

Ricarda-Samantha Götte

**Online-Schätzung von  
Modellgenauigkeiten zur  
automatischen Modelladaption  
unter Beibehaltung einer  
physikalisch-technischen  
Interpretierbarkeit**



**Ricarda-Samantha Götte**

***Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten zur automatischen Modelladaption unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit***

***Online estimation of model inaccuracies for automatic model adaptation while maintaining a physical-technical interpretability***

**Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Band 423 der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

© Heinz Nixdorf Institut, Universität Paderborn – Paderborn – 2024

ISSN (Online): 2365-4422  
ISBN: 978-3-947647-42-2

Das Werk einschließlich seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Herausgeber und des Verfassers unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigung, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Als elektronische Version frei verfügbar über die Digitalen Sammlungen der Universitätsbibliothek Paderborn.

Satz und Gestaltung: Ricarda-Samantha Götte

**Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten  
zur automatischen Modelladaption unter Beibehaltung  
einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit**

zur Erlangung des akademischen Grades  
**DOKTOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)**  
der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Paderborn

genehmigte  
**DISSERTATION**

von  
**Ricarda-Samantha Götte, M. Sc.**  
aus Büren

Tag des Kolloquiums: 08. Juli 2024  
Referent: Dr.-Ing. Julia Timmermann  
Korreferent: apl. Prof. Dr. Ralf Mikut



## **Vorwort**

Die vorliegende Dissertationsschrift entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Nachwuchsgruppe „Datengetriebene Methoden in der Regelungstechnik“ am Heinz Nixdorf Institut und am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik der Universität Paderborn.

Mein besonderer Dank gilt Dr.-Ing. Julia Timmermann für die Möglichkeit, über ein interdisziplinäres und sehr aktuelles Forschungsthema zu promovieren. Die herausragende wissenschaftliche Betreuung, die zahlreichen Fachgespräche und wertvollen Denkanstöße haben die Arbeit enorm bereichert. Herrn apl. Prof. Dr. Ralf Mikut danke ich für die Übernahme des Korreferats und das entgegenbrachte Interesse an meiner Arbeit. Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ansgar Trächtler und Frau Prof. Dr. Iryna Mozgova für ihr Mitwirken in der Promotionskommission. Vor allem Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Trächtler möchte ich meinen Dank aussprechen, da er mich bereits während des Studiums als Technomathematikerin für das Gebiet der Regelungstechnik zu begeistern wusste und meine Promotion durch viele Anregungen begleitet hat.

Außerdem möchte ich mich herzlich bei meinen Kollegen und Kolleginnen für die gute Zusammenarbeit und angenehme kollegiale Atmosphäre bedanken. Insbesondere Annika Junker und Michael Hesse danke ich für ihre Diskussionsbereitschaft und für die konstruktiven fachlichen Ratschläge. Daneben werden mir vor allem die täglichen Spaziergänge nach dem Mittagessen und die humorvollen Gespräche während gemeinsamer Pausen in Erinnerung bleiben. Für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts gilt mein Dank zudem Dr.-Ing. Sandra Gausemeier, Dr.-Ing. Kevin Malena und Christopher Lüke. Des Weiteren danke ich allen Studierenden für ihr Engagement und ihre Beiträge in studentischen Arbeiten oder als studentische Hilfskraft. Besonders hervorheben möchte ich Michael Skowronek, der mir lange Zeit als Diskussionspartner zur Seite stand und mich in der Durchführung einiger Prüfstandsversuche unterstützte. Weiterhin möchte ich Herrn Dr.-Ing. Bastian Ritter für seine Zeit und Bereitschaft danken, mir die Modellierung einer Windenergieanlage zu erläutern sowie Datensätze seiner Arbeit zu überlassen.

Schließlich empfinde ich große Dankbarkeit und Zuneigung gegenüber meiner Familie und meinen Freunden, welche mich während des Studiums und der Promotion in vielerlei Hinsicht unterstützt und immer wieder ermutigt haben, diesen Weg zu gehen. Ihr wart und seid meine Quelle neuer Zuversicht zu jeder Zeit!



## **Zusammenfassung**

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines modellbasierten Beobachters für eingangsaffine, nichtlineare Systeme, der trotz Modellungenauigkeiten eine hohe Schätzgüte erzielt und zusätzlich eine parametrische, physikalisch interpretierbare Darstellung dieser ermöglicht. Diese soll zur automatisierten Verbesserung des Modells verwendet werden. Die vorliegende Arbeit analysiert sowohl Techniken der hybriden Systemidentifikation wie physikalisch motivierte neuronale Netze, als auch Methoden zur Kompensation von Modellungenauigkeiten im Beobachterentwurf. Basierend auf der Analyse wird ein neuartiger, modellbasierter Beobachter entworfen, der Systemzustände und Modellungenauigkeiten gleichzeitig schätzt und insbesondere eine parametrische, physikalisch interpretierbare Darstellung der Ungenauigkeiten erzielt. Diese besteht aus einer Linear-kombination von physikalisch interpretierbaren Funktionen, deren dazugehörige, dünnbesetzt modellierte Parameter mithilfe eines augmentierten Zustands parallel zu den Systemzuständen geschätzt werden. Das Novum dieser Arbeit stellt somit die echtzeitfähige Schätzung von Zuständen und Modellungenauigkeiten in physikalisch-technischer Form dar, auf deren Grundlage ein Konzept zur automatisierten Modelladaption umgesetzt wird. Die Applikation der neuartigen Methode ist in der Situation auftretender Systemveränderungen besonders vorteilhaft, da diese zur Laufzeit durch den augmentierten Beobachter geschätzt und identifiziert werden können.

## **Abstract**

The aim of this thesis is the development of a model-based observer for input-affine, nonlinear systems that achieves a high estimation quality despite model inaccuracies. By additionally providing a parametric, physically interpretable representation of the model inaccuracies, an automated improvement of the model should be enabled. This thesis analyzes techniques of hybrid system identification such as physics-guided neural networks, as well as methods for compensating model inaccuracies within the observer design. Based on this analysis, a novel model-based observer is designed, which estimates states and model inaccuracies jointly and, in particular, obtains a parametric, physically interpretable representation of the inaccuracies. This consists of a linear combination of physically interpretable functions, whose associated parameters are modeled sparse and estimated in parallel to the system's states using an augmented state. The novelty of this thesis is thus the real-time capability to jointly estimate states and model inaccuracies in a physical-technical manner, on the basis of which an automated model adaption can be carried out. The application of the new methodology is particularly advantageous in the situation of occurring system changes since these can be estimated and identified at run time by the augmented observer.



## Vorveröffentlichungen

- [GKT23] GÖTTE, R.-S.; KLUSMANN, J. N.; TIMMERMANN, J.: Data-driven identification of disturbances using a sliding mode observer. *Proceedings - 33. Workshop Computational Intelligence: Berlin, 23.-24. November 2023*. Hrsg. von SCHULTE, H.; HOFFMANN, F.; MIKUT, R. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2023, S. 113–123
- [GT22] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Composed Physics- and Data-driven System Identification for Non-autonomous Systems in Control Engineering. 2022 *3rd International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control (AIRC)* 38 (2022), S. 67–76
- [GT23a] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Approximating a Laplacian Prior for Joint State and Model Estimation within an UKF. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), Nr. 2, S. 869–874
- [GT23b] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Estimating States and Model Uncertainties Jointly by a Sparsity Promoting UKF. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), Nr. 1, S. 85–90
- [GT24] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Online learning with joint state and model estimation. *Proceedings of the 9th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)* (2024)
- [SGT22] SCHÖN, O.; GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Multi-Objective Physics-Guided Recurrent Neural Networks for Identifying Non-Autonomous Dynamical Systems. *IFAC-PapersOnLine* 55 (2022), Nr. 12, S. 19–24



---

# Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten zur automatischen Modelladaption unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Motivation und Zielsetzung</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Modellbasierter Regelungsentwurf . . . . .	4
1.2 Problemstellung und Anforderungen . . . . .	6
1.3 Aufbau der Dissertation . . . . .	11
<b>2 Grundlagen zur Zustands- und Parameterschätzung</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik . . . . .	15
2.1.1 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	16
2.1.2 Statistische Momente . . . . .	18
2.1.3 Bayessche Optimierung . . . . .	20
2.2 Kalman-Filter . . . . .	23
2.2.1 Extended Kalman Filter . . . . .	27
2.2.2 Unscented Kalman Filter . . . . .	29
2.3 Sliding-Mode-Beobachter . . . . .	37
2.4 Modellgenauigkeiten und ihre Struktur . . . . .	42
<b>3 (Offline-)Strategien zur Kompensation von Modellgenauigkeiten</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1 Systemidentifikation mittels hybrider Modelle . . . . .	47
3.1.1 Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) . . . . .	49
3.1.2 Neuronale Netze . . . . .	53
3.1.3 Physics-Guided Neural Network (PGNN) . . . . .	56
3.1.4 Physics-Guided Recurrent Neural Network (PGRNN) . . . . .	69
3.1.5 Nutzbarkeit für den Beobachter- und Reglerentwurf . . . . .	76
3.2 Modellkorrektur innerhalb eines Beobachters . . . . .	80
3.2.1 Kompensation durch optimal initialisierte Kovarianzmatrizen . .	81
3.2.2 Kompensation durch diskontinuierliche Schaltfunktionen . . . . .	88

3.3	Bewertung und Handlungsbedarf . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten . . . . .</b>	<b>93</b>
4.1	Konzept Joint Estimation . . . . .	93
4.2	Voraussetzungen und Annahmen . . . . .	98
4.3	Augmentierter Beobachterentwurf . . . . .	103
4.3.1	Motivation aus dem Compressed Sensing . . . . .	103
4.3.2	Beobachterentwurf für ein Unscented Kalman Filter . . . . .	107
4.3.3	Analyse der Schätzgüte . . . . .	109
4.4	Strukturell effizienter, augmentierter Beobachterentwurf . . . . .	127
4.4.1	Motivation durch die Filterstruktur . . . . .	127
4.4.2	Beobachterentwurf für ein Unscented Kalman Filter . . . . .	133
4.4.3	Analyse der Schätzgüte . . . . .	134
4.5	Online-Schätzung von Störungen . . . . .	142
4.5.1	Automatisierte Bibliotheksgenerierung . . . . .	143
4.5.2	Analyse der Schätzgüte . . . . .	145
4.6	Zusammenfassung der Entwurfsverfahren . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Automatisierte Modellaktualisierung während der Laufzeit . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Merkmalsanalyse und -extraktion . . . . .	151
5.2	Modellaktualisierung . . . . .	161
5.3	Überprüfung der Interpretierbarkeit . . . . .	170
5.4	Bewertung des Aufwands und Nutzens . . . . .	176
<b>6</b>	<b>Resümee und Perspektiven . . . . .</b>	<b>177</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>183</b>

## Anhang

<b>A1</b>	<b>Beobachtbarkeit . . . . .</b>	<b>201</b>
<b>A2</b>	<b>Statistische Rechenregeln . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>A3</b>	<b>Regularized-Horseshoe-Verteilung . . . . .</b>	<b>205</b>
<b>A4</b>	<b>Matrixzerlegungen . . . . .</b>	<b>207</b>
A4.1	Cholesky-Zerlegung . . . . .	207
A4.2	QR-Zerlegung . . . . .	207

A4.3 Singulärwertzerlegung . . . . .	208
<b>A5 Numerische Integrationsverfahren . . . . .</b>	<b>209</b>
A5.1 Explizites Euler-Verfahren . . . . .	209
A5.2 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	209
<b>A6 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>211</b>
A6.1 Golfroboter . . . . .	211
A6.2 Servoventil . . . . .	217
A6.3 Pendel . . . . .	221
A6.4 Einfachpendel auf einem Wagen . . . . .	221
A6.5 Windenergieanlage nach Ritter und Schmitt . . . . .	222



## Abkürzungsverzeichnis

BO	Bayessche Optimierung
EI	Expected Improvement
EKF	Extended Kalman Filter
GP	Gaußprozess
GRK	Geschlossener Regelkreis
GSTA	Generalized Super Twisting Algorithmus
HNI	Heinz Nixdorf Institut
HS	Horseshoe-Verteilung
JE	Joint Estimation
KF	Kalman-Filter
KI	Künstliche Intelligenz
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
LPV	Linear Parameter-Varying, deutsch <i>linear und parametervariant</i>
LQR	Linear-quadratischer Regler, auch bekannt als Riccati-Regler
LSTM	Long Short-Term Memory
LTI	Linear Time-Invariant, deutsch <i>linear und zeitinvariant</i>
ML	Maschinelles Lernen
MOPGRNN	Multi-Objective Physics-Guided Recurrent Neural Network
MPC	Model Predictive Control, deutsch <i>modellprädiktive Regelung</i>
NEES	Normalized Estimation Error Squared
NIS	Normalized Innovation Error Squared
NN	Künstliches neuronales Netz
ORK	Offener Regelkreis
PBNN	Physics-Based Neural Network
PCA	Principal Component Analysis, deutsch <i>Hauptkomponentenanalyse</i>

---

PG(R)NN	PGNN und/oder PGRNN
PGNN	Physics-Guided Neural Network
PGRNN	Physics-Guided Recurrent Neural Network
PINN	Physics-Informed Neural Network
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RBF	Radiale Basisfunktion
RHS	Regularized-Horseshoe-Verteilung
RIP	Restricted Isometry Property
RN	Restricted Nullspace
RMSE	Root Mean Squared Error
RNN	Rekurrentes neuronales Netz
RtM	Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik
SAS	Spike-and-Slab-Verteilung
SINDy	Sparse Identification of Nonlinear Dynamics
SMO	Sliding Mode Observer, deutsch <i>Sliding-Mode-Beobachter</i>
JE-SRUKF	Joint Estimation Square Root Unscented Kalman Filter
SRUKF	Square Root Unscented Kalman Filter
STA	Super Twisting Algorithmus
SVD	Singular Value Decomposition, deutsch <i>Singulärwertzerlegung</i>
UKF	Unscented Kalman Filter
UT	Unscented Transformation
WEES	Weighted Estimation Error Squared
WIS	Weighted Innovation Error Squared

## Symbolverzeichnis

Name	Beschreibung	Einheit
$J(\cdot)$	Kostenfunktion eines Optimierungsproblems	–
$J_{err}(\cdot)$	Kostenfunktion des datenbasierten Fehlers	–
$J_{phy}(\cdot)$	Kostenfunktion des physikalisch motivierten Fehlers	–
$N$	Stichprobenumfang, Anzahl der Datensätze	–
$\Delta f_{\max}$	Schranke der maximalen Abweichung	–
$\Delta f$	Modellfehler, Modellabweichung	–
$\Delta t$	Schrittweite	s
$\alpha$	Entwurfsparameter des UKFs	–
$\beta$	Entwurfsparameter des UKFs	–
$A_{k+1}$	linearisierte Dynamikmatrix	–
$A$	( $n \times n$ )-dimensionale Dynamikmatrix	–
$B$	( $n \times p$ )-dimensionale Eingangsmatrix	–
$C_{k+1}$	linearisierte Ausgangsmatrix	–
$C$	( $m \times n$ )-dimensionale Ausgangsmatrix	–
$K_k$	( $n \times m$ )-dimensionaler Korrektureingriff eines Kalman-Filters	–
$Q$	( $n \times n$ )-dimensionale Prozesskovarianz	–
$R$	( $m \times m$ )-dimensionale Messkovarianz	–
$S_k$	Wurzel der Kovarianzmatrix	–
$U$	( $p \times N$ )-dimensionale Zeitreihenmatrix von Eingängen	–
$W^{(c)}$	Gewichte des UKFs bzgl. Kovarianz	–
$W^{(m)}$	Gewichte des UKFs bzgl. Erwartungswert	–
$X$	( $n \times N$ )-dimensionale Zeitreihenmatrix von Zuständen	–
$\Psi(\cdot)$	$n_\theta$ -dimensionale Bibliothek	–
$\Theta$	$n_\theta \times N$ -dimensionale Zeitreihenmatrix von Parametern $\theta$	–
$\hat{x}_k$	geschätzter Zustand	–
$X_{i,k k-1}$	$i$ -ter Sigmepunkt	–
$\theta_k$	$n_\theta$ -dimensionaler Parameter der Linearkombination	–
$\tilde{x}_k$	erweiterter Zustand	–
$\zeta$	Gewichte eines neuronalen Netzes	–
$e_k$	Schätzfehler	–
$f(\cdot)$	(nichtlineares) Dynamikmodell	–
$f_{NN}$	Modell eines neuronalen Netzes	–
$h(\cdot)$	(nichtlineares) Messmodell	–
$p$	(physikalischer) Parametervektor	–

Name	Beschreibung	Einheit
$u_k$	$p$ -dimensionales Eingangssignal bzw. Stellgröße	–
$v_k$	Messrauschen	–
$w_k$	Prozessrauschen	–
$x_k$	$n$ -dimensionaler Zustand	–
$y_k$	$m$ -dimensionale Ausgangsgröße bzw. Messgröße	–
$\eta$	Lernrate	–
$\hat{g}(\cdot)$	Approximation der Modellgenauigkeit(en)	–
$\kappa$	Entwurfsparameter des UKFs	–
$\lambda_{phy}$	Parameter der gewichteten Summe	–
$\lambda$	Parameter des UKFs	–
$\mathcal{GP}$	Gaußprozess	–
$\mu, \mu(x)$	Mittelwert, Mittelwertfunktion	–
$\nu(\cdot)$	Schaltfunktion eines Sliding-Mode-Beobachters	–
$\rho_k$	Störung	–
$\tilde{\lambda}$	Grenze zur Unterscheidung von (Nicht-)Nullelementen	–
$\tilde{n}$	Dimension des erweiterten Zustands $\tilde{x}$	–
$\vartheta$	Parameter eines Sliding-Mode-Beobachter	–
$g(\cdot)$	Modellgenauigkeit(en)	–
$k$	Zeitindex	–
$n_{\theta,act}$	erlaubte Anzahl von Nichtnullelementen des Parameters $\theta$	–
$n_\theta$	Dimension des Parametervektors $\theta$	–
$p(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung	–
$z$	Störgröße	–
$\psi(\cdot)$	Bibliotheksterm	–
$n$	Dimension des Zustands $x$	–

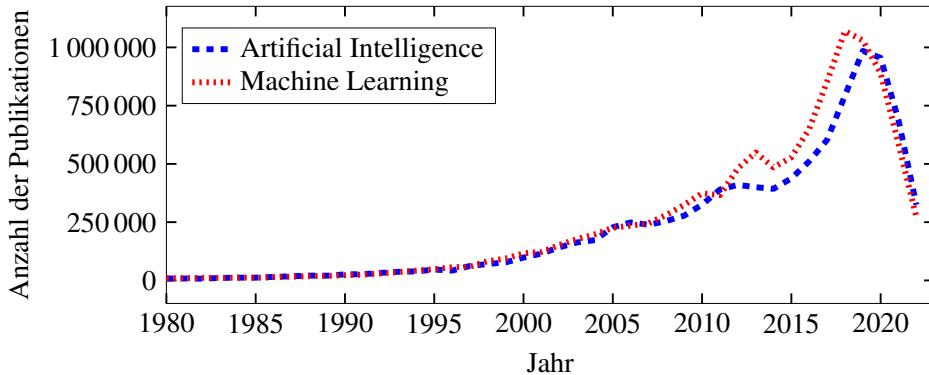
## 1 Motivation und Zielsetzung

Die Zustandsschätzung ist ein fundamentaler Pfeiler moderner Regelungstechnik, obwohl die Ursprünge vieler Methoden bis weit zurück in das 20. Jahrhundert reichen (z. B. [Kal60; Lue64]). Da die meisten dynamischen Systeme, die in Natur und Technik vorkommen, nicht vollständig oder quantitativ messbar sind, braucht es für die Entwicklung geeigneter Regelungs- oder Steuerungsstrategien einen Schätzer, der möglichst genau die unbekannten Größen erfasst, die zur Berechnung eines Regeleingriffs oder einer Stellgröße erforderlich sind [FKL<sup>+</sup>22; Lun16]. So kam beispielsweise für die Apollo-Mission ein Kalman-Filter zum Einsatz, welches die Navigation in der Raumfahrttechnik erleichterte. Ebenso muss das standardmäßig verbaute Fahrerassistenzsystem ESP z. B. die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs basierend auf Sensorwerten wie den Raddrehzahlen oder der Beschleunigung schätzen, um ggf. eingreifen zu können. Aufgrund der steigenden Komplexität mechatronischer Systeme und der kürzeren Produktentwicklungszyklen ist es jedoch herausfordernd, einen zuverlässigen Schätzer zu entwickeln, da vielfältige Wechselwirkungen zwischen verbauten Teilsystemen unterschiedlicher Disziplinen zu berücksichtigen sind.

Etablierte Schätzverfahren nutzen daher in der Regel ein Modell des Systems, um Aussagen oder Vorhersagen über die Zustände des dynamischen Systems treffen zu können. Die modellbasierte Betrachtung von physikalischen oder allgemein naturwissenschaftlichen Problemen ist indes eine sehr alte Vorgehensweise, die bereits in der Antike angewendet wurde. Ausgehend von geometrischen Problemen, wie sie beispielsweise in der Erdvermessung oder Architektur auftraten [Mit14; Fro22], entwickelten die Griechen Modelle, um diese zu lösen. Allerdings waren sich die Griechen schon damals der Unvollkommenheit eines Modells und der damit einhergehenden Herausforderungen bewusst. So beschrieb Platon, griechischer Philosoph um 400 v. Chr., in seinem Höhlengleichnis das Dilemma zwischen Wahrnehmung, Wissen und Realität [Pla16]. Diese Problematik, welche durch das antike Gleichnis aufgezeigt wird, lässt sich auch im Modellbildungsprozess erkennen: Der Prozess ist geprägt durch die empirische und subjektive Wahrnehmung der physikalisch zu modellierenden Phänomene. Ein Modell kann deshalb lediglich ein schwächeres Abbild der Realität widerspiegeln, welches noch Ungenauigkeiten enthält [BGA20; Löw20].

Aufgrund des Bewusstseins, dass bei größeren Modellabweichungen keine zuverlässigen Schätzungen des Zustands zu erwarten sind, ist ein iterativer Modellierungsprozess meist unumgänglich, um das Modell basierend auf Messdaten anzupassen. Dieser iterative Vorgang bindet allerdings nicht nur kostenintensive Ressourcen wie Personal und Software, sondern kann wegen äußerer Störungen oder internen Einflüssen wie etwa Verschleiß die

Modell-Realitäts-Lücke nie ganzheitlich schließen. Daher wird dieser Herausforderung in den letzten Jahren vermehrt mit der Nutzung von Messdaten entgegen getreten. So werden diese nicht nur zur Parameteridentifikation oder Modellvalidierung eingesetzt, sondern können aufgrund der gestiegenen technischen Leistungen in Prozessoren und Speichern nun in größerem Umfang für die Erstellung von datenbasierten Modellen genutzt werden. Dies gelingt durch datenverarbeitende Methoden, beispielsweise mittels maschinellem Lernen (ML) oder künstlicher Intelligenz (KI), welche sich in den Ingenieurwissenschaften einer zunehmenden Popularität erfreuen und deren Einsatz überwiegend positiv antizipiert wird [SBW<sup>+</sup>18]. Die Popularität von ML- oder KI-Methoden nicht nur in den Ingenieurwissenschaften drückt sich z. B. in der Anzahl der Google-Scholar-Publikationen aus, die diese Begriffe als Schlagwort enthalten. In der Abbildung 1-1 ist ein enormer Zuwachs an Beiträgen pro Jahr in den letzten beiden Dekaden zu erkennen, welcher in der Spitze etwa eine Million Beiträge pro Jahr hervorbrachte.



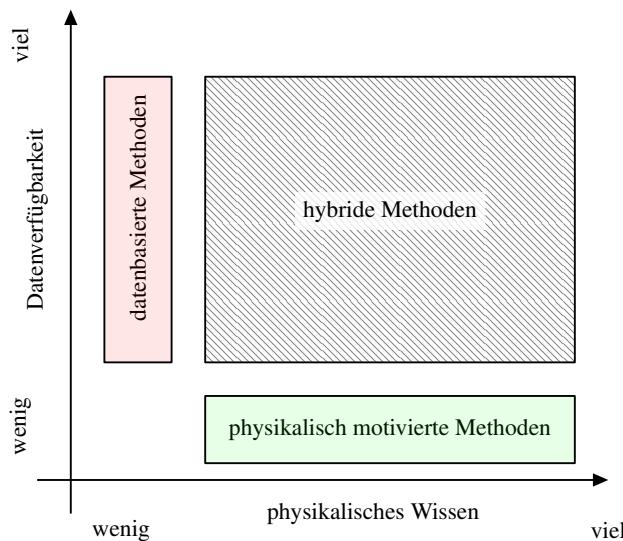
*Abbildung 1-1: Popularität der Begriffe Artificial Intelligence und Machine Learning zwischen 1980 und 2022, dargestellt durch Auftreten als Schlagwort in Google-Scholar-Beiträgen (Stand September 2023, erzeugt durch die modifizierte Nutzung von [Thi22])*

Obwohl KI und ML heutzutage bereits in vielen Alltagssituationen gegenwärtig sind, z. B. durch digitale Sprachassistenten oder Chatbots, und ihr Einsatz intensiv durch die Bundesregierung gefördert wird [Die18; Die20], besteht in den Ingenieurwissenschaften jedoch der Anspruch sowie die Pflicht, physikalisch nachvollziehbare und robuste Modelle zu erstellen (vgl. die aktuelle Normierungsroadmap [DD22]). Dies ist insbesondere in gesellschaftsrelevanten Bereichen wie der kritischen Infrastruktur, der Medizintechnik, der Automobiltechnik oder der Robotik von Bedeutung und z. T. noch nicht gesetzlich verankert bzw. noch im Prozess der Gesetzgebung [Pre23; Sch23a]. Schlagzeilen wie „Tesla-Chef warnt vor tödlichen Robotern“<sup>1</sup> und „Wie schlau werden unsere Autos?“<sup>2</sup>

<sup>1</sup><https://www.welt.de/wirtschaft/article166725047/Tesla-Chef-Musk-warnt-vor-toedlichen-Robotern.html>, abgerufen am 24.02.2023

<sup>2</sup><https://www.quarks.de/technik/mobilitaet/kuenstliche-intelligenz-wie-schlau-werden-unsere-autos/>, abgerufen am 24.02.2023

zeugen jedoch von dem bestehenden Sicherheitsrisiko sowie der öffentlichen Besorgnis, die auch von Expertengruppen geteilt wird [Rud19; Fut23], wenn KI- oder ML-basierte Modelle in hochtechnologischen Systemen für gesellschaftsrelevante Anwendungen eingesetzt werden. In der Abbildung 1-1 ist ab dem Jahr 2018 zu erkennen, dass die Anzahl der Publikationen im Zusammenhang mit ML bzw. KI deutlich abnimmt. Dies lässt sich neben dem Effekt der Corona-Pandemie u. a. auf diese gesellschaftlichen Bedenken, die ein kritisches Hinterfragen statt ein unbedachtes Nutzen dieser Methoden anstoßen, zurückführen. In der Folge reift in den Ingenieurwissenschaften die Idee, physikalisch bewährte Modelle mit datenbasierten Techniken zu verknüpfen, und schürt die Hoffnung, dass diese *hybriden* Modelle<sup>3</sup> die Stärken sowie die Wissenskomponenten beider Perspektiven kombinieren können und ein Synergieeffekt für die resultierenden Modelle bewirken [KAF<sup>+</sup>17; HW13; Rud19], z. B. dass sich der Aufwand der Modellbildung reduzieren und die Modell-Realitäts-Lücke verringern lässt [BGH<sup>+</sup>21]. Daher ist der abnehmende Trend in Abbildung 1-1 vor allem mit der Verschiebung von generalisierten Oberbegriffen hin zu spezialisierten Fachtermini zu erklären, da weiterhin intensiv zu ML/KI geforscht wird. Die Verschmelzung der physikalisch basierten und datengetriebenen Blickwinkel ist schließlich schematisch in der Abbildung 1-2, angelehnt an [KAF<sup>+</sup>17], dargestellt und weist die grundlegenden Voraussetzungen für die hybride Modellbildung aus: Physikalisches Wissen sowie Verfügbarkeit von Daten. Der Anteil dieser bestimmt die Ausprägung eines hybriden Modells bzgl. beider Perspektiven, welche im folgenden Abschnitt im Zusammenhang zum modellbasierten Regelungsentwurf beleuchtet werden.



*Abbildung 1-2: Hybride Modellierung als Kombination aus physikalisch basierten und datengetriebenen Wissenskomponenten bzw. Methoden, angelehnt an [KAF<sup>+</sup>17]*

<sup>3</sup>Ein Modell heißt *hybrid*, wenn es sowohl physikalisch basierte als auch datengetriebene Teilkomponenten aufweist bzw. aus jenen Modellierungstechniken hervorgegangen ist.

## 1.1 Modellbasierter Regelungsentwurf

Ein modellbasierter Regelungsentwurf, der in der Abbildung 1-4(a) dargestellt ist, umfasst neben der Modellbildung und Parameteridentifikation den Entwurf einer Regelung und (meistens auch) eines Beobachters, woraufhin die Inbetriebnahme der Regelung durchgeführt wird [FKL<sup>+</sup>22; Nis19]. In jedem dieser Schritte spielt das Modell der Strecke<sup>4</sup> eine wesentliche Rolle für die Umsetzbarkeit und Güte der resultierenden Regelung, da auf dessen Grundlage Designentscheidungen für den Regler und Beobachter vorgenommen werden. Die Entwicklung des Streckenmodells kann dabei durch theoretische oder experimentelle Modellbildung erfolgen<sup>5</sup>. Diese sind nach [IM11, S.2] in der Abbildung 1-3 dargestellt und unterscheiden sich darin, ob Vorwissen aus physikalischen Gesetzen oder Messdaten aus Experimenten zur Identifikation eines Modells genutzt werden. Das Vorgehen der beiden Strategien ähnelt sich an einigen Stellen. Beide entwickeln ausgehend von Vorwissen oder Annahmen ein Modell, welches anschließend ggf. noch vereinfacht wird. Zudem ergänzen sich die Strategien u. U. durch Teilelemente untereinander, z. B. bei der Parameteridentifikation des analytisch entwickelten Modells durch Messdaten.

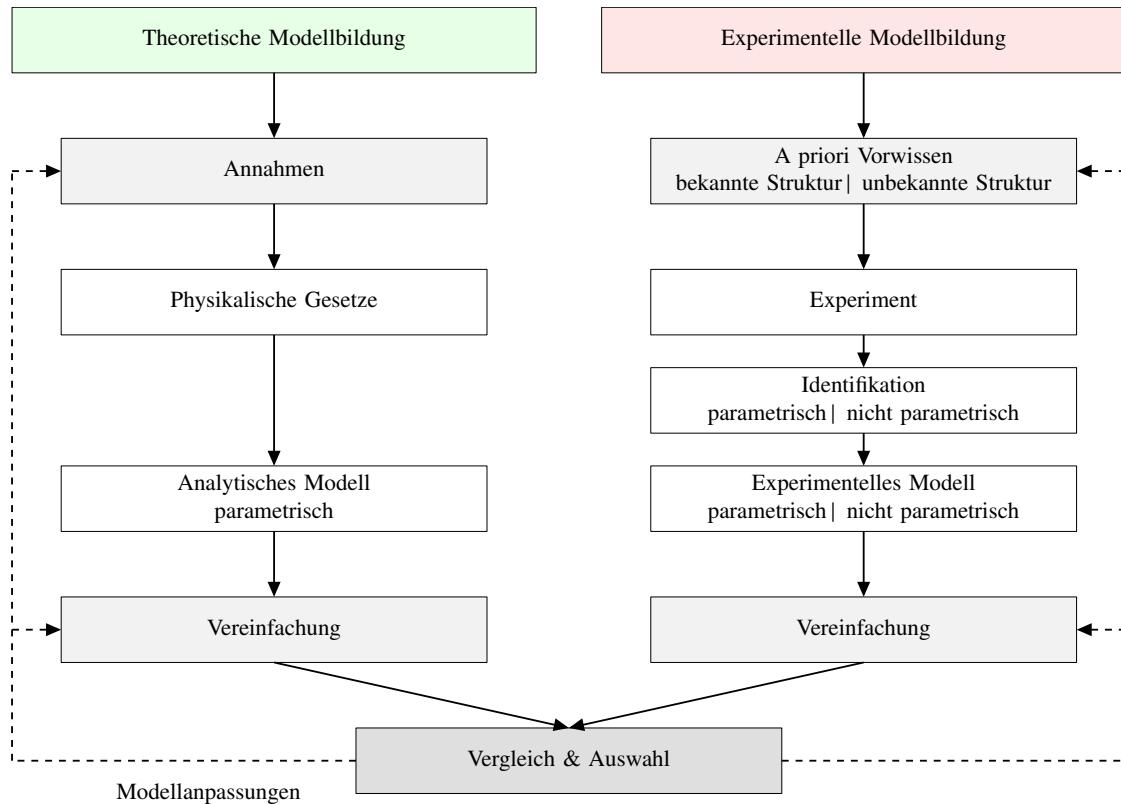


Abbildung 1-3: Theoretische und experimentelle Modellbildung nach [IM11, S.2]

<sup>4</sup>In der Regelungstechnik wird das zu beeinflussende, dynamische System, welches über einen Fluss oder ein Vektorfeld definiert werden kann und die Evolution zeitveränderlicher Größen beschreibt (vgl. [CFSS82; BK19; FKL<sup>+</sup>22]), als (Regel-)Strecke bezeichnet.

<sup>5</sup>Manchmal wird zwischen analytischer und empirischer Modellbildung unterschieden, z. B. [Wal22].

Unabhängig davon, ob ein Modell aus der theoretischen oder experimentellen Vorgehensweise hervorgegangen ist, muss das entwickelte Modell anhand von Messdaten oder Simulationen validiert werden [Lju99; Ada18]. Dabei werden meist Abweichungen aufgrund von zuvor getätigten Abstraktionen, Annahmen oder bestehenden Wissenslücken, welche in der Abbildung 1-3 als hellgraue Blöcke dargestellt sind, festgestellt. Somit ist eine Modellanpassung, welche durch die gestrichelten Linien angedeutet ist, erforderlich und resultiert in einer erneuten, mindestens teilweisen Durchführung der Modellbildung. Dieser aufwendige Kreislauf zwischen Modellentwurf und -validierung ist insbesondere auf die steigende Komplexität mechatronischer Systeme zurückzuführen, welche aufgrund der verschiedenen Disziplinen und vielfältiger Wechselwirkungen eine Modellierung in angemessenem Umfang erschwert. Neben dem klassischen, modellbasierten Regelungsentwurf stellt das V-Modell nach der VDI-Richtlinie 2206 [VDI01], welches sowohl in der Wissenschaft als auch Industrie die Grundlage eines modellbasierten Entwurfsprozess bildet und in der Abbildung 1-4(b) zu sehen ist, ein domänenübergreifendes Entwurfskonzept dar. Dieses berücksichtigt systemspezifische Anforderungen und Schnittstellen der unterschiedlichen Disziplinen sowie die Validierung jedes einzelnen Entwurfschritts bezogen auf das Gesamtsystem.

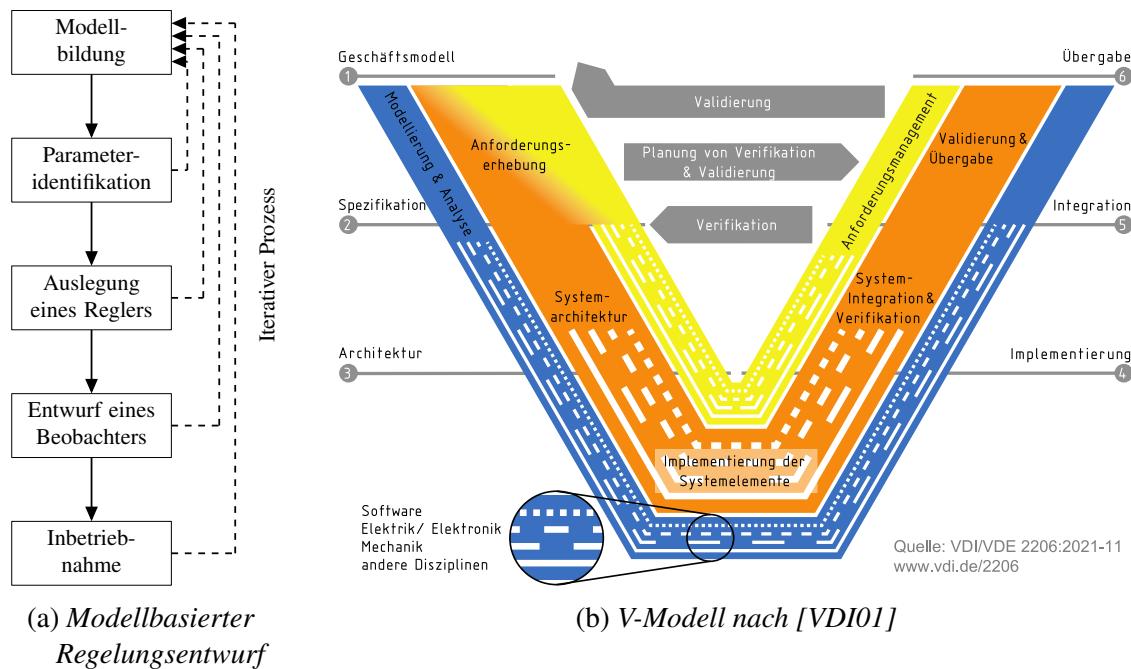


Abbildung 1-4: Entwurfskonzepte für mechatronische Systeme

Da allerdings der Aufwand und die Kosten durch eine iterative, sich sukzessiv verbessende Modellierung steigen und die Ursachen von Modellabweichungen vor allem in der Abstraktion und in Wissenslücken während der Modellierung liegen, schaffen rein datenbasierte Modelle eine kostengünstige, z. T. automatisierbare und vorteilhafte Alternative,

vgl. [Cox18]. Diese ist geprägt durch den Begriff *Data-driven modeling* bzw. *Data-driven control*, deren Beliebtheit in Analogie zu den Trends des maschinelles Lernens und der künstlichen Intelligenz seit den vergangenen Jahren zugenommen hat. Dieser Effekt ist in der Abbildung 1-5 wiederum durch die Anzahl der Google-Scholar-Beiträge, die diese Begriffe als Schlagworte enthalten, skizziert.

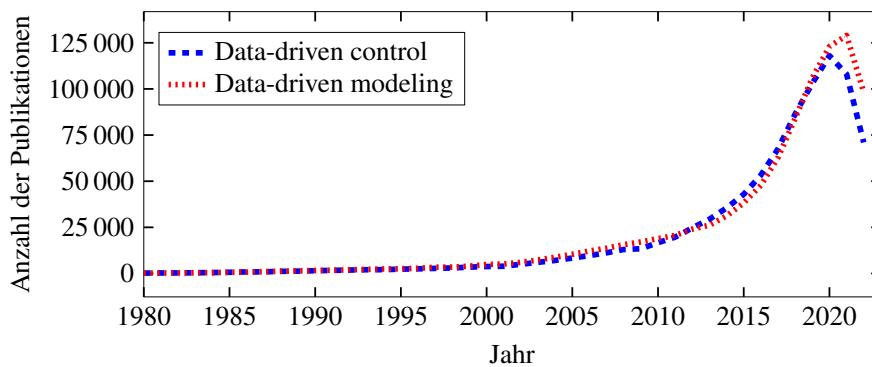


Abbildung 1-5: Popularität der Begriffe *Data-driven control* und *Data-driven modeling* zwischen 1980 und 2022, dargestellt durch Auftreten als Schlagwort in Google-Scholar-Beiträgen (Stand September 2023, erzeugt durch die modifizierte Nutzung von [Thi22])

Im Vergleich zum Trend von ML und KI (vgl. Abbildung 1-1) reduziert sich die Anzahl der Publikationen ebenfalls ab dem Jahr 2018, was auf die Skepsis gegenüber einer solchen rein datenbasierten Modellierung in der Regelungstechnik und eine Verschiebung zu hybriden Techniken hindeutet. Diese Skepsis ist berechtigt, da die Nutzung rein datengeriebener Modelle häufig einen Verlust an Transparenz und physikalischer Interpretierbarkeit verursacht, aufgrund dessen sicherheitskritische Situationen resultieren können (vgl. Abschnitt 4.6.2 in [DD22]). Aus diesem Spannungsfeld, bestehend aus der Notwendigkeit, eine hohe Schätzgüte trotz Modellgenauigkeiten zu erzielen, die Ungenauigkeiten physikalisch interpretierbar in einer parametrischen Form darzustellen sowie diese verbesserten Modelle für nachfolgende Schritte zugänglich zu halten, ergibt sich die Problemstellung dieser Arbeit, welche im nächsten Abschnitt thematisiert wird.

## 1.2 Problemstellung und Anforderungen

Ziel eines Regeleingriffs ist es, eine Regelstrecke durch eine geeignete Maßnahme in eine gewünschte Situation zu überführen. Die grundlegende Struktur eines einfachen Regelkreises ist dazu in der Abbildung 1-6 dargestellt. Das gewünschte Verhalten, welches eingestellt werden soll, wird dabei durch die Führungsgröße  $w^6$  ausgedrückt. Die Größe,

<sup>6</sup>Alle nun folgenden Variablen sind kontinuierliche Größen und von der Zeit  $t$  abhängig.

die die Strecke beeinflusst, wird als Stellgröße  $u \in \mathbb{R}^p$  bezeichnet und vom Stellglied realisiert. Anhand der Messgröße  $y \in \mathbb{R}^m$ , welche über das Messglied Rückschlüsse über die Strecke erlaubt, wird die Abweichung zwischen gewünschtem und tatsächlichem Verhalten berechnet, auf deren Grundlage der Regeleingriff bestimmt wird [Lun16; FKL<sup>+</sup>22]. Da die Messgröße  $y$  in der Regel nicht identisch mit dem inneren Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  des dynamischen Systems ist, welches beeinflusst werden soll, muss dieser mittels eines Beobachters durch  $\hat{x}$  zuverlässig geschätzt werden. Dies erfolgt üblicherweise durch einen modellbasierten Ansatz. Zentraler Ausgangspunkt eines modellbasierten Beobachterentwurfs ist somit das Modell der zu schätzenden Strecke, dessen Qualität einen entscheidenden Einfluss auf die Güte eines Beobachters aufweist. Jedoch ergibt sich häufig ein Zielkonflikt zwischen der Wirtschaftlichkeit, Genauigkeit und Komplexität eines Modells, d. h. dass dieses beispielsweise nur in einem vertretbaren und für die Aufgabe erforderlichen Aufwand erarbeitet werden kann, um kostenintensive Ressourcen möglichst effizient einzusetzen [Loc20; VDI01]. Notwendigerweise kommt es daher im Entwicklungsprozess zu Annahmen und Vereinfachungen, die die Modell-Realitäts-Lücke vergrößern. Diese Lücke kann allerdings auch bei sehr aufwendiger und anspruchsvoller Modellierung nie ganzheitlich geschlossen werden.

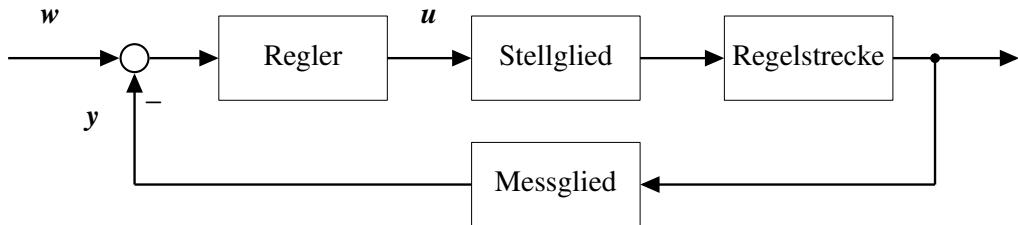


Abbildung 1-6: Grundstruktur eines Regelkreises, vgl. auch [Lun16],[FKL<sup>+</sup>22]

## Schätzgüte

Die Abweichung des Beobachters von der Strecke aufgrund von Modellgenauigkeiten wird über den Schätzfehler  $e := \hat{x} - x$  quantifiziert. Ist der Schätzfehler groß, da fehlerhafte oder ungenaue Schätzungen ermittelt werden, weist der Beobachter eine niedrige *Schätzgüte* auf. Diese verursacht nicht nur potentielle Stabilitätsprobleme des Beobachters, sondern beeinflusst auch die Stabilität des geschlossenen Regelkreises sowie das Erreichen des Regelziels, da der Regeleingriff auf der Qualität der Schätzungen basiert. Um eine funktionierende Regelung zu ermöglichen sowie das Risiko von Schäden an Mensch oder Hardware zu vermeiden, hat die Garantie einer durchgängig hohen Schätzgüte deshalb trotz Modellgenauigkeiten höchste Priorität.

## Interpretierbarkeit

Diese Modell-Realitäts-Lücke wird zunehmend auch durch hybride Methoden zu vermindern versucht (vgl. Abbildung 1-2). Allerdings ist je nach Wahl der datenverarbeitenden Methode ein Verlust an *physikalisch-technischer Interpretierbarkeit* zu befürchten, der für Regelungstechnische Anwendungen, insbesondere im sicherheitskritischen Bereich, nicht hinzunehmen ist. Interpretierbarkeit ist jedoch kein fest definierter Begriff und wird fachdisziplinabhängig charakterisiert und bewertet [BMJ<sup>+</sup>23; Rud19; LPK21; MV20]. In dieser Arbeit wird ein physikalisch-technisch interpretierbares Modell als solches verstanden, dessen parametrische<sup>7</sup> Form eine konkrete Zuordnung von *physikalischen Wirkprinzipien* erlaubt. Die Bedeutung dieser Definition lässt sich anhand der Beispiele in der Abbildung 1-7 erläutern.

Modell 1	Modell 2
$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{d}{m}\dot{x}$ Beschleunigung $\ddot{x}$ Dämpfungskraft $F_d$ Federkraft $F_c$	$\hat{y}_l(x, \zeta) = f_2 \left( \sum_j \zeta_{lj} \cdot f_1 \left( \sum_i \zeta_{ji} x_i \right) \right)$ Aktivierungsfkt. $f_*$ Gewichte $\zeta$ Linearkombinationen $\sum(\cdot)$
<b>Interpretierbar</b>	<b>Nicht interpretierbar</b>

Abbildung 1-7: Interpretierbarkeit als konkrete Zuordnung von physikalischen Wirkprinzipien zur parametrischen Form, z. B. Kräfte im Kontrast zur rein funktionalen, mathematischen Beschreibung von Aktivierungsfunktionen

Ein in diesem Sinne interpretierbares Modell stellt das Modell 1 dar, dessen parametrische Form eine gewöhnliche Differentialgleichung ist. Anhand dieser lassen sich direkt die physikalischen Phänomene des Systems erkennen. So beschreibt jede Komponente der Differentialgleichung eine dynamische Eigenschaft des Einmassenschwingers, bei-

<sup>7</sup>In dieser Arbeit werden ausschließlich parametrische Modelle betrachtet, vgl. Abbildung 1-3. Ein Kennfeld stellt z. B. ein nicht parametrisches Modell dar.

spielsweise die Wirkung einer Dämpfungskraft, welche sich durch das Produkt des Parameters  $-\frac{d}{m}$  und der zeitlich abgeleiteten Ortsvariable  $x$  kennzeichnet. Im Gegensatz dazu ist Modell 2 nicht im Sinne der Definition interpretierbar, da die parametrische Form eines neuronalen Netzes keine konkrete Kausalität zu den physikalischen Wirkprinzipien des approximierten dynamischen Zusammenhangs zulässt. So können die Gewichte  $\zeta_*$ , die Aktivierungsfunktionen  $f_*$  sowie die potentiell verschachtelten Linearkombinationen jeweils keinem konkreten physikalischen Effekt zugeordnet werden, der direkt aus dem Modell erkenn- und ablesbar ist, sondern stellen einen rein funktionellen, mathematischen Sachverhalt dar, der den Einmassenschwinger beschreibt. Aufgrund des Anspruchs, einerseits nachvollziehbare und andererseits sicherheitskritisch beständige Modelle zu entwickeln, stellt die Interpretierbarkeit eine wichtige Eigenschaft dar, die aber u. U. nicht jedes datengetriebene oder hybride Modell konservieren kann.

## Nutzbarkeit

Ein Modell, welches aufgrund bestehender Modellabweichungen überarbeitet und angepasst worden ist, muss weiterhin kompatibel für nachfolgende Entwurfsschritte sein, um für weitere Analyse- und Syntheseschritte zugänglich zu bleiben, die für die Anwendung am System gedacht sind. Denn dies ist der Zweck eines Modells [Lju99; Ada18]. Es soll beispielsweise mit diesem adaptierten Modell eine Regelungsaufgabe erfolgreich durchgeführt werden können, indem ein klassisches Regelverfahren direkt basierend auf diesem umgesetzt werden kann. Diese Eigenschaften definieren im Rahmen dieser Arbeit den Begriff *Nutzbarkeit*, welcher sich auf ein verbessertes Modell bezieht, das nun auch jene Charakteristika des Systems abbildet, die wegen der vorher bestehenden Modellungenauigkeiten nicht erfasst wurden. Die Nutzbarkeit eines verbesserten Modells ist somit zwingend erforderlich, allerdings nicht immer sichergestellt. Modell 2 ist ein Beispiel dafür, dass die Nutzbarkeit lediglich bedingt gegeben ist. Denn aufgrund seines begrenzten Wirkungsbereichs basierend auf den Trainingsdaten ist ein neuronales Netz u. U. nicht in der Lage, über diesen Bereich hinaus zuverlässig zu extrapolieren und zu generalisieren, was für die Bestimmung eines Regeleingriffs aber notwendig sein kann. Zudem ist seine Black-Box-Struktur nicht mit beliebigen Verfahren kompatibel. Dies zeigt, dass der Gedanke der Nutzbarkeit bereits bei der Entwicklung neuer Modellierungsstrategien von zentraler Bedeutung ist, um die entstehenden Modelle im Sinne der Nachhaltigkeit verwertbar einsetzen zu können.

Aus den zuvor erörterten Aspekten der Problemstellung ergeben sich somit für den modellbasierten Beobachterentwurf die folgenden Anforderungen:

- F.1** Primär soll der modellbasierte Beobachter trotz Modellungenauigkeiten eine hohe Schätzgüte aufweisen.

- F.2** Als sekundäres Ziel soll der Beobachter eine genaue Schätzung der Modellungenauigkeiten erlauben und eine möglichst physikalisch interpretierbare, parametrische Darstellung dieser liefern, um vertiefendes Systemwissen sowie eine Adaptation des Modells zu ermöglichen.
- F.3** Weiterhin soll die Nutzbarkeit des entwickelten Modells bzw. des entwickelten Verfahrens für die folgenden Schritte des Regelungsentwurfs gegeben sein, sodass die identifizierten Modellungenauigkeiten auch für diese zugänglich sind.

Die genannten Anforderungen basieren hierbei auf der Annahme, dass bereits ein physikalisches Simulationsmodell des betrachteten dynamischen Systems existiert sowie grundlegendes Systemwissen, wie die Systemordnung und definierte Zustände, zur Verfügung stehen. Beides ist in der Regel mit geringem Aufwand zu erarbeiten, sodass dies realistische, niedrigschwellige Voraussetzungen darstellen.

## Forschungsbeitrag

Diese Voraussetzungen dienen daher als Grundlage, auf der in der vorliegenden Arbeit eine neuartige Methode zur Zustandsschätzung ausgearbeitet wird, welche die obigen drei Ziele berücksichtigt. Basierend auf dem Simulationsmodell, welches noch Modellabweichungen aufweist, wird ein erweitertes Modell formuliert, das eine Approximationsvorschrift für die Modellungenauigkeiten vorsieht. Diese Vorschrift besteht aus einer Linearkombination aus geeigneten physikalischen Termen  $\psi$ , welche in einer Bibliothek  $\Psi$  gespeichert und durch Parameter  $\theta$  ausgewertet werden. Die Hypothese ist hierbei, dass aufgrund von Erfahrungswissen Vermutungen bzgl. der unbekannten Dynamik formuliert werden können. In der folgenden Abbildung 1-8 wird das Beispiel des Einmassenschwingers fortgeführt und anhand dessen die in dieser Arbeit entwickelte Methode illustriert. Die nicht modellierte Reibung  $F_R$  wird durch die Vermutungen  $\psi$  in der Bibliothek  $\Psi$  versucht anzunähern, diese umfassen u. a. auch den zur Beschreibung der Reibkraft geeigneten Term  $\psi_4$ . Um eine hohe Schätzgüte zu erzielen, wird das erweiterte Modell anschließend in einen bewährten Beobachter eingesetzt. In dieser Arbeit ist dies überwiegend das Unscented Kalman Filter. Zur Erhaltung der Interpretierbarkeit beinhaltet die Bibliothek nur physikalisch interpretierbare Terme. Darüber hinaus wird basierend auf dem Prinzip *Occam's Razor*<sup>8</sup> das Konzept *Sparsity*<sup>9</sup> umgesetzt, welches die Auswahl der Approximationsterme  $\psi$  so steuert, dass lediglich einige wenige

<sup>8</sup>Dieses geht auf den Philosophen Wilhelm von Ockham (1288-1347) zurück, welches postuliert, dass aus vielen Möglichkeiten meist die einfachste Lösung (oder Erklärung) mit hoher Wahrscheinlichkeit die beste Option darstellt. Dieses heuristische Prinzip wird vielfach in der Modellbildung verschiedener Disziplinen und im ML-Kontext zur Modellauswahl berücksichtigt [BK19].

<sup>9</sup>Im Deutschen ist dieses unter dem Begriff Dünnsatztheit bekannt.

Terme zur Darstellung der Dynamik ausgewählt werden. Eine statistische Analyse über den Zeitraum der Schätzung, welche offline, aber auch zur Laufzeit immer wieder durch sich verschiebende Zeitfenster durchgeführt werden kann, identifiziert jene Terme, die die Modellungenauigkeiten bestmöglich approximieren. Für den Fall des Einmassenschwingers lautet dieser Term  $\psi_4(x, \dot{x}, u) = \text{sign}(\dot{x})$ , welcher daher aufgrund der Analyse für das adaptierte Modell ausgewählt wird, sodass dieses seine interpretierbare Form behält (vgl. Abbildung 1-8). Die flexible Handhabung der statistischen Analyse ermöglicht zudem, ggf. bei Systemveränderungen eine effiziente Modellanpassung während des Schätzens vorzunehmen. Ein solch adaptiertes Modell 3 ist weiterhin nutzbar, da es aufgrund seiner überschaubaren und interpretierbaren Struktur vielen Verfahren zugänglich bleibt. Somit wird in der vorliegenden Dissertationsschrift eine neuartige Methode erarbeitet, welche die Online-Schätzung von Modellungenauigkeiten unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit erlaubt. Diese wird daraufhin zur automatischen Modellanpassung genutzt, um eine sukzessive Verbesserung des Modells zu erzielen und dieses bei ggf. auftretenden Systemveränderungen zu adaptieren.

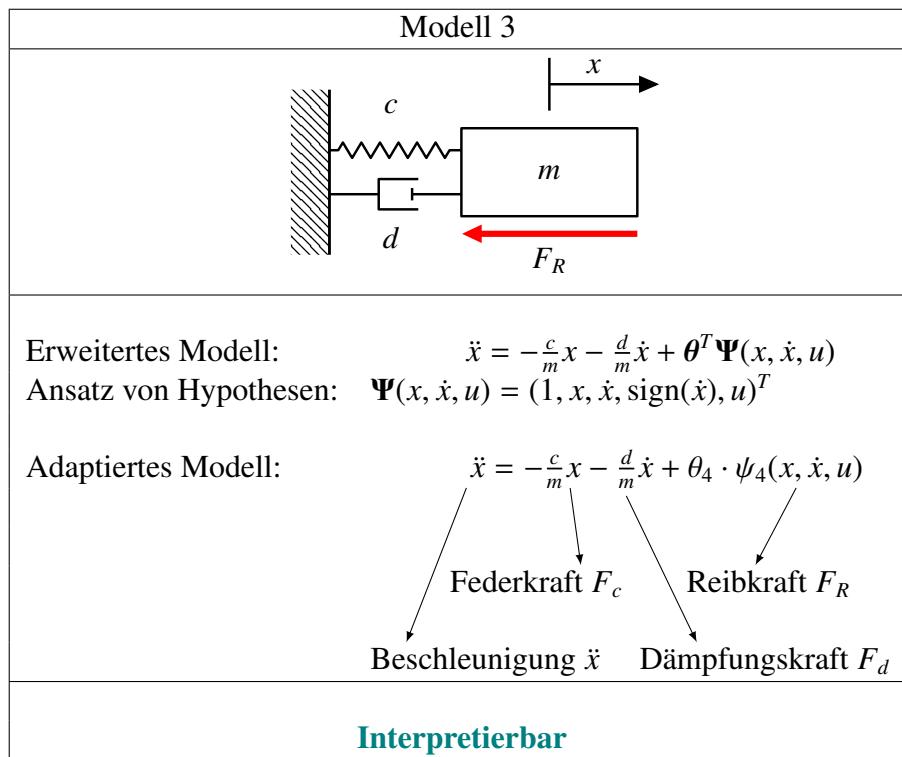


Abbildung 1-8: Illustration des Forschungsbeitrags anhand des Einmassenschwingers

### 1.3 Aufbau der Dissertation

Die vorliegende Arbeit, welche eine neuartige Methode zur Zustandsschätzung bei Existenz von Modellungenauigkeiten nach den zuvor definierten Anforderungen umsetzt, gli-

dert sich in sechs Kapitel. Das anschließende Kapitel 2 thematisiert zunächst die mathematischen Grundlagen, auf denen die Zustands- und Parameterschätzung basieren und die zum Verständnis der Dissertationsschrift erforderlich sind. Diese umfassen Erkenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik im Abschnitt 2.1, wie die Gauß-Verteilung und statistische Momente, sowie Beobachtertypen im Abschnitt 2.2 bzw. 2.3, die in dieser Arbeit verwendet und hinsichtlich der Schätzung von Modellgenauigkeiten analysiert werden. Dabei wird basierend auf den Vorarbeiten von [Sch17] ein stärkerer Fokus auf die Kalman-Filter gelegt. Abschließend beleuchtet Abschnitt 2.4 die Struktur von Modellgenauigkeiten und kategorisiert diese anhand ihrer Charakteristika.

Kapitel 3 analysiert daraufhin den Stand der Forschung und Wissenschaft, indem Methoden der hybriden Systemidentifikation im Abschnitt 3.1 und Kompressionsstrategien von Beobachtern im Abschnitt 3.2 hinsichtlich der Anforderungen dieser Arbeit untersucht und z. T. eigenständig weiterentwickelt werden. Im ersten Teil des Kapitels liegt der Schwerpunkt daher auf physikalisch motivierten neuronalen Netzen, deren Modellgüte und Nutzbarkeit im modellbasierten Entwurf intensiv anhand von Anwendungsbeispielen und qualitativer Kriterien überprüft werden. Hierbei trägt die vorliegende Dissertationsschrift dazu bei, eine geeignete Formulierung der physikalisch motivierten Netze für mechatronische Systeme zu finden und durch ein angepasstes Training die physikalische Plausibilität der resultierende Modelle zu verbessern. Der zweite Teil des Kapitels stellt vor allem die optimale Wahl von Parametrierungen in den Vordergrund, welche die Modellunsicherheit in Beobachtern repräsentiert. Dazu wird evaluiert, inwiefern diese mit Unterstützung von ML geschickt bestimmt werden können, sodass Modellgenauigkeiten kompensiert werden. Im Abschnitt 3.3 wird eine Bewertung der im Kapitel 3 diskutierten Methoden vorgenommen, woraufhin der Handlungsbedarf abgeleitet wird.

Anschließend wird im Kapitel 4 eine neuartige Methode zur zuverlässigen Zustandsschätzung und interpretierbaren Identifikation von Modellgenauigkeiten entwickelt, welche bereits existierende Ansätze erstmalig kombiniert und diese hinsichtlich der interpretierbaren Identifikation und Modelladaption für den Beobachterentwurf amplifiziert. Dazu wird zunächst im Abschnitt 4.1 das Konzept der *Joint Estimation* vorgestellt, auf deren Grundidee die Methode basiert und welche für die Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten erweitert wird. Nach der Klärung von Voraussetzungen und Annahmen im Abschnitt 4.2 beschreibt der folgende Abschnitt einen augmentierten Beobachterentwurf mittels Ansätzen aus dem Compressed Sensing für ein Unscented Kalman Filter. Eine effiziente Ergänzung dieses Entwurfs durch Ausnutzung der Filterstruktur folgt im Abschnitt 4.4. Zudem wird die Methode im Abschnitt 4.5 auf einen Sliding-Mode-Beobachter transformiert, der somit eine automatische Schätzung und Identifikation von

Störungen erlaubt. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung und Bewertung der Entwurfsverfahren im Abschnitt 4.6 ab.

Nach der Erläuterung des in dieser Dissertationsschrift erarbeiteten Beobachterentwurfs beschreibt Kapitel 5 die automatisierte Online-Modelladaption während der Schätzung. Dies geschieht auf Basis der Hauptkomponentenanalyse, deren Funktionsweise für eine Merkmalsanalyse und Merkmalsextraktion der relevanten Charakteristika der Modellgenauigkeiten im Abschnitt 5.1 dargelegt wird. Daraufhin wird ein Konzept zur automatischen Online-Aktualisierung des Modells im Abschnitt 5.2 vorgestellt und umgesetzt. Anhand der Abschnitte 5.3 und 5.4 werden zudem die Interpretierbarkeit der entstandenen Modelle beleuchtet sowie der Aufwand und Nutzen des Verfahrens im Vergleich zu klassischen Ansätzen kritisch bewertet.

Schließlich fasst Kapitel 6 die wesentlichen Erkenntnisse dieser Dissertation zusammen, woraufhin ein Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten und -fragestellungen gegeben wird.



## 2 Grundlagen zur Zustands- und Parameterschätzung

Der Herausforderung, nicht bekannte oder nicht messbare Größen basierend auf gemessenen Ein- und Ausgangsdaten zu schätzen, lässt sich mathematisch begegnen. Dieses Kapitel stellt daher die grundlegenden Techniken vor, die zur Zustands- und Parameterschätzung erforderlich sind. Zunächst werden im Abschnitt 2.1 Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik eingeführt, welche die Unsicherheit einer Schätzung mathematisch definieren und beschreiben. Anschließend werden im Abschnitt 2.2 das Kalman-Filter und seine Erweiterungen vorgestellt, die diese stochastische Perspektive nutzen, um das Schätzproblem für lineare und nichtlineare dynamische Systeme zu lösen. Des Weiteren wird ein robuster Beobachter im Abschnitt 2.3 thematisiert, der stochastische Störungen kompensieren kann. Abschließend wird im Abschnitt 2.4 die Existenz und Auswirkung von Modellgenauigkeiten auf die Zustands- und Parameterschätzung näher beleuchtet.

### 2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Im Alltag und den Medien finden sich häufig Aussagen wie „Was schätzt du, wie lange es noch dauern wird, bis wir unseren Zielort erreichen?“ oder „Bei der Umweltkatastrophe sind 25 bis 50 Prozent der Fische verendet, schätzen Experten.“<sup>10</sup> Implizit besteht dabei eine Wechselwirkung zwischen Schätzung, Wissen und Unsicherheit. Jede Schätzung wird auf Basis des aktuellen Wissensstands getroffen, um Aussagen über unsichere oder unbekannte Situationen zu tätigen. Bei der Abschätzung der Fahrtzeit besteht z. B. aufgrund einer gewählten Route die Kenntnis über die verbleibende Strecke und die aktuelle Geschwindigkeit, aber Unsicherheit, ob Unfälle oder Staus die Reisezeit verzögern können. Ebenso ist Sachverständigen die genaue Anzahl von Fischen innerhalb eines Ökosystems unbekannt, aber die Größe des Gewässers lässt Rückschlüsse zur Population zu, zu der die Menge der aufgefundenen, vergifteten Fische ins Verhältnis gesetzt werden kann. Um solche mit Unsicherheit behafteten Aussagen formulieren zu können, wird in der Mathematik die Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet. Diese definiert präzise die Sicherheit, bezogen auf das Auftreten eines Ereignisses  $A$ , und wird durch eine nicht-negative Zahl ausgedrückt [Bis06; PP06; Sch17]:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{Mögliches Auftreten des Ereignisses } A}{\text{Alle möglichen Ereignisse}} \geq 0.$$

Die Statistik erlaubt dagegen konkrete, quantitative Aussagen basierend auf Stichproben. In den nächsten Abschnitten werden daher die grundlegenden Begriffe dieser Konzepte

<sup>10</sup><https://www.tagesschau.de/inland/oder-fischsterben-111.html>, abgerufen am 12.04.2023

eingeführt und definiert, welche für das Verständnis dieser Arbeit erforderlich sind. Dabei orientiert sich die Darstellung dieses Abschnitts an grundlegenden Fachbüchern der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik [Bis06; PP06] sowie an der Vorarbeit [Sch17].

### 2.1.1 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine Zufallsvariable  $X$  beschreibt eine Größe, deren Auftreten durch den Zufall geprägt ist. Ein alltägliches, intuitives Beispiel ist der homogene Münzwurf, dessen Zufallsvariable lediglich zwei Ereignisse annehmen kann: Kopf (Ereignis  $A$ ) oder Zahl (Ereignis  $B$ ). Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf dem Kopf landen wird, d. h. dass Ereignis  $X = A$  eintreten wird, wird mit  $p(X = A)$  oder abgekürzt  $p(A)$  angegeben. Hierbei beschreibt  $p(\cdot)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, auch bekannt als Wahrscheinlichkeitsdichte oder Dichte. Für diese gilt

$$0 \leq p(x) \leq 1,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses liegt zwischen Null und Eins. Neben dem diskreten Beispiel des Münzwurfs kann eine Zufallsvariable auch kontinuierliche Werte annehmen. Ein veranschaulichendes Beispiel ist die Füllmenge eines Produkts, welches z. B. genau 200 ml enthalten soll, im maschinellen Einfüllprozess aber durchaus Abweichungen aufweisen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Wert der Zufallsvariablen  $X$  in einem gegebenen Intervall  $[a, b]$  befindet, demnach beispielsweise innerhalb einer Toleranz von [195, 205] ml in der Herstellung des Produkts, lässt sich durch die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte angeben:

$$\mathcal{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx.$$

Diese resultiert aus der Ableitung der Verteilungsfunktion  $F(x)$ , welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, mit der die Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner oder gleich  $x$  annehmen wird [Mur12; Pap17; Sch17]:

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x).$$

In dieser Arbeit werden überwiegend kontinuierliche Zufallsvariablen von Belang sein. Neben der Laplace-Verteilung, welche im Abschnitt 4.4.1 thematisiert wird, wird vor allem die *Gaußsche Normalverteilung*  $N(x; \mu, \sigma^2)$  eine wesentliche Rolle in dieser Arbeit spielen, z. B. in den Abschnitten 2.1.3 und 2.2 sowie im Kapitel 4. Dabei entspricht die

Notation  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  der zuvor Eingeführten mit  $p(X = x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2)$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung lautet

$$p(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{>0}$  und stellt durch die Varianz  $\sigma^2$  eine Glockenform um den Mittelwert  $\mu$ <sup>11</sup> dar, weshalb sie auch als Gaußsche Glockenkurve bezeichnet wird [Pap17]. Das obige Beispiel des Einfüllprozesses, welcher in der Regel 200 ml abfüllt, aber gewisse Toleranzen aufweisen kann, kann am einfachsten mit einer solchen Verteilung abgebildet werden. Unabhängig jedoch davon, ob es sich um eine diskrete oder kontinuierliche Zustandsvariable handelt, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Verteilung *normiert*, d. h. die Wahrscheinlichkeit aller auftretenden Ereignisse ergibt Eins:

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1,$$

wobei  $\mathcal{X}$  die Ergebnismenge darstellt. Darüber hinaus können auch mehrdimensionale Zufallsvariablen betrachtet werden, für welche die gezeigten Konzepte analog formuliert werden können [Mur12; Pap17]. In vielen Situationen interessiert zudem nicht nur die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses. Ist das Eintreten von Ereignis  $A$  oder  $B$  relevant, wobei  $A \cap B = \emptyset$  gilt, lautet die Wahrscheinlichkeit, dass eines der beiden Ereignisse eintreten wird:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B).$$

Falls das Eintreten dieser beiden Ereignisse voneinander stochastisch unabhängig ist, kann die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten, durch

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B) \quad (2.2)$$

ausgedrückt werden. Daraufhin kann die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis  $B$ , falls das Ereignis  $A$  sicher eintritt bzw. eingetreten ist und demnach  $\mathcal{P}(A) > 0$  gilt, mit

$$\mathcal{P}(B | A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} \quad (2.3)$$

---

<sup>11</sup>Die Erläuterung der Begriffe Varianz und Mittelwert folgt im nächsten Abschnitt.

angegeben werden. Aus der Relation (2.2) sowie der Beziehung (2.3) lässt sich direkt der Satz von Bayes, welcher auf den Mathematiker Thomas Bayes im Jahr 1763 zurückgeht, formulieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A | B) &= \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} \cdot \mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(B | A) \cdot \mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Hierbei beschreiben  $\mathcal{P}(A)$  und  $\mathcal{P}(B)$  jeweils die sogenannte A-priori-Wahrscheinlichkeit der beiden Ereignisse  $A$  und  $B$ , während  $\mathcal{P}(B | A)$  analog zu  $\mathcal{P}(A | B)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$ , unter der Bedingung, dass  $A$  eingetreten ist, darstellt [Bis06; Mur12; Pap17; Sch17]. Die Schlussfolgerung, die durch den Satz von Bayes gezogen werden kann, bildet in vielen Anwendungen ein wertvolles Instrument, um Aussagen über unsichere Situationen zu erlauben, z. B. in der Bayesschen Statistik [Bis06; KBK<sup>+</sup>13]. Die Bayessche Optimierung, welche im Abschnitt 2.1.3 vorgestellt und erläutert wird, basiert ebenso auf dem Satz von Bayes.

### 2.1.2 Statistische Momente

Häufig sind die statistischen Größen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Charakterisierung dieser besonders hilfreich, wie etwa die Angabe des Erwartungswertes  $\mathbb{E}[x]$ . Liegen  $N$  Stichproben vor, kann der arithmetische Mittelwert dieser Erhebung durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

angegeben werden. Je größer der Stichprobenumfang  $N$  ist, wenn demnach  $N \rightarrow \infty$  tendiert, desto mehr strebt der Mittelwert  $\bar{x}$  gegen den Erwartungswert  $\mathbb{E}[x]$ . Alternativ kann dieser bei Kenntnis der Dichtefunktion  $p(x)$  ebenfalls durch

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \\ \mu &= \mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx\end{aligned}\tag{2.5}$$

berechnet werden, abhängig davon, ob es sich um eine diskrete oder kontinuierliche Zufallsvariable handelt. Neben dem Erwartungswert ist oftmals die Streuung der Zufallsvariable von Interesse, d. h. wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsvariable Werte nah oder weiter entfernt vom Erwartungswert aufweist. Die Varianz  $\sigma^2$  bzw. ihre positive Wurzel  $\sigma$ , die Standardabweichung, stellen ein Maß für diese Streuung dar. Da-

bei wird die Varianz abhängig vom Erwartungswert (2.5) für diskrete bzw. kontinuierliche Zufallsvariablen auf die nachfolgende Weise definiert:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[x])^2 p(x_i), \\ \sigma^2 &= \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[x])^2 p(x) dx.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Um die lineare Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen  $x, y$  auszudrücken, d. h. inwiefern diese miteinander korrelieren, wird die Kovarianz genutzt. Ist diese Null, sind die beiden Zufallsvariablen voneinander unabhängig. Die Kovarianz ist analog zur Varianz (2.6) folgendermaßen definiert [Bis06]:

$$P_{xy} = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])(y - \mathbb{E}[y])] = \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y].\tag{2.7}$$

In der vorliegenden Arbeit wird diese für vektorielle Zufallsvariablen zur Kovarianzmatrix erweitert und in den Abschnitten des Unterkapitels 2.2 eine zentrale Rolle in der Zustandsschätzung einnehmen. Neben dem Erwartungswert und der Varianz existieren darüber hinaus noch weitere Größen zur Charakterisierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese werden auch als Momente einer Zufallsvariable bezeichnet [PP06]. Hierbei wird in Momente um Null und um den Erwartungswert unterschieden. Letztere sind daher auch als zentrale Momente bekannt und stellen eine Kenngröße jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Wiederum analog zur Varianz (2.6) wird das zentrale Moment  $j$ -ter Ordnung somit durch

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^j] &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[x])^j p(x_i), \\ \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^j] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[x])^j p(x) dx\end{aligned}$$

definiert, wobei erstes für diskrete und letzteres für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt. Dabei werden die Momente über Erwartungswert und Varianz hinaus als höhere Momente bezeichnet. Häufig stellen jedoch nur das dritte und vierte Moment relevante Größen dar. Während das dritte Moment die Schiefe, ein Maß für die Symmetrie einer Verteilung, ausdrückt, beschreibt das vierte Moment die Wölbung einer Verteilung, also die Steilheit dieser. Für die im vorigen Abschnitt eingeführte Normalverteilung (2.1) sind das erste sowie dritte Moment unabhängig von den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  Null, da der Erwartungswert  $\mu$  beträgt. Die Varianz lautet  $\sigma^2$ , die Wölbung beträgt  $3\sigma^4$ . Diese Eigenschaften der Gauß-Verteilung werden im Abschnitt 4.4.1 noch von Bedeutung sein. Häufig wird die Normalverteilung als Referenz für andere Verteilungen genutzt, sodass die Wölbung normiert

werden muss [Mur12; Sch17]. Darüber hinaus wird die normalisierte Gauß-Verteilung mit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  als Standardnormalverteilung bezeichnet (vgl. Gleichung (2.1)).

### 2.1.3 Bayessche Optimierung

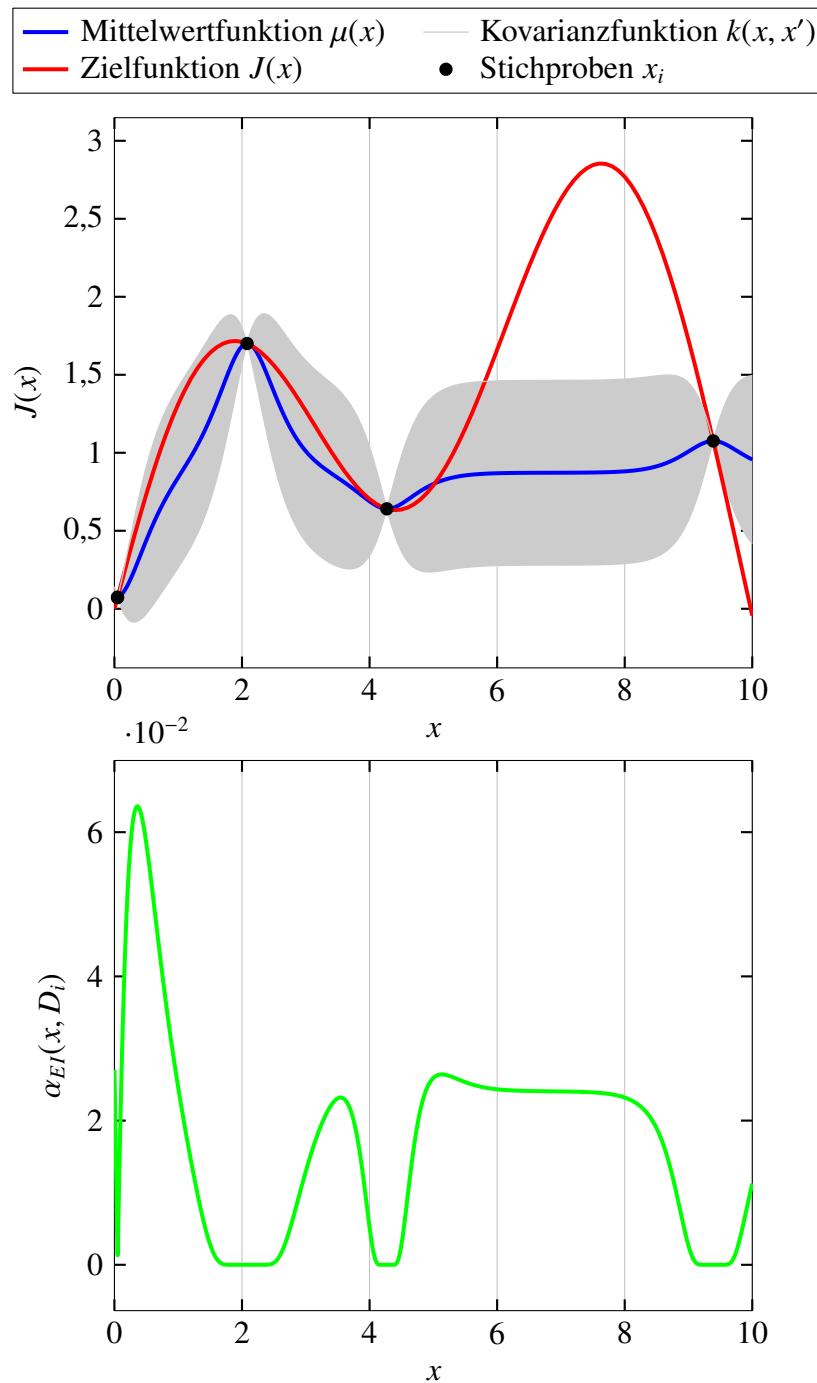
Der Satz von Bayes (2.4) eröffnet nicht nur die Möglichkeit, die Eintrittswahrscheinlichkeit für ein bedingtes Ereignis zu berechnen, sondern auch ein globales Optimum eines Optimierungsproblems anzunähern. Liegt eine Zielfunktion  $J(\mathbf{x})$  als Black-Box-Funktion vor, weil es sich nicht um eine analytisch darstellbare Funktion handelt oder es grundsätzlich sehr teuer und aufwendig ist, diese auszuwerten, bietet die *Bayessche Optimierung (BO)* eine Lösungsmethode in dieser Situation. Die experimentelle Einrichtung eines Prüfstands oder einer Maschine, bei der jeder Test durch Material, Verschleiß und Zeitaufwand Kosten verursacht (vgl. [HHTT22]), sowie die Suche nach einer optimalen Parametrierung für ein komplexes neuronales Netz (vgl. Abschnitt 3.1.2, [AC19; SLA12]), welche aufwendige Parameterstudien erfordert, beschreiben zwei Beispiele solcher Situationen. Ziel ist es trotz der Black-Box-Struktur das Optimum dieser Zielfunktion zu bestimmen, z. B. das Minimum

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} J(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

zu finden. Da wegen der unbekannten Zielfunktion  $J$  keine Gradienten vorliegen, können mächtige, gradientenbasierte Optimierungsverfahren wie das Newton-Verfahren nicht genutzt werden, um die Lösung (2.8) zu ermitteln. Ebenso stehen lediglich wenige  $N_0$  Datenauswertungen  $D_{N_0} = \{(\mathbf{x}_i, J(\mathbf{x}_i))\}_{i=1}^{N_0}$ , z. B. Experimente, zur Verfügung und es können nicht beliebig viele weitere Daten erhoben werden. Folglich besteht die Kernidee der BO darin, ein probabilistisches Ersatzmodell  $\hat{J}$  der Zielfunktion, welches auf den wenigen Daten und der Nutzung des Bayesschen Theorems (2.4) basiert, zu entwickeln und dieses zur Bestimmung des Optimums zu nutzen. Durch die Auswertung oder Beobachtung weiterer Datenpunkte  $(\mathbf{x}_{N_0+1}, J(\mathbf{x}_{N_0+1}))$ , wie etwa eines weiteren Parametertests oder eines neuen Experiments, kann das probabilistische Ersatzmodell aktualisiert und im Laufe der Iterationen verfeinert werden, sodass das Auffinden bzw. Annähern des globalen Minimums ermöglicht wird. Es handelt sich daher um ein sequentielles, probabilistisch motiviertes Optimierungsverfahren.

Grundsätzlich besteht die Bayessche Optimierung aus zwei Schritten [Fra18]: Einerseits die Aktualisierung des probabilistischen Modells  $\hat{J}$  basierend auf dem aktuellen Datensatz sowie andererseits die Bestimmung der nächsten, sinnvollsten Auswertung  $\mathbf{x}_{i+1}$  über eine Entscheidungsfunktion  $\alpha(\mathbf{x}_i, D_i)$ , welche auch *Acquisitionfunction* genannt wird. Dieses Vorgehen wird iterativ wiederholt, bis eine Abbruchbedingung erreicht wird, welche in

der Regel durch eine Maximalzahl  $N$  an Iterationen vorgegeben ist. Die Abbildung 2-1 visualisiert dieses Vorgehen, welches in den nächsten Absätzen näher erläutert wird.



*Abbildung 2-1: Fünfte Iteration der BO durchgeführt mittels der Software MATLAB<sup>®</sup>: Der Gaußprozess nähert die skalare Zielfunktion  $J(x) = \sin(x) + 0.1x^2 - 0.01x^3 + 0.5 \tanh(x)$  über Datenpunkte an. Die Acquisitionfunction weist hohe Werte an Stellen auf, an denen das Modell einen niedrigen Wert für  $J(x)$  anzeigen (Exploitation) oder die Unsicherheit in der Vorhersage groß ist (Exploration).*

Das probabilistische Modell  $\hat{J}$ , welches die Zielfunktion approximieren soll, wird meist als Gaußprozess-Regressionsmodell (GP-Modell) angenommen. Ein Gaußprozess (GP) ist die Erweiterung einer Normalverteilung (vgl. Gleichung (2.1)) hin zu Funktionen und charakterisiert sich eindeutig über seine Mittelwertfunktion  $\mu(\mathbf{x})$  und seine Kovarianzfunktion  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , welche durch

$$\begin{aligned}\mu &:= \mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[J(\mathbf{x})], \\ \Sigma &:= k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \mu(\mathbf{x}))(\mathbf{x}' - \mu(\mathbf{x}'))^T]\end{aligned}\tag{2.9}$$

für zwei Variablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  definiert sind (vgl. für Details zu Gaußprozessen [AC19]). So mit lässt sich das GP-Modell für die Zielfunktion  $J(\mathbf{x})$  mit den Gleichungen (2.9) durch

$$\hat{J}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma)\tag{2.10}$$

beschreiben. Die Mittelwert- und Kovarianzfunktion stellen hierbei die veränderlichen Parameter des Modells (2.10) dar und können als  $\mathbf{p} = (\mu, \Sigma)$  zusammengefasst werden. Unter der laufenden Nutzung von Daten  $D$  kann das Modell über seine Parameter  $\mathbf{p}$  und den Satz von Bayes (2.4) daher durch

$$\mathcal{P}(\mathbf{p} | D) = \frac{\mathcal{P}(D | \mathbf{p}) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{p})}{\mathcal{P}(D)}\tag{2.11}$$

aktualisiert werden (vgl. Anhang A2, Gleichung (A2-2)). In der vorherigen Abbildung 2-1 ist das aktuelle Modell exemplarisch nach vier ausgewerteten Stichproben abgebildet. Die anzunähernde skalare Funktion, dargestellt in rot, approximiert der Gaußprozess durch die Mittelwertfunktion, welche als blaue Linie visualisiert ist, und die Kovarianzfunktion, deren Verlauf durch die grauen Bereiche zu erkennen ist. Allerdings besteht für die Acquisitionfunction  $\alpha$  ein Zielkonflikt zwischen der Auswertung neuer und bekannter Bereiche des Definitionsbereichs  $\mathcal{X}$ . Dies ist auch bekannt als Dilemma zwischen *Exploration* und *Exploitation* [SSW<sup>+</sup>16; Fra18; Gar23]. Im Beispiel 2-1 ist beispielsweise durch die Kovarianz zu erkennen, dass der Bereich zwischen  $x = 5$  und  $x = 9$  bis zur fünften Iteration wenig exploriert wurde. Dies spiegelt auch die Acquisitionfunction in der unteren Abbildung wider, welche in diesem Bereich Werte größer als Null annimmt. Je nach Anwendung können verschiedene Funktionen  $\alpha$  hilfreich sein, meist wird jedoch ein Kompromiss zwischen beiden Zielen verwendet. Im Kontrast zur Black-Box-Form der zu minimierenden Funktion  $J$  weist die Acquisitionfunction eine numerisch kostengünstig auszuwertende Form auf. Allgemein lassen sich verbesserungsbasierte, optimistische und informationsbasierte Entscheidungsfunktionen unterscheiden [SSW<sup>+</sup>16]. Eine der populärsten Wahlen für eine Acquisitionfunction entstammt der verbesserungsbasierten Perspektive, welche einen nächsten Punkt  $\mathbf{x}_{i+1}$  zur Auswertung favorisiert, dessen Wahrscheinlichkeit

für  $J(\mathbf{x}_{i+1}) \leq J(\mathbf{x}_i)$  hoch ist [SSW<sup>16</sup>; SLA12; Fra18]. So maximiert die Acquisitionfunktion der *Expected Improvement (EI)* die erwartete Verbesserung bzgl. der Zielfunktion, indem

$$\alpha_{EI}(\mathbf{x}, D) := \mathbb{E} \left[ \max \left( \hat{J}(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}^+), 0 \right) \right]$$

gilt. Dabei beschreibt  $\mathbf{x}^+ = \arg \min_{\mathbf{x} \in D} J(\mathbf{x})$  die bisher beste, observierte Auswertung von  $J(\mathbf{x})$ . In der Abbildung 2-1 ist die EI für das Beispiel verwendet worden und zeigt durch ihr Maximum den Punkt für die nächste Iteration an. Somit lässt sich das Vorgehen der BO durch den folgenden Pseudocode zusammenfassen [SSW<sup>16</sup>; Fra18; AC19]:

---

### **Algorithmus 1** Bayessche Optimierung

---

**Initialisiere:**  $D_0 = D_{N_0}$ , GP-Modell (2.10),  $N$  maximale Iterationen,  $i = 0$

**while**  $i \leq N$  **do**

Update das GP-Modell (2.10) nach Gl. (2.11) durch die verfügbaren Daten  $D_i$ .

Bestimme den nächsten Datenpunkt  $\mathbf{x}_{i+1}$  mittels der Acquisitionfunktion  $\alpha(\mathbf{x}, D_i)$ .

Beobachte  $J(\mathbf{x}_{i+1})$  und aktualisiere die Datenmenge  $D_{i+1} = D_i \cup \{(\mathbf{x}_{i+1}, J(\mathbf{x}_{i+1}))\}$ .

**end while**

Gib basierend auf dem aktuell minimalen Ergebnis  $J(\mathbf{x}^*)$  die Lösung  $\mathbf{x}^*$  aus.

---

Die Bayessche Optimierung ist demnach eine datenbasierte, probabilistische Methode, deren Popularität sich in den letzten beiden vergangenen Dekaden aufgrund ihres flexiblen Einsatzgebietes vergrößert hat. Obschon die Kernidee der BO länger besteht, wird die Prägung des Begriffs *Bayessche Optimierung* dem Autor Jonas Mockus zugeschrieben [Moc89]. Heutzutage wird die BO überwiegend in Methoden des maschinellen Lernens eingesetzt, um die Hyperparameter dieser Verfahren zu optimieren. Dennoch ist ihre Nutzbarkeit auf kleine Dimensionen beschränkt, d. h. nur für  $n \leq 20$ . Neben der Herausforderung in der Anwendung höher dimensionaler Probleme besteht zudem noch Forschungsbedarf für beschränkte Optimierungsprobleme [SSW<sup>16</sup>; Fra18]. In dieser Arbeit wird die BO in den Abschnitten 3.1.2 bis 3.1.4 zur Parametrierung von neuronalen Netzen sowie im Abschnitt 3.2.1 zur Initialisierung von Kovarianzmatrizen des Kalman-Filters genutzt, dessen Funktionsweise im folgenden Abschnitt thematisiert wird.

## 2.2 Kalman-Filter

Eines der bekanntesten und populärsten Schätzverfahren ist das *Kalman-Filter*<sup>12</sup>, welches auf Rudolf E. Kalman in 1960 zurückgeht [Kal60] und die Grundlage für viele weitere Filtertypen darstellt. Daher wird in diesem Abschnitt das Kalman-Filter zunächst ausführlich

---

<sup>12</sup>In dieser Arbeit wird das diskrete Filter genutzt, für die Zustandsschätzung von kontinuierlichen Problemen wird auf das Kalman-Bucy-Filter verwiesen, z. B. [Sim06; Gib11].

basierend auf [Sim06; Gib11] hergeleitet, worauf die nachfolgenden Erweiterungen aufbauen. Ausgangspunkt des Kalman-Filters ist ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System), welches durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{2.12}$$

beschrieben werden kann<sup>13</sup>. Dabei stellen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die Systemmatrizen des LTI-Systems dar. Ziel des Kalman-Filters ist es, den Zustand  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  trotz des auftretenden, stochastischen Rauschens zuverlässig zu schätzen. Hierbei wird der Zustand als normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$  und Varianz  $\mathbf{P}$  definiert. Das erwähnte Rauschen kann einerseits durch die Sensorik als Messrauschen  $\mathbf{v}_k$  resultieren oder andererseits Modellgenauigkeiten und Störungen durch das Prozessrauschen  $\mathbf{w}_k$  abbilden. Beide Arten werden als normalverteiltes, mittelwertfreies Rauschen angenommen, es gilt daher  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$  bzw.  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ . Zudem liegen die Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$  und die Stellgröße  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$  als Messwerte vor. Ob der Zustand aus diesen Informationen trotz Rauschens geschätzt werden kann, klärt der Begriff der Beobachtbarkeit. Ein lineares, zeitinvariantes System (2.12) ist beobachtbar, wenn ein beliebiger Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus der Kenntnis der Ein- und Ausgangsgröße  $\mathbf{u}_k$  bzw.  $\mathbf{y}_k$  in einer endlichen Zeit rekonstruiert werden kann (vgl. [FKL<sup>+</sup>22; Wal22]). Dies kann mit dem Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman überprüft werden. Der Begriff der Beobachtbarkeit kann auch auf nichtlineare Systeme erweitert werden (vgl. Abschnitt 2.3, Anhang A1). Damit der Zustand korrekt geschätzt werden kann, muss der Schätzfehler  $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$  mit  $\hat{\mathbf{x}}_k$  als geschätzten Zustand gegen Null streben für  $k \rightarrow \infty$ . Diese Anforderung wird in dieser Arbeit aus der Optimierungsperspektive als Kleinste-Quadrate-Problem zunächst unabhängig vom Zeitschritt  $k$  formuliert, indem

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \mathbf{W} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})] \tag{2.13}$$

minimiert wird. In [Gib11] wird gezeigt, dass das Minimum unabhängig von der Präsenz der symmetrisch, positiv definiten Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}$  ist. Daher wird die Kostenfunktion (2.13) fortan ohne die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}$  bzw. mit  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  betrachtet. Unter der Annahme, dass zwischen dem geschätzten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  und der Messung  $\mathbf{y}$  ein affiner Zusammenhang besteht, d. h. dass  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}$  für bestimmte  $\mathbf{K}, \mathbf{b}$  gilt, wird zunächst die Optimalität des Kalman-Filters gezeigt, auf deren Basis die Gleichungen des iterativen Prädiktor-Korrektor-Schemas hergeleitet werden können. Da der geschätzte Zustand erwartungstreu zum tatsächlichen Zustand sein soll, kann  $\mathbf{b}$  mittels des Systemmodells

<sup>13</sup>Handelt es sich um ein LPV-System, können die Inhalte dieses Abschnitts analog mit der Notation über den Zeitschritt  $k$ , z. B. für die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_k$ , auf dieses übertragen werden.

(2.12), der Rechenregeln des Erwartungswertes (vgl. Anhang A2) und aufgrund des mittelwertfreien Rauschens bestimmt werden zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}] &= \mathbb{E}[(\mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}) - \mathbf{x}] \\
 &= \mathbb{E}[(\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{b}) - \mathbf{x}] \\
 &= \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbb{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{K}\mathbb{E}[\mathbf{v}] + \mathbf{b} - \mathbb{E}[\mathbf{x}] \\
 &= (\mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbb{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{b} \\
 &\stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \Rightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

mit dem Erwartungswert  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k]$ . Folglich gilt für den Schätzfehler:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} &= \mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}\mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Daraufhin kann die Kostenfunktion (2.13) mittels der Gleichungen (2.15) und (2.7) umformuliert werden, sodass mit  $\mathbf{P} = \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T]$  und aufgrund der Eigenschaften der Spur (vgl. Anhang A2) Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{K}) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})] \\
 &= \frac{1}{2}\left[\text{tr}\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbb{E}[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T]\right)(\mathbf{I} - \mathbf{C}^T\mathbf{K}^T) + \mathbf{K}\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]\mathbf{K}^T\right] \\
 &= \frac{1}{2}\text{tr}\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^T\mathbf{K}^T) + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T\right).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dabei gelten  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]$  und  $\mathbb{E}[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\mathbf{v}^T] = \mathbf{0}$  aufgrund des unkorrelierten Rauschens und der linearen Unabhängigkeit des Schätzfehlers vom Messrauschen. Um die Kostenfunktion (2.16) zu minimieren, muss anschließend der Gradient abhängig von  $\mathbf{K}$  gebildet werden (vgl. Anhang A2):

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{K}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{K}\mathbf{R} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}. \tag{2.17}$$

Daraufhin kann durch die Gleichungen (2.14) und (2.17) der optimale Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}$  mittels der affinen Transformation  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{b}$  berechnet werden. Diese Optimalität kann ebenso aus der Bayesschen Perspektive, welche dieselbe Lösung des Minimum-Varianz-Problems bzw. des Minimum-Mean-Squared-Error (MMSE) (2.13) mithilfe des bedingten Erwartungswerts formuliert, oder als geometrisches Problem, welches dieselbe Lösung durch eine orthogonale Projektion herleitet, gezeigt werden (vgl. [Gib11]).

