} erhöhten beziehungsweise erniedrigten Materialparametern p^+ und p^- durchgeführt und die jeweilige Resonanzfrequenz f^+ und f^- bestimmt. Die Schrittweite μ_{opt} ergibt sich dann durch

$$\mu_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot \mu_{\text{FD}} \cdot p}{f^+ - f^-}. \quad (5.124)$$

Diese Schrittweite wird zu Beginn einmal berechnet, bleibt während der Optimierung jedoch konstant, um den Rechenaufwand gering zu halten. Sollte sich für μ_{FD} kein sinnvoller Gradient ergeben, wird dieser halbiert und eine erneute Gradientenberechnung durchgeführt.

Neben der Optimierung der Resonanzfrequenzen können noch weitere Parameter durch analytische Zusammenhänge verbessert werden. Zum einen kann der Parameter c_{44} mit Hilfe empirischer Betrachtungen ([Rau12; The98]) für viele transversal isotrope Materialien abgeschätzt werden:

$$c_{44} = \frac{\nu_{\text{L}}}{\left| \frac{1+2\sqrt{2}\nu_{\text{L}}}{E_{\text{L}}} - \frac{1-\nu_{\text{T}}}{E_{\text{L}}} \right|} \quad (5.125)$$

mit der longitudinalen (transversalen) Poissonzahl ν_{L} (ν_{T}) und dem Elastizitätsmodul E_{L} (E_{T}), welche aus den zuvor optimierten Elementen der Steifigkeitsmatrix wie folgt berechnet werden können:

$$E_{\text{L}} = c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}} \quad (5.126)$$

$$E_{\text{T}} = \left((c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2 \right) \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11}c_{33} + c_{13}^2} \quad (5.127)$$

$$\nu_{\text{L}} = \frac{c_{13}}{c_{11} - c_{12}} \quad (5.128)$$

$$\nu_{\text{T}} = \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}. \quad (5.129)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

Der Parameter ε_{33}^S kann durch eine analytische Betrachtung der Kapazität bei der Frequenz $f_{\text{kap}} = 0,5 \cdot (f_{\text{res,di}} - f_{\text{anti,di}})$ bestimmt werden. Die frequenzabhängige Impedanz einer Kapazität ist

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_0^T} \quad (5.130)$$

$$= \frac{h_{\text{pc}}}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{33}^S A}. \quad (5.131)$$

Geht man davon aus, dass an der Stelle f_{kap} allein der Einfluss der Kapazität und nicht der der Resonanzen sichtbar wird, lässt sich ε_{33}^S bestimmen durch

$$\varepsilon_{33}^S = \frac{h_{\text{pc}}}{\omega_{\text{kap}} A |Z(\omega_{\text{kap}})|}, \quad (5.132)$$

mit $\omega_{\text{kap}} = 2\pi f_{\text{kap}}$. Als Letztes wird der Wert für e_{33} mit Hilfe der optimierten Startwerte erneut berechnet. Dies erfolgt direkt über die erste Radialantiresonanzfrequenz. Dazu wird aus der radialen Antiresonanzbedingung (Gleichung 5.94) $k^{\text{p}2}$ bestimmt werden. Daraus ergibt sich dann mit Gleichung 5.91 und Gleichung 5.66

$$e_{31}^{\text{p}} = \sqrt{k^{\text{p}2} \cdot c_{11}^{\text{p}} \cdot \varepsilon_{33}^{\text{p}}} \quad (5.133)$$

$$e_{31} = -e_{31}^{\text{p}} + \frac{e_{33}^{\text{E}} c_{13}^{\text{E}}}{c_{33}^{\text{E}}}. \quad (5.134)$$

Die Reihenfolge der mehrstufigen Optimierung beziehungsweise analytischen Berechnung kann Einfluss auf das Ergebnis haben. Daher ist es das Ziel, diese gut begründet zu wählen. Der Parameter c_{33}^{E} ist beispielsweise so gut wie allein verantwortlich für die Verschiebung der Dickenresonanzfrequenz. Daher sollte dieser zu erst optimiert werden. Würde man zum Beispiel vorher c_{13}^{E} optimieren, würde die danach folgende Optimierung von c_{33}^{E} die vorher in Übereinstimmung gebrachten Radialresonanzfrequenzen wieder verstimmen. Ebenso sollte c_{13}^{E} vor c_{12}^{E} optimiert werden, da dieser mehr Resonanzfrequenzen beeinflusst. Auch die analytische Bestimmung von ε_{33} beeinflusst die Dickenantiresonanzfrequenz stark, sodass diese Be-

Tabelle 5.3: Reihenfolge der Optimierungsschritte der Nach-Optimierung der Startwerte.

	Parameter	Bestimmung durch
1	ε_{33}^S	Analytische Berechnung
2	c_{33}^E	Erste Dickenresonanz
3	c_{13}^E	Zweite Radialresonanz
4	c_{12}^E	Erste Radialresonanz
5	c_{44}^E	Analytische Berechnung
6	e_{33}	Erste Dickenantiresonanz
7	e_{31}	Analytische Berechnung
8	α_M	Impedanz an der ersten Radialresonanz
9	α_K	Impedanz an der ersten Dickenresonanz

rechnung zumindest vor der Optimierung von e_{33} umzusetzen ist. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die in Tabelle 5.3 aufgezeigte Optimierungsreihenfolge. Damit können alle Parameter außer ε_{11}^S , c_{11}^E und e_{15} durch eine einfache Optimierung verbessert werden.

Für die nachfolgende Optimierung mit Hilfe der Ringelektrodenanordnung ergibt sich so ein guter Ausgangspunkt. Dies ist notwendig, da auch hier eine Optimierung auf einzelnen Frequenzbereichen genutzt werden soll, die erfordert, dass zugehörige Resonanzen in Messung und Simulation zumindest in den gleichen vorgegebenen Bereichen liegen. Ist dies nicht der Fall liegt die Resonanzfrequenz der simulierten Impedanz außerhalb des für die Zielfunktion genutzten Frequenzbereichs und wird nicht in die Optimierung mit einbezogen, sodass an dieser Stelle kein sinnvolles Optimierungsergebnis zu erwarten ist.

5.3.6 Evaluation des Startwertschätzers

Das Vorgehen zur Schätzung der Startwerte soll zunächst an einer simulierten Impedanz validiert werden. Dazu wird beispielhaft eine Simulation genutzt, bei der die Parametern des Beispielmaterials PIC255 (Abschnitt B.1)

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Startwert-Optimierung am Beispielmaterial PIC255.

		vorgegeb. Wert	Startwert		optimierter Startwert	
			Betrag	rel. Abw.	Betrag	rel. Abw.
c_{11}^E	GPa	119	121	1,72 %	121	1,72 %
c_{12}^E	GPa	84	99	17,84 %	97	15,4 %
c_{13}^E	GPa	83	99	19,26 %	86	4,13 %
c_{33}^E	GPa	117	121	3,46 %	120	2,68 %
c_{44}^E	GPa	21	11	-47,46 %	17,5	-16,5 %
ε_{11}^S	nF m ⁻¹	8,15	6,9	-15,06 %	6,53	-19,8 %
ε_{33}^S	nF m ⁻¹	6,58	6,9	5,21 %	6,53	-0,66 %
e_{15}	C m ⁻¹	12,09	9,66	-20,03 %	9,67	-20,03 %
e_{31}	C m ⁻¹	-6,03	-2,90	-51,9 %	-4,06	-32,7 %
e_{33}	C m ⁻¹	15,49	14,50	-6,38 %	14,95	-3,47 %
α_M	ms ⁻¹	126,7	347,55	174,3 %	82,644	-34,77 %
α_K	ns	0,6259	2,18	248,9 %	0,56	-10,49 %

vorgegeben werden. Die sich ergebenden Materialparameter nach der ersten Schätzung und der Startwert-Optimierung sowie die relativen Abweichungen sind in Tabelle 5.4 angegeben. Die dazugehörigen Impedanzen zeigt Abbildung 5.17. Es zeigt sich, dass durch die erste Startwertschätzung eine angemessene, jedoch verbesserungswürdige Übereinstimmung der Resonanzfrequenzen erreicht werden kann. Erst die entwickelte Startwert-Optimierung sorgt für eine augenscheinlich gute Übereinstimmung beider Impedanzen. Auch die Abweichung der Materialparameter ist bei den meisten Parametern gering. Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass für den hier betrachteten Fall vollflächiger Elektroden die Sensitivität der Impedanz auf einige Materialparameter relativ gering ist. Dadurch können diese Parameter relativ stark von den vorgegebenen Parametern des Beispielmaterials abweichen, wobei sich trotzdem eine gute Überein-

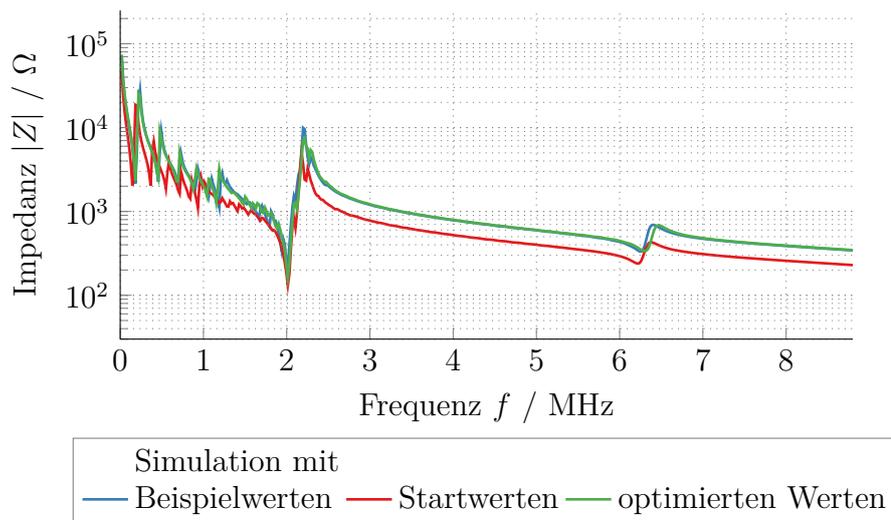


Abbildung 5.17: Ergebnisse der Startwert-Optimierung am Beispielmaterial PIC255.

stimmung zwischen den Impedanzen ergibt, was sich auch in den relativen Abweichungen in Tabelle 5.4 zeigt.

Für eine reale Messung an einer PIC255-Scheibe sind keine Abweichungen angebar, da die entsprechenden Parameter unbekannt sind. Jedoch ergeben auch hier die optimierten Startwerte eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation (siehe Tabelle 5.5 und Abbildung 5.18).

5 Realisierung des inversen Verfahrens

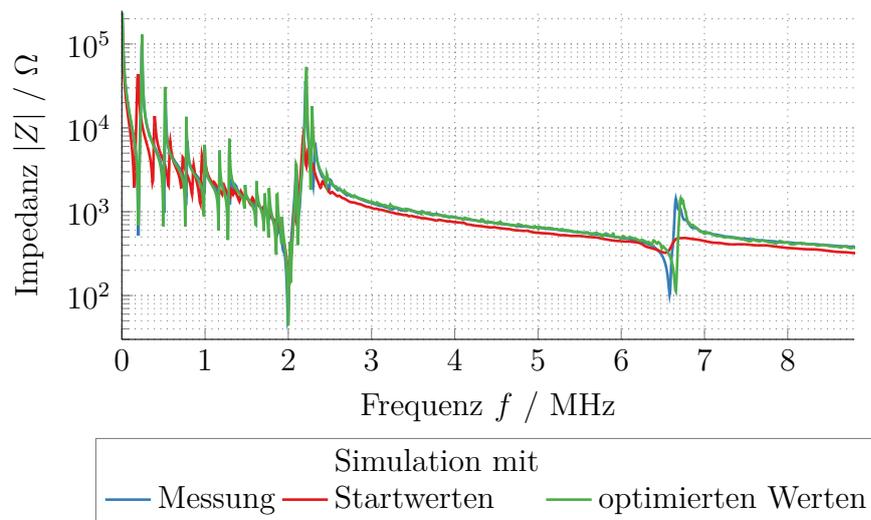


Abbildung 5.18: Ergebnisse der Startwert-Optimierung an einer PIC255-Scheibe.

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Startwert-Optimierung an einer PIC255-Scheibe.

		Startwert	optimierter Startwert
c_{11}^E	GPa	119	119
c_{12}^E	GPa	97	83
c_{13}^E	GPa	97	77
c_{33}^E	GPa	119	118
c_{44}^E	GPa	11	20
ε_{11}^S	nF m ⁻¹	7,03	6,12
ε_{33}^S	nF m ⁻¹	7,03	6,12
e_{15}	C m ⁻¹	10,14	10,16
e_{31}	C m ⁻¹	-3,04	-6,81
e_{33}	C m ⁻¹	15,20	15,20
α_M	s ⁻¹	91 624	30 767
α_K	ns	0,584	0,08

5.4 Sensitivitätsanalyse zur Entwicklung einer Optimierungsstrategie

Eine Unterteilung der Materialparameter in Teilmengen, welche separat auf ausgewählten Frequenzbereichen optimiert werden, hat sich bereits bei der Optimierung der Startwerte als sinnvoll erwiesen. Auch im Fall der Piezokeramik mit Ringelektroden zeigt sich, dass unterschiedliche Materialparameter zu teilweise ähnlichen Änderungen in der Impedanz führen, was hier als Quersensitivitäten bezeichnet wird. Dazu müssen zunächst durch eine ausführliche Sensitivitätsanalyse eine geeignete Optimierungsreihenfolge und eine geeignete Zuordnung von Frequenzbereichen zu den Materialparametern festgelegt werden.

Für eine gegebene Konstellation aus Radien lässt sich der Einfluss der einzelnen Materialparameter auf die sich ergebenden Impedanzen darstellen. Für die folgende Optimierung ist dabei nicht nur interessant, welche Parameter in welchen Frequenzbereichen eine hohe Sensitivität in der Impedanz aufweisen, sondern auch die Relation der Sensitivitäten einzelner Parameter untereinander. So stellt sich beispielsweise die Frage, in welchen Bereichen die Sensitivität eines einzelnen Parameters hoch ist und die der anderen gering, da hier eine Optimierung frei von Quersensitivitäten möglich ist. Genau wie in Unterabschnitt 5.3.5 soll auch hier eine Optimierungsstrategie gefunden werden, welche durch eine geschickte Reihenfolge der zu optimierenden Parameter auf einzelnen Frequenzbereichen die Quersensitivitäten zwischen den Materialparametern minimiert [Fel19a; Fel20a]. Tabelle 5.7 gibt eine Übersicht über die Sensitivitäten der drei Impedanzen Z_1 , Z_2 , Z_3 auf die einzelnen Materialparameter p_k in den jeweiligen Resonanzbereichen $\{f\}$ (Tabelle 5.6). Dabei gibt die Farbe die normierte Sensitivität

$$\gamma^{\text{norm}}(p_k, i, \{f\}) = \frac{\gamma(p_k, i, \{f\})}{\gamma^{\text{max}}(p_k)} \quad (5.135)$$

Tabelle 5.6: Unterteilung in Frequenzbereiche für das Beispielmaterial PIC255.

Nr.	Name	Frequenzbereich in MHz
0	1. Radialresonanz	0.125– 0.38
1	2. Radialresonanz	0.3875–0.6625
2	3. Radialresonanz	0.66875–0.875
3	3. Radial- bis 1. Dickenresonanz	0.88125–1.63125
4	1. Dickenresonanz	1.6375–2.1875
5	2. Dickenantiresonanz	2.19375–3.125
6	1. bis 2. Dickenresonanz	3.13125–5.6

mit

$$\Upsilon(p_k, i, \{f\}) = \frac{1}{|\{f\}|} \sum_{f \in \{f\}} |\partial_{p_k} \log_{10} (|Z_i(p_k, f)|)| \quad (5.136)$$

$$\Upsilon^{\max}(p_k) = \max_{i, \{f\}} \Upsilon(p_k, i, \{f\}) \quad (5.137)$$

an, wobei $\{f\}$ die Menge der Frequenzstützstellen im jeweiligen Frequenzbereich und $|\{f\}|$ die Mächtigkeit dieser Menge bezeichnen. Dabei wurde der Frequenzbereich auf maximal 5,6 MHz beschränkt. Damit ist die zweite Dickenresonanz nicht mehr mit einbezogen, da diese für die spätere Validierung genutzt werden soll. Ausgehend von dieser Darstellung wird eine Zuordnung der Parameter zu einzelnen Frequenzbereichen, in denen die Sensitivitäten besonders hoch sind, vorgenommen. Dabei ist jedoch nicht nur der Wert der normierten Sensitivität entscheidend. Zusätzlich zu beachten sind die Sensitivitäten der anderen Materialparameter in den jeweiligen Frequenzbereichen. Ziel ist es, möglichst Frequenzbereiche zu finden, in denen die Sensitivität auf nur einen Materialparameter hoch ist. Ist dies nicht möglich, sollten die ebenfalls sensitiven Materialparameter bereits vorher optimiert worden sein, sodass nur relativ geringe Störungen durch diese Parameter zu erwarten sind. Damit ergibt sich auch eine Reihenfolge

5.4 Sensitivitätsanalyse zur Entwicklung einer Optimierungsstrategie

Tabelle 5.7: Sensitivität der Impedanz bezüglich einzelner Materialparameter in unterschiedlichen Frequenzbereichen (siehe Tabelle 5.6).

	Z_1						Z_2						Z_3						γ^{\max}				
	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3		4	5	6	
c_{11}																							3.39
c_{12}																							0.22
c_{13}																							3.50
c_{33}																							2.57
c_{44}																							1.72
ϵ_{11}																							0.58
ϵ_{33}																							0.64
e_{15}																							0.73
e_{31}																							0.50
e_{33}																							0.86

der zu optimierenden Materialparameter. Zusätzlich darf die absolute Sensitivität nicht außer Acht gelassen werden. Höhere Sensitivitäten sollten zu Beginn optimiert werden, da hier kleine Parameteränderungen große Änderungen der Impedanzen hervorrufen, welche die Optimierungsschritte für die weniger sensitiven Materialparameter stärker beeinflussen.

Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass die Permittivitäten zu einem großen Teil die Impedanz nach oben beziehungsweise unten verschieben, wohingegen die anderen Parameter einen größeren Einfluss auf die Lage der Resonanzfrequenzen haben, was durch Tabelle 5.7 nicht abgebildet wird. Daher kann zunächst eine Optimierung der Permittivitäten vorgenommen werden, da diese recht unabhängig von allen sonstigen Parametern sind. Dazu wird ein Bereich gewählt, in dem möglichst wenig Resonanzstellen auftreten. Da c_{33}^E auf fast dem gesamten Frequenzbereich Z_3 sehr sensitiv ist, wird dieser im Anschluss optimiert, damit die folgenden Materialparameter davon unbeeinflusst bleiben. Die Parameter c_{11}^E , c_{12}^E und c_{13}^E beeinflussen hauptsächlich die radialen Resonanzen. Diese werden sortiert nach γ^{\max} optimiert. Der Parameter c_{44}^E hat die nächst höhere Sensitivität und beeinflusst stark Z_1 . Zum Schluss werden noch die Kopplungsfaktoren

5 Realisierung des inversen Verfahrens

Tabelle 5.8: Sortierte Sensitivität der Impedanz bezüglich einzelner Materialparameter in unterschiedlichen Frequenzbereichen (siehe Tabelle 5.6).

	Z_1						Z_2						Z_3						γ^{\max}							
	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3		4	5	6				
ε_{11}	■	■	■	■	■	■	●			■	■	■	■	■	■	■	■			■	■	■	■	■	■	0.58
ε_{33}	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	0.64
c_{33}			■	■	■	■				■	■	■	■	■	■	■	●	●	●	●	●	●	●	●	2.57	
c_{13}			■	■	■	■				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	3.50	
c_{11}			■	■	■	■				■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	3.39	
c_{12}	■							■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	0.22	
c_{44}			■	■	■	■	■			■	■	■	■	■	■	■			■	■	■	■	■	■	1.72	
e_{15}	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■			■	■	■	■	■	■	0.73	
e_{31}			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	0.50	
e_{33}			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	0.86	

optimiert, da hier im Vergleich geringere maximale Sensitivitäten vorliegen. Die hier beschriebene Reihenfolge und Zuordnung der Frequenzbereiche ist in Tabelle 5.8 dargestellt. Diese Zuordnung und Reihenfolge wird für alle im Folgenden betrachteten Materialien angewendet. Dies ist gerechtfertigt, da der prinzipielle Einfluss der Materialparameter auf die einzelnen Resonanzfrequenzen zumindest im für Piezokeramiken üblichen Bereich gleich ist [Sch10]. Lediglich die Lage der Resonanzfrequenzbereiche wird entsprechend der Impedanzmessung angepasst.

Dieses Vorgehen ist – wie im folgenden Kapitel gezeigt wird – für unterschiedliche piezokeramische Materialien valide. Voraussetzung dafür ist das transversal isotrope Materialverhalten, welches jedoch für piezokeramische Werkstoffe immer angenommen werden kann. Andere piezoelektrische Materialien können jedoch andere Symmetrien aufweisen, wodurch sich auch die Besetzung der Materialmatrizen ändert und sich ein anderer Materialparametersatz ergibt. Es kann davon ausgegangen werden, dass die entwickelte Optimierungsstrategie für weiche Piezokeramiken, welche

typischerweise in sensorischen Anwendungen zum Einsatz kommen, gute Ergebnisse liefert.

