



UNIVERSITÄT
PADERBORN

FAKULTÄT FÜR
ELEKTROTECHNIK,
INFORMATIK UND
MATHEMATIK

**Wellenleiterbasiertes inverses Verfahren zur
Bestimmung elastischer und viskoelastischer
Materialparameter plattenförmiger
Polymer-Proben**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
der Universität Paderborn
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Sarah Johannesmann, M.Sc.

Erster Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. Stefan J. Rupitsch

Tag der mündlichen Prüfung: 07.10.2024

Paderborn, Dezember 2024

Diss. EIM-E/385

Alles Wissen und alle Vermehrung unseres Wissens endet nicht mit einem Schlusspunkt, sondern mit Fragezeichen.

Hermann Hesse

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachgebiet Elektrische Messtechnik an der Universität Paderborn. Da viele Menschen auf unterschiedliche Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich mich hier bei ihnen bedanken. Zunächst geht mein Dank an Prof. Henning, der mir diese Arbeit erst ermöglicht und mich selbstständig und eigenverantwortlich daran arbeiten lassen hat. Auch für seine Kritik zur Strukturierung und Formulierung bin ich dankbar. Für die Erstellung des Zweitgutachtens bedanke ich mich bei Prof. Dr. Stefan J. Rupitsch.

Mein ganz besonderer Dank gilt allen Mitarbeitern (und auch den inzwischen ehemaligen Mitarbeitern) des Fachgebiets Elektrische Messtechnik für die herausragende Arbeitsatmosphäre. Ihr habt mich sowohl durch wertvolle fachliche Diskussionen als auch durch eure Freundschaft bereichert. Insbesondere genannt sei hier Nadine Feldmann, die mich bereits seit Beginn meines Studiums begleitete, Leander Claes, der zu jedem Problem eine Idee hat, Henning Zeipert für den Bau immer besserer Schallwandler sowie Dmitrij Dreiling für die Bereitstellung der Referenzmessung.

Weiterhin bedanke ich mich bei Yevgeniya Lugovtsova (ehemals Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung) für die hervorragende Zusammenarbeit, Jens Rautenberg, dessen Vorlesung Technische Akustik ich mit der Übung begleiten durfte, sowie allen Studenten, die mit ihren Arbeiten zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ebenso gilt mein Dank dem *Paderborn Center for Parallel Computing (PC²)*, denn ohne das PC² würde ich noch heute auf die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen warten.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kommilitonen, die mich durch mein gesamtes Studium begleitet haben. Ihr wart mir stets ein verlässliches Team, das sich gegenseitig aufbaut und motiviert, wenn es mal schwierig wurde. Eure Unterstützung und Freundschaft haben diese Jahre geprägt.

Ein großer Dank gilt auch meiner Familie, die mich wie ein ruhiges Echo immer begleitet hat. Insbesondere mein mittlerweile verstorbener Vater hat mir stets den Mut zugesprochen neue Dinge zu lernen, um damit in der

Vorwort

Lage zu sein jede Herausforderung meistern zu können. Besonders danken möchte ich meinem Partner Andreas, der mir während dieser Zeit zur Seite stand und mich daran erinnerte, dass es neben der Arbeit noch andere Seiten des Lebens gibt.

Ohne die Unterstützung dieser Menschen, die mich auf diesen langen Weg begleitet haben, wäre diese Arbeit niemals in dieser jetzigen Form entstanden.

Kurzfassung

Der computergestützte Entwurf akustischer Sensoren setzt realitätsnahe akustische Materialmodelle sowie die Kenntnis bzw. die Identifikation der Materialparameter dieser Modelle im entsprechenden Frequenzbereich voraus. Zunehmend finden für den Aufbau von Ultraschallsensoren auch Kunststoffe Anwendung, z.B. als Anpassschicht oder für das Gehäuse. Da es bisher kein standardisiertes Messverfahren gibt, ergibt sich eine unsichere Datenlage mit unvollständigen Datensätzen der Materialparameter. Daher ist es erforderlich ein Messverfahren zu entwickeln, das auf der Grundlage realistischer Materialmodelle geeignet ist, die betreffenden Materialparameter zu bestimmen. Neben der Identifikation ideal-elastischer Materialmodelle, ist insbesondere bei Polymeren die Schallabsorption mit zu bestimmen, da diese Materialien eine nicht mehr vernachlässigbare Dämpfung der sich ausbreitenden Schallwellen aufweisen. Um die Schallabsorption charakterisieren zu können, werden viskoelastische Materialmodelle benötigt. Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines wellenleiterbasierten Messverfahrens und die Realisierung eines Messsystems zur Bestimmung vollständiger, konsistenter Materialparametersätze für plattenförmige, homogene Kunststoffproben auf Basis eines inversen Verfahrens.

Abstract

The computer-aided design of acoustic sensors requires realistic acoustic material models as well as the knowledge or identification of the material parameters of these models in the corresponding frequency range. Plastics are increasingly being used in the construction of ultrasonic sensors, e.g. as a matching layer or for the housing. Since there is currently no standardized measurement method, there is an uncertain data situation with incomplete data sets of the material parameters. Therefore, it is necessary to develop a measurement method which is suitable for determining the relevant material parameters based on realistic material models. In addition to identifying ideally elastic material models, sound absorption must also be determined, especially in the case of polymers, since these materials do not have a negligible attenuation of the propagating sound waves anymore. In order to characterize sound absorption, viscoelastic material models are required. The subject of this work is the development of a waveguide-based measurement method and the realization of a measurement system for determining complete, consistent material parameter sets for plate-shaped, homogeneous plastic samples based on an inverse method.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Kurzfassung	v
Abstract	vii
Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole	xxi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Problemstellung	1
2 Akustische Wellen in Festkörpern	3
2.1 Grundbegriffe der Festkörpermechanik	3
2.1.1 Verzerrungstensor	3
2.1.2 Spannungstensor	4
2.1.3 Übergang zur Voigtschen Notation	4
2.1.4 Ebener Verzerrungszustand	5
2.2 Materialverhalten	6
2.2.1 Ideal-elastisches Materialverhalten	6
2.2.2 Viskoelastisches Materialverhalten	9
2.2.3 Makromechanische Dämpfungsmodelle	10
2.3 Akustische Plattenwellenleiter	14
2.4 Finite-Elemente-Methode	17
2.4.1 Herleitung der Integralgleichung	20
2.4.2 Rayleigh-Dämpfungsmodell in der FEM	22
3 Stand des Wissens	25
3.1 Inverses Problem	25
3.2 Messverfahren zur akustischen Materialparameterbestimmung	27
3.2.1 Mechanische Messverfahren	27
3.2.2 Ultraschallbasierte Messverfahren	28

Inhaltsverzeichnis

3.3	Dämpfungsmodelle	31
3.3.1	Das fraktionale Zener-Modell zur Modellierung von Polymeren	32
3.3.2	Fraktionales Zener-Modell für Kompressions- und Scherbewegungen	37
3.4	Wellenleitersimulationsverfahren	40
4	Inverses Verfahren zur Identifikation elastischer Materialparameter	45
4.1	Lösungsansatz	45
4.2	Vorwärtsmodell	47
4.2.1	Vereinfachung für isotrope Werkstoffe	50
4.2.2	Validierung des Vorwärtsmodells	50
4.2.3	Konvergenz	52
4.3	Funktionalität und Aufbau des Messsystems	54
4.3.1	Laser	55
4.3.2	Ultraschallwandler	56
4.4	Experimentelle Vorgehensweise	59
4.5	Validierung von Dispersionsabbildungen an FEM-Simulation	62
4.6	Signalvorverarbeitung	64
4.7	Reproduzierbarkeit der Messung	71
4.8	Sensitivität der Schallgeschwindigkeiten	74
4.9	Startwerte	78
4.9.1	Startwertbestimmung im Zeit-Ortsbereich	78
4.9.2	Startwertbestimmung im Frequenz-Wellenzahlbereich	79
4.9.3	Vergleich der Startwertbestimmung	80
4.10	Zielfunktion	81
4.10.1	Mittelwert der Bildpunkte	81
4.10.2	Kreuzkorrelationskoeffizient	83
4.10.3	Vergleich der Zielfunktionen	85
4.11	Optimierung	85
4.12	Unsicherheitsbetrachtung	86
4.12.1	Modellierung der Unsicherheitsbeiträge	86
4.12.2	Messunsicherheiten der Schallgeschwindigkeiten durch Monte-Carlo-Simulation	89
4.13	Ergebnisse	91
4.13.1	Aluminium	94
4.13.2	PEEK	95
4.13.3	PA6	96
4.13.4	PET	97

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter	97
4.14.1 Vereinfachung für orthotrope Werkstoffe	103
4.14.2 Auswertung am Beispiel faserverstärkter Kunststoffe	104
5 Inverses Verfahren zur Identifikation viskoelastischer Materialparameter	115
5.1 Berücksichtigung von Dämpfung im Vorwärtsmodell	116
5.2 Konvergenz unter Berücksichtigung von Dämpfung	117
5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten	121
5.3.1 Validierung an FEM-Simulationen	125
5.3.2 Reproduzierbarkeit der Dämpfungsmessung	129
5.4 Parameterstudie viskoelastischer Materialparameter	131
5.5 Startwerte für Dämpfungsparameter	140
5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien	145
5.6.1 Aspekte der Optimierung	145
5.6.2 Beschreibung der Optimierungsstrategien	148
5.6.3 Vergleich der Optimierungsergebnisse	164
5.7 Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse im Transmissionsmessverfahren	167
5.8 Anwendung des Verfahrens auf Polyamid 6	171
6 Zusammenfassung und Ausblick	177
6.1 Zusammenfassung	177
6.2 Ausblick	178
Literaturverzeichnis	181
A Anhang	203
A.1 Ebener Spannungszustand	203
A.2 Herleitung der Rayleigh-Lamb-Gleichung	203
A.3 Ergänzende Abbildungen	207
A.3.1 Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 4.12	207
A.3.2 Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 5.4	211

Abbildungsverzeichnis

2.1	Elementare Modelle der Makromechanik: Hook, Newton, Maxwell, Kelvin-Voigt	11
2.2	Zener-Modell	11
2.3	Relaxation und Retardation bzw. Kriechen eines viskoelastischen Werkstoffs (Zener-Modell) bei sprungförmiger Belastung, nach [GS15]	12
2.4	Querschnitt eines Plattenwellenleiter	15
2.5	Symmetrisch und asymmetrisch schwingende Lamb-Moden nach [DPV97]	16
2.6	Kreisfrequenzen und Kreiswellenzahlen symmetrischer und asymmetrischer Moden einer 1 mm dicken PTFE-Platte . .	17
2.7	Lineare und quadratische eindimensionale Ansatzfunktionen	18
2.8	2D-Dreieckselement nach [Ste98]	19
3.1	Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation des Parameters d	34
3.2	Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation von a	35
3.3	Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation von τ_σ	35
3.4	Verlustfaktor bei Variation der Modellparameter	36
4.1	Konzept des inversen Messverfahrens	47
4.2	Modell eines Plattenwellenleiters	48
4.3	Vergleich der berechneten Kreisfrequenzen mit Disperse [LP13]	51
4.4	Konvergenz am Beispiel einer 5,45 mm-dicken PEEK-Platte, Polynomordnung 2	53
4.5	Dispersionsdiagramm einer 5,45 mm-dicken PEEK-Platte mit 123 Knoten und unterschiedlicher Polynomordnung .	53
4.6	Messsystem nach [CMB16]	56
4.7	Schematischer Aufbau des piezoelektrischen Empfangswandlers [JCF22; CMB16]	57

Abbildungsverzeichnis

4.8	Übertragungsverhalten des Schallwandlers	58
4.9	Vorgehensweise beim Messvorgang	60
4.10	Zeit- und ortsabhängige Signalmatrix	61
4.11	2D-Fourier-Transformation der Messsignalmatrix (PEEK) .	62
4.12	Dispersionsabbildung aus den Rohsignalen der <i>In-plane</i> -Auslenkungen	63
4.13	Unverarbeitete Dispersionsabbildung	64
4.14	Dispersionsabbildung ohne und mit Fensterung jedoch mit Anwendung einer Gamma-Korrektur	66
4.15	Dispersionsabbildung nach Entfernung der Spaltenmittelwerte	69
4.16	Dispersionsabbildung nach spaltenweiser Normierung . . .	70
4.17	Dispersionsabbildung nach allen Vorverarbeitungsschritten [JCH21]	71
4.18	Vergleich der sich ausbreitenden Moden an drei Messungen an PEEK mit RGB-Codierung	73
4.19	Dispersionsdiagramm bei Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit am Beispiel einer PEEK-Platte	76
4.20	Dispersionsdiagramm bei Änderung der Transversalwellengeschwindigkeit am Beispiel einer PEEK-Platte	76
4.21	Sensitivität der Kreisfrequenzen der zehn Moden niedrigster Ordnung von der Longitudinalwellengeschwindigkeit	77
4.22	Sensitivität der Kreisfrequenzen der zehn Moden niedrigster Ordnung von der Transversalwellengeschwindigkeit	77
4.23	Schätzung der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Zeit-Ortsbereich	79
4.24	Schätzung der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Frequenz-Wellenzahl-Bereich	80
4.25	Mittelwert der Matrixwerte (Dispersionsabbildung) als Kostenfunktion in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten .	82
4.26	Mittelwert der Matrixwerte (Dispersionsabbildung) als Kostenfunktion in Abhängigkeit von Kompressions- und Schermodul	83
4.27	Kreuzkorrelationskoeffizient in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten am Beispiel einer Messung an einer PEEK-Platte	84
4.28	Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit (PEEK)	90
4.29	Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit (PEEK)	90

4.30	Dispersionsabbildung einer Aluminium-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm	92
4.31	Dispersionsabbildung einer PEEK-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm	92
4.32	Dispersionsabbildung einer PA6-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm	93
4.33	Dispersionsabbildung einer PET-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm	93
4.34	Rotation der Probe	98
4.35	Vergleich zweier typischer Webmuster [Ehr06; JDW18] . .	105
4.36	Dispersionsabbildungen und berechnetes Dispersiondiagramm der Probe mit Leinwandbindung (50:50) bei einem Drehwinkel von 45°	106
4.37	Dispersionsabbildungen und berechnetes Dispersiondiagramm der Proben mit Körperbindung bei einem Drehwinkel von 45° .	106
4.38	Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten der Leinwandbindung (Faserverteilung 50:50)	108
4.39	Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten der Körperbindung (Faserverteilung 50:50)	109
4.40	Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten der Körperbindung (Faserverteilung 80:50)	110
4.41	Berechnete Elastizitätskoeffizienten C_{44} und C_{23}	111
5.1	Konvergenz der Kreiswellenzahl mit Polynomordnung 1 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter	118
5.2	Konvergenz der Dämpfung mit Polynomordnung 1 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter	119
5.3	Konvergenz der Kreiswellenzahl mit Polynomordnung 2 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter	119
5.4	Konvergenz der Dämpfung mit Polynomordnung 2 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter	120
5.5	Schematische Darstellung der Aufteilung der Messdaten entlang der Propagationsstrecke nach [JCH21]	122
5.6	Approximierte Werte α für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar	123

Abbildungsverzeichnis

5.7	Approximierte Werte α für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar mit Rechteck-Filterung um die ausbreitungsfähigen Moden	124
5.8	Dispersionsabbildungen der jeweiligen Abschnitte nach Abbildung 5.5 bei verschiedenen mittleren Anregungspositionen y_{m_i}	126
5.9	Aus transienter FEM-Simulation bestimmte Dämpfung α	127
5.10	Zugehörige Frequenz-Wellenzahl-Paare berechnet mit der SAFE-Methode	127
5.11	Dispersionsabbildung und extrahierte Modenpunkte	128
5.12	Dämpfung an den in Abbildung 5.11 extrahierte Modenpunkte und den mittels SAFE berechneten Imaginärteilen der Kreiswellenzahl	128
5.13	Reproduzierbarkeit der modalen Dämpfung dreier Messungen an PEEK	130
5.14	Imaginärteil der Kreiswellenzahl bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Verhältnisse der Zeitkonstanten	135
5.15	Imaginärteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten und Ableitungsordnungen	136
5.16	Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Zeitkonstanten-Verhältnisse	137
5.17	Verhältnis von Imaginär- zu Realteil der Kreiswellenzahlen bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Zeitkonstanten-Verhältnisse	138
5.18	Verhältnis Imaginärteil/Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten und Ableitungsordnungen	139
5.19	Detektierte Moden aus der Messung sowie deren Dämpfung	143
5.20	Berechnete Dämpfung unter Verwendung der optimalen Materialparameter nach Tabelle 5.6 im Vergleich zur Dämpfung aus der Messung	150
5.21	Berechneter Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der bestimmten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.6	150
5.22	Konvergenz der Materialparameter bei schrittweiser Optimierung der einzelnen Parameter	152
5.23	Dämpfung aus Messung, Simulation unter Verwendung der Startwerte und unter Verwendung der bestimmten Parameter im ersten Iterationsschritt nach Tabelle 5.8	154

5.24 Dämpfung nach Optimierung der Scherparameter, Kostenfunktion nach Gleichung 5.18 im Vergleich zum vorherigen Optimierungsschritt und der Dämpfung aus der Messung	155
5.25 Dämpfung nach Optimierung von $\tau_{\sigma K}$ und a_K , Kostenfunktion nach Gleichung 5.18	156
5.26 Dämpfung unter Nutzung der identifizierten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.8	157
5.27 Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der bestimmten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.8	158
5.28 Konvergenz der Dämpfungsparameter während Optimierungsverfahren 2	159
5.29 Dämpfung unter Nutzung der resultierenden Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.10	161
5.30 Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der resultierenden Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.10	162
5.31 Konvergenz des zweiten und dritten Optimierungsschritts. Die Konvergenz des ersten Optimierungsschritts ist Abbildung 5.28a zu entnehmen.	163
5.32 Frequenzabhängige Schallgeschwindigkeit und Absorption unter Annahme der Optimierungsergebnisse von PEEK . .	165
5.33 Aufbau des Transmissionsmessplatzes [Bau16]	168
5.34 Blockschaltbild des Messsystems	168
5.35 Normiertes Sendesignal	169
5.36 Mess- und Simulationssignale unter Annahme der identifizierten viskoelastischen Materialparameter	170
5.37 Dämpfung aus der Messung an PA6 und der Dämpfung berechnet unter Verwendung der identifizierten Materialparameter	172
5.38 Dispersionsabbildung der Messung an PA6, daraus extrahierte Moden und Dispersionsdiagramm berechnet unter Verwendung der identifizierten Materialparameter	172
5.39 Frequenzabhängige Schallgeschwindigkeit und Absorption unter Annahme des Optimierungsergebnisses von PA6 . . .	174
A.1 Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von PA6	208
A.2 Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von PA6	208

Abbildungsverzeichnis

A.3	Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von PET	209
A.4	Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von PET	209
A.5	Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von Aluminium	210
A.6	Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von Aluminium	210
A.7	Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten sowie der Ableitungsordnungen	212

Tabellenverzeichnis

3.1 Segmente des Dispersionsverhaltens des fraktionalen Zener-Modells nach [HN11]	34
4.1 Identifizierte effektive Schallgeschwindigkeiten	94
4.2 Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von Aluminium mit ausgewählten Literaturangaben	95
4.3 Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PEEK mit ausgewählten Literaturangaben	95
4.4 Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PA6 mit ausgewählten Literaturangaben	97
4.5 Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PET mit ausgewählten Literaturangaben	97
4.6 Identifizierte Elastizitätskoeffizienten [JWD19]	111
5.1 Arbeitspunkt der Konvergenzuntersuchung unter Annahme eines fraktionalen Zener-Modells	118
5.2 In der FEM-Simulation (CFS++) angenommene viskoelastische Materialparameter	125
5.3 Materialparameter im verwendeten Arbeitspunkt	131
5.4 Auswirkungen bei Erhöhung der Parameter auf die komplexen Kreiswellenzahlen	133
5.5 Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen und Moden bei Verfahren 1	149
5.6 Identifizierte viskoelastische Materialparameter nach schrittweiser Optimierung aller Parameter (Verfahren 1)	151
5.7 Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen bei Verfahren 2	153
5.8 Mittels Verfahren 2 identifizierte viskoelastische Materialparameter	157
5.9 Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen und Moden bei Verfahren 3	160
5.10 Mittels Verfahren 3 identifizierte viskoelastische Materialparameter	161

Tabellenverzeichnis

5.11 Zusammenfassung der identifizierten viskoelastischen Materialparameter	164
5.12 Zusammenfassung der identifizierten viskoelastischen Materialparameter für PA6	173

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
BOBYQA	<i>Bound optimization by quadratic approximation</i>
COBYLA	<i>Constrained optimization by linear approximation</i>
DMA	Dynamisch-Mechanische-Analyse
el	Element
FT	Fourier-Transformation
FEM	Finite-Elemente-Methode
PA6	Polyamid 6
PEEK	Polyetheretherketon
PET	Polyethylenterephthalat
PTFE	Polytetrafluorethylen
SAFE	Semi-analytische Finite-Elemente-Methode
SBFEM	Scaled Boundary Finite-Elemente-Methode
SNR	Signal-zu-Rausch-Verhältnis (<i>signal-to-noise ratio</i>)
2D	Zweidimensional

Mathematische Symbole und Konventionen

Symbol	Bedeutung
argmin	Argument zur Minimierung des Ausdrucks
$\cos(x)$	Kosinus von x
j	Imaginäre Einheit
\lim	Grenzwert
$\operatorname{Re}\{x\}$	Realteil der komplexen Größe x

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Symbol	Bedeutung
$\text{Im}\{x\}$	Imaginärteil der komplexen Zahl x
$\sin(x)$	Sinus von x
$\tan(x)$	Tangens von x
\mathbf{x}	Matrix
$[\mathbf{x}]$	Tensor
\mathbf{x}^H	Hermite Matrix
\mathbf{x}^T	Transponierte Matrix
\mathbf{x}^{-1}	Inverse Matrix
\mathbf{x}^+	Moore-Penrose-Pseudoinverse
\bar{x}	Stichprobenmittelwert
x_{ij}	Element in Zeile i , Spalte j der Matrix \mathbf{x}
$\#x$	Anzahl von x
\dot{x}, \ddot{x}	Erste bzw. zweite zeitliche Ableitung von x
$\nabla \cdot (\mathbf{x}), \text{div}(\mathbf{x})$	Divergenz eines Vektorfeldes
$\nabla(x), \text{grad}(x)$	Gradient eines Skalarfeldes
$\nabla \times x, \text{rot}(x)$	Rotation eines Vektorfeldes
Δ	Laplace-Operator
\in	Ist Element aus
Π	Produkt
Σ	Summe

Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

Zeichen	Einheit	Bedeutung
a		Fraktionale Ableitungsordnung
a_K		Fraktionale Ableitungsordnung der Kompressionskomponenten
a_μ		Fraktionale Ableitungsordnung der Scherkomponenten
\mathbf{A}	kg s^{-2}	Matrix zum Lösen des SAFE-Eigenwertproblems
A_L	m^2	Amplitude des Sinusanteils des Skalarpotentials

Zeichen	Einheit	Bedeutung
A_T	m^2	Amplitude des Sinusanteils des Vektorpotentials
b		Beobachtungen/Wirkungen
$b_{0,\text{Mes}}$		Unverarbeitete Messdaten (Beobachtung)
b_{Mes}		Verarbeitete Messdaten (Beobachtung)
b_{Sim}		Modellausgang/Simulationsdaten
B	kg m s^{-2}	Matrix zum Lösen des SAFE-Eigenwertproblems
\mathcal{B}	m^{-1}	Räumliche Differentialoperatormatrix in der FEM
\mathcal{B}_1	m^{-1}	Räumliche Differentialoperatormatrix orthogonal zur Ausbreitungsrichtung (SAFE)
\mathcal{B}_2		Räumliche Differentialoperatormatrix in Ausbreitungsrichtung (SAFE)
B_L	m^2	Amplitude des Kosinusanteils des Skalarpotentials
B_T	m^2	Amplitude des Kosinusanteils des Vektorpotentials
C	Pa	Elastizitätsmatrix
$[C]$	Pa	Elastizitätstensor
\tilde{C}	Pa	Komplexe Elastizitätsmatrix
\vec{C}	Pa	Vektor der Elastizitätskoeffizienten (Anisotropie)
c	m s^{-1}	Schallgeschwindigkeit
c_0	m s^{-1}	Statische Schallgeschwindigkeit
C_{el}	Pa	Elastizitätsmatrix eines finiten Elements
c_{Gr}	m s^{-1}	Gruppengeschwindigkeit
C_{ij}	Pa	Elastizitätskoeffizient (Element der Elastizitätsmatrix, Zeile i , Spalte j)
c_L	m s^{-1}	Longitudinalwellengeschwindigkeit
c_{L0}	m s^{-1}	Statische Longitudinalwellengeschwindigkeit
$c_{L\infty}$	m s^{-1}	Longitudinalwellengeschwindigkeit für $f \rightarrow \infty$
\tilde{c}_L	m s^{-1}	Komplexe Longitudinalwellengeschwindigkeit

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Zeichen	Einheit	Bedeutung
\vec{C}_{ortho}	Pa	Vektor der Elastizitätskoeffizienten (Orthotropie)
c_{Ph}	m s^{-1}	Phasengeschwindigkeit
$\mathbf{C}_{\text{pl},\sigma}$	Pa	Elastizitätsmatrix für den ebenen Spannungszustand
c_{R}	m s^{-1}	Rayleigh-Wellengeschwindigkeit
\mathbf{C}_{rot}	Pa	Elastizitätsmatrix nach räumlicher Rotation
\vec{c}_{rot}	Pa	Vektor der Elastizitätskoeffizienten (Anisotropie) nach räumlicher Rotation im ebenen Verzerrungszustand
$\vec{c}_{\text{rot,ges}}$	Pa	Vektor zusammengesetzt aus den Einzelvektoren mit Elastizitätskoeffizienten nach räumlicher Rotation unterschiedlicher Winkel θ
$\vec{c}_{\text{rot,ortho}}$	Pa	Vektor der rotierten Elastizitätskoeffizienten (Orthotropie) im ebenen Verzerrungszustand
$\mathbf{C}_{\text{rot,ortho,pl},\varepsilon}$	Pa	Elastizitätsmatrix (orthotrop) nach räumlicher Rotation im ebenen Verzerrungszustand
$\vec{c}_{\text{rot,ortho,ges}}$	Pa	Enthält die Vektoren $\vec{c}_{\text{rot,ortho}}$ für unterschiedliche Winkel θ
$\mathbf{C}_{\text{rot,pl},\varepsilon}$	Pa	Elastizitätsmatrix nach Rotation für den ebenen Verzerrungszustand
c_{T}	m s^{-1}	Transversalwellengeschwindigkeit
\tilde{c}_{T}	m s^{-1}	Komplexe Transversalwellengeschwindigkeit
c_{T_0}	m s^{-1}	Statische Transversalwellengeschwindigkeit
c_{T_∞}	m s^{-1}	Transversalwellengeschwindigkeit für $f \rightarrow \infty$
d		Zeitkonstanten-Verhältnis
d_{K}		Zeitkonstanten-Verhältnis der Kompressionskomponenten
d_{μ}		Zeitkonstanten-Verhältnis der Scherkomponenten
\mathbf{D}	N s m^{-1}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{D}_{el}	N s m^{-1}	Dämpfungsmatrix eines finiten Elements
\mathbf{D}_i		Projektionsmatrix

Zeichen	Einheit	Bedeutung
e		Eulersche Zahl
E	Pa	Elastizitätsmodul
E_1, E_2, E_3	Pa	Richtungsabhängiger Elastizitätsmodul
E_{Z1}, E_{Z2}	Pa	Elastizitätsmodul (Zener-Modell)
E_{ela}	N m	Elastische Dehnungsenergie (potenzielle Energie)
E_{kin}	N m	Kinetische Energie
f	Hz	Frequenz
f_{Ab}	Hz	Abtastfrequenz
f_i	Hz	Resonanzfrequenz der i -ten Resonanzstelle
f_{Ny}	Hz	Nyquistfrequenz
Δf	Hz	Frequenzschrittweite
Δf_i	Hz	Halbwertsbreite der i -ten Resonanzkurve
$g(t)$		Impulsantwort
$g_{EV}(t)$		Impulsantwort des Empfangsverstärkers
$g_{EW}(t)$		Impulsantwort des Empfangsschallwandlers
$g_P(t)$		Impulsantwort der Probe
$g_{SV}(t)$		Impulsantwort des Sendeverstärkers
$g_{SW}(t)$		Impulsantwort des Sendeschallwandlers
$g_{System}(t)$		Impulsantwort des Messsystems
$G(t)$	Pa	Relaxationsmodul
G'	Pa	Speichermodul
G''	Pa	Verlustmodul
$G(\omega)$		Frequenzantwort
$G_+(\omega)$	Pa	Komplexer Modul
$G^F(\omega)$	Pa s	Relaxationsmodul im Frequenzbereich
$h(t)$		Sprungantwort
$J(t)$	Pa^{-1}	Kriechnachgiebigkeit
\mathbf{J}		Jacobi-Matrix
k	m^{-1}	Kreiswellenzahl (in Ausbreitungsrichtung)
\bar{k}	m^{-1}	Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung ($\bar{k} = \text{Re}\{k\}/(2\pi)$)
K	Pa	Kompressionsmodul (statisch)
\mathbf{K}	N m^{-2}	Globale FEM-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_1	N m^{-2}	Globale SAFE-Steifigkeitsmatrix (Beschreibung der Dickenrichtung)

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Zeichen	Einheit	Bedeutung
\mathbf{K}_2	N m^{-1}	Globale SAFE-Steifigkeitsmatrix (Beschreibung der Kopplung zwischen Dicken- und Ausbreitungsrichtung)
\mathbf{K}_3	N	Globale SAFE-Steifigkeitsmatrix (Beschreibung der Ausbreitungsrichtung)
K_∞	Pa	Kompressionsmodul für $\omega \rightarrow \infty$
\mathbf{K}_{el}	N m^{-2}	Lokale FEM-Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements
$\mathbf{K}_{1,\text{el}}$	N m^{-2}	Lokale SAFE-Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements (Beschreibung der Dickenrichtung)
$\mathbf{K}_{2,\text{el}}$	N m^{-1}	Lokale SAFE-Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements (Beschreibung der Kopplung zwischen Dicken- und Ausbreitungsrichtung)
$\mathbf{K}_{3,\text{el}}$	N	Lokale SAFE-Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements (Beschreibung der Ausbreitungsrichtung)
k_L	m^{-1}	Ursprungsgerade im Dispersionsdiagramm ($k_L = \omega/c_L$)
$k_{L,L}, k_{T,L}$	m^{-1}	Kreiswellenzahl in Ausbreitungsrichtung für Longitudinal- bzw. Transversalwellen
k_{Mes}	m^{-1}	Kreiswellenzahl aus Messung
k_{Sim}	m^{-1}	Kreiswellenzahl aus Simulation
L	m	Länge eines finiten Elements
\mathbf{L}	m^{-1}	Örtliche Differentialoperatormatrix
L_{Ab}	m	Abstand zwischen zwei Knoten
l_{Ker}	m	Länge der streifenförmigen Piezokeramik
$\mathbf{L}_{\text{pl},\varepsilon}$	m^{-1}	Örtliche Differentialoperatormatrix für den ebenen Verzerrungszustand (<i>plane strain</i>)
$\mathbf{L}_{\text{pl},\sigma}$	m^{-1}	Örtliche Differentialoperatormatrix für den ebenen Spannungszustand (<i>plane stress</i>)
\mathbf{M}	kg	Globale FEM-Massematrix
\mathbf{M}_{el}	kg	FEM-Massematrix eines finiten Elements
N_i		Zum Knoten i gehörige Ansatzfunktion
\mathbf{N}		Matrix der Ansatzfunktionen
N		Anzahl
n_{disp}		Anzahl der Abschnitte

Zeichen	Einheit	Bedeutung
o		Polynomordnung der Ansatzfunktionen (FEM)
P		Abkürzung (Gleichung 2.17)
\mathbf{p}		Parametervektor
$\mathbf{p}^{(0)}$		Startwertvektor
p_{AP}		Parameter im Arbeitspunkt
$\mathbf{p}^{(i)}$		Parametervektor bei Iteration i
\mathbf{p}_{end}		Parametervektor am Ende der Optimierung
\mathbf{p}_K		Parametervektor der Kompressionsparameter
\mathbf{p}_α		Parametervektor der Dämpfungsparameter
\mathbf{p}_μ		Parametervektor der Kompressionsparameter
\mathbf{Q}		Eigenvektor zum Lösen des SAFE-Eigenwertproblems
$q(\cdot)$		Abbildungsvorschrift
\mathbf{R}_{an}		Rotationsmatrix, beschreibt den Zusammenhang zwischen Elastizitätskoeffizienten nach räumlicher Rotation im ebenen Verzerrungszustand und den ursprünglichen Koeffizienten der 6×6 -Elastizitätsmatrix unter Annahme von Anisotropie
$\mathbf{R}_{\text{an,ges}}$		Enthält die Matrizen \mathbf{R}_{an} für unterschiedliche Winkel θ (Anisotropie)
$\mathbf{R}_{\text{ortho}}$		Rotationsmatrix, beschreibt den Zusammenhang zwischen Elastizitätskoeffizienten im ebenen Verzerrungszustand nach räumlicher Rotation und den ursprünglichen Koeffizienten der 6×6 -Elastizitätsmatrix unter Annahme von Orthotropie
$\mathbf{R}_{\text{ortho,ges}}$		Enthält die Matrizen $\mathbf{R}_{\text{ortho}}$ für unterschiedliche Winkel θ (Orthotropie)
\mathbf{R}_θ		Rotationsmatrix
r		Fensterparameter (Tukey)
\mathbf{S}	$\text{m}^2 \text{ N}^{-1}$	Elastische Nachgiebigkeitsmatrix
$\mathbf{S}_{\text{pl},\sigma}$	$\text{m}^2 \text{ N}^{-1}$	Elastische Nachgiebigkeitsmatrix für den ebenen Spannungszustand

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Zeichen	Einheit	Bedeutung
s_{Gauss}	V	Stichprobenstandardabweichung des additiven Messrauschens
t	s	Zeit
t_h	m	Plattendicke
$t_{h_{\text{Ker}}}$	m	Dicke der Piezokeramik
Δt	s	Zeitschrittweite
u	V	Elektrische Spannung
$u_{\text{in,Mes}}$	V	Elektrische Eingangsspannung des Transmissionsmesssystems (Sendesignal)
$u_{\text{in,Sim}}$	V	Sendesignal in Simulation der Transmissionsmesssystems
$u_{\text{out,Mes}}$	V	Elektrische Ausgangsspannung des Transmissionsmesssystems (Empfangssignal)
$U(\omega, k)$	V s m	Wert der 2D-Fouriertransformation
$U_p(\omega, k)$		Wert der verarbeiteten 2D-Fouriertransformation
\bar{u}_{Gauss}	V	Stichprobenmittelwert der Rauschsignale
V	m^3	Volumen
V_{el}	m^3	Rechengebiet/Volumen eines finiten Elements
\mathbf{v}_i		Eigenvektor i (der Elastizitätsmatrix)
w_{Ker}	m	Breite der streifenförmigen Piezokeramik
w_y	m	Örtliche Breite eines Auswerteintervalls
x_1, x_2, x_3		Koordinaten
x, y, z		Koordinaten
y	m	Ortskoordinate
y_{m_i}	m	Mittlere Position des i -ten Auswerteintervalls
y_m	m	Mittlere Position eines Auswerteintervalls
Z	Ω	Impedanz

Griechische Buchstaben

Zeichen	Einheit	Bedeutung
α	m^{-1}	Dämpfung ($\alpha = -\text{Im}\{k\}$)
α_0		Dämpfungsparameter

Zeichen	Einheit	Bedeutung
α_F	m^{-1}	Dämpfung unter Freiraumbedingungen (Absorption)
α_K	s	Steifigkeitproportionaler Rayleigh-Parameter
α_M	s^{-1}	Massenproportionaler Rayleigh-Parameter
β_N		Anzahl der Knoten pro Wellenlänge
γ		Dämpfungsmodellterm
γ_K		Dämpfungsmodellterm der Kompressionskomponenten
γ_μ		Dämpfungsmodellterm der Scherkomponenten
Γ_{Exp}		Gamma-Expansion Exponent ($\Gamma_{\text{Exp}} > 1$)
Γ_{Kor}		Gamma-Korrektur Exponent ($\Gamma_{\text{Kor}} < 1$)
δ	rad	Verlustwinkel
$\tan \delta$		Verlustfaktor
$\delta \xi^T$	m	Testfunktion
$\delta \xi_N^T$	m	Testfunktion
ε		Mechanische Dehnung
ε_k		Konstante mechanische Dehnung
$\varepsilon_{\text{pl},\varepsilon}$		Mechanischer Dehnungsvektor für den ebenen Verzerrungszustand
$\varepsilon_{\text{pl},\sigma}$		Mechanischer Dehnungsvektor für den ebenen Spannungszustand
$\epsilon_{\text{Im}}, \epsilon_V$		Kostenfunktion/Zielfunktion
η		Lokale Variable
η'	Pa s	Dynamische Viskosität
θ	°	Drehwinkel
ι		Lokale Variable
κ		Verhältnis c_L/c_T
Λ	Pa	Eigenwert der Elastizitätsmatrix
λ	m	Wellenlänge
λ_{La}	Pa	Erste Lamé-Konstante
μ	Pa	Zweite Lamé-Konstante/ Schermodul
$\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$	Pa	Richtungsabhängiger Schermodul
μ_∞	Pa	Schermodul für $\omega \rightarrow \infty$
ν		Poissonzahl, Querkontraktionszahl (Isotropie)

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

Zeichen	Einheit	Bedeutung
ν_{ij}		Poissonzahl mit x_i als Beanspruchungsrichtung und x_j als Querdehnungsrichtung
ξ	m	Mechanische Verschiebung
ξ	m	Vektor der mechanischen Verschiebungen
ξ_N	m	Vektor der nodalen Verschiebungen je finitem Element
Ξ	m	Globaler Vektor der mechanischen Verschiebungen (FEM)
$\hat{\Xi}$	m	Globaler Amplitudenvektor mechanischen Verschiebungen (SAFE)
$\xi_{pl,\varepsilon}$	m	Mechanische Verschiebung für den ebenen Verzerrungszustand
$\xi_{pl,\sigma}$	m	Mechanische Verschiebung für den ebenen Spannungszustand
π		Kreiszahl
ϖ		$\cos(\theta)$
ρ	kg m^{-3}	Dichte
ρ_{el}	kg m^{-3}	Dichte eines finiten Elements
σ	N m^{-2}	Mechanische Spannung
σ_0	N m^{-2}	Konstante mechanische Spannung
$\sigma_{pl,\varepsilon}$	N m^{-2}	Mechanischer Spannungsvektor für den ebenen Verzerrungszustand
$\sigma_{pl,\sigma}$	N m^{-2}	Mechanischer Spannungsvektor für den ebenen Spannungszustand
ς		$\sin(\theta)$
τ	s	Verschiebezeit
τ_ε	s	Retardationszeitkonstante
τ_{ε_K}	s	Retardationszeitkonstante der Kompressionskomponenten
$\tau_{\varepsilon_\sigma}$	s	Retardationszeitkonstante der Scherkomponenten
τ_σ	s	Relaxationszeitkonstante
τ_{σ_K}	s	Relaxationszeitkonstante der Kompressionskomponenten
τ_{σ_μ}	s	Relaxationszeitkonstante der Scherkomponenten
Υ		Sensitivität

Zeichen	Einheit	Bedeutung
Φ	m^2	Skalarpotential
Ψ	m^2	Vektorpotential
ω	Hz	Kreisfrequenz

1 Einleitung

1.1 Motivation

In dem Bestreben Designprozesse akustischer Komponenten nachhaltig und ressourcenschonend zu gestalten (und auf den Bau von Prototypen zu verzichten), werden zunehmend Simulationen eingesetzt. Voraussetzung für realitätsnahe Simulationen ist die Kenntnis akustischer Materialparameter z.B. Schallgeschwindigkeiten oder die Koeffizienten der Elastizitätsmatrix. Vollständige Materialdatensätze sind jedoch häufig nicht verfügbar. Angegebene Materialdaten sind in der Regel quasistatisch bestimmt und lassen sich nur bedingt auf den höherfrequenten Bereich übertragen, da die Materialparameter eine Frequenzabhängigkeit aufweisen und zusätzlich die akustische Dämpfung im Material berücksichtigt werden muss. Beides gilt besonders für Polymere, wobei hier auch der Herstellungsprozess einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss hat. Da Polymere z.B. als Anpassschichten oder Vorlauf-Keile bei der Entwicklung akustisch aktiver Komponenten zum Einsatz kommen, ist die Kenntnis der akustischen Materialparameter im höherfrequenten Bereich essenziell. Ein Messverfahren zur Bestimmung der Materialparameter im höherfrequenten Bereich ist daher notwendig. Hier ermöglicht der Einsatz eines Messverfahrens basierend auf akustischer Wellen zudem eine zerstörungsfreie Untersuchung des Materialverhaltens, sodass zusätzlich Eigenschaftsänderungen beobachtet werden können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein solches Messverfahren basierend auf geführten akustischen Wellen in Platten entwickelt, da Platten als Halbzeug aus unterschiedlichen Werkstoffen leicht verfügbar sind. Dabei werden sowohl ideal-elastische Materialparameter bestimmt, als auch ein Ansatz zur Bestimmung von Dämpfungsparametern zur Beschreibung des frequenzabhängigen Verhaltens vorgestellt.

1.2 Problemstellung

Aufgrund der Überlagerung von akustischen Longitudinal- und Transversalwellen in Festkörpern, und insbesondere durch die Randbedingungen in

1 Einleitung

Platten, lässt sich aus den Messungen die Messgröße nicht direkt ableiten. Dazu wird ein inverses Verfahren benötigt, um mittels Optimierung die Materialparameter zu variieren, um das Verhalten eines Simulationsmodells an das reale System anzupassen. Die optimierten Materialparameter stellen die Messergebnisse dar. Zur Realisierung des inversen Verfahrens sind neben dem Experiment auch effiziente, numerische Simulationen sowie der Einsatz geeigneter Optimierungsstrategien notwendig. Insbesondere soll auf folgende Fragestellungen eingegangen werden:

- I. Wie können akustische Wellen in Platten angeregt und detektiert werden?
- II. Wie müssen die Messsignale zur Analyse der sich ausbreitenden Wellen verarbeitet werden?
- III. Welche Methoden können zur effizienten Simulation der Wellenausbreitung in Platten verwendet werden?
- IV. Wie können Mess- und Simulationsdaten quantitativ miteinander verglichen werden?
- V. Welche Optimierungsstrategie kann zur Bestimmung der elastischen Materialparameter verwendet werden?
- VI. Wie kann die Unsicherheit der resultierenden Materialparameter bestimmt werden?

Insbesondere Polymere weisen eine hohe Dämpfung und damit stark frequenzabhängige Materialeigenschaften auf. Das Messverfahren soll daher zur Bestimmung der Parameter eines physikalisch motivierten, kausalen Dämpfungsmodells erweitert werden. Im Kontext der Identifikation der Dämpfungsparameter sollen die folgenden Fragestellungen behandelt werden:

- VII. Wie kann die gedämpfte, akustische Wellenausbreitung modelliert, parametrisiert und simuliert werden?
- VIII. Kann aus den Messsignalen auf die akustische Dämpfung geschlossen werden?
- IX. Wie muss die Optimierungsstrategie zur Bestimmung von Dämpfungsparametern erweitert werden?

2 Akustische Wellen in Festkörpern

In diesem Kapitel werden die Grundlagen akustischer Wellenausbreitung in Festkörpern dargelegt, die für das Verständnis der aufzunehmenden Messdaten wichtig sind. Zur Bestimmung von Materialparametern sind diese zunächst zu definieren. Eine realitätsnahe Abbildung des Materialverhaltens setzt ein physikalisch-basierendes mathematisches Materialmodell voraus, welche je nach Material ideal- oder viskoelastisches Verhalten aufweist. Zur numerischen Simulation der sich in Festkörpern ausbreitenden akustischen Wellen ist die Finite-Elemente-Methode weit verbreitet, weshalb hier Einblick in dieses Verfahren gewährt wird.

2.1 Grundbegriffe der Festkörpermechanik

In diesem Abschnitt werden die elementaren Bestandteile des Hookschen Gesetzes zunächst in Tensornotation definiert. Aufgrund der Mehrdimensionalität, insbesondere des werkstoffcharakterisierenden Elastizitätstensors, sowie der Symmetrien der Tensoren lassen sie sich einfacher als Vektoren bzw. Matrizen schreiben. Die am meisten genutzte Variante ist die Voigt-sche Notation. Alternativ sei noch die Mandel-Notation [Bra18] erwähnt, die hier nicht weiter betrachtet wird.

2.1.1 Verzerrungstensor

Die Deformation eines Festkörpers im Raum kann durch die mechanische Teilchenverschiebung ξ ausgedrückt werden.

Die örtliche Änderung der Verschiebung wird als mechanische Dehnung bzw. Verzerrung

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.1)$$

angegeben.

Neben den Dehnungen entlang der Hauptachsen treten im dreidimensionalen Festkörper ebenfalls Schub- bzw. Scherdehnungen ε_{ij} , ($i \neq j$) auf: [LSW09; Aul90b]:

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j \quad (2.2)$$

Zusammengefasst ergibt sich der Verzerrungstensor nach [MH13; Aul90b] zu

$$[\varepsilon] = [\nabla \xi + (\nabla \xi)^T] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} & 2\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Mit Gleichung 2.2 ergibt sich, dass $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ gilt und somit der Verzerrungstensor aus Gleichung 2.3 symmetrisch sein muss.

2.1.2 Spannungstensor

Der mechanische Spannungstensor

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ist unter Annahme linearer Elastizität mit dem Verzerrungstensor $[\varepsilon]$ über den Elastizitätstensor $[C]$ durch das Hookesche Gesetz

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (2.5)$$

verbunden. Mithilfe des Momentengleichgewichts lässt sich die Symmetrie des Spannungstensors beweisen [Rau12]. Somit ergibt sich über Gleichung 2.5 der Elastizitätstensor $[C]$ als symmetrischer Tensor 4. Stufe.

2.1.3 Übergang zur Voigtschen Notation

Aufgrund der Symmetrie des Verzerrungstensors $[\varepsilon]$, Spannungstensors $[\sigma]$ und Elastizitätstensors $[C]$ lassen sich die Tensoren kompakt als Vektoren und Matrix schreiben. Die gebräuchlichste Schreibweise ist die Notation nach Voigt [Voi66], mit der die Spannungstensoren als Vektoren

$$\sigma = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12})^T, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12})^T \quad (2.7)$$

sowie der Elastizitätstensor als Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

dargestellt werden können. Die Inverse der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \quad (2.9)$$

wird als Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Zur kompakten Darstellung von Gleichung 2.3 in Voigtscher Notation kann eine Differentialoperatormatrix \mathbf{L} , die die örtlichen Ableitungen nach den jeweiligen Raumrichtungen x_i enthält, definiert werden, sodass sich Gleichung 2.3 zu

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \Theta_{23} \\ \Theta_{13} \\ \Theta_{12} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.10)$$

ergibt [Ste98].

2.1.4 Ebener Verzerrungszustand

Beschränkt sich die Schwingungs- und Ausbreitungsrichtung der Wellen auf eine zweidimensionale Ebene, wie es z.B. bei Lamb-Wellen in der Querschnittsfläche der Platte (vgl. Abschnitt 2.3) der Fall ist, gibt es zwei mögliche Vereinfachungen: Der ebene Verzerrungszustand (*plane strain*) und der ebene Spannungszustand (*plane stress*). Ersteres nimmt alle Verzerrungskomponenten in eine bestimmte Raumrichtung, die keinen Einfluss auf die zu modellierende Wellenausbreitung haben, z.B. in x_3 -Richtung, zu Null an, sodass $\varepsilon_{i3} = 0 \ \forall i \in \{1, 2, 3\}$ zu Null werden. Dies entspricht der Annahme, dass der Körper in x_3 -Richtung gegenüber den anderen Raumrichtungen sehr weit ausgedehnt [KHL07] wie beispielsweise bei der Berechnung von Lamb- bzw. Lamb-artigen Moden ist. Das Hookesche

2 Akustische Wellen in Festkörpern

Gesetz aus Gleichung 2.5 vereinfacht sich in Voigtscher Notation damit zu

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{22} & C_{26} & \\ sym. & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

während sich Gleichung 2.10 in diesem Fall zu

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \Theta_{12} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{pl,\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{pmatrix}}_{L_{pl,\varepsilon}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}}_{\xi_{pl,\varepsilon}} \quad (2.12)$$

vereinfacht. Der ebene Spannungszustand wird in dieser Arbeit nicht weiter benötigt, ist jedoch zur Vollständigkeit in Abschnitt A.1 beschrieben.

2.2 Materialverhalten

Bei Festkörpern wird zwischen ideal-elastischem, z.B. bei metallischen Werkstoffen, und viskoelastischem Materialverhalten, z.B. bei Polymeren, unterschieden. Im Gegensatz zu ideal-elastischen Medien, ist viskoelastisches Verhalten abhängig von vergangenen Zuständen. Diese resultierende Zeitabhängigkeit wird im Frequenzbereich mithilfe verschiedener, in der Regel frequenzabhängiger, Dämpfungsmodelle modelliert.

2.2.1 Ideal-elastisches Materialverhalten

Das akustische Materialverhalten wird im Wesentlichen durch die Elastizitätsmatrix \mathbf{C} beschrieben. Die in Gleichung 2.8 angegebene Elastizitätsmatrix beschreibt den allgemeinsten Fall linear-akustischen Materialverhaltens. Aufgrund der Symmetrie enthält diese 21 unabhängige Konstanten, womit sie ein triklines Kristallsystem beschreibt [RD96; Šut84]. Gewalzte Bleche, Gewebe, Faser-Verbund-Kunststoffe weisen hingegen meist orthotropes Materialverhalten auf [Nye12].