Die Funktionsweise des Kalman-Filters ergibt sich anschließend durch ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren, welches eine rekursive Kleinste-Quadrat-Methode darstellt (vgl. Algorithmus 2). Zunächst wird ein Prädiktionsschritt basierend auf dem Modell (2.12)

durchgeführt, woraufhin sich der *a priori* geschätzte Zustand  $\hat{x}_{k+1|k}$  berechnen lässt. Hierbei stellt die Notation  $\bullet_{k+1|k}$  allgemein eine prädizierte Variable zum Zeitpunkt  $k + 1$  basierend auf Messungen oder der Kenntnis jener Variable bis zum Zeitpunkt  $k$  dar. Auch die a priori Kovarianzmatrix  $P_{k+1|k}$  wird basierend auf dem Modell bestimmt, da

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= \mathbb{E} \left[ (\hat{x}_{k+1|k} - x_{k+1|k}) (\hat{x}_{k+1|k} - x_{k+1|k})^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ A (\hat{x}_{k|k} - x_{k|k}) (\hat{x}_{k|k} - x_{k|k})^T A^T \right] + \underbrace{\mathbb{E}[w_k w_k^T]}_{=Q} = AP_{k|k}A^T + Q \end{aligned}$$

gilt. Anschließend erfolgt auf Basis der Messung  $y_k$  der Korrekturschritt, indem zunächst der optimale Eingriff  $K_{k+1}$  über die Gleichung (2.17) berechnet wird. Daraufhin kann die Schätzung des Zustands durch den Innovationsterm  $(y_k - C\hat{x}_{k+1|k})$  korrigiert werden, sodass die *a posteriori* Zustandsschätzung  $\hat{x}_{k+1|k+1}$  vorliegt. Der Innovationsterm beschreibt hierbei die Qualität der Schätzung im Vergleich zur Messung, welche sich auch durch die Residualkovarianz  $(CP_{k+1|k}C^T + R)$  bewerten lässt. Zudem wird die *a posteriori* Kovarianzmatrix  $P_{k+1|k+1}$  aktualisiert (vgl. für Details [Gib11]). Daher ergibt sich mit der Initialisierung des Anfangszustands  $\hat{x}_0$ , der Kovarianzmatrix  $P_0$  und den Rauschkovarianzen  $Q, R$ <sup>14</sup> der iterative Wechsel zwischen Prädiktions- und Korrekturschritt, welcher im Algorithmus 2 dargestellt ist.

---

### Algorithmus 2 Kalman-Filter

---

**Initialisiere:**  $\hat{x}_0 = \mathbb{E}[x_0]$ ,  $P_0 = \mathbb{E}[(\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T]$ ,  $Q, R$   
**for**  $k = 1, \dots, \infty$  **do**

**Prädiktionsschritt:**

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + Bu_k \\ P_{k+1|k} &= AP_{k|k}A^T + Q \end{aligned}$$

**Korrekturschritt:**

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1|k}C^T (CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_k - C\hat{x}_{k+1|k}) \\ P_{k+1|k+1} &= (I - K_{k+1}C)P_{k+1|k} \end{aligned}$$

**end for**

---

Trotz der stochastischen Perspektive des Kalman-Filters besteht eine enge Verwandtschaft zum Luenberger-Beobachter, der z. B. am Prüfstand des Golfroboters angewendet wird (vgl. Anhang A6.1). Die Beobachter unterscheiden sich lediglich durch die Art

<sup>14</sup>Diese können bei Bedarf zeitvariant modelliert werden, sodass  $Q$  und  $R$  im Algorithmus 2 durch  $Q_k$  und  $R_k$  ersetzt werden.

der Berechnung der Korrekturmatrix  $\mathbf{K}$  bzw.  $\mathbf{L}$ , welche durch die Minimierung einer Kostenfunktion bzw. durch Polvorgabe bestimmt wird. Diese unterschiedliche Bestimmung des Korrektureingriffs begründet sich durch die Fähigkeit, verschiedene Typen von Störungen kompensieren zu können [FKL<sup>+</sup>22]. Neben seiner Fähigkeit zur Prädiktion in der Zustands- und Parameterschätzung wird das Kalman-Filter darüber hinaus zur Glättung und Filterung verrauschter Signale genutzt (vgl. [Sim06; Gib11; Ein19; Wal22]). Da in der vorliegenden Arbeit der Fokus jedoch auf der Schätzung von Zuständen für die Zustandsregelung liegt, werden diese Funktionen vernachlässigt.

### 2.2.1 Extended Kalman Filter

Da das Kalman-Filter allerdings nur auf die Schätzung linearer Systemdynamiken limitiert ist und die meisten technischen Applikationen nichtlineare Strukturen aufweisen, wurde es im Zuge des Apollo-Programms<sup>15</sup> erweitert, um auch Zustände einer nichtlinearen Systemdynamik verarbeiten und schätzen zu können. Diese kann durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{2.18}$$

dargestellt werden, wobei  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{h}$  die differenzierbare System- und Messdynamik beschreiben. Weiterhin wird wie beim linearen System (2.12) unkorreliertes, weißes Prozess- und Messrauschen angenommen, sodass  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$  und  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  gilt. Kernidee des *Extended Kalman Filters (EKFs)* ist die Annäherung einer nichtlinearen Dynamik durch eine Taylorreihe erster Ordnung, um die Formulierung des Kalman-Filters nutzen zu können. Basierend auf der letzten Schätzung  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k)$  werden die linearisierten Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}=\mathbf{u}_k)}, \\ \mathbf{C}_{k+1} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}=\mathbf{u}_k)} \end{aligned}$$

bestimmt. Diese können anschließend im Algorithmus 3 analog zum Prädiktor-Korrektor-Schema des Kalman-Filters genutzt werden (vgl. Algorithmus 2). Implizite Annahme ist dabei, dass sich das Verhalten des nichtlinearen Systems in der Umgebung des Tupels  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k)$  linear verhält. Dies ist in der Abbildung 2-2 skizziert, in der eine skalare, nichtlineare Funktion anhand einzelner Arbeitspunkte und deren linearer Wirkungsbereiche, dargestellt durch die Ellipsen, approximiert werden kann. Im Unterschied zum Gain-

---

<sup>15</sup>Unter <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19860003843/downloads/19860003843.pdf> ist der technische Bericht der NASA dazu zu finden, welcher am 25.04.2023 abgerufen wurde.

Scheduling-Ansatz, welcher im Anhang A6.1 für den Regelungsentwurfs eines Golfroboters genutzt wird, bestimmt das EKF zu jedem Zeitpunkt  $k$  die Jacobimatrizen  $\mathbf{A}_{k+1}$  und  $\mathbf{C}_{k+1}$  mittels des aktuellen, geschätzten Zustands und Eingangs. Daher ist diese implizite Annahme lediglich von der Schrittweite bzw. Abtastrate abhängig, mit der die linearisierten Matrizen aktualisiert werden.

---

**Algorithmus 3** Extended Kalman Filter

---

**Initialisiere:**  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$ ,  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$   
**for**  $k = 1, \dots, \infty$  **do**

**Prädiktionsschritt:**

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

**Korrekturschritt:**

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T \left( \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k}\end{aligned}$$

**end for**

---

Das EKF bietet den Vorteil, eine einfache Struktur für die Schätzung nichtlinearer Dynamiken bereitzustellen, die das Konzept des Kalman-Filters nutzen kann. Es verliert aber dessen Optimalität (vgl. Gleichungen (2.13)-(2.17)), da es eine nichtlineare Dynamik über die Taylorreihe erster Ordnung abzubilden versucht [Mur12]. Durch die Linearisierung wird die abzubildende Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht korrekt repräsentiert, sodass es zu großen Abweichungen zwischen Modell und System kommen kann [Wal22]. Dies resultiert bei stark nichtlinearen Systemen in einer schlechten Schätzgüte und eröffnet das Risiko der Divergenz, da diese Nichtlinearitäten aufgrund des Abschneidens in der Taylorreihe bzw. von den gewählten Arbeitspunkten nicht adäquat erfasst werden können. Zudem bedarf das EKF der ersten Ableitungen des Systems, welche durch ihre Auswertung in jedem Zeitschritt einen erhöhten Rechenaufwand darstellen und für manche Systeme schwer zu bestimmen sind bzw. nicht analytisch vorliegen. Zur verbesserten Schätzung von Nichtlinearitäten existieren zwar auch EKFs mit höheren Termen der Taylorreihe, diese erfordern aber die Kenntnis höherer Ableitungen sowie einen gestiegenen Rechenaufwand [Sim06]. Daneben bieten iterierende EKFs die Möglichkeit, den Korrekturschritt mehrfach auszuführen, um beispielsweise stark nichtlineare Systeme besser zu erfassen, stellen aber ebenso einen erhöhten Rechenaufwand dar [Sim06; Wal22].

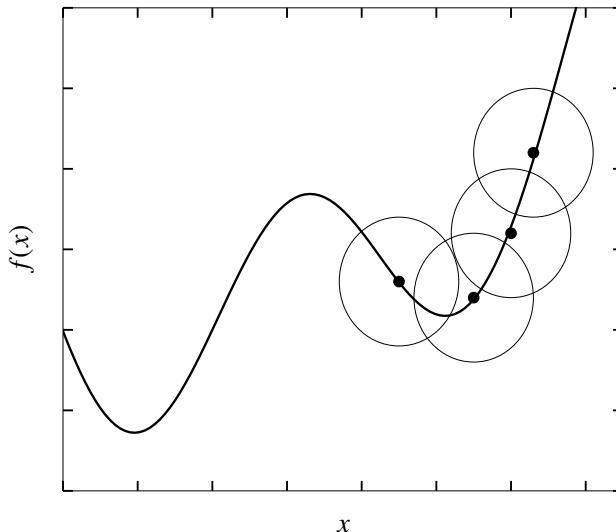


Abbildung 2-2: Näherungsweise lineares Verhalten der skalaren, nichtlinearen Funktion  $f$  in der Nähe ausgewählter Arbeitspunkte

### 2.2.2 Unscented Kalman Filter

Obwohl das EKF als das grundlegende Werkzeug zur Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme gilt, existieren zwei gravierende Nachteile, die bereits im vorigen Abschnitt erwähnt wurden. Die Kenntnis der Ableitungen ist zwingend notwendig, um die nichtlineare Systemdynamik zu linearisieren und die Struktur des linearen Kalman-Filters anwenden zu können, stellt jedoch häufig eine Herausforderung dar, wenn diese nicht analytisch bekannt sind und auf numerische Weise aufwendig bestimmt werden müssen. Ebenso verursacht die Annäherung der nichtlinearen Dynamik durch eine Taylorreihe erster Ordnung u. U. eine ungenügende Schätzgüte, falls zu große Abweichungen zwischen Modell und System bestehen.

Das *Unscented Kalman Filter (UKF)*<sup>16</sup> stellt dagegen eine ableitungsfreie Alternative zur Zustandsschätzung nichtlinearer Dynamiken dar. Dabei basiert die Grundidee des UKFs auf der Beobachtung, dass die Approximation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung deutlich einfacher als die einer nichtlinearen Transformation ist [JU97]. Aufgrund dieser Einschätzung stellten die Autoren Julier und Uhlmann in [JU97] einen neuen Ansatz eines rekursiven Minimum-Mean-Squared-Error-Schätzers vor, der die ersten beiden statistischen Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mittels deterministisch gewählter Stichprobenpunkte  $\mathcal{X}$  approximiert<sup>17</sup>. Diese Stichproben, Sigmepunkte genannt, werden durch die System- und Messgleichungen transformiert, woraufhin die Rekonstruktion des

<sup>16</sup>Der Begriff *unscented* hat hierbei keine fachliche oder technische Bedeutung, sondern ist durch einen der Autoren vergeben worden. Vgl. dazu das Interview zur Erscheinung von [JU04] unter [https://ethw.org/First-Hand:The\\_Unscented\\_Transform](https://ethw.org/First-Hand:The_Unscented_Transform), abgerufen am 21.04.2023.

<sup>17</sup>Für eine angenommene Gauß-Verteilung werden sogar die ersten drei Momente angenähert, da das dritte Moment gleich Null ist.

Erwartungswerts und der Kovarianz der Zustände aus diesen transformierten Sigmabunkten erfolgen kann. Der Vorteil der höheren Approximationsgüte und der Unabhängigkeit von Gradienteninformationen kann allerdings je nach Anwendung in einem erhöhten Rechenaufwand resultieren. Der nachfolgende Abschnitt orientiert sich insbesondere an den Vorarbeiten von [Sch17].

## Unscented Transformation

Da die Kernidee des UKFs auf der Approximation der ersten beiden statistischen Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung basiert, wird diese im Folgenden erläutert. Die nichtlineare Transformation der Sigmabunkte und die anschließende Rekonstruktion des Mittelwerts und der Kovarianz der Verteilung werden hierbei als *Unscented Transformation (UT)* bezeichnet. Zunächst wird die intuitive Idee der UT anhand eines autonomen Beispiels gezeigt. Dabei wird zur Übersichtlichkeit der Zeitindex  $k$  vernachlässigt. Eine Zufallsvariable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit Erwartungswert  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[\mathbf{x}]$  und Kovarianz  $\mathbf{P}$  wird durch eine bekannte, nichtlineare Funktion  $f$  transformiert, sodass  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  gilt. Ziel ist es nun, den Erwartungswert und die Kovarianz von  $\mathbf{y}$  zu schätzen, also die ersten beiden Momente des transformierten Vektors  $\mathbf{x}$ . Dazu werden  $2n + 1$  deterministische Sigmabunkte gewählt, welche durch

$$\mathcal{X} = \left[ \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} + \left( \sqrt{(n + \kappa)\mathbf{P}} \right)_{i_1}, \quad \bar{\mathbf{x}} - \left( \sqrt{(n + \kappa)\mathbf{P}} \right)_{i_2} \right] \quad (2.19)$$

mit  $i_1 = 1, \dots, n$  und  $i_2 = n + 1, \dots, 2n$  bezogen auf die Spalten des Matrixausdrucks definiert werden. Diese Stützstellen sind demnach symmetrisch um den Erwartungswert  $\bar{\mathbf{x}}$  gruppiert, vgl. die Darstellung in der Abbildung 2-3. Bei einer angenommenen Gauß-Verteilung<sup>18</sup> weist dies den Vorteil auf, dass die Symmetrie der Verteilung erfasst wird und somit die ersten drei zentralen Momente

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{x}^2] = \mathbf{I}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{x}^3] = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

korrekt bestimmt werden können. Anschließend werden diese Stützstellen durch die nichtlineare Funktion transformiert, sodass

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{h}(\mathcal{X}_i)$$

---

<sup>18</sup>Liegt keine Standard-Gauß-Verteilung vor, kann jene Verteilung mithilfe der Matrixwurzel von  $\mathbf{P}$  zur Standard-Gauß-Verteilung hin verschoben werden, vgl. [Sch17].

für  $i = 1, \dots, 2n + 1$  vorliegt. Daraufhin können der Erwartungswert  $\bar{\mathbf{y}}$  und die Kovarianz  $\mathbf{P}_y$  von  $\mathbf{y}$  über

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathbf{y}_i, \\ \mathbf{P}_y &= \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T\end{aligned}\tag{2.21}$$

approximiert werden. Die Gewichte  $\mathbf{W}$  ergeben sich somit aus den Bedingungen zur Erfassung der ersten beiden Momente sowie aus einer Normalisierungsbedingung:

$$1 = \sum_{i=0}^{2n} W_i = W_0 + 2nW_1.\tag{2.22}$$

Dabei bewirkt die symmetrische Anordnung der Sigmatypen um den Erwartungswert (vgl. Gleichung (2.19)), dass  $W_1 = W_2 = \dots = W_n$  gilt. Für den Erwartungswert lautet die Bedingung aufgrund der Standardnormalverteilung (vgl. Gleichung (2.20))

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{X}_i \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.\tag{2.23}$$

Um die Kovarianz korrekt zu erfassen, muss die folgende Gleichung erfüllt sein (vgl. Gleichung (2.20)):

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathcal{X}_i - \bar{\mathbf{x}})^T = 2W_1 s_1^2 \cdot \mathbf{I} \stackrel{!}{=} \mathbf{I},\tag{2.24}$$

wobei  $s_1$  den Abstand zwischen dem Erwartungswert  $\bar{\mathbf{x}}$  und einem Sigmatyp  $\mathcal{X}_i$  mit  $i \neq 0$  beschreibt. Daraufhin können aus den Gleichungen (2.22), (2.23) und (2.24) durch Umstellung der Gleichungen die folgenden Zusammenhänge formuliert werden [JU04; Sim06; Sch17]:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{\sqrt{2W_1}}, \\ W_0 &= 1 - 2nW_1.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Um die zwei Gleichungen (2.25) mit den drei Unbekannten  $W_0, W_1, s_1$  zu lösen, wird schließlich ein Entwurfsparameter  $\kappa \in \mathbb{R}$  definiert. Indem die Gewichte um den Erwartungswert für  $i = 1, \dots, 2n$  durch

$$W_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}$$

beschrieben werden, ergibt sich für den Abstand  $s_1$  und für das Gewicht des nullten Sigmepunktes (vgl. [JU04; Sch17]):

$$s_1 = \sqrt{n + \kappa},$$

$$W_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa}.$$

Der Parameter  $\kappa$  stellt folglich einen Entwurfsparameter für die UT dar, der Einfluss auf das Gewicht des nullten Sigmepunktes nehmen kann und somit die Wölbung, demnach das vierte Moment, anpassen kann, falls Vorwissen vorhanden ist. Im Fall einer vorliegenden Gauß-Verteilung kann das optimale  $\kappa$  somit durch  $\kappa = 3 - n$  bestimmt werden<sup>19</sup>. Für  $\kappa = 0$  reduziert sich die UT dagegen auf eine Transformation mit nur  $2n$  Sigmepunkten [Sim06]. Die Gewichte lassen sich in diesem Fall leicht nach dem obigen Schema und unter Nutzung der Formel für die Kovarianz (2.7) herleiten (vgl. [Sim06]). Allerdings kann die Wahl von  $\kappa < 0$  dazu führen, dass die Kovarianzmatrix nicht positiv (semi-)definit ist [Sim06; Sch17]. In diesem Fall können keine Sigmepunkte nach Gleichung (2.19) bestimmt werden. Um diese Auswirkung zu vermeiden, wird die skalierte UT genutzt, welche im Anschluss an ein Beispiel im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden wird.

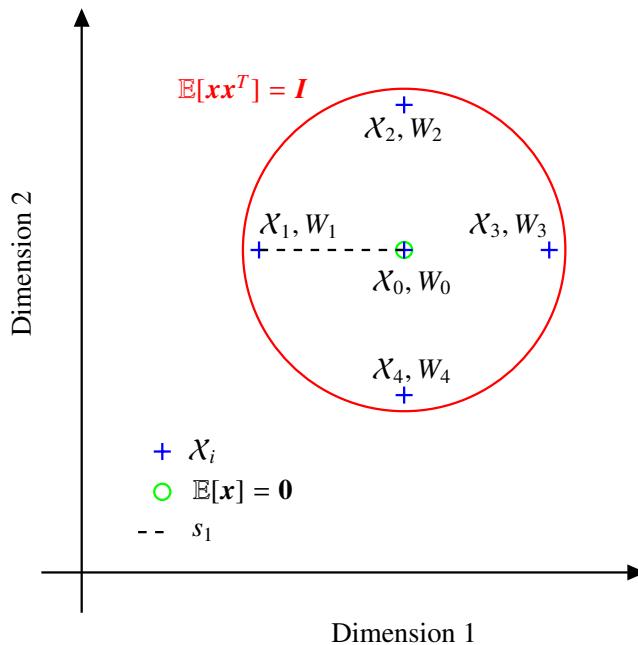


Abbildung 2-3: Anordnung der Sigmepunkte einer zweidimensionalen Zufallsvariable, Darstellung nach [Sch17]

Ein einfaches, beliebiges Beispiel der erläuterten UT für eine zweidimensionale Zufallsvariable ist in der Abbildung 2-4 visualisiert. Die Transformation beschreibt die Um-

<sup>19</sup>Dies kann leicht nachgerechnet werden, vgl. [JU04].

wandlung von Polar- in kartesische Koordinaten, welche klassischerweise in der Sensorik auftritt [JU04; Sim06]. Es werden 300 zufällig verteilte Punkte  $\mathbf{x} = (r, \varphi)^T$  gewählt, wobei  $r \in [-0,01; 0,01]$  und  $\varphi \in [-0,35; 0,35]$  gilt, und durch die folgende Funktion transformiert:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Es gilt zudem  $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = (0, \pi/2)^T$ ,  $\mathbf{P} = \text{diag}([\sigma_r^2, \sigma_\varphi^2])$  sowie  $\kappa = 1$ . In der Abbildung 2-4 werden die Kovarianzen als Ellipsen dargestellt, wohingegen die Mittelwerte als Kreise visualisiert sind. Es ist zu erkennen, dass die UT die Eigenschaften der Verteilung sehr gut approximiert, da der Mittelpunkt und die Kovarianz sehr nah an den exakten ersten beiden Momenten liegen. Der durch die Linearisierung ermittelte Mittelpunkt sowie die Kovarianz weisen dagegen eine deutlich schlechtere Güte auf (vgl. [Sim06; JU04]). Dies stellt den Vorteil der UT bzgl. der Approximationsgenauigkeit heraus.

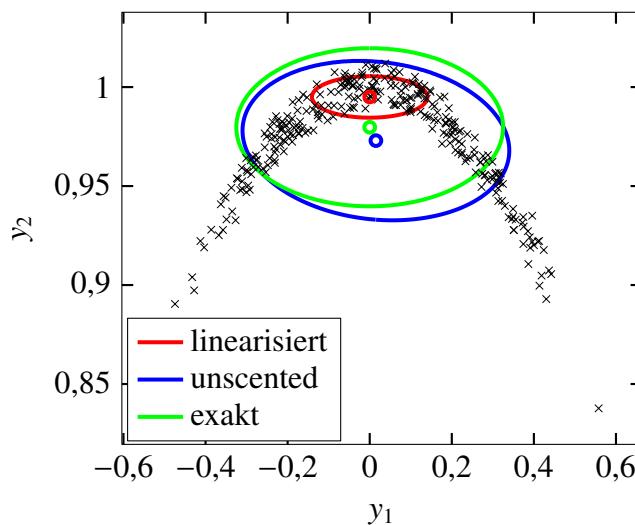


Abbildung 2-4: Approximation des Erwartungswerts und der Kovarianz (in grün) durch Linearisierung (in rot) und UT (in blau) für das Beispiel (2.26) nach [Sim06; JU04]

### Scaled Unscented Transformation

Um die Berechnung nicht positiv (semi-)definiter Kovarianzmatrizen zu vermeiden, wird in [Jul02] eine Skalierung der Sigmabpunkte um den Erwartungswert durchgeführt. Dabei wird ein weiterer Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  definiert, der die Entfernung der Sigmabpunkte mit  $i = 1, \dots, 2n$  zum Erwartungswert skaliert:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_0 + \alpha(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0).$$

Indem weiterhin die Bedingungen an die ersten beiden Momente erfüllt sein müssen (vgl. Gleichung (2.20)), können die Gewichte  $\mathbf{W}$  analog zu Gleichungen (2.23) und (2.24) für die Skalierung angepasst werden. Da die Grundidee zur Berechnung der Gewichte bereits im vorigen Abschnitt für den allgemeinen Fall der UT gezeigt worden ist und die skalier- te UT eine Erweiterung dieser ist<sup>20</sup>, wird an dieser Stelle darauf verzichtet und auf die Herleitung in [JU04; Sch17] verwiesen.

Darüber hinaus wird in [Jul02] ein weiterer Entwurfsparameter  $\beta \in \mathbb{R}$  definiert, dessen Wirkung im Kontrast zum Parameter  $\kappa$  die Wölbung nach der Transformation prägt, in dem dieser das Gewicht des nullten Sigmabunktes verändert. Handelt es sich um eine Gauß-Verteilung, kann gezeigt werden, dass für  $\beta = 2$  das Moment vierter Ordnung optimal approximiert werden kann. Auf eine ausführliche Herleitung wird zugunsten des Leseflusses erneut verzichtet, da die Argumentation über die Taylorreihe in [Jul02] und [JU04] nachvollzogen werden kann. Da der Parameter  $\beta$  jedoch auf das Gewicht des nullten Sigmabunktes  $X_0$  wirkt, ändert sich die Berechnung des Erwartungswertes und der Kovarianz. Folglich werden die Gewichte unterschieden in jene zur Berechnung des Erwartungswertes, welche mit dem Index  $\bullet^{(m)}$  versehen sind, und in solche zur Berechnung der Kovarianz, welche stattdessen mit  $\bullet^{(c)}$  gekennzeichnet sind. Anschließend können die Gewichte mit dem neu eingeführten Parameter  $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$  folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{n + \lambda}, \\ W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta, \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} &= \frac{1}{2(n + \lambda)} \quad i = 1, \dots, 2n. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Aus den Gleichungen (2.21) und (2.27) ergibt sich somit das Vorgehen für das skalier- te UKF, welches im Algorithmus 4 formuliert ist. Hierbei stellen  $\mathbf{p}_{UKF} = (\alpha, \beta, \kappa)$  die Entwurfsparameter des UKFs dar, deren jeweilige Werte zu Beginn festgelegt werden müssen. Der Parameter  $\alpha$  steuert die Entfernung der Sigmabunkte vom Erwartungswert, denn je kleiner  $\alpha$  ist, desto näher befinden sich die Sigmabunkte am Erwartungswert. Die Einflussgrößen  $\beta$  und  $\kappa$  beeinflussen jeweils das Gewicht des nullten Sigmabunktes und somit die Wölbung der Verteilung nach bzw. vor der Transformation. Dies bedeutet, je größer  $\beta$  bzw.  $\kappa$  gewählt werden, desto stärker ist die Wölbung der resultierenden Ver- teilung, sodass die Wahrscheinlichkeit für Werte nah am Erwartungswert deutlich höher ist als bei einer flacheren Wölbung. Dieser Einfluss der Entwurfsparameter  $\mathbf{p}_{UKF}$  wird besonders ausführlich in [Sch17] illustriert sowie für Black-Box-Modelle optimal über eine Gaußprozessregression ausgelegt. Analog zum Kalman-Filter prägen darüber hi-

<sup>20</sup>Für  $\alpha = 1$  stellt die skalierte UT die allgemeine, zuvor gezeigte UT dar.

naus die Kovarianzmatrizen des Prozess- und Messrauschens die Performanz des UKFs, welche ebenfalls initialisiert werden müssen. Dies ist mitunter nicht einfach und resultiert häufig in einem aufwendigen, händischen Tuning (vgl. [NSRH21; CHJA18] und Abschnitt 3.2.1). Alternativ können diese Entwurfsparameter durch einen erweiterten Zustand gleichzeitig zu den Zuständen geschätzt werden, vor allem wenn diese Rauschprozesse nichtlineare Strukturen aufweisen [JU04; Sim06; Gib11].

---

**Algorithmus 4** Scaled Unscented Kalman Filter

---

**Initialisiere:**  $\alpha, \beta, \kappa, \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \mathbf{P}_0 = (\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]), \mathbf{Q}, \mathbf{R}$

**for**  $k = 1, \dots, \infty$  **do**

**Berechnung der Sigmapunkte:**

$$\mathcal{X}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1|k-1}} & \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1|k-1}} \end{bmatrix}$$

**Prädiktionsschritt:**

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{k|k-1} &= f(\mathcal{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-] [\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{Y}_{k|k-1} &= \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{y}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathbf{Y}_{i,k|k-1} \\ \mathbf{P}_y &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-] [\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{P}_{xy} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-] [\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^T \end{aligned}$$

**Korrekturschritt:**

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_y \mathbf{K}_k^T \end{aligned}$$

**end for**

---

## Square Root Unscented Kalman Filter (SRUKF)

Neben der ursprünglichen UKF-Formulierung in Algorithmus 4 existiert in der Literatur eine Vielzahl an Erweiterungen und Spezialformen des Filters. Diese sind meist durch numerische Gründe motiviert und unterscheiden sich beispielsweise in der Anzahl der verwendeten Sigmapunkte, um den Rechenaufwand zu reduzieren [Jul03; JU04; Sim06]. Hierbei stellt die Bestimmung der Sigmapunkte  $\mathcal{X}$  den größten Anteil dieses Aufwandes dar. Zudem ist die numerische Berechnung von  $\mathbf{P}_k$  besonders sensibel, da die Kovarianzmatrix symmetrisch positiv (semi-)definit sein muss. Um dies sicher zu stellen und

gleichzeitig den Berechnungsaufwand durch die Bestimmung der Sigmapunkte zu reduzieren, ist die Variante *Square Root Unscented Kalman Filter (SRUKF)* entwickelt worden [vW01], deren Algorithmus folgendermaßen lautet:

---

**Algorithmus 5** Square Root Unscented Kalman Filter

---

**Initialisiere:**  $\alpha, \beta, \kappa, \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \mathbf{S}_0 = \text{chol}\left(\mathbb{E}\left[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T\right]\right), \mathbf{Q}, \mathbf{R}$

**for**  $k = 1, \dots, \infty$  **do**

**Berechnung der Sigmapunkte:**

$$\mathcal{X}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \sqrt{(n+\kappa)}\mathbf{S}_{k-1} & \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \sqrt{(n+\kappa)}\mathbf{S}_{k-1} \end{bmatrix}$$

**Prädiktionsschritt:**

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{k|k-1} &= f(\mathcal{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1} \\ \mathbf{S}_k^- &= \text{qr}\left(\left[\sqrt{W_1^{(c)}}(\mathcal{X}_{1:2n,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad \sqrt{\mathbf{Q}}\right]\right) \\ \mathbf{S}_k^- &= \text{cholupdate}\left(\mathbf{S}_k^-, \mathcal{X}_{0,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-, W_0^{(c)}\right) \\ \mathbf{Y}_{k|k-1} &= \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{y}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathbf{Y}_{i,k|k-1} \end{aligned}$$

**Korrekturschritt:**

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_y &= \text{qr}\left(\left[\sqrt{W_1^{(c)}}(\mathbf{Y}_{1:2n,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad \sqrt{\mathbf{R}}\right]\right) \\ \mathbf{S}_y &= \text{cholupdate}\left(\mathbf{S}_y, \mathbf{Y}_{0,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-, W_0^{(c)}\right) \\ \mathbf{P}_{xy} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-] [\mathbf{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^T \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} = (\mathbf{P}_{xy} / \mathbf{S}_y^T) / \mathbf{S}_y \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \\ \mathbf{U} &= \mathbf{K}_k \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_k &= \text{cholupdate}(\mathbf{S}_k^-, \mathbf{U}, -1) \\ \text{end for} \end{aligned}$$


---

Diese Variante schafft Abhilfe, indem die symmetrische, positiv (semi-)definite Matrix  $\mathbf{P}_k$  durch ihre Wurzel  $\mathbf{S}_k$  dargestellt wird:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{S}_k^T.$$

Die Vorteile, wenn die Matrixwurzel  $\mathbf{S}_k$  in der UT benutzt wird, liegen nicht nur in einer erhöhten Robustheit bzgl. numerischer Ungenauigkeiten, da  $\mathbf{P}_k$  symmetrisch und positiv (semi-)definit bleibt, sondern auch in der Verringerung des Rechen- und Speicher- aufwands. Dies resultiert aus den effizienteren algebraischen Methoden wie der QR- und Cholesky-Zerlegung oder der Berechnung einer Kleinsten-Quadrat-Lösung (vgl. [vW01])

und Anhang A4), welche im SRUKF-Algorithmus 5 die wesentlichen Unterschiede zum UKF-Algorithmus 4 darstellen. Der UKF- bzw. SRUKF-Algorithmus kann zudem wie alle anderen Kalman-Filter zur reinen Parameterschätzung eingesetzt werden, wenn der Zustand des Algorithmus 5 als die zu identifizierenden Parameter definiert wird [vW01]. Alternativ kann auch eine gleichzeitige Schätzung von Zuständen und Parametern vorgenommen werden, indem der Zustand um diese erweitert wird. Im Abschnitt 4.1 dient die Grundidee der simultanen Schätzung als Ausgangspunkt für die Entwicklung einer neuartigen Methode zur Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten.

Der Blick auf die bisherigen Methoden dieses Kapitels war stark stochastisch und weniger regelungstechnisch geprägt, da die gezeigten Techniken nicht nur zur Zustands- und Parameterschätzung genutzt werden können, sondern vielfältigen Schätzproblemen zur Verfügung stehen. Dies kann beispielsweise die Filterung und Glättung von Signalen sein. Daher werden solche Verfahren häufig als Schätzer im allgemeinen Kontext bezeichnet, vgl. [Gib11]. Der Begriff Beobachter bezieht sich dagegen auf den regelungstechnischen Vorgang, die Zustände (oder Parameter, Störungen) eines dynamischen Systems zu schätzen und diese zu *prädizieren*, um eine Zustandsregelung zu ermöglichen. Daher wird dieser Begriff im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet.

## 2.3 Sliding-Mode-Beobachter

Neben einer hohen Schätzgüte, welche das wichtigste Kriterium für die Qualität eines Zustandsbeobachters darstellt, gibt es weitere Anforderungen, die je nach Anwendungsfall wünschenswert sind. Die Robustheit bzgl. Anfangsstörungen und Störgrößen stellt in der Praxis eine ebenso wichtige Einflussgröße dar. So ist ein Luenberger-Beobachter (vgl. [FKL<sup>+</sup>22], Anhang A6.1) robust gegenüber Anfangsstörungen, kann jedoch im Vergleich zu den Kalman-Filtern keine stochastisch auftretenden Störungen kompensieren. Ein populärer, robuster Beobachter, der verschiedene Arten von Störungen kompensieren und weiterhin korrekte Schätzwerte liefern kann, ist ein *Sliding-Mode-Beobachter (SMO)*. Dieser ist durch die Sliding-Mode-Regelung motiviert, welche zu den strukturvariablen Regelungen gehört und bereits seit den 1960er Jahren praktiziert wird (vgl. [Spu08], [Ada18]). Die Grundidee dieses Reglers besteht darin, theoretisch unendlich schnell zwischen unterschiedlichen Regelgesetzen zu schalten, um den Regelfehler trotz bestehender Störungen oder Modellabweichungen zu reduzieren. In der Praxis führt dieses schnelle Umschalten allerdings zu dem Nachteil einer hohen Beanspruchung der Aktorik, welches sich in einem unerwünschten Rattern der Stellgröße äußert. Dieser Nachteil ist jedoch keine Herausforderung für einen Beobachter, dessen Dynamik auf keine Aktorik wirkt, sodass das Rattern lediglich numerische Auswirkungen aufweist und die Grundidee des Reglers unkompliziert adaptiert werden kann.

Um die Funktionsweise eines SMOs zu verdeutlichen und dessen Eigenschaften kennenzulernen, wird zunächst ein einfaches, lineares Beispiel<sup>21</sup> erarbeitet. Das folgende System stammt aus [Bou15] und ist mittels des expliziten Euler-Verfahrens und der Schrittweite  $\Delta t > 0$  diskretisiert worden (vgl. Anhang A5.1). Es weist eine skalare, beschränkte Störung  $\rho_k \leq |\Delta f_{\max}|$  für alle Zeitschritte  $k$  mit bekannter Schranke  $\Delta f_{\max}$  auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \Delta t \begin{pmatrix} x_{2,k} \\ u_k + \rho_k \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{x}_k. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Das Ziel ist es nun, die Zustände des Systems (2.28) trotz auftretender, unbekannter Störung  $\rho_k$  zu schätzen. Daher wird die *Sliding-Variable* als Schätzfehler  $\mathbf{e}_{y,k} = \hat{\mathbf{y}}_k - \mathbf{y}_k$  definiert, für welchen  $\mathbf{e}_y = 0$  in endlicher Zeit erreicht werden soll, woraus  $\mathbf{e}_{y,k} \rightarrow \mathbf{0}$  für  $k \rightarrow \infty$  folgt. Ein Sliding-Mode-Beobachter für das lineare System (2.28) lautet somit folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta t \left( u_k - \vartheta \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{y,k}) \right), \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Voraussetzung für die Konvergenz des Beobachters ist die Bedingung  $\vartheta \geq |\Delta f_{\max}|$ , deren Notwendigkeit mittels einer Stabilitätsanalyse basierend auf Lyapunov-Funktionen, wie etwa  $V(\mathbf{e}_{y,k}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{y,k}^2$ , gezeigt werden kann (vgl. [DFL05; KCM<sup>+</sup>14; Mor27]). Wirkt exemplarisch eine uniform verteilte Störung  $\rho_k$  auf das System, d. h.  $\rho_k \in \mathcal{U}(0, 1)$ , und wird der Beobachter (2.29) mit  $\vartheta = 9 > 1 = |\Delta f_{\max}|$  parametriert, lässt sich die Schätzgüte in der Abbildung 2-5 analysieren. In dieser Grafik wird die Qualität zweier SMOs verglichen, welche sich durch die Schrittweite  $\Delta t$  unterscheiden. Beide Beobachter weisen eine hohe Schätzgüte auf, variieren jedoch bzgl. der Stärke des auftretenden Ratterns. Dieses wird durch den Korrekturterm  $v(\mathbf{e}_{y,k}) = -\vartheta \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{y,k})$  ausgelöst. Der Korrekturterm wird meist als Schaltfunktion bezeichnet und kann komplexere Formen annehmen, beispielsweise

$$v(\mathbf{e}_{y,k}) = -\vartheta |\mathbf{e}_{y,k}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{y,k}), \tag{2.30}$$

wobei der Exponent auch höhere Werte annehmen kann. In der vorliegenden Art (2.30) ist der Sliding-Mode-Beobachter als *Super Twisting Algorithmus (STA)* bekannt, Verallgemeinerungen der Schaltfunktion mit z. B. höheren Exponenten sind dagegen als *Generalized Super Twisting Algorithmus (GSTA)* oder höherdimensionale STAs bekannt

<sup>21</sup>Für die Anwendung auf einem Digitalrechner muss der Beobachter diskret vorliegen, deswegen wird er entgegen der üblichen kontinuierlichen Formulierung in der Literatur direkt in diskreter Form dargestellt. Hierbei beeinflusst die Wahl der Schrittweite  $\Delta t$  die Performanz des Beobachters, vgl. [Bou15].

[Spu08; Mor27; SEFL14; DFP06; KCM<sup>+</sup>14]. Der potenzierte absolute Schätzfehler als zusätzlicher Faktor in den Schaltfunktionen des STAs oder GSTAs sorgt dabei für eine schnellere Konvergenz und höhere Robustheit, u. U. aber auch für ein stärkeres Rattern. Die Ursache des Ratterns resultiert aus den zwei Phasen der Beobachterdynamik eines SMOs. Die Phase, bis  $e_{y,k} = 0$  erreicht ist, wird *Reaching-Phase* genannt. Diese ist für das Beispiel (2.29) in der Abbildung 2-5 nur sehr kurz bis etwa 0,01s zu erkennen.

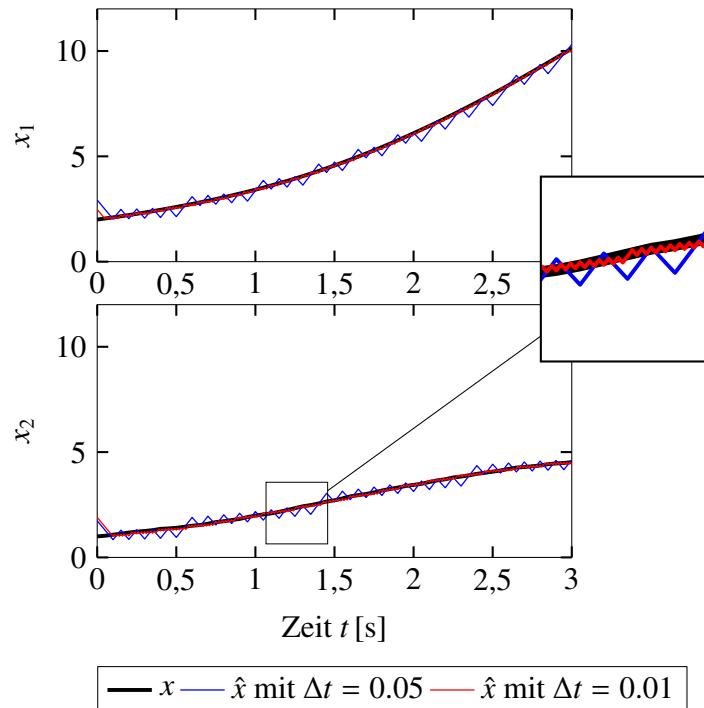


Abbildung 2-5: Zustandsschätzung für das lineare Beispiel (2.28): Einfluss der Schrittweite auf die Schätzgüte und das typische Rattern

Die folgende Visualisierung in Abbildung 2-6 bildet dagegen den Phasenraum des Schätzfehlers für unterschiedliche Anfangsbedingungen des Beobachters  $\hat{x}_0$  ab, welche durch die verschiedenen, rot gestrichelten Linien dargestellt sind. Die Reaching-Phase ist somit sehr deutlich durch das Zulaufen des Fehlers auf die Schaltgerade, beispielhaft dargestellt in schwarz, zu erkennen. Anschließend tritt der Beobachter in die *Sliding-Phase*, auch bekannt als der namensgebende *Sliding-Mode*, ein, bei der die Sliding-Variable theoretisch idealerweise bei Null verbleibt, durch das hochfrequente Umschalten jedoch in einer kleinen Umgebung um Null oszilliert [Spu08; SEFL14; NM22]. Dieser Effekt kann für die Fehlerdynamik anschaulich in der Abbildung 2-6 beobachtet werden, bei der die Sliding-Variable auf der Schaltgerade verbleibt und zur Ruhelage gleitet. Dieses Verhalten ist in der Grafik 2-5 anhand des typischen Ratterns erkennbar. Je nach Wahl der Schrittweite  $\Delta t$  und des Einflussfaktors  $\vartheta$  sowie der Art der Schaltfunktion  $v$  kann dieser Effekt geringer oder stärker ausfallen. In der Sliding-Phase sind der beobachtete und gemessene Ausgang trotz dieses Ratterns nahezu identisch, sodass die übrigen beobachteten Zustände

abhängig von der Modellqualität und den Konvergenzeigenschaften die realen Zustände abbilden. Die positiven Konvergenz- und Robustheitseigenschaften eines SMOs werden an dieser Stelle nicht bewiesen, können aber mithilfe von Lyapunov-Funktionen leicht gezeigt werden (vgl. [NM22; SEFL14; DFP06]) und stellen sicher, dass es sich während der Reaching-Phase um eine attraktive Region handelt und die Sliding-Variable bei Erreichen der Sliding-Phase in dieser verbleibt.

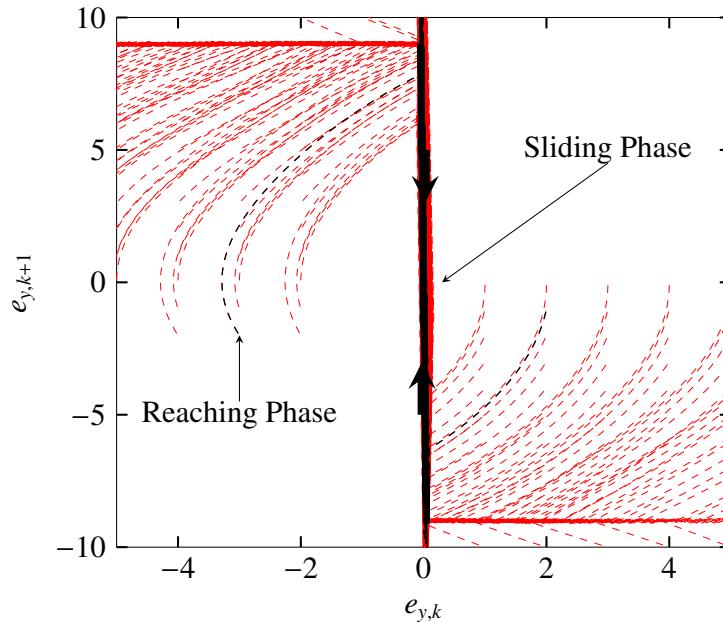


Abbildung 2-6: Typischer Phasenraum des Schätzfehlers anhand des Beispiels (2.28): Verschiedene Anfangsbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}_0$  und  $\Delta t = 0.01$

Nach dem einführenden Beispiel wird nun die allgemeine Form eines SMOs hergeleitet. Diese bezieht sich auf mehrdimensionale, nichtlineare Systeme mit eindimensionalem Ausgang, d. h.  $m = 1$ . Für den Fall  $m > 1$  wird auf [FOT14; Dra92; DU95] verwiesen. Zunächst wird der Begriff der Beobachtbarkeit (vgl. Abschnitt 2.2) für nichtlineare Systeme definiert, der aus Gründen der Übersichtlichkeit in den nächsten Absätzen in kontinuierlicher Zeit und mit den Dynamiken<sup>22</sup>  $f$  und  $h$  formuliert wird. Für ein nichtlineares System mit  $y \in \mathbb{R}$  lassen sich die Lie-Ableitungen  $L_f^{i-1}h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  durch  $h_i(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und

$$L_f^{i-1}h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = h_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial h_{i-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = 2, \dots, n.$$

<sup>22</sup>Diese stellen kurzzeitig die kontinuierlichen System- und Messdynamik dar, obwohl sie als das diskrete Pendant definiert worden sind und dieses auch nach dem Begriff der Beobachtbarkeit weiter repräsentieren.

definieren. Daraufhin kann die Beobachtbarkeitsmatrix durch

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ L_f h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ L_f^2 h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} = O_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.31)$$

formuliert werden [Ada18]. Ist die Beobachtbarkeitsmatrix (2.31) invertierbar, d. h. ist  $O_{n-1}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  injektiv, ist das System (2.18) beobachtbar<sup>23</sup> [Ada18; Mor27]. Anschließend kann es in die nichtlineare Regelungsnormalform überführt werden [Ada18]:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ h_n(O_{n-1}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$y = z_1.$$

Auf Grundlage der Beobachtbarkeitsform (2.32) kann der Sliding-Mode-Beobachter für ein allgemeines System anschließend in die folgende, diskrete Struktur überführt werden, bei der die Modelldynamik  $\hat{f}$  ausschließlich auf die letzte Zeile und die  $n$  Schaltfunktionen  $v_i$  auf jede Zeile wirken:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n,k+1} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta t \begin{pmatrix} \hat{x}_{2,k} + v_1(e_{y,k}) \\ \hat{x}_{3,k} + v_2(e_{y,k}) \\ \vdots \\ \hat{f}(\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}, \dots, \hat{x}_{n-1,k}, y_k, k) + v_n(e_{y,k}) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\hat{y}_k = \hat{x}_{1,k},$$

$$e_{y,k} = \hat{y}_k - y_k.$$

Mithilfe der Darstellung (2.33) lässt sich schließlich die Fehlerdynamik des SMOs ermitteln. Der Modellfehler  $\Delta f$ , der aus Anfangsfehlern, Störungen oder Modellungenauigkeiten resultieren kann, ist dabei als Differenz zwischen Modell  $\hat{f}$  und realem System  $f$  durch

$$\Delta f = \hat{f}(\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}, \dots, \hat{x}_{n-1,k}, y_k, k) - f(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n-1,k}, y_k, k)$$

---

<sup>23</sup>Einfacher nachzuweisen ist häufig die schwache Beobachtbarkeit eines Systems durch den vollständigen Rang der Jacobimatrix von  $O_{n-1}$ .

definiert [DFP06; Spu08; SEFL14]. Daher gilt für die Fehlerdynamik:

$$\begin{pmatrix} e_{y,k+1} \\ e_{2,k+1} \\ \vdots \\ e_{n-1,k+1} \\ e_{n,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,k+1} - x_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} - x_{2,k+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1,k+1} - x_{n-1,k+1} \\ \hat{x}_{n,k+1} - x_{n,k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_k + \Delta t \begin{pmatrix} e_{2,k} + \nu_1(e_{y,k}) \\ e_{3,k} + \nu_2(e_{y,k}) \\ \vdots \\ e_{n,k} + \nu_{n-1}(e_{y,k}) \\ \Delta f + \nu_n(e_{y,k}) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Der Effekt, dass die geschätzten Zustände den realen nachfolgen bzw. asymptotisch gegen diese konvergieren, wenn sich der Beobachter in der Sliding-Phase befindet, kann nun anhand der Fehlerdynamik (2.34) verdeutlicht und bestätigt werden. Ist  $e_{y,k+1} = 0$ , bestimmen die Einflussparameter des Beobachters  $\vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  die Konvergenz und deren Geschwindigkeit.

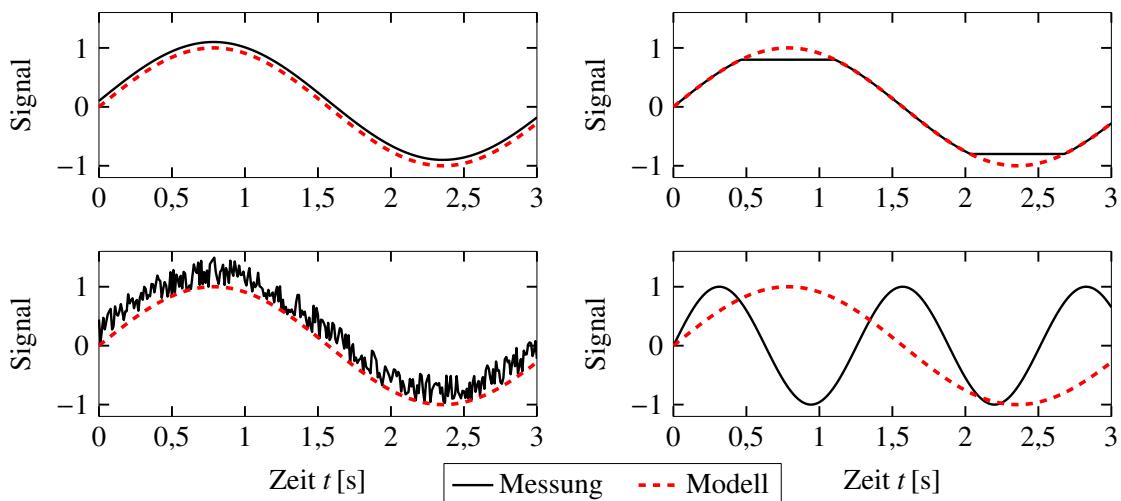
Neben der Schätzung von Zuständen wird der Sliding-Mode-Beobachter auch zur Parameteridentifikation eingesetzt, z. B. um unbekannte physikalische Parameter, auftretende Störungen oder Modellungsgenauigkeiten zu erfassen (vgl. Abschnitt 2.4). Zur Parameterschätzung kann der Sliding-Mode-Beobachter unkompliziert erweitert werden, indem die Parameter als Zustände definiert werden [DFP06; Mor27]. Zur Identifikation von Störungen oder Modellungsgenauigkeiten kann die Schaltfunktion  $\nu$  genutzt werden, wenn sich der Beobachter in der Sliding-Phase befindet. In dieser Situation kann eine Störung  $\rho_k$  wie im Beispiel (2.28) oder allgemein die Modellungsgenauigkeit  $\Delta f$  durch eine Tiefpassfilterung von  $\nu_n(e_{y,k})$  identifiziert werden [Mor27; KCM<sup>+</sup>14; FOT14]. Neben dem SMO existieren weitere robuste Beobachter, wie etwa der  $\mathcal{H}_\infty$ -Beobachter [Sim06], welche im Rahmen dieser Dissertationsschrift jedoch nicht betrachtet werden.

## 2.4 Modellungsgenauigkeiten und ihre Struktur

In der Einführung dieser Arbeit ist die Modell-Realitäts-Lücke als eine mögliche Hürde im modellbasierten Regelungsentwurf identifiziert worden (vgl. Abschnitt 1.1). Dieser Umstand lässt sich auf Modellungsgenauigkeiten zurückführen, welche eine realitätsnahe Abbildung eines betrachteten Prozesses erschweren oder verhindern. Diese Modellungsgenauigkeiten bilden daher eine strukturelle Herausforderung in den Methoden der modellbasierten Zustandsschätzung, welche in den vorigen Abschnitten vorgestellt und erläutert worden sind. Dementsprechend werden in diesem Abschnitt Modellungsgenauigkeiten näher beleuchtet und bzgl. ihrer Struktur sowie ihres Auftretens kategorisiert. Die Inhalte dieses Abschnitts erheben jedoch nicht den Anspruch, universal gültig und vollständig zu sein, sondern stellen eine domänenspezifische und subjektive Einordnung basierend auf der Problemstellung dieser Dissertationsschrift dar. Darüber hinaus werden Verfahren

zur Identifikation von solchen Modellungenauigkeiten aus dem gegenwärtigen Stand der Technik vorgestellt.

In der Regelungstechnik und Mechatronik können Modellungenauigkeiten aus verschiedenen Quellen resultieren, wie es beispielsweise in der Abbildung 2-7 dargestellt ist (vgl. [Jan10; IM11]). Durch eine fehlerhafte Kalibrierung eines Sensors kann beispielsweise ein Offset entstehen oder das Messrauschen eines Sensors führt zu einer ungenauen Auswertung eines Prozesses. Andere Quellen können ggf. die Existenz von physischen Grenzen, die eine Regelstrecke aufweist und in der Modellierung nicht berücksichtigt wurden, oder eine fehlerhafte Annahme in der Parametrierung eines Modells sein, welche in der Abbildung 2-7 rechts unten als inkorrekte Frequenz zu erkennen ist. Die Kategorisierung dieser Unsicherheiten ist aufgrund ihrer unterschiedlichen Herkunft bisweilen herausfordernd.



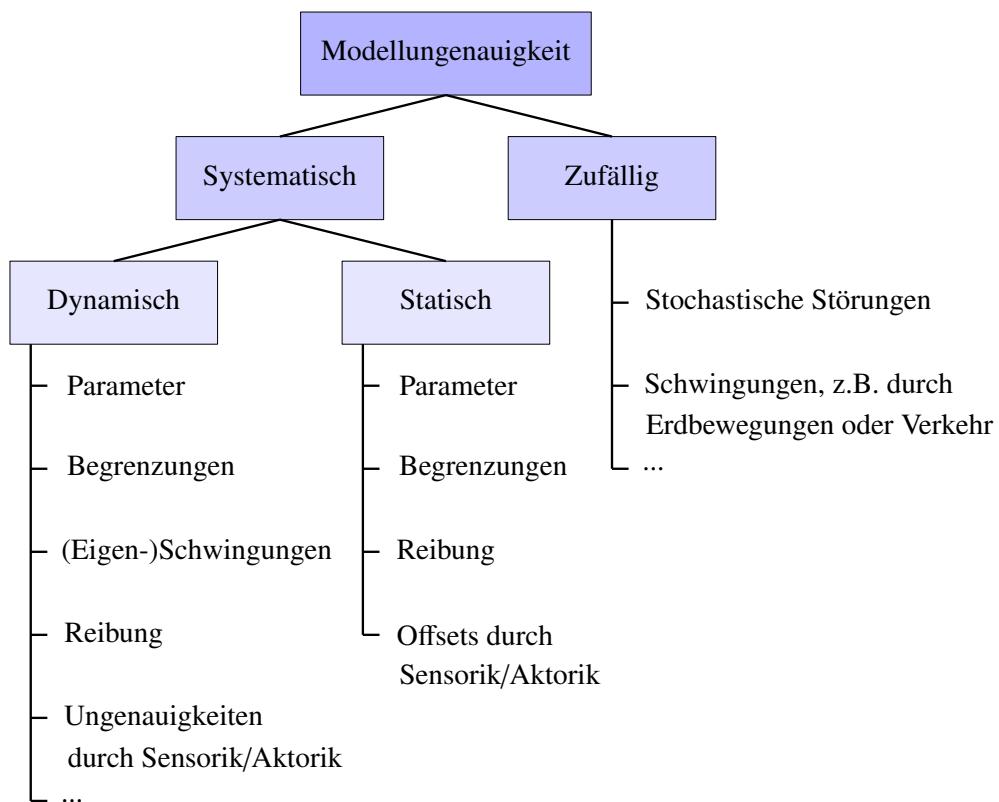
*Abbildung 2-7: Beispiele von Modellungenauigkeiten im Uhrzeigersinn beginnend von links oben: Offset durch fehlerhafte Kalibrierung, Existenz von Begrenzungen, falsche Frequenz oder fehlerhafte Parametrierung, Messrauschen oder stochastische Störung*

Im Kontext von maschinellem Lernen werden Modellunsicherheiten in systematische und zufällige Fehler (englisch *epistemic vs. aleatoric uncertainty*) unterschieden, vgl. [HW21]. In den Ingenieurwissenschaften existiert bisher keine einheitliche Kategorisierung von Modellungenauigkeiten in der Literatur, es findet sich jedoch häufig eine ähnlich motivierte Klassifizierung, z. B. in [PGPS21; Rai94]. Daher wird die Kategorisierung in systematische und stochastische Ungenauigkeiten in dieser Arbeit genutzt, um die am weitesten verbreiteten Fehlerquellen einzuordnen. Eine domänen spezifische Darstellung und Klassifizierung einiger dieser Fehlerquellen ist in der Abbildung 2-8 zu erkennen.

Systematische Modellungenauigkeiten, welche in dynamische und statische Fehler unterschieden werden, beschreiben Unsicherheiten, die durch einen Mangel an Informatio-

nen entstehen, beispielsweise durch eine zu geringe Modellierungstiefe [Loc20]. Diese können durch verfügbares Wissen oder mathematische Operationen reduziert werden. So lassen sich möglicherweise Ungenauigkeiten wie Parameter durch Messungen identifizieren, Zustandsbegrenzungen durch Experimente annähern oder (Eigen-)Schwingungen durch eine Spektral- oder Fourieranalyse charakterisieren. Ebenso können Messfehler, die beispielsweise entweder statisch durch eine fehlerhafte Kalibrierung oder dynamisch durch numerische Rechenfehler entstanden sind, durch einen Least-Squares-Ansatz reduziert werden.

Zufällig oder stochastisch entstandene Modellfehler können dagegen nicht einzeln verhindert oder verringert werden. Als Beispiel kann z. B. eine verminderte Druckqualität eines 3D-Druckers genannt werden, welche durch die fehlerhafte Position des Druckkopfs aufgrund von Bodenschwingungen eines vorbeifahrenden Zuges resultiert. Die einzige Maßnahme, stochastische Fehlerquellen zu reduzieren, besteht in der wiederholten Messung der Phänomene und der Abschätzung dieser durch statistische und wahrscheinlichkeitsbasierte Methoden (vgl. [Sch11], Abschnitt 2.1).



*Abbildung 2-8: Kategorisierung von Modellgenauigkeiten sowie ausgewählte Beispiele auftretender Fehlerquellen für mechatronische Systeme*

Eine weitere Unterscheidung von auftretenden Modellgenauigkeiten bezogen auf den Wirkungsbereich wird zudem spezifisch in der Regelungstechnik vorgenommen. So wird zwischen eingangsseitigen und ausgangsseitigen Störungen oder Modellgenauigkeiten

differenziert. In dieser Arbeit werden allerdings nur potentielle ausgangsseitige Fehler angenommen, obwohl einige der diskutierten Methoden auch eingangsseitig wirkende Unsicherheiten kompensieren können.

Für ein nichtlineares, beobachtbares System (2.18) lässt sich die Existenz einer Modellungsgenauigkeit  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$  allgemein durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}, \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k),\end{aligned}\tag{2.35}$$

in die bekannte Struktur integrieren. Häufig wird dies sogar weiter vereinfacht als additive Modellungsgenauigkeit dargestellt, in seltenen Fällen als multiplikative Unsicherheit, vgl. [Rai94]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann aber die vereinfachte Version mit der additiven Modellungsgenauigkeit angenommen werden, da sich jede Unsicherheit durch Superposition in dieser Art ausdrücken lässt. Daher gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Kann das System sogar wie in Gleichung (2.32) als nichtlineare Regelungsnormalform formuliert werden, wirkt die Modellungsgenauigkeit lediglich auf den  $n$ -ten Ausgang und liegt somit eindimensional als  $g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$  vor:

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \dots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_k + \Delta t \begin{pmatrix} x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \\ \dots \\ x_{n,k+1} \\ \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}) + g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \end{pmatrix}, \quad y_k = x_{1,k}.\tag{2.37}$$

Diese Systembeschreibung wird im Abschnitt 4.2 noch weiter präzisiert. Um Modellungsgenauigkeiten, wie sie im Modell (2.36) oder (2.37) formuliert werden, zu identifizieren, existieren verschiedene Techniken. Diese sind unter dem Begriff *Systemidentifikation* zusammengefasst und ermöglichen grundsätzlich die Annäherung eines Systems durch parametrische und nicht-parametrische Modelle (vgl. [IM11], Abbildung 1-3, Abschnitt 3.1). Als Exempel sind Spektral- oder Fourieranalyse, Hauptkomponentenanalyse, Least-Square-Techniken, das bereits vorgestellte Kalman-Filter, Frequenzgangsmessungen, die Gaußprozessregression oder neuronale Netze zu nennen [IM11; FKL<sup>+</sup>22; Kro16; Wal22; BPK16b]. Die Grundlage dieser Identifikation bilden in der Regel Messdaten von Experimenten bzw. Daten aus Simulationen. Einige dieser Verfahren werden

hinsichtlich ihrer Fähigkeit, Modellgenauigkeiten zu identifizieren, im nachfolgenden Kapitel 3 analysiert und unter den formulierten Anforderungen dieser Arbeit **F.1** bis **F.3** weiterentwickelt sowie bewertet. Alle betrachteten Techniken des Kapitels stellen jedoch eine u. U. aufwendige Nachbehandlung dar, die zusätzlich und iterativ zum modellbasierten Regelungsentwurf erfolgen muss (vgl. Abbildung 1-4(a)). Wird dieses zeit- und kostenintensive, iterative Vorgehen nicht durchgeführt, leidet je nach Charakter der Modellgenauigkeit und verwendetem Beobachter die Qualität der Zustandsschätzung darunter, sodass die Umsetzung einer Zustandsregelung gefährdet sein kann.

Neben diesen Methoden, die eine erneute Durchführung von Experimenten oder zusätzliche Analysen erfordern, um Modellgenauigkeiten zu erfassen und das Modell zu verbessern, existiert neuerdings ein weiterer, effizienterer Ansatz. Üblicherweise ist die Auslegung eines Zustandsbeobachters für die Zustandsregelung ohnehin erforderlich. Die Idee, dass der Beobachter auch gleichzeitig die Modellunsicherheit ermittelt, stammt aus der Praxis, in der Zustände und Systemparameter gleichzeitig geschätzt werden (vgl. dazu Abschnitt 4.1). Dieser Ansatz der gleichzeitigen Schätzungen wird in einigen Quellen für die Identifikation dynamischer Modellgenauigkeiten adaptiert. So wird in [BMTD21; KJY21; Kul21] dieselbe Ausgangssituation wie in der Gleichung (2.35) beschrieben und eine Lösung zur Schätzung von  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$  gesucht. Während in [BMTD21] ein GP-Modell in der Kombination mit einem High-Gain-Beobachter genutzt wird, um die Modellgenauigkeit zu approximieren, nähert [KJY21] diese über ein geometrisch motiviertes Verfahren an, bei dem jeweils die oberen und unteren Intervallgrenzen berechnet werden, zwischen denen sich  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$  aktuell befindet. Die Autoren in [Kul21] nutzen dagegen eine Linearkombination aus radialen Basisfunktionen innerhalb eines EKFs, welche die Modellgenauigkeit approximieren. Für den Spezialfall, dass Gleichung (2.36) gilt, es sich dabei um eine statische Modellgenauigkeit handelt und die bekannte Modelldynamik  $f$  linear ist, wird in [Sch10] ein *lernfähiger Beobachter* basierend auf dem Luenberger-Beobachter formuliert, der die isolierte Ungenauigkeit durch ein neuronales Netz approximiert. Dabei werden sowohl Fehlerabschätzungen als auch die Konvergenz des lernfähigen Beobachters nachgewiesen. Obwohl diese Vorarbeiten vielversprechende Perspektiven liefern, Modellgenauigkeiten parallel zur Zustandsschätzung zu identifizieren, werden nicht alle zu Beginn dieser Arbeit formulierten Anforderungen (vgl. Abschnitt 1.2) berücksichtigt. Daher wird Kapitel 4 basierend auf diesen Vorarbeiten eine alternative, neuartige Methode entwickeln, welche beispielsweise die Grundidee von [KSH21] einbezieht. Im folgenden Kapitel 3 werden jedoch zunächst Techniken der hybriden Systemidentifikation diskutiert, welche die Identifikation der Modellgenauigkeiten separat entweder durch eine Modellkorrektur oder durch die Kompensation der Unsicherheit im Beobachterentwurf anstreben.

### **3 (Offline-)Strategien zur Kompensation von Modellgenauigkeiten**

Die erfolgreiche Umsetzung eines modellbasierten Regelungsentwurfs, welcher im Abschnitt 1.1 angesprochen worden ist, hängt in hohem Maße von der Qualität des verwendeten Streckenmodells ab. Dies trifft insbesondere auf die Zustandsschätzung zu, da diese nach Kapitel 2 basierend auf dem Streckenmodell erfolgt. Treten im Modell Abweichungen zur Strecke auf, z. B. aufgrund von Reibung, Verschleiß oder Temperaturschwankungen, kann der Beobachter u. U. keine zuverlässigen Schätzwerte mehr ermitteln, sodass eine unzureichende Umsetzung der Regelung oder gar Schäden an der zu regelnden Anlage zu befürchten sind. Um eine aufwendige, iterativ durchzuführende Modellbildung zu vermeiden und Ressourcen zu sparen (vgl. Abschnitt 1.1), diskutiert dieses Kapitel Strategien zur Kompensation von auftretenden Modellgenauigkeiten. Diese setzen entweder direkt bei der Identifikation des Modells oder beim Beobachterentwurf an, d. h. es werden Maßnahmen in den Abschnitten 3.1 und 3.2 erörtert, deren Wirkungsbereich auf diesen jeweiligen Entwurfsschritt begrenzt ist. Das verbindende Element der vielfältigen Methoden dieses Kapitels stellt hierbei das (Beobachter-)Modell der Strecke dar, welches hinsichtlich Modellgenauigkeiten verbessert werden soll. Dabei werden bis auf Abschnitt 3.2.2 Offline-Methoden thematisiert, deren Umsetzung erst durch umfangreiche Messdaten und nicht in Echtzeit erfolgen kann. Abschließend werden die untersuchten Verfahren im Abschnitt 3.3 zusammengefasst und bzgl. der in dieser Arbeit formulierten Anforderungen **F.1-F.3** bewertet.

#### **3.1 Systemidentifikation mittels hybrider Modelle**

Die Nutzung von Prozess- oder Messdaten zur Systemidentifikation ist eine sehr verbreitete und traditionelle Herangehensweise in den Ingenieurwissenschaften. Aufgrund der Verfügbarkeit von Daten an vielen technischen Anlagen werden diese genutzt, um tiefere Einblicke in das System zu erhalten und etwa physikalische Parameter zu identifizieren, die durch ein Modell zuvor definiert worden sind. Ist die innere Struktur eines Systems weniger oder gar nicht bekannt, werden in den letzten Jahren vermehrt datenverarbeitende Methoden eingesetzt, um aus den Messdaten realitätsnahe Modelle zu entwickeln. Bereits im Abschnitt 1.1 ist die grundsätzliche Unterscheidung in theoretische und experimentelle Modellbildung erörtert worden [IM11; Wal22]. Die Grenzen zwischen diesen Perspektiven verlaufen allerdings fließend und sind nicht streng definiert, da viele Modelle sowohl mittels physikalischer Gesetzmäßigkeiten als auch durch Messdaten formuliert und identifiziert werden (vgl. Abbildung 1-3). Diese können daher je nach Art der verwendeten Information und Kenntnis der Systemstruktur als White-, Gray- oder Black-Box-Modelle

charakterisiert werden. In der Abbildung 3-1, welche an [IM11, S.6] angelehnt ist, ist eine beispielhafte Unterteilung zu erkennen. So ist ein Modell z. B. der Kategorie White-Box-Modell zuzuordnen, wenn die Systemstruktur sowie Parameter durch physikalische Gesetzmäßigkeiten bekannt sind und sich im Modell widerspiegeln. Black-Box-Modelle stellen dagegen das Ein-/Ausgangsverhalten dar und erlauben lediglich Vermutungen zur Struktur. Modelle, die sowohl aus der theoretischen als auch aus der experimentellen Modellbildung hervorgehen, weil sie beispielsweise nach physikalischen Gesetzen entworfen, aber ihre Parameter durch Daten identifiziert wurden, werden als Gray-Box-Modelle bezeichnet. Diese Modelle, deren Anteil am jeweiligen Spektrum theoretische bzw. experimentelle Modellbildung variieren kann, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit als hybrid<sup>24</sup> bezeichnet.

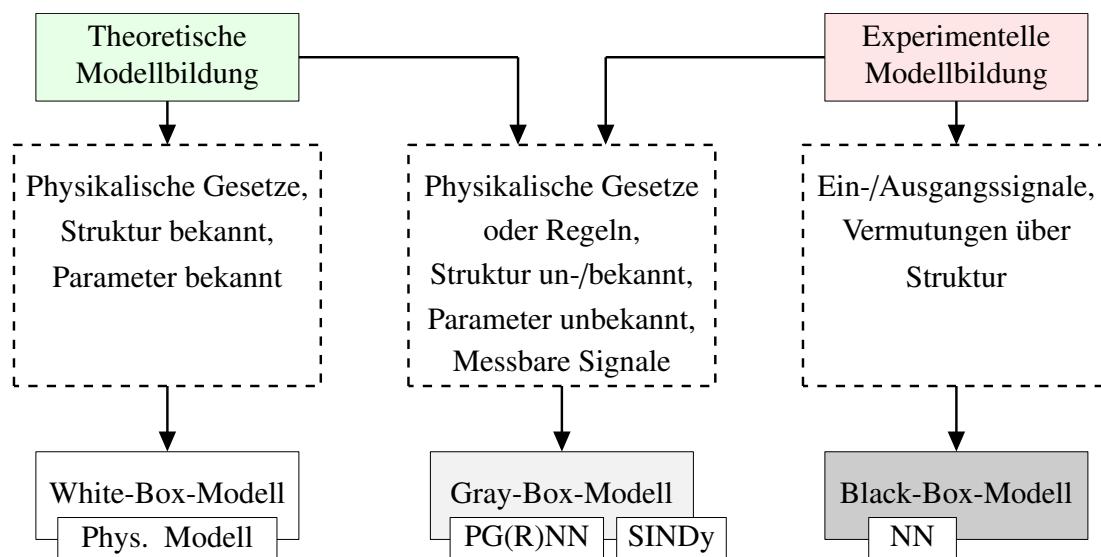


Abbildung 3-1: Beispielhafte Modellkategorien basierend auf dem Grad der verwendeten Messdaten und des physikalischen Vorwissens, angelehnt an [IM11, S.6], und Einordnung der in Abschnitt 3.1 diskutierten Modellarten

Im folgenden Unterkapitel werden daher Methoden vorgestellt, die sowohl auf Messdaten als auch physikalischem Wissen basieren und deren resultierende Modelle sich bei den Gray-Box-Modellen einordnen lassen. Zunächst wird Abschnitt 3.1.1 das Verfahren *SINDy* erläutern, welches auf der Grundlage von Messdaten (und ggf. Wissen) ein interpretierbares Modell identifiziert. Somit ist dieses in der Abbildung 3-1 bei den Gray-Box-Modellen vorzufinden. Neuronale Netze (NN), welche im darauffolgenden Abschnitt 3.1.2 für den weiteren Verlauf der Arbeit kurz definiert werden, gehören zu den Black-Box-Modellen. Ihre Erweiterung um ein physikalisches Simulationsmodell, das laut der Abbildung 3-1 zu den White-Box-Modellen gehört, führt zu den *Physics-Guided*

<sup>24</sup>Der Begriff *hybrid* ist dabei nicht zu verwechseln mit hybriden Modellen, die diskret und kontinuierlich sind.

(*Recurrent*) Neural Networks (*PG(R)NNs*) in den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4. Diese können ebenfalls zu den Gray-Box-Modellen gezählt werden und werden in dieser Arbeit auf die Anwendung nicht-autonomer, mechatronischer Systeme erweitert. Schließlich wird die Nutzbarkeit solcher Modelle, angelehnt an die Definition aus Abschnitt 1.2, nach den Anforderungen **F.1-F.3** im Abschnitt 3.1.5 analysiert. Einige der folgenden Absätze sind zudem bereits Teil der Vorveröffentlichungen [GT22; SGT22].

### 3.1.1 Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy)

Ausgehend von hochdimensionalen Systemen in der Fluidodynamik, entstand in [BPK16b] die Methode *Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy)*, welche ein lineares Regressionsmodell ausschließlich aus Messdaten extrahiert. Damit weist das Verfahren eine nahe Verwandtschaft zu Modellreduktionstechniken wie *Proper Orthogonal Decomposition* und zu Koopman-basierten Techniken wie *Dynamic Mode Decomposition* auf [BK19]. Aufgrund der einfachen Handhabung und der Zugänglichkeit der entstehenden Modelle für weitere Analyse- oder Syntheseschritte erfreut es sich in verschiedenen Disziplinen großer Beliebtheit, z. B. in der Biologie und Physik [DBR<sup>+</sup>17; SST16].

Voraussetzung für SINDy ist die Verfügbarkeit von Messdaten des vollständigen Zustands  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , wobei die Systemordnung  $n$  eine sehr hohe Dimension widerspiegeln kann. Liegen  $N$  Messdaten des Zustands für jeden Zeitschritt  $k = 1, \dots, N$  vor, so können diese zeitversetzt in Matrizen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n \times (N-1)}$  angeordnet werden, sodass

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_{N-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_N \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

gilt. Die grundlegende Frage lautet nun, wie eine geeignete Darstellung für die Evolution des Zustands über  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$  gefunden werden kann. Dazu wird die Dynamik  $f$  als eine Linearkombination geeigneter Terme aus der Matrix  $\Psi(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{(N-1) \times n_\theta}$  mit der Parametermatrix  $\theta \in \mathbb{R}^{n \times n_\theta}$  repräsentiert, indem

$$\mathbf{X}' = \theta \Psi^T(\mathbf{X}) \quad (3.2)$$

gilt. Hierbei beschreibt  $\Psi(\mathbf{X}) = (\psi_1(\mathbf{X}), \psi_2(\mathbf{X}), \psi_3(\mathbf{X}), \dots, \psi_{n_\theta}(\mathbf{X}))$  eine Funktionsbibliothek aus  $n_\theta$  (nicht-)linearen Termen  $\psi_i(\cdot)$ , die möglicherweise die Dynamik  $f$  des Systems, von dem die Messdaten stammen, beschreiben können. Da die meisten dynamischen Systeme jedoch durch einige wenige Funktionen charakterisiert werden können, wird angenommen, dass die Parametermatrix  $\theta$  dünnbesetzt ist (engl. *sparse*), d. h. dass lediglich einige wenige Einträge verschieden von Null sind. Somit lassen sich Algorithmen

aus dem Bereich der *Sparse Regression* anwenden. Die Autoren von SINDy empfehlen dazu den populären Ansatz *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)*, welcher auf [Tib96] zurückgeht und eine Pareto-optimale Lösung bzgl. Modellgüte und Modellkomplexität liefert. Mittels LASSO lässt sich dann für die  $i$ -te Zeile von  $\boldsymbol{\theta}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $\lambda > 0$  die folgende Lösung des Optimierungsproblems formulieren:

$$\boldsymbol{\theta}_i^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_i} \|\mathbf{X}'_i - \boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\Psi}^T(\mathbf{X})\|_2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}_i\|_1. \quad (3.3)$$

Hierbei stellt  $\mathbf{X}'_i$  die  $i$ -te Zeile der Datenmatrix  $\mathbf{X}'$  dar. Das konvexe Optimierungsproblem (3.3) lässt sich ebenso auf den Fall nicht-autonomer Systeme, d. h. Systeme mit Eingang, erweitern und wird dann als SINDYc bezeichnet<sup>25</sup> [BPK16a]. Dazu werden die Messwerte des Eingangs  $\mathbf{u}$  ebenfalls in einer Datenmatrix  $\mathbf{U}$  gesammelt, woraufhin das Verfahren analog mit einer angepassten Bibliothek, welche auch Terme bezogen auf den Eingang enthält, durchgeführt werden kann. Neben der rein datenbasierten Identifikation durch Messdaten kann das SINDy-Verfahren auch Vorwissen berücksichtigen, z. B. durch eine konkrete Bibliothekswahl, bei der Hypothesen über das zu identifizierende System eingehen. Weitere Eigenschaften, die durch Vorwissen bekannt sind, wie Symmetrie, können durch Nebenbedingungen formuliert werden (vgl. [BK19]). Dementsprechend kann das SINDy-Verfahren sowohl zu den datenbasierten als auch zu den hybriden Techniken in der Systemidentifikation gezählt werden.

Da für die Identifikation mittels SINDy genügend Daten vorliegen müssen, wird das Modell offline basierend auf der Trainingsmenge aus den Datenmatrizen  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}'$  und ggf.  $\mathbf{U}$  bestimmt. Nach erfolgreicher Validierung anhand von weiteren Messdaten liegt schließlich ein (in der Regel nichtlineares) Modell vor, welches interpretierbar und für die weiteren Schritte des Regelungsentwurfs zugänglich ist. Allerdings besteht ein gravierender Nachteil darin, dass das SINDy-Verfahren Messwerte des vollständigen Zustands benötigt. Dies ist in realen Prozessen aufgrund von messtechnischen Herausforderungen oder des Kostendrucks bzgl. der Sensorik selten umsetzbar. Dieser Nachteil kann nur relativiert werden, wenn alle Zustände des Systems einen differentiellen Zusammenhang aufweisen, sodass die nicht messbaren Zustandsgrößen alternativ numerisch differenziert oder gefiltert werden können.

## Modellierung des Golfroboters

Dennoch wird die Methode nun anhand eines realitätsnahen Beispiels, dem Golfrobooter, untersucht, welcher am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik (RtM) als

---

<sup>25</sup>Diese Abkürzung bedeutet *SINDy with control (SINDYc)*. Im weiteren Verlauf wird jedoch der Begriff SINDy genutzt, da sich die Betrachtung autonomer und nicht-autonomer Systeme aus dem Zusammenhang ergibt.

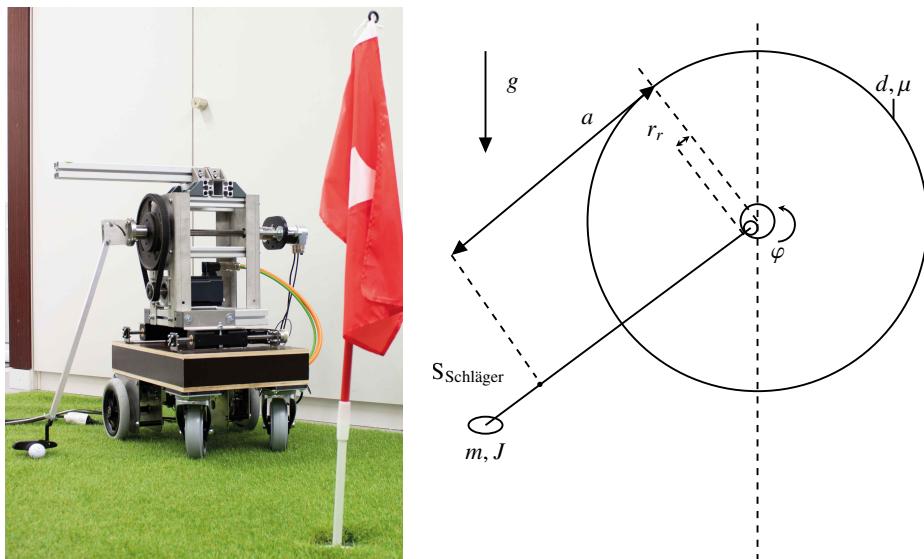
Testobjekt für ML-Methoden dient und in der Abbildung 3-2 dargestellt ist. Das Regelungsziel des Roboters ist es, den Golfball erfolgreich in das Loch zu putten. Dafür ist es erforderlich, dass der Schläger eine bestimmte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Schlags aufweist, die ihn weder über das Loch springen noch vor dem Loch stoppen lässt. Diese Schlagdynamik wird durch das nichtlineare Zustandsraummodell mit dem Zustand  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (\varphi, \dot{\varphi})^T \in \mathbb{R}^2$ , dem Motormoment als Eingang  $u \in \mathbb{R}$  und den Parametern  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^7$ , die im Anhang in der Tabelle A6-1 dargestellt sind, folgendermaßen formuliert:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ J^{-1}(-mga \sin(x_1) - M_d(\mathbf{x}) + 4u) \end{pmatrix}, \\ y &= h(\mathbf{x}) = x_1.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Dabei gilt für das nichtlineare Dämpfungsmoment:

$$M_d(\mathbf{x}) = dx_2 + r_r \mu \operatorname{sign}(x_2) |mx_2^2 a + mg \cos(x_1)|.\tag{3.5}$$

Details zum Golfrroboer, wie etwa seine Regelungsstrategie, finden sich im Anhang A6.1 sowie in [JFTT22] und werden an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt.



(a) *Aktueller Aufbau, Stand 2023,* (b) *Vereinfachter physikalischer Freischnitt,*  
© Heinz Nixdorf Institut vgl. [Fit20]

Abbildung 3-2: Der Golfrroboer und seine physikalische Modellierung

Die Anwendung von SINDy ist möglich, da der Roboter genau den erforderlichen differentiellen Zusammenhang zwischen dem gemessenen Winkel  $\varphi$  und der nicht messbaren Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  aufweist. Nach Gleichung (3.1) werden die aufgenommenen

Messwerte in den Matrizen  $\mathbf{X}, \mathbf{X}'$  und  $\mathbf{U}$  gesammelt, wobei  $\mathbf{X}'$  durch numerische Differentiation hergeleitet wird. Anschließend werden die folgenden, zueinander ähnlichen Bibliotheken zur Identifikation genutzt:

$$\begin{aligned}\Psi_1(\mathbf{x}, u) &= (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, u), \\ \Psi_2(\mathbf{x}, u) &= (1, x_1, x_2, \cos(x_1), \cos(x_2), u), \\ \Psi_3(\mathbf{x}, u) &= (1, x_1, x_2, \cos(x_1), x_2^2, u).\end{aligned}$$

Die Abbildung 3-3 zeigt, inwiefern die auf Messdaten basierenden Modelle unabhängig von verschiedenen Bibliotheken die Dynamik des Golfroboters wiedergeben können. Dazu wird eine Trajektorie ausgewählt, welche nicht zur Entwicklung der Modelle genutzt worden ist und anhand derer die Modellgüte der SINDy-Modelle evaluiert werden kann. Es ist zu erkennen, dass alle drei Modelle trotz ihrer unterschiedlichen Bibliotheken die Dynamik des Golfroboters sehr gut wiedergeben können, da alle prädizierten Trajektorien auf der gemessenen Referenztrajektorie, welche in schwarz dargestellt ist, liegen. Dies wird insbesondere durch die Vergrößerung des Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit sowie durch den Vergleich des kumulierten quadratischen Fehlers, der für alle Modelle im Bereich  $10^{-2}$  liegt, deutlich. Die entstandenen Modelle können mithilfe der genutzten Bibliotheken und der dazugehörigen, identifizierten Parameter formuliert werden. Diese lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0122 & 0,999 & 0 & 0 & 0,0267 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\theta}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0014 & -0,0127 & 0,999 & -0,0012 & 0 & 0,0267 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\theta}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0014 & -0,0127 & 0,999 & -0,0012 & 0 & 0,0267 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Folglich weisen die Modelle aufgrund der sich nur geringfügig unterscheidenden Bibliotheken eine ähnliche Struktur auf, welche physikalisch interpretierbar und daher für weitere Analyse- oder Syntheseschritte nutzbar ist. Dies liegt daran, dass die jeweilige Parametermatrix dünnbesetzt ist, was sich beispielsweise durch die Werte in der zweiten Zeile im Bereich  $10^{-3}$  bestätigt. Bemerkenswerterweise stimmen sogar die Modelle 2 und 3 vollständig überein, obwohl sie sich im Term  $\psi_5$  unterscheiden. Alle drei Modelle weisen zudem gleichwertige Skalierungen auf. Allerdings wiegt der Nachteil, dass der vollständige Zustand bekannt sein muss, für die Nutzung in der Zustandsschätzung schwer. Zudem werden die SINDy-Modelle offline generiert und können deshalb nicht während der Zustandsschätzung genutzt werden. Ferner besteht wie bei allen datenba-

sierten oder hybriden Verfahren die Notwendigkeit, dass geeignete Messdaten vorliegen, die den interessierenden Phasenraum abdecken. Dennoch stellt diese Methode eine vorteilhafte Möglichkeit dar, aus Messdaten interpretierbare Modelle zu extrahieren, welche eine hohe Modellgüte aufweisen. Somit setzt das SINDy-Verfahren nicht nur Anforderung F.2 um, sondern lässt aufgrund seiner hohen Modellgüte auch eine hohe Schätzgüte erwarten, wenn die Schwierigkeit, dass der vollständige Zustand bekannt sein muss, überwunden werden kann. Daher wird die Grundidee dieses Verfahrens im Kapitel 4 näher beleuchtet und für die Entwicklung geeigneter Schätzverfahren aufgegriffen. Die Nutzung einer Bibliothek aus physikalisch motivierten Termen stellt hierbei den Kern des entwickelten Verfahrens dar (vgl. Abschnitt 4.2).

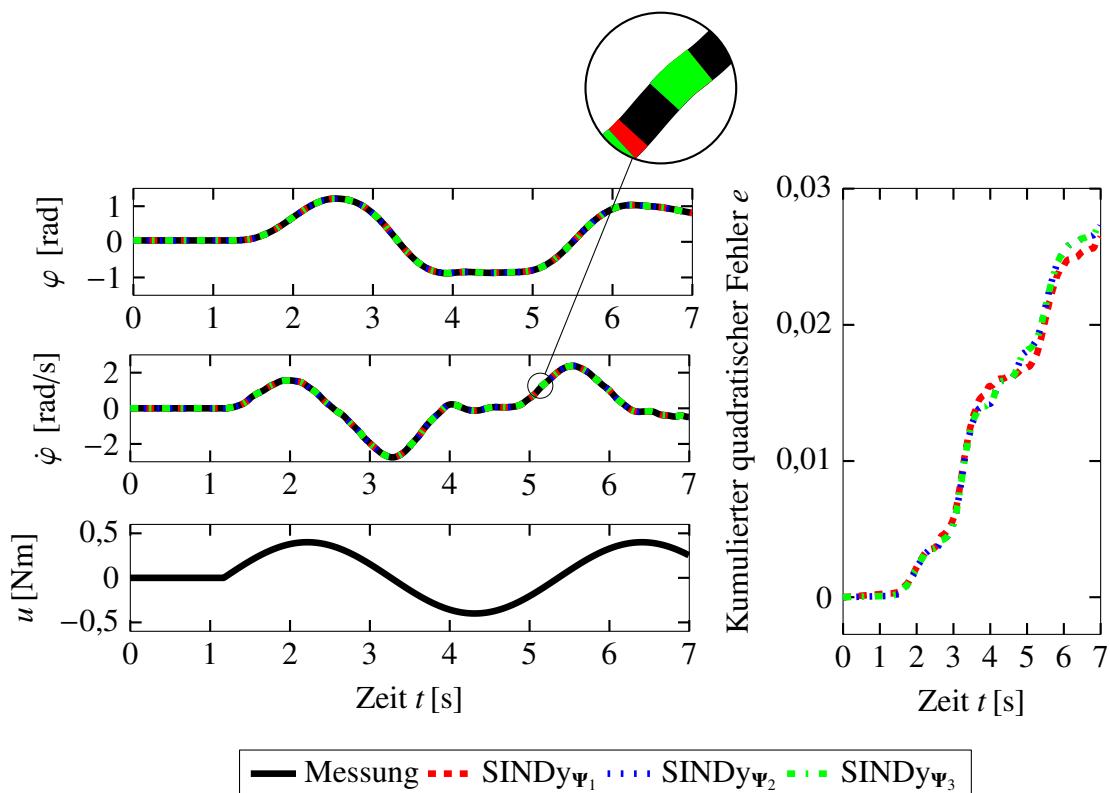


Abbildung 3-3: Modellgüte eines SINDy-Modells unterschieden in die Bibliotheken  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  und basierend auf Code aus [BK19]

### 3.1.2 Neuronale Netze

Eine der populärsten Methoden im maschinellen Lernen sind künstliche neuronale Netze (NN). Diese sind der biologischen Informationsverarbeitung nachempfunden und sollen einen beliebigen, funktionalen Zusammenhang  $f$  von Eingängen  $x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^D$  und Ausgängen  $y \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^L$  mit

$$f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y} \quad (3.7)$$

approximieren. Dieser Zusammenhang wird durch ein neuronales Netz als eine Funktion  $f_{NN}$  über einen gerichteten Graphen, bestehend aus Knoten und Kanten, beschrieben [Bis06; KBK<sup>+</sup>13; Kro16; Sch10]. Die Knoten, nachfolgend als Neuronen bezeichnet, sind als Verarbeitungseinheiten in mehreren Schichten angeordnet. Die Neuronen sind hierbei durch gerichtete Kanten verbunden, wobei jeder Kante, die ein Neuron  $i$  mit einem Neuron  $j$  verbindet, ein Gewicht  $\zeta_{ji}$  zugeordnet wird. Zudem existiert für jede Schicht ein weiteres Neuron  $\zeta_{j0}$ , welches als additives Gewicht genutzt werden kann. Daher kann der obige Zusammenhang (3.7) mit  $\zeta \in \mathbb{U}$  und  $\hat{y} \in \mathbb{Y}$  durch das NN konkretisiert werden zu

$$f_{NN} : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{Y}, \quad \hat{y} = f_{NN}(x, \zeta). \quad (3.8)$$

Die Anordnung der Neuronen und ihr Informationsfluss untereinander, der durch die Kantenrichtungen ausgedrückt wird, wird als Netzarchitektur bezeichnet und ist in der Abbildung 3-4 skizziert. Dabei lassen sich grundsätzlich zwei verschiedene Architekturen unterscheiden. Wenn der Informationsfluss der Neuronen ausschließlich vorwärts von den Eingängen zu den Ausgängen verläuft, demnach ohne Verbindungen in eine vorige oder in die aktuelle Schicht, handelt es sich um ein vorwärts gerichtetes Netz (vgl. Abbildung 3-4 links). Ist dagegen eine Form der Rückkopplung des Informationsflusses gegeben, z. B. dass der Ausgang eines Neurons mit einem Neuron einer vorhergehenden Schicht verbunden ist, zeichnet sich das Netz durch eine rekurrente Architektur aus und wird als rekurrentes neuronales Netz (RNN) bezeichnet. Weitere Arten von Rückkopplungen sind in der Abbildung 3-4 rechts dargestellt.

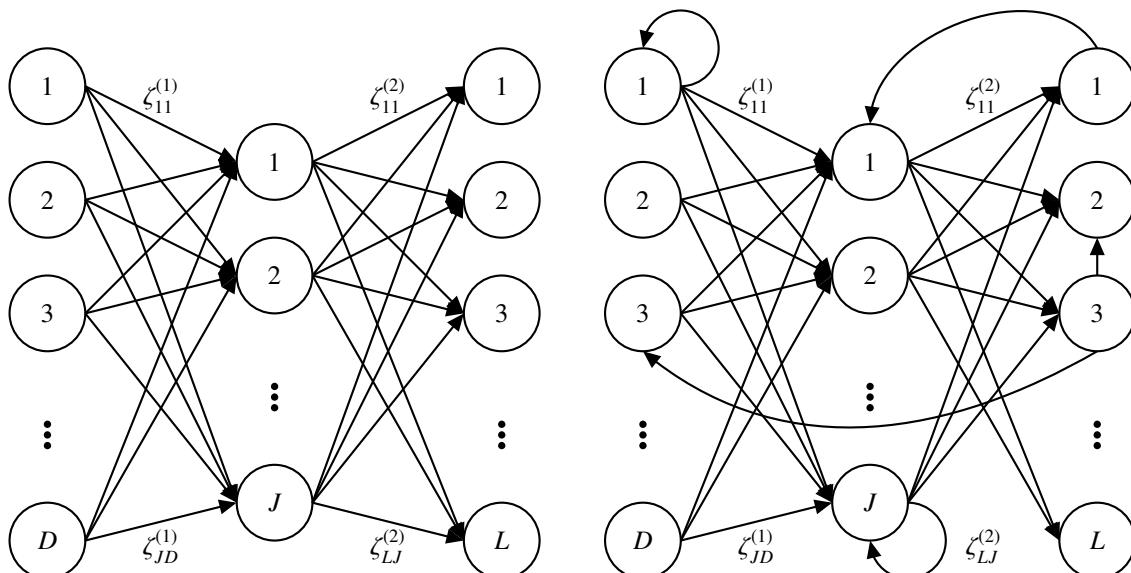


Abbildung 3-4: Architekturen eines NNs: Vorwärts gerichtet (links) und rekurrent (rechts)

Die Kernidee des Lernens bildet ein lineares Regressionsmodell, das auf einer Linearkombination nichtlinearer Basisfunktionen basiert und mehrere nichtlineare Transformationen durchläuft [Bis06; KBK<sup>+</sup>13; Kro16; Sch10]. Anhand des einfachen, vorwärts gerichteten und zweischichtigen Netzes, welches in der Abbildung 3-4 visualisiert ist, wird nun der Vorgang des Lernens veranschaulicht. Es wird ausschließlich überwachtes Lernen, engl. *supervised learning*, thematisiert, sodass die Kenntnis der Ausgänge  $y$  zu den zugehörigen Eingängen  $x$  vorausgesetzt wird. Zunächst wird das Netz von links nach rechts durchlaufen, woraufhin ein Netzausgang  $\hat{y}_l$  mit  $l = 1, \dots, L$  basierend auf den Eingängen  $x$  sowie auf den zufällig mit kleinen Werten initialisierten Gewichten  $\zeta$  berechnet wird:

$$\hat{y}_l(x, \zeta) = f_2 \left( \sum_{j=1}^J \zeta_{lj}^{(2)} \cdot f_1 \left( \sum_{i=1}^D \zeta_{ji}^{(1)} x_i + \zeta_{j0}^{(1)} \right) + \zeta_{l0}^{(2)} \right), \quad (3.9)$$

wobei  $D$  Eingangsneuronen,  $J$  versteckte Neuronen und  $L$  Ausgangsneuronen vorliegen und  $f_1, f_2$  (nichtlineare) Aktivierungsfunktionen darstellen. In der Gleichung (3.9) können die Schichten und Berechnungsvorschriften des NNs durch die Klammerausdrücke von innen nach außen identifiziert werden. Der prädizierte Netzausgang  $\hat{y}_l$  erfolgt somit durch eine mehrfache Abfolge aus Linearkombinationen der Neuronen mit den Gewichten und nichtlinearen Funktionen. Hierbei wird die letzte, sogenannte Ausgabefunktion je nach Problemstellung gewählt, für Regressionsprobleme ist dies in der Regel die Identität. Das neuronale Netz beschreibt daher, wie in Gleichung (3.8) dargestellt, einen nichtlinearen, funktionalen Zusammenhang zwischen den Eingängen  $x$  und den Ausgängen  $y$  unter dem Einfluss der Gewichte  $\zeta$ . Nachdem der Informationsfluss von den Eingängen zu den Ausgängen verarbeitet worden ist, werden für jedes Tupel  $(x, y)_q$  mit  $q = 1, \dots, N$  Trainingsdaten der Netzausgang  $\hat{y}$  mit dem Ausgang  $y$  verglichen. Der Trainingsfehler  $e_q$ , definiert durch

$$e_q = \hat{y}(x_q, \zeta) - y_q,$$

soll dabei möglichst klein werden, damit das Netz den zu lernenden Zusammenhang korrekt wiedergibt. In der Regel wird daher der quadratische Fehler basierend auf den gesamten Trainingsdaten als Kostenfunktion gewählt, sodass

$$J_{err}(x, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \|\hat{y}(x_q, \zeta) - y_q\|_2^2 \quad (3.10)$$

minimiert werden soll. Dies gelingt, indem das Verfahren der *Backpropagation* angewendet wird, welches den Fehler durch die Nutzung des Gradienten  $\nabla J_{err}(\zeta) = \frac{\partial J_{err}}{\partial \zeta}$  rückwärts durch das neuronale Netz berechnet. Dieses lässt sich sehr einfach anhand der differen-

zierbaren Aktivierungsfunktionen sowie durch Anwendung der Kettenregel durchführen (vgl. [Bis06]). Anschließend kann mit dem Newton-Verfahren ein geeigneter Gewichtsvektor  $\zeta^{(\tau+1)}$  für den nächsten Iterationsschritt  $\tau + 1$  durch

$$\zeta^{(\tau+1)} = \zeta^{(\tau)} - \eta \nabla J_{err}(\mathbf{x}, \zeta^{(\tau)})$$

bestimmt werden, wobei der Parameter  $\eta > 0$  als Lernrate bezeichnet wird. Die Lernrate beeinflusst die Konvergenzgeschwindigkeit maßgeblich und muss sorgsam gewählt werden. Optimierungsbasierte Anpassungen wie die Nutzung der Hessematrix in abgeschwächten Algorithmen wie z. B. dem Quasi-Newton-Verfahren sind populär und erhöhen den Optimierungserfolg [Bis06]. Für die Anwendungsbeispiele in dieser Arbeit wird das ADAM-Verfahren genutzt [KB15], welches auf algorithmischer Differentiation basiert [GW08]. Während des Trainings wird häufig eine weitere Datenmenge zur Validierung genutzt, welche andere Datentupel als die Trainingsmenge enthält, um den Trainingsfortschritt zu bewerten. Ist das Training durch die Konvergenz der Gewichte oder durch eine Abbruchbedingung beendet, steht üblicherweise eine weitere Testdatenmenge zur Verfügung, um die Performanz des neuronalen Netzes und damit dessen Trainingserfolg final zu bewerten. Diese unterscheidet sich von den Trainingsdaten und enthält andere Datentupel. Ist der zu lernende Zusammenhang durch eine geeignete Wahl von Trainingsdaten abgedeckt und besitzt das neuronale Netz eine ausreichend komplexe Netzwerkarchitektur, kann durch mathematische Theoreme für verschiedene Architekturen und Aktivierungsfunktionen gezeigt werden, dass das neuronale Netz konvergiert und als globaler Funktionsapproximator wirkt, der einen beliebigen Zusammenhang annähern kann (vgl. [HSW89; FN93; CC95b; CC95a]). Häufig müssen die Daten jedoch zunächst vorverarbeitet werden, um eine vergleichbare Skalierung der Daten untereinander zu gewährleisten. Ebenso gilt es Herausforderungen bzgl. der Überanpassung, engl. *Overfitting*, oder der Explorationsfähigkeit zu beachten (vgl. [Bis06]).