5.5 Zusammenfassung der entwickelten Optimierungsstrategie

Die Bestimmung der Materialparameter an einem einzelnen Probekörper erfolgt im inversen Verfahren, da die angepasste Elektrodenstruktur nicht mehr hinreichend durch analytische Näherungen gelöst werden kann. Daher kommt hier ein Optimierungsverfahren zum Einsatz, welches die Materialparameter so anpasst, dass gemessene und simulierte Impedanz möglichst gut im Sinne einer Zielfunktion übereinstimmen. Als Zielfunktion wird hier die summierte quadratische Abweichung der logarithmierten Impedanzbeträge

$$J = \left\| \sum_{i=1}^3 \log_{10} (|Z_i^{\text{sim}}(\omega, \mathbf{p})|) - \log_{10} (|Z_i^{\text{meas}}(\omega)|) \right\|^2 \quad (5.138)$$

gewählt. Diese stellt sich bereits für ähnliche Fragestellungen als besonders robust heraus [openCFS20; Cao08]. Zusätzlich werden die Materialparameter für die Optimierung durch ihre jeweilige Größenordnung skaliert, damit alle zu optimierenden Parameter einen etwa gleichen Betrag aufweisen [Jur19]. Mögliche Grenzen für die Optimierung werden weitestgehend vermieden und nur soweit eingeführt, dass sie dafür sorgen, dass alle Parameter positiv sind (beziehungweise e_{31} negativ und $d_i > 1$), um ein Mindestmaß an physikalischer Sinnfälligkeit zu gewährleisten. Als Optimierungsalgorithmus kommt ein *Trust-Region*-Verfahren zum Einsatz, dessen Implementierung im Python-Paket *scipy* realisiert ist [Vir20; Bra99].

Ausgehend von gefundenen Startwerten kann dann das inverse Problem gelöst werden. Die dazu entwickelte Optimierungsstrategie zur Bestimmung der Materialparameter im inversen Verfahren basiert auf einem mehrstufigen Verfahren. Dabei wird zunächst eine Startwertschätzung und

5 Realisierung des inversen Verfahrens

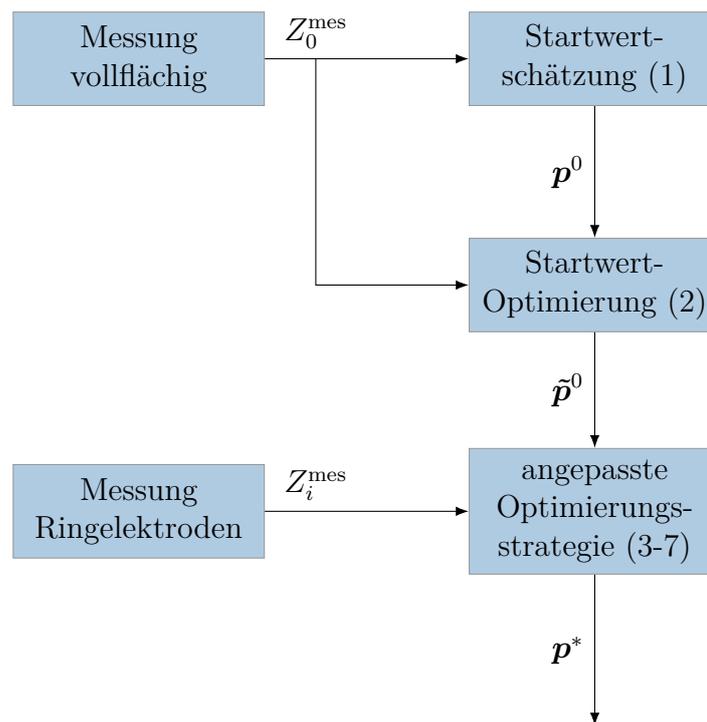


Abbildung 5.19: Optimierungsstrategie zur Bestimmung piezoelektrischer Materialparameter.

-optimierung auf der Piezokeramikscheibe mit vollflächigen Elektroden realisiert. Danach werden basierend auf der vorangehenden Sensitivitätsanalyse einzelne Materialparameter auf einzelnen Frequenzbereichen der Impedanzen der Piezokeramik mit Ringelektroden optimiert, um Quersensitivitäten zu eliminieren. Nach zweimaligem Durchlauf dieser Teiloptimierungen werden zunächst ausschließlich die Dämpfungsparameter auf den je nach Dämpfungsmodell jeweils sensitiven Frequenzbereichen optimiert. Im Anschluss erfolgt eine Optimierung auf den gesamten Impedanzen zunächst ohne und dann mit Dämpfungsparametern.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Vorgehen für die Optimierung der Materialparameter, welche in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben und in Abbildung 5.19 dargestellt ist:

5.5 Zusammenfassung der entwickelten Optimierungsstrategie

1. Startwertschätzung an einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden
2. Optimierung der Startwerte an einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden
3. Erste Optimierung der Materialparameter an einer Piezokeramik mit Ringelektroden nach folgender Reihenfolge auf Teilfrequenzbereichen (vgl. Tabelle 5.8):
 $(\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{11}^S), (c_{33}^E), (c_{13}^E), (c_{11}^E), (c_{12}^E), (c_{44}^E), (e_{15}), (e_{31})$
4. Zweite Optimierung der Materialparameter an einer Piezokeramik mit Ringelektroden
5. Optimierung der Dämpfungsparameter auf den jeweiligen Frequenzbereichen
6. Optimierung der Steifigkeits-, Permittivitäts- und Kopplungsparameter über den gesamten Frequenzbereich
7. Optimierung aller Materialparameter (inklusive Dämpfungsparameter) über den gesamten Frequenzbereich

Die wichtigsten Elemente der einzelnen Optimierungsphasen sollen hier noch einmal in Erinnerung gerufen werden:

1. Startwertschätzung an einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden

Die Startwertschätzung basiert auf analytischen Näherungen und kann aus den Resonanzfrequenzen der piezokeramischen Scheibe gewonnen werden:

$$c_{33}^D = 4\rho f_{\text{anti,di}}^2 h_{\text{pc}}^2 \quad (5.139)$$

$$k_t^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_{\text{res,di}}}{f_{\text{anti,di}}} \tan\left(\frac{\pi(f_{\text{anti,di}} - f_{\text{res,di}})}{f_{\text{anti,di}}}\right) \quad (5.140)$$

$$f_{\text{ap}} = \frac{f_{\text{res,rad}}^{(2)}}{f_{\text{res,rad}}^{(1)}} \quad (5.141)$$

$$\nu_1^P = -1,236 f_{\text{ap}}^3 + 11,160 f_{\text{ap}}^2 - 34,476 f_{\text{ap}} + 36,262 \quad (5.142)$$

5 Realisierung des inversen Verfahrens

$$c_{33}^E = 4(1 - k_t^2)\rho f_{\text{anti,di}}^2 h_{\text{pc}}^2 \quad (5.143)$$

$$\eta = -0,227f_{\text{ap}}^3 + 2,23f_{\text{ap}}^2 - 7,898f_{\text{ap}} + 11,529 \quad (5.144)$$

$$\eta_{\text{anti,rad}} = \eta_{\text{res,rad}} \left(1 + \frac{f_{\text{anti,rad}}^{(1)} - f_{\text{res,rad}}^{(1)}}{f_{\text{res,rad}}^{(1)}} \right) \quad (5.145)$$

$$k_p^2 = \frac{\mathcal{J}_1(\eta_{\text{anti,rad}}) + \nu_1^p - 1}{\mathcal{J}_1(\eta_{\text{anti,rad}}) - 2} \quad (5.146)$$

$$\varepsilon_{33}^T = \frac{C_0 h_{\text{pc}}}{\pi r_{\text{pc}}^2} \quad (5.147)$$

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) (1 - k_t^2) \quad (5.148)$$

$$e_{33} = k_t \sqrt{c_{33}^D \varepsilon_{33}^S} \quad (5.149)$$

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{f_{\text{anti,di}}^2 - f_{\text{res,di}}^2}{f_{\text{anti,di}}^2} \quad (5.150)$$

$$Q_{\text{mech}} = (2\pi f_{\text{res,di}} Z(f_{\text{res,di}}) C_0 k_{\text{eff}}^2)^{-1}. \quad (5.151)$$

2. Optimierung der Startwerte an einer Piezokeramik mit vollflächigen Elektroden

Die Optimierung der Startwerte beruht darauf, dass ausschließlich Resonanzfrequenzen betrachtet werden und in Übereinstimmung mit der Messung gebracht werden. Die Zuordnung von Parametern und Resonanzfrequenzen ist in Tabelle 5.3 zu finden.

3. Erste Optimierung der Materialparameter an einer Piezokeramik mit Ringelektroden

Für die Optimierung der Materialparameter wird nun die Anordnung mit Ringelektroden betrachtet. Diese kann entweder durch Ablation auf der selben Piezokeramik aufgebracht werden, welche auch für die Startwertschätzung genutzt wurde oder mit einer Piezokeramik aus der gleichen Charge durchgeführt werden, da die Unterschiede der Materialparameter innerhalb einer Charge sehr gering sind. Die Zuordnung von Impedanzen, Frequenzbereichen und Materialparametern

5.5 Zusammenfassung der entwickelten Optimierungsstrategie

ist in Tabelle 5.8 zu finden. Aufgrund der geringen Sensitivität von e_{15} kann es vorteilhaft sein, hier statt des ausgewählten Frequenzbereichs den gesamten Bereich zu nutzen. Die Reduktion der Freiheitsgrade für jede Einzeloptimierung verringert dabei die Quersensitivitäten. Hier wird die Anzahl der Optimierungsschritte auf 20 begrenzt.

4. Zweite Optimierung der Materialparameter an einer Piezokeramik mit Ringelektroden

Hier wird Schritt 3 mit der gleichen Intention wiederholt. Die Anzahl der Optimierungsschritte ist auf lediglich 10 begrenzt.

5. Optimierung der Dämpfungsparameter

Für die Dämpfungsmodelle sind die jeweiligen Dämpfungsparameter für unterschiedliche Arbeitspunktfrequenzen gewählt (siehe Gleichung 5.118–Gleichung 5.120). Dementsprechend werden auch die Frequenzbereiche gewählt, auf denen die einzelnen Materialparameter optimiert werden.

Rayleigh-Dämpfung:

α_M : Erste bis dritte Radialresonanz

α_K : Erste Dicken(anti-)resonanz

Komplexe Konstanten:

α_1 : Bereich zwischen dritter Radialresonanz und erster Dickenantiresonanz

α_3 : Erste Dicken(anti-)resonanz

α_2 : Erste bis dritte Radialresonanz

Zener-Modell:

τ_1, d_1 : Dritte Radialresonanz bis erste Dickenantiresonanz

τ_3, d_3 : Erste Dicken(anti-)resonanz

τ_2, d_2 : Erste bis dritte Radialresonanz

6. Optimierung der Steifigkeits-, Permittivitäts- und Kopplungsparameter

Alle Materialparameter (mit Ausnahme der Dämpfungsparameter) werden über alle Impedanzen und Frequenzbereiche bis ca. 5,6 MHz optimiert.

7. Optimierung aller Materialparameter

Alle Materialparameter werden über alle Impedanzen und Frequenzbereiche bis ca. 5,6 MHz optimiert.

Damit ergibt sich ein robustes Optimierungsverfahren, welches für unterschiedliche Materialien ein gutes Optimierungsergebnis liefert. Die mit diesem Vorgehen erzielten Resultate werden im folgenden Kapitel betrachtet.

Materialparameter- bestimmung im inversen Verfahren

6

Die Bestimmung der Materialparameter soll nach dem oben beschriebenen Verfahren nun Anwendung finden. Um die Konvergenz des Optimierungsalgorithmuses einschätzen zu können, wird das Verfahren zunächst benutzt, um die Parameter simulierter Impedanzverläufe zurückzugewinnen. Erst im Anschluss daran, wird das Verfahren für gemessene Impedanzen angewandt. Auf Basis dieser Messungen kann dann auch die Validität unterschiedlicher Dämpfungsmodelle untersucht werden.

6.1 Betrachtung simulierter Beispielmaterialien

Das oben beschriebene Vorgehen soll nun genutzt werden, um einen vollständigen Materialparametersatz aus drei Impedanzmessungen an einer scheibenförmigen Piezokeramik mit Ringelektroden zu bestimmen. Zur Validierung des Verfahrens wird als Messung zunächst eine simulierte Impedanz genutzt, damit die zu Grunde liegenden Parameter \mathbf{p}^{opt} bekannt sind. Da hier jegliche Messabweichungen vernachlässigt werden, ist ein übermäßig gutes Konvergenzverhalten zu erwarten. Dies wird im englischsprachigen Raum als *inverse crime* bezeichnet. Dieses Vorgehen, für das inverse Verfahren eine ideale, simulierte „Messung“ anzunehmen, soll zumeist vermieden werden, da es sich hier um in der Realität nicht erreichbare ideale Bedingungen handelt, kann jedoch zur Analyse des Optimierungsverhaltens sinnvoll sein [Wir04; Rup11b].

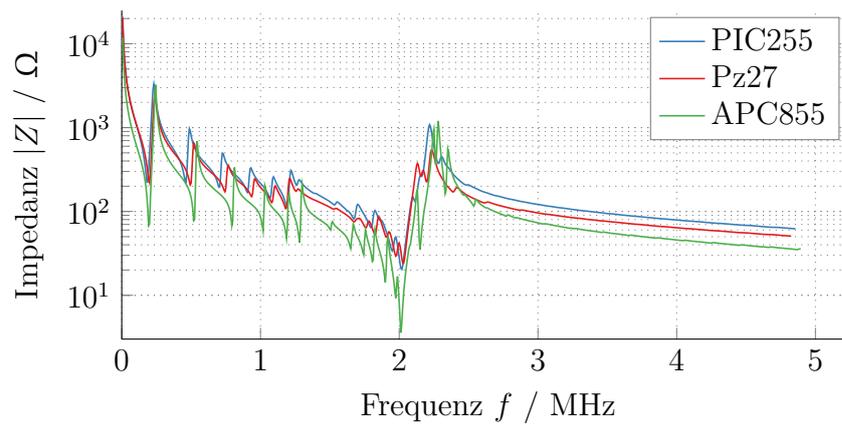


Abbildung 6.1: Impedanz der Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden aus Beispielmaterien.

6.1.1 Parameteridentifikation unterschiedlicher Materialien

Im Folgenden soll die Identifikation der Materialparameter an unterschiedlichen Materialien dargestellt werden. Dazu werden die Beispielmaterien aus Anhang B verwendet. Die simulierten Impedanzen einer Scheibe (Dicke: 1 mm, Radius: 5 mm) der Beispielmaterien PIC255, Pz27 und APC855 mit vollflächigen Elektroden sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Bei allen Materialien handelt es sich um weiche Piezokeramiken auf Basis von Blei-Zirkonat-Titanat (PZT).

PIC255

PIC255 von PI Ceramic GmbH, Lederhose, Deutschland ist ein auf Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) basierendes Keramikmaterial. Es gehört zu den weichen Piezokeramiken, was bedeutet, dass es sich durch die relativ hohe Domänenbeweglichkeit leichter polarisieren lässt. Es ist vor allem in sensorischen Anwendungen zu finden. Es zeichnet sich durch eine niedrige mechanische Güte und eine hohe Curie-Temperatur von 350 °C aus [PI19].

6.1 Betrachtung simulierter Beispielmaterialien

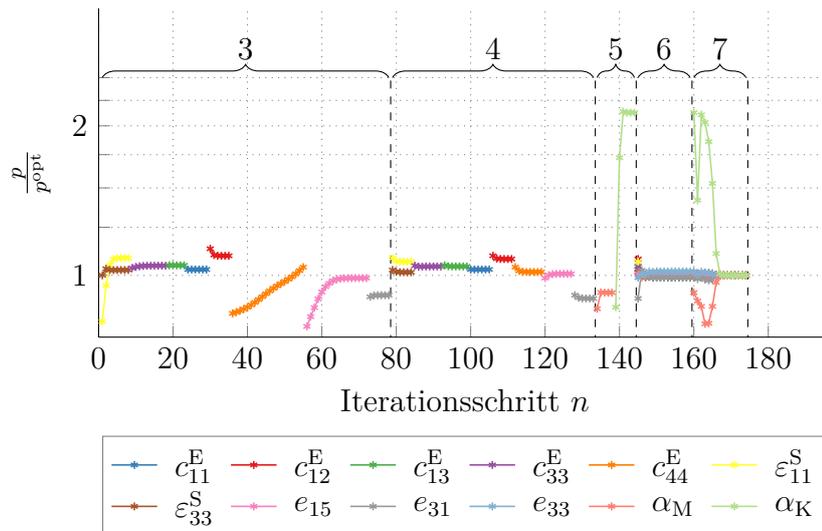


Abbildung 6.2: Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmaterial PIC255.

Die simulierte Impedanz der vollflächigen Piezokeramik ist im Vergleich zu den anderen untersuchten Materialien in Abbildung 6.1 dargestellt. Abbildung 6.2 zeigt den Verlauf der Materialparameter in den einzelnen Phasen der Optimierung. Es zeigt sich, dass mit der angenommenen Optimierungsstrategie alle Materialparameter mit beliebiger Genauigkeit rekonstruiert werden können. Zudem wird deutlich, dass die vorgenommene, stufenweise Optimierung (3 und 4) dafür sorgt, dass vor der Phase 5 alle Materialparameter in diesem Falle nicht mehr als 10% von den vorgegebenen Parametern des Beispielmaterials entfernt sind. Dies ermöglicht eine effiziente und konvergente Optimierung in den letzten beiden Schritten, so dass zum Ende der Optimierung die zugrunde liegenden Materialparameter zurückgewonnen werden können.

Pz27

Ferroperm Pz27 von Meggit, Kvistgaard, Dänemark ist eine häufig verwendete, ebenfalls weiche Piezokeramik auf PZT-Basis. Auch sie besitzt eine Curie-Temperatur von ca 350 °C und eine geringe mechanische Güte. Laut

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

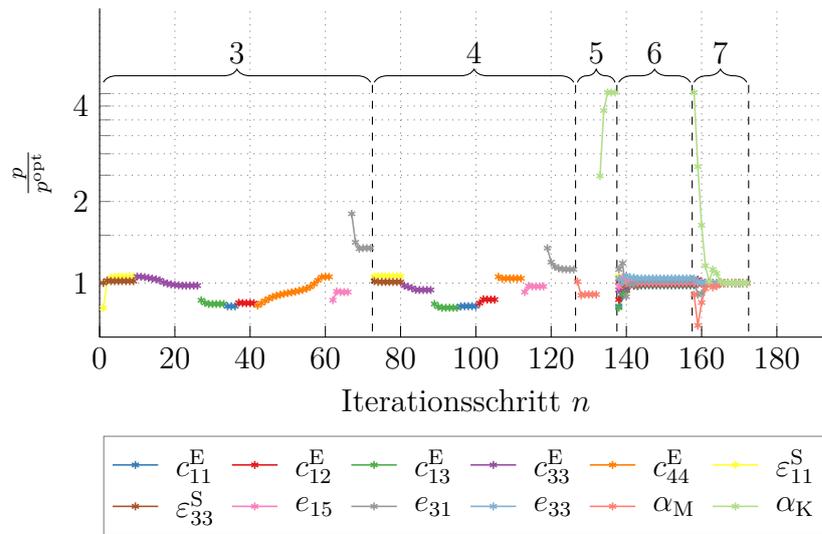


Abbildung 6.3: Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmaterial Pz27.

Hersteller ist sie besonders geeignet für die zerstörungsfreie Prüfung, als auch für Durchflussmesstechnik [Meg21].

Im Vergleich zu PIC255 zeigt sich in Abbildung 6.1 hauptsächlich die etwas höhere Kapazität und höhere Dämpfung. Ansonsten verhalten sich beide in der Impedanz sehr ähnlich. Bei der Optimierung zeigt sich hier noch stärker der Vorteil der Schritte 3 und 4, da beispielsweise der Parameter e_{31} , welcher durch den Startwertschätzer nicht besonders gut erfasst wurde, hier zunächst nah an den vorgegebenen Wert gebracht wird, bevor die Optimierung aller Parameter beginnt (siehe Abbildung 6.3).

APC855

APC855 von APC International, Ltd., Mackeyville, PA, USA hat im Vergleich eine etwas geringere Curie-Temperatur von 200 °C, dafür jedoch einen hohen Kopplungsfaktor. Vor allem die höhere Permittivität ist in Abbildung 6.1 zu erkennen. Damit ist dieses Material nach Herstellerangaben besonders geeignet für Drucksensoren, Hydrophone oder Beschleunigungssensoren [APC21].