Orthotrope Werkstoffe enthalten drei orthogonale Raumachsen, entlang derer die Normaldehnungen von den Scherdehnungen entkoppelt sind. Dies

führt dazu, dass die Elastizitätsmatrix nicht vollständig besetzt ist:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Für einen Vergleich der Parametersätze aus z.B. mechanischen Zugversuchen ergibt sich eine alternative Darstellung aus der Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S} , wenn diese durch die richtungsabhängigen Elastizitätsmodule E_i in x_i -Richtung, Poissonzahlen (Querkontraktionszahlen) ν_{ij} , mit x_i als Beanspruchungsrichtung und x_j als Querdehnungsrichtung und der Schub- bzw. Schermoduln μ_{ij} zur Beschreibung der Schubbewegungen in der x_i - x_j -Ebene ausgedrückt wird [Alt18]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{22}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Aufgrund der Symmetrie gilt

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.15)$$

Die Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix ergibt die Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 P} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 P} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 P} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 P} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 P} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 P} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & \mu_{23} & 0 & 0 \\ & & & & \mu_{31} & 0 \\ & & & & & \mu_{12} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

mit [Alt18]

$$P = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}. \quad (2.17)$$

Wird das Material als eindimensionale Feder modelliert, entspricht der Elastizitätsmodul E_i der Federsteifigkeit. Im dreidimensionalen Modell führt eine wirkende Kraft zu Verzerrungen in die anderen Raumrichtungen. Verhält sich das Material in zwei der drei Raumrichtungen z.B. in x_2 - und x_3 -Richtung gleich bezüglich der mechanischen Eigenschaften, wird es transversal isotrop genannt. Damit reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten von neun auf fünf. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer in x_i -Richtung propagierenden Welle ergibt sich aus der entsprechenden Komponente der Hauptdiagonalen der Elastizitätsmatrix (Gleichung 2.13) und der Dichte des Materials. Während die ersten drei Elemente jeweils die Longitudinalwellengeschwindigkeit c_{Li} in den drei Raumrichtungen beschreiben

$$c_{Li} = \sqrt{\frac{C_{ii}}{\rho}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.18)$$

lassen sich die jeweiligen Transversalwellengeschwindigkeiten aus den verbliebenen drei Hauptdiagonalelementen bestimmen [Ros88; Aul90b]:

$$c_{T,23} = c_{T,32} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.19)$$

$$c_{T,13} = c_{T,31} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}}, \quad (2.20)$$

$$c_{T,12} = c_{T,21} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}. \quad (2.21)$$

Der erste numerische Index der Transversalwellengeschwindigkeit bezeichnet die Ausbreitungsrichtung, der zweite die Schwingungsrichtung der Welle.

Verhält sich das Material in alle drei Raumrichtungen gleich, wird es als isotrop bezeichnet [AL06]. In dem Fall kann die Elastizitätsmatrix des Materials durch nur zwei Parameter beschrieben werden z.B. die Lamé-Konstanten λ_{La} und μ oder Kompressions- und Schermodul K und μ ,

sodass

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda_{\text{La}} + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu \quad (2.22)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda_{\text{La}} = K - \frac{2}{3}\mu \quad (2.23)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu \quad (2.24)$$

gilt. Neben der Darstellung mit Kompressions- und Schermodul oder Lamé-Konstanten, findet sich am häufigsten die Darstellung mit Elastizitätsmodul E und Poissonzahl ν , die bei einem isotropen Material richtungsunabhängig sind. Dafür sind die Lamé-Konstanten durch

$$\lambda_{\text{La}} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.25)$$

und

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.26)$$

zu ersetzen. [MMD09] Da die Elastizitätsmatrix \mathbf{C} eines isotropen, ideal-elastischen Materials durch zwei Parameter vollständig bestimmt ist, wird zur vollständigen Beschreibung des akustischen Materialverhaltens nur zusätzlich die Dichte ρ zur akustischen Modellierung benötigt. Anstelle der bereits genannten Darstellungsarten, kann die Elastizitätsmatrix eines isotropen Werkstoffs ebenfalls durch Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit durch umstellen und ineinander einsetzen von Gleichung 2.18 bis 2.21 in Gleichung 2.22 bis 2.24 ausgedrückt werden.

2.2.2 Viskoelastisches Materialverhalten

Wird die Wellenausbreitung in einem viskoelastischen Medium betrachtet, verhält sich das Medium wie ein gedächtnisbehaftetes, zeitabhängiges System. Zur Systemcharakterisierung kann die Sprungantwort betrachtet werden. Wird das System mit einem Spannungssprung belastet, zeigt sich das Retardations-, bei einem Verzerrungssprung das Relaxationsverhalten. Daher wird im 1D-Fall die Sprungantwort auf einen Verzerrungssprung mit dem Relaxationsmodul $G(t)$, die Sprungantwort auf einen Spannungssprung mit der Retardations- bzw. der Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ bezeichnet. Der Kehrwert der Kriechnachgiebigkeit wird als Kriech- bzw. Retardationsmodul, der Kehrwert des Relaxationsmoduls als Relaxationsnachgiebigkeit, bezeichnet. [Mai10]

2 Akustische Wellen in Festkörpern

Bei bekanntem Relaxationsmodul $G(t)$, kann unter Annahme von Kausalität die Systemantwort auf eine Verzerrung $\varepsilon(t)$ mittels Boltzmannschem Superpositionsprinzip [Hew60; Mai10; Bor09; CKK88] berechnet werden:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t=0^+) G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.27)$$

mit der Verzerrungsrate $\frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau}$ und dem Anfangswert der Verzerrung bei $t=0$, der dem rechtsseitigen Grenzwert $t \rightarrow 0$ entspricht. Durch die Berücksichtigung des Anfangswertes wird anders als beim Hookeschen Gesetz der vorherige Systemzustand der mechanischen Belastung des Körpers berücksichtigt.

Die Transformation des Faltungsintegrals aus Gleichung 2.27 in den Fourier-Bereich ergibt bei vorausgesetzter Kausalität

$$\sigma(\omega) = j\omega G^F(\omega) \varepsilon(\omega) \quad (2.28)$$

mit dem komplexen Modul

$$G_+(\omega) = j\omega G^F(\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega), \quad (2.29)$$

bestehend aus Speichermodul $G'(\omega)$ und Verlustmodul $G''(\omega)$.

Da es sich bereits beim Relaxationsmodul $G(t)$ um die Systemantwort auf einen Spannungssprung handelt, entspricht dessen zeitliche Ableitung $\dot{G}(t)$ der Impulsantwort des Systems, während der komplexe Modul $G_+(\omega)$ im Fourier-Bereich dem Frequenzgang entspricht. Gemessen werden kann der komplexe frequenzabhängige Modul $G_+(\omega)$ mittels Dynamisch-Mechanischer-Analyse (DMA) [GS15]. Das Verhältnis

$$\tan \delta = \frac{G''}{G'} \quad (2.30)$$

aus Verlust- und Speichermodul wird Verlustfaktor genannt, während der Winkel δ als Verlustwinkel bezeichnet wird.

2.2.3 Makromechanische Dämpfungsmodelle

Zur Beschreibung des frequenzabhängigen Verhaltens werden im folgenden Abschnitt der Relaxationsmodul und die Kriechnachgiebigkeit verschiedener Dämpfungsmodelle, welche viskoelastisches Materialverhalten repräsentieren, vorgestellt. Während elastisches Verhalten durch eine Feder

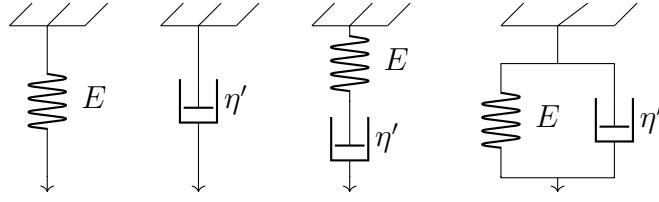


Abbildung 2.1: Elementare Modelle der Makromechanik: Hook, Newton, Maxwell, Kelvin-Voigt

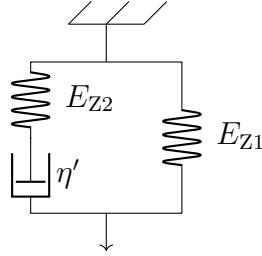


Abbildung 2.2: Zener-Modell

mit dem Elastizitätsmodul als Federsteifigkeit beschrieben wird, enthält das Newton-Modell zur Modellierung rein viskosen Materialverhaltens (ideales Newtonsches Fluid), nur einen Dämpfer (vgl. Abbildung 2.1). Die Kombination aus Feder E und Dämpfer η' führt auf viskoelastisches Materialverhalten. Aufgrund des Dämpfers werden diese Modelle in der Literatur auch als Dämpfungsmodelle bezeichnet. Das Dämpfungsmodell modelliert die Dämpfung der Welle bedingt durch das Material (Absorption), weshalb dessen Parameter diesem als Materialparameter zugeordnet werden. Dabei können Feder und Dämpfer sowohl in Reihe (Maxwell-Modell) als auch parallel zueinander (Kelvin-Voigt-Modell) angenommen werden. [MHM11; WH02; MH13]

Während das Maxwell-Modell der Modellierung von Spannungsrelaxation dient, jedoch keine Kriecheffekte berücksichtigt, bildet das Kelvin-Voigt-Modell exponentielle Kriechprozesse jedoch keine Spannungsrelaxation ab [Mai10; Bau16]. Um sowohl Retardations- als auch Relaxationsverhalten abzubilden, können die elementaren Modelle aus Abbildung 2.1 kombiniert werden z.B. zum Zener-Modell, das in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Beim Zener-Modell, auch als *standard linear solid* bezeichnet, ergibt sich

$$\sigma(t) + \frac{\eta'}{E_{Z2}} \dot{\sigma}(t) = E_{Z1} \varepsilon(t) + \frac{E_{Z1} + E_{Z2}}{E_{Z2}} \eta' \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.31)$$

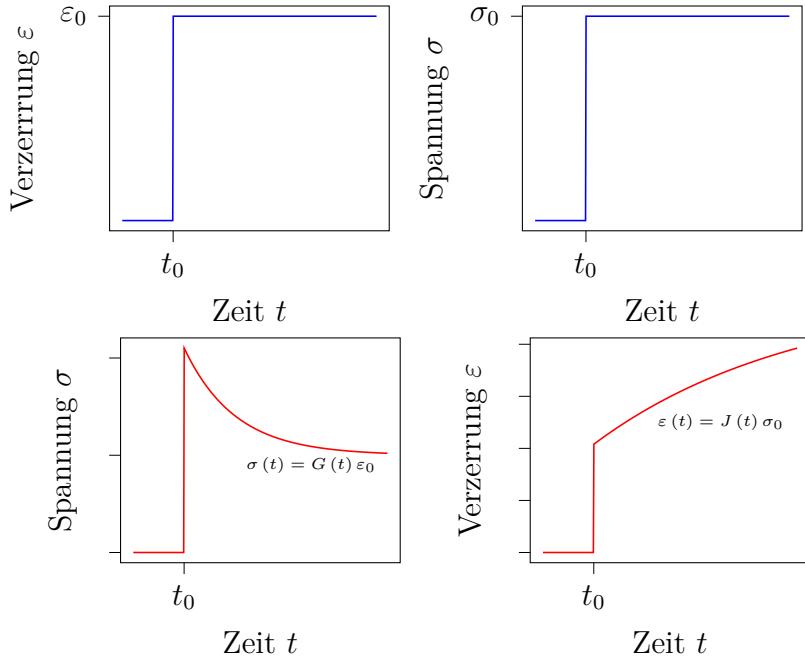


Abbildung 2.3: Relaxation (links) und Retardation bzw. Kriechen (rechts) eines viskoelastischen Werkstoffs (Zener-Modell) bei sprungförmiger Belastung, nach [GS15]

Mit Substitution von

$$E = E_{Z1}; \quad \tau_\sigma = \frac{\eta'}{E_{Z2}}; \quad \tau_\varepsilon = \frac{E_{Z1} + E_{Z2}}{E_{Z2}} \eta' \quad (2.32)$$

ergibt sich Gleichung 2.31 zu

$$\sigma(t) + \tau_\sigma \dot{\sigma}(t) = E\varepsilon(t) + \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.33)$$

Der Relaxationsmodul $G(t)$ und die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ (Kehrwert des Kriechmoduls) lassen sich somit zu

$$J(t) = \frac{\tau_\sigma}{E\tau_\varepsilon} + \frac{\tau_\varepsilon - \tau_\sigma}{E\tau_\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right) \quad (2.34)$$

$$G(t) = E + E \frac{\tau_\varepsilon - \tau_\sigma}{\tau_\sigma} e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \quad (2.35)$$

bestimmen [Mai10].

In Gleichung 2.34 sind τ_ε die Retardationszeitkonstante und τ_σ die

Relaxationszeitkonstante nach Gleichung 2.35 (jeweils im Exponenten). Der Relaxationsmodul $G(t)$ stellt physikalisch eine monoton fallende Funktion über die Zeit dar, während die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ monoton steigt. Aufgrund des Terms $\frac{\tau_\varepsilon - \tau_\sigma}{\tau_\sigma}$ in der Kriechnachgiebigkeit (Gleichung 2.34) und im Relaxationsmodul (Gleichung 2.35) folgt mit dem Monotonieverhalten, die Bedingung $\tau_\varepsilon > \tau_\sigma \geq 0$ für ein physikalisches Materialverhalten nach dem Zener-Modell. Die damit resultierenden Sprungantworten für die Relaxations- und Retardationsprozesse sind in Abbildung 2.3 dargestellt.

Im Frequenzbereich ergibt sich aus Gleichung 2.33 die Beziehung

$$\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = E \left(\frac{1 + j\omega\tau_\varepsilon}{1 + j\omega\tau_\sigma} \right). \quad (2.36)$$

Wird das Modell auf den dreidimensionalen Fall übertragen, wird das Hookesche Gesetz aus Gleichung 2.5 zu

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega) = \tilde{\mathbf{C}}(\omega) \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \quad (2.37)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}}(\omega) = \left(\frac{1 + j\omega\tau_\varepsilon}{1 + j\omega\tau_\sigma} \right) \mathbf{C} \quad (2.38)$$

erweitert. Während es sich bei \mathbf{C} um eine beliebig geartete Elastizitätsmatrix (isotrop, orthotrop, triklin, monoklin) handelt, bleiben die Absorptionseigenschaften in alle Raumrichtungen identisch. Ein Ansatz zur Berücksichtigung der richtungsabhängigen Absorptionseigenschaften beruht auf einer Eigenwertzerlegung der Elastizitätsmatrix nach Theocaris et al. [TS99]. Diese ergibt sich mit den jeweiligen Eigenwerten Λ_i und den zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{v}_i :

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^6 \Lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (2.39)$$

Die Verluste der sich ergebenden Eigenbewegungen können mit unterschiedlichen viskoelastischen Modellen modelliert werden. So werden z.B. die Verluste der Eigenbewegungen mithilfe des Zener-Modells mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^6 \frac{1 + j\omega\tau_{\varepsilon,i}}{1 + j\omega\tau_{\sigma,i}} \Lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad (2.40)$$

modelliert.

Eine Verallgemeinerung des Zener-Modells stellt das fraktionale Zener-

2 Akustische Wellen in Festkörpern

Modell dar, welches durch eine Ableitungsordnung a ergänzt wird. Für eine detaillierte Herleitung des fraktionalen Zener-Modells sei auf [Mai94] verwiesen.

Im Frequenzbereich ergibt sich a als Exponent, sodass sich die viskoelastische Elastizitätsmatrix mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1 + (j\omega\tau_\varepsilon)^a}{1 + (j\omega\tau_\sigma)^a} \mathbf{C} \quad (2.41)$$

ergibt. Die fraktionale Ableitungsordnung liegt im Wertebereich von $0 \leq a \leq 1$, während für die Zeitkonstanten weiterhin die Bedingung $\tau_\varepsilon > \tau_\sigma \geq 0$ des Zener-Modells gilt.

Das am weitesten verbreitete Dämpfungsmodell ist das Rayleigh-Modell, da es sich sehr leicht in jede Finite-Elemente-Berechnung integrieren lässt (vgl. Unterabschnitt 2.4.2). Zwar genügt es vielen Anwendungen der Modellierung, jedoch ist dieses Modell nicht physikalisch begründet und es konnte bereits von [Rau12] gezeigt werden, dass es nur unter bestimmten Annahmen kausal ist. Aufgrund seiner Verbreitung in der Finiten-Elemente-Methode, insbesondere in Zeitbereichssimulationen, erfolgt die Betrachtung des Rayleigh-Modells in Unterabschnitt 2.4.2.

2.3 Akustische Plattenwellenleiter

An der Oberfläche bzw. an der Grenzfläche zum Vakuum eines ansonsten unendlich ausgedehnten Festkörpers können sich Rayleigh-Wellen ausbreiten. Ihre Geschwindigkeit ergibt sich im isotropen Festkörper nach [Ber54] zu

$$c_R = \frac{0,87 + 1,2\nu}{1 + \nu} c_T. \quad (2.42)$$

In einem Plattenwellenleiter werden Wellen, deren Wellenlänge in einem ähnlichen Wertebereich wie die Plattendicke liegt, geführt. Bewegen sich die Teilchen einer Platte im Vakuum ausschließlich innerhalb des Querschnitts (vgl. Abbildung 2.4) wird von Lamb-Wellen gesprochen. Ihre Wellenlänge liegt in der gleichen Größenordnung wie die Plattendicke. Da Lamb ist die dritte Dimension nicht unendlich ausgedehnt, bilden sich ebenso horizontal schwingende Scherwellen sog. *Shear-Horizontal*-Wellen aus, die in dieser Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet werden, da nur Lamb- bzw. Lambartige Wellen mit dem betrachteten Messsystem detektiert werden.

Handelt es sich um ein isotropes Material, werden die Wellen, deren Teilchenbewegung nur in der Ebene der Querschnittsfläche der Platte



Abbildung 2.4: Querschnitt eines Plattenwellenleiter

erfolgt, Lamb-Wellen genannt, da Lamb ursprünglich von einem solchen ausging [Lam17]. Während sich in Dickenrichtung eine Resonanz ausbildet, propagt die Welle entlang des Plattenquerschnitts orthogonal zu ihr. Ist eine ähnliche Wellenform gemeint, das Material jedoch nicht isotrop oder es befindet sich kein Vakuum an den Grenzflächen, wird von Lamb-artigen Wellen gesprochen [KLT11; ZF21].

Im Folgenden wird die Dickenrichtung als x - und die Ausbreitungsrichtung als y -Richtung angenommen (vgl. Abbildung 2.4).

Sowohl in y -Richtung als auch in die dritte Raumrichtung (z -Richtung) wird die Platte als unendlich ausgedehnt angenommen, sodass die Verschiebung unabhängig von der z -Richtung ist ($\xi_z = 0, \partial/\partial z = 0$) und Spannungsfreiheit orthogonal zum Rand der Platte herrscht. Die Unabhängigkeit von der z -Richtung entspricht der Annahme des ebenen Verzerrungszustands aus Unterabschnitt 2.1.4. Damit leitete Lamb [Lam17] die Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung aus der Wellengleichung (vgl. Gleichung A.2 im Anhang) zu

$$\frac{\tan(k_{T,L}t_h/2)}{\tan(k_{L,L}t_h/2)} = - \left(\frac{4k^2 k_{L,L} k_{T,L}}{(k_{T,L}^2 - k^2)^2} \right)^{\pm 1} \quad (2.43)$$

mit

$$k_{L,L}^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{und} \quad k_{T,L}^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2$$

her. Für eine detaillierte Herleitung sei auf den Anhang oder [Ach76; Gra91; Aul90a] verwiesen. Bei bekannter Plattendicke t_h und bekannten materialabhängigen Schallgeschwindigkeiten c_L und c_T enthält Gleichung 2.43 die Kreiswellenzahl k und Kreisfrequenz ω als Unbekannte. [Ach76; Gra91; Aul90a]

Wird eines von beiden vorgegeben, kann das jeweils andere über eine numerische Nullstellensuche berechnet werden. Lösungen mit dem Exponenten $+1$ beschreiben symmetrisch (S0, S1, S2 ...), Lösungen mit dem Exponenten -1 asymmetrisch schwingende Moden (A0, A1, A2 ...) bezogen auf die Plattenmitte, wie sie z.B. in Abbildung 2.5 dargestellt sind.

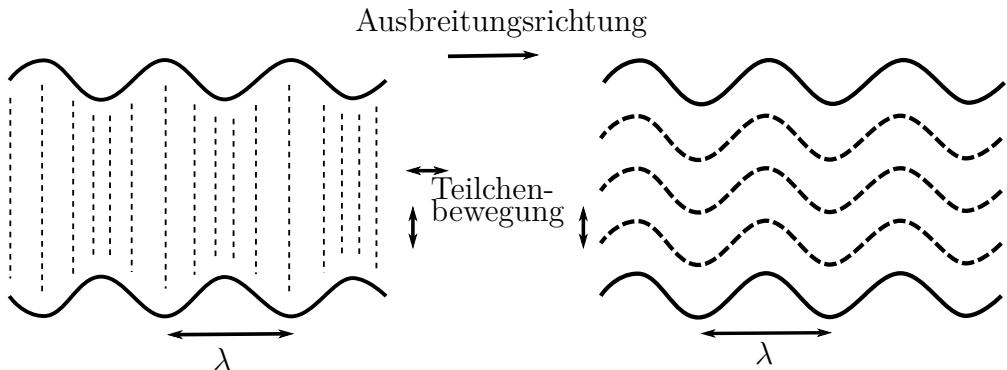


Abbildung 2.5: Symmetrisch und asymmetrisch schwingende Lamb-Moden nach [DPV97]

Mithilfe der Rayleigh-Lamb-Frequenz-Gleichung (Gleichung 2.43) lassen sich die ausbreitungsfähigen Moden zu beliebigen Frequenzen bzw. Wellenzahlen berechnen. Abbildung 2.6 zeigt diese Moden als Lösung der Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung am Beispiel einer 1 mm dicken Platte aus Polytetrafluorethylen (PTFE).

Werden alle Verschiebungs-Vektoren des Plattenquerschnitts addiert, ergibt sich bei symmetrischen Moden der Summenvektor in Ausbreitungsrichtung, sodass diese Moden auch Longitudinalmoden genannt werden. Bei asymmetrischen Moden hingegen, ergibt sich der Summenvektor in Dickenrichtung der Platte, weshalb sie auch als Biegemoden bezeichnet werden. [Ach76]

Während sich eine Welle in einem unendlich ausgedehnten Medium mit nahezu konstanter Geschwindigkeit ausbreitet, ist die Geschwindigkeit einer Welle im Wellenleiter frequenzabhängig. Diese Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit wird Dispersion genannt. Die Steigung der Moden in Abbildung 2.6 ergeben mit

$$c_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial \text{Re}\{k\}} \quad (2.44)$$

deren Gruppengeschwindigkeit, mit der sich die Wellenpakete ausbreiten, sodass die Darstellung in Abbildung 2.6 Dispersionsdiagramm genannt wird. Der Wertebereich der Gruppengeschwindigkeiten ist nach oben durch die Longitudinalwellengeschwindigkeit des Materials beschränkt. Longitudinal-, Transversal- sowie die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit einer Oberflächenwelle (Gleichung 2.42) lassen sich im Dispersionsdiagramm (Abbildung 2.6) als Steigung von Geraden ablesen [Aul90a]. Bei Betrach-

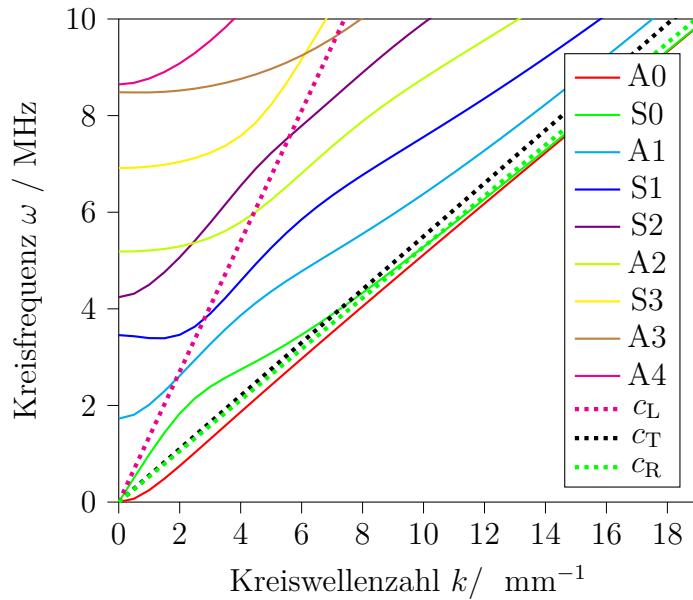


Abbildung 2.6: Kreisfrequenzen und Kreiswellenzahlen symmetrischer und asymmetrischer Moden einer 1 mm dicken PTFE-Platte ($c_L = 1350 \text{ m s}^{-1}$, $c_T = 550 \text{ m s}^{-1}$)

tung der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeiten c_L , c_T sowie der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit c_R in Abbildung 2.6 fällt auf, dass sich die A0- und S0-Mode für große Wellenzahlen mit der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit c_R als Gruppengeschwindigkeit ausbreitet. Die Gruppengeschwindigkeit der Moden höherer Ordnung läuft für große Wellenzahlen gegen die Transversalwellengeschwindigkeit c_T .

2.4 Finite-Elemente-Methode

Das am weitesten verbreitete numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen ist die Finite-Elemente-Methode. Bei dieser wird ein beliebiges Rechengebiet in verschiedene finite Elemente unterteilt, sodass die Integralgleichung für jedes Element gelöst und schließlich die Lösung aller im Rechengebiet vorhandenen finiten Elemente assembliert werden. Zur Lösung wird die gesuchte Größe, in der Festkörpermechanik meist die Teilchenauslenkung ξ_{el} , für jedes Element durch eine gewichtete Summe dieser Größe an den einzelnen Knoten ξ_i ausgedrückt. Der Bereich zwischen den Knoten wird durch einfache Polynome, den

2 Akustische Wellen in Festkörpern

sogenannten Ansatzfunktionen N_i , interpoliert:

$$\xi_{\text{el}} = \sum_{i=1}^o N_i \xi_i. \quad (2.45)$$

Je nach Grad der gewählten Ansatzfunktionen werden unterschiedlich viele Knotenpunkte je Element benötigt, um die Größe eindeutig interpolieren zu können. Die Ansatzfunktionen sind in lokalen Koordinaten eines finiten Elements definiert. Die am meisten verwendeten Ansatzfunktionen sind Lagrange-Ansatzfunktionen.

Diese zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Wert am zugeordneten Knoten Eins und an allen anderen Knoten jeweils Null ist.

Für den 1D-Fall hängt die Elementauslenkung ξ_{el} mit der nodalen Auslenkung ξ_i eines eindimensionalen Linienelements der Ordnung o mit $o+1$ Knoten über die den Knoten zugeordneten Lagrangeschen Ansatzfunktionen

$$N_i(\eta) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^o = \frac{\eta - \eta_j}{\eta_i - \eta_j}, \quad i = 0 \dots o \quad (2.46)$$

mit $-1 \leq \eta \leq 1$ zusammen [VD06]. Abbildung 2.7 zeigt beispielhaft lineare und quadratische Lagrange-Ansatzfunktionen.

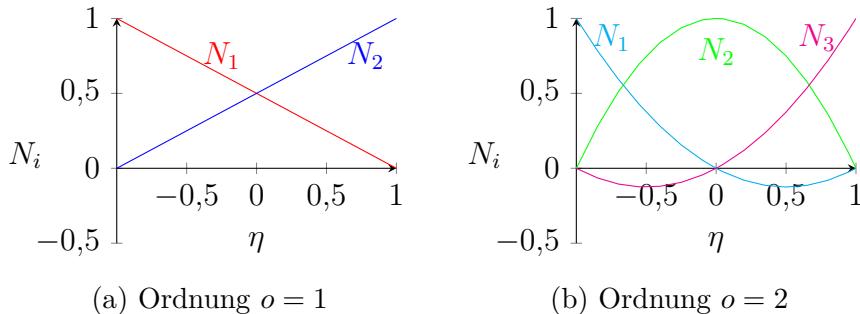


Abbildung 2.7: Lineare und quadratische eindimensionale Lagrange-Ansatzfunktionen

Da Lamb- bzw. Lamb-artige Wellen zweidimensionale, mechanische Verschiebungen innerhalb des Plattenquerschnitts erzeugen, ist es für deren Berechnung mittels FEM notwendig, diesen in zweidimensionale finite Elemente zu zerlegen, um die Freiheitsgrade des Systems (z.B. die Verschiebungen) in zwei Raumrichtungen abbilden zu können. Dafür eignen

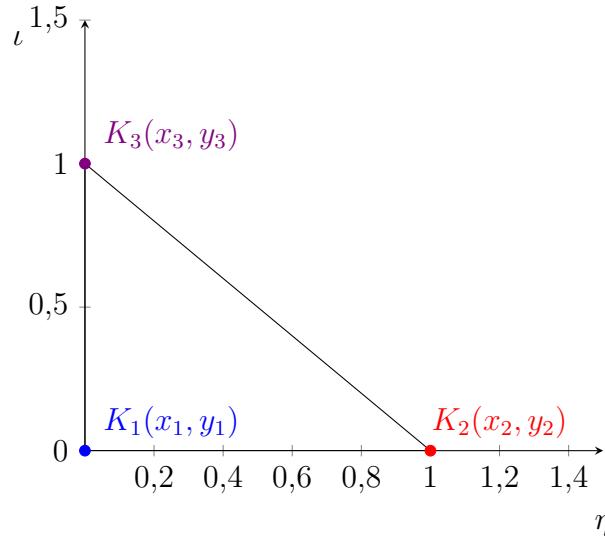


Abbildung 2.8: 2D-Dreieckselement nach [Ste98]

sich verschiedene Arten von Elementen. Weit verbreitet sind z.B. dreieckige Scheibenelemente, wie sie z.B. in Abbildung 2.8 skizziert sind. Die Transformation von lokalen zu globalen Koordinaten erfolgt über die Eckpunkte des Dreiecks und die gewählten Ansatzfunktionen N_i wie z.B. den zweidimensionalen, linearen Ansatzfunktionen:

$$N_1(\eta, \tau) = 1 - \eta - \tau \quad (2.47)$$

$$N_2(\eta, \tau) = \eta \quad (2.48)$$

$$N_3(\eta, \tau) = \tau. \quad (2.49)$$

Die Koordinatentransformation des Dreiecks ist über

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}(\eta, \tau)} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

definiert. Die Verschiebungen eines finiten Elements $\boldsymbol{\xi}_{\text{el}}$ lassen sich ebenfalls mit der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} und dem Vektor der nodalen

Verschiebungen

$$\boldsymbol{\xi}_N = \begin{pmatrix} \xi_{x_1} & \xi_{y_1} & \xi_{x_2} & \xi_{y_2} & \xi_{x_3} & \xi_{y_3} \end{pmatrix}^T \quad (2.51)$$

zu

$$\boldsymbol{\xi}_{el} = \mathbf{N} \boldsymbol{\xi}_N \quad (2.52)$$

berechnen. Zur Lösung von Integralgleichungen (vgl. Unterabschnitt 2.4.1) werden die Differentialoperatoren in lokale Koordinaten mittels Jacobi-Matrix \mathbf{J} über

$$\begin{pmatrix} d x \\ d y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \iota} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \iota} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} d \eta \\ d \iota \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

transformiert [Esl14]. Mit Gleichung 2.50 ergeben sich die Einträge der Jacobi-Matrix, die nur von Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_i(\eta, \iota)$ abhängen [Zha17].

Die mechanischen Dehnungen je Element ergeben sich mit Gleichung 2.10 und Gleichung 2.52 zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{L} \mathbf{N} \boldsymbol{\xi}_N = \mathbf{B} \boldsymbol{\xi}_N, \quad (2.54)$$

wobei die örtliche Differentiation der Ansatzfunktionen \mathbf{LN} häufig als FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B} zusammengefasst wird. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen mechanischer nodaler Verschiebung in lokalen Koordinaten und der Dehnung des finiten Elements in globalen Koordinaten. Da die örtlichen Abhängigkeiten der Verschiebungen vollständig in der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} steckt, kann die FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B} leicht für jedes Element berechnet werden.

2.4.1 Herleitung der Integralgleichung

Für FEM-Simulationen ist es notwendig, die Cauchysche Bewegungsgleichung in ihre schwache Form zu überführen. Zur Modellierung von Lamb- oder Lamb-artigen Wellen wird ein Plattenwellenleiter im Vakuum angenommen, um dessen Eigenschwingungen zu berechnen. Somit wird davon ausgegangen, dass keine äußeren mechanischen Spannungen auf die Platte wirken. Daher ergibt sich die Bewegungsgleichung mit dem mechanischen Spannungstensor $[\boldsymbol{\sigma}]$ und dem Vektor der mechanischen Verschiebungen $\boldsymbol{\xi}$ zu

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \nabla [\boldsymbol{\sigma}]. \quad (2.55)$$

In Voigtscher Notation wird der Divergenzoperator durch die transponierte Differentialoperatormatrix \mathbf{L}^T (vgl. Gleichung 2.10) ersetzt:

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.56)$$

Mit dem Hookschen Gesetz in Voigtscher Notation $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$ und Gleichung 2.10 lässt sich aus Gleichung 2.56 die Wellengleichung

$$\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \boldsymbol{\xi} \quad (2.57)$$

mit dem Vektor der mechanischen Verschiebungen $\boldsymbol{\xi}$, dessen zweifache zeitliche Ableitung $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$, der Elastizitätsmatrix \mathbf{C} , der Differentialoperatormatrix \mathbf{L} (vgl. Gleichung 2.10) sowie deren Transponierte \mathbf{L}^T herleiten [Kal07].

Die schwache Form der Gleichung zeichnet sich dadurch aus, dass diese nur noch einfache örtliche Ableitungen enthält. Somit muss für eine FEM-Berechnung nur gewährleistet sein, dass die Ansatzfunktionen nur einmal differenzierbar sind. Zur Herleitung der schwachen Form wird Gleichung 2.57 mit einer beliebigen, unendlich oft differenzierbaren Testfunktion $\delta \boldsymbol{\xi}^T$ multipliziert und über ein Volumen V integriert:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\xi}^T \rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} \, dV = \int_V \delta \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \boldsymbol{\xi} \, dV. \quad (2.58)$$

Mithilfe des ersten Greenschen Integralsatzes [Gre28] wird Gleichung 2.58 in

$$\int_V \delta \boldsymbol{\xi}^T \rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} \, dV = \oint_{\partial A} (\delta \boldsymbol{\xi}^T) \mathbf{C} \mathbf{L} \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{A} - \int_V (\mathbf{L} \delta \boldsymbol{\xi})^T \mathbf{C} \mathbf{L} \boldsymbol{\xi} \, dV \quad (2.59)$$

überführt, sodass die zweifache örtliche Ableitung der Verschiebungen entfällt. Das Oberflächenintegral über die Volumenoberfläche wird aufgrund der Randbedingungen der mechanischen Spannungsfreiheit (Neumann-Randbedingungen) für einen Plattenwellenleiter im Vakuum zu Null. Zur Lösung der Integralgleichung wird diese für ein finites Element mit den Materialparametern ρ_{el} und \mathbf{C}_{el} , dem Volumen V_{el} sowie seiner mechanischen Verschiebung $\boldsymbol{\xi}_{el}$ betrachtet. Die mechanischen Verschiebungen $\boldsymbol{\xi}_{el}$ sowie die Testfunktion $\delta \boldsymbol{\xi}^T$, welche physikalisch ebenfalls einer mechanischen Verschiebung entspricht [Lin14; MÖ10], werden über die Knotenpunkte des finiten Elements mit Gleichung 2.52 interpoliert. Damit sind die nodalen Verschiebungen $\boldsymbol{\xi}_N$ ortsunabhängig, weil die Ortsabhängigkeit vollständig in den Ansatzfunktionen \mathbf{N} steckt. Somit ergibt sich die Integralgleichung

für ein finites Element zu

$$\int_{V_{\text{el}}} \delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T \mathbf{N}^T \rho_{\text{el}} \mathbf{N} \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{N}} \, dV + \int_{V_{\text{el}}} \delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T (\mathbf{L} \mathbf{N})^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{L} \mathbf{N} \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} \, dV = 0. \quad (2.60)$$

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, wird der Term $\mathbf{L} \mathbf{N}$ in der Regel zur FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B} zusammengefasst, die alle örtlichen Ableitungsoperationen sowie die örtlichen Ansatzfunktionen zur Koordinatentransformation enthält. Durch die Ortsabhängigkeit der nodalen Verschiebung $\boldsymbol{\xi}_{\text{N}}$ und der Testfunktion $\delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T$ können diese vor das Integral gezogen werden:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T \underbrace{\int_{V_{\text{el}}} \mathbf{N}^T \rho_{\text{el}} \mathbf{N} \, dV}_{\mathbf{M}_{\text{el}}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{N}} + \delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T \underbrace{\int_{V_{\text{el}}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B} \, dV}_{\mathbf{K}_{\text{el}}} \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} = 0. \quad (2.61)$$

Da $\delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T$ eine beliebige, von Null verschiedene Funktion darstellt [Lin14], ist Gleichung 2.61 nur Null, wenn die jeweiligen Integrale zu Null werden, womit der Ausdruck $\delta \boldsymbol{\xi}_{\text{N}}^T$ entfallen kann. Daher findet sich in der Literatur [Esl14; Ste98; Bat96] zur Finiten-Elemente-Methode meist Gleichung 2.61 für einen Festkörper im Vakuum in Form von

$$\mathbf{K}_{\text{el}} \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} + \mathbf{M}_{\text{el}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{N}} = 0 \quad (2.62)$$

vor. Aufgrund der Proportionalität zur volumenbezogenen Masse, der Dichte ρ_{el} , wird \mathbf{M}_{el} Element-Massematrix genannt, während \mathbf{K}_{el} als Element-Steifigkeitsmatrix bezeichnet wird. Assemblierung [Ste98; Lin14] der einzelnen Element-Steifigkeits- und Element-Massematrizen \mathbf{K}_{el} und \mathbf{M}_{el} führt zur jeweiligen globalen Steifigkeits- und Massematrix \mathbf{K} und \mathbf{M} . Dabei bezeichnet Assemblierung die Zuordnung der lokalen Elementknoten zu den globalen Knoten. Ebenso werden die nodalen Verschiebungen eines finiten Elements $\boldsymbol{\xi}_{\text{N}}$ zum globalen nodalen Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\Xi}$ zusammengefasst.

2.4.2 Rayleigh-Dämpfungsmodell in der FEM

Formal kann Gleichung 2.62 in Analogie zur Differentialgleichung eines Feder-Masse-Systems mit Federsteifigkeit \mathbf{K}_{el} und der die volumenbezogene Masse enthaltenden Massematrix \mathbf{M}_{el} betrachtet werden. Kommt ein Dämpfer hinzu, kann Gleichung 2.62 um einen Dämpfungsterm mit einer

Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_{el} ergänzt werden:

$$\mathbf{K}_{\text{el}} \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} + \mathbf{D}_{\text{el}} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{N}} + \mathbf{M}_{\text{el}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{\text{N}} = 0. \quad (2.63)$$

Diese Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_{el} wird in allen gängigen FEM-Programmen mit

$$\mathbf{D}_{\text{el}} = \alpha_M \mathbf{M}_{\text{el}} + \alpha_K \mathbf{K}_{\text{el}} \quad (2.64)$$

angenommen, wodurch dem Material ein Dämpfungsparameter α_M proportional zur Masse (Dichte) und ein Parameter α_K proportional zur Steifigkeit zugeordnet werden [Bat96].

Da sowohl Masse- als auch Steifigkeitsmatrix zum Lösen berechnet werden müssen, lässt sich so die Dämpfungsmatrix ohne höheren Rechenaufwand bestimmen, weshalb dieses Modell [Ray85] weit verbreitet, jedoch rein mathematisch begründet ist.

Das Rayleigh-Dämpfungsmodell kann durch Einsetzen der Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_{el} aus Gleichung 2.64 in Gleichung 2.63 und anschließender Fourier-Transformation dieser in den Frequenzbereich überführt werden, um es für harmonische Simulationen zu nutzen. Somit ergibt sich im Frequenzbereich für jedes finite Element

$$\left[(1 + j\omega\alpha_K) \mathbf{K}_{\text{el}} - \omega^2 (1 - j\alpha_M/\omega) \mathbf{M}_{\text{el}} \right] \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} = 0. \quad (2.65)$$

Gleichung 2.65 stellt eine Form von Gleichung 2.62 mit skalierter Elastizitätsmatrix und Dichte dar. In der Regel wird jedoch wie in Unterabschnitt 2.2.3 die Elastizitätsmatrix angepasst und die reelle Dichte ρ_{el} des Materials beibehalten. Somit ergibt sich mit Ersetzen von \mathbf{K}_{el} und \mathbf{M}_{el} Gleichung 2.65 zu

$$\left[\frac{1 + j\omega\alpha_K}{1 - j\frac{\alpha_M}{\omega}} \mathbf{K}_{\text{el}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{el}} \right] \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} = 0 \quad (2.66)$$

$$\left[\int_{V_{\text{el}}} \mathbf{B}^T \frac{1 + j\omega\alpha_K}{1 - j\frac{\alpha_M}{\omega}} \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B} dV - \omega^2 \int_{V_{\text{el}}} \mathbf{N}^T \rho_{\text{el}} \mathbf{N} dV \right] \boldsymbol{\xi}_{\text{N}} = 0 \quad (2.67)$$

mit einer komplexen, frequenzabhängigen Elastizitätsmatrix

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\text{el}}(\omega) = \frac{1 + j\omega\alpha_K}{1 - j\frac{\alpha_M}{\omega}} \mathbf{C}_{\text{el}} \quad (2.68)$$

analog zu Unterabschnitt 2.2.3. Werden andere frequenzabhängige Dämpfungsmodelle verwendet, muss das Lösen im Frequenzbereich erfolgen. Eine

2 Akustische Wellen in Festkörpern

anschließende Rücktransformation ermöglicht dennoch die Berechnung zeitabhängiger Signale.

3 Stand des Wissens

Zur Bestimmung der mechanischen Parameter gibt es einige standardisierte Messverfahren, die sich in der Regel auf einen kleinen Frequenzbereich beschränken. Daher werden zusätzlich Messverfahren im Ultraschall-Bereich entwickelt, die sich durch verschiedene Arten der Anregung und Detektion sowie der anschließenden Auswertung unterscheiden. Die anschließende Bestimmung der Materialparameter im inversen Verfahren setzt geeignete Materialmodelle voraus, die insbesondere bei Polymeren auch das frequenzabhängige Dämpfungsverhalten abbilden. Daher soll hier ein kurzer Überblick der gängigen Modelle gegeben werden. Unter Annahme eines solchen Dämpfungsmodells wird schließlich das meist numerische Vorwärtsmodell parametrisiert, um im inversen Verfahren dessen Eingangsparameter zu optimieren.

3.1 Inverses Problem

Die meisten ultraschallbasierten Messverfahren beruhen auf inversen Ansätzen (vgl. Unterabschnitt 3.2.2). Während bei einem direkten Problem die Wirkung $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ aus der Ursache $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ mit der Abbildung q direkt über

$$\mathbf{b} = q(\mathbf{p}) \quad (3.1)$$

bestimmt wird, handelt es sich umgekehrt um ein inverses Problem. Daher wird Gleichung 3.1 als direktes Problem und die Abbildung q als Vorwärtsmodell bezeichnet. [Rie03]

Bei Verfahren zur Materialcharakterisierung werden als Vorwärtsmodell analytische Ansätze oder numerische Simulationsmodelle wie in Abschnitt 3.4 genutzt, um den Modelleingangsparametervektor \mathbf{p} aus der Beobachtung \mathbf{b} mit

$$\mathbf{p} = q^{-1}(\mathbf{b}) \quad (3.2)$$

zu bestimmen. [Rie03]

Zur Lösung des inversen Problems werden die Modelleingangsparameter \mathbf{p} solange angepasst bis sie das Verhalten des Systems, was im Kontext der

3 Stand des Wissens

Materialcharakterisierung dem Verhalten der Probe entspricht, repräsentieren. Dazu wird davon ausgegangen, dass die Modelleingangsparameter \mathbf{p} das Systemverhalten am besten repräsentieren, die gleichzeitig die Ziel- bzw. Kostenfunktion $\epsilon(\mathbf{p})$ minimieren. Die Zielfunktion ist ein Maß für die Diskrepanz der Beobachtungen \mathbf{b}_{Mes} aus der Messung und dem Modellausgang $\mathbf{b}_{\text{Sim}} = q(\mathbf{p})$. Als einfache Zielfunktion findet häufig die ℓ_2 -Norm der quadratischen Differenz der Beobachtungen $\epsilon(\mathbf{p}) = \|\mathbf{b}_{\text{Sim}} - \mathbf{b}_{\text{Mes}}\|_2^2$ Anwendung.

Zur effizienten Suche des Minimums der Zielfunktion wird ein Optimierungsalgorithmus verwendet. Dieser liefert mit

$$\mathbf{p}^{(\text{opt})} = \arg \min_{\mathbf{p}} \epsilon(\mathbf{b}_{\text{Mes}}, \mathbf{b}_{\text{Sim}}(\mathbf{p})) \quad (3.3)$$

den besten Schätzwert für die Modelleingangsparameter $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$. Im Fall einer Materialparameterbestimmung, handelt es sich bei dem besten Schätzwert von $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$ um die gesuchten Materialparameter. Als Optimierungsalgorithmus werden häufig lokale Optimierungsalgorithmen verwendet. Diese suchen das Optimum in der Nähe zuvor aus den Beobachtungen \mathbf{b}_{Mes} geschätzter Startwerte der Eingangsparameter $\mathbf{p}^{(0)}$. Besitzt die Zielfunktion mehrere lokale Nebenminima, kann der Optimierungsalgorithmus in ein solches abgelenkt werden, weshalb Startwerte in der Nähe des globalen Minimums notwendig sind. Zudem reduzieren Startwerte in der Nähe des Optimums die Anzahl der benötigten Iterationsschritte des Optimierungsalgorithmus und somit die benötigte Rechenzeit. Beispiele für lokale Optimierungsalgorithmen sind der Nelder-Mead-Simplex- [NM65] oder der BOBYQA-Algorithmus. Das Akronym BOBYQA steht für *bound optimization by quadratic approximation* [Pow09]. Wie der Name bereits sagt, wird bei diesem Algorithmus die Zielfunktion als quadratische Funktion approximiert und dessen Minimum gesucht, wobei während der Suche Parametergrenzen berücksichtigt werden. Ähnlich zum BOBYQA ist der COBYLA (*constrained optimization by linear approximation* [Pow94]), der die Zielfunktion linear interpoliert. Bei diesen handelt es sich um ableitungsfreie Algorithmen, sodass diese geeignet sind für nicht stetig differenzierbare Zielfunktionen.

Weiter verbreitet sind Gradienten-basierte Verfahren, die das Minimum der Zielfunktion in Richtung des abfallenden Gradienten suchen. Dieser wird meist numerisch über finite Differenzen approximiert, kann aber auch durch algorithmisches Differenzieren [Mar19] berechnet werden.

Alternativen stellen globale Optimierungsalgorithmen wie genetische

[Gol12] oder evolutionäre Algorithmen [PLS05] dar. Diese benötigen keine Startwerte [Gol12], jedoch in der Regel eine deutlich höhere Anzahl Iterationen, was zu einem höheren Rechenaufwand führt. Existieren statt eines eindeutigen globalen Minimums eine Vielzahl gleichwertiger lokaler Minima, ist eine eindeutige Lösung mittels globalen Optimierungsalgorithmus ebenfalls nicht möglich.

3.2 Messverfahren zur akustischen Materialparameterbestimmung

Neben den weit verbreiteten, meist zerstörenden, mechanischen Methoden, existieren eine Vielzahl ultraschallbasierter, zerstörungsfreier Ansätze zur Materialparameterbestimmung von Polymeren. Da für die meisten Verfahren spezielle Prüfkörper mit bestimmten Geometrien hergestellt werden müssen, können die Ergebnisse nicht ohne weiteres auf andere Verfahren übertragen werden, weil die Materialeigenschaften einiger Kunststoff- und Metallproben stark vom Herstellungsprozess selbst beeinflusst werden [GS15]. Selbst wenn zum Vergleich die identische Probe verwendet wird, erfassen mechanische Messverfahren das Materialverhalten im quasistatischen, ultraschallbasierte Methoden hingegen im hochfrequenten, dynamischen Frequenzbereich. Werden zudem unterschiedliche Materialmodelle im nieder- und hochfrequenten Bereich genutzt, anstatt eines geeigneten Materialmodells zur Beschreibung von sowohl quasistatischem wie auch hoch dynamischem Bereich, ergeben sich zusätzliche Diskrepanzen.

3.2.1 Mechanische Messverfahren

Das am weitesten verbreitete Verfahren zur zerstörenden Bestimmung des statischen Elastizitätsmoduls von Kunststoffen ist der Zugversuch nach DIN EN ISO 527 [MHM11; DIN 527]. Dabei wird so lange an einer Probe gezogen, bis diese reißt, während kontinuierlich die Zugkraft gemessen wird. Wird diese auf die Querschnittsfläche der Probe bezogen, ergibt sich die aufgebrachte Zugspannung. Über die gemessene Längenänderung des Zugstabs wird die mechanische Dehnung ermittelt, sodass ein Spannungs-Dehnungs-Verhalten gemessen wird. Der resultierende statische Elastizitätsmodul wird als Sekantenmodul aus der Steigung einer Sekante am Spannungs-Dehnungs-Diagramm im Bereich von 0,05 % und 0,25 % der Dehnung bestimmt [GS15]. Da es sich um eine quasistatische Messung handelt, kann aus dem Zugversuch keine Aussage über das frequenzabhängige

3 Stand des Wissens

Verhalten getroffen werden.

Hierfür stellt der Kriech- bzw. Retardationsversuch ein standardisiertes Prüfverfahren nach DIN EN ISO 899 dar. Mittels definierter Masse wird eine konstante mechanische Spannung σ_0 aufgebracht und die zeitabhängige Dehnungskurve $\varepsilon(t)$ gemessen, welche mit $J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0$ die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ liefert. [DIN 899] Da die Spannungsaufprägung nicht als idealer Sprung realisiert werden kann, erfolgt die Messung der Dehnungskurve um einige Sekunden verzögert [Lak04].

Analog zum Retardationsversuch, wird beim Relaxationsversuch [DIN 53441] eine konstante Dehnung ε_k aufgebracht und der resultierende Spannungsverlauf $\sigma(t)$ aufgenommen, um über $G(t) = \sigma(t) / \varepsilon_k$ den Relaxationsmodul $G(t)$ zu bestimmen. Die Fouriertransformation des Spannungsverlaufs liefert schließlich nach Gleichung 2.28 den Speicher- und Verlustmodul. [Lak04] Retardations- und Relaxationsversuch eignen sich für einen Frequenzbereich von unter 1 Hz, wohingegen sich Geräte zur Dynamisch-Mechanischen-Analyse (DMA) nach DIN EN ISO 6721 [GS15] für einen Frequenzbereich von bis zu 200 Hz eignen [Hit22; Tex]. Bei der DMA mit erzwungenen Schwingungen wird ein streifenförmiger Probekörper mit einer sinusförmigen mechanischen Spannung angeregt und die Dehnung gemessen. Die Aufzeichnung der Dehnung führt dazu, dass Phasenverschiebung δ zwischen mechanischer Spannung und Dehnung sowie der Betrag des komplexen Moduls durch Quotientenbildung nach Gleichung 2.28 bestimmt werden können [GS15; N23]. Die obere Grenze im Frequenzbereich wird durch die Resonanzfrequenz des Probekörpers gebildet [GS15], da sich in dem Bereich stehende Wellen überlagern.

Eine Möglichkeit die obere Frequenz-Barriere zu umgehen, ist das Ausnutzen des Zeit-Temperatur-Superpositions-Prinzips [Bon09b]. Dies setzt voraus, dass sich die Einflüsse von Temperatur und Zeit ungestört überlagern. Allerdings beeinflusst ein starker Temperaturanstieg die Eigenschaften der Probe z.B. durch Polymerkettenspaltung, sodass eine nachfolgende Messung bei niedrigerer Temperatur andere Ergebnisse liefert als eine Messung bei zunächst niedriger und anschließend hoher Temperatur [Lak04].