### 3.1.3 Physics-Guided Neural Network (PGNN)

Durch ihre Eigenschaft als lineare Regressionsmodelle, welche im vorangegangenen Abschnitt beschrieben wurde, können neuronale Netze einen beliebigen, funktionalen Zusammenhang abbilden, sofern geeignete Trainingsdaten über diesen vorliegen und die Netzarchitektur entsprechend gewählt wird (vgl. [HSW89; CC95a]). Diese Eigenschaft als globale Funktionsapproximatoren ist insbesondere vorteilhaft, um die im Kapitel 1 beschriebene Problematik der Modell-Realitäts-Lücke zu lösen. Dort, wo physikalisch und mathematisch motivierte Modelle an ihre Grenzen stoßen und gleichzeitig Messdaten verfügbar sind, kann ein neuronales Netz in Kombination mit einem physikalisch motivierten Modell unterstützen und die Modell-Realität-Lücke  $\Delta f$  möglicherweise verklei-

nern. Damit stellen die sogenannten *Physics-Guided Neural Networks (PGNNs)*, *Physics-Informed Neural Networks (PINNs)* oder *Physics-Based Neural Networks (PBNNs)* einen sehr populären Ansatz dar, welcher sich in der Abbildung 3-5 durch einen sprunghaf-ten Anstieg des jeweiligen Schlagworts in Google-Scholar-Beiträgen bemerkbar macht. Dabei scheint die Häufigkeit der Schlagworte anzugeben, dass sich erste Konzepte bereits früh entwickelten und vor allem in der letzten Dekade an Popularität gewannen. Das Diagramm 3-5 suggeriert zudem, dass eine weitere Zunahme zu erwarten ist. Für dieselbe grundlegende Idee werden hierbei unterschiedliche Begriffe von den Publizierenden ge-nutzt, welche vom restriktiven Begriff *physikalisch basiert* über *physikalisch informiert* bis hin zur vagen Bezeichnung *physikalisch motiviert* wandeln. Eine eindeutige Definition bzw. Zuordnung dieser Begriffe zu konkreten Strukturen lässt sich bisher nicht einheitlich in der Literatur erkennen und drückt sich höchstens durch Tendenzen aus, sodass die Fach-ausdrücke häufig synonym und nach Auffassung der Publizierenden verwendet werden. Am populärsten scheint nach der Abbildung 3-5 der Begriff physikalisch basierte neuro-nale Netze zu sein, aufgrund der Historie in der Literatur hat sich jedoch die Bezeichnung PGNN für die vorliegende Dissertationsschrift etabliert.

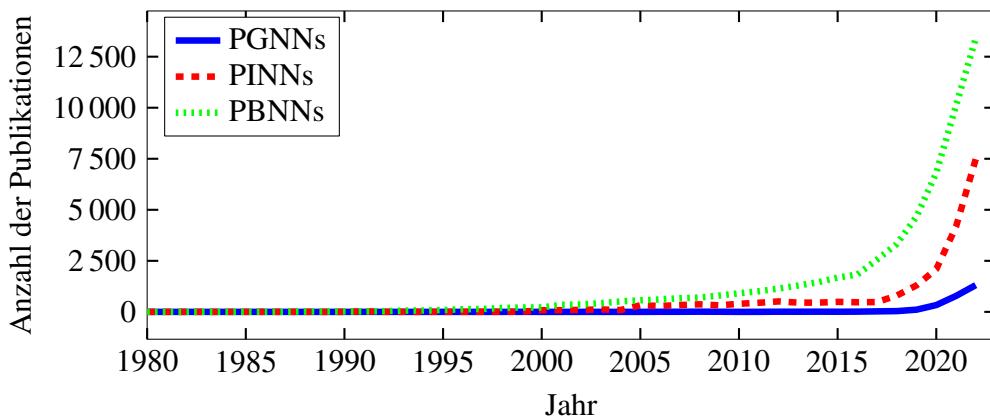


Abbildung 3-5: Popularität der PGNNs, PINNs und PBNNs zwischen 1980 und 2022, dargestellt durch Auftreten als Schlagwort in Google-Scholar-Beiträgen (Stand September 2023, erzeugt durch die modifizierte Nutzung von [Thi22])

Auf der Grundlage, dass ein physikalisches Simulationsmodell in parametrischer Form vorliegt, können verschiedene Arten der Kombination in Betracht gezogen werden. Im folgenden Verlauf dieses und des darauffolgenden Abschnitts stellt eine Differentialglei-chung mit dem Zustand  $\mathbf{x}_{phy} \in \mathbb{R}^n$  und den Parametern  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  ein solches Simulations-modell dar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{phy} &= \mathbf{f}_{phy}(\mathbf{x}_{phy}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \\ \mathbf{y}_{phy} &= \mathbf{x}_{phy}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Voraussetzung für ein überwachtes Lernen der realen Systemdynamik  $f$  mithilfe neuronaler Netze ist allerdings, dass der vollständige Zustand messbar ist, d. h. dass  $y = x$  gilt, oder dieser durch einen differentiellen Zusammenhang ermittelt werden kann (vgl. Abschnitt 3.1.1). Dies ist im überwachten Lernen erforderlich, um die Gesamtdynamik eines betrachteten Prozesses in der Trainingsmenge abbilden zu können. Zudem sollte das Simulationsmodell (3.11) mittels eines einfachen, numerischen Integrationsverfahrens stabil ausgewertet werden können, sodass die diskreten Zustände  $x_{phy,k}$  bestimmt werden können (vgl. Anhang A5). Existiert nun ein solches Modell, lassen sich verschiedene Arten der Verschaltung in Erwägung ziehen, welche im Rahmen dieser Arbeit kategorisiert worden sind (vgl. Vorveröffentlichung [GT22]). Diese sind in der Abbildung 3-6 während der Trainingsphase dargestellt, in welcher jeweils der Fehler  $e_{k+1}$  zwischen dem messbaren Prozessausgang  $x_{k+1}$  und dem Modellausgang  $\hat{x}_{k+1}$  minimiert wird.

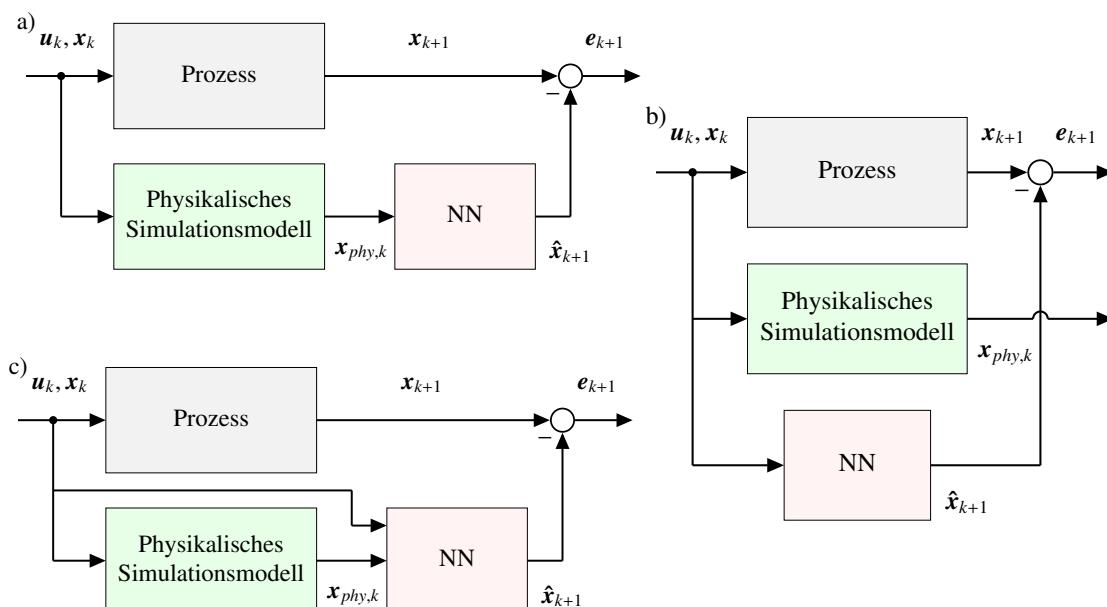
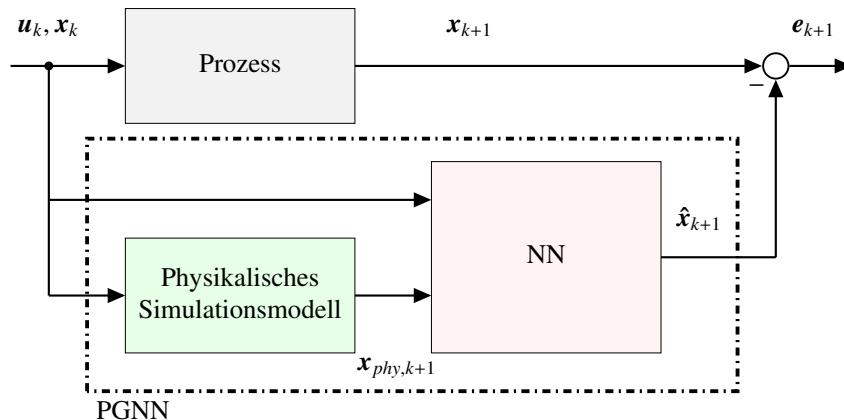


Abbildung 3-6: Modellierungsarten aus physikalischen (grün) und datenbasierten (rot) Komponenten, wobei jeweils der Fehler  $e_{k+1}$  durch das Training minimiert wird: a) Serielle Anordnung b) Parallele Anordnung c) Mischform

Historisch und strukturell gesehen ist die Reihenschaltung aus physikalischem Modell und NN, welche in der Abbildung 3-6a) visualisiert ist, eine der populärsten hybriden Konstruktionen, da der Modellfehler  $\Delta f = x_{k+1} - x_{phy,k+1}$  zwischen Prozess und physikalischem Modell approximiert wird. Bereits in [PU92] wird die Abweichung durch ein vorgeschaltetes Netz angenähert. Der Vorteil der Reihenschaltung ist eine einfache Handhabung, die das Problem der Modelldiskrepanz löst. Der Fehler  $\Delta f$  wird jedoch nur temporär gelernt. Aufgrund des Systemverhaltens, der Anregung oder anderer Zeit- und Umwelteinflüsse weist dieser zu jedem Zeitpunkt einen anderen quantitativen Wert auf. Damit erlaubt die serielle Anordnung die Kompensation der Modellabweichung, aber keine Ein-

sicht, worin diese besteht bzw. woraus diese resultiert. Daher kann kein übergeordnetes Lernen stattfinden, welches eine Rückkopplung auf das Modell erlaubt und beispielsweise Anforderung **F.2** umgesetzt. Folglich stellt ein trainiertes Netz dieser Art keine universal gültige Lösung dar, weil dessen Performanz stark von den Trainingsdaten abhängt und u. U. eine geringe Extrapolationsfähigkeit außerhalb der Trainingsdaten aufweist. Dennoch ist diese Anordnung für bestimmte Fälle eine geeignete Wahl, z. B. wenn bekannt ist, dass es sich um konstante Modellfehler wie Offsets durch Mess- oder Kalibrierungsfehler handelt (vgl. Abbildung 2-7). Eine weitere Möglichkeit besteht in der rein datengetriebenen Modellierung der Systemdynamik, dargestellt in der Abbildung 3-6b), bei der ein neuronales Netz parallel zum physikalischen Modell geschaltet wird und kein Informationstransfer stattfindet. Dies stellt jedoch kein probates Mittel für das Ziel **F.2** dieser Arbeit dar, welches explizit eine Anwendbarkeit jenseits eines Black-Box-Modells fordert.

Als letzte Möglichkeit, welche in der Abbildung 3-6c) zu erkennen ist, kann eine Mischform aus beiden zuvor diskutierten Strukturen eine sinnvolle Option zur Modellierung sein. Diese geht auf [KWRK18] zurück und ist mittlerweile eine populäre Strategie geworden, um physikalisch und datenbasierte Komponenten zu verbinden [PWF<sup>+</sup>18]. Als Bezeichnung hat sich das PGNN für diese Struktur durchgesetzt, dessen Gültigkeitsbereich in der Abbildung 3-7 durch den gestrichelten Kasten dargestellt ist.



*Abbildung 3-7: Struktur eines PGNNs während des Trainings: Es umfasst ein physikalisches Simulationsmodell (grün) und ein vorwärts gerichtetes NN (rot).*

Im Unterschied zur seriellen Anordnung in Abbildung 3-6a) erhält das neuronale Netz in der Struktur nach [KWRK18] als Eingänge nicht nur den prädizierten Ausgang des Simulationsmodells  $x_{phy,k+1}$ , sondern auch die aktuelle Stellgröße  $u_k$ , mit welcher das reale System angeregt wird, und den aktuellen Zustand  $x_k$ , in dem sich das System befindet. Demnach kann das neuronale Netz nicht nur den Modellfehler, sondern auch die vollständige Dynamik sowie die Wechselwirkungen zwischen Modellfehler und tatsächlicher System-

dynamik lernen. Darüber hinaus erleichtert die Berücksichtigung des prädizierten Ausgangs  $\mathbf{x}_{phy,k+1}$  das Training, da es das Netz in eine physikalisch plausible Richtung lenkt, auch wenn das Simulationsmodell (3.11) qualitativ Abweichungen oder Mängel aufweist. Der funktionale, zeitkontinuierliche Zusammenhang, der durch ein PGNN gelernt werden soll, wird im Rahmen dieser Arbeit auf nicht-autonome Systeme erweitert (vgl. Vorveröffentlichung [GT22]) und durch

$$\mathbf{f}_{PGNN} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{PGNN}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{phy}, \mathbf{u}, \zeta)$$

beschrieben. Klassischerweise wird die Dynamik  $\mathbf{f}_{PGNN}$  durch Minimierung der Kostenfunktion (3.10) gelernt, indem die Gewichte  $\zeta$  optimiert werden. Um allerdings nicht nur ein physikalisch plausibles Modell basierend auf den Trainingsdaten zu entwickeln, sondern auch eine physikalisch konsistente Prädiktion außerhalb der Trainingsdaten bzw. erhöhte Extrapolationsfähigkeit zu gewährleisten, schlagen Karpatne et al. in [KWRK18] eine Erweiterung der rein Daten auswertenden Kostenfunktion  $J_{err}$  um einen physikalischen Term  $J_{phy}$  vor. Dieser berücksichtigt qualitatives Vorwissen, welches zusätzlich zu den Daten verfügbar ist. Beispiele dafür sind physikalische Naturgesetze, Erhaltungsprinzipien, Beschränkungen, Regelgesetze oder vages Erfahrungswissen [MIM<sup>+</sup>18; RC21]. Dieses Wissen lässt sich durch Gleichheits- oder Ungleichheitsbedingungen  $\mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{H}$  ausdrücken, welche als weitere Kostenfunktion  $J_{phy}$  formuliert werden können:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{x}) = 0 &\rightarrow J_{phy}(\mathbf{x}, \zeta) = \|\mathcal{G}(\mathbf{x})\|^2, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}) \leq 0 &\rightarrow J_{phy}(\mathbf{x}, \zeta) = \max(0, \mathcal{H}(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{3.12}$$

So erörtern Karpatne et al. beispielsweise die Problematik, wie die Temperatur innerhalb eines Sees abhängig von der Tiefe des Gewässers modelliert werden kann. Sie lösen diese Problematik mithilfe eines PGNNs, welches ein physikalisch motiviertes Seemodell enthält und die Beziehung zwischen Temperatur, Dichte und Tiefe des Wassers als zusätzliche Wissenskomponente  $J_{phy}$  über eine Bedingung  $\mathcal{H}$  im Lernprozess berücksichtigt. Die Resultate zeigen, dass das PGNN die wenigen aufgenommenen Messdaten entsprechend nachbilden und physikalisch plausibel darstellen kann. Entgegen dieser Formulierung in [KWRK18], bei der  $J_{phy}$  durch einen Faktor lediglich als Regularisierungsterm betrachtet wird, wird die physikalische Kostenfunktion in dieser Arbeit jedoch in ein Mehrzieloptimierungsproblem eingebettet, sodass

$$\zeta^* = \arg \min_{\zeta} J(\mathbf{x}, \zeta) = \arg \min_{\zeta} (1 - \lambda_{phy}) \cdot J_{err}(\mathbf{x}, \zeta) + \lambda_{phy} \cdot J_{phy}(\mathbf{x}, \zeta). \tag{3.13}$$

gilt. Die Lösung dieses Mehrzieloptimierungsproblems (3.13) wird mit einem einfachen Skalarisierungsverfahren erzielt. Konkret wird die gewichtete Summe verwendet [Ehr05;

NW06], welche durch den Skalar  $0 \leq \lambda_{phy} \leq 1$  die Priorisierung der einzelnen Ziele  $J_\bullet$  festlegt. Das Auffinden der Pareto-optimalen Punkte gestaltet sich in der Praxis aber u. U. herausfordernd. Daher diskutieren die Autoren von [RPG21] verschiedene Einflussfaktoren auf die Konvergenz des Mehrzieloptimierungsproblems, wenn im Gegensatz zum vorgestellten Konzept die Differentialgleichung des Simulationsmodells (3.11) als physikalische Kostenfunktion  $J_{phy}$  betrachtet wird, um das Netz direkt die Systemdynamik lernen zu lassen. Diese populäre Strategie, das physikalische Simulationsmodell statt qualitativem Vorwissen in den Lernprozess zu integrieren [LRP19; GDY19; RPK19; ACS<sup>+</sup>21; NKFU22], ist jedoch nur zielführend, wenn das Simulationsmodell eine hohe Modellgüte aufweist, da das Netz potentiell irrtümliche Eigenschaften nachbilden kann. Im Rahmen dieser Arbeit steht jedoch ein Simulationsmodell mit Ungenauigkeiten am Ausgangspunkt der Problemstellung, weswegen diese Strategie nicht in Frage kommt (vgl. Abschnitt 1.2). Allerdings zeigen Rohrhofer et al. in [RPG21] auf, dass insbesondere Parameter, die die Struktur des Netzes bestimmen, einen starken Einfluss auf die Form der Paretomenge besitzen, sodass diese mittels der Hyperparameter-optimierung sorgsam gewählt werden sollten. Darüber hinaus steigt die Komplexität des Optimierungsproblems, wenn eine Anpassung für mehr als zwei Ziele in der Kostenfunktion (3.13) vorgenommen wird, vgl. [Pie17]. In dieser Arbeit wird das Konstrukt des PGNNs erstmals auf ein nicht-autonomes System aus der Mechatronik angewendet. Üblicherweise existiert in dieser Disziplin qualitatives Vorwissen, welches in der Kostenfunktion durch einen Mehrzieloptimierungsansatz berücksichtigt werden kann, z. B. die Kenntnis über die Energiebilanz eines Systems. Daher werden nicht mehr als zwei Ziele betrachtet, wenn im Folgenden die Modellgüte eines PGNNs für den Golfroboter und die Ventildynamik eines Hydraulikzylinders mithilfe ihrer Energiebilanz untersucht werden. Ergebnisse dieser Analyse bilden bereits Teile der Vorveröffentlichung [GT22].

## Modellierung des Golfroboters

Dem Modell des Golfroboters (3.4) ist ein aufwendiger Modellierungsprozess vorangegangen, da beispielsweise die Charakterisierung der nichtlinearen Dämpfung infolge des Riemens eine Herausforderung darstellt. Diese Dämpfung, welche im nichtlinearen Modell durch das Moment  $M_d$  (vgl. Gleichung (3.5)) als Stick-Slip-Effekt angenähert wird, führt aufgrund seiner Komplexität weiterhin zu einer Modellabweichung im Vergleich zu den Messdaten des Golfroboters. Diese soll daher datenbasiert identifiziert werden, um die Modellierung der Dämpfung zu ergänzen. Als physikalisches Simulationsmodell  $f_{phy}$  dient dem PGNN deshalb das Modell (3.4). Das Vorwissen, dass es sich beim Golfroboter um ein dissipatives System handelt sowie dass der Energiefluss eines Systems durch seine Zu- und Abflüsse definiert ist, kann darüber hinaus zur Beschreibung einer qualitati-

ven Energiebilanz genutzt werden, die das PGNN während des Trainings berücksichtigen soll. Diese beinhaltet neben potentieller, kinetischer und dissipativer Energie auch jene Energie, die dem Golfrobooter durch den Eingang zugeführt wird [SGT22; MPS08]:

$$\begin{aligned} J_{phy}(\ddot{\hat{\varphi}}, \dot{\hat{\varphi}}, \hat{\varphi}, u) &= \Delta E(\ddot{\hat{\varphi}}, \dot{\hat{\varphi}}, \hat{\varphi}, u) \\ &= J\ddot{\hat{\varphi}}\dot{\hat{\varphi}} + mga\dot{\hat{\varphi}} \sin(\hat{\varphi}) + d\dot{\hat{\varphi}}^2 + r\mu \operatorname{sign}(\dot{\hat{\varphi}}) |\dot{\hat{\varphi}}^2 a + mg \cos(\hat{\varphi}) | \dot{\hat{\varphi}} - 4u\dot{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Teilkostenfunktion (3.14), deren Abhängigkeit von den Gewichten  $\zeta$  aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt wurde, überprüft demzufolge die physikalische Plausibilität der Energieänderung des Systems von einem zum nächsten Zeitschritt. Aufgrund der Betrachtung der Zu- und Abflüsse der Systemenergie sollte idealerweise  $\Delta E \approx 0$  gelten, sodass mangelnde physikalische Integrität mittels  $\mathcal{G}$  aus der Gleichung (3.12) während des Lernens bestraft werden kann. Anschließend werden Messdaten, die verschiedene Trajektorien in Folge von sinusförmigen Anregungen mit konstanter bzw. sich verändernder Frequenz und Sprunganregungen enthalten, für das Training des PGNNS vorbereitet. Dabei werden 60% dieser Daten für das Training genutzt, wohingegen jeweils 20% für die Validierung während des Trainings sowie für den Test nach Beendigung des Trainings dienen. Um eine optimale Wahl der Einstellparameter für das PGNN zu bestimmen, wird zudem eine Hyperparameteroptimierung mithilfe der BO durchgeführt (vgl. Abschnitt 2.1.3). Diese bestimmt u. a. die Anzahl der Neuronen, die (initiale) Lernrate  $\eta$  oder die Gewichtung  $\lambda_{phy}$  bzgl. der beiden Ziele.

Einen Eindruck von der Pareto-optimalen Menge bzgl. dieser Ziele  $J_{err}$  und  $J_{phy}$  gibt die Abbildung 3-8, welche für den Golfrobooter die Pareto-optimalen und dominierten Punkte stichprobenartig<sup>26</sup> darstellt. Die variierende Farbe der Datenpunkte in der Abbildung repräsentiert hierbei den Gewichtungsfaktor  $\lambda_{phy}$ . Ist dieser besonders klein, dargestellt durch einen blaugrünen Datenpunkt in der Abbildung 3-8, wird der typische Fehlerterm  $J_{err}$ , der die Ausgänge des Netzes mit den Trainingsdaten abgleicht, schwerpunktmäßig berücksichtigt und die Verletzung physikalischer Zusammenhänge durch  $J_{phy}$  lediglich geringfügig beachtet. Eine Vergrößerung von  $\lambda_{phy}$  führt daher zu einer Verringerung des physikalischen Fehlers und zu einer Vergrößerung des datenbasierten Fehlers. In der Abbildung 3-8 ist dagegen zu erkennen, dass die Pareto-optimalen Punkte alle sehr nah beieinander liegen, wodurch die Auswirkungen des Gewichtungsterms für den Golfrobooter moderat ausfallen. Weitere Beispiele für solche Paretofronten sind in der Quelle [RPG21] zu finden, welche diese systematisch für PINNs untersucht, deren  $J_{phy}$  die Differentialgleichung des Systems enthält.

---

<sup>26</sup>Es wurden pro  $\lambda_{phy}$  zehn verschiedene, unterschiedlich initialisierte Netze ausgewertet.

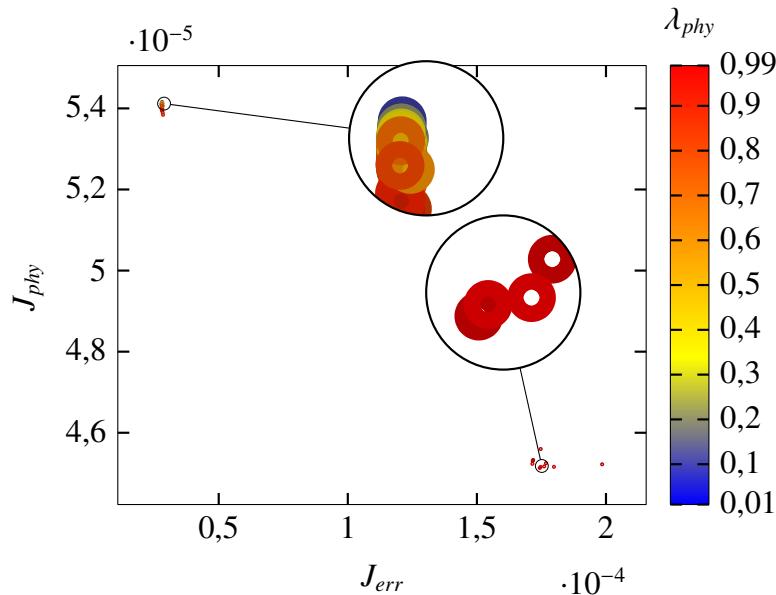
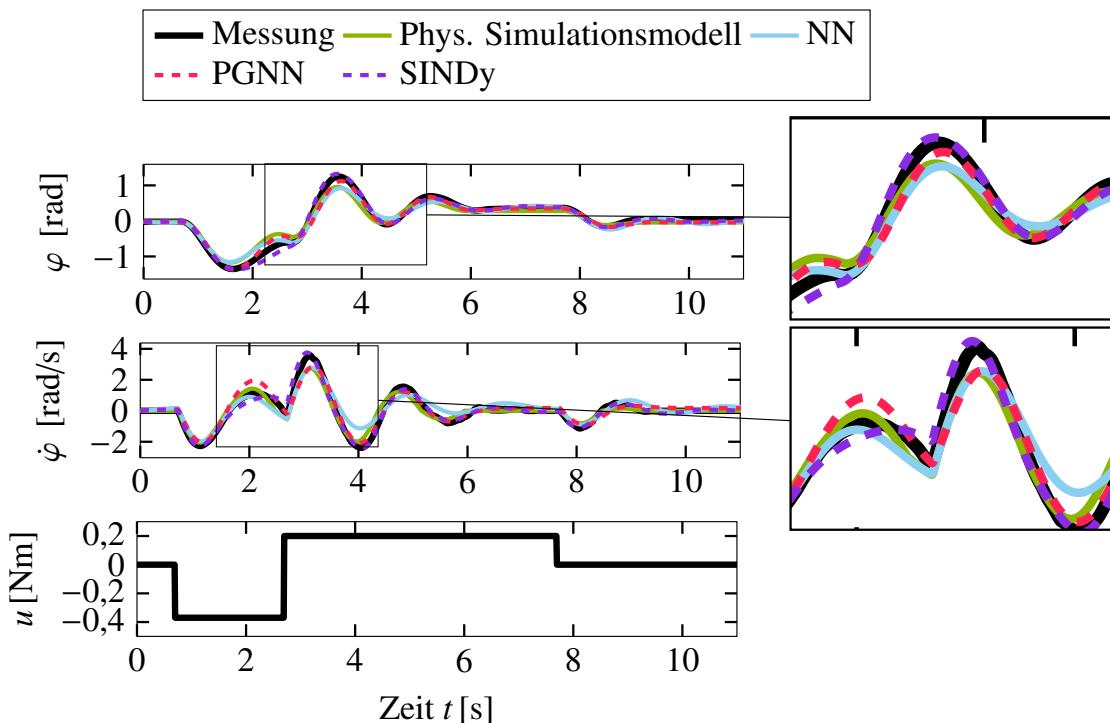


Abbildung 3-8: Paretofront für den Golfroboter mit variierendem Gewichtungsfaktor  $\lambda_{phy}$ , ausgedrückt durch die Farbskala, vgl. [GT22]

Nach dem Training und Auffinden der optimalen Parametrierung (BO:  $\lambda_{phy} = 0.8175$ , Anzahl der Neuronen 27) wird das entstandene Golfroboter-Modell  $f_{PGNN}$  anhand einer anderen, unbekannten Trajektorie getestet und mit einem klassischen neuronalen Netz, dem nichtlinearen Simulationsmodell und einem SINDy-Modell verglichen. Letzteres ist dabei basierend auf der Bibliothek  $\Psi(x, u) = (x_1, x_2, \sin(x_1), \cos(x_2), \tan^{-1}(x_2), u)^T$  trainiert worden. Die Abbildung 3-9 visualisiert die Ergebnisse dieses Vergleichs, indem die prädizierten Trajektorien der verschiedenen Modelle bzgl. der Testtrajektorie, welche in schwarz abgebildet ist, dargestellt werden. Grundsätzlich scheinen alle Modelle eine vergleichbare Modellgüte aufzuweisen. Wird jedoch jeweils ein Teilstück der Abbildungen vergrößert, lassen sich Abweichungen und Unterschiede der einzelnen Modelle erkennen. Das PGNN, dargestellt in rot, schwankt meistens zwischen dem Verlauf der Messdaten und des physikalischen Simulationsmodells (in grün), kann aber in der Regel eine Verbesserung der Modellgüte im Vergleich zum physikalischen Modell erzielen, z. B. für den Winkel. Dagegen weicht das NN (in hellblau) am stärksten vom tatsächlichen Verlauf des Golfroboters ab, obwohl dieses mit 39 Neuronen mehr Neuronen als das PGNN aufweist. Folglich scheint das PGNN die Vorteile beider Perspektiven zu vereinen und daraus ein qualitativ höherwertiges Modell zu erschaffen. Allerdings übertrifft das SINDy-Modell, dessen Trajektorien in lila dargestellt sind, die Approximationsgüte des PGNN-Modells deutlich. Dies ist nicht nur qualitativ anhand der Verläufe und insbesondere ihrer Vergrößerungen zu erkennen, sondern auch durch die Betrachtung des mittleren quadratischen Fehlers in Tabelle 3-1, der für das SINDy-Modell wesentlich geringer als für das PGNN-Modell ausfällt.

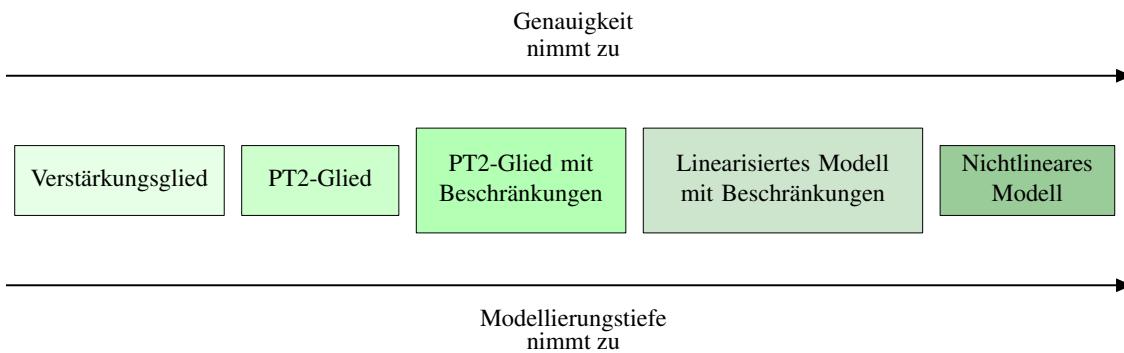
Diese Situation wandelt sich jedoch, wenn wenige Datensätze für das Training zur Verfügung stehen. Im Anhang A6.1 zeigt die Abbildung A6-4 beispielsweise das Approximationsverhalten der betrachteten Modelle, wenn ausschließlich transiente Dynamiken während des Einschwingens bzw. kurz nach Beginn der Anregung Teil der Trainingsdaten sind. Aufgrund der geringen und wenig aussagekräftigen Trainingsdaten kann das SINDy-Verfahren kein adäquates Modell extrahieren und die Golfroboterdymanik nur ungenau wiedergeben. Durch das physikalische Simulationsmodell kann das PGNN trotz der geringen Datenmenge robust die Dynamik des Golfroboters annähern. Folglich stellt das SINDy-Verfahren weiterhin die vorteilhafte Lösung dar, wenn viele und aussagekräftige Messdaten zur Verfügung stehen, da es im Gegensatz zum PGNN wenig Aufwand im Training erfordert und ein interpretierbares Modell liefert, welches auch jenseits der Trainingsmenge extrapolieren kann. Ist die Datenverfügbarkeit und -qualität jedoch limitiert, erweist sich das PGNN als die bessere Wahl zur Modellierung der Systemdynamik. Aufgrund der Fähigkeit des PGNNs, die Dynamik eines Systems hinreichend genau zu approximieren, wenn ein physikalisches Simulationsmodell mit ausreichender Modellierungstiefe gegeben ist und die Datenverfügbarkeit variiert, wird im folgenden Anwendungsbeispiel die Modellgüte des PGNNs in Abhängigkeit verschiedener Modellierungstiefen des verwendeten, physikalischen Simulationsmodells analysiert.



*Abbildung 3-9: Modellgüte eines PGNNs im Vergleich zu anderen datengetriebenen und physikalisch basierten Modellen anhand des Golfroboters, vgl. die vergrößerten Bildausschnitte (rechts) und [GT22]*

## Modellierung der Ventildynamik

Servoventile bilden in vielen hydraulischen Aktoren den zentralen Bestandteil einer Regelung. Allerdings ist ihre Dynamik sehr komplex, sodass eine detaillierte Modellbildung einen hohen Aufwand erfordert. Dies lässt sich aus der technischen Darstellung in der Abbildung A6-8 ableiten. In der Praxis hat es sich daher bewährt, je nach Zweck, für den das Modell erschlossen werden soll, verschiedene Modellierungstiefen des Ventils zu nutzen sowie den Detaillierungsgrad nicht höher als erforderlich zu wählen. Dies stellt eine übliche Maxime in der Modellbildung dar, nach der der Detaillierungsgrad eines Modells vorangetrieben wird, das Modell aber so einfach wie möglich für den Zugang der jeweiligen Anwendung bleibt [Loc20]. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein zweistufiges Servoventil mit einem Düsen-Draillplatte-System betrachtet, welches innerhalb eines Hydraulikzylinders verbaut ist und für welches ein nichtlineares Modell der Ventildynamik durch [Ker21] erarbeitet worden ist. Dieses ist inklusive seiner identifizierten Parameter und weiterer, geringerer Modellierungstiefen im Anhang A6.2 zu finden (vgl. Tabelle A6-2). Die Abbildung 3-10 stellt die Modellierungstiefe anhand ausgewählter, verschiedener Modelle für das Servoventil dar und reicht vom einfachen Verstärkungsglied über ein PT2-Glied bis zum detaillierten, nichtlinearen Modell. Die zunehmende Modellierungstiefe von links nach rechts resultiert somit jeweils in einer höheren Modellgüte und Modellgenauigkeit (vgl. [Loc20]<sup>27</sup>).



*Abbildung 3-10: Auswahl einiger Modelle für das Servoventil mit unterschiedlichen Modellierungstiefen*

Einen Kompromiss bzgl. der Modellierungstiefe und -genauigkeit stellt das folgende Modell dar, welches eine Verzögerungsdynamik zweiter Ordnung aufweist:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{2D_V}{T_V}x_2 - \frac{1}{T_V^2}x_1 + \frac{K_V}{T_V^2}u_V \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

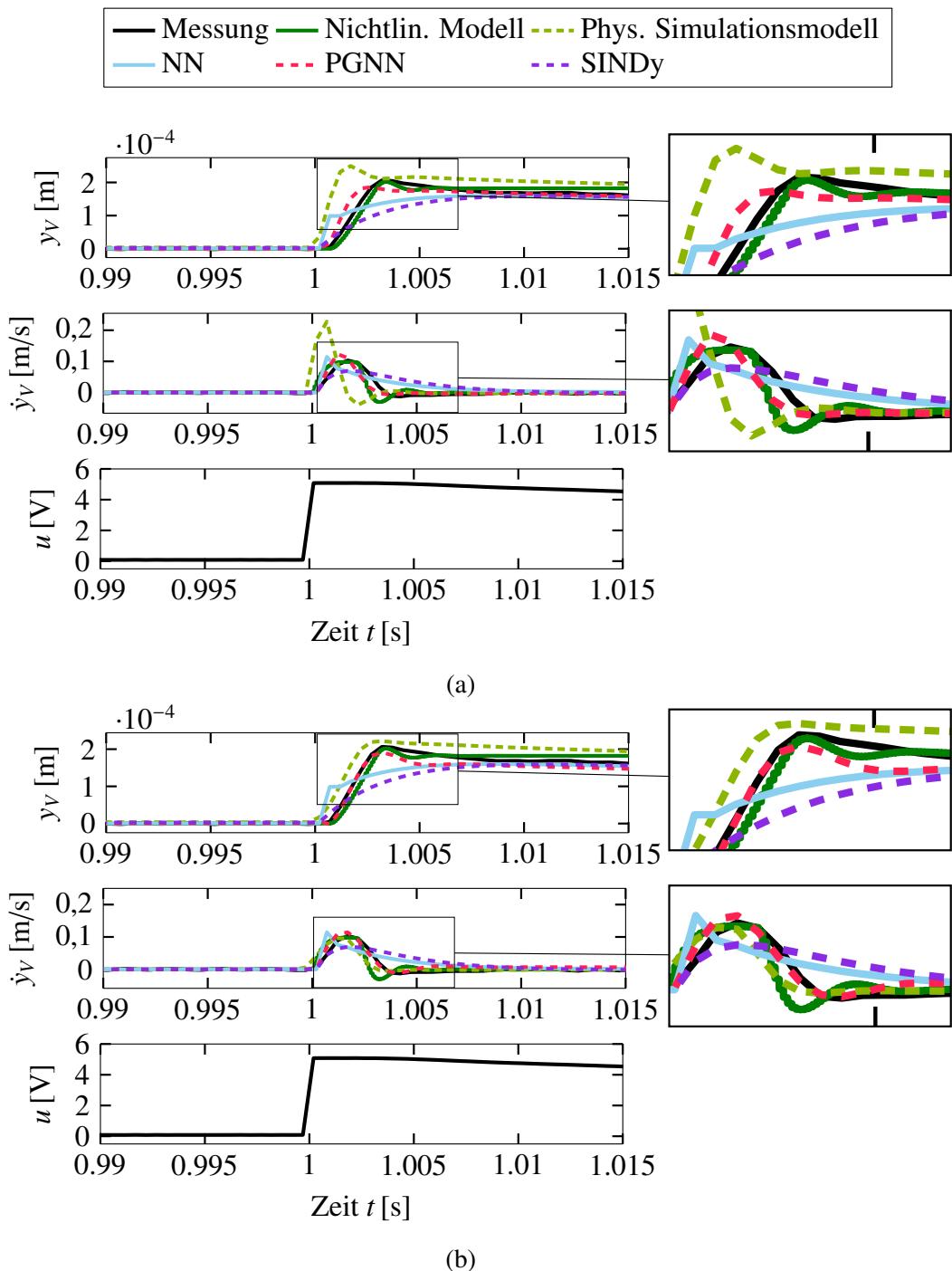
$$y = x_1.$$

<sup>27</sup>Lochbichler definiert in seiner Dissertation die Begriffe Modellierungsgrad und Modellgenauigkeit.

Hierbei stellt der Zustand  $\mathbf{x} = (y_V, \dot{y}_V)^T$  die Ventilschieberposition bzw. dessen Geschwindigkeit dar. Als Eingang erhält das Ventil die Spannung  $u_V$ . Die Parameter des Modells  $\mathbf{p} = (K_V, D_V, T_V)^T$  sind im Anhang A6.2 in der Tabelle A6-3 zu finden. Dieses PT2-Glied ist fähig, die grundlegende Systemdynamik des Ventils abzubilden, kann aber Beschränkungen der Ventilschiebergeschwindigkeit bzw. -beschleunigung, welche durch die Viskosität des Öls resultieren, nicht darstellen. Durch mehrere Versuche können solche Beschränkungen allerdings experimentell geschätzt und in das PT2-Modell integriert werden, welches somit einen weiteren Detailierungsgrad erhält (vgl. Abbildung 3-10 und Anhang A6.2). Die Auswirkung unterschiedlicher Modellierungstiefen des Simulationsmodells auf die Modellgüte eines PGNNs ist bisher noch nicht untersucht worden. Daher wird in dieser Arbeit eine Analyse des Einflusses anhand der Ventildynamik durchgeführt, deren Ergebnisse in der Abbildung 3-11 dargestellt sind.

Dabei wird in Analogie zur Gleichung (3.14) im vorigen Abschnitt erneut ein physikalischer Kostenterm  $J_{phy}$  zur Energiebilanz berücksichtigt, sodass das Training mithilfe der Kostenfunktion (3.13) erfolgt. Dieses basiert auf verschiedenen verrauschten Trajektorien, die infolge unterschiedlicher Sprunganregungen variierend von minus zehn bis plus zehn Volt gemessen worden sind. Die Aufteilung der Trainingsdaten in Training, Validierung und Test geschieht wie im vorigen Beispiel. Anschließend zeigt die Abbildung 3-11a) das Verhalten, wenn das Modell (3.15) verwendet wird, wohingegen die Abbildung 3-11b) jenes darstellt, wenn das Modell (3.15) zusätzlich mit den experimentell bestimmten Beschränkungen ausgestattet wird (vgl. Abbildung 3-10). Daher unterscheiden sich die beiden Abbildungen lediglich durch die Verläufe des PGNNs und des physikalischen Simulationsmodells. Beide PGNNs weisen 11 Neuronen auf, unterscheiden sich jedoch in der Gewichtung des physikalischen Kostenterms zu  $\lambda_{phy} = 0,2527$  bzw.  $\lambda_{phy} = 0,3206$ . Dies deutet bereits nach der Hyperparameteroptimierung die Auswirkung einer höheren Modellierungstiefe durch eine verstärkte Berücksichtigung des physikalischen Terms an. Neben dem jeweils zugrunde liegenden Simulationsmodell wird das PGNN zudem mit dem detaillierten, nichtlinearen Ventilmodell (A6-4) sowie mit einem Standard-NN, dessen Hyperparameteroptimierung zu 92 Neuronen führte, und einem SINDy-Modell verglichen, wobei die beiden letzteren auf denselben Trainingsdaten wie das PGNN trainiert wurden. Die Bibliothek des SINDy-Verfahrens basiert dabei auf den Zuständen und dem Eingang, um die Vergleichbarkeit zum Vorwissen des physikalischen Modells (3.15) zu gewährleisten.

In der Abbildung 3-11a) weist das physikalische Modell (3.15) durch die fehlenden Beschränkungen große Abweichungen zu den Messdaten auf, welche sich insbesondere in der Geschwindigkeit des Ventilschiebers durch ein Überschwingen bemerkbar machen. Trotzdem gelingt es dem PGNN, eine sehr gute Approximation des Ventils zu erzielen, welche auf dem Niveau des nichtlinearen Ventilmodells liegt.



*Abbildung 3-11: Modellgüte eines PGNNs bestehend aus einem Simulationsmodell mit unterschiedlichen Modellierungstiefen im Vergleich zu anderen datengeriebenen und physikalisch basierten Modellen anhand der Ventildynamik: a) Simulationsmodell (3.15) ohne Beschränkungen, b) Simulationsmodell (3.15) mit Beschränkungen, vgl. [GT22]*

Dies lässt sich beispielsweise in den beiden Vergrößerungen rechts von der Abbildung erkennen. Im Kontrast dazu schaffen es weder das NN noch das SINDy-Modell das Systemverhalten anzunähern und weisen starke qualitative Abweichungen auf. Dies resultiert aus der einfach gewählten Bibliothek des SINDy-Modells. Erhielte dieses eine Bibliothek mit Elementen des nichtlinearen Modells, wäre eine höhere Modellgüte zu erwarten. Wird für das PGNN ein Modell mit höherem Detaillierungsgrad verwendet, wie z. B. durch Berücksichtigung der Beschränkungen, verbessert sich die Modellgüte enorm. Die Abbildung 3-11b) verdeutlicht diese Erkenntnis, da die Vergrößerungen eine genauere Approximation als das nichtlineare Modell sowohl für die Ventilschieberposition als auch für die -geschwindigkeit zeigen.

Anhand des Golfroboters und der Ventildynamik werden daher die Vorteile eines PGNNs offensichtlich: Die Modellgüte erhöht sich, wenn sowohl Messdaten als auch physikalisches Vorwissen in das PGNN eingehen. Ferner kann in der vorliegenden Arbeit anhand der Ventildynamik gezeigt werden, dass sich diese Güte erwartungsgemäß sogar verbessern lässt, wenn die Modellierungstiefe des verwendeten physikalischen Simulationsmodells erhöht wird. Die Modellgüte eines PGNNs ist somit explizit von der Qualität des verwendeten physikalischen Simulationsmodells abhängig. Die Nutzung des PGNNs erlaubt deshalb eine Ersparnis des Modellierungsaufwands, da das nichtlineare Ventilmodell aus einer zeitintensiven und Personal aufwendigen Entwicklung hervorgegangen ist. Dieser Entwicklungszyklus kann durch das Training und die Nutzung eines PGNNs bei Gewährleistung einer vergleichbar hohen Modellgüte deutlich reduziert werden.

Der qualitative Eindruck der beiden Anwendungsbeispiele aus den Abbildungen 3-9 und 3-11, welcher eine hohe Modellgüte für die PGNNs vermittelt, lässt sich anhand des quadratischen mittleren Fehlers (engl. *Root Mean Squared Error (RMSE)*), welcher in der Tabelle 3-1 zu sehen ist, quantifizieren. Insbesondere die thematisierte Verbesserung der Modellgüte, wenn ein physikalisches Simulationsmodell mit höherer Qualität für das PGNN verwendet wird (vgl. den RMSE für das physikalische Simulationsmodell), zeigt sich im Vergleich der letzten Zeile für die Ventildynamik. So liegt der RMSE für das PGNN mit dem Modell (3.15) im Bereich  $10^{-4}$ , wohingegen das PGNN mit den zusätzlichen Beschränkungen eine Verringerung auf den Bereich  $10^{-5}$  erzielt.

Modell	GolfroboTer	Ventil (Abb. 3-11 a))	Ventil (Abb. 3-11 b))
Phys. Modell	$6.6563 \cdot 10^{-4}$	$5.0501 \cdot 10^{-4}$	$3.9959 \cdot 10^{-4}$
NN	$8.9736 \cdot 10^{-4}$	$2.1382 \cdot 10^{-4}$	$2.1382 \cdot 10^{-4}$
SINDy	$3.4516 \cdot 10^{-4}$	$2.8619 \cdot 10^{-4}$	$2.8619 \cdot 10^{-4}$
PGNN	$3.7982 \cdot 10^{-4}$	$1.1982 \cdot 10^{-4}$	$7.3835 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 3-1: Quadratischer mittlerer Fehler der Testverläufe aus den Abbildungen 3-9 und 3-11, vgl. [GT22]

### 3.1.4 Physics-Guided Recurrent Neural Network (PGRNN)

Das Konzept der PGNNs zeigte bereits im vorangegangenen Abschnitt eine vielversprechende Strategie zur Systemidentifikation. Dennoch weist die Struktur eines PGNNs einige Nachteile für die Modellierung dynamischer Systeme auf. So stellt die vollständige Vernachlässigung der zeitlichen Änderung, welche Kern der Definition eines dynamischen Systems ist (vgl. [CFSS82]), einen gravierenden Makel dar. Die Zeit ist neben dem inneren Zustand und der Anregung eine der Einflussgrößen eines dynamischen Systems und sollte daher in einem hybriden Modell berücksichtigt werden. Darüber hinaus bestehen die meisten dynamischen Systeme in der Mechatronik aus Energiespeichern, die über einen längeren Zeitraum Einfluss auf das dynamische Verhalten ausüben können. Somit ist die vorwärts gerichtete Architektur, die in Abbildung 3-4 links dargestellt ist und keinen rückwärtigen oder parallelen Informationsaustausch unter den Neuronen erlaubt, nicht für jedes dynamische System die geeignete Struktur. Bei Zeitreihendaten wird häufig eine rekurrente Architektur empfohlen, um den sequentiellen Verlauf und dessen Langzeiteffekte abbilden zu können [FN93; SZ06; KBK<sup>+</sup>13; Kro16]. Daher wird die im Abschnitt 3.1.3 entwickelte Struktur nun durch die Nutzung eines rekurrenten statt eines vorwärts gerichteten Netzes angepasst. Der folgende Abschnitt ist bereits Teil der Vorveröffentlichung [SGT22], welche durch nachfolgende Forschungsarbeiten basierend auf der studentischen Arbeit [Sch21] entstand. Die angesprochene, adaptierte Struktur wird schließlich als *Physics-Guided Recurrent Neural Network (PGRNN)* bezeichnet und wird beispielsweise für das bereits erwähnte Beispiel zur Schätzung von Temperaturen in Flüssen und Gewässern eingesetzt [JZS<sup>+</sup>21]. Das in der Abbildung 3-12 dargestellte PGRNN  $f_{PGRNN}$  weist die gleiche Grundstruktur aus physikalischem Simulationsmodell, dargestellt in grün, und datenbasiertem Anteil, visualisiert in rot, wie das PGNN in der Abbildung 3-7 auf.

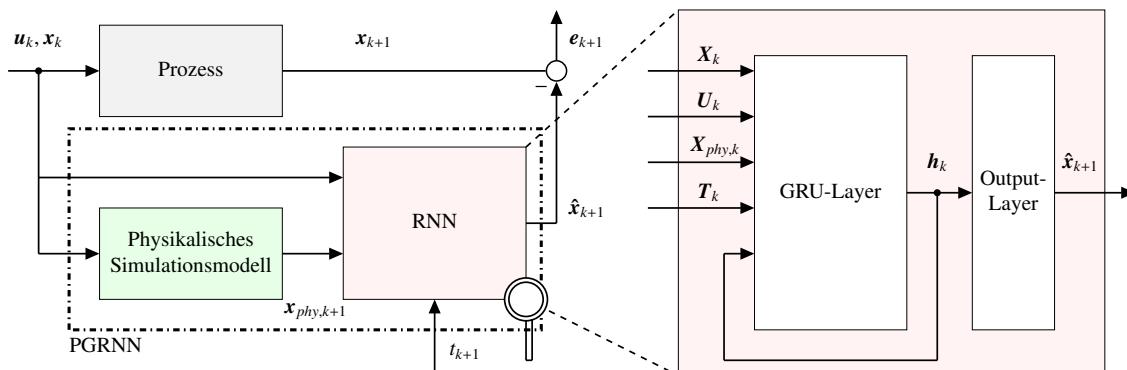


Abbildung 3-12: Struktur eines PGRNNs während des Trainings (vgl. [SGT22]): Es umfasst ein physikalisches Simulationsmodell (grün) und ein RNN (rot), welches ein GRU-Layer gefolgt von einer Ausgabeschicht enthält.

Es unterscheidet sich somit nur durch den zusätzlichen Eingang der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  sowie durch die innere Architektur des neuronalen Netzes. Dieses ist in der Abbildung 3-12 vergrößert dargestellt und besitzt analog zur Modellierung in der Regelungstechnik einen intrinsischen Zustand, den sogenannten *Hidden State*  $\mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^Z$  mit  $Z$  Neuronen, der zeitlich aufeinanderfolgende Daten durch eine Rückführung berücksichtigt. Im Kontrast zu bestehenden Formulierungen des PGRNNs (vgl. [JZS<sup>+</sup>21]) wird das Konstrukt wiederum für nicht-autonome Systeme erweitert. Daher hängt  $\mathbf{h}_k$  in dieser Arbeit sowohl von dem vorherigen Zustand  $\mathbf{h}_{k-1}$  als auch von den aktuellen Eingängen ab. Diese umfassen jeweils  $N$  vergangene, zeitliche Verläufe bis zum aktuellen Zeitpunkt  $k$ , sodass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_k &:= (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k), \\ \mathbf{U}_k &:= (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k), \\ \mathbf{X}_{phy,k} &:= (\mathbf{x}_{phy,1}, \mathbf{x}_{phy,2}, \dots, \mathbf{x}_{phy,k+1}), \\ \mathbf{T}_k &:= (t_0, t_1, \dots, t_k).\end{aligned}$$

Die Verarbeitung der sequenziellen Daten kann allerdings zu numerischen Herausforderungen führen, welche mit der Einführung der *Long Short-Term Memory (LSTM)*-Zelle [HS97] und der Weiterentwicklung dieser zur *Gated Recurrent Unit (GRU)*-Zelle behoben werden konnten [CvG<sup>+</sup>14]. Deshalb nutzt das PGRNN die GRU-Zelle, welche die Daten durch sogenannte *Update Gates* und *Reset Gates* verarbeitet. Das Update Gate  $z_k$  übergibt dem Hidden State neue Informationen, während das Reset Gate  $r_k$  sukzessiv andere, nicht mehr relevante Informationen löscht. Es resultieren die folgenden Gleichungen für den Eingang  $s_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_{phy,k})^T$ , welche zur Aktualisierung des Zustands  $\mathbf{h}_k$  durch eine Linearerkombination des vorherigen Zustands  $\mathbf{h}_{k-1}$  und des Zustands  $\tilde{\mathbf{h}}_k$  genutzt werden (vgl. Vorveröffentlichung [SGT22]):

$$\begin{aligned}z_k &= \sigma_g(\mathbf{W}_z s_k + \mathbf{b}_z + \mathbf{R}_z \mathbf{h}_{k-1}), \\ r_k &= \sigma_g(\mathbf{W}_r s_k + \mathbf{b}_r + \mathbf{R}_r \mathbf{h}_{k-1}), \\ \tilde{\mathbf{h}}_k &= \sigma_s(\mathbf{W}_{\tilde{h}} s_k + \mathbf{b}_{\tilde{h}} + r_k \odot (\mathbf{R}_{\tilde{h}} \mathbf{h}_{k-1})), \\ \mathbf{h}_k &= (1 - z_k) \odot \mathbf{h}_{k-1} + z_k \odot \tilde{\mathbf{h}}_k.\end{aligned}$$

Die Gewichte sind nach Eingangsgewichten  $\mathbf{W}_\bullet$ , rekurrenten Gewichten  $\mathbf{R}_\bullet$  und additiven Gewichten  $\mathbf{b}_\bullet$  aufgeteilt, wohingegen die Aktivierungsfunktion der Gates  $\sigma_g$  jeweils durch eine logistische Funktion und die Aktivierungsfunktion des Hidden States  $\sigma_s$  durch eine Tangens-Hyperbolicus-Funktion abgebildet werden. Anschließend folgt wie in der Abbildung 3-12 zu erkennen eine Ausgabeschicht, welche aus dem hochdimensionalen Zustand  $\mathbf{h}_k$  den tatsächlichen Systemzustand  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  extrahiert. Auch für das PGRNN wird die Grundidee des physikalisch konsistenten Lernens in Analogie zum vorherigen Ab-

schnitt 3.1.3 beibehalten. Im Unterschied zu anderen PGRNNs, welche Vorwissen als Regularisierungsterm berücksichtigen [JZS<sup>+</sup>21], wird dieses weiterhin im Rahmen einer Mehrzieloptimierung gelernt. Um eine höhere Genauigkeit für die Lösung des Mehrzieloptimierungsproblems zu erzielen und die bekannten Nachteile eines einfachen Skalarierungsverfahrens zu vermeiden (vgl. Gleichung (3.13), [Ehr05; NW06]), wird die Nutzung eines komplexeren Lösungsverfahrens angestrebt. Während die gewichtete Summe meist die erste Wahl in vielen Publikationen darstellt [RPG21], wird im Folgenden die Gütevektoroptimierung nach Kreißelmeier und Steinhauser genutzt [KS79; FKL<sup>+</sup>22], welche den Lernerfolg enorm verbessert. Der Leitgedanke des Verfahrens bildet die Konstruktion von Grenzen für jede der einzelnen Kostenfunktionen  $J_i$  mit  $i = 1, \dots, N_J$ , die diese jeweils sukzessiv verkleinern. Zu Beginn jeder Lerniteration  $\tilde{i} = 0, \dots, \varrho$  werden diese Grenzen  $c_i^{\tilde{i}}$  mit  $c_i^{\tilde{i}} > J_i^{\tilde{i}}(\cdot)$  initialisiert, woraufhin das Maximum der  $N_J$  genormten Kostenfunktionen  $J(\cdot)$  gesucht wird:

$$J(\cdot) = \max \left\{ \frac{J_1^{\varrho}(\cdot)}{c_1^{\varrho}}, \dots, \frac{J_{N_J}^{\varrho}(\cdot)}{c_{N_J}^{\varrho}} \right\}, \quad \text{mit } J_i^{\varrho}(\cdot) \leq c_i^{\varrho} \leq c_i^{\varrho-1} \leq \dots \leq c_i^0. \quad (3.16)$$

Dadurch können alle Gütemaße  $J_i$  schrittweise verkleinert werden, wie es exemplarisch in der Abbildung 3-13 für  $N_J = 2$  Kostenfunktionen und  $\varrho = 3$  Iterationen dargestellt ist. Dieses Vorgehen wird so lange durchgeführt, bis entweder eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht worden ist oder keine Verringerung der Grenze  $c_i$  mehr erreicht wird.

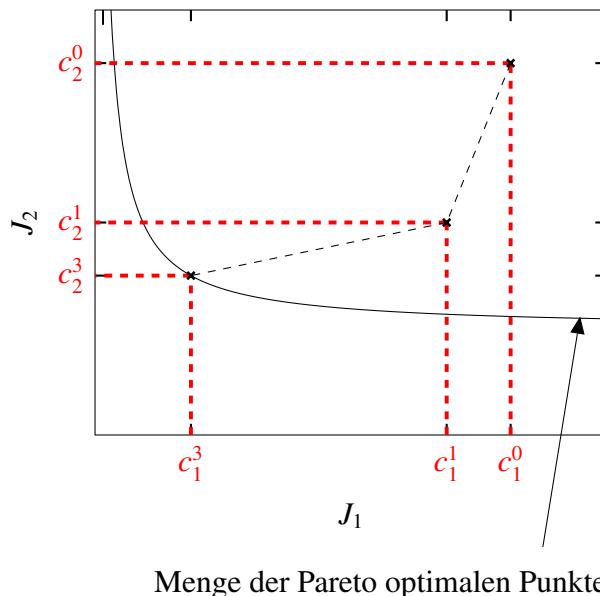


Abbildung 3-13: Schematischer Ablauf einer Gütevektoroptimierung für zwei konkurrierende Ziele  $J_1$  und  $J_2$  mit drei Iterationen

Das ist der Fall, wenn beispielsweise eine Kostenfunktion  $J_i$  bereits sehr niedrig ist oder ein Pareto-optimaler Punkt gefunden worden ist (vgl. Abbildung 3-13). Ein PGRNN, welches mit dieser Mehrzieloptimierungsstrategie während des Trainings betrieben worden ist, wird nun als *Multi-Objective Physics-Guided Recurrent Neural Network (MOP-GRNN)* bezeichnet (vgl. Vorveröffentlichung [SGT22]).

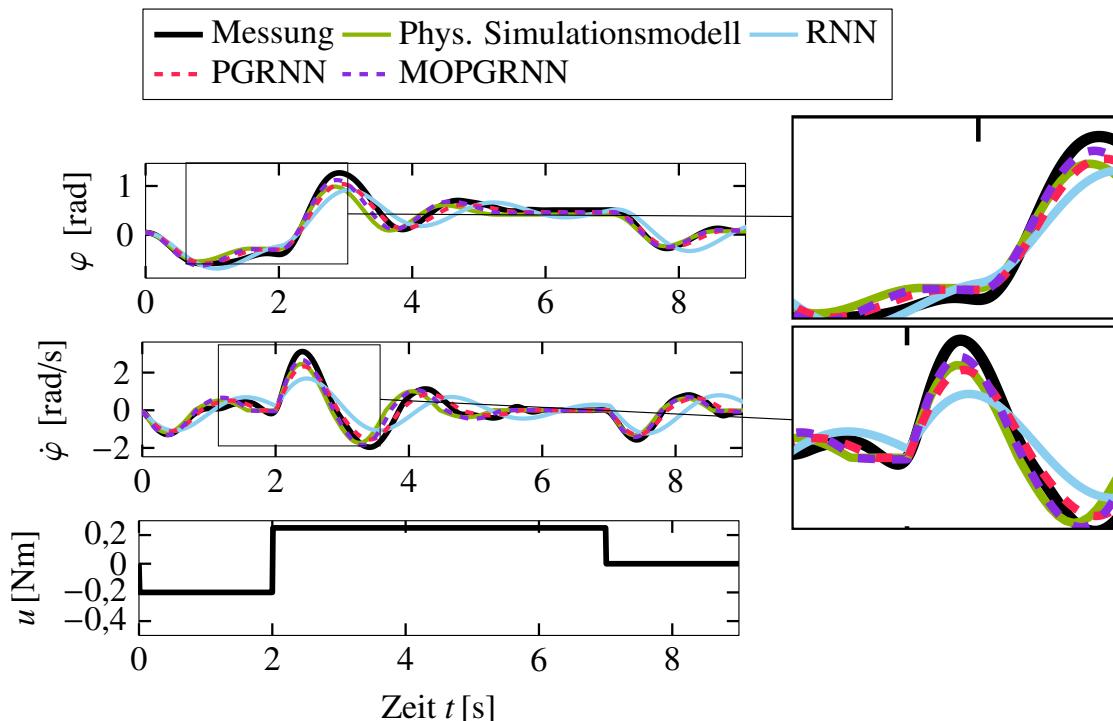
Obwohl die Erweiterung zur rekurrenten Architektur und zur Gütevektoroptimierung während des Trainings viele Vorteile aufweist, resultieren die Anpassungen aufgrund der rekurrenten Struktur des RNNs dennoch in ein aufwendigeres Training, welches je nach betrachtetem System hohe Ressourcen, insbesondere Zeit- und Rechenkapazitäten, erfordern kann. Exemplarisch wird daher die Modellgüte des Verfahrens für das zweidimensionale Anwendungsbeispiel des Golfroboters im kritischen Vergleich zu anderen Methoden evaluiert, woraufhin der Vorteil der in dieser Arbeit eingesetzten, komplexeren Lösungsmethode für das Mehrzieloptimierungsproblem aufgezeigt wird. Ein weiteres Beispiel findet sich in der Vorveröffentlichung [SGT22] sowie im Anhang (vgl. Abbildung A6-5).

## Modellierung des Golfroboters

In Analogie zum Abschnitt der PGNNs wird nun die Modellgüte eines PGRNNs für den Golfroboter analysiert. Für die Vergleichbarkeit wird dazu weiterhin dasselbe, nichtlineare Simulationsmodell (3.4) sowie die Energiebilanz (3.14) für den Teil der physikalischen Kostenfunktion  $J_{phy}$  genutzt. Für das Training werden dieselben Messdaten des Golfroboters verwendet, welche bereits im Abschnitt 3.1.3 für das Training eingesetzt wurden. Um die Abhängigkeit der Modellgüte von der Datenmenge zu analysieren, werden die Messdaten in verschiedene Datensätze mit unterschiedlichem Umfang aufgeteilt. Somit können Trainings entweder auf Basis weniger Datensätze (z. B. drei bis sechs Trainings-samples) oder vieler Datensätze (z. B. 12-15 Trainingssamples) durchgeführt werden. Die Auswertung der Kostenfunktion erfolgt zudem im Kontrast zum vorigen Abschnitt mit dem durchschnittlichen absoluten Fehler (*Mean Absolute Error (MAE)*, vgl. [SGT22]). Nach der Optimierung der Hyperparameter durch die Bayessche Optimierung ergibt sich das in der Abbildung 3-14 dargestellte Modellverhalten, welches aus einem Training mit sechs Samples resultiert und im Vergleich zu Messdaten des Golfroboters, gekennzeichnet durch die schwarzen Trajektorien, abgebildet ist. Neben dem physikalischen Modell (in grün) wird das rekurrente, physikalisch motivierte Netz wiederum mit dem RNN (in blau), demnach mit Modellen vergleichbar zu seinen jeweiligen Teilkomponenten, verglichen. Aufgrund seiner wesentlichen Erweiterung hin zur Gütevektoroptimierung wird zudem in das Modell ohne diese<sup>28</sup> (PGRNN, rot) bzw. mit dieser (MOPGRNN, violett)

<sup>28</sup>In diesem Fall wird das Mehrzieloptimierungsproblem weiterhin mit einer gewichteten Summe gelöst.

unterschieden. Die optimierte Anzahl der Neuronen liegt bei allen drei Netzen in einem ähnlichen Bereich, wobei das MOPGRNN die kleinste Anzahl mit 624 Eingangs- und 208 rekurrenten Neuronen aufweist. Die Abbildung 3-14 zeigt auf, dass das RNN die Dynamik des Golfroboters grundlegend annähern und wiedergeben kann, im Vergleich zu den anderen Modellen jedoch die größten Abweichungen aufweist. Dies wird insbesondere in den Vergrößerungen rechts der Abbildung deutlich. Zudem ist erkennbar, dass das PGRNN, welches ohne die Gütevektoroptimierung trainiert worden ist, im Vergleich zum physikalischen Simulationsmodell überwiegend eine Verbesserung der Modellgüte erzeugen kann. Dies zeigt sich vor allem in der Approximation der Winkelgeschwindigkeit und stützt die Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1.3. Auffällig ist aber, dass das PGRNN trotz der Nutzung des physikalischen Modells und entgegen der Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1.3 eine vergleichbare komplexe Architektur wie das RNN besitzt. Wird nun eine komplexere Mehrzieloptimierungsstrategie basierend auf Gleichung (3.16) statt einer einfachen Skalarisierung gewählt, verbessert sich die Modellgüte des PGRNNs erneut: Die Trajektorien des MOPGRNNs, dargestellt in violett, geben die Dynamik des Golfroboters am besten wieder. Dies scheint allein aus der detaillierteren Berücksichtigung des physikalischen Vorwissens in Form der Energiebilanz zu resultieren, da das MOPGRNN aufgrund der ähnlich skalierten Neuronenanzahl eine vergleichbare Komplexität wie die anderen beiden Netze aufweist.

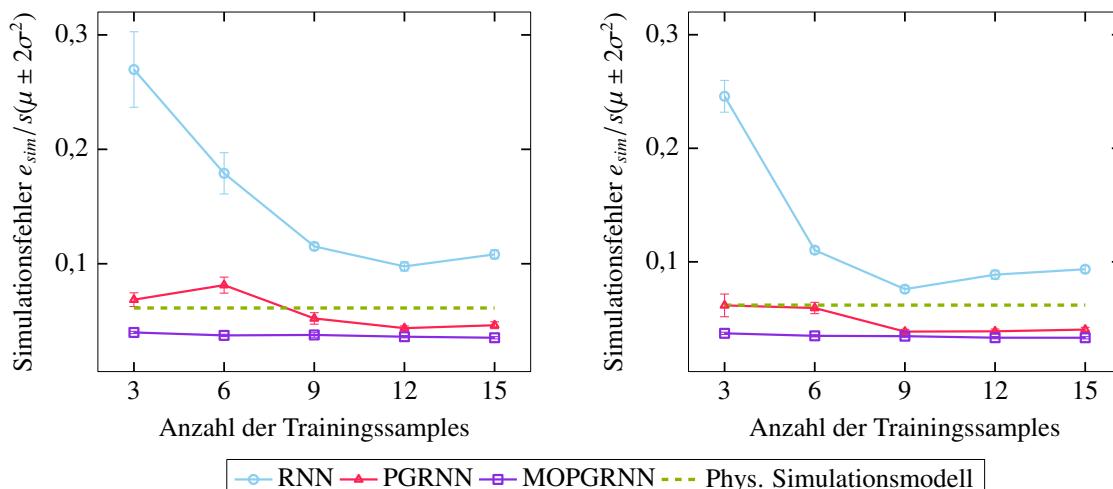


*Abbildung 3-14: Modellgüte eines PGRNNs bzw. MOPGRNNs im Vergleich zu anderen datengetriebenen und physikalisch basierten Modellen anhand des Golfroboters, vgl. die vergrößerten Bildausschnitte (rechts) und [SGT22]*

Da die Initialisierung der Gewichte eines neuronalen Netzes allerdings einen größeren Einfluss auf ihre Performanz aufweist, wird eine statistische Untersuchung durchgeführt, um die Datenabhängigkeit zu ermitteln. Dazu wird jede der drei Netzarten 16 Mal mit denselben Trainingseinstellungen trainiert. Für jedes dieser Netze wird anschließend die Modellgüte anhand derselben Testtrajektorie überprüft und mittels eines Simulationsfehlers  $e_{sim}$  quantifiziert [SGT22]:

$$e_{sim} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \frac{1}{q_s} \int_{t_0}^{t_q} \frac{|\dot{x}_s(\tilde{t}) - \hat{\dot{x}}_s(\tilde{t})|_1}{1 + \lambda_i \tilde{t}} d\tilde{t}.$$

Dieser Simulationsfehler wertet die Fehlerfläche zwischen der tatsächlichen und der prädictierten Trajektorie aus, wobei  $N$  die Anzahl der Trainingssamples, welche jeweils eine Länge  $q_s$  mit  $s = 1, \dots, N$  aufweisen, sowie  $\dot{x}_s$  bzw.  $\hat{\dot{x}}_s$  die jeweiligen Trajektorien darstellen. Der Parameter  $\lambda_i$  stellt hierbei die Option dar, den Fehler zeitabhängig zu priorisieren, wird aber für die folgenden Untersuchungen auf  $\lambda_i = 1$  gesetzt, sodass kein Vergessensfaktor berücksichtigt wird [SGT22]. Aufgrund der Berechnung des zeitlichen Simulationsfehlers lässt sich die Modellgüte der verschiedenen Modelle und mehrfach durchgeführten Versuche quantitativ durch den durchschnittlichen Fehler  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  bemessen, welche in der Abbildung 3-15 durch einen Punkt bzw. eine vertikale Linie dargestellt sind. Die Abbildung zeigt zudem nicht nur den Simulationsfehler der verschiedenen Modelle im Vergleich, sondern untersucht auch ihre Datenabhängigkeit, indem die  $x$ -Achse die Anzahl der genutzten Trainingssamples beschreibt.



*Abbildung 3-15: Statistische Auswertung des Simulationsfehlers verschiedener Modellarten für den Golfroboter, unterschieden nach der Anzahl der Trainingssamples und danach, ob die Trainingsdaten sinusförmige Anregungen enthielten (rechte Grafik) oder nicht (linke Grafik), vgl. [SGT22]*

Zudem wird in ein Training mit (rechte Grafik) und ohne (linke Grafik) sinusförmigen Anregungen unterschieden, da der Golfroboter insbesondere bei sinusförmigen Anregungen seine starken nichtlinearen Effekte aufzeigt (vgl. Abbildung A6-2). Allerdings können zwei Erkenntnisse sogar unabhängig von den verwendeten Daten und der Anzahl der Trainingssamples aus dieser Abbildung gewonnen werden: Das RNN unterliegt grundsätzlich den anderen Modellen und kann nicht an die Modellgüte eines physikalischen Modells bzw. eines hybriden Modell heranreichen. Es existiert jedoch für das RNN ein optimaler Datensatz, der sich bei neun bzw. zwölf Trainingssamples befindet, da sich der Simulationsfehler danach mit steigender Datenmenge wieder erhöht. Die zweite Erkenntnis bezieht sich auf das MOPGRNN: Dieses scheint unabhängig von der Datenmenge und der Anzahl der Trainingsdaten einen vergleichbar niedrigen Simulationsfehler zu erzielen, welcher sogar geringer als der des physikalischen Simulationsmodells ist. Somit verbessert die Mehrzieloptimierung mittels der Gütevektoroptimierung nicht nur die Modellgüte des MOPGRNNs im Vergleich zum physikalischen oder datengetriebenen Modell, sondern erhöht zudem die Robustheit des Netzes hinsichtlich der Menge der verwendeten Trainingsdaten. Dies bestätigt das vergleichbar formulierte PGRNN, welches nicht mit der Gütevektoroptimierung die Mehrzieloptimierung (3.13) umgesetzt worden ist und eine Abhängigkeit bzgl. der Daten aufweist. Diese äußert sich darin, dass einerseits je nach Anregung in den Trainingsdaten eine verminderte Modellgüte resultiert und andererseits erst mit steigender Anzahl an Trainingssamples eine vergleichbare Modellgüte wie das MOPGRNN erzielt werden kann.

Die statistische Analyse zeigt demnach, dass die Verbesserung des Mehrzieloptimierungsansatzes viele Vorteile wie Robustheit bzgl. der Trainingsdaten für das (MO)PGRNN bringt und dadurch eine zuverlässig hohe Modellgüte erzielt werden kann, welche die des nichtlinearen, physikalischen Simulationsmodells übersteigt. Im Anhang vergleicht die Abbildung A6-5 zudem die Modellgüte des PGRNNs und MOPGRNNs zum SINDy-Modell (3.6) mit der Bibliothek  $\Psi_1$  und zum PGNN-Modell aus dem Abschnitt 3.1.3. Die Verbesserung der Modellgüte im Vergleich zum PGNN aufgrund der rekurrenten Struktur und der Zeitabhängigkeit fällt besonders stark auf. Dennoch übertrifft das SINDy-Modell auch weiterhin die physikalisch motivierten Netze bzgl. der Genauigkeit. Somit stellt das MOPGRNN zwar eine vorteilhafte Möglichkeit dar, eine hohe Modellgüte bei gleichzeitiger Erhaltung physikalischer Prinzipien zu erzielen, schneidet aber im Verhältnis des Aufwands und Nutzens deutlich schlechter als ein SINDy-Modell ab, welches mit wenig Aufwand erarbeitet werden kann und eine ähnliche Genauigkeit liefern kann. Für das MOPGRNN lässt sich demnach eine ähnliche Einschätzung wie beim PGNN vornehmen: Für komplexe Systeme und wenige Datensätze ist es eine effiziente Methode, ein Modell mit höherer Güte zu erzielen, für weniger komplexe Anwendungsfälle eignet sich meist die physikalisch basierte Modellierung oder das SINDy-Verfahren. Im Folgen-

den werden die bisher betrachteten Techniken der hybriden Systemidentifikation bzgl. der Anforderung **F.3** eingeordnet.

### 3.1.5 Nutzbarkeit für den Beobachter- und Reglerentwurf

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung oder Erweiterung einer Methode zur Zustandsschätzung trotz Modellgenauigkeiten unter den spezifischen Anforderungen **F.1-F.3**. Daher lautet nun die Frage, inwiefern sich die entwickelten Modelle aus den vorangegangenen Abschnitten zur Zustandsschätzung (und Regelung) eignen. Das SINDy-Modell ist aufgrund seiner physikalisch plausiblen Form (vgl. Gleichung (3.6)) für viele Beobachter- und Reglertypen nutzbar, auch wenn ggf. Anpassungen an das Modell, wie eine Linearisierung, vorgenommen werden müssen. Im Kontrast dazu stellen PG(R)NNs<sup>29</sup> trotz ihrer hohen Modellgüte eine Herausforderung für den modellbasierten Regelungsentwurf durch die Black-Box-Struktur des neuronalen Netzes dar. Denn obwohl ein physikalisches Simulationsmodell Teil des Gesamtmodells ist, welches weiterhin die Anforderungen an einen modellbasierten Entwurf erfüllt, bildet der Kern der Gesamtkonstruktion durch die Verwendung eines neuronalen Netzes eine Black-Box-Struktur. Diese Struktur kann nicht für Regler- oder Beobachterentwürfe herangezogen werden, die eine Zustandsraumdarstellung erfordern, wie ein Riccati-Regler oder Luenberger-Beobachter es tun [Ada18; FKL<sup>+</sup>22]. Als Konsequenz sind die PG(R)NN-Modelle daher nur für solche Beobachter und Regler nutzbar, welche auf dem Ein-/Ausgangsverhalten eines Systemmodells basieren, und werden deshalb in den beiden nachfolgenden Abschnitten exemplarisch in jenen angewendet.

#### Beobachterentwurf

Einer der wenigen modellbasierten Beobachter, der Modelle mit Ein-/Ausgangsverhalten verarbeiten kann, ist das SRUKF, welches im Abschnitt 2.2.2 vorgestellt worden ist. Da dieses im Prädiktorschritt lediglich Kenntnis über die Systemdynamik erfordert, um den nächsten Zustand zu prädizieren, kann das PG(R)NN-Modell unkompliziert eingesetzt und genutzt werden. Anhand des Golfroboters wird die Schätzgüte eines PG(R)NN-basierten SRUKFs nun simulationsbasiert untersucht, da eine Umsetzung am Prüfstand aufgrund der zu Verfügung stehenden Software für komplexe neuronale Netze nicht möglich war. Als Referenz der geschätzten Trajektorien dienen daher Messdaten vom Prüfstand. Die genutzten PG(R)NN-Modelle resultieren aus den Abschnitten 3.1.3 bzw. 3.1.4, die verwendeten Kovarianzmatrizen lauten  $Q = 0,01 \cdot I$  und  $R = 0,00001$ . Die Resultate der Analyse zeigen in der Abbildung 3-16 auf der linken Seite den Schätzfehler, wenn

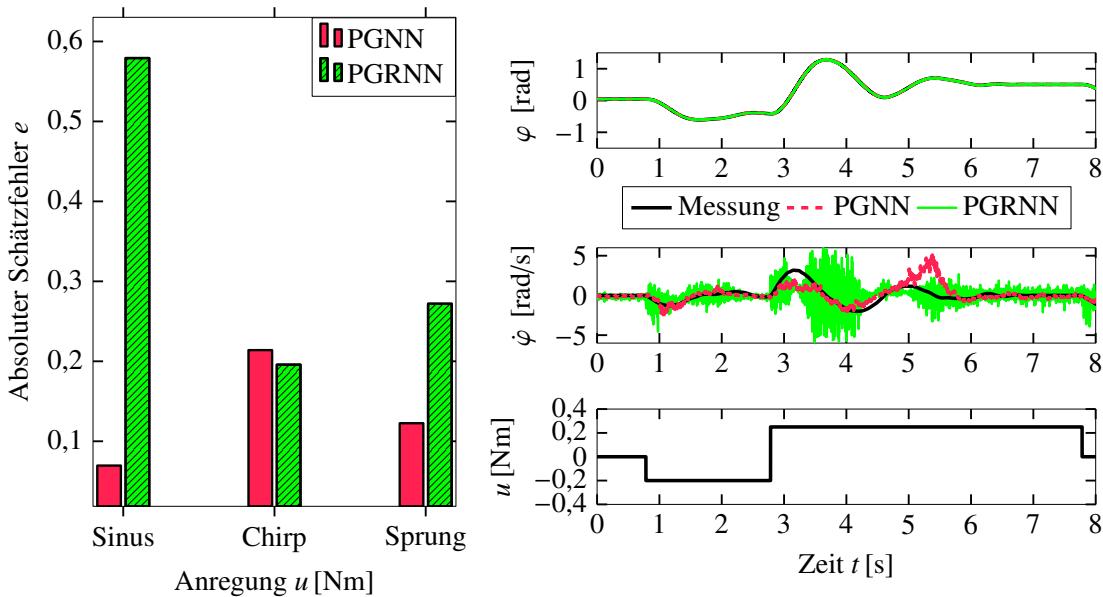
---

<sup>29</sup>Es wird die Abkürzung PG(R)NN genutzt, wenn ein PGNN und/oder ein PGRNN gemeint sind.

der Golfroboter mit einer sinusförmigen Schwingung mit gleich bleibender (Sinus) bzw. größer werden Frequenz (Chirp) oder mit einem Sprung angeregt wird. Dieser absolute Schätzfehler wird durch

$$e = \frac{1}{n \cdot N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N |\hat{x}_{i,j} - x_{i,j}|$$

abhängig vom gewählten PG(R)NN-Modell und der jeweiligen Anregung anhand von  $N$  Datensätzen bestimmt. Die Ergebnisse des Schätzfehlers zeigen, dass weder ein PGNN- noch PGRNN-basierter Beobachter besonders gut schätzt.



*Abbildung 3-16: Auswertung der PG(R)NN-basierten Zustandsschätzung: Schätzfehleranalyse (links) von drei Testtrajektorien und exemplarischer Trajektorienverlauf bei Sprunganregung (rechts)*

Allerdings zeigt der Vergleich, dass das PGNN-basierte Filter in den meisten Fällen dem des PGRNN-basierten überlegen ist, welches einen sehr hohen Schätzfehler aufweist. Einzige Ausnahme bildet die Anregung einer Sinusschwingung mit sich verändernder Frequenz, bei welcher beide Schätzfehler in einem vergleichbaren Rahmen liegen. Zur qualitativen Einschätzung sind auf der rechten Seite der Abbildung 3-16 die geschätzten Trajektorien des Golfroboters im Vergleich zu den Messdaten (in schwarz) bei einer Sprunganregung dargestellt. Da der Winkel gemessen wird, lässt sich der qualitative Unterschied der Schätzung in der Winkelgeschwindigkeit erkennen: Während das PGNN-basierte Filter (in rot) überwiegend eine korrekte Zustandsschätzung bis auf Ausreißer um drei bzw. fünf Sekunden ermöglicht, sind die Schätzungen des PGRNN-Beobachters (in grün) sehr stark verrauscht, wenn auch oszillierend um den tatsächlichen Verlauf. Es konnte allerdings keine geeignete Einstellung für das Filter bzw. dessen Kovarianzmatrizen gefunden werden.

den werden, die dieses Rauschen verringern. Daher lässt sich festhalten, dass eine Zustandsschätzung mit PG(R)NN-basierten Modellen möglich ist, diese jedoch in Qualität und Güte hinter einem physikalischen basierten Beobachter zurücksteht.

## Reglerentwurf

Obwohl die erarbeiteten Modelle vor allem für die Zustandsschätzung genutzt werden sollen, formuliert Anforderung F.3 den Anspruch, dass diese grundsätzlich in einer nachvollziehbaren, physikalisch transparenten Gestalt erscheinen und insbesondere für weitere Schritte zugänglich sein sollten. Daher wird beispielhaft überprüft, inwiefern ein solches Modell für den Reglerentwurf nutzbar ist. Zugänglichkeit und Nutzbarkeit bedeuten in dieser Situation, dass ein Regelverfahren gewählt werden kann, welches einerseits mit dem hybriden Modell kompatibel ist und andererseits eine erfolgreiche Durchführung der Regelungsaufgabe erlaubt (vgl. Abschnitt 1.2). Aufgrund ihrer Teil-Black-Box-Struktur, welche lediglich die Kenntnis des Ein-/Ausgangsverhaltens erlaubt, wird stellvertretend die modellprädiktive Regelung (MPC) als Regelverfahren analysiert. Dieses Verfahren berechnet mittels eines gleitenden Zeithorizonts und basierend auf der Prädiktion eines Systemmodells die optimale Stellgröße, die den Regelfehler und die Stellenergie auf der Grundlage gewählter Designgrößen minimiert [Ada18]. Da die MPC nur den nächsten prädizierten Zustand  $x_{k+1}$  erhalten muss, kann ein PG(R)NN für diese Regelstrategie genutzt werden, d. h. es ist zugänglich für einen solchen Reglerentwurf. Die Herausforderung für eine MPC besteht jedoch immer darin, trotz der Optimierung in jedem Zeitschritt echtzeitfähig zu sein. Während für lineare Systeme eine Konvergenz durch die Konvexität des Optimierungsproblems garantiert werden kann, ist für nichtlineare Systeme nicht sicher, ob das Problem konvergiert, da mehrere lokale Minima existieren können. Zudem erfordert die Auswertung einer nichtlinearen Dynamik im Allgemeinen eine hohe Rechenzeit. Im Fall der PG(R)NN kommt neben der Auswertung des Simulationsmodells noch die Berechnung des jeweiligen NNs hinzu, welche für ein RNN besonders aufwendig ist. Die Struktur einer MPC, wenn ein PG(R)NN als Modell genutzt wird, ist schematisch in der Abbildung 3-17 dargestellt und an die Visualisierung in [Rei22, S.80] angelehnt.

In [ACS<sup>+</sup>21; NKFU22] konnte bereits erfolgreich gezeigt werden, dass der Van-der-Pol-Oszillator oder ein mehrgelenkiger Roboterarm durch eine auf PG(R)NN-Modellen basierten MPC geregelt werden können. Die dort verwendeten PG(R)NN-Modelle unterscheiden sich in ihrer Struktur aufgrund der physikalischen Teilkostenfunktion zu denen dieses Abschnitts, stellen jedoch das Potential für die MPC heraus. In [Rei22] wurden daher die in den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4 entwickelten Modelle des Golfroboters hinsichtlich der Nutzung für eine MPC analysiert. Dabei zeigten sich Herausforderungen in

der Echtzeitfähigkeit aufgrund der nichtlinearen Struktur der MPC (vgl. Abbildung 3-17), sodass eine Anwendung auf dem Prüfstand nicht möglich war. Allerdings konnte durch eine simulierte MPC die Analyse der Modellgüte bestätigt werden, da die PG(R)NN-basierte MPC eingestellten Sollverläufen überwiegend adäquat folgen konnte. Dies ist insbesondere überraschend, da die Modelle mit rein gesteuerten Signalen trainiert wurden. Ein Nachtraining dieser mit geregelten Signalen lässt eine noch bessere Qualität der MPC erwarten. Im Vergleich jedoch zu anderen Regelverfahren, wie der aktuell implementierten Gain-Scheduling-Strategie am Golfroboter, ist der Nutzen der PG(R)NN-Modelle aufgrund ihrer Einschränkung bzgl. der Echtzeitfähigkeit nur bedingt gegeben. Diese könnte u. U. durch Verwendung anderer Softwareoptionen, z. B. CasADI<sup>30</sup>, verbessert werden.

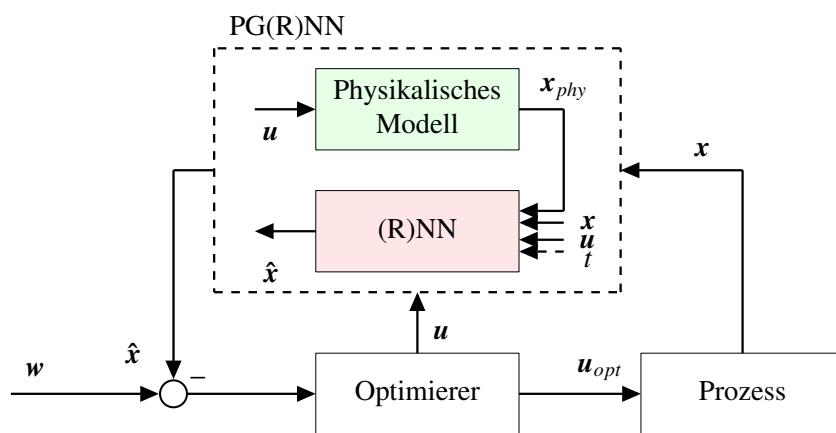


Abbildung 3-17: (Nichtlineare) MPC mit PG(R)NN als Streckenmodell, vgl. [Rei22, S.80]

## Fazit

Die Erkenntnisse der vorigen Abschnitte zeigen: Die durch PG(R)NN bzw. SINDy entstandenen Modelle erfüllen nicht alle Kriterien, die im Abschnitt 1.2 formuliert worden sind. So sind die PG(R)NN-Modelle beispielsweise nur bedingt für weitere Schritte im Regelungsentwurf geeignet, da ihr Einsatz ausschließlich für Beobachter- und Reglerverfahren möglich ist, die auf dem Ein-/Ausgangsverhalten eines Modells basieren. Dies schränkt die Nutzung der PG(R)NN-Modelle stark ein und widerspricht trotz ihrer hohen Modellgüte der zu Beginn dieser Dissertationsschrift formulierten Anforderung F.3. Darüber hinaus können auftretende Modellgenauigkeiten durch die Netzstruktur kaum physikalisch dargestellt und interpretiert werden, weil sie durch die Netzarchitektur und das Training intrinsisch kodiert werden, sodass Anforderung F.2 trotz physikalischer Plausibilität nicht erfüllt wird. Obwohl sich die PG(R)NNs durch eine sehr hohe Modellgüte

<sup>30</sup><https://web.casadi.org/>, abgerufen am 12.10.2023

auszeichnen und eine zufriedenstellende Alternative für eine vollständige Systemidentifikation darstellen, die eine hohe Schätzgüte erwarten lässt (vgl. Anforderung F.1), bergen sie demnach in der Nutzbarkeit für den Beobachter- und Reglerentwurf einige nicht zu vernachlässigende Herausforderungen. Je nach Applikation können diese u. U. einen höheren Aufwand in Form von Entwicklungs- und Rechenzeit bedeuten, der den der klassischen, rein physikalisch basierten Methoden erheblich überschreitet. Gleichwohl zeigen PG(R)NNs in vielfältigen Situationen eine besonders hohe Modellgüte und flexible Anwendbarkeit, z. B. in einer MPC (vgl. [NK FU22]) oder wenn wie bei der Ventildynamik die Modellierung durch ein PG(R)NN eine zeit- und kosteneffizientere Wahl darstellt (vgl. Abbildung 3-11). Als Lösungsmethode im Rahmen dieser Dissertationsschrift eignen sie sich jedoch aufgrund der mangelnden Umsetzung der zu Beginn formulierten Anforderungen nicht. Deutlich vorteilhafter ist ein SINDy-Modell, welches durch seine Gestalt physikalisch nachvollziehbar bleibt und dadurch einer Vielzahl an Beobachter- und Reglerverfahren zur Verfügung gestellt werden kann. Allerdings ist dieses Verfahren lediglich anwendbar, wenn der vollständige Zustand messbar ist oder einen differentiellen Zusammenhang aufweist. Dies ist eine starke Einschränkung in der Nutzung dieser Methode, da das primäre Ziel und der Ausgangspunkt dieser Arbeit die korrekte Schätzung des Systemzustands trotz gegenwärtiger Modelldiskrepanzen darstellt. Dennoch weist das Verfahren SINDy bis auf diesen Nachteil großes Potential auf, um die Ziele dieser Arbeit umzusetzen. Deshalb wird die Grundidee einer physikalisch motivierten Bibliothek, welche Interpretierbarkeit erlaubt, im Kapitel 4 fortgeführt und für die Formulierung eines Beobachterentwurfs genutzt. Alternativ zur hybriden Systemidentifikation wird zunächst der Schritt des Beobachterentwurfs adressiert und untersucht, inwiefern ein Beobachtermodell bzgl. der Modell-Realitäts-Lücke korrigiert und angepasst werden kann.