6.2 Materialparameterbestimmung an einer PIC255 Keramik

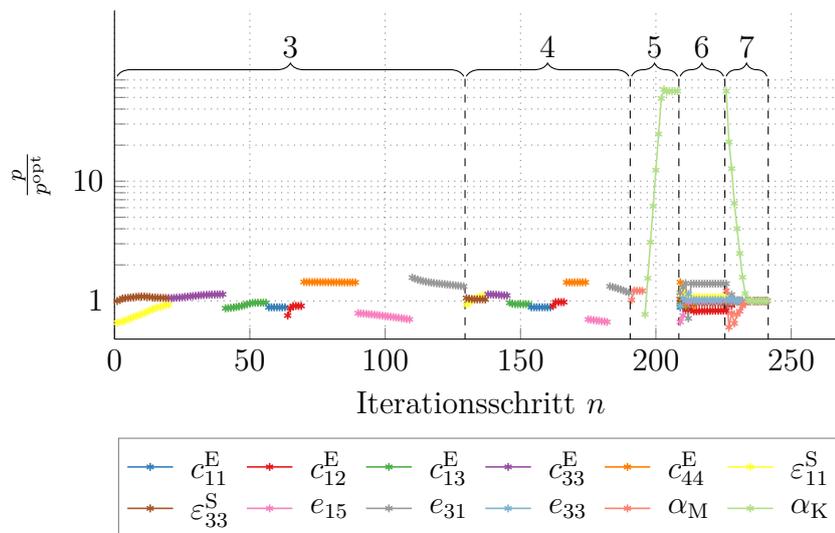


Abbildung 6.4: Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmateriale APC855.

Bei der Optimierung in Abbildung 6.4 fällt hier besonders auf, dass α_M in Phase 5 zunächst sehr stark erhöht wird. In diesem Falle ist dies notwendig, um lokale Minima zu überwinden. Vor allem im Bereich höherer Frequenzen, in dem α_M relevant ist, überlagern sich unterschiedlichste Resonanzen. Da das Verschieben einer solchen Resonanzstelle in der Impedanz zunächst zu größeren Werten der Zielfunktion führt, kann durch höhere Dämpfung zunächst der Optimierungsprozess vereinfacht werden. Problemlos wird die angehobene Dämpfung jedoch in den nächsten Schritten korrigiert, wobei dann hier vor allem c_{11}^E , c_{12}^E und c_{13}^E zu den richtigen Werten konvergieren.

6.2 Materialparameterbestimmung an einer PIC255 Keramik

Bei Impedanzmessungen an Piezokeramiken vom Typ PIC255 ist stets mit unvermeidbaren Messunsicherheiten und -abweichungen zu rechnen. Daher kann die gemessene Impedanz nicht vollkommen durch die Simulation dargestellt werden. Außerdem muss hier fertigungsbedingt leicht von der

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

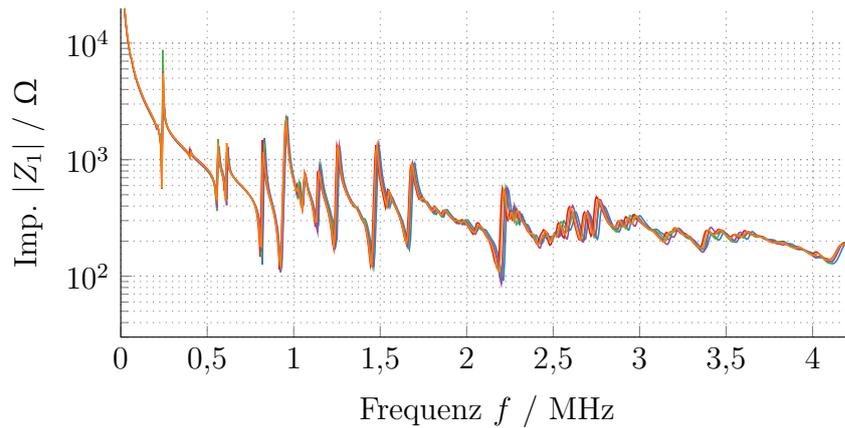


Abbildung 6.5: Beispielhafte Messungen von Z_1 an fünf unterschiedlichen PIC255 Piezokeramik-Proben mit Ringelektroden.

idealen Elektrodengeometrie abgewichen werden. Da die piezokeramischen Scheiben beim Aufbringen der Elektroden in eine Maske eingelegt werden, ergibt sich immer ein sogenannter Isorand, sodass am äußeren Rand keine Elektrode aufgebracht wird. Bei den Piezokeramiken mit vollflächiger Elektrode hat die Keramik zwar einen Durchmesser von 10 mm, die Elektrode jedoch nur von ca. 9,14 mm. Damit müssen auch die Radien für die ringförmigen Elektroden skaliert werden, sodass sich die gleiche Abweichung des äußeren Elektrodenradius ergibt und die weiteren Radien zu $\mathbf{r} = [3,74 \text{ mm}, 3,97 \text{ mm}, 3,97 \text{ mm}, 4,57 \text{ mm}]^t$ gewählt werden.

Um einen Eindruck von der Änderung der Impedanz für unterschiedliche Piezokeramiken der gleichen Charge zu vermitteln, sind in Abbildung 6.5 fünf Impedanzmessungen an einer Piezokeramik vom Typ PIC255 dargestellt. Es zeigen sich geringfügige Änderungen in der Impedanz, die hauptsächlich durch die herstellungsbedingten Abweichungen der Elektrodengeometrie zu erklären sind.

Das Verhalten während der Optimierung ist in Abbildung 6.6 dargestellt, wobei hier p^{opt} der Endwert der Optimierung ist. Die sich ergebenden Materialparameter sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die mit diesen Materialparametern simulierten Impedanzen sind im direkten Vergleich

6.2 Materialparameterbestimmung an einer PIC255 Keramik

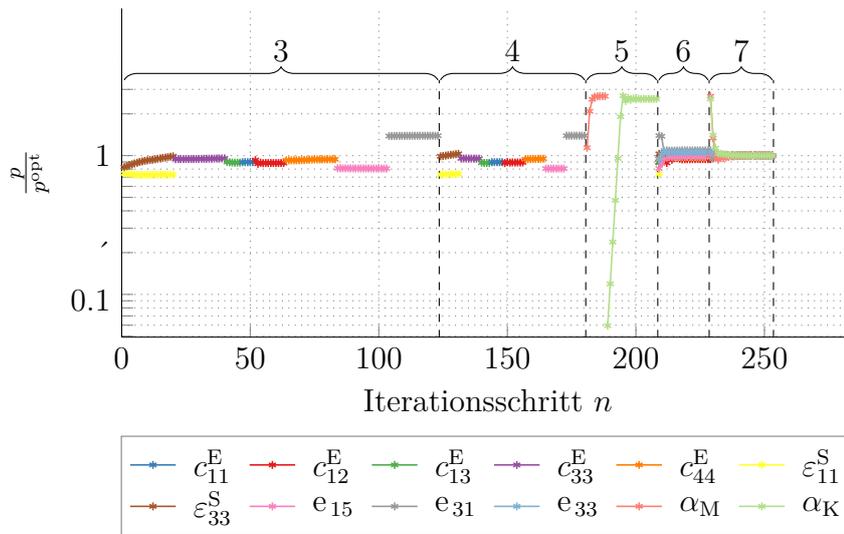


Abbildung 6.6: Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255.

mit den Messungen in Abbildung 6.7 dargestellt. Man erkennt, dass eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation erreicht werden kann. Der Bereich bis 2 MHz ist hier sehr gut abgebildet. Darüber hinaus ist erkennbar, dass die Resonanzfrequenzen zwar übereinstimmen, deren Ausprägung jedoch in Messung und Simulation große Unterschiede aufweist. Die angenommene Dämpfung scheint in diesem Bereich im Modell zu groß zu sein. Das genutzte Rayleigh-Dämpfungsmodell sorgt bei steigenden Frequenzen für eine immer weiter ansteigende Dämpfung. Typischerweise ist es damit gut geeignet das Dämpfungsverhalten in einem Arbeitspunkt abzubilden, versagt aber für breitbandige Betrachtungen, da hier außerhalb des Arbeitspunkts die Dämpfung stets unendlich wird (siehe auch Abbildung 3.6). Daher sollen im Folgenden nun unterschiedliche, alternative Dämpfungsmodelle untersucht werden.

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

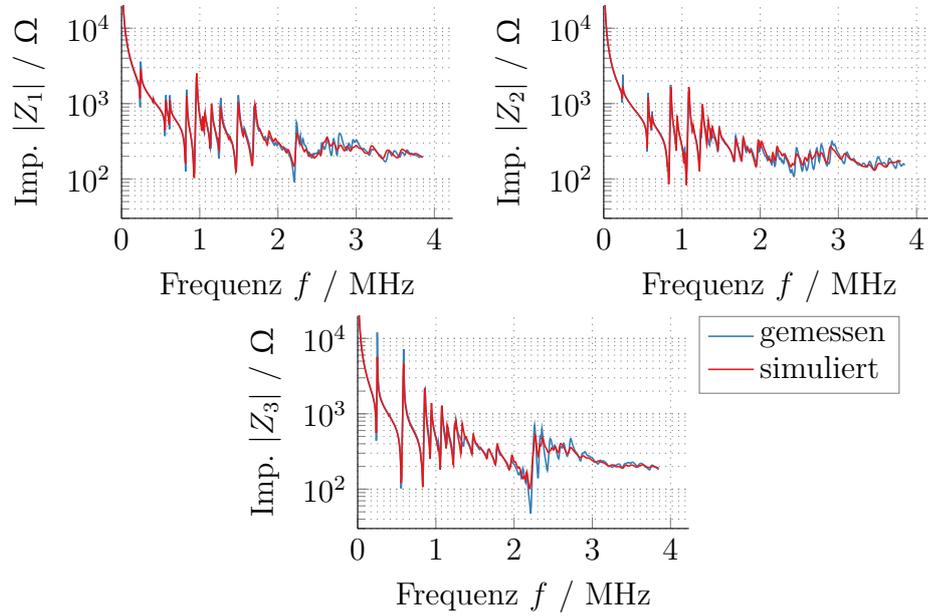


Abbildung 6.7: Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Rayleigh-Dämpfung.

Tabelle 6.1: Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Rayleigh-Dämpfung.

c_{11}	132,7 GPa	ϵ_{11}	8,22 nF m ⁻¹	α_M	26 985 s ⁻¹
c_{12}	89,1 GPa	ϵ_{33}	7,41 nF m ⁻¹	α_K	1,34 ns
c_{13}	85,7 GPa	e_{15}	12,5 C m ⁻²		
c_{33}	124,9 GPa	e_{31}	-4,9 C m ⁻²		
c_{44}	21,2 GPa	e_{33}	16,2 C m ⁻²		

6.3 Identifikation der Parameter unterschiedlicher Dämpfungsmodelle

Um das physikalische Verhalten einer Piezokeramik besser abzubilden, sollen Alternativen zum Rayleigh-Dämpfungsmodell betrachtet werden. Dazu kommen das Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten und das Zener-Dämpfungsmodell zu Einsatz, wie sie in Abschnitt 3.3 beschrieben werden. Die Zerlegung in Eigendehnungen wird wie in Unterabschnitt 3.3.5 vorgenommen. Damit ergeben sich für das Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten drei weitere, zu bestimmende Materialparameter ($\alpha_{0,1}$, $\alpha_{0,1}$ und $\alpha_{0,3}$). Für das Zener-Dämpfungsmodell sind es hingegen sechs Parameter (τ_1 , d_1 , τ_2 , d_2 , τ_3 und d_3). Die Indizes beschreiben dabei jeweils die Scherbewegung, die radiale Bewegung und die kombinierte Dicken-Radial-Bewegung.

Die Startwertbestimmung erfolgt wie in Unterabschnitt 5.3.3 dargestellt. Das Vorgehen während der Optimierung bleibt identisch [Fel21]. Die bestimmten Materialparameter sind stets vor dem Hintergrund des gewählten Modells aufzufassen. Beispielsweise ist der Parameter c_{11}^E bei allen Modellen unterschiedlich zu interpretieren. Der rein reelle Parameter beim Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten kommt nie zum Tragen, da für alle Frequenzen komplexe Parameter wirksam sind. Beim Zener-Modell hingegen beschreiben die reellen Parameter das Verhalten für $\omega = 0$ und bei Rayleigh-Dämpfung ist der rein reelle Parameter c_{11}^E bei $\alpha_K \omega = \alpha_M / \omega$ zu finden. Daher beeinflusst das gewählte Dämpfungsmodell stets auch alle Materialparameter.

6.3.1 Dämpfung durch komplexe Konstanten

Zunächst soll Dämpfung durch komplexe Konstanten betrachtet werden. Diese kann für transversal isotropes Material durch Eigenwertzerlegung durch die drei Parameter $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{0,2}$ und $\alpha_{0,3}$ beschrieben werden. Damit ergeben sich für eine Piezokeramik vom Typ PIC255 die Materialparameter

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

aus Tabelle 6.2. Die sich ergebenden gemessenen und mit diesen Parametern simulierten Impedanzen sind in Abbildung 6.8 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Simulation die Messung ähnlich gut wie im Falle der Rayleigh-Dämpfung abbildet, dies jedoch auch über 2 MHz hinaus tun.

Tabelle 6.2: Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Dämpfung durch komplexe Konstanten

c_{11}	131,4 GPa	ϵ_{11}	8,08 nF m ⁻¹	$\alpha_{0,1}$	0,022
c_{12}	88,7 GPa	ϵ_{33}	7,59 nF m ⁻¹	$\alpha_{0,2}$	0,057
c_{13}	85,7 GPa	e_{15}	12,3 C m ⁻²	$\alpha_{0,3}$	0,0036
c_{33}	126,0 GPa	e_{31}	-5,6 C m ⁻²		
c_{44}	21,2 GPa	e_{33}	15,8 C m ⁻²		

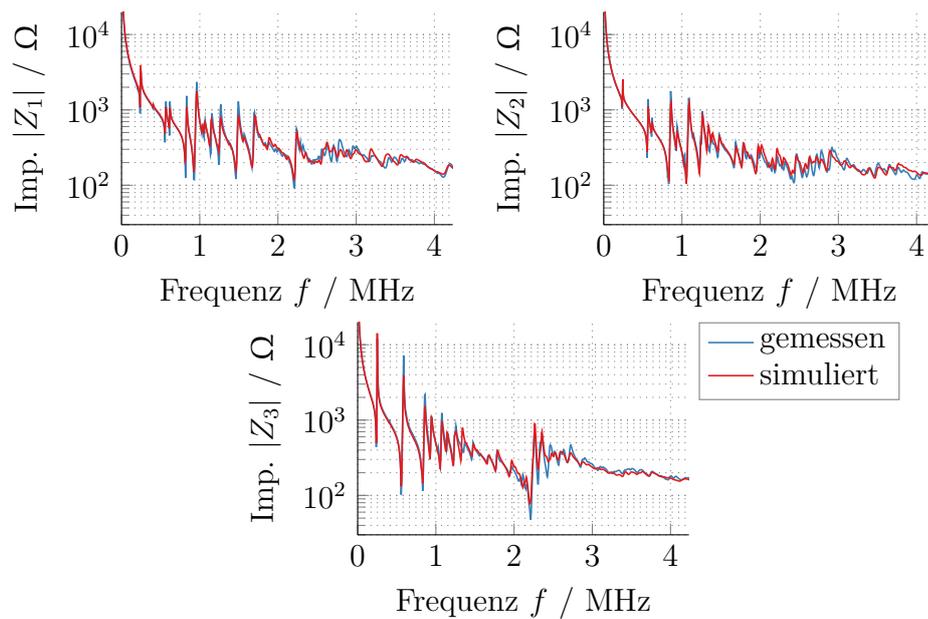


Abbildung 6.8: Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Dämpfung durch komplexe Konstanten.

6.3.2 Zener-Modell

Das Zener-Modell lässt sich in diesem Falle durch sechs Parameter beschreiben: τ_1 , d_1 , τ_2 , d_2 , τ_3 und d_3 . Die sich für PIC255 ergebenden Materialparameter sind in Tabelle 6.3 zu finden. Die sich ergebenden gemessenen und mit diesen Parametern simulierten Impedanzen sind in Abbildung 6.9 dargestellt. Auch hier ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation.

Tabelle 6.3: Optimierte Materialparameter: PIC255 mit Zener-Modell.

c_{11}	128,8 GPa	ϵ_{11}	8,21 nF m ⁻¹	τ_1	15 ns
c_{12}	87,0 GPa	ϵ_{33}	7,5 nF m ⁻¹	d_1	1,14
c_{13}	82,9 GPa	e_{15}	12,5 C m ⁻²	τ_2	11,2 ns
c_{33}	120,8 GPa	e_{31}	-5,1 C m ⁻²	d_2	1,69
c_{44}	21,1 GPa	e_{33}	15,6 C m ⁻²	τ_3	1,94 μ s
				d_3	1,04

6.3.3 Weitere Dämpfungsmodelle

Im Rahmen dieser Arbeit wurden weitere Dämpfungsmodelle untersucht. Darunter die Erweiterung des Rayleigh-Dämpfungsmodells nach dem gleichen Vorgehen der Eigenwertzerlegung, welches bereits für die anderen beiden Dämpfungsmodelle herangezogen wurde. Weiterhin können λ_3 und λ_4 , welche bisher wie in Unterabschnitt 3.3.5 beschrieben zusammengefasst wurden, mit unterschiedlichen Dämpfungsmechanismen belegt werden. Auch die Möglichkeit der Zerlegung der gesamten piezoelektrischen Matrix in ihre Eigenwerte wurde untersucht, sodass nicht ausschließlich mechanische Dämpfung betrachtet wird (siehe Abschnitt C.2). Darüber hinaus wurde auch das Kelvin-Voigt-Modell implementiert. Keines dieser Dämpfungsmodelle führte jedoch zu signifikant anderen oder besseren Ergebnissen, sodass repräsentativ hier nur die gewählten drei Modelle beschrieben und evaluiert werden.

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

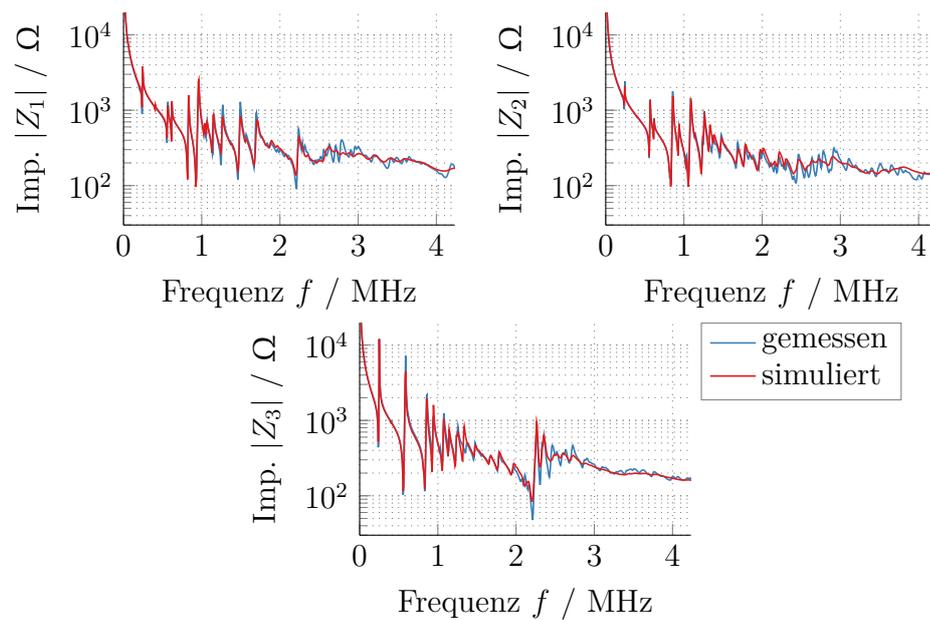


Abbildung 6.9: Optimierte und gemessene Impedanzen: PIC255 mit Zener-Modell.

6.4 Evaluation und Konsistenzprüfung

Die Evaluation der Ergebnisse der zuvor durchgeführten Optimierung kann nach unterschiedliche Kriterien durchgeführt werden. Zum einen muss natürlich der Wert der Zielfunktion für das jeweilige Ergebnis klein werden. Zum anderen muss der bestimmte Parametersatz physikalisch sinnvoll sein. Darüber hinaus soll dieser zumindest in gewissem Maße generalisierbar sein und Messungen abbilden, die nicht direkt für die Optimierung zur Verfügung stehen. Diese Punkte sollen für die bestimmten Materialparametersätze nun überprüft werden.

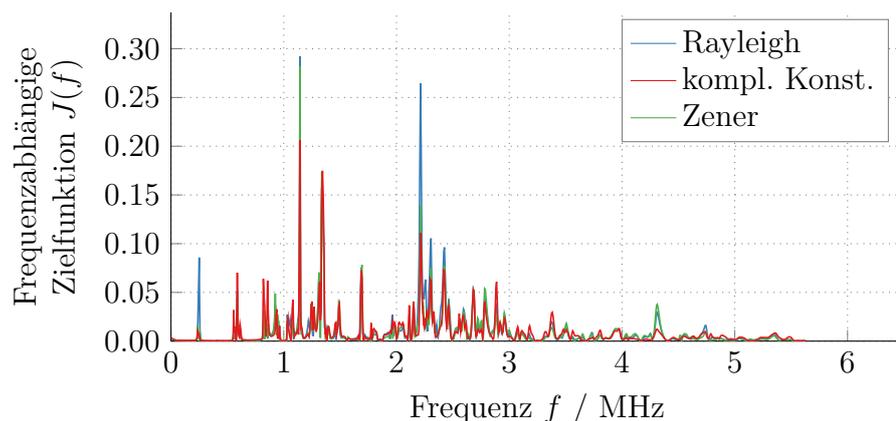


Abbildung 6.10: Frequenzabhängige summierte Zielfunktion im Optimum.