3.2.2 Ultraschallbasierte Messverfahren

Ergänzend zu den quasistatischen, meist zerstörenden Prüfverfahren, gewinnen ultraschallbasierte Prüfverfahren zunehmend an Bedeutung. Neben der Zerstörungsfreiheit ist insbesondere die Anwendbarkeit bei höheren Frequenzen als Ergänzung zu den quasistatischen Verfahren notwendig, um Kenntnisse der Materialparameter bei höheren Frequenzen im Megahertz-

3.2 Messverfahren zur akustischen Materialparameterbestimmung

Bereich z.B. zur Dimensionierung von Ultraschallsensoren zu erlangen.

Als direktes Messverfahren sind Laufzeitmessungen im Impuls-Echo oder Transmissionsverfahren [BRF16], teilweise auch unter Wasser [MA71] weit verbreitet, wobei letzteres für viele Polymere aufgrund ihrer Wasseraufnahme eher ungeeignet ist. Bei bekannter Länge der Messstrecke lässt sich durch Messung der Laufzeit der Welle deren Longitudinal bzw. Transversalwellengeschwindigkeit bestimmen. Dabei werden die Signale in der Regel von direkt oder zum Teil auch luftgekoppelten Schallwandlern gesendet und empfangen. [CH01; CC96; KK86; DPV97; AC91]

Als breitbandige Schallquelle dienen direkt gekoppelte Phased Arrays [BLB18] oder Impulslaser (i.d.R. Nd:YAG) [SML14; JJ01; PCR08; CPR10; WL99]. Abhängig von der Impulsenergie und den optischen sowie thermooelastischen Eigenschaften des Materials, werden letztere in der Regel zur Anregung von Lamb-Wellen in Plattenwellenleitern eingesetzt.

Der Empfang von Plattenwellen erfolgt piezoelektrisch [CMB16] oder mittels elektromagnetischer Wandler [DB10], wobei letztere auf leitfähige Materialien als Messmedium beschränkt sind. Zur berührungslosen Messung, sind zudem Laser-Doppler-Vibrometer zur Schwingungsdetektion weit verbreitet [GVR13; CPR10; PB19; HN19; PKR19]. Die Detektierbarkeit der mechanischen Auslenkung der Welle hängt in dem Fall von den optischen Reflexionseigenschaften der Probe ab. In [CSG21] zeigt sich, dass Laser-Doppler-Vibrometer Verschiebungen senkrecht zur Plattenoberfläche detektieren, während der dort verwendete piezoelektrische Schallwandler Verschiebungen parallel zur Plattenoberfläche aufnimmt. Durch Variation des Abstands zwischen Anregung und Empfang liefert solch ein Messverfahren zeit- und ortsaufgelöste Messsignale. Zur Auswertung dieser wird eine zweidimensionale Fourier-Transformation durchgeführt. In der Darstellung des Betrags der Fourier-Transformierten werden abhängig von Frequenz und Wellenzahl die sich ausbreitenden Moden als Grade sichtbar [AC90; AC91]. Aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu Dispersionsdiagrammen wird diese Darstellung im weiteren Verlauf der Arbeit auch als Dispersionsabbildung bezeichnet.

Die Materialparameterbestimmung erfolgt dann im inversen Verfahren (vgl. Abschnitt 3.1) durch Abgleich der Grade auf berechnete Dispersionskurven. Der Abgleich erfolgt mit einem Optimierungsalgorithmus, wobei genetische Algorithmen [SD08] sehr weit verbreitet sind [MM12; BLB18; PB19]. Dazu werden die Moden aus den Messdaten extrahiert, um die Abweichungen zwischen simulativ berechneten und detektierten Wellenzahlen zu minimieren. Die Automatisierung des Messverfahrens setzt dementsprechend eine verlässliche, robuste Modendetektion voraus. Da die Qualität

3 Stand des Wissens

der Messdaten stark von den viskoelastischen Eigenschaften der Probe sowie weiteren Messartefakten abhängen, ist eine verlässliche Modendektion insbesondere bei Materialproben mit hoher akustischer Dämpfung nicht immer gegeben. Die Berechnung der Dispersionskurven erfolgt in der Regel numerisch durch halbanalytische FEM-Ansätze [SRM11; PB19] oder eine numerische Nullstellensuche der Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung [GBH18; CMB16; VKB07]. Bei der Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung wird eine homogene, isotrope Plattenstruktur angenommen, was das zu identifizierende Materialmodell stark einschränkt.

Alternativen bieten verschiedene Transmissionsmessverfahren. So messen z.B. Castaings et al. [CHK00] die Transmission ebener Wellen durch eine Platte unter Wasser. Senden und Empfangen erfolgen dabei piezoelektrisch. Der winkel- und frequenzabhängige Transmissionsfaktor wird mittels Thomson-Haskell-Methode [Tho50; Has53] zur Prädiktion des Empfangsspektrums bestimmt. Dieses wird in einem inversen Verfahren mit dem gemessenen Empfangsspektrum verglichen. Dabei werden sowohl Real- als auch Imaginärteil der Koeffizienten der Elastizitätsmatrix (Elastizitätskoeffizienten) bestimmt, wobei die Unsicherheit der Imaginärteile gegenüber den Realteilen deutlich höher ist [CHK00].

Beim dreidimensionalen *Polar Scan* wird mit einer breitbandigen Impulsanregung Reflexion und Transmission durch eine Platte bei unterschiedlichen Winkeln gemessen [KMD16]. Der Aufbau unterscheidet sich im Vergleich zu Castaings [CHK00] durch eine zusätzliche Drehebene der Platte. Zur besseren Ankopplung der Schallwandler wird wie bei [CHK00] unter Wasser gemessen. Durch Auswertung der Laufzeit werden zunächst die ideal-elastischen, reellen Elastizitätskoeffizienten bestimmt, während die viskoelastischen, komplexen Elastizitätskoeffizienten im zweiten Schritt durch Auswertung der Amplitudeninformation im inversen Verfahren bestimmt werden [MKD19]. Das Vorwärtsmodell basiert auf Lösung der Christoffel-Gleichung. Als Optimierungsalgorithmus wird der *Particle Swarm*-Algorithmus [PKB07] genutzt. Durch das Eintauchen unter Wasser sind die Verfahren von [CHK00; MKD19; PKB07] geeignet für metallische Werkstoffe und hydrophobe Polymere, während sich die Eigenschaften hydrophiler Polymere durch dessen Wasseraufnahme verändern.

Ein anderes Verfahren basierend auf Transmissionsmessungen nutzen Bause et al. [BRF16]. In dem Aufbau werden zwei Kontakt-Piezokomposit-Wandler für Transmissionsmessungen an zylinderförmigen Polymerproben verwendet. Der Vergleich der Empfangssignale mit Simulationssignalen des zylindrischen Wellenleiters erfolgt durch kleinste Fehlerquadrate im Zeitbereich. Das Vorwärtsmodell basiert auf Modaler Expansion, wobei

die Berechnung der Eigenschwingungen mittels Scaled Boundary FEM (SBFEM) [GBS14] erfolgt. Zudem wird nicht nur die komplexe Elastizitätsmatrix im inversen Verfahren bestimmt, sondern über Messungen bei mehreren Frequenzen ein frequenzabhängiges fraktionales Zener-Modell mittels BOBYQA-Algorithmus [Pow09] identifiziert.

3.3 Dämpfungsmodelle

Besonders einfach lässt sich eine frequenzunabhängige Elastizitätsmatrix z.B. mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} (1 + j\alpha_0) \quad (3.4)$$

in Simulationen nutzen. Zwar erhöht sich durch die komplexen Parameter die Rechenzeit, jedoch sind keine weiteren Modifikationen in der Simulation notwendig. Genutzt wird es z.B. zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens von Piezokeramiken [FSC21], die eine schwache Dämpfung aufweisen. Um jedoch die Kausalitätsbedingungen nach Kramers-Kronig [Kra28; Kro26] zu erfüllen, muss jedes dissipative System notwendigerweise auch dispersiv sein [Fel21], weshalb mehrere frequenzabhängige Materialmodelle existieren. Neben den elementaren Modellen wie Newton-, Maxwell- oder dem Kelvin-Voigt-Modell, [Mai10; RDC11] ist das Rayleigh-Modell [Ray85] am meisten verbreitet, weil es sich mathematisch besonders leicht in eine Finite-Elemente-Simulation einbauen lässt (vgl. Unterabschnitt 2.4.2), sodass es in vielen kommerziellen FEM-Software-Tools enthalten ist. In Frequenzbereich-Berechnungen lässt es sich ebenfalls leicht mit Gleichung 2.68 einbauen. Da die Dämpfung sowohl für kleine als auch große Frequenzen gegen unendlich läuft, verhält es sich nicht kausal [Fel21]. Damit beschränkt sich seine Gültigkeit auf einen schmalbandigen Bereich um einen Arbeitspunkt. Eine zu weite Entfernung vom Frequenz-Arbeitspunkt führt zu schlechteren Übereinstimmungen mit Messergebnissen. Physikalisch begründet hingegen ist das Zener-Modell (auch als *standard linear solid* bekannt) [ZS49], welches mit Gleichung 2.38 modelliert wird. Aufgrund der Analogie zwischen akustischen und elektromagnetischen Wellen, lässt es sich auch zur physikalisch begründeten Modellierung dielektrischer Relaxation nutzen [BRH98]. Bei Betrachtung der thermoelastischen Kopplung führt eine verallgemeinerte Form der Wärmeleitungsgleichung nach [Mai94; Mai10; Zen65; Pri96] zum fraktionalen Zener-Modell, welches durch Gleichung 2.41 beschrieben wird. Die Berücksichtigung der fraktionalen Ableitungsordnung beschränkt sich nicht auf das fraktionale Zener-Modell, sondern findet sich z.B. auch beim Maxwell-Modell [Rog83] wieder. Neben

3 Stand des Wissens

der Modellierung des viskoelastischen Verhaltens von z.B. Gehirngewebe [KST05], ist das fraktionale Zener-Modell geeignet zur Beschreibung des breitbandigen, dynamischen Verhaltens von Polymeren [Pri03; BT86; BRF16]. Bause [Bau16] nutzt eine Abwandlung des fraktionalen Zener-Modells zur Beschreibung des akustischen Verhaltens polymerer, extrudierter Hohlzylinder. Die transversal-isotrope Elastizitätsmatrix zerlegt er zuvor in seine Eigenwerte und Eigenvektoren nach Gleichung 2.39 [The00], welche den Hauptenergierichtungen im Material entsprechen. Dabei ergeben sich vier Eigenwerte [The00]. Für das Dämpfungsmodell fasst Bause jedoch drei zusammen, die quasi eine reine Scherbewegung repräsentieren, während der übrige Eigenwert Kompressionsbewegungen repräsentiert und mit entsprechend anderen Modellparametern modelliert wird. Mit diesem Modell und dem Messverfahren für hohlzylindrische Polymerproben gelingt es Bause in [BRF16] Materialparameter zu identifizieren, die das dynamische Verhalten realitätsnah abbilden.

3.3.1 Das fraktionale Zener-Modell zur Modellierung von Polymeren

Aufgrund der einfachen Implementierung in einer FEM-Simulation (vgl. Unterabschnitt 2.4.2) ist das Rayleigh-Modell weit verbreitet, jedoch nicht physikalisch begründet und auch im Allgemeinen nicht kausal. Das fraktionale Zener-Modell hingegen ist physikalisch begründet und somit kausal, was sich mittels Kramer-Kronig-Beziehung [WMM05] zeigen lässt. Zahlreiche Quellen [Pri03; BT86; Bau16] bestätigen die Eignung des fraktionalen Zener-Modells zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens von Polymeren.

Daher werden zunächst die Ausbreitungseigenschaften ebener Wellen (Schallgeschwindigkeit und Absorption) bei Annahme eines fraktionalen Zener-Modells nach Gleichung 2.41 betrachtet.

Als Absorption α_F wird im Folgenden die akustische Dämpfung einer Welle unter Freiraumbedingungen bezeichnet. Unter Annahme von Freiraumbedingungen ergeben sich die jeweiligen Ausbreitungsgeschwindigkeiten und die akustische Absorption in Abhängigkeit von der Relaxationszeitkonstanten τ_σ , der Retardationszeitkonstanten τ_ε , der fraktionalen Ableitungsordnung a und der (quasi)statischen Schallgeschwindigkeit c_0

zu:

$$c(\omega) = c_0 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1 + (j\omega\tau_\varepsilon)^a}{1 + (j\omega\tau_\sigma)^a}} \right\} \quad (3.5)$$

$$\alpha_F(\omega) = -\frac{\omega}{c_0} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{\left(\frac{1 + (j\omega\tau_\varepsilon)^a}{1 + (j\omega\tau_\sigma)^a} \right)^{-1}} \right\} \quad (3.6)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die alternative Darstellung

$$c(\omega) = c_0 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1 + d(j\omega\tau_\sigma)^a}{1 + (j\omega\tau_\sigma)^a}} \right\} = c_0 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\gamma(\omega)} \right\} \quad (3.7)$$

$$\alpha_F(\omega) = -\frac{\omega}{c_0} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{\left(\frac{1 + d(j\omega\tau_\sigma)^a}{1 + (j\omega\tau_\sigma)^a} \right)^{-1}} \right\} = -\frac{\omega}{c_0} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{\gamma(\omega)^{-1}} \right\} \quad (3.8)$$

mit

$$d = \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^a \quad (3.9)$$

als Verhältnis der Zeitkonstanten verwendet. Der Verlustfaktor ergibt sich nach Gleichung 2.30 zu

$$\tan \delta = \frac{\operatorname{Im}\{\gamma(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\gamma(\omega)\}}. \quad (3.10)$$

Abbildung 3.1 bis 3.3 zeigen Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption unter Freiraumbedingungen bei unterschiedlich parametrisierten fraktionalen Zener-Modellen. Allgemein lassen sich die Verläufe in drei Bereiche nach Tabelle 3.1 einteilen: Für kleine Frequenzen ($\omega \ll \tau_\varepsilon^{-1}$) bleibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit nahezu beim statischen Wert bis sie im Bereich von $\tau_\varepsilon^{-1} \ll \omega \ll \tau_\sigma^{-1}$ proportional zu $\omega^{a/2}$ ansteigt, um im Bereich $\omega \gg \tau_\sigma^{-1}$ den Endwert von $c_0 (\tau_\varepsilon \tau_\sigma^{-1})^{a/2} = c_0 \sqrt{d}$ zu erreichen. Dabei führt der Parameter d zu einer Skalierung des Endwertes und die Relaxationszeit τ_σ zu einer Verschiebung auf der Frequenzachse, während die fraktionale Ableitungsordnung die Steigung des mittleren Segments um den Wendepunkt bestimmt. So führt eine niedrige Ableitungsordnung in Abbildung 3.2 unterhalb des Wendepunkts zu einer höheren, oberhalb des Wendepunkts zu einer niedrigeren Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Ähnliches gilt für den Verlustfaktor in Abbildung 3.4: Die Relaxationszeitkonstante τ_σ verschiebt den Verlustfaktor entlang der Frequenzachse, der Parameter d skaliert

3 Stand des Wissens

Tabelle 3.1: Segmente des Dispersionsverhaltens des fraktionalen Zener-Modells nach [HN11]

Segment	Wellengeschwindigkeit	Absorption
$\omega \ll \tau_\varepsilon^{-1} = \tau_\sigma^{-1} d^{-1/a}$	$c(\omega) \approx c_0$	$\alpha_F(\omega) \propto \omega^{1+a}$
$\tau_\varepsilon^{-1} \ll \omega \ll \tau_\sigma^{-1}$	$c(\omega) \propto \omega^{a/2}$	$\alpha_F(\omega) \propto \omega^{1-a/2}$
$\omega \gg \tau_\sigma^{-1}$	$c(\omega \rightarrow \infty) = c_0 (\tau_\varepsilon \tau_\sigma^{-1})^{a/2}$	$\alpha_F(\omega) \propto \omega^{1-a}$

dessen Maximum, während die Ableitungsordnung a sowohl das Maximum skaliert als auch die Steigung um die Wendepunkte. Dementsprechend führt eine kleinere Ableitungsordnung a zu einem kleineren Maximum, gleichzeitig jedoch auch zu einem höheren Verlustfaktor bei niedrigen und hohen Frequenzen. Die Absorption steigt für hohe Frequenzen, je kleiner a , während diese im niederfrequenten Bereich keine Auswirkungen auf die Absorption hat (vgl. Abbildung 3.2).

Bei Variation des Parameters d zeigt sich in Abbildung 3.1 für die Absorption gleiches Verhalten wie für die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Angesichts des Verlustfaktors in Abbildung 3.4 wäre bei Variation der Relaxationszeitkonstante τ_σ eine reine Verschiebung der Absorption entlang der Frequenzachse, wie bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit, zu erwarten. Aufgrund der Parametrisierung nach Gleichung 3.8 führt eine Erhöhung der Relaxationszeitkonstante τ_σ jedoch auch stets zu einer Erhöhung bzw. Verringerung des Verlustmoduls und somit der Absorption.

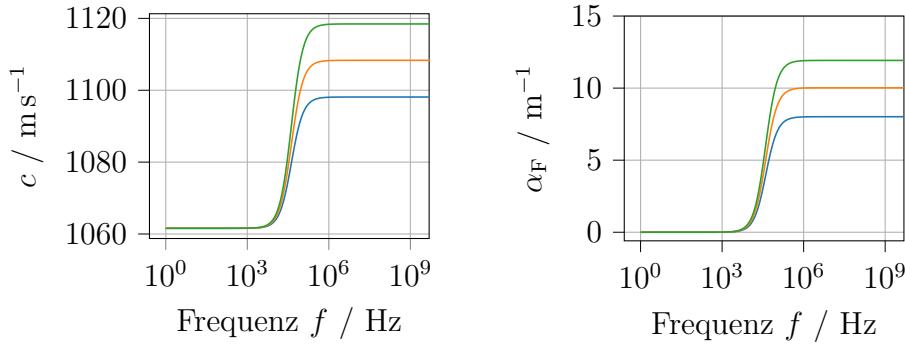


Abbildung 3.1: Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation des Parameters d : $d = 1,07$ (blau), $d = 1,09$ (orange), $d = 1,11$ (grün), restliche Parameter: $c_0 = 1061 \text{ m s}^{-1}$, $\tau_\sigma = 0,6 \mu\text{s}$, $a = 1$

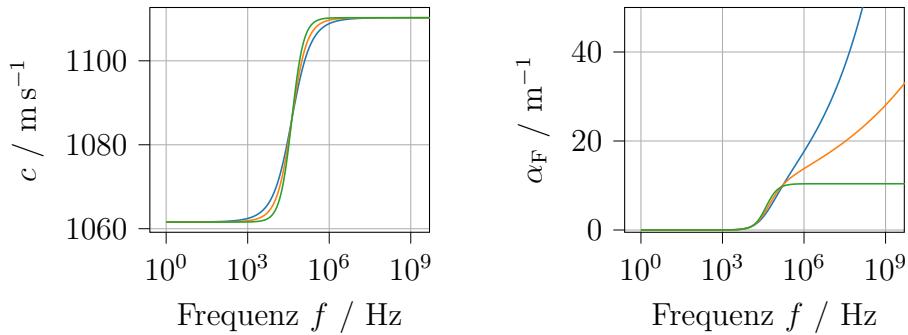


Abbildung 3.2: Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation von a : $a = 0,8$ (blau), $a = 0,9$ (orange), $a = 1$ (grün) (ist gleichzeitig die obere physikalische Grenze), restliche Parameter: $c_0 = 1061 \text{ m s}^{-1}$, $\tau_\sigma = 0,6 \mu\text{s}$, $d = 1,09$

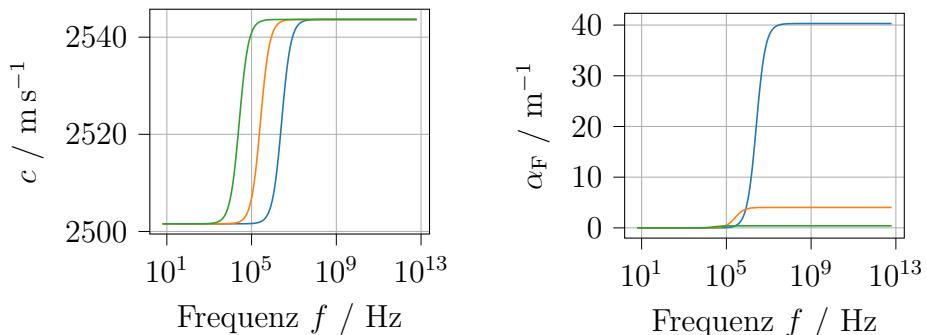


Abbildung 3.3: Ausbreitungsgeschwindigkeit und Absorption bei Variation von τ_σ : $\tau_\sigma = 0,06 \mu\text{s}$ (blau), $\tau_\sigma = 0,6 \mu\text{s}$ (orange), $\tau_\sigma = 6 \mu\text{s}$ (grün), restliche Parameter: $c_0 = 1061 \text{ m s}^{-1}$, $d = 1,09$, $a = 1$

3 Stand des Wissens

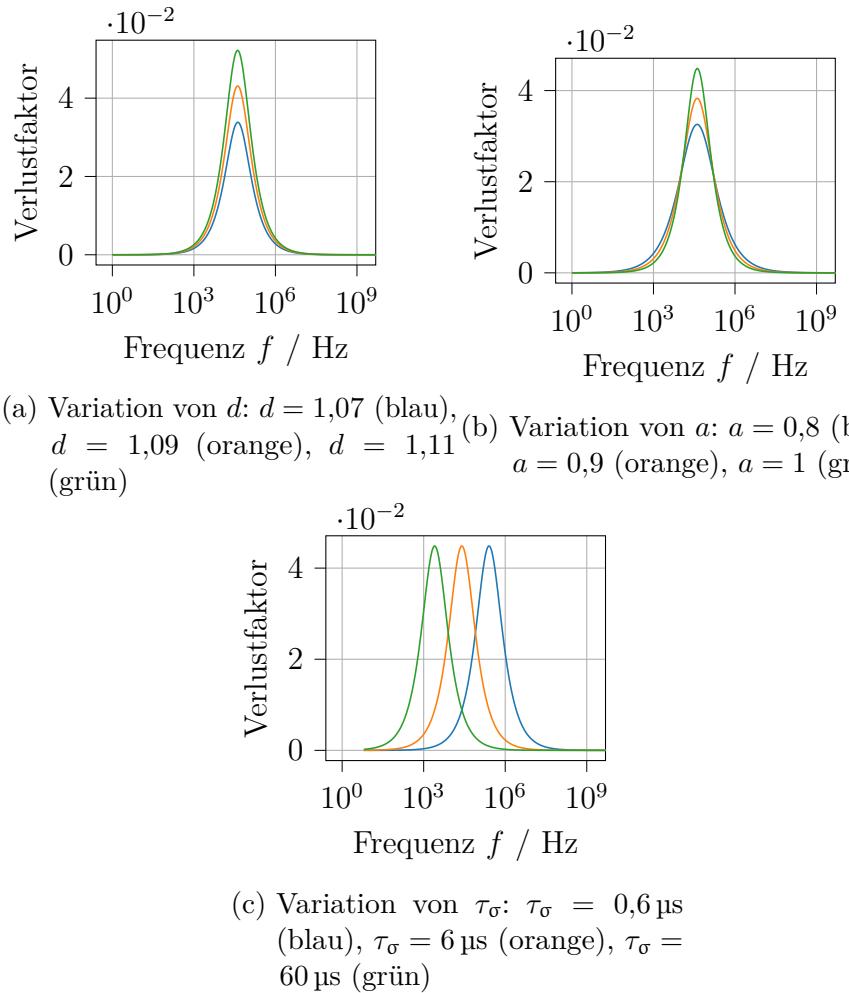


Abbildung 3.4: Verlustfaktor bei Variation der Modellparameter. Parameter, falls nicht anders angegeben: $c_0 = 1061 \text{ m s}^{-1}$, $\tau_\sigma = 0,6 \mu\text{s}$, $d = 1,09$, $a = 1$

3.3.2 Fraktionales Zener-Modell für Kompressions- und Scherbewegungen

Zur Generalisierung auf alle Raumrichtungen führt Bause [Bau16] eine Eigenwertzerlegung der Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S} nach [TS99] durch, womit jede Hauptrichtung des Materials nach Gleichung 2.40 unterschiedliche Absorption erfahren kann. Bause verwendet zylinderförmige, extrudierte Proben und nimmt dafür ein transversal-isotropes Materialmodell an. Bei der Bestimmung effektiver, elastischer Materialparameter zeigt sich, dass für homogene Polymerplatten bereits ein isotropes Materialmodell geeignet ist.

Bei Zerlegung einer isotropen Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} K + \frac{4}{3}\mu & K - \frac{2}{3}\mu & K - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}\mu & K - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

mit dem Kompressionsmodul K und dem Schermodul μ ergeben sich nach Gleichung 2.39 drei Eigenwerte Λ_i mit den zugehörigen Projektionsmatrizen,

3 Stand des Wissens

die sich aus den jeweiligen Eigenvektoren $\mathbf{D}_i = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$ zusammen setzen [Bau16]:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_1 = 3K, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_2 = 2\mu, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_3 = \mu. \quad (3.14)$$

Wie sich an den Matrix-Einträgen ablesen lässt, bildet der dritte Eigenwert reine Scherbewegungen ab, der erste Eigenwert eine reine Kompressionsbewegung, während der zweite Eigenwert bzw. dessen zugehörige Projektionsmatrix deren Kopplung abbildet. Werden der erste und der zweite Eigenwert zu einer Longitudinalbewegung mit

$$\mathbf{C} = \underbrace{(3K\mathbf{D}_1 + 2\mu\mathbf{D}_2)}_{\text{Longitudinal}} + \underbrace{\mu\mathbf{D}_3}_{\text{Transversal}} \quad (3.15)$$

zusammengefasst, können Longitudinal- und Transversalwellen mit unterschiedlicher Parametrisierung modelliert werden. Bause [Bau16] wählt jedoch mit

$$\mathbf{C} = \underbrace{3K\mathbf{D}_1}_{\text{Kompression}} + \underbrace{\mu(2\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3)}_{\text{Scherung}} \quad (3.16)$$

die Zerlegung in Kompressions- und Scherbewegungen, um diese mit unterschiedlichen Parametern zu modellieren [Bau16]. Diese Zerlegung stellt eine Analogie zur Aufteilung der Viskosität in Volumen- und Scherviskosität

bei Flüssigkeiten dar [CHB19; Šut84].

Als Eigenwerte ergeben sich dafür Kompressions- und Schermodul, K und μ , mit den zugehörigen Projektionsmatrizen \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 und \mathbf{D}_3 aus Gleichung 3.12 bis 3.14. Demnach ist eine Zerlegung nach Kompressions- und Scherbewegungen möglich, um auf diese unterschiedliche Dämpfungsmodelle anzuwenden (vgl. Abschnitt 3.3 bzw. [Bau16]).

Bause [Bau16] schlägt bei Polymeren die Anwendung eines fraktionalen Zener-Modells auf die jeweiligen Komponenten vor. Da es sowohl physikalisch begründet sowie kausal ist und es sich als gut geeignet zeigt, wird in dieser Arbeit darauf zurückgegriffen. Das resultierende Materialmodell wird somit nach Gleichung 3.16 mit der komplexen frequenzabhängigen Elastizitätsmatrix

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1 + d_K (j\omega\tau_{\sigma_K})^{a_K}}{1 + (j\omega\tau_{\sigma_K})^{a_K}} 3K\mathbf{D}_1 + \frac{1 + d_\mu (j\omega\tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}{1 + (j\omega\tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}} \mu (2\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3) \quad (3.17)$$

über insgesamt acht Materialparameter beschrieben, die zu identifizieren sind. Dazu zählen der statische Kompressionsmodul K , der statische Schermodul μ , die Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_K} und τ_{σ_μ} , die fraktionale Ableitungsordnungen a_K und a_μ , sowie der Parameter d_K bzw. d_μ , der das Verhältnis zwischen Retardations- und Relaxationszeitkonstante beschreibt.

3.4 Wellenleitersimulationsverfahren

Frequenzabhängige Dämpfungsmodelle lassen sich sehr leicht durch Annahme komplexer Materialparameter und Auswertung bei entsprechender Frequenz in harmonische Frequenzbereichssimulationen einfügen. Für FEM-Simulationen im Zeitbereich müssen aufgrund der Faltungsoperation in Gleichung 2.27 neben dem aktuellen Zeitschritt zusätzlich die Ergebnisse vorheriger Zeitschritte gespeichert werden. Dies führt zu einem enormen Speicherbedarf und ist nicht praktikabel. Das Dilemma lässt sich bei Wellenleitern jedoch leicht mit Ansätzen der modalen Expansion [LMH; CWZ00] lösen. Dafür werden zunächst im Frequenzbereich die Eigenschwingungen berechnet und mithilfe eines Fourier-Reihen-Ansatzes das Zeitsignal approximiert. Zur Berechnung des zugrunde liegenden Dispersionsdiagramms gibt es unterschiedliche Berechnungsansätze. Während sich eine numerische Nullstellensuche der Rayleigh-Lamb-Gleichung (vgl. Gleichung 2.43) auf isotrope Plattenwellenleiter beschränkt [GBH18; VKB07; CMB16] gibt es zahlreiche numerische Simulationstechniken. Der meist verbreitete Ansatz dafür ist die semi-analytische Finite-Elemente-Methode (SAFE) [BMD06]. Diese nimmt in Ausbreitungsrichtung eine ebene, harmonische Welle an, während die übrigen Raumrichtungen mittels FEM diskretisiert werden.

Der zugrunde liegende Ansatz kann auf verschiedene Weisen z.B. als Postprocessing aus Standard-FEM-Software abgeleitet [MDB05; SCG11; MWG06; Tre07] oder z.B. mittels Scaled Boundary FEM (SBFEM) [GMS13; WS00] hergeleitet werden.

Der generelle Vorteil der Scaled Boundary FEM ist der, dass wie bei der Randelementmethode (Boundary Element Method) nur der Rand diskretisiert werden muss [WS00; Bes87; Gua10]. Dadurch verringert sich der Rechenaufwand, simultan ergeben sich aber bei der Randelementmethode anders als bei der FEM vollbesetzte Matrizen, was den verminderten Speicherbedarf gegenüber der geringeren Anzahl an Freiheitsgraden kompensiert.

Gleichzeitig werden bei der SBFEM die Randelemente wie finite Elemente behandelt. Die Dimension der finiten Randelemente ist um eins geringer als bei gewöhnlichen finiten Elementen, sodass sie die Vorteile der dünn besetzten Matrizen finiter Elemente mit dem reduzierten Diskretisierungsaufwand der Randelementmethode verbindet [WS00].

Beispielsweise ergibt sich in kartesischen Koordinaten für eine sich in y -Richtung ausbreitende Welle der semi-analytische FEM-Ansatz für die mechanischen Verschiebungen eines finiten Elements ξ_{el} aus Gleichung 2.52

zu

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{el}} = \mathbf{N}(x, z) \hat{\boldsymbol{\xi}}_N e^{j(ky - \omega t)}. \quad (3.18)$$

mit den Ansatzfunktionen in $\mathbf{N}(x, z)$, der Basis der nodalen Verschiebungen $\hat{\boldsymbol{\xi}}_N$, der Kreiswellenzahl k sowie der Kreisfrequenz ω [BMD06; Ros04]. Während bei dem herkömmlichen Finite-Elemente-Ansatz die örtlichen Abhängigkeiten vollständig in den Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(x, z)$ enthalten sind, ist die örtliche Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung (y -Richtung) nur in der Exponentialfunktion enthalten.

Unter der Annahme von Spannungsfreiheit am Rand der Platte wird der semi-analytische FEM-Ansatz aus Gleichung 3.18 in Gleichung 2.59 eingesetzt. Gleichzeitig wird die Testfunktion transponiert und konjugiert komplex zum Ansatz aus Gleichung 3.18 gewählt. Damit wird die Integralgleichung aus Gleichung 2.59 zu

$$0 = \underbrace{\int_{V_{\text{el}}} \delta \hat{\boldsymbol{\xi}}_N^T \mathbf{N}^T e^{-j(ky - \omega t)} \rho_{\text{el}} \mathbf{N} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{j(ky - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\xi}}_N) dV}_{I_1} + \underbrace{\int_{V_{\text{el}}} (\delta \hat{\boldsymbol{\xi}}_N)^T (\mathbf{L} \mathbf{N})^T e^{-j(ky - \omega t)} \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{L} \mathbf{N} e^{j(ky - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\xi}}_N dV}_{I_2} \quad (3.19)$$

modifiziert. Das erste Integral I_1 vereinfacht sich zu

$$I_1 = -\delta \hat{\boldsymbol{\xi}}_N^T \omega^2 \underbrace{\int_{V_{\text{el}}} \mathbf{N}^T \rho_{\text{el}} \mathbf{N} dV}_{M_{\text{el}}} \hat{\boldsymbol{\xi}}_N \quad (3.20)$$

und ergibt äquivalent zur herkömmlichen FEM die Element-Massematrix \mathbf{M}_{el} .

Mit Zusammenfassen der Differentialoperatormatrix \mathbf{L} und der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} zur FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B} wie in Gleichung 2.54 lässt sich das zweite Integral als

$$I_2 = \delta \hat{\boldsymbol{\xi}}_N^T \int_{V_{\text{el}}} \mathbf{B}^T e^{-j(ky - \omega t)} \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B} e^{j(ky - \omega t)} dV \hat{\boldsymbol{\xi}}_N \quad (3.21)$$

schreiben. Da nur die Exponentialfunktion von der Ausbreitungsrichtung y abhängt, lässt sich die örtliche Ableitung in Ausbreitungsrichtung leicht analytisch berechnen. Daher wird die FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B} in eine FEM-Differentialoperatormatrix \mathbf{B}_1 , die nur Differentialoperatoren

3 Stand des Wissens

orthogonal zur Ausbreitungsrichtung enthält, und in eine Matrix \mathbf{B}_2 , die nur Ableitungsinformationen in Ausbreitungsrichtung enthält, zerlegt. Somit lässt sich Gleichung 3.21 zu

$$\begin{aligned} I_2 &= \delta \hat{\xi}_N^T \int_{V_{el}} (\mathbf{B}_1 - jk\mathbf{B}_2)^T e^{-j(ky-\omega t)} \mathbf{C}_{el} (\mathbf{B}_1 + jk\mathbf{B}_2) e^{j(ky-\omega t)} dV \hat{\xi}_N \\ &= \delta \hat{\xi}_N^T \int_{V_{el}} (\mathbf{B}_1 - jk\mathbf{B}_2)^T \mathbf{C}_{el} (\mathbf{B}_1 + jk\mathbf{B}_2) dV \hat{\xi}_N \\ &= \delta \hat{\xi}_N^T \int_{V_{el}} [\mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_1 - jk\mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_1 + jk\mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_2 + k^2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_2] dV \hat{\xi}_N \end{aligned} \quad (3.22)$$

umformen. Wie bereits in Gleichung 2.61 können die einzelnen Summanden kürzer als Steifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{K}_{1,el} = \int_{V_{el}} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_1 dV \quad (3.23)$$

$$\mathbf{K}_{2,el} = \int_{V_{el}} [\mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_1] dV \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}_{3,el} = \int_{V_{el}} \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B}_2 dV \quad (3.25)$$

geschrieben werden. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{1,el}$ enthält die örtlichen Ableitungsinformationen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung y und beschreibt somit das Dehnungsverhalten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, während $\mathbf{K}_{3,el}$ das Dehnungsverhalten in Ausbreitungsrichtung beschreibt. Beide Matrizen sind symmetrisch. Die Kopplung des Dehnungsverhaltens von Ausbreitungsrichtung mit den anderen beiden Raumrichtungen beschreibt $\mathbf{K}_{2,el}$, da diese sowohl örtliche Ableitungsinformationen in Ausbreitungsrichtung wie auch senkrecht dazu enthält. [BMD06]

Einsetzen der Masse- und Steifigkeitsmatrizen in Gleichung 3.19 ergibt

$$\delta \hat{\xi}_N^T \left[\underbrace{\mathbf{K}_{1,el} + jk\mathbf{K}_{2,el} + k^2 \mathbf{K}_{3,el}}_{\mathbf{K}_{el}} - \omega^2 \mathbf{M}_{el} \right] \hat{\xi}_N = 0. \quad (3.26)$$

Wie bereits analog in Gleichung 2.61 ist $\delta \hat{\xi}_N^T$ eine beliebig von Null verschiedene Funktion [Lin14], sodass sich Gleichung 3.26 nach Assemblierung (Zusammensetzen der lokalen Masse- und Steifigkeitsmatrizen zur jeweiligen globalen Masse- und Steifigkeitsmatrix durch Zuordnung

der Knotenpunkte der einzelnen Elemente zu seinen globalen Knotenpunkten (vgl. Abschnitt 2.4)) der lokalen Element-Masse- und Element-Steifigkeitsmatrizen zur jeweiligen globalen Masse- und Steifigkeitsmatrix zu

$$[\mathbf{K}_1 + jk\mathbf{K}_2 + k^2\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M}] \hat{\boldsymbol{\Xi}} = 0 \quad (3.27)$$

ergibt. Gleichung 3.27 ist ein homogenes Eigenwertproblem. Unter Vorgabe der Kreiswellenzahl k können die Eigenwerte ω^2 und somit die Kreisfrequenzen ω berechnet werden. Die Eigenvektoren $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ enthalten die jeweiligen nodalen Auslenkungen. [BMD06]

Wird das frequenzabhängige Verhalten eines Systems untersucht, werden in der Regel Frequenz f bzw. Kreisfrequenz ω vorgegeben und die zugehörigen Kreiswellenzahlen k berechnet. Dazu wird das lineare Eigenwertproblem zweiter Ordnung aus Gleichung 3.27 in ein lineares Eigenwertproblem erster Ordnung der Form

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{B}) \mathbf{Q} = 0 \quad (3.28)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} \\ \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & j\mathbf{K}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_3 \end{pmatrix}$$

sowie dem Eigenvektor

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Xi}} \\ k\hat{\boldsymbol{\Xi}} \end{pmatrix}$$

überführt [BMD06], welches leicht unter Vorgabe der Kreisfrequenz ω mit einem gewöhnlichen Eigenwertlöser gelöst werden kann.

4 Inverses Verfahren zur Identifikation elastischer Materialparameter

In diesem Kapitel wird ein inverses Messverfahren zur Bestimmung der elastischen Materialparameter plattenförmiger Proben vorgestellt. Die Auswertung erfolgt beispielhaft an isotropen Proben mithilfe von Lamb-Wellen. Aufgrund der bereits erwähnten Charakteristik, dass Lamb-Wellen nur Freiheitsgrade innerhalb der Querschnittsfläche der Platte aufweisen, wird ein zweidimensionales elastisches Materialmodell identifiziert, was für isotrope Materialproben ausreichend ist, da deren ideal-elastische Elastizitätsmatrix bereits durch zwei Parameter vollständig beschrieben ist. Bei Werkstoffen mit richtungsabhängigen Materialparametern wie z.B. orthotropen Werkstoffen ist dies nicht der Fall. Trotzdem wird in diesem Kapitel eine zusätzliche Methode zur Bestimmung der übrigen Elastizitätskoeffizienten durch eine winkelabhängige Variation der Propagationsstrecke im vorgestellten Messsystem vorgestellt.

4.1 Lösungsansatz

Der Lösungsansatz zur Bestimmung der elastischen Materialparameter beruht auf den dispersiven akustischen Wellenleitereigenschaften plattenförmiger Proben. Ähnlich zu den Arbeiten von [BLB18; PCR08; GVR13] aus Unterabschnitt 3.2.2 wird der Abstand zwischen Sender und Empfänger variiert, um sowohl zeit- als auch ortsaufgelöste Messdaten zu erhalten. Am Vorbild von Alleyne [AC90; AC91] wird diese zeit- und ortabhängige Messsignalmatrix zweidimensional Fourier-transformiert. In der Visualisierung der transformierten nun frequenz- und wellenzahlabhängigen Matrix (Dispersionsabbildung) werden die sich ausbreitenden Moden als Grate sichtbar.

Ein Abgleich der im Vorwärtsmodell berechneten Frequenz-Wellenzahl-Paare durch Variation der Materialparameter bestimmt diese. Dabei wird

davon ausgegangen, dass die Modelleingangsparameter den Materialparametern der Probe entsprechen bei denen simulativ berechnete Moden mit den in der Messung sichtbaren Moden übereinstimmen.

Die Lage der Moden im Dispersionsdiagramm (Abbildung 2.6) wird durch die Geometrie und der effektiven, elastischen Materialparameter bestimmt. Allgemein sind mit effektiven, elastischen Materialparametern die Koeffizienten der ideal-elastischen Elastizitätsmatrix bei gegebener Dichte gemeint. Für ein isotropes Material vereinfacht sich die Elastizitätsmatrix, sodass diese nur noch von zwei unabhängigen Parametern abhängt. Eine alternative Materialmodelldarstellung für isotrope Werkstoffe kann über die Schallgeschwindigkeiten erfolgen. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass das resultierende Dispersionsdiagramm unabhängig von der Dichte berechnet werden kann (vgl. Unterabschnitt 4.2.1). Dies zeigt sich bereits in der Tatsache, dass sich Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit näherungsweise im Dispersionsdiagramm ablesen lassen, was bereits Abbildung 2.6 zeigt.

Das allgemeine Vorgehen im inversen Verfahren ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Neben den zu bestimmenden akustischen Materialparametern, enthalten im Parametervektor \mathbf{p} , werden für das Vorwärtsmodell (vgl. Abschnitt 4.2) Dichte ρ und Plattendicke t_h benötigt. Die Plattendicke wird direkt mittels Mikrometerschraube gemessen, während die Dichte über das gemessene Plattenvolumen und die gravimetrisch bestimmte Masse berechnet wird. Zur Sensitivitätssteigerung der Zielfunktion bezüglich der sich ausbreitenden Moden und damit der Materialparameter findet eine Signalvorverarbeitung der Messdaten (vgl. Abschnitt 4.6) statt. Durch sie werden schwach ausgeprägte Moden für die nachfolgende Auswertung der Zielfunktion stärker gewichtet. Bevor der Modellausgang \mathbf{b}_{Sim} (Frequenz-Wellenzahl-Paare) auf die Messdaten \mathbf{b}_{Mes} (Dispersionsabbildung) abgeglichen werden, werden aus den meist noch unverarbeiteten Messdaten $\mathbf{b}_{0,\text{Mes}}$ Startwerte $\mathbf{p}^{(0)}$ (vgl. Abschnitt 4.9) für eine erste Initialisierung des Vorwärtsmodells geschätzt. Ein Optimierungsalgorithmus (in Abbildung 4.1 nur Optimierung genannt) variiert dann die Eingangspanparameter $\mathbf{p}^{(i)}$ des Vorwärtsmodells bis der Wert der Zielfunktion $\epsilon(\mathbf{p}^{(i)})$ minimal ist (vgl. Abschnitt 4.11). Die Modelleingangsparameter mit denen die Ziel- bzw. Kostenfunktion $\epsilon(\mathbf{p}^{(i)})$ minimal ist, sind dann die gesuchten Materialparameter.

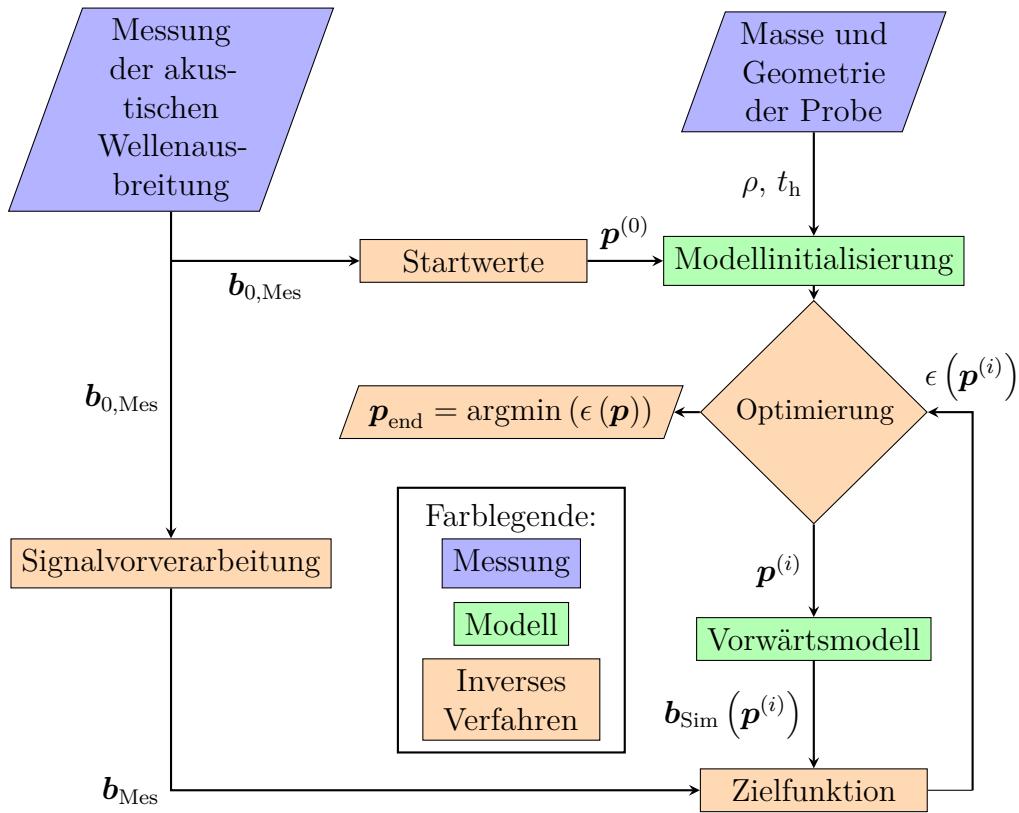


Abbildung 4.1: Konzept des inversen Messverfahrens

4.2 Vorwärtsmodell

Da eine numerische Nullstellensuche der Rayleigh-Lamb-Gleichung (Gleichung 2.43) auf der Annahme eines isotropen Materials beschränkt ist, ermöglicht ein halbanalytisches Modell basierend auf dem semi-analytischen Finite-Elemente-Ansatz aus [BDF05] eine modale Analyse von sowohl isotropen als auch nicht-isotropen Plattenwellenleitern. Zusätzlich lässt es sich sehr leicht zu einem mehrschichtigen System erweitern. Werden im Modell alle drei Raumrichtungen berücksichtigt, können sowohl Lamb- bzw. Lamb-artige als auch SH-Moden berechnet werden. Da SH-Wellen im Messsystem nicht detektiert werden, genügt die Berechnung der Lamb- bzw. Lamb-artigen Wellen. Daher werden die mechanischen Verschiebungen und somit die Dehnungen in z -Richtung zu Null angenommen. Das Hookesche Gesetz vereinfacht sich entsprechend der Annahme des ebenen Verzerrungszustands nach Unterabschnitt 2.1.4, sodass sich die Dimension

und damit der Rechenaufwand um die Hälfte reduziert.

Die Modelldiskretisierung erfolgt wie in Abbildung 4.2 dargestellt.

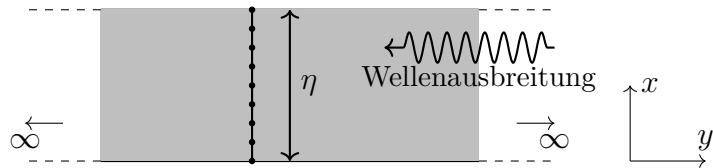


Abbildung 4.2: Modell eines Plattenwellenleiters

In Ausbreitungsrichtung (y -Richtung) wird die Platte als unendlich ausgedehnt sowie eine ebene, harmonische Welle angenommen, während die Dickenrichtung, welche im Modell der x -Richtung entspricht, mittels eindimensionaler finiter Elemente diskretisiert wird. Unter Verwendung linearer Ansatzfunktionen besteht ein finites Element aus zwei Knoten. Nach Abbildung 2.7 und Gleichung 2.50 ergibt sich die Matrix der lokalen Ansatzfunktionen \mathbf{N} mit den lokalen Ansatzfunktionen aus Gleichung 2.46 zu

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\eta + 1) & 0 & \frac{1}{2}(\eta - 1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\eta + 1) & 0 & \frac{1}{2}(\eta - 1) \end{pmatrix}$$

mit der lokalen Variable $1 - \eta \leq \eta \leq 1$. Da sich die lokale Koordinate η entlang der x -Achse erstreckt, ergibt sich die Koordinatentransformation des Differentialoperators analog zu Gleichung 2.50 und 2.53 mittels:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = \frac{L}{2} d\eta, \quad (4.1)$$

wobei L der Länge des finiten Elements entspricht.

Somit ergeben sich die Dehnungen jeden finiten Elements mit Gleichung 4.1 und der Annahme des ebenen Verzerrungszustands nach Glei-

chung 2.12 aus Gleichung 2.54 zu

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{1x} \\ \hat{\xi}_{1y} \\ \hat{\xi}_{2x} \\ \hat{\xi}_{2y} \end{pmatrix} e^{j(ky - \omega t)} \\
 &= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_1} + jk \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \\ N_1 & 0 & N_2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_2} \right] \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{1x} \\ \hat{\xi}_{1y} \\ \hat{\xi}_{2x} \\ \hat{\xi}_{2y} \end{pmatrix} e^{j(ky - \omega t)}. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Mit der FEM-Differentialoperatormatrix senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{B}_1 und der FEM-Differentialoperatormatrix in Ausbreitungsrichtung \mathbf{B}_2 sowie Gleichung 4.1 werden aus Gleichung 3.23 bis Gleichung 3.25 die SAFE-Steifigkeitsmatrizen je finitem Element berechnet:

$$\mathbf{K}_{1,\text{el}} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B}_1 \frac{L}{2} d\eta \quad (4.3)$$

$$\mathbf{K}_{2,\text{el}} = \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B}_1] \frac{L}{2} d\eta \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_{3,\text{el}} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_{\text{el}} \mathbf{B}_2 \frac{L}{2} d\eta \quad (4.5)$$

Die Massematrix je finitem Element ergibt sich analog mit

$$\mathbf{M}_{\text{el}} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho_{\text{el}} \mathbf{N} \frac{L}{2} d\eta. \quad (4.6)$$

Nach Assemblierung der Masse- und Steifigkeitsmatrizen aller finiten Elemente zur jeweiligen globalen Steifigkeits- und Massematrix ergibt sich das Eigenwertproblem

$$[\mathbf{K}_1 + jk \mathbf{K}_2 + k^2 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\boldsymbol{\Xi}} = 0. \quad (4.7)$$

Da die Ansatzfunktionen in \mathbf{N} und die Dichte ρ_{el} grundsätzlich reell sind, ist die Massematrix \mathbf{M} eine reelle Diagonalmatrix. Für ein ideal-elastisches Material ist die Elastizitätsmatrix \mathbf{C}_{el} reell, sodass die Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_1 und \mathbf{K}_3 ebenfalls reell sind. \mathbf{K}_1 beschreibt mit \mathbf{B}_1 die Bewegungen in Dickenrichtung, während \mathbf{K}_3 mit \mathbf{B}_2 die Bewegungen in Ausbreitungs-

richtung enthält. \mathbf{K}_2 , welche die Kopplung beider Richtungen beschreibt, ist hingegen komplex. [BMD06] Die Eigenvektoren $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ enthalten die mechanischen Verschiebungen in den jeweiligen Knoten in x - und y -Richtung. Da diese im Verlauf der Arbeit nicht benötigt werden, werden diese beim Lösen des Eigenwertproblems nicht mit berechnet.