### 3.2 Modellkorrektur innerhalb eines Beobachters

Obwohl die erörterten Methoden der vorherigen Abschnitte 3.1.3 und 3.1.4 eine hohe Modellgüte bzgl. der realen Strecke aufweisen und somit eine erfolgreiche Systemidentifikation darstellen, ist der Einsatz solch hybrider Modelle in den nachfolgenden Regelungsentwurfsschritten aufgrund ihrer Teil-Black-Box-Struktur häufig schwierig und limitiert die Wahl der Schätz- und Regelverfahren. Insbesondere die Notwendigkeit, dass die zur Systemidentifikation genutzten Messdaten den vollständigen Zustand umfassen müssen, ist in der Praxis meistens nicht gegeben und erfordert gerade genau einen Beobachter, der diese Größen zuverlässig schätzt. Alternativ wird der Lösungsansatz daher in die Richtung des Beobachterentwurfs verschoben und untersucht, inwiefern ein bereits identifiziertes, rein physikalisches Modell mit minderer Qualität in einen modellbasierten Beobachter eingesetzt werden und trotz existierender Modellgenauigkeiten zufrie-

denstellende Schätzwerte liefern kann. Konkret wird somit die Kompensationsfähigkeit eines Beobachters in Abhängigkeit von Modellgüte und Art der Modellgenauigkeiten analysiert (vgl. Abschnitt 2.4). Die Erwartungshaltung ist hierbei, dass die klassischen Beobachter, welche in den Abschnitten 2.2 und 2.3 vorgestellt worden sind und deren Formulierung explizit Modellgenauigkeiten tolerieren, diese kompensieren und daher das Ziel einer hohen Schätzgüte (vgl. Anforderung **F.1**) umsetzen können. Allerdings werden die Abschnitte dieses Kapitels zeigen, dass dazu u. a. zusätzliche Unterstützung durch Vorwissen oder Daten erforderlich ist und Interpretierbarkeit nach Anforderung **F.2** nicht erzielt werden kann. In der Literatur finden sich zudem viele verschiedene Verfahren, die einerseits häufig ausschließlich auf bestimmte Anwendungsfälle zugeschnitten sind und andererseits nicht alle drei formulierten Kriterien **F.1** bis **F.3** erfüllen. So ermöglicht beispielsweise der lernende Luenberger-Beobachter nach [Sch10] die Kompensation einer isolierten, nicht bekannten Streckennichtlinearität durch die Nutzung eines neuronalen Netzes. Dieser setzt die Anforderungen **F.1** und **F.3** um, kann aber durch die Struktur eines neuronalen Netzes keine physikalisch wertvolle Darstellung der Nichtlinearität geben. Daher werden in den folgenden Abschnitten zwei der populärsten Methoden aus dem aktuellen Stand der Technik beleuchtet, inwiefern diese nicht nur die Anforderung einer hohen Schätzgüte erfüllen, sondern auch, ob die weiteren Forderungen **F.2** und **F.3** bzgl. der physikalischen, parametrischen Identifikation der Modellgenauigkeit und der Zugänglichkeit der Erkenntnisse über diese umgesetzt werden können. Vereinzelte Inhalte der nachfolgenden Abschnitte sind bereits in geringem Umfang in den studentischen Arbeiten [Ros22] und [Klu23] enthalten oder basieren teilweise auf den erarbeiteten Algorithmen.

### 3.2.1 Kompensation durch optimal initialisierte Kovarianzmatrizen

Da die Qualität eines Beobachters nicht nur von der Modellgüte, sondern auch von der Genauigkeit und Auflösung der Sensorik abhängt, ist es üblich, dies im Zustandsmodell des Beobachters zu berücksichtigen. Im Abschnitt 2.2 wurde die Unsicherheit, welche die Messwerte aufgrund der Sensorik beinhalten können, bereits in den Kalman-Filttern als stochastisches Messrauschen berücksichtigt. Neben dem Messrauschen modellieren diese Beobachter zudem Prozessrauschen, welches als Puffer für Abweichungen zur tatsächlichen Dynamik des Systems dient und aus diesem Grund als Ausdruck für die Unsicherheit eines Modells bezogen auf den realen Prozess aufgefasst werden kann. In der Regel werden beide Arten des Rauschens mittels einer Normalverteilung modelliert, sodass  $w_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q)$  und  $v_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R)$  gilt. Zu Beginn der Filterauslegung müssen die Kovarianzmatrizen  $Q, R$  initialisiert werden. Dabei kann die Varianz des Messrauschens meist sehr gut anhand von Probemessungen bestimmt werden, die des Prozessrauschens

ist jedoch deutlich schwieriger zu wählen (vgl. [van04; CHJA18]). Da die Kovarianzmatrizen einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf die Schätzgüte besitzen, sollten sie nicht beliebig initialisiert werden. Die Abbildung 3-18 illustriert daher den Einfluss von zwei verschiedenen Prozesskovarianzen auf die Qualität der Schätzung anhand eines Einfachpendels ( $\mathbf{Q}_1 = 0,001 \cdot \mathbf{I}$  und  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$  mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ ). Es ist zu erkennen, dass die Schätzung der Winkelgeschwindigkeit durch das verwendete SRUKF deutlich schlechter wird, wenn die Varianz des Prozessauschens zu groß angesetzt wird. Somit besitzt die Prozesskovarianz einen starken Einfluss auf die Schätzgüte. Diese Erkenntnis hilft bei der Herausforderung, wenn größere Modellgenauigkeiten  $\Delta f$  zur Strecke bestehen und ein modellbasierter Beobachter eine hohe Schätzgüte erzielen soll. Im Folgenden wird daher untersucht, inwiefern eine optimale Initialisierung der Kovarianzen eine Kompensation von Modellgenauigkeiten bewirken kann.

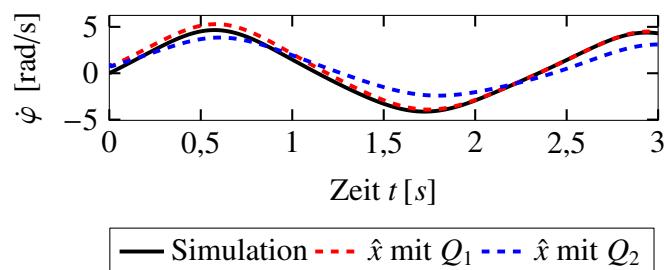


Abbildung 3-18: Einfluss der Prozesskovarianzmatrix im SRUKF auf die Schätzgüte eines Einfachpendels mit identisch gewählten  $R$ ,  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{x}_0 \neq \hat{\mathbf{x}}_0$

Neben einer zufälligen oder rasterbasierten Suche bietet die Bayessche Optimierung, deren Vorteile im Abschnitt 2.1.3 dargelegt worden sind, eine effizientere Möglichkeit, optimale Einträge der Kovarianzmatrizen insbesondere auch für höherdimensionale Systeme zu finden. In [CHJA18] und [CAJH19] wird genau diese Vorgehensweise für ein Kalman-Filter bzw. ein EKF diskutiert. Alternative Methoden zum automatischen Tuning stellen [KA16; CBW<sup>+</sup>19] dar, welche entweder regelbasiertes Erfahrungswissen mittels Fuzzy-Logik und neuronaler Netze umsetzen oder eine Partikelschwarmoptimierung durchführen. Aufgrund der Performanz der BO in der Hyperparameteroptimierung wird diese im Folgenden unter der Zielsetzung, Modellgenauigkeiten durch optimale Kovarianzen zu kompensieren, analysiert. Hierbei bilden die Einträge der Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  die Optimierungsvariablen der BO. Zur Reduktion des Rechenaufwands und für die Übersichtlichkeit wird für den weiteren Verlauf dieses Abschnitts eine Diagonalgestalt beider Matrizen angenommen, d. h. dass keine Korrelationen untereinander bestehen und  $n + m$  Optimierungsvariablen  $\{q_{ii}, r_{jj}\}$  bestimmt werden müssen.

Da eine hohe Schätzgüte das Ziel eines jeden Beobachters ist, wird die Minimierung des Schätzfehlers  $e_x = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  als Kostenfunktion der BO angestrebt. Allerdings ist der Schätzfehler basierend auf realen Messungen normalerweise nicht berechenbar, weil der

Zustand nicht vollständig messbar ist. Daher wird der Ausgangsfehler  $e_y = \hat{y} - y$  in der Kostenfunktion genutzt, falls nur Messungen und keine Simulationen vorliegen. Häufig findet zudem eine Gewichtung des Schätz- bzw. Ausgangsfehlers mit einer Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}_x$  bzw.  $\mathbf{W}_y$  für  $N$  Mess- oder Simulationswerte statt, sodass eine der beiden folgenden Funktionen durch die BO minimiert werden soll (vgl. [CHJA18; CAJH19; Ros22]):

$$J(\hat{x})_{WEES} = \log \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{e}_{x,k}^T \mathbf{W}_x \mathbf{e}_{x,k}) \right), \quad J(\hat{x})_{WIS} = \log \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{e}_{y,k}^T \mathbf{W}_y \mathbf{e}_{y,k}) \right). \quad (3.17)$$

Dabei beschreiben die Abkürzungen jeweils die Art der Kostenfunktion: *Weighted Estimation Error Squared (WEES)* bzw. *Weighted Innovation Error Squared (WIS)*. Für die folgenden Untersuchungen wird die Gewichtungsmatrix als Einheitsmatrix angenommen. Manchmal wird zudem bei dynamischen Schätzern ein weiteres statistisches Merkmal, das der Konsistenz eines Filters, genutzt, um die Qualität des Beobachters zu bewerten. Details dazu finden sich im Anhang A6.1. Die Idee, die BO zur Bestimmung optimal initialisierter Kovarianzmatrizen zu nutzen, basiert auf der Voraussetzung, dass bereits einige initiale Experimente mit verschiedenen Parametrierungen  $\{q_{ii}, r_{jj}\}$  durchgeführt worden sind, auf deren Grundlage die Schätzgüte des Filters evaluiert werden kann. Zudem besteht eine weitere Voraussetzung darin, während der Optimierung Experimente am System durchführen zu können, um weitere Daten zu sammeln. Dies kann aber auch in Simulationen erfolgen, um Zeit und Kosten zu sparen. Der grundlegende Ablauf, wie die Kovarianzen eines Filters mittels der BO optimal bestimmt werden können, ist dazu analog zum Algorithmus 1 in der Abbildung 3-19 dargestellt.

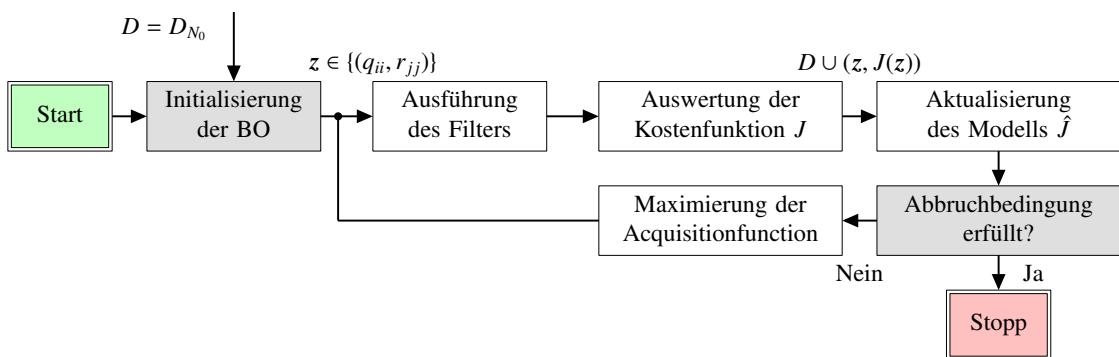


Abbildung 3-19: Vorgehen zur Bestimmung optimal initialisierter Kovarianzmatrizen durch Bayessche Optimierung

Nach der Initialisierung der BO durch Mess- oder Simulationsdaten  $D = D_{N_0}$  werden basierend auf dem Ersatzmodell  $\hat{J}$  Parameterwerte  $z \in \{(q_{ii}, r_{jj})\}$  für die Kovarianzen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  gewählt, deren Wirkung anschließend hinsichtlich der gewählten Kostenfunktion  $J$  quantifiziert wird. Nach der Anpassung des Modells  $\hat{J}$  auf Grundlage der neuen Daten

$D \cup (z, J(z))$  wird durch die Maximierung der Acquisitionfunction eine neue Parameterisierung bestimmt, mit welcher das Filter ausgeführt und der Kreislauf fortgeführt wird, sofern die maximale Anzahl an Iterationen oder ein anderes Abbruchkriterium noch nicht erreicht worden ist.

### Analyse des Kalman-Filters

Nach der Beschreibung des Vorgehens werden nun die Kovarianzmatrizen eines Kalman-Filters optimal initialisiert, um zu analysieren, inwiefern bestehende Modellabweichungen kompensiert werden können. Dazu dient der Golfroboter (3.4) als Beispiel, dessen Modellgenauigkeit durch die Linearisierung der Systemdynamik für den Gain-Scheduling-Ansatz resultiert (vgl. Anhang A6.1,[Ada18]). Da für den Golfroboter ein detailliertes, nichtlineares Modell vorliegt, kann dieses für die BO genutzt werden, sodass die Bestimmung optimal initialisierter Kovarianzmatrizen simulationsbasiert und im offenen Regelkreis erfolgt. Als Kostenfunktion wird  $J_{WIS}$  nach Gleichung (3.17) genutzt. Für die 20 Iterationen der BO wird als Acquisitionfunction Expected Improvement sowie ein identischer Suchraum  $[10^{-5}, 1]^3$  für alle drei Optimierungsvariablen gewählt. Der Verlauf der Optimierung ist daraufhin in der Abbildung 3-20 exemplarisch dargestellt. Diese zeigt im Vergleich zum nichtlinearen Modell, abgebildet durch die schwarzen Trajektorien, die zu dem Zeitpunkt der Iteration resultierende Trajektorie des Kalman-Filters, welche von den Kovarianzmatrizen abhängig ist.

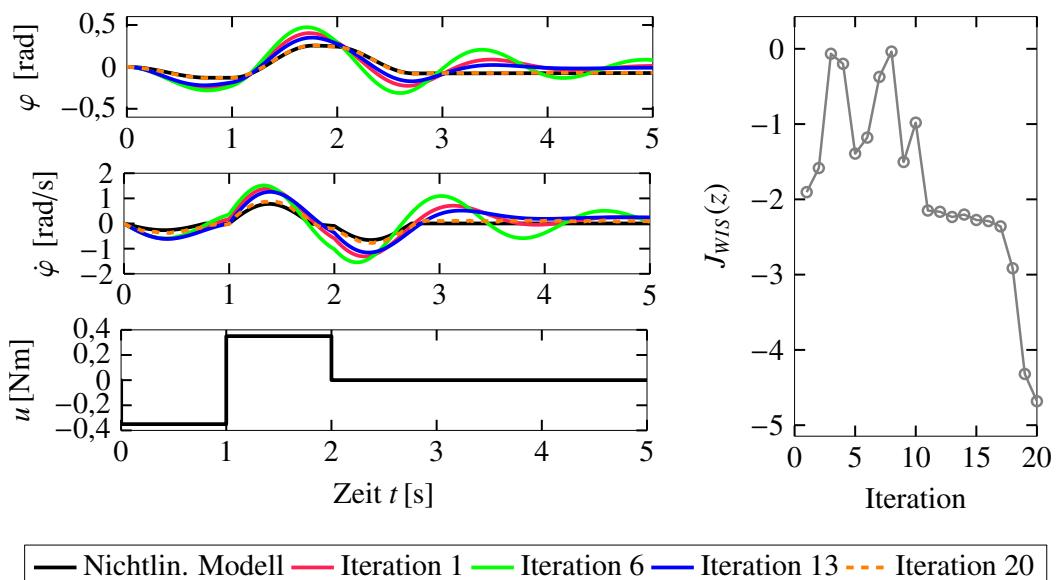


Abbildung 3-20: Ergebnis verschiedener Iterationen während der BO für die Kostenfunktion WIS (3.17): Iteration 20 stellt die beste, durch die BO gefundene Initialisierung dar.

So zeigt sich, dass eine Einstellung der Kovarianzmatrizen nah am Optimum bereits nach Iteration 13 erreicht wird, die optimale Einstellung allerdings erst in Iteration 20 erzielt wird. Dies ist an den orange gestrichelten Trajektorien und dem Wert der Kostenfunktion erkennbar, welcher auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt ist. In dieser Visualisierung ist zudem zu sehen, dass der Modellfehler sukzessiv mit den Iterationen vermindert und die Qualität der Zustandsschätzung erhöht werden. Die optimale Parametrierung aus Iteration 20 ist daraufhin in der Tabelle 3-2 festgehalten. Diese fasst die Entwicklung der Optimierungsergebnisse durch ausgewählte Iterationen im Vergleich der Kostenfunktionen WEES und WIS zusammen und gibt Aufschluss über die Parameterwerte für die Kovarianzmatrizen. Besonders auffällig ist, dass die optimalen Werte für  $Q$  und  $R$  sich trotz unterschiedlicher Kostenfunktionen wenig unterscheiden, sondern in der gleichen Größenordnung liegen. Folglich sind beide geeignet, kleinere Modellabweichungen sowie Messrauschen, welches während der Simulationen wirkte, zu erkennen und zu kompensieren. Weitere Ergebnisse bzgl. anderer, Konsistenz basierter Kostenfunktionen werden im Anhang A6.1 behandelt.

Iteration	WEES				WIS			
	$J_{WEES}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$r_{11}$	$J_{WIS}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$r_{11}$
1	-0,1	0,00040	0,00002	0,00750	-1,9	0,17010	0,68740	0,03890
6	-0,9	0,00580	0,00001	0,00001	-1,2	0,96330	0,00001	0,74320
13	-1,7	0,00002	0,00009	0,00001	-2,2	0,07160	0,97000	0,00830
20	-4,7	0,00006	0,96310	0,00001	-4,7	0,00002	0,92970	0,00001

Tabelle 3-2: Kovarianzmatrizen  $Q$  und  $R$  für den Golfroboter basierend auf simulativen Ergebnissen und unterschieden nach den verwendeten Kostenfunktion WEES und WIS (vgl. Abbildung 3-20)

Die bisherige Analyse zeigt, dass das Kalman-Filter durch eine optimale Initialisierung fähig ist, geringe Modelldiskrepanzen, die z. B. durch die Linearisierung und Nutzung linearer Modelle zu definierten Betriebspunkten resultieren, zu kompensieren und seine Schätzgüte zu verbessern. Dies stellt eine Alternative zum EKF dar, das durch die Aktualisierung zu jedem Zeitschritt die Modelldiskrepanz erfasst, allerdings dazu in jedem Schritt eine Bestimmung des Gradienten durchführen muss, die u. U. aufwendig oder nicht durchführbar ist (vgl. Abschnitt 2.2.1). Bestehen jedoch größere Abweichungen, die beispielsweise dynamisch stärkere Auswirkungen aufweisen, ist der Ansatz einer Kompensation durch Kovarianzen u. U. nicht mehr ausreichend, wie die nachfolgenden Abschnitte zeigen werden.

## Analyse des SRUKFs

Um zu untersuchen, inwiefern größere Abweichungen durch die Prozesskovarianzmatrix kompensiert werden können, wird das SRUKF mit Modellen des Golfroboters genutzt, die Teile des Reib- oder Dämpfungsmoments nicht enthalten (vgl. Anhang A6.1, Gleichungen (A6-1) und (A6-2)). Wird beispielsweise der Stick-Slip-Effekt  $M_H(x, u)$  nicht modelliert, bestehen gravierende Modellgenauigkeiten. Neben der Auswirkung der Modellierungstiefe wird zudem untersucht, wie sich die BO optimal initialisierten Beobachter im geschlossenen Regelkreis beweisen. Dabei wird lediglich das Objekt des Beobachters ausgetauscht, während der Regler und die Vorsteuerung weiterhin durch die Gain-Scheduling-Strategie (vgl. Anhang A6.1) umgesetzt werden. In verschiedenen Experimenten konnte beobachtet werden, dass die optimalen Parametrierungen der Kovarianzen trotz unterschiedlicher Modellierungstiefen kaum Unterschiede aufwiesen und trotz größerer Modellabweichungen eine zuverlässige Schätzung erlaubten. Schließlich fasst die Abbildung 3-21 die bisherigen Analysen bzgl. der Beobachtertypen und der unterschiedlichen Modellabweichungen für die Kostenfunktion WEES zusammen. Hierbei werden sowohl Parametrierungen des SRUKFs, dargestellt durch Kreise, als auch des Kalman-Filters, abgebildet durch Dreiecke, betrachtet. Für beide Beobachter werden die einzelnen, durch die BO getesteten Parametrierungen abhängig von dem Wert der Kostenfunktion, welcher durch die Farbe der Punkte gekennzeichnet ist, dargestellt. Somit gilt, je mehr sich ein Datenpunkt im blauen Farbspektrum befindet, desto kleiner ist der Wert der Kostenfunktion und desto besser ist die Parametrierung.

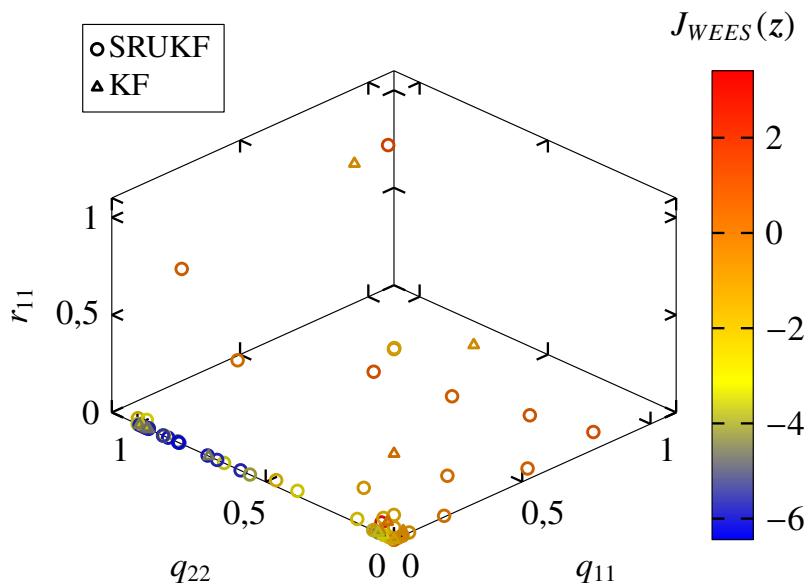


Abbildung 3-21: Durch die BO getestete Parametrierungen für das SRUKF im geschlossenen Regelkreis bzw. für das Kalman-Filter im offenen Regelkreis bei unterschiedlich großen Modellabweichungen

Denn über den Wert der Kostenfunktion WEES kann die Größenordnung des Schätzfehlers abgelesen werden, da der Zusammenhang  $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \log(\epsilon) \rightarrow -\infty$  für eine beliebige Zahl  $\epsilon > 0$  gilt. Daher zeigt die Abbildung 3-21 deutlich, dass sich ein Minimum unabhängig von der existierenden Modellabweichung oder dem gewählten Filtertyp entlang der  $q_{22}$ -Achse und insbesondere für  $q_{22} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  einzustellen scheint, obwohl die BO den Suchraum explorierend untersucht hat. Daraus folgt, dass die BO zuverlässig die größte Modellabweichung in der Beschreibung der Winkelgeschwindigkeit bzw. -beschleunigung erkennt, woraufhin eine größere Unsicherheit durch die Parametrierung des Prozessrauschens  $q_{22}$  modelliert wird. Zudem postuliert die BO korrekterweise wenig bis keine Modellabweichungen in  $q_{11}$  bzw.  $r_{11}$ .

Aufgrund der Analysen zeigt sich, dass die optimale Initialisierung der Kovarianzmatrizen von Kalman-Filters bedingt geeignet ist, um Modellgenauigkeiten zu kompensieren. Gemäß ihrer Struktur bilden sie eine Option, um Modellabweichungen durch das Prozessrauschen zu kompensieren, z. B. beim Golfroboter aufgrund der Linearisierung. Existieren größere Abweichungen im Modell, wie fehlende Dynamikanteile, so gelingt eine Kompensation und eine zufriedenstellende Schätzung u. U. nicht mehr, wie Experimente am Prüfstand des Golfroboters zeigten. Dies resultiert einerseits aus der zeitinvarianten Betrachtung der Kovarianzmatrizen, da eine zeitvariante Bestimmung dieser durch eine BO nicht umsetzbar ist, sowie andererseits aus der Struktur des Kalman-Filters bzw. SRUKFs selbst, bei der die Varianzen in der Regel invariant betrachtet werden<sup>31</sup>. Die Betrachtung der Korrelation zwischen den Zuständen, d. h. eine Nicht-Diagonalgestalt für  $Q$ , zeigte ähnliche Erkenntnisse (vgl. [Ros22]).

Neben der partiellen Verletzung der wichtigsten Anforderung, eine hohe Schätzgüte zu erzielen, stellt diese Methode außerdem kein probates Mittel dar, um Modellgenauigkeiten zu identifizieren und physikalisch darzustellen. Es wird zwar ein Eindruck bzgl. der Ungenauigkeit durch die Größe der Kovarianzmatrixelemente vermittelt, diese können jedoch keine zufriedenstellende Identifikation ermöglichen und somit auch nur bedingt für weitere Schritte im Regelungsentwurf nutzbar sein. Somit sind die Forderungen **F.1** und **F.2** nicht erfüllt, obwohl die Nutzbarkeit eines durch Kalman-Filter erstelltes Modells für weitere Schritte im Regelungsentwurf grundsätzlich gegeben ist (vgl. Anforderung **F.3**). Daher wird im folgenden Abschnitt der Fokus auf einen robusten Beobachter gelegt, der im Kontrast zu den Kalman-Filters aufgrund seiner natürlichen Struktur besonders für den Einsatz bei auftretenden Störungen und Modellgenauigkeiten geeignet ist und diese zeitvariant schätzt bzw. kompensiert [SEFL14]. Auch dieser wird bzgl. seiner Fähigkeit, Modellgenauigkeiten zu kompensieren und zu identifizieren, analysiert.

---

<sup>31</sup>Nach [WN01; Sch17] bietet die Robbins-Monro-Methode eine Möglichkeit, die Kovarianz zeitvariant zu gestalten, indem ein Korrektureingriff vorgenommen wird.

### 3.2.2 Kompensation durch diskontinuierliche Schaltfunktionen

Statt Modellgenauigkeiten durch Kovarianzen abzumildern, nutzt der im Abschnitt 2.3 eingeführte Sliding-Mode-Beobachter (SMO) dynamische Schaltfunktionen, die durch den Mess- bzw. Schätzfehler beeinflusst werden, um Modellabweichungen zu kompensieren. Diese Kompensation durch Schaltfunktionen erlaubt eine dynamische Schätzung der Modellgenauigkeiten oder auftretender Störungen, weshalb dieser Beobachter häufig in der Störidentifikation bzw. -schätzung eingesetzt wird. Allerdings erfordert der SMO eine geeignete Parametrierung der Schaltfunktionen für die Konvergenz in den Sliding-Modus (vgl. Abschnitt 2.3). Diese Parametrierung  $\vartheta_i$  ist wiederum abhängig vom Modellfehler  $\Delta f$ , da sich die gewünschte Fehlerdynamik (2.34) erst bei  $\vartheta_n > |\Delta f_{max}|$  für einen  $n$ -dimensionalen SMO einstellt. Dieser Einfluss setzt sich auch für die weiteren Parameter  $\vartheta_i$  mit  $i = 1, \dots, n-1$  fort und erfordert in der Regel eine sukzessive Inbetriebnahme des Beobachters [SEFL14; Klu23]. Somit ist auch hier die Parametrierung des SMOs ähnlich zu den Kalman-Filtern herausfordernd, insbesondere wenn kein Vorwissen über die Schranke  $\Delta f_{max}$  existiert. Ein Beispiel, welches die Herausforderung durch die Parametrierung illustriert, ist in der Abbildung 3-22 dargestellt. Es handelt sich um ein nichtlineares Pendel, welches auch in [DFP06; SEFL14; Klu23] diskutiert wird und dessen Parameter  $\mathbf{p} = (m, g, l, J, d)^T$  im Anhang A6.3 zu finden sind:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{J} \sin(x_1) - \frac{d}{J}x_2 + \frac{1}{J}u + \rho \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$y = x_1.$$

Neben der Anregung  $u$  kann zudem ein Störmoment  $\rho$  auf die Dynamik der Zustände  $\mathbf{x} = (\varphi, \dot{\varphi})^T$  wirken, welches durch den folgenden Beobachter

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + \vartheta_1 \cdot \text{sign}(e_y) \\ -\frac{mgl}{J} \sin(\hat{x}_1) - \frac{d}{J}\hat{x}_2 + \frac{1}{J}u + \vartheta_2 \cdot \text{sign}(e_y) \end{pmatrix}, \\ \hat{y} &= \hat{x}_1, \\ e_y &= y - \hat{y}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

zusammen mit den Zuständen erfasst werden soll. Der SMO (3.19) ist mit  $\vartheta_1 = 2$  parametriert, während  $\vartheta_2$  variiert, um die Auswirkungen und Abhängigkeiten von der maximalen Modellabweichung  $\Delta f$  zu analysieren. Wirkt ein zusätzliches Moment  $\rho(t) = 3 \cdot \cos(t)$  auf das Pendel und existieren zusätzlich Anfangsstörungen  $\hat{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{x}_0$ , ergibt sich daher das Verhalten, welches in der Abbildung 3-22 dargestellt ist. Dieses verdeutlicht, dass die Wahl des Parameters  $\vartheta_2$  in Abhängigkeit der Modellabweichung  $\Delta f$  erfolgen muss, welche in der Abbildung 3-23 zu sehen ist und aufgrund der Parametrierung leicht variiert.

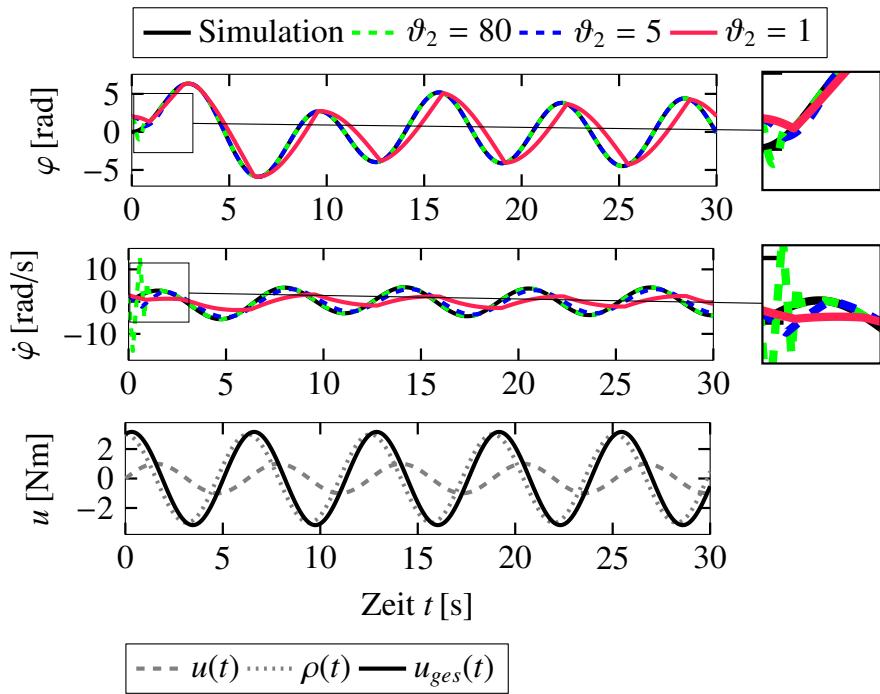


Abbildung 3-22: Einfluss des Parameters  $\vartheta_2$  auf die Schätzgüte des SMOs bei Existenz einer Störung  $\rho(t)$  anhand des nichtlinearen Pendels

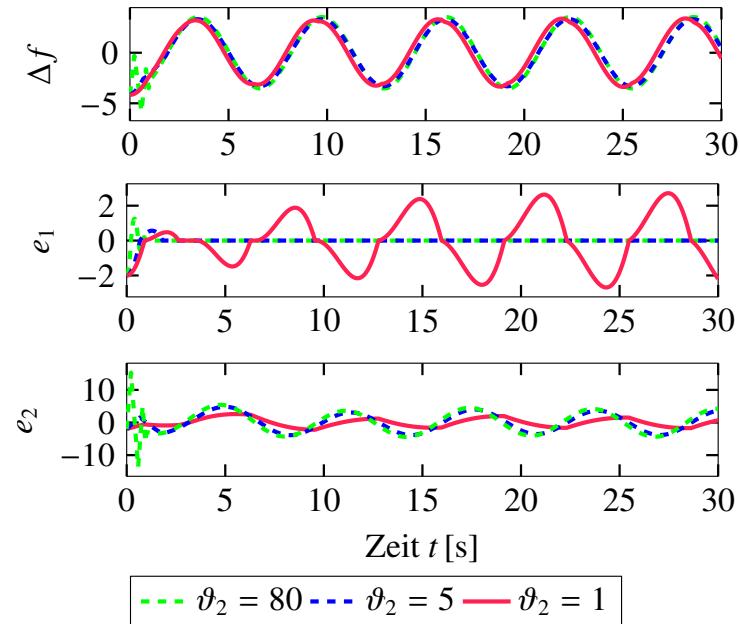


Abbildung 3-23: Einfluss des Parameters  $\vartheta_2$  auf die Schätzfehler sowie die daraus resultierende Modellgenauigkeit  $\Delta f$  des nichtlinearen Pendels

Ist  $\vartheta_2$  zu klein gewählt, z. B. mit  $\vartheta_2 = 1$ , obwohl die maximale Abweichung bei etwa vier Meter pro Quadratsekunde liegt, gelingt es dem SMO nicht, die Zustände korrekt zu schätzen. Dies äußert sich insbesondere durch die hohen Fehler  $e_1 = e_y$  und  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  in der Abbildung 3-23. Je größer der Parameter gewählt wird, desto stärker kann das für den Beobachter typische Rauschen auftreten, welches die Qualität der Zustandsschätzung nachteilig beeinflusst. Zusätzlich nimmt die Reduktion von Anfangsfehlern längere Zeit in Anspruch, wie in der Abbildung 3-22 für  $\vartheta_2 = 80$  erkennbar ist. Untersuchungen in [Klu23] ergaben, dass für  $\vartheta_2 > |\Delta f_{max}|$  eine obere Grenze existiert, die u. a. von der Rechenschrittweite des numerischen Integrationsverfahrens abhängig ist, mit der der Beobachter betrieben wird. Infolgedessen zeigt sich, dass das Problem der Initialisierung bezogen auf Parameter, die die Kompensation von Modellgenauigkeiten bzw. die Korrektur des Beobachtermodells aufgrund dieser beeinflussen, lediglich verschoben wird und wie bei den Kovarianzmatrizen der Kalman-Filter ebenfalls für den SMO resultiert. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Beobachtern, der den SMO vorteilhafter aus Sicht der Ziele dieser Arbeit erscheinen lässt, liegt in der Fähigkeit des SMOs, eine deutlich robustere Schätzung durch die dynamische Kompensation der Modellgenauigkeiten zu ermöglichen. Denn der SMO gibt sogar Aufschluss über den zeitlichen Verlauf dieser, was einen tieferen Einblick in das System als die Kovarianzen der Kalman-Filter gewährt. In dem die geschätzte Modellgenauigkeit  $\hat{\Delta f} = \{-\vartheta_2 \cdot \text{sign}(e_y)\}_{eq}$  durch ein Tiefpassfilter mit  $T_s = 0,01$  s geglättet wird [DFP06; SEFL14], ergibt sich sogar eine temporäre Identifikation, wie sie in der Abbildung 3-24 für das obige Beispiel dargestellt ist. Die Glättung des Signals bewirkt aber keine Nutzbarkeit aufgrund der nicht-parametrischen Zeitreihenform für eine weitere Verbesserung des Modells hinsichtlich der Modellgenauigkeiten. Deshalb erfüllt der SMO die Anforderung einer hohen Schätzgüte (vgl. Anforderung **F.1**), kann die weiteren Ziele **F.2** und **F.3** allerdings nur teilweise und nicht zufriedenstellend umsetzen. Basierend auf den Erkenntnissen dieses Kapitels wird der folgende Abschnitt deshalb eine Bewertung der diskutierten Methoden hinsichtlich der Problemstellung dieser Arbeit vornehmen, woraufhin der Handlungsbedarf abgeleitet wird.

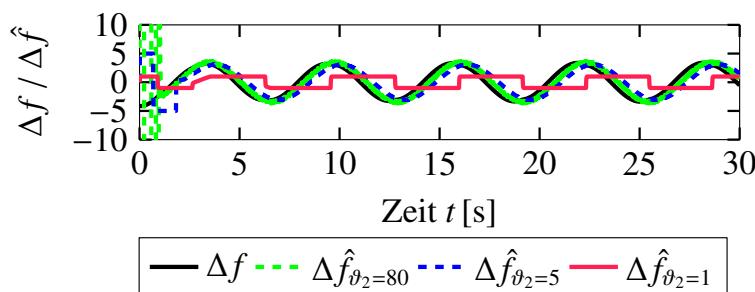


Abbildung 3-24: Vergleich der Modellgenauigkeit  $\Delta f$  mit den Approximationen  $\hat{\Delta f}$

### 3.3 Bewertung und Handlungsbedarf

Im Verlauf dieses Kapitels wurden Methoden erörtert, welche basierend auf einer hybriden Systemidentifikation Modelle formulieren oder durch Nutzung von Mess- bzw. Simulationsdaten eine Modellkorrektur durchführen, um die Modell-Realitäts-Lücke zu reduzieren und korrekte Schätzungen des Zustandes zu ermöglichen. Dabei fokussieren sich diese Techniken jeweils auf einen konkreten Schritt des Regelungsentwurfs (vgl. Abschnitt 1.1), um Verbesserungen für die nachfolgenden Aktionen im Regelungsentwurf zu erzielen. Zentrales Element dieser Methoden ist das Streckenmodell, welches entweder vollständig überarbeitet oder durch Korrekturterme bei der Schätzung angepasst wird. Viele dieser Techniken bieten den Vorteil, dass sie bei kleineren Abweichungen zwischen Modell und Strecke eine Verbesserung der Modell- bzw. Schätzgüte ermöglichen. Allerdings ist ihr Einsatz häufig aufwendig und nicht für jede Situation geeignet, z. B. aufgrund der Datenverfügbarkeit und erforderlichen Kenntnis des vollständigen Zustands. Ferner weist die isolierte Betrachtung und Anpassung einzelner Entwurfsschritte häufig Nachteile für die darauffolgenden Entwurfsschritte auf. So ist die Verwendung von PG(R)NN-Modellen nur bedingt empfehlenswert für den Regler- bzw. Beobachterentwurf, denn die Black-Box-Struktur des neuronalen Netzes lässt keinen Rückschluss auf die Dynamik der Modellgenauigkeit zu. Ebenso können die optimal initialisierten Kovarianzmatrizen u. U. Diskrepanzen zwischen Modell und Strecke kompensieren, aber keinen Einblick in die tatsächlich wirkenden Effekte geben. Daher stellt die Abbildung 3-25 eine qualitative Einordnung der Methoden dieses Kapitels anhand eines Netzdiagramms und bezogen auf die formulierten Anforderungen **F.1-F.3** dar. Als weiteres, für die Zustandsschätzung sehr wesentliches Bewertungskriterium wird zudem die Flexibilität berücksichtigt, einen nicht vollständig messbaren Zustand verarbeiten zu können.

Die Abbildung zeigt somit sehr deutlich die bereits erwähnten Schwächen der untersuchten Verfahren bzw. ihrer Modelle auf: Die PG(R)NN-Modelle können durch ihre Approximationsfähigkeit lediglich beim Kriterium der hohen Modellgüte punkten, wohingegen die Beobachter-basierten Verfahren vor allem ihre Stärken als Beobachter ausspielen, jedoch weniger gut eine physikalische Interpretierbarkeit der Modellgenauigkeiten oder eine hohe Nutzbarkeit der resultierenden Modelle in Bezug auf die charakterisierten Modellgenauigkeiten gewährleisten können. Besonders hervorzuheben ist allerdings das Verfahren SINDy, welches allen drei formulierten Zielen dieser Arbeit in hohem Maße gerecht wird. Dennoch kann dieses Verfahren nicht die grundlegende Anforderung einer Zustandsschätzung erfüllen, auch mit einem nicht vollständig messbaren Zustand umgehen zu können und zuverlässige Schätzungen zu erlauben. Ferner ist es (wie fast alle diskutierten Methoden in diesem Kapitel) nicht in der Lage, eine Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten zu ermöglichen.

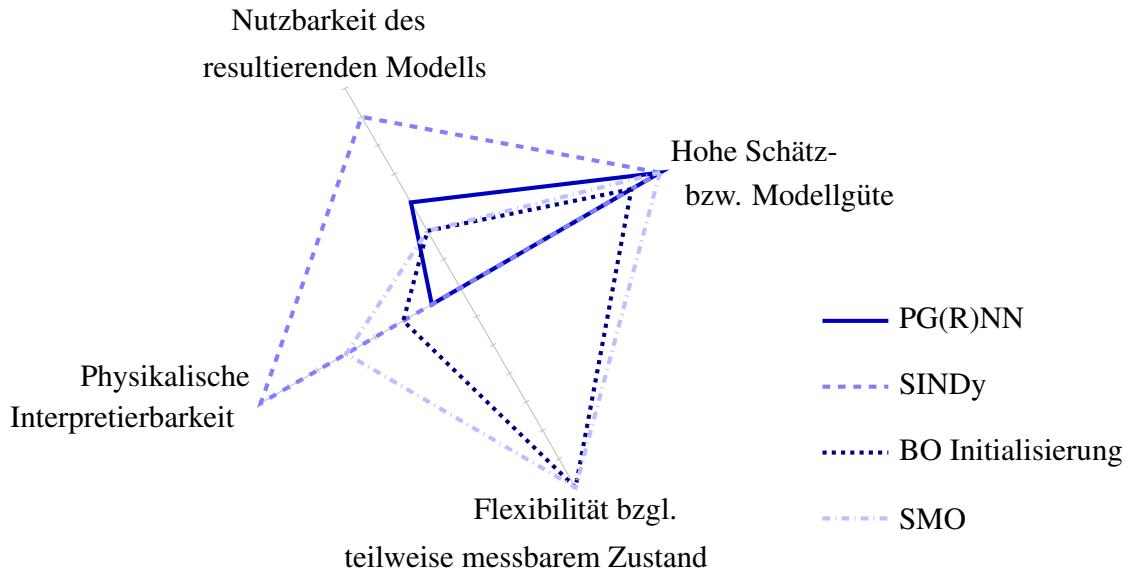


Abbildung 3-25: Qualitative Einordnung der Methoden bzw. Modelle des aktuellen Kapitels nach den Zielen und Anforderungen dieser Arbeit

Als Konsequenz aus den bisherigen Untersuchungen lassen sich folglich zwei Schlüsse ziehen: Erstens ist ein isolierter Fokus, d. h. entweder nur auf eine hybride Modellüberarbeitung oder auf eine Beobachter-basierte Kompensation von Modellgenauigkeiten, nicht zielführend. Daher erscheint eine gleichzeitige Analyse von Zuständen und Modellgenauigkeiten für eine zuverlässige Zustandsschätzung sinnvoller. Als zweite Konsequenz sticht die Grundidee des SINDy-Verfahrens heraus, welche die dieser Dissertationsschrift zugrunde liegenden Ziele bis auf die Flexibilität bzgl. eines teilweise messbaren Zustands mehrheitlich erfüllen kann und somit im Kapitel 4 bzgl. ihres Potentials für den Beobachterentwurf näher beleuchtet und aufgegriffen wird.

Aufgrund der wichtigen Erkenntnis aus der ersten Konsequenz komplettiert diese nun die drei Anforderungen aus Abschnitt 1.2:

**F.4** Eine isolierte Betrachtung der Systemidentifikation oder des Beobachterentwurfs ist **nicht** zielführend, um korrekte Zustandsschätzungen zu ermöglichen und gleichzeitig Modellgenauigkeiten zu erfassen. Die Wechselwirkungen dieser beiden Schritte sollten analysiert werden.

Diese Folgerung wird nun zusammen mit den anderen Anforderungen im Kapitel 4 basierend auf der Grundidee von SINDy, eine Dynamik durch Linearkombinationen geeigneter Bibliotheksfunktionen zu approximieren, und basierend auf der gleichzeitigen Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten umgesetzt.

## 4 Online-Schätzung von Modellgenauigkeiten

Die Untersuchungen des vorigen Kapitels zeigen, dass ein isoliertes Vorgehen, bezogen entweder nur auf die Systemidentifikation oder den Beobachterentwurf, aufgrund der mangelnden Interpretierbarkeit oder Nutzbarkeit für weitere Entwurfsschritte nicht zielführend ist. Vielmehr ist eine effiziente, gemeinsame Betrachtung der Entwurfsschritte notwendig, um gleichermaßen eine hohe Schätzgüte und Modellgüte zu erzielen sowie eine physikalisch-technische Darstellung zu konservieren. Daher wird dieses Kapitel die gleichzeitige Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten adressieren, welche in Echtzeit erfolgt, daher zur Online-Modelladaption im Kapitel 5 genutzt werden kann und den Neuheitswert dieser Dissertationsschrift darstellt. Zunächst wird Abschnitt 4.1 das Vorgehen durch die Analogie zur gleichzeitigen Schätzung von Zuständen und Parametern motivieren, woraufhin einige Voraussetzungen und Annahmen für die Entwicklung der Schätzverfahren im Abschnitt 4.2 thematisiert werden. Anschließend entwerfen die Abschnitte 4.3 bis 4.5 neuartige Methoden, welche basierend auf dem Ansatz einer Linearkombination aus geeigneten, physikalisch motivierten Funktionen die Modellgenauigkeit approximieren (vgl. Abbildung 1-7) und innerhalb der Struktur eines Filters eingebettet werden können. Schließlich wird Abschnitt 4.6 eine Bewertung der Entwurfsvorfahren vornehmen. Einige Abschnitte dieses Kapitels sind darüber hinaus bereits Teil der Vorveröffentlichungen [GT23a; GT23b; GKT23].

### 4.1 Konzept Joint Estimation

In der Einführung dieser Arbeit ist die Parameteridentifikation in der Abbildung 1-4(a) als notwendiger Schritt im Rahmen der Systemidentifikation gekennzeichnet worden. Üblicherweise werden die Parameter eines Modells durch eine Optimierung mithilfe aufgenommener Messdaten identifiziert. Allerdings kann diese Identifikation auch ohne einen zusätzlichen Schritt gemeinsam mit der Zustandsschätzung erfolgen. Dazu existieren zwei strukturelle Ansätze. Die *Dual Estimation* schaltet ein zweites Filter für die Parameter  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  parallel zum Filter der Zustandsschätzung [WvN99; Nel00; WN01]. Eine effizientere Lösung bildet das Konzept *Joint Estimation*<sup>32</sup>. Grundidee dieser Strategie ist es, den Zustandsvektor des Filters so zu augmentieren, dass er alle interessierenden, nicht messbaren Größen enthält [Nel00; vW01; van04; Sch17]. Folglich ist statt zwei Filtern, die untereinander Informationen austauschen müssen, nur ein einziges Filter erforderlich. Eine Visualisierung dieser beiden Ansätze ist angelehnt an [van04] in der Abbildung 4-1 zu sehen und stellt die zuvor beschriebenen Unterschiede dieser Konzepte im Blockschalt-

<sup>32</sup>Dieser Begriff lässt sich ins Deutsche mit *gemeinsamer* oder *gleichzeitiger Schätzung* übersetzen. Im Folgenden wird jedoch auch weiterhin der englische Fachbegriff genutzt.

bild am Beispiel eines UKFs dar. Die Visualisierung hebt besonders den erhöhten Aufwand des Dual-Filters hervor, der im Vergleich zum Joint-Filter wegen des zweiten Filters quasi einen doppelten Rechenaufwand erfordert.

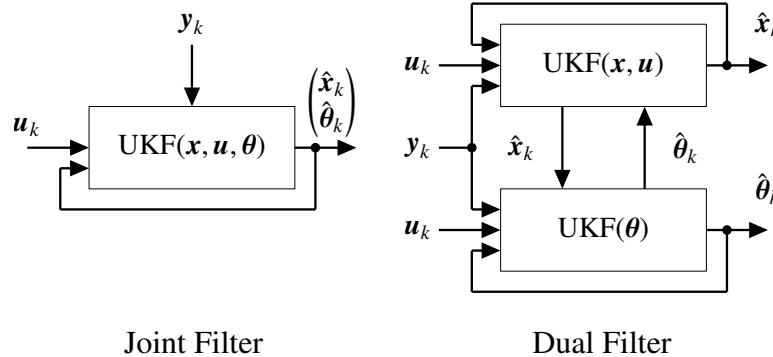


Abbildung 4-1: Funktionsweise eines Joint-UKFs vs. eines Dual-UKFs, vgl. [van04]

Aufgrund des vorteilhaften, geringeren Rechenaufwands wird nun das Konzept Joint Estimation näher beleuchtet. Der erweiterte Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+n_\theta}$  des Joint-Filters definiert sich durch die Systemzustände  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  und die Parameter des Systems  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ . Seine Dynamik wird über das folgende Modell abgebildet:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

In der ersten Zeile der Zustandsgleichung (4.1) ist somit weiterhin die Dynamik  $f$  des betrachteten Systems vertreten, während für die Parameter  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  ein zeitinvariantes Verhalten angenommen wird. Die Ausgangsgleichung  $\mathbf{h}$  wird weiterhin am nicht erweiterten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  ausgewertet, da die physikalischen Parameter in der Regel nicht zu messen sind. Zur Illustration der gleichzeitigen Zustands- und Parameterschätzung wird der Duffing-Oszillatator betrachtet, dessen Zustände und Parameter geschätzt werden sollen. Der Duffing-Oszillatator ist ein nichtlineares, schwingfähiges System, welches gedämpft ist und eine kubische Rückstellkraft aufweist. Es wird üblicherweise als Standardbeispiel für Untersuchungen bzgl. dynamischer Systeme genutzt, z. B. in [BK19] ohne Dämpfung. Somit kann der Duffing-Oszillatator mit dem Zustand  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  und dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , welche z. B. Winkel und Winkelgeschwindigkeit sowie eine Kraft symbolisieren, folgendermaßen definiert werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\theta_3 x_2 - \theta_1 x_1 - \theta_2 x_1^3 + u \end{pmatrix},$$

$$y = x_1.$$

Die physikalischen Parameter werden zu  $\theta = (-1, 3, 0.1)^T$  gewählt. In der Abbildung 4-2 wird nun der Parameter  $\theta_2 = 3$  zusätzlich zu den Zuständen geschätzt, wenn das System durch einen sinusförmigen Eingang angeregt wird. Dabei werden in schwarz die simulierten Trajektorien des Oszillators bzw. der tatsächlich wirkende Parameter  $\theta_2$  dargestellt, wohingegen die Schätzungen des SRUKFs in rot zu sehen sind. Die linke Visualisierung zeigt anhand des Phasenraums die Zustände des Schwingers, welche vom SRUKF sehr gut geschätzt werden, da der Anfangswertfehler schnell reduziert wird und kaum Abweichungen zwischen den beiden Trajektorien zu erkennen sind. Dazu trägt auch die Schätzung des Parameters  $\hat{\theta}_2$  bei, welche zunächst bei  $\hat{\theta}_{2,0} = -1$  startet und schnell gegen den tatsächlichen Wert  $\theta_2 = 3$  strebt. Je nach Größe der gewählten Parameterkovarianz oszilliert dieser Schätzwert  $\hat{\theta}_2$  weniger oder stärker ausgeprägt um den Wert  $\theta_2$ .

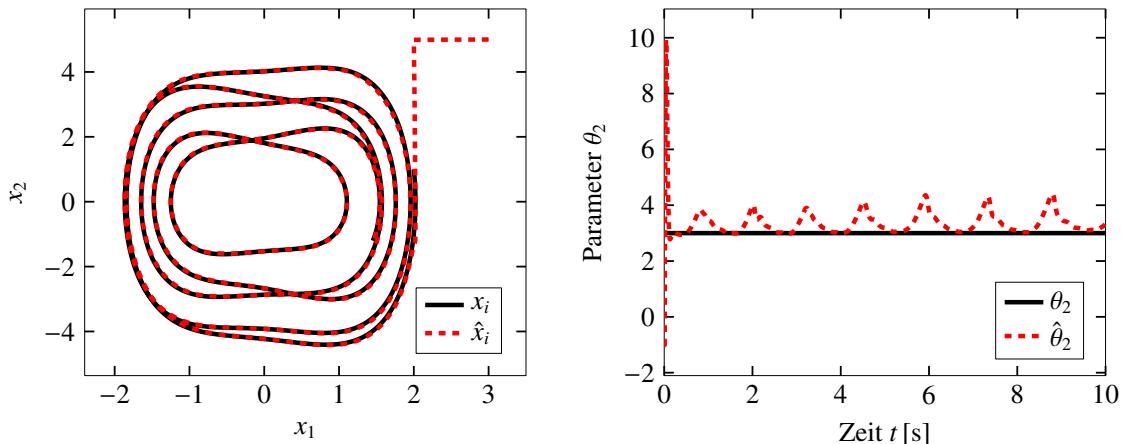


Abbildung 4-2: Zustands- und Parameterschätzung durch ein SRUKF für den Duffing-Oszillatoren bei Anregung aus den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0 = (2, 1)^T$  und  $\dot{\mathbf{x}}_0 = (3, 5)^T$  mit  $u(t) = \sin(t)$

Dieses Beispiel zeigt folglich, dass die Schätzung physikalischer Parameter, welche gewöhnlich zeitinvariant angenommen werden, parallel zur Zustandsschätzung eine effiziente Möglichkeit darstellt, diese Modellgenauigkeit in Form von Parametern zu identifizieren. Nach Abschnitt 2.4 stellen jedoch dynamische Modellgenauigkeiten  $g(\mathbf{x}, u)$  wesentlich größere Herausforderungen als zeitinvariante physikalische Parameter dar. Um zu evaluieren, ob das Konzept auch für die Identifikation solcher dynamischer Ungenauigkeiten eine hilfreiche Maßnahme sein kann, wird das Beispiel des Duffing-Oszillators erneut herangezogen. Statt der physikalischen Parameter wird nun angenommen, dass der kubische Term  $g(\mathbf{x}, u) = -\theta_2 x_1^3$  unbekannt ist, d. h. nicht modelliert wurde und daher als dynamische Modellgenauigkeit resultiert. Diese kann im Modell als Funktion  $g$  berücksichtigt werden, wie es in der Gleichung (4.3) zu sehen ist. Eine der einfachsten und populärsten Ansätze zur Approximation dieser Modellgenauigkeit stammt aus der

linearen Regression [Mur12; Bis06]: Die Ungenauigkeit wird durch eine Linearkombination geeigneter Basisfunktionen  $\psi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$  angenähert, sodass

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i \cdot \psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\theta}^T \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.2)$$

gilt. Diese Basisfunktionen können in einer Bibliothek  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  gesammelt werden, welche durch den Parametervektor  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  ausgewertet wird. Dabei wird wie beim augmentierten Modell der Parameterschätzung (4.1) eine invariante Dynamik für die Parameter angenommen. Diese Überlegungen münden für den Duffing-Oszillatator somit in das folgende Modell:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\theta_3 x_2 - \theta_1 x_1 + u + g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \approx \begin{pmatrix} x_2 \\ -\theta_3 x_2 - \theta_1 x_1 + u + \boldsymbol{\theta}^T \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$y = x_1.$$

Für die Wahl der Bibliotheksterme sind aus der linearen Regression viele mögliche Basisysteme bekannt, z. B. polynomiale oder radiale Basisfunktionen (RBFs) (vgl. [Mur12]). So nutzen [Kul21] beispielsweise RBFs mit kompaktem Träger, um Modellgenauigkeiten mittels eines erweiterten Modells durch ein adaptiertes EKF zu schätzen. Diese bieten den Vorteil, dass sie jeden beliebigen Funktionszusammenhang annähern können, und daher eine zuverlässige Wahl für die Kompensation der Modellgenauigkeit bilden. Diese soll aber nicht nur approximiert werden, sondern es soll auch eine physikalisch interpretierbare Darstellung dieser gefunden werden (vgl. Anforderung F.2). Dies ist für RBFs jedoch schwierig, da ein konkretes Wirkprinzip eines physikalischen Gesetzes nicht zu erkennen ist. Um die Auswirkung dieser beiden Arten von Basisfunktionen zu illustrieren, werden für den Duffing-Oszillatator (4.3) zwei verschiedene Bibliotheken untersucht, die den kubischen Term identifizieren sollen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= (e^{-(0.01 \cdot x_1)^2}, e^{-(10 \cdot x_1)^2}, e^{-x_1^2}, e^{-(100 \cdot x_1)^2}, e^{-(0.1 \cdot x_2)^2}, e^{-x_2^2}, e^{-(10 \cdot u)^2})^T, \\ \Psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= (1, x_1, x_2, x_2^2, x_1^2, x_1^3, \cos(x_2), u)^T. \end{aligned}$$

In den Abbildungen 4-3 und 4-4 sind die zeitlichen Verläufe der Zustände und Parameter der Linearkombination abgebildet. Grundsätzlich zeigt die Abbildung 4-3 den Vorteil einer hohen Schätzgüte durch die Approximation der Modellgenauigkeit  $g$  im Kontrast zu einem SRUKF auf, das mit einem Modell ohne den Term  $g$  bzw.  $\hat{g}$  nur eine defizitäre Zustandsschätzung erlauben würde. Unabhängig von der gewählten Bibliothek bewirkt somit die Annäherung der Ungenauigkeit über eine Linearkombination eine Ver-

besserung der Schätzgüte. Allerdings ist die Qualität der Schätzung wesentlich schlechter, wenn RBFs in der Bibliothek genutzt werden.

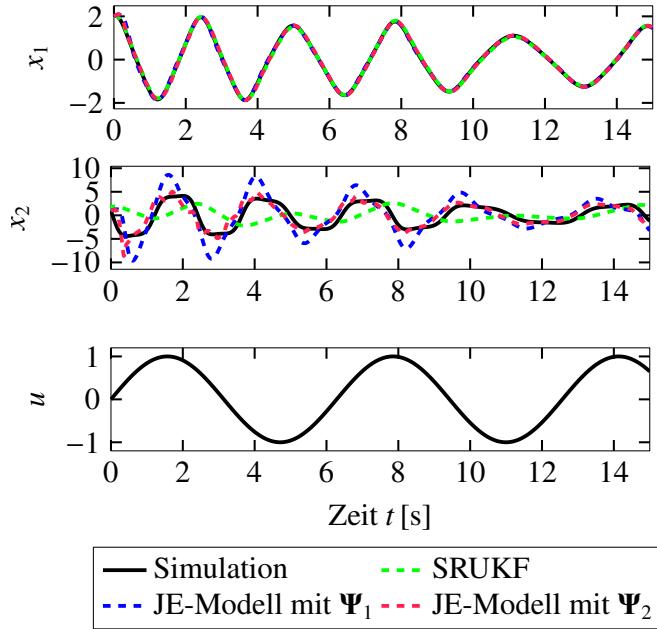


Abbildung 4-3: Einfluss der Art der gewählten Bibliotheksfunctionen auf die Schätzgüte anhand der Bibliotheken  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  im Vergleich zu einem Standard-SRUKF ohne augmentiertes Modell (4.3)

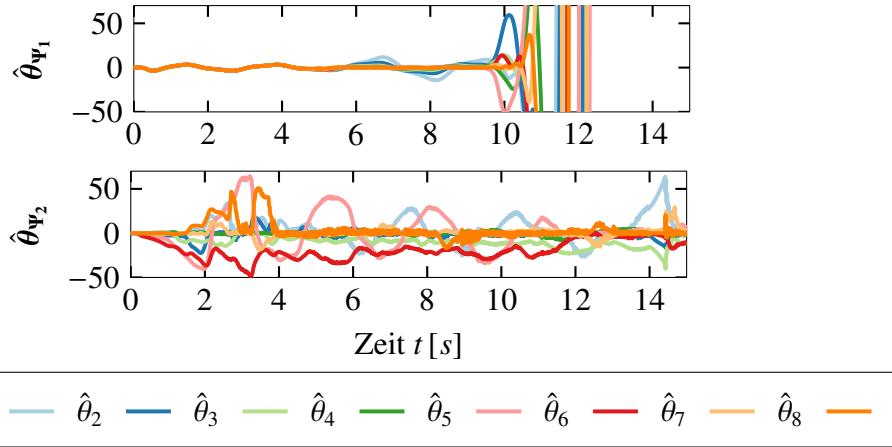


Abbildung 4-4: Evolution der Parameter  $\hat{\theta}$  abhängig von den Bibliotheken  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$

Zudem zeigt sich anhand der Zeitverläufe der Parameter in der Abbildung 4-4, welche vergrößert dargestellt sind, dass sich die zu den RBFs gehörenden Parameter explosionsartig vergrößern und sich ihre Werte stark überlagern, was eine Interpretation der approximierten Modellgenauigkeit  $\hat{g}_{\Psi_1}$  erschwert. In [KSH21] werden RBFs mit kompaktem Träger erfolgreich genutzt, um innerhalb eines EKFs eine Kompensation und Approximation der Modellgenauigkeiten zu gewährleisten, sodass eine hohe Schätzgüte resultiert. Die Autoren diskutieren allerdings keine Strategie zur ganzheitlichen Identifikation der

Ungenauigkeiten und ermöglichen somit keine Modellanpassung. Im Gegensatz zu den Parametern der RBFs sind die Parameter der physikalisch basierten Bibliothek ähnlich skaliert (vgl. die untere Zeile der Abbildung 4-4), auch wenn eine Interpretation der Dynamik aufgrund der Vielzahl an unübersichtlichen Parametern weiterhin herausfordernd ist. Dennoch ermöglicht die physikalisch basierte Bibliothek im Kontrast zur Bibliothek mit radialen Basisfunktionen grundsätzlich einen Rückschluss auf Wirkprinzipien, sofern ihre Parameter und Terme interpretierbar gestaltet und weitere Bedingungen beachtet werden (vgl. dazu die folgenden Abschnitte 4.2 sowie 4.3). Neben dem Konzept des erweiterten Zustands und augmentierten Modells, welches bereits durch [KSH21] ange- sprochen worden ist, existieren weitere Ansätze, um eine Modellgenauigkeit parallel zur Zustandsschätzung zu erfassen. In [KJY21] wählen die Autoren eine komplexe geometrische Approximation, die eine obere und untere Grenze der Modellgenauigkeit be- stimmt, zwischen denen sich der tatsächliche, aktuelle Wert  $g_k := g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$  befindet. Dies erlaubt punktuell eine sehr genaue Annäherung, jedoch keine zusammenhängende Dar- stellung, die einen physikalisch-technischen Mehrwert bietet. Darauf hinaus weist das Verfahren eine aufwendige Struktur auf, die die Einstellung und Abschätzung verschie- dener Designparameter erfordert. Weitere Strategien werden beispielsweise in [Sch10; BMTD21] beschrieben und basieren auf neuronalen Netzen oder Gaußprozessen, wel- che ebenfalls keine physikalisch-technische Interpretierbarkeit in parametrischer Form ermöglichen. Aufgrund dessen wird für diese Arbeit der Ansatz der Linearkombination basierend auf physikalisch motivierten Termen gewählt.

## 4.2 Voraussetzungen und Annahmen

Nachdem die grundlegende Idee der Joint Estimation im vorigen Abschnitt skizziert wor- den ist, wird diese nun formalisiert, indem Voraussetzungen und Annahmen formuliert sowie die Ausgangssituation für die Nutzung des Modells innerhalb eines Beobachters definiert werden. Um Modellgenauigkeiten eindeutig zu identifizieren, werden in die- ser Arbeit ausschließlich eingangsaffine Systeme mit relativem Grad  $\delta = n^{33}$  betrachtet, die sich durch ihre Struktur

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.4}$$

mit  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  kennzeichnen [Ada18]. Viele technische Systeme, wie z. B. der bereits diskutierte Golfroboter, weisen diese Struktur auf, bei der der Eingang  $\mathbf{u}$  linear auf das System wirkt. Ferner wird angenommen, dass sich das System (4.4) mit- hilfe der Lie-Ableitungen (vgl. Abschnitt 2.3) in die nichtlineare Regelungsnormalform

---

<sup>33</sup>Somit ist das System beobachtbar, vgl. [Ada18] und Anhang A1.

$f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  überführen lässt, bei der bereits die Modellgenauigkeit  $g$  berücksichtigt und anschließend durch ein augmentiertes Modell  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$  adressiert wird (vgl. Gleichung (2.32), [Ada18]):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}}_{=: f(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\theta}^T \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=: \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})},$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (4.5)$$

Dabei wirken die Systemdynamik  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und die reale Modellgenauigkeit  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  nur auf die  $n$ -te Zeile, während für die Parameter der Linearkombination des augmentierten Modells wie im vorigen Abschnitt weiterhin eine zeitinvariante Dynamik angenommen wird. Im Vergleich zur allgemeinen Definition einer Modellgenauigkeit (2.35) wird im erweiterten Modell direkt eine additive Wirkung dieser angenommen (vgl. Gleichung (2.36)), da überwiegend alle diskutierten Anwendungen dieser Arbeit dieser Form entsprechen. Allerdings wird das Beispiel der Windenergieanlage im Abschnitt 4.3 zeigen, dass auch eine multiplikative Modellgenauigkeit im Kontext der Joint Estimation betrachtet werden kann. Nach der Definition des Modells (4.5) muss eine Bibliothek  $\Psi \in \mathbb{R}^{n\theta}$  gewählt werden. Diese soll Hypothesen  $\psi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$  beinhalten, welche Erfahrungswissen und Vermutungen über die Modellgenauigkeit in das erweiterte Modell einpflegen. Um eine Interpretation der Ungenauigkeit zu erlauben, werden daher nur physikalisch motivierte Terme in der Bibliothek berücksichtigt (vgl. die Argumentation des vorigen Abschnitts und Abbildung 4-4). In der Regel kann jedoch davon ausgegangen werden, dass grundlegendes Wissen wie die Definition der Zustände sowie die Kenntnis der Systemordnung vorhanden ist, weshalb die Bibliothek

$$\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (1, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)^T \quad (4.6)$$

als Minimalanforderung gilt, da diese das Vorwissen durch linear eingehende Zustände, Eingänge und Konstanten berücksichtigt. Ist die Bibliothek festgelegt, kann das resultierende Modell (4.5) analog zur gleichzeitigen Zustands- und Parameterschätzung (vgl. Gleichung (4.1)) in ein bestehendes Filter, nachfolgend z. B. ein SRUKF, eingesetzt werden. Ferner kann die Bibliothek etwaige Vermutungen zur Beschreibung der Modellgenauigkeiten enthalten, beispielsweise trigonometrische Terme, um Schwingungen ab-

zubilden. Allerdings zeigt die Abbildung 4-5 anhand des Duffing-Oszillators, dass eine beliebig gewählte, physikalisch motivierte Bibliothek

$$\Psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (1, x_1, x_2, x_2^2, x_1^2, x_1^3, \cos(x_2), \sin(x_1), x_2^2 \cdot x_1, x_2 \cdot x_1^2, u)^T$$

das Risiko eines divergierenden Beobachters auslöst. Dies ist ab etwa sechs Sekunden in der linken Grafik zu beobachten, bei der  $\hat{x}_2$  explosionsartig zunimmt und schließlich divergiert. Bei Betrachtung der zugehörigen Parameterwerte  $\hat{\theta}$  in der rechten Grafik ist auffällig, dass die Parameter stark variieren und teilweise große Skalierungen aufweisen. Die Ursachen dieses divergierenden, instabilen Beobachters könnten erfahrungsgemäß auf die hohe Anzahl der Freiheitsgrade für die Parameter bzw. Terme, da zu jedem Zeitpunkt alle  $n_\theta$  Bibliotheksterme gewählt werden können, auf die fehlende Skalierung unterschiedlicher Parameter sowie auf die u. U. schwache Beobachtbarkeit dieser zurückgeführt werden.

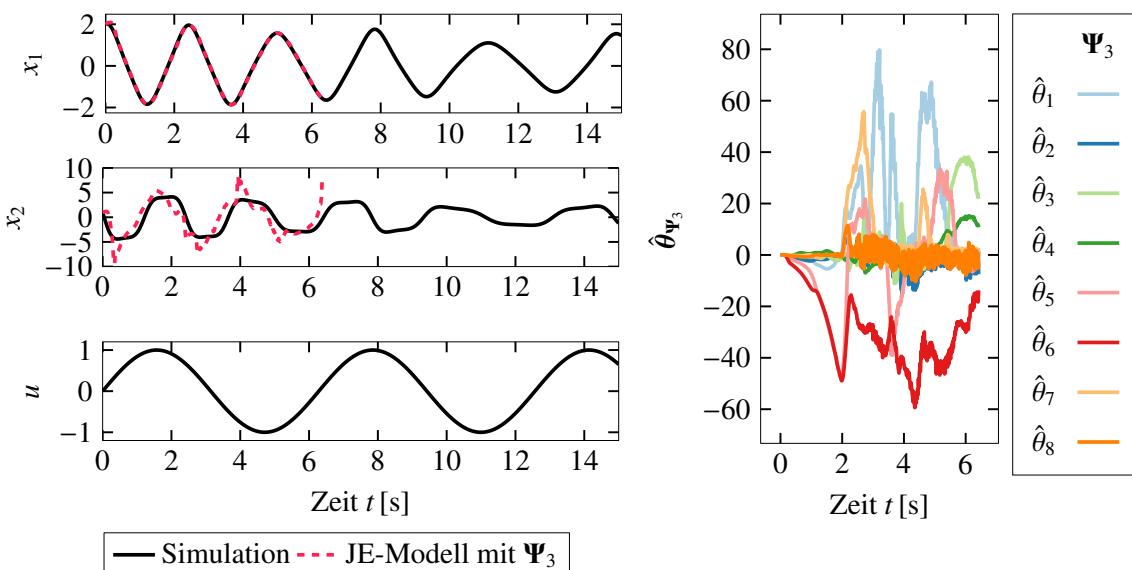


Abbildung 4-5: Divergierendes SRUKF ab etwa sechs Sekunden aufgrund der gewählten Bibliothek  $\Psi_3$ , deren Parameter  $\hat{\theta}$  rechts qualitativ dargestellt sind

Aufgrund der Erkenntnis aus dem vorangegangenen Beispiel wird offensichtlich, dass die unbeschränkte Wahl an möglichen Termen  $\psi_i$  nicht nur das stabile Betreiben eines Beobachters gefährden kann, sondern auch die Forderung der Interpretierbarkeit **F.2** missachtet, welche wegen der Vielzahl  $n_\theta$  an Termen und ihrer Superposition ab einer gewissen Anzahl nicht mehr gegeben ist. So kann die rechte Grafik der Abbildung 4-5 z. B. keinen qualitativen Aufschluss darüber geben, welche der Terme  $\psi_i$  die Modellgenauigkeit  $g$  nun tatsächlich charakterisieren können. Daher wird die Anforderung **F.2** im folgenden Absatz überarbeitet und konkretisiert.

## Anforderung für die Interpretierbarkeit

Aufgrund der großen Anzahl  $n_\theta$  an möglichen Termen aus der Bibliothek  $\Psi$  besteht nicht nur das Risiko der Instabilität des Beobachters, welches bereits aufgezeigt worden ist und aus verschiedenen Gründen resultiert<sup>34</sup>. Insbesondere kann die geforderte physikalisch-technische Interpretierbarkeit und Transparenz durch die Superposition potentiell vieler Terme nicht zwingend gewährleistet werden. Da der Begriff *Interpretierbarkeit* im Kontext der Mechatronik für dynamische Systeme nicht eindeutig festgelegt ist, wird basierend auf der Motivation im Abschnitt 1.2 eine intuitive Definition verwendet. So wurde der Begriff Interpretierbarkeit dort bereits als eine Zuordnung von konkreten mathematischen bzw. parametrischen Darstellungen zu physikalischen Wirkprinzipien eingeführt. Bezogen auf die Linearkombinationen bedeutet dies, dass die Modellgenauigkeit nicht durch eine Superposition vieler, wenn auch physikalisch motivierter dynamischer Terme ausgedrückt werden sollte, da eine konkrete Zuordnung zu physikalischen Gesetzmäßigkeiten dadurch verhindert wird. Dies zeigt beispielsweise die Undurchschaubarkeit der Parameter in der unteren Visualisierung der Abbildung 4-4, welche keinen eindeutigen Rückschluss auf die Charakterisierung der Modellgenauigkeit geben. Denn die Approximation zum Zeitpunkt  $t = 8$  s lautet z. B. folgendermaßen:

$$\hat{g}_{t=8} \approx 0,23 - 0,14x_1 - 0,09x_2 + 0,09x_1^2 - 0,40x_1^2 - 5,47x_1^3 - 0,12\cos(x_2) + 0,084u.$$

Obgleich der zum System passende Term  $x_1^3$  am höchsten skaliert ist, weisen andere Terme wie  $x_1, x_1^2, \cos(x_2)$  oder Konstanten ebenfalls höhere Parameterwerte auf, sodass eine eindeutige Interpretation nicht gegeben ist. Da jedoch die Mehrheit von physikalischen Effekten, die in Natur und Technik auftreten, im Sinne des Prinzips *Occam's Razor* eher durch wenige als viele dynamische Terme charakterisiert werden kann [BPK16b; BK19], sollte dieses Erfahrungswissen dazu genutzt werden, die Eigenschaft der Interpretierbarkeit umzusetzen. So wird die Erfahrung, dass nur einige wenige, sogenannte *dominante* Funktionsterme  $\psi_i$  für die Identifikation der Modellgenauigkeit  $g$  relevant sind, mithilfe der  $\ell_0$ -Norm<sup>35</sup> in die mathematische Formulierung übersetzt, dass der Parametervektor  $\theta$  überwiegend Nullelemente enthält [KL12]:

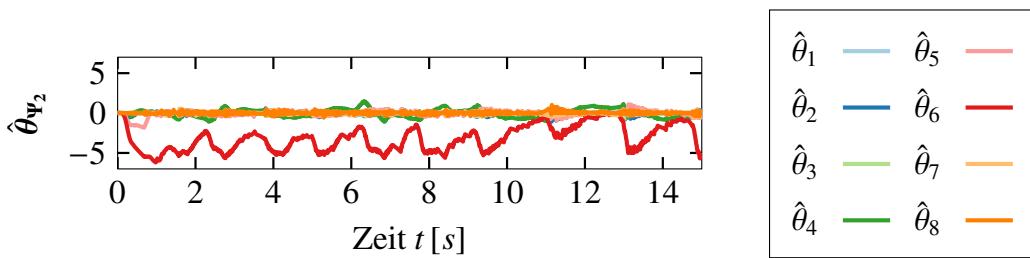
$$\|\theta\|_0 := \#\{i \mid \theta_i \neq 0\} \leq n_{\theta,act} \ll n_\theta. \quad (4.7)$$

Die  $\ell_0$ -Norm gibt dabei die Anzahl der Nichtnullelemente aus, welche maximal, aber nicht notwendigerweise bei  $n_{\theta,act}$  liegen kann und deutlich kleiner als die Anzahl der gesamten Bibliotheksterme  $n_\theta$  ist. Die Eigenschaft, die durch Gleichung (4.7) definiert wird,

<sup>34</sup>Eine Maßnahme zur Verbesserung der Beobachtbarkeit wird z. B. im Abschnitt 4.3 eingeführt.

<sup>35</sup>Im mathematischen Sinne ist dies keine Norm, sondern eine Halbnorm. Aufgrund der Verwandtschaft zur  $p$ -Norm (vgl. [Kön01]) wird jedoch der Name für diese beibehalten.

wird als *Sparsity* bezeichnet: Der Parametervektor  $\theta$  ist *dünnbesetzt* bzw. im Englischen  $n_{\theta,act}$ -sparse, wenn nur für wenige seiner Elemente  $\theta_i \neq 0$  gilt [KL12]. Jene Elemente deuten schließlich auf die gesuchten, dominanten Bibliotheksterme  $\psi_i$  hin, die für eine interpretierbare Darstellung der Modellgenauigkeit  $g$  geeignet sind. Dies ist beispielhaft durch die eindeutigen Verläufe der Parameter in der Abbildung 4-6 skizziert, welche aus der Abbildung 4-4 resultieren, aber nun mit der Sparsity-Bedingung (4.7) ausgestattet worden ist. Im Allgemeinen ist jedoch nicht bekannt, wie viele Elemente nicht Null sind, sodass der Parameter  $n_{\theta,act}$  nach Erfahrungswissen oder durch eine Hyperoptimierung festgelegt werden muss. Das Konzept Sparsity ist bereits kurz im Kontext der Methode SINDy angesprochen worden (vgl. Abschnitt 3.1.1). Diese erzielt offline ein interpretierbares Modell aus Messdaten durch die Lösung eines Optimierungsproblems (3.3). Dabei nutzt SINDy jedoch die  $\ell_1$ -Norm, um Interpretierbarkeit zu gewährleisten. Die Ursache für die Verwendung der  $\ell_1$ - statt der  $\ell_0$ -Norm, welche laut Definition (4.7) erforderlich ist, sowie die Relation beider Normen folgen im Abschnitt 4.3.1.



*Abbildung 4-6: Der dünnbesetzte Parametervektor  $\theta$  lässt interpretierbare Rückschlüsse auf die Modellgenauigkeit des Duffing-Oszillators zu, wenn im Gegensatz zur Abbildung 4-4 die Sparsity-Bedingung (4.7) umgesetzt wird. Obgleich  $n_{\theta,act} = 3$  gewählt wurde, reicht bereits der Term  $\psi_6 = x_1^3$  zur Approximation der Ungenauigkeit aus.*

Somit konkretisiert sich die Anforderung F.2, welche bereits zu Beginn dieser Arbeit im Abschnitt 1.2 formuliert worden ist, zu der folgenden Aussage:

**F.2+** Die Anzahl der dominanten Funktionsterme  $\psi_i$  ist klein, da die meisten, in Natur und Technik auftretenden Dynamiken im Sinne des Prinzips *Occam's Razor* mit wenigen dynamischen Termen charakterisiert werden können. Somit soll der Parametervektor  $\theta_k$  zu jedem Zeitpunkt  $k$  dünnbesetzt sein.

Diese Vorüberlegungen und Voraussetzungen führen schließlich zu den im Rahmen dieser Dissertationsschrift erarbeiteten, neuartigen Beobachterentwürfen der nächsten Abschnitte. Die Art und Weise, wie die Forderung F.2+ umgesetzt wird, adressieren die Abschnitte in unterschiedlicher Ausprägung. Dabei werden diese Entwürfe anhand des SRUKFs und des SMOs, welche sich durch ihre Robustheit anbieten, durchgeführt.

## 4.3 Augmentierter Beobachterentwurf

Basierend auf den am Lehrstuhl RtM erfolgten Vorarbeiten von [Sch17] wird das SRUKF ausgewählt, um einen neuartigen Beobachter zu entwerfen, der sowohl eine zuverlässige Zustandsschätzung als auch die Identifikation von Modellgenauigkeiten erlaubt. Um die angepasste Forderung **F.2+** umzusetzen, wird das Konzept Sparsity zunächst analysiert. Dazu werden im Abschnitt 4.3.1 Methoden der Signalverarbeitung basierend auf [BK19; KL12; HTW15] beleuchtet, deren Konzepte erstmals für den Beobachterentwurf zur Identifikation von Modellgenauigkeiten adaptiert werden können. Anschließend wird der Entwurf im Abschnitt 4.3.2 durchgeführt und die Qualität des Entwurfs basierend auf den Anforderungen dieser Arbeit anhand ausgewählter Anwendungen im letzten Abschnitt 4.3.3 analysiert. Teile dieses Abschnitts finden sich bereits in der Vorveröffentlichung [GT23b; GT24].

### 4.3.1 Motivation aus dem Compressed Sensing

Viele hochdimensionale Signale, wie z. B. Bild- oder Audiosignale, werden heutzutage komprimiert, um eine effiziente Speicherung oder einen beschleunigten Datentransfer zu ermöglichen. Dies bedeutet, dass das ursprüngliche Signal möglichst ohne Informationsverlust in reduzierter Form durch einige wenige Charakteristika dargestellt werden soll. So kann ein Signal  $s \in \mathbb{R}^n$  beispielsweise durch eine geeignete Basiswahl  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mittels der Basisfunktionen  $\psi_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  komprimiert werden, indem

$$s = \Psi\theta = \sum_i \theta_i \psi_i \quad (4.8)$$

gilt. Die Approximation des Signals  $s$  kann durch die Projektion auf eine orthonormale Basis, wie z. B. die Fourierbasis, garantiert werden [KL12; HTW15; BK19]. Das Foto des Golfroboters, welches in der Visualisierung 4-7(a) im Originalzustand zu sehen ist, kann beispielsweise durch eine Fourierbasis komprimiert werden, indem nur ein geringer Prozentsatz der betragsmäßig größten Fourierkoeffizienten behalten wird, um das Bild zu rekonstruieren. Da die Fourierbasis als orthonormale Basis eine sehr genaue Approximation zulässt, ist das auf 1% komprimierte Foto in der Abbildung 4-7(b) kaum vom Original zu unterscheiden. Erst bei einer sehr starken Reduktion auf 0,1% der betragsmäßig größten Koeffizienten, weist das komprimierte Foto in der Abbildung 4-7(c) Ungenauigkeiten durch Rauschen auf, erfasst die wesentlichen Eigenschaften des Originalfotos jedoch weiterhin gut. Anhand des Beispiels wird deutlich, dass das Signal, in diesem Fall ein Foto, durch eine geeignete Basiswahl mit wenigen Basisfunktionen nahezu ohne Informationsverlust charakterisiert werden kann.

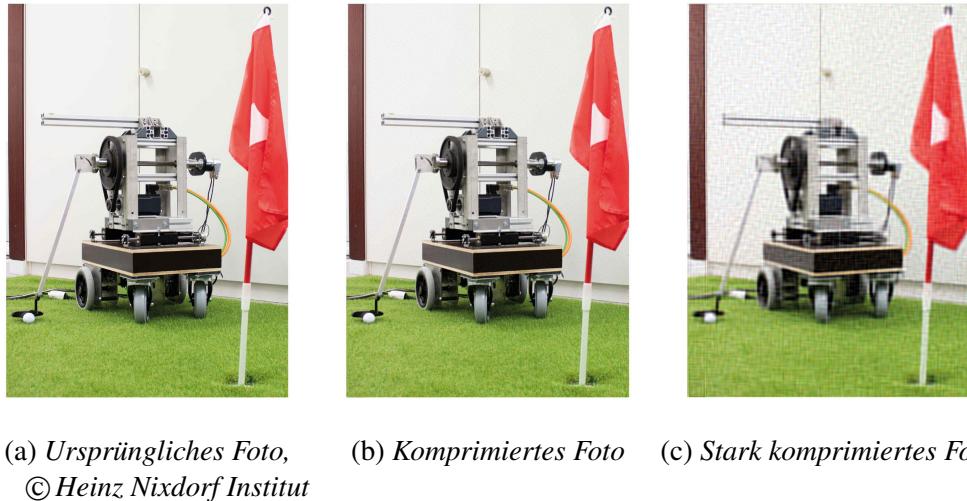


Abbildung 4-7: Mithilfe der Fouriertransformation komprimiertes Foto (durch Nutzung von leicht modifiziertem Code aus [BK19])

Diese Eigenschaft wird *Sparsity* genannt, d. h. das Signal kann im Kontrast zur kanonischen Basis in einer anderen Basis durch einige, im Vergleich deutlich weniger Charakteristika  $\psi_i$  mit  $i = 1, \dots, n_{\theta,act} \ll n$  dargestellt werden. Somit ist der Parameter der Gleichung (4.8) in der orthonormalen Basis  $n_{\theta,act}$ -sparse. Dies kann mathematisch durch die  $\ell_0$ -Norm ausgedrückt werden:  $\|\boldsymbol{\theta}\|_0 = n_{\theta,act}$ . Allerdings existieren zwei Nachteile eines solchen Vorgehens: Erstens stellen orthonormale Basen eine limitierte Wahl für beliebige Signale dar, da sich nicht für jedes Signal eine einzelne, konkrete orthonormale Basis eignet, vgl. [HTW15]. Zweitens muss das hochdimensionale Signal  $s$  zunächst gemessen und anschließend komprimiert werden, was in praktischen Anwendungen u. U. ineffizient und rechenaufwendig ist. Aus diesen Nachteilen hat sich in der Signalverarbeitung der Bereich *Compressed Sensing* entwickelt, der auf die Arbeiten von [Don06; CRT06] zurückgeht. Diese adressieren die angesprochenen Nachteile, indem einerseits beliebige Projektionen, auch basierend auf nicht orthonormalen Basen, zur Kompression des Signals betrachtet werden, und andererseits die Extraktion des Signals direkt aus der Messung  $y \in \mathbb{R}^m$  des komprimierten Signals erfolgt, sodass mit Gleichung (4.8) Folgendes gilt:

$$y = \mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}s. \quad (4.9)$$

Das komprimierte Signal lässt sich dabei durch die *Messmatrix*<sup>36</sup>  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  messen, da  $y = \mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta}$  gilt. Obwohl das Gleichungssystem  $y = \mathbf{H}s$  aufgrund von  $m < n$  in der Regel unterbestimmt ist, kann durch die Kenntnis der Basis  $\Psi$  sowie des Wissens, dass der Vektor  $\boldsymbol{\theta}$  dünnbesetzt ist, das Signal  $s$  dennoch rekonstruiert werden. Durch Umformulie-

<sup>36</sup>In der Regelungstechnik ist damit die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  bzw. die Jacobimatrix der Messfunktion  $\mathbf{h}$  gemeint.

rung des Signals in den Gleichungen (4.8) und (4.9) lässt sich die Rekonstruktion in das folgende  $\ell_0$ -Problem übersetzen:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_0, \quad \text{sodass} \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta}. \quad (4.10)$$

Allerdings ist das Optimierungsproblem (4.10) nicht konvex und nur durch Kombinatorik bzw. eine *Brute-Force-Suche* zu lösen<sup>37</sup>. Diese Eigenschaft der Nicht-Konvexität wird für eine zweidimensionale Variable anhand der Abbildung 4-8 illustriert, welche die durch verschiedene  $p$ -Normen resultierenden Regionen darstellt und für  $p < 1$  nicht konvexe Gebiete aufzeigt. Unter bestimmten Umständen, welche im folgenden Abschnitt thematisiert werden, kann das Problem (4.10) jedoch äquivalent in der  $\ell_1$ -Norm formuliert werden [HTW15; KL12], was eine vorteilhafte, konvexe Gestalt bewirkt:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_1, \quad \text{sodass} \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta}. \quad (4.11)$$

Sind die Messungen rauschbehaftet, was in der Praxis meistens der Fall ist, lässt sich das obige Problem mit  $0 < \epsilon \ll 1$  abmildern zu:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_1, \quad \text{sodass} \quad \|\mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon. \quad (4.12)$$

Aufgrund der Optimierungstheorie kann das Problem (4.12) zudem nicht nur als Kostenfunktion mit Regularisierungsterm formuliert werden, wie es z. B. im LASSO-Verfahren der Fall ist, sondern auch als duales Problem über die Herleitung mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren mit einer angepassten Nebenbedingung  $\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0$  durch

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{H}\Psi\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}\|_2, \quad \text{sodass} \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \leq \epsilon', \quad (4.13)$$

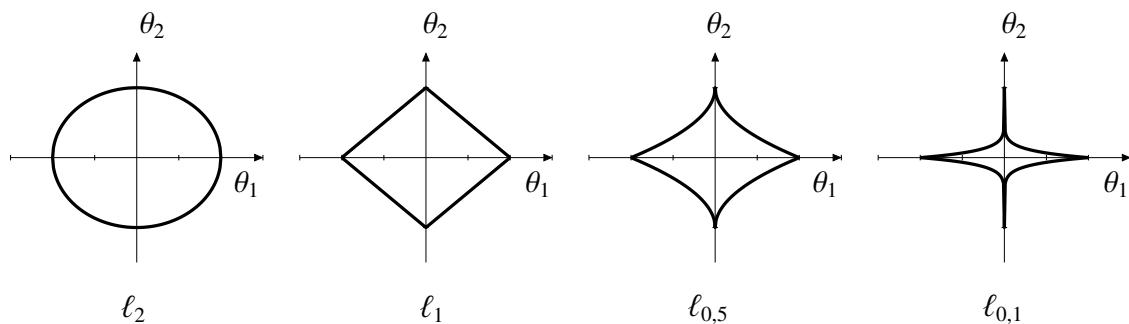
aufgefasst werden [CGK10; JL07]. Innerhalb einer iterativen, auf der Lösung einer  $\ell_2$ -Kostenfunktion basierenden Filterstruktur stört jedoch eine Nebenbedingung  $\mathcal{H}$ . Diese kann aber auch als eine Projektion auf den Lösungsraum interpretiert werden [JL07; CGK10]. Dazu wird die Ungleichheitsbedingung durch eine zusätzliche, fiktive Messung mit  $\epsilon' > 0$  und

$$0 = \|\boldsymbol{\theta}\|_1 - \epsilon' \quad (4.14)$$

innerhalb des Filters umgesetzt, die schließlich durch die vorhandenen Strukturen im Filter ausgewertet werden kann. Der Vorteil des  $\ell_1$ -basierten Optimierungsproblems in den Gleichungen (4.11) und (4.12) sowie des  $\ell_1$ -restringierten Problems in Gleichung (4.13)

<sup>37</sup>Die Gleichung (4.10) ist ein *nicht-polynomiales, hartes (NP-hard)* Problem [BK19; HTW15].

besteht in der Garantie der Konvexität, während gleichzeitig eine dünnbesetzte Lösung gefördert wird. In der Abbildung 4-8 wird der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften Konvexität und Sparsity illustriert, indem für einen zweidimensionalen Parameter die durch die jeweilige  $\ell_p$ -Norm induzierte Region dargestellt ist. Je kleiner das  $p$  der Norm gewählt ist, desto mehr werden das Konzept der Sparsity berücksichtigt und dünnbesetzte Parameter gefördert. Allerdings ist die induzierte Region lediglich für die  $\ell_2$ - und  $\ell_1$ -Norm konvex, während dies für die Regionen mit  $p < 1$  nicht mehr gilt. Die  $\ell_1$ -Norm stellt demnach den besten Kompromiss zwischen Konvexität und Sparsity dar. Die Umstände, welche eine äquivalente Rekonstruktion des Signals durch die Nutzung der  $\ell_1$ -Norm erlauben, sind geometrischer Natur und werden im nachfolgenden Abschnitt thematisiert.



*Abbildung 4-8: Zusammenhang zwischen der  $\ell_p$ -Norm und den Eigenschaften Konvexität sowie Sparsity: Je kleiner  $p$  ist, desto mehr nähern sich die Parameter der Eigenschaft Sparsity an. Gilt jedoch  $p < 1$ , ist keine Konvexität mehr gegeben (vgl. [HTW15]).*

### Zusammenhang $\ell_0$ - und $\ell_1$ -Norm

Nach den Arbeiten von [Don06; CRT06] zeigt sich, dass die Struktur und Gestalt der Messmatrix  $\mathbf{H}$  ausschlaggebend für die Umformulierung des Problems (4.10) in ein konkaves Optimierungsproblem (4.11) ist. Dies gilt insbesondere, wenn beliebige Projektionen, d. h. nicht orthonormale oder orthogonale Basissysteme  $\Psi$ , genutzt werden. Damit die Umformulierung gelingt und tatsächlich mithilfe der  $\ell_1$ -Norm eine dünnbesetzte Lösung angenähert werden kann, muss die Messmatrix  $\mathbf{H}$  inkohärent zur Basis  $\Psi$  sein. Dies bedeutet, dass die Zeilen der Messmatrix unabhängig von den Spalten der Basis sind [BK19]. Anders ausgedrückt, kann diese Bedingung auch über die Matrix  $\mathbf{H}\Psi$  überprüft werden, indem die einzelnen Spalten dieser Matrix auf Orthonormalität getestet werden [HTW15]. Liegen genügend Messungen  $m$  vor, sodass etwa  $m \approx O(n_{\theta,act} \cdot \log(n/n_{\theta,act}))$  gilt, konvergiert das Problem (4.11) mit hoher Wahrscheinlichkeit zur dünnbesetzten Lösung  $\hat{\theta}$  [HTW15; BK19]. Diese Eigenschaften sind auch unter den Begriffen *Restricted*

*Isometry Property (RIP)* und *Restricted Nullspace (RN)* bekannt und untersuchen die geometrische Wirkung der Messungen und der gewählten Basis hinsichtlich der Sparsity-Bedingung. Diese soll annähernd einer unitären Transformation entsprechen.