6.4.1 Zielfunktion

Da die Dämpfungsmodelle vor allem unterschiedliche Frequenzabhängigkeiten auflösen, wird in Abbildung 6.10 die über die drei Impedanzen summierte, jedoch weiterhin frequenzabhängige Zielfunktion dargestellt:

$$J(f) = \sum_{i=1}^3 \left(\log_{10} (|Z_i^{\text{mes}}(f)|) - \log_{10} (|Z_i^{\text{sim}}(f)|) \right)^2. \quad (6.1)$$

Es wird deutlich, dass der Fehler für alle Modelle klein wird. Das Rayleigh-Modell bildet jedoch die Dickenresonanz nur relativ schlecht ab. Für das Modell mit komplexen Konstanten ergibt sich kein Frequenzbereich, in dem sich signifikant höhere Abweichungen als bei den anderen Dämpfungsmodellen ergeben, sodass dieses über den gesamten Frequenzbereich die Messung gut abbildet.

6.4.2 Physikalische Plausibilität

Physikalisch ergeben sich einige Randbedingungen, die für die einzelnen Materialparameter notwendigerweise gelten müssen. So müssen die mechanische Steifigkeitsmatrix als auch die Permittivitätsmatrix positiv semi-definit sein [IEEE87]. Dies ist gegeben, wenn alle Eigenwerte (siehe

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

Gleichung 3.94 bis Gleichung 3.97) der Steifigkeitsmatrix und die beiden Permittivitäten größer oder gleich null sind. Dies ist erfüllt, wenn

$$c_{44}^E \geq 0 \quad (6.2)$$

$$c_{11}^E \geq c_{12}^E \quad (6.3)$$

$$c_{33}^E (c_{11}^E - c_{12}^E) \geq 2c_{13}^{E^2} \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S \geq 0. \quad (6.5)$$

Diese Bedingungen werden für alle bisher betrachteten Materialien eingehalten. Darüber hinaus müssen für die jeweiligen Dämpfungsparameter bestimmte Bedingungen erfüllt sein. Für die Rayleigh-Dämpfungsparameter muss dabei stets

$$\alpha_M \geq 0 \quad (6.6)$$

$$\alpha_K \geq 0 \quad (6.7)$$

gelten [Ler90].

Nach Holland [Hol67] muss für die Steifigkeitsmatrix zusätzlich gelten, dass ihr Imaginärteil positiv semi-definit ist. Da die Parameter des Modells mit komplexen Konstanten diesen Imaginärteil direkt repräsentieren, ergibt sich daraus die Forderung, dass

$$\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,3} \geq 0 \quad (6.8)$$

gilt. Aus der gleichen Forderung ergibt sich für das Zener-Modell [Pri03]

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3 \geq 0 \quad (6.9)$$

$$d_1, d_2, d_3 \geq 1. \quad (6.10)$$

Diese Forderungen werden ebenfalls für alle betrachteten Materialparameter erfüllt, da sie dem Optimierungsalgorithmus als Grenzen vorgegeben werden.

Somit kann zumindest von einer physikalischen Plausibilität ausgegangen werden. Zusätzlich kann bei einem Vergleich der Dämpfungsparameter festgestellt werden, dass zumindest für die beiden transversal isotropen Dämpfungsmodelle die Ausprägung der Dämpfung für die jeweiligen Eigenwerte ähnlich ist. So gilt:

$$\alpha_{0,2} > \alpha_{0,1} > \alpha_{0,3} \quad (6.11)$$

$$d_2 > d_1 > d_3. \quad (6.12)$$

In beiden Modellen ist der Dämpfungsmechanismus für den zweiten Eigenwert also am größten, der für den Dritten am kleinsten. Das bedeutet, dass die jeweiligen Eigenbewegungen, welche mit den einzelnen Eigenwerten verknüpft sind, über die einzelnen Dämpfungsmodelle hinaus der Ordnung nach gleich gedämpft werden.

6.4.3 Übertragbarkeit der Materialparameter

In gewissem Maße sollen die bestimmten Materialparameter übertragbar sein. Das heißt für ähnliche Messanordnungen sollen die Materialparameter weiterhin gute Ergebnisse liefern. Dabei soll darauf verzichtet werden, andere Geometrien aus dem gleichen Material zu verwenden, da diese stets prozessbedingten Abweichungen unterliegen. Außerdem ist es problematisch die Piezokeramik im Verbund mit anderen Materialien (wie zum Beispiel in einem kompletten Schallwandler) zu untersuchen, da die umgebenden Materialien nicht hinreichend bekannt sind. Daher soll in diesem Fall auf die Keramik mit vollflächigen Elektroden zurückgegriffen werden. Da diese aus der gleichen Charge stammen, sind hier die prozessbedingten Abweichungen als gering anzunehmen. Jedoch ist die gemessene elektrische Impedanz eine Größe, die nur zur Startwertschätzung, jedoch nicht für die Optimierung selbst zur Verfügung steht. Somit kann diese genutzt werden, um die bestimmten Materialparameter zu validieren. Zusätzlich wird ein größerer Frequenzbereich als der für die Optimierung genutzte herangezogen.

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

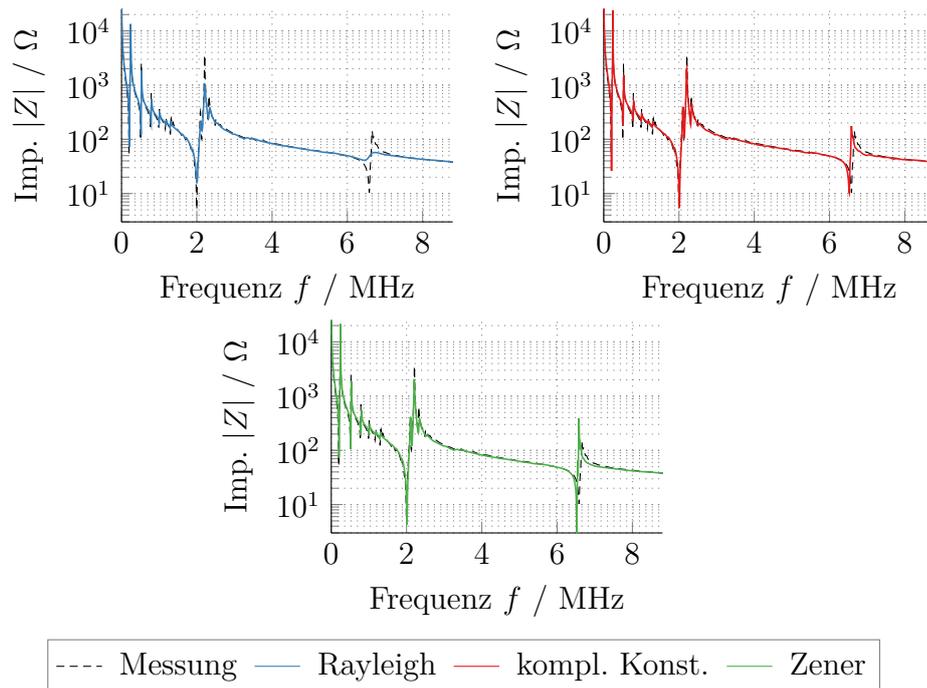


Abbildung 6.11: Optimierte und gemessene Impedanzen mit unterschiedlichen Dämpfungsmodellen für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.

gen. Abbildung 6.11 zeigt den Vergleich der gemessenen und optimierten Impedanzen für PIC255. Die gemessenen Impedanzen werden in allen Fällen durch die Simulation mit den jeweiligen Materialparametern gut wiedergegeben, sodass hier die Übertragbarkeit gegeben ist. Jedoch wird hier deutlich, dass vor allem für die zweite Dickenresonanz bei ca. 6,5 MHz bei der Rayleigh-Dämpfung zu stark und beim Zener-Modell zu schwach gedämpft wird. Das liegt daran, dass die Dämpfung für das Rayleigh-Modell für höhere Frequenzen größer und beim Zener-Modell für höhere Frequenzen kleiner wird (siehe Abbildung 3.6). Da dieser Frequenzbereich in der Optimierung nicht mit einbezogen wurde, kann er zusätzlich als ein Indiz für die Übertragbarkeit der Materialparameter angeführt werden. Vor allem das frequenzabhängige Dämpfungsverhalten kann hier validiert werden. Es zeigt sich also erneut, dass das Modell mit komplexen Konstanten eine gute

Wahl zur Beschreibung von Piezokeramiken ist. Ähnliche Ergebnisse zeigen sich bei der Betrachtung der Phase Abbildung 6.12. Diese kann zusätzlich zur Validierung genutzt werden, da für die Optimierung ausschließlich auf den Betrag der Impedanz zurückgegriffen wird.

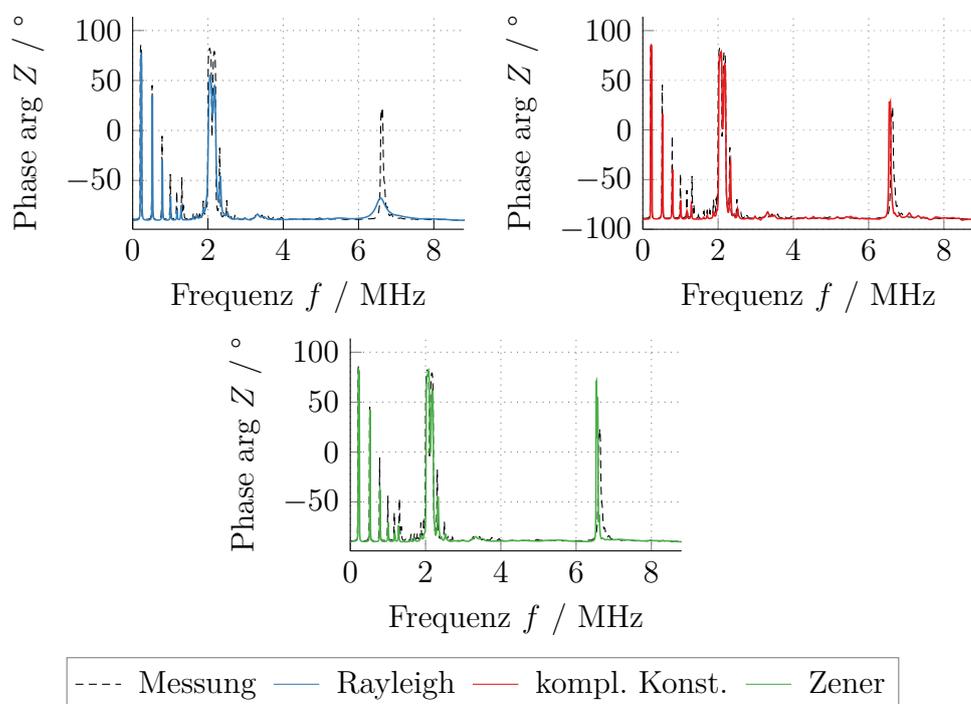


Abbildung 6.12: Optimierte und gemessene Phase der Impedanz mit unterschiedlichen Dämpfungsmodellen für Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden.

6.4.4 Vergleich mit Literaturdaten

Die angegebenen Materialparameter werden in Tabelle 6.4 mit Daten für PIC255 aus anderen Veröffentlichungen verglichen. Da hier jedoch keine Angaben zur Dämpfung gemacht werden, sollen für die folgenden Simulationen die bestimmten Rayleigh-Dämpfungsparameter $\alpha_M = 26\,985\text{ s}^{-1}$ und $\alpha_K = 1,34\text{ ns}$ genutzt werden, da es sich dabei um das gängigste Dämpfungsmodell handelt. Außerdem wird stets eine Dichte von 7800 kg/m^3

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

genutzt. Es zeigt sich, dass in der Literatur zwar ungefähr gleiche Parameter angegeben werden, jedoch auch gewisse Abweichungen auftreten. Da bei den meisten Publikationen nicht angegeben ist, wie und bei welcher Temperatur genau die Materialparameter bestimmt wurden, ist dies jedoch auch zu erwarten, da die Probekörper unterschiedlich prozessiert werden und unterschiedliche Geometrien genutzt werden. Es zeigt sich jedoch, auch in der Darstellung der Impedanzen in Abbildung 6.13, dass die bestimmten Materialparameter im Vergleich zu den Literaturdaten durchaus plausibel sind.

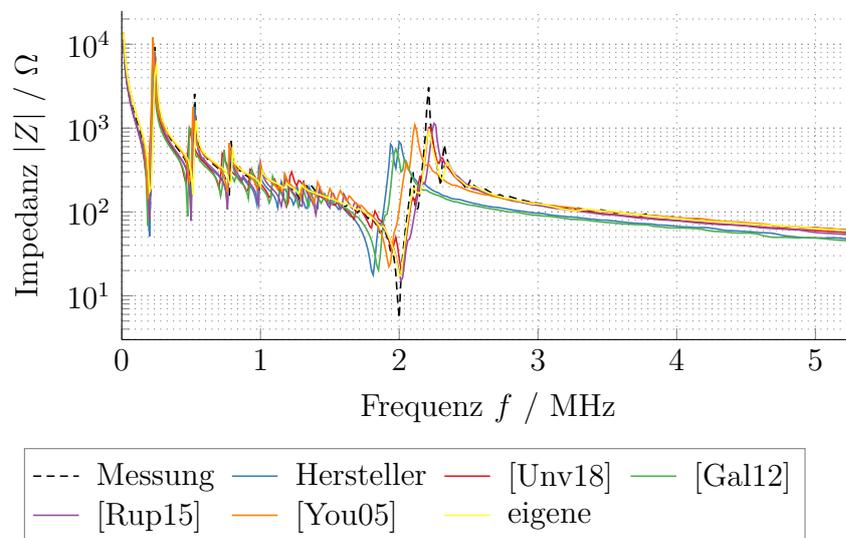


Abbildung 6.13: Simulierte Impedanzen mit unterschiedlichen Literaturwerten.

Tabelle 6.4: Literaturwerte der Materialparameter für PIC255.

		[PI19]	[Unv18]	[Gal12]	[Rup15]	[You05]	eigene
c_{11}	GPa	123	134	117	124	111	132,7
c_{12}	GPa	76,7	88,4	78	78,7	63	88,1
c_{13}	GPa	70,3	84,7	74	80,7	69	85,7
c_{33}	GPa	97,2	113	102	120	111	124,9
c_{44}	GPa	22,3	20	22	20,3	19	21,2
ε_{11}	nF m ⁻¹	8,2	8,56	8,23	7,36	7,73	8,22
ε_{33}	nF m ⁻¹	7,6	7,42	7,97	6,8	6,02	7,41
e_{15}	C m ⁻²	11,9	11	11,91	11,9	10,26	12,5
e_{31}	C m ⁻²	-7,1	-6,24	-6,8	-6,8	-5,61	-4,9
e_{33}	C m ⁻²	13,7	14,6	13,03	16,1	12,83	16,2

6.5 Unsicherheitsanalyse

Im Folgenden soll der Einfluss der Messunsicherheit einiger relevanter Größen auf die aus der elektrischen Impedanz bestimmten Materialparameter beschrieben werden. Dabei wird stets von normalverteilten Zufallsvariablen und hinreichend gut im Arbeitspunkt linearisierbaren Modellen ausgegangen. Damit ist eine Beschreibung in Anlehnung an den *guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM) [JCGM100:2008], dem internationalen Standard zur Beschreibung von Messunsicherheiten, möglich. Zunächst müssen dafür die relevanten Unsicherheiten quantifiziert werden.

6.5.1 Beschreibung der vorhandenen Messunsicherheiten

Unterschiedliche Unsicherheiten beeinflussen die Bestimmung der Materialparameter. Dabei sollen hier folgende Größen als unsicherheitsbehaftet betrachtet und analysiert werden:

- die Elektrodenradien
- die Keramikgeometrie
- die Impedanzmessung
- die Messung der Dichte
- der Einfluss der Temperatur

Die Temperatur soll durch klimatisierte Bedingungen durch $22\text{ °C} \pm 2\text{ °C}$ gegeben sein.

Die Unsicherheit der Impedanzmessung lässt sich mit Hilfe der Angaben im Datenblatt des Keysight Impedance Analyzer E4990A ermitteln [Key20]. Die relative Abweichung des gemessenen Impedanzwertes wird angegeben mit

$$\Delta Z_i = 0,12 \left(1 + \frac{f_i}{1\text{ MHz}} \right) + 100 \left(\frac{12\text{ m}\Omega}{|Z_i|} + \frac{200|Z_i|}{1\text{ G}\Omega} \right), \quad (6.13)$$

für die einzelnen Frequenzen f_i und den dazugehörigen Impedanzen Z_i . Die Kovarianzmatrix ergibt sich dann zu¹

$$\underline{\Sigma}_Z = \text{diag} \left\{ \frac{\Delta Z_i^2}{3} \right\}. \quad (6.15)$$

Die Radien der Elektroden werden unabhängig voneinander mit einer Standardabweichung von $57\text{ }\mu\text{m}$ (entspricht nach Gleichung 6.14 einer Gleichverteilung $\pm 0,1\text{ mm}$) angenommen. Dicke und Radius der Keramik,

¹Die Varianz einer Gleichverteilung der einseitigen Breite a ergibt sich zu

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{3}. \quad (6.14)$$

welche mit der Mitutoyo Digimatic Messschraube bestimmt werden, werden mit einer Standardabweichung von $1,7 \mu\text{m}$ (entspricht nach Gleichung 6.14 einer Gleichverteilung $\pm 0,3 \mu\text{m}$) beschrieben:

$$\underline{\Sigma}_r = \frac{(0,1 \text{ mm})^2}{3} \underline{\mathbf{I}} \quad (6.16)$$

$$\underline{\Sigma}_{\text{geo}} = \frac{(3 \mu\text{m})^2}{3} \underline{\mathbf{I}}. \quad (6.17)$$

Die Dichte wird über eine Messung der Masse bestimmt. Dazu wird die Feinwaage Sartorius LA 310 S genutzt, deren Toleranz durch $\pm 0,1 \text{ mg}$ angegeben ist [Sar21], woraus sich eine Standardabweichung von $0,058 \text{ mg}$ ergibt. Da die Geometrie und deren Unsicherheit ebenfalls Einfluss auf die Unsicherheit der Dichte hat, werden diese durch Monte-Carlo-Simulation mit $N = 1\,000\,000$ Werten propagiert [JCGM101:2008]. Damit ergibt sich eine Kovarianzmatrix für $[r_{\text{pc}}, h_{\text{pc}}, \rho]$

$$\underline{\Sigma}_{\text{geo},\rho} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 & -6 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 & -9 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \\ -6 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 & 3 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 & -2,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \\ -9 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} & -2,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} & 212,52 (\text{kg/m}^2)^2 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Zusammenfassend lassen sich die unsicherheitsbehafteten Größen mit

$$\mathbf{p}_{\text{uns}} = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_{\text{pc}}, h_{\text{pc}}, \rho]^t \quad (6.19)$$

$$\mathbf{p}_{\text{uns}} \sim \mathcal{N} \left\{ \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}}, \text{diag} \left\{ \underline{\Sigma}_r, \underline{\Sigma}_{\text{geo},\rho} \right\} \right\} \quad (6.20)$$

bezeichnen, wobei $\mathcal{N} \{ \boldsymbol{\mu}, \underline{\Sigma} \}$ eine Normalverteilung mit Mittelwert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$ beschreibt. Die Unsicherheiten der Impedanzmessung und der Temperatur werden separat betrachtet.