4.2.1 Vereinfachung für isotrope Werkstoffe

Wie bereits in der Rayleigh-Lamb-Gleichung in Gleichung 2.43 erkennbar ist, hängt das berechnete Dispersionsdiagramm isotroper Werkstoffe von den Schallgeschwindigkeiten ab, jedoch nicht mehr von der Dichte. Dies lässt sich auch anhand der Bewegungs- bzw. Wellengleichung aus Gleichung 2.57, auf der sowohl Eigenwertgleichung (Gleichung 4.7) sowie die Rayleigh-Lamb-Gleichung (Gleichung 2.43) basieren, im Folgenden zeigen.

Wird die Elastizitätsmatrix eines isotropen Materials für den ebenen Verzerrungszustand (vgl. Gleichung 2.11)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c_L^2 & \rho \left(c_L^2 - \frac{4}{3} c_T^2 \right) & 0 \\ \rho \left(c_L^2 - \frac{4}{3} c_T^2 \right) & \rho c_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_T^2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

mithilfe der Schallgeschwindigkeiten c_L und c_T ausgedrückt, enthält jeder der Koeffizienten der Matrix ebenfalls die Dichte ρ , sodass diese aus der Matrix herausgezogen werden kann.

Damit ergibt die Wellengleichung aus Gleichung 2.57

$$\mathbf{L}^T \rho \begin{pmatrix} c_L^2 & c_L^2 - \frac{4}{3} c_T^2 & 0 \\ c_L^2 - \frac{4}{3} c_T^2 & c_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_T^2 \end{pmatrix} \mathbf{L} \boldsymbol{\xi} = \rho \ddot{\boldsymbol{\xi}}. \quad (4.9)$$

Unter der Annahme, dass die Dichte $\rho \neq 0$ ist, entfällt diese, wodurch die resultierende Gleichung nur von den beiden Schallgeschwindigkeiten als Materialparameter abhängt. Gleichermaßen gilt analog für die daraus abgeleitete Eigenwertgleichung (Gleichung 4.7).

4.2.2 Validierung des Vorwärtsmodells

Ist das genutzte Materialmodell nicht frequenzabhängig, wird das lineare Eigenwertproblem in ω^2 aus Gleichung 4.7 direkt unter Vorgabe gegebener Kreiswellenzahlen gelöst, um die Kreisfrequenzen der Eigenschwingungen

zu berechnen. Da die Eigenwerte mit ω^2 als quadratische Frequenz eingehen, ergeben sich mit $\omega = \pm\sqrt{\omega^2}$ als Lösung des Eigenwertproblems sowohl positive als auch negative Kreisfrequenzen, wobei es genügt nur eine der beiden Lösungen zu betrachten. Ein Vergleich der berechneten Eigenfrequenzen mit Disperse [LP13] zeigt in Abbildung 4.3 gute Übereinstimmungen am Beispiel einer 1 mm dicken PTFE-Platte ($c_L = 1350 \text{ m s}^{-1}$, $c_T = 550 \text{ m s}^{-1}$). Diese ist als Beispielmaterial in der Demo-Version von Disperse [LP13] enthalten.

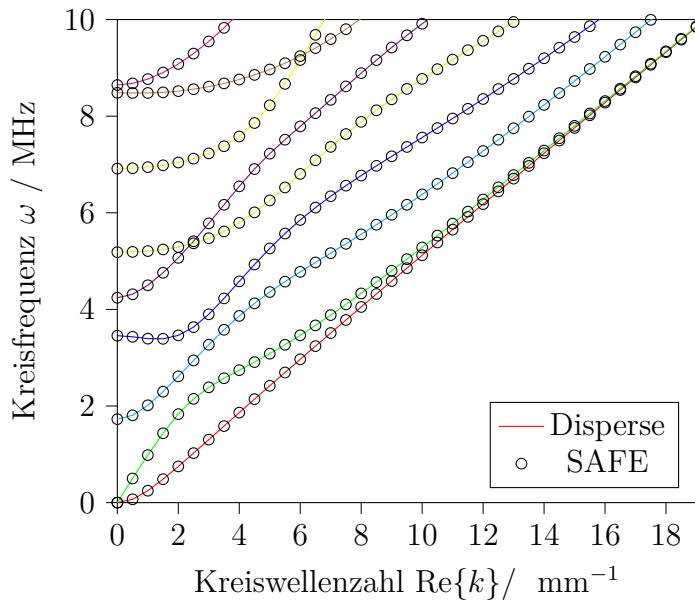


Abbildung 4.3: Vergleich der berechneten Kreisfrequenzen mit Disperse [LP13]

Bei Vorgabe der Kreisfrequenzen ω muss das Eigenwertproblem aus Gleichung 4.7 in die Form von Gleichung 3.28 überführt werden. Dadurch verdoppelt sich die Dimension des zu lösenden Eigenwertproblems, was zu einer deutlichen Erhöhung der Rechenzeit führt. Soll jedoch ein bestimmter Frequenzbereich untersucht oder sollen gar frequenzabhängige Materialmodelle verwendet werden, ist es trotzdem notwendig die Dimension zu verdoppeln und das Eigenwertproblem in der Form von Gleichung 3.28 zu lösen. Ansonsten ist die Vorgabe der Kreiswellenzahl und Lösen von Gleichung 4.7 aufgrund der geringeren Rechenzeit zu bevorzugen.

4.2.3 Konvergenz

Wie bei allen numerischen Berechnungsmethoden muss auf eine ausreichende Diskretisierung geachtet werden, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erzielen. Für elastische Probleme soll die Polynomordnung mindestens $o = 2$ betragen [Bäk02]. Als Faustregel für die Anzahl der Knoten wird eine örtliche Diskretisierung von $\beta_N = 10$ Knoten pro Wellenlänge als untere Grenze empfohlen [BDF05]. Andere Quellen [MJQ99] empfehlen zur Sicherheit $\beta_N = 20$ Knoten pro Wellenlänge. Am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte ergibt sich der Abstand zwischen zwei Knotenpunkten

$$L_{\text{Ab}} = \frac{\lambda_{\text{min}}}{\beta_N} = \frac{2\pi}{\text{Re}\{k_{\text{max}}\}\beta_N}, \quad (4.10)$$

der bei Elementen erster Ordnung der Elementlänge L entspricht. Bei einem isotropen Material wird die Wellenlänge einer Transversalwelle $\lambda_T = c_T/f$ als Abschätzung genutzt, um Moden bis zu einer maximalen Frequenz f_{max} zu berechnen. Am Beispiel von PEEK mit einer Transversalwellengeschwindigkeit $c_T = 1110 \text{ m s}^{-1}$ ergibt sich für $\beta_N = 10$ Knoten pro Wellenlänge und einer oberen Frequenz von $f_{\text{max}} = 2,5 \text{ MHz}$ somit eine untere Knotenzahl von

$$\#\text{Knoten} = \frac{t_h}{L_{\text{Ab}}} = \frac{\beta_N t_h f_{\text{max}}}{c_T} = \frac{10 \cdot 5,45 \text{ mm} \cdot 2,5 \text{ MHz}}{1110 \text{ m s}^{-1}} = 123. \quad (4.11)$$

Aufgrund des dispersiven Wellenleiterverhaltens ergeben sich trotzdem auch kleinere Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten als durch die Abschätzung angenommen, weshalb weiterhin das Dispersionsdiagramm auf Änderungen bei höheren Diskretisierungen überprüft wird, um diese ggf. anzupassen.

Unter Verwendung von Knoten zweiter Ordnung zeigt Abbildung 4.4 am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte, dass weit unterhalb der Faustregel von 10 Knoten pro Wellenlänge (entspricht 123 Knoten bei einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte), nämlich bei 62 Knoten eine deutliche Abweichung erkennbar ist, wohingegen ab 123 Knoten (10 Knoten je Wellenlänge) quasi keine Abweichungen im Vergleich zur Verwendung weiterer Knoten erkennbar sind. Für eine konservative Betrachtung wird daher stets die Faustregel von $\beta_N = 20$ Knoten je Wellenlänge der Transversalwelle während des folgenden Optimierungsprozesses gewählt. Neben der Anzahl der Knoten und somit der Anzahl der Elemente, ist die Ordnung der Ansatzfunktionen (vgl. Abschnitt 2.4) veränderbar. In Abbildung 4.5 sind die Dispersionsdiagramme einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte bei unterschiedlichen Ordnungen o der Ansatzfunktionen dargestellt. Um die

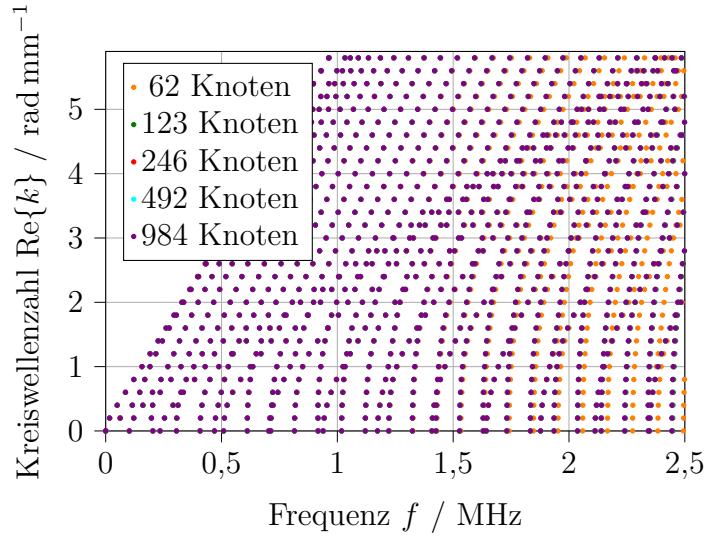


Abbildung 4.4: Konvergenz am Beispiel einer 5,45 mm-dicken PEEK-Platte, Polynomordnung 2

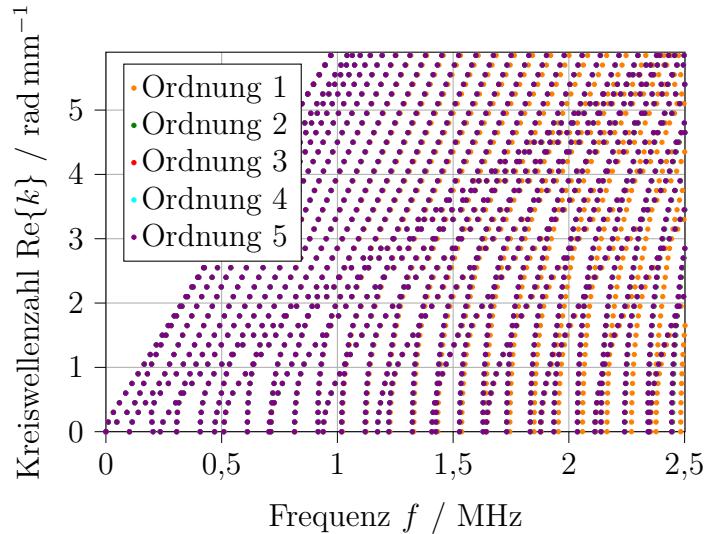


Abbildung 4.5: Dispersionsdiagramm einer 5,45 mm-dicken PEEK-Platte mit 123 Knoten und unterschiedlicher Polynomordnung

einzelnen Diagramme mit unterschiedlichen Ordnungen der Ansatzfunktionen vergleichbar zu halten, werden alle Varianten mit der gleichen Anzahl an Knoten (123) bei unterschiedlicher Ordnung und somit unterschiedlicher Anzahl an Elementen, die sich aus der Anzahl der Knoten sowie Knotenordnung mit

$$\# \text{Elemente} = \frac{\# \text{Knoten} - 1}{o} \quad (4.12)$$

ergibt, diskretisiert. Damit bleibt die Anzahl der Knoten pro Wellenlänge nach Gleichung 4.10 mit $\beta_N = 10$ gleich und es ändert sich neben der Ordnung nur die Elementzugehörigkeit der Knoten. Der Einfluss der Knotenordnung wird in Abbildung 4.5 deutlich, wo nur ein Unterschied von der Knotenordnung eins zu den höheren Ordnungen erkennbar ist. Ab einer Ordnung von $o = 2$ ist der Unterschied zu höheren Ordnungen so marginal, dass dieser im betrachteten Frequenz-Wellenzahlbereich vernachlässigbar ist.

4.3 Funktionalität und Aufbau des Messsystems

In diesem Abschnitt wird die Funktionalität des Messsystems vorgestellt, das in Abbildung 4.6 schematisch dargestellt ist. In dem Messsystem werden kurze Laserpulse auf die Probenoberfläche fokussiert, um thermoelastisch Plattenwellen anzuregen, welche mit einem breitbandigen Ultraschallwandler empfangen werden. Aufgrund der punktförmigen Fokussierung der Laserstrahlung, wird diese mit einem Strahlauflweiter um den Faktor 10 aufgeweitet, um dann über einen Oberflächenspiegel zur Zylinderlinse umgelenkt zu werden, damit diese den Strahl linienförmig (entlang der z -Richtung) auf die Probenoberfläche fokussiert, wo sich sowohl in y - wie auch in z -Richtung ein gaußförmiges Profil ausbildet. Durch die Strahlauflweitung und der linienförmigen Fokussierung wird einerseits eine Ablation der Probe vermieden, andererseits ergeben sich ebene, auf den streifenförmigen Empfangswandler laufende Wellenfronten. Ein weiterer Vorteil des Strahlauflweiter ist der resultierende Parallelstrahl, sodass die später in Abschnitt 5.3 betrachtete modale Dämpfung nicht durch optische Aufweitung der Laserstrahlung beeinflusst wird. Da die optischen Komponenten (Oberflächenspiegel, Zylinderlinse) auf einer Linearachse der X-LSM-E-Reihe von Zaber Technologies montiert sind, können sie in

4.3 Funktionalität und Aufbau des Messsystems

kleinen Schritten mit $\pm 60 \mu\text{m}$ [Zab18] Abweichung von der Zielposition über eine Strecke von 20 cm bewegt werden, sodass nacheinander in mehreren äquidistanten Abständen zum Empfänger angeregt und die jeweiligen Empfangssignale aufgenommen und gespeichert werden. Der Empfang der sich ausbreitenden Wellen erfolgt mit einem Streifenkeramik-Schallwandler, der über eine Kopplungsschicht direkt an die Probenoberfläche angekoppelt und im Detail in Unterabschnitt 4.3.2 beschrieben wird. Die kontaktlose, bewegliche Anregung hat den Vorteil, dass die Ankopplung des Schallwandlers bei jeder Anregungsposition identisch bleibt, sodass die Dicke der Kopplungsschicht die spätere Berechnung der Dämpfung in Abschnitt 5.3 nicht beeinflusst. Sowohl die Linearachse als auch der Laser werden über eine RS232-Schnittstelle vom PC gesteuert. Zusätzlich triggert der Laser das USB-Oszilloskop HS5, das nach dem Austritt des Laserpulses die Signalaufnahme startet.

Die aufgenommenen Signale des Empfangswandlers werden mithilfe eines Ladungsverstärker verstärkt, mittels Oszilloskop erfasst und anschließend gespeichert. Dieser hat eine Bandbreite von 15 MHz und einen Verstärkungsfaktor von 10 V pC^{-1} [Fem18]. Da der Empfangswandler sehr breitbandige Signale empfängt, werden die Umgebungsgeräusche mit einem einfachen RC-Hochpass erster Ordnung mit einer Grenzfrequenz von

$$f_{\text{Gr}} = \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \Omega \cdot 150 \text{ nF}} \approx 21 \text{ kHz} \quad (4.13)$$

aus den Empfangssignalen unterdrückt.

4.3.1 Laser

Bei dem im Aufbau verwendeten Laser Flare NX von Coherent handelt es sich um einen diodengepumpten, passiv gütegeschalteten Festkörperlaser mit einer spezifizierten Pulsennergie von $500 \mu\text{J}$ und einer Pulswidte von 1,45 ns bei einer Wellenlänge von 1030 nm [Coh18]. Bei einer solch hohen Pulsennergie würde die punktförmige Fokussierung der Laserstrahlung zur Ablation an der Probenoberfläche führen, weshalb der Strahlaufweiter den $490 \mu\text{m}$ breiten Strahl auf das Zehnfache aufweitet. Als Strahlaufweiter wird der Scorpia Nd:YAG-Strahlaufweiter verwendet, der auf eine optische Wellenlänge von 1064 nm ausgelegt ist, jedoch bei 1030 nm noch sehr hohe optische Transmissionseigenschaften aufweist [Ed18]. Durch den resultierenden Parallelstrahl bleibt die Anregungsenergie an allen Anregungspositionen gleich. Die Schussfrequenz kann auf bis zu 2 kHz herauf

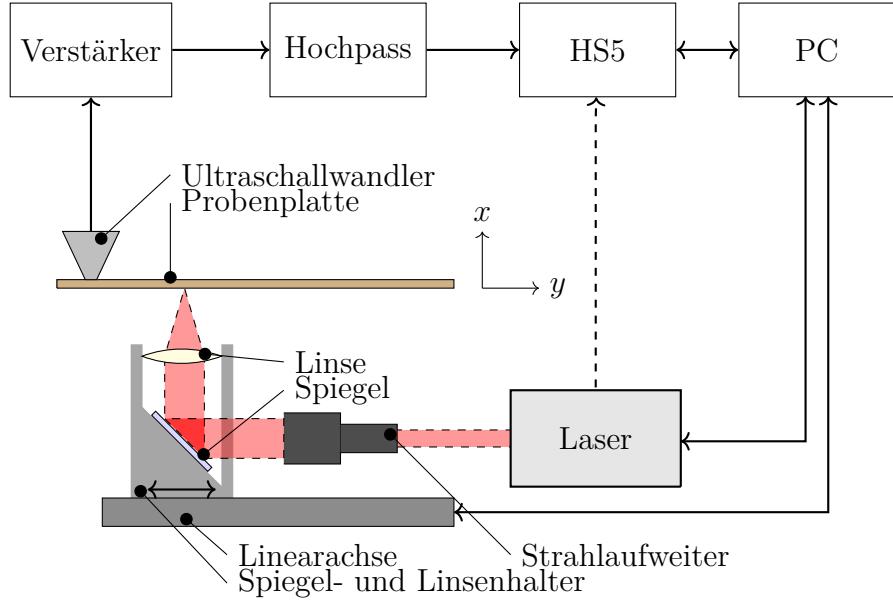


Abbildung 4.6: Messsystem nach [CMB16]

gesetzt werden, was bei Proben mit hoher Absorption wie z.B. faserverstärkten Kunststoffen eine vergleichsweise schnelle Messung ermöglicht. Da der Trigger-Eingang des Lasers einen sehr hohen Jitter aufweist, wird mit einem Erweiterungskit des Herstellers der Strahlausstritt beobachtet, um entsprechend das USB-Oszilloskop zu triggern. Zur Messung von Proben, die im infraroten Bereich optisch transparent erscheinen, steht ein weiteres Messsystem mit einem Stickstofflaser (MNL100^{High Power}) zur Verfügung. Dieser emittiert Laserpulse mit einer Energie von $225 \mu\text{J}$ bei einer Pulsweite von 3 ns und einer optischen Wellenlänge von 337 nm [LTB16]. Da dieser einen kleinen Jitter aufweist, wird er direkt vom HS5 getriggert.

4.3.2 Ultraschallwandler

Als Empfangswandler wird der in Abbildung 4.7 schematisch dargestellte Streifenkeramikwandler verwendet. Die aktive Fläche bildet eine streifenförmige Piezokeramik aus Blei-Zirkonat-Titanat (PZT, Typ PIC255 [PI20]) mit einer Länge von $l_{\text{Ker}} = 12 \text{ mm}$, einer Breite von $w_{\text{Ker}} = 1 \text{ mm}$ und einer Dicke von $t_{h\text{Ker}} = 0,5 \text{ mm}$. Aufgrund der Abmessungen der Keramik ergibt sich eine örtliche Bandbreite [CGH92] durch das örtliche Nyquist-Kriterium von

$$\lambda \geq 2 \cdot w_{\text{Ker}}. \quad (4.14)$$

4.3 Funktionalität und Aufbau des Messsystems

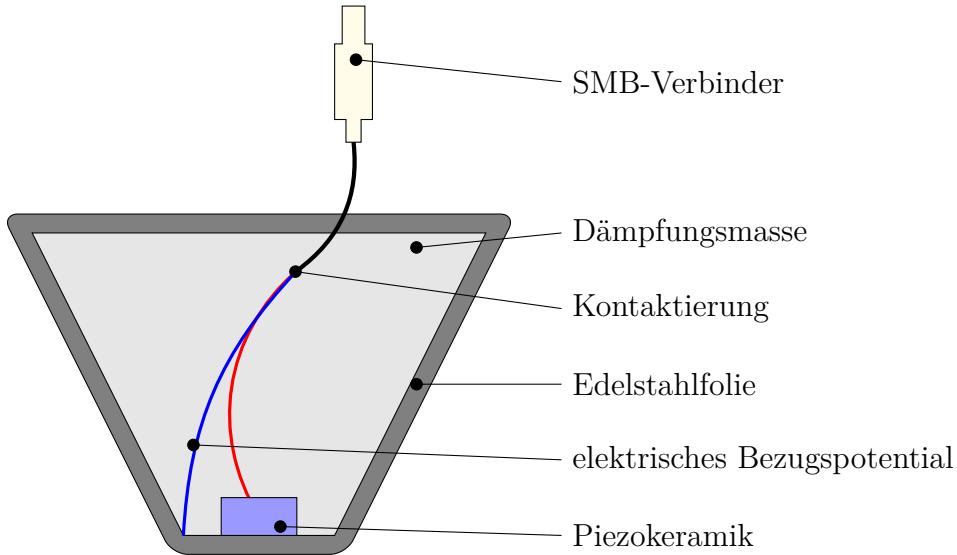


Abbildung 4.7: Schematischer Aufbau des piezoelektrischen Empfängers [JCF22; CMB16]

Somit werden theoretisch Moden mit Kreiswellenzahlen bis zu

$$\text{Re}\{k\} \leq \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{w_{\text{Ker}}} = 3142 \text{ m}^{-1} \quad (4.15)$$

ungedämpft detektiert. [CMB16] Bei Betrachtung der Messergebnisse (z.B. in Abbildung 4.17 oder Abbildung 4.30 bis 4.33), zeigt sich, dass das örtliche Nyquist-Kriterium keine harte Grenze darstellt, da Kreiswellenzahlen von bis zu $\text{Re}\{k\} = 8000 \text{ m}^{-1}$ detektiert werden können, die nicht aus örtlichem Aliasing resultieren. Dies zeigt sich beispielhaft an Aluminium in Abbildung 4.30.

Zur Kontaktierung wird die Piezokeramik auf ein $50 \mu\text{m}$ dickes Edelstahlblech, welches sich entlang des gesamten Kunststoffgehäuses erstreckt, geklebt. Als Kleber wird Epoxidharz mit Silberpartikeln gemischt, um eine elektrisch leitfähige Kopplung herzustellen. An die rückseitige Elektrode der Piezokeramik ist eine elektrische Leitung gelötet. Dazu wird ein spezielles Niedertemperaturlot verwendet, um eine Depolarisation der Piezokeramik zu vermeiden. Die Leitung führt zu einem SMB-Stecker, über den der Wandler im Messaufbau kontaktiert wird. [CMB16] Da piezokeramische Wandler lange nachschwingen, sind sie im Vergleich zu piezoelektrischen Folienwandlern vergleichsweise schmalbandig um ihre Resonanz- (Senden) oder Antiresonanzfrequenz (Empfangen) [Sch15]. Um ihre Sensitivität über

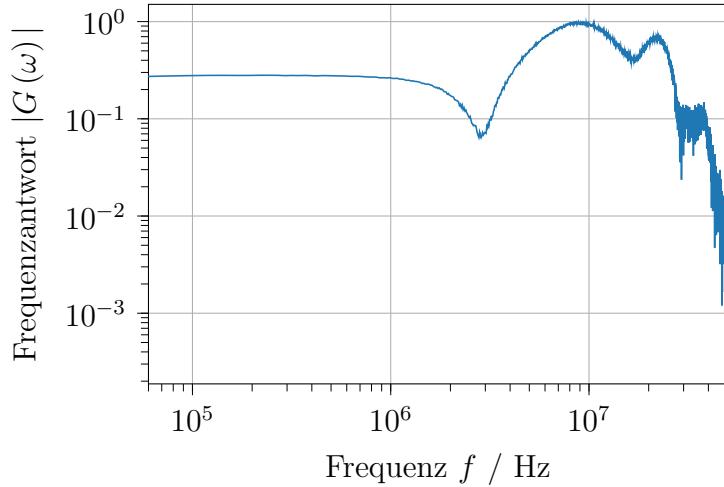


Abbildung 4.8: Übertragungsverhalten des Schallwandlers

einen weiten Frequenzbereich zu erhöhen, muss dessen Schwingung durch Aufbringen einer Dämpfungsmasse gedämpft werden. Als Dämpfungsmasse wird ein Gemisch aus Wolframcarbid und Polyurethan (Mischungsverhältnis 5/1) [BRH13] in das Gehäuse gegossen. Die Dämpfungsmasse dämpft Resonanz- und Antiresonanzstellen des Schallwandlers, sodass sich ein insgesamt gleichmäßigerer Impedanzverlauf ergibt, was zu einem breitbandigen Empfangsverhalten führt. Als Sendeschallwandler ist dieser aufgrund der starken Dämpfung der Dickenschwingung daher nicht geeignet. Zur Untersuchung des Übertragungsverhaltens des Schallwandlers wird mit der linienförmig fokussierten Laserstrahlung ein Strahlungsimpuls direkt auf die Keramik gegeben, um durch das schlagartige Erhitzen der Keramik die Sprungantwort des Schallwandlers aufzunehmen [CMB16]. Zur Trennung des Übertragungsverhaltens aller Komponenten erfolgt die Signalaufnahme ohne Hochpass und Verstärker. Unter Annahme eines linearen, zeitinvarianten Systems wird aus dessen Sprungantwort $h(t)$ über

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial t} h(t) \quad (4.16)$$

die Impulsantwort $g(t)$ bestimmt. Fourier-Transformation dieser ergibt schließlich die in Abbildung 4.8 dargestellte Frequenzantwort $G(\omega)$. Dort wird ersichtlich, dass der Schallwandler vergleichsweise breitbandig ist, mit konstanter Empfindlichkeit bis 1 MHz. Bei höheren Frequenzen zeigt sich das verbleibende Resonanzverhalten bis die Frequenzantwort schließlich ab

4.4 Experimentelle Vorgehensweise

20 MHz eine Tiefpasscharakteristik aufweist. Obwohl der Laser mit seinen kurzen Impulsen eine höhere Bandbreite erreicht, können die Moden sehr hoher Ordnung bei Frequenzen insbesondere über 10 MHz nur gedämpft empfangen werden. Hinzu kommt zusätzlich, dass die Moden höherer Ordnung, insbesondere bei Polymeren, durch das Material bereits stark gedämpft werden, was den Frequenzbereich der detektierbaren Moden auf ≤ 10 MHz beschränkt.

4.4 Experimentelle Vorgehensweise

Die experimentelle Vorgehensweise zur Untersuchung der akustischen Wellenausbreitung und der grundsätzlichen Erzeugung von Dispersionsabbildungen werden in diesem Abschnitt dargelegt. Zunächst wird die Plattendicke, welche für die Modellierung der Plattenstruktur im Vorwärtsmodell benötigt wird, mittels Mikrometerschraube gemessen.

Weiterhin werden Länge und Breite der Platte zur Volumenberechnung erfasst, um mithilfe der Masse, die mit einer Analysewaage gemessen wird, die Dichte berechnen zu können. Dabei sei jedoch angemerkt, dass diese für die spätere Bestimmung der Schallgeschwindigkeiten isotroper Werkstoffe noch nicht benötigt wird (Begründung siehe Unterabschnitt 4.2.1), allerdings für eine anschließende Berechnung alternativer Darstellungsformen wie z.B. die Koeffizienten der Elastizitätsmatrix oder der Lamé-Konstanten.

Nach Einlegen der Probenplatte in den Messplatz, wird der Empfangswandler über eine Schicht Koppelgel auf die Platte kontaktiert. Um die Qualität der Ankopplung des Schallwandlers zu gewährleisten, wird zunächst testweise einmal mit dem Laser an einer Position in ca. 1 cm Abstand vom Empfangswandler angeregt und das Empfangssignal aufgenommen.

Bei zufriedenstellender Ankopplung an den Schallwandler, werden an i.d.R. 800 Anregungspositionen im Bereich von 0 bis 20 cm Wellen angeregt und die Empfangssignale aufgenommen. Zusammengefasst ist die Vorgehensweise während des Messvorgangs in Abbildung 4.9.

Die genauen Anregungspositionen können je nach Größe der Probenplatte sowie deren Dämpfung variieren. So ist es z.B. bei Proben mit sehr hoher modaler Dämpfung wenig sinnvoll sehr weit entfernt vom Empfangswandler anzuregen, da die resultierenden Empfangssignale nur schwach ausgeprägt sein können. Zur Erhöhung des Signal-Rausch-Abstands (SNR) werden pro Anregungsposition 20 mal angeregt und die Empfangssignale aufgenommen, über welche jeweils gemittelt wird. Zusätzlich wird die Umgebungstemperatur im Messplatz während der gesamten Laserakustik-Messung von einem

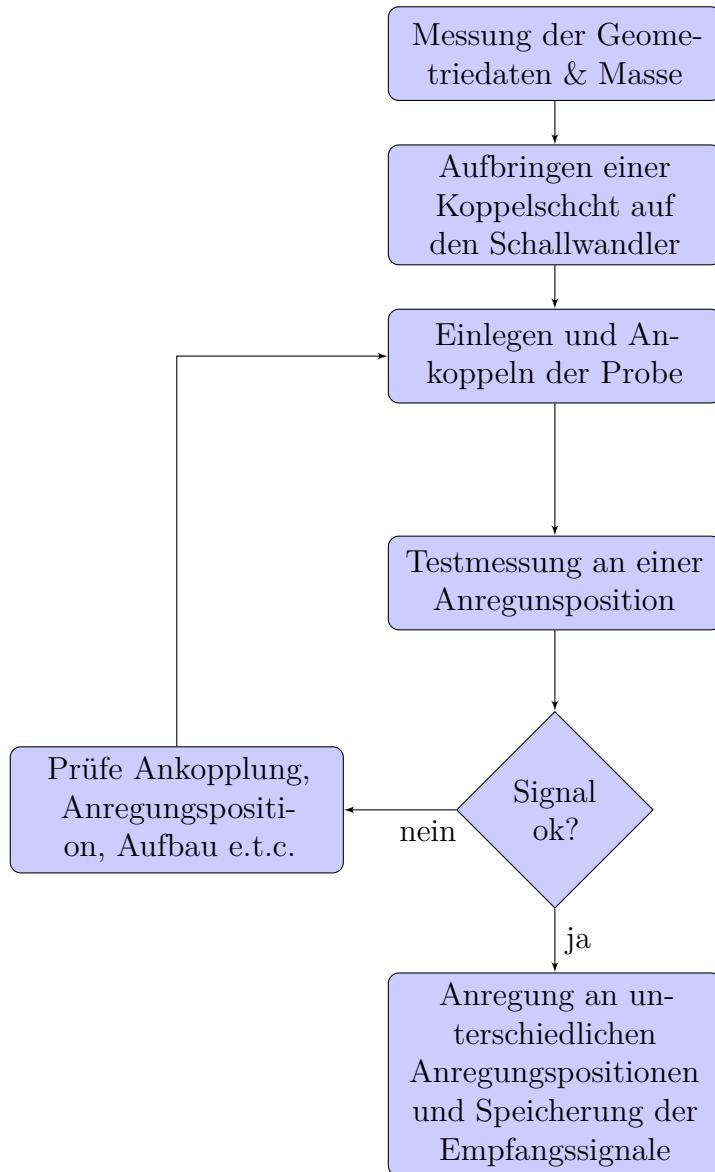


Abbildung 4.9: Vorgehensweise beim Messvorgang

4.4 Experimentelle Vorgehensweise

Temperatursensor MCP9808 [MT11] mit einer im Datenblatt angegebenen Unsicherheit von $\pm 0,5$ K aufgenommen.

Am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte mit Anregungspositionen 20 mm bis 120 mm wird die in Abbildung 4.10 dargestellte Signalmatrix aufgenommen. Wird die Matrix der Rohsignale durch zweidimensiona-

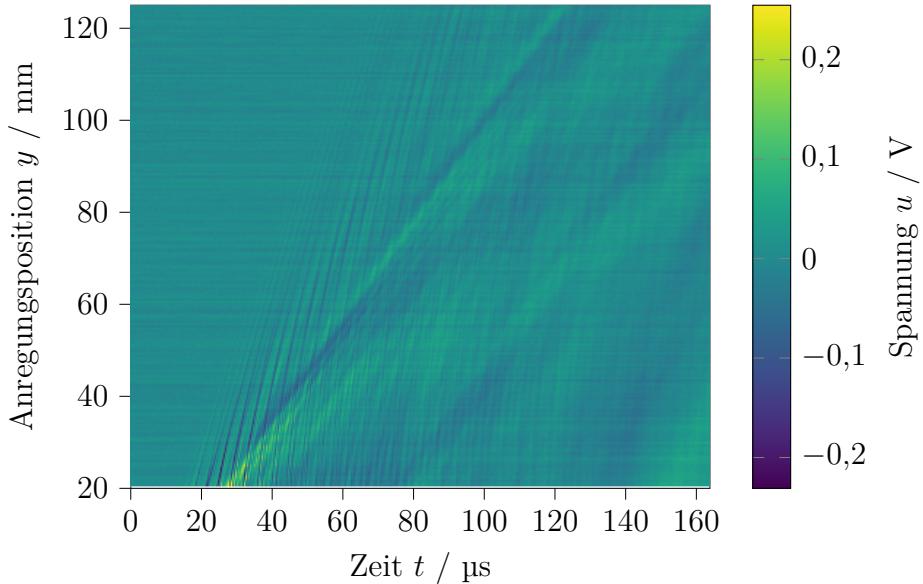


Abbildung 4.10: Zeit- und ortsabhängige Signalmatrix

le Fourier-Transformation in den Frequenz-Wellenzahlbereich überführt [AC90; AC91], ergibt sich dessen Betrag in Abbildung 4.11 (Dispersionsabbildung), wobei negative Frequenzen nicht mit dargestellt sind, da diese lediglich die zusätzliche Spiegelung entlang der Wellenzahlachse und somit keine zusätzlichen Informationen enthalten. Dort werden die sich ausbreitenden Moden als Grate sichtbar. Große Werte $|U(f, k)|$ bedeuten, dass die entsprechenden Moden mehr Energie transportieren als schwächer ausgeprägte Moden. Dabei ist ersichtlich, dass die Dispersionsabbildung im Vergleich zum Dispersionsdiagramm (vgl. z.B. Abbildung 4.3) nicht alle ausbreitungsfähigen Moden enthält. Dies liegt daran, dass gewisse Teile der Moden nicht detektiert werden, weil die vom Empfangswandler detektierte Komponente der Verschiebung beim entsprechenden Frequenz-Wellenzahl-Paar gerade Null ist. Gründe hierfür sind, dass die entsprechenden Moden nicht angeregt oder zu stark gedämpft sind. Die senkrechten periodischen Streifen in Abbildung 4.11 sind auf den örtlichen Leakage-Effekt zurückzuführen. Ebenso ergeben sich durch den zeitlichen Leakage-Effekt waage-

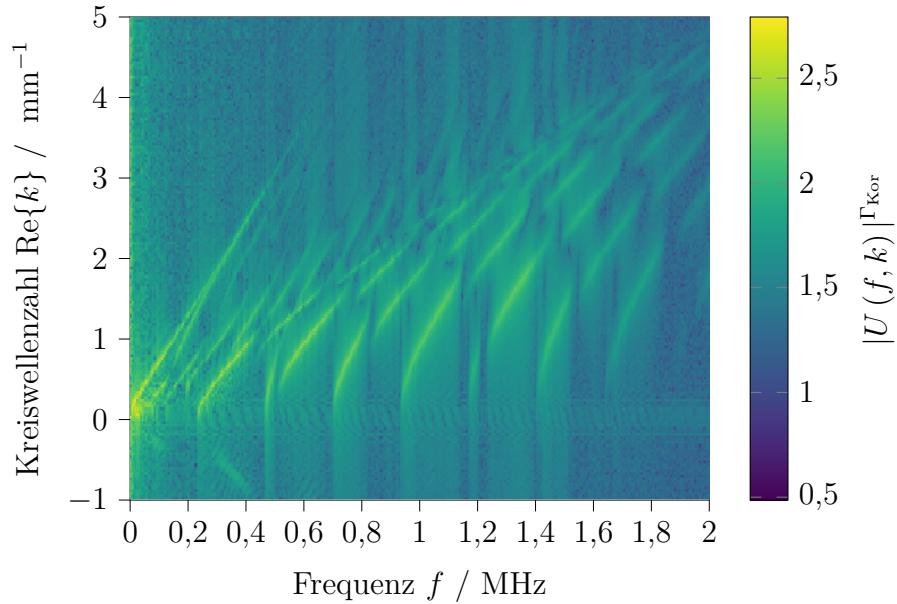


Abbildung 4.11: 2D-Fourier-Transformation der Messsignalmatrix (PEEK) (Gamma-Korrektur ($\Gamma_{\text{Kor}} = 0,1$) zur besseren Sichtbarkeit für die Darstellung)

rechte Streifen nahe einer Wellenzahl von $\text{Re}\{k\} = 0$, die in Abbildung 4.11 jedoch kaum bemerkbar sind. Wie dem entgegen zu wirken ist und welche weiteren Signalverarbeitungsschritte helfen, um die Sichtbarkeit der Moden zu erhöhen, wird anschließend in Abschnitt 4.6 erläutert.

4.5 Validierung von Dispersionsabbildungen an FEM-Simulation

Zur Validierung, ob die dargestellten Modenverläufe der messtechnisch erzeugten Dispersionsabbildung tatsächlich mit den im Vorwärtsmodell berechneten Modenverläufen übereinstimmen, wird die Wellenausbreitung in einem zweidimensionalen FEM-Modell einer Platte mittels CFS++ [Kal07] im Zeitbereich simuliert. Da die Messung der zeitabhängigen Messsignale ebenfalls im Zeitbereich erfolgt, ist eine Zeitbereichssimulation trotz des höheren Rechenaufwands aufgrund der Artefakte, die durch die Abtastung im Zeitbereich, Leakage-Effekt, Fourier-Transformation etc. hinzu kommen, näher an den Messsignalen.

4.5 Validierung von Dispersionsabbildungen an FEM-Simulation

Die Platte wird mit einer Dicke von 3 mm und einer Länge (Richtung der Wellenausbreitung) von 20 cm angenommen, welche mit einem strukturierten Rechteckgitter diskretisiert wird. Aufgrund der Dicke und Länge der Platte erstreckt sie sich von $x = 0$ bis $x = 3$ mm sowie von $y = 0$ bis $y = 20$ cm. Als Plattenmaterial wird ein ideal-elastisches, isotropes Materialmodell mit einem Elastizitätsmodul von $E = 4,76$ GPa, einer Poissonzahl von $\nu = 0,38$ und einer Dichte von $\rho = 1300$ kg m $^{-3}$ verwendet. Angeregt wird mit einer mechanischen Verschiebung in x -Richtung auf der Unterseite der Platte bei $x = 0$, $y = 9,5$ cm in Form eines transienten Gaußpulses mit einer Höhe von 1 μ m und zeitlichen Dauer von 3 ns um den Zeitpunkt $t = 5$ ns. Aufgenommen werden zu jedem Zeitschritt die mechanischen Verschiebungen an der Oberseite der Platte bei $x = 3$ mm an 1000 äquidistanten Punkten zwischen, $y = 10$ cm und $y = 20$ cm.

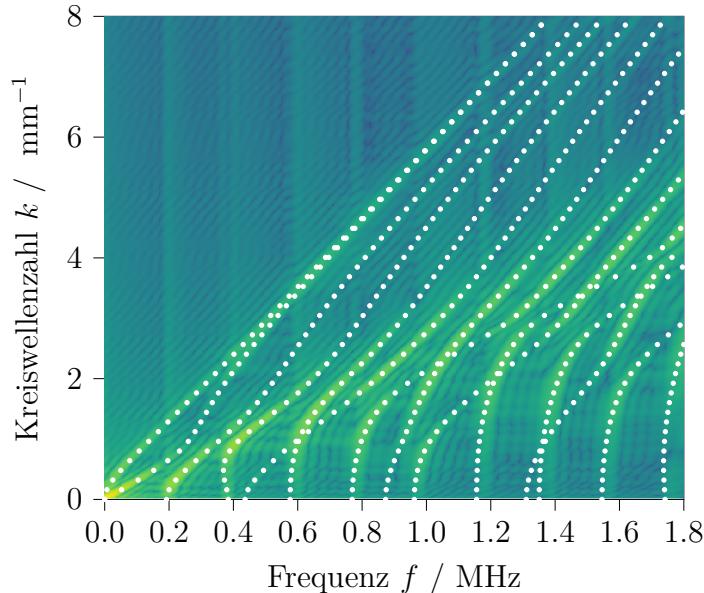


Abbildung 4.12: Dispersionsabbildung aus den Rohsignalen der *In-plane*-Auslenkungen (Gamma-Korrektur ($\Gamma_{\text{Kor}} = 0,1$) zur besseren Sichtbarkeit für die Darstellung)

Da in [CSG21] bereits gezeigt werden konnte, dass eine Detektion mittels Laser-Doppler-Vibrometer Verschiebungen senkrecht zu Plattenoberfläche (*Out-of-plane*-Komponenten), eine Detektion mittels Ultraschallwandler Verschiebungen in der Plattenoberfläche (*In-plane*-Komponenten) erfasst, ist in Abbildung 4.12 der Betrag der zweidimensionalen Fourier-Transformation der y -Komponente ξ_y (*in-plane*) der mechanischen Verschie-

bung und das mittels Vorwärtsmodell berechnete Dispersionsdiagramm dargestellt. Dabei werden vor der zweidimensionalen Fourier-Transformation sowohl im Orts- als auch Zeitbereich Nullen an die Signale gehangen, um die Dispersionsabbildung zu glätten. Im Vergleich mit den im Vorwärtsmodell berechneten Modenverläufen, stimmen beide Simulationsergebnisse überein und befinden sich dementsprechend bei den gleichen Frequenz-Wellenzahl-Paaren. Da die *In-plane*-Komponente der mechanischen Verschiebung für einige Frequenz-Wellenzahl-Paare der Moden zu Null wird, weil diese nur eine *Out-of-plane*-Komponente enthalten, oder einige Moden nicht angeregt wurden, werden einige Bereiche der Moden bei höheren Wellenzahlen in der Dispersionsabbildung kaum sichtbar und können folglich nicht weiter ausgewertet werden.

4.6 Signalvorverarbeitung

Werden die Messdaten im Orts-Zeitbereich ohne weitere Signalverarbeitungsschritte zweidimensional Fourier-transformiert, ergibt sich die in Abbildung 4.13 abgebildete Dispersionsabbildung als Betrag der zweidimensionalen Fourier-Transformation, in der Moden nur schwach erkennbar sind. Damit möglichst viele der propagierenden Moden in den Messdaten

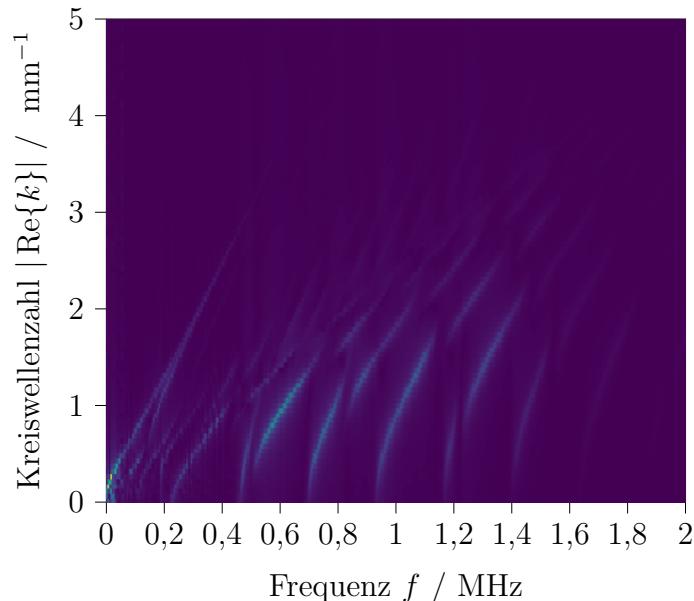


Abbildung 4.13: Unverarbeitete Dispersionsabbildung

sichtbar werden, werden folgende Signalverarbeitungsschritte basierend auf [JCW17] nach einer Mittelwertbefreiung der Zeitsignale nacheinander durchgeführt:

Fensterung im Orts- und Zeitbereich

Wie bereits in Abbildung 4.11 ersichtlich war, ergäbe sich ohne Fensterung im Ortsbereich ein Streifenmuster (wie in Abbildung 4.14a), welches durch Verwendung eines Tukey-Fensters [Tuk67; Har78] mit der Fensterfunktion

$$w(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{r}\left[y - \frac{r}{2}\right]\right)\}, & 0 \leq y < \frac{r}{2} \\ 1, & \frac{r}{2} \leq y < 1 - \frac{r}{2} \\ \frac{1}{2}\{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{r}\left[y - 1 + \frac{r}{2}\right]\right)\}, & 1 - \frac{r}{2} \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

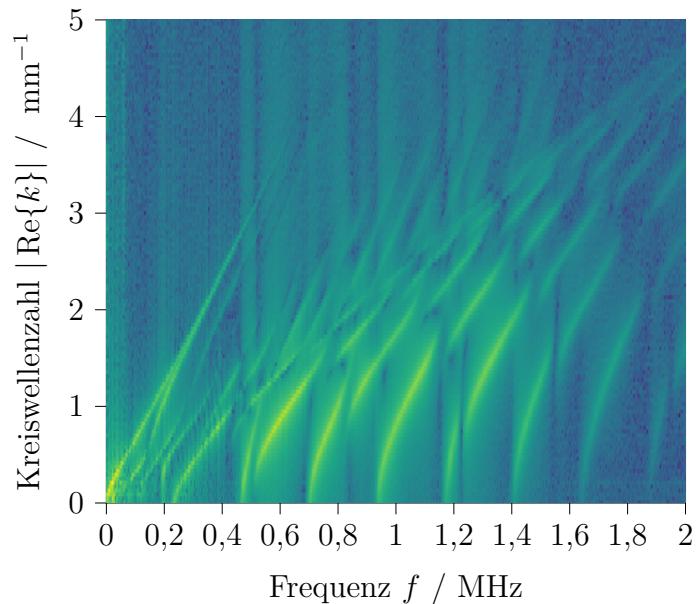
[RM13; Mat] unterbunden wird (vgl. Abbildung 4.14b).

Die Tukey-Fensterfunktion lässt sich durch den Parameter r für diesen Zweck gut parametrisieren. Wird $r = 1$ gewählt, entspricht es einem Hann-Fenster [BT58], für $r = 0$ einem Rechteck-Fenster [RM13]. Ein zu großes r führt zu einer höheren Unschärfe der Fouriertransformierten, ein zu kleines r führt dazu, dass der Leakage-Effekt noch zu stark ausgeprägt ist. Als Kompromiss wird daher $r = 0,2$ (sowohl im Zeit- als auch im Ortsbereich), sofern nicht anders angegeben, gewählt.

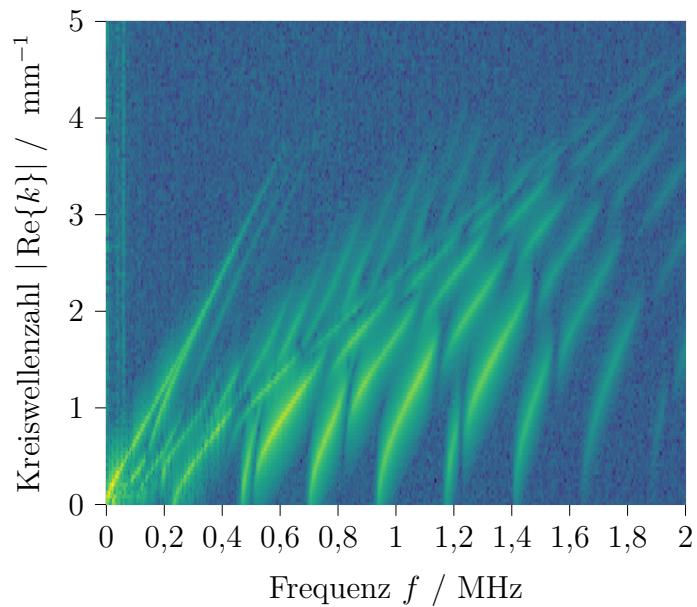
Fehlende zeitliche Fensterung führt zu einem Streifen über alle Frequenzen bei kleinen Wellenzahlen. Dieser ist unproblematisch bei niedrigen Frequenzen, da die Moden niedriger Ordnung hohe Intensitäten aufweisen und damit deutlich zu erkennen sind, wohingegen Moden hoher Ordnung bei höheren Frequenzen aufgrund der frequenzabhängigen Dämpfung sehr schwach oder kaum erkennbar sind. Um diese Moden hoher Ordnung detektierbar zu machen, wird eine spätere spaltenweise Normierung durchgeführt. Dafür ist es wichtig den zeitlichen Leakage-Effekt zuvor weitestgehend zu unterdrücken, der andernfalls anstelle der sich ausbreitenden Moden sichtbar wird.

Heruntersampliern im Zeitbereich und Zero-Padding

Aufgrund der Länge der aufgenommenen Zeitsignale (2^{14} Abtastwerte), ist weiteres Zero-Padding im Zeitbereich, kaum praktikabel. Die Abtastfrequenz der Messsignale ist mit $f_{\text{abt}} = 100 \text{ MHz}$ deutlich über der doppelten maximalen detektierbaren Frequenz der Wellenleitermoden.



(a) Ohne Fensterung, entspricht Rechteckfenster ($r = 0$)



(b) Mit Fensterung im Orts- und Zeitbereich mit je $r = 0,2$

Abbildung 4.14: Dispersionsabbildung ohne und mit Fensterung und nachfolgender Anwendung einer Gamma-Korrektur (siehe folgende Abschnitte) mit $\Gamma_{\text{Kor}} = 0,1$ um den resultierenden Effekt der Fensterung sichtbar werden zu lassen

Da, insbesondere bei Polymeren, Moden hoher Ordnung teilweise so stark gedämpft werden, dass ab einer bestimmten Frequenz kaum Moden sichtbar werden, wird eine obere Grenzfrequenz während der Verarbeitung festgelegt. Aufgrund der hohen Speicher Verfügbarkeit und zur Vorbeugung eines Datenverlusts wird die Abtastfrequenz nicht während der Messung, sondern erst während der Verarbeitung verringert, da es genügt, die maximale darstellbare Frequenz und somit die Abtast- bzw. Nyquistfrequenz auf Basis der darstellbaren Wellenleitermoden zu wählen. Bei Metallproben ergeben sich häufig darstellbare Wellenleitermoden bis zu 10 MHz, bei Polymeren bis zu 3 MHz, sodass bei letzterem die Abtastfrequenz deutlich geringer gewählt werden kann.