### 4.3.2 Beobachterentwurf für ein Unscented Kalman Filter

Mithilfe der Methoden des Compressed Sensings kann nun die Forderung **F.2+** umgesetzt werden, d. h. dass die Parameter  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ , welche mittels der Bibliothek  $\Psi \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  als Linearkombination (4.2) zur Approximation der Modellgenauigkeit  $g \in \mathbb{R}$  dienen, dünnbesetzt sein sollen. Doch es bleibt zu klären, wie ein Optimierungsproblem in der Art von Gleichung (4.13) in der klassischen Korrektor- und Prädiktorstruktur eines SRUKFs (vgl. Algorithmus 5) berücksichtigt werden kann. Zunächst wird das Modell (4.5) mittels des expliziten Euler-Verfahrens durch die Schrittweite  $\Delta t > 0$  diskretisiert (vgl. Anhang A5.1) und hinsichtlich des SRUKFs angepasst, indem noch Prozess- und Messrauschen in der Formulierung der Dynamiken  $f$  bzw.  $\tilde{f}$  berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot (f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k^x) \quad \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \approx \tilde{\mathbf{x}}_k + \Delta t \cdot \left( \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{w}_k^\theta \end{pmatrix} \right), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dabei gilt für das Prozessrauschen  $\mathbf{w}_k^x \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_x)$ ,  $\mathbf{w}_k^\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_\theta)$  und für das Messrauschen  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  (vgl. Abschnitt 2.2.2). Somit kann die Prozesskovarianzmatrix für den erweiterten Zustand vereinfachend als Blockmatrix der beiden Einzelkovarianzen durch  $\tilde{\mathbf{Q}} = \text{blkdiag}(\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_\theta)$  mit den restlichen Einträgen als Null angenommen werden. Zur Übersichtlichkeit werden jedoch in den beiden folgenden Gleichungen die Zeitindizes  $k$  vernachlässigt. Ausgehend von der Minimierung des Schätzfehlers (2.13) sowie den Überlegungen im vorigen Abschnitt (4.13) kann das Minimierungsproblem, welches den Schätzfehler reduzieren und gleichzeitig die Sparsity-Bedingung umsetzen soll, durch

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})^T (\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})], \quad \text{sodass} \quad \|\tilde{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{x}}\|_1 \leq \epsilon, \quad (4.16)$$

definiert werden. Dabei stellt  $0 < \epsilon \ll 1$  eine Schranke bzgl. des Messrauschens dar, während  $\tilde{\mathbf{I}} = \text{blkdiag}(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_{n_\theta})$  eine Blockmatrix aus Nullen und Einsen beschreibt und somit die Anforderung **F.2+** bzgl. der Parameter  $\theta$  kodiert. Allerdings ist die Einbettung und Lösung des Optimierungsproblems (4.16) innerhalb der iterativen Struktur des Filters wie bereits im vorigen Abschnitt angesprochen nicht einfach. Daher wird auf die zusätzliche, fiktive Messung des vorigen Abschnitts (4.14) zurückgegriffen, welche als Projektion auf-

gefasst werden kann [GT23b; CGK10; JL07]. Diese wird als *Pseudomessung*  $y_{pm}$  mit der angepassten, stetigen Ausgangsgleichung  $h_{pm}$  durch

$$y_{pm} = h_{pm}(\tilde{\mathbf{x}}) = \max(\|\tilde{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{x}}\|_1 - \epsilon, 0) \quad (4.17)$$

definiert. Die Größe  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, R_{pm})$  repräsentiert nun das fiktionale Messrauschen, welches durch das Optimierungsproblem die Nebenbedingung steuert. Hierbei stellt  $R_{pm}$  die Kovarianz des fiktionalen Messrauschens dar. Da das SRUKF auf der UT basiert, kann die nichtlineare, fiktionale Ausgangsgleichung (4.17) direkt innerhalb des Filters eingesetzt werden, ohne dass weitere Anpassungen erforderlich sind. Dies steht im Kontrast zum EKF, vgl. [JL07; KSH21]. Da es sich um eine zusätzliche Messung handelt, ist keine erneute Auswertung des Dynamikschritts erforderlich, sodass stattdessen die Identitätsabbildung  $f_{Id}$  für diesen Schritt im SRUKF genutzt wird. Bei Bedarf kann die Projektion mittels der Pseudomessung mehrfach erfolgen, um die Genauigkeit der Nebenbedingung  $\mathcal{H}$  zu erhöhen [CGK10; JL07]. Ist dies gewünscht, muss die maximale Iteration  $N_{iter} \neq 1$  gewählt werden. Das entwickelte Vorgehen des Joint Estimation SRUKFs (JE-SRUKFs) ist im Algorithmus 6 zusammengefasst und wird nachfolgend kurz erläutert (vgl. Vorveröffentlichung [GT23b]):

---

**Algorithmus 6** JE-SRUKF mit fester Schranke zur Umsetzung der Sparsity

---

```

:
 $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k = \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-)$ 
 $\mathbf{S}_k = \text{cholupdate}(\mathbf{S}_k^-, \mathbf{U}, -1)$ 

% Sparsity-Überprüfung und ggf. Aktualisierung:
Initialisiere:  $h_{pm}, N_{iter}, n_{\theta,act}, \gamma, j = 1, \mathbf{S}_{pm,0} = \mathbf{S}_k, \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{pm,0} = \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k$ 

while  $\#\{\theta_j | \theta_j > \tilde{\lambda}\} > n_{\theta,act}$  and  $j < N_{iter}$ 

    % Schätzung mit Sparsity-Bedingung
     $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{pm,j}, \mathbf{S}_{pm,j} \leftarrow \text{SRUKF (Algo. 5) mit } (\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{pm,j-1}, \mathbf{S}_{pm,j-1}, f_{Id}, h_{pm}, \tilde{\mathbf{Q}}, R_{pm})$ 
     $j = j + 1$ 

end

% Bestimmung des finalen Zustands und dessen Kovarianz
 $\mathbf{S}_{k,final} = \mathbf{S}_{pm,j}$ 
 $[\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k,final}]_{(1:n)} = [\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k]_{(1:n)},$ 
 $[\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k,final}]_{(n+1:\tilde{n})} = (1 - \gamma)[\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{pm,j}]_{(n+1:\tilde{n})} + \gamma[\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_k]_{(n+1:\tilde{n})}$ 

end

```

---

Aufgrund der harten Grenze  $\tilde{\lambda}$ , welche beschreibt, ab wann ein Element  $\hat{\theta}_i$  als Nichtnull-element bewertet wird, resultiert erfolgreich der dünnbesetzte Parametervektor  $\hat{\theta}$ . Diese wird ähnlich zum Parameter im LASSO-Verfahren je nach Anwendungsziel bzw. Skalierung der Parameter festgelegt und befindet sich nahe Null. Um jedoch harte Sprünge in den Werten von einem zum nächsten Zeitschritt zu vermeiden, besteht die Option, mittels des Parameters  $\gamma \in [0, 1]$  eine Gewichtung aus dem vorherigen und neuen Wert des Parametervektors  $\hat{\theta}_k$  bzw.  $\hat{\theta}_{pm,j}$  vorzunehmen. Im Algorithmus wird dies durch die Indizes  $(n + 1) : \tilde{n}$  dargestellt, wobei  $\tilde{n}$  als Gesamtsystemordnung durch  $\tilde{n} := n + n_\theta$  definiert ist. Daraufhin setzt sich der finale, augmentierte Zustand  $\hat{\mathbf{x}}_{k,final}$  durch den zuvor im klassischen Vorgehen berechneten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}_k$  und den ggf. gewichteten Parametervektor  $\hat{\theta}_k$  zusammen. Anschließend wird zunächst wiederum der klassische Algorithmus 5 des SRUKFs durchlaufen, der in jedem Zeitschritt  $k$  einmalig erfolgt. Dies wird durch die letzte Zeile des Algorithmus 5 angedeutet, bevor der Pseudocode des Teils folgt, der das Konzept der Sparsity umsetzt (vgl. Vorveröffentlichung [GT23b]).

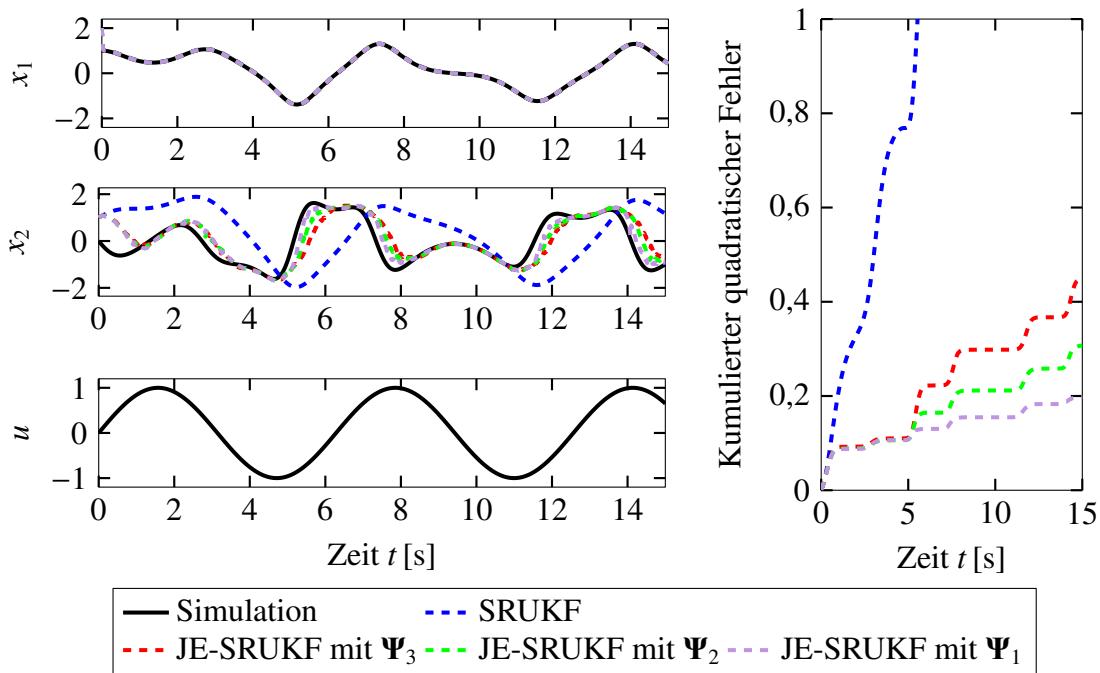
### 4.3.3 Analyse der Schätzgüte

Im folgenden Abschnitt wird der neu erarbeitete Entwurf anhand verschiedener Anwendungen validiert und bzgl. seiner Umsetzung der geforderten Ziele **F.1-F.3** untersucht. Darüber hinaus wird die Performanz des Entwurfs mit einem unveränderten SRUKF, das basierend auf dem ungenauen Modell ohne Approximation der Modellgenauigkeit  $g$  schätzt, oder dem am Prüfstand genutzten Luenberger-Beobachter verglichen. Für jede Applikation gilt zudem  $\hat{\mathbf{x}}_0 \neq \tilde{\mathbf{x}}_0$ ,  $\tilde{\lambda} = 0,1$ ,  $n_{\theta,act} = 3$ ,  $R_{pm} = 1$  sowie  $N_{iter} = 1$  und  $\gamma = 0$ . Die Parameter der Linearkombination werden mit kleinen Werten initialisiert.

#### Evaluation am Duffing-Oszillatator

Zur Veranschaulichung des Entwurfs wird zunächst das Beispiel des Duffing-Oszillators thematisiert, welches aufgrund seiner bekannten Struktur eine gute Möglichkeit darstellt, die Funktionsweise und Qualität des neuartigen, augmentierten Beobachterentwurfs zu überprüfen. Dazu wird weiterhin das Modell (4.3) betrachtet, das den kubischen Term  $g(\mathbf{x}, u) = -3x_1^3$  nicht berücksichtigt, sodass dieser als Modellgenauigkeit resultiert. Zunächst wird überprüft, ob die Integrität des Verfahrens gewährleistet ist, indem der nicht modellierte Term in der gewählten Bibliothek vorhanden ist. Dazu sollte der Beobachter erwartungsgemäß diesen Term von den anderen Optionen  $\psi_i$  unterscheiden und zur Charakterisierung der Modellgenauigkeit  $g$  nutzen. Um dies zu überprüfen, wird die Bibliothek  $\Psi_1(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_2^2, \sin(x_2), x_1 \cdot x_2, \cos(x_1), u, x_1^3)^T \in \mathbb{R}^9$  verwendet, welche durch  $\psi_9$  den korrekten Term enthält. Links in der Abbildung 4-9 werden Ergebnisse der Zustandsschätzung dargestellt, indem die geschätzten Trajektorien des JE-SRUKFs sowohl

zu den simulierten Trajektorien des korrekten Modells, welche in schwarz abgebildet sind, als auch zu den geschätzten Zustandsverläufen eines klassischen SRUKFs, das mit dem fehlerhaften Modell arbeitet und in blau visualisiert ist, verglichen. Offensichtlich ist die Modellgenauigkeit  $g$  so gravierend, dass das klassische SRUKF es nicht schafft, eine zuverlässige Schätzung durchzuführen. Dies äußert sich ebenfalls quantitativ in der kumulierten Fehlerbetrachtung auf der rechten Seite der Abbildung 4-9. Die Schätzung des JE-SRUKFs mittels der Bibliothek  $\Psi_1$  ist dagegen nach einem transienten Verhalten aufgrund eines abweichenden Initialwerts sehr zutreffend und weist nur geringfügige Phasenverzögerungen auf.



*Abbildung 4-9: Qualität der Zustandsschätzung im Vergleich zu verschiedenen Bibliotheken und einem klassischen SRUKF, das ohne die Modellgenauigkeit  $g$  schätzt, vgl. [GT23b]*

Die in der Abbildung 4-10 in der oberen Zeile dargestellten Zeitverläufe des Parametervektors geben ferner Aufschluss über die Art der Approximation der Modellgenauigkeit, aus der die hohe Schätzgüte resultiert: Nach einem anfänglichem Einschwingen wird hauptsächlich der Parameter  $\hat{\theta}_9$  genutzt, welcher mit dem Term  $\psi_9(\mathbf{x}, u) = x_1^3$  korreliert, während alle weiteren Parameter wie gewünscht nahe Null verbleiben. Allerdings ist zu erkennen, dass der Parameter  $\hat{\theta}_9$  nicht gegen den Wert  $-3$  strebt, sondern Schwankungen aufweist. Dies ist einerseits damit begründbar, dass zu jedem Zeitpunkt der Schätzung unabhängig von der vorigen Identifikation alle  $n_\theta$  Möglichkeiten zur Verfügung stehen, um die temporäre Modellgenauigkeit  $\hat{g}$  zu approximieren. Andererseits ist zudem die Sichtbarkeit der Modellgenauigkeit entscheidend, für welche  $g \neq 0$  gelten muss, damit

der augmentierte Beobachter diese identifizieren kann. Demnach wird nicht nur das Ziel, Forderung **F.2+** umzusetzen und eine interpretierbare Darstellung zu finden, erreicht, sondern auch der korrekte, kubische Term zur Charakterisierung genutzt, sofern dieser in der Bibliothek vorhanden ist. Denn es gilt z. B. zum Zeitpunkt  $t = 8$  s:

$$\hat{g}_{t=8} \approx 0,04 - 0,05x_1 + 0,1x_2 - 0,06x_2^2 + 0,1 \sin(x_2) + 0,09x_1x_2 - 0,02 \cos(x_1) + 0,02u - 1,96x_1^3.$$

Da  $\tilde{\lambda} = 0,1$  festgelegt worden ist, können fast alle Terme bis auf  $\hat{g}_{1,t=8} \approx -1,96x_1^3$  vernachlässigt werden. Tatsächlich ist es in der Praxis in der Regel nicht realisierbar, dass genau der zutreffende Dynamikterm in der Bibliothek enthalten ist, der die Modellungenauigkeiten am besten approximiert, da höchstens Hypothesen zu dieser formuliert werden können. Daher wird dasselbe Szenario mit den beiden Bibliotheken

$$\begin{aligned}\Psi_2(\mathbf{x}, u) &= (1, x_1, x_2, x_2^2, \sin(x_2), x_1 \cdot x_2, \cos(x_1), u, x_1^2)^T \in \mathbb{R}^9 \\ \Psi_3(\mathbf{x}, u) &= (1, x_1, x_2, x_2^2, \sin(x_2), x_1 \cdot x_2, \cos(x_1), u)^T \in \mathbb{R}^8\end{aligned}\quad (4.18)$$

analysiert und überprüft, inwiefern der Beobachterentwurf mit alternativen Darstellungen zur Charakterisierung umgehen kann und falls ja, ob diese auch hauptsächlich zur Approximation der Modellungenauigkeit genutzt werden. Dazu unterscheiden sich die Bibliotheken ausschließlich in der Potenz des ersten Zustands.

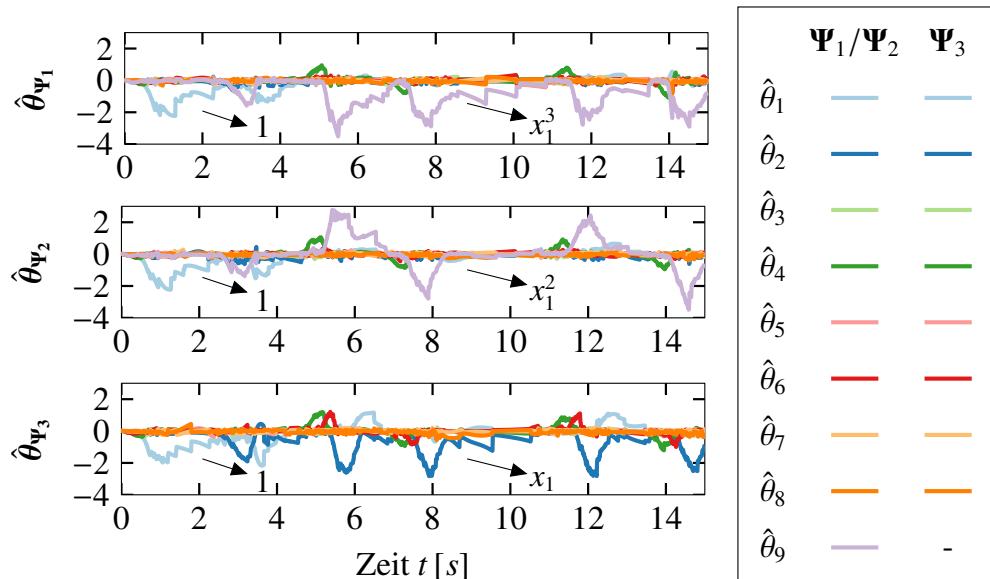


Abbildung 4-10: Zeitlicher Verlauf des Parametervektors  $\hat{\theta}$  im Vergleich verschiedener Bibliotheken, vgl. [GT23b], und die jeweils daraus zugeordneten dominanten Bibliotheksterme (dargestellt anhand der Pfeile)

Die Ergebnisse dieser Simulation sind ebenfalls in der Abbildung 4-9 illustriert und zeigen trotz des mangelnden kubischen Terms eine akzeptable Genauigkeit. Im Vergleich zur ersten Bibliothek reduziert sich die Schätzgüte jeweils zur zweiten bzw. erneut zur dritten Bibliothek mit sinkendem Exponenten des Zustands  $x_1$ . Der kumulierte Fehler bestätigt diesen Eindruck in quantitativer Hinsicht. Dennoch zeigt die Abbildung 4-10 anhand der zeitlichen Verläufe des Parametervektors für beide Bibliotheken auf, dass Alternativen zum kubischen Term gefunden werden, welche die Modellgenauigkeit approximieren. Besonders auffällig ist hierbei der Parameter  $\hat{\theta}_9$  der zweiten Bibliothek  $\Psi_2$  in der mittleren Zeile der Abbildung 4-10, der das negative Vorzeichen der Modellgenauigkeit  $g$  durch einen ständigen Vorzeichenwechsel ausgleicht. Denn der quadratische Term  $\psi_9(\mathbf{x}, u) = x_1^2$  nähert zwar aufgrund kleiner Winkel den kubischen Term an, verursacht aber nur positive Werte ohne den dazugehörigen Parameter  $\hat{\theta}_9$ . Selbst wenn nur der Zustand  $x_1$  in der Bibliothek  $\Psi_3$  enthalten ist, wählt das JE-SRUKF nach einem transienten Einschwingen der Parameter diesen Term  $\psi_2(\mathbf{x}, u) = x_1$  als Alternative zum kubischen Term. Dies ist in der unteren Zeile der Abbildung 4-10 erkennbar. Somit wird nicht nur die Funktionsweise des JE-SRUKFs bestätigt, sondern auch eine interpretierbare Darstellung der Modellgenauigkeit erzielt. Diese ist bisher rein visuell extrahierbar, wird im Kapitel 5 allerdings automatisiert detektiert, sodass eine Formulierung der Modellgenauigkeit  $g$  daher mit angeschlossener Parameteridentifikation als parametrisches Modell erfolgen kann.

Denn trotz der hohen Schätzgüte, welche Anforderung F.1 erfüllt, und der Implementierung der Sparsity-Bedingung, die Anforderung F.2+ zur Interpretierbarkeit der Modellgenauigkeit umsetzt, ist die Konvergenz des Entwurfs nicht eindeutig. Unabhängig von den drei Bibliotheken bilden sich nach dem Einschwingen der Parameterdynamik auf Basis der Konstanten (vgl. Abbildungen 4-10 und 4-11) nach etwa drei Sekunden einzelne Terme heraus, die über den Zeitraum häufig für die Charakterisierung der Modellgenauigkeit genutzt werden. Diese als *dominant* bezeichneten Terme basieren jedoch nicht auf einer eindeutigen Konvergenz der Parameter zu einem konkreten Wert, wie es beispielsweise für die Bibliothek  $\Psi_1$  für den Parameter  $\hat{\theta}_9 \rightarrow -3$  für  $t \rightarrow \infty$  zu erwarten ist. Diese mangelnde asymptotische Konvergenz resultiert aus der harten Grenze  $\tilde{\lambda}$  und der Tatsache, dass alle Terme zu jedem Zeitpunkt  $k$  unabhängig von der vorigen Analyse wieder gleichberechtigt in Erwägung gezogen werden, um die Modellgenauigkeit  $g$  zu approximieren. Der zeitliche Zusammenhang ist neben dem aktuellen Messwert  $y_k$  ausschließlich in der Kovarianz  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}},k-1}$  kodiert, welche diesem Einfluss im Kontrast zur expliziten Berücksichtigung von mehreren vergangenen Zeitschritten wie z. B. in der rekursiven Least-Squares-Methode nicht gerecht wird (vgl. [IM11; Wal22])<sup>38</sup>. Wird statt einer temporären Schätzung  $\hat{g}_k = \hat{\theta}^T \Psi(\hat{\mathbf{x}}_k, u_k)$  eine datenbasierte Identifikation des Terms vorgenommen, wie es Kapitel 5 thematisiert, kann anschließend eine klassische Parame-

<sup>38</sup>Dieser Aspekt wird im Ausblick der Arbeit im Kapitel 6 aufgegriffen.

teridentifikation durchgeführt werden, um den zu dem Term korrekten, physikalischen Parameter zu finden.

Wird schließlich die gesamte Linearkombination  $\hat{g}(\hat{x}, u) = \hat{\theta}^T \Psi(\hat{x}, u)$  betrachtet, kann diese im Fall des theoretischen Beispiels des Duffing-Oszillators mit der tatsächlichen Modellgenauigkeit  $g$  verglichen werden. Dieser Vergleich ist für alle drei Bibliotheken in der Abbildung 4-11 dargestellt. Nach dem Einschwingen der Parameter zeigt sich, dass die unterschiedliche Qualität der Schätzgüte insbesondere daraus entsteht, dass die Maxima und Minima des zeitlichen Verlaufs von  $g$  unterschiedlich gut approximiert werden. Während  $\hat{g}_1$  diese noch einigermaßen adäquat annähert, wird diese Approximation sukzessiv von  $\hat{g}_2$  zu  $\hat{g}_3$  schlechter. Dennoch identifizieren alle drei Approximation  $\hat{g}_i$  immerhin qualitativ den Charakter der Modellgenauigkeit  $g$  so gut, dass eine hohe Schätzgüte erzielt werden kann und durch eine nachfolgende Glättung eine zusätzliche Verbesserung zu erwarten ist. Folglich zeigt das Anwendungsbeispiel des Duffing-Oszillators neben der Umsetzung der Ziele **F.1** bis **F.4**, dass nicht nur der tatsächliche Term, sondern auch Alternativen zur Identifikation von Modellgenauigkeiten durch das Verfahren aufgefunden werden, wodurch der Anspruch der Lösungsmethode validiert wird.

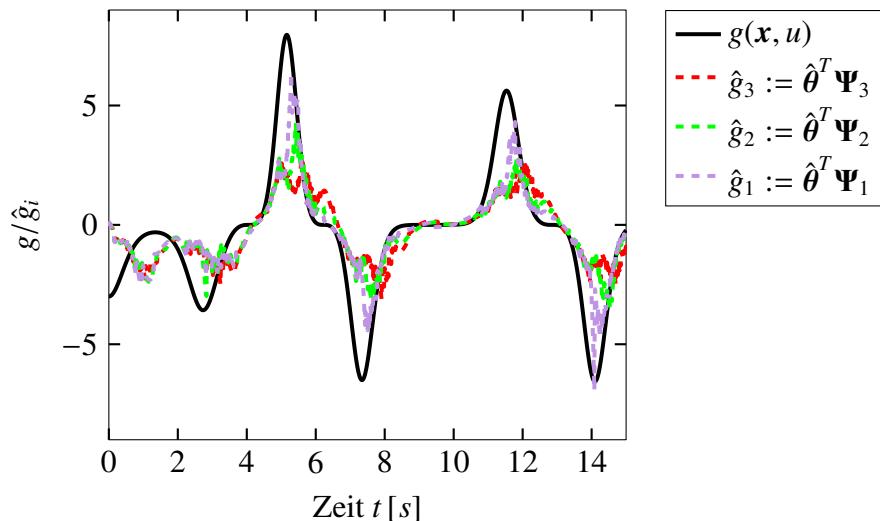


Abbildung 4-11: Approximation der Modellgenauigkeit  $g(\mathbf{x}, u) = -3x_1^3$  im Vergleich verschiedener Bibliotheken

## Evaluation am Golfroboter

Neben dem theoretischen Beispiel des nichtlinearen Schwingers wird nun eine reale Applikation betrachtet. Da der Golfroboter des Lehrstuhls trotz seines detaillierten nichtlinearen Modells (3.4) Abweichungen aufgrund des Stick-Slips-Effekts aufweist (vgl. Anhang A6.1), ist das Ziel, diese Modellgenauigkeiten mithilfe des neuartigen, augmentierten Beobachters zu kompensieren und zu identifizieren. Die Identifikation von

Reibung und Dämpfung ist in der Praxis ein häufiges Problem. Dazu wird das Modell (A6-2) des Golfroboters, welches keine Dämpf- und Reibmomente enthält, um eine Linearkombination und die Dynamik der Parameter nach Gleichung (4.15) augmentiert. Anschließend wird das System mit einem Signal angeregt, das aufgrund von verschiedenen Sprunganregungen einen ähnlichen Charakter zur Stellgröße aufweist, die für einen Schlag aufgeschaltet wird. Dabei wird zunächst die Bibliothek

$$\Psi_1(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$$

genutzt, welche rein polynomiale Terme beinhaltet und einer Bibliothek entspricht, die kein zielgerichtetes Vorwissen basierend auf der Reibung berücksichtigt, sondern versucht, sich durch eine Taylorreihe der Identifikation der Modellgenauigkeiten anzunähern. Die Wahl der Bibliotheksterme sowie ihre Größe und weitere Eigenschaften werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts diskutiert. Basierend auf der Bibliothek  $\Psi_1$  zeigt die Abbildung 4-12 die Schätzgüte sowie den kumulierten quadratischen Fehler, wenn das JE-SRUKF zur Schätzung der Zustände verwendet wird. Im Vergleich zur Schätzung mit dem fehlerhaften Modell (A6-2), dessen Einsatz im SRUKF durch die blauen Trajektorien visualisiert wird und aufgrund der fehlenden Reibung keine zuverlässige Schätzung erlaubt, erzielt das JE-SRUKF eine sehr hohe Schätzgüte. Dies bestätigt zudem der quantitative Vergleich des kumulierten quadratischen Fehlers auf der rechten Seite der Visualisierung.

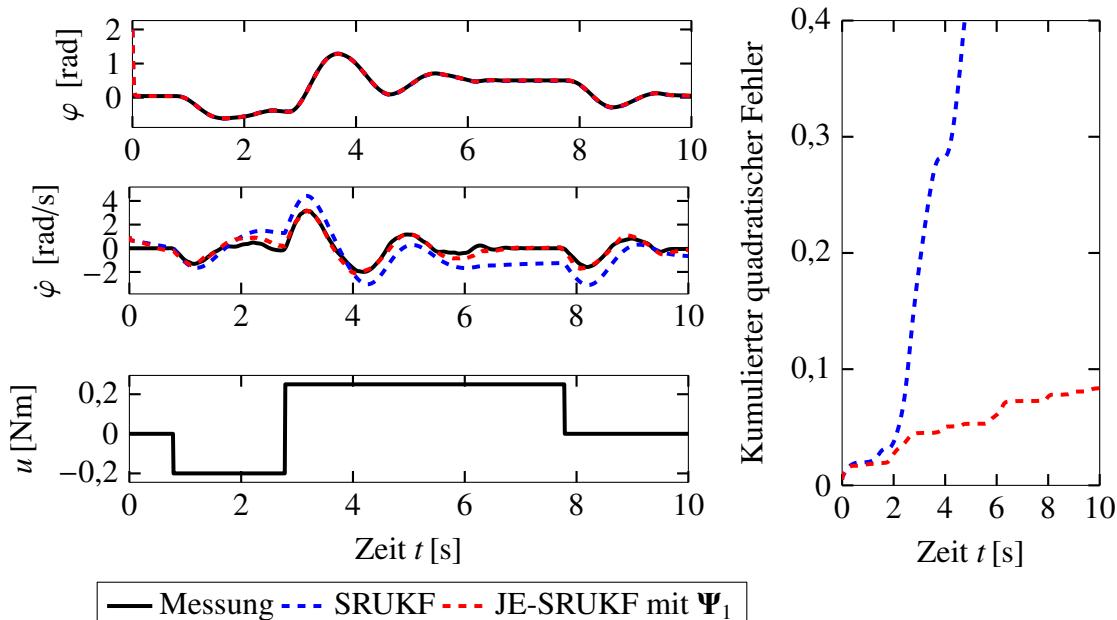


Abbildung 4-12: Qualität der Zustandsschätzung bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1$  und im Vergleich zum klassischen SRUKF, das mittels des Modells (A6-2) schätzt

Die Analyse der Parameter, welche in der Abbildung 4-13 zu sehen sind, weist auf eine weniger gut geeignete Bibliothek hin, da zunächst nur die Konstanten  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  durch den Parameter  $\hat{\theta}_1$  präsent sind, welche keine hilfreiche, physikalisch präzise Identifikation der Modellgenauigkeit erlauben. Gegen Ende des betrachteten Zeitraums ist sogar eine starke Divergenz der Parameter  $\hat{\theta}_3$  und  $\hat{\theta}_8$  zu beobachten. Diese resultiert aus der Problematik, dass ab etwa neun Sekunden sowohl der Eingang  $u \equiv 0$  bzw.  $u \approx 0$  als auch der Zustand  $\mathbf{x} \equiv 0$  bzw.  $\mathbf{x} \approx 0$  sind und aufgrund der mangelnden Dynamik keine Identifikation mehr durch den Beobachter stattfinden kann. Das in Kapitel 5 entwickelte Konzept zur Online-Modellaktualisierung berücksichtigt diese Situation, woraufhin eine sinnvolle Approximation der Modellgenauigkeit ermöglicht wird.

Um die Qualität der Approximation  $\hat{g}_1$  zu überprüfen, welche für den Golfroboter im Gegensatz zum Duffing-Oszillatator unbekannt ist, werden die aufgenommenen Messdaten mit dem Modell (A6-2) verglichen, woraufhin die Diskrepanz als  $g_{mess}$  bezeichnet wird. Diese ist in der Abbildung 4-14 als schwarze Trajektorie dargestellt, während die Approximation  $\hat{g}_1$  durch einen rot gestrichelten Verlauf abgebildet wird. Es ist zu erkennen, dass der qualitative Verlauf gut angenähert wird, die Approximation der Diskrepanz allerdings noch stark verrauscht ist und stellenweise stärkere Abweichungen aufweist. Aufgrund der Abbildung 4-12 kann jedoch gefolgert werden, dass die Approximationsgüte ausreichend hoch zu sein scheint, um eine hohe Schätzgüte zu erzielen.

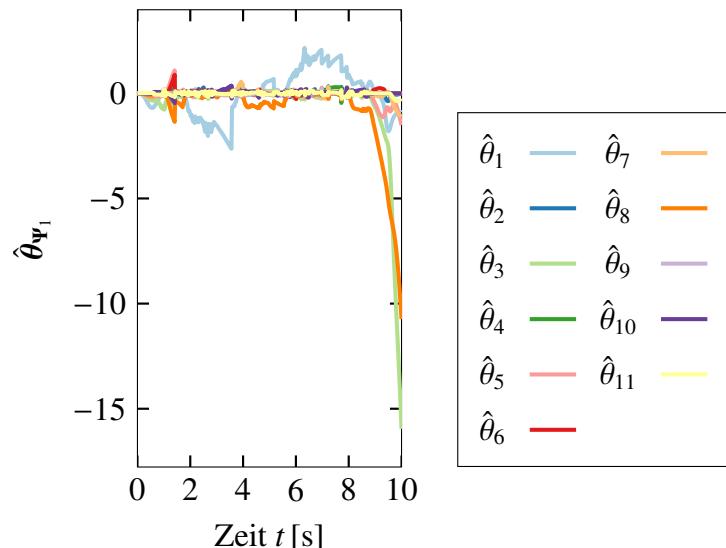


Abbildung 4-13: Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$ , wenn der augmentierte Beobachter die Bibliothek  $\Psi_1(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$  nutzt

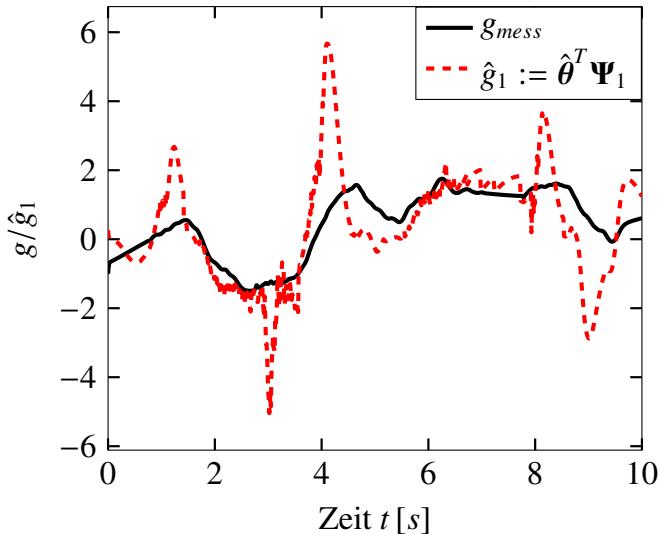


Abbildung 4-14: Approximation  $\hat{g}$  der Modellabweichung  $g_{mess}$  zwischen Messdaten und dem qualitativ minderwertigen Modell (A6-2)

Nach dieser vielversprechenden Evaluation wird der Regelkreis geschlossen, sodass das JE-SRUKF die Rolle des Beobachters vollständig ausübt. Dazu wird das Verhalten mit dem Luenberger-Beobachter verglichen, der in der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur am Prüfstand eingesetzt wird (vgl. Anhang A6.1), und in mehreren Versuchen evaluiert. Einen wesentlichen Einflussfaktor auf die Stabilität des Beobachters, aber auch auf seine Schätzgüte, stellt darüber hinaus die Wahl der Bibliotheksfunktionen dar. Die in der Tabelle 4-1 dargestellte Auswahl an Experimenten fasst daher die Auswirkung der Bibliothekswahl auf die Stabilität des JE-SRUKFs im offenen und geschlossen Regelkreis (ORK bzw. GRK) zusammen. Im ORK schätzt das JE-SRUKF parallel zum am Prüfstand verwendeten Luenberger-Beobachter, der mittels Gain-Scheduling die Schätzwerte für den Regler liefert, sodass ein Schlag ausgeführt werden kann (vgl. Anhang A6.1), während im geschlossenen Regelkreis die Rolle des Beobachters durch das JE-SRUKF ausgeübt wird. Neben der Anzahl der Terme wird insbesondere die Art der Zusammensetzung der Terme evaluiert. Die Ergebnisse in der Tabelle 4-1, die einen Auszug aus durchgeföhrten Experimenten darstellen, stützen die zuvor formulierte Forderung (4.6), dass die Bibliothek mindestens die Zustände, den Eingang sowie Konstanten enthalten muss. Da beispielsweise das JE-SRUKF mit der Bibliothek  $\Psi_6$  divergiert, welche sich zur im GRK funktionierenden Bibliothek  $\Psi_3$  nur durch die Berücksichtigung des Eingangs unterscheidet, wird die Forderung nach einer minimalen Bibliothek  $\Psi_0$  untermauert (vgl. Gleichung (4.6)). Darüber hinaus scheint eine gewisse Vielseitigkeit an Termen, jedenfalls für das Anwendungsbeispiel des Golfroboters bzw. der Approximation von Reibung und Dämpfung, erforderlich zu sein. Besteht die Bibliothek nur aus Polynomen, wie z. B.  $\Psi_1$ , kann dies das Risiko der Instabilität und Divergenz bergen, da die Dynamik nicht genau genug über eine Reihenentwicklung aufgrund der dem widersprechenden Sparsity-Bedingung angenähert

werden kann. Die Ergebnisse dieses Versuchs sind zur Illustration in den Abbildungen 4-15 und 4-16 dargestellt. Erstere bildet die gemessenen Trajektorien des JE-SRUKFs in rot-gestrichelt ab, welche trotz Stabilität und vielversprechender Schätzgüte im ORK kurz vor dem Schlag divergieren (vgl. Abbildung 4-12). Dies ist ebenso anhand der Parameterverläufe in der Abbildung 4-16 zu erkennen. Eine ausgewogen gewählte Bibliothek ist somit für die Anwendung am Prüfstand unerlässlich.

Bibliothek $\Psi(x, u)$	$n_\theta$	ORK	GRK
$\Psi_1 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$	11	✓	✗
$\Psi_2 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, \cos(x_1), \cos(x_2), \tanh(x_1), \tanh(x_2), u)^T$	11	✓	✓
$\Psi_3 = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), x_2^2, x_2^3, u)^T$	7	✓	✓
$\Psi_4 = (1, x_1, x_2, \sin(x_1), x_2^2, x_2^3, u)^T$	7	✓	✓
$\Psi_5 = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), \tanh(x_2), x_2^3, u)^T$	7	✓	✓
$\Psi_6 = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), x_2^2, x_2^3)^T$	6	✓	✗
$\Psi_7 = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), u)^T$	5	✓	✗

Tabelle 4-1: Auszug aus Experimenten am Prüfstand zur Stabilität unterschiedlicher Arten von Bibliotheken  $\Psi$  hinsichtlich der Nutzung im offenen (ORK) und geschlossenen Regelkreis (GRK): Ein Kreuz markiert einen divergierenden Beobachter. Ein Haken repräsentiert einen funktionierenden Beobachter.

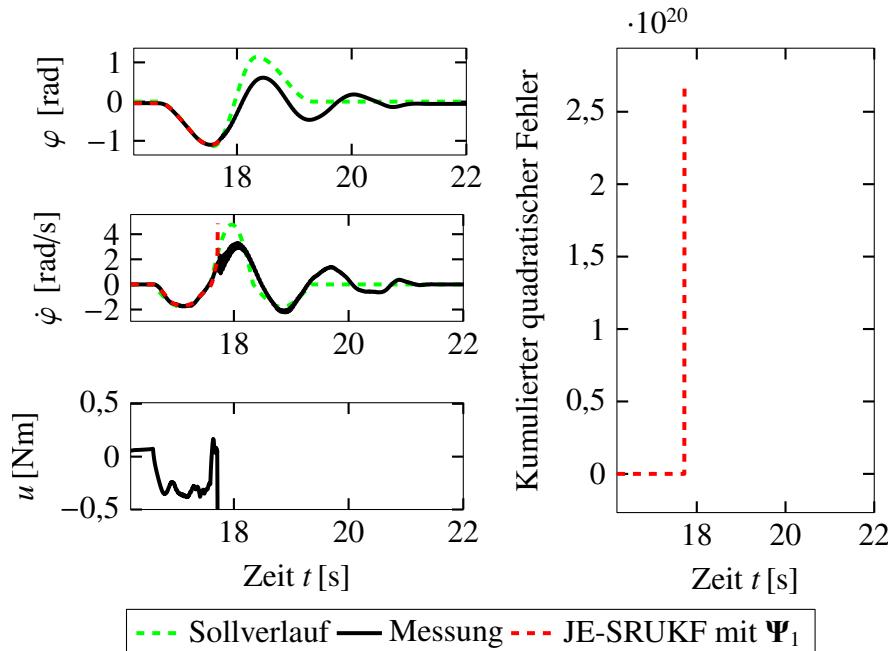


Abbildung 4-15: Qualität der Zustandsschätzung im geschlossenen Regelkreis bei gewählter Bibliothek  $\Psi_1$  am Prüfstand, vgl. Tabelle 4-1

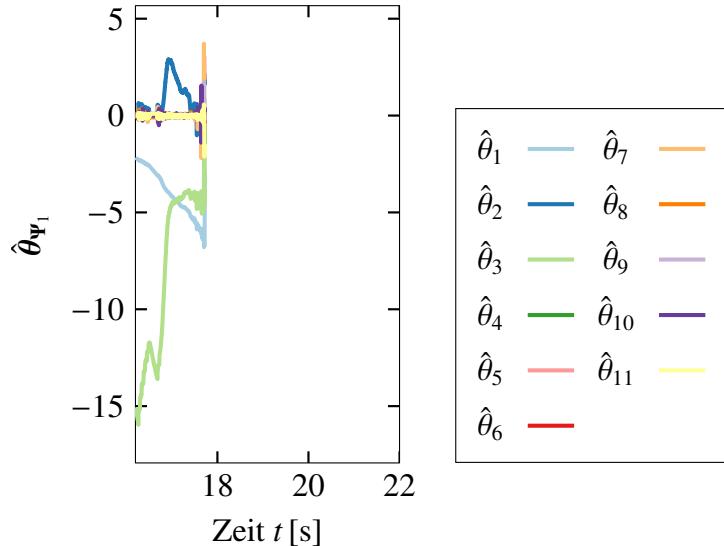


Abbildung 4-16: Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$ , wenn der augmentierte Beobachter die Bibliothek  $\Psi_1(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2x_2, x_2^2x_1, u)^T$  nutzt

Die finale Erkenntnis aus den Versuchen orientiert sich an der Anzahl  $n_\theta$  der Bibliotheks-funktionen  $\psi_i$ : Eine zu kleine Bibliothek, die wenig Spielraum für die Approximation zulässt, scheint eine höhere Wahrscheinlichkeit aufzuweisen, im GRK zu divergieren als eine Bibliothek mit vielseitigen Möglichkeiten (vgl. Bibliothek  $\Psi_7$  vs. Bibliothek  $\Psi_2$ ). Wird eine ausgewogene Bibliothek gewählt, die neben der minimalen Bibliothek  $\Psi_0$  auch vielfältige dynamische Terme aufweist, welche zudem physikalisches Vorwissen einbringen, sind im Gegensatz zum vorigen Experiment ein stabiler Betrieb des Beobachters sowie zuverlässige Schätzungen zu erwarten. Die Größe der Bibliothek ist dabei entscheidend: Ist diese zu klein gewählt, indizierten die Experimente einen divergierenden Beobachter, wohingegen bis zu  $n_\theta \leq 15$  Bibliotheksterme eine zuverlässige Schätzung erlaubten. Für die Bibliothek  $\Psi_2$  zeigen beispielsweise die Abbildungen 4-17 und 4-18 Mes-sungen vom Prüfstand. Erstere stellt die Zustandsverläufe des geschlossenen Regelkrei-ses dar: Der Ist-Verlauf folgt dem Soll-Verlauf, welcher aufgrund der Deckungsgleichheit kaum zu erkennen ist. Hierbei schätzt der augmentierte Beobachter die Zustände im Ver-gleich zum Luenberger-Beobachter sogar genauer, was insbesondere durch den berechne-ten Fehler verdeutlicht wird. Die dazugehörigen Parameterverläufe sind in der oberen Zei-le der Abbildung 4-18 dargestellt und deuten auf eine überlagerte Identifikation der Reibung durch die Terme  $\psi_{11}(\mathbf{x}, u) = u$ ,  $\psi_8(\mathbf{x}, u) = \cos(x_2)$ ,  $\psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2$  und  $\psi_2(\mathbf{x}, u) = x_1$  hin, da deren Parameter überwiegend genutzt werden. Die Sparsity-Bedingung ist da-mit zwar umgesetzt, denn die meisten der elf Parameter sind durchgehend Null, aber eine Interpretation der Approximation ist aufgrund der nicht eindeutigen Konvergenz der Para-meter weiterhin herausfordernd. Kapitel 5 wird diese Problematik schließlich durch eine automatisierte, statistische Auswertung der Parameterverläufe adressieren.

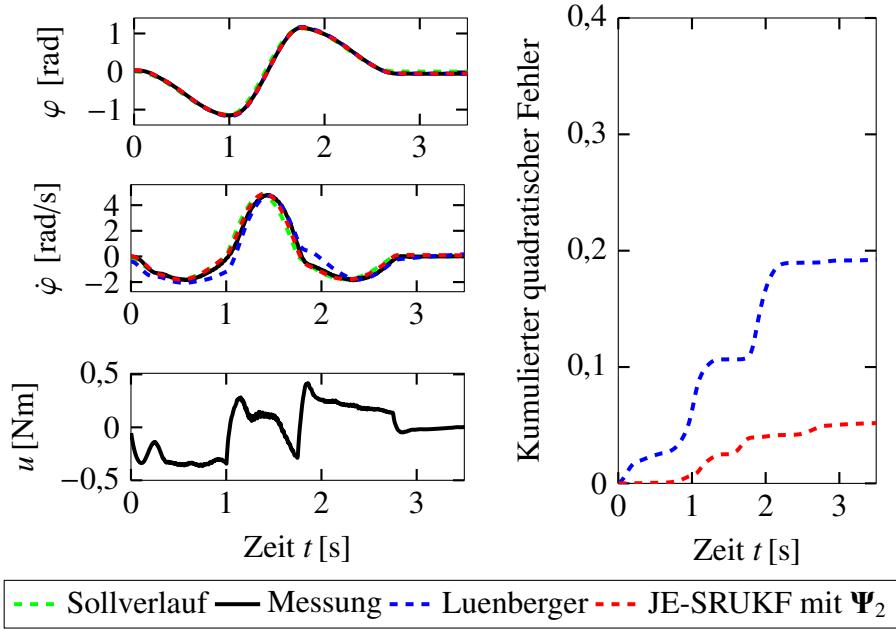


Abbildung 4-17: Qualität der Zustandsschätzung im Vergleich zum Luenberger-Beobachter im geschlossenen Regelkreis bei gewählter Bibliothek  $\Psi_2$  am Prüfstand, vgl. Tabelle 4-1

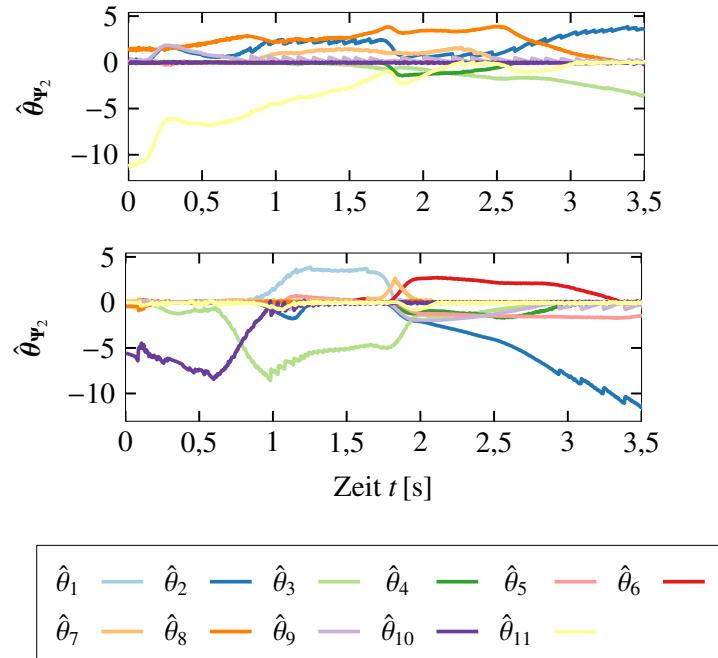


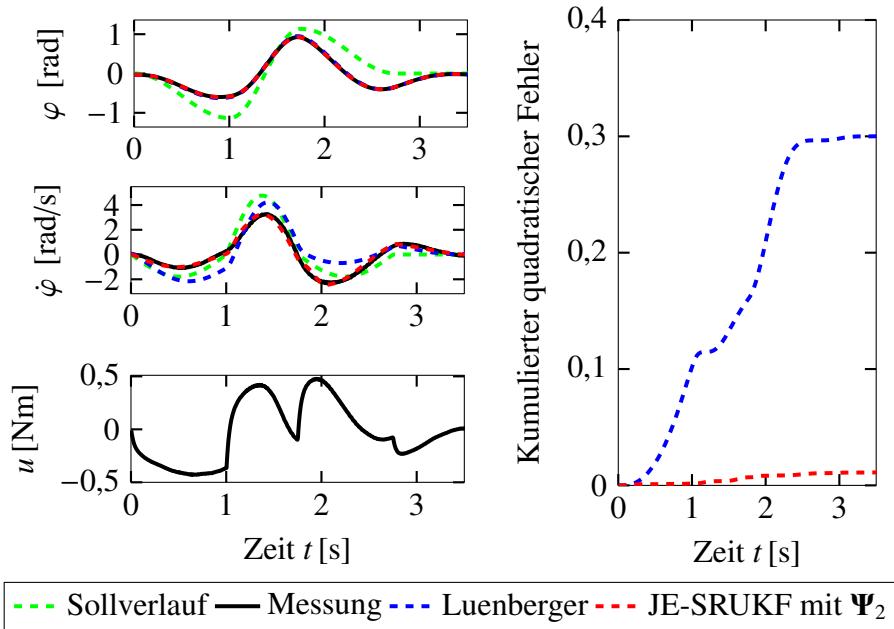
Abbildung 4-18: Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$ , wenn keine Systemveränderungen vorliegen (oben, vgl. Abbildung 4-17) bzw. Systemveränderungen existieren (unten, vgl. Abbildung 4-19, [GT24]) und jeweils die Bibliothek  $\Psi_2(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, \cos(x_1), \cos(x_2), \tanh(x_1), \tanh(x_2), u)^T$  genutzt wird

Wird am Schläger des Golfroboters eine zusätzliche Masse angebracht, so kann dies als Systemveränderung interpretiert werden. Im nachfolgenden Experiment ist die Masse des Schlägers verdoppelt worden, ohne dass das Modell des Golfroboters angepasst wurde (vgl. [JPTT23]), während fortan die Bibliothek  $\Psi_2$  genutzt wird. In der Abbildung 4-19 ist die Auswirkung dieser Systemveränderung auf die Schätz- und Regelgüte zu erkennen. Da die Vorsteuerung und der Regler weiterhin mit dem unveränderten, nichtlinearen Modell (3.4) berechnet werden, ist aufgrund der Systemveränderung eine Abweichung von den Solltrajektorien und ein im Vergleich zur Abbildung 4-17 verändertes Motormoment zu erkennen. Allerdings gelingt es dem JE-SRUKF mit der Bibliothek  $\Psi_2$  (vgl. Tabelle 4-1), die Ist-Trajektorien sehr genau zu schätzen. Im Gegensatz dazu ist es dem Luenberger-Beobachter aufgrund seiner nicht-adaptiven Struktur nicht möglich, die Geschwindigkeit des Schlags korrekt zu erfassen, was der kumulierte quadratische Fehler in der rechten Visualisierung bestätigt. Stattdessen müssten die linearisierten Modelle des Luenberger-Beobachters rekursiv angepasst werden, um ebenso geeignet auf Systemveränderungen reagieren zu können (vgl. [JPTT23; IM11]). Die Parameter des augmentierten Beobachters sind schließlich in der Abbildung 4-18 in der unteren Zeile dargestellt. Je nach Phase des Schlags<sup>39</sup> identifiziert das Verfahren unterschiedliche relevante Terme aufgrund der Systemveränderung. Da nicht nur das Reibmoment  $M_d$  kompensiert werden muss, sondern sich die veränderte Masse auch auf die Trägheit und Pendelbewegung auswirkt, weist das Modell (A6-2) eine fehlerhafte Parametrierung auf, die zusätzlich kompensiert werden muss und daher eine eindeutige Identifikation von Termen für den gesamten Zeitraum verhindert. So findet der Beobachter beispielsweise heraus, dass während des Schlags eine Kompensation durch die Geschwindigkeit, Konstanten und Gewichtskraft (vgl.  $\psi_7$ ) ausreicht, da zum Zeitpunkt  $t = 1,5$  s Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{2,t=1,5} \approx & 3.48 - 0,02x_1 - 5,11x_2 + 0,01x_1^2 + 0,29x_2^2 + 0,09x_1x_2 + 0,27 \cos(x_1) \\ & + 0,03 \cos(x_2) + 0,03 \tanh(x_1) - 0,08 \tanh(x_2) - 0,06u.\end{aligned}$$

Dagegen erfordert das Rückholen des Schlägers die Beschreibung von Winkel sowie Winkelgeschwindigkeit durch  $\psi_2(\mathbf{x}, u) = x_1$  und  $\psi_6(\mathbf{x}, u) = x_1x_2$ , um die veränderte Gewichtskraft und Trägheit für die Kinetik zu berücksichtigen und den Schläger in die Nullposition zurück zu befördern. Somit zeigt dieses Experiment den Vorteil der Nutzung des JE-SRUKFs auf: Potentielle Systemveränderungen stellen bei geeignet gewählter Bibliothek keine Herausforderung dar, sodass eine hohe Schätzgüte gewährleistet werden kann. Kapitel 5 entwickelt ferner eine Modelladaption basierend auf den Daten des augmentierten Beobachters, welche im Fall einer Systemveränderung zur Robustheit des Beobachters beiträgt und für Vorsteuerung und Regler vorteilhaft sein kann (vgl. Abbildung 4-19).

<sup>39</sup>Ausholen des Schlägers, Schlag, Rückholen des Schlägers, vgl. Abbildung A6-3



*Abbildung 4-19: Qualität der Zustandsschätzung im Vergleich zum Luenberger-Beobachter im geschlossenen Regelkreis bei Systemveränderungen und Verwendung der Bibliothek  $\Psi_2$  am Prifstand, vgl. Tabelle 4-1, [GT24]*

Die Anwendung am Golfroboter zeigt somit, dass die Methode des JE-SRUKFs nicht nur für ein Simulationsbeispiel wie den Duffing-Oszillatator geeignet ist, sondern auch zuverlässige Schätzungen in der Prifstands- und Echtzeitanwendung im geschlossenen Regelkreis im Zusammenspiel von Regler und Vorsteuerung ermöglicht. Allerdings zeigen die Untersuchungen, dass der Einfluss der Bibliothek entscheidend für die Stabilität und Schätzgüte des Beobachters ist, da bei einer zu einseitigen oder klein gewählten Bibliothek ein divergierendes Verhalten auftreten kann (vgl. Abbildung 4-15). Wird eine geeignete Bibliothek gewählt, werden sowohl Anforderung **F.1**, eine hohe Schätzgüte trotz Modellgenauigkeiten zu erzielen, sowie Anforderung **F.2**, eine interpretierbare Darstellung der Modellgenauigkeit zu finden, erfüllt (vgl. Abbildung 4-17). Ebenso ist durch die parametrische Darstellung eine Nutzbarkeit für weitere Schritte (vgl. Anforderung **F.3**) gegeben. Kapitel 5 wird zeigen, dass diese temporäre Schätzung der Modellgenauigkeiten basierend auf statistischen Methoden zur Modelladaption verwendet werden kann und hierbei für den Fall des Golfroboters ähnliche Terme zum Dämpfungsmoment  $M_d$  (3.5) identifiziert werden können. Daher gelingt es durch Umsetzung der Anforderung **F.4**, eine Lösungsmethode anzubieten, die zuverlässige Schätzungen bei existierenden Modellgenauigkeiten und eine Identifikation dieser erlaubt. Dies wird sogar in der Situation von Systemveränderungen gewährleistet, wie der Versuch in der Abbildung 4-19 bestigt. Nachdem das Verfahren am Prifstand validiert worden ist, wird im folgenden Abschnitt ein komplexeres Simulationsbeispiel betrachtet, bei dem die Modellgenauigkeiten nicht mehr additiv, sondern multiplikativ in das System eingehen.

### Evaluation an der Windenergieanlage nach Ritter

Die bisher betrachteten Anwendungen kennzeichnen sich durch rein additive Modellgenauigkeiten, welche z. B. aufgrund von Dämpfung oder Reibung resultieren. In der Modellierung von Windenergieanlagen spielt jedoch der Einfluss des Windes eine große Rolle, dessen Geschwindigkeit nicht immer genau genug gemessen werden kann und der daher als Störgröße modelliert wird. Aufgrund der starken Wirkung auf die Dynamik der Windenergieanlage wird diese Störgröße daher als Modellgenauigkeit aufgefasst und soll mittels des augmentierten Beobachters geschätzt werden. Als Beispiel dient ein zweidimensionales Modell einer Windenergieanlage aus der Dissertation [Rit20] bzw. der dazugehörigen Publikation [SR20], auf deren Grundlage das Referenzmodell simuliert und reale Winddaten genutzt werden können. Eine Zeichnung des Systems mit den relevanten physikalischen Größen ist in der Abbildung 4-20 abgebildet.

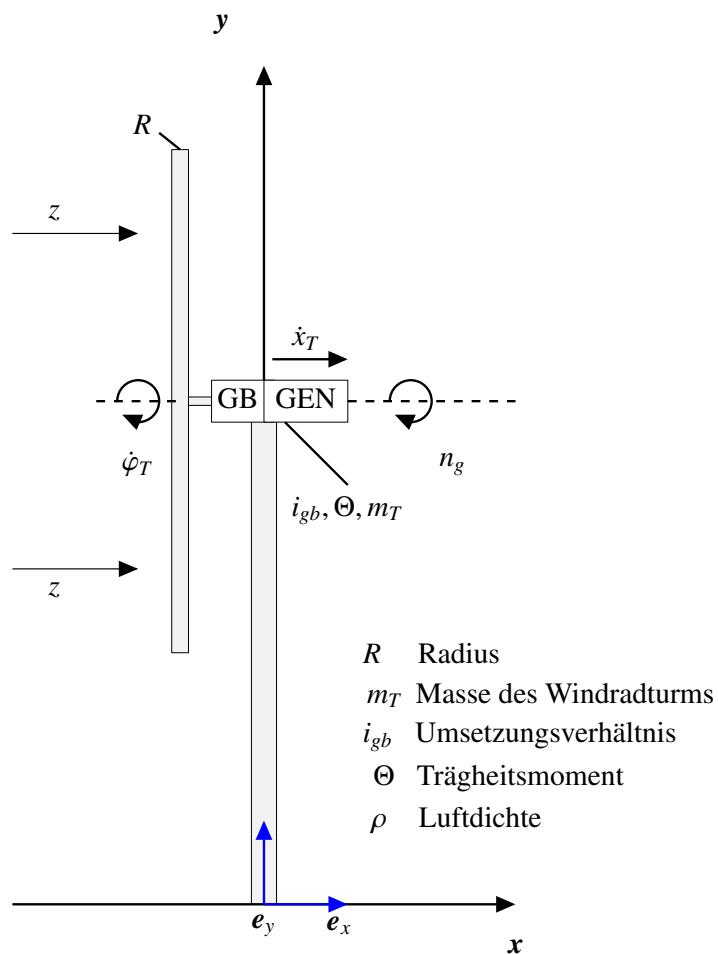


Abbildung 4-20: Seitenansicht einer Windenergieanlage mit freundlicher Genehmigung von B. Ritter (vgl. [Rit20])

Der Zustand der Windenergieanlage besteht dabei aus dem Rotorwinkel  $\varphi_T$  und der Position der Gondel  $x_T$  sowie deren Geschwindigkeiten, sodass  $\mathbf{x} = (\varphi_T, \dot{\varphi}_T, x_T, \dot{x}_T)^T$  gilt. Daneben wird die Windgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung als Störgröße  $z$  modelliert. Somit kann das Modell der zweidimensionalen Windenergieanlage nach [Rit20; SR20] definiert werden durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{\rho}{2} \frac{\pi R^3}{\Theta} C_M(\lambda) \cdot (z - x_4)^2 - \frac{i_{gb}}{\Theta} u \\ x_4 \\ \frac{\rho}{2} \frac{\pi R^2}{m_T} C_T(\lambda) \cdot (z - x_4)^2 - 2D\omega_0 x_4 - \omega_0^2 x_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y} &= \left( \frac{30}{\pi} i_{gb} x_2, \frac{\rho}{2} \frac{\pi R^2}{m_T} C_T(\lambda) \cdot (z - x_4)^2 - 2D\omega_0 x_4 - \omega_0^2 x_3 \right) \\ &= (n_g, \dot{x}_4).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Die aerodynamischen Eigenschaften des Rotors werden dabei durch die Koeffizienten der Momente und des Schubs  $C_M(\lambda)$  bzw.  $C_T(\lambda)$  dargestellt, welche aus einer geschwindigkeits- und drehzahlbasierten Relation resultieren. Kurzdetails zu diesen Zusammenhängen sowie die Parameterwerte<sup>40</sup> finden sich im Anhang A6.5 in der Tabelle A6-6 und bzgl.  $\lambda$  in den Gleichungen (A6-6) und (A6-7). Für ausführliche Informationen wird auf [Rit20; SR20] verwiesen. Die Geschwindigkeit des Generators  $n_g$  sowie die Beschleunigung der Gondel  $\ddot{x}_T$  stellen die Messgrößen dar. Als Eingang dient das Moment  $u$  des elektrischen Generators, welches mittels eines nichtlinearen Reglers mit  $u = k_p \cdot n_g^2$  bestimmt wird (vgl. [SR20]). Ziel ist es im Folgenden, die Windgeschwindigkeit, welche in der Abbildung 4-21 dargestellt ist, sowie die Position des Turmkopfes, dessen Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Rotorwinkels zu schätzen, um die Windenergieanlage sicher betreiben zu können.

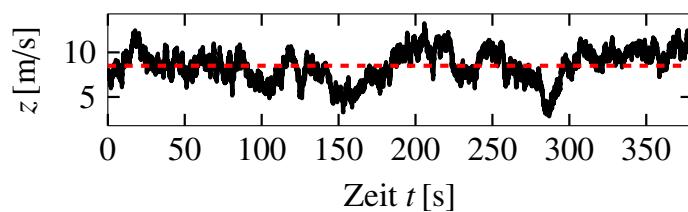


Abbildung 4-21: Beispielhafter Verlauf von Realdaten der Windgeschwindigkeit  $z$  in  $x$ -Richtung mit Mittelwert 8,5 m/s in rot und freundlicher Genehmigung von B. Ritter (vgl. [Rit20])

Obwohl die Windenergieanlage ein eingangsaffines System ist und in die Form (4.4) transformiert werden kann, stellt es aufgrund der multiplikativen Ungenauigkeit, die durch den

<sup>40</sup>Die Parameter  $\lambda$ ,  $\Theta$  und  $\rho$  stellen aufgrund der Notation in [SR20] ausschließlich in diesem Abschnitt physikalische Parameter der Windenergieanlage dar.

Term  $(z - x_4)^2$  entsteht, ein komplexes und herausforderndes Beispiel im Vergleich zu den vorigen Applikationen dar. Um diese Komplexität etwas zu reduzieren, ist es im Beobachterentwurf üblich, ein Störmodell für eine Störung anzunehmen [FKL<sup>+</sup>22]. Dieses zusätzliche Vorwissen kann anschließend in das augmentierte Modell (4.5) eingebracht werden. Exemplarisch wird ein konstantes Störmodell für die Windgeschwindigkeit angenommen, sodass  $\dot{z} = 0$  gilt. Dies erscheint aufgrund der Struktur der Winddaten, welche in der Abbildung 4-21 abgebildet sind und um einen Mittelwert von etwa 8,5 m/s<sup>41</sup> variieren, eine sinnvolle Wahl zu sein. Wird die Windgeschwindigkeit wiederum als Linear-kombination aus geeigneten Bibliotheksfunktionen angenähert (vgl. Gleichung (4.2)), so ergibt sich Folgendes, wobei aufgrund der Übersichtlichkeit die Abhängigkeiten der Bibliothek  $\Psi(x, u)$  vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\theta^T \Psi) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \dot{\theta}^T \Psi + \theta^T \dot{\Psi} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \dot{\theta}^T \Psi &= -\theta^T \dot{\Psi} \\
 \Leftrightarrow \Psi^T \dot{\theta} &= -\dot{\Psi}^T \theta \\
 \Leftrightarrow (\Psi^T)^+ \Psi^T \dot{\theta} &= -(\Psi^T)^+ \dot{\Psi}^T \theta \\
 \Leftrightarrow \dot{\theta} &= -(\Psi^T)^+ \dot{\Psi}^T \theta.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Nach der Umformulierung der obigen Gleichung (4.20) dient schließlich die letzte Zeile, bei der  $(\Psi^T)^+$  die Pseudoinverse von  $\Psi^T$  darstellt, als Dynamikvorschrift für die Parameter im augmentierten Modell (4.15). Dies steht im Kontrast zur bisherigen Modellierung der zeitinvarianten Parameter und resultiert aus der Berücksichtigung des Vorwissens. Anschließend wird die Bibliothek  $\Psi_1(x, u, t) = (1, \cos(20 \cdot t), 0,001 \cdot t, x_1, x_3)^T$  gewählt, welche neben den üblichen Konstanten und Zuständen auch Zusammenhänge zur Zeit aufweist, da z. B. Korrelationen zwischen der Biegung des Turms, entsprechend  $x_3$ , und der Windgeschwindigkeit zu vermuten sind. Hierbei ist anzumerken, dass diese Bibliothek entgegen der Formulierung (4.6) zur Vereinfachung und Übersichtlichkeit nur einen Teil der Zustände enthält, da die Bibliothek  $\Psi$  aufgrund der Berücksichtigung des zusätzlichen Vorwissen nach Gleichung (4.20) differenziert werden muss. Kommen die Zustände  $x_2$  und  $x_4$  hinzu, ergibt sich ein sehr ähnliches Resultat. Daraufhin wird das erweiterte Modell der Windenergieanlage formuliert und mit der Parameterdynamik basierend auf einem konstanten Störmodell in Simulationen eingesetzt, deren Ergebnisse

---

<sup>41</sup>Dies entspricht laut dem deutschen Wetterdienst und der Beaufort-Skala frischem Wind, vgl. <https://www.dwd.de/DE/service/lexikon/Functions/glossar.html?lv3=100390&lv2=100310>, abgerufen am 06.12.2023.

in der Abbildung 4-22 dargestellt sind. Dabei wird auf die Darstellung des Rotorwinkels verzichtet, da dieser Integratorverhalten aufweist und für die Regelung irrelevant ist. Die Windgeschwindigkeit, welche die Windenergieanlage erfährt, ist bereits in der Abbildung 4-21 dargestellt worden. Da die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_T$  indirekt durch den Messwert  $n_g$  zu bestimmen ist, konvergiert der Anfangsfehler schnell, sodass  $\dot{\varphi}_T$  sehr gut geschätzt wird. Ebenso gelingt es trotz Unkenntnis der Störung  $z$ , die Position und Geschwindigkeit des Turmkopfes der Windenergieanlage gut anzunähern. Allerdings ist die Konvergenz aufgrund des fehlerhaften Initialwerts deutlich langsamer und es dauert etwa 50 Sekunden, bis  $\hat{x}_T$  bzw.  $\dot{\hat{x}}_T$  die tatsächlichen Zustände erreichen. Dabei weist die Position sogar ein dauerhaftes Offset auf. Grundsätzlich erlaubt das JE-SRUKF folglich eine ausreichend genaue Schätzgüte trotz der Störung  $z$ , weist jedoch aufgrund der multiplikativen Struktur jener Beeinträchtigungen bzgl. der Schätzgüte auf. Diese zeigen daher Limitationen des augmentierten Beobachterentwurfs auf, welche ggf. durch eine angepasste Systemformulierung in den Voraussetzungen des Beobachterentwurfs (vgl. Abschnitt 4.2) aufgeweicht werden können.

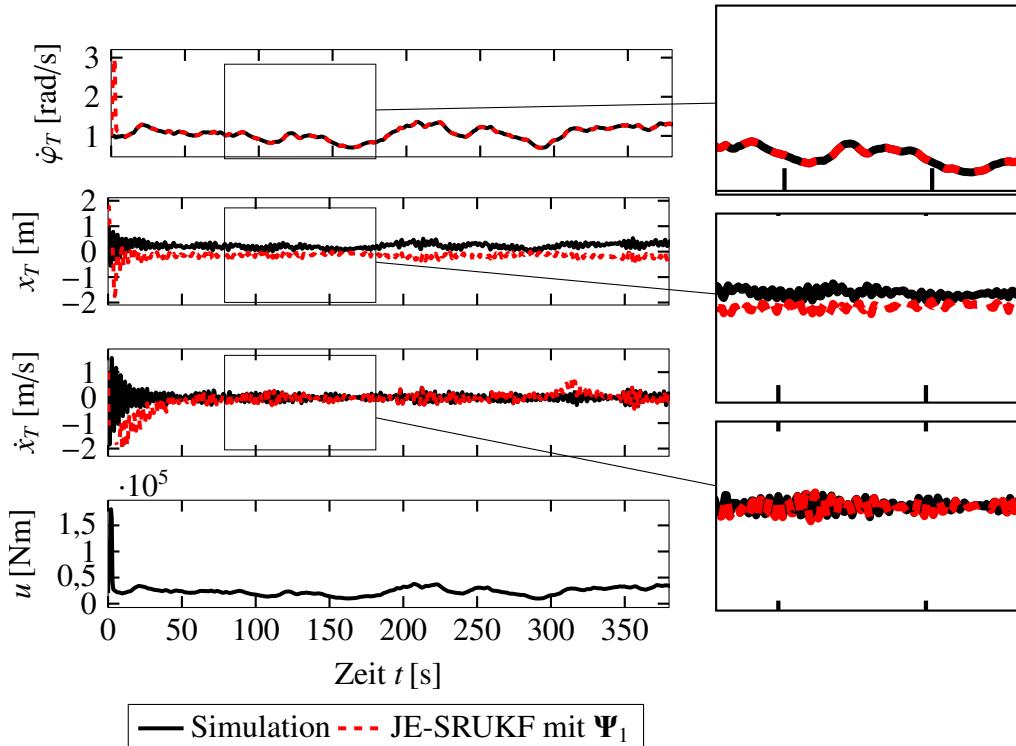


Abbildung 4-22: Qualität der Zustandsschätzung bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1$ , wenn die Windgeschwindigkeit  $z$  unbekannt ist

Um die Schätzung und Identifikation der multiplikativen Unsicherheit zu analysieren, wird der zeitliche Verlauf der Parameter der Linearkombination in der Abbildung 4-23 betrachtet. In der oberen Visualisierung zeigt sich für alle Parameter eine eindeutige und schnelle Konvergenz. Außer  $\hat{\theta}_5$ , der gegen 1,1 strebt, konvergieren alle Parameter zu Null

oder oszillieren mit geringer Amplitude um Null, was insbesondere die Vergrößerung in der unteren Zeile der Abbildung deutlich herausstellt. Somit identifiziert das JE-SRUKF den fünften Term als denjenigen, der zur Charakterisierung der Windgeschwindigkeit dient. Dies ist plausibel, da die Durchbiegung des Turmkopfes der Windenergieanlage in direktem Zusammenhang zur Windgeschwindigkeit steht. Werden die Zustände der Geschwindigkeiten ebenfalls in der Bibliothek berücksichtigt, stellt sich ein ähnliches Ergebnis ein: Zusätzlich zur Position des Turms  $x_3$  detektiert der augmentierte Beobachter die Geschwindigkeit des Turmkopfes  $x_4$ , welche ebenfalls in direkter Relation zur Windgeschwindigkeit aus  $x$ -Richtung steht.

Wird die Linearkombination, welche  $\hat{z}$  nach Glättung des Signals darstellt, nun mit der Windgeschwindigkeit  $z$  verglichen, zeigt die obere Grafik in Abbildung 4-24, dass die Approximation qualitativ gelingt, da sich nach etwa 50 Sekunden eine Konvergenz zum Mittelwert der Windgeschwindigkeit  $z$  einstellt. Allerdings zeigt die untere Grafik in der Vergrößerung, dass der qualitative Verlauf mit einzelnen Schwingungen gut abgebildet wird, aber phasenverzögert erfolgt. Dies erlaubt daher keine exakte Approximation der Windgeschwindigkeit. Die Methode weist folglich Limitationen auf, da keine Verbesserung im Vergleich zu bestehenden Verfahren erreicht werden konnte [SR20; Rit20]. Dennoch zeigt der augmentierte Ansatz des JE-SRUKFs für eine solche Ungenauigkeit, deren Charakter rauschbehaftet ist und die multiplikativ in das Modell eingeht (vgl. Gleichung (4.19)), das vielversprechende Potential auf, einerseits eine hohe Schätzgüte (vgl. Anforderung F.1) und andererseits eine sinnvolle, parametrische Darstellung der Modellgenauigkeit bzw. Störung (vgl. Anforderung F.2+) zu erzielen.

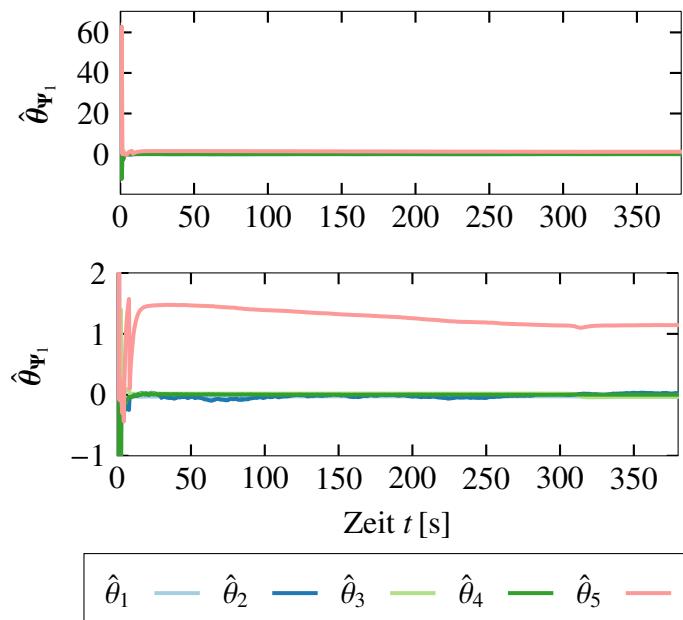


Abbildung 4-23: Zeitlicher Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$  (oben), Vergrößerung (unten), bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1(\mathbf{x}, u, t) = (1, \cos(20 \cdot t), 0,001 \cdot t, x_1, x_3)^T$

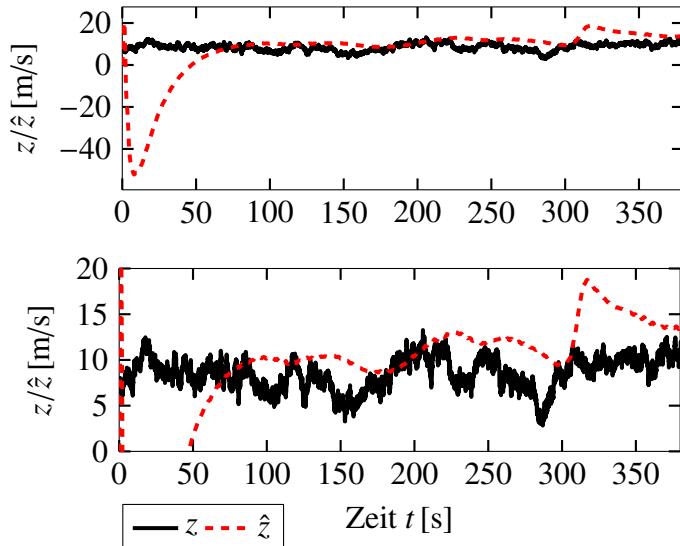


Abbildung 4-24: Approximation  $\hat{z}$  im Vergleich zur gemessenen Windgeschwindigkeit  $z$  (oben), Vergrößerung (unten)

## 4.4 Strukturell effizienter, augmentierter Beobachterentwurf

Das Vorgehen aus Abschnitt 4.3 setzt die Forderung **F.2+** durch eine feste Schranke um, welche die Anzahl der Nichtnullelemente überprüft. Obwohl der gewünschte Effekt, einen dünnbesetzten Parametervektor  $\theta_k$  zu erhalten, eintritt, erfordert diese Umsetzung die Festlegung weiterer Hyperparameter, wie die Schrankenhöhe  $\tilde{\lambda}$  oder die Anzahl der erlaubten Nichtnullelemente  $n_{\theta,act}$ . Aufgrund der Vielzahl von Einstellparametern entsteht so ein deutlich komplexeres Initialisierungsproblem, was insbesondere an den rauschbehafteten Verläufen der Parameter erkennbar ist. Da das SRUKF strukturell jedoch aus einer stochastischen Perspektive motiviert ist, stellt die Berücksichtigung von Vorwissen durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine wesentlich elegantere und effizientere Möglichkeit dar [HTW15; GT23a]. Somit wird die Forderung **F.2+** zunächst durch ein stochastisches Vorwissenmodell im Abschnitt 4.4.1 basierend auf [HTW15; HBK22] motiviert und definiert. Anschließend wird dieses Vorwissenmodell innerhalb des Filters im Abschnitt 4.4.2 umgesetzt. Daraufhin werden wie beim Entwurf zuvor im Abschnitt 4.4.3 anhand ausgewählter Anwendungen die Funktionsweise und die Qualität des Entwurfs beleuchtet. Teile dieses Abschnitts finden sich bereits in der Vorveröffentlichung [GT23a].

### 4.4.1 Motivation durch die Filterstruktur

Um die Forderung **F.2+** effizienter umzusetzen, kann die Struktur des SRUKFs ausgenutzt werden. Dies gelingt, indem die Sparsity-Bedingung stochastisch formuliert wird. Die Kalman-Filter, im Besonderen daher auch das SRUKF, basieren auf der Annahme, dass

der Zustand sowie dessen zeitliche Dynamik und Beobachtung Gauß-verteilt sind, z. B. dass  $\tilde{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  gilt (vgl. Abschnitt 2.2). Nun lässt sich die Sparsity-Bedingung **F.2+** nicht nur durch die Überprüfung der Anzahl der Nichtnullelemente ausdrücken (vgl. Gleichung (4.7)), sondern auch durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Parameter  $\theta$  modellieren. Eine sehr bekannte Verteilung, welche diese Eigenschaft in natürlicher Weise kodiert, ist die Laplace-Verteilung [Mur12; HTW15]. Deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird für ein  $\theta_i \in \mathbb{R}$  mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{b} \in \mathbb{R}^+$  durch

$$p(\theta_i | \mu, \tilde{b}) = \frac{1}{2\tilde{b}} e^{-\frac{|\theta_i - \mu|}{\tilde{b}}} \quad (4.21)$$

definiert. Dabei stellen  $\mu$  den Erwartungswert und  $\tilde{b}$  einen Skalierungsparameter dar. Für die Varianz einer Laplace-verteilten Zufallsvariable  $\theta_i \sim \text{Lap}(\mu, \tilde{b})$  gilt  $\sigma^2 = 2\tilde{b}^2$ . Aufgrund ihrer Form, welche beispielhaft im Vergleich zu Gauß-Verteilungen in der Abbildung 4-25 zu sehen ist, wird die Verteilung manchmal als Doppel-exponentialverteilung bezeichnet. Sie kennzeichnet sich durch das Zentrieren der Wahrscheinlichkeitsmasse um den Erwartungswert, was sich durch die Spitze um  $\mu = 0$  und durch ein steiles Gefälle hin zu den Rändern der Verteilung äußert. Diese Charakteristik ermöglicht eine robustere Modellierung von Ausreißern im Kontrast zur Gauß-Verteilung [Mur12; HTW15; PP06]. Dieselbe Eigenschaft ist für die Modellierung der dünnbesetzten Parameter  $\theta$  vorteilhaft, da zwar die meisten Elemente Null, einige wenige jedoch nicht Null sein sollen. Warum genau diese Verteilung eine Alternative zur Formulierung der  $\ell_1$ -Regularisierung in Gleichung (4.16) darstellt, wird der nachfolgende Abschnitt aufzeigen.

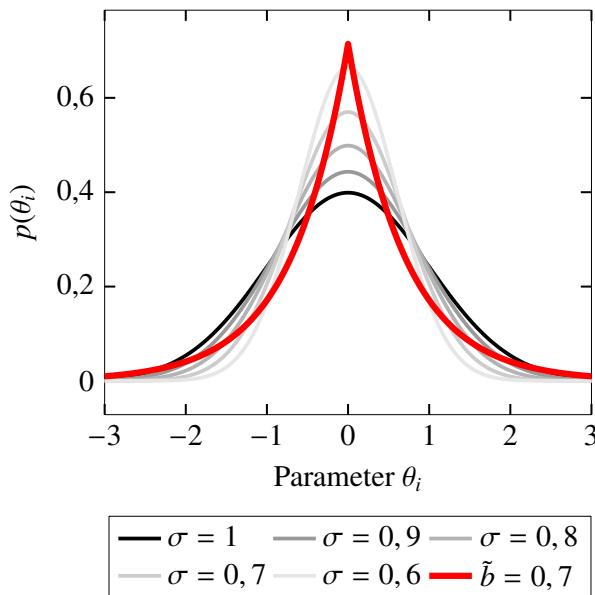


Abbildung 4-25: Laplace-Verteilung (visualisiert in rot) im Vergleich zu verschiedenen Gauß-Verteilungen (dargestellt durch variierende Farben von schwarz bis grau): Für alle abgebildeten Verteilungen gilt  $\mu = 0$ , vgl. [GT23a].

## Zusammenhang zur $\ell_1$ -Regularisierung

In der Bayesschen Schätzung wird die sogenannte *Posterior-Verteilung*<sup>42</sup>, verkürzt auch *Posterior* genannt, über das Maximum-A-Posteriori-Prinzip gewonnen. Dieses basiert auf dem Satz von Bayes (2.4), da der Posterior  $p(\theta | \mathbf{y})$  mithilfe einer dem Prozess zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung, der *Likelihood*  $p(\mathbf{y} | \theta)$ , und eines Vorwissenmodells, dem *Prior*  $p(\theta)$ , bestimmt werden kann. Die Maximierung des Postiors führt anschließend zur Schätzung der Parameter  $\hat{\theta}$ , wobei die Verteilung der Daten  $p(\mathbf{y})$  aufgrund ihrer Unabhängigkeit von den Parametern vernachlässigt werden kann:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} p(\theta | \mathbf{y}) = \arg \max_{\theta} \frac{p(\mathbf{y} | \theta) p(\theta)}{p(\mathbf{y})} \\ &= \arg \max_{\theta} p(\mathbf{y} | \theta) \cdot p(\theta) = \arg \max_{\theta} \log(p(\mathbf{y} | \theta) \cdot p(\theta)) \\ &= \arg \max_{\theta} (\log p(\mathbf{y} | \theta) + \log p(\theta)).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Mithilfe der obigen Herleitung ist das Ziel nun, die Parameter  $\hat{\theta}$  zu finden, welche den Zusammenhang der Zeitreihenmatrizen  $X$ ,  $Y$  mittels der Gleichung  $Y = \theta^T X + \epsilon$  approximieren. Hierbei gelten die Annahmen, dass die Likelihood  $p(Y | \theta)$  sowie das Rauschen  $\epsilon$  Gauß-verteilt und der Prior  $p(\theta)$  Laplace-verteilt sind (vgl. Gleichung (4.21)). Mithilfe der Logarithmus-Rechenregeln und der Negation des Maximierungsproblems ergibt sich daher ausgehend von der letzten Zeile der Herleitung (4.22) Folgendes:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} \left( \log \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(Y_i - \theta^T X_i)^2}{2\sigma^2}} + \log \prod_j \frac{1}{2\tilde{b}} e^{-\frac{|\theta_j|}{\tilde{b}}} \right) \\ &= \arg \max_{\theta} \left( - \sum_i \frac{(Y_i - \theta^T X_i)^2}{2\sigma^2} - \sum_j \frac{|\theta_j|}{\tilde{b}} \right) \\ &= \arg \min_{\theta} \left( \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (Y_i - \theta^T X_i)^2 + \frac{2\sigma^2}{\tilde{b}} \sum_j |\theta_j| \right) \\ &= \arg \min_{\theta} \frac{1}{2\sigma^2} \|Y - \theta^T X\|_2^2 + \tilde{\lambda} \|\theta\|_1.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Die letzte Zeile stellt dabei genau die  $\ell_1$ -Regularisierung (4.13) mit  $X := (\mathbf{H}\Psi)^T$  dar, wenn keine Nebenbedingung, sondern ein Regularisierungsterm formuliert wird. Demzufolge zeigen die Gleichungen (4.23) die Verwandtschaft der Bayesschen Schätzung mit der Laplace-Verteilung als Prior zur  $\ell_1$ -Regularisierung des LASSO-Verfahrens auf (vgl. Gleichung (3.3) mit  $\tilde{\lambda} = \frac{2\sigma^2}{\tilde{b}}$ , [HTW15; HBK22; Mur12]).

---

<sup>42</sup>Die Fachbegriffe Posterior, Likelihood und Prior entstammen dem Englischen und sind teilweise lateinischen Ursprungs. Da es keine adäquate, präzise Übersetzung dieser Begriffe ins Deutsche gibt, werden im Folgenden die englischen Termini verwendet.

Allerdings weist die Verwendung der Laplace-Verteilung als Prior zwei Nachteile auf. Erstens ist die Struktur des SRUKFs darauf ausgelegt, dass sowohl Prior als auch Likelihood Gauß-verteilt sind [vW01]. Ist dies nicht der Fall, ist die Struktur der Unscented Transform (UT), wie im Algorithmus 5 beschrieben, nicht mehr zutreffend. Es existieren vielfältige Erweiterungen und Generalisierungen der UT für beliebige Verteilungen, wie in [EBN<sup>+</sup>21]. Die Autoren entwickeln eine verallgemeinerte UT, welche nicht nur die ersten beiden Momente einer Verteilung approximiert, sondern auch ihr drittes und vierstes Moment. Somit können weitere Distributionen, beispielsweise Poisson- oder Gamma-Verteilung, genutzt werden [EBN<sup>+</sup>21]. Diese UT verursacht jedoch einen Mehraufwand in der Reformulierung des SRUKFs aufgrund der weiteren Momente. Da zweitens die Verwendung der Laplace-Verteilung als Prior nicht in einer Posterior-Verteilung resultiert, die Sparsity modelliert, muss über die aufwendige Reformulierung des SRUKFs nicht nachgedacht werden. Denn der Laplace-Posterior nähert den korrekten Erwartungswert an, weist aber weiterhin eine glockenförmige Gestalt auf, sodass die eindeutige Unterscheidung von Nichtnull- und Nullelementen erschwert wird [HTW15; HBK22].

Die Autoren in [HBK22] illustrieren diesen Effekt des entstehenden Posteriors mithilfe eines linearen Regressionsbeispiels, welches in dieser Arbeit ebenfalls zur Veranschaulichung dient. So liegen 400 Datensätze bestehend aus  $X \sim \mathcal{N}(0, 1) \in \mathbb{R}^{10}$  und  $Y$  vor, wobei Letzteres mit  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 0,5^2)$  und  $\theta = (0,3, 0,2, -0,3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  durch  $Y = \theta^T X + \epsilon$  resultiert. Soll der Koeffizientenvektor  $\theta$  identifiziert werden, ergibt sich bei der Wahl einer Laplace-Verteilung als Prior die linke Darstellung in der Abbildung 4-26. Diese zeigt die Posterior-Verteilungen für die einzelnen  $\theta_i$ , welche zwar eindeutig die ersten drei Nichtnullelemente erfassen, aber keine Distribution darstellen, die das Konzept Sparsity für die Nichtnullelemente modelliert. Dies wird besonders durch die leicht verschobenen Erwartungswerte der Parameter, z. B.  $\theta_6$  oder  $\theta_8$ , deutlich, welche die Unterscheidung in Nichtnull- und Nullelemente erschweren. Zudem stellt eine solche Posterior-Verteilung, welche keine Laplace-typische Form aufweist und somit keine Berücksichtigung der Bedingung **F.2+** ermöglicht, eine ungünstige Wahl für die fortlaufende Nutzung innerhalb eines Filters dar, wenn diese als Prior für den zukünftigen Schritt iterativ weiter verwendet wird. Daher wird der nächste Abschnitt Maßnahmen thematisieren, wie eine Verteilung formuliert werden kann, deren Verwendung als Prior das Konzept Sparsity für eine Posterior-Verteilung umsetzt und deren Einsatz innerhalb eines SRUKFs möglich ist.

### Imitation der Laplace-Verteilung

Da die Laplace-Verteilung aufgrund der diskutierten Ursachen eine ungünstige Wahl als Prior darstellt [HTW15; HBK22] und die Funktionalität des SRUKFs mit unveränderter

UT lediglich gegeben ist, wenn die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichte eine Gauß-Verteilung ist [vW01], scheidet die Modellierung  $\theta_i \sim \text{Lap}(0, \tilde{b})$  aus. Alternativ kann die Form der Laplace-Verteilung über eine Gauß-Verteilung imitiert werden, indem deren Varianz veränderlich formuliert wird, sodass sich die Gestalt der resultierenden Gauß-Verteilung fortwährend anpasst (vgl. Vorveröffentlichung [GT23a]). Damit kann die imitierte Laplace-Verteilung als Vorwissenmodell genutzt und innerhalb des SRUKFs verwendet werden, da es sich um eine Gauß-Verteilung handelt. Die bereits thematisierte Abbildung 4-25 illustriert diese Idee, indem eine konkrete Laplace-Verteilung durch verschiedene Gauß-Verteilungen angenähert wird.

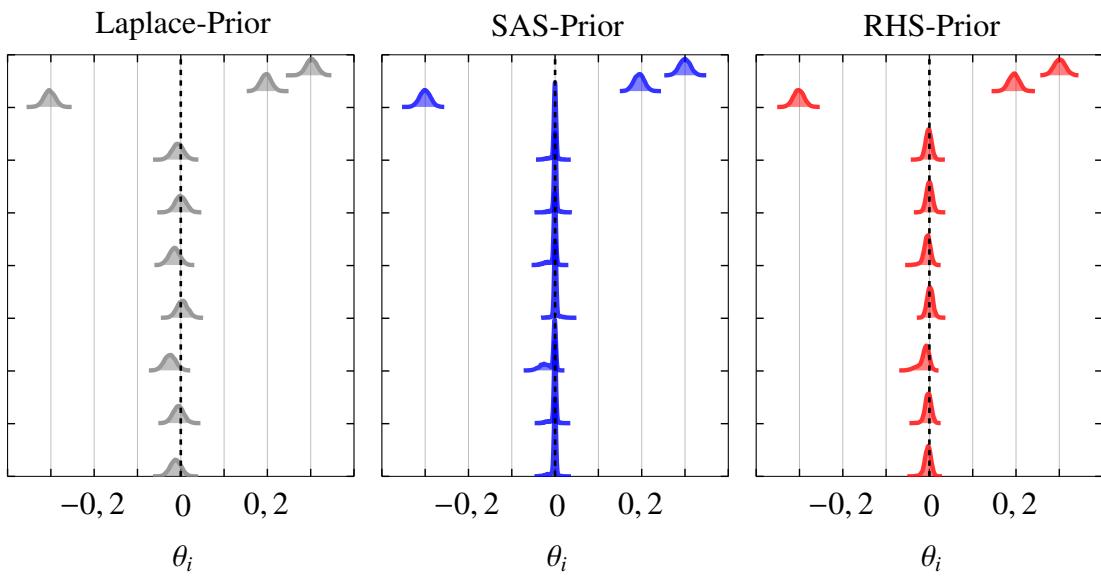


Abbildung 4-26: Von [HBK22] inspirierte Darstellung der resultierenden Posterior-Verteilungen für die Parameter  $\theta_i$ , unterschieden nach gewähltem Prior: Laplace-Prior (links), SAS-Prior (mittig) und RHS-Prior (rechts)

Zur Imitation der Laplace-Verteilung, welche als Prior eine dünnbesetzte Zufallsvariable  $\theta$  modellieren soll, wird üblicherweise die *Spike-and-Slab-Verteilung* (*SAS-Verteilung*) genutzt [HBK22; PV17; BDPW19; Mur12]. Diese lässt sich folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} \theta_i | \lambda_i &\sim \mathcal{N}(0, c^2) \lambda_i, \\ \lambda_i &\sim \text{Ber}(p). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Verteilung (4.24) stellt eine hierarchische Struktur dar, welche mittels  $\lambda_i$ <sup>43</sup> zwischen der *Spike-* und der *Slab-Verteilung* umschaltet. Letztere entspricht der Situation, wenn  $\lambda_i$  aufgrund der Bernoulli-Verteilung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$  gleich Eins

<sup>43</sup>Damit die in der Literatur übliche Notation gewahrt wird, bezieht sich die Variable  $\lambda_i$  im Unterschied zur sonstigen Nutzung in dieser Arbeit für die Definition der drei Verteilungen jeweils auf eine Zufallsvariable.

ist. In diesem Fall ist der Parameter  $\theta_i$  nicht Null, sondern orientiert sich an der Normalverteilung mit Varianz  $c^2$ . Ist  $\lambda_i$  dagegen Null, ist der Parameter  $\theta_i$  irrelevant für die Modellierung, da die Verteilung (4.24) als Dirac-Delta-Verteilung definiert wird. Diese weist einen Dirac-Impuls im Ursprung auf, sodass der Parameter  $\theta_i$  bei Null liegt (vgl. [Mur12; PV17; HBK22]). In der Abbildung 4-26 sind in der mittleren Darstellung die Posterior-Verteilungen für den Koeffizientenvektor  $\boldsymbol{\theta}$  des bereits zuvor diskutierten Beispiels abgebildet, wenn die SAS-Verteilung als Prior genutzt wurde. Die Koeffizienten sind nun eindeutig bzgl. der Nichtnull- und Nullelemente zu unterscheiden, da die Posterior-Verteilungen nur für Nichtnullelemente eine glockenförmige Gestalt aufweisen und für die Nullelemente eine sehr geringe, aufgrund des Dirac-Impuls kaum vorhandene Varianz resultiert. Diese sind wegen der Dirac-Delta-Verteilung diskreter Natur, können aber bei Nutzung einer kontinuierlichen Verteilung relativiert werden [HBK22]. Trotz ihrer Vorteile stellt die SAS-Verteilung in manchen praktischen Anwendungen aufgrund ihrer diskreten Struktur eine Herausforderung dar. Daher hat sich die *Regularized-Horseshoe-Verteilung (RHS-Verteilung)* als vergleichbare Alternative entwickelt [HBK22; PV17; BDPW19]. Diese wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \theta_i | \check{\lambda}_i, \tau, c &\sim \mathcal{N}(0, \check{\lambda}_i^2 \tau^2), \\ \lambda_i &\sim C^+(0, 1), \\ \tau &\sim C^+(0, \tau_0), \\ c^2 &\sim \text{Inv-}\Gamma(a, b), \\ \check{\lambda}_i &= \frac{c \lambda_i}{\sqrt{c^2 + \tau^2 \lambda_i^2}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die hierarchisch unterlagerten Distributionen entstammen jeweils der positiven Halbebene der Cauchy-Verteilung  $C^+(\cdot, \cdot)$  und bestimmen den Grad der Dünnbesetztheit weiterhin durch die Varianz der Normalverteilung. Während  $\tau$  die globale Eigenschaft des Koeffizientenvektors  $\boldsymbol{\theta}$  steuert, möglichst viele Nichtnullelemente zu besitzen, d. h. die Posterior-Verteilungen dieser Parameter  $\theta_i$  zu verkleinern, bewirkt  $\lambda_i$ , dass lokal einige wenige Parameter  $\theta_i$  dem entgehen [HBK22]. Die Wahl des Parameters  $\tau_0$  beeinflusst dabei, wie dünnbesetzt  $\boldsymbol{\theta}$  tatsächlich ist, da eine Verkleinerung des Parameters eine Verstärkung des Sparsity-Effekts und somit eine erhöhte Anzahl der Nullelemente bewirkt. Dieser Effekt ist im Anhang in der Abbildung A3-1 illustriert. Üblicherweise wird  $\tau_0 < 1$  gewählt, z. B. in [HBK22]. Die Varianz der Normalverteilung wird zudem reguliert, um zu vermeiden, dass diese zu große Werte annimmt. Dazu stellt  $\text{Inv-}\Gamma(\cdot, \cdot)$  die inverse Gamma-Verteilung dar, deren Parameter  $c^2$  die Form des Posteriors steuert und die Maximalwerte begrenzt, wenn  $\theta_i$  ein Nichtnullelement ist [HBK22; PV17]. Dieser Einfluss ist ebenfalls im Anhang in der Abbildung A3-3 visualisiert. Die Wirkung des RHS-Priors wird schließ-

lich anhand des Beispiels in der rechten Darstellung der Abbildung 4-26 deutlich, in der die Posterior-Verteilungen bzgl. der einzelnen Koeffizientenelemente abgebildet sind. Im Vergleich zu den vorherigen Prior-Verteilungen ist zu erkennen, dass einerseits weiterhin die Nichtnullelemente eindeutig durch ihre Glockenform detektiert werden. Andererseits weisen die Nullelemente analog zur SAS-Verteilung eine sehr geringe Varianz auf, welche aber größer als die der diskreten SAS-Verteilung ausfällt. Anhand des Beispiels wird daher veranschaulicht, dass mithilfe der RHS-Verteilung eine geschickte Modellierung einer imitierten Laplace-Verteilung möglich ist, die eine Unterscheidung in Nichtnull- und Nullelemente vereinfacht. Die Nutzung dieser Verteilung als Prior ist somit für den Zweck dieser Arbeit sehr vorteilhaft, führt aber gleichzeitig zu einer erhöhten Anzahl an Parametern, die für zwei der drei hierarchisch unterlagerten Verteilungen eingestellt werden müssen. Der Einfluss dieser einzelnen Distributionen ist allerdings nicht einfach zu durchschauen und wird daher im Anhang in den Abbildungen A3-2-A3-3 anhand verschiedener Parametrierungen der jeweiligen Prior-Verteilung und deren Wirkung auf die resultierende Posterior-Verteilung dargestellt.