6.5.2 Linearisierung des Vorwärtsmodells

Dem Ansatz der GUM folgend soll das Vorwärtsmodell in einem Arbeitspunkt linearisiert werden, um eine einfache Propagation der Unsicherheiten zu ermöglichen. Die Impedanz wird dazu im Folgenden als ein Vektor der Größe an diskreten Frequenzstützstellen betrachtet:

$$Z(\omega_i) \rightarrow \mathbf{Z}. \quad (6.21)$$

Die gemessene Impedanz wird dann durch eine Taylorreihen-Approximation linearisiert:

$$\mathbf{Z}^{\text{mes}} = \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\text{mat}}, \mathbf{p}_{\text{uns}}) + \mathbf{a} \quad (6.22)$$

$$\approx \underline{\mathbf{J}}_{\text{mat}}(\mathbf{p}_{\text{mat}} - \mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}}) + \underline{\mathbf{J}}_{\text{uns}}(\mathbf{p}_{\text{uns}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}}) + \mathbf{Z}^{\text{opt}} + \mathbf{a} \quad (6.23)$$

mit einem mittelwertfreien, additiven Term \mathbf{a} , welcher durch die Unsicherheit der Impedanzmessung beschrieben wird, de, Vektor der Materialparameter \mathbf{p}_{mat} und der unsicherheitsbehafteten Größen \mathbf{p}_{uns} und $\mathbf{Z}^{\text{opt}} = \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}})$. Die Jacobi-Matrizen $\underline{\mathbf{J}}_{\text{mat}}$ und $\underline{\mathbf{J}}_{\text{uns}}$ werden dabei wie folgt definiert:

$$\underline{\mathbf{J}}_{\text{mat}} = \left[\partial_{p_{\text{mat},1}} \mathbf{Z}, \partial_{p_{\text{mat},2}} \mathbf{Z}, \dots \right] \Big|_{(\mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}})} \quad (6.24)$$

$$\underline{\mathbf{J}}_{\text{uns}} = \left[\partial_{p_{\text{uns},1}} \mathbf{Z}, \partial_{p_{\text{uns},2}} \mathbf{Z}, \dots \right] \Big|_{(\mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}})}. \quad (6.25)$$

Aufgrund der sehr unterschiedlichen Größenordnungen der Parameter werden diese mit den Diagonalmatrizen der Mittelwerte $\underline{\mathbf{W}}_{\text{mat}}$ und $\underline{\mathbf{W}}_{\text{uns}}$ normalisiert:

$$\check{\mathbf{p}}_{\text{mat}} = \underline{\mathbf{W}}_{\text{mat}}^{-1}(\mathbf{p}_{\text{mat}} - \mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}}) \quad (6.26)$$

$$\check{\mathbf{p}}_{\text{uns}} = \underline{\mathbf{W}}_{\text{uns}}^{-1}(\mathbf{p}_{\text{uns}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{uns}}) \quad (6.27)$$

$$\check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}} = \underline{\mathbf{J}}_{\text{mat}} \underline{\mathbf{W}}_{\text{mat}} \quad (6.28)$$

$$\check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{uns}} = \underline{\mathbf{J}}_{\text{mat}} \underline{\mathbf{W}}_{\text{uns}} \quad (6.29)$$

$$\check{\underline{\Sigma}}_{\text{uns}} = \underline{\mathbf{W}}^{-1} \underline{\Sigma}_{\text{uns}} \underline{\mathbf{W}}^{-1} \quad (6.30)$$

$$\check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\text{uns}} = 0. \quad (6.31)$$

Damit lässt sich Gleichung 6.23 schreiben als

$$\mathbf{Z}^{\text{mes}} \approx \check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}} \check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{mat}} + \check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{uns}} \check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{uns}} + \mathbf{Z}^{\text{opt}} + \mathbf{a}. \quad (6.32)$$

Mit Hilfe dieses linearen Modells soll nun die Unsicherheit der Materialparameter bestimmt werden.

6.5.3 Bestimmung der Unsicherheit der Materialparameter

Die Unsicherheit der Materialparameter wird nun aus den bekannten Unsicherheiten der zusätzlichen Modellgrößen und der Impedanzmessung bestimmt. Dazu wird eine Herangehensweise in Anlehnung an die GUM [JCGM100:2008] betrachtet, welche diesen durch eine Pseudoinverse auf inverse Verfahren erweitert. Dabei soll stets von linearisierten Modellen und normalverteilten Unsicherheiten ausgegangen werden.

Unsicherheitsbestimmung durch Pseudoinverse

Soll Gleichung 6.23 nach \mathbf{p}_{mat} umgestellt werden, ergibt sich als ein Zwischenschritt zunächst

$$\check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}} \check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{mat}} = \mathbf{Z}^{\text{mes}} - \check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{uns}} \check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{uns}} - \mathbf{Z}^{\text{opt}} - \mathbf{a}. \quad (6.33)$$

Notwendig ist nun eine Inversion der Jacobimatrix $\check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}}$. Da diese jedoch nicht quadratisch ist, kann dies nicht exakt, aber doch im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch eine Pseudoinverse geschehen [Pen55], welche durch $\check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}}^\dagger$ bezeichnet wird:

$$\check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{mat}} = \check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{mat}}^\dagger \left(\mathbf{Z}^{\text{mes}} - \check{\underline{\mathbf{J}}}_{\text{uns}} \check{\underline{\mathbf{p}}}_{\text{uns}} - \mathbf{Z}^{\text{opt}} - \mathbf{a} \right). \quad (6.34)$$

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

Da die Unsicherheiten von $\check{\mathbf{p}}_{\text{uns}}$ und \mathbf{a} bekannt sind, können Mittelwert und Kovarianzmatrix von $\check{\mathbf{p}}_{\text{mat}}$ bestimmt werden:

$$\check{\boldsymbol{\mu}}_{\text{mat}}^{\text{pi}} = \check{\mathbf{J}}_{\text{mat}}^{\dagger} (\mathbf{Z}^{\text{mes}} - \mathbf{Z}^{\text{opt}}) \quad (6.35)$$

$$\check{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{mat}}^{\text{pi}} = \check{\mathbf{J}}_{\text{mat}}^{\dagger} \left(\check{\mathbf{J}}_{\text{uns}} \check{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{uns}} \check{\mathbf{J}}_{\text{uns}}^{\text{t}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}} \right) \check{\mathbf{J}}_{\text{mat}}^{\dagger, \text{t}}. \quad (6.36)$$

Daraus ergibt sich für die unskalierten Parameter

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{mat}}^{\text{pi}} = \mathbf{W}_{\text{mat}} \check{\boldsymbol{\mu}}_{\text{mat}}^{\text{pi}} + \mathbf{p}_{\text{mat}}^{\text{opt}} \quad (6.37)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{mat}}^{\text{pi}} = \mathbf{W}_{\text{mat}} \check{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{mat}}^{\text{pi}} \mathbf{W}_{\text{mat}}. \quad (6.38)$$

Bestimmung der notwendigen Schrittweite zur Linearisierung

Zur Berechnung der Jacobimatrizen werden die dazu notwendigen Ableitungen durch Finite Differenzen approximiert. Laut GUM [JCGM100:2008; JCGM102:2011] ist die dafür zu wählende Schrittweite die Standardunsicherheit der jeweiligen Größen. Für \mathbf{J}_{uns} sind diese bekannt, für \mathbf{J}_{mat} handelt es sich dabei jedoch gerade um die gesuchten Unsicherheiten der Materialparameter. Da diese erst am Ende der Betrachtung bekannt sind, soll hier ein iteratives Verfahren genutzt werden [Fel16; Fel17]. Dazu wird zunächst eine initiale Schrittweite von entsprechend $0.01(\mathcal{Y}^{\text{max}})^{-1}$ angenommen mit deren Hilfe Unsicherheiten für die Materialparameter gewonnen werden können. Im nächsten Schritt werden diese wiederum für die Linearisierung genutzt, um neue Unsicherheiten zu bestimmen, bis keine Änderung mehr auftritt (siehe Abbildung 6.14).

Unsicherheitsbeitrag durch die Temperatur

Die Unsicherheit der Temperatur kann nicht auf dem oben beschriebenen Weg durch das Modell propagiert werden, dass sie keine Modellgröße darstellt. Daher müssen hier andere Abschätzungen getroffen werden, um den Einfluss auf die Materialparameter zu bestimmen. Dabei wird auf temperaturabhängige Messungen an Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden

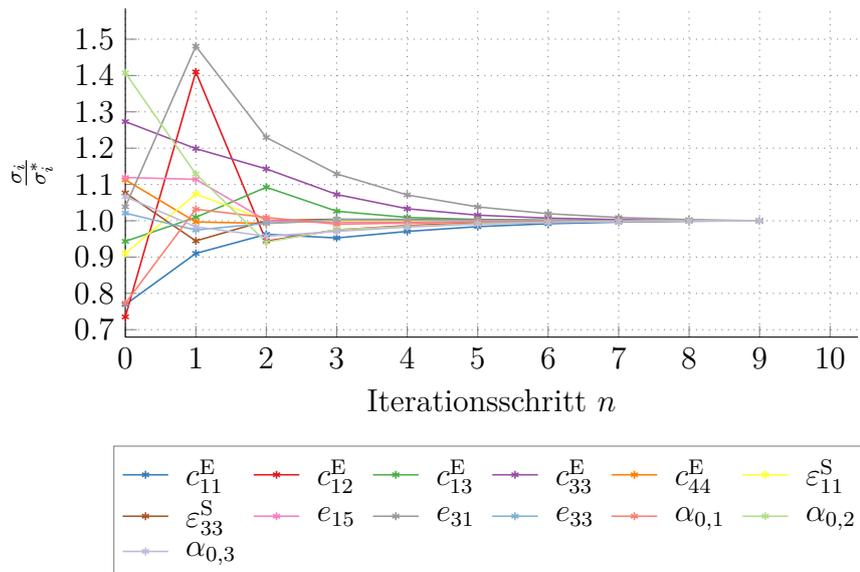


Abbildung 6.14: Iterative Entwicklung der Unsicherheiten.

zurückgegriffen, da hier analytische Näherungen die Relation zwischen den charakteristischen Frequenzen der Impedanz und den Materialparametern abbilden [Sch18]. Für variierte Temperaturen ergibt sich aus den mathematischen Zusammenhängen aus Abschnitt 5.3 die Abhängigkeit einiger Materialparameter, wie sie in Abbildung 6.15 dargestellt ist. Bei einer

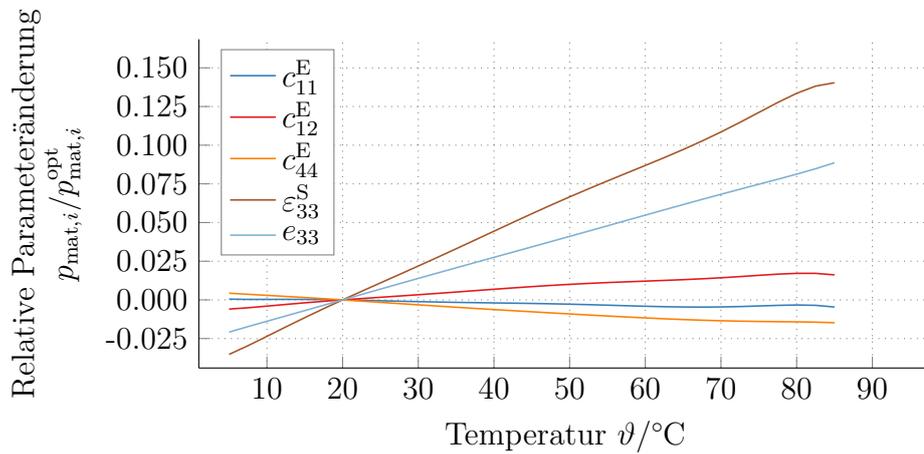


Abbildung 6.15: Einfluss der Temperatur auf die Materialparameter.

Tabelle 6.5: Unsicherheitsbeiträge durch die Temperatur.

	rel. Unsicherheit	Unsicherheit
c_{11}^E	0,009 %	12,4 MPa
c_{12}^E	0,04 %	34,5 MPa
c_{13}^E	0,04 %	33,4 MPa
c_{33}^E	0,009 %	11,8 MPa
c_{44}^E	0,03 %	7,2 MPa
ε_{11}^S	0,3 %	0,023 nF m ⁻¹
ε_{33}^S	0,3 %	0,022 nF m ⁻¹
e_{15}	0,2 %	0,022 C/m ²
e_{31}	0,2 %	0,01 C/m ²
e_{33}	0,2 %	0,028 C/m ²

Temperatur von $22\text{ °C} \pm 2\text{ °C}$ ergibt sich für die Temperatur eine Standardabweichung von $\sigma_\vartheta = 1,33\text{ K}$. Dies führt bei den Materialparametern zu Änderungen, die in Tabelle 6.5 zusammengefasst sind.

Unsicherheiten der Materialparameter

Aus den einzelnen Unsicherheitsbeiträgen lässt sich nun eine Gesamtunsicherheit für die Materialparameter bestimmen. Diese sind in Tabelle 6.6 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass vor allem die Unsicherheit der mechanischen Materialparameter im Vergleich sehr gering ist. Das liegt darin begründet, dass diese die Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen maßgeblich bestimmen. Da kleine Abweichungen in den Resonanzen zu großen Abweichungen führen, können diese Parameter sehr genau bestimmt werden. Darüber hinaus hat vor allem der Dämpfungsparameter $\alpha_{0,3}$ eine hohe Unsicherheit. Zum einen ist die Bestimmung von Dämpfung meist problematisch, da die dadurch verursachten Effekte geringer sind als durch die restlichen Materialparameter. Zum anderen ist auch der Absolutwert von $\alpha_{0,3}$ sehr gering, sodass die große relative Abweichung trotzdem einer kleinen absoluten Abweichung entspricht.

Tabelle 6.6: Gesamtunsicherheit der Materialparameter.

	optimierter Wert	Unsicherheit	rel. Unsicherheit
c_{11}^E	131,4 GPa	0,51 GPa	0,39 %
c_{12}^E	88,7 GPa	0,54 GPa	0,6 %
c_{13}^E	85,7 GPa	0,27 GPa	0,3 %
c_{33}^E	126 GPa	0,51 GPa	0,4 %
c_{44}^E	21,2 GPa	0,077 GPa	0,36 %
ε_{11}^S	8,08 nF m ⁻¹	0,84 nF m ⁻¹	10,4 %
ε_{33}^S	7,59 nF m ⁻¹	0,25 nF m ⁻¹	3,3 %
e_{15}	12,3 C/m ²	0,47 C/m ²	3,8 %
e_{31}	-5,6 C/m ²	0,12 C/m ²	2,1 %
e_{33}	15,8 C/m ²	0,26 C/m ²	1,6 %
$\alpha_{0,1}$	0,022	0,0016	7,2 %
$\alpha_{0,2}$	0,057	0,0021	3,6 %
$\alpha_{0,3}$	0,0036	0,0007	20,3 %

6.6 Diskussion der Ergebnisse

Die Lösung des inversen Verfahrens ist mit der entwickelten Optimierungsstrategie robust für die hier gewählten Beispielmaterialien möglich. Es zeigt sich jedoch, dass das üblicherweise genutzte Rayleigh-Dämpfungsmodell für einen großen Frequenzbereich nicht anwendbar ist, da die Dämpfung für hohe Frequenzen modellbedingt zu groß ausfällt. Ein Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten hingegen führt zu einer guten Übereinstimmung von Messung und Simulation. Auch die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf einen erweiterten Frequenzbereich und Messungen an Piezokeramiken mit vollflächigen Elektroden bestätigen die gute Übereinstimmung. Im Rahmen der Unsicherheitsanalyse kann der beste Schätzwert durch eine Standardabweichung ergänzt werden.

Um diese Ergebnisse zu beurteilen, werden zufällig jeweils Materialparameter sowie die Radien der Ringelektroden, die Geometriegrößen und die Dichte aus Gauß'schen Normalverteilungen mit den jeweiligen bestimmten

6 Materialparameterbestimmung im inversen Verfahren

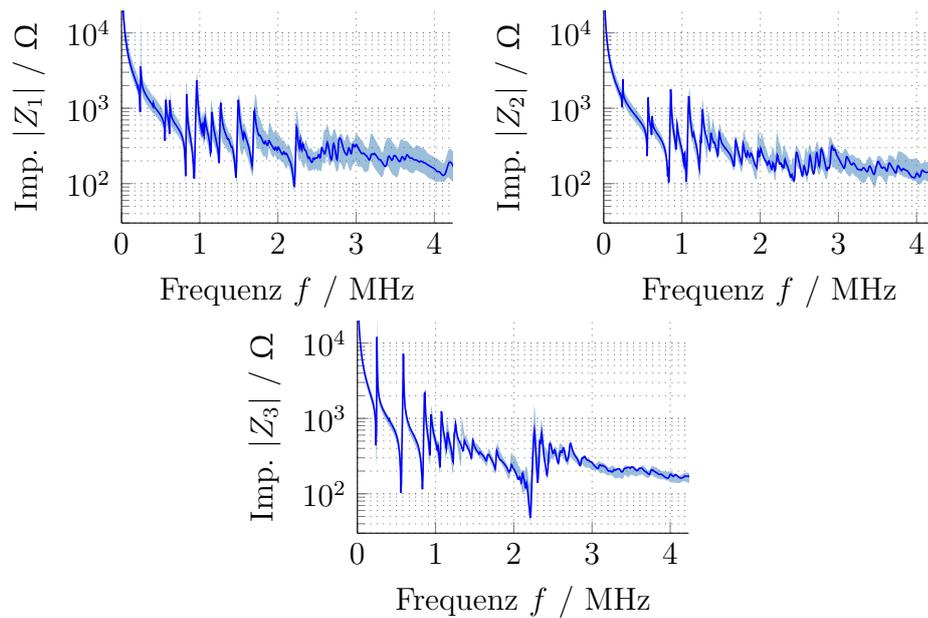


Abbildung 6.16: Gemessene Impedanzen (PIC255) und 95%-Quantil des besten Simulationsergebnisses mit Dämpfung durch komplexe Konstanten.

Parametern gezogen. Mit diesen variierten Parametern werden dann die Impedanzen der Piezokeramik simuliert. Nach vierhundertmaliger Wiederholung ergibt sich damit eine Standardabweichung der Impedanzen. In Abbildung 6.16 ist zum einen die gemessene Impedanz als auch das 95%-Quantil der simulierten Impedanz mit optimalen Materialparametern dargestellt. Dieses gibt an, dass sich ca. 95% der Impedanzen zu den jeweiligen Frequenzpunkten innerhalb dieses Intervalls befinden. Es entspricht für hier angenommene Gauß'sche Normalverteilungen der doppelten Standardabweichung. Die gemessene Impedanz liegt in fast allen Frequenzpunkten innerhalb des bestimmten Quantils. Damit zeigt sich, dass zu großen Teilen die bleibende Abweichung zwischen Messung und Simulation durch die hier beschriebenen Unsicherheiten erklärt werden kann.

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Messverfahren zur Bestimmung der linearen piezoelektrischen Materialparameter an einem einzigen, scheibenförmigen Probekörper entwickelt. Grundlage bietet dabei die Messung der frequenzabhängigen, elektrischen Impedanz an Piezokeramiken mit Ringelektroden. Diese optimierte Elektrodenstruktur dient dazu trotz der einfachen Scheibengeometrie eine hinreichende Sensitivität der Impedanz auf alle Materialparameter zu gewährleisten. Die Materialparameterbestimmung erfolgt dann im inversen Verfahren. Diese Arbeit beschreibt und realisiert alle Aspekte dieses inversen Ansatzes.

Die Strukturierung der Elektroden führt zu drei Ringen, von denen jeweils zwei kurzgeschlossen werden, um die Impedanz gegenüber der dritten Elektrode zu messen. Dadurch ergeben sich drei Impedanzmessungen, die simulativ abgebildet werden, wobei die notwendigen Materialparameter so zu wählen sind, dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation ergibt. Dies gelingt durch ein mathematisches Optimierungsverfahren. Die dafür notwendigen Startwerte werden durch vereinfachte analytische Betrachtungen der Impedanz einer piezokeramischen Scheibe mit vollflächigen Elektroden gewonnen. So lassen sich bereits eine gewisse Teilmenge an Parametern approximieren. Um für die Lösung des inversen Problems möglichst gute Bedingungen zu schaffen, werden diese Startwerte jedoch zunächst noch mit dem einfachen, vollflächigen Fall allein auf Basis der Resonanzfrequenzen optimiert. Das für die Optimierung benötigte Vorwärtsmodell wird durch eine FEM-Simulation realisiert. Da-

bei ist vor allem wichtig, dass sowohl die Elementgröße des Gitters als auch die Polynomordnung der Ansatzfunktion entsprechend gewählt werden, um kleine numerische Fehler und eine schnelle Rechenzeit zu gewährleisten. Mit Messung, Simulationsmodell und Startwerten kann nun eine Optimierungsstrategie für Piezokeramiken mit Ringelektroden entwickelt werden. Da unterschiedliche Materialparameter, wenn nur einzelne Frequenzbereiche betrachtet werden, in ihrer Wirkung auf die Impedanz nicht eindeutig bestimmbar sind, wird zunächst eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, um eine Optimierungsstrategie zu entwickeln, die trotz dieser Quersensitivitäten zu einer guten Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation führt. Um das Verhalten der Optimierung zu validieren, wird in einem ersten Schritt an Stelle einer Messung eine Simulation genutzt, da hier die zu Grunde liegenden Materialparameter bekannt sind. Hier kann für drei beispielhafte Materialparametersätze gezeigt werden, dass das inverse Verfahren diese Werte aus den Impedanzen zurückgewinnen kann. Auch für tatsächliche Impedanzmessungen kann eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation zumindest für den Frequenzbereich unterhalb der ersten Dickenresonanz erreicht werden.

Mit Hilfe dieses Verfahrens ist eine Bestimmung der Materialparameter über einen weiten Frequenzbereich möglich. Daher eignet es sich besonders, um unterschiedliche frequenzabhängige Dämpfungsmodelle zu evaluieren. Dazu werden das klassische Rayleigh-Dämpfungsmodell, Dämpfung durch komplexe Konstanten und ein Zener-Modell untersucht, die für die letzten beiden noch auf die transversale Isotropie, die bei Piezokeramiken vorliegt, erweitert werden. Im Vergleich zeigt sich, dass sowohl das Zener-Modell als auch das Modell mit komplexen Konstanten zu einer Verbesserung der Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation führen. Werden die Materialparameter für die Simulation über den für die Optimierung genutzten Frequenzbereich hinaus genutzt zeigt sich, dass hier die Dämpfung mit komplexen Konstanten die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung besser abbildet. Zusätzlich hat dieses Modell den Vorteil, dass es durch weniger Parameter bestimmt werden kann.

Damit konnte ein geeignetes Verfahren entwickelt werden, welches zum einen die Bestimmung der Materialparameter einer piezokeramischen Scheibe realisiert und zum anderen darüber hinaus die Evaluation unterschiedlicher frequenzabhängiger Dämpfungsmodelle ermöglicht.