Nach dem Abtasttheorem nach Shannon [Sha49] ergibt sich bei gegebener oberer Grenzfrequenz f_{Ny} eine Mindestabtastfrequenz von $f_{Ab} = 2f_{Ny} = \frac{1}{\Delta t}$, sodass eine Vergrößerung des Zeitschritts Δt durch Verwerfen von Zwischenwerten zu einer geringeren maximalen darstellbaren Frequenz f_{Ny} und gleichzeitig zur Freigabe von Speicher führt, was anschließendes Zero-Padding ermöglicht. Sind zuvor Signalanteile oberhalb dieser Frequenz enthalten, müssen die Messsignale vorher mit einem entsprechenden Tiefpass gefiltert werden, um Aliasing zu vermeiden. Aufgrund des resultierenden geringeren Speicherbedarfs, können bei entsprechend geringer Abtastfrequenz umso mehr Nullen an die Zeitsignale angehängt werden (Zero-Padding), um die Abbildung im Frequenzbereich resultierend durch eine kleinere Frequenzschrittweite Δf zu glätten. Nach weiterem Zero-Padding im Ortsbereich zur Glättung im Wellenzahlbereich, wird die zweidimensionale Fourier-Transformation durchgeführt und auf die geforderte maximale Frequenz und Wellenzahl zugeschnitten.

Zweidimensionale Fourier-Transformation

Durch die zweidimensionale Fourier-Transformation ergeben sich Signalanteile sowohl bei positiven Frequenzen und Wellenzahlen wie auch bei negativen Frequenzen und Wellenzahlen. Bei Betrachtung des Betrags der komplexen 2D-Fourier-Transformierten (Dispersionsabbildung) werden bereits die sich ausbreitenden Moden als Grate sichtbar. Während die Moden bei positiven Wellenzahlen die Wellenausbreitung in negative y -Richtung beschreiben, zeigen sich die in positive y -Richtung propagierenden Wellenleitermoden bei negativen Wellenzahlen. Weiterhin ergibt sich jeweils eine periodische Fortsetzung durch die diskrete Verarbeitung. Aufgrund der Achsen-Symmetrie von Dispersionsdiagrammen sowohl zur Frequenz- als auch der Wellenzahl-Achse, ist es theoretisch unerheblich,

welcher Quadrant (jeweils positive und negative Frequenzen bzw. Wellenzahlen) betrachtet wird, da die übrigen keine zusätzlichen Informationen enthalten. Daher genügt eine einseitige Detektion der Wellenausbreitung, was dazu führt, dass nur im entsprechenden Quadranten Wellenleitermoden enthalten sind. Die übrigen sich ergebenden Quadranten werden durch Zuschnitt der Daten entfernt, wobei Abbildung 4.13 bis 4.17 bereits nur einen Quadranten zeigen.

Gamma-Korrektur

Während die Moden niedriger Ordnung bereits schwach erkennbar sind, werden weitere Schritte auf den Betrag der Fourier-Transformierten zur einfacheren Erkennung der Moden höherer Ordnung notwendig. Ein einfaches Mittel der Bildverarbeitung zur Kontrasterhöhung ist die Gamma-Korrektur [Hab89], womit sich die Werte in der Dispersionsabbildung nach der Fourier-Transformation $|U(f, k)|$ zu

$$U_{\Gamma_{\text{Kor}}}(f, k) = |U(f, k)|^{\Gamma_{\text{Kor}}}, \quad 0 < \Gamma_{\text{Kor}} \leq 1 \quad (4.18)$$

ergeben. Hier wird in der Regel $\Gamma_{\text{Kor}} = 0,1$ gewählt, um kleine Werte $|U(f, k)|$, wie an den Wellenzahl-Frequenzpaaren an denen sich Moden hoher Ordnung zeigen, stark anzuheben, um deren Sichtbarkeit zu erhöhen.

Entfernen der Spaltenmittelwerte

Durch äußere empfangene Störeinflüsse wie Einstreuungen in bestimmten Frequenzbändern aus der Umgebung während der Messung, kann es zu spaltenweisen Offsets in den Matrixwerten der Dispersionsabbildung kommen, welche subtraktiv entfernt werden. Dies reduziert zusätzlich den nach der Fensterung verbliebenen Einfluss des örtlichen Leackage-Effekts, da sich eine unzureichende örtliche Fensterung ebenfalls durch senkrechte Linien (bei konstanter Frequenz und gleichzeitig allen Wellenzahlen) in der Dispersionsabbildung zeigt. So lassen sich zusätzliche senkrechte Streifen bei tiefen Frequenzen aus Abbildung 4.14 in Abbildung 4.15 entfernen.

Spaltenweise Normierung

Die sich ausbreitenden Moden höherer Ordnung sind im Vergleich zu Moden niedriger Ordnung weiterhin schwach ausgeprägt. Allerdings sind gerade die Moden hoher Ordnung sehr sensitiv auf die Materialparameter (vgl. Abschnitt 4.8).

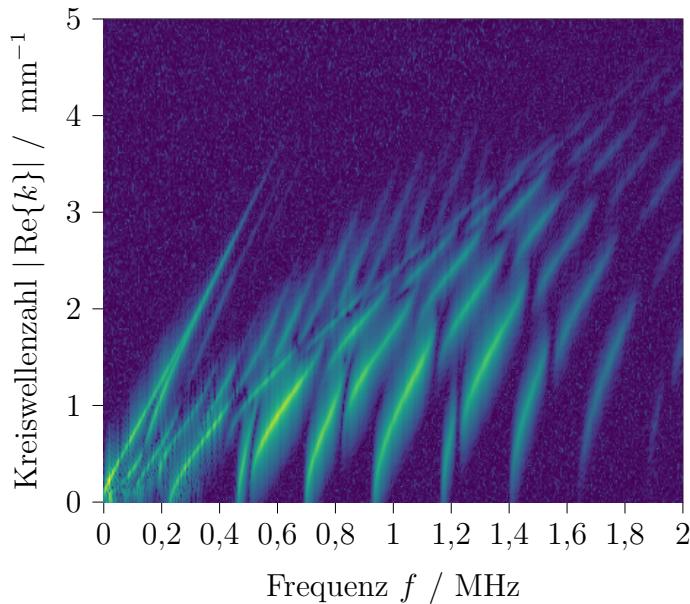


Abbildung 4.15: Dispersionsabbildung nach Entfernung der Spaltenmittelwerte

Um diese Moden stärker zu gewichten und somit besser sichtbar werden zu lassen, wird eine spaltenweise Normierung durch [Web21] zusätzlich eingeführt. Dabei wird bei jeder Frequenz auf den Maximalwert der jeweiligen Spalte normiert, wodurch Moden höherer Ordnung prägnanter in Abbildung 4.16 erkannt werden. Bei hohen Frequenzen führt dies gleichzeitig zunächst zu dem Problem, dass der sonst eher verborgene zeitliche Leakage-Effekt sichtbar wird, wenn auf die vorherige zeitliche Fensterung verzichtet werden würde.

Gamma-Expansion

Aufgrund der spaltenweisen Normierung, werden sehr viele Moden auch bei hohen Frequenzen aufgrund der entsprechend höheren Matrixwerte sichtbar, die zum Teil jedoch so nah beieinander liegen, dass sie aufgrund ihrer Breite fast ineinander übergehen. Um kleine Werte in der Dispersionsabbildung zwischen den Moden weiter zu verringern, ergänzt [Web21] nach einer Normierung auf den Maximalwert der Matrix, nochmal eine Gamma-Korrektur, jedoch nun mit einem Wert von $\Gamma_{\text{Exp}} > 1$, id.R. $\Gamma_{\text{Exp}} = 2,5$ bei Polymeren. Aufgrund der resultierenden Stauchung der Zwischenwerte, werden einzelne Moden somit deutlicher. Bei Metallproben hingegen sind

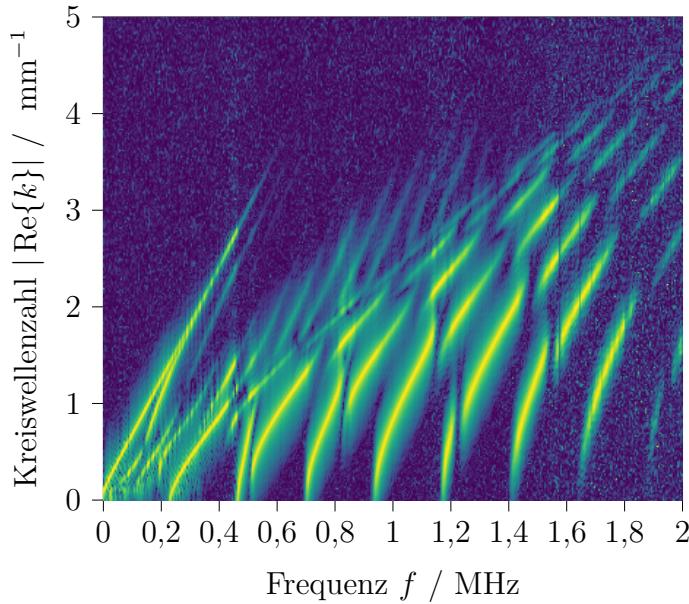


Abbildung 4.16: Dispersionsabbildung nach spaltenweiser Normierung

die Grate bereits so schmal ausgeprägt, dass eine Gamma-Expansion nicht notwendig ist und gar die Konvergenz der nachfolgenden Optimierung gefährden kann.

Unterer Grenzwert

Eine weitere Hilfe, um Moden deutlicher erscheinen zu lassen, ist es, den Mittelwert der Matrix zu bestimmen und alle Werte, die unter diesem liegen, auf den Mittelwert zu setzen. Dies kann theoretisch beliebig oft durchgeführt werden, um Moden deutlicher hervorzuheben, jedoch führt eine zu häufige Anwendung zum Verlust von schwach sichtbaren Moden. Daher wird es, hier wie in [JCW17], einmal angewandt und die resultierende Matrix auf ihren Maximalwert normiert.

Das Ergebnis nach allen Verarbeitungsschritten ist in Abbildung 4.17 am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte dargestellt. Die in der Messung angeregten Moden werden nun trotz modaler Dämpfung deutlich als Grate sichtbar.

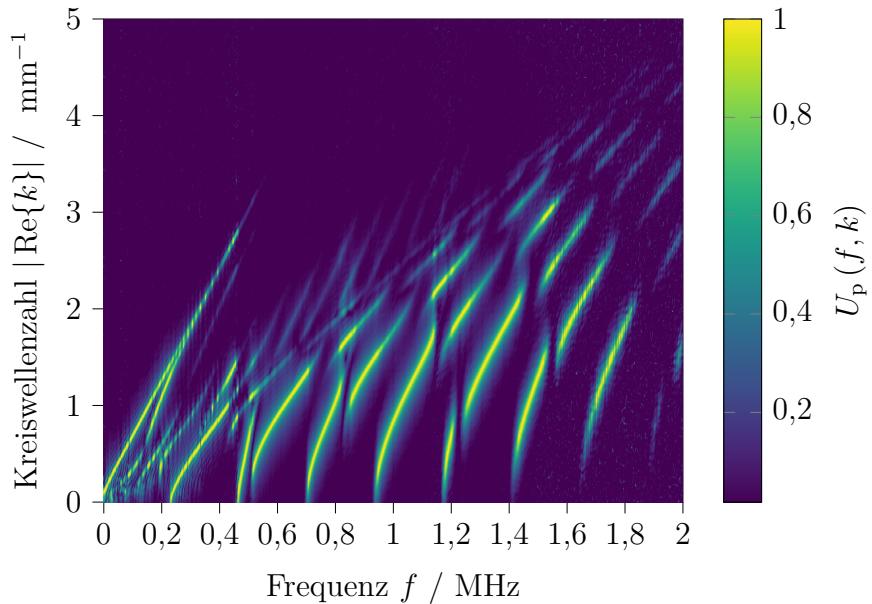


Abbildung 4.17: Dispersionsabbildung nach allen Vorverarbeitungsschritten [JCH21]

4.7 Reproduzierbarkeit der Messung

Zur Untersuchung der Reproduzierbarkeit werden mehrere Messungen exemplarisch an PEEK durchgeführt, wobei jede neue Messung ebenfalls eine neue Ankopplung der Probe an den Empfangswandler beinhaltet. Die sonstigen Messparameter (vgl. Abschnitt 4.4) wie die Anregungspositionen sowie die Parametrisierung der weiteren Verarbeitungsschritte der Messdaten (vgl. Abschnitt 4.6) werden identisch gewählt. Abbildung 4.18a zeigt die sich ausbreitenden Moden dreier Messungen, die jeweils in Rot, Grün und Blau dargestellt sind. Weitere Farben ergeben sich aus deren additiven Überlagerungen. Der Großteil der Moden erscheint weiß, d.h. dass sich diese Modenbereiche in jeder der drei Messungen ausbreiten und detektiert werden, sodass sich dort alle drei RGB-Farben überlagern. Bei steigender Frequenz und Wellenzahl ergeben sich auch Überlagerungen von lediglich zwei Messungen oder gar Bereiche die nur in einer der drei Messungen erscheinen. Die Ursache hierfür liegt im Wesentlichen daran, dass die Beschaffenheit der Koppelschicht bei erneuter Ankopplung nicht identisch reproduzierbar ist. Eine zu schwache Ankopplung des Empfangswandlers führt dazu, dass einige schwach ausgeprägte Modenabschnitte bei hohen Frequenzen nicht mehr detektiert werden. Abbildung 4.18b zeigt dazu

4 Inverses Verfahren zur Identifikation elastischer Materialparameter

den Vergleich dreier Messungen bei jeweils gleicher Ankopplung an den Empfangswandler. Dort zeigen sich keinerlei Unterschiede im Vergleich der drei Messungen untereinander.

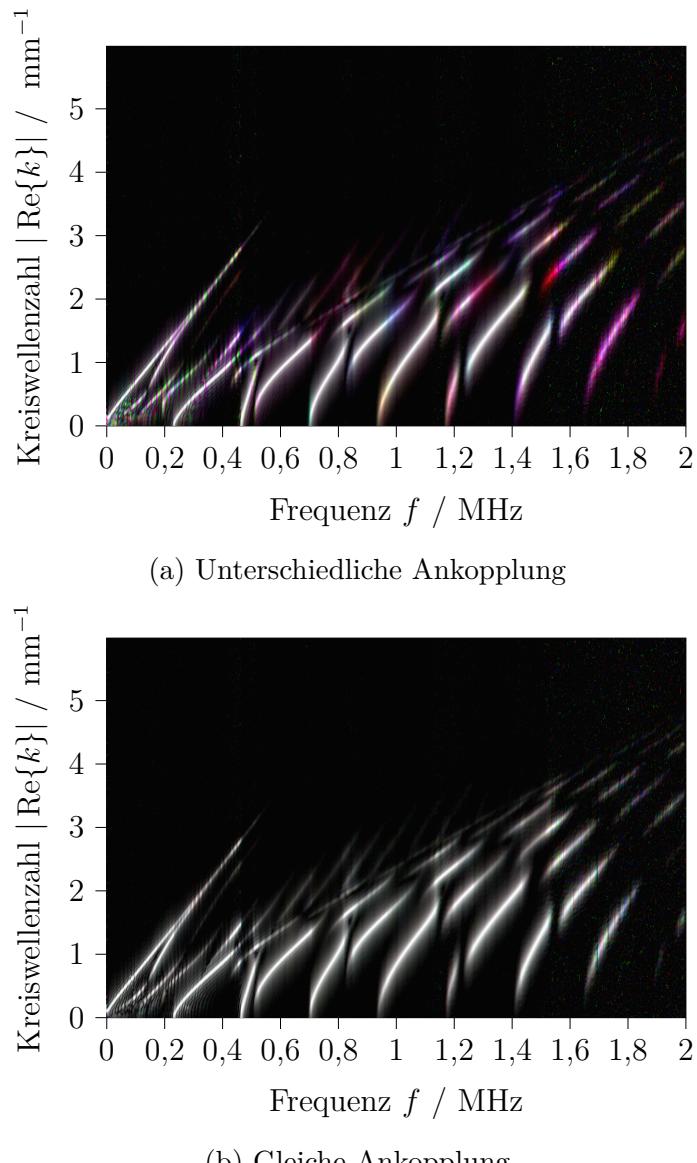


Abbildung 4.18: Vergleich der sich ausbreitenden Moden an drei Messungen an PEEK mit RGB-Codierung: Messung 1 in Rot, Messung 2 in Grün, Mesung 3 in Blau

4.8 Sensitivität der Schallgeschwindigkeiten

Um den Einfluss der Materialparameter auf das Dispersionsdiagramm zu untersuchen, wird die skalierte Sensitivität

$$\Upsilon_{p_i}^{b_j} = \left(\frac{\partial b_j}{\partial p_i} \right)_{p_i, \text{AP}} \quad (4.19)$$

der Ursache p_i auf die Beobachtung b_j an einem Arbeitspunkt p_i, AP [Hil00] betrachtet. Die Ableitung wird numerisch durch den zentralen Differenzenquotient angenähert. Generell hat die skalierte Sensitivität den Vorteil, dass diese durch die Skalierung mit den Parametern des Arbeitspunktes einheitlos wird. Gleichzeitig liegt die skalierte Sensitivität, trotz möglicherweise sehr stark unterschiedlicher Wertebereiche der Eingangsparameter p_i als Ursache, im gleichen Wertebereich, wodurch die Sensitivitäten der einzelnen Parameter auf die entsprechende Beobachtung untereinander vergleichbar sind.

Wird keine Frequenzabhängigkeit im Materialmodell berücksichtigt, ist es effizienter die Kreisfrequenz ω bei vorgegebener Kreiswellenzahl k zu berechnen (vgl. Abschnitt 3.4). Daher dienen die jeweiligen Kreisfrequenzen ω zu jeder Kreiswellenzahl k als Beobachtung b_i , während die entsprechenden Schallgeschwindigkeiten als Ursache p_i betrachtet werden. Als Arbeitspunkt werden exemplarisch $c_L = 2528 \text{ m s}^{-1}$ als Longitudinal- und $c_T = 1096 \text{ m s}^{-1}$ als Transversalwellengeschwindigkeit gewählt. Als Plattendicke wird beispielhaft 5,5 mm angenommen. Um den Einfluss des Diskretisierungsfehlers gering zu halten, wird eine sehr hohe Diskretisierung genutzt. Mit 20 Knoten je Wellenlänge, einer maximalen Frequenz von $\omega_{\max} = 12 \text{ MHz}$ und einer Transversalwellengeschwindigkeit von $c_T = 1096 \text{ m s}^{-1}$ ergibt sich nach Gleichung 4.11 eine untere Diskretisierungsgrenze von 192 Knoten. Gewählt werden 500 Knoten mit einer Ordnung von 3. Abbildung 4.19 zeigt die Dispersionsdiagramme bei einer Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit um $\pm 5\%$ um den Arbeitspunkt. Dort zeigt sich, dass sich bei dessen Änderung vorwiegend Änderungen bei kleinen Kreiswellenzahlen ergeben, was sich in der Sensitivität der Kreisfrequenzen in Abbildung 4.21 widerspiegelt. Die Sensitivität bei sehr großen Kreiswellenzahlen tendiert hingegen zu Null. Die Maxima der Sensitivität der einzelnen Moden befinden sich bei denjenigen Wellenzahlen, die im Dispersionsdiagramm auf der Geraden $k_L(\omega) = \omega \frac{1}{c_L}$ liegen. Gleichzeitig befindet sich bei der Sensitivität der Transversalwellengeschwindigkeit in Abbildung 4.22 an der gleichen Stelle ein Minimum.

4.8 Sensitivität der Schallgeschwindigkeiten

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die Moden an diesen Stellen eher Longitudinalwelleneigenschaften besitzen.

Insgesamt ist in Abbildung 4.20 ersichtlich, dass eine Änderung der Transversalwellengeschwindigkeit Auswirkungen auf alle Moden hat. Ändert sich jedoch die Longitudinalwellengeschwindigkeit, hat dies nur Auswirkungen auf den Bereich der Wellenzahlen unterhalb der Geraden $k_L(\omega) = \omega \frac{1}{c_L}$. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine Transversalwelle mit einer Schallgeschwindigkeit von $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ aus einer reinen Scherbewegung besteht,

während eine Longitudinalwelle mit $c_L = \sqrt{\frac{K+4/3\mu}{\rho}}$ sowohl Scher- als auch Kompressionsbewegungen enthält (vgl. Abschnitt 3.3). Somit zeigt sich ein Dispersionsdiagramm aus gekoppelten Longitudinal- und Transversalwellen bzw. aus gekoppelten Kompressions- und Scherbewegungen. Um dies zu zeigen, vergleichen Überall et. al [ÜHD94] das Dispersionsdiagramm einer festen Schicht mit zwei Dispersionsdiagrammen von jeweils einer flüssigen Schicht. Dabei setzen sie die Longitudinalwellengeschwindigkeit der ersten Flüssigkeitsschicht gleich der Longitudinalwellengeschwindigkeit des Festkörpers. Als Longitudinalwellengeschwindigkeit der zweiten Flüssigkeitsschicht wird die Transversallwellengeschwindigkeit des Festkörpers genutzt. Bei Betrachtung der drei Dispersionsdiagramme ergibt sich die Beobachtung, dass sich die Moden der einzelnen Flüssigkeitsschichten an einigen Stellen kreuzen. Werden beide jedoch verkoppelt z.B. als zwei Flüssigkeitsschichten aber insbesondere auch innerhalb eines Festkörpers mit entsprechender Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit, verlaufen die Moden aneinander vorbei anstatt sich zu kreuzen. Diese Verhalten vermiedener Kreuzungen aufgrund der Kopplung von Longitudinal- und Transversalwellen bzw. die Verkopplung von Kompressions- und Scherbewegungen lässt sich insbesondere wieder entlang der Geraden $k_L(\omega) = \omega \frac{1}{c_L}$ in Abbildung 4.19 und Abbildung 4.20 beobachten. Oberhalb der Geraden, ist das Verhalten der Moden nahezu unabhängig von der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L . So sind die A0, S0 sowie die A1-Mode nahezu unabhängig von c_L . Ein weiterer sehr sensitiver Bereich sind die Grenzfrequenzen. Insgesamt ergibt sich im Dispersionsdiagramm jedoch eine deutlich höhere Sensitivität von der Transversalwellengeschwindigkeit im Vergleich zur Longitudinalwellengeschwindigkeit, da die Sensitivität der Transversalwellengeschwindigkeit mit steigender Kreiswellenzahl weiterhin ansteigt (Abbildung 4.22).

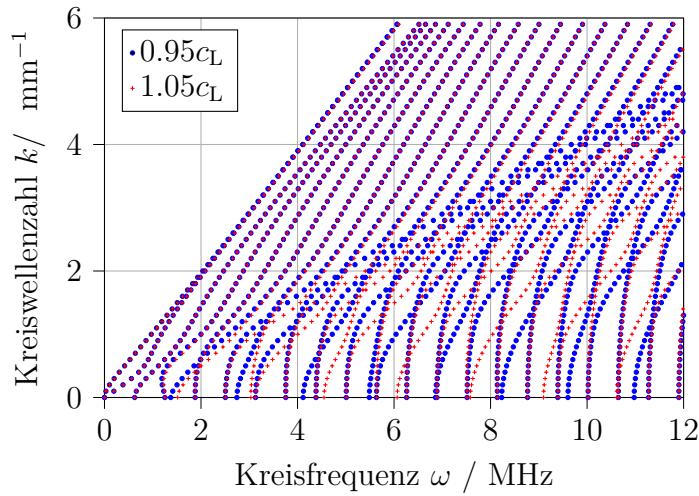


Abbildung 4.19: Dispersionsdiagramm bei Änderung der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L am Beispiel einer 5,5 mm dicken PEEK-Platte

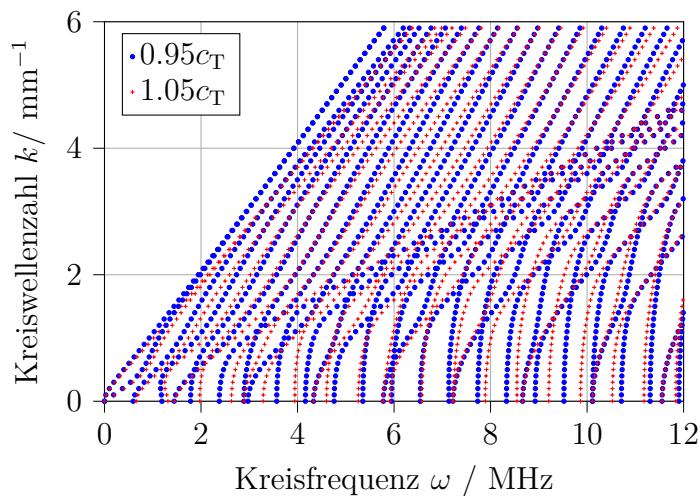


Abbildung 4.20: Dispersionsdiagramm bei Änderung der Transversalwellengeschwindigkeit c_T am Beispiel einer 5,5 mm dicken PEEK-Platte

4.8 Sensitivität der Schallgeschwindigkeiten

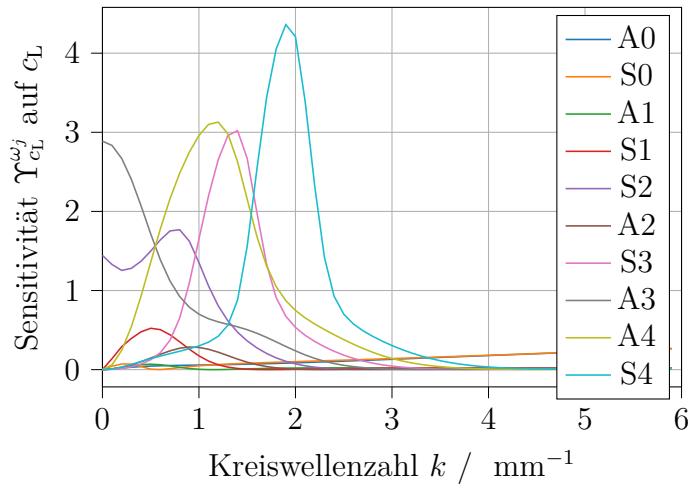


Abbildung 4.21: Sensitivität der Kreisfrequenzen ω der zehn Moden niedrigster Ordnung von der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L

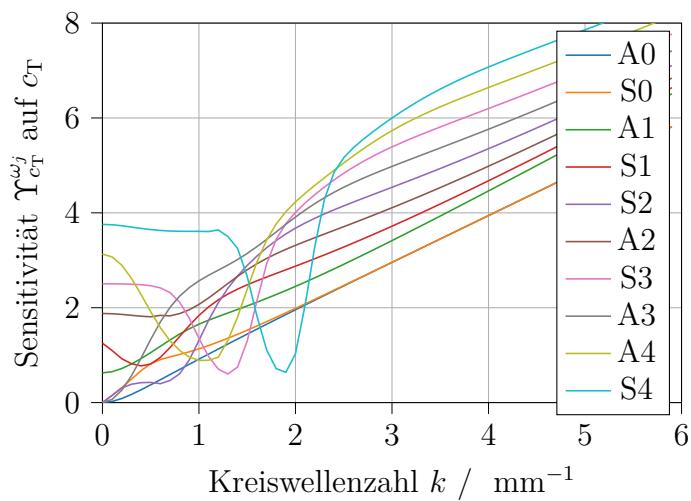


Abbildung 4.22: Sensitivität der Kreisfrequenzen ω der zehn Moden niedrigster Ordnung von der Transversalwellengeschwindigkeit c_T

4.9 Startwerte

Wird im inversen Verfahren ein lokaler Optimierungsalgorithmus verwendet, werden Startwerte für die Optimierungsparameter benötigt. Da ein lokaler Optimierungsalgorithmus nur im Bereich um die Startwerte sucht, sollten diese nicht zu weit von den gesuchten Werten abweichen. Im Gegensatz zu den lokalen suchen globale Optimierungsalgorithmen hingegen in einem sehr viel größeren Bereich, benötigen entsprechend längere Rechenzeiten, können aber zum Teil auf Startwerte verzichten. Aufgrund der längeren Rechenzeit globaler Optimierungsalgorithmen wird im inversen Verfahren ein lokaler Optimierungsalgorithmus verwendet, weshalb sich der folgende Abschnitt mit der Schätzung von Startwerten für die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit befasst.

4.9.1 Startwertbestimmung im Zeit-Ortsbereich

Eine Abschätzung der Schallgeschwindigkeit im Zeit-Ortsbereich erfolgt über Strecke und Laufzeit der Wellenpakete. Im Gruppengeschwindigkeits-Dispersionsdiagramm eines Wellenleiters ist die Longitudinalwellengeschwindigkeit die größtmögliche Gruppengeschwindigkeit. Dabei wird die Gruppengeschwindigkeit der schnellsten Wellenfront als Schätzwert für die Longitudinalwellengeschwindigkeit genommen. Daher wird eine Gerade an die vorderste Wellenfront gelegt, wie in Abbildung 4.23 anhand der weißen Gerade zu sehen ist. Die Wellenpakete zur Schätzung der Transversalwellengeschwindigkeit werden anhand der höchsten Intensität bestimmt. Die A0-Mode, deren Gruppengeschwindigkeit für große Wellenzahlen gegen die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit strebt, zeichnet sich in unbearbeiteten Messdaten sowohl im Zeit- als auch Frequenzbereich aufgrund der asymmetrischen Anregung durch ihre hohe Intensität aus. Daher wird eine Gerade (rote Gerade in Abbildung 4.23) durch diese betragsmäßig hohen Intensitäten gelegt und deren Steigung als Schätzwert für die Transversalwellengeschwindigkeit angenommen. [JCW17] Da die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit nach Gleichung 2.42 abhängig von der Poissonzahl mit einem Faktor nahe 1 von der Transversalwellengeschwindigkeit abhängt, werden Rayleigh-Wellengeschwindigkeit und Transversalwellengeschwindigkeit für eine erste Startwertschätzung als näherungsweise gleich betrachtet.

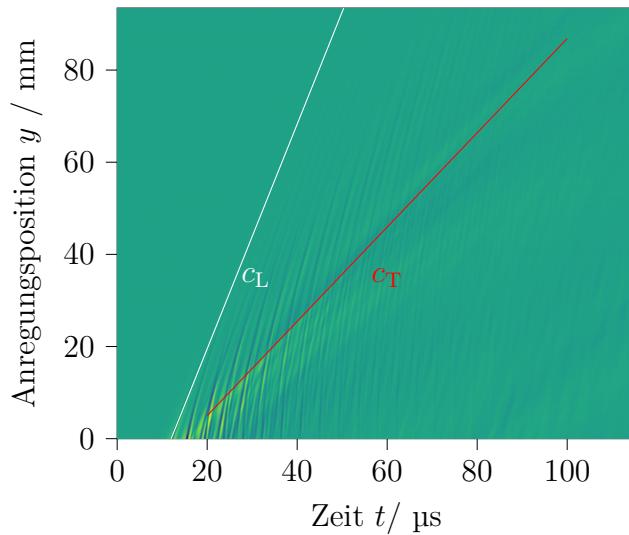


Abbildung 4.23: Schätzung der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Zeit-Ortsbereich

4.9.2 Startwertbestimmung im Frequenz-Wellenzahlbereich

Wie in Abbildung 2.6 können die Schallgeschwindigkeiten aus dem Dispersionsdiagramm geschätzt werden. Abbildung 4.24 zeigt eine stark ausgeprägte A0-Mode. Die Steigung $\partial\omega/\partial k = \partial f/\partial k$ der Moden gibt nach Gleichung 2.44 deren Gruppengeschwindigkeit an (vgl. Gleichung 2.44). Dabei ist $k = \text{Re}\{k\}/(2\pi)$ analog zu $f = \omega/(2\pi)$. Für sehr große Wellenzahlen strebt die Gruppengeschwindigkeit der A0- bzw. S0-Mode gegen die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit c_R , sodass diese für große Wellenzahlen über die Steigung der A0-Mode geschätzt werden kann. Abhängig von der Poissonzahl hängt diese über Gleichung 2.42 mit der Transversalwellengeschwindigkeit zusammen. Aufgrund des beschränkten Wertebereichs der Poissonzahl $0 \leq \nu \leq 0,5$ liegt die Transversalwellengeschwindigkeit c_T im Bereich von $1,02c_R \leq c_T \leq 1,15c_R$. Da der Wert nahe an 1 liegt, wird die Rayleighwellengeschwindigkeit aus einer Steigungsgerade der A0-Mode geschätzt und diese als Schätzwert für die Transversalwellengeschwindigkeit c_T verwendet. [JCH21]

Werden Moden höherer Ordnung für hohe Wellenzahlen in den Messdaten deutlich erkennbar, kann deren Gruppengeschwindigkeit direkt als Startwert der Transversalwellengeschwindigkeit bestimmt werden. Zur Schätzung der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L werden die Bereiche,

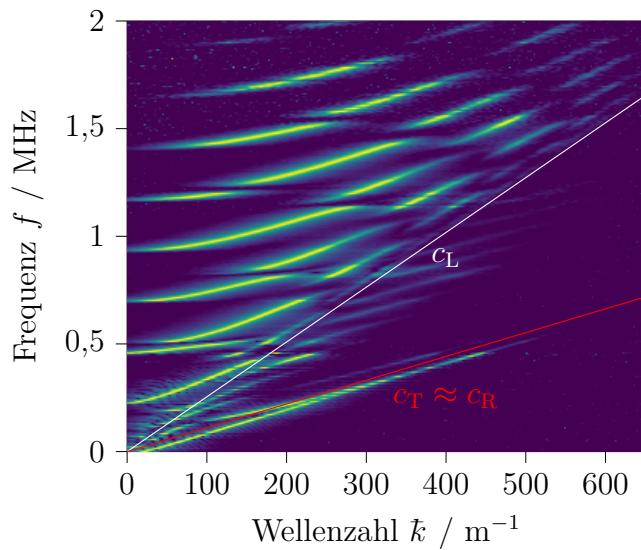


Abbildung 4.24: Schätzung der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit im Frequenz-Wellenzahl-Bereich

die die größte Steigung $\partial f / \partial k$ aufweisen, durch eine Gerade verbunden. Idealerweise verbindet diese Gerade die Wendepunkte der Moden. Die Steigung dieser Geraden wird als Schätzwert für die Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L verwendet.

4.9.3 Vergleich der Startwertbestimmung

Beide Startwertschätzer liefern zufriedenstellende Ergebnisse. Zwar wird die Transversalwellengeschwindigkeit c_T tendenziell unterschätzt, jedoch ist die resultierende Abweichung so gering, dass sie zur Startwertbestimmung vernachlässigt werden kann. Sind sehr wenige Moden sichtbar, z.B. aufgrund einer geringen Plattendicke oder hoher Dämpfung, kann es vorkommen, dass die benötigten Abschnitte der Moden zur Schätzung der Longitudinalwellengeschwindigkeit im Frequenz-Wellenzahl-Bereich kaum sichtbar sind. In dem Fall kann eine Schätzung im Zeit-Ortsbereich leichter sein. In der Regel werden die Messdaten durch die Verarbeitung nach Abschnitt 4.6 so aufbereitet, dass selbst bei stark absorbierenden Werkstoffen hinreichend Moden auswertbar sind. Somit können beide Startwertschätzer grundsätzlich als gleichwertig angesehen werden.

4.10 Zielfunktion

In diesem Abschnitt werden Varianten einer möglichen Kostenfunktion bzw. Zielfunktionen verglichen. Die Kostenfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zwischen Mess- und Simulationsdaten. Ziel ist, dass sich die Moden des simulativ berechneten Dispersionsdiagramms möglichst bei den gleichen Frequenz-Wellenzahl-Paaren befinden, wie die in der Messung detektierten Moden. Die Elastizitätsmatrix eines isotropen Materials ist bereits durch zwei akustische Materialparameter eindeutig beschrieben. Es existieren dafür verschiedene Parameterdarstellungen wie z.B. Elastizitätsmodul und Poissonzahl, Kompressions- und Schermodul, Lamé-Konstanten oder Schallgeschwindigkeiten. Da die Gruppengeschwindigkeiten bereits als Steigung der Grade nach Gleichung 2.44 ins Dispersionsdiagramm bzw. in die Dispersionsabbildung wie z.B. in Abbildung 4.24 eingehen, ist das Dispersionsdiagramm nach Abschnitt 4.8 besonders sensitiv auf die Schallgeschwindigkeiten. Ein weiterer Vorteil bei der Nutzung der Schallgeschwindigkeiten als Optimierungsvariablen besteht darin, dass sich beim Lösen der Eigenwertgleichung (Gleichung 3.27) im Vorwärtsmodell in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten die Dichte herauskürzt und somit keinen Beitrag zur Messunsicherheit liefert (vgl. Unterabschnitt 4.2.1).

4.10.1 Mittelwert der Bildpunkte

In der Simulation werden die Eigenkreisfrequenzen ω_j (k_i) zu den vorgegebenen Kreiswellenzahlen k_i berechnet. Unter Berücksichtigung frequenzabhängiger Materialparameter z.B. unter Verwendung eines frequenzabhängigen Dämpfungsmodells können ebenfalls die Kreiswellenzahlen $k_i(\omega_j)$ unter Vorgabe der Kreisfrequenzen ω_j berechnet werden. In jedem Fall ergeben sich Frequenz-Wellenzahl-Paare aus der Simulation. Diese diskreten Stellen werden in der verarbeiteten Dispersionsabbildung aus der Messung gesucht und der Mittelwert der Matrixwerte $\bar{U}(\omega, k)$ all dieser Stellen gebildet:

$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{\omega_j, k_i}^N U(\omega_j, \text{Re}\{k_i\}) \quad (4.20)$$

Je größer der Mittelwert \bar{U} desto größer ist die Ähnlichkeit zwischen Messung und Simulation, sodass die Modelleingangsparameter bei denen der Mittelwert der Matrixwerte an den entsprechenden simulativ ausgewählten Frequenz-Wellenzahl-Paaren maximal wird, den Materialparametern entsprechen. Abbildung 4.25 zeigt den Verlauf der Funktion unter Variation

der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit am Beispiel einer Messung an einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte, welche ein eindeutiges Maximum aufweist, an dem Messung und Simulation am ähnlichsten sind. Idealerweise stimmen beim Maximum des Mittelwerts \bar{U} die in der Simulation berechneten Frequenz-Wellenzahl-Paare mit den aus der Messung detektierten Frequenz-Wellenzahl-Paaren überein. [JCH21]

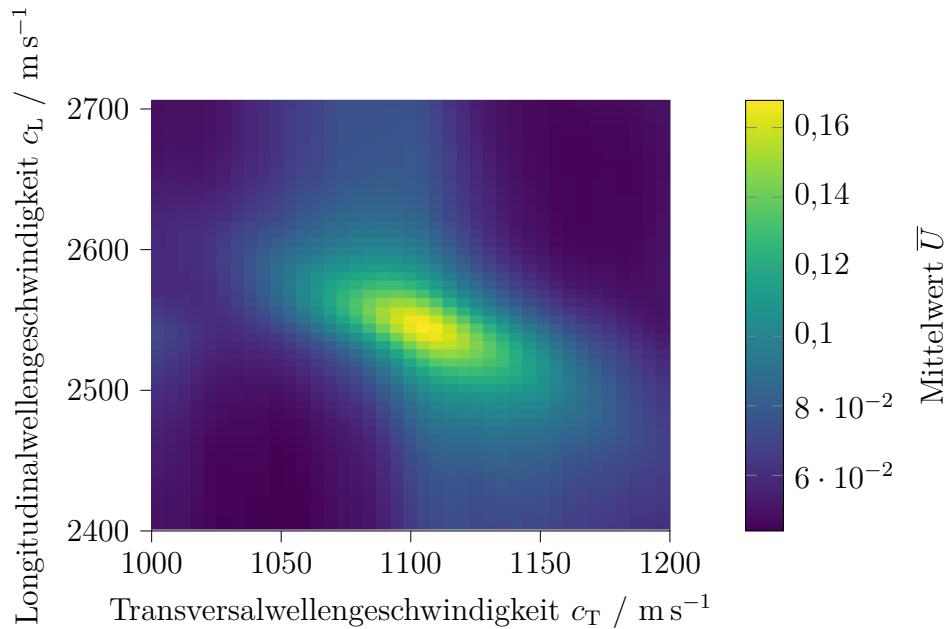


Abbildung 4.25: Mittelwert der Matrixwerte (Dispersionsabbildung) \bar{U} als Kostenfunktion in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten am Beispiel einer Messung an einer PEEK-Platte [JCF22]

Aufgrund der Normierung der Dispersionsabbildung in der Verarbeitung nach Abschnitt 4.6 ergibt sich für \bar{U} ein Wertebereich von $\bar{U} \ll 1$. Bei vollständiger Übereinstimmung ergibt sich theoretisch ein Wert von $\bar{U} \rightarrow 1$, wenn die messtechnisch erfasste Dispersionsabbildung alle theoretisch ausbreitungsfähigen Moden mit maximaler normierter Intensität enthält. Tatsächlich werden nicht alle Moden detektiert, da die entsprechende detektierte mechanische Verschiebung bei bestimmten Modenbereichen gerade zu Null wird und weil nicht alle Moden mit der gleichen Energie angeregt/detektiert werden.

Alternativ zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeiten ist die Kostenfunktion in Abhängigkeit von Kompressions- und Schermodul in Ab-

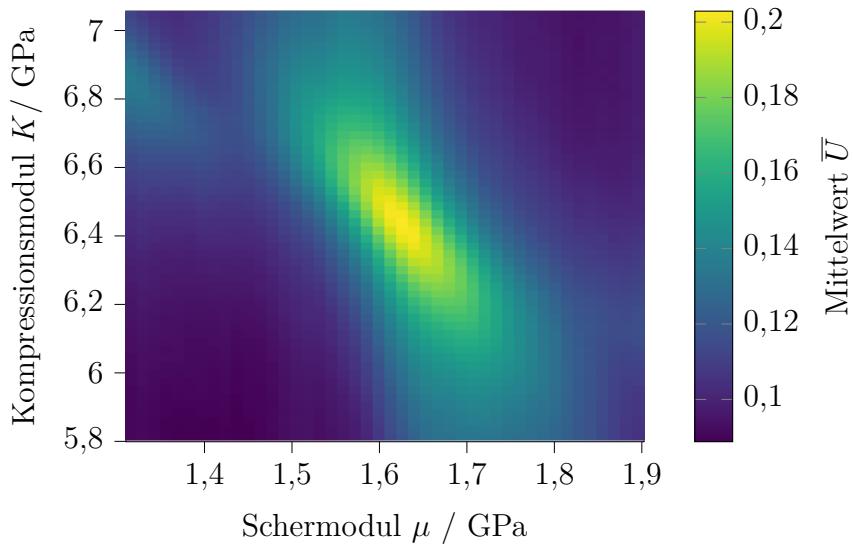


Abbildung 4.26: Mittelwert der Matrixwerte (Dispersionsabbildung) \bar{U} als Kostenfunktion in Abhängigkeit von Kompressions- und Schermodul am Beispiel einer Messung an einer PEEK-Platte

bildung 4.26 dargestellt. Da sich beide Darstellungen leicht ineinander überführen lassen, ergibt sich ein ähnlicher Verlauf.

4.10.2 Kreuzkorrelationskoeffizient

Eine weitere Möglichkeit, Mess- und Simulationsergebnisse zu vergleichen, stellt der Korrelationskoeffizient dar. Ist dieser maximal, stimmen Mess- und Simulationsergebnis überein. Um diesen zu berechnen, wird das simulativ berechnete Dispersionsdiagramm zunächst in eine Matrixform wie die Messdaten überführt. Dazu wird eine Matrix mit Nullen in der Größe der Daten der zu vergleichenden Dispersionsabbildung erzeugt. Jede Zeile entspricht dabei einer Wellenzahl, jede Spalte einer Frequenz, nämlich genau den entsprechenden Vektoren der Messdaten. Für jedes simulativ berechnete Wellenzahl-Frequenz-Paar wird an entsprechender Stelle der Wert der erzeugten Matrix zu eins gesetzt, um schließlich den Korrelationskoeffizienten der Matrix und der vorverarbeiteten Messdaten zu berechnen, dessen Maximum die größtmögliche Übereinstimmung angibt. [JCW17] Abbildung 4.27 zeigt den Verlauf der Funktion des Korrelationskoeffizienten in Abhängigkeit der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeiten

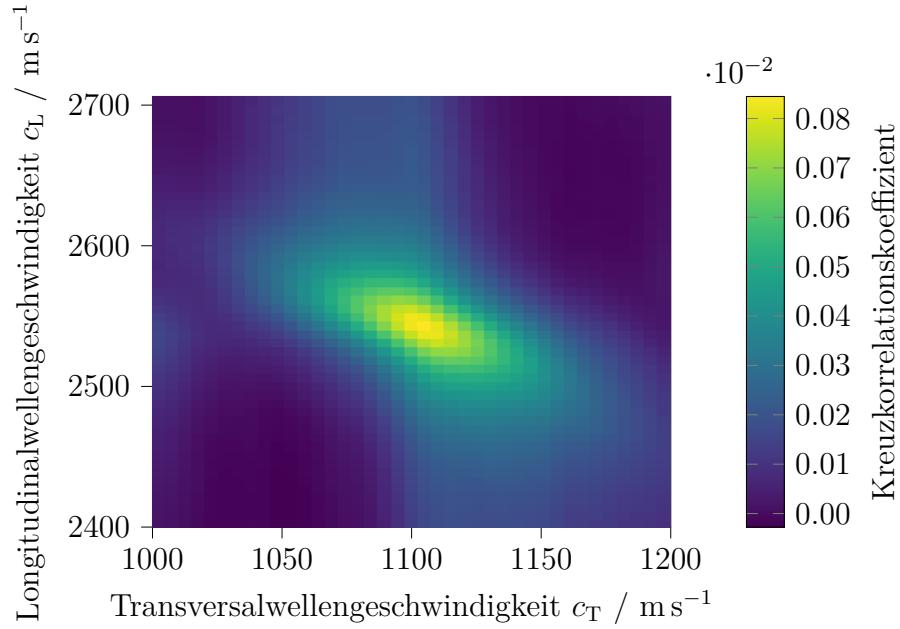


Abbildung 4.27: Kreuzkorrelationskoeffizient in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeiten am Beispiel einer Messung an einer PEEK-Platte

am Beispiel einer Messung an einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte. Der Verlauf stimmt im Wesentlichen mit dem des Mittelwerts aus Abbildung 4.25 überein. Genau wie beim Mittelwert führt eine ideale Übereinstimmung theoretisch zum maximalen Wert von eins, da sowohl die Werte in der Dispersionsabbildung aus der Messung aufgrund der Normierung maximal eins ergeben und die Werte, an denen sich Moden befinden in der simulativ erzeugten Matrix ebenfalls auf den Wert eins gesetzt werden. Wird auf eine Normierung der Messdaten verzichtet, kann der Wert der simulativ erzeugten Matrix, an den berechneten Frequenz-Wellenzahl-Paaren, auf den maximalen Wert der Dispersionsabbildung aus der Messung gesetzt werden. Trotzdem wird, wie bereits zuvor erläutert, nie der Wert von eins für den Kreuzkorrelationskoeffizienten erreicht, weil dazu alle Moden ideal mit gleicher Energie angeregt und diese wiederum ungedämpft detektiert werden müssten. Aufgrund der spezifischen Sende- und Empfangseigenschaften des Messsystems wird die messtechnisch erzeugte Dispersionsabbildung nie vollständig alle theoretisch ausbreitungsfähigen Moden enthalten. Gleichzeitig müssten alle (Bild-)Werte in der Dispersionsabbildung, die keine Mode beschreiben, ideal zu null werden, sodass die weiteren Artefakte aus

der Verarbeitung ideal unterdrückt und die Moden selbst ideal dünn werden. Daher ist zwar der absolute Wert des Kreuzkorrelationskoeffizienten in Abbildung 4.27 von eins weit entfernt, besitzt jedoch ein eindeutiges Maximum, dessen Lage mit dem maximalen Mittelwert in Abbildung 4.25 übereinstimmt. Daher eignet sich der Kreuzkorrelationskoeffizient ebenfalls als geeignete Zielfunktion für eine Optimierung.

4.10.3 Vergleich der Zielfunktionen

Abbildung 4.25 und 4.27 weisen im Wesentlichen identische Verläufe auf. Beide Kostenfunktionen haben den Vorteil, dass keine Modenerkennung auf den Messdaten notwendig ist. Das erleichtert die Automatisierung sehr, da bei einer Modenerkennung häufig falsche Werte z.B. aufgrund von Artefakten wie dem Leakage-Effekt mit erfasst werden. Da zur Berechnung des Kreuzkorrelationskoeffizienten eine Matrix in der Größe der messtechnisch erzeugten Frequenz-Wellenzahl-Darstellung erstellt wird, ist die Anwendung des Kreuzkorrelationskoeffizienten als Kostenfunktion sehr rechenintensiv. Das liegt daran, dass die messtechnisch erzeugte Frequenz-Wellenzahl-Darstellung aufgrund des Zero-Paddings zur Erhöhung der Auflösung sehr viele Werte enthält und somit zudem einen großen Speicherbedarf hat. Eine zweite Matrix gleicher Größe würde den Speicherbedarf bereits verdoppeln. Daher wird im weiteren Verlauf der Mittelwert der Bildwerte der Dispersionsabbildung als Ähnlichkeitsmaß zwischen der messtechnisch erzeugten Frequenz-Wellenzahl-Darstellung (Dispersionsabbildung) und dem berechneten Dispersionsdiagramm genutzt.

4.11 Optimierung

Zur Maximumssuche der Kostenfunktion wird der Nelder-Mead Simplex Algorithmus [NM65] als ein ableitungsfreier Algorithmus verwendet. Dieser hat den Vorteil, dass die Kostenfunktion nicht mehrfach zur Gradientenberechnung ausgewertet werden muss. Alternativ eignen sich ebenfalls weitere ableitungsfreie Algorithmen wie der BOBYQA (*bound constrained optimization by quadratic approximation*) [Pow09], aber auch gradientenbasierte Verfahren sind aufgrund der glatten Zielfunktionen geeignet. Da die in der Python-Bibliothek *scipy* [VGO20] bereits implementierten Optimierungsalgorithmen in der Regel nach einem Minimum suchen, wird der negative Wert der jeweiligen Zielfunktion verwendet. Zur schnelleren Konvergenz sind weitere Skalierungen der Zielfunktionen möglich. Da der

Wertebereich der Zielfunktionen wegen der Normierung der messtechnisch erzeugten Dispersionsabbildung zwischen null und eins liegt, kann z.B. durch den Kehrwert eine schnellere Konvergenz erreicht werden, da bei kleinen Werten der Kehrwert zu einer deutlichen Vergrößerung führt und somit zu einem steileren Gradienten.

Durch Nutzung des Kehrwerts entsteht jedoch eine Unstetigkeitsstelle bei einem Bildmittelwert bzw. Kreuzkorrelationskoeffizienten von null. In dem Fall gibt es zunächst keine Übereinstimmungen zwischen Moden des berechneten Dispersionsdiagramms und den Messdaten. Das führt zu Problemen für den Fall, dass sehr wenige Moden angeregt oder z.B. aufgrund zu hoher Dämpfung kaum Moden detektiert oder die Startwerte schlecht gewählt worden sind.