#### 4.4.2 Beobachterentwurf für ein Unscented Kalman Filter

Nachdem die Modellierung der Dünnbesetztheit für  $\theta$  aus einer stochastischen Perspektive motiviert und ein geschickt gewählter Prior für das Filter vorgeschlagen worden ist, folgt der überarbeitete Beobachterentwurf. Analog zum Abschnitt 4.3.2 wird weiterhin das augmentierte Modell (4.15) innerhalb des SRUKFs genutzt. Zudem bestehen dieselben Annahmen und Definitionen bzgl. der Kovarianzen und der Pseudomessung (4.17). Ebenso findet wie im Algorithmus 6 zunächst ein Durchlauf des Standard-SRUKFs (vgl. Algorithmus 5) statt. Allerdings unterscheidet sich der Beobachterentwurf vom vorigen in der Art und Weise, wie die Sparsity-Forderung **F.2+** für die Parameter umgesetzt wird. Durch die stochastische Modellierung der Parameter  $\theta$  wird in jedem Zeitschritt eine Varianz  $\sigma_\star^2$  mithilfe der RHS-Verteilung bestimmt, um die Laplace-Verteilung zu imitieren. Anschließend werden die Gewichte der UT angepasst und ein erneuter Durchlauf des SRUKFs mit der Identität  $f_{Id}$  als Dynamikvorschrift und mit der Pseudomessung  $h_{pm}$  als Messmodell vollzogen. Die Anpassung der Gewichte ist erforderlich, da im SRUKF eine Standardnormalverteilung angenommen ist, sodass  $\kappa^{(1)} = 3 - \tilde{n}$  optimal gewählt wird [Gib11; Sch17]. Ist dies wie bei der stochastischen Modellierung der Parameter  $\theta$  nicht der Fall, gilt für diese Situation  $\kappa^{(2)} = 3\sigma^4 - \tilde{n}$ , wobei  $\sigma$  zu  $\sigma_\star$  aufgrund der RHS-Verteilung bestimmt wird [GT23a]. Anschließend wird eine erneute Schätzung durchgeführt, woraufhin sich der Zustand  $\tilde{x}_{k+1|k}^-$  aus den  $n$  Einträgen der ersten Schätzung und aus den  $n_\theta$  Einträgen der zweiten Schätzung ergibt. Gleiches gilt für die Kovarianz. Dieses wird jeweils durch die eckigen Klammern und mithilfe der programmiertechnischen Darstellung

des Doppelpunkts dargestellt. Daher resultiert der folgende Algorithmus, welcher sich in jedem Zeitschritt  $k$  dem Durchlauf des Algorithmus 5 anschließt:

---

**Algorithmus 7 JE-SRUKF mit stochastischer Umsetzung der Sparsity**


---

```

:
 $\hat{\tilde{x}}_k = \hat{\tilde{x}}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k^-)$ 
 $S_k = \text{cholupdate}(S_k^-, U, -1)$ 

Initialisiere:  $R_{pm}, \tau_0, a, b$ 

% Bestimmung der Varianz bzw. der neuen Gewichte
 $\sigma_\star^2 = \mathbb{E}[\sigma^2] \leftarrow \text{Bestimme mit Gl. (4.25) mit } \tau_0, a, b$ 
 $W_m^{(2)}, W_c^{(2)} \leftarrow \alpha, \beta, \kappa^{(2)} = 3\sigma_\star^4 - \tilde{n}$ 

% Schätzung mit Sparsity-Modellierung
 $\hat{\tilde{x}}_{pm}, S_{pm} \leftarrow \text{SRUKF (Algo. 5) mit } (\hat{\tilde{x}}_k, S_k, f_{Id}, h_{pm}, \tilde{Q}, R_{pm})$ 

% Bestimmung des finalen Zustands und dessen Kovarianz
 $S_{k,final} = S_k$ 
 $[S_{k,final}]_{(n+1:\tilde{n}, n+1:\tilde{n})} = S_{pm}$ 
 $\hat{\tilde{x}}_{k,final} = \hat{\tilde{x}}_k,$ 
 $[\hat{\tilde{x}}_{k,final}]_{(n+1:\tilde{n})} = [\hat{\tilde{x}}_{pm}]_{(n+1:\tilde{n})}$ 

end

```

---

#### 4.4.3 Analyse der Schätzgüte

Nach der angepassten Formulierung des Vorwissens, welches nun über eine modellierte Wahrscheinlichkeitsverteilung in den Filter eingeht, erfolgt wiederum eine Analyse der Schätzgüte. Dabei werden zur Vergleichbarkeit einige Anwendungsbeispiele aus dem vorigen Abschnitt 4.3.3 betrachtet, um die Vorteile des überarbeiteten Entwurfs zu beleuchten und hervorzuheben. Für die Parametrierung des Priors wird durchgehend  $\tau_0 = 0,1$ ,  $a = 4,5$  und  $b = 1,5$  angenommen (vgl. die Vorveröffentlichung [GT23a]), während die Initialisierung der Kovarianzen und weiterer Einstellungsparameter unverändert zum Abschnitt 4.3.3 bleibt.

#### Evaluation am Duffing-Oszillatator

Analog zum Entwurf im Abschnitt 4.3 wird die Schätzgüte zunächst am Duffing-Oszillatator (4.3) analysiert, dessen Ungenauigkeit im Modell weiterhin durch die Abwesenheit des kubischen Terms resultiert. Zur Vergleichbarkeit sind die Parameter des Entwurfs un-

verändert zu den Simulationen aus Abschnitt 4.3.3. Insbesondere werden dieselben Bibliotheken  $\Psi_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  genutzt (vgl. u. a. Gleichung (4.18)). Zunächst wird die Anforderung **F.1** durch die Abbildung 4-27 überprüft. Im Vergleich zu den Ergebnissen in der Abbildung 4-9 zeigt sich durch die Modellierung des Vorwissens als Wahrscheinlichkeitsverteilung nun eine stark verbesserte Schätzgüte für alle drei Bibliotheken. Die Qualität der Schätzung unterscheidet sich im Kontrast zu vorherigen Ergebnissen nicht mehr so stark, auch wenn die Bibliothek  $\Psi_1$ , welche den kubischen Term enthält, weiterhin die höchste Schätzgüte liefert. Diese Erkenntnisse verifiziert der kumulierte quadratische Fehler in der rechten Visualisierung.

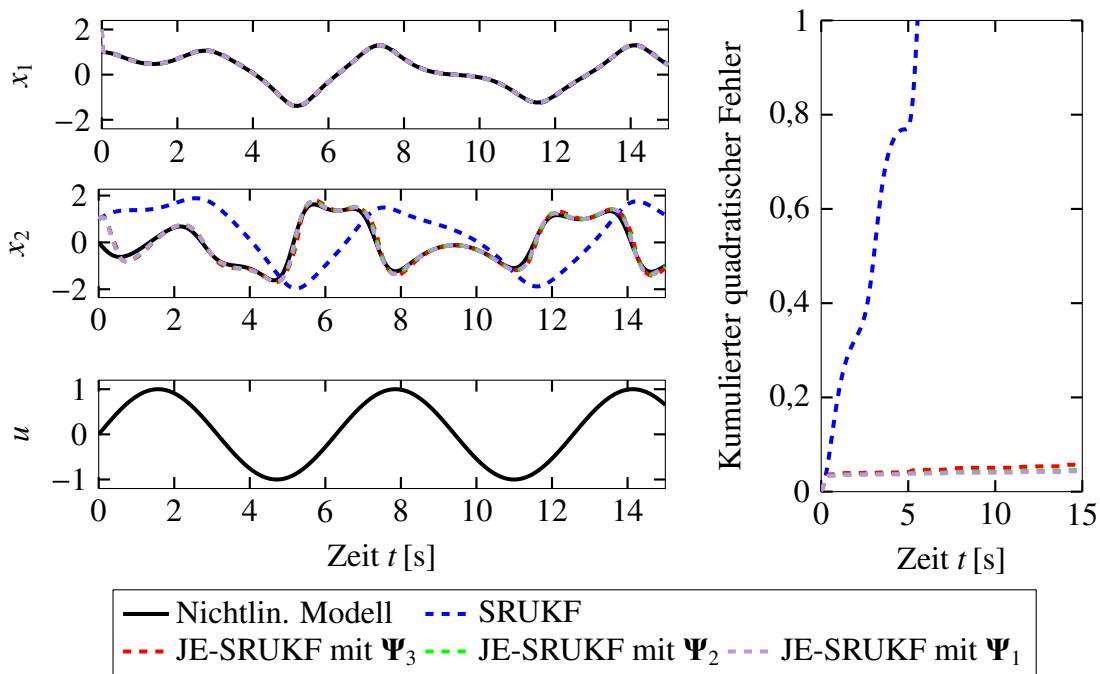


Abbildung 4-27: Qualität der Zustandsschätzung im Vergleich zu verschiedenen Bibliotheken und einem klassischen SRUKF, das ohne die Modellgenauigkeit  $g$  schätzt, vgl. [GT23a]

Die Auswirkung der vorteilhaften Modellierung der Forderung **F.2+** durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist ebenso in den zeitlichen Verläufen der Parameter der Linear-kombination zu sehen. Diese werden in der Abbildung 4-28 dargestellt und setzen erkennbar die Bedingung **F.2+** um, da die meisten Parameter nahe Null verweilen. Im Vergleich zur Abbildung 4-10 weisen die Parameterschätzungen einen glatteren Verlauf auf, identifizieren jedoch weiterhin dieselben dominanten Terme. Sie unterscheiden sich lediglich geringfügig im Einschwingverhalten und in der Skalierung der Verläufe. So können bei-

beispielsweise zum Zeitpunkt  $t = 8$  s temporär die folgenden Linearkombinationen für die drei unterschiedlichen Bibliotheken identifiziert werden:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{1,t=8} &\approx -0,026 - 0,016x_1 - 0,003x_2 - 0,019x_2^2 - 0,002 \sin(x_2) + 0,0003x_1x_2 \\ &\quad - 0,019 \cos(x_2) - 0,003u - 3,708x_1^3, \\ \hat{g}_{2,t=8} &\approx -0,024 - 0,034x_1 + 0,007x_2 - 0,0134x_2^2 - 0,006 \sin(x_2) + 0,009x_1x_2 \\ &\quad - 0,015 \cos(x_1) - 0,007u - 3,419x_1^2, \\ \hat{g}_{3,t=8} &\approx -0,034 - 3,618x_1 + 0,018x_2 + 0,009x_2^2 + 0,0218 \sin(x_2) + 0,007x_1x_2 \\ &\quad - 0,017 \cos(x_1) - 0,017u\end{aligned}$$

Folglich entsprechen diese Resultate der Erwartungshaltung, da weiterhin die physikalisch plausiblen Terme, die je nach Bibliothek bzgl. des Exponenten variieren, temporär identifiziert werden. Um jedoch eine finale, interpretierbare Modellierung der Ungenauigkeit zu erhalten, wird Kapitel 5 schließlich eine automatisierte Identifikation jener Terme durchführen. Anhand dessen können die dominanten Terme extrahiert und anschließend ihre dazugehörigen Parameter durch eine Parameteridentifikation oder Optimierung bestimmt werden. Der Eindruck einer glatteren und genaueren Approximation kann zudem insbesondere durch den Vergleich der Ungenauigkeit  $g$  zu den Approximationen  $\hat{g}_i$  in der Abbildung 4-29 bestätigt werden. Im Kontrast zur Abbildung 4-11 ist nun eine sehr hohe Approximationsgüte gegeben, welche nicht nur einen sehr glatten Verlauf aufweist, sondern auch die Maxima und Minima von  $g$  erfasst. Zudem weisen alle approximierten Verläufe  $\hat{g}_i$  unabhängig von der gewählten Bibliothek eine hohe Genauigkeit auf, was die hohe Schätzgüte aus der Abbildung 4-27 erklärt. Auffällig ist im Vergleich zu den Abbildungen 4-10 und 4-11 weiterhin, dass die Parameter unabhängig von den drei Bibliotheken allesamt gleich Null sind, wenn die Modellgenauigkeit  $g \equiv 0$  ist. Dies ist beispielsweise zum Zeitpunkt  $t = 10$  s in beiden Abbildungen zu erkennen. Analog zum Argument der Sichtbarkeit einer Nichtlinearität im Ausgang, welches bei der Formulierung eines lernfähigen Luenberger-Beobachters basierend auf neuronalen Netzen vorgebracht wird (vgl. [Sch10]), kann die Ursache des beobachteten Phänomens auf die erforderliche Sichtbarkeit der Modellgenauigkeit zurückgeführt werden. Ist die Wirkung der Modellgenauigkeit nicht in den Signalen erkennbar, die gemessen werden können<sup>44</sup>, so kann der Beobachter keine Identifikation vornehmen, woraufhin der gesamte Parametervektor zu diesem Zeitpunkt Null ist. Die Verwendung einer stochastisch motivierten Modellierung des Vorwissens **F.2+** führt demzufolge zu einer gravierend höheren Schätzgüte, da die dominanten Terme der Linearkombination effizienter ausgewählt werden.

---

<sup>44</sup>In diesem Fall ist dies sogar durch die Systembeschreibung (4.5) direkt anhand der Modellgenauigkeit  $g$  zu erkennen.

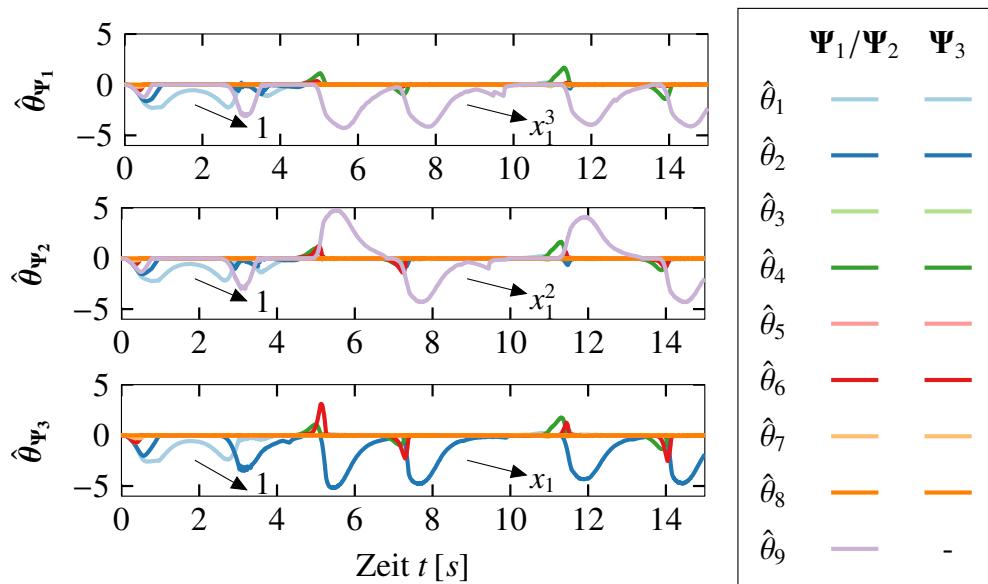


Abbildung 4-28: Zeitlicher Verlauf des Parametervektors  $\hat{\theta}$  im Vergleich verschiedener Bibliotheken, vgl. [GT23a], und die jeweils daraus zugeordneten dominanten Bibliotheksterme (dargestellt anhand der Pfeile)

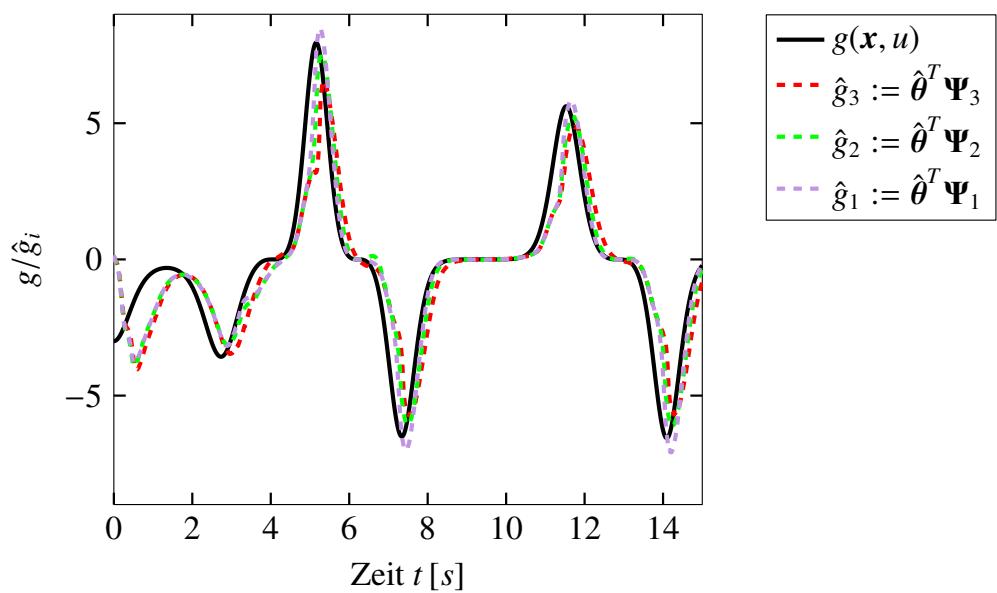


Abbildung 4-29: Approximation der Modellgenauigkeit  $g(\mathbf{x}, u) = -3x_1^3$  im Vergleich verschiedener Bibliotheken, vgl. [GT23a]

## Evaluation am Golfroboter

Nachdem eine deutliche Verbesserung der Schätzgüte durch eine angepasste Umsetzung der Sparsity-Bedingung beobachtet worden ist, wird anhand des Golfroboters überprüft, ob der überarbeitete Entwurf auch für ein komplexeres System anwendbar ist. Wie im Abschnitt 4.3.3 wird weiterhin das Golfrobotermodell (A6-2) verwendet. Zur Vergleichbarkeit wird der offene Regelkreis simuliert, indem analog zu den Abbildungen 4-12 bis 4-14 dieselbe polynomiale Bibliothek  $\Psi_1$  genutzt wird (vgl. Tabelle 4-1). Die Qualität der Zustandsschätzung ist anschließend in der Abbildung 4-30 dargestellt, während die Parameterverläufe sowie die Approximation der Modellgenauigkeit in den folgenden Abbildungen 4-31 bzw. 4-32 visualisiert sind. Im Vergleich zur Abbildung 4-12 sind in der Abbildung 4-30 zunächst kaum Unterschiede zu erkennen. Dennoch erzielt die stochastisch motivierte Umsetzung der Sparsity-Bedingung eine etwas höhere Schätzgüte, was sich anhand des geringeren, kumulierten Fehlers und des genaueren Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit in der Abbildung 4-30 zeigt. Neben einer höheren Schätzgüte, welche Anforderung **F.1** erfüllt, weisen die Parameterverläufe in der Abbildung 4-31 wie beim Duffing-Oszillatator einen deutlich glatteren Verlauf als jene in der Abbildung 4-13 auf. Zudem ist die Sparsity-Bedingung erfolgreich umgesetzt worden, da die meisten Elemente nahe Null verweilen (vgl. Anforderung **F.2+**). Allerdings ist anhand der Parameter zu erkennen, dass die gewählte Bibliothek  $\Psi_1$  weniger gut geeignet ist, die Modellgenauigkeit zu erfassen, da eine Identifikation überwiegend durch die Konstanten und lediglich zu bestimmten Zeiten geringfügig durch geschwindigkeitsbasierte Terme erfolgt. So lautet z. B. die temporäre Approximation zum Zeitpunkt  $t = 5$  s:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{1,t=5} \approx & 0,56 - 0,0004x_1 - 0,009x_2 + 0,002x_1^2 + 0,004x_2^2 - 0,001x_1x_2 \\ & - 0,0001x_1^3 - 0,63x_2^3 - 0,0005x_1^2x_2 - 0,002x_2^2x_1 + 0,004u\end{aligned}$$

Diese Erkenntnis, dass  $\Psi_1$  keine für den Golfroboter geeignete Bibliothek darstellt, ist bereits im Abschnitt 4.3.3 festgehalten worden. Doch eine qualitativ zutreffende, obgleich ungenaue Schätzung der Modellgenauigkeit ist möglich, wie die Abbildung 4-32 bestätigt. Aufgrund der stochastischen Modellierung ist diese Approximation  $\hat{g}_1$  weniger verrauscht als jene, welche in der Abbildung 4-14 zu erkennen ist, weist aber eine schlechtere Identifikation der Modellgenauigkeit  $g$  auf. Dies ist auf die Wahl der Bibliothek zurückzuführen, weil nur Konstanten als Charakterisierung identifiziert werden, sodass die Modellgenauigkeit  $\hat{g}$  eine größere Abweichung zur gemessenen Diskrepanz aufweist. Dennoch ermöglicht der angepasste augmentierte Beobachter eine höhere Schätzgüte sowie eine Vereinfachung der Identifikation der Modellgenauigkeit, indem die Parameter der Linearkombination als Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert werden.

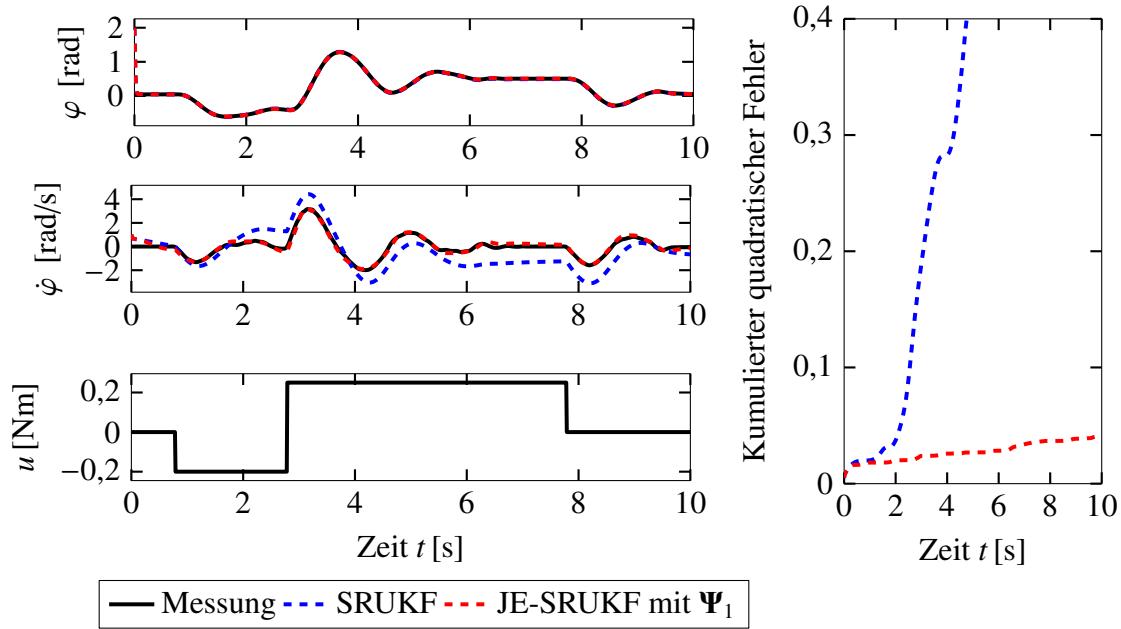


Abbildung 4-30: Qualität der Zustandsschätzung bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$  und im Vergleich zum klassischen SRUKF, das mittels des Modells (A6-2) schätzt

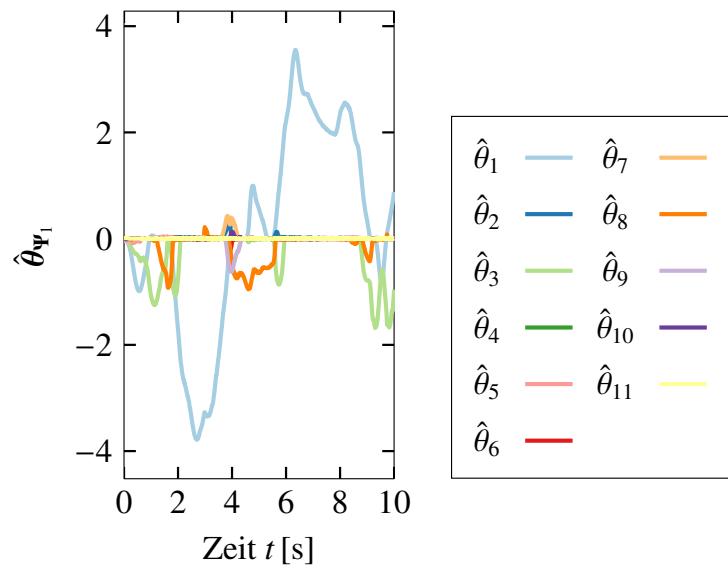


Abbildung 4-31: Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$ , wenn der augmentierte Beobachter die Bibliothek  $\Psi_1 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$  verwendet (vgl. Tabelle 4-1)

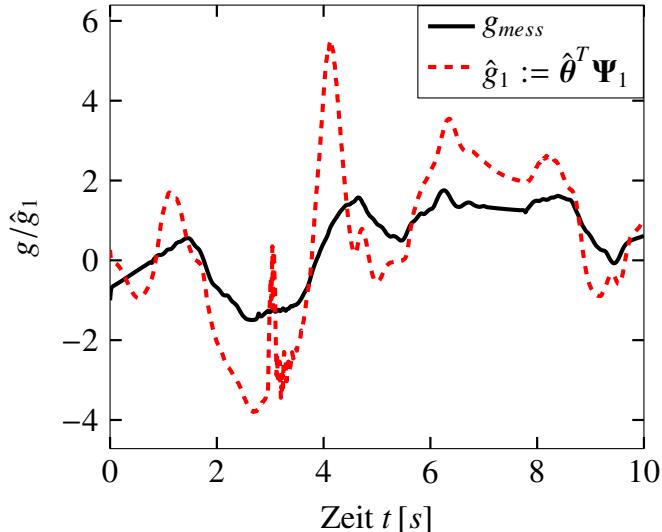


Abbildung 4-32: Approximation  $\hat{g}$  der Modellabweichung  $g_{mess}$  zwischen Messdaten und dem qualitativ minderwertigen Modell (A6-2)

Im vorigen Abschnitt 4.3.2 ist die Wirkung von Messrauschen im Kontext des augmentierten Beobachterentwurfs lediglich indirekt thematisiert worden, da Experimente am Prüfstand durchgeführt wurden, welche geringes Messrauschen aufgrund der guten Sensorik des Golfroboters enthielten. Hierbei konnte bei geeignet gewählter Bibliothek eine sehr hohe Schätzgüte erzielt werden, obgleich geringes Messrauschen präsent war. Daher wird dieser Einflussfaktor simulationsbasiert anhand desselben Szenarios, welches in den Abbildungen 4-30 und 4-31 diskutiert wurde, untersucht. Existiert beispielsweise ein normalverteiltes Rauschen mit einer Abweichung von maximal  $0,2 \text{ rad} \approx 11,46^\circ$ , so kann der augmentierte Beobachter die Zustände des Golfroboters bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1$  weiterhin korrekt schätzen. Dies ist in der Abbildung 4-33 zu erkennen. Aufgrund des Messrauschens ist der kumulierte Fehler etwas höher als die Schätzung ohne Messrauschen (vgl. Abbildung 4-30), dennoch bleibt die Schätzgüte weiterhin hoch. Die Wirkung des Messrauschens ist darüber hinaus in den Verläufen der Parameter zu erkennen, welche in der Abbildung 4-34 dargestellt sind. Diese weisen im Vergleich zur Abbildung 4-31 trotz Verwendung der stochastischen Modellierung starkes Rauschen auf. Dennoch werden dieselben dominanten Terme wie in der Abbildung 4-31 detektiert. Die Wirkung des Messrauschens auf die Qualität des augmentierten Beobachters ist folglich moderat, da die Schätzung des gezeigten Beispiels mit einer großen Abweichung von etwa  $11,46^\circ$  sehr robust durchgeführt werden konnte. Weitergehende Analysen zeigten, dass der augmentierte Beobachter ein Messrauschen ab etwa  $0,4 \text{ rad} \approx 22,92^\circ$  maximaler Abweichung nicht mehr kompensieren konnte und daraufhin divergierte. Dieses Messrauschen entspricht beim Golfrobother jedoch bereits einer sehr großen Pendelbewegung, sodass ein robustes Schätzverhalten des augmentierten Beobachters bestätigt werden konnte.

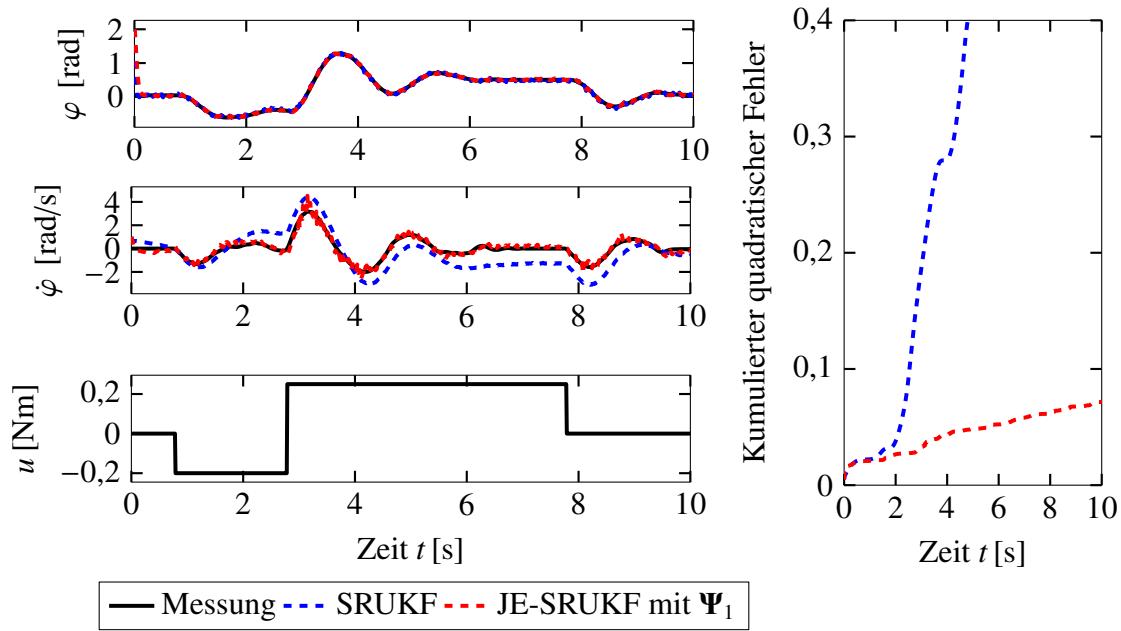


Abbildung 4-33: Qualität der Zustandsschätzung bei Messrauschen und Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$  im Vergleich zum klassischen SRUKF, das mittels des Modells (A6-2) schätzt

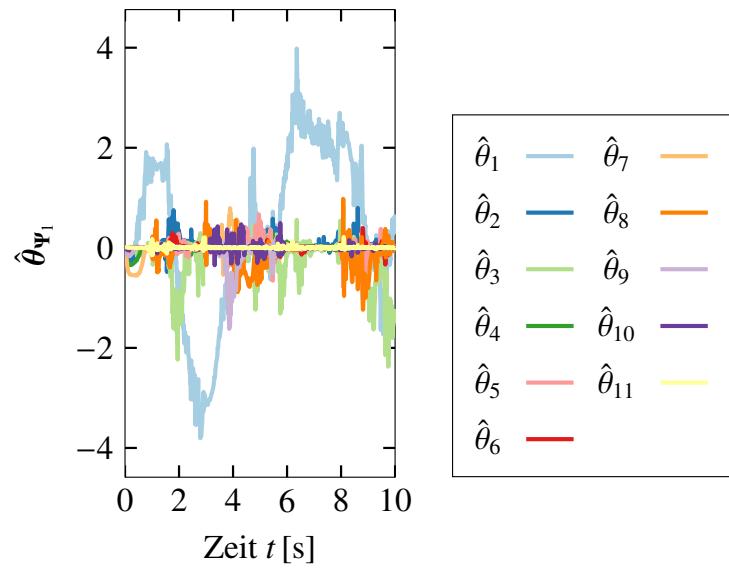


Abbildung 4-34: Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$  bei Messrauschen, wenn der augmented Beobachter die Bibliothek  $\Psi_1 = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1^3, x_2^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_1, u)^T$  verwendet (vgl. Tabelle 4-1)

Die Vorteile des überarbeiteten augmentierten Beobachterentwurfs können ausschließlich durch Simulationsergebnisse gestützt werden, da eine erfolgreiche Umsetzung am Prüfstand nicht möglich war. Trotz intensiver Untersuchungen und Bemühungen konnte in allen Versuchen lediglich ein divergierendes Verhalten des Beobachters ab Betriebszeitpunkt festgestellt werden, welches unabhängig von der gewählten Bibliothek und den Einstellparametern stattfand. Aufgrund vorheriger Erfahrungen am Prüfstand liegt die Vermutung nahe, dass die zur Verfügung stehende Software, welche wegen der Hardwareanforderungen des Prüfstands eine veraltete Version aufweist, die Umsetzung eines mehrfach durchgeführten Samplings von stochastischen Verteilungen erschwert und dies zur Divergenz direkt ab dem Start des Beobachters führt. Diese Vermutung wird insbesondere durch die Tatsache gestützt, dass der augmentierte Beobachterentwurf aus Abschnitt 4.3.3 am Prüfstand umgesetzt werden konnte und sich nur durch die Modellierung der Sparsity-Bedingung (4.7) von der im Algorithmus 7 beschriebenen Erweiterung unterscheidet. Diese stellt jedoch simulationsbasiert eine vielversprechende Alternative zur Sparsity-Formulierung dar, sodass eine Validierung der beobachteten, sehr guten Ergebnisse durch Messdaten zu erwarten ist, wenn eine moderne Laborausstattung in Zukunft zur Verfügung stehen wird und anschließend eine zielgerichtete Implementierung erfolgen kann (vgl. Kapitel 6). Folglich stellt die Option, die Anforderung **F.2+** durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung umzusetzen, eine vorteilhafte Wahl dar, um effizient die Struktur des Filters auszunutzen und eine höhere Schätzgüte durch eine verbesserte Modellierung zu erzielen. Die beim Duffing-Oszillatator und Golfroboter erzielten Erkenntnisse konnten ebenfalls erfolgreich bei der Anwendung auf das Beispiel der Windenergieanlage (vgl. System (4.19)) festgestellt werden, welches sich im Unterschied zu den zuvor genannten Systemen durch eine multiplikative Modellgenauigkeit auszeichnet. Anhand dieses Beispiels werden in den Abbildungen A6-11 bis A6-13 zudem die Auswirkungen einer ungünstigen Parametrierung der RHS-Verteilung dargestellt. Aufgrund der zu geringen Wahl von  $\tau_0 = 0,1$  wird eine zu starke Dünnbesetztheit der Parameter modelliert, sodass die Identifikation der Windgeschwindigkeit limitiert ist (vgl. Abbildung A6-13).

## 4.5 Online-Schätzung von Störungen

Da Modellgenauigkeiten nicht nur durch eine mangelnde Modellierungstiefe und des daraus resultierenden Abstraktionslevels entstehen, sondern auch durch externe Störungen ausgelöst werden können, wird dieser Abschnitt untersuchen, inwiefern sich die vorgestellten Methoden nicht nur für SRUKFs eignen, sondern auch auf einen robusten Störbeobachter übertragen lassen. Dazu wird ein SMO, welcher bereits im Abschnitt 2.3 vorgestellt worden ist, mit der Grundidee der Joint Estimation versehen. Teile dieses Ab-

schnitts finden sich bereits in der Vorveröffentlichung [GKT23] und basieren u. a. auf der studentischen Arbeit [Klu23].

#### 4.5.1 Automatisierte Bibliotheksgenerierung

Die Fähigkeit eines SMOs, auch bei Auftreten von Störungen robust zu schätzen, resultiert vor allem durch die Nutzung der  $n$ -ten Schaltfunktion  $\nu_n$ , welche die Modelldiskrepanz  $\Delta f$ <sup>45</sup> kompensiert (vgl. Abschnitt 2.3). Diese Schaltfunktion  $\nu_n$  wird gewöhnlich durch ein Tiefpassfilter identifiziert [SEFL14]. Allerdings kann die Option, die Modelldiskrepanz  $\Delta f$  als parametrisches Modell zu identifizieren, in manchen Situationen einen Vorteil darstellen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn Eigenfrequenzen der Störung identifiziert werden können, sodass durch eine aktive Dämpfung eine höhere Bauteillebensdauer zu erwarten ist. Daher wird die Grundidee der Joint Estimation auf den SMO übertragen, indem für die Modellabweichung  $\Delta f$  der Ansatz der Linearkombination mit den Parametern  $\theta$  und der Bibliothek  $\Psi$  gewählt wird (vgl. Gleichung (4.2)):

$$\Delta f \approx \theta^T \Psi(\hat{x}, u).$$

Befindet sich der SMO aufgrund einer geeigneten Parametrierung  $\vartheta_i$  in der Sliding-Phase, so streben die Fehler  $e_i$  asymptotisch gegen Null. Somit folgt basierend auf der letzten Zeile der Gleichung (2.34) der Zusammenhang  $\Delta f = -\nu_n(e_y)$ . Um die Modelldiskrepanz zu identifizieren, muss der Interpretationsfehler  $e_\theta = \Delta f - \theta^T \Psi(\hat{x}, u)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null tendieren. Daraus ergibt sich das folgende Optimierungsproblem [GKT23]:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min_{\theta} \int_0^t e_\theta^2 d\tau \\ &= \arg \min_{\theta} \int_0^t (\Delta f - \theta^T \Psi(\hat{x}, u))^2 d\tau \\ &= \arg \min_{\theta} \int_0^t (-\nu_n(e_y) - \theta^T \Psi(\hat{x}, u))^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Eine effiziente Lösung des Optimierungsproblems (4.26) liefert [DFP06]:

$$\hat{\theta} = \left( - \int_0^t \nu_n(e_y) \Psi(\hat{x}, u)^T d\tau \right) \left[ \int_0^t \Psi(\hat{x}, u) \Psi(\hat{x}, u)^T d\tau \right]^{-1}.$$

Hierbei wird die Lösung über einen rekursiven Least-Squares-Ansatz mithilfe einer dynamischen Berechnung der Inversen  $\left[ \int_0^t \Psi(\hat{x}, u) \Psi(\hat{x}, u)^T d\tau \right]^{-1}$  bestimmt [DFP06]. In [Klu23] wird das Optimierungsproblem (4.26) zudem mit einem Zeitfaktor versehen, um zeitvariantes Verhalten einer Störung besser abzubilden. Neben der Berücksichtigung von

<sup>45</sup>Die Diskrepanz  $\Delta f$  kann im SMO-Kontext als additive Modellgenauigkeit  $g$  aufgefasst werden.

Vorwissen in Form von Hypothesen oder der Nutzung der minimalen Bibliothek (4.6) kann jedoch zunächst eine Datenakquise erfolgen, auf deren Grundlage die Charakteristika der Störung analysiert werden. So kann z. B. bei oszillierenden Störungen eine Fouriertransformation genutzt werden, um auftretende Frequenzen aus Verläufen von  $v_n(e_y)$  zu identifizieren. Die Fouriertransformation bietet zudem den Vorteil, dass es sich um eine orthonormale Basistransformation handelt (vgl. Abschnitt 4.3.1). Dazu werden für einen bestimmten Zeithorizont die Daten der Schaltfunktion aufgenommen, während sich der SMO in der Sliding-Phase befindet. Diese Informationen können anschließend verwendet werden, um mittels der Fouriertransformation Frequenzen des vergangenen Zeitraums in Ansatzfunktionen  $\psi_i$  zu platzieren. Somit enthält die Bibliothek Terme, die höchstwahrscheinlich der Identifikation der Störung bzw. Modelldiskrepanz  $\Delta f$  dienen. In der Abbildung 4-35 ist diese Idee skizziert, indem ein durch die Fouriertransformation detektiertes Frequenzspektrum anhand der relativen Häufigkeit in den Daten gekennzeichnet wird. Dabei handelt es sich um ein Experiment am Einfachpendel mit Wagen (vgl. Modell (A6-5)), welches mit der Anregung  $u$  und der Störung  $\rho$ , welche am Wagen wirkt, beaufschlagt worden ist:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \\ \rho(t) &= 4 \cdot \sin\left(3\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Anhand der Visualisierung 4-35 ist erkennbar, dass die Fouriertransformation die Frequenz der Störung  $\omega_\rho = 3\pi$  in den Daten als wichtigste Frequenz erkennt und sogar die der Anregung  $\omega_u = \pi$  als weitere detektiert.

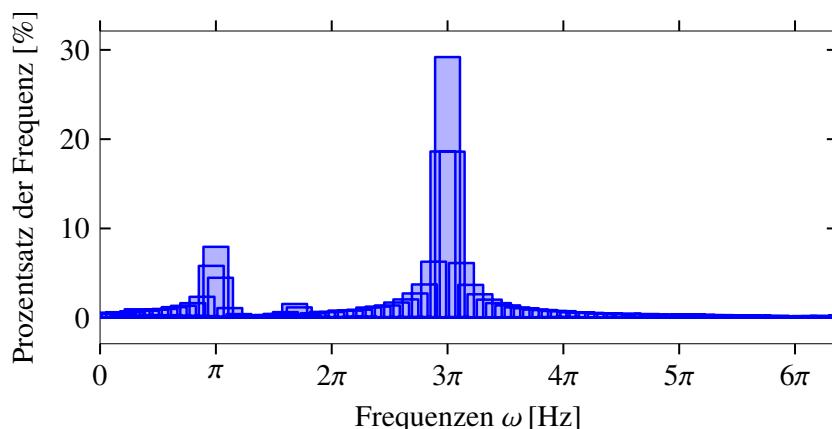


Abbildung 4-35: Die durch die Fouriertransformation identifizierten Frequenzen zur automatisierten Bildung von Bibliothekstermen  $\psi_i$  weisen die höchsten Prozentsätze auf, vgl. [GKT23].

Mittels dieses Vorgehens lässt sich die Bibliothek z. B. folgendermaßen automatisiert erarbeiten, wobei ähnlich wie bei der Anwendung der Windenergieanlage eine explizite Abhängigkeit von der Zeit  $t$  besteht [GKT23]:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \left( \sin(x_2), x_2, \text{sign}(x_2), \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(3\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(5\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \right)^T. \quad (4.28)$$

Diese Bibliothek enthält nun die beiden identifizierten Frequenzen in den Termen  $\psi_4$  und  $\psi_5$  sowie weitere mögliche Terme, um den Vergleich zu einer nur durch Vorwissen und Hypothesen bestückten Bibliothek zu erlauben. Somit ist eine Vergleichbarkeit für die folgenden Untersuchungen gegeben, welche die Identifikation der Störung durch eine Bibliothek, die aus Vorwissen resultiert, und durch eine automatisierte Bibliothek analysieren. Diese Automatisierung der Bibliotheksfunktionen ist besonders vorteilhaft, wenn wenig Vorwissen bzgl. der Ungenauigkeit vorliegt, und eignet sich daher als robustes Werkzeug in der intelligenten Fehlererkennung bzw. Störungsbeseitigung [GKT23].

### 4.5.2 Analyse der Schätzgüte

Die im vorigen Abschnitt entworfene Erweiterung für einen SMO wird anhand des Einfachpendels auf einem Wagen evaluiert, dessen Modell und Parameter im Anhang A6.4 beschrieben werden und welches sich im Labor des RtM befindet. Dazu wird das System für 120 Sekunden mit der zuvor definierten Anregung  $u$  beaufschlagt, während es eine zusätzliche Störung  $\rho$  erfährt (vgl. Gleichung (4.27)). Um die Wirkung der automatisierten Bibliothekswahl mithilfe der Fouriertransformation im Vergleich zu einer zuvor festgelegten Bibliothek zu bewerten, wird dieselbe Bibliothek (4.28) für beide Fälle genutzt. Folglich wird die zuvor festgelegte Bibliothek als die automatisiert gewählte Bibliothek bestimmt. Zunächst wird überprüft, inwiefern sich die Zustandsschätzung mit automatisierter Bibliothekswahl von jener mit einer zuvor festgelegten Bibliothek unterscheidet. Abbildung 4-36 zeigt einen Excerpt der Zustandsschätzung, bei dem jeweils nur die nicht messbaren Zustände dargestellt werden. Für beide Fälle wird eine hohe Schätzgüte erreicht, da keine Abweichungen in den Verläufen der Geschwindigkeiten zu erkennen sind. Anschließend stellt die Abbildung 4-37 einen Ausschnitt der zeitlichen Verläufe der Parameter sowie der Schaltfunktion  $v_2$  dar, welche jeweils mit und ohne automatisierter Bibliothekswahl abgebildet sind. Aufgrund der notwendigen Analyse durch die Fouriertransformation verzögert sich die Reduktion des Modellfehlers, welcher durch die Schaltfunktion ausgedrückt wird, im Vergleich zur Situation einer zuvor festgelegten Bibliothek. Dies liegt an der erforderlichen Aufnahme der Daten. Ist dieser Prozess der Analyse jedoch abgeschlossen, wird ein vergleichbares Fehlerniveau erreicht, wenn die Parameter

der Linearkombination konvergiert sind. Dies ist exemplarisch anhand der Verläufe der Parameter  $\hat{\theta}_5$  bzw.  $\hat{\theta}_6$  zu erkennen, welche nach der Phase der Datenanalyse konvergieren und die Dynamik der Störung  $\rho$  eindeutig charakterisieren (vgl. [GKT23]).

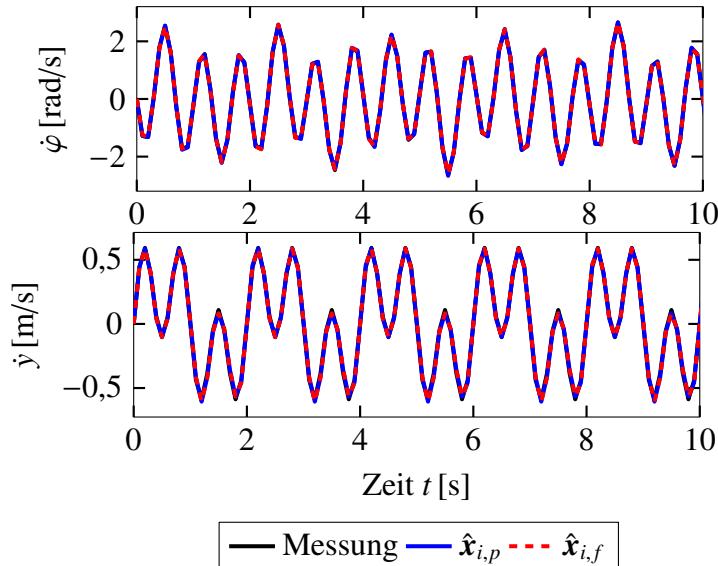


Abbildung 4-36: Excerpt aus Zustandsschätzung mit festgelegter Bibliothek (Index  $p$ ) und automatisiert gewählter Bibliothek (Index  $f$ ) und  $i = 2, 4$ , vgl. [GKT23]

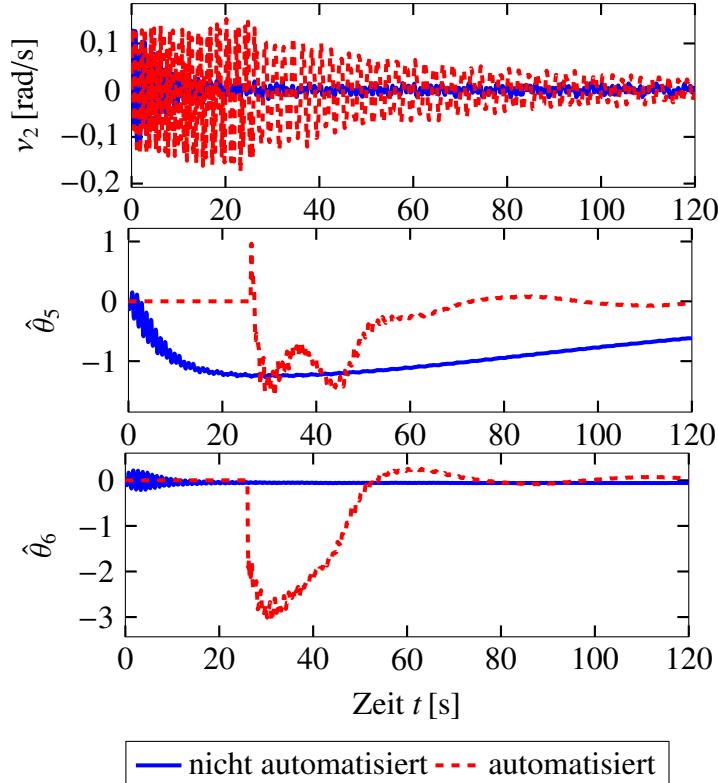


Abbildung 4-37: Verlauf der Schaltfunktion  $v_2$ , welche die Modelldiskrepanz  $\Delta f$  widerspiegelt, und Auszug aus den Parameterverläufen  $\hat{\theta}$ , vgl. [GKT23]

Schließlich vergleicht Abbildung 4-38 die Approximationsgüte von  $\hat{\rho}$  im Vergleich zur (in diesem Szenario bekannten) Störung  $\rho$ , wenn die Parameter  $\hat{\theta}$  konvergiert sind. In diesem Ausschnitt ist erkennbar, dass bei einer automatisierten Bibliothekswahl eine sehr gute Approximation der Störung erzielt werden kann. Die Analysen bestätigen demnach, dass eine Automatisierung der Bibliothekswahl die Anforderungen **F.1** und **F.2+** nicht negativ beeinflusst, sondern hilft, diese umzusetzen, da eine hohe Schätzgüte und eine interpretierbare Identifikation der Störung  $\rho$  erzielt werden konnten. Untersuchungen in [Klu23] zeigten ferner, dass im geschlossenen Regelkreis eine aktive Störkompensation, bei der Informationen auf Basis der Approximation  $\hat{\rho}$  ins Modell zurückgeführt werden, eine höhere Regelgüte erzielen kann. Diese Erweiterung einer automatisierten Bibliothekswahl ist somit eine Ergänzung des augmentierten Beobachters und stellt eine hilfreiche Maßnahme dar, welche als Werkzeug in der intelligenten Fehlererkennung und Störkompensation gewinnbringend eingesetzt werden kann. Darüber hinaus wird die Grundidee einer automatisierten Gestaltung der Bibliothek basierend auf erhobenen Daten im Kapitel 5 für die Modelladaption aufgegriffen.

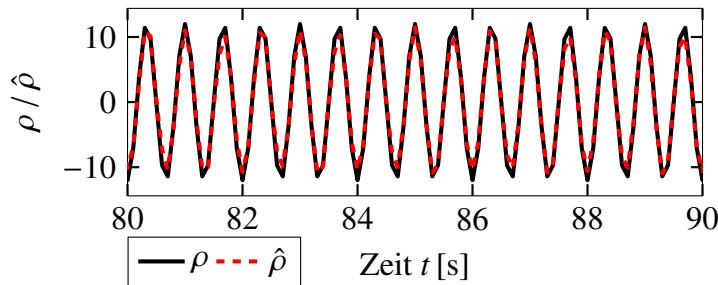


Abbildung 4-38: Auszug des Vergleichs der Störung  $\rho$  und der Approximation  $\hat{\rho} = \hat{\theta}^T \Psi(\hat{x}, u)$ , wenn die Bibliothek automatisiert bestimmt worden ist, vgl. [GKT23]

## 4.6 Zusammenfassung der Entwurfsverfahren

Alle neuartig entwickelten Verfahren dieses Kapitels basieren auf dem Konzept der Joint Estimation und augmentieren den Zustand um Parameter einer Linearkombination, welche die Modellgenauigkeiten approximiert. Beide Methoden der Abschnitte 4.3 und 4.4 stellen mittels einer Projektion auf den Unterraum, der die Sparsity-Bedingung für die Parameter aufspannt, ihre Funktionalität unter Beweis und werden im Kontext von SRUKFs formuliert. Sie unterscheiden sich ausschließlich durch die Modellierung der Eigenschaft Sparsity, welche als Vorwissen für die Parameter unterschiedlich umgesetzt wird. Hierbei stellt der zweite, stochastisch motivierte Entwurf deutliche Vorteile bzgl. der Schätzgüte und der Glattheit der Parameter gegenüber dem ersten heraus, welcher auf der heuristischen Schranke zur Bestimmung der Nichtnullelemente basiert. Das Verfah-

ren im Abschnitt 4.5 stellt einerseits den Transfer des augmentierten Beobachters vom SRUKF zum SMO dar und ergänzt andererseits die Methode um eine Option zur automatisierten Bibliothekswahl basierend auf einer Fourieranalyse. Im Kontrast zur Methode SINDy, welche ebenfalls interpretierbare Modelle durch einen Bibliotheksansatz und das Konzept Sparsity erzeugt (vgl. Gleichung (3.2)), aber aufgrund der Abhängigkeit vom vollständigen Zustand lediglich offline eingesetzt werden kann (vgl. Abbildung 3-25), ermöglichen die in dieser Arbeit neu entwickelten Verfahren eine Online-Umsetzung durch die Beobachterstruktur. Somit besteht die Chance, Modellgenauigkeiten parallel zur Zustandsschätzung online zu identifizieren. Aufgrund der Analysen der Anwendungsbeispiele werden zunächst zwei allgemeine Erkenntnisse über das Entwurfskonzept Joint Estimation festgehalten:

- Eine gleichzeitige Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten ist durch die Augmentation des Zustands um Parameter einer Linearkombination, welche die Modellgenauigkeiten approximiert, umsetzbar.
- Die Bibliothekswahl der Linearkombination besitzt einen entscheidenden Einfluss auf die Stabilität und Schätzgüte des Beobachters. Eine geeignet gewählte Bibliothek umfasst die minimale Bibliothek  $\Psi_0$  und besteht aus möglichst vielseitigen Termen (vgl. beispielsweise Gleichung (4.6), Abbildung 4-5, Tabelle 4-1) oder wird auf Basis einer Datenanalyse automatisiert bestimmt.

Neben der Bestätigung, dass Anforderung **F.4** umsetzbar ist, lassen sich einige weitere Erkenntnisse zusammenfassen, welche die Umsetzung der zu Beginn formulierten Anforderungen **F.1** bis **F.3** bewerten:

- Eine hohe Genauigkeit der Zustandsschätzung kann trotz existierender Modellgenauigkeiten bei geeignet gewählter Bibliothek gewährleistet werden.  
→ **Anforderung F.1 erfüllt**
- Durch Umsetzung des Konzepts Sparsity ist der Parametervektor dünnbesetzt und liefert die Grundlage für interpretierbare Aussagen.  
→ **Anforderung F.2+ erfüllt**
- Ist der tatsächliche Term zur Charakterisierung der Modellgenauigkeit in der Bibliothek enthalten, wird dieser eindeutig identifiziert und der Modellgenauigkeit zugeordnet (vgl. beispielsweise Abbildung 4-10).  
→ **Anforderung F.2 teilweise erfüllt**
- Ist der tatsächliche Term nicht in der Bibliothek enthalten, wird bei geeignet gewählter Bibliothek eine alternative, verwandte Darstellung zur Charakterisierung gefunden (vgl. beispielsweise Abbildung 4-10, Abbildung 4-18).  
→ **Anforderung F.2 teilweise erfüllt**

- Eine Nutzung der Verfahren im geschlossenen Regelkreis ist bei geeignet gewählter Bibliothek möglich (vgl. Tabelle 4-1).  
→ **Anforderung F.3 teilweise erfüllt**
- Die Adoptionsfähigkeit des augmentierten Beobachters im Fall von Systemveränderungen ist gegeben (vgl. Abbildung 4-19).  
→ **Anforderung F.3 teilweise erfüllt**

Anhand der Auflistung ist erkennbar, dass die Anforderungen einer hohen Schätzgüte sowie einer interpretierbaren Schätzung der Modellgenauigkeiten erfolgreich durch die Anforderung **F.4** mittels der Konzepte Joint Estimation und Sparsity umgesetzt werden konnten. Allerdings ist der erfolgreiche Einsatz in hohem Maße von der Wahl der Bibliothek abhängig, welche die Stabilität des Beobachters im geschlossenen Regelkreis<sup>46</sup> beeinflusst (vgl. Tabelle 4-1). Des Weiteren ist die Nutzung des augmentierten Beobachters auf die Anwendung eingangsaffiner Systeme und die Existenz von additiven Modellgenauigkeiten limitiert, obwohl bereits erste Untersuchungen anhand der Windenergieanlage vorgenommen worden sind, deren Ergebnisse vielversprechend erscheinen. Zudem kann es in manchen Situationen sinnvoller sein, auf altbewährte Strategien wie das Gain-Scheduling zurückzugreifen, um den Aufwand in einem vertretbaren Rahmen zu halten. Abschnitt 5.4 wird dieses Thema der Aufwand-Nutzen-Ratio genauer beleuchten.

Ferner ist die Identifikation der Modellgenauigkeiten in der Form einer parametrischen Darstellung zur Modelladaption und Nutzbarkeit bisher nur im geringen Maße adressiert worden. Auch wenn der Einsatz des augmentierten Beobachters bereits erfolgreich im geschlossenen Regelkreis getestet worden ist, sind die Anforderungen **F.2** und **F.3** jeweils lediglich teilweise erfüllt, da außer der visuellen Identifikation der Modellgenauigkeiten durch die Schätzwerte der Parameter (vgl. Abbildung 4-10) keine Auswertung für eine parametrische Darstellung erfolgt ist. Diese ist jedoch nützlich, um eine Modelladaption vorzunehmen, sodass das verbesserte Modell auch in weiteren Anwendungsschritten einen Mehrwert bietet und verwertet werden kann. Dieser Anspruch wird daher im folgenden Kapitel umgesetzt, indem eine Online-Adaption zur Laufzeit basierend auf der parametrischen Darstellung der Modellgenauigkeiten formuliert wird, welche die bisher nur teilweise erfüllten Anforderungen **F.2** und **F.3** schließlich vollständig berücksichtigt. Die Grundidee des Vorgehens bildet hierbei eine automatisierte Datenanalyse während der Schätzung, welche bereits im Abschnitt 4.5 zur automatisierten Bibliothekswahl thematisiert worden ist.

<sup>46</sup>Um diese Aussage vollständig zu validieren, müsste im Gegensatz zu den durchgeführten Untersuchungen eine nichtlineare Regelung am GolfroboTer eingesetzt werden, welche das augmentierte, nichtlineare Beobachtermodell nutzt. Dennoch ist der Einfluss der Bibliothek jederzeit präsent, da der Regeleingriff auf den Schätzungen des Beobachters basiert.



## 5 Automatisierte Modellaktualisierung während der Laufzeit

Nachdem im vorigen Kapitel unterschiedliche Optionen zur gleichzeitigen Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten erarbeitet wurden, welche die Anforderung **F.1** erfüllen und eine hohe Schätzgüte aufweisen, steht die explizite, nicht nur temporäre Identifikation der geschätzten Modellgenauigkeiten noch aus. Zwar werden die Ungenauigkeiten während der Laufzeit dynamisch geschätzt, woraufhin die Schätzungen z. B. anhand visueller Analysen ausgewertet werden (vgl. Abbildung 4-28), jedoch wurde eine automatisierte Identifikation und Extraktion in einer physikalisch-parametrischen Form bisher noch nicht durchgeführt. Dies ist notwendig, um das Modell längerfristig zu adaptieren sowie bei Systemveränderungen zu aktualisieren (im Gegensatz zur temporären Anpassung in der Abbildung 4-19). Somit sind die Anforderungen **F.2** und **F.3** lediglich teilweise erfüllt (vgl. Abschnitt 4.6). Daher wird dieses Kapitel basierend auf den vorangegangenen Ergebnissen des Kapitels 4 diese Anforderungen explizit adressieren und Methoden zur automatisierten Extraktion interpretierbarer Modellgenauigkeiten präsentieren, welche eine Nutzbarkeit der gesammelten Erkenntnisse in Form einer Analyse oder Synthese ermöglicht. Im Abschnitt 5.1 wird dazu die Hauptkomponentenanalyse erläutert, welche eine Modellreduktion für die Approximation der Modellgenauigkeit durchführt, sodass diese durch einige wenige Merkmale der Bibliothek  $\Psi$  erfasst werden kann. Um jedoch schon während der Laufzeit eine solche Aktualisierung vornehmen zu können, welche vorteilhaft für eine hohe Schätzgüte ist, wird im Abschnitt 5.2 ein neuartiges Konzept zur Aktualisierung während der Laufzeit vorgestellt und umgesetzt, welches die Idee einer automatischen Bibliothekswahl aus Abschnitt 4.5 aufgreift und weiterentwickelt. Abschließend werden die Abschnitte 5.3 und 5.4 die physikalische Interpretierbarkeit der identifizierten Terme sowie den Aufwand und Nutzen des Verfahrens kritisch beleuchten. Einige Abschnitte dieses Kapitels sind darüber hinaus bereits Teil der Vorveröffentlichungen [GT23a; GT24]. Ferner sind die nachfolgenden, theoretischen Grundlagen der Hauptkomponentenanalyse in geringem Maße in der studentischen Arbeit [Sch23b] enthalten.

### 5.1 Merkmalsanalyse und -extraktion

Unabhängig von dem gewählten Filter oder Beobachter mit erweitertem Modell und dessen Methode zur Umsetzung der Anforderung **F.2+** bzw. **F.4**, wird zu jedem Zeitpunkt  $k$  eine temporäre Schätzung der Modellgenauigkeit  $g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\Psi}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k)$  berechnet. Neben dem primären Ziel, eine hohe Schätzgüte des Beobachters trotz Modellgenauigkeiten sicherzustellen, stellt eine Modelladaption basierend auf den temporären Schätzungen der Modellgenauigkeit einen untergeordneten, aber nicht weniger wichtigen

Zweck dar. Denn langfristig kann diese Adaption zu einer dauerhaft hohen Schätzgüte beitragen. Folglich stellt sich die Frage, inwiefern die temporäre Schätzung der Modellungenauigkeit  $\hat{g} = \hat{\theta}_k^T \Psi(\hat{x}_k, u_k)$  Rückschlüsse auf das dynamische Verhalten der Modellungenauigkeit zulässt und wie diese für eine Modellaktualisierung genutzt werden können. Während der Laufzeit  $k = 1, \dots, N$  können die geschätzten Parameter  $\hat{\theta}_k$  der Linearkombination zu jedem Zeitpunkt gespeichert und einer Matrix  $\Theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times N}$  zugeführt werden, die diese Zeitreihendaten wie im Abschnitt 4.5 sammelt. Unter der Voraussetzung, dass die Bibliotheksterme  $\psi_i$  ähnlich skaliert<sup>47</sup> sind, geben die Parameter durch ihren Betrag indirekt Aufschluss über die Dominanz und Wichtigkeit der einzelnen Bibliotheksterme zur Charakterisierung der Ungenauigkeit. Um die qualitativen Erkenntnisse, welche die Zeitverläufe der Parameter visuell im Kapitel 4 darstellen, auch quantitativ und ohne eine menschenbezogene Interaktion nutzbar zu gestalten, werden in dieser Arbeit statistische Techniken zur Auswertung der Datenmatrix  $\Theta$  genutzt. Diese bieten den Vorteil, dass eine Entscheidung zur Bestimmung der dominanten Terme aus der Bibliothek getroffen werden kann, die reproduzierbar sowie nachvollziehbar, aber unabhängig vom visuellen Eindruck der Person ist, die diese bewertet. Der größte Vorteil ist allerdings die automatisierte Durchführung der Merkmalsextraktion der Datenmatrix  $\Theta$  anhand von statistischen Kenngrößen. Im Modellbildungsprozesses stellt die Merkmalsextraktion aus Daten darüber hinaus die Möglichkeit dar, automatisiert eine Modellreduktion durchzuführen. Dies erlaubt die Approximation der Modellungenauigkeit durch einige wenige Merkmale, d. h. Bibliotheksterme, basierend auf den gesammelten Daten. Nachfolgend wird daher die Hauptkomponentenanalyse als eine Methode zur Merkmalsanalyse und -extraktion erläutert, auf deren Grundlage anschließend eine Modellreduktion durchgeführt wird. Neben der Hauptkomponentenanalyse existieren ferner vielfältige Techniken zur Modellreduktion, auf die an dieser Stelle durch [BGQ<sup>+</sup>21; BGW15; BS14] verwiesen wird.

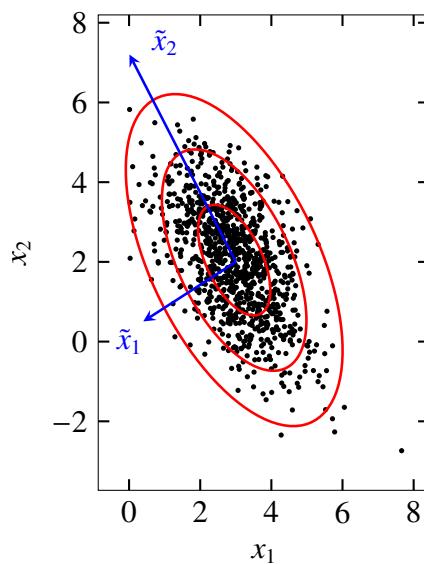
## Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Eine der bekanntesten und populärsten Methoden zur Analyse hochdimensionaler Daten ist die Hauptkomponentenanalyse, welche im deutschen Sprachgebrauch auch zunehmend unter dem englischen Fachbegriff *Principal Component Analysis (PCA)* bekannt ist. Diese geht auf die Arbeiten von [Pea01] und [Hot33] zurück und basiert auf der Singulärwertzerlegung (vgl. Anhang A4.3). In der Datenverarbeitung nimmt die PCA häufig eine zentrale Rolle ein, wenn eine Merkmalsanalyse und/oder eine Modellreduktion durchgeführt werden soll(en) (vgl. [Jol02], [BK19]). Anwendungsgebiete finden sich

---

<sup>47</sup>Diese Voraussetzung ist bereits in der Formulierung der Hypothesen  $\psi_i$  erforderlich, um eine geeignete Bibliothek sicherzustellen.

z. B. in der Bild- und Videoverarbeitung, wenn diese komprimiert werden [BK19], in der Finanzmarktanalyse [Jol02] sowie in vielen technischen Prozessen [Jol02; San12a; BS14]. Grundlegendes Ziel der PCA ist eine Koordinatentransformation der vorliegenden Daten  $\Theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times N}$  in ein Koordinatensystem, welches die Daten besser als das vorherige, meist kartesische Koordinatensystem darstellen kann. Diese Grundidee ist in der Abbildung 5-1 beispielhaft für zwei Dimensionen visualisiert. Da sich die Daten, illustriert durch die Punkte, anhand ihrer Varianz charakterisieren lassen, befindet sich in der Abbildung 5-1 die durch die PCA transformierte erste Achse entlang der größten Varianz der Daten, während die zweite Achse orthogonal zu dieser steht und die zweitgrößte Varianz in den Daten beschreibt.



*Abbildung 5-1: Koordinatentransformation durch die PCA anhand eines zweidimensionalen Beispieles: Die roten Ellipsen stellen jeweils die einfache, doppelte und dreifache Standardabweichung dar, die blauen Achsen beschreiben das durch die PCA gefundene Koordinatensystem, vgl. [BK19].*

Die Datenmatrix  $\Theta$  besteht jedoch nicht nur aus zwei, sondern aus  $n_\theta$  verschiedenen Merkmalen, die in  $N$  Beobachtungen, z. B. durch Experimente, erfasst worden sind. Wenn die Daten eine unterschiedliche Skalierung aufweisen, ist eine Vorverarbeitung dieser unerlässlich. Erfolgt diese nicht, verzerrt die PCA die tatsächlich zugrunde liegenden Informationen (vgl. [Jol02, Abbildungen 2.1 und 2.2]). Aufgrund der Sensitivität der PCA werden die Daten zunächst standardisiert, indem der Mittelwert  $\mu_\Theta$  und die Standardabweichung  $\sigma_\Theta$  berechnet werden, sodass diese durch die standardisierte Matrix  $\Theta_S$  in einem vergleichbaren Rahmen vorliegen. Anschließend werden die Daten in einer Kovarianzmatrix

$$P_\Theta = \Theta_S \Theta_S^T$$

angeordnet, woraufhin deren Eigenwerte  $\lambda_i^{48}$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  mit  $i = 1, \dots, n_\theta$  bestimmt werden. Da die Eigenwerte von  $\mathbf{P}_\Theta$  eine enge Verwandtschaft zu den Singulärwerten von  $\Theta$  aufweisen, können diese mithilfe der Singulärwertzerlegung effizient berechnet werden (vgl. Anhang A4.3, [Jol02], [BK19]). Die dazugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  sind dabei orthonormal zueinander. In der Regel wird die PCA nicht nur zur Analyse der Daten genutzt, sondern auch zur Modellreduktion. Dies gelingt unter der Prämisse, dass manche der Achsen mit geringer Varianz lediglich Rauschen enthalten, woraufhin die darin enthaltenen Informationen vernachlässigt werden können.

## Merkalsextraktion

Die Auswertung der Datenmatrix  $\Theta^{n_\theta \times N}$  mittels PCA liefert aufgrund der Singulärwertzerlegung eine strukturierte Sortierung der  $n_\theta$  Eigenwerte mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_\theta}$  und ihrer Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_\theta}$ . Allerdings ist noch ungeklärt, wie entschieden wird, welche der  $n_\theta$  Eigenwerte beibehalten und welche für die Darstellung der gesammelten Daten vernachlässigt werden können. Darüber hinaus stellt sich die Frage, wie die jeweiligen Bibliotheksterme basierend auf den beibehaltenen Eigenwerten ermittelt werden. Grundlage für diese Entscheidung ist zunächst die Beurteilung der Eigenwerte hinsichtlich ihrer Fähigkeit, die gegebenen Daten zu repräsentieren. Je größer ein Eigenwert ist, desto höher ist sein Anteil daran, die gesammelten Daten gut darstellen zu können. Dementsprechend liegen die Eigenwerte nach der PCA bereits in einer geeigneten Sortierung vor. Dennoch steht die Entscheidung weiterhin aus, welche Eigenwerte berücksichtigt und vernachlässigt werden, d. h. ab welchem Eigenwert  $\lambda_{i^*}$  mit  $1 \leq i^* \leq n_\theta$  eine Modellreduktion auf die ersten ein bis  $i^*$  Eigenwerte stattfindet. Dazu existieren überwiegend einfache, empirische Kriterien. Die Verwendung von statistisch basierten Bedingungen zur Entscheidungsfindung ist weniger verbreitet, da diese meist formal aufwendiger sind und keinen Vorteil im Vergleich zu einfachen Maßnahmen aufzeigen [Jol02; San12b]. Somit stellen die Kaiser-Methode, der Scree-Test und das Verfahren der kumulativen Varianz die populärsten Kriterien dar [Jol02; San12b].

Die Kaiser-Methode basiert auf dem Mittelwert  $\bar{\lambda}$  aller Eigenwerte, anhand dessen eine Grenze  $\lambda_{i^*} > a\bar{\lambda}$  mit frei wählbarem Parameter  $a > 0$  für die Eigenwerte bestimmt wird, die beibehalten werden sollen [Kai60]. Diese Methode ist von einfacher Natur und stellt ihren Nutzen nicht aufgrund von formalen Eigenschaften, sondern durch ihren erprobten Einsatz in verschiedenen Studien heraus [Jol02]. Der Scree-Test, dessen Begriff Cattell in [Cat66] geprägt hat, ist dagegen eine grafische Methode, bei der die Anzahl der Merkmale  $n_\theta$  mit dem jeweiligen Eigenwert als Tupel in ein Koordinatensystem einge tragen werden. Anschließend wird überprüft, an welcher Stelle sich der stärkste Knick

---

<sup>48</sup>Im Kontrast zu vorigen Kapiteln bezeichnet das Symbol  $\lambda$  einen Eigenwert in diesem Kapitel.

des resultierenden Graphen befindet. Dieser markiert die Unterscheidung zwischen dominanten und nicht dominanten Eigenwerten. Eine Visualisierung dieser Methode ist exemplarisch in der Grafik links unten der Abbildung 5-3 zu erkennen. Beide Verfahren sind dennoch stark subjektiv, da z. B. die Wahl des Parameters  $a$  schwierig festzulegen und das Auftreten des Knicks stark von der Skalierung der Eigenwerte abhängig ist, sodass diese Methoden häufig zu Missinterpretationen führen können [Jol02; San12a]. Eine nachvollziehbare, obgleich weiterhin subjektive Entscheidung wird mithilfe der Methode der kumulativen Varianz getroffen. Die grundlegende Idee der Modellreduktion wird hierbei durch eine plausible Abschätzung aufgegriffen:

$$Q = \frac{\sum_{l_1=1}^{i^*} \lambda_{l_1}}{\sum_{l_2=1}^{n_\theta} \lambda_{l_2}} \cdot 100. \quad (5.1)$$

Um die Fähigkeit, die gesammelten Daten adäquat zu repräsentieren, quantitativ zu bewerten, wird in der Gleichung (5.1) zunächst ein Quotient bestehend aus der Summe der ersten  $i^*$  Eigenwerten bezogen auf die Summe aller Eigenwerte gebildet. Dieser Quotient wird daraufhin prozentual ausgewertet und stellt somit die totale prozentuale Varianz der Daten dar [Jol02; San12a]. Indem ein Prozentsatz vorgegeben wird, den das reduzierte Modell bezogen auf die Daten in jedem Fall darstellen können muss, wird die kumulative Varianz  $Q$  mit diesem Wert verglichen. Schließlich werden die  $i^*$  Eigenwerte behalten, die mit ihrer kumulativen Varianz  $Q$  genau die vorgegebene Grenze überschreiten. In der Regel wird ein Prozentsatz zwischen 70% und 90% gewählt [Jol02]. Obwohl auch dieses Verfahren eine subjektiv gewählte Grenze in Form eines Prozentsatzes erwartet, stellt es ein intuitiveres Mittel dar, dessen Parameter durch einen Menschen sinnvoll vorgegeben werden kann, weil dieser die qualitative Wirkung des Parameters nachvollziehen und einschätzen kann. Dennoch bleibt aufgrund der empirischen, einfachen Struktur dasselbe Risiko einer Missinterpretation bestehen, beispielsweise wenn viele gleich große Eigenwerte vorliegen und ein sehr hoher Prozentsatz vorgegeben ist. Wegen seiner intuitiven Anwendung sowie Eignung zur Automatisierung wird die Methode der kumulativen Varianz zur Auswertung der PCA im weiteren Verlauf dieser Arbeit genutzt.

Unabhängig von der gewählten Entscheidungsmethode stehen die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i^*}$  anschließend fest, auf die das Modell reduziert werden soll. Ziel dieses Kapitels ist die Identifikation der dominanten Bibliotheksterme, daher steht die Beantwortung der zweiten, zuvor gestellten Frage noch aus. Nachdem analysiert wurde, welche Eigenwerte in welcher Reihenfolge einen Beitrag zu den Daten leisten, können nun die dazugehörigen Eigenvektoren genutzt werden, um auf die einzelnen Terme  $\psi_i$  zu schließen. Dazu kann geometrisch argumentiert werden: Für jeden Eigenwert zeigt der betragsmäßig größte Eintrag des Eigenvektors in genau die Richtung des Elements, der den Eigenwert am meisten dominiert. In der Abbildung 5-2 sind zur Illustration des Vorgehens die Elemente

der Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  der beiden größten Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  in der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse dargestellt. Die Elemente der Eigenvektoren  $v_{1,i}$  bzw.  $v_{2,i}$  sind in der Abbildung durch den Index des Bibliotheksterms  $\psi_i$  dargestellt, sodass z. B. die Position von  $\psi_9$  in der Abbildung durch das neunte Element von  $\mathbf{v}_1$  und das neunte Element von  $\mathbf{v}_2$  bestimmt wird. Somit visualisiert die Abbildung 5-2 die Beiträge der einzelnen Bibliotheksterme zum jeweiligen Eigenwert. Für den größten Eigenwert  $\lambda_1$ , der in diesem Beispiel 81,69% Anteil an der Varianz besitzt, weist  $\psi_9$  den stärksten Beitrag auf, da das neunte Element von  $\mathbf{v}_1$  betragsmäßig am größten ist. Dies ist in der Abbildung daran zu erkennen, dass alle anderen Terme bzgl. der  $x$ -Achse nahe Null positioniert sind. Für den zweitgrößten Eigenwert, der 12,2% Anteil an der Varianz besitzt, kann anhand der  $y$ -Achse abgelesen werden, dass sowohl das erste als auch das zweite Element des Eigenvektors  $\mathbf{v}_2$  einen Einfluss besitzen. Da das erste Element, erkennbar an der Position des Terms  $\psi_1$ , jedoch einen betragsmäßig größeren Einfluss aufweist, wird dieses als dominant bestimmt und deshalb auf den Term  $\psi_1$  zurückgeführt. Alle weiteren Terme besitzen keinen Einfluss auf diesen Eigenwert, da deren Beträge nahe Null sind, was durch die Überlagerung der Terme um Null dargestellt ist. Folglich wird zu jedem der dominanten Eigenwerte  $\lambda_i$  der Eigenvektor  $\mathbf{v}_i$  bzgl. seines betragsmäßig größten Elements ausgewertet. Dieses Element  $v_{l^*}$  mit  $1 \leq l^* \leq n_\theta$  ist dann die Referenz für den Bibliotheksterm  $\psi_{l^*}$ , der den stärksten Einfluss auf den Eigenwert  $\lambda_i$  aufweist.

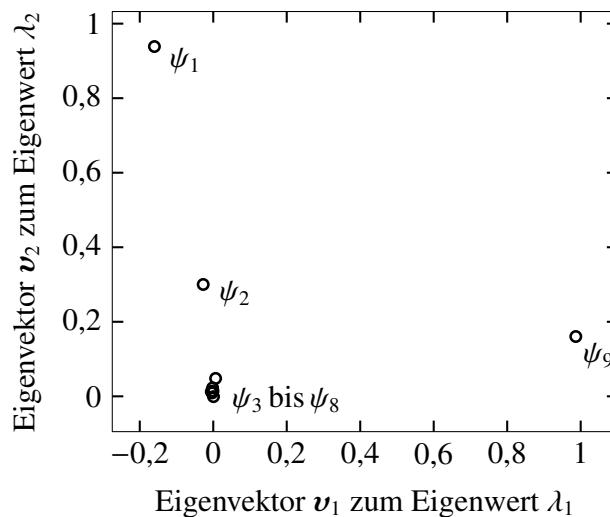
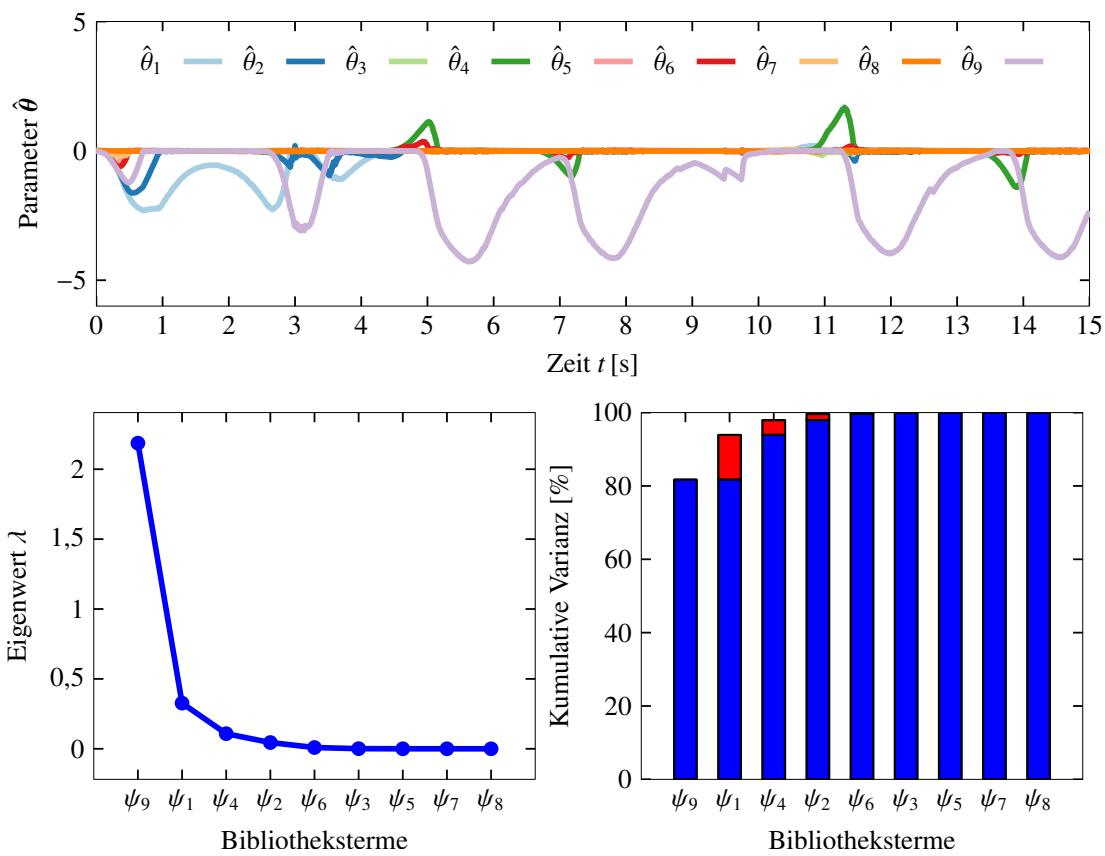


Abbildung 5-2: Die ersten beiden Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  decken zusammen mehr als 93% der Varianz ab. Die Elemente der dazugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  sind in dieser Visualisierung in Abhängigkeit voneinander als Kreise dargestellt. Die Zahlen  $i$  stellen das jeweilige Element des Eigenvektors  $\mathbf{v}_1$  bzw.  $\mathbf{v}_2$  dar und können infolgedessen auf die Bibliotheksterme  $\psi_i$  zurückgeführt werden.

## Evaluation der Merkmalsextraktion

Im Folgenden wird nun überprüft, inwiefern die Merkmalsanalyse und -extraktion das dynamische Verhalten einer konkreten Modellgenauigkeit approximieren können. Dazu werden die aus dem Kapitel 4 bekannten Daten der Parameter  $\hat{\theta}_k$  vom Duffing-Oszillatoren und Golfroboter ausgewertet. Zunächst werden die Parametersätze des Duffing-Oszillators untersucht, da die Qualität der Merkmalsextraktion hierfür besonders vorteilhaft aufgrund der bekannten, definierten Modellgenauigkeit  $g(\mathbf{x}, u) = -3x_1$  begutachtet werden kann. Zum qualitativen Vergleich ist in der oberen Zeile der Abbildung 5-3 weiterhin der zeitliche Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$  aus Kapitel 4 vom Beispiel mit der Bibliothek  $\Psi_1$  abgebildet, welcher der PCA durch die Datenmatrix  $\Theta$  als Informationsgrundlage dient (vgl. Abbildungen 4-27 bis 4-28). In der unteren, linken Visualisierung ist ein Scree-Test basierend auf den Ergebnissen der PCA dargestellt. Für dieses Exempel ist der Knick sehr deutlich zwischen dem ersten und zweiten Eigenwert zu erkennen, sodass lediglich der erste Eigenwert als dominant erachtet wird.



*Abbildung 5-3: Merkmalsanalyse des zeitlichen Verlaufs der  $\hat{\theta}$  mittels PCA (obere Zeile) und Auswertung durch einen Scree-Test (links) bzw. die Methode der kumulativen Varianz (rechts) am Beispiel des Duffing-Oszillators und der Bibliothek  $\Psi_1(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, x_2^2, \sin(x_2), x_1 \cdot x_2, \cos(x_1), u, x_1^3)^T$ , vgl. Abbildung 4-28*

Im Vergleich dazu ist rechts die Methode der kumulativen Varianz dargestellt, welche die Varianz der einzelnen Eigenwerte sukzessiv aufaddiert. Hierbei ist die jeweilige addierte Varianz pro Eigenwert als roter Teil des Säulendiagramms dargestellt. Wird für den Duffing-Oszillatator eine Grenze von 80% gewählt, entspricht die Einteilung in dominante und nicht dominante Eigenwerte genau dem Scree-Plot. Wird dagegen eine Varianz von 90% gefordert, wird der zweite Eigenwert ebenfalls zur Dominanz hinzugezählt. Aus beiden Visualisierungen ergibt sich die Zuordnung der Varianz zu den Bibliothekstermen, sodass in beiden Fällen der richtige Term  $\psi_9(x, u) = x_1^3$ , gefolgt von den Konstanten  $\psi_1$ , durch das Verfahren detektiert wird. Der sich anschließende, notwendige Schritt der Identifikation des dazugehörigen, konkreten physikalischen Parameters kann durch eine klassische Parameteridentifikation erfolgen, z. B. durch eine Optimierung auf Grundlage von Messdaten oder durch eine gleichzeitige Schätzung von Zuständen und des Parameters (vgl. Abschnitt 4.1, Gleichung (4.1)). Werden schließlich die beiden wichtigsten, dominanten Terme  $\psi_9$  und  $\psi_1$  genutzt, um die Modellgenauigkeit zu approximieren, kann diese reduzierte Identifikation  $\hat{g}_{1,red}$  zur vollständigen Linearkombination  $\hat{g}_1$  und zur Modellgenauigkeit  $g$  verglichen werden. In der Abbildung 5-4 ist dieser Vergleich dargestellt, welcher aufzeigt, dass aufgrund der Modellreduktion zwar geringfügig Informationen verloren gehen, die  $\hat{g}_1$  aufweist und welche sich daher als Abweichung bei  $\hat{g}_{1,red}$  bemerkbar machen, im Allgemeinen aber die Genauigkeit weiterhin hoch ist.

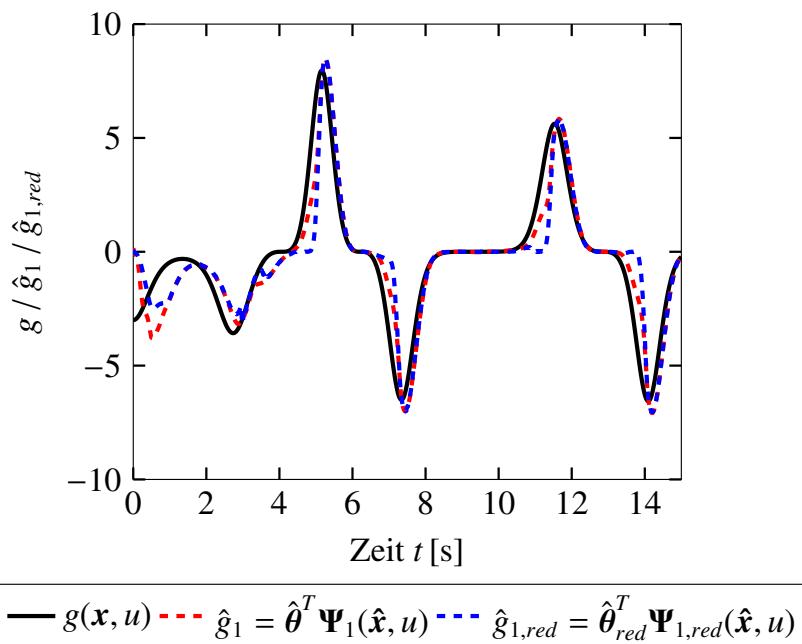
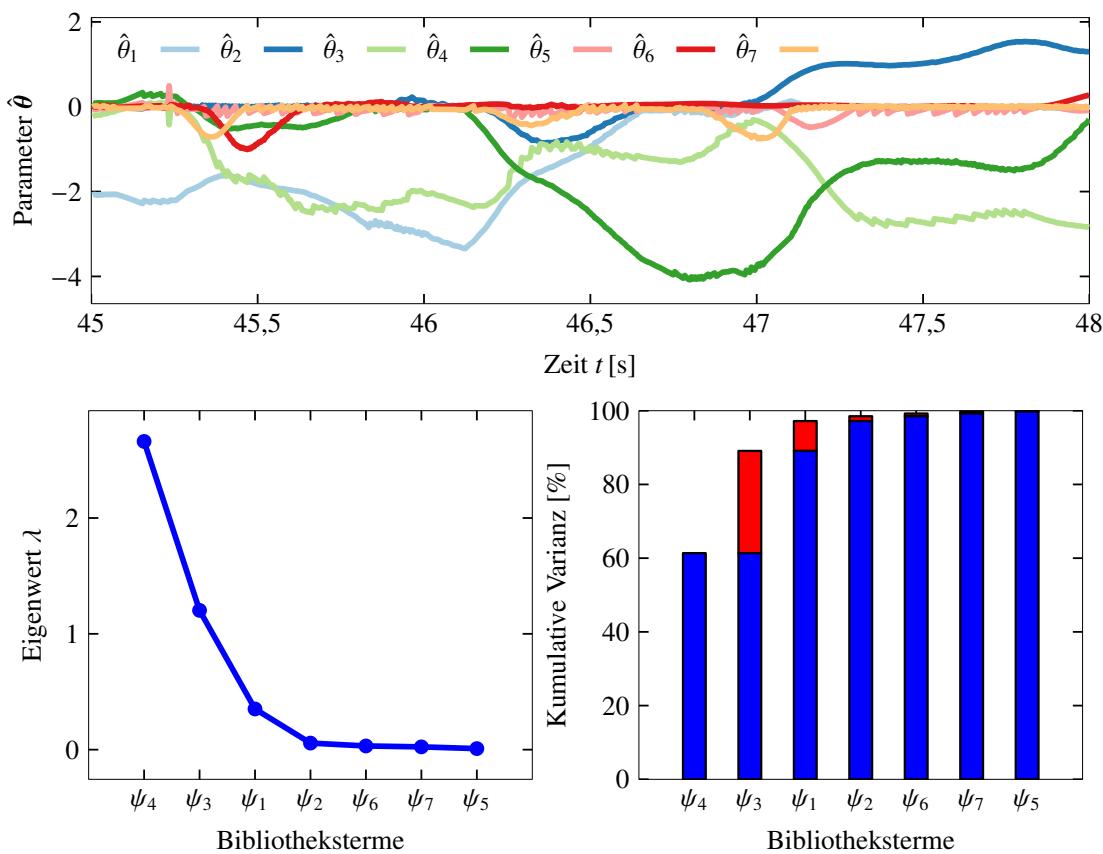


Abbildung 5-4: Approximation der Modellgenauigkeit  $g$  durch die vollständige Linearkombination  $\hat{g}_1$  und durch die von der PCA reduzierte Linearkombination  $\hat{g}_{1,red}$ , vgl. [GT23a]

Somit liefert die Modellreduktion durch die PCA die Identifikation relevanter Terme, die eine physikalisch-technische Interpretierbarkeit der Modellgenauigkeit nach den Anforderungen **F.2** und **F.3** ermöglichen. Analog durchgeführte Hauptkomponentenanalysen für die Bibliotheken  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  (vgl. Gleichung (4.18)) ergeben die im Kapitel 4 postulierten Ergebnisse: Für die Bibliothek  $\Psi_2$  werden die Terme  $\psi_9(\mathbf{x}, u) = x_1^2$  und  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  extrahiert, für die Bibliothek  $\Psi_3$  erfüllen die zwei Terme  $\psi_2(\mathbf{x}, u) = x_1$  und  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  die 90%-Hürde. Demnach bestätigt sich auch quantitativ, dass das Verfahren in der Lage ist, den korrekten Term, falls dieser enthalten ist, oder passende Alternativen zu diesem, wie im Fall des Duffing-Oszillators mit dem quadratischen und linearen Zustand, zu extrahieren. Nach dieser Analyse werden nun die Messdaten des Golfroboters während eines Schlags, welche aus einem Experiment am Prüfstand stammen, ausgewertet. Erneut ist in der oberen Zeile der Abbildung 5-5 der visuelle, zeitliche Verlauf der Parameter abgebildet, während in der unteren Zeile zwei Auswertungen der Modellreduktion durch die PCA und deren Zuordnung zu den Bibliothekstermen zu sehen sind. Die im Versuch verwendete Bibliothek lautet  $\Psi_5$  und ist bereits in der Tabelle 4-1 dargestellt worden.



*Abbildung 5-5: Merkmalsanalyse des zeitlichen Verlaufs der Prüfstandsdaten  $\hat{\theta}$  mittels PCA (obere Zeile) und Auswertung durch einen Scree-Test (links) bzw. die Methode der kumulativen Varianz (rechts) am Beispiel des Golfroboters und der Bibliothek  $\Psi_5(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), \tanh(x_2), x_2^3, u)^T$*

Nach dem Scree-Test werden nur die beiden Terme  $\psi_4(\mathbf{x}, u) = \cos(x_1)$  und  $\psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2$  als dominant ausgewählt, wohingegen nach der Methode der kumulativen Varianz bei einer Wahl von 90% zusätzlich  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  als weiterer, wichtiger Beitrag zur Approximation der Modellgenauigkeit  $g$  eingestuft wird. Im Vergleich zum Modell des Golfroboters (3.4) fällt nach den Auswertungen auf, dass insbesondere die zwei wichtigsten Bestandteile des Dämpfungsmoments  $M_d$  durch die PCA identifiziert werden (vgl. Gleichung (3.5)): Die Abhängigkeit des Stick-Slips-Effekts infolge der Gewichtskraft, welche durch  $\psi_4(\mathbf{x}, u) = \cos(x_1)$  extrahiert wird, sowie die Abhängigkeit der Reibung von der Winkelgeschwindigkeit, welche durch  $\psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2$  berücksichtigt wird. Somit ermöglicht das Verfahren ebenfalls auf Basis von Realdaten und im geschlossenen Regelkreis nachvollziehbare und physikalisch wertvolle Einsichten in das betrachtete System, sofern eine geeignete Bibliothek gewählt worden ist (vgl. Abschnitt 4.3). Werden diese Einsichten wiederum genutzt und durch ein PCA reduziertes Modell umgesetzt, so lässt sich die gemessene Abweichung  $g_{mess}$  durch  $\hat{g}_{5,red}$  entsprechend approximieren und mit der nichtlinearen Modellierung  $\hat{g}_{NL}$  vergleichen. Im Gegensatz zu  $\hat{g}_{NL}$ , welches die Reibung bereits sehr gut modelliert, weisen die Approximationen  $\hat{g}_5$ ,  $\hat{g}_{5,red}$  größere Aufweichungen auf, nähern das dynamische Verhalten aber qualitativ gut an. Diese Genauigkeit genügt, um eine ausreichend hohe und verbesserte Schätzgüte im Vergleich zum Modell (A6-2) zu erzielen.