7.2 Ausblick

Im Rahmen der Fortsetzung des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts ist geplant, die Materialparameterbestimmung durch eine einzelne Impedanzmessung zu realisieren, da dies den Messaufwand signifikant reduziert. Dazu wird das mathematische Optimierungsverfahren zur Bestimmung der Elektrodenanordnung dahingehend erweitert, dass nicht die prinzipielle Ringgeometrie vorgegeben ist und nur die notwendigen Radien optimiert werden, sondern stattdessen an beliebigen Stellen Elektrodenringe aufgebracht werden können [Sch21; Cla21]. Neben der Information wo eine Elektrode sinnvoll ist, soll zudem durch die Optimierung entschieden werden, ob hier das Anregesignal oder *ground* angelegt werden soll. Damit soll es durch eine zweipolige Messung möglich sein, den vollständigen Materialparametersatz im inversen Verfahren zu bestimmen. Das prinzipielle Vorgehen für die Entwicklung einer Optimierungsstrategie kann damit validiert werden. Erste Untersuchungen an einer Testtopologie zeigen, dass durch leichte Modifikation der sensitiven Frequenzbereiche gute Ergebnisse mit der entwickelten sensitivitätsbasierten Optimierungsstrategie erzielt werden können.

Für einen alternativen Ansatz zur Optimierungsstrategie kann eine Gewichtung der einzelnen Frequenzstützstellen der Impedanzen genutzt werden. Diese Gewichtung kann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems so bestimmt werden, dass sich beliebige Sensitivitäten ergeben [Jur19]. Auch mit dieser Herangehensweise könnte eine geeignete Optimierungsstrategie entwickelt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Für das favorisierte Dämpfungsmodell mit komplexen Konstanten bleibt der Nachteil der fehlenden Kausalität. Es können allerdings durch Überlagerung mehrerer kausaler Dämpfungsmodelle Analogien geschaffen werden, die eine annähernd konstante Steifigkeit über alle Frequenzen realisiert [Mur04; Nak16].

Die bestimmten linearen Materialparameter bilden weiterhin den Grundstein für die Bestimmung nichtlinearer Parameter. Zunächst können hier lineare Parameter in unterschiedlichen Arbeitspunkten identifiziert werden, wie es beispielsweise durch eine elektrische oder mechanische Vorspannung möglich ist [Dre19; Sim02]. Für eine vollständig nichtlineare Bestimmung ist der Begriff der Impedanz nicht mehr wohl-definiert, sodass hier auf ein alternatives Maß der Beschreibung zurückgegriffen werden müsste.

Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach dem Nachnamen des ersten Autors und anschließend nach dem Erscheinungsjahr sortiert.

- [Ain04] M. Ainsworth. „Discrete Dispersion Relation for hp-Version Finite Element Approximation at High Wave Number“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.2 (2004), S. 553–575. DOI: 10.1137/S0036142903423460.
- [Ale95] C. Alemany, A. M. Gonzalez, L. Pardo, B. Jimenez, F. Carmona und J. Mendiola. „Automatic determination of complex constants of piezoelectric lossy materials in the radial mode“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 28.5 (1995), S. 945–956. DOI: 10.1088/0022-3727/28/5/017.
- [And07] M. A. B. Andrade, E. Silva, F. Buiochi und J. C. Adamowski. „Characterization of piezoelectric materials by using an optimization algorithm“. In: *Proceedings of the International Congress on Ultrasonics*. 2007. DOI: 10.3728/icultrasonics.2007.vienna.1615_andrade.
- [APC21] *Physical and Piezoelectric Properties of APC Materials*. APC International. 2021. URL: www.americanpiezo.com/images/APC_materials_properties-compressed.pdf (besucht am 02.03.2021).
- [Arl82] G. Arlt. „Piezoelectric relaxation“. In: *Ferroelectrics* 40.1 (1982), S. 149–157. DOI: 10.1080/00150198208218166.
- [Bäk02] M. Bäker. *Numerische Methoden in der Materialwissenschaft*. Bd. 8. Braunschweig: Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, 2002. ISBN: 978-3-936148-08-4.
- [Bat06] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Boston: Englewood Cliffs, 2006. ISBN: 978-0-9790049-0-2.

- [Bau16] F. Bause. „Ein ultraschallbasiertes inverses Messverfahren zur Charakterisierung viskoelastischer Materialparameter von Polymeren“. Dissertation. Universität Paderborn, 2016.
- [Ber64] D. A. Berlincourt, D. R. Curran und H. Jaffe. „Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers“. In: *Physical acoustics*. Hrsg. von W. P. Mason. New York: Academic Press, 1964. ISBN: 978-1-4832-2857-0.
- [Ber06] G. Bertotti und I. D. Mayergoyz. *The science of hysteresis*. Amsterdam: Academic, 2006. ISBN: 978-0-12-480874-4.
- [Bra99] M. A. Branch, T. F. Coleman und Y. Li. „A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.1 (1999), S. 1–23. DOI: 10.1137/S1064827595289108.
- [Bri10] M. Brissaud. „Three-dimensional modeling of piezoelectric materials“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 57.9 (2010), S. 2051–2065. DOI: 10.1109/TUFFC.2010.1653.
- [Bui15] F. Buiocchi, C. Y. Kiyono, N. Pérez, J. C. Adamowski und E. Silva. „Efficient Algorithm Using a Broadband Approach to Determine the Complex Constants of Piezoelectric Ceramics“. In: *Physics Procedia* 70 (2015), S. 143–146. DOI: 10.1016/j.phpro.2015.08.070.
- [Bur53] C. van der Burgt. „Dynamical physical parameters of the magnetostrictive excitation of extensional and torsional vibrations in ferrites“. In: *Philips Research Reports* 8.2 (1953), S. 91–132.
- [But14] S. Butterworth. „On electrically-maintained vibrations“. In: *Proceedings of the Physical Society of London* 27.1 (1914), S. 410–424.
- [Cao08] J. Cao und J. Lin. „A study on formulation of objective functions for determining material models“. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 50.2 (2008), S. 193–204. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2007.07.003.

- [Car88] J. M. Carcione, D. Kosloff und R. Kosloff. „Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium“. In: *Geophysical Journal International* 95.3 (1988), S. 597–611. DOI: 10.1111/j.1365-246x.1988.tb06706.x.
- [Car94] J. M. Carcione und F. Cavallini. „A rheological model for anelastic anisotropic media with applications to seismic wave propagation“. In: *Geophysical Journal International* 119.1 (1994), S. 338–348. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1994.tb00931.x.
- [Chi88] F. J. Chinchurreta und F. Montero De Espinosa. „Guides to characterize piezoelectric materials from disk shaped samples“. In: *Ferroelectrics* 81.1 (1988), S. 229–232. DOI: 10.1080/00150198808008850.
- [Cla21] L. Claes, N. Feldmann, B. Henning, B. Jurgelucks, V. Schulze, S. Schmidt und A. Walther. „Optimised Multi-Electrode Topology for Piezoelectric Material Characterisation“. In: *SMSI 2021 Conference*. AMA Service GmbH, 2021, S. 237–238. DOI: 10.5162/SMSI2021/A10.1.
- [Cla00] J. D. Clayton und J. J. Rencis. „Numerical integration in the axisymmetric finite element formulation“. In: *Advances in Engineering Software* 31.2 (2000), S. 137–141. DOI: 10.1016/S0965-9978(99)00021-6.
- [Coc12] S. Cochran. „Piezoelectricity and basic configurations for piezoelectric ultrasonic transducers“. In: *Ultrasonic transducers*. Hrsg. von K. Nakamura. Cambridge: Woodhead Publishing, 2012, S. 3–35. DOI: 10.1533/9780857096302.1.3.
- [Coh07] H. Cohen. *Complex Analysis with Applications in Science and Engineering*. Boston: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-73058-5.
- [Com61] I. S. Committee. „IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics“. In: *Proceedings of the IRE* 49.7 (1961), S. 1161–1169. DOI: 10.1109/JRPROC.1961.287860.

Literaturverzeichnis

- [Coo02] R. D. Cook. *Concepts and applications of finite element analysis*. New York: Wiley, 2002. ISBN: 978-0-471-35605-9.
- [Cra06] R. R. Craig und A. Kurdila. *Fundamentals of structural dynamics*. Hoboken: John Wiley, 2006. ISBN: 978-0-471-43044-5.
- [Cur81] J. Curie und P. Curie. „Contractions et dilatations produites par des tensions dans les cristaux hémiedres à faces inclinées“. In: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 93 (1881), S. 1137–1140.
- [Cur80] J. Curie und P. Curie. „Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées“. In: *Bulletin de la Société minéralogique de France* 3.4 (1880), S. 90–93. DOI: 10.3406/bulmi.1880.1564.
- [DIN50324-1] DIN 50324-1. *Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 1: Begriffe*. Beuth Verlag, 2002.
- [DIN50324-2] DIN 50324-2. *Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 2: Messverfahren, Kleinsignal*. Beuth Verlag, 2002.
- [DIN50324-3] DIN 50324-2. *Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten - Teil 3: Messverfahren, Großsignal*. Beuth Verlag, 2002.
- [Don10] Y. Dong, Z. Wu, H. Hu, B. Wu und G. Xu. „A novel method for characterization of piezoelectric material parameters by simulated annealing optimization“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 57.12 (2010), S. 2613–2615. DOI: 10.1109/TUFFC.2010.1735.
- [Dre19] D. Dreiling, N. Feldmann und B. Henning. „A DC bias approach to the characterisation of non-linear material parameters of piezoelectric ceramics“. In: *20. GMA/ITG-Fachtagung*. 2019. DOI: 10.5162/sensoren2019/5.1.2.

- [Dyk28] K. S. van Dyke. „The piezo-electric resonator and its equivalent network“. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. Bd. 16. 6. 1928, S. 742–764.
- [Ein16] A. Einstein. „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Annalen der Physik* 354.7 (1916), S. 769–822. DOI: 10.1002/andp.19163540702.
- [Eve71] J. L. Everhart. *Engineering Properties of Nickel and Nickel Alloys*. Boston: Springer, 1971. ISBN: 978-1-4684-1884-2.
- [Fel16] N. Feldmann, F. Bause und B. Henning. *GUM-konforme Unsicherheitsabschätzung bei inversen Problemen am Beispiel akustischer Transmissionsmessungen*. Workshop „Messtechnische Anwendungen von Ultraschall“, Drübeck. 2016.
- [Fel17] N. Feldmann, F. Bause und B. Henning. „Uncertainty estimation for linearised inverse problems comparing Bayesian inference and a pseudoinverse approach for acoustic transmission measurements“. In: *tm - Technisches Messen* 84.4 (2017), S. 217–224. DOI: 10.1515/teme-2016-0022.
- [Fel18] N. Feldmann und B. Henning. „Efficient optimisation of initial values for characterising piezoelectric material parameters“. In: *Fortschritte der Akustik*. 2018, S. 1275–1278.
- [Fel19a] N. Feldmann, B. Jurgelucks, L. Claes und B. Henning. „A sensitivity-based optimisation procedure for the characterisation of piezoelectric discs“. In: *2019 International Congress on Ultrasonics*. ASA, 2019. DOI: 10.1121/2.0001070.
- [Fel19b] N. Feldmann, B. Jurgelucks, L. Claes, V. Schulze, B. Henning und A. Walther. „An inverse approach to the characterisation of material parameters of piezoelectric discs with triple-ring-electrodes“. In: *tm - Technisches Messen* 86.2 (2019), S. 59–65. DOI: 10.1515/teme-2018-0066.

- [Fel21] N. Feldmann, V. Schulze, L. Claes, B. Jurgelucks, L. Meihost, A. Walther und B. Henning. „Modelling damping in piezoceramics: A comparative study“. In: *tm - Technisches Messen* (2021). DOI: 10.1515/teme-2020-0096.
- [Fel20a] N. Feldmann, V. Schulze, L. Claes, B. Jurgelucks, A. Walther und B. Henning. „Inverse piezoelectric material parameter characterization using a single disc-shaped specimen“. In: *tm - Technisches Messen* 87.s1 (2020), S. 50–55. DOI: 10.1515/teme-2020-0012.
- [Fel20b] N. Feldmann, V. Schulze, B. Jurgelucks und B. Henning. „Solving piezoelectric inverse problems using Algorithmic Differentiation“. In: *Fortschritte der Akustik*. 2020, S. 1125–1128.
- [Fri19] O. Friesen. „Entwicklung einer Vorrichtung zur Strukturierung von Elektroden auf Piezokeramiken mittels Laserablation“. Bachelorarbeit. Universität Paderborn, 2019.
- [Fuk71] E. Fukada und T. Sakurai. „Piezoelectricity in Polarized Poly(vinylidene fluoride) Films“. In: *Polymer Journal* 2.5 (1971), S. 656–662. DOI: 10.1295/polymj.2.656.
- [Gal12] M. Gall. „Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Lebensdauer von flächigen piezokeramischen Sensor - / Aktor - Modulen“. Dissertation. Karlsruher Institut für Technologie, 2012. DOI: 10.5445/IR/1000029172.
- [Geu09] C. Geuzaine und J.-F. Remacle. „Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (2009), S. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579.
- [Gon16] A. M. González, Á. García, C. Benavente-Peces und L. Pardo. „Revisiting the Characterization of the Losses in Piezoelectric Materials from Impedance Spectroscopy at Resonance“. In: *Materials* 9.2 (2016). DOI: 10.3390/ma9020072.

- [Had02] J. Hadamard. „Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique“. In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), S. 49–52.
- [Hag12] M. Hagiwara, T. Hoshina, H. Takeda und T. Tsurumi. „Identicalness between Piezoelectric Loss and Dielectric Loss in Converse Effect of Piezoelectric Ceramic Resonators“. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 51 (2012). DOI: 10.1143/JJAP.51.09LD10.
- [Hal06] J. F. Hall. „Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping“. In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 35.5 (2006), S. 525–545. DOI: 10.1002/eqe.541.
- [Hau16] A. Hauck. „Higher Order Finite Elements for Coupled and Anisotropic Field Problems“. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2016.
- [Hey08] W. Heywang, K. Lubitz und W. Wersing. *Piezoelectricity: Evolution and future of a technology*. Bd. 114. Berlin: Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-68680-4.
- [Hol67] R. Holland. „Representation of Dielectric, Elastic, and Piezoelectric Losses by Complex Coefficients“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 14.1 (1967), S. 18–20. DOI: 10.1109/T-SU.1967.29405.
- [Hol68] R. Holland und E. P. Eer Nisse. „Variational Evaluation of Admittances of Multielectroded Three-Dimensional Piezoelectric Structures“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 15.2 (1968), S. 119–131. DOI: 10.1109/T-SU.1968.29457.
- [IEEE87] 176-1987. *IEEE Standard on Piezoelectricity*. American National Standards Institute, 1987. DOI: 10.1109/IEEESTD.1988.79638.
- [Ike96] T. Ikeda. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford: Oxford University Press, 1996. ISBN: 978-0-19-856339-6.
- [Ise36] F. Ise. *Gewöhnliche Differentialgleichungen nebst Anwendungen*. Berlin: Springer, 1936. ISBN: 978-3-642-51962-8.

- [Ise12] A. Iserles. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Bd. 44. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9780511995569.
- [Iul98] A. Iula, N. Lamberti und M. Pappalardo. „An approximated 3-D model of cylinder-shaped piezoceramic elements for transducer design“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 45.4 (1998), S. 1056–1064. DOI: 10.1109/58.710588.
- [Jaf52] B. Jaffe. „Piezoelectric Transducers Using Lead Titanate and Lead Zirconat“. U.S. Patent US2708244A. 1952.
- [JCGM100:2008] 100:2008. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*. 2008.
- [JCGM101:2008] 101:2008. *Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement — Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. 2008.
- [JCGM102:2011] J. C. for Guides in Metrology. *Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement — Extension to any number of output quantities*. 2011.
- [Jur19] B. Jurgelucks. „Increased sensitivity in parameter identification problems for piezoelectrics“. Dissertation. Universität Paderborn, 2019. DOI: 10.17619/UNIPB/1-654.
- [Kal07] M. Kaltenbacher. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators - Finite Elements for Computational Multiphysics*. Wien: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-71359-3.
- [Kal10] M. Kaltenbacher. „Advanced Simulation Tool for the Design of Sensors and Actuators“. In: *Procedia Engineering* 5 (2010), S. 597–600. DOI: 10.1016/j.proeng.2010.09.180.
- [Kam08] D. W. Kammler. *A First Course in Fourier Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 978-0-511-37595-8.
- [Key16] *Impedance Measurement Handbook*. 6. Aufl. Keysight Technologies. 2016.

- [Key20] *E4990A Impedance Analyzer Data Sheet*. Keysight Technologies. Okt. 2019.
- [Kin87] G. S. Kino. *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing: Devices, imaging, and analog signal processing*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987. ISBN: 978-0-13-003047-4.
- [Kra27] H. Kramers. „La diffusion de la lumière par les atomes“. In: *Transactions of Volta Centenary Congress*. Bd. 2. 1927, S. 545–557.
- [Kro26] R. Kronig. „On the Theory of Dispersion of X-Rays“. In: *Journal of the Optical Society of America* 12.6 (1926), S. 547. DOI: 10.1364/josa.12.000547.
- [Kul15] K. Kulshreshtha, B. Jurgelucks, F. Bause, J. Rautenberg und C. Unverzagt. „Increasing the sensitivity of electrical impedance to piezoelectric material parameters with non-uniform electrical excitation.“ In: *Journal of Sensors and Sensor Systems* 4 (2015), S. 217–227. ISSN: 2194-878X.
- [Kwo97] K. W. Kwok, H. Chan und C. Choy. „Evaluation of the material parameters of piezoelectric materials by various methods“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 44.4 (1997), S. 733–742. DOI: 10.1109/58.655188.
- [Kyb02] D. Kybartas und A. Lukosevicius. „Determination of piezoceramics parameters by the use of mode interaction and fitting of impedance characteristics“. In: *ULTRAGARSAS* 45.4 (2002), S. 22–28.
- [Lah08a] T. Lahmer. „Forward and Inverse Problems in Piezoelectricity“. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2008.
- [Lah05] T. Lahmer, B. Kaltenbacher und M. Mohr. „Simulation Based Determination of Piezoelectric Material Parameters“. In: *PAMM* 5.1 (2005), S. 59–62. DOI: 10.1002/pamm.200510016.

- [Lah08b] T. Lahmer, B. Kaltenbacher und V. Schulz. „Optimal measurement selection for piezoelectric material tensor identification“. In: *Inverse Problems in Science and Engineering* 16.3 (2008), S. 369–387. DOI: 10.1080/17415970701743368.
- [Lan64] C. Land, G. Smith und C. Westgate. „The Dependence of the Small-Signal Parameters of Ferroelectric Ceramic Resonators Upon State of Polarization“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 11.1 (1964), S. 8–18. DOI: 10.1109/t-su.1964.29327.
- [Lea10] K. K. Leang, Q. Zou und G. Pannozzo. „Teaching Modules on Modeling and Control of Piezoactuators for System Dynamics, Controls, and Mechatronics Courses“. In: *IEEE Transactions on Education* 53.3 (2010), S. 372–383. DOI: 10.1109/TE.2009.2024930.
- [Ler90] R. Lerch. „Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 37.3 (1990), S. 233–247. DOI: 10.1109/58.55314.
- [Let93] M. Lethiecq, F. Patat, L. Pourcelot und L. P. Tran-Huu-Hue. „Measurement of losses in five piezoelectric ceramics between 2 and 50 MHz“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 40.3 (1993), S. 232–237. DOI: 10.1109/58.216836.
- [Lin98] S. Y. Lin. „Coupled Vibration Analysis of Piezoelectric Ceramic Disk Resonators“. In: *Journal of Sound and Vibration* 218.2 (1998), S. 205–217. DOI: 10.1006/jsvi.1998.1750.
- [Lip81] G. Lippmann. „Principe de la conservation de l’électricité“. In: *Annales de Chimie Et de Physique, 1881, Vol. 22: Cinquième Série (Classic Reprint)*. Hrsg. von M. E. Chevreul. 1881.
- [Log12] A. Logg, K.-A. Mardal und G. N. Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-23098-1. DOI: 10.1007/978-3-642-23099-8.

- [Lou89] A. K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Stuttgart: Teubner, 1989. DOI: 10.1007/978-3-322-84808-6.
- [Mas48] W. P. Mason. *Electromechanical transducers and wave filters*. Madison: D. Van Nostrand Co, 1948. ISBN: 978-0-442-05164-8.
- [Meg21] *Pz27 (Navy II) Soft relaxor type PZT*. Meggit. 2021. URL: https://www.meggittferroperm.com/wp-content/uploads/2017/10/MSSDK_PZ27_Datasheet-201809.pdf (besucht am 02.03.2021).
- [Mei18] L. Meihost. „Entwicklung und Realisierung eines automatisierten Messsystems zur Bestimmung der Impedanz von Mehrelektroden-Piezokeramiken“. Masterarbeit. Universität Paderborn, 2018.
- [Mei73] A. Meitzler, H. O’Byrne und H. Tiersten. „Definition and Measurement of Radial Mode Coupling Factors in Piezoelectric Ceramic Materials with Large Variations in Poisson’s Ratio“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 20.3 (1973), S. 233–239. DOI: 10.1109/T-SU.1973.29750.
- [Meu17] T. Meurisse und D. Damjanovic. „Modeling losses of a piezoelectric resonator: Analytical vs finite elements analysis“. In: *2017 Joint IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectric*. IEEE, 2017, S. 71–74. DOI: 10.1109/ISAF.2017.8000215.
- [Mos60] D. S. Moseley. „Contribution to the Theory of Radial Extensional Vibrations in Thin Disks“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 32.8 (1960), S. 991–995. DOI: 10.1121/1.1908349.
- [Müh17] T. Mühl. *Elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen*. Wiesbaden: Springer, 2017. ISBN: 978-3-658-15719-7.
- [Mur04] G. B. Muravskii. „On frequency independent damping“. In: *Journal of Sound and Vibration* 274.3-5 (2004), S. 653–668. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.05.012.