Die Verwendung des negativen Bildmittelwerts bzw. des negativen Kreuzkorrelationskoeffizienten führt zu einer weiterhin glatten Zielfunktion und konvergiert hinreichend schnell. Daher wird dieser im weiteren Verlauf der Arbeit minimiert und als Kostenfunktion bezeichnet, um elastische Materialparameter zu identifizieren. Aufgrund des geringeren Rechen- und Speicheraufwands wird als Zielfunktion der Mittelwert der Intensitätswerte verwendet, sodass schließlich zur Identifikation elastischer Materialparameter der negative Mittelwert der Intensitätswerte als Kostenfunktion mittels Nelder-Mead Simplex-Algorithmus minimiert wird.

4.12 Unsicherheitsbetrachtung

Die Unsicherheiten der identifizierten Schallgeschwindigkeiten c_L und c_T werden mittels Monte-Carlo-Simulation nach dem *guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM) [Poi08b] abgeschätzt. Neben den Typ B-unsicherheiten [Poi08a] der eingesetzten Geräte in der Laserakustik-Messung wie Oszilloskop und Linearachse wird ebenfalls der Unsicherheitsbeitrag der gemessenen Plattendicke untersucht. Für letztere wird ebenfalls die Typ B-unsicherheit der zur Messung verwendeten Bügelmessschraube betrachtet. Dafür werden zunächst die Einflüsse aus dem Messsystem modelliert, um die Unsicherheiten der Schallgeschwindigkeiten zu bestimmen.

4.12.1 Modellierung der Unsicherheitsbeiträge

Im Folgenden werden die zu modellierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der zu berücksichtigenden Unsicherheitsbeiträge beschrieben.

Unsicherheitsbeitrag des additiven Messrauschen: Zunächst wird die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung des additiven Messrauschen als Typ A-*Unsicherheit* [Poi08a] betrachtet. Dafür werden Signalanteile zeitlich vor dem Empfang der angeregten Ultraschallwelle, aus Messsignalen an verschiedenen Proben betrachtet. Bei jeder durchgeföhrten Messung wird weiterhin für jede Anregungsposition N -mal angeregt und empfangen, sodass die Empfangssignale bereits N -fach gemittelt wurden, was je nach betrachteter Messung den Signal-zu-Rausch-Abstand (SNR) um den Faktor $1/\sqrt{N}$ verringert. Um diese Mittelung auf die Bestimmung des Messrauschen herauszurechnen, wird das Rauschlevel der gespeicherten Zeitsignale mit der Anzahl der durchgeföhrten Mittelungen N um den Faktor \sqrt{N} gewichtet. Aus der Auswertung von 12 740 000 zeitabhängigen Signalverläufen an verschiedenen Metall- und Polymerproben ergibt sich eine Gaußverteilung der Rauschsignale mit einem Stichprobenmittelwert von $\bar{u}_{\text{Gauss}} \approx 30 \text{ mV}$ und einer Stichprobenstandardabweichung von $s_{\text{Gauss}} = 71 \text{ mV}$. Dabei sei angemerkt, dass ein additiver Gleichanteil aufgrund der Mittelwertbefreiung der Messsignale (vgl. Abschnitt 4.6) keinen Unsicherheitsbeitrag leistet.

Unsicherheitsbeitrag des Oszilloskops: Die unsicherheitsbehaftete Zeitbasis des Oszilloskops wird durch eine zufällige Neuskalierung des gemessenen Zeitvektors nach [Cla21] modelliert. Deren *Unsicherheit* wird vom Hersteller mit $1 \cdot 10^{-6}$ angegeben [TP21]. Dementsprechend wird die Skalierungsänderung mit einer Gleichverteilung von $1 \cdot 10^{-6}$ der eingesetzten Abtastfrequenz von 100 MHz modelliert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Zeitbasis zwar unsicher ist, sich jedoch während der Aufnahme eines Messsignals nicht ändert. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass sich alle Empfangssignale während der Vermessung einer Probe, auf den gleichen unsicheren Zeitvektor beziehen. Würde diese Annahme verletzt, wäre das Verfahren der 2D-FT nicht mehr möglich einzusetzen ohne die Zeitvektoren auf eine gleiche Abtastrate zu bringen z.B. durch Interpolation oder Verwerfen von Werten.

Der Trigger-Jitter des Oszilloskops wird durch ein zufälliges Verschieben der Signale entlang der zeitlichen Achse modelliert. Da die Verschiebung zufällig um ± 1 Wert erfolgt, werden die Signale mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ um jeweils einen Wert nach links, einen Wert nach rechts oder gar nicht auf der zeitlichen Achse verschoben.

Unsicherheitsbeitrag der Linearachse: Ähnlich wird die Linearachse betrachtet. In dem Fall werden die Signale zufällig entlang der örtlichen Achse

verschoben. Vom Hersteller wird eine Positioniergenauigkeit von $\pm 60 \mu\text{m}$ angegeben [Zab18], sodass diese bis zu $60 \mu\text{m}$ abweichend zur Zielposition zu kurz oder zu weit verfährt. Da die angegebene Abweichung der Position in der Regel unterhalb der Schrittweite Δy liegt, wird diese mithilfe einer Dreiecksverteilung mit einer halben Breite von $60 \mu\text{m}/\Delta y$ modelliert. Diese wird in drei Abschnitte unterteilt. Befindet sich der Wert um 0 im Intervall $[-60/(2\Delta y); 60/(2\Delta y)]$, werden die Signale nicht verschoben, liegt er im unteren Drittel der Verteilung, im Intervall $[-60/(\Delta y); -60/(2\Delta y)]$ erfolgt eine Signalverschiebung um einen Abtastwert nach links, liegt der Wert im oberen Drittel in $]60/(2\Delta y); 60/(\Delta y)]$ erfolgt eine Verschiebung um einen Abtastwert nach rechts entlang der örtlichen Achse.

Unsicherheitsbeitrag der Plattendicke: Als Geometrie-Parameter geht die Plattendicke t_h direkt in die Simulation ein. Diese wird mit einer Bügelmessschraube, deren absolute Messabweichung mit $\pm 2 \mu\text{m}$ [Mit21] angegeben ist, gemessen. Demnach wird die Unsicherheit der Plattendicke t_h durch eine Gleichverteilung im Bereich von $[t_h - 2 \mu\text{m}, t_h + 2 \mu\text{m}]$ modelliert.

Größen ohne Unsicherheitsbeitrag zu den Schallgeschwindigkeiten: Offset- und Verstärkungsfehler durch den Verstärker haben aufgrund der anschließenden Signalverarbeitung keinen Einfluss auf die Messung, da zunächst alle Signale vom Mittelwert befreit werden und die absolute Signalstärke selbst für die 2D-Fourier-Transformation unerheblich ist. Die Qualität der Koppelschicht am Empfangswandler beeinflusst das SNR, was bereits in der Berücksichtigung des Messrauschen enthalten ist. Ist z.B. zu wenig Koppelgel aufgetragen worden, verringert sich die Signalstärke der empfangenen Wellen gegenüber dem Messrauschen. Weiterhin führt eine sehr dicke Koppelschicht zur zeitlichen Verzögerung der Signale. Da diese jedoch aufgrund der gleichbleibenden Ankopplung für jede Anregungsposition identisch ist, hat dies nach der Verarbeitung der Signale keinerlei Einfluss auf die zu bestimmenden Materialparameter.

Bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeiten entfällt der Einfluss der Dichte ρ im Vorwärtsmodell nach Unterabschnitt 4.2.1. Sobald jedoch eine andere Form der Elastizitätsmatrix, z.B. mittels Lamé-Konstanten, berechnet wird, muss der Unsicherheitsbeitrag der Dichte mit berücksichtigt werden. Dann kann diese z.B. aus einer Monte-Carlo-Simulation der Unsicherheitsbeiträge der Geometrie- und Massenmessung bestimmt werden.

4.12.2 Messunsicherheiten der Schallgeschwindigkeiten durch Monte-Carlo-Simulation

Dem vorherigen Abschnitt zufolge werden bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeiten die Typ B-*Unsicherheitsbeiträge* der Zeitbasis des Oszilloskops, des Trigger-Jitters des Oszilloskops, der Genauigkeit der Zielposition der Linearachse, der Plattendicke sowie die Typ A-*Unsicherheit* des Messrauschens in einer Monte-Carlo-Simulation berücksichtigt.

Dazu werden die Messsignale mit den jeweiligen *Unsicherheiten* beaufschlagt und durch das inverse Verfahren propagiert. Als Startwerte für die Schallgeschwindigkeiten werden die geschätzten Startwerte aus Tabelle 4.1 verwendet.

Die resultierenden relativen Häufigkeiten der Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeiten sind in Abbildung 4.28 und 4.29 beispielhaft für PEEK dargestellt. Die relativen Häufigkeiten der anderen Proben befinden sich in Unterabschnitt A.3.1. Dort zeigen sich Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit quasi Gauß-verteilt. Die resultierenden *Unsicherheiten* der Schallgeschwindigkeiten ergeben sich aus deren Stichprobenstandardabweichungen bezogen auf deren Stichprobenmittelwert und sind im nächsten Abschnitt in Tabelle 4.1 angegeben.

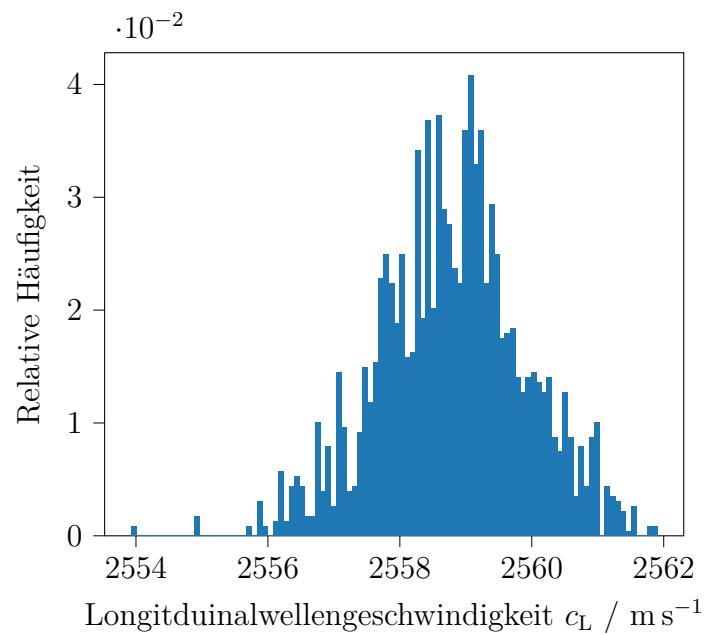


Abbildung 4.28: Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_L (PEEK) [JCF22]

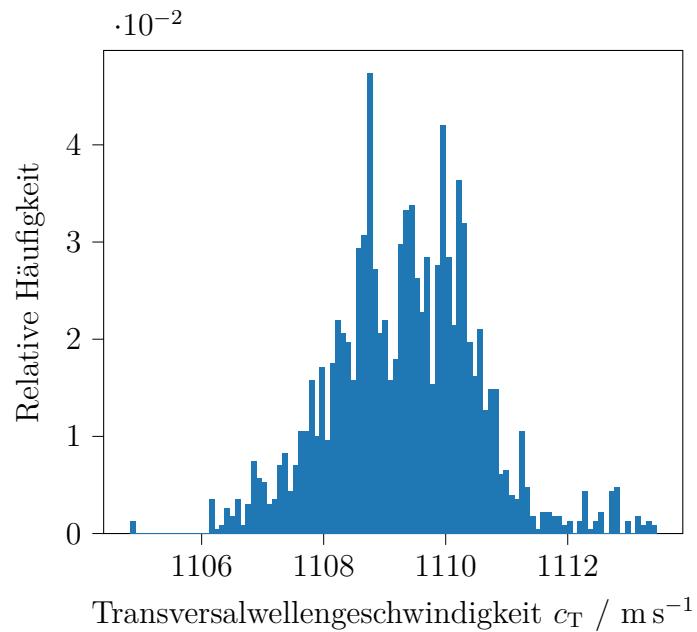


Abbildung 4.29: Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit c_T (PEEK) [JCF22]

4.13 Ergebnisse

Beispielhaft werden vier isotrope Proben ausgewertet. Als Beispiel für ein Metall dient Aluminium, als Beispiele für Polymere dienen Polyetheretherketon (PEEK), Polyamid 6 (PA6) und Polyethylenterephthalat (PET). Aufgrund seines optischen Absorptionsspektrums [RFK12] erscheint PET transparent im infraroten Wellenlängenbereich, sodass die Anregung auf PET mit dem UV-Laser erfolgt, während die dargestellten Messungen an PEEK und Aluminium durch Anregung mittels IR-Laser aufgenommen werden (vgl. Unterabschnitt 4.3.1). Der PA6-Probe ist ein schwarzer Farbstoff beigefügt, sodass sich diese ebenfalls mit dem IR-Laser anregen lässt. Die experimentelle Vorgehensweise richtet sich nach Abschnitt 4.4. Wie dort bereits erwähnt, wird aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter die Umgebungstemperatur im Messplatz während der Messungen von einem Temperatursensor MCP9808 [MT11] mit einer Messabweichung von $\pm 0,5$ K aufgenommen. Die Startwerte werden nach Unterabschnitt 4.9.2 im Frequenz-Wellenzahl-Bereich geschätzt, während die Optimierung mittels Nelder-Mead Simplex Algorithmus, unter Verwendung des negativen Mittelwerts nach Unterabschnitt 4.10.1 als Kostenfunktion, bestimmt werden. Die Startwerte, die identifizierten Schallgeschwindigkeiten (Stichprobenmittelwert) sowie deren relativen Unsicherheiten sind in Tabelle 4.1 angegeben, während in Abbildung 4.30 bis 4.33 die verarbeiteten Dispersionsabbildungen aus den Messungen zusammen mit den simulativ berechneten Dispersionsdiagrammen unter Annahme der identifizierten Materialparameter dargestellt sind.

Diese zeigen bei allen vier Messungen gute Übereinstimmungen zwischen Mess- und Simulationsergebnissen. Da Metalle in der Regel eine geringere akustische Absorption im Vergleich zu Kunststoffen aufweisen, werden Moden im Frequenzbereich bis 8 MHz in Abbildung 4.30 sichtbar. Die Grate selbst sind im Vergleich zu den Kunststoffmessungen sehr schmal, sodass hier keine Gamma-Expansion (vgl. Abschnitt 4.6) notwendig ist. Zur besseren Unterscheidbarkeit der Moden werden die Grate der Messungen an Kunststoffen mittels Gamma-Expansion ($\Gamma_{\text{Exp}} = 2,5$ vgl. Abschnitt 4.6) künstlich schmäler gehalten. Ansonsten, idealerweise ohne Beeinflussung der Grate z.B. durch Gamma-Expansion etc., ist die Breite der Moden vergleichbar mit einer Art qualitativer Güte: Je breiter die Moden, desto kleinere Werte weisen die Maxima, welche den Mittellinien der Grate entsprechen, auf. Dementsprechend sind schmale Grate ein Indiz für eine geringe akustische Dämpfung, die bisher bei der Materialparameterbestimmung noch nicht berücksichtigt wird. Neben der modalen Dämpfung

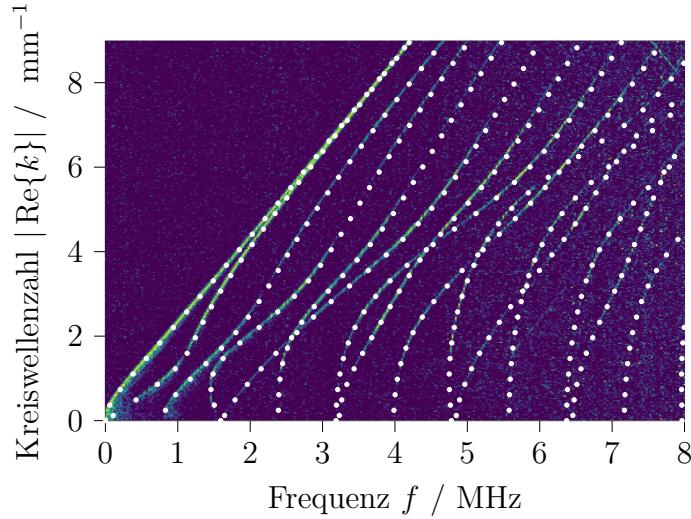


Abbildung 4.30: Dispersionsabbildung einer 1,98 mm dicken Aluminium-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm (weiß)

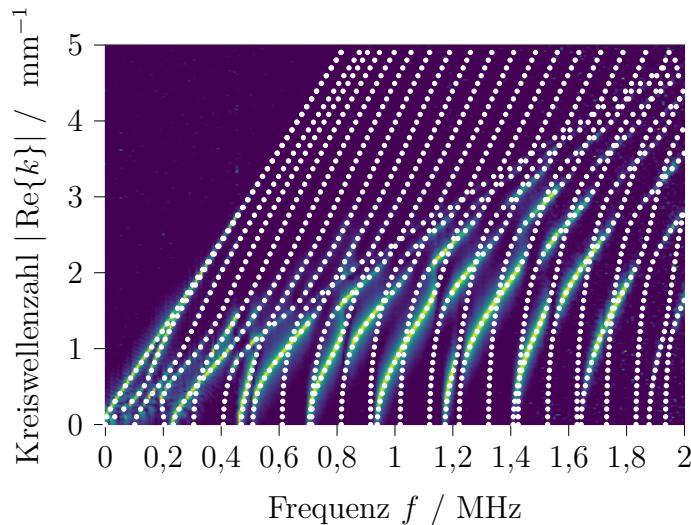


Abbildung 4.31: Dispersionsabbildung einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm (weiß)

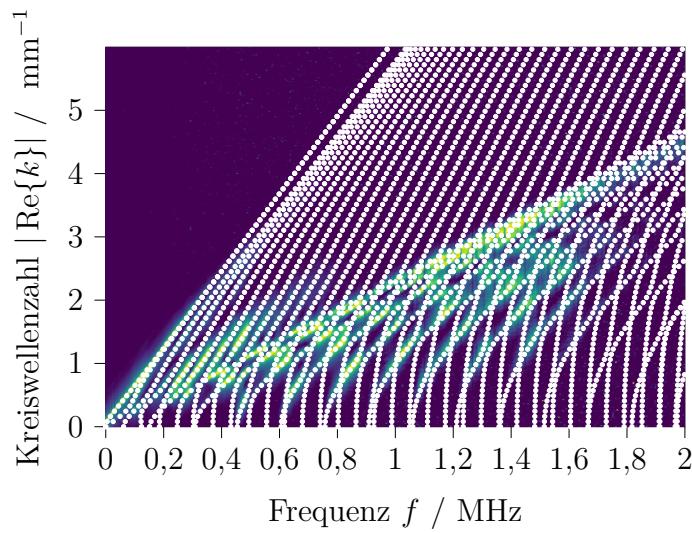


Abbildung 4.32: Dispersionsabbildung einer 8,8 mm dicken PA6-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm (weiß)

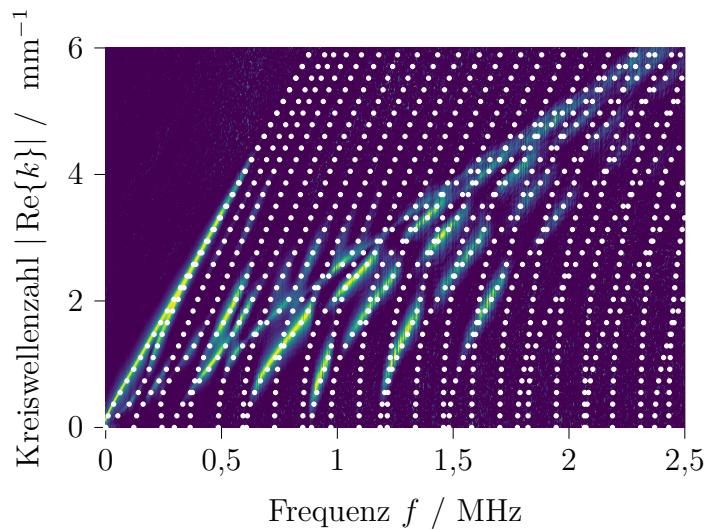


Abbildung 4.33: Dispersionsabbildung einer 4,08 mm dicken PET-Platte und simulativ berechnetes Dispersionsdiagramm (weiß)

Tabelle 4.1: Identifizierte effektive Schallgeschwindigkeiten

	Alu	PEEK	PA6	PET
Dichte / kg m^{-3}	2556	1310	1145	1360
Messtemperatur / $^{\circ}\text{C}$	20	20	21	22
Startwerte:				
$c_L^{(0)} / \text{m s}^{-1}$	6525	2545	2692	2390
$c_T^{(0)} / \text{m s}^{-1}$	3175	1105	1080	968
Optimiert (Stichprobenmittelwert):				
$\bar{c}_L / \text{m s}^{-1}$	6398,6	2558,8	2662,3	2407,8
$\bar{c}_T / \text{m s}^{-1}$	3161,3	1109,3	1084,6	986,7
Unsicherheit von				
$c_L / \%$	0,09	0,04	0,12	1,17
$c_T / \%$	0,07	0,11	0,22	0,54

beeinflusst die Anzahl der angeregten und detektierten Moden die Unsicherheit. Dabei gilt je mehr Moden, insbesondere die sensitiven Bereiche bei hohen Frequenzen und hohen Wellenzahlen, im inversen Verfahren auswertbar sind, desto geringer die resultierende Messunsicherheit. Dies äußert sich hier in einer hohen Messunsicherheit der PET-Probe (vgl. Tabelle 4.1). Maßnahmen zur Verringerung der Messunsicherheit bei Proben mit hoher akustischer Absorption bzw. starker modaler Dämpfung wären z.B. die Maximierung der absorbierten optischen Anregungsenergie. Dies könnte erfolgen z.B. durch Aufbringen einer dünnen schwarzen Schicht auf die Probe oder Beimischung eines schwarzen Farbstoffs (wie bei der PA6-Probe) sowie die Wahl dicker Platten z.B. mit Plattendicken um 10 mm.

4.13.1 Aluminium

Die bestimmten Schallgeschwindigkeiten in Tabelle 4.1 liegen im gleichen Wertebereich wie Literaturdaten (vgl. Tabelle 4.2). So werden z.B. in [MW05] Schallgeschwindigkeiten von $c_L = 6360 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 3130 \text{ m s}^{-1}$ für Aluminium angegeben. Weitere Anhaltswerte werden mit einem Elastizitätsmodul im Bereich von 60 GPa bis 80 GPa und einer Poissonzahl von $\nu = 0,33$ in [Läp12] angegeben. Unter Annahme eines ideal-elastischen Materialmodells ergeben sich mit der in Tabelle 4.1 angegebenen Dichte Schallgeschwindigkeiten im Bereich von $c_L = 5897 \text{ m s}^{-1}$ bis $c_L = 6810 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 2790 \text{ m s}^{-1}$ bis $c_T = 3430 \text{ m s}^{-1}$.

Tabelle 4.2: Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von Aluminium mit ausgewählten Literaturangaben

	$c_L / \text{m s}^{-1}$	$c_T / \text{m s}^{-1}$	$\rho / \text{kg m}^{-3}$
Ergebnis	6398,6	3161,3	2556
[Läp12]	5897 bis 6810	2790 bis 3430	
[LSW09]	6420	3040	2700

4.13.2 PEEK

Polyetheretherketon (PEEK) ist ein teilkristalliner Thermoplast aus der Gruppe der aromatischen Polyetherketone [DEE08]. PEEK weist einen hohen Schmelzpunkt von 340°C [PAE22] sowie eine hohe Glasübergangstemperatur von bis zu 162°C [HPP] auf. In der Akustik zeichnet PEEK sich durch eine für einen Kunststoff vergleichsweise geringe Absorption aus.

So werden in [FHA10] bei 5 MHz im Puls-Echo-Verfahren Schallgeschwindigkeiten von $c_L = 2536 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 1252 \text{ m s}^{-1}$ für PEEK bestimmt. Ebenfalls im Puls-Echo-Verfahren bei 5 MHz und 10 MHz bestimmen Carlson et al. [CvS03] Schallgeschwindigkeiten frequenz- und temperaturabhängig im Bereich von 2554 m s^{-1} bis 2625 m s^{-1} für Longitudinal- und im Bereich von 1252 m s^{-1} bis 1300 m s^{-1} für die Transversalwellengeschwindigkeit. Leicht geringere Schallgeschwindigkeiten von $c_L = 2470 \text{ m s}^{-1} \pm 30 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 1060 \text{ m s}^{-1} \pm 30 \text{ m s}^{-1}$ werden in [MBG04] mittels eindimensionalem Stoßtest gemessen, sodass die hier bestimmten Schallgeschwindigkeiten für PEEK in Tabelle 4.1 vergleichbar sind (vgl. Tabelle 4.3). Die hier gravimetrisch bestimmte Dichte von PEEK liegt mit 1310 kg m^{-3} ebenfalls im Bereich der übrigen Literatur: 1286 kg m^{-3} [FHA10], 1252 kg m^{-3} bis 1300 kg m^{-3} [CvS03], 1311 kg m^{-3} [RBO07], 1300 kg m^{-3} [MBG04].

Tabelle 4.3: Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PEEK mit ausgewählten Literaturangaben

	$c_L / \text{m s}^{-1}$	$c_T / \text{m s}^{-1}$
Ergebnis	2558,8	1109,3
[FHA10]	2536	1252
[CvS03]	2554 bis 2625	1252 bis 1300
[MBG04]	2470 ± 30	1060 ± 30

4.13.3 PA6

Polyamid besteht aus sich regelmäßig wiederholenden Amidgruppen, die aus Kondensation einer Carbonsäure und eines Amins entstehen. Daher lassen sich die Amingruppen wieder hydrolytisch spalten. Die Wasseraufnahme bei Raumtemperatur (23 °C) beträgt 9 % bis 10 % [Dom12], wodurch ein Einsatz von Immersionstechnik zur Messung der Schallgeschwindigkeiten als Alternativverfahren ungeeignet ist. PA6 weist zudem eine hohe mechanische Festigkeit sowie eine hohe Schwingungsdämpfung [Ku23] (Absorption) auf. Letzteres lässt sich durch die vergleichsweise breit verlaufenden Grate in der messtechnisch ermittelten Dispersionsabbildung in Abbildung 4.32 erkennen.

Die Schallgeschwindigkeiten werden in [MW05] mit $c_L = 2700 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 1120 \text{ m s}^{-1}$ etwas größer angegeben als die in Tabelle 4.1 bestimmten, die Dichte mit $\rho = 1120 \text{ kg m}^{-3}$ bis $\rho = 1140 \text{ kg m}^{-3}$ etwas geringer (vgl. Tabelle 4.4). Nach [Läp12] liegen Anhaltswerte des Elastizitätsmoduls im Bereich von $E = 1,5 \text{ GPa}$ bis $E = 3,2 \text{ GPa}$, der Poissonzahl bei $\nu = 0,33$. Mit der gemessenen Dichte von $\rho = 1145 \text{ kg m}^{-3}$ ergeben sich unter Annahme eines ideal-elastischen Modells ein Bereich der Schallgeschwindigkeiten von $c_L = 1369 \text{ m s}^{-1}$ bis $c_L = 2000 \text{ m s}^{-1}$ und $c_T = 704 \text{ m s}^{-1}$ bis $c_T = 1029 \text{ m s}^{-1}$, was jeweils deutlich unter den resultierenden Schallgeschwindigkeiten in Tabelle 4.1 liegt (vgl. Tabelle 4.4). Diese Diskrepanz der berechneten Schallgeschwindigkeiten anhand der Werte aus [Läp12] liegt in der Annahme eines ideal-elastischen Materialmodells begründet, das die Viskoelastizität und somit die hohe akustische Absorption, die Polyamid auszeichnet, nicht abbildet. Somit führt die Berechnung auf zu kleine Werte der Schallgeschwindigkeiten, während Messungen der Schallgeschwindigkeiten wie in [MW05], die nicht auf Berechnungen aus statischen Werten eines ideal-elastischen Modells beruhen, in einem ähnlichen Wertebereich liegen wie die hier in Tabelle 4.1 bestimmten Werte.

Daher zeigt sich hier, dass zwar effektive Schallgeschwindigkeiten, die das Dispersionsdiagramm wie in Tabelle 4.1 repräsentieren, bestimmt werden können, allerdings repräsentieren die unter Annahme eines ideal-elastischen Materialmodells berechneten statischen Parameter wie Elastizitätsmodul und Poissonzahl nicht mehr das statische Verhalten des Werkstoffs. Hierfür muss der viskoelastische Charakter des Materials berücksichtigt werden.

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

Tabelle 4.4: Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PA6 mit ausgewählten Literaturangaben

	$c_L / \text{m s}^{-1}$	$c_T / \text{m s}^{-1}$
Ergebnis	2666,3	1084,6
[MW05]	2700	1120
[Läp12]	1369 bis 2000	704 bis 1029

4.13.4 PET

Tabelle 4.5: Vergleich der identifizierten Schallgeschwindigkeiten von PET mit ausgewählten Literaturangaben

	$c_L / \text{m s}^{-1}$	$c_T / \text{m s}^{-1}$
Ergebnis	2407,8	986,7
[MW05]	2400	1150

Aufgrund seiner geringen Durchlässigkeit für Sauerstoff und Kohlendioxid wird PET häufig als Verpackungsmaterial wie Getränkeflaschen verwendet. [PET22] Die für PET bestimmten effektiven Schallgeschwindigkeiten und die Dichte aus Tabelle 4.1 sind ebenfalls vergleichbar mit Literaturdaten von $c_L = 2400 \text{ m s}^{-1}$, $c_T = 1150 \text{ m s}^{-1}$ sowie Dichten von $\rho = 1330 \text{ kg m}^{-3}$ bis 1350 kg m^{-3} aus [MW05] (vgl. Tabelle 4.5).

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

Da Lamb-(artige) Wellen nur Teilchenverschiebungen in der Querschnittsebene der Platte verursachen, wird für dessen Modellierung der ebene Verzerrungszustand angenommen. Das führt dazu, dass alle Dehnungen in die dritte Raumrichtung zu null angenommen werden. Somit vereinfacht sich die Elastizitätsmatrix von einer 6×6 auf eine 3×3 Matrix (vgl. Unterabschnitt 2.1.4), was dazu führt, dass lediglich die Elastizitätskoeffizienten der Dickenrichtung der Platte sowie der Ausbreitungsrichtung der Welle bei einer einzelnen Messung mit dem vorherigen Verfahren identifiziert werden können. Für isotrope Werkstoffe ist dies vollkommen ausreichend, da sie sich in alle Raumrichtungen gleich verhalten. Sind die Materialeigenschaften jedoch richtungsabhängig, fehlen die Elastizitätskoeffizienten der dritten

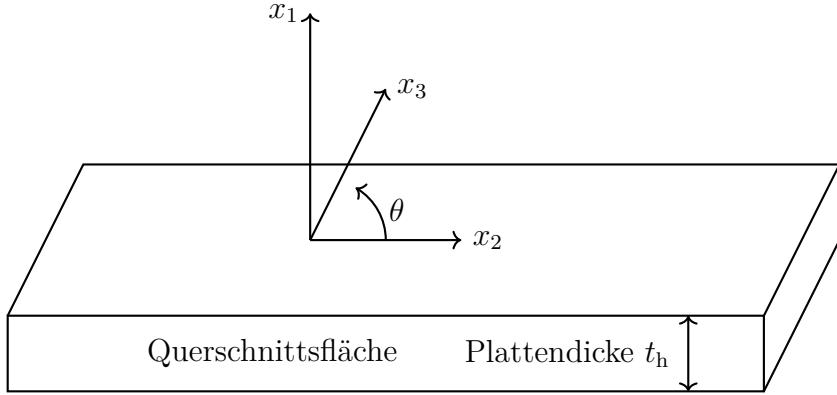


Abbildung 4.34: Rotation der Probe um den Winkel θ

Raumrichtung, sodass das mechanische Verhalten des Materials nicht vollständig beschrieben ist. Um die restlichen Elastizitätskoeffizienten ebenfalls zu bestimmen, wird die Probe während der Messung um die x -Achse (vgl. Abbildung 4.6), welche der x_1 -Richtung des Koordinatensystems der Platte entspricht, um den Winkel θ gedreht (vgl. Abbildung 4.34).

Die Drehung um die x_1 -Achse wird allgemein durch eine Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi^2 & \varsigma^2 & 2\varpi \cdot \varsigma & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma^2 & \varpi^2 & -2\varpi \cdot \varsigma & 0 & 0 \\ 0 & -\varpi \cdot \varsigma & \varpi \cdot \varsigma & \varpi^2 - \varsigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varpi & -\varsigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma & \varpi \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

mit

$$\begin{aligned} \varpi &= \cos(\theta) \\ \varsigma &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

beschrieben [LMH], sodass sich die Elastizitätsmatrix nach der Rotation zu

$$\mathbf{C}_{\text{rot}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{C} \mathbf{R}_\theta^T \quad (4.22)$$

ergibt.

Wird die Elastizitätsmatrix \mathbf{C}_{rot} nach einer Rotation für den ebenen

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

Verzerrungszustand nach Unterabschnitt 2.1.4 reduziert, ergibt sich

$$\mathbf{C}_{\text{rot,pl},\varepsilon}(\theta) = \begin{pmatrix} C_{11,\text{rot}}(\theta) & C_{12,\text{rot}}(\theta) & C_{16,\text{rot}}(\theta) \\ C_{12,\text{rot}}(\theta) & C_{22,\text{rot}}(\theta) & C_{26,\text{rot}}(\theta) \\ C_{16,\text{rot}}(\theta) & C_{26,\text{rot}}(\theta) & C_{66,\text{rot}}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

mit

$$C_{11,\text{rot}}(\theta) = C_{11} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} C_{22,\text{rot}}(\theta) &= C_{22}\varpi^4 + C_{23}\varpi^2\varsigma^2 \\ &\quad + C_{24}(2\varpi^3\varsigma + \varpi^2\varsigma^2 + 2\varpi^3\varsigma + 2\varpi^3) \\ &\quad + C_{33}\varsigma^4 + 4C_{34}\varpi\varsigma^3 + 2C_{44}\varpi^2\varsigma^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$C_{66,\text{rot}}(\theta) = C_{55}\varsigma^2 + C_{56}\varpi^2\varsigma + C_{66}\varpi^2 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} C_{26,\text{rot}}(\theta) &= C_{25}\varpi^2\varsigma + C_{26}\varpi^3 + C_{35}\varsigma^3 + C_{36}\varpi\varsigma^2 \\ &\quad + 2C_{45}\varpi\varsigma^2 + 2C_{46}\varpi^2\varsigma \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$C_{16,\text{rot}}(\theta) = C_{15}\varsigma + C_{16}\varpi \quad (4.28)$$

$$C_{12,\text{rot}}(\theta) = C_{12}\varpi^2 + C_{13}\varsigma^2 + 2C_{14}\varsigma\varpi. \quad (4.29)$$

Die allgemein sechs Koeffizienten der Elastizitätsmatrix für den ebenen Verzerrungszustand $\mathbf{C}_{\text{rot,pl},\varepsilon}$ hängen linear von den Koeffizienten der allgemeinen Elastizitätsmatrix für den dreidimensionalen Fall aus Gleichung 2.8 ab, sodass der allgemeine Zusammenhang aus Gleichung 4.24 bis 4.29 über

eine Matrix \mathbf{R}_{an} mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_{11, \text{rot}} \\ C_{22, \text{rot}} \\ C_{66, \text{rot}} \\ C_{26, \text{rot}} \\ C_{16, \text{rot}} \\ C_{12, \text{rot}} \end{pmatrix}}_{\vec{c}_{\text{rot}}} = \mathbf{R}_{\text{an}} \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \\ C_{25} \\ C_{26} \\ C_{33} \\ C_{34} \\ C_{35} \\ C_{36} \\ C_{44} \\ C_{45} \\ C_{46} \\ C_{55} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{pmatrix}}_{\vec{C}} \quad (4.30)$$

beschrieben werden kann. Entsprechend Gleichung 4.24 bis 4.29 ergibt sich

\mathbf{R}_{an} zu

$$\mathbf{R}_{\text{an}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varpi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varsigma\varpi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi^2\varsigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\varpi^3\varsigma + 2\varpi^3 + \varpi^2\varsigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi^2\varsigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi^3 & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\varpi\varsigma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varsigma^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi\varsigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varpi^2\varsigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varpi\varsigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varpi^2\varsigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varsigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi^2\varsigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varpi^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.31)$$

Die Elastizitätskoeffizienten für den ebenen Verzerrungszustand werden für mehrere Drehwinkel θ um die x_1 -Achse nach dem Verfahren aus den vorherigen Abschnitten identifiziert. Somit werden für jeden Winkel θ sechs winkelabhängige Elastizitätskoeffizienten bestimmt, aus denen wiederum 21 Koeffizienten berechnet werden sollen. Da demzufolge das Gleichungssystem stark unterbestimmt ist, sind allgemein bei einem anisotropen Probenmaterial Messungen unter mindestens $N = 4$ verschiedenen Winkeln notwendig, damit das Gleichungssystem nicht mehr unterbestimmt ist. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die Gleichungen linear unabhängig sind. Das kann dadurch erreicht werden, indem z.B. nur ein Quadrant (mit $\theta = 0^\circ$ bis 90° , 90° bis 180° , 180° bis 270° oder 270° bis 360°) betrachtet wird.

Damit ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem aus Gleichung 4.30

zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{c}_{\text{rot}}(\theta_1) \\ \vec{c}_{\text{rot}}(\theta_2) \\ \vec{c}_{\text{rot}}(\theta_3) \\ \vec{c}_{\text{rot}}(\theta_4) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{6N \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\text{an}}(\theta_1) \\ \mathbf{R}_{\text{an}}(\theta_2) \\ \mathbf{R}_{\text{an}}(\theta_3) \\ \mathbf{R}_{\text{an}}(\theta_4) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{6N \times 21} \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \\ C_{25} \\ C_{26} \\ C_{33} \\ C_{34} \\ C_{35} \\ C_{36} \\ C_{44} \\ C_{45} \\ C_{46} \\ C_{55} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{pmatrix}}_{21 \times 1}$$

$$\vec{c}_{\text{rot,ges}} = \mathbf{R}_{\text{an,ges}} \vec{C}. \quad (4.32)$$

Die Berechnung der insgesamt 21 Elastizitätskoeffizienten erfolgt mithilfe der Moore-Penrose-Pseudoinversen [PT55] $\mathbf{R}_{\text{an,ges}}^+$, sodass Gleichung 4.30 nach den unrotierten Elastizitätskoeffizienten umgestellt wird:

$$\begin{aligned}
 \vec{C} &= \mathbf{R}_{\text{an,ges}}^+ \vec{c}_{\text{rot,ges}} \\
 &= (\mathbf{R}_{\text{an,ges}}^T \mathbf{R}_{\text{an,ges}})^{-1} \mathbf{R}_{\text{an,ges}}^T \vec{c}_{\text{rot,ges}}.
 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Werden demnach mindestens vier der Gleichungssysteme nach Gleichung 4.30 untereinander geschrieben, können die Elastizitätskoeffizienten der unrotierten Platte in \vec{C} bestimmt werden, sofern die vier verwendeten Gleichungssysteme linear unabhängig sind. Aufgrund der Symmetrie der Elastizitätsmatrix müssen nicht alle Winkel zwischen 0° und 360° hinzugezogen werden. Demzufolge genügt es vier Winkel in einem Quadranten zu

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

betrachten. [JDW18]

4.14.1 Vereinfachung für orthotrope Werkstoffe

Für die meisten Materialien, wie faserverstärkte Kunststoffe oder Metalle mit richtungsabhängigen Materialparametern, genügt in der Regel ein orthotropes Materialmodell. In diesem Fall werden $C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{24}, C_{25}, C_{26}, C_{34}, C_{35}, C_{36}, C_{45}, C_{46}, C_{56}$ zu Null, wodurch sich Gleichung 4.30 zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_{11, \text{rot}} \\ C_{22, \text{rot}} \\ C_{66, \text{rot}} \\ C_{12, \text{rot}} \end{pmatrix}}_{\vec{c}_{\text{rot,ortho}}} = \mathbf{R}_{\text{ortho}} \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{44} \\ C_{55} \\ C_{66} \end{pmatrix}}_{\vec{C}_{\text{ortho}}} \quad (4.34)$$

mit

$$\mathbf{R}_{\text{ortho}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi^4 & 2\varpi^2\varsigma^2 & \varsigma^4 & 4\varpi^2\varsigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma^2 & 0 & \varpi^2 \\ 0 & \varpi^2 & \varsigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

vereinfacht. Da Gleichung 4.34 zur Berechnung der Elastizitätskoeffizienten in Gleichung 4.34 unterbestimmt ist, ergibt sich analog zu Gleichung 4.32

für ein orthotropes Material:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{c}_{\text{rot,ortho}}(\theta_1) \\ \vec{c}_{\text{rot,ortho}}(\theta_2) \\ \vec{c}_{\text{rot,ortho}}(\theta_3) \\ \vec{c}_{\text{rot,ortho}}(\theta_4) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{4N \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\text{ortho}}(\theta_1) \\ \mathbf{R}_{\text{ortho}}(\theta_2) \\ \mathbf{R}_{\text{ortho}}(\theta_3) \\ \mathbf{R}_{\text{ortho}}(\theta_4) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{4N \times 9} \underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{44} \\ C_{55} \\ C_{66} \end{pmatrix}}_{9 \times 1}$$

$$\vec{c}_{\text{rot,ortho,ges}} = \mathbf{R}_{\text{ortho,ges}} \vec{C}_{\text{ortho}}. \quad (4.36)$$

Genau wie in Gleichung 4.32, wird Gleichung 4.36 mittels Pseudoinverse (vgl. Gleichung 4.33) gelöst, um schließlich die neun in \vec{C}_{ortho} enthaltenen Elastizitätskoeffizienten zu berechnen. Da in diesem Fall neun Koeffizienten (\vec{C}_{ortho}) aus jeweils vier Koeffizienten ($\vec{c}_{\text{rot,ortho}}$) pro Winkel bestimmt werden sollen, sind für orthotrope Materialien mindestens drei Messungen bei unterschiedlichen Rotationswinkeln notwendig, wobei es wieder genügt einen Quadranten zu betrachten. Gleichzeitig ist darauf zu achten, dass die Gleichungssysteme möglichst linear unabhängig sind. Werden insgesamt hinreichend viele linear unabhängige Gleichungen aufgestellt, können auch zusätzliche Mehrfachmessungen bei gleichen Winkeln auftreten wie z.B. Messungen bei $\theta = \pm 90^\circ$ zur Validierung einzelner Messungen oder um die Unsicherheit der Approximation des Vektors \vec{C}_{ortho} zu verringern. [JDW18]

4.14.2 Auswertung am Beispiel faserverstärkter Kunststoffe

Beispielhaft für eine orthotrope Platte werden drei glasfaserverstärkte Kunststoffproben untersucht, welche hier jeweils als homogene Schicht angenommen werden. Alle drei Proben bestehen aus einer Polyamid 6 (PA6) Matrix, die durch Endlosglasfasern aus E-Glas, mit einem Volumenanteil von 47 %, verstärkt ist [Bon22a; Bon22b; Bon09a; SON]. Die Endlosglasfasern sind jeweils orthogonal zueinander orientiert und bilden jeweils eine Orthotropieachse. Dabei werden zwei Bindungsarten, welche in Abbildung 4.35 dargestellt sind, verglichen: Die Leinwand- und Köperbindung [Sch07; Ehr06]. Während eine Probe mit Leinwandbindung

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

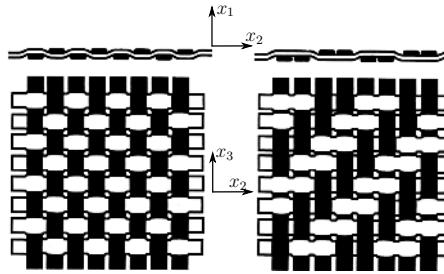


Abbildung 4.35: Vergleich zweier typischer Webmuster: Leinwandbindung (links) und Körperbindung (rechts) [Ehr06; JDW18] sowie das angenommene Koordinatensystem.

und gleicher Faserverteilung je Richtung untersucht wird, werden zwei Proben mit einer Körperbindung charakterisiert, davon eine mit gleicher Faserverteilung je Richtung (50:50) und eine mit ungleicher Faserverteilung in beide Raumrichtungen (80:20). Die Platten bestehen aus sechs Schichten zu je 0,5 mm [Bon22a; Bon22b], sodass sich insgesamt eine Plattendicke von 3 mm ergibt. Als Dichte wird die im Datenblatt [Bon22a] angegebene Dichte von $\rho = 1800 \text{ kg m}^{-3}$ [Bon22a; Bon22b; Bon09a; SON] angenommen.

Obwohl es genügt einen Quadranten zu betrachten, werden die einzelnen Platten in Winkeln von 15°-Schritten um die x_1 -Achse gedreht vermessen und jeweils winkelabhängig die ideal-elastische, orthotrope Elastizitätsmatrix für den ebenen Verzerrungszustand identifiziert. Die Startwerte für die einzelnen Messungen werden nach dem Verfahren im Frequenz-Wellenzahl-Bereich aus Unterabschnitt 4.9.2 bestimmt. Unter Annahme eines zunächst isotropen Materialmodells wird die Elastizitätsmatrix berechnet, deren Koeffizienten als Startwerte dienen. Während der Optimierung wird ein orthotropes Materialmodell angenommen und der Vektor $\vec{c}_{\text{rot,ortho}}$ dient als Parametervektor in der Optimierung, um die winkelabhängige, orthotrope Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C}_{\text{rot,ortho,pl},\varepsilon} = \begin{pmatrix} C_{11,\text{rot}}(\theta) & C_{12,\text{rot}}(\theta) & 0 \\ C_{12,\text{rot}}(\theta) & C_{22,\text{rot}}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & C_{66,\text{rot}}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

für den ebenen Verzerrungszustand zu identifizieren. Die identifizierten Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen sind winkelabhängig jeweils rot in den Abbildungen 4.38 bis 4.40 dargestellt. Zur Validierung sind die Dispersionsabbildungen mit den berechneten Dispersionsdiagrammen für einen Winkel von 45° beispielhaft in den Abbildungen 4.36 und 4.37 darge-

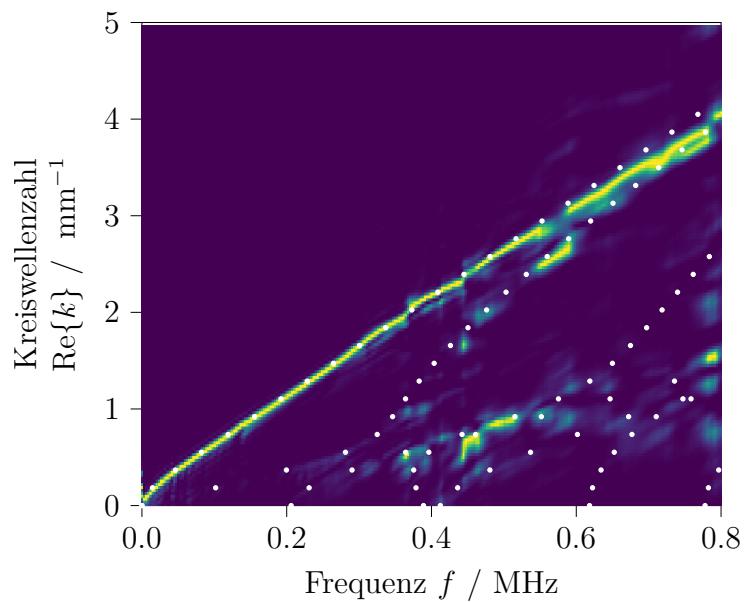


Abbildung 4.36: Dispersionabbildungen und berechnetes Dispersiondiagramm der Probe mit Leinwandbindung (50:50) bei einem Drehwinkel von 45°

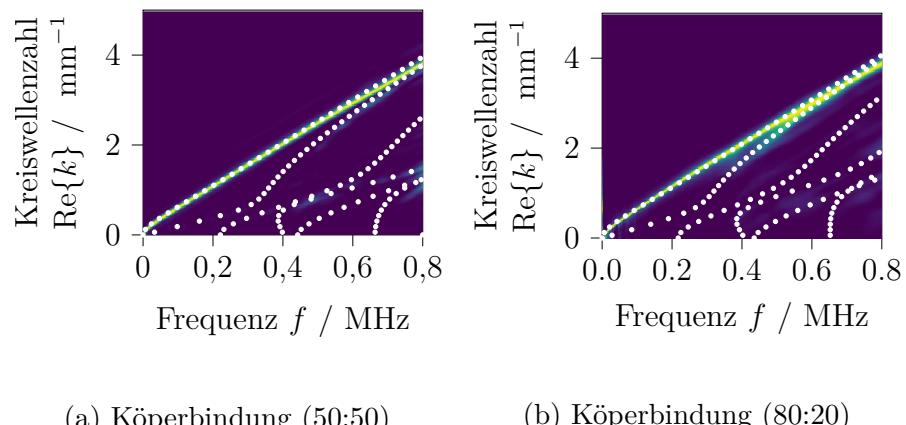


Abbildung 4.37: Dispersionabbildungen und berechnetes Dispersiondiagramm der Proben mit Körperbindung bei einem Drehwinkel von 45°

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

stellt. Trotz der Annahme eines homogenen Materials und der wenigen sich ausbreitenden Moden, stimmen Messung und Simulation zum größten Teil überein. Mit steigender Frequenz steigen Abweichungen, was nicht verwunderlich ist, da es sich nicht, wie angenommen, um ein homogenes Material handelt. Bei Betrachtung der Messung an der Probe mit Leinwandbindung in Abbildung 4.36 fällt auf, dass sich die Steigung der als A0-Mode angenommene Mode ab einer Frequenz von 0,4 MHz an einigen Stellen ändert. Zwischen diesen Abschnitten ergeben sich Unterbrechungen in dem Grat. Diese sind mit der Kopplung von Polymermatrix und Glasfasern sowie der geschichteten Struktur der Proben zu begründen: Werden allgemein mehrere Plattenwellenleiter miteinander verkoppelt, ergibt sich simulativ ein Dispersionsdiagramm, welches Anteile aus beiden Einzelschichten enthält. Werden die Dispersionsdiagramme der ungekoppelten Einzelschichten übereinander gelegt, ergeben sich Frequenz-Wellenzahl-Paare an denen sich die Dispersionskurven der einzelnen Schichten kreuzen. Eine Kopplung beider Schichten führt zu einer Abstoßung der Moden in genau diesen Punkten, an denen sich die Dispersionskurven der Einzelschichten kreuzen. In Messungen wird dieser Effekt durch unterbrochene Moden und eine Änderung der Steigung (und somit der Gruppengeschwindigkeiten) der Moden im Dispersionsdiagramm sichtbar. [LJH19] Dabei werden meist nur die Modenabschnitte sichtbar, die zu dem Dispersionsdiagramm der Schicht mit der höheren Schallgeschwindigkeit gehören, da sich die Wellen bevorzugt in dieser Schicht ausbreiten (vgl. [LJH19]). Um die Kopplungsstärke beider Schichten zu quantifizieren, lässt sich entweder die Krümmung der Dispersionskurven um den Abstoßungspunkt [NZL22] oder der Abstand der Moden [ZJN21; ZCJ21] zueinander auswerten. Da sich die Moden der jeweiligen Dispersionsdiagramme für den ungekoppelten Fall kreuzen, wenn diese gleichzeitig in einer Abbildung dargestellt werden, steigt der Abstand der Moden in diesen Punkten je stärker die Schichten gekoppelt sind. Die hier betrachteten glasfaserverstärkten Kunststoffe bestehen jeweils aus sechs gewebten Schichten zu je 0,5 mm. Die Verkopplung beider Werkstoffe erfolgt jedoch bereits innerhalb einer Schicht durch die Webung. Möglicherweise lässt sich die Kopplungsstärke der verwebten Stoffe bei Betrachtung der Unterbrechungen der Grate, die in Abbildung 4.36 sichtbar werden, nach [LJH19; NZL22; ZJN21; ZCJ21] untersuchen.