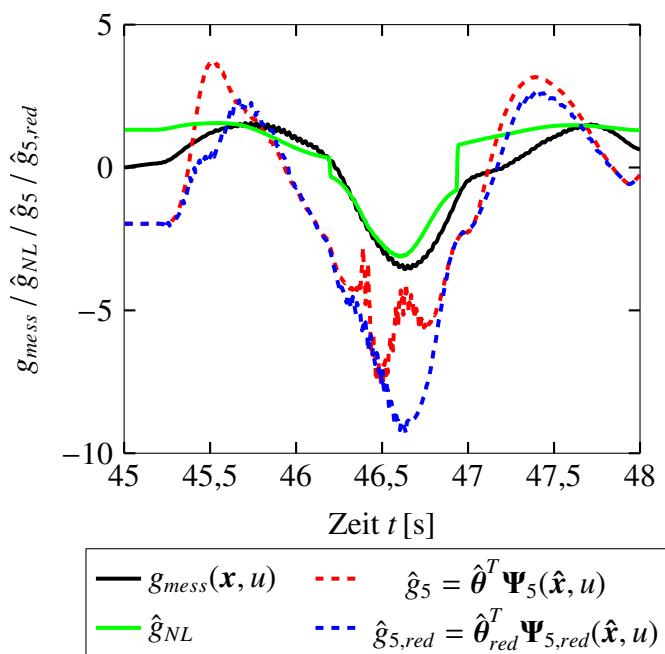


Abbildung 5-6: Approximation der gemessenen Abweichung  $g_{mess}$  durch die vollständige Linearkombination  $\hat{g}_5$  und durch die von der PCA reduzierte Linearkombination  $\hat{g}_{5,red}$  sowie im Vergleich zur Modellierung durch  $\hat{g}_{NL} = M_d$

## 5.2 Modellaktualisierung

Häufig ist es vorteilhaft, statt einer einmalig, offline durchgeführten Analyse schon während der Laufzeit eine Anpassung des Modells vornehmen zu können, beispielsweise wenn anhand der Parameterschwankungen oder der Zustandsschätzung erkennbar ist, dass die statisch verwendete Bibliothek  $\Psi$  keine oder lediglich eine geringe Verbesserung der Schätzgüte bewirkt. Dies lässt den Rückschluss zu, dass die verwendeten Hypothesen  $\psi_i$  möglicherweise nicht allesamt gleich gut geeignet sind, um die Modellgenauigkeit  $g$  adäquat zu charakterisieren, sodass ein nachfolgender, weiterer Schritt der Identifikation erfolgen muss. Die Möglichkeit, basierend auf der Merkmalsanalyse eine variable und sich anpassende Bibliothek, welche auch neue Hypothesen  $\psi_{j,\text{neu}}$  beinhaltet, zu nutzen, eröffnet daher die Chance, eine sukzessiv genauere Approximation der Modellgenauigkeit während der Laufzeit zu erzielen. Diese bewirkt eine höhere Modellgüte, wodurch eine Verbesserung der Schätzgüte gefördert wird. Darüber hinaus besteht ein weiterer Vorteil einer Online-Aktualisierung in der Diagnose und Adaption des Modells an sich (potentiell schleichend) verändernde Betriebszustände aufgrund von Verschleiß, Temperaturen oder anderen Umwelteinflüssen. In dieser Situation kann ein sich aktualisierendes Modell dafür sorgen, dass der Schätzfehler weiterhin in einem vertretbaren Rahmen bleibt und die Regelung robust funktioniert. In diesem Abschnitt wird daher ein Konzept zur Online-Modellaktualisierung entwickelt, welches situationsabhängig basierend auf der Merkmalsanalyse entweder die Bibliothek anpasst oder die aktuell verwendete Bibliothek beibehält. Aufgrund der notwendigen Phase der Datenakquise der Parametervektoren  $\hat{\theta}_k$  existieren zwei zeitlich getrennte Phasen in diesem Konzept, welches in der Abbildung 5-7 in einem Ablaufdiagramm dargestellt ist. Dieses ordnet die bisher thematisierten Methoden aus Kapitel 4 und Abschnitt 5.1 in ein Gesamtkonzept ein. Nachfolgend werden beide Phasen erläutert und mittels Experimenten am Golfroboter illustriert.

### Phase der Datenakquise und Aktivitätsüberprüfung

Bevor wie im Abschnitt 5.1 beschrieben eine fundierte Analyse der auftretenden Parameter erfolgen kann, müssen zunächst genügend Datensätze gesammelt werden. Dabei gilt es das transiente Verhalten des dynamischen Systems abzuwarten, falls das System erstmalig angeregt und/oder mit dem augmentierten Beobachter genutzt wird. Die Dauer der Datenakquise richtet sich somit einerseits nach der Einschwingphase, die zum Zeitpunkt  $t_k = T_0$  beendet ist, und andererseits nach der Menge  $N$  der zu sammelnden Parametervektoren. Letztere ist abhängig von der Anwendung und vom Ziel der Untersuchung zu wählen, sollte aber in der Regel ein Vielfaches der Abtastzeit  $T_1$  aufweisen, um  $n_\theta \ll N$  sicherzustellen. Analog zu anderen Verfahren mit gleitenden Zeithorizonten, wie etwa die modellprädiktive Regelung, kann dieser Einflussfaktor vorgegeben und variabel gestaltet werden.

tet werden. Je kleiner  $N$  gewählt wird, desto häufiger wird das Modell ggf. aktualisiert. Eine weitere Bedingung, die die Merkmalsanalyse einleiten kann, resultiert aus dem Vergleich des System- und Modellverhaltens. Überschreitet der messbare Modellfehler  $\Delta f$ , z. B. der Ausgangsfehler  $e_y = \hat{y} - y$ , eine festgelegte Schranke  $\delta_f$ , bedeutet dies, dass die Modellgüte unzureichend ist und eine Aktualisierung des Modells auf Basis der bisher gesammelten Informationen erfolgen soll. Diese Überprüfung ist besonders hilfreich, um Systemveränderungen des Systems zu detektieren, die eine Adaption des Modells erfordern. Daneben ist zu beachten, dass keine Identifikation der Modellgenauigkeit aufgrund mangelnder Dynamik erfolgen kann, wenn sich das System in Ruhe bzw. nahe der Ruhelage befindet, demnach  $u \equiv 0$  bzw.  $u \approx 0$  und  $x \equiv 0$  bzw.  $x \approx 0$  gelten. Ebenso muss die Wirkung der Modellgenauigkeiten  $g$  sichtbar sein, sodass keine plausible Identifikation erfolgen kann, wenn  $g \equiv 0$  bzw.  $g \approx 0$  gilt.

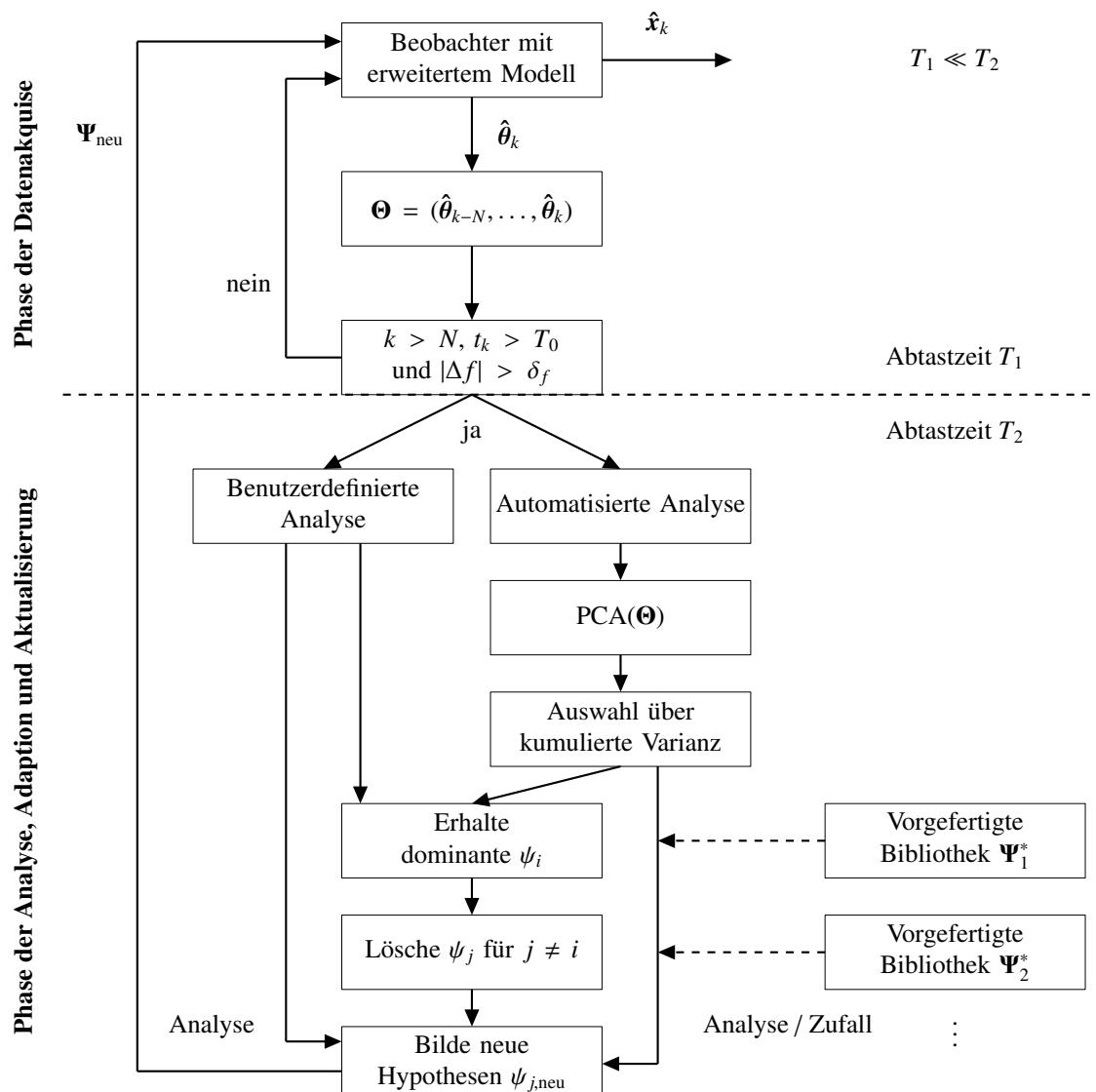


Abbildung 5-7: Konzept zur simultanen Schätzung und Modellaktualisierung, vgl. [GT24]

Eine zielgerichtete Analyse der Modellgenauigkeit kann somit nur erfolgen, wenn das Konzept zur Online-Modellaktualisierung die beschriebenen Situationen vom gewöhnlichen Betrieb unterscheidet und berücksichtigt. Die Aktivität der Modellaktualisierung wird deshalb über eine Abfrage gesteuert, wie es im Ablaufdiagramm 5-7 dargestellt ist. Liegen  $N$  Schätzwerte für  $\hat{\theta}$  vor und existiert eine Modellabweichung, so startet die Analyse zur Modellaktualisierung. Ist dies nicht der Fall, beispielsweise wenn keine zu große Modellabweichung  $|\Delta f|$  besteht, oder noch nicht genügend Schätzwerte für die Parameter gesammelt worden sind, wird weiterhin simultan geschätzt, aber keine Modellaktualisierung vorgenommen. Gleiches gilt, wenn das transiente Verhalten  $t_k \leq T_0$  noch nicht abgeschlossen ist. Einflussfaktoren wie der Zeitpunkt  $T_0$ , welcher das Ende des Einschwingens markiert, die Anzahl  $N$  der zu sammelnden Parametervektoren sowie die Schranke  $\delta_f$  für den Modellfehler sind demnach Größen, die der automatisierten Modellaktualisierung vorgegeben werden müssen.

### **Phase der Analyse, Adaption und Aktualisierung**

Sind die Voraussetzungen für eine Modellaktualisierung gegeben, wird zunächst eine Analyse des vergangenen Zeithorizonts durch die  $N$  erfassten Datensätze vorgenommen, um zu überprüfen, wie hilfreich die genutzte Bibliothek  $\Psi$  zur Approximation der Modellgenauigkeit gewesen ist. Dazu kann zwischen einer benutzerdefinierten und einer automatisierten Analyse gewählt werden. Aufgrund der zeitlichen Verzögerung, die eine solche personenbezogene Untersuchung verursacht, sowie der subjektiven Bewertung, die zu einer Verzerrung der Informationen führen kann, wird ausschließlich der Pfad der automatisierten Analyse betrachtet. Nach der Durchführung der Merkmalsanalyse, welche die dominanten Bibliotheksterme  $\psi_i$  liefert, werden die nicht dominanten Terme  $\psi_j$  mit  $i \neq j$  aus der Bibliothek entfernt und durch neue Hypothesen  $\psi_{j,\text{neu}}$  ersetzt. Diese stammen aus vorgefertigten Bibliotheken  $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \dots$ , die beispielsweise nach Anwendungsfeldern oder Dynamikart gruppiert sein können. Für mechanische Systeme könnte eine vorgefertigte Bibliothek ggf. aus Reibungselementen oder aus schwingungstypischen Elementen bestehen. Anschließend werden neue Terme  $\psi_{j,\text{neu}}$  aus dieser großen Vielfalt randomisiert oder aufgrund der vorangegangenen Analyse<sup>49</sup> ausgewählt und der Bibliothek, nun als  $\Psi_{\text{neu}}$  bezeichnet, mit den zuvor als dominant gekennzeichneten Termen  $\psi_i$  zugeführt. Wegen der Erfahrungswerte aus Kapitel 4 wird jedoch eine Randomisierung vorgeschlagen, bei welcher z. B. auch verschiedene Wahrscheinlichkeiten zur Auswahl bestimmter, neuer Hypothesen hinterlegt sein können, um eine vielseitige und ausgewogene neue Bibliothek zu gewährleisten. Je nach Applikation und Vorwissen kann diese Auswahl aus lediglich

<sup>49</sup>Wegen der Auswahlmethode, welche einen konkreten Wert für die kumulative Varianz definiert, könnten auch nicht dominante Terme, die einen verhältnismäßig hohen Anteil an Varianz aufweisen und bisher nicht berücksichtigt wurden, weiter genutzt werden.

einer vorgefertigten, thematischen Bibliothek erfolgen, z. B. wenn bekannt ist, dass es sich bei den Ungenauigkeiten um Schwingungen oder Vibrationen handelt, oder durch die zufällige Selektion aus mehreren, verschiedenen Bibliotheken, falls die Ungenauigkeiten gänzlich unbekannter Art sind. Wie in der Abbildung 5-7 zu erkennen ist, wird diese neue Bibliothek  $\Psi_{\text{neu}}$  daraufhin für den nächsten Zeithorizont im augmentierten Beobachter verwendet und stellt demnach eine angepasste, häufig verbesserte Option zur Approximation der Modellgenauigkeit dar. Je nach Länge des Aktualisierungs- und Analysezeitraums besteht u. U. der Bedarf, einen konkreten Parameterwert zu den jeweils identifizierten dominanten Termen zu finden, um ein festes interpretierbares Modell zu erhalten, welches auch die physikalische Parametrierung der gefundenen, identifizierten Terme widerspiegelt. Dies ist bereits im Abschnitt 5.1 thematisiert und mithilfe einer klassischen Parameteridentifikation, etwa nach Gleichung (4.1), adressiert worden. Im Fall der Online-Modellaktualisierung entsteht dieser Bedarf zudem ausschließlich durch lange Aktualisierungs- und Analysezeiträume, da andernfalls eine Identifikation der Parameter durch den augmentierten Beobachter erfolgt und ohnehin mehrere, sich ggf. stark unterscheidende Teilmodelle entstehen, weil es sich beispielsweise um ein sich schnell veränderndes System handelt. Schließlich liegt nach Abbildung 5-7 ein geschlossener Kreislauf vor, der grundsätzlich durchgehend fortgeführt werden kann, um ein sich sukzessiv verbessерndes Modell zu erzielen. Dies ist vor allem hilfreich, wenn Systemveränderungen auftreten und das Modell an diese adaptiert werden muss. Da durch die Modelladaption lediglich ein Teil des Beobachtermodells angepasst wird, bewirken die adaptiven Umschaltprozesse in der Regel keine größeren Nachteile bzgl. der Regelgüte.

## Evaluation am Beispiel des Golfroboters

Für das beschriebene Konzept (vgl. Abbildung 5-7) wird nun anhand des Golfroboters ein Machbarkeitsnachweis durchgeführt, der exemplarisch einzelne Situationen des Konzepts beleuchtet. Hierbei wird aufgrund der Softwareanforderungen des Prüfstands und der intuitiven Implementierung statt der Formulierung mehrerer Bibliotheken  $\Psi_1^*, \Psi_2^*$  nur eine Bibliothek  $\Psi^* \in \mathbb{R}^{17}$  als Option genutzt, welche aus einer Vielzahl an Termen besteht. Die Bibliothek des Beobachters, die zur Approximation der Modellgenauigkeit dienen soll, beinhaltet lediglich jeweils neun Terme. Daher werden jene neun Terme aus der Bibliothek  $\Psi^*$  randomisiert gewählt, sodass eine vielfältige Kombination an Bibliothekskombinationen entsteht und der Nachweis als umfassend und allgemein gültig angesehen werden kann. Die Terme der Bibliothek  $\Psi^*(x, u)$  sind inklusive ihrer Nummerierung in der Tabelle 5-1 zusammengefasst. Der Machbarkeitsnachweis wird zunächst für den allgemeinen Betrieb des Golfroboters gezeigt, bei welchem weiterhin das Modell (A6-2) genutzt wird. Abschließend wird ein Nachweis für den Fall von Sys-

temveränderungen erörtert. Dieser wird anhand einer Simulation untersucht, weil eine plötzliche, bauliche Veränderung am Prüfstand während der Zustandsschätzung im geschlossenen Regelkreis nicht möglich ist. Bei der erstmaligen Nutzung des Beobachters werden für alle nachfolgend beschriebenen Untersuchungen dieses Kapitels jeweils die ersten neun Elemente von  $\Psi^*$  verwendet (vgl. die Tabelle 5-1), sodass die Bibliothek  $\Psi_0(\mathbf{x}, u) = (1, x_1, x_2, \cos(x_1), x_2^2, \tanh(x_2), \sin(x_2), x_1^2 x_2, u)^T$  gebildet wird. Diese initiale Bibliothek stellt für den Gofroboter vielfältige Hypothesen bereit, da sowohl trigonometrische als auch polynomiale Elemente enthalten sind, und ist folglich vorteilhaft für den Beginn der Identifikation der Modellgenauigkeiten.

<b>Index</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
Term	1	$x_1$	$x_2$	$\cos(x_1)$	$x_2^2$	$\tanh(x_2)$	$\sin(x_2)$	$x_1^2 x_2$	$u$
<b>Index</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	
Term	$u^2$	$x_1^2$	$e^{x_2}$	$\sinh(x_2)$	$x_1 x_2$	$\tan(x_2)$	$\sin(x_1)^2$	$\sin(x_1^2)$	

Tabelle 5-1: Bibliotheksterme von  $\Psi^*$  und ihr Index für den Machbarkeitsnachweis

### Machbarkeitsnachweis: Allgemeiner Betrieb

In der Abbildung 5-8 werden Informationen bzgl. der Adaption und Aktualisierung der Bibliothek  $\Psi_{\text{neu}}$ , die nach dem Gesamtkonzept 5-7 durch Löschen und Hinzufügen neuer Hypothesen aus  $\Psi^*$  entsteht, abhängig von der Zeit dargestellt. Die jeweils genutzten Bibliotheksterme sind anhand ihrer Nummerierung nach Tabelle 5-1 gekennzeichnet, welche durch verschiedene Farben veranschaulicht wird. Die aktuelle Bibliothek  $\Psi_{\text{neu}}$  lässt sich daher gedanklich durch einen vertikalen Balken zum interessierenden Zeitpunkt  $t$  ablesen. So lässt sich beispielsweise die Einschwingphase  $T_0 = 1\text{ s}$  erkennen, da die ersten neun Indizes innerhalb der ersten Sekunde konstant bleiben und demnach die Bibliothek  $\Psi_0$  genutzt wird. Zudem ist anhand dessen der Aktualisierungszeitraum erkennbar, welcher 0,25 Sekunden umfasst. Mittels schwarzer Symbole werden darüber hinaus die nach jedem Aktualisierungshorizont identifizierten, dominanten Terme des vergangenen Zeitraums illustriert. Dabei werden jeweils die letzten 0,375 Sekunden zur Analyse genutzt. Da diese Terme durch die kumulative Varianz, welche in diesem Fall zur Veranschaulichung auf 99% festgelegt ist, bestimmt werden (vgl. Gleichung (5.1)), werden u. U. mehrere Bibliotheksterme pro analysiertem Zeitraum identifiziert. Um dennoch die Gewichtung der dominanten Terme zu verdeutlichen, werden diese durch verschiedene Symbole unterschieden, wobei die Indizes mit Kreisen auf den dominantesten Term hinweisen. Für dieses Exemplar eines allgemeinen Betriebs zeigen sich je nach Phase der Schlagdynamik andere Terme, welche die Modellgenauigkeit, die aus der nicht

berücksichtigten Reibung resultiert, annähern und das Modell anhand der Bibliothek  $\Psi^*$  adaptieren. So resultieren die folgenden dominanten Terme, welche nachfolgend exemplarisch für jede Schlagphase aus der Visualisierung 5-8 abgelesen werden:

$$\begin{aligned} t = 1 \text{ s} : \quad & \psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2, \psi_1(\mathbf{x}, u) = 1, \\ t = 1,5 \text{ s} : \quad & \psi_{16}(\mathbf{x}, u) = \sin(x_1)^2, \psi_{10}(\mathbf{x}, u) = u^2, \\ t = 2 \text{ s} : \quad & \psi_5(\mathbf{x}, u) = x_2^2, \psi_{13}(\mathbf{x}, u) = \sinh(x_2), \psi_{14}(\mathbf{x}, u) = x_1 x_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Während des Ausholens bis zur ersten Sekunde charakterisieren insbesondere die Winkelgeschwindigkeit  $\psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2$  und Konstanten  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  das Manöver. Dies ändert sich beim Schlag zu trigonometrischen und stellgrößenabhängigen Funktionen, wohingegen das Rückholen des Schlägers durch geschwindigkeitsbasierte und trigonometrische Terme sowie Korrelationen zwischen Winkel und Winkelgeschwindigkeit geprägt ist (vgl. Gleichung (5.2)). Die Wirkung der Reibung ist somit nach den dynamischen Phasen des Golfroboters anhand der temporären Konvergenz der Bibliotheksindizes zu erkennen und ermöglicht eine physikalisch interpretierbare Kompensation der Reibung im Sinne der Anforderungen F.2 und F.3. Infolge der kurzen Aktualisierungs- und Analysezeiträume findet lediglich diese temporäre Identifikation der Terme statt, welche sich innerhalb der verschiedenen Phasen unterscheiden und keine finale, dauerhafte Zuordnung für den Golfroboer ermöglichen. Dies soll illustrieren, dass die Echtzeitfähigkeit der Online-Aktualisierung auch für sich potentiell schnell verändernde Systeme gegeben ist.

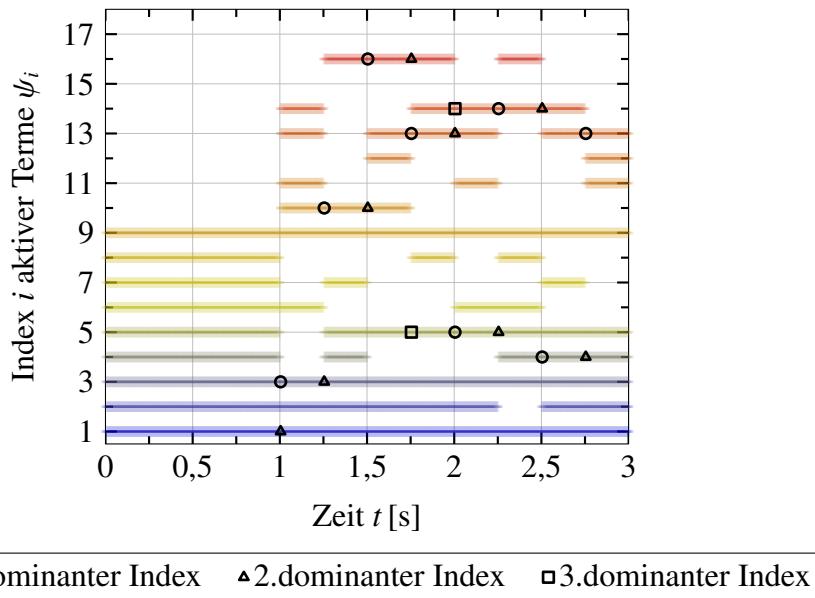


Abbildung 5-8: Indizes aktiver Bibliotheksterme und der durch die PCA identifizierten dominanten Terme zur Bibliotheksanpassung

Die Qualität des adaptiven, augmentierten Beobachters lässt sich nicht nur im Vergleich zu den Messungen des Ist-Zustandes, welcher auf den Sollwert für die Schlagdynamik eingestellt werden soll, bewerten, sondern auch anhand des am Prüfstand verwendeten Luenberger-Beobachters analysieren. Abbildung 5-9 zeigt beispielsweise die Schätzgüte des offenen Regelkreises, wenn der Luenberger-Beobachter die Schätzwerte für die Regelung liefert und das adaptive JE-SRUKF parallel betrachtet wird. Die Modelladaption basierend auf der sich stetig anpassenden Bibliothek  $\Psi^*$  beeinflusst hierbei die Schätzgüte des Beobachters nicht nachteilig, sondern ist sogar geringfügig höher als die des Luenberger-Beobachters.

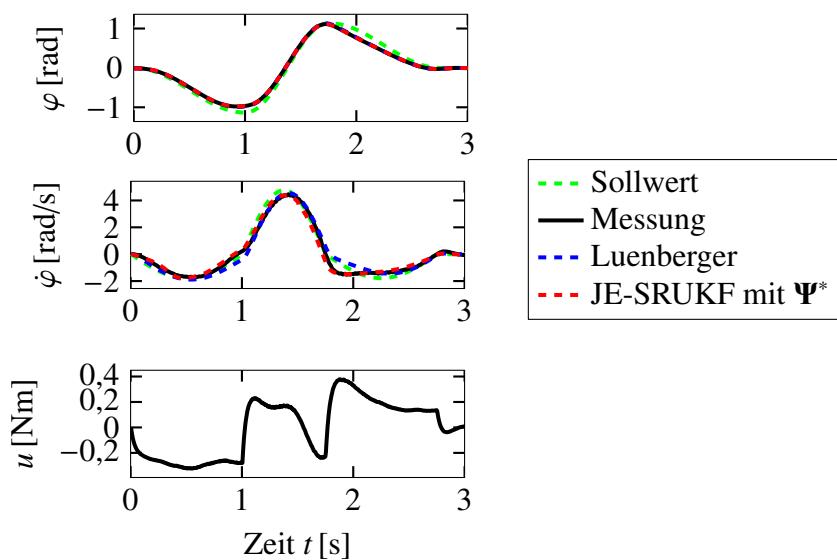


Abbildung 5-9: Schätzgüte des offenen Regelkreises bei Nutzung einer adaptiven Bibliothek  $\Psi^*$  am Prüfstand

Werden längere Aktualisierungs- und Analysezeiträume für die Modelladaption gewählt, findet im Kontrast zur vorigen, temporären Identifikation dominanter Terme eine eindeutigere, über die Zeiträume nahezu gleichbleibende Identifikation statt. So zeigt Tabelle 5-2 einen kurzen Ausschnitt aus Experimenten, deren Aktualisierungszeitraum jeweils bei zwei Sekunden und einer Sekunde liegt und deren Analysezeitraum um die vorangegangenen 0,125 Sekunden ergänzt wird. Da weiterhin der Zeitraum nach  $T_0 = 1$  s bis zum Ende des Schlags bei  $t = 3$  s betrachtet wird, werden die dominanten Terme jeweils nur zwei- bzw. dreimal identifiziert. Ähnlich zur Abbildung 5-5, bei der einmalig der gesamte Zeitraum analysiert wird, werden in diesen Versuchen überwiegend einheitliche Terme identifiziert, z. B.  $\psi_3(\mathbf{x}, u) = x_2$ ,  $\psi_1(\mathbf{x}, u) = 1$  und  $\psi_6(\mathbf{x}, u) = \tanh(x_2)$ ,  $\psi_{12}(\mathbf{x}, u) = e^{x_2}$ . Diese deuten folglich auf eine vornehmlich geschwindigkeitsbasierte Modellierung des Reibmoments hin. Alternativ können nach einer temporären Identifikation wie in der Abbildung 5-8 die pro Schlagphase identifizierten Terme in einer gemeinsamen Bibli-

theke zusammengeführt werden und mithilfe eines weiteren Schlags über einen langen Aktualisierungs- und Analysezeitraum final identifiziert werden. Der diskutierte Vorteil der hohen Schätzgüte und der Adoptionsfähigkeit gegenüber dem Luenberger-Beobachter, welcher Systemwissen benötigt, um ein korrektes Modell (ggf. durch Linearisierung) zu bestimmen, wird besonders im nachfolgenden Abschnitt deutlich, wenn Systemveränderungen existieren, die eine Anpassung des Modells erfordern.

Nr.	$T_0$ [s]	Zeitraum [s]	Terme 1.Phase	Terme 2.Phase	Terme 3.Phase
26	1	2 / 2, 125	$\psi_3, \psi_1$	$\psi_3, \psi_1, \psi_{13}$	-
27	1	1 / 1, 125	$\psi_3, \psi_1$	$\psi_3, \psi_6, \psi_{12}$	$\psi_6, \psi_{12}$

Tabelle 5-2: Dominante Bibliotheksterme für längere Aktualisierungs-/Analysezeiträume

### Machbarkeitsnachweis: Systemveränderungen

Um eine Systemveränderung zu simulieren, wird eine Veränderung der Masse und der Trägheit bzgl. des Golfschlägers ab einem konkreten Zeitpunkt  $T_{krit}$  angenommen. Hintergrund dieses Szenarios ist, dass die dynamischen Eigenschaften des Golfroboters insbesondere aus der Gewichtskraft des Schlägers sowie dessen Geschwindigkeit resultieren und sich deshalb zur Demonstration von Systemveränderungen besonders eignen. Im folgenden Experiment wird daher ab dem Zeitpunkt  $T_{krit} = 1$  s eine Systemveränderung simuliert, indem die Masse etwa verdreifacht wird. Infolgedessen ändert sich ebenfalls die Trägheit. Die Einschwingphase, in der zunächst Daten gesammelt und keine Analyse oder Aktualisierung durchgeführt werden, wird zu  $T_0 = 0,75$  s festgelegt, der gleitende Horizont umfasst weiterhin 0,375 Sekunden. Eine Aktualisierung der Bibliothek und des Modells erfolgt zur Vergleichbarkeit des vorigen Nachweises wiederum alle 0,25 Sekunden. Zudem ist in der Simulation Messrauschen berücksichtigt worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in der Abbildung 5-10 dargestellt, welche die Informationen bzgl. der Bibliothek und der Aktualisierungen wie zuvor bereits beschrieben bereitstellt. Die Analyse der Modelladaption ergibt, dass der Einfluss der veränderten Gewichtskraft und Trägheit identifiziert sowie durch den adaptiven, augmentierten Beobachter im Modell berücksichtigt wird. Dies ist in der Abbildung anhand der temporären Konvergenz der Indizes, welche als dominant detektiert werden, zu erkennen. Im Gegensatz zum vorherigen Fall des allgemeinen Betriebs, vgl. Abbildung 5-8, werden andere Terme extrahiert. So werden trigonometrische Terme, z. B.  $\psi_4(x, u) = \cos(x_1)$ , geschwindigkeitsabhängige Terme, wie  $\psi_3(x, u) = x_2$ , oder winkelabhängige Terme, wie  $\psi_2(x, u) = x_1$ , identifiziert. Jene Terme sind genau solche Dynamikanteile, die einerseits die infolge der Systemveränderung veränderte Rotationsbewegung beim Ausholen bzw. Rückholen des

Schlägers und andererseits die fehlende, komplexe Reibung, die das Modell (A6-2) nicht berücksichtigt, beschreiben. Folglich bestätigt sich die postulierte Fähigkeit des augmentierten Beobachters, auch bei Systemveränderungen eine physikalisch interpretierbare und fundierte Modelladaption umsetzen zu können, welche insbesondere eine vorteilhafte Nutzbarkeit nach Anforderung **F.3** für nachfolgende Syntheseschritte erlaubt. Allerdings stellt sich die Frage, inwiefern eine hohe Schätzgüte während der fortlaufenden Modelladaption nach dem Konzept 5-7 aufrecht erhalten werden kann.

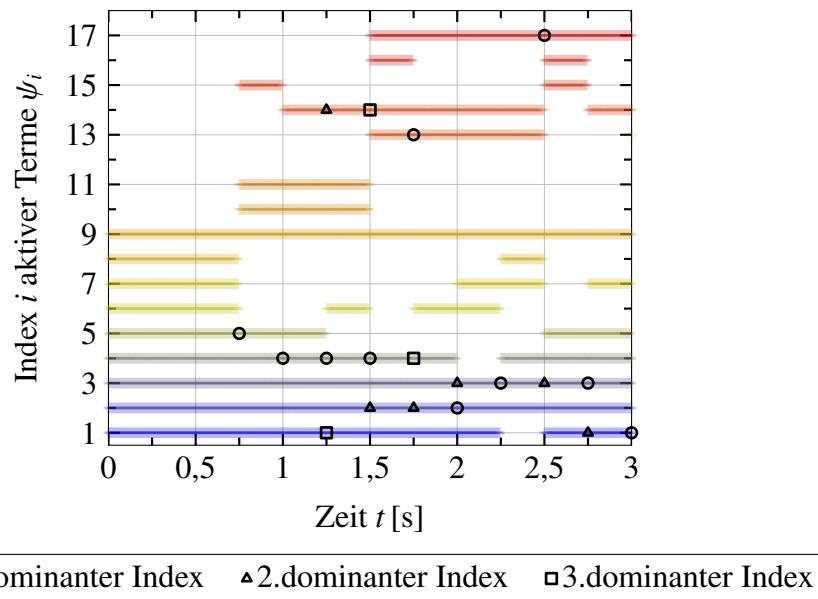


Abbildung 5-10: Indizes aktiver Bibliotheksterme und der durch die PCA identifizierten dominanten Terme zur Bibliotheksanpassung, vgl. [GT24]

Dies lässt sich wiederum im Vergleich zu dem am Prüfstand verwendeten Luenberger-Beobachter und dem nichtlinearen Modell (3.4) bewerten, welches in der Simulation als Referenz für das Prüfstandsmodell dient. In der Abbildung 5-11 ist der Zeitpunkt der Systemveränderung anhand des Luenberger-Beobachters deutlich zu erkennen, da dieser ab  $T_{krit} = 1$  s nicht mehr die Winkelgeschwindigkeit des Prüfstandmodells schätzen kann. Die Systemveränderung ist darüber hinaus durch das veränderte Motormoment ersichtlich, welches nun aufgrund der Diskrepanz zwischen Reglermodell und Strecke verrauschter agiert und ein höheres Moment in Folge der Gewichtskraft und Trägheit stellen muss. Die Sollvorgabe ist dagegen an die Systemveränderung angepasst, da sich diese in Abhängigkeit des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit berechnet. Der Anstieg der Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ist während des Schlags größer, was das adaptive JE-SRUKF jedoch erkennt und bis auf minimale Abweichungen, die beim Rückführen des Schlägers entstehen, zuverlässig schätzt. Die Adaptionsfähigkeit des Verfahrens 5-7 ist demnach auch für den Fall einer Systemveränderung gegeben und ermöglicht eine sichere Schätzung

der Zustandsgrößen am realen Prüfstand, wie es bereits für die Situation ohne Online-Aktualisierung in der Abbildung 4-19 erfolgreich gezeigt worden ist. Folglich stellt die Nutzung der Online-Modellaktualisierung insbesondere für den Fall von Systemveränderungen ihren Vorteil deutlich heraus.

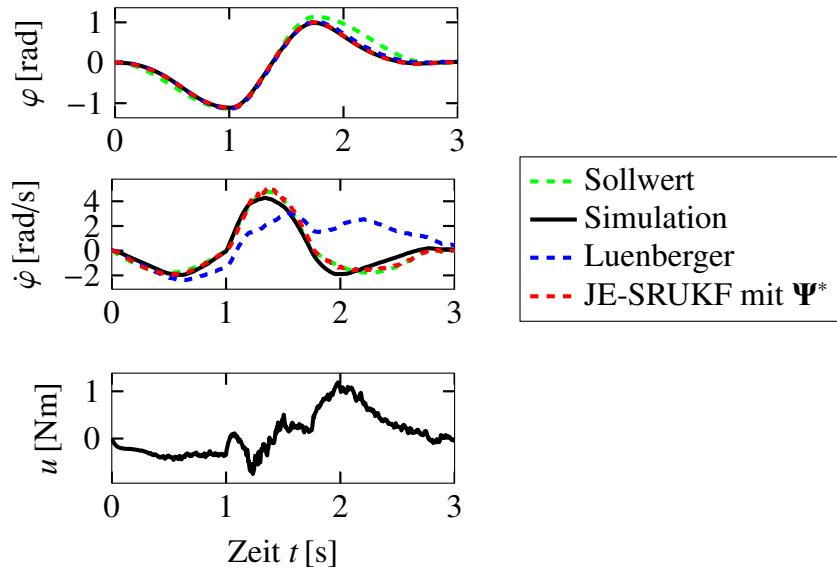


Abbildung 5-11: Schätzgüte des simulierten, geschlossenen Regelkreises bei Auftreten von Systemveränderungen ab  $T_{krit} = 1$  s und Nutzung einer adaptiven Bibliothek  $\Psi^*$ , vgl. [GT24]

### 5.3 Überprüfung der Interpretierbarkeit

Nach den Erkenntnissen der vorangegangenen Abschnitte stellt sich nun die Frage, inwiefern das Ziel **F.2**, einen tieferen und physikalisch-plausiblen Einblick in das System bzw. in die Modellgenauigkeit zu erhalten, durch die PCA und Online-Modellaktualisierung erreicht worden und zu bewerten ist. Dazu wird der abstrakte Begriff *Interpretierbarkeit* beleuchtet, der bereits in der Einleitung 1.2 definiert worden ist, im Folgenden aber etwas ausführlicher eingeordnet wird. Der Begriff Interpretierbarkeit ist im Kontext datenverarbeitender Methoden, wie etwa im maschinellen Lernen, nicht klar definiert. In der medialen Berichterstattung werden die Terminologien Interpretierbarkeit und Erklärbarkeit beispielsweise in einem Zusammenhang genannt oder sogar gleichgesetzt. Allerdings ist kein deckungsgleicher Bedeutungsinhalt gegeben (vgl. [LPK21],[MV20],[RMB<sup>+</sup>20]). Unter der Frage, inwiefern datenbasierte Modelle transparent und fair gestaltet werden können,

um z. B. keine bestimmten Personengruppen zu benachteiligen<sup>50</sup> oder zu diskriminieren<sup>51</sup>, findet daher eine intensive Forschung zu erklärbarer und interpretierbarer künstlicher Intelligenz statt.

In der Regelungstechnik werden entstandene Modelle gewöhnlich physikalisch-technisch interpretiert, d. h. einer mathematischen Formulierung oder parametrischen Darstellung wird ein konkretes physikalisch-technisches Phänomen oder eine ebensolche Wirkung zugeordnet. Aus einer Differentialgleichung können beispielsweise die zeitlichen Effekte oder einzelnen Wirkprinzipien abgelesen werden, wie es bereits in der Abbildung 1-7 illustriert worden ist. Diese veranschaulichte zudem, dass ein neuronales Netz im Gegensatz zur Differentialgleichung nicht interpretierbar im Sinne der in dieser Arbeit verwendeten Definition ist. Ähnlich verhält es sich mit Linearkombinationen aus beliebig vielen komplexen Funktionen, die bzgl. ihrer physikalischen Wirkprinzipien schwer zu deuten sind oder als Superposition vieler einzelner Dynamiken resultieren und nicht unterschieden werden können. Radiale Basisfunktionen, die zur Approximation der Modellungenauigkeiten in [KSH21] genutzt werden, stellen beispielsweise Funktionen dar, deren physikalisch-technische Bedeutung für mechatronische Systeme nicht direkt und objektiv ersichtlich ist. Daher wurde zu Beginn dieser Arbeit der Bedarf festgestellt, einerseits physikalisch motivierte Bibliotheksfunktionen zu nutzen sowie andererseits durch die Begrenzung auf dominante Terme eine Übersichtlichkeit zu gewährleisten, die eine Analyse und Deutung aus physikalisch-technischer Sicht erst ermöglicht. Obwohl diese Arbeit nicht den Anspruch erhebt, die *korrekte* bzw. *reale* Darstellung der Modellungenauigkeit zwingend zu finden und zu extrahieren, denn dies ist ob der Vielfalt der dynamischen Terme und ihrer Superposition nicht eindeutig möglich, besteht der Vorteil der präsentierten Methoden darin, Interpretierbarkeit in einer Darstellung zu ermöglichen, die möglicherweise der tatsächlichen nahe kommt und in jedem Fall einen tieferen Systemeinblick generiert.

Anhand des Duffing-Oszillators konnte beispielsweise gezeigt werden, dass der tatsächlich wirkende Dynamikterm der Modellungenauigkeit, sofern dieser in der Bibliothek vorhanden ist, identifiziert oder eine vergleichbare Alternative gefunden werden kann, die sehr nah an der wirkenden Dynamik liegt (vgl. Abbildungen 4-10 und 5-3). Experimente am Golfroboter bestätigten Modellierungsansätze des vermuteten Stick-Slip-Effekts und offenbarten interessante, zuvor unbekannte Zusammenhänge, die nicht nur einen physikalischen Mehrwert bringen, sondern auch bzgl. einer Adaption bei Systemveränderungen vorteilhaft sind. Diese Einblicke in das System und seine Dynamik, welche durch eine parametrische Darstellung angenähert wird, die einen Rückschluss auf physikalisch-

<sup>50</sup><https://www.zeit.de/arbeit/2018-10/bewerbungsroboter-kuenstliche-intelligenz-amazon-frauen-diskriminierung>, abgerufen am 20.12.2023

<sup>51</sup><https://www.forbes.com/sites/emmawoollacott/2022/12/29/apple-sued-over-racial-bias-of-apple-watch/>, abgerufen am 20.12.2023

technische Wirkprinzipien zulässt, sind insbesondere für weitere Synthese- und Analyse schritte nutzbar. Die Zugänglichkeit, solche Schritte anzuschließen, wird schließlich in diesem Kapitel durch die Aktualisierung der Bibliothek und durch eine automatische Modelladaption gewährleistet (vgl. Abschnitt 5.1 und 5.2), wobei die Anpassung wie bereits zuvor angemerkt abhängig vom Aktualisierungs- und Analysezeitraum geschieht. Sind diese Zeiträume großzügig gewählt, kann anstelle einer temporären, phasenabhängigen Identifikation eine zielgerichtete dauerhafte Extraktion ähnlich zur einmaligen Offline-Identifikation in Abschnitt 5.1 erzielt werden. So zeigten die Untersuchungen, dass nicht nur im Fall von Systemveränderungen eine automatische Modelladaption vorteilhaft ist, sondern ebenfalls im allgemeinen Betrieb tiefere Einsichten in das Systemverhalten sowie höherwertige Modelle erzielt werden können, deren Qualität allen modellbasierten Komponenten zur Verfügung stehen könnte. Im Folgenden werden daher die Schätzgüte, die Dünnsbesetztheit der Parameter  $\hat{\theta}_k$  während der gesamten Laufzeit  $k = 1, \dots, N$  und die Anzahl der dominanten Terme, welche aus einer 90%-igen Varianz resultieren, als quantitative Kriterien verwendet, um die Interpretierbarkeit nach Anforderung F.2 zu bewerten. Der Schätzfehler stellt hierbei ein wichtiges Merkmal im Zusammenhang der Interpretierbarkeit dar, sodass dieser als drittes Kriterium einfließt. Die quantitative Bewertung wird anhand von Simulations- und Prüfstandsexperimenten des Golfroboters exemplarisch durchgeführt. Hierbei gilt ein Versuch jeweils in höherem Maße interpretierbar, je geringer die Werte aller drei Kriterien ausfallen.

In der Abbildung 5-12 wird eine solche Bewertung der Interpretierbarkeit auf der Grundlage von Simulationsergebnissen, die bei Vorherrschen von Systemveränderungen durch eine aktive, fortwährende Modelladaption nach dem Konzept 5-7 erzielt worden sind, vorgenommen. Diese Systemveränderungen resultieren beispielsweise aus einer verdreifachten Masse, einem verdoppelten dynamischen und halbierten statischen Reibkoeffizienten oder einer veränderten Trägheit. Zudem ist Messrauschen in den Simulationen berücksichtigt worden. Die Abbildung stellt dazu die drei Maße im Vergleich dar: den Schätzfehler auf der  $x$ -Achse, die Dünnsbesetztheit anhand der  $\ell_1$ -Norm auf der  $y$ -Achse sowie die Anzahl der dominanten Terme als Farbskala. Hierbei repräsentiert jeweils ein Dreieck einen Versuch. In der Abbildung ist zu erkennen, dass sowohl der Schätzfehler als auch die Auswertung der  $\ell_1$ -Norm aller Parameter keine starke Streuung aufweisen und sich in einem geringen Wertebereich befinden. Ebenso bleiben nahezu alle Modelle interpretierbar, da maximal vier Terme zur Beschreibung von auftretenden Ungenauigkeiten trotz der Existenz von Systemveränderungen benötigt werden. In der Mehrheit der Versuche identifiziert die PCA drei Terme. Aufgrund der geringen Werte und der kleinen Streuung für alle drei Maße ist somit eine physikalisch-technische Interpretierbarkeit nach dem in dieser Arbeit formulierten Verständnis gegeben, obwohl Systemveränderungen präsent sind.

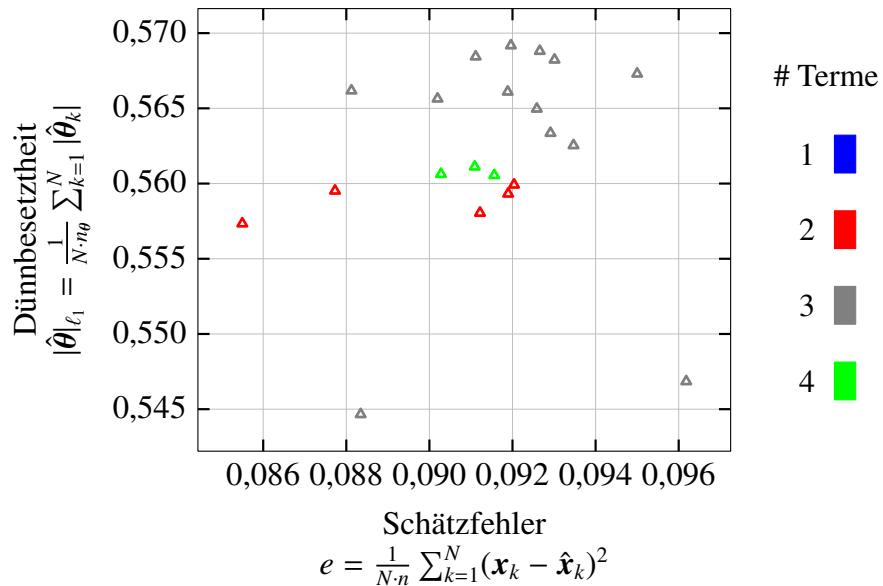


Abbildung 5-12: Quantifizierung der Interpretierbarkeit für das System des Golfroboters:  
Simulationsergebnisse bei Systemveränderungen und Modelladaption

Im Gegensatz zu den Simulationsergebnissen weisen fast alle Kriterien bei Prüfstandsexperimenten erwartungsgemäß höhere Werte auf. Diese werden in der Abbildung 5-13 dargestellt, wobei zwischen Experimenten ohne Modelladaption (vgl. Abbildung 5-13(a)), d. h. ohne eine fortlaufende Aktualisierung der Bibliothek nach dem Gesamtkonzept 5-7, und mit Modelladaption (vgl. Abbildung 5-13(b)) differenziert wird. Erstere weist zudem eine Unterscheidung in Versuche mit und ohne Systemveränderungen auf, welche durch die Dreiecke bzw. Kreise gekennzeichnet werden. In dieser Abbildung 5-13(a) zeigt sich, dass bis auf zwei Ausnahmen eine hohe Schätzgüte erzielt wird, da der Schätzfehler für die meisten Experimente sehr klein ist und lediglich eine geringe Streuung der Versuche aufweist. Einzig jene mit Systemveränderungen weisen teils eine etwas niedrigere Schätzgüte auf. Dagegen ist die Streuung der Dünnbesetzung, gemessen an der  $\ell_1$ -Norm, quantitativ höher als in den Simulationsergebnissen, korreliert jedoch überwiegend mit der Anzahl der identifizierten, dominanten Bibliotheksterme. So ist dieser Wert umso kleiner, je weniger Terme durch die PCA identifiziert werden. Bis auf eine Ausnahme sind dabei nicht mehr als drei Terme erforderlich, wobei die Mehrheit der Prüfstandsexperimente einen oder drei Terme zur Charakterisierung der Modellgenauigkeit benötigt. Dies resultiert aus der Bibliothekswahl (vgl. Tabelle 4-1), welche sehr unterschiedliche Terme beinhaltet kann, die sich ohne eine Online-Modelladaption nicht ändern.

Im Vergleich zu diesen Erkenntnissen ist in der Abbildung 5-13(b) aufgrund der Modelladaption eine Verringerung der Werte für alle drei Kriterien zu beobachten. Besonders auffällig ist hierbei die Reduktion der Dünnbesetzung, welche bis zu viermal geringer ausfällt als in den Versuchen ohne Modelladaption.

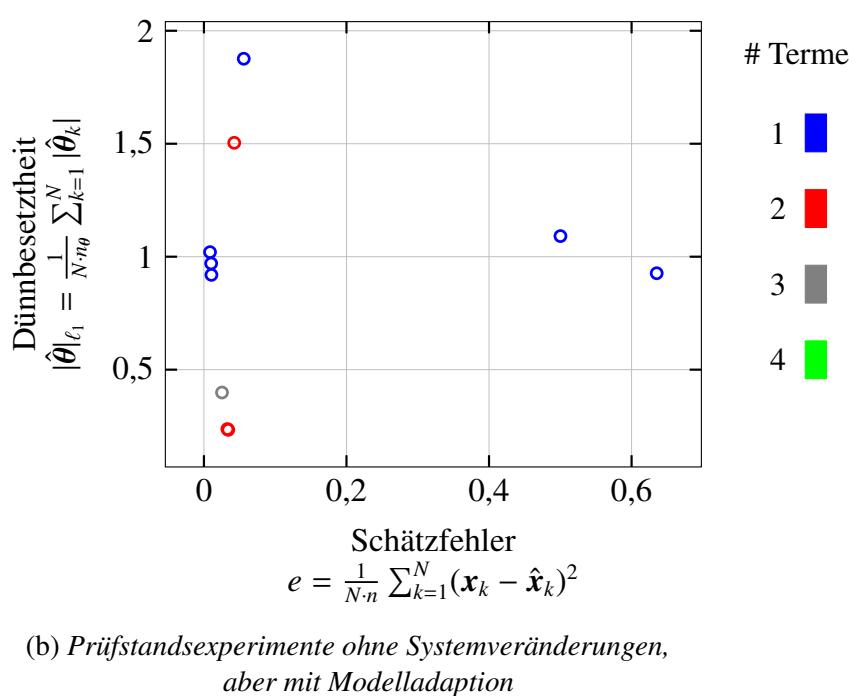
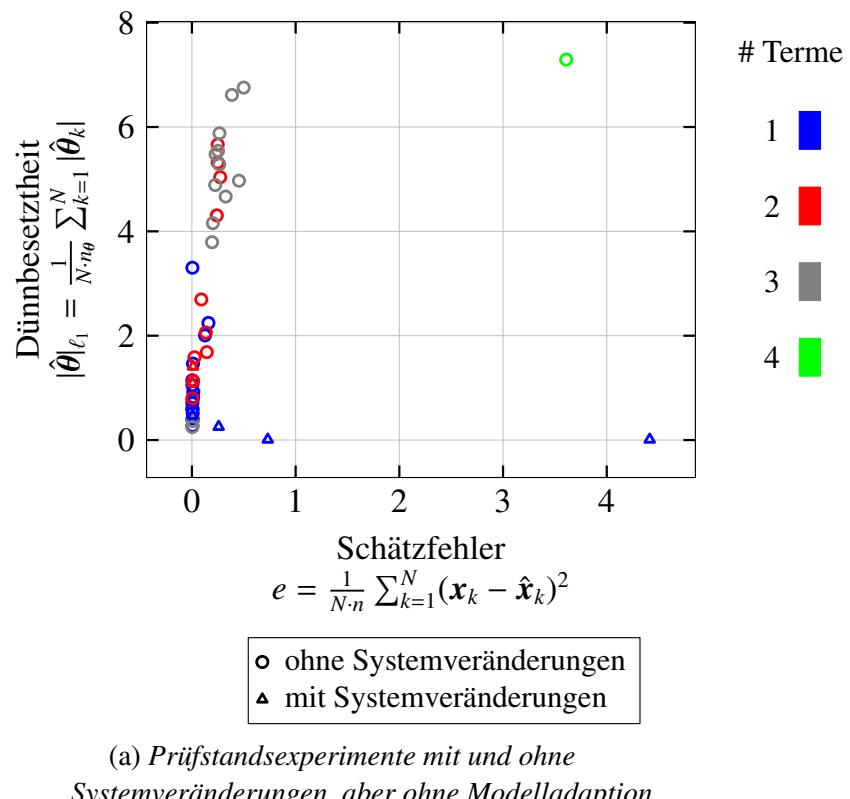


Abbildung 5-13: Quantifizierung der Interpretierbarkeit für das System des Golfroboters:  
Prüfstandsergebnisse mit / ohne Systemveränderungen / Modelladaption

Ähnliches spiegelt sich in der Anzahl der dominanten Terme und des Schätzfehlers wider, wobei zwei Ausnahmen erkennbar sind, die aber weiterhin einen kleinen Schätzfehler aufweisen. Diese Entwicklung ist unmittelbar auf den Einsatz der Online-Aktualisierung zurückzuführen, da diese eine regelmäßige Anpassung und Überprüfung der Bibliotheksterme ermöglicht, die ggf. je nach Dynamik einen höheren Grad an Interpretierbarkeit besitzen. Die Tatsache, dass eine Korrelation zwischen dem Wert der Dünnbesetztheit und der Anzahl der dominanten Terme nicht mehr zu bestehen scheint, da z. B. ein geringerer Wert auf der y-Achse mit drei Termen statt mit einem Term erzielt wird, lässt sich ebenso mit der Aktualisierung und der wechselnden Besetzung der Bibliothek erklären. Die Experimente am Prüfstand zeigen demnach durchgängig eine hohe Interpretierbarkeit anhand der gewählten Maße, da bis auf wenige Ausreißer sowohl eine hohe Schätzgüte als auch eine geringe Anzahl an dominanten Termen sowie häufig ein kleiner Wert der Dünnbesetztheit erzielt werden. Darüber hinaus bestätigen die Versuche vorteilhafte Auswirkungen, wenn eine Online-Modellaktualisierung umgesetzt wird, da sich aufgrund der wechselnden Bibliotheksterme der Grad der Dünnbesetztheit und die Anzahl dominanter Terme reduzieren. Grundsätzlich zeigen die Untersuchungen, dass Systemveränderungen keine Schwierigkeit für den augmentierten Beobachter darstellen, weil auch diese interpretierbar kompensiert werden, aber ggf. zu einem etwas erhöhten Schätzfehler führen können. Basierend auf den Simulations- und Prüfstandsergebnissen erweist sich außerdem die postulierte, vorteilhafte Online-Modellaktualisierung insbesondere im Fall von Systemveränderungen als hilfreich, da eine Verringerung des Schätzfehlers und des Werts der Dünnbesetztheit im Vergleich zu Resultaten ohne Modelladaption bewirkt wird.

Die quantitative Bewertung der Interpretierbarkeit mittels der drei Kriterien Schätzgüte, Dünnbesetztheit und Anzahl dominanter Terme bestätigt folglich die Umsetzung des zu Beginn dieser Arbeit formulierten Anspruchs **F.2** bzw. **F.2+**, da für das betrachtete Beispiel des Golfroboters eine hohe Interpretierbarkeit mithilfe des augmentierten Beobachters erzielt werden konnte. Dieses positive Resultat wurde sowohl für den Fall einer Online-Modellaktualisierung als auch für die Situation einer sich nicht stetig anpassenden Bibliothek ermittelt, wobei diese zudem Fälle mit Systemveränderungen berücksichtigte. Trotz vieler Vorteile, welche insbesondere die Umsetzung der Anforderungen **F.1** bis **F.3** betreffen, erfordern die Online-Adaption bzw. Formulierung des augmentierten Beobachters in der Regel einen höheren Aufwand, der sorgfältig gegenüber dem Nutzen abgewogen werden muss. Dieser Aspekt wird daher im nachfolgenden Abschnitt kurz aufgegriffen und kritisch hinterfragt.

## 5.4 Bewertung des Aufwands und Nutzens

Im Vergleich zu klassischen Beobachtern und ihren Verfahren zur Schätzung von Modellgenauigkeiten ist das Vorgehen der Joint Estimation mit anschließender automatischer Modellaktualisierung umfangreicher. Daher wird in diesem Abschnitt erörtert, in welchen Situationen eine Online-Schätzung der Modellgenauigkeiten unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit vorteilhaft ist. In der Volks- und Betriebswirtschaft ist die Kosten-Nutzen-Analyse ein probates Mittel, um Lösungsansätze oder Investitionsmöglichkeiten und damit einhergehende, potentiell weitreichende Entscheidungen zu bewerten [HIJ11; Mis75]. In diesem Sinne wird nun der Aufwand, welcher mit den in dieser Arbeit erarbeiteten Methoden verbunden ist, dem Nutzen, der durch jene erzielt werden kann, gegenübergestellt. Merkmale, die diese Gegenüberstellung und somit den Einsatz eines augmentierten Beobachters beeinflussen, stellen die angestrebte Modellierungstiefe eines Systems, die Datenverfügbarkeit und deren Qualität sowie der Grad des physikalischen Vorwissens dar. Die angestrebte Modellierungstiefe beeinflusst den Aufwand direkt, da beispielsweise für ein detailliertes, nichtlineares Modell mehr Ressourcen als für ein einfaches PT2-Modell aufgewendet werden müssen (vgl. Abbildung 3-10). Hierbei kann ein augmentierter Beobachter unterstützen und etwaige komplexe Phänomene modellieren, sodass Ressourcen angemessen eingesetzt werden können. Zudem ist dieses Vorgehen besonders vorteilhaft, wenn Systemveränderungen im laufenden Betrieb auftreten und kompensiert werden müssen (vgl. Abbildungen 4-19 und 5-11). Allerdings erfordern die in dieser Arbeit entwickelten Methoden einen ausreichend hohen Grad an Vorwissen, weil einerseits bereits ein simples, physikalisch motiviertes Modell vorhanden sein muss und andererseits die Hypothesen  $\psi_i$  der Bibliothek  $\Psi$  geeignet gewählt werden müssen, um eine Approximation der Modellgenauigkeiten zu erlauben (vgl. Abbildung 4-15, Tabelle 4-1). Gelingt es, eine geeignete Bibliothek zu wählen, ist der Nutzen des augmentierten Beobachters im Vergleich zum Aufwand hoch. Denn es werden nicht nur die Anforderungen **F.1** und **F.3** erfüllt, sondern es wird auch eine erhöhte Interpretierbarkeit verglichen zu einem klassischen Beobachter erzielt, welcher eine Modellgenauigkeit lediglich kompensiert (vgl. Abbildung 4-12). Wie jeder Zustandsschätzer ist jedoch auch der augmentierte Beobachter von der Datenqualität abhängig, wodurch die Bereinigung von Messdaten u. U. eine nicht vermeidbare Aufgabe ist, die dem Aufwand zuzurechnen ist. Der Einsatz eines augmentierten Beobachters ist anhand der Aufwand-Nutzen-Analyse demnach vorteilhaft, wenn die Interpretation von Modellgenauigkeiten und eine Modelladaption einen Mehrwert bringen, z. B. wenn diese Ungenauigkeiten per se aufgrund ihres Grads an Nichtlinearität oder auftretende Systemveränderungen ein Risiko für die Regelung darstellen. Sollen lediglich kleinere Ungenauigkeiten kompensiert werden, deren physikalisches Wirkprinzip nicht von Belang ist, rechtfertigt der Aufwand des augmentierten Beobachters seinen Nutzen nicht.

## 6 Resümee und Perspektiven

Das folgende Kapitel fasst die wesentlichen Erkenntnisse dieser Dissertationsschrift zusammen und gibt einen Ausblick über zukünftige Forschungsarbeiten. Da üblicherweise nicht alle Zustandsgrößen gemessen werden können, konstituiert die Zustandsschätzung eine erfolgreiche Umsetzung einer Regelung. Wird ein modellbasierter Zustandsbeobachter verwendet, ist darüber hinaus die Qualität des verwendeten Modells entscheidend, um zuverlässige Schätzungen der Zustände zu erhalten. Aufgrund der steigenden Komplexität mechatronischer Systeme und der kürzeren Produktentwicklungszeiten wird der Modellbildungsprozess jedoch zunehmend herausfordernder. Die daraus resultierenden Modellungengenauigkeiten stellen ein Risiko für die Zustandsschätzung dar. Infolgedessen können lediglich ungenaue oder fehlerhafte Schätzwerte ermittelt werden, deren Unsicherheiten sich ggf. auf die Regelgüte auswirken. Die Zielsetzung dieser Dissertationsschrift bestand deshalb in der Entwicklung einer Methode, welche sowohl die Zustände als auch die Modellungengenauigkeiten eines nichtlinearen Systems zuverlässig schätzt. Ferner sollte für jene Modellungengenauigkeiten eine parametrische Darstellung gefunden werden, die durch ihre physikalisch-technische Interpretierbarkeit einen Mehrwert sowie die Option zur Modelladaption bietet.

Wegen seines Einflusses auf die Schätzgüte wurden im Kapitel 3 die Qualität des im Beobachter verwendeten Modells und der Beobachterentwurf separat adressiert, um der Herausforderung von Modellungengenauigkeiten zu begegnen. Dazu wurden zunächst hybride Techniken der Systemidentifikation analysiert, welche physikalisch motivierte und datengetriebene Modellkomponenten kombinieren und demzufolge als vorteilhaft zur Verringerung der Modell-Realitäts-Lücke gelten. So wurden zur Modellierung des Golfroboters und eines Servoventils physikalisch motivierte neuronale Netze weiterentwickelt, welche durch eine Mehrzieloptimierung zusätzliches, physikalisches Vorwissen während des Trainings berücksichtigten. Ihre Validierung bestätigte eine sehr hohe Modellgüte, die jene der vergleichbaren, rein physikalisch- oder datenbasierten Modelle übertraf. Eine ebenso hohe Güte wies das SINDy-Modell auf, welches mithilfe der LASSO-Optimierung durch die Linearkombination geeigneter Funktionen und der Auswertung von Messdaten eine interpretierbare Form erzielen konnte. Sowohl physikalisch motivierte neuronale Netze als auch das SINDy-Verfahren sind jedoch von den Messdaten, die zur Offline-Identifikation genutzt werden, stark abhängig und können aufgrund ihrer Extrapolationsfähigkeit außerhalb der Trainingsdaten u. U. eine geringere Modellgüte aufweisen (vgl. Abbildung A6-4). Ferner mangelt es beiden Methoden insbesondere an der Fähigkeit, Modelle aus Messdaten mit nur teilweise messbarem Zustand zu identifizieren. Daher wurde die Kompensationsfähigkeit ausgewählter Beobachterkonzepte bezogen auf Mo-

dellungenauigkeiten untersucht. Hierbei wurden die Kovarianzen von verschiedenen Vertretern der Kalman-Filter-Familie mithilfe der Bayesschen Optimierung so initialisiert, dass diese etwaige Modellungenauigkeiten kompensieren konnten. Ebenso wurden Sliding-Mode-Beobachter (SMO) bzgl. ihrer Robustheit untersucht, trotz Modellungenauigkeiten zuverlässig schätzen zu können. Die Analysen ergaben, dass in der Regel eine hohe Schätzgüte und im Fall des SMOs zusätzlich eine temporäre, quantitative Identifikation der Ungenauigkeiten erzielt werden können, aber keine parametrische Identifikation in physikalisch-interpretierbarer Hinsicht ermöglicht wird, auf deren Grundlage eine Modelladaption durchgeführt werden kann.

Aus den Erkenntnissen des Kapitels 3 wurde schließlich gefolgert, dass eine isolierte Betrachtung der Entwurfsschritte Systemidentifikation und Beobachterentwurf nicht zielführend ist, um Modellungenauigkeiten in der Zustandsschätzung zu adressieren und eine hohe Schätzgüte bei gleichzeitiger Identifikation der Modellungenauigkeiten zu erzielen. Infolgedessen wurde im Kapitel 4 eine neuartige Strategie zur simultanen Schätzung von Zuständen und Modellungenauigkeiten entwickelt, wobei die Grundidee des SINDy-Verfahrens berücksichtigt wurde. Basierend auf dem Konzept der *Joint Estimation* wurde ein augmentiertes Modell formuliert, welches die Modellungenauigkeiten mithilfe einer Linearkombination aus physikalisch motivierten Termen approximiert. Dazu wurden die Parameter dieser Linearkombination zeitinvariant angenommen und parallel zum Systemzustand geschätzt. Nach dem Prinzip des *Occam's Razor* wurde ferner vorausgesetzt, dass der Parametervektor der Linearkombination dünnbesetzt ist. Diese Bedingung wurde anschließend im Abschnitt 4.3 durch eine Pseudomessung innerhalb der rekursiven Struktur eines SRUKFs basierend auf Methoden des Compressed Sensings umgesetzt. Diese Umsetzung wurde im Abschnitt 4.4 amplifiziert, indem die Dünnsbesetztheit der Parameter durch eine konkret gewählte Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert wurde. Ergänzend zu diesen Entwürfen wurde die Grundidee der gleichzeitigen Schätzung im Abschnitt 4.5 auf einen robusten Beobachter, einen SMO, übertragen und um die Möglichkeit einer automatisiert gewählten Bibliothek erweitert.

Anhand ausgewählter Anwendungsbeispiele konnte der in dieser Dissertationsschrift entwickelte, augmentierte Beobachter bei geeignet gewählter Bibliothek eine hohe Schätzgüte erzielen, welche durch eine zielgerichtete Approximation der Modellungenauigkeiten mithilfe der Linearkombination resultierte. Obgleich zur klassischen Parameteridentifikation die Bedingung der *Persistent Excitation* erfüllt sein muss (vgl. [IM11]), ist dies innerhalb eines Beobachters nicht immer realisierbar, wenn dieser im geschlossenen Regelkreis eingesetzt wird und das Stellsignal vorgegeben ist. Demzufolge kann grundsätzlich nur eine Identifikation stattfinden, wenn die Sichtbarkeit der Modellungenauigkeit gewährleistet ist, sodass  $g \neq 0$  gilt. In den Untersuchungen des Kapitels 4

war daher in der Regel keine eindeutige Konvergenz der Parameter zu einem konstanten Wert zu erkennen. Dennoch wiesen die Parameterverläufe in den Applikationen auf physikalisch interpretierbare Terme hin, sodass der tatsächlich wirkende Term, sofern dieser in der Bibliothek vorhanden war, oder alternative, verwandte Terme zu diesem gefunden wurden. Ferner wurde bei Messrauschen sowohl in Prüfstandsexperimenten als auch in Simulationen eine robuste Schätzung erzielt. Die Untersuchungen bestätigten demnach die geforderte Identifikation der Modellgenauigkeiten in physikalisch-technischer Weise sowohl im offenen als auch geschlossenen Regelkreis. Insbesondere in der Situation von Systemveränderungen stellte der augmentierte Beobachter seinen Vorteil heraus, da er im Kontrast zu Beobachtern mit unveränderlichem Modell Ungenauigkeiten zur Laufzeit adaptiv erfasste und weiterhin zuverlässige Schätzungen ermöglichte (vgl. Abbildung 4-19).

Um aus der temporären Schätzung der Modellgenauigkeiten die dominanten Bibliotheksterme zu identifizieren, wurde im Kapitel 5 die Hauptkomponentenanalyse zur Merkmalsextraktion verwendet. Diese Analyse lieferte die dominanten Terme, welche die Modellgenauigkeiten des betrachteten System charakterisieren und exemplarisch für den Duffing-Oszillatator sowie den Golfroboter durchgeführt wurde. Basierend auf der resultierenden physikalisch interpretierbaren, parametrischen Darstellung wurde im Abschnitt 5.2 ein Konzept zur automatisierten Modelladaption entworfen und ebenfalls anhand des Golfroboters durch Machbarkeitsnachweise validiert. Abschließend wurde die Interpretierbarkeit dieser und der im Kapitel 4 durchgeführten Untersuchungen anhand der Schätzgüte, der  $\ell_1$ -Norm sowie der Anzahl dominanter Terme quantifiziert, woraufhin eine Identifikation der Modellgenauigkeiten unter Beibehaltung einer physikalisch-technischen Interpretierbarkeit bestätigt werden konnte.

Die Tabelle 6-1 fasst schließlich den Neuheitswert der vorliegenden Arbeit im Kontext von Forschungsbeiträgen zusammen, welche die entwickelte Methode dieser Dissertationsschrift inspirierten und eine inhaltliche Verwandtschaft zu jener aufweisen. Im Kontrast zu den in der Tabelle 6-1 aufgeführten Verfahren besteht der Forschungsbeitrag dieser Arbeit darin, lediglich den unbekannten Teil der Systemdynamik zu identifizieren, da bereits ein physikalisch basiertes Teilmodell vorliegt. Anstelle einer Offline-Identifikation werden diese Modellgenauigkeiten in Echtzeit parallel zur Schätzung der Zustände approximiert. Hierbei werden statt einer mathematisch abstrakten Bibliothek, beispielsweise bestehend aus radialen Basisfunktionen (RBFs), physikalisch motivierte Bibliotheksterme verwendet, welche eine physikalisch-technische Interpretationen durch ihre parametrische Darstellung zulassen und so zu einer automatisierten Modelladaption genutzt werden können.

Quelle	Konzeption	Abgrenzung Dissertationsschrift
[KSH21]	Ausschließlich temporäre Approximation von Modellgenauigkeiten $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Psi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ innerhalb eines EKFs basierend auf RBFs mit kompaktem Träger	Keine physikalisch-technische Interpretierbarkeit, keine langfristige Modelladaption möglich
[BPK16a]	Offline-Identifikation des Systems durch $\mathbf{X}' = \boldsymbol{\theta}^T \Psi(\mathbf{X})$ über das LASSO-Verfahren	Kein echtzeitfähiger Einsatz innerhalb eines Beobachters möglich
[HBK22]	Offline-Identifikation des Systems durch $\mathbf{X}' = \boldsymbol{\theta}^T \Psi(\mathbf{X})$ mit der Modellierung $\theta_i \sim \mathcal{N}(0, \tau^2 \lambda_i^2)$ für dünnbesetzte Parameter	Kein echtzeitfähiger Einsatz innerhalb eines Beobachters möglich
[CGK10]	Pseudomessung $0 = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \epsilon$ mit $\mathbf{H} = (\text{sign}(\hat{x}_1), \dots, \text{sign}(\hat{x}_n))$ innerhalb eines KFs	Nicht anwendbar zur Schätzung nichtlinearer Systemdynamiken

*Tabelle 6-1: Forschungsbeiträge, die diese Arbeit besonders inspirierten, und ihre Abgrenzung zum Beitrag dieser Dissertationsschrift*

Folglich führt die vorliegende Dissertationsschrift einige der in Tabelle 6-1 aufgeführten Konzepte erstmals in einer neuartigen Methode zusammen und amplifiziert diese um eine echtzeitfähige, physikalisch interpretierbare und adaptive Identifikation innerhalb eines Beobachters. Aufgrund der getroffenen Voraussetzungen unterliegt die Anwendung des augmentierten Beobachters aber einigen strukturellen Limitationen. Diese Grenzen bestehen einerseits in der Systemklasse, da ausschließlich eingangsaffine Systeme der Form (4.5) verwendet werden können, und andererseits in der Abhängigkeit der gewählten, physikalisch motivierten Bibliothek. Letztere kann bei sehr ungünstiger Wahl ohne oder mit nur geringem physikalischem Vorwissen zur Instabilität des Beobachters führen. Da in dieser Arbeit jedoch angenommen wird, dass grundsätzlich Vorwissen vorhanden ist, kann dieses als Hypothesen in der Bibliothek formuliert werden. Alternativ besteht die Möglichkeit, die Bibliothek nach den Abschnitten 4.5 und 5.2 durch eine Analyse automatisiert zu initialisieren bzw. zu aktualisieren. Infolgedessen sind eine hohe Schätzgüte auch im geschlossenen Regelkreis sowie ein vertiefender, physikalischer Einblick in das System wegen der identifizierten Modellgenauigkeiten zu erwarten. Damit bildet der in dieser Dissertationsschrift erarbeitete Entwurf nicht nur einen wertvollen Beitrag zur echtzeitfähigen Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten nichtlinearer Systeme, sondern stellt auch ein Werkzeug zur automatisierten, sukzessiven Modelladaption und -überwachung unter Beibehaltung einer physikalischen Interpretierbarkeit dar.

Da der Neuheitswert dieser Arbeit u. a. in der Option besteht, eine Modelladaption zur Laufzeit durchzuführen, kann darauf aufbauend in zukünftigen Forschungsarbeiten eine Modellselbstüberwachung installiert werden. So kann das im Kapitel 5 formulierte Konzept zur Online-Aktualisierung des Modells als Methode im Kontext des *Automated Machine Learning (AutoML)* gewertet werden. Dieser Forschungsbereich adressiert Techniken zur automatisierten Merkmalsextraktion und Modellauswahl basierend auf Verfahren des maschinellen Lernens, vgl. [HZA21; HKV19]. Der in dieser Dissertationsschrift entwickelte augmentierte Beobachter kann aufgrund der Möglichkeit, nach Abbildung 5-7 sowohl eine dauerhafte als auch eine situationsabhängige Modellanpassung vorzunehmen, diesem Forschungsbereich zugerechnet werden. Dieses Vorgehen ist insbesondere in Situationen vorteilhaft, wenn plötzliche Systemveränderungen auftreten (vgl. Abbildung 4-19) oder es sich um ein System handelt, welches in kurzer Zeit mehrere Betriebsphasen durchläuft und dessen Systemverhalten sich daher schnell ändert. Mithilfe verschiedener Kriterien, wie der Überprüfung des Modellfehlers (vgl. Abbildung 5-7), und einer noch nachfolgend durchzuführenden Parameteridentifikation, sobald die dominanten Terme identifiziert sind, kann anschließend eine Modellselbstüberwachung umgesetzt werden. Ferner sollte die in Abschnitt 4.4 vorgestellte, effiziente Erweiterung des augmentierten Beobachters nicht nur in vielfältigen Simulationen, sondern in Zukunft auch in Prüfstandsversuchen getestet werden. Deren Umsetzung war aufgrund der gegenwärtig genutzten Softwareversion nicht möglich, sodass mithilfe einer modernen Laborausstattung die Bestätigung der vielversprechenden Simulationsergebnisse durch eine Validierung am Prüfstand zu erwarten ist. Weiteres Entwicklungspotential besteht wie zuvor bereits angemerkt bzgl. der Konvergenz der Parameter. Deren Schätzung basiert in der gegenwärtigen Implementierung auf einer geringen Anzahl zurückliegender Messwerte, welche keine eindeutige Konvergenz zu einem konstanten Wert fördert. Mithilfe der rekursiven Least-Squares-Methode, vgl. z. B. [IM11], und der Berücksichtigung von einer erhöhten Anzahl vergangener Messwerte lässt sich eine verbesserte Konvergenz erwarten, wobei die Echtzeitfähigkeit des augmentierten Beobachters insbesondere im geschlossenen Regelkreis beachtet werden muss. Darüber hinaus kann die Formulierung von Fehlermaßen bzw. -schranken für konkrete Anwendungsbeispiele und Bibliotheken in Erwägung gezogen werden, um eine Garantie für die Stabilität des Beobachters ähnlich zur Herleitung in [Sch10] zu erhalten, welche ebenfalls eine Bedingung zur Sichtbarkeit der Modellgenauigkeit beinhaltet. Schließlich können zukünftige Forschungsarbeiten den Einsatz des augmentierten Beobachters mit Modelladaption hinsichtlich der Applikation in den Bereichen Condition Monitoring und Predictive Maintenance untersuchen sowie dessen Struktur für allgemeinere Systemklassen erweitern. Auf diese Weise können die Vorteile einer hohen Schätzgüte trotz Modellgenauigkeiten sowie der Modellselbstüberwachung weiteren Anwendungen zur Verfügung gestellt werden.



## 7 Literaturverzeichnis

Neben den nachfolgend angegebenen Quellen wurden die Webseiten [www.duden.de](http://www.duden.de) und [www.deepl.com](http://www.deepl.com) zur Überprüfung der sprachlichen Korrektheit für einzelne Wörter oder kurze Phrasen besucht. Ferner wurden im Kontext des in dieser Dissertationsschrift erarbeiteten Forschungsbeitrags die studentischen Arbeiten [Sch21; Rei22; Ros22; Klu23; Sch23b] angefertigt. Diese wurden in den Kapiteln 3 bis 5 der Dissertationsschrift referenziert. Insbesondere beruhen die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5 auf der Vorveröffentlichung [GKT23], deren Erkenntnisse aus [Klu23] stammen. Gleiches gilt für den Abschnitt 3.1.4, dessen Ergebnisse in der Vorveröffentlichung [SGT22] publiziert wurden und in geringem Maße auf Erkenntnissen aus [Sch21] beruhen. Des Weiteren findet sich die Abbildung 3-17 in leicht abgewandelter Form in [Rei22]. Vereinzelte Inhalte aus den Abschnitten 3.2.1 und 5.1 sind in marginaler Form in [Ros22] bzw. [Sch23b] enthalten. Hierbei erfolgte die Definition der Zielsetzung, die Erarbeitung von Lösungsansätzen sowie die Auswertung, Interpretation und Visualisierung der in den studentischen Arbeiten hervorgebrachten Erkenntnisse unter der wissenschaftlichen Anleitung der Autorin dieser Dissertationsschrift.

- [AC19] ARCHETTI, F.; CANDELIERI, A.: *Bayesian Optimization and Data Science*. SpringerBriefs in Optimization. Cham: Springer Nature Switzerland, 2019
- [ACS<sup>+</sup>21] ANTONELO, E. A.; CAMPONOGARA, E.; SEMAN, L. O.; SOUZA, E. R. de; JORDANO, J. P.; HÜBNER, J. F. F.: *Physics-Informed Neural Nets for Control of Dynamical Systems*. 6.04.2021. <http://arxiv.org/pdf/2104.02556v3> (besucht am 26. 01. 2024)
- [Ada18] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Aufl. Berlin: Springer Vieweg, 2018
- [BDPW19] BHADRA, A.; DATTA, J.; POLSON, N. G.; WILLARD, B.: Lasso Meets Horseshoe: A Survey. *Statistical Science* 34 (2019), Nr. 3, S. 405–427
- [BGA20] BERGS, T.; GIERLINGS, S.; AUGSPURGER, T.: Mit dem Digitalen Zwilling Prozessgrenzen überwinden. *Internet of Production - Turning Data into Value: Statusberichte aus der Produktionstechnik 2020*. Hrsg. von BERGS, T.; BRECHER, C.; SCHMITT, R.; SCHUH, G. Aachen: Fraunhofer-Institut für Produktionstechnologie IPT, 2020, S. 81–113
- [BGH<sup>+</sup>21] BOTH, P.; GAULOCHE, S.; HABER, R.; LABISCH, D.; LENDERS, F.; LINDSCHEID, C.; PFEIFFER, B.-M.; PICKHARDT, R.; RODE, M.; SCHULZE, K.: *KI-basierte Prozessführung: Wie lassen sich Zeit- und Kostenersparnis in der Mo-*

- dellerstellung mit KI realisieren? VDI-Statusreport.* Hrsg. von VDI/VDE-GESELLSCHAFT MESS- UND AUTOMATISIERUNGSTECHNIK. 2021
- [BGQ<sup>+</sup>21] BENNER, P.; GRIVET-TALOCIA, S.; QUARTERONI, A.; ROZZA, G.; SCHILDERS, W.; SILVEIRA, L. M., Hrsg.: *Model Order Reduction: Volume 1: System- and Data-Driven Methods and Algorithms*. Berlin/Boston: de Gruyter, 2021
- [BGW15] BENNER, P.; GUGERCIN, S.; WILLCOX, K.: A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems. *SIAM Review* 57 (2015), Nr. 4, S. 483–531
- [Bis06] BISHOP, C. M.: *Pattern Recognition and Machine Learning*. Information Science and Statistics. New York: Springer, 2006
- [BK19] BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N.: *Data-driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge: Camebridge University Press, 2019
- [BMJ<sup>+</sup>23] BECKH, K.; MÜLLER, S.; JAKOBS, M.; TOBOREK, V.; TAN, H.; FISCHER, R.; WELKE, P.; HOUBEN, S.; RUEDEN, L. von: Harnessing Prior Knowledge for Explainable Machine Learning: An Overview. *2023 IEEE Conference on Secure and Trustworthy Machine Learning (SaTML)*. 2023, S. 450–463
- [BMTD21] BUISSON-FENET, M.; MORGENTHALER, V.; TRIMPE, S.; DI MEGLIO, F.: Joint State and Dynamics Estimation With High-Gain Observers and Gaussian Process Models. *IEEE Control Systems Letters* 5 (2021), Nr. 5, S. 1627–1632
- [Bou15] BOUJONG, C.; HORN, M. (BetreuerIn): *Auswirkungen der Zeitdiskretisierung auf die Schätzgenauigkeit von Sliding Mode Beobachtern*. Masterarbeit. Graz: Technische Universität Graz, 2015
- [BPK16a] BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 113 (2016), Nr. 15, S. 3932–3937
- [BPK16b] BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N.: Sparse Identification of Nonlinear Dynamics with Control (SINDYc). *IFAC-PapersOnLine* 49 (2016), Nr. 18, S. 710–715
- [BS14] BRO, R.; SMILDE, A. K.: Principal component analysis. *Anal. Methods* 6 (2014), Nr. 9, S. 2812–2831

- [CAJH19] CHEN, Z.; AHMED, N.; JULIER, S.; HECKMAN, C.: *Kalman Filter Tuning with Bayesian Optimization*. 2019. <http://arxiv.org/pdf/1912.08601v1> (besucht am 26.01.2024)
- [Cat66] CATTELL, R. B.: The Scree Test For The Number Of Factors. *Multivariate behavioral research* 1 (1966), Nr. 2, S. 245–276
- [CBW<sup>+</sup>19] CAI, L.; BOYACIOGLU, B.; WEBSTER, S. E.; VAN UFFELEN, L.; MORGANSEN, K.: Towards Auto-tuning of Kalman Filters for Underwater Gliders based on Consistency Metrics. *OCEANS 2019 MTS/IEEE Seattle*. Piscataway, NJ, 2019, S. 1–6
- [CC95a] CHEN, T.; CHEN, H.: Approximation Capability to Functions of Several Variables, Nonlinear Functionals, and Operators by Radial Basis Function Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* 6 (1995), Nr. 4, S. 904–910
- [CC95b] CHEN, T.; CHEN, H.: Universal Approximation to Nonlinear Operators by Neural Networks with Arbitrary Activation Functions and Its Application to Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks* 6 (1995), Nr. 4, S. 911–917
- [CFSS82] CORNFELD, I. P.; FOMIN, S. V.; SINAJ, J. G.; SOSSINSKII, A. B.: *Ergodic Theory*. Bd. 245. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. New York: Springer New York, 1982
- [CGK10] CARMI, A.; GURFIL, P.; KANEVSKY, D.: Methods for Sparse Signal Recovery Using Kalman Filtering With Embedded Pseudo-Measurement Norms and Quasi-Norms. *IEEE Transactions on Signal Processing* 58 (2010), Nr. 4, S. 2405–2409
- [CHJA18] CHEN, Z.; HECKMAN, C.; JULIER, S.; AHMED, N.: Weak in the NEES?: Auto-tuning Kalman Filters with Bayesian Optimization. *21st International Conference on Information Fusion*. 2018, S. 1072–1079
- [Cox18] COX, P. B.: *Towards efficient identification of linear parameter-varying state-space models*. Dissertation. Technische Universität Eindhoven, 2018
- [CRT06] CANDÈS, E. J.; ROMBERG, J.; TAO, T.: Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction From Highly Incomplete Frequency Information. *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (2006), Nr. 2, S. 489–509

- [CvG<sup>+</sup>14] CHO, K.; VAN MERRIENBOER, B.; GULCEHRE, C.; BAHDANAU, D.; BOUGARES, F.; SCHWENK, H.; BENGIO, Y.: Learning Phrase Representations using RNN Encoder-Decoder for Statistical Machine Translation. *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*. Hrsg. von MOSCHITTI, A.; PANG, B.; DAELEMANS, W. Association for Computational Linguistics, 2014, S. 1724–1734
- [DBR<sup>+</sup>17] DAM, M.; BRØNS, M.; RASMUSSEN, J. J.; NAULIN, V.; HESTHAVEN, J. S.: Sparse identification of a predator-prey system from simulation data of a convection model. *Physics of Plasmas* 24 (2017), Nr. 2
- [DD22] DIN e.V.; DEUTSCHE KOMMISSION ELEKTROTECHNIK ELEKTRONIK INFORMATIONSTECHNIK IN DIN UND VDE, Hrsg.: *Deutsche Normungsroadmap - Künstliche Intelligenz: Ausgabe 2.* 2022. [www.din.de/go/normungsroadmapki](http://www.din.de/go/normungsroadmapki) (besucht am 25.10.2023)
- [DFL05] DAVILA, J.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A.: Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 11, S. 1785–1789
- [DFP06] DAVILA, J.; FRIDMAN, L.; POZNYAK, A.: Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control* 79 (2006), Nr. 10, S. 1251–1262
- [DH19] DEUFLHARD, P.; HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik 1: Eine algorithmisch orientierte Einführung*. 5. Auflage. De Gruyter Studium. Berlin und Boston: de Gruyter, 2019
- [Die18] DIE BUNDESREGIERUNG: *Strategie Künstliche Intelligenz der Bundesregierung*. 2018. [https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Technologie/strategie-kuenstliche-intelligenz-der-bundesregierung.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=1](https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Technologie/strategie-kuenstliche-intelligenz-der-bundesregierung.pdf?__blob=publicationFile&v=1) (besucht am 16.05.2023)
- [Die20] DIE BUNDESREGIERUNG: *Strategie Künstliche Intelligenz der Bundesregierung: Fortschreibung 2020*. 2020. [https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Technologie/strategie-kuenstliche-intelligenz-fortschreibung-2020.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=1](https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Technologie/strategie-kuenstliche-intelligenz-fortschreibung-2020.pdf?__blob=publicationFile&v=1) (besucht am 16.05.2023)
- [Don06] DONOHO, D. L.: Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (2006), Nr. 4, S. 1289–1306

- [Dra92] DRAKUNOV, S. V.: Sliding-mode observers based on equivalent control method. *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. New York, NY, 1992, S. 2368–2369
- [DU95] DRAKUNOV, S.; UTKIN, V.: Sliding mode observers. Tutorial. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ, 1995, S. 3376–3378
- [EBN<sup>+</sup>21] EBEIGBE, D.; BERRY, T.; NORTON, M. M.; WHALEN, A. J.; SIMON, D.; SAUER, T.; SCHIFF, S. J.: *A Generalized Unscented Transformation for Probability Distributions*. 5.04.2021. <http://arxiv.org/pdf/2104.01958v2> (besucht am 26.01.2024)
- [Ehr05] EHRENGOTT, M.: *Multicriteria Optimization: With 88 figures and 12 tables*. 2. Aufl. Bd. 491. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin, Heidelberg und New York: Springer, 2005
- [Ein19] EINICKE, G. A.: *Smoothing, Filtering And Prediction: Estimating the Past, Present and Future*. 2. Aufl. Prime Publishing, 2019
- [FH07] FREUND, R. W.; HOPPE, R. W.: *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik I*. 10. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007
- [Fit20] FITTKAU, N.; JUNKER, A. (BetreuerIn); HESSE, M. (BetreuerIn); TIMMERMANN, J. (BetreuerIn): *Detaillierte Modellbildung für den Golfroboter zur Verbesserung der Zustandsregelung und -beobachtung*. Unveröffentlichte Bachelorarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [FKL<sup>+</sup>22] FÖLLINGER, O.; KONIGORSKI, U.; LOHMANN, B.; ROPPENECKER, G.; TRÄCHTLER, A.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 13. Aufl. Berlin und Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2022
- [FN93] FUNAHASHI, K.-I.; NAKAMURA, Y.: Approximation of Dynamical Systems by Continuous Time Recurrent Neural Networks. *Neural Networks* 6 (1993), Nr. 6, S. 801–806
- [FOT14] FLOTTMEIER, S.; OLMA, S.; TRÄCHTLER, A.: Sliding Mode and Continuous Estimation Techniques for the Realization of Advanced Control Strategies for Parallel Kinematics. *IFAC Proceedings Volumes* 47 (2014), Nr. 3, S. 182–190
- [Fra18] FRAZIER, P. I.: *A Tutorial on Bayesian Optimization*. 2018. <https://arxiv.org/pdf/1807.02811.pdf> (besucht am 23.04.2023)

- [Fro22] FROESE, N.: *Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid: Die Erfindung des Beweisens.* 2022. <https://www.antike-griechische.de/Pythagoras.pdf> (besucht am 12.02.2023)
- [Fut23] FUTURE OF LIFE INSTITUTE: *Pause Giant AI Experiments: An Open Letter.* Hrsg. von FUTURE OF LIFE INSTITUTE. 2023. <https://futureoflife.org/open-letter/pause-giant-ai-experiments/> (besucht am 22.05.2023)
- [Gar23] GARNETT, R.: *Bayesian Optimization.* Cambridge: Cambridge University Press, 2023
- [GDY19] GREYDANUS, S.; DZAMBA, M.; YOSINSKI, J.: *Hamiltonian Neural Networks.* 2019. <http://arxiv.org/pdf/1906.01563v3.pdf> (besucht am 26.01.2024)
- [Gib11] GIBBS, B. P.: *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011
- [GKT23] GÖTTE, R.-S.; KLUSMANN, J. N.; TIMMERMANN, J.: Data-driven identification of disturbances using a sliding mode observer. *Proceedings - 33. Workshop Computational Intelligence: Berlin, 23.-24. November 2023.* Hrsg. von SCHULTE, H.; HOFFMANN, F.; MIKUT, R. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2023, S. 113–123
- [GT22] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Composed Physics- and Data-driven System Identification for Non-autonomous Systems in Control Engineering. 2022 *3rd International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control (AIRC)* 38 (2022), S. 67–76
- [GT23a] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Approximating a Laplacian Prior for Joint State and Model Estimation within an UKF. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), Nr. 2, S. 869–874
- [GT23b] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Estimating States and Model Uncertainties Jointly by a Sparsity Promoting UKF. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), Nr. 1, S. 85–90
- [GT24] GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Online learning with joint state and model estimation. *Proceedings of the 9th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)* (2024)
- [GW08] GRIEWANK, A.; WALTHER, A.: *Evaluating derivatives: Principles and techniques of algorithmic differentiation.* 2. Aufl. Bd. 105. Philadelphia: SIAM Soc. f. Industrial and Applied Mathematics, 2008

- [HBK22] HIRSH, S. M.; BARAJAS-SOLANO, D. A.; KUTZ, J. N.: Sparsifying priors for Bayesian uncertainty quantification in model discovery. *Royal Society open science* 9 (2022), Nr. 2
- [HHTT22] HESSE, M.; HUNSTIG, M.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Batch Constrained Bayesian Optimization for Ultrasonic Wire Bonding Feed-forward Control Design. *Proceedings of the 11th International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods (ICPRAM 2022)*. Hrsg. von MARSICO, M. de. Setúbal, 2022, S. 383–394
- [HIJ11] HANUSCH, H.; ILG, G.; JUNG, M.: *Nutzen-Kosten-Analyse*. 3. Aufl. Vahlens Kurzlehrbücher. München: Franz Vahlen, 2011
- [HKV19] HUTTER, F.; KOTTHOFF, L.; VANSCHOREN, J., Hrsg.: *Automated Machine Learning: Methods, Systems, Challenges*. The Springer Series on Challenges in Machine Learning. Cham: Springer, 2019
- [Hot33] HOTELLING, H.: Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology* 24 (1933), Nr. 6, S. 417–441
- [HS97] HOCHREITER, S.; SCHMIDHUBER, J.: Long Short-Term Memory. *Neural computation* 9 (1997), Nr. 8, S. 1735–1780
- [HSW89] HORNIK, K.; STINCHCOMBE, M.; WHITE, H.: Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators. *Neural Networks* 2 (1989), S. 359–366
- [HTW15] HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; WAINWRIGHT, M.: *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2015
- [HW13] HOU, Z.-S.; WANG, Z.: From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. *Information Sciences* 235 (2013), S. 3–35
- [HW21] HÜLLERMEIER, E.; WAEGEMAN, W.: Aleatoric and epistemic uncertainty in machine learning: an introduction to concepts and methods. *Machine Learning* 110 (2021), S. 457–506
- [HZC21] HE, X.; ZHAO, K.; CHU, X.: AutoML: A survey of the state-of-the-art. *Knowledge-Based Systems* 212 (2021)
- [IM11] ISERMANN, R.; MÜNCHHOFF, M.: *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011