- [Müs72] H. E. Müser und H. Schmitt. „Measurements of complex piezoelectric constants in ferroelectric crystals“. In: *Le Journal de Physique Colloques* 33.C2 (1972), S. C2-103-C2-104. DOI: 10.1051/jphyscol:1972232.
- [Nak16] N. Nakamura. „Extended Rayleigh Damping Model“. In: *Frontiers in Built Environment* 2 (2016). DOI: 10.3389/fbuil.2016.00014.
- [New59] N. M. Newmark. „A method of computation for structural dynamics“. In: *Journal of the Eng. Mech. Div.* 85.3 (1959), S. 67–94.
- [Nol16] W. Nolting. *Grundkurs theoretische Physik*. Berlin: Springer, 2016. ISBN: 978-3-662-49032-7.
- [Nus72] H. M. Nussenzweig. *Causality and dispersion relations*. New York: Academic Press, 1972. ISBN: 978-1-282-28886-7.
- [openCFS20] *openCFS*. 2020. URL: <https://gitlab.com/openCFS/cfs>.
- [Pen55] R. Penrose. „A generalized inverse for matrices“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51 (1955), S. 406–413.
- [Pér10] N. Pérez, M. Andrade, F. Buiochi und J. Adamowski. „Identification of elastic, dielectric, and piezoelectric constants in piezoceramic disks“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 57.12 (2010), S. 2772–2783. DOI: 10.1109/TUFFC.2010.1751.
- [Pér16] N. Pérez, F. Buiochi, M. Brizzotti Andrade und J. Adamowski. „Numerical Characterization of Piezoceramics Using Resonance Curves“. In: *Materials* 9.2 (2016). DOI: 10.3390/ma9020071.
- [Pér14] N. Pérez, R. C. Carbonari, M. A. B. Andrade, F. Buiochi und J. C. Adamowski. „A FEM-based method to determine the complex material properties of piezoelectric disks“. In: *Ultrasonics* 54.6 (2014), S. 1631–1641. DOI: 10.1016/j.ultras.2014.03.006.

- [PI19] *Piezoelectric Ceramic Products: Fundamentals, Characteristics and Applications*. 2019. URL: https://static.piceramic.com/fileadmin/user_upload/pi_ceramic/files/catalog_CAT/PI_CAT125E_R3_Piezoelectric_Ceramic_Products.pdf (besucht am 05.12.2019).
- [Pia17] C. Piao und J. O. Kim. „Vibration characteristics of an ultrasonic transducer of two piezoelectric discs“. In: *Ultrasonics* 74 (2017), S. 72–80. DOI: 10.1016/j.ultras.2016.09.021.
- [Pow98] D. J. Powell, J. Mould und G. L. Wojcik. „Dielectric and mechanical absorption mechanisms for time and frequency domain transducer modeling“. In: *1998 IEEE ultrasonics symposium proceeding*. 1998, S. 1019–1024. DOI: 10.1109/ULTSYM.1998.764978.
- [PRAP] TASI Technical Software. *PRAP*. Aufgerufen: 17.05.2018. Kingston. URL: <http://www.tasitechnical.com/prap>.
- [Pri03] T. Pritz. „Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials“. In: *Journal of Sound and Vibration* 265.5 (2003), S. 935–952. ISSN: 0022460X.
- [Rau12] J. Rautenberg. „Ein wellenleiterbasiertes Verfahren zur Bestimmung von Materialdaten für die realitätsnahe Simulation von Schallausbreitungsphänomenen am Beispiel stark absorbierender Kunststoffe“. Dissertation. Universität Paderborn, 2012.
- [Ray94] J. Rayleigh. *The Theory of Sound*. 1. Macmillan, 1894. ISBN: 978-0-486-60292-9.
- [Rob47] S. Roberts. „Dielectric and Piezoelectric Properties of Barium Titanate“. In: *Physical Review* 71.12 (1947), S. 890–895. DOI: 10.1103/PhysRev.71.890.
- [RoHS11] Das Europäische Parlament und der Rat. *Beschränkung der Verwendung bestimmter gefährlicher Stoffe in Elektro- und Elektronikgeräten*. 2011/65/EU. 2011.
- [Ros95] G. van Rossum. *Python tutorial*. Techn. Ber. CS-R9526. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), 1995.

- [Rup15] S. J. Rupitsch und J. Ilg. „Complete Characterization of Piezoceramic Materials by Means of Two Block-Shaped Test Samples“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 62.7 (2015), S. 1403–1413. DOI: 10.1109/TUFFC.2015.006997.
- [Rup11a] S. J. Rupitsch, J. Ilg und R. Lerch. „Enhancement of the inverse method enabling the material parameter identification for piezoceramics“. In: *2011 IEEE International Ultrasonics Symposium*. 2011, S. 357–360. DOI: 10.1109/ULTSYM.2011.0085.
- [Rup11b] S. J. Rupitsch, J. Ilg, A. Sutor, R. Lerch und M. Dörlinger. „Simulation based estimation of dynamic mechanical properties for viscoelastic materials used for vocal fold models“. In: *Journal of Sound and Vibration* 330.18-19 (2011), S. 4447–4459. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.05.008.
- [Rup09] S. J. Rupitsch und R. Lerch. „Inverse Method to estimate material parameters for piezoceramic disc actuators“. In: *Applied Physics A* 97.4 (2009), S. 735–740. DOI: 10.1007/s00339-009-5438-1.
- [Rup10] S. J. Rupitsch, A. Sutor, J. Ilg und R. Lerch. „Identification procedure for real and imaginary material parameters of piezoceramic materials“. In: *2010 IEEE International Ultrasonics Symposium*. 2010, S. 1214–1217. DOI: 10.1109/ULTSYM.2010.5935504.
- [Rup19] S. J. Rupitsch. *Piezoelectric Sensors and Actuators: Fundamentals and Applications*. Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering. Berlin: Springer, 2019. DOI: 10.1007/978-3-662-57534-5.
- [San97] J. L. San Emeterio. „Determination of electromechanical coupling factors of low Q piezoelectric resonators operating in stiffened modes“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 44.1 (1997), S. 108–113. DOI: 10.1109/58.585203.
- [San99] J. L. San Emeterio, P. T. Sanz und A. Ramos. „Influence of dielectric losses on the shift of the fundamental frequencies of thickness mode piezoelectric ceramic

- resonators“. In: *Journal of the European Ceramic Society* 19.6-7 (1999), S. 1165–1169. DOI: 10.1016/S0955-2219(98)00393-8.
- [Sar21] *Sartorius Analysenwaagen*. Sartorius AG, Wägetechnik. 2021.
- [Saw53] E. Sawaguchi. „Ferroelectricity versus Antiferroelectricity in the Solid Solutions of PbZrO₃ and PbTiO₃“. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 8.5 (1953), S. 615–629. DOI: 10.1143/JPSJ.8.615.
- [Sch51] K. Schellbach. „Probleme der Variationsrechnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 41 (1851), S. 293–363. DOI: 10.1515/crll.1851.41.293.
- [Sch18] H. Schmiegel. „Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Eigenschaften von Piezokeramiken“. Bachelorarbeit. Universität Paderborn, 2018.
- [Sch10] T. Scholehwar. „Charakterisierung der Struktur-Gefüge-Eigenschaftsbeziehungen von piezokeramischen Werkstoffen des System PZT-SKN“. Dissertation. TU Dresden, 2010.
- [Sch21] V. Schulze, S. Schmidt, B. Jurgelucks, N. Feldmann und L. Claes. *Optimal experiment design with respect to electrode configurations for a piezoelectric problem*. GAMM Annual Meeting, Kassel. 2021.
- [She11] S. Sherrit, T. J. Masys, H. D. Wiederick und B. K. Mukherjee. „Determination of the reduced matrix of the piezoelectric, dielectric, and elastic material constants for a piezoelectric material with C_{∞} symmetry“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 58.9 (2011), S. 1714–1720. DOI: 10.1109/TUFFC.2011.2008.
- [She98] S. Sherrit und B. K. Mukherjee. „The use of complex material constants to model the dynamic response of piezoelectric materials“. In: *IEEE Ultrasonics Symposium Proceeding*. New York: IEEE, 1998, S. 633–640. DOI: 10.1109/ULTSYM.1998.762229.

- [She07] S. Sherrit und B. Mukherjee. „Characterization of Piezoelectric Materials for Transducers“. In: *ArXiv e-prints* (2007). arXiv: 0711.2657.
- [She92] S. Sherrit, H. Wiederick und B. Mukherjee. „Non-iterative evaluation of the real and imaginary material constants of piezoelectric resonators“. In: *Ferroelectrics* 134.1 (1992), S. 111–119. DOI: 10.1080/00150199208015574.
- [She91] S. Sherrit, N. Gauthier, H. D. Wiederick und B. K. Mukherjee. „Accurate evaluation of the real and imaginary material constants for a piezoelectric resonator in the radial mode“. In: *Ferroelectrics* 119.1 (1991), S. 17–32. DOI: 10.1080/00150199108223323.
- [Sim02] R. Simkovics. „Nichtlineares piezoelektrisches Finite-Elemente-Verfahren zur Modellierung piezokeramischer Aktoren“. Dissertation. Düsseldorf, 2002.
- [Smi05] R. Smith. *Smart Material Systems*. Philadelphia: Society for Industrial und Applied Mathematics, 2005. ISBN: 978-0-89871-583-5. DOI: 10.1137/1.9780898717471.
- [Smi76a] J. G. Smits. „Influence of Moving Domain Walls and Jumping Lattice Defects on Complex Material Coefficients of Piezoelectrics“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 23.3 (1976), S. 168–173. DOI: 10.1109/T-SU.1976.30857.
- [Smi76b] J. Smits. „Iterative Method for Accurate Determination of the Real and Imaginary Parts of the Materials Coefficients of Piezoelectric Ceramics“. In: *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* 23.6 (1976), S. 393–401. DOI: 10.1109/T-SU.1976.30898.
- [Spi99] M. R. Spiegel. *Schaum’s outline of theory and problems of complex variables: With an introduction to conformal mapping and its applications*. New York: McGraw-Hill, 1999. ISBN: 978-0-07-060230-4.
- [The00a] P. S. Theocaris und D. P. Sokolis. „Spectral decomposition of the compliance fourth-rank tensor for orthotropic materials“. In: *Archive of Applied Mechanics* 70.4 (2000), S. 289–306. DOI: 10.1007/s004199900066.

- [The98] P. Theocaris und D. Sokolis. „Spectral Decomposition of the Compliance Tensor for Anisotropic Plates“. In: *Journal of Elasticity* 51.2 (1998), S. 89–103. DOI: 10.1023/A:1007549729716.
- [The00b] P. S. Theocaris. „Sorting out the elastic anisotropy of transversely isotropic materials“. In: *Acta Mechanica* 143.3-4 (2000), S. 129–140. DOI: 10.1007/BF01170943.
- [Tic80] J. Tichy. *Piezoelektrische Messtechnik*. Berlin: Springer, 1980. ISBN: 978-3-540-09448-7.
- [Uch12] K. Uchino. „Piezoelectric ceramics for transducers“. In: *Ultrasonic transducers*. Cambridge: Woodhead Publishing, 2012, S. 70–116. DOI: 10.1533/9780857096302.1.70.
- [Unv18] C. Unverzagt. „Sensitivitätssteigerung durch Elektrodenmodifikation für die Materialparameterbestimmung von Piezokeramiken“. Dissertation. Universität Paderborn, 2018. DOI: 10.17619/UNIPB/1-311.
- [Unv13] C. Unverzagt, J. Rautenberg, B. Henning und K. Kulshreshtha. „Modified electrode shape for the improved determination of piezoelectric material parameters“. In: *Proceedings of the 2013 International Congress on Ultrasonics*. Singapore, 2013, S. 758–763. ISBN: 978-981-07-5938-4.
- [Val] R. Valentí. *Thermodynamics and Statistical Physics*. Vorlesungsskript, Universität Frankfurt.
- [Vir20] P. Virtanen et al. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [Voi66] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik: Mit Ausschluß der Kristalloptik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1966. ISBN: 978-3-663-15884-4.
- [Wag17] M. Wagner. *Lineare und nichtlineare FEM: Eine Einführung mit Anwendungen in der Umformsimulation mit LS-DYNA®*. Wiesbaden: Springer, 2017. ISBN: 978-3-658-17865-9.
- [Wal17] G. Walz, Hrsg. *Lexikon der Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-662-53498-4.

Literaturverzeichnis

- [War93] I. M. Ward und D. W. Hadley. *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. Chichester: Wiley, 1993. ISBN: 978-0-471-49626-7.
- [Wei11] F. Wein. „Topology optimization of smart piezoelectric transducers“. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2011.
- [Wir04] A. Wirgin. „The inverse crime“. In: *ArXiv e-prints* (2004). arXiv: math-ph/0401050.
- [Mat18] I. Wolfram Research. *Mathematica, Version 11.3*. Champaign, IL, 2018.
- [Ye08] Z.-G. Ye. *Handbook of dielectric, piezoelectric and ferroelectric materials: Synthesis, properties and applications*. Cambridge: Woodhead Pub., 2008. ISBN: 978-1-84569-186-8.
- [You05] Y. You-ping, W. Seemann, R. Gausmann und Z. Jue. „A new hybrid piezoelectric ultrasonic motor with two stators“. In: *Journal of Central South University of Technology* 12.3 (2005), S. 324–328. DOI: 10.1007/s11771-005-0154-2.
- [Zha17] G. Zhang. *Introduction to integrative engineering: A computational approach to biomedical problems*. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2017. ISBN: 978-1-315-38846-5.
- [Zia09] R. K. P. Zia, E. F. Redish und S. R. McKay. „Making sense of the Legendre transform“. In: *American Journal of Physics* 77.7 (2009), S. 614–622. DOI: 10.1119/1.3119512.
- [Zie05] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu und R. L. Taylor. *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN: 978-1-85617-633-0.

Mathematischer Anhang

A

A.1 Legendre Transformation

Durch Legendre-Transformation [Zia09] kann die Beschreibung einer Funktion von einer Zuordnung zu Werten zu einer Zuordnung von Steigungen überführt werden. Das heißt es wird eine Variablentransformation von einem Funktionswert zu einer Tangentensteigung vorgenommen. Im Fall piezoelektrischer Gleichungen ermöglicht es den Übergang zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen der piezoelektrischen Gleichungen, welche aus unterschiedlichen thermodynamischen Potentialen resultieren. Ausgehend von der inneren Energie in Gleichung 3.10 (hier eindimensional betrachtet)

$$dU = EdD + TdS \quad (\text{A.1})$$

kann über die Produktregel

$$d(ED) = EdD + DdE \quad (\text{A.2})$$

$$d(TS) = TdS + SdT \quad (\text{A.3})$$

und durch Subtraktion der beiden letzteren Gleichungen von der vorherigen

$$dG = -SdT - DdE \quad (\text{A.4})$$

eine Überführung in eine andere Darstellungsform erreicht werden. Hier bezeichnet G die Gibbs-Energie [Ike96].

A.3 Ableitung von Tensoren

Im Folgenden seien einige Ableitungsoperatoren in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) definiert. Dabei beschreibt ϕ eine Skalar, \mathbf{v} einen Spaltenvektor und $\underline{\mathbf{m}}$ eine Matrix. $\hat{=}$ gibt eine Darstellung in Voigt'scher Notation an.

A.3.1 Gradient

$$\text{grad } \phi = \left[\partial_r \phi, \frac{1}{r} \partial_\varphi \phi, \partial_z \phi \right]^t \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial_r \mathbf{v}_r & \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_\varphi) & \partial_z \mathbf{v}_z \\ \partial_r \mathbf{v}_\varphi & \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_r) & \partial_z \mathbf{v}_\varphi \\ \partial_r \mathbf{v}_z & \frac{1}{r} \partial_\varphi \mathbf{v}_z & \partial_z \mathbf{v}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{=} \left[\partial_r \mathbf{v}_r, \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_r), \partial_z \mathbf{v}_z, \right. \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \partial_z \mathbf{v}_\varphi + \frac{1}{r} \partial_\varphi \mathbf{v}_z, \partial_z \mathbf{v}_r + \partial_r \mathbf{v}_z, \right.$$

$$\left. \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_\varphi) + \partial_r \mathbf{v}_\varphi \right]^t = \mathcal{G}\{\mathbf{v}\}$$

Für radiale Symmetrie:

$$\text{grad } \phi = [\partial_r \phi, \partial_z \phi]^t \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \mathbf{v} \hat{=} \left[\partial_r \mathbf{v}_r, \frac{1}{r} \mathbf{v}_r, \partial_z \mathbf{v}_z, \partial_z \mathbf{v}_r + \partial_r \mathbf{v}_z \right]^t \quad (\text{A.9})$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_r & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \partial_z \\ \partial_z & \partial_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A.3.2 Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_r \mathbf{v}_r + \frac{1}{r}(\partial_\varphi \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_r) + \partial_z \mathbf{v}_z = \mathcal{D}\{\mathbf{v}\} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \partial_r \underline{\mathbf{m}}_{rr} + \frac{1}{r}(\partial_\varphi \underline{\mathbf{m}}_{\varphi r} + \underline{\mathbf{m}}_{rr} - \underline{\mathbf{m}}_{\varphi\varphi}) + \partial_z \underline{\mathbf{m}}_{zr} \\ \partial_r \underline{\mathbf{m}}_{r\varphi} + \frac{1}{r}(\partial_\varphi \underline{\mathbf{m}}_{\varphi\varphi} + \underline{\mathbf{m}}_{r\varphi} - \underline{\mathbf{m}}_{\varphi r}) + \partial_z \underline{\mathbf{m}}_{z\varphi} \\ \partial_r \underline{\mathbf{m}}_{rz} + \frac{1}{r}(\partial_\varphi \underline{\mathbf{m}}_{\varphi z} + \underline{\mathbf{m}}_{rz}) + \partial_z \underline{\mathbf{m}}_{zz} \end{bmatrix} = \mathcal{T}\{\underline{\mathbf{m}}\} \quad (\text{A.12})$$

Für radiale Symmetrie:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_r \mathbf{v}_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}_r + \partial_z \mathbf{v}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \partial_r + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & \partial_z & \partial_r + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{m}}_{rr} \\ \underline{\mathbf{m}}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\mathbf{m}}_{zz} \\ \underline{\mathbf{m}}_{rz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Beispielmaterialparameter

B.1 Beispielmaterial PIC255

Materialparameter aus Unverzagt [Unv18]

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\underline{\underline{c}}^E = \begin{bmatrix} 119 & 84 & 83 & 0 & 0 & 0 \\ 84 & 119 & 83 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & 84 & 117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17,5 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^S = \begin{bmatrix} 8,15 & 0 & 0 \\ 0 & 8,15 & 0 \\ 0 & 0 & 6,58 \end{bmatrix} \text{ nF m}^{-1}$$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,09 & 0 & 0 \\ -6,03 & -6,03 & 15,49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

Rayleigh

$$\alpha_M = 1,267 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_K = 6,259 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Kompl. Konst.

$$\alpha_{0,1} = 0,0333$$

$$\alpha_{0,2} = 0,045$$

$$\alpha_{0,3} = 0,018$$

Zener

$$\tau_1 = 242,5 \text{ ns}$$

$$d_1 = 1,069$$

$$\tau_2 = 339,5 \text{ ns}$$

$$d_2 = 1,094$$

$$\tau_3 = 78,8 \text{ ns}$$

$$d_3 = 1,037$$

B.2 Beispielmateriale APC855

Materialparameter aus Buiochi et al. [Bui15]

$$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$$

$$\underline{\underline{c}}^E = \begin{bmatrix} 132,5 & 71,6 & 80,1 & 0 & 0 & 0 \\ 71,6 & 132,5 & 80,1 & 0 & 0 & 0 \\ 80,1 & 80,1 & 112,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,45 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^S = \begin{bmatrix} 17,44 & 0 & 0 \\ 0 & 17,44 & 0 \\ 0 & 0 & 11,519 \end{bmatrix} \text{ nF m}^{-1}$$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 18,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18,56 & 0 & 0 \\ -6,4 & -6,4 & 22,79 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

Rayleigh

$$\alpha_M = 68\,190 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_K = 1,259 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Kompl. Konst.

$$\alpha_{0,1} = 0,018$$

$$\alpha_{0,2} = 0,021$$

$$\alpha_{0,3} = 0,007$$

Zener

$$\tau_1 = 262,05 \text{ ns}$$

$$d_1 = 1,037$$

$$\tau_2 = 303,2 \text{ ns}$$

$$d_2 = 1,043$$

$$\tau_3 = 79,1 \text{ ns}$$

$$d_3 = 1,014$$

B.3 Beispielmaterial Pz27

Materialparameter aus Rupitsch et al. [Rup10]

$$\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$$

$$\underline{\underline{c}}^E = \begin{bmatrix} 147 & 105 & 93,7 & 0 & 0 & 0 \\ 105 & 147 & 93,7 & 0 & 0 & 0 \\ 93,7 & 93,7 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^S = \begin{bmatrix} 10,005 & 0 & 0 \\ 0 & 10,005 & 0 \\ 0 & 0 & 8,09 \end{bmatrix} \text{ nF m}^{-1}$$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 11,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11,64 & 0 & 0 \\ -3,09 & -3,09 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

Rayleigh

$$\alpha_M = 1,267 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_K = 6,259 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Kompl. Konst.

$$\alpha_{0,1} = 0,034$$

$$\alpha_{0,2} = 0,042$$

$$\alpha_{0,3} = 0,018$$

Zener

$$\tau_1 = 248,4 \text{ ns}$$

$$d_1 = 1,07$$

$$\tau_2 = 318,3 \text{ ns}$$

$$d_2 = 1,088$$

$$\tau_3 = 78,4 \text{ ns}$$

$$d_3 = 1,036$$

Piezelektrische Dämpfungsmodelle

C

C.1 Bestimmung der Güte

Für die Bestimmung der Dämpfungsparameter wird zunächst eine Abschätzung der Güte vorgenommen. Dazu wird zunächst wie in Kino et al. [Kin87] beschrieben eine Approximation der Impedanz der reinen Dickenschwingung vorgenommen, um einen effektiven Kopplungsfaktor zu bestimmen. Danach kann der gedämpfte Fall durch Annahme einer komplexen Frequenz abgebildet werden, deren Imaginärteil gerade mit Hilfe der Güte Q_{mech} abgebildet wird.