Werden aus den identifizierten, winkelabhängigen Koeffizienten mit Gleichung 4.36 die neun Koeffizienten der Elastizitätsmatrix in \vec{C}_{ortho} bestimmt, ergeben sich die Parameter in Tabelle 4.6. Die Berechnung einer Rotation der identifizierten Elastizitätsmatrix mit den Koeffizienten in Tabelle 4.6 um den Winkel θ führt mit Gleichung 4.22 zu den blauen

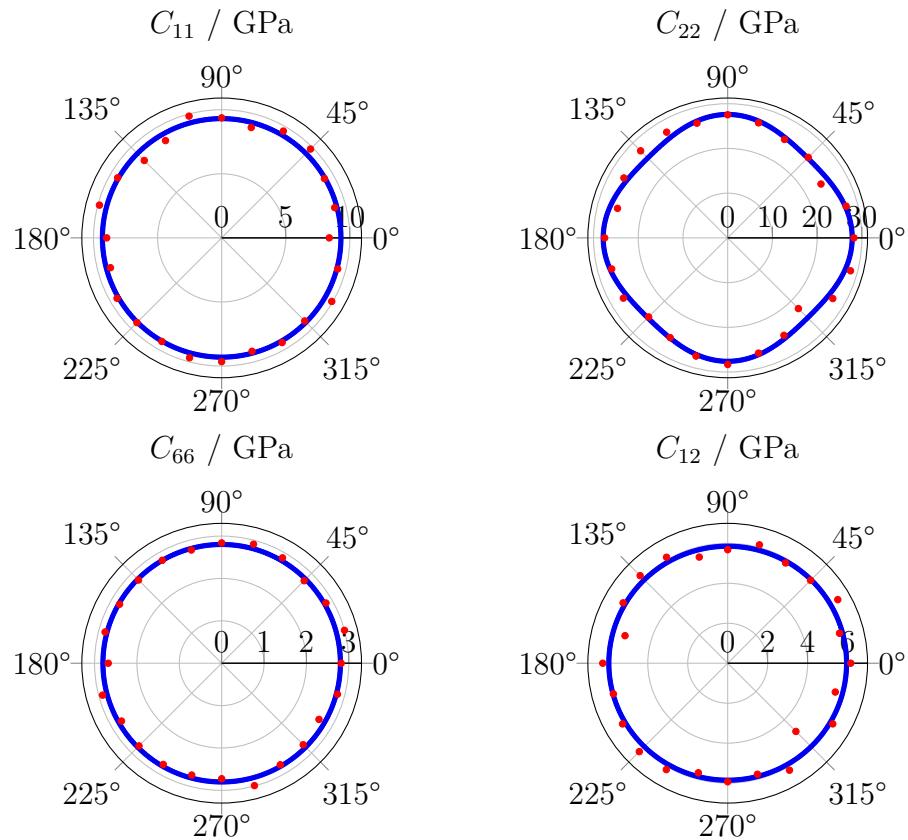


Abbildung 4.38: Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen (rot) und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten (blau) der Leinwandbindung (Faserverteilung 50:50) [JWD19]

Kurven in den Abbildungen 4.38 bis 4.40.

Die Parameter C_{13} , C_{33} und C_{55} sind nicht explizit dargestellt, weil sich diese direkt über

$$\begin{aligned} C_{13}(\theta) &= C_{12}(\theta + 90^\circ) \\ C_{33}(\theta) &= C_{22}(\theta + 90^\circ) \\ C_{55}(\theta) &= C_{66}(\theta + 90^\circ) \end{aligned}$$

aus den Parametern C_{12} , C_{22} und C_{66} ergeben [JWD19]. Da die Parameter C_{11} und C_{22} proportional zu den Elastizitätsmodulen E_1 und E_2

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

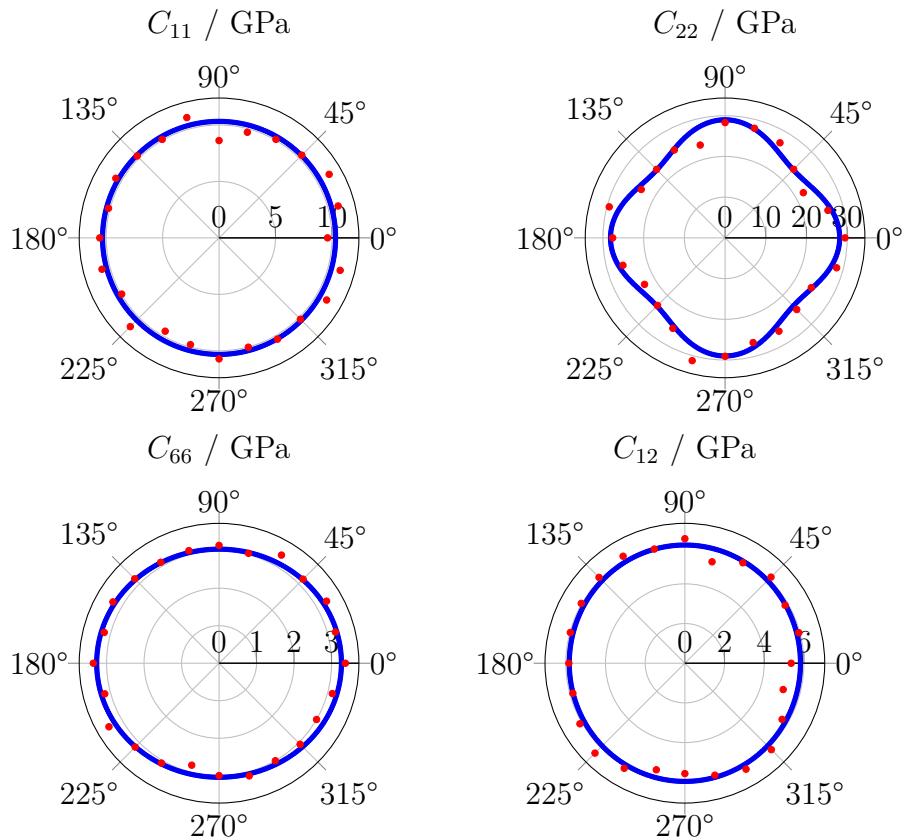


Abbildung 4.39: Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen (rot) und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten (blau) der Körperbindung (Faserverteilung 50:50) [JWD19]

sind, entsprechen deren Verläufe qualitativ den Verläufen bestimmter Elastizitätsmoduln an anderen endlosfaserverstärkten Kunststoffen in der Literatur [FHA10; Sch07; BO12]. Gleches gilt für die Schubmodule, die den Parametern C_{44} , C_{55} und C_{66} entsprechen [Sch07].

Während sich die Elastizitätskoeffizienten der Probe mit Leinwandbindung in Abbildung 4.38 rotationssymmetrisch verhalten, ergibt sich für den Parameter C_{22} bei der Körperbindung mit gleichem Faserverhältnis in beide Raumrichtungen in Abbildung 4.39 bereits eine minimale, kaum erkennbare, Abweichung. Bei der Probe mit Körperbindung und ungleichem Faserverhältnis ist in Abbildung 4.40 deutlich eine Vorzugsrichtung erkennbar. Während die Festigkeit bzw. der Koeffizient C_{22} in der Richtung

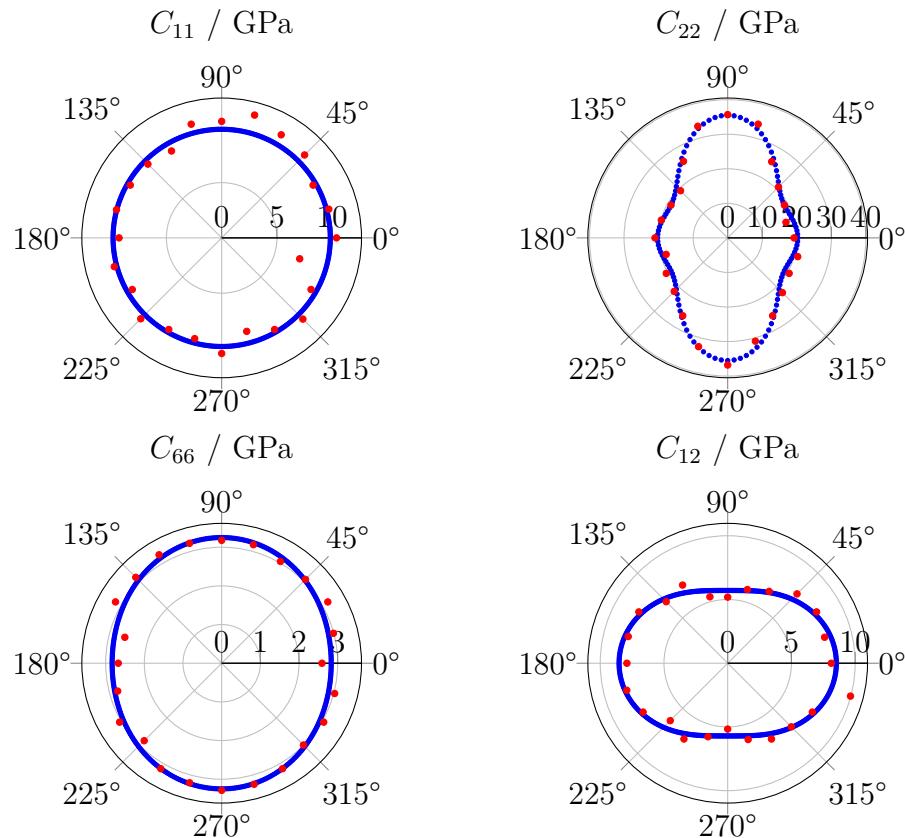


Abbildung 4.40: Elastizitätskoeffizienten der Einzelmessungen (rot) und mittels Gleichung 4.22 berechneter Verlauf der Elastizitätskoeffizienten (blau) der Köperbindung (Faserverteilung 80:50) [JWD19]

in der die Mehrheit der Fasern verläuft (90° bzw. 270°) groß wird, wird der Parameter C_{12} in genau dieser Richtung klein, während er größer bei einem Winkel von $\theta = 0^\circ$ bzw. $\theta = 180^\circ$ wird. Die Glasfasern sorgen für eine hohe Steifigkeit unter Normalbelastungen, jedoch nicht bei Schubbewegungen wie der zusätzlich berechnete Koeffizient C_{44} (Schubmodul) in Abbildung 4.41 zeigt. Dieser ist maximal bei einem Rotationswinkel von $\theta = n \cdot 45^\circ$ zu den Fasern. Gleiches gilt für den Parameter C_{23} . In beiden Fällen zeigt sich die geringste Abweichung von der Isotropie bei der Probe mit Leinwandbindung, die größte bei der Köperbindung mit ungleichem Faserverhältnis, deren Parameter C_{23} und C_{44} besonders klein entlang der Fasern und gleichzeitig besonders groß abseits der Fasern wer-

4.14 Identifikation richtungsabhängiger Materialparameter

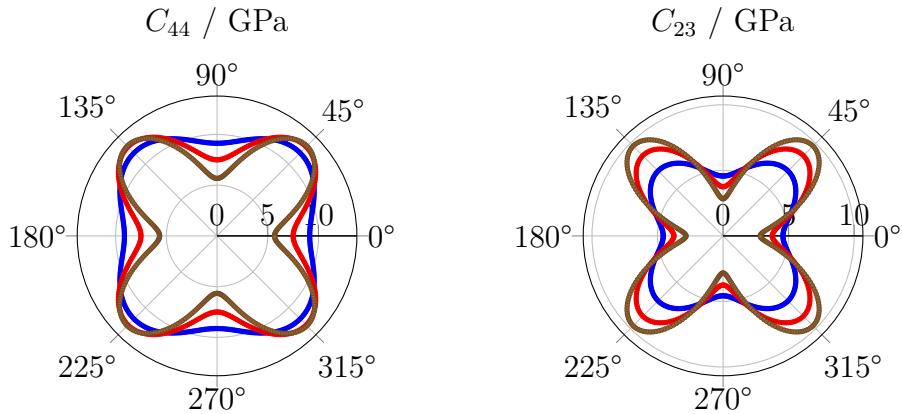


Abbildung 4.41: Berechnete Elastizitätskoeffizienten C_{44} und C_{23} : Leinwand (blau), Köper 50:50 (rot), Köper 80:20 (braun) [JWD19]

Tabelle 4.6: Identifizierte Elastizitätskoeffizienten [JWD19]

Parameter	Leinwand (50:50)	Köper (50:50)	Köper (80:20)
C_{11} / GPa	9,31	10,32	9,83
C_{22} / GPa	27,84	28,15	20,29
C_{33} / GPa	27,60	29,01	35,50
C_{44} / GPa	9,13	7,50	5,66
C_{55} / GPa	2,80	3,04	3,25
C_{66} / GPa	2,80	3,26	2,83
C_{23} / GPa	4,57	3,75	2,83
C_{13} / GPa	5,86	5,96	5,71
C_{12} / GPa	5,95	5,83	8,52

den (vgl. Abbildung 4.41). Bei Betrachtung der identifizierten Parameter selbst in Tabelle 4.6 fällt auf, dass die Proben mit gleicher Faserverteilung, insbesondere die Probe mit Leinwandbindung, durch $C_{13} \approx C_{12}$, $C_{22} \approx C_{33}$ und $C_{55} \approx C_{66}$ Eigenschaften eines tetragonalen Kristallsystems aufweisen [Šut84; JDW18]. Demnach könnte die Zahl der Modellparameter für diese Probe von insgesamt neun auf sechs reduziert werden, sodass der gesuchte Vektor \vec{C} in Gleichung 4.30 bzw. \vec{C}_{ortho} in Gleichung 4.34 nur noch sechs Elemente enthält. Das führt dazu, dass nur noch sechs Parameter in \vec{C}_{ortho} aus vier Parametern pro Winkel in $c_{\text{rot,ortho}}$ bestimmt werden müssen. Dadurch reduziert sich die minimal benötigte Anzahl winkelabhängiger Messungen zu zwei notwendigen Winkeln möglichst im gleichen Quadranten, um zwei

linear unabhängige Gleichungen zu erhalten (vgl. Gleichung 4.36). Dies kann bei weiteren Untersuchungen der Materialien genutzt werden, um z.B. Eigenschaftsänderungen durch z.B. Alterung zu untersuchen. Für weitere Anwendungen der hier vorgestellten Verfahren zur Untersuchung der Materialalterung sei auf [Web21] verwiesen. Zum Vergleich mit dem verfügbaren Datenblatt der Probe mit Köperbindung und gleichem Faserverhältnis (50:50) in beide Raumrichtungen werden für diese Proben die Elastizitätsmoduln E_2 und E_3 mithilfe von Gleichung 2.16 berechnet, welche sich zu $E_2 = 24,9$ GPa und $E_3 = 25,6$ GPa ergeben. Damit liegen die bestimmten Elastizitätsmodule nur leicht über der Angabe im Datenblatt von 23 GPa, welches im quasistatischen Zugversuch gemäß ISO 527-4/5 bestimmt wurde. Allerdings ist im Datenblatt keine Richtungsangabe enthalten. In einer älteren Version des Datenblatts von 2009 [Bon09a] sind mehr Angaben enthalten, die noch online unter [SON] verfügbar sind. Dort sind kleinere Elastizitätsmodule in den beiden Raumrichtungen der Plattenebene (x_2 und x_3) von 21,5 GPa und 22,4 GPa angegeben. Der Unterschied in den Werten zwischen den Versionen der Datenblätter ist entweder in der Stichprobenstreuung und/oder einer Anpassung des Herstellungsprozesses zu begründen. Die in [Bon09a; SON] ebenfalls angegebenen Poissonzahlen von $\nu = 0,17$ weichen nur minimal von der hier berechneten Poissonzahl in der x_2 - x_3 -Ebene (vgl. Abbildung 4.35) mit $\nu_{23} = 0,18$ ab. Bei Betrachtung der Probe mit ungleicher Faserverteilung ergeben sich Elastizitätsmodule in der Plattenebene von $E_2 = 12,76$ GPa und $E_3 = 31,83$ GPa, wobei 80 % der Fasern in x_3 -Richtung verlaufen. Insbesondere in x_3 -Richtung liegt die Datenblattangabe (Zugversuch nach ISO 527-4/5) mit 32 GPa [Bon22b] sehr nahe am ermittelten Wert. Die Angabe des Elastizitätsmoduls im Datenblatt für die x_2 -Richtung, in der 20 % der Fasern verlaufen, weicht mit 14 GPa [Bon22b] etwas stärker ab, welches mit dem höheren PA6-Anteils und dessen viskoelastischen Verhalten, zu erklären ist.

Da die viskoelastischen Eigenschaften des Matrixmaterials PA6 in der Berechnung nicht berücksichtigt worden sind, ist ein höherer Elastizitätsmodul gegenüber den Werten aus den Datenblättern zu erwarten. Da Glas im Vergleich zu Polymeren kaum viskoelastisches Verhalten zeigt, sind die Abweichungen entlang der Richtung mit dem größeren Glasfaseranteil geringer.

Fazit

Mithilfe eines kurzen Laserpulses im Nanosekundenbereich lassen sich breitbandige Ultraschallwellen in Plattenwellenleitern thermoelastisch anregen. Die Detektion erfolgt mit einem piezoelektrischen Schallwandler. Die Dämpfungsmasse (Backing) im Schallwandler sorgt zwar für eine Dämpfung der Ultraschallwellen bei der Resonanzfrequenz der verwendeten Piezokeramik, führt jedoch gleichzeitig dazu, dass alle Schallwellen bis ca. 10 MHz die gleiche Dämpfung erfahren, wodurch eine breitbandige Detektion ermöglicht wird (Fragestellung I). Demzufolge, und aufgrund der in Polymeren auftretenden akustischen Dämpfung der Schallwellen, sind die empfangenen Ultraschallwellen nur schwach ausgeprägt. Aufgrund der Verschiebung der Anregung ergibt sich neben der zeitlichen eine zusätzliche örtliche Abhängigkeit der Messsignale. Durch Fensterung im Orts- und Zeitbereich, Zero-Padding sowie weiteren Bildverarbeitungsschritten im Frequenz-Wellenzahl-Bereich nach der zweidimensionalen Fourier-Transformation lassen sich trotz schwacher Eingangssignale die in der Dispersionabbildung sichtbar werdenden Moden hinreichend gut auswerten (Fragestellung II). Die elastischen Materialparameter (Schallgeschwindigkeiten) lassen sich unter Annahme von Isotropie anhand der Steigung der Wellenfronten im Orts-Zeitbereich oder anhand der Steigung der Grade im Frequenz-Wellenzahlbereich (Dispersionsabbildung) schätzen. Neben einer numerischen Nullstellensuche der Rayleigh-Lamb-Gleichung, lässt sich die Wellenausbreitung effizient mit einer semi-analytischen Finite-Elemente-Methode simulieren (Fragestellung III). Zum Abgleich der Frequenz-Wellenzahl-Paare der detektierten Moden mit den Simulationsdaten werden die elastischen Materialparameter als Modelleingangsparameter variiert. Eine Bewertung der Übereinstimmung der berechneten und messtechnisch ermittelten Frequenz-Wellenzahl-Paaren liefert die Zielfunktion. Die hier vorgestellten Zielfunktionen verzichten auf eine Extraktion der Moden repräsentierenden Grade aus der Dispersionsabbildung. Stattdessen gewichten sie Frequenz-Wellenzahl-Paare mit hohen Beträgen der zweidimensionalen Fouriertransformation (Dispersionsabbildung) am stärksten (Fragestellung IV). In Kombination mit der vorherigen Verarbeitung ergibt sich eine glatte Zielfunktion und somit ein robustes inverses Verfahren (Fragestellung IV). Dabei können alle Modelleingangsparameter gleichzeitig variiert werden, ohne dass eine spezielle Optimierungsreihenfolge notwendig ist (Fragestellung V). Die Unsicherheit der resultierenden Messgrößen (Schallgeschwindigkeiten) werden mittels Monte-Carlo-Simulation bestimmt (Fragestellung VI).

Da sich die durch Lamb-Wellen erzeugten Verschiebungen auf die Plat-

4 Inverses Verfahren zur Identifikation elastischer Materialparameter

tenebene beschränken, werden nur Materialparameter in zwei Raumrichtungen identifiziert, was für ein isotropes Materialmodell hinreichend ist. Zur Identifikation eines richtungsabhängigen Materialmodells wird die Platte im Messplatz gedreht und für jeden Rotationswinkel eine Identifikation der Koeffizienten der Elastizitätsmatrix für den zweidimensionalen Fall durchgeführt. Durch Zusammensetzen aller Einzelergebnisse in ein Gleichungssystem werden durch dessen Lösung alle Koeffizienten der Elastizitätsmatrix (inklusive der dritten Raumrichtung) bestimmt.

5 Inverses Verfahren zur Identifikation viskoelastischer Materialparameter

Zur Identifikation viskoelastischer Materialparameter ist zusätzlich zur Lage der Moden im Dispersionsdiagramm (vgl. Kapitel 4) die modale Dämpfung von Bedeutung. Im vorherigen Kapitel war sie bereits dadurch bemerkbar, dass einige Moden bei höheren Frequenzen, trotz breitbandiger Anregung, nur schwach detektierbar sind. Lässt sich die Dämpfung jedoch messen, wird diese zusätzliche Information in diesem Kapitel genutzt, um ein viskoelastisches Materialmodell zu identifizieren. Dazu wird ein fraktionales Zener-Modell mit einer Zerlegung in Kompressions- und Scherkomponenten nach Unterabschnitt 3.3.2 ausgewählt sowie eine Parameterstudie, um die Auswirkungen der Modellparameter auf die komplexen Wellenzahlen (Phase und Dämpfung bzw. Real- und Imaginärteil) zu untersuchen, durchgeführt. Analog zum vorherigen Kapitel werden die Materialparameter in einem inversen Verfahren bestimmt, sodass Startwerte für die viskoelastischen Modellparameter geschätzt werden. Ebenso wird eine geeignete Kostenfunktion benötigt, da die simulativ berechnete modale Dämpfung bzw. Imaginärteil der Kreiswellenzahl zusätzlich zu deren simulativ berechneten Realteil jeweils mit denen aus der Messung bestimmten Real- und Imaginärteilen der Kreiswellenzahlen übereinstimmen müssen. Die höhere Anzahl an zu bestimmenden Modellparametern erhöht die Komplexität ebenfalls deutlich. Zur Konvergenzuntersuchung der Optimierung werden daher verschiedene Optimierungsstrategien miteinander verglichen. Da PEEK für ein Polymer schwache viskoelastischen Eigenschaften aufweist, erleichtert es die Extraktion von Frequenz-Wellenzahl-Paaren aus der Dispersionsabbildung, um das Auswertungsverfahren zu demonstrieren und verschiedene Optimierungsstrategien exemplarisch zu untersuchen.

5.1 Berücksichtigung von Dämpfung im Vorwärtsmodell

Da der Großteil der Dämpfungsmodelle eine Frequenzabhängigkeit aufweist, werden bei Berücksichtigung eines viskoelastischen Materials für jede Kreisfrequenz ω die Elastizitätsmatrix $\mathbf{C}_{\text{el}}(\omega)$ neu berechnet sowie die Element-Steifigkeitsmatrizen bestimmt, um diese zu den globalen Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 und \mathbf{K}_3 zu assemblieren (Zuordnung der lokalen Elementknoten zu den globalen Knoten), um damit die Kreiswellenzahlen nach Gleichung 3.28 zu berechnen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn eine Eigenwertzerlegung der Elastizitätsmatrix \mathbf{C} durchgeführt wird [TS99], um auf jede Hauptrichtung unterschiedliche Dämpfungsparameter oder gar ein anderes Dämpfungsmodell anzuwenden (vgl. Gleichung 2.38). Erfahren die Bewegungen in jede Hauptrichtung gleiche Dämpfung, ergibt sich wie in Gleichung 2.38 und 2.41 ein komplexer modellabhängiger Vorfaktor, sodass sich die komplexe frequenzabhängige Elastizitätsmatrix allgemein zu $\tilde{\mathbf{C}}(\omega) = \gamma(\omega) \mathbf{C}$ ergibt. In dem Fall kann der skalare frequenzabhängige Dämpfungsfaktor $\gamma(\omega)$ bei Berechnung der Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_{1,\text{el}}$, $\mathbf{K}_{2,\text{el}}$ und $\mathbf{K}_{3,\text{el}}$ in Gleichung 3.23 bis 3.25 vor das Integral gezogen werden. Handelt es sich um ein einschichtiges homogenes System, kann dies auch noch nach der Assemblierung erfolgen, sodass nicht für jede Frequenz alle Modellmatrizen neu berechnet werden müssen. Das Eigenwertproblem nach Gleichung 3.27 ergibt sich somit analog zu Gleichung 2.66 mit

$$[\gamma(\omega) (\mathbf{K}_1 + jk\mathbf{K}_2 + k^2\mathbf{K}_3) - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

wobei $\gamma(\omega)$ einen beliebigen modell- und frequenzabhängigen, jedoch ortsunabhängigen Dämpfungsfaktor bezeichnet. Beim Lösen des resultierenden Eigenwertproblems unter Vorgabe der Kreisfrequenz ω ergeben sich paarweise komplexe Kreiswellenzahlen $\pm k$, die jeweils die Wellenausbreitung in positive und negative y -Richtung in Abhängigkeit der Kreisfrequenz beschreiben. Ausgehend vom Ansatz aus Gleichung 3.18 lässt sich die nun komplexe Kreiswellenzahl k jeder Mode in Real- und Imaginärteil zerlegen, womit sich für die mechanische Verschiebung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Xi} &= \hat{\boldsymbol{\Xi}}(\omega, k) e^{j(ky - \omega t)} = \hat{\boldsymbol{\Xi}}(\omega, k) e^{j((\text{Re}\{k\}) + j\text{Im}\{k\})y - \omega t} \\ &= \hat{\boldsymbol{\Xi}}(\omega, k) e^{j(\text{Re}\{k\}y) - \omega t} e^{-\text{Im}\{k\}y} \\ &= \hat{\boldsymbol{\Xi}}(\omega, k) e^{j(\text{Re}\{k\}y - \omega t)} e^{\alpha y} \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Konvergenz unter Berücksichtigung von Dämpfung

ergibt. Der Realteil $\text{Re}\{k\} = \beta$ wird als Phase bezeichnet. Dementsprechend kann daraus mittels $c_{\text{Ph}} = \omega/\beta = \omega/\text{Re}\{k\}$ die Phasengeschwindigkeit der Mode berechnet werden. Der rein reelle Ausdruck $e^{\alpha y}$ beschreibt das Abklingen der Amplitude $\hat{\mathbf{E}}$ über den Ort y , weshalb der negative Imaginärteil als Dämpfung $\alpha = -\text{Im}\{k\}$ bezeichnet wird. Je nachdem ob sich die Welle in negative ($\text{Re}\{k\} > 0$) oder positive ($\text{Re}\{k\} < 0$) y -Richtung ausbreitet ergibt sich jeweils $\alpha > 0$ für eine in $-y$ -Richtung oder $\alpha < 0$ für eine in $+y$ -Richtung laufende Welle.

Aufgrund der Dimensionsverdopplung des Eigenwertproblems zur Lösung bei vorgegebenen Frequenzen werden mit einer Diskretisierung von N Knoten immer $4N$ Kreiswellenzahlen pro Kreisfrequenz berechnet. Je geringer die Frequenz, desto weniger Moden sind ausbreitungsfähig, wodurch umso mehr evaneszente (sehr schnell abklingende) Moden berechnet werden. Diese Moden, die lokale unmittelbar abklingende Schwingungen beschreiben, können unter Verwendung eines ideal-elastischen Materialmodells leicht aussortiert werden, indem nur Wellenzahlen mit $\text{Im}\{k\} = 0$ betrachtet werden. In dem Fall ist es jedoch effizienter die Kreisfrequenzen aus den Kreiswellenzahlen zu berechnen. Unter Verwendung eines viskoelastischen Materialmodells hingegen werden alle Moden abklingend, was sich durch komplexe Wellenzahlen äußert. Die ebenfalls im Modell berechneten, nicht ausbreitungsfähigen Moden mit

$$|\text{Im}\{k\}| > |\text{Re}\{k\}| \quad (5.3)$$

werden nicht berücksichtigt. Auf diese Weise werden alle Moden, die örtlich nach einer Strecke, die ihrer eigenen Wellenlänge oder weniger entspricht, abgeklungen sind, aussortiert. In den Messdaten treten diese Moden nicht auf. Während des späteren Optimierungsprozesses könnten sie jedoch zu einer falschen Zuordnung von simulativ berechneten Moden und den aus der Messung extrahierten Moden führen, was durch das Aussortieren vermieden wird.

5.2 Konvergenz unter Berücksichtigung von Dämpfung

Wird ein frequenzabhängiges Dämpfungsmodell genutzt, erfolgt die Berechnung der komplexen Kreiswellenzahlen unter Vorgabe der Kreisfrequenzen nach Gleichung 3.28. Als Beispiel dient eine 5,45 mm dicke PEEK-Platte, deren Dämpfungsverhalten durch das fraktionale Zener-Modell nach Glei-

Tabelle 5.1: Arbeitspunkt der Konvergenzuntersuchung (Parametersatz entspricht den Startwerten in Abschnitt 5.5) unter Annahme eines fraktionalen Zener-Modells (Plattendicke 5,45 mm)

$\rho / \text{kg m}^{-3}$	K / GPa	μ / GPa
1310	6,23	1,48
$\tau_{\sigma_K} / \text{ps}$	$\tau_{\sigma_\mu} / \text{ps}$	$\tau_{\varepsilon_K} / \text{ps}$
0,2	0,59	0,21
a_K	a_μ	
1	1	

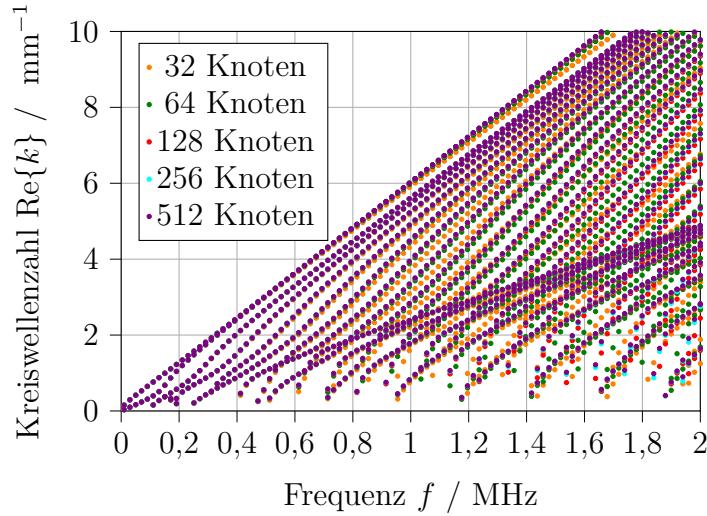


Abbildung 5.1: Konvergenz der Kreiswellenzahl ($\text{Re}\{k\}$) mit Polynomordnung 1 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter

chung 2.41 mit den Parametern in Tabelle 5.1 modelliert wird.

Analog zur vorherigen Konvergenzbetrachtung am Beispiel einer ideal-elastischen Modellierung von PEEK in Unterabschnitt 4.2.3 wird der Einfluss der Knotenzahl auf die komplexe Kreiswellenzahl unter Verwendung eines (fraktionalen) Zener-Modells untersucht.

Da Viskoelastizität im Frequenzbereich durch einen frequenz- und modellabhängigen Vorfaktor z.B. vor der Elastizitätsmatrix ausgedrückt wird, ergibt sich in der Regel die frequenzabhängige Transversalwellengeschwin-

5.2 Konvergenz unter Berücksichtigung von Dämpfung

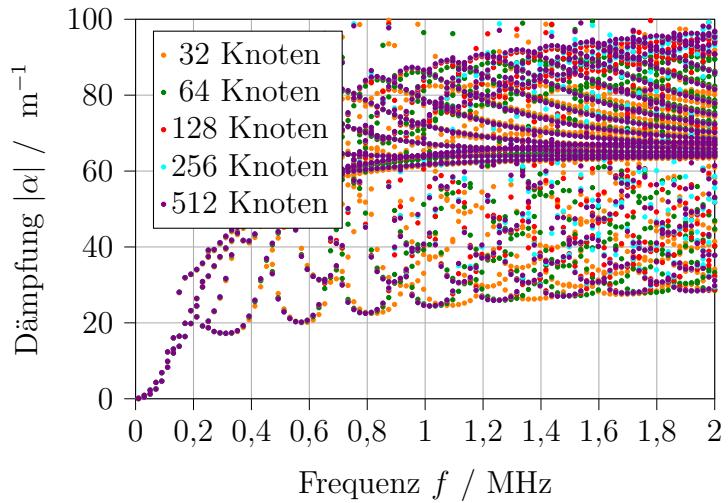


Abbildung 5.2: Konvergenz der Dämpfung ($|\alpha| = |\text{Im}\{k\}|$) mit Polynomordnung 1 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter

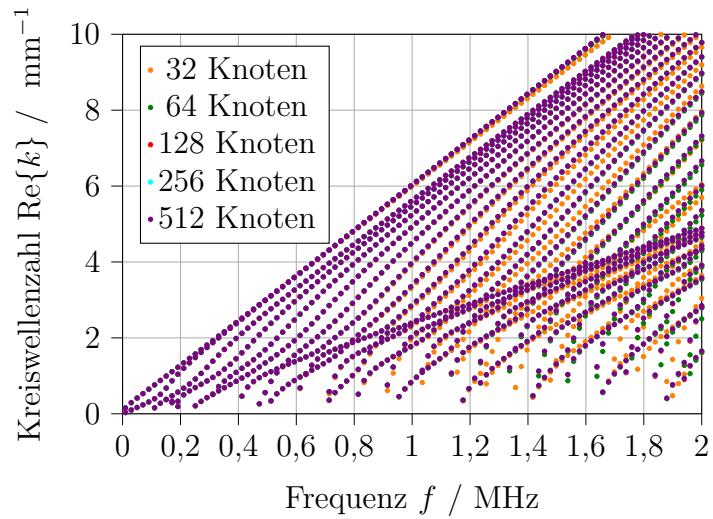


Abbildung 5.3: Konvergenz der Kreiswellenzahl ($\text{Re}\{k\}$) mit Polynomordnung 2 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter

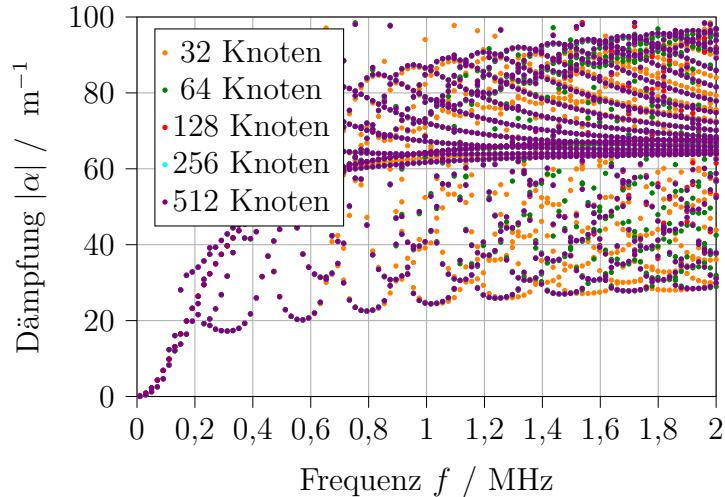


Abbildung 5.4: Konvergenz der Dämpfung ($|\alpha| = |\text{Im}\{k\}|$) mit Polynomordnung 2 unter Annahme frequenzabhängiger, komplexer Materialparameter

digkeit nach Gleichung 2.19 bis Gleichung 2.21 zu

$$c_T(\omega) = \text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{C}_{ii}(\omega)}{\rho}} \right\} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{Re} \left\{ \sqrt{\gamma(\omega)} \right\} \quad \forall i \in 4, 5, 6, \quad (5.4)$$

wobei der Faktor $\gamma(\omega)$ modellabhängig ist. Unter Verwendung eines z.B. (fraktionalen) Zener-Modells ergibt sich $\gamma(\omega)$ nach Gleichung 2.38 bzw. 2.41 abhängig von der Kreisfrequenz ω , Retardationszeitkonstante τ_ε , Relaxationszeitkonstante τ_σ und ggf. von der Ableitungsordnung a . Für ein physikalisches Materialverhalten muss am Beispiel des (fraktionalen) Zener-Modells die Bedingung $\tau_\varepsilon > \tau_\sigma$ erfüllt sein, wodurch sich $\text{Re}\{\gamma(\omega)\} > 1$ ergibt. Dementsprechend ist bei Verwendung eines (physikalischen) Dämpfungsmodells die Schallgeschwindigkeit der Transversalwelle $c_T(\omega)$ bei einer bestimmten Kreisfrequenz stets größer als die statische Transversalwellengeschwindigkeit von $c_{T_0} = c_T(\omega = 0)$, sodass letztere zur konservativen Konvergenzabschätzung nach Gleichung 4.11 genutzt wird.

Für eine 5,45 mm dicke Platte, mit einer statischen Transversalwellengeschwindigkeit $c_{T_0} = 1152 \text{ m s}^{-1}$, einer maximal betrachteten Frequenz von 2,5 MHz sowie einer Diskretisierung von $\beta_N = 10$ Knoten pro Wellenlänge ergibt sich nach Gleichung 4.11 eine minimal notwendige Knotenzahl von 128 Knoten. Bei einer Diskretisierung von $\beta_N = 20$ Knoten pro Wellenlänge

5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten

entsprechend 256 Knoten. Für diese und weitere Diskretisierungen ist unter Verwendung einer Polynomordnung von 1 das Dispersionsdiagramm in Abbildung 5.1 sowie die zugehörige Dämpfung in Abbildung 5.2 dargestellt.

Abbildung 5.1 zeigt eine Änderung der Steigung der Moden bei hohen Wellenzahlen sowie eine Verschiebung der Moden zu kleineren Frequenzen bzw. zu höheren Wellenzahlen bei höherer Knotenanzahl, wobei diese im höherfrequenten Bereich deutlich stärker ausfällt. Ebenfalls lässt sich dieser Einfluss auf die Dämpfung in Abbildung 5.2 beobachten: Mit höherer Knotenanzahl verschieben sich die Dämpfungskurven in Richtung kleinerer Frequenzen. Insgesamt verschieben sich also sowohl Dispersions- als auch Dämpfungskurven in Richtung kleinerer Frequenzen mit höherer Diskretisierung.

Unter Verwendung von Ansatz-Polynomen der Ordnung 2 in Abbildung 5.3 und 5.4 fällt die Verschiebung deutlich geringer aus. Ab 128 Knoten ist diese kaum, ab 256 Knoten ($\beta_N = 20$) bereits gar nicht mehr erkennbar, sodass unter Berücksichtigung von Viskoelastizität analog zu Abbildung 4.5 mindestens die Polynomordnung 2 mit $\beta_N = 20$ Knoten pro Wellenlänge verwendet wird, um den numerischen Fehler möglichst gering zu halten.

5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten

Im Wellenleiter kann eine sich ausbreitende akustische Welle durch Superposition ihrer modalen Anteile ausgedrückt werden. Die Wellenzahlen mit der sich die verlustbehafteten Wellenpakete ausbreiten sind nicht rein reell. Deren Dämpfung wird analog zu Gleichung 5.2 durch den negativen Imaginärteil der Wellenzahl ausgedrückt. Um die Dämpfung α jeder Mode und dementsprechend für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar (wobei hier der Realteil der Kreiswellenzahl gemeint ist) aus den Messdaten zu berechnen, wird die Signalmatrix entlang der Ortsachse in n_{disp} Abschnitte mit einer Breite von jeweils w_y unterteilt, sodass bei insgesamt N äquidistanten Anregungspositionen, jeweils N/n_{disp} Zeitsignale zusammengefasst werden, um durch zweidimensionale Fourier-Transformation jeweils eine Dispersionsabbildung zu erzeugen.

Um die Werte in den Dispersionsabbildungen möglichst wenig zu verfälschen wird anders als in Abschnitt 4.6 nur ein Minimum an Signalverarbeitungsschritten durchgeführt. Dazu zählen Heruntertakten im Zeitbereich

sowie Zero-Padding (vgl. Abschnitt 4.6) zur Erhöhung der Auflösung und einer örtlichen Fensterung zur Minderung des Leakage-Effekts. Schematisch ist das Vorgehen beispielhaft für $n_{\text{disp}} = 4$ Abschnitte in Abbildung 5.5 dargestellt. Durch die Aufteilung im Ortsbereich ergibt sich eine größere

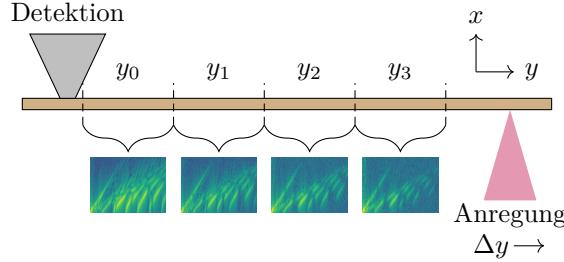


Abbildung 5.5: Schematische Darstellung der Aufteilung der Messdaten entlang der Propagationsstrecke nach [JCH21]

Schrittweite der Phase β bzw. des Realteils der Kreiswellenzahl $\text{Re}\{k\}$, was wiederum durch Zero-Padding ausgeglichen wird. Die Fensterung im Ortsbereich hilft die Auswirkungen des Leakage-Effekts in jeder Dispersionsabbildung zu mindern, führt jedoch auch zu einer größeren Unschärfe, was eine optische Trennung der Moden erschwert (vgl. Abbildung 5.6). Die mittlere Anregungsposition y_m des jeweiligen Abschnitts wird genutzt, um über den Abstand zum Empfangswandler und die Werte in jedem Frequenz-Wellenzahl-Paar der Dispersionsabbildungen eine ortsabhängige Exponentialfunktion zu approximieren. Somit ergibt sich für die Intensität bei n_{disp} Abschnitten für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar der Dispersionsabbildung

$$U_i(\omega, \text{Re}\{k\}, y_{m_i} w_y) = U_0(\omega, \text{Re}\{k\}, y_{m_0}, w_y) e^{\alpha y}, \quad (5.5)$$

sodass mithilfe der n_{disp} Dispersionsabbildungen, die modale Dämpfung α durch die Approximation einer Exponentialfunktion über den Ort bestimmt werden kann. [JCH21]

Abbildung 5.6 zeigt die approximierten Werte für α abhängig von Frequenz f und Realteil der Kreiswellenzahl $\text{Re}\{k\}$ beispielhaft für eine 5,45 mm dicke PEEK-Platte. Da Abbildung 5.6 an eine Dispersionsabbildung erinnert, jedoch die modale Dämpfung als Farblegende enthält, wird diese Art von Abbildung im Folgenden auch als *Dämpfungsabbildung* bezeichnet. Einige Moden werden durch betragsmäßig große Dämpfungswerte α sichtbar, insbesondere im Bereich von $f = 0,5 \text{ MHz}$ bis $f = 1,5 \text{ MHz}$ und kleinen Wellenzahlen von $\text{Re}\{k\} = 0 \text{ mm}^{-1}$ bis $\text{Re}\{k\} = 2 \text{ mm}^{-1}$. Da

5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten

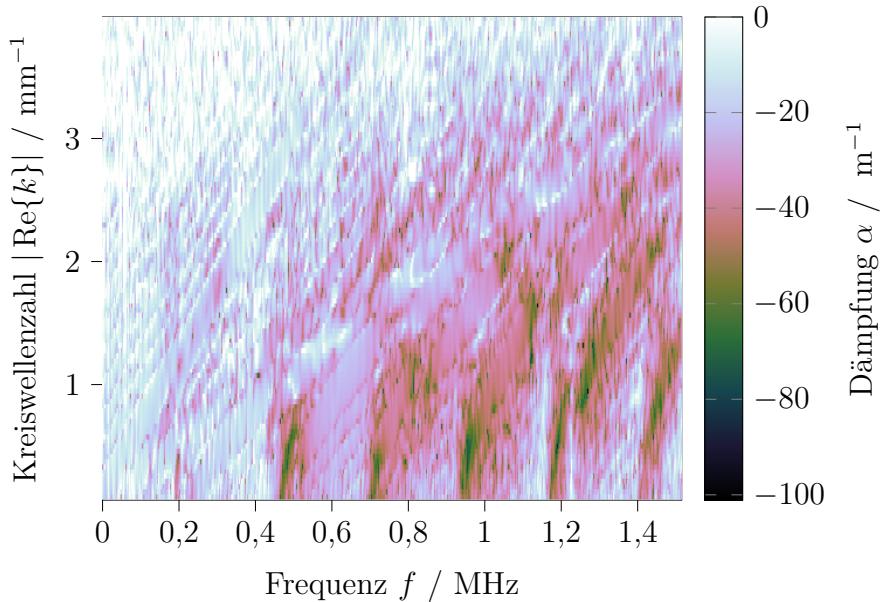


Abbildung 5.6: Approximierte Werte α für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar unter Verwendung von $n_{\text{disp}} = 4$ Abschnitten im Ortsbereich

Abbildung 5.6 aufgrund der hohen Unschärfe zunächst schwer lesbar erscheint, können die Werte, die keine ausbreitungsfähige Mode beschreiben, gefiltert werden. Relativ leicht gelingt dies mit einem Rechteck-Filter um die theoretisch ausbreitungsfähigen Moden, welche mithilfe des Vorwärtsmodells unter Annahme effektiver, elastischer Materialparameter berechnet werden.

Für die reine Position der Moden ohne Berücksichtigung der Dämpfung, genügt die Kenntnis effektiver, elastischer Materialparameter, deren Identifikation in Kapitel 4 beschrieben wird, denn die reine Modenverschiebung aufgrund der Dämpfung lässt sich durch einen äquivalenten ideal-elastischen Materialparametersatz beschreiben.

Nach Filterung der Daten aus Abbildung 5.6 mit einem Rechteckfilter um die theoretisch ausbreitungsfähigen Moden ergibt sich schließlich Abbildung 5.7. Dabei fällt direkt auf, dass einige Moden bei großen Kreiswellenzahlen eine modale Dämpfung von null aufweisen. Dafür gibt es hauptsächlich zwei mögliche Gründe. Entweder die Mode ist angeregt worden und weist eine geringe modale Dämpfung nahe null auf oder sie ist nicht angeregt bzw. detektiert worden. Im letzteren Fall beträgt die

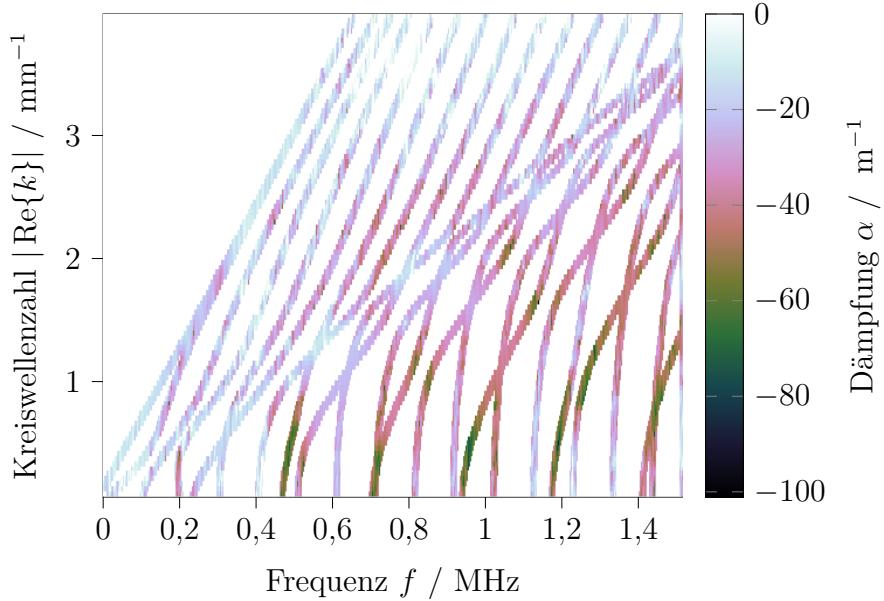


Abbildung 5.7: Approximierte modale Dämpfung α für jedes Frequenz-Wellenzahl-Paar unter Verwendung von $n_{\text{disp}} = 4$ Abschnitten im Ortsbereich und Rechteck-Filterung um die ausbreitungsfähigen Moden

Ursprungsamplitude bereits null, sodass diese nicht weiter gedämpft wird. Gleichzeitig besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass eine Mode zwar angeregt wurde, jedoch bereits zu Beginn der Propagationsstrecke so stark gedämpft wird, dass eine Detektion nicht möglich ist.

Hilfreich dafür ist die Betrachtung der Dispersionsabbildung wie in Abbildung 4.17. Sind die entsprechenden Moden dort deutlich zu erkennen, konnten diese zuvor angeregt und detektiert werden und es ist davon auszugehen, dass die Dämpfung in dem Fall tatsächlich zu null wird. Ist die Mode in der Dispersionsabbildung nicht erkennbar, ist es wahrscheinlich, dass die Mode nicht detektiert wurde. In diesem Fall ist keine Aussage über ihre modale Dämpfung möglich.

In den hier betrachteten Abbildungen 5.6 und 5.7 handelt es sich bei gleichzeitiger Betrachtung von Abbildung 4.17 bei den Moden bei großen reellen Kreiswellenzahlen daher um in der Messung nicht angeregte bzw. nicht detektierte Moden, sodass keine Aussage über deren modaler Dämpfung möglich ist.

5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten

Tabelle 5.2: In der FEM-Simulation angenommene viskoelastische Materialparameter (Parameter ähnlich zu denen von PEEK).

$\rho / \text{kg m}^{-3}$	E / GPa	ν	α_M / s	α_K / s^{-1}
1300	4,76	0,38	$11,4 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^{-9}$

5.3.1 Validierung an FEM-Simulationen

Zur Validierung des Messeffekts bzw. der Extraktion der Dämpfung α aus den Messdaten, wird eine transiente FEM-Simulation zur Erzeugung von den Messdaten ähnlichen Signalen bei bekannten Materialparametern herangezogen. Das Simulationsmodell ist identisch zu dem in Abschnitt 4.5, jedoch mit einem Rayleigh-Modell als viskoelastisches Materialmodell. Angenommen werden die Materialparameter in Tabelle 5.2. Durch ortsabhängiges Aufteilen der berechneten Zeitsignale in $n_{\text{disp}} = 4$ Bereiche, ergeben sich für jeden dieser Abschnitte die Dispersionsabbildungen in Abbildung 5.8, welche wiederum für die Approximation einer Exponentialfunktion, wie zuvor beschrieben, genutzt werden. Die daraus resultierende Dämpfung α ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Ebenso sind die entsprechenden Frequenz- und komplexen Kreiswellenzahl-Paare aus der SAFE-Berechnung in Abbildung 5.10 dargestellt.