- [Jan10] JANSCHEK, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme: Methoden – Modelle – Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010
- [JFTT22] JUNKER, A.; FITTKAU, N.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Autonomous Golf Putting with Data-Driven and Physics-Based Methods. *2022 Sixth IEEE International Conference*. 2022, S. 134–141
- [JL07] JULIER, S. J.; LAVIOLA, J. J.: On Kalman Filtering With Nonlinear Equality Constraints. *IEEE Transactions on Signal Processing* 55 (2007), Nr. 6, S. 2774–2784
- [Jol02] JOLLIFFE, I. T.: *Principal Component Analysis*. 2. Springer series in statistics. New York, Berlin und Heidelberg: Springer, 2002
- [JPTT23] JUNKER, A.; PAPE, K.; TIMMERMANN, J.; TRÄCHTLER, A.: Adaptive Koopman-Based Models for Holistic Controller and Observer Design. *IFAC-PapersOnLine* 56 (2023), Nr. 3, S. 625–630
- [JU04] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K.: Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. *Proceedings of the IEEE* 92 (2004), Nr. 3, S. 401–422
- [JU97] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K.: New extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *Proceedings Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*. Bd. 3068. 1997, S. 182–193
- [Jul02] JULIER, S. J.: The scaled unscented transformation. *Proceedings of the 2002 American Control Conference (ACC)* 6 (2002), S. 4555–4559
- [Jul03] JULIER, S. J.: The Spherical Simplex Unscented Transformation. *Proceedings of the 2003 American Control Conference, ACC*. Piscataway, NJ, 2003, S. 2430–2434
- [JZS<sup>+</sup>21] JIA, X.; ZWART, J.; SADLER, J.; APPLING, A.; OLIVER, S.; MARKSTROM, S.; WIL-LARD, J.; XU, S.; STEINBACH, M.; READ, J.; KUMAR, V.: Physics-Guided Recurrent Graph Model for Predicting Flow and Temperature in River Networks. *Proceedings of the 2021 SIAM International Conference on Data Mining (SDM)*. Hrsg. von DEMENICONI, C.; DAVIDSON, I. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021, S. 612–620
- [KA16] KOPRINKOVA-HRISTOVA, P.; ALEXIEV, K.: Neuro-Fuzzy Tuning of Kalman Filter. *2016 IEEE 8th International Conference on Intelligent Systems*. Hrsg. von YAGER, R. R. Piscataway, NJ, 2016, S. 651–657

- [KAF<sup>+</sup>17] KARPATNE, A.; ATLURI, G.; FAGHMOUS, J.; STEINBACH, M.; BANERJEE, A.; GANGULY, A.; SHEKHAR, S.; SAMATOVA, N.; KUMAR, V.: Theory-Guided Data Science: A New Paradigm for Scientific Discovery from Data. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 29 (2017), Nr. 10, S. 2318–2331
- [Kai60] KAISER, H. F.: The Application of Electronic Computers to Factor Analysis. *Educational and Psychological Measurement* 20 (1960), Nr. 1, S. 141–151
- [Kal60] KALMAN, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering* 82 (1960), Nr. 1, S. 35–45
- [KB15] KINGMA, D. P.; BA, J.: Adam: A Method for Stochastic Optimization. *3rd International Conference on Learning Representations (ICLR)*. Hrsg. von BENGIO, Y.; LE CUN, Y. 2015
- [KBK<sup>+</sup>13] KRUSE, R.; BORGELT, C.; KLAWONN, F.; MOEWES, C.; STEINBRECHER, M.; HELD, P.: *Computational Intelligence: A Methodological Introduction*. Texts in Computer Science. London: Springer, 2013
- [KCM<sup>+</sup>14] KAMAL, S.; CHALANGA, A.; MORENO, J. A.; FRIDMAN, L.; BANDYOPADHYAY, B.: Higher Order Super-Twisting Algorithm. *2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. 2014, S. 1–5
- [Ker21] KERSTING, L.: *Nichtlineare Ventilmodellierung*. Interne Dokumentation. Universität Paderborn, 2021
- [KH02] KLOTZBACH, S.; HENRICHFREISE, H.: *Ein nichtlineares Reibmodell für die numerische Simulation reibungsbehafteter mechatronischer Systeme*. ASIM 2002, 16. Symposium Simulationstechnik, Rostock, 2002
- [KJY21] KHAJENEJAD, M.; JIN, Z.; YONG, S. Z.: Interval Observers for Simultaneous State and Model Estimation of Partially Known Nonlinear Systems. *2021 American Control Conference (ACC)*. 2021, S. 2848–2854
- [KL12] KUTYNIOK, G.; LABATE, D., Hrsg.: *Shearlets: Multiscale analysis for multivariate data*. Applied and numerical harmonic analysis. New York: Birkhäuser, 2012
- [Klu23] KLUSMANN, J. N.; GÖTTE, R.-S. (BetreuerIn): *Simultane Parameter- und Zustandsschätzung mittels Sliding-Mode-Beobachtern*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2023
- [Kön01] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis I*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001

- [Kro16] KROLL, A.: *Computational Intelligence: Probleme, Methoden und technische Anwendungen*. 2. De Gruyter Studium. Berlin und Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2016
- [KS79] KREISSELMEIER, G.; STEINHAUSER, R.: Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index. *IFAC Proceedings Volumes* 12 (1979), Nr. 7, S. 113–117
- [KSH21] KULLBERG, A.; SKOG, I.; HENDEBY, G.: Online Joint State Inference and Learning of Partially Unknown State-Space Models. *IEEE Transactions on Signal Processing* 69 (2021), S. 4149–4161
- [Kul21] KULLBERG, A.: *On Joint State Estimation and Model Learning using Gaussian Process Approximations*. Dissertation. Linköping: Linköping University, 2021
- [KWRK18] KARPATNE, A.; WATKINS, W.; READ, J.; KUMAR, V.: *Physics-guided Neural Networks (PGNN): An Application in Lake Temperature Modeling*. 2018. h <https://arxiv.org/pdf/1710.11431v2.pdf> (besucht am 26.01.2024)
- [Lju99] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User*. 2. Aufl. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1999
- [Loc20] LOCHBICHLER, M.: *Systematische Wahl einer Modellierungstiefe im Entwurfsprozess mechatronischer Systeme*. Dissertation. Paderborn: Universität Paderborn, 2020
- [Löw20] LÖWEN, R.: *Platons Höhlengleichnis als Leitmotiv der Mathematik*. 2020. [https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs\\_derivate\\_00047615/Jahrbuch\\_2019\\_07\\_Loewen.pdf](https://leopard.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00047615/Jahrbuch_2019_07_Loewen.pdf) (besucht am 26.01.2024)
- [LPK21] LINARDATOS, P.; PAPASTEFANOUPOULOS, V.; KOTSIANTIS, S.: Explainable AI: A Review of Machine Learning Interpretability Methods. *Entropy* 23 (2021), Nr. 18
- [LRP19] LUTTER, M.; RITTER, C.; PETERS, J.: Deep Lagrangian Networks: Using Physics as Model Prior for Deep Learning. *7th International Conference on Learning Representations (ICLR)*. 2019
- [Lue64] LUENBERGER, D. G.: Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics* 8 (1964), Nr. 2, S. 74–80

- [Lun16] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016
- [MIM<sup>+</sup>18] MURALIDHAR, N.; ISLAM, M. R.; MARWAH, M.; KARPATNE, A.; RAMAKRISHNAN, N.: Incorporating Prior Domain Knowledge into Deep Neural Networks. *2018 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*. 2018, S. 36–45
- [Mis75] MISHAN, E. J.: *Grundlagen der Kosten-Nutzen-Analyse*. Campus-Texte Wirtschaftswissenschaften. Frankfurt a. M.: Campus Verl., 1975
- [Mit14] MITTELSTRASS, J.: *Die griechische Denkform: Von der Entstehung der Philosophie aus dem Geiste der Geometrie*. Berlin/Boston: de Gruyter, 2014
- [Moc89] MOCKUS, J.: *Bayesian Approach to Global Optimization: Theory and Applications*. Bd. 37. Mathematics and its Applications. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1989
- [Mor27] MORENO, J. A.: *Diskontinuierliche Beobachter: Eigenschaften und einige Anwendungen: Vortragsfolien*. Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik, Heinz Nixdorf Institut, Universität Paderborn, 2012-06-27
- [MPS08] MAGNUS, K.; POPP, K.; SEXTRO, W.: *Schwingungen: Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 8., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008
- [Mur12] MURPHY, K. P.: *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. Adaptive computation and machine learning series. Cambridge: MIT Press, 2012
- [MV20] MARCINKEVIC, R.; VOGT, J. E.: *Interpretability and Explainability: A Machine Learning Zoo Mini-tour*. 3.12.2020. <https://arxiv.org/pdf/2012.01805.pdf> (besucht am 31.01.2023)
- [Nel00] NELSON, A. T.: *Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by dual Kalman filtering methods*. Dissertation. Oregon Graduate Institute of Science and Technology, 2000
- [Nis19] NISE, N. S.: *Control Systems Engineering*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2019
- [NKFU22] NICODEMUS, J.; KNEIFL, J.; FEHR, J.; UNGER, B.: Physics-informed Neural Networks-based Model Predictive Control for Multi-link Manipulators. *IFAC-PapersOnLine* 55 (2022), Nr. 20, S. 331–336

- [NM22] NAFAR, O.; MAKHLOUF, A. B., Hrsg.: *Advances in Observer Design and Observation for Nonlinear Systems: Fundamentals and Applications*. 1. Aufl. Bd. 410. Studies in Systems, Decision and Control. Cham: Springer, 2022
- [NSRH21] NIELSEN, K.; SVAHN, C.; RODRIGUEZ-DENIZ, H.; HENDEBY, G.: UKF Parameter Tuning for Local Variation Smoothing. *2021 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI)*. 2021, S. 1–8
- [NW06] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J.: *Numerical Optimization*. 2. Aufl. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York: Springer, 2006
- [Pap17] PAPULA, L.: *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 12. Aufl. Wiesbaden: Springer, 2017
- [Pea01] PEARSON, K.: On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2 (1901), Nr. 11, S. 559–572
- [PGPS21] PELZ, P. F.; GROCHE, P.; PFETSCH, M. E.; SCHAEFFNER, M., Hrsg.: *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*. Springer Tracts in Mechanical Engineering, 2021
- [Pie17] PIEPER, M.: *Mathematische Optimierung: Eine Einführung in die kontinuierliche Optimierung mit Beispielen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017
- [Pla16] PLATON: *Der Staat: Über das Gerechte*. 11. Aufl. Bd. 80. Philosophische Bibliothek. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 2016
- [PP06] PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4. Aufl. Boston: McGraw-Hill, 2006
- [Pre23] PRESSEAMT EUROPÄISCHES PARLAMENT: *Parlament bereit für Verhandlungen über Regeln für sichere und transparente KI*: Pressemitteilung. 14.06.2023. <https://www.europarl.europa.eu/news/de/press-room/20230609IPR96212/parlament-bereit-fur-verhandlungen-uber-regeln-fur-sichere-und-transparente-ki> (besucht am 25.10.2023)
- [PU92] PSICHOGIOS, D. C.; UNGAR, L. H.: A Hybrid Neural Network-First Principles Approach to Process Modeling. *AIChe Journal* 38 (1992), Nr. 10, S. 1499–1511

- [PV17] PIIRONEN, J.; VEHTARI, A.: Sparsity information and regularization in the horseshoe and other shrinkage priors. *Electronic Journal of Statistics* 11 (2017), Nr. 2, S. 5018–5051
- [PWF<sup>+</sup>18] PATHAK, J.; WIKNER, A.; FUSSELL, R.; CHANDRA, S.; HUNT, B. R.; GIRVAN, M.; OTT, E.: Hybrid forecasting of chaotic processes: Using machine learning in conjunction with a knowledge-based model. *Chaos*. Bd. 28. AIP Publishing, 2018
- [Rai94] RAISCH, J.: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich: Mit 1 Tabelle und 70 Beispielen*. Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik. München und Wien: Oldenbourg, 1994
- [RC21] RAYMOND, S. J.; CAMARILLO, D. B.: *Applying physics-based loss functions to neural networks for improved generalizability in mechanics problems*. 25.05.2021. <http://arxiv.org/pdf/2105.00075v2> (besucht am 28.01.2024)
- [Rei22] REILING, F. P.; GÖTTE, R.-S. (BetreuerIn): *Einsatz und Analyse eines Physics-guided Neural Networks für die Regelung eines Golfroboters*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [Rit20] RITTER, B.: *Nonlinear State Estimation and Noise Adaptive Kalman Filter Design for Wind Turbines*. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2020
- [RMB<sup>+</sup>20] RUEDEN, L. von; MAYER, S.; BECKH, K.; GEORGIEV, B.; GIesselbach, S.; HESE, R.; KIRSCH, B.; PFROMMER, J.; PICK, A.; RAMAMURTHY, R.; WALCZAK, M.; GARCKE, J.; BAUCKHAGE, C.; SCHUECKER, J.: *Informed Machine Learning – A Taxonomy and Survey of Integrating Knowledge into Learning Systems*. 2020. <http://arxiv.org/pdf/1903.12394v2> (besucht am 28.01.2024)
- [Ros22] ROSE, N.-K.; GÖTTE, R.-S. (BetreuerIn): *Intelligenter Beobachterentwurf mittels datengetriebener Methoden*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [RPG21] ROHRHOFER, F. M.; POSCH, S.; GEIGER, B. C.: *On the Pareto Front of Physics-Informed Neural Networks*. 3.05.2021. <http://arxiv.org/pdf/2105.00862v1> (besucht am 28.01.2024)
- [RPK19] RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. Bd. 378. 2019, S. 686–707

- [Rud19] RUDIN, C.: Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead. *Nature machine intelligence* 1 (2019), Nr. 5, S. 206–215
- [Rüs14] RÜSCHENDORF, L.: *Mathematische Statistik*. Masterclass. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014
- [San12a] SANGUANSAT, P., Hrsg.: *Principal Component Analysis*. Rijeka: IntechOpen, 2012
- [San12b] SANGUANSAT, P., Hrsg.: *Principal Component Analysis: Engineering Applications*. Rijeka: IntechOpen, 2012
- [SBW<sup>+</sup>18] SEIFERT, I.; BÜRGER, M.; WÄNGLER, L.; CHRISTMANN-BUDIAN, S.; ROHDE, M.; GABRIEL, P.; ZINKE, G.: *Potenziale der künstlichen Intelligenz im produzierenden Gewerbe in Deutschland: Studie im Auftrag des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie (BMWi) im Rahmen der Begleitforschung zum Technologieprogramm PAiCE - Platforms — Additive Manufacturing — Imaging — Communication — Engineering*. Hrsg. von BEGLEITFORSCHUNG PAiCE, IIT-INSTITUT FÜR INNOVATION UND TECHNIK IN DER VDI / VDE INNOVATION + TECHNIK GMBH. 2018. [https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Studien/potenziale-kuenstlichen-intelligenz-im-produzierenden-gewerbe-in-deutschland.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=1](https://www.bmwk.de/Redaktion/DE/Publikationen/Studien/potenziale-kuenstlichen-intelligenz-im-produzierenden-gewerbe-in-deutschland.pdf?__blob=publicationFile&v=1) (besucht am 30.03.2023)
- [Sch10] SCHRÖDER, D.: *Intelligente Verfahren: Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Berlin und Heidelberg: Springer, 2010
- [Sch11] SCHARPF, J. P.: *Modellbasierte Methodik zur Optimierung der Sensorkonfiguration am Beispiel Dieselmotor*. Dissertation. München: Technische Universität München, 2011
- [Sch17] SCHWEERS, C.: *Adaptive Sigma-Punkte-Filter-Auslegung zur Zustands- und Parameterschätzung an Black-Box-Modellen*. Dissertation. Paderborn: Universität Paderborn, 2017
- [Sch21] SCHÖN, O.; GÖTTE, R.-S. (BetreuerIn); TIMMERMANN, J. (BetreuerIn): *Physics-guided Neural Networks zur Identifikation dynamischer Systeme*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2021
- [Sch23a] SCHULZKI-HADDOUTI, C.: *EU: Showdown in Brüssel für neues Gesetz zu KI*. Hrsg. von VDI VERLAG. 23.10.2023. <https://www.vdi-nachrichten.com/technik/informationstechnik/eu-showdown-in-brussel-fuer-neues-gesetz-zu-ki/?vdi-loggedin> (besucht am 25.10.2023)

- [Sch23b] SCHWARZER, L.; GÖTTE, R.-S. (BetreuerIn): *Automatische Extraktion dominanter Bibliotheksterme zur Modellanpassung im Kontext der Joint Estimation*. Unveröffentlichte Studienarbeit. Paderborn: Universität Paderborn, 2023
- [SEFL14] SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A.: *Sliding Mode Control and Observation*. New York und Heidelberg: Birkhäuser, 2014
- [SGT22] SCHÖN, O.; GÖTTE, R.-S.; TIMMERMANN, J.: Multi-Objective Physics-Guided Recurrent Neural Networks for Identifying Non-Autonomous Dynamical Systems. *IFAC-PapersOnLine* 55 (2022), Nr. 12, S. 19–24
- [Sim06] SIMON, D.: *Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches*. 1. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006
- [SLA12] SNOEK, J.; LAROCHELLE, H.; ADAMS, R. P.: Practical Bayesian Optimization of Machine Learning Algorithms. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Hrsg. von PEREIRA, F.; BURGES, C. J.; BOTTOU, L.; WEINBERGER, K. Q. Bd. 25. 2012
- [Spu08] SPURGEON, S. K.: Sliding mode observers: a survey. *International Journal of Systems Science* 39 (2008), Nr. 8, S. 751–764
- [SR20] SCHMITT, T.; RITTER, B.: Data-based Identifiability and Observability Assessment for Nonlinear Control Systems using the Profile Likelihood Method. *IFAC-PapersOnLine* 53 (2020), Nr. 2, S. 1114–1119
- [SST16] SOROKINA, M.; SYGLETOS, S.; TURITSYN, S.: Sparse identification for non-linear optical communication systems: SINO method. *Optics express* 24 (2016), Nr. 26, S. 30433–30443
- [SSW<sup>+</sup>16] SHAHRIARI, B.; SWERSKY, K.; WANG, Z.; ADAMS, R. P.; FREITAS, N. de: Taking the Human Out of the Loop: A Review of Bayesian Optimization. *Proceedings of the IEEE* 104 (2016), Nr. 1, S. 148–175
- [SZ06] SCHÄFER, A. M.; ZIMMERMANN, H. G.: Recurrent Neural Networks Are Universal Approximators. *Artificial Neural Networks – ICANN 2006*. Hrsg. von KOLLIAS, S.; STAFYLOPATIS, A.; DUCH, W.; OJA, E. Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2006, S. 632–640
- [Thi22] THIELICKE, W.: *Keyword occurrence in academic papers (google scholar): MATLAB Central File Exchange*. 2022. [https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/111910-keyword-occurrence-in-academic-papers-google-scholar?s\\_tid=FX\\_rc1\\_behav](https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/111910-keyword-occurrence-in-academic-papers-google-scholar?s_tid=FX_rc1_behav) (besucht am 27.09.2023)

- [Tib96] TIBSHIRANI, R.: Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 58 (1996), Nr. 1, S. 267–288
- [TKOT11] TIMMERMANN, J.; KHATAB, S.; OBER-BLÖBAUM, S.; TRÄCHTLER, A.: Discrete Mechanics and Optimal Control and its Application to a Double Pendulum on a Cart. *IFAC Proceedings Volumes* 44 (2011), Nr. 1, S. 10199–10206
- [Trä24] TRÄCHTLER, A.: „Laborpraktikum Regelungstechnik, Versuch 5: Nichtlineare Zwei-Freiheitsgrade-Regelung eines inversen Pendels“. Universität Paderborn, WS 2023/2024
- [van04] VAN DER MERWE, R.: *Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*. Dissertation. Oregon Health & Science University, 2004
- [VDI01] VDI/VDE, Richtlinie 2206:2021-11: *Entwicklung mechatronischer und cyber-physischer Systeme*. Beuth, Berlin, 2021.
- [vW01] VAN DER MERWE, R.; WAN, E. A.: The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation. *Proceedings of 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Piscataway, NJ, 2001, S. 3461–3464
- [Wal22] WALLSCHEID, O.: *Systemidentifikation*. Vorlesungsskript. Paderborn: Universität Paderborn, 2022
- [WN01] WAN, E. A.; NELSON, A. T.: Dual Extended Kalman Filter Methods. *Kalman Filtering and Neural Networks*. Hrsg. von HAYKIN, S. S. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. New York: Wiley, 2001, S. 123–173
- [WvN99] WAN, E. A.; VAN DER MERWE, R.; NELSON, A. T.: Dual Estimation and the Unscented Transformation. *Advances in Neural Information Processing*. Hrsg. von SOLLA, S.; LEEN, T.; MÜLLER, K. Bd. 12. 1999

## Anhang

### Inhaltsverzeichnis

<b>A1 Beobachtbarkeit . . . . .</b>	<b>201</b>
<b>A2 Statistische Rechenregeln . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>A3 Regularized-Horseshoe-Verteilung . . . . .</b>	<b>205</b>
<b>A4 Matrixzerlegungen . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>A5 Numerische Integrationsverfahren . . . . .</b>	<b>209</b>
<b>A6 Anwendungsbeispiele . . . . .</b>	<b>211</b>



## A1 Beobachtbarkeit

Da in dieser Arbeit eingangsaffine Systeme betrachtet werden (vgl. Gleichung (4.4)), wird die Definition der Beobachtbarkeit für diese Systemklasse wiedergegeben [Ada18]:

*Ein eingangsaffines System (4.4) ist beobachtbar, wenn sein relativer Grad  $\delta = n$  ist.*

Um den relativen Grad  $\delta$  zu überprüfen, werden die Lie-Ableitungen (vgl. Abschnitt 2.3) gebildet, sodass

$$z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_a \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_b \mathbf{h}(\mathbf{x})u \\ \vdots \\ L_a^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_b L_a^{n-2} \mathbf{h}(\mathbf{x})u + \cdots + L_b \mathbf{h}(\mathbf{x})u^{(n-2)} \end{pmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)})$$

gilt. Liegt nun  $\delta = n$  vor, so kann das System (4.4) durch einen Diffeomorphismus

$$z = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_a \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_a^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

in die nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform überführt werden [Ada18]:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ L_a^n \mathbf{h}(\mathbf{q}^{-1}(z)) + L_b L_a^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{q}^{-1}(z))u \end{pmatrix}.$$

Somit ist das System beobachtbar. Darüber hinaus können eingangsaffine Systeme mit  $\delta < n$  existieren, die ebenfalls beobachtbar sind [Ada18]. Für die betrachteten Anwendungsbeispiele dieser Dissertationsschrift ist Beobachtbarkeit gegeben.



## A2 Statistische Rechenregeln

Bei der Herleitung des optimalen Korrekturereingriffs  $\mathbf{K}_k$  für das Kalman-Filter sind im Abschnitt 2.2 Rechenregeln des Erwartungswertes sowie Eigenschaften bzgl. der Spur einer Matrix verwendet worden, welche in diesem Abschnitt kurz erläutert werden. Bei der Rechnung mit dem Erwartungswert, z. B. in der Gleichung (2.14), kann dessen Linearität ausgenutzt werden. So gilt für die zwei Zufallsvariablen  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  und die Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  Folgendes (vgl. [Pap17]):

$$\mathbb{E}[a \cdot \mathbf{X} + b \cdot \mathbf{Y}] = a \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}] + b \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Y}].$$

Zudem sind in der Gleichung (2.16) die nachfolgend aufgeführten Eigenschaften der Spur angewendet worden. Ist der Ausdruck  $\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}$  mit den Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  skalar, so folgt mit der Produktregel der Spur

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{A}^T). \quad (\text{A2-1})$$

Wird Gleichung (A2-1) nun mit dem Operator des Erwartungswerts versehen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A}] &= \mathbb{E}[\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A})] \\ &= \mathbb{E}[\text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{A}^T)] \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}[\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{A}^T]). \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist für die Berechnung des Gradienten in der Gleichung (2.17) die Ableitung der Spur erforderlich, welche sich durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$$

bestimmen lässt. Neben den grundlegenden Rechenregeln eines Erwartungswertes wird im Folgenden die Aktualisierung der ersten beiden Momente basierend auf neuen Datensätzen erläutert, welche im Kontext der Bayesschen Optimierung im Abschnitt 2.1.3 genutzt wird. Denn für die BO wird das probabilistische Modell  $\hat{J}$  meist als ein GP-Modell angenommen (vgl. Gleichung (2.10)), dessen charakteristischen Größen nach Gleichung (2.9) die Mittelwert- und Kovarianzfunktion  $\boldsymbol{\mu}$  bzw.  $\Sigma$  sind. Mit fortschreitender Anzahl an Datenpunkten werden diese angepasst, indem nach [Bis06] für den nächsten Datenpunkt  $(\mathbf{x}_{N_0+1}, J(\mathbf{x}_{N_0+1}))$  die bis zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehenden Daten(-matrizen)

$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_0})$  und  $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_{N_0})$  genutzt werden. Anschließend können sowohl der Mittelwert also auch die Kovarianz durch

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{N_0+1} &= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{N_0+1}) + \mathbf{k}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_{N_0+1})^T \mathbf{k}(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{J} - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X})) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{N_0+1} &= \mathbf{k}(\mathbf{x}_{N_0+1}, \mathbf{x}_{N_0+1}) - \mathbf{k}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_{N_0+1})^T \mathbf{k}(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_{N_0+1})\end{aligned}\tag{A2-2}$$

bestimmt und für die Aktualisierung des Modells  $\hat{J}$  verwendet werden [Bis06].

### A3 Regularized-Horseshoe-Verteilung

Im Abschnitt 4.4.1 wird die Modellierung der Parameter  $\theta$  durch die RHS-Verteilung (4.25) angestrebt, welche als hierarchische Gauß-Verteilung mithilfe der unterlagerten Distributionen ihre Varianz an die Form einer Laplace-Verteilung anpasst, um diese zu imitieren. Da der Einfluss dieser unterlagerten Distributionen aus der mathematischen Formulierung nur schwer nachvollziehbar ist, wird dieser daher in diesem Abschnitt beleuchtet. Dazu werden in den nachfolgenden Abbildungen links jeweils die unterlagerte Distribution, u. U. abhängig von ihren Parametern, und rechts jeweils die daraus resultierende RHS-Verteilung abgebildet. Die RHS-Verteilungen sind hierbei durch Histogramme dargestellt, da sie Monte-Carlo-gesampelt worden sind. Die Parameter der unterlagerten Distributionen, die in der jeweiligen Abbildung nicht untersucht werden, variieren dabei nicht, um die Wirkung der resultierenden Gesamtverteilung nicht zu verfälschen. Die Abbildung A3-1 veranschaulicht die bereits im Abschnitt 4.4.1 erwähnte Wirkung von  $\tau$ : Je kleiner die Varianz  $\tau_0$  für die positive Cauchy-Distribution  $C^+(\cdot, \cdot)$  gewählt wird, aus der  $\tau$  stammt, desto mehr wird diese in Richtung der  $y$ -Achse gestreckt und desto wahrscheinlicher ist es daher, dass der Koeffizient  $\theta_i$  Null ist. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Varianz der resultierenden RHS-Verteilung für  $\tau_0 = 0,025$ , dargestellt in rot, deutlich schmäler als die der blau abgebildeten Verteilung ist, welche aufgrund von  $\tau_0 = 0,2$  eine wesentlich breitere Streuung um Null aufzeigt. Der Parameter  $\tau_0$  steuert somit den Grad der Dünnbesetztheit in globaler Art und Weise, weil dieser für alle  $\theta_i$  festgelegt wird [PV17; HBK22].

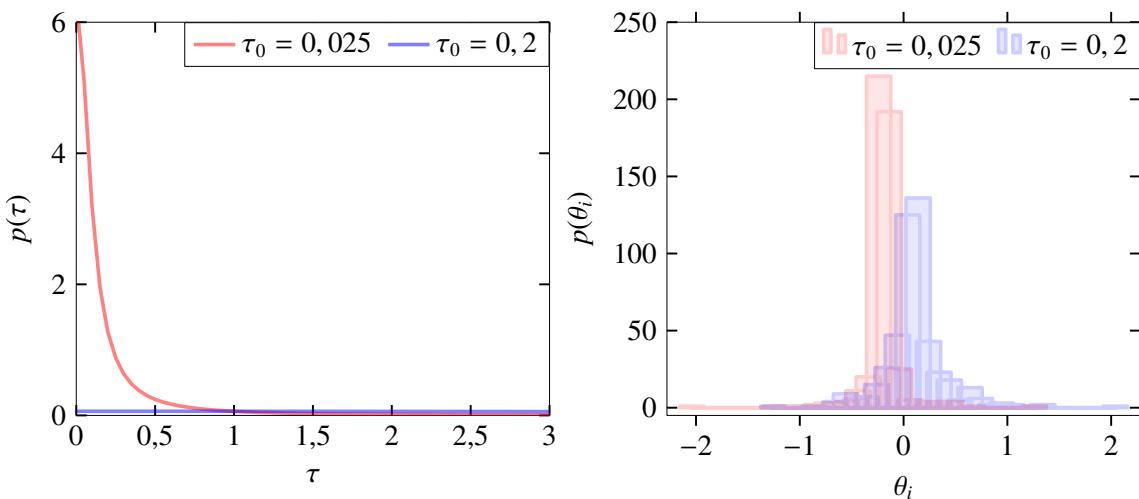


Abbildung A3-1: Einfluss der Distribution  $\tau \sim C^+(0, \tau_0)$  auf die RHS-Verteilung

Damit das Ziel, dass einige Parameter  $\theta_i$  nicht Nullelemente sind, umgesetzt werden kann, ermöglicht die nicht-parameterabhängige, ebenfalls positive Cauchy-Verteilung für

$\lambda_i$  Ausnahmen von dieser globalen Dünnbesetzung. In der Abbildung A3-2 ist diese Wirkung anhand der größeren Varianz der resultierenden RHS-Verteilung zu erkennen.

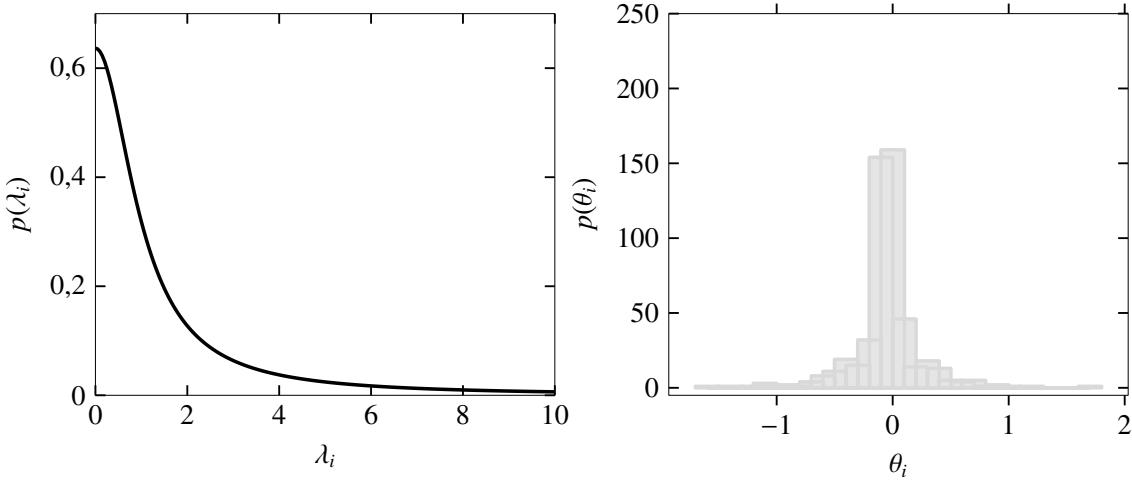


Abbildung A3-2: Einfluss der Distribution  $\lambda_i \sim C^+(0, 1)$  auf die RHS-Verteilung

Schließlich dient der Wert  $c^2$ , welcher mithilfe einer inversen Gamma-Verteilung bestimmt wird, zur Regularisierung der hierarchischen RHS-Verteilung. Wird diese ohne Regularisierung verwendet, handelt es sich um die *Horseshoe-Verteilung (HS-Verteilung)* [PV17; HBK22]. Diese weist jedoch den Nachteil von potentiell sehr großen Nichtnullelementen  $\theta_i$  auf, welche mit dieser Regularisierung vermieden werden sollen. Die Variation der Parameter  $a, b$  für die inverse Gamma-Verteilung, dargestellt durch die Farben Rot, Blau und Grün, illustriert deshalb den Einfluss der Regularisierung auf die resultierende RHS-Verteilung in der Abbildung A3-3.

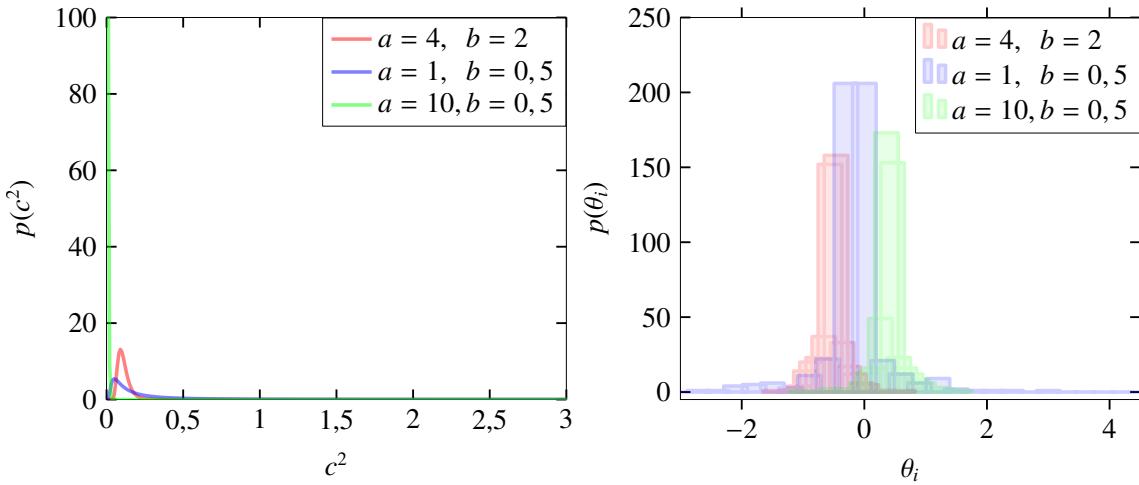


Abbildung A3-3: Einfluss der Distribution  $c^2 \sim \text{Inv-}\Gamma(a, b)$  auf die RHS-Verteilung

## A4 Matrixzerlegungen

Dieser Abschnitt stellt die wichtigsten Matrixzerlegungen in kompakter Weise vor, welche für das Verständnis dieser Arbeit benötigt werden. Diese finden beispielsweise Anwendung in den Kalman-Filters (vgl. Abschnitt 2.2) oder der Hauptkomponentenanalyse (PCA) (vgl. Abschnitt 5.1). Die betrachteten Zerlegungen werden für reelle Matrizen dargestellt, können aber ausgenommen der Cholesky-Zerlegung auf komplexe Matrizen erweitert werden.

### A4.1 Cholesky-Zerlegung

Eine symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kann mithilfe der *Cholesky-Zerlegung* durch ein Produkt aus einer unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und deren Transponierten  $\mathbf{L}^T$  beschrieben werden, sodass

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (\text{A4-1})$$

gilt. Dabei basiert die Cholesky-Zerlegung auf der Eigenschaft, dass jede symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{A}$  eindeutig in die Form  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{L}}^T$  zerlegt werden kann [DH19; FH07]. Darin stellen  $\tilde{\mathbf{L}}$  eine unipotente, untere Dreiecksmatrix und  $\mathbf{D}$  eine positive Diagonalmatrix dar, sodass sich der Zusammenhang zur Cholesky-Zerlegung durch  $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}\sqrt{\mathbf{D}}$  ergibt. Die Berechnung der Zerlegung erfolgt durch die elementweise Auswertung der Gleichung (A4-1), vgl. [DH19; FH07]. Vorteile dieser Zerlegung bestehen in der numerischen Robustheit, der Lösung von Gleichungsproblemen und der Fähigkeit, symmetrische, positiv definite Matrizen zu detektieren. Diese Zerlegung wird daher in der effizienten, numerischen Berechnung des SRUKFs genutzt (vgl. Abschnitt 2.2.2).

### A4.2 QR-Zerlegung

Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen wird häufig eine *QR-Zerlegung* gewählt. Diese ist für eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (\text{A4-2})$$

mit  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  als orthonormale Matrix und  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  als obere Dreiecksmatrix definiert [FH07; DH19]. Dabei existieren verschiedene Algorithmen, um eine Zerlegung der Art (A4-2) durchzuführen, z. B. das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren. Zudem ist die QR-Zerlegung auch erweiterbar für nicht-quadratische Matrizen. Diese Zer-

legung wird ebenfalls in der effizienten, numerischen Berechnung des SRUKFs genutzt (vgl. Abschnitt 2.2.2).

### A4.3 Singulärwertzerlegung

Die *Singulärwertzerlegung* ist ein probates Mittel, um vielfältige Informationen über eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  zu erhalten und wird beispielsweise in der PCA genutzt (vgl. Kapitel 5). Jede Matrix  $\mathbf{A}$  kann durch das Produkt

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (\text{A4-3})$$

beschrieben werden [DH19]. Dabei sind  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  orthogonale Matrizen und  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$  stellt eine Matrix dar, auf deren Hauptdiagonalen sich die Singulärwerte  $\sigma_i \geq 0$  mit  $i = 1, \dots, r$  befinden, während alle weiteren Elemente Null sind. Die Singulärwerte sind dabei nach ihrer Größe sortiert, sodass  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  gilt. Die jeweiligen Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  bzw.  $\mathbf{v}_l$  mit  $l = 1, \dots, m$  werden zudem als Linksbzw. Rechtssingulärvektoren bezeichnet. Die Zerlegung (A4-3) kann als eine Abfolge von Drehungen durch die orthogonalen Matrizen und eine Stauchung bzw. Streckung durch die Matrix  $\Sigma$  interpretiert werden. Zudem besteht eine enge Verwandtschaft zum Eigenwertproblem, da die quadrierten Singulärwerte die Eigenwerte der Matrizen  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  bzw.  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  bilden und folglich auch aus diesen bestimmt werden können [DH19].

## A5 Numerische Integrationsverfahren

Um Differentialgleichungen der Art  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  und Schrittweiten  $\Delta t \in \mathbb{R}^{>0}$  zu simulieren, ist ihre Auswertung mittels numerischer Integrationsverfahren erforderlich. Im Folgenden werden zwei der bekanntesten Verfahren vorgestellt, welche in der Praxis häufig genutzt werden und in der vorliegenden Dissertationsschrift beispielsweise in den Kapiteln 3 und 5 Verwendung finden.

### A5.1 Explizites Euler-Verfahren

Die Popularität des expliziten Euler-Verfahrens begründet sich durch seine Einfachheit, welche einen geringen Rechenaufwand verursacht und somit insbesondere in Digitalanwendungen eingesetzt wird. Denn die numerische Integration erfolgt über die Annäherung des Integrals durch ein Rechteck, indem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

bestimmt wird. Dabei stellt der Index  $k$  die jeweilige Größe zum Zeitpunkt  $t_k$  dar, d. h.  $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}(t_k)$ . Allerdings sind aufgrund der einfachen Rechteckstruktur Einbußen bzgl. der Genauigkeit der Integration zu erwarten. Dieser Nachteil kann z. B. durch andere, komplexere Einschrittverfahren, wie das Heun-Verfahren oder das Simpson-Verfahren, vermieden werden. Jene Verfahren werden als Runge-Kutta-Verfahren zweiter bzw. dritter Ordnung bezeichnet [Ada18].

### A5.2 Runge-Kutta-Verfahren

Soll die Genauigkeit der numerischen Integration erhöht, der Rechenaufwand aber gleichzeitig moderat bleiben, wird in den meisten Fällen das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung als numerisches Integrationsverfahren ausgewählt. Dieses löst die obige Differentialgleichung mit der Definition  $\mathbf{u}_{k+0.5} := \mathbf{u}\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)$  folgendermaßen [Ada18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{p}_1, \mathbf{u}_{k+0.5}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{p}_2, \mathbf{u}_{k+0.5}\right), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \Delta t \cdot \mathbf{p}_3, \mathbf{u}_{k+1}), \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{6} \cdot (\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4). \end{aligned}$$



## A6 Anwendungsbeispiele

Dieser Abschnitt stellt ergänzende Informationen zu den Anwendungsbeispielen bereit, die in den Kapiteln 3 bis 5 untersucht werden. Darüber hinaus werden z. T. weiterführende Ergebnisse präsentiert.

### A6.1 Golfroboter

Der Golfroboter ist ein Prüfstand am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Mechatronik (RtM), der als Testobjekt für ML-Methoden im Vergleich zu klassischen regelungstechnischen Methoden dient. Es handelt sich dabei um ein komplexes mechatronisches System, bestehend aus elektrischen, mechanischen und informationstechnischen Komponenten, deren Zusammenspiel durch konkrete physikalische Wirkprinzipien entsteht. Die Abbildung 3-2 zeigt den aktuellen Aufbau des Roboters [JFTT22]. Im Rahmen dieser Arbeit ist die autonome Fahrstrategie des Roboters nicht relevant, sodass nur der Roboter-aufbau ohne Räder betrachtet wird. Dieser besteht aus einem Zahnriemengetriebe, einem Schläger mit Schlagkopf sowie einer Antriebseinheit und ähnelt somit vom physikalischen Prinzip einem Pendel. Betrachtet wird nur der letzte Teil eines Golfspiels, in dem der Golfball auf dem sogenannten Green in das Loch geschlagen werden muss. Dies wird als Putten bezeichnet<sup>52</sup>. Das Regelungsziel des Roboters ist es daher, den Golfball erfolgreich in das Loch zu schlagen. Dafür muss der Schläger eine bestimmte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Schlags aufweisen, die ihn weder über das Loch springen noch vor dem Loch stoppen lässt. Diese Schlagdynamik wird mittels einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur eingestellt [FKL<sup>+</sup>22], welche in der Abbildung A6-1 dargestellt ist.

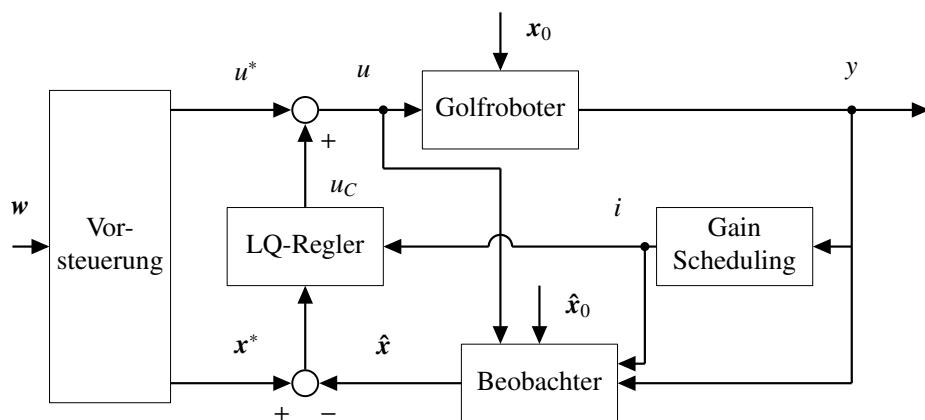


Abbildung A6-1: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur für den Golfroboter nach [FKL<sup>+</sup>22; JFTT22]

<sup>52</sup>Unter <https://serviceportal.dgv-intranet.de/regularien/golfregeln/offizielle-golfregeln.cfm> können die Regeln des Golfspiels nachgelesen werden, abgerufen am 26.01.2024.

Das nichtlineare Modell (3.4) aus Abschnitt 3.1.1 ist durch eine aufwendige Modellierung entstanden, dem mehrere Vereinfachungen vorausgingen. So wird die obere Zahnrämenscheibe als Angriffspunkt des Motormoments angenommen, woraufhin die beiden Zahnrämenscheiben zu einem Getriebe zusammengefasst werden können. Das Motormoment wird daraufhin durch ein Übersetzungsverhältnis des Zahnrämengetriebes von 4:1 berücksichtigt. Durch eine Optimierung mittels Messdaten wurden die Parameter  $p$  des Modells identifiziert, welche in der folgenden Tabelle aufgeführt sind [JFTT22]:

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse des Schlägers	$m$	0,5241	kg
Trägheitsmoment des Schlägers	$J$	0,1445	kg/m <sup>2</sup>
Gravitationskonstante	$g$	9,8100	m/s <sup>2</sup>
Länge Rotationsachse - Schwerpunkt des Golfschlägers	$a$	0,4702	m
Dynamischer Reibkoeffizient	$d$	0,0132	kg m <sup>2</sup> /s
Länge Rotationsachse - Reibpunkt	$r_r$	0,0245	m
Statischer Reibkoeffizient	$\mu$	1,5136	–

Tabelle A6-1: Parameter  $p$  des Golfroboters nach [JFTT22]

Das Modell liefert in den meisten Situationen eine hohe Modellgüte. Allerdings zeigt der Golfroboer das in der Abbildung A6-2 dargestellte, ruckartige Verhalten, wenn eine sehr langsame Anregung gewählt wird. Dieses resultiert aus einer Mischung von Haft- und Gleitreibung, welche als Stick-Slip-Effekt bekannt ist [KH02], aber durch das modellierte Reibmoment (3.5) nur angenähert werden kann. Daher bestehen in dieser Situation noch Modellgenauigkeiten, die in den Kapiteln 3 und 4 angenähert werden.

Um die gewünschte Schlagdynamik, welche beispielhaft in der Abbildung A6-3 dargestellt ist, auszuführen, wird eine konstante Vorsteuerung sowie ein LQ-Regler gewählt. Dazu wird das nichtlineare Modell (3.4) mittels der Gain-Scheduling-Strategie in mehrere lineare Systeme abhängig von Betriebspunkten transformiert [Ada18; JFTT22]. Anschließend kann für jedes linearisierte Modell ein eigener Regler ausgelegt werden. Da allerdings nur der Winkel des Golfroboters gemessen werden kann, wird zur Schätzung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  nach Überprüfung der Beobachtbarkeit ein Luenberger-Beobachter entworfen [Lue64]. Erneut wird aufgrund der Systemdynamik (3.4) der Gain-Scheduling-Ansatz genutzt, um die lineare Struktur des Luenberger-Beobachters nutzen zu können. Dabei wird der Korrekturereingriff aufgrund der Dualität mittels Polvorgabe bestimmt. Schließlich liegen verschiedene Beobachtermodelle vor, die je nach aktuellem Winkel  $\varphi$  über einen Vergleich mittels der Variable  $i$  ausgewählt werden [Fit20; JFTT22]. Dies ist in der Abbildung A6-1 durch den Block *Gain Scheduling* dargestellt.

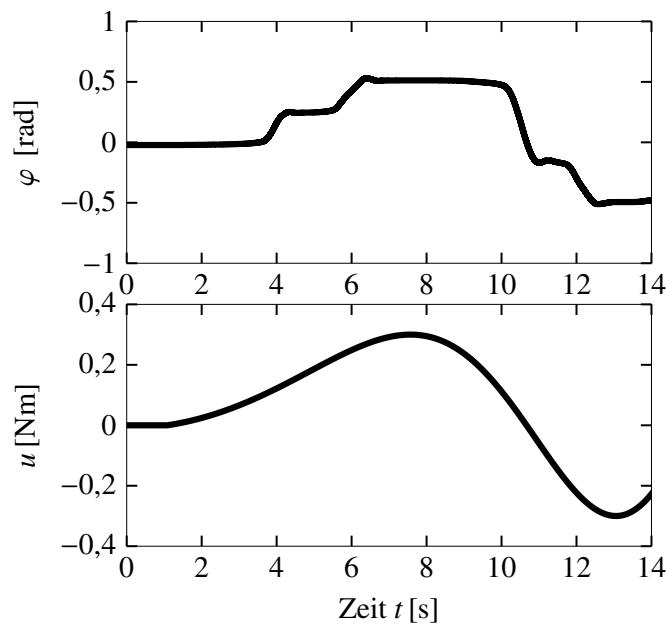


Abbildung A6-2: Auftreten des Stick-Slips-Effekts am Beispiel des Winkels bei einer sehr langsam Anregung

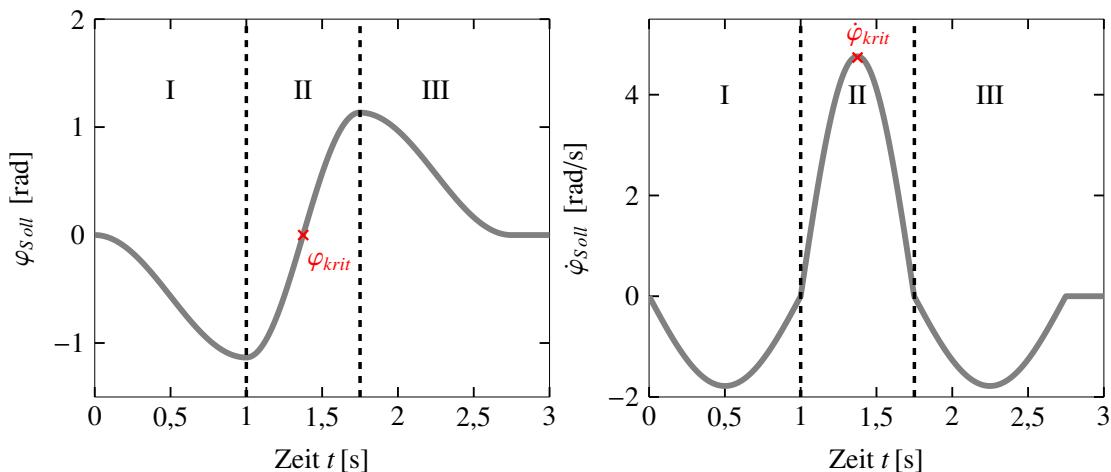


Abbildung A6-3: Beispieldreieck Sollvorgabe für den Golfroboter nach [JFTT22]: Ausholen zum Schlag in Phase I, Schlag bei  $\varphi_{krit} = 0^\circ$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}_{krit}$  in Phase II, Rückholen zur Ausgangsposition in Phase III

## Modelle des Golfroboters

Neben dem nichtlinearen Modell (3.4), welches das physikalische Modell mit der höchsten Modellgüte dargestellt, werden in dieser Arbeit noch weitere Modelle in verschiedenen Methoden genutzt, um beispielsweise Ungenauigkeiten, die aus dem Stick-Slip-Effekt re-

sultieren, genauer zu approximieren. Dazu wird u. a. das folgende Modell ohne den Anteil der viskosen Reibung  $M_V(\mathbf{x}) = -dx_2$  genutzt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ J^{-1}(-mga \sin(x_1) - r_r \mu \operatorname{sgn}(x_2) |mx_2^2 a + mg \cos(x_1)| + 4u) \end{pmatrix}, \\ y &= h(\mathbf{x}) = x_1.\end{aligned}$$

Darüber hinaus wird das Modell ohne den Anteil der Gleit- und Haftreibung  $M_H(\mathbf{x}, u) = r_r \mu \operatorname{sgn}(x_2) |mx_2^2 a + mg \cos(x_1)|$  betrachtet, welches durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_H(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ J^{-1}(-mga \sin(x_1) - dx_2 + 4u) \end{pmatrix}, \\ y &= h(\mathbf{x}) = x_1\end{aligned}\tag{A6-1}$$

beschrieben wird. Schließlich kann noch das Modell ohne wirkende Dämpfung oder Reibung betrachtet werden. Dieses lässt sich durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_{WO}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ J^{-1}(-mga \sin(x_1) + 4u) \end{pmatrix}, \\ y &= h(\mathbf{x}) = x_1\end{aligned}\tag{A6-2}$$

charakterisieren.

## Physikalisch motivierte (rekurrente) neuronale Netze

Im Abschnitt 3.1.3 ist bereits die Modellgüte eines PGNN im Vergleich zu anderen datengetriebenen und physikalisch motivierten Methoden analysiert worden. Wird jedoch die Datenverfügbarkeit als Einflussfaktor untersucht, ergibt sich insbesondere für die PGNN- und SINDYc-Modelle ein anderes Bild bzgl. ihrer Modellgüte. In der Abbildung A6-4 zeigt sich, dass das SINDYc-Modell von der Datenqualität abhängt, da es stark an Genauigkeit verliert und den Winkel bzw. die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr korrekt wiedergeben kann, wenn nur transientes Dynamikverhalten des Golfroboters in den Trainingsdaten enthalten ist. Das PGNN erzielt aufgrund des physikalischen Simulationsmodells allerdings weiterhin eine robuste Approximation des Systemverhaltens und zeigt wenig Veränderung, wenn sich der Datenumfang verändert. Dies ist besonders in der Ver-

größerung zu erkennen. Ferner wird in der Abbildung A6-5 ein Vergleich der verschiedenen hybriden Modelle abgebildet, wobei SINDy weiterhin als das Verfahren mit der höchsten Modellgüte zu erkennen ist.

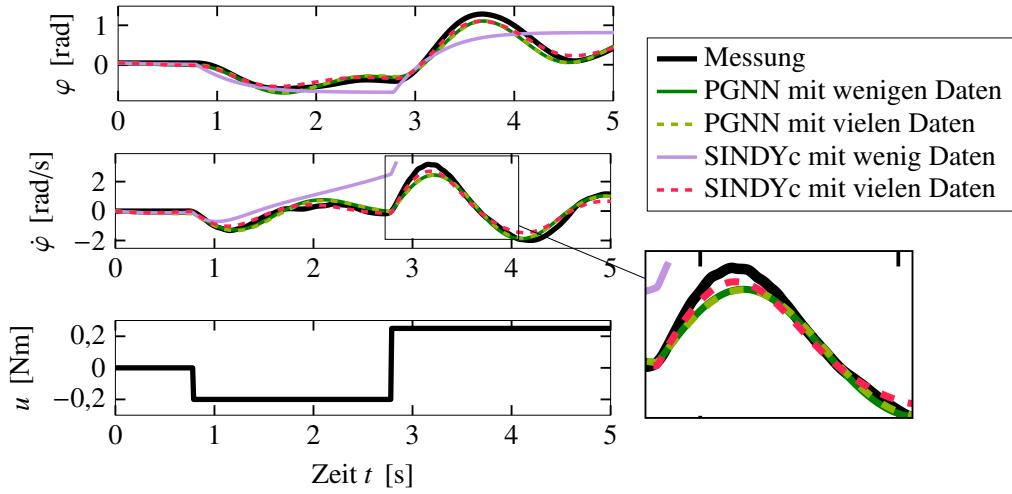


Abbildung A6-4: Modellgüte eines PGNNs in Abhängigkeit des genutzten Datenumfangs während des Trainings anhand des Golfroboters

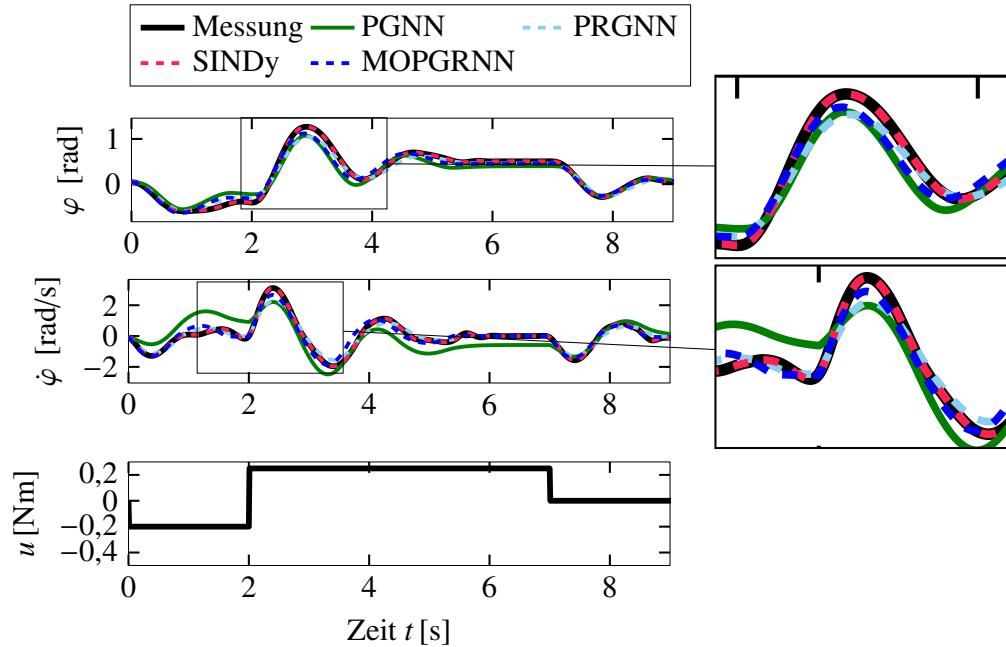


Abbildung A6-5: Modellgüte eines PGRNNs und MOPGRNNs im Vergleich zum PGNN- und SINDY-Modell anhand des Golfroboters

### Optimal initialisierte Kovarianzmatrizen

Neben der Minimierung des Schätzfehlers als Kostenfunktion in der Bayesschen Optimierung (vgl. Abschnitt 3.2.1), wird häufig auch die Forderung nach einem konsistenten

Filter berücksichtigt. Ein Schätzer weist die Eigenschaft der Konsistenz auf, wenn der Schätzfehler unverzerrt ist, d. h. wenn  $\mathbb{E}[\mathbf{e}_{x,k}] = 0 \forall k$  gilt, und dieser mit zunehmendem Stichprobenumfang abnimmt, demnach sich dem zu schätzenden Wert annähert [Rüs14]. Daher gibt es analog zur Gleichung (3.17) noch zwei weitere Möglichkeiten, die Kostenfunktion zu formulieren. Wird die Konsistenz eines Filters bewertet, so wird die Kostenfunktion durch

$$J(\hat{\mathbf{x}})_{NEES} = \log \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{e}_{x,k}^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \mathbf{e}_{x,k}) \right), \quad J(\hat{\mathbf{x}})_{NIS} = \log \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{e}_{y,k}^T \mathbf{S}_{in,k|k}^{-1} \mathbf{e}_{y,k}) \right), \quad (\text{A6-3})$$

mit der Innovationskovarianz  $\mathbf{S}_{in}$  formuliert. Die Abkürzungen stehen dabei für *Normalized Estimation Error Squared* und *Normalized Innovation Squared*. Diese Kostenfunktionen wurden ebenfalls dazu verwendet, optimal initialisierte Kovarianzmatrizen zu finden. Ein exemplarischer Verlauf der durch die BO durchgeführten Iterationen und deren Schätzung ist jeweils in den Abbildungen A6-6 und A6-7 dargestellt. Die Einstellparameter der BO sind identisch zu denen aus Abschnitt 3.2.1 gewählt worden.

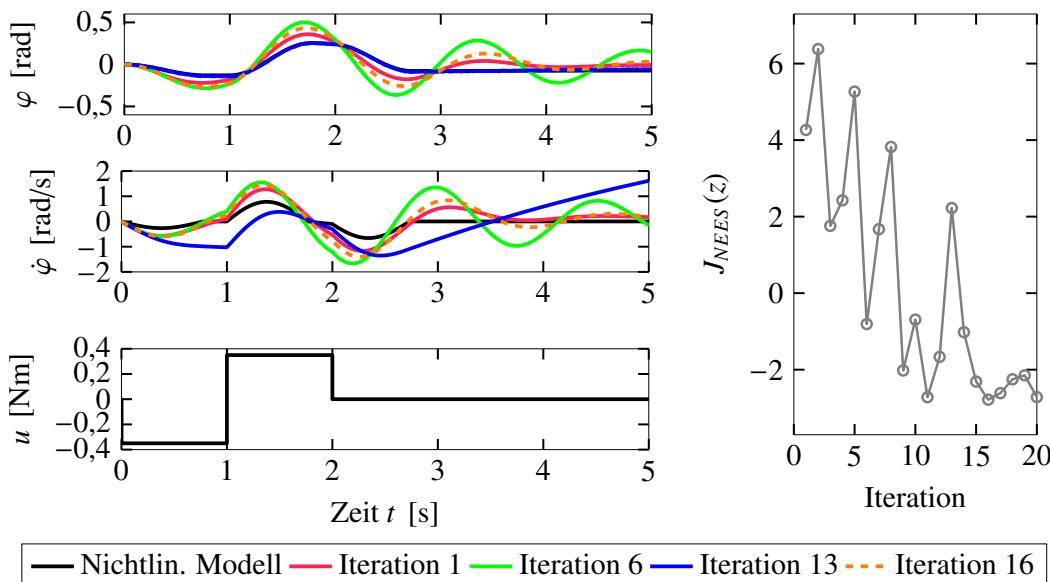
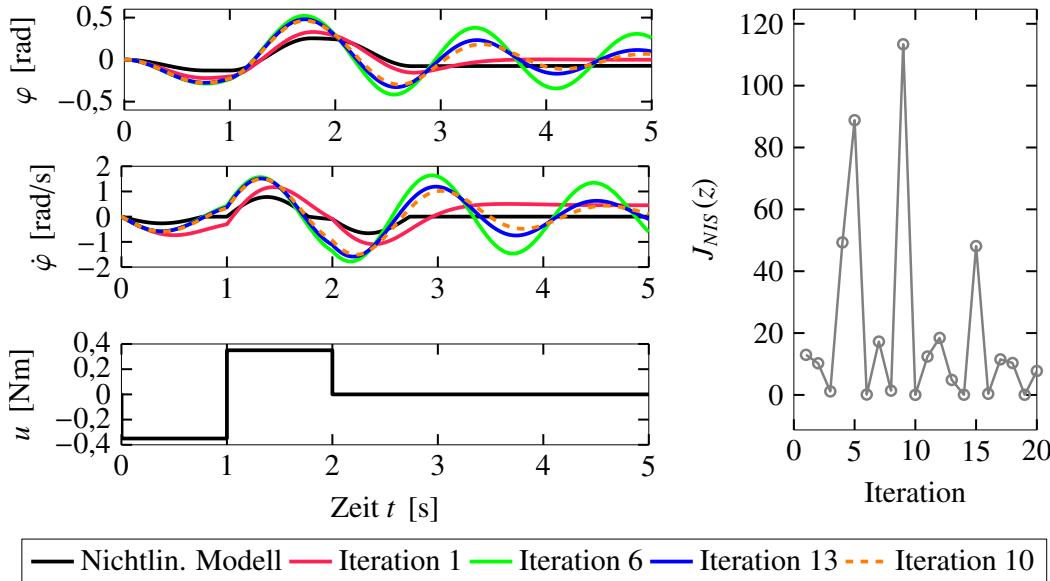


Abbildung A6-6: Ergebnis verschiedener Iterationen während der BO für die Kostenfunktion NEES (A6-3): Iteration 16 stellt die beste, durch die BO gefundene Lösung dar.

Im Vergleich zur WEES- bzw. WIS-Kostenfunktion findet die BO bezogen auf die Modellgüte schlechtere Minima. Diese werden jeweils durch die letzte dargestellte Iteration visualisiert. Ursache dieser Resultate ist die betrachtete Kostenfunktion, in welche die Kovarianz bzw. Varianz der Innovation eingeht. Es lässt sich anhand dieser Ergebnisse feststellen, dass die beiden Kalman-Filter nach der Optimierung ihr Potential, ein konsis-

tenter Schätzer zu sein, noch nicht erreicht haben. Abhilfe schafft eine Optimierung mit einem längeren Iterationshorizont oder die Wahl einer anderen Acquisitionfunction.



*Abbildung A6-7: Ergebnis verschiedener Iterationen während der BO für die Kostenfunktion NIS (A6-3): Iteration 10 stellt die beste, durch die BO gefundene Lösung dar.*

## A6.2 Servoventil

Um das Verständnis für den Abschnitt 3.1.3 zu erleichtern, werden einige Details zum betrachteten Servoventil skizziert, welche der internen Dokumentation [Ker21] des Lehrstuhls entstammen. Das zweistufige Ventil mit elektrischer Positionsregelung, welches nach dem Drüse-Prallplatten-Prinzip agiert, ist in der Abbildung A6-8 dargestellt.

Für das nichtlineare Modell des Ventils wird der Aufbau nach Abbildung A6-9 angenommen, welcher aus einem Torquemotor, einem hydraulischen Verstärker sowie einem Längsschieberventil mit Steuerschieber besteht. Hierbei stellen  $i$  den Steuerstrom und  $\Delta p_s$  den Differenzdruck der Drücke an den beiden Stirnseiten des Steuerschiebers dar.

Auch für das komplexe, nichtlineare Modell der Ventildynamik werden einige Annahmen getroffen [Ker21], z. B. dass die Strömungskräfte an der Prallplatte vernachlässigt werden, eine ideale Sensorik vorliegt oder konstante Drücke an den Ventilschlüssen herrschen. Da dieser Abschnitt lediglich die grundlegenden Eigenschaften des Ventils und das nichtlineare Modell beschreibt, welche zum Verständnis des Abschnitts 3.1.3 erforderlich sind, wird für eine vollständige Liste der Vereinfachungen und weiterer Details auf [Ker21] verwiesen.

Anschließend wird die Ventildynamik durch das nichtlineare Simulationsmodell (A6-4) dargestellt, welches auf der nachfolgenden Seite abgebildet ist.

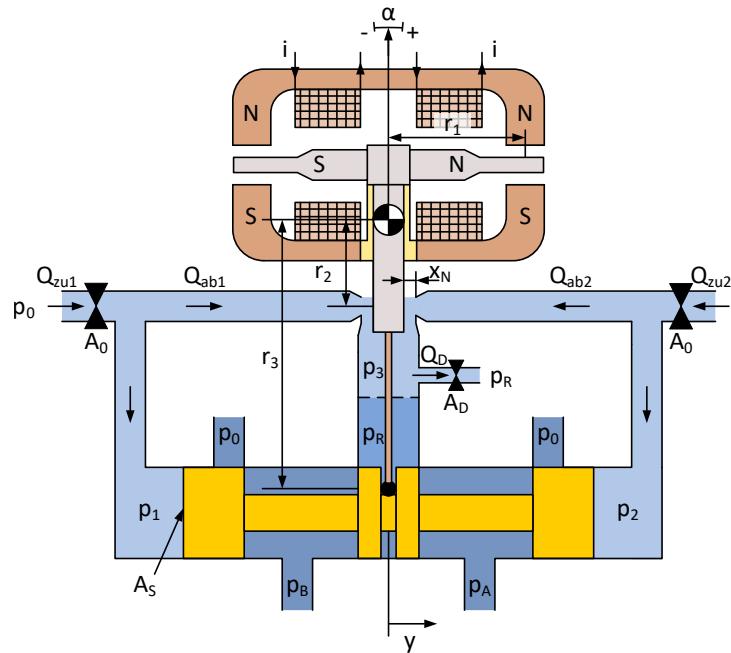


Abbildung A6-8: Physikalische Skizze des Servoventils mit Düse-Prallplatten-Prinzip nach [Ker21]

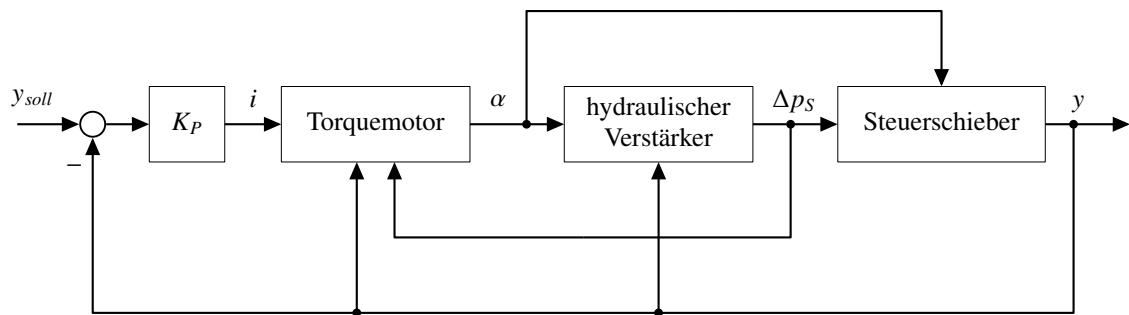


Abbildung A6-9: Aufbau des nichtlinearen Ventilmodells nach [Ker21]

Dabei beschreibt der Zustand  $\mathbf{x} = (\dot{\alpha}, \alpha, p_1, p_2, \dot{y}_S, y_S)^T$  die Drehbewegung des Ankers durch den Winkel  $\alpha$  bzw. dessen Geschwindigkeit  $\dot{\alpha}$ , die Drücke  $p_1$  bzw.  $p_2$ , die an den beiden Seiten der Prallplatte herrschen und die Ventilschieberlage  $y_S$  bzw. dessen Geschwindigkeit  $\dot{y}_S$ . Eingang des Ventils stellt die Spannung  $u = u_V$  dar, der Ausgang  $y_V = \frac{y_S}{y_{S,max}}$  ist die relative Ventilschieberlage. Die Parameter des nichtlinearen Modells wurden durch Prüfstandsmessungen und Datenblätter validiert und ergeben sich wie in der Tabelle A6-2 zusammengefasst. Das nichtlineare Modell kann wie im Abschnitt 3.1.3 beschrieben ebenfalls durch Modelle mit geringerer Modellierungstiefe ersetzt werden, z. B. durch ein einfaches Verzögerungsglied zweiter Ordnung (vgl. Gleichung (3.15)). Dessen Parameter  $\mathbf{p} = (K_V, D_V, T_V)^T$  können der Tabelle A6-3 entnommen werden.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J} \cdot (-d_1 \cdot x_1 + (K_{PM} \cdot r_1^2 - K_{BR} \cdot r_1^2 - K_F \cdot r_3^2) \cdot x_2 - A_N r_2 x_3 + A_N r_2 x_4 - (K_F \cdot r_3 + K_P \cdot K_i \cdot r_1) \cdot x_6) \\ x_1 \\ \frac{1}{C_{hyd}} \cdot (C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot r_2 \cdot x_2 \cdot \sqrt{x_3 - p_3} - C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot x_N \cdot \sqrt{x_3 - p_3} + C_0 \cdot A_0 \cdot \sqrt{p_0 - x_3} - A_S x_5) \\ \frac{1}{C_{hyd}} \cdot (-C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot r_2 \cdot x_2 \cdot \sqrt{x_4 - p_3} - C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot x_N \cdot \sqrt{x_4 - p_3} + C_0 \cdot A_0 \cdot \sqrt{p_0 - x_4} + A_S x_5) \\ \frac{1}{m_S} \cdot (-K_F \cdot r_3 \cdot x_2 + A_S \cdot x_3 - A_S \cdot x_4 - d_2 \cdot x_5 - (K_B + K_F) \cdot x_6) \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_P \cdot K_i \cdot r_1}{K_V} \cdot y_{S,max} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u \quad (\text{A6-4})$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \ddot{y}_S \\ \dot{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J} \cdot (-d_1 \cdot \dot{\alpha} + (K_{PM} \cdot r_1^2 - K_{BR} \cdot r_1^2 - K_F \cdot r_3^2) \cdot \alpha - A_N r_2 p_1 + A_N r_2 p_2 - (K_F \cdot r_3 + K_P \cdot K_i \cdot r_1) \cdot y_S) \\ \dot{\alpha} \\ \frac{1}{C_{hyd}} \cdot (C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot r_2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{p_1 - p_3} - C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot x_N \cdot \sqrt{p_1 - p_3} + C_0 \cdot A_0 \cdot \sqrt{p_0 - p_1} - A_S \dot{y}_S) \\ \frac{1}{C_{hyd}} \cdot (-C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot r_2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{p_2 - p_3} - C_0 \cdot \pi \cdot D_N \cdot x_N \cdot \sqrt{p_2 - p_3} + C_0 \cdot A_0 \cdot \sqrt{p_0 - p_2} + A_S \dot{y}_S) \\ \frac{1}{m_S} \cdot (-K_F \cdot r_3 \cdot \alpha + A_S \cdot p_1 - A_S \cdot p_2 - d_2 \cdot \dot{y}_S - (K_B + K_F) \cdot y_S) \\ \dot{y}_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_P \cdot K_i \cdot r_1}{K_V} \cdot y_{S,max} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{y_{V,max}} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = y_V.$$

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Steuerkolbenquerschnitt	$A_S$	$3,4 \times 10^{-5}$	$\text{m}^2$
Durchfluss/Dichte-Beiwert	$C_0$	0,0306	$\text{m}/(\text{s} \sqrt{\text{Pa}})$
Festdrosseldurchmesser	$D_0$	$2,772 \times 10^{-4}$	m
Torquemotor/Hydraulischer Verstärker-Dämpfbeiwert	$d_1$	$9,7 \times 10^{-3}$	$\text{N m s}$
Steuerkolben-Dämpfbeiwert	$d_2$	1549,5	$\text{N s m}^{-1}$
Düsendurchmesser	$D_N$	$8,352 \times 10^{-4}$	m
Rücklauf-Drosseldurchmesser	$D_R$	$3,81 \times 10^{-4}$	m
Ersatzkompressionsmodul	$E'_{\text{Öl}}$	$1,8 \times 10^9$	Pa
Massenträgheitsmoment Torquemotor	$J$	$1,6948 \times 10^{-7}$	$\text{kg m}^2$
Bernoulli-Konstante	$K_B$	$8,5167 \times 10^5$	$\text{N m}^{-1}$
Biegerohrsteifigkeit, bezogen auf eine Wirkungslinie im Luftspalt (Hebelarm $r_1$ )	$K_{BR}$	$2,1736 \times 10^4$	$\text{N m}^{-1}$
Magnetische Federkonstante, bezogen auf eine Wirkungslinie im Luftspalt (Hebelarm $r_1$ )	$K_{PM}$	0	$\text{N m}^{-1}$
Rückführfedersteifigkeit, bezogen auf eine Wirkungslinie mit Hebelarm $r_3$ am Kolben	$K_F$	1752	$\text{N m}^{-1}$
Torquemotorkonstante, bezogen auf eine Kraftwirkung im Luftspalt (Hebelarm $r_1$ )	$K_i$	0,0289	$\text{N mA}^{-1}$
Reglerverstärkung	$K_P$	$1,1367 \times 10^7$	-
Steuerkolbenmasse	$m$	0,015	kg
Systemdruck	$p_0$	280	bar
Abstand Luftspalt/Drehpunkt	$r_1$	0,0586	m
Abstand Düse/Drehpunkt	$r_2$	0,0054	m
Abstand Steuerkolben/Drehpunkt	$r_3$	0,0854	m
Ventiltotzeit	$T_{tot}$	$6,5 \times 10^{-4}$	s
Maximale Eingangsspannung	$u_{V,max}$	10	V
Steuerkammervolumen	$V$	$2,1916 \times 10^{-6}$	$\text{m}^2$
Abstand Düse/Prallplatte (in Mittelstellung)	$x_N$	$6,5332 \times 10^{-5}$	m
Maximaler Ventilschieberweg	$y_{S,max}$	$4,2672 \times 10^{-4}$	m

Tabelle A6-2: Identifizierte Parameter des nichtlinearen Modells für die Ventildynamik nach [Ker21]

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Eigenfrequenz	$f_V$	350	Hz
Dämpfungswert	$D_V$	0,5	-
Verstärkungsfaktor	$K_V$	0,1	-

Tabelle A6-3: Parameter des Verzögerungsglieds zweiter Ordnung für die Ventildynamik

Wird das PT2-Glied (3.15) aus Abschnitt 3.1.3 zudem mit empirisch erhobenen Beschränkungen ausgestattet, um seinen Detaillierungsgrad zu erhöhen, so lauten diese für die Beschleunigung  $\ddot{y}_S \leq 71,6280 \text{ m/s}^2$  und für die Geschwindigkeit  $\dot{y}_S \leq 0,0965 \text{ m s}^{-1}$ .

### A6.3 Pendel

Das physikalische Pendel ist ein nichtlineares Anwendungsbeispiel in der Regelungstechnik, welches üblicherweise zur Illustration verschiedener Regelstrategien genutzt wird. Im Abschnitt 3.2.2 wird das Modell des Pendels (3.18) verwendet, um den Einfluss der Parametrierung eines SMOs zu veranschaulichen. Dazu können die physikalischen Parameter des Systems aus der Tabelle A6-4 abgelesen werden.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse des Pendels	$m$	1,10	kg
Gravitationskonstante	$g$	9,81	$\text{m}/\text{s}^2$
Länge des Pendels	$l$	0,90	m
Trägheitsmoment	$J$	0,89	$\text{kg}/\text{m}^2$
Dämpfungskoeffizient	$d$	0,18	–

Tabelle A6-4: Parameter  $\mathbf{p}$  des Pendels

### A6.4 Einfachpendel auf einem Wagen

Das Einfachpendel auf einem Wagen, welches sich im Labor des Lehrstuhls RtM befindet und im Abschnitt 4.5 als veranschaulichendes Beispiel genutzt wird, stellt die Erweiterung des Pendels durch einen Wagen dar. In der Abbildung A6-10 ist ein physikalisches Ersatzbild des Systems zu erkennen. Der Winkel des Pendelarms, die Position des Wagens sowie deren Geschwindigkeiten werden mit  $\mathbf{x} = (\varphi, \dot{\varphi}, y, \dot{y})^T$  als Zustandsgrößen des Systems definiert, wobei der Winkel und die Position gemessen werden können. Der Eingang  $u$  ist die Beschleunigung des Wagens. Anschließend kann das Modell des Einfachpendels auf einem Wagen mit den Parametern  $\mathbf{p} = (m, g, a, J, d)^T$  durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{am \cos(x_1)u + mga \sin(x_1) - dx_2}{J + ma^2} \\ x_4 \\ u \end{pmatrix}, \quad (A6-5)$$

$$\mathbf{y} = (x_1, x_3)$$

formuliert werden. Die Parameter des Modells (A6-5) sind in der Tabelle A6-5 vermerkt. Über eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur werden eine optimale Steuerung für den Aufschwung sowie ein zeitvarianter Riccati-Regler genutzt, um den Pendelarm in die obere Ruhelage zu bewegen und dort zu stabilisieren, vgl. [FKL<sup>+</sup>22; Trä24; TKOT11].

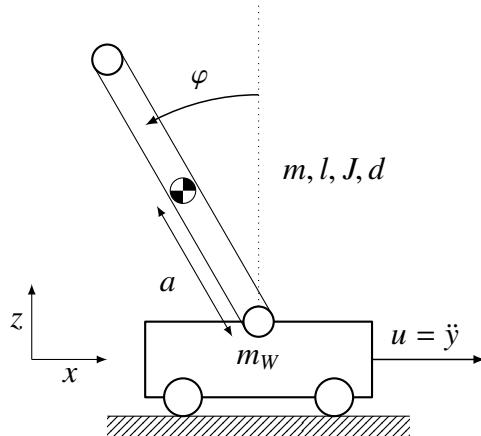


Abbildung A6-10: Physikalische Skizze des Einfachpendels auf einem Wagen [Trä24]

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse	$m$	0,654	kg
Gravitationskonstante	$g$	9,810	$m/s^2$
Länge des Pendelarms	$a$	0,250	m
Trägheitsmoment	$J$	0,010	$kg/m/s^2$
Dämpfungskonstante	$d$	0,001	Nms

Tabelle A6-5: Parameter  $p$  des Einfachpendels auf einem Wagen [Trä24]

## A6.5 Windenergieanlage nach Ritter und Schmitt

Das im Abschnitt 4.3.3 verwendete Beispiel der Windenergieanlage stammt aus [SR20; Rit20]. Die an dieser Stelle gegebenen Details entstammen folglich diesen Quellen. Die Koeffizienten zur Beschreibung des Moments bzw. des Schubs können somit folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} C_M(\lambda) &= c_{m,2}\lambda^2 + c_{m,1}\lambda + c_{m,0}, \\ C_T(\lambda) &= c_{t,2}\lambda^2 + c_{t,1}\lambda + c_{t,0}, \end{aligned} \quad (\text{A6-6})$$

wobei das Verhältnis aus Geschwindigkeit und Drehzahl  $\lambda$  in Abhängigkeit der Zustände und der Windgeschwindigkeit durch

$$\lambda = \frac{x_2 R}{z - x_4} \quad (\text{A6-7})$$

definiert ist. Die verwendeten Parameter der obigen Gleichung sowie des Modells (4.19) sind in der nachfolgenden Tabelle A6-6 zusammengefasst. In den Abbildungen A6-11 bis A6-13 sind zudem Ergebnisse der Zustandsschätzung dargestellt, wenn der augmentierte Beobachter nach Abschnitt 4.4 genutzt wird und der Parameter  $\tau_0$ , welcher die globale Eigenschaft der Dünnbesetztheit beschreibt, zu klein gewählt worden ist. Dies lässt

sich daran erkennen, dass die Zustände bis auf das bekannte Offset aus Abschnitt 4.3 korrekt geschätzt bzw. angenähert werden, aber die Schätzung der Windgeschwindigkeit aufgrund der zu dünnbesetzt modellierten Parameter der Linearkombination nicht zufriedenstellend ist.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Luftdichte	$\rho$	1,225	$\text{kg/m}^3$
Eigenfrequenz der Gondel	$\omega_0$	2,1	Hz
Masse des Turmkopfes	$m_T$	$450 \times 10^3$	kg
Rotorradius	$R$	63	m
Dämpfungskoeffizient	$D$	0,01	–
Umsetzungsverhältnis	$i_{gb}$	97	–
Trägheitsmoment	$\Theta$	$4,05 \times 10^7$	$\text{kg m}^2$
Reglerverstärkung	$k_p$	$23,8 \times 10^{-3}$	$\text{N m/rpm}^2$
Koeffizient	$c_{m,0}$	$10 \times 10^{-2}$	–
Koeffizient	$c_{m,1}$	$-17 \times 10^{-4}$	–
Koeffizient	$c_{m,2}$	$-40 \times 10^{-5}$	–
Koeffizient	$c_{t,0}$	$-16 \times 10^{-2}$	–
Koeffizient	$c_{t,1}$	$18 \times 10^{-2}$	–
Koeffizient	$c_{t,2}$	$-77 \times 10^{-4}$	–

Tabelle A6-6: Parameter  $p$  der Windenergieanlage aus [SR20; Rit20]

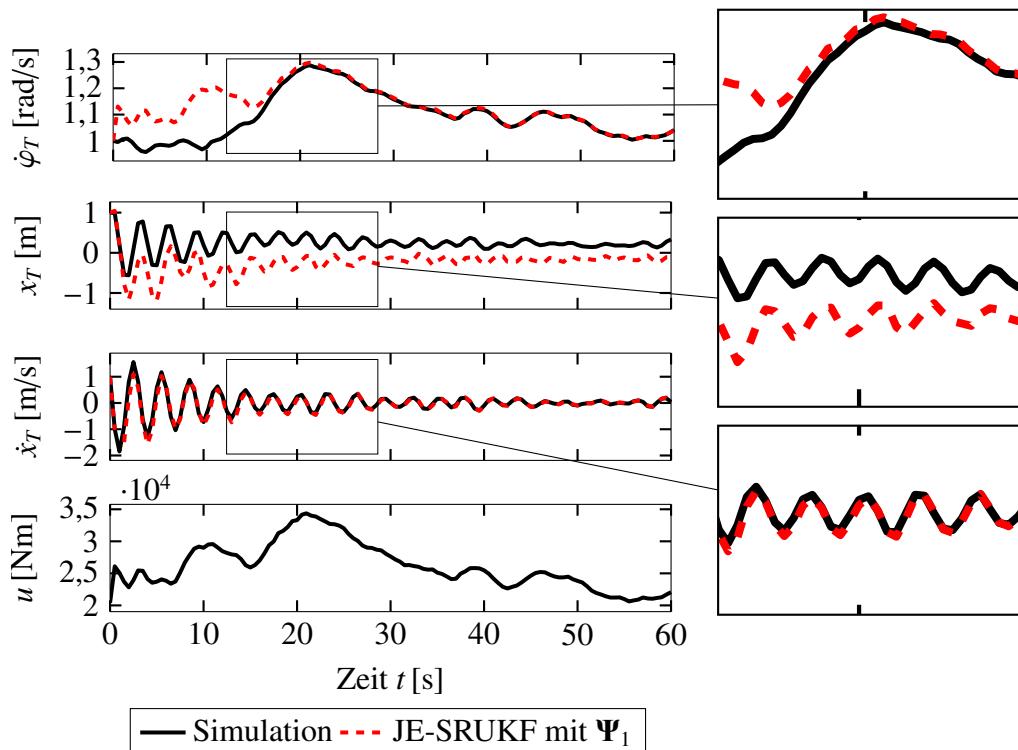


Abbildung A6-11: Qualität der Zustandsschätzung bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1$  und des augmentierten Beobachters nach Abschnitt 4.4

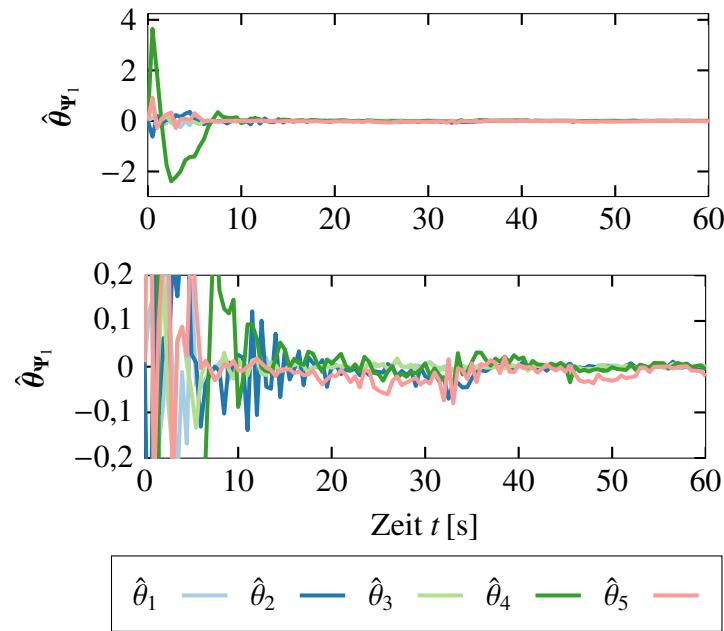


Abbildung A6-12: Zeitlicher Verlauf der Parameter  $\hat{\theta}$  (oben), Vergrößerung (unten), bei Verwendung der Bibliothek  $\Psi_1(x, u, t) = (1, \cos(20 \cdot t), 0,001 \cdot t, x_1, x_3)^T$

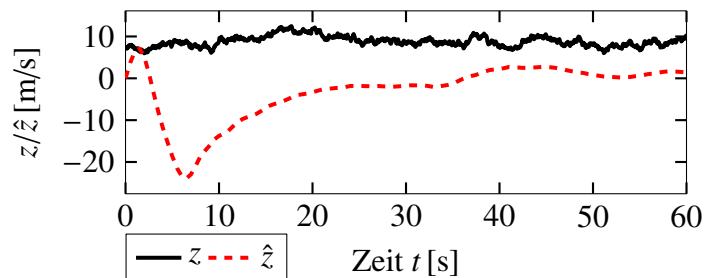


Abbildung A6-13: Approximation  $\hat{z}$  im Vergleich zur gemessenen Windgeschwindigkeit  $z$





## **Das Heinz Nixdorf Institut – Interdisziplinäres Forschungszentrum für Informatik und Technik**

Das Heinz Nixdorf Institut ist ein Forschungszentrum der Universität Paderborn. Es entstand 1987 aus der Initiative und mit Förderung von Heinz Nixdorf. Damit wollte er Ingenieurwissenschaften und Informatik zusammenführen, um wesentliche Impulse für neue Produkte und Dienstleistungen zu erzeugen. Dies schließt auch die Wechselwirkungen mit dem gesellschaftlichen Umfeld ein.

Die Forschungsarbeit orientiert sich an dem Programm „Dynamik, Vernetzung, Autonomie: Neue Methoden und Technologien für die intelligenten technischen Systeme von morgen“. In der Lehre engagiert sich das Heinz Nixdorf Institut in Studiengängen der Informatik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaftswissenschaften.

Heute wirken am Heinz Nixdorf Institut acht Professoren/in mit insgesamt 120 Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern. Pro Jahr promovieren hier etwa 15 Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler.

## **Heinz Nixdorf Institute – Interdisciplinary Research Centre for Computer Science and Technology**

The Heinz Nixdorf Institute is a research centre within the University of Paderborn. It was founded in 1987 initiated and supported by Heinz Nixdorf. By doing so he wanted to create a symbiosis of computer science and engineering in order to provide critical impetus for new products and services. This includes interactions with the social environment.

Our research is aligned with the program “Dynamics, Networking, Autonomy: New methods and technologies for intelligent technical systems of tomorrow”. In training and education the Heinz Nixdorf Institute is involved in many programs of study at the University of Paderborn. The superior goal in education and training is to communicate competencies that are critical in tomorrow's economy.

Today eight Professors and 120 researchers work at the Heinz Nixdorf Institute. Per year approximately 15 young researchers receive a doctorate.



## Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- |         |   |         |  |
|---------|---|---------|--|
| Bd. 397 | DREWEL, M.: Systematik zum Einstieg in die Plattformökonomie. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 397, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-16-3   | Bd. 404 | OLMA, S.: Systemtheorie von Hardware-in-the-Loop-Simulationen mit Anwendung auf einem Fahrzeugachsprüfstand mit parallelkinematischem Lastsimulator. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 404, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-23-1                 |
| Bd. 398 | FRANK, M.: Systematik zur Planung des organisationalen Wandels zum Smart Service-Anbieter. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 398, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-17-0  | Bd. 405 | FECHTELPETER, C.: Rahmenwerk zur Gestaltung des Technologietransfers in mittelständisch geprägten Innovationsclustern. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 405, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-24-8                  |
| Bd. 399 | KOLDEWEY, C.: Systematik zur Entwicklung von Smart Service-Strategien im produzierenden Gewerbe. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 399, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-18-7  | Bd. 406 | OLEFF, C.: Proaktives Management von Anforderungsänderungen in der Entwicklung komplexer technischer Systeme. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 406, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-25-5  |
| Bd. 400 | GAUSEMEIER, J. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 16. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 2. und 3. Dezember 2021, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 400, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-19-4 | Bd. 407 | JAVED, A. R.: Mixed-Signal Baseband Circuit Design for High Data Rate Wireless Communication in Bulk CMOS and SiGe BiCMOS Technologies. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 407, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-26-2 |
| Bd. 401 | BREITZ, L.: Rahmenwerk zur Planung und Einführung von Systems Engineering und Model-Based Systems Engineering. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 401, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-20-0                     | Bd. 408 | DUMITRESCU, R., KOLDEWEY, C.: Daten gestützte Projektplanung. Fachbuch. Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 408, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-27-9   |
| Bd. 402 | WU, L.: Ultrabreitbandige Sampler in SiGe-BiCMOS-Technologie für Analog-Digital-Wandler mit zeitversetzter Abtastung. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 402, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-21-7              | Bd. 409 | PÖHLER, A.: Automatisierte dezentrale Produktionssteuerung für cyber physische Produktionssysteme mit digitaler Repräsentation der Beschäftigten. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 409, Paderborn, 2022 – ISBN 978-3-947647-28-6                    |
| Bd. 403 | HILLEBRAND, M.: Entwicklungssystematik zur Integration von Eigenschaften der Selbstheilung in Intelligente Technische Systeme. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 403, Paderborn, 2021 – ISBN 978-3-947647-22-4     |         |  |

---

Bezugsadresse:  
Heinz Nixdorf Institut  
Universität Paderborn  
Fürstenallee 11  
33102 Paderborn

## Zuletzt erschienene Bände der Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts

- Bd. 410 RÜDDENKLAU, N.: Hardware-in-the-Loop-Simulation von HD-Scheinwerfer-Steuergären zur Entwicklung von Lichtfunktionen in virtuellen Nachtfahrten. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 410, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-29-3
- Bd. 411 BIEMELT, P.: Entwurf und Analyse modellprädiktiver Regelungsansätze zur Steigerung des Immersionsempfindens in interaktiven Fahrsimulationen. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 411, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-30-9
- Bd. 412 HAAKE, C.-J., MEYER AUF DER HEIDE, F., PLATZNER, M., WACHSMUTH, H., WEHRHEIM, H. (Eds.): On-The-Fly Computing - Individualized IT-Services in dynamic markets, Collaborative Research Centre 901 (2011 - 2023), Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 412, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-31-6
- Bd. 413 DUMITRESCU, R.; HÖLZLE, K. (Hrsg.): Vorausschau und Technologieplanung. 17. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung, Heinz Nixdorf Institut, 14./15. September 2023, Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 413, Paderborn, 2023 – ISBN 978-3-947647-32-3
- Bd. 414 ABUGHANNAM, S.: Low-power Direct-detection Wake-up Receiver at 2.44 GHz for Wireless Sensor Networks. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 414, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-33-0
- Bd. 415 REINHOLD, J.: Systematik zur musterbasierten Transformation von Wertschöpfungssystemen für Smart Services. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 415, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-34-7
- Bd. 416 YANG, X.: Eine Methode zur Unterstützung von Entscheidungen bei der Entwicklung modularer Leichtbauprodukte. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 416, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-35-4
- Bd. 417 GRÄLER, M.: Entwicklung adaptiver Einrichtassistentensysteme für Produktionsprozesse. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 417, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-36-1
- Bd. 418 RÖSMANN, D.: Menschenzentrierte Montageplanung und -steuerung durch fähigkeitsorientierte Aufgabenzuordnung. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 418, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-37-8
- Bd. 419 BAHMANIAN, M.: Optoelectronic Phase-Locked Loop, Theory and Implementation. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 419, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-38-5
- Bd. 420 HEIHOFF-SCHWEDE, J.: Spezifikationstechnik zur Analyse, Gestaltung und Bewertung von Engineering-IT-Architekturen. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 420, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-39-2
- Bd. 421 MEYER, M.: Systematik zur Planung und Verwertung von Betriebsdaten-Analysen in der strategischen Produktplanung. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 421, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-40-8
- Bd. 422 MALENA, K.: Konzipierung, Analyse und Realumsetzung eines mehrstufigen modellprädiktiven Lichtsignalanlagenregelungssystems. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Paderborn, Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 422, Paderborn, 2024 – ISBN 978-3-947647-41-5

---

Bezugsadresse:  
Heinz Nixdorf Institut  
Universität Paderborn  
Fürstenallee 11  
33102 Paderborn



Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines modellbasierten Beobachters für eingangsaffine, nichtlineare Systeme, der trotz Modellgenauigkeiten eine hohe Schätzgüte erzielt und zusätzlich eine parametrische, physikalisch interpretierbare Darstellung dieser ermöglicht. Diese soll zur automatisierten Verbesserung des Modells verwendet werden. Die vorliegende Arbeit analysiert sowohl Techniken der hybriden Systemidentifikation wie physikalisch motivierte neuronale Netze, als auch Methoden zur Kompensation von Modellgenauigkeiten im Beobachterentwurf. Basierend auf der Analyse wird ein neuartiger, modellbasierter Beobachter entworfen, der Systemzustände und Modellgenauigkeiten gleichzeitig schätzt und insbesondere eine parametrische, physikalisch interpretierbare Darstellung der Ungenauigkeiten erzielt. Diese besteht aus einer Linearkombination von physikalisch interpretierbaren Funktionen, deren dazugehörige, dünnbesetzt modellierte Parameter mithilfe eines augmentierten Zustands parallel zu den Systemzuständen geschätzt werden. Das Novum dieser Arbeit stellt somit die echtzeitfähige Schätzung von Zuständen und Modellgenauigkeiten in physikalisch-technischer Form dar, auf deren Grundlage ein Konzept zur automatisierten Modelladaption umgesetzt wird. Die Applikation der neuartigen Methode ist in der Situation auftretender Systemveränderungen besonders vorteilhaft, da diese zur Laufzeit durch den augmentierten Beobachter geschätzt und identifiziert werden können.