Ausgehend von der Impedanz einer reinen Dickenschwingung

$$Z_{\text{di}} = \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega A} \left[1 - \frac{2k_{\text{di}}^2}{q_{\text{di}} h_{\text{pc}}} \tan\left(q_{\text{di}} \frac{h_{\text{pc}}}{2}\right) \right] \quad (\text{C.1})$$

ergibt sich jeweils eine Antiresonanzfrequenz bei

$$\omega_{\text{anti,di}} = (2n + 1) \frac{\pi}{h_{\text{pc}}} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}. \quad (\text{C.2})$$

Betrachtet man nun nur den zweiten Term ergeben sich Polstellen wenn das Argument des Tangens $(2n + 1)\pi$ annimmt. Diese Art von Funktionen lassen sich mit Hilfe des Satz von Mittag-Leffler¹ als Summe schreiben.

¹ $\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8x}{(2n+1)^2\pi^2 - 4x^2}$ [Spi99]

Somit ergibt sich

$$\frac{2k_{\text{di}}^2}{q_{\text{di}}h_{\text{pc}}}\tan\left(q_{\text{di}}\frac{h_{\text{pc}}}{2}\right) = \frac{2k_{\text{di}}^2}{q_{\text{di}}h_{\text{pc}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8q_{\text{di}}\frac{h_{\text{pc}}}{2}}{(2n+1)^2\pi^2 - 4\left(q_{\text{di}}\frac{h_{\text{pc}}}{2}\right)^2} \quad (\text{C.3})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8k_{\text{di}}^2\frac{h_{\text{pc}}}{2}}{(2n+1)^2\pi^2 - (q_{\text{di}}h_{\text{pc}})^2} \quad (\text{C.4})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8k_{\text{di}}^2}{(2n+1)^2\pi^2 - \frac{(2n+1)^2\pi^2\omega^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2}} \quad (\text{C.5})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8k_{\text{di}}^2}{(2n+1)^2\pi^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2}\right)} \quad (\text{C.6})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_{\text{eff},n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2}\right)} \quad (\text{C.7})$$

mit

$$k_{\text{eff},n} = \frac{8k_{\text{di}}^2}{(2n+1)^2\pi^2}. \quad (\text{C.8})$$

Beachtet man in der Summe nur die erste Resonanzstelle ($n = 0$) ergibt sich eine Impedanz von

$$Z_{\text{di}} = \frac{\kappa_{33}^{\text{S}}h_{\text{pc}}}{j\omega A}\left[1 - \frac{k_{\text{eff}}^2\omega_{\text{anti,di}}^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2 - \omega^2}\right]. \quad (\text{C.9})$$

Im Resonanzfall gilt (vergleiche Gleichung 5.105)

$$1 = \frac{k_{\text{eff}}}{\left(1 - \frac{\omega_{\text{res,di}}^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2}\right)} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\omega_{\text{res,di}}^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2} = 1 - k_{\text{eff}}^2. \quad (\text{C.11})$$

Für gedämpfte Systeme wird eine komplexe Frequenz (oder Wellenzahl oder Steifigkeit) angenommen. Damit erhält man eine Antiresonanzfrequenz von

$$\tilde{\omega}_{\text{anti,di}} = \omega_{\text{anti,di}} \left(1 + j \frac{1}{2Q_{\text{mech}}} \right) \quad (\text{C.12})$$

$$\tilde{\omega}_{\text{anti,di}}^2 = \omega_{\text{anti,di}}^2 \left(1 + j \frac{1}{2Q_{\text{mech}}} \right)^2 \quad (\text{C.13})$$

$$\approx \omega_{\text{anti,di}}^2 \left(1 + j \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \right) \quad (\text{C.14})$$

wodurch sich eine Impedanz von

$$\tilde{Z}_{\text{di}} = \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega A} \left[1 - \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2 \left(1 + j \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \right)}{\omega_{\text{anti,di}}^2 \left(1 + j \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \right) - \omega^2} \right] \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega A} \left[1 - \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_{\text{anti,di}}^2}{Q_{\text{mech}}}} - j \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2}{\omega_{\text{anti,di}}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_{\text{anti,di}}^2}{Q_{\text{mech}}}} \right] \quad (\text{C.16})$$

ergibt. Durch konjugiert komplexe Multiplikation und Vernachlässigung aller höheren Potenzen von Q_{mech} ergibt sich mit $\Delta\omega = \omega_{\text{anti,di}}^2 - \omega^2$

$$\tilde{Z}_{\text{di}} \approx \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{j\omega A} \left[1 - \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2 \left(\Delta\omega - j \frac{\omega_{\text{anti,di}}^2}{Q_{\text{mech}}} \right)}{\Delta\omega^2} - j \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2 \left(\Delta\omega - j \frac{\omega_{\text{anti,di}}^2}{Q_{\text{mech}}} \right)}{\Delta\omega^2} \right] \quad (\text{C.17})$$

$$\approx Z_{\text{di}} + \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{\omega A} \left[\frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^4}{Q_{\text{mech}} \Delta\omega^2} - \frac{1}{Q_{\text{mech}}} \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2 \Delta\omega}{\Delta\omega^2} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$= Z_{\text{di}} + \frac{\kappa_{33}^S h_{\text{pc}}}{\omega A} \left[\frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{anti,di}}^2 \omega^2}{Q_{\text{mech}} \Delta\omega^2} \right] \quad (\text{C.19})$$

Im Resonanzfall gilt $Z_{\text{di}} = 0$. Damit ergibt sich für den Betrag der Gesamtimpedanz

$$|\tilde{Z}_{\text{di}}(\omega_{\text{res,di}})| = \frac{\kappa_{33}^{\text{S}} h_{\text{pc}}}{\omega A} \frac{k_{\text{eff}}^2 \omega_{\text{antidi}}^2 \omega^2}{Q_{\text{mech}} \Delta \omega_{\text{res,di}}^2} \quad (\text{C.20})$$

$$= \frac{\kappa_{33}^{\text{S}} h_{\text{pc}}}{\omega A} \frac{1}{k_{\text{eff}}^2 Q_{\text{mech}} \omega_{\text{res,di}}} \frac{1}{1 - k_{\text{eff}}^2}. \quad (\text{C.21})$$

Stellt man dies nach Q_{mech} um und vernachlässigt höhere Potenzen von k_{eff}^2 ergibt sich (vergleiche Gleichung 5.104)

$$Q_{\text{mech}} = \frac{\kappa_{33}^{\text{S}} h_{\text{pc}}}{\omega A} \frac{1}{\omega_{\text{res,di}} |Z_{\text{di}}(\omega_{\text{res,di}})| k_{\text{eff}}^2}. \quad (\text{C.22})$$

C.2 Spektrale Zerlegung der piezoelektrischen Materialmatrix

Wie in Unterabschnitt 3.3.5 beschrieben kann ein Materialmodell durch die spektrale Zerlegung der Materialmatrix auf drei Dimensionen erweitert werden. Dies wurde bereits für die Steifigkeitsmatrix beschrieben, kann jedoch auch für die gesamte piezoelektrische Materialmatrix

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & e_{13} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & e_{13} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

angewendet werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass hier die Betrachtungen unter Vernachlässigung der physikalischen Einheiten geschehen müssen. Daher sind die Zwischenschritte nicht immer physikalisch interpretiert.

C.2 Spektrale Zerlegung der piezoelektrischen Materialmatrix

tierbar. Für die Erweiterung müssen zunächst die Eigenwerte dieser 6×6 Matrix bestimmt werden ²:

$$\lambda_1 = c_{11} - c_{12} \quad (\text{C.24})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{11} + c_{44} + \sqrt{c_{44}^2 + \varepsilon_{11}^2 + 4e_{15}^2 - 2c_{44}\varepsilon_{11}} \right) \quad (\text{C.25})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{11} + c_{44} - \sqrt{c_{44}^2 + \varepsilon_{11}^2 + 4e_{15}^2 - 2c_{44}\varepsilon_{11}} \right) \quad (\text{C.26})$$

$$\lambda_4 = -\frac{\gamma}{3} + \frac{b}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}a}{3b} \quad (\text{C.27})$$

$$\lambda_5 = -\frac{\gamma}{3} + \frac{c^*b}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{ca}{3\sqrt[3]{4}b} \quad (\text{C.28})$$

$$\lambda_6 = -\frac{\gamma}{3} + \frac{cb}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{c^*a}{3\sqrt[3]{4}b} \quad (\text{C.29})$$

mit

$$a = 3\beta - \gamma^2 \quad (\text{C.30})$$

$$b = \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{a^3 + \alpha}} \quad (\text{C.31})$$

$$c = 1 + j\sqrt{3} \quad (\text{C.32})$$

$$c^* = 1 - j\sqrt{3} \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} \alpha = & 2(c_{11}^3 + c_{12}^3 + c_{33}^3 + \varepsilon_{33}^3) - \\ & 3 \left((c_{11}^2 + c_{12}^2)(c_{33} + \varepsilon_{33}) + (c_{33}^2 + \varepsilon_{33}^2)(c_{11} + c_{12} + c_{33}) \right) + \\ & 6 \left(c_{12}^2 c_{11} + c_{11}^2 c_{12} - c_{11} c_{12} (c_{33} + \varepsilon_{33}) \right) + \\ & 9e_{33}^2 (c_{33} + \varepsilon_{33}) + 12c_{33}\varepsilon_{33}(c_{11} + c_{12}) + \\ & 18 \left((c_{11} + e_{12})(c_{13}^2 + e_{31}^2 - e_{33}^2) + c_{13}^2 c_{33} + e_{31}\varepsilon_{33} \right) - \\ & 36(e_{31}^2 c_{33} + c_{13}^2 \varepsilon_{33}) + 108c_{13}e_{31}e_{33} \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

$$\beta = -2(c_{13}^2 + e_{31}^2) - e_{33}^2 + c_{33}(c_{11} + c_{12}) + \varepsilon_{33}(c_{11} + c_{12} + c_{33}) \quad (\text{C.35})$$

$$\gamma = -c_{11} - c_{12} - c_{33} - \varepsilon_{33}. \quad (\text{C.36})$$

²Durchführung der Berechnungen von Veronika Schulze.

C Piezoelektrische Dämpfungsmodelle

Die dazugehörigen Eigenvektoren ergeben sich dann zu

$$\mathbf{b}_1 = [-1, 1, 0, 0, 0, 0]^t \quad (\text{C.37})$$

$$\mathbf{b}_2 = \left[0, 0, 0, -\frac{1}{2e_{15}}(-c_{44} + \varepsilon_{11} + h), 1, 0 \right]^t \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{b}_3 = \left[0, 0, 0, -\frac{1}{2e_{15}}(-c_{44} + \varepsilon_{11} - h), 1, 0 \right]^t \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{b}_i = \left[\frac{\lambda_i - \varepsilon_{33}}{e_{31}} + \frac{f_i}{e_i} + d_i \left(\frac{e_{33}}{e_{31}} + \frac{g}{e_i} \right), -\frac{f_i}{e_i} + \frac{g}{e_i} d_i, -d_i, 0, 0, 1 \right]^t \quad (\text{C.40})$$

für $i = \{4, 5, 6\}$ und mit

$$d_i = \frac{-e_{31}e_{33} + c_{13}\varepsilon_{33} + c_{12}\lambda_i}{-e_{31}c_{33} + c_{13}e_{33} + e_{31}\lambda_i} \quad (\text{C.41})$$

$$e_i = e_{31} (c_{11} - c_{12} - \lambda_i) \quad (\text{C.42})$$

$$f_i = e_{31}^2 - c_{12}\varepsilon_{33} + c_{12}\lambda_i \quad (\text{C.43})$$

$$g = -c_{13}e_{31} + c_{12}e_{33} \quad (\text{C.44})$$

$$h = \sqrt{c_{44}^2 + 4e_{15}^2 - 2c_{44}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^2}. \quad (\text{C.45})$$

Um die Anzahl der benötigten Parameter gering zu halten, können auch hier unterschiedliche Eigenwerte mit gleichen Dämpfungsmechanismen erzielt werden. Beispielsweise können für λ_2 und λ_3 , sowie für λ_5 und λ_6 die gleichen Dämpfungsparameter gewählt werden.

Untersuchung des Konvergenzverhaltens

D

D.1 Konvergenz unterschiedlicher Dämpfungsmodelle an Beispielmaterialien

D.1.1 Dämpfung durch komplexe Konstanten

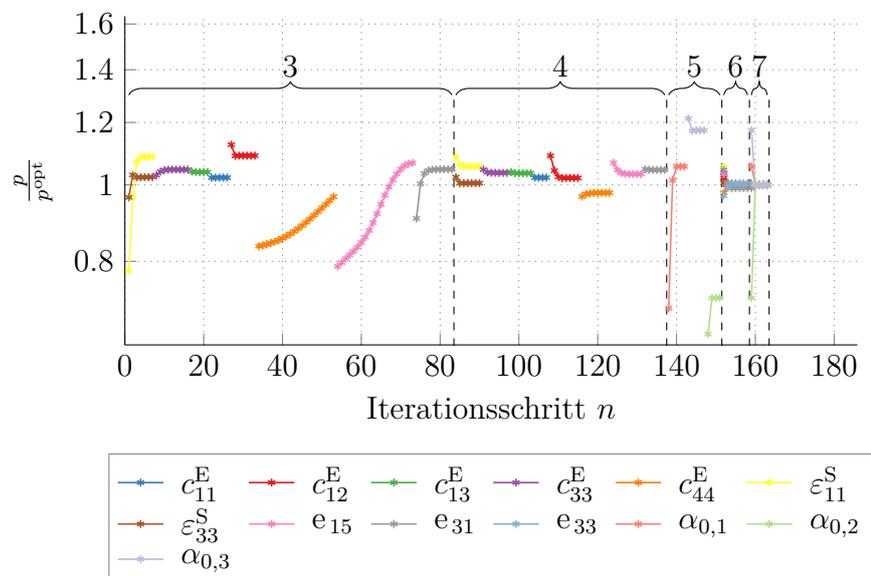


Abbildung D.1: Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmaterial PIC255 mit komplexen Konstanten.

D.1.2 Zener-Modell

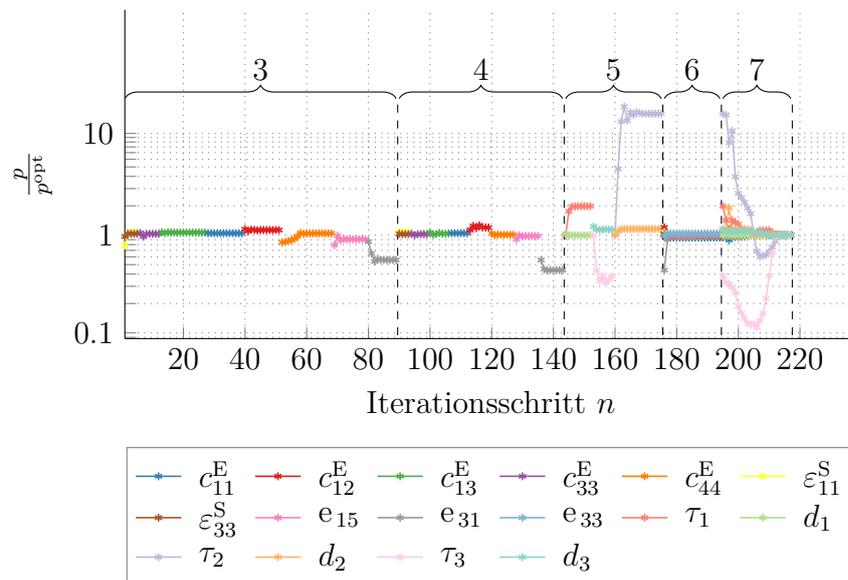


Abbildung D.2: Konvergenz des Optimierungsprozesses für Beispielmaterial PIC255 mit Zener-Modell.

D.2 Konvergenz unterschiedlicher Dämpfungsmodelle an Impedanzmessungen (PIC255)

D.2.1 Dämpfung durch komplexe Konstanten

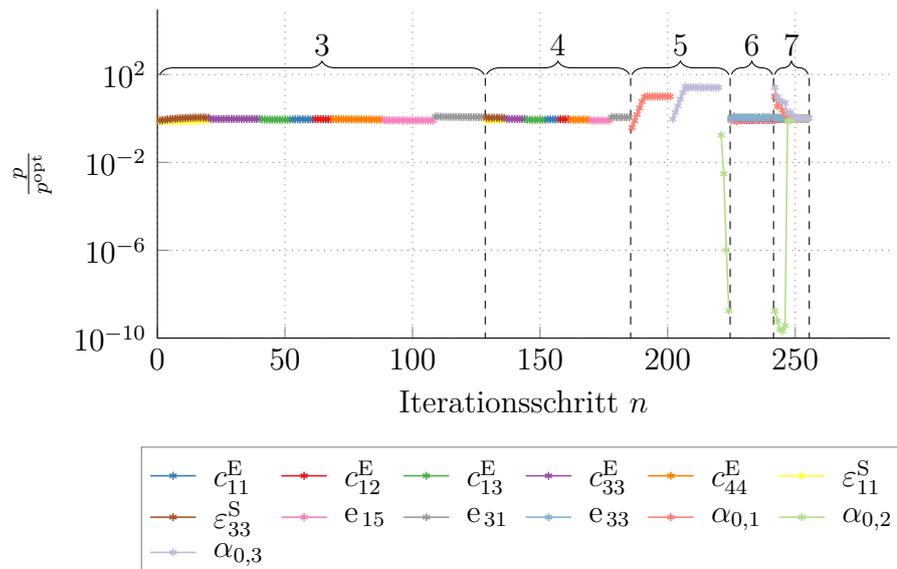


Abbildung D.3: Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255 mit komplexen Konstanten.

D.2.2 Zener-Modell

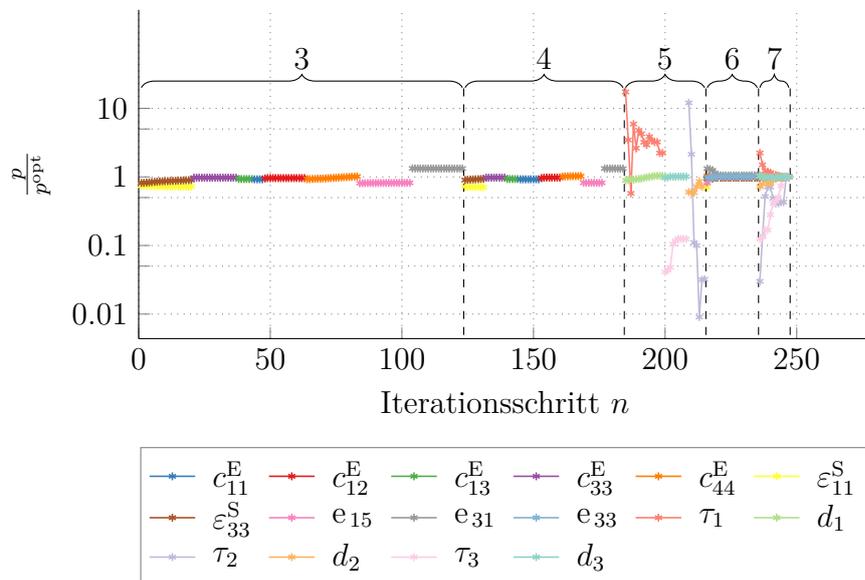


Abbildung D.4: Konvergenz des Optimierungsprozesses für PIC255 mit Zener-Modell.