Sowohl Abbildung 5.9 als auch 5.10 sind mit der gleichen Farbskalierung dargestellt, um sie direkt vergleichen zu können. Dafür sind in Abbildung 5.10 nur die Dämpfungswerte im Wertebereich von Abbildung 5.9 dargestellt. Betragsmäßig größere Werte werden in Abbildung 5.9 nicht dargestellt, da eine zu stark gedämpfte Welle nicht mehr messtechnisch erfasst wird. Werden schließlich Abbildung 5.9 und 5.10 übereinander gelegt, verschwindet Abbildung 5.10 in 5.9, da diese quasi übereinstimmen. Damit zeigt sich, dass das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Dämpfung gut geeignet ist.

Für eine genauere Betrachtung der Dämpfung der einzelnen Moden und um einen leichteren Vergleich mit der mittels SAFE-Methode berechneten modalen Dämpfung zu ermöglichen, werden die detektierten Moden als Maxima aus der verarbeiteten Dispersionsabbildung zunächst extrahiert (vgl. Abbildung 5.11) und die entsprechenden Stellen (Kreiswellenzahl-Frequenz-Paare) in der Dämpfungsabbildung in Abbildung 5.9 gesucht, um deren modale Dämpfung mit den mittels SAFE-berechneten nächstgelegenen Simulationspaaren zu vergleichen.

Dabei werden zum Vergleich die Simulationspunkte verwendet, deren Frequenz f und Realteile der Kreiswellenzahlen $\text{Re}\{k\}$ am nächsten an

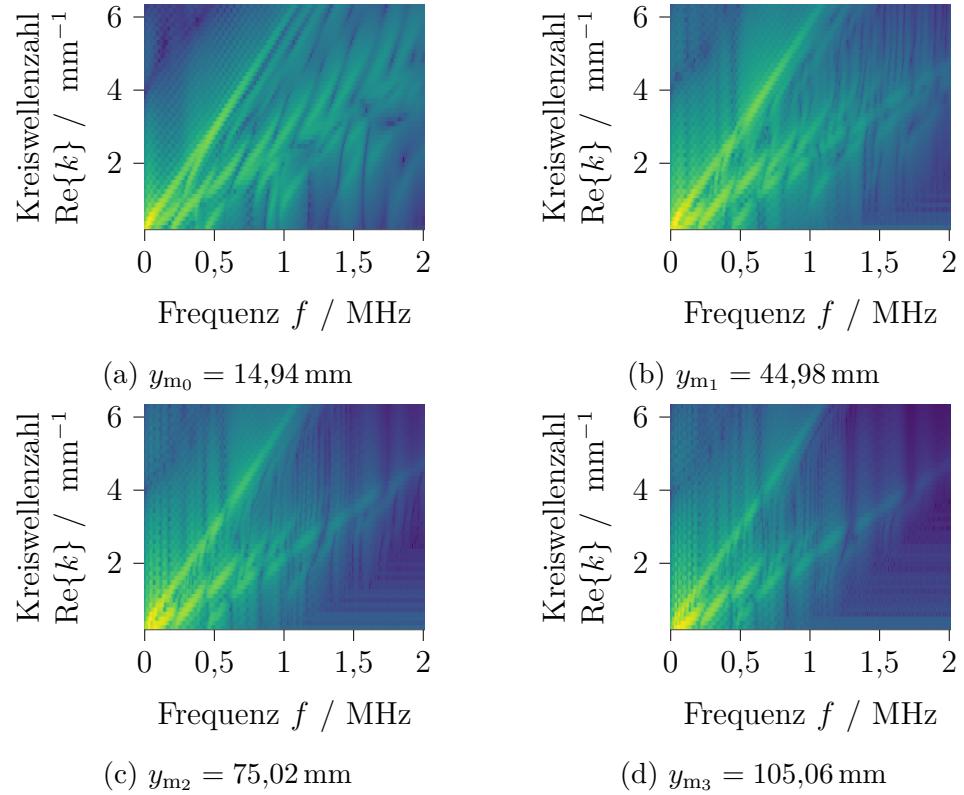


Abbildung 5.8: Dispersionsabbildungen der jeweiligen Abschnitte nach Abbildung 5.5 bei verschiedenen mittleren Anregungspositionen y_{m_i}

den detektierten Moden liegen. Das Ergebnis dieses Vergleichs zeigt Abbildung 5.12. Dort zeigt sich generell eine gute Übereinstimmung zwischen der Dämpfung des gewöhnlichen FEM-Modells, welches eine Messung durch die transiente Berechnung möglichst realitätsgerecht nachbildet, und der mittels semi-analytischer Finite-Elemente-Simulation berechneten Dämpfung. Insbesondere im niederfrequenten Bereich ist eine Art Schwingung auf den Dämpfungsverläufen aus der transient berechneten FEM-Simulation erkennbar, welche sich auf Artefakte der 2D-Fourier-Transformation wie z.B. den verbliebenen Leakage-Effekt zurückführen lassen. Weiterhin entstehen Abweichungen im höherfrequenten Bereich durch unterschiedliche örtliche Diskretisierungen des örtlich eindimensional diskretisierten semi-analytischen und örtlich zweidimensional diskretisierten, transienten FEM-Modells (CFS++).

5.3 Bestimmung der modalen Dämpfung aus Messdaten

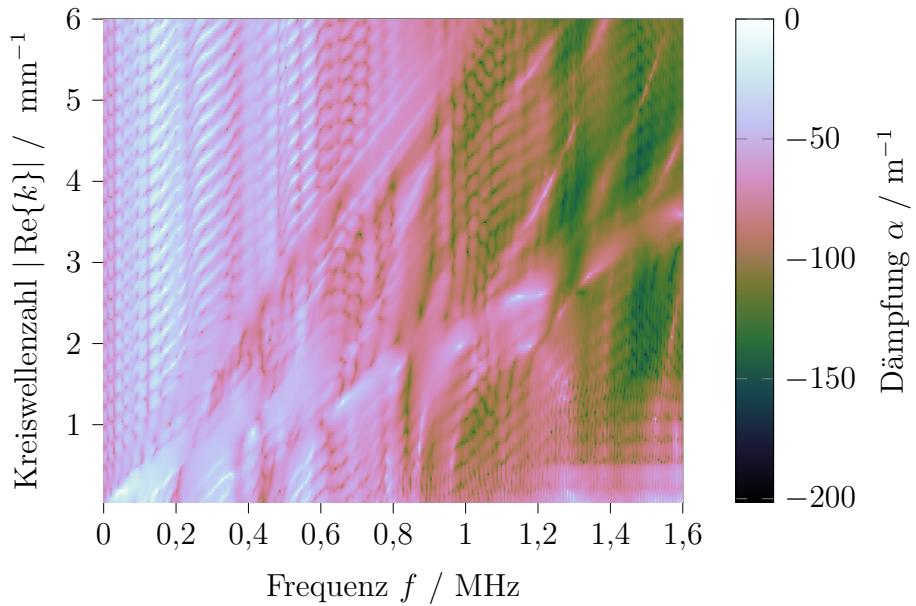


Abbildung 5.9: Aus transienter FEM-Simulation bestimmte Dämpfung α

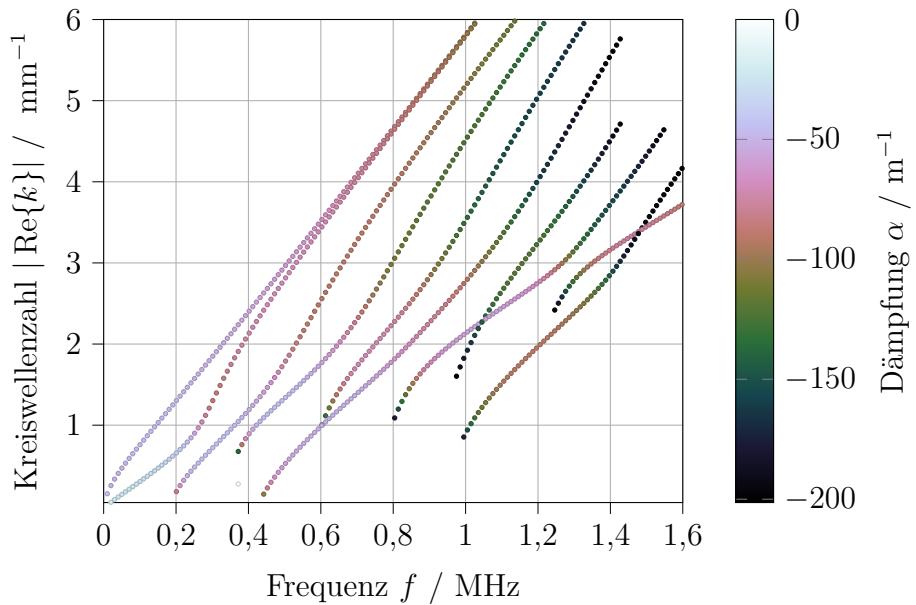


Abbildung 5.10: Zugehörige Frequenz-Wellenzahl-Paare ($\beta = \text{Re}\{k\}$, $\alpha = -\text{Im}\{k\}$) berechnet mit der SAFE-Methode

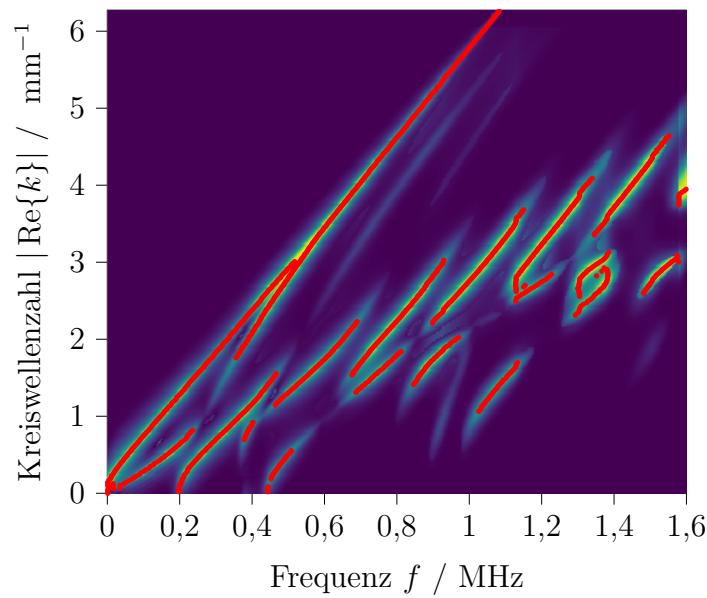


Abbildung 5.11: Dispersionsabbildung und extrahierte Modenpunkte (Frequenz-Wellenzahl-Paare) (rot)

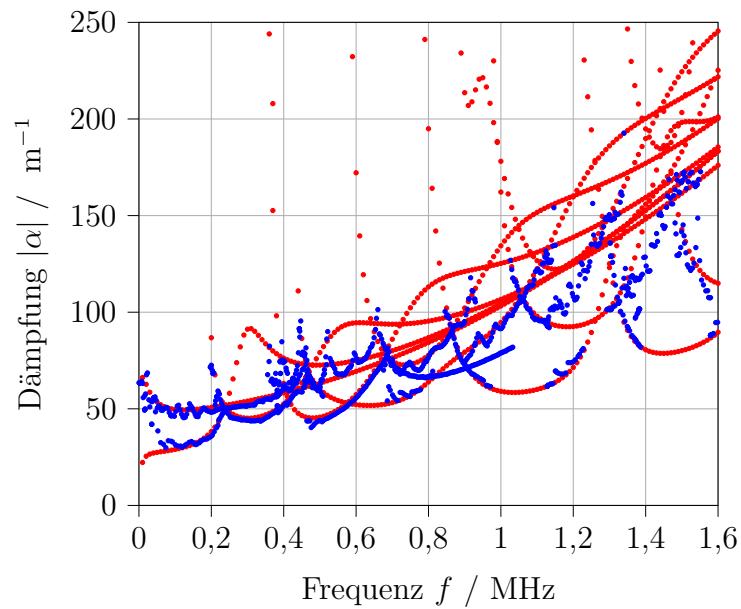


Abbildung 5.12: Modale Dämpfung an den in Abbildung 5.11 extrahierten Modenpunkten (blau) und den mittels SAFE berechneten Imaginärteilen der Kreiswellenzahl bzw. Dämpfung (rot)

5.3.2 Reproduzierbarkeit der Dämpfungsmessung

Um die Reproduzierbarkeit der Dämpfungsmessung zu untersuchen, werden aus den Messdaten der jeweils ersten Messung der Reproduzierbarkeitsuntersuchung aus Abschnitt 4.7, die Abbildung 4.18a zugrunde liegt (rot), die Moden extrahiert und die Dämpfung an diesen Stellen bei den entsprechenden Frequenz-Kreiswellenzahl-Paaren der beiden anderen Messungen in Abbildung 5.13a gegenüber gestellt. Die Messungen wurden an PEEK durchgeführt und unterscheiden sich untereinander nur durch die jeweilige erneute Ankopplung des Schallwandlers.

Trotz einer gewissen Streuung stimmen die größtenteils parabelförmigen Verläufe der modalen Dämpfung in Abbildung 5.13a aller Messungen überein. Die größten Unterschiede bezüglich den modalen Dämpfung aus den einzelnen Messungen ergeben sich im niederfrequenten Bereich. Da die Dämpfung aus den Werten mehrerer einzelner Dispersionsabbildungen, wie in Abschnitt 5.3 beschrieben ist, approximiert wird, haben die insbesondere im niederfrequenten Bereich auftretenden Artefakte in den Dispersionsabbildungen einen nicht unerheblichen Einfluss. Bereits in Abbildung 4.18a zeigen sich die Artefakte bei kleinen Frequenzen und Kreiswellenzahlen, wohingegen sich diese Artefakte bei Messung ohne erneute Ankopplung des Empfangswandlers in den zugehörigen Dispersionsabbildungen (vgl. Abbildung 4.18b) quasi gleich verhalten. Eine geringere Variation der Dämpfung zeigt sich bei jeweils gleicher Ankopplung des Empfangswandlers bei allen drei Messungen in Abbildung 5.13b.

Insgesamt lässt sich daraus schließen, dass einzelne Dämpfungswerte je nach Ankopplung mehr oder weniger stark variieren können. Trotz einer gewissen Schwankungsbreite ist diese klein genug, um diese über den gesamten Frequenzbereich hinweg zu vernachlässigen.

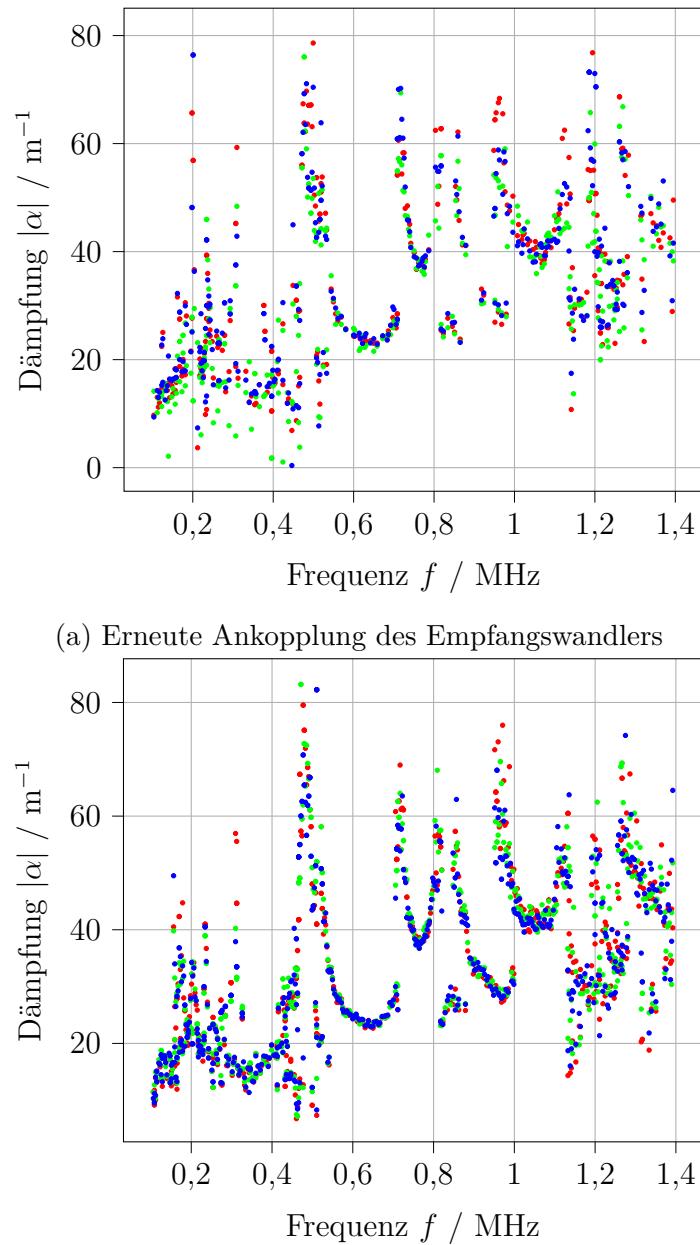


Abbildung 5.13: Reproduzierbarkeit der Dämpfung dreier Messungen an PEEK: Messung 1 in Rot, Messung 2 in Grün, Messung 3 in Blau

5.4 Parameterstudie viskoelastischer Materialparameter

Zur Entwicklung einer geeigneten Optimierungsstrategie ist es unerlässlich, die Änderungen der Dispersionscharakteristik in Abhängigkeit der geänderten Parameter zu betrachten. Dazu werden die komplexen Kreiswellenzahlen in Real- und Imaginärteil sowie deren Verhältnis zueinander in einem Arbeitspunkt untersucht.

Tabelle 5.3: Materialparameter im verwendeten Arbeitspunkt

	Modul i/GPa	$\tau_{\sigma_i} / \mu\text{s}$	d_i	a_i
Kompressionskomponente ($i = K$)	6,23	0,2	1,03	1,0
Scherkomponente ($i = \mu$)	1,48	0,6	1,09	0,99

Als Arbeitspunkt für die Materialparameter werden beispielhaft die in Tabelle 5.3 angegebenen Parameter unter Verwendung des fraktionalen Zener-Modells jeweils für Kompressions- und Scherbewegungen nach Gleichung 3.17 betrachtet. Die Parameter werden jeweils um $\pm 5\%$ verändert. Überschreitet ein Parameter dabei seine physikalische Grenze ($d \geq 1$, $a \leq 1$), wird dieser auf die jeweilige Grenze gesetzt.

Die resultierenden Änderungen im Realteil sind in Abbildung 5.16, des Imaginärteils in Abbildung 5.14 und Abbildung 5.15 dargestellt. Zusätzlich wird das Verhältnis von Imaginär- zu Realteil in Abbildung 5.17 und 5.18 gezeigt.

Wie bereits in Abschnitt 4.8 zeigt sich im Realteil der Kreiswellenzahl in Abbildung 5.16 erneut der Unterschied zwischen Kompressions- und Scherparametern. Während die Scherparameter alle Moden beeinflussen, wirken sich die Kompressionsparameter nur auf die Moden unterhalb der Geraden $k_L(\omega) = \omega/c_L$ aus, wenn der Realteil der nun komplexen Kreiswellenzahl betrachtet wird. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Schermodul sowohl Longitudinal- als auch Transversalwellen beeinflusst, während der Kompressionsmodul nur Longitudinalwellen beeinflusst. Das resultierende Dispersionsdiagramm besteht aus einer Verkopplung von Longitudinal- und Transversalwellen. Die Unterscheidung der Moden lässt sich demzufolge auch im Imaginärteil der Kreiswellenzahl in Abbildung 5.14 und 5.15 beobachten. In dem Beispiel wirken sich die Scherkomponenten grundsätzlich auf den Imaginärteil der Kreiswellenzahlen bzw. die Dämpfung aller Moden aus. Insbesondere werden hier die Moden mit einer Dämpfung $|\alpha| = |\text{Im}\{k\}| \geq 60 \text{ m}^{-1}$ beeinflusst, welche kaum von den

Kompressionsparametern abhängen. Hierbei handelt sich um die Moden mit $\text{Re}\{k\} > \omega/c_L$. Die Beeinflussung des Imaginärteils der Kreiswellenzahl durch die Kompressionsparameter beschränkt sich im Wesentlichen auf Moden mit $|\text{Im}(k)| < 60 \text{ m}^{-1}$, bei denen es sich um die Moden mit $k \leq \omega/c_L$ handelt. Generell zeigt sich in Abbildung 5.14, dass der Imaginärteil der Kreiswellenzahl sehr sensitiv auf die Verhältnisse der Zeitkonstanten d_K und d_μ ist. Der Einfluss auf den Imaginärteil ist dabei so groß, dass sich der Realteil der Kreiswellenzahl mit verändert (vgl. Abbildung 5.16). Bereits eine kleine prozentuale Änderung der Parameter d_μ und d_K bewirkt eine sehr große Änderung im Imaginärteil, sodass eine Erhöhung dieser eine größere Dämpfung mit sich zieht.

Ein größerer Kompressions- bzw. Schermodul wirkt dem wiederum entgegen. Zwar müssten Kompressions- bzw. Schermodul prozentual deutlich stärker erhöht werden, um die Auswirkungen der größeren Zeitkonstanten-Verhältnisse auf den Imaginärteil der Wellenzahlen auszugleichen, jedoch ist dies auf den unterschiedlichen Wertebereich zurückzuführen, welcher bei den Moduln K und μ bei einigen GPa liegt, während die Zeitkonstanten-Verhältnisse d_K und d_μ nahe eins liegen.

Allerdings beeinflussen die Dämpfungsparameter nicht ausschließlich den Imaginärteil, sondern auch den Realteil der Wellenzahlen, sodass eine Optimierung von statischen und Dämpfungsparametern nicht getrennt möglich ist.

Wird der Realteil der Kreiswellenzahl aus Abbildung 5.16 hinzugezogen, zeigt sich, dass sich die Moduln und die Zeitkonstanten-Verhältnisse zwar im Imaginärteil entgegenwirken, den Realteil hingegen um einen ähnlichen Prozentsatz verkleinern, wenn die Parameter um den gleichen Prozentsatz erhöht werden.

Eine Vergrößerung der Relaxationszeitkonstanten führt zu einer Verringerung des Imaginärteils der Wellenzahlen. Demnach können sie grundsätzlich einer Erhöhung der Zeitkonstanten-Verhältnisse entgegen wirken.

Absolut gesehen ist die Änderung der Relaxationszeitkonstanten weiterhin so klein, dass diese kaum Auswirkungen auf den Realteil hat (vgl. Abbildung 5.16), was sich bei Änderungen der Zeitkonstanten um eine Zehnerpotenz ändert. Die Ableitungsordnungen weisen ebenfalls kaum bis keinen Einfluss auf den Realteil der Wellenzahlen auf (vgl. Abbildung A.7). Da beide Ableitungsordnungen in diesem Arbeitspunkt nahe eins liegen, wirft das Beispiel die Frage auf, ob diese überhaupt notwendig zu betrachten sind bzw. überhaupt bestimmt werden können, da die Beeinflussung des Imaginärteils ähnlich zu der durch die Relaxationszeitkonstante liegt. Bei genauerer Betrachtung von Abbildung 5.15 fällt im

5.4 Parameterstudie viskoelastischer Materialparameter

Tabelle 5.4: Auswirkungen bei Erhöhung der Parameter auf die komplexen Kreiswellenzahlen: Die in Klammern gesetzten Pfeile, bedeuten, dass sich die Auswirkungen nur marginal zeigen.

	$\text{Re}\{k\}$	$\text{Im}\{k\}$	$\text{Im}\{k\}/\text{Re}\{k\}$
K	↑	↓	↑
μ	↓	↓	↑
d_K	↓	↑	↑
d_μ	↓	↑	↑
τ_{σ_K}	(↓)	↓	(↓)
τ_{σ_μ}	(↓)	↓	↓ ($f < 0,3 \text{ MHz}$) ↑ $f > 0,3 \text{ MHz}$
a_K	(↓)	↑	(↑)
a_μ	(↓)	↑ ($f < 1 \text{ MHz}$) ↓ $f > 1 \text{ MHz}$	↑ ($f < 0,8 \text{ MHz}$) ↓ $f > 0,8 \text{ MHz}$

direkten Vergleich auf, z.B. am Beispiel der Kompressionskomponenten, dass die Relaxationszeitkonstante τ_{σ_K} Moden im Bereich $|\text{Im}\{k\}| < 60 \text{ m}^{-1}$ und $f > 1 \text{ MHz}$ beeinflusst, während sich die Ableitungsordnung a_K auf den Bereich $|\text{Im}\{k\}| < 60 \text{ m}^{-1}$ und $0,5 \text{ MHz} < f < 1,5 \text{ MHz}$ beschränkt.

Die Scherparameter wirken sich im Gegensatz zu den Kompressionsparametern ebenfalls auf die Moden mit $|\text{Im}\{k\}| \geq 60 \text{ m}^{-1}$ aus. Hier wirkt sich die Ableitungsordnung kaum auf die Moden um $0,8 \text{ MHz}$ aus. Bei Moden mit $f < 0,8 \text{ MHz}$, sorgt ein größere Ableitungsordnung a_μ dafür, dass $\text{Im}\{k\}$ steigt. Im Bereich $f > 0,8 \text{ MHz}$ verringert sich $\text{Im}\{k\}$.

Zusammengefasst sind die Auswirkungen der Parameter auf Real- und Imaginärteil in Tabelle 5.4.

Aufgrund der Verkopplung zwischen Real- und Imaginärteil wird in Abbildung 5.17 und 5.18 das Verhältnis von Imaginär- zu Realteil der Wellenzahl dargestellt. Dabei zeigt sich, dass dieses Verhältnis sensitiv auf die Scherkomponenten ist. Hier zeigt sich der unterschiedliche Frequenzbereich des Einflusses zwischen τ_{σ_μ} und a_μ signifikanter. Insbesondere das Verhältnis $\text{Im}\{k\}/\text{Re}\{k\}$ der Grundmode wird stark von der Ableitungsordnung a_μ beeinflusst, welche sich in Messungen als besonders leicht detektierbar zeigt.

Daher ist eine Optimierung des Verhältnisses $\text{Im}\{k\}/\text{Re}\{k\}$ zur Bestimmung der Dämpfungsparameter sinnvoll. Wie bereits erwähnt sind die Einflüsse sowohl der statischen als auch der Dämpfungsparameter miteinander verkoppelt. Leichter fällt jedoch eine Trennung der Modellparameter

5 Inverses Verfahren zur Identifikation viskoelastischer Materialparameter

zur Beschreibung des Scher- und Kompressionsverhaltens, da für die Optimierung von letzteren nur Moden mit $\operatorname{Re}\{k\} \leq \omega/c_L$ betrachtet werden müssen, während dessen Einfluss auf die Moden mit $\operatorname{Re}\{k\} > \omega/c_L$ entfällt. Somit können mit den Moden, die die Bedingung $\operatorname{Re}\{k\} > \omega/c_L$ erfüllen, ausschließlich Modellparameter zur Beschreibung des Scherverhaltens bestimmt werden.

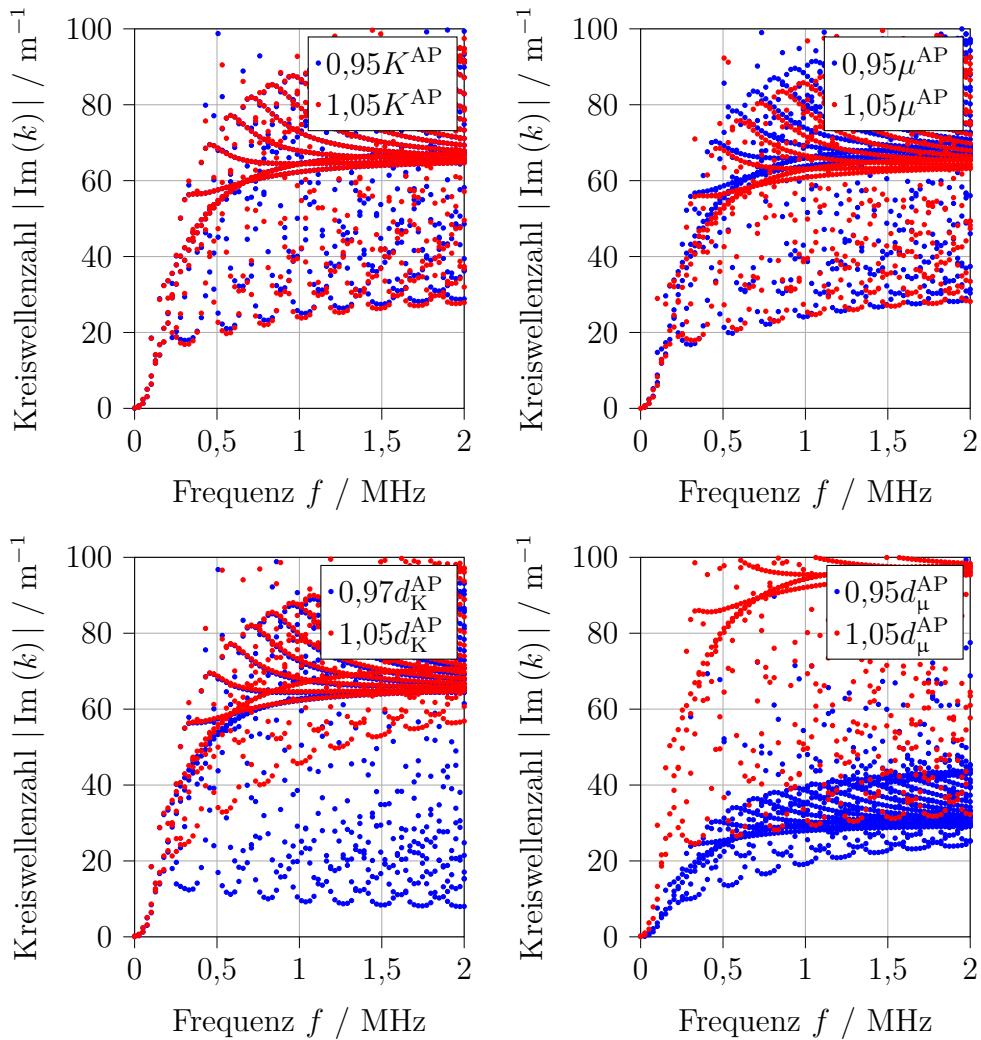


Abbildung 5.14: Imaginärteil der Kreiswellenzahl bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Verhältnisse der Zeitkonstanten

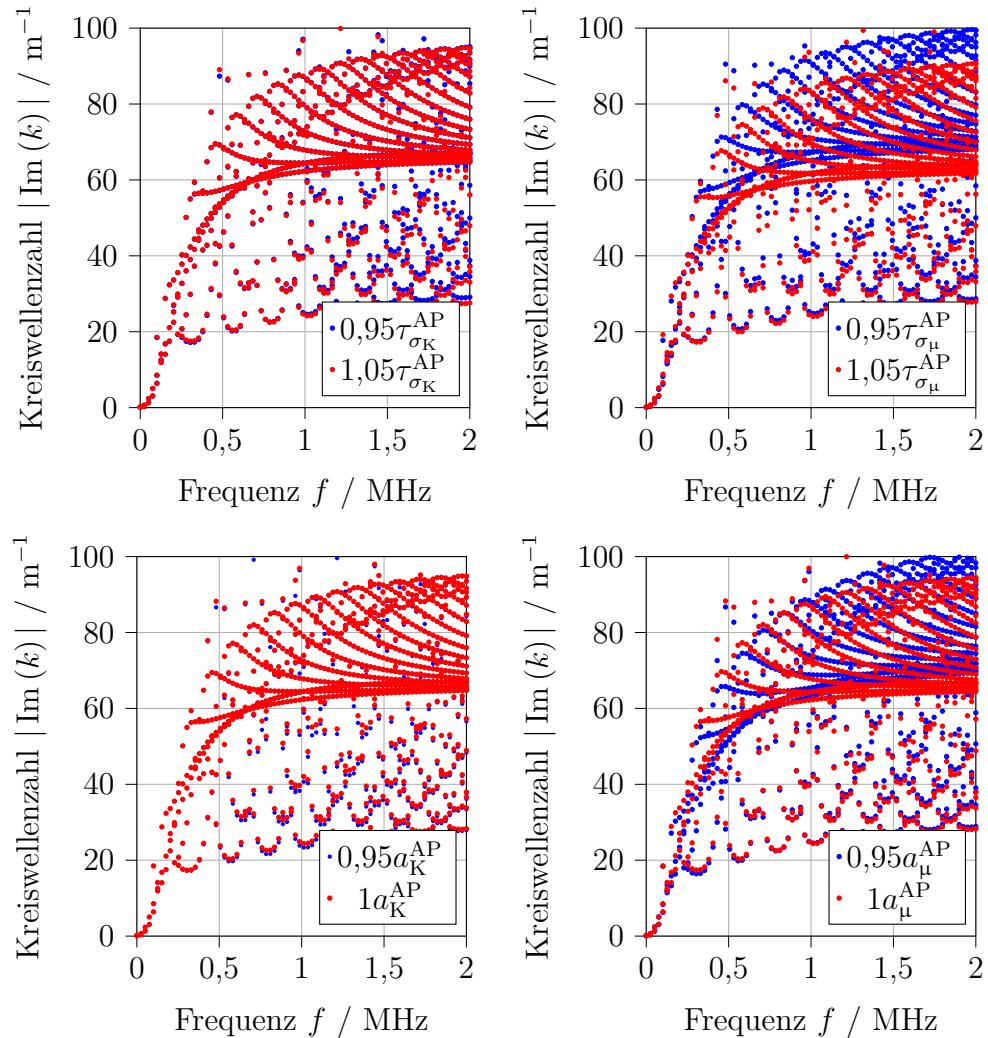


Abbildung 5.15: Imaginärteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten und Ableitungsordnungen

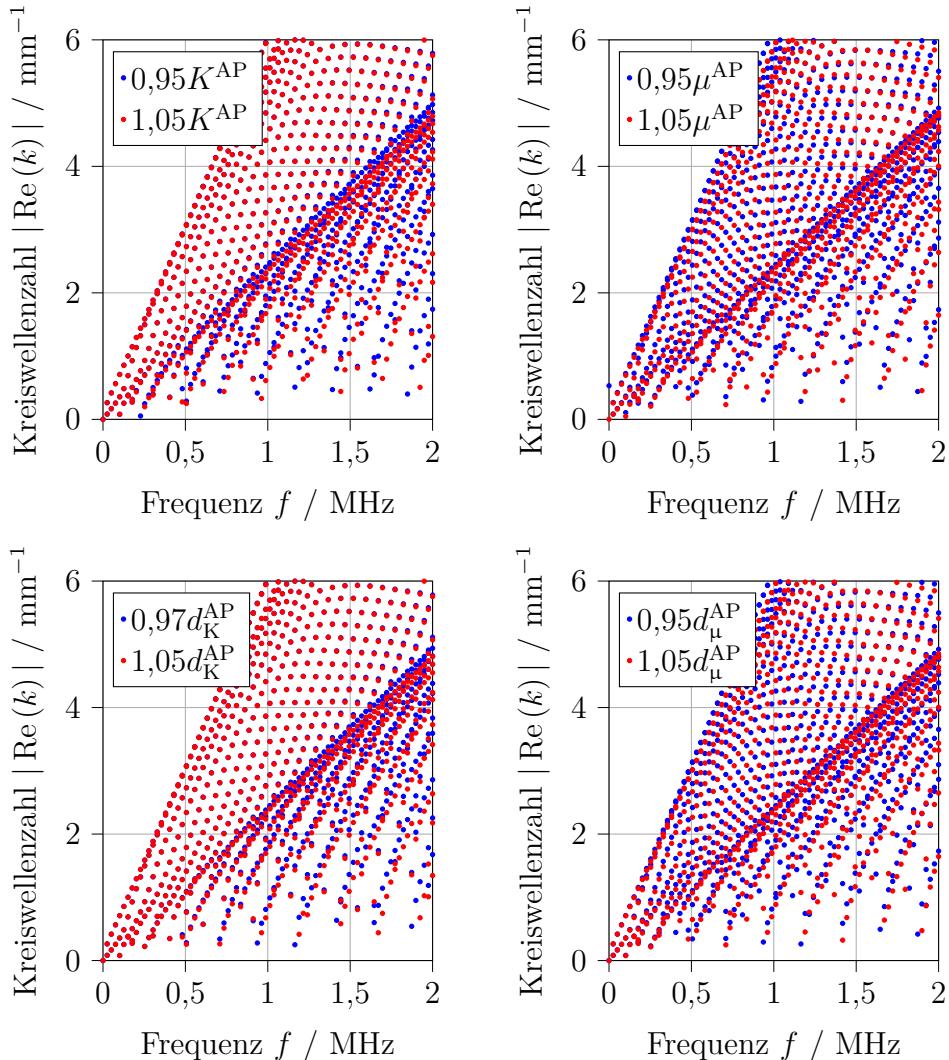


Abbildung 5.16: Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Zeitkonstanten-Verhältnisse

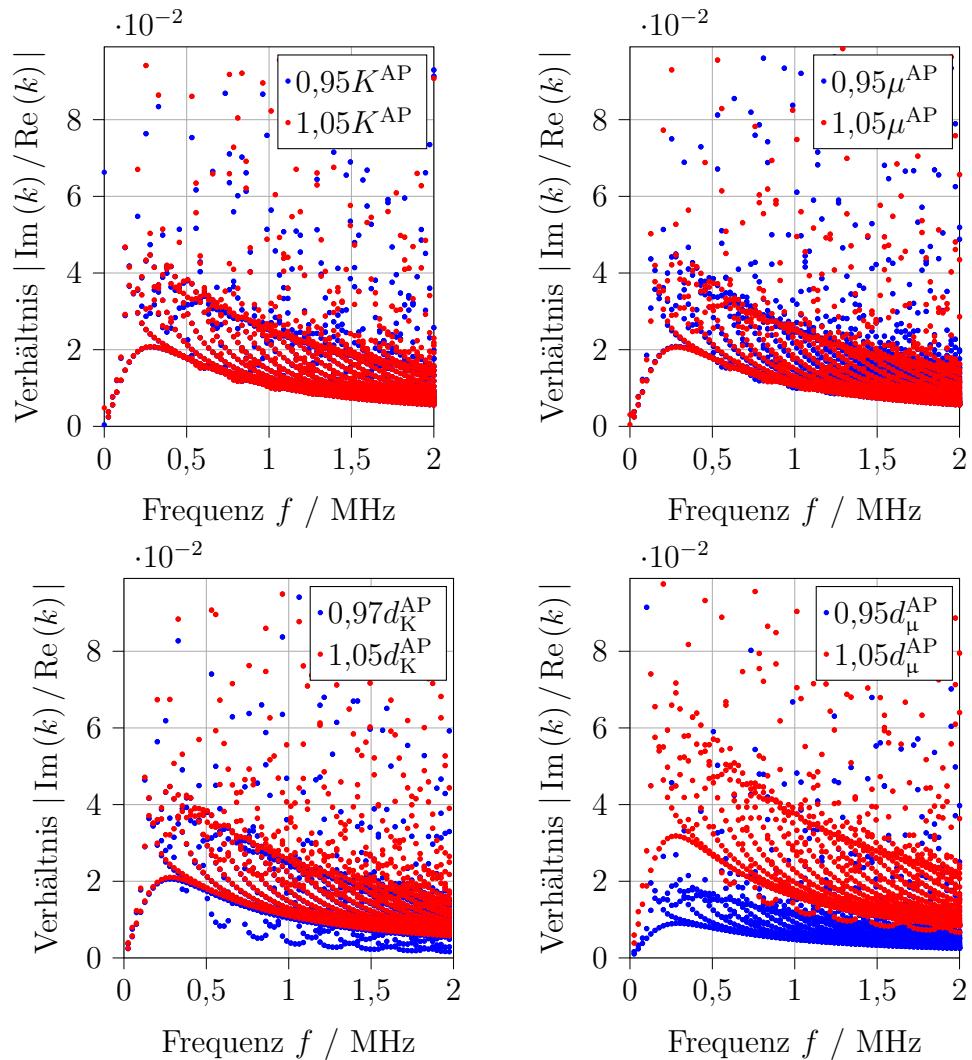


Abbildung 5.17: Verhältnis von Imaginär- zu Realteil der Kreiswellenzahlen bei Änderung von Kompressions- und Schermodul sowie der Zeitkonstanten-Verhältnisse

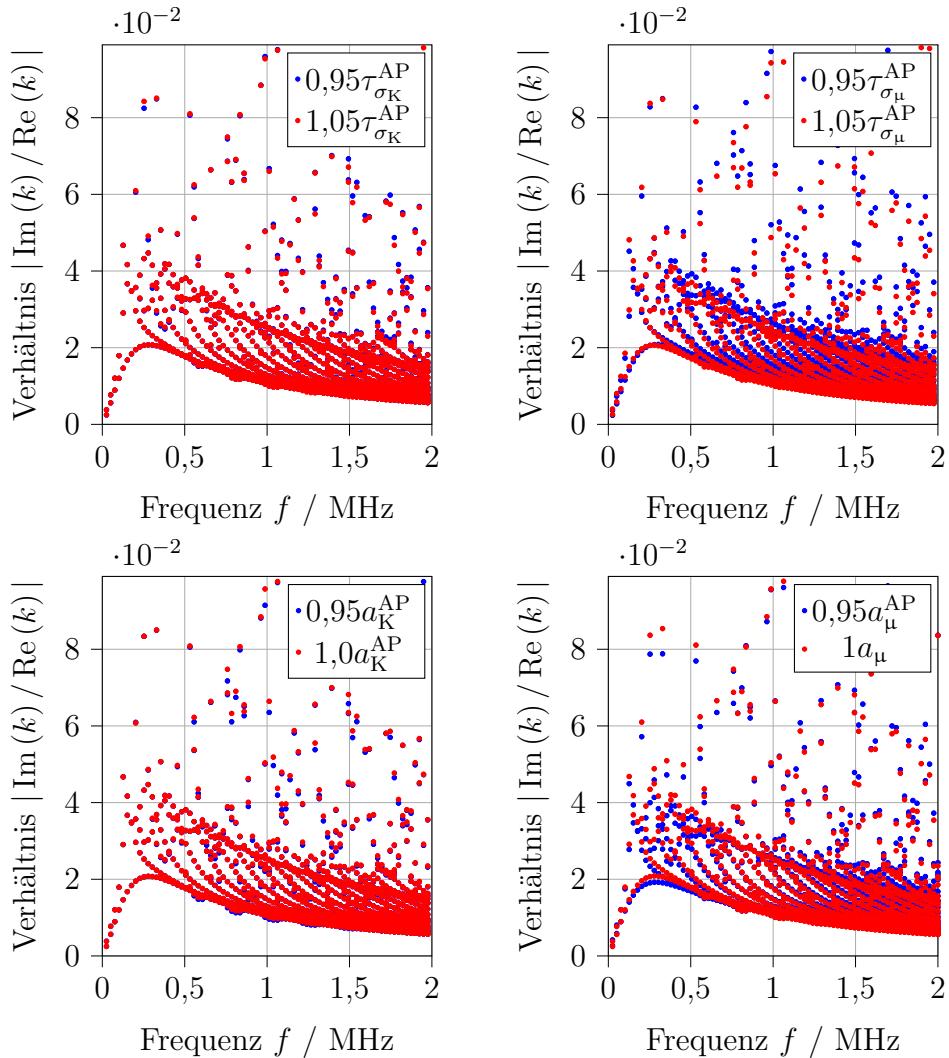


Abbildung 5.18: Verhältnis Imaginärteil/Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten und Ableitungsordnungen

5.5 Startwerte für Dämpfungsparameter

Die Identifikation der viskoelastischen Materialparameter erfolgt mit einem lokalen Optimierungsverfahren, welches Startwerte benötigt. Aus Literaturdaten werden Startwerte für die statische Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeit bzw. Kompressions- und Schermodul ermittelt. Datenblätter enthalten in der Regel den Elastizitätsmodul E bestimmt aus Zugversuchen. Der dazu benötigte Wert für die Poissonzahl ν ist hingegen weniger häufig zu finden. Da der Wertebereich der Poissonzahl bei Kunststoffen im Bereich um ca. 0,4 liegt, kann dieser Wert als Schätzwert bei Fehlen jeglicher Literaturdaten genutzt werden.

Weiterhin werden die effektiven Schallgeschwindigkeiten unter Annahme eines elastischen Materialmodells nach Kapitel 4 bestimmt. Diese werden als Schätzwerte der Schallgeschwindigkeiten für $\omega \rightarrow \infty$ angenommen.

Da die Scherparameter, wie in Abschnitt 5.4 gezeigt, alle Moden beeinflussen, wird zunächst ein fraktionales Zener-Modell ohne Aufteilung nach Kompressions- und Scherkomponenten, genutzt. Dabei werden nur die Parameter des Dämpfungsmodells der Scherkomponenten verwendet. Aus dem Modell ergibt sich durch Grenzwertbildung der Zusammenhang zwischen statischer und dynamischer Schallgeschwindigkeit bei der Kreisfrequenz ω im Fall der Transversalwellengeschwindigkeit mit

$$\begin{aligned} c_T(\omega) &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1 + d_\mu (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}{1 + (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}} \right\} c_{T_0} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1 + d_\mu (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}{1 + (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}} \right\} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\gamma_\mu} \right\} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Als Grenzwerte gelten $c_T(\omega \rightarrow 0) = c_{T_0}$ und $\tilde{c}_T(\omega \rightarrow \infty) = \sqrt{d_\mu} c_T$. Der Schätzwert für die Transversalwellengeschwindigkeit bei $c_T(\omega \rightarrow \infty) = c_{T_\infty}$ und Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_L(\omega \rightarrow \infty) = c_{L_\infty}$ wird aus der Identifikation eines elastischen Materialmodells bestimmt (vgl. Kapitel 4). Zusammen mit der statischen Transversalwellengeschwindigkeit c_{T_0} aus

5.5 Startwerte für Dämpfungsparameter

der Literatur, wird das Zeitkonstanten-Verhältnis d_μ aus

$$d_\mu = \frac{c_{T_\infty}^2}{c_{T_0}^2} \quad (5.7)$$

berechnet. Die Relaxationszeitkonstante τ_{σ_μ} und die Ableitungsordnung a_μ werden anschließend durch numerisches Lösen der Rayleigh-Lamb-Gleichung ermittelt. Dies hat den Vorteil, dass die in der Messung detektierten Frequenzen und komplexen Wellenzahlen direkt in die Rayleigh-Lamb-Gleichung eingesetzt werden können, wodurch diese direkt als Kostenfunktion fungiert. Dazu werden zunächst die Moden aus der Messung extrahiert (vgl. Abbildung 5.19). Weiterhin wird die zugehörige Dämpfung, welche dem negativen Imaginärteil der Kreiswellenzahl entspricht, nach Abschnitt 5.3 bestimmt (vgl. Abbildung 5.19). Aufgrund von verbliebenden Artefakten aus der Signalvorverarbeitung (vgl. Abschnitt 4.6) in den Messdaten nahe des Koordinatenursprungs ist die Extraktion der Frequenz-Wellenzahl-Paaren aus den Messdaten erschwert, weil Frequenz-Wellenzahl-Paare erkannt werden, die keine Mode repräsentieren. Daher werden aus Abbildung 5.19a nur Wellenzahlen oberhalb einer Frequenz von 0,1 MHz berücksichtigt.

Zusammen mit dem extrahierten Realteil der Kreiswellenzahl ergeben sich mit $k = \operatorname{Re}\{k\} - j\alpha = \operatorname{Re}\{k\} + j\operatorname{Im}\{k\}$ die komplexen Kreiswellenzahlen zu den zugehörigen Kreisfrequenzen ω , welche zusammen mit dem Materialmodell in die Rayleigh-Lamb-Gleichung eingesetzt werden, um diese zu minimieren. Dabei wird der Betrag der Rayleigh-Lamb-Gleichung direkt als Kostenfunktion genutzt, da sie bei optimalem Parametersatz an den eingesetzten komplexen Kreiswellenzahlen und Kreisfrequenzen Nullstellen besitzt. Somit wird der Betrag der Rayleigh-Lamb-Gleichung nach Gleichung 2.43 in der Form von

$$\epsilon = \left| \frac{\tan\left(\frac{t_h}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\tilde{c}_T(\omega)^2} - k^2}\right)}{\tan\left(\frac{t_h}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\tilde{c}_L(\omega)^2} - k^2}\right)} + \left(\frac{4k^2\sqrt{\frac{\omega^2}{\tilde{c}_L(\omega)^2} - k^2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\tilde{c}_T(\omega)^2} - k^2}}{\left(\frac{\omega^2}{\tilde{c}_T(\omega)^2} - 2k^2\right)^2} \right)^{\pm 1} \right| \quad (5.8)$$

als Kostenfunktion minimiert, sodass dieser für alle detektierten Frequenz-(komplexen) Wellenzahl-Paare möglichst klein ($\rightarrow 0$) wird. Mit der Verwendung eines globalen Suchalgorithmus wie der *Differential Evolution* [SP97] werden keine Startwerte benötigt. Als Materialmodell wird zur Schätzung

der Scherkomponenten ein fraktionales Zener-Modell mit

$$\tilde{\mathbf{C}}(\omega) = \mathbf{C} \frac{1 + d_\mu (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}}{1 + (j\omega \tau_{\sigma_\mu})^{a_\mu}} = \mathbf{C} \gamma_\mu(\omega) \quad (5.9)$$

verwendet. Der Parameter d_μ wird bei der Schätzung der weiteren Parameter als fest angenommen, während die Relaxationszeitkonstante τ_{σ_μ} und die Ableitungsordnung a_μ variiert werden.

Da der frequenzabhängige Term $\gamma_\mu(\omega)$ im Wesentlichen durch d_μ beeinflusst wird, haben kleine Änderungen von τ_{σ_μ} und a_μ nur geringen Einfluss. Bei größeren Änderungen beider Parameter haben diese trotzdem Auswirkungen auf den Realteil der komplexen Kreiswellenzahl. Um diesen jedoch gleich zu behalten, muss der Schermodul angepasst werden.

Daher wird der statische Schermodul während der Variation von τ_{σ_μ} und a_μ über

$$\mu = \frac{c_{T_\infty}^2 \rho}{\operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\gamma_\mu(\omega)} \right\}^2} \quad (5.10)$$

aktualisiert, wobei als Frequenz die größte in der Identifikation effektiver, elastischer Parameter berücksichtigte Frequenz angenommen wird. Um zudem möglichst unabhängig von den Kompressionsparametern zu sein, werden nur die Moden oberhalb der in Abbildung 5.19 eingezeichneten roten Geraden $k_L(\omega) = \omega/c_{L_\infty}$ verwendet, da diese Bereiche der Moden nicht von den Kompressionsparametern beeinflusst werden (vgl. Abschnitt 5.4).

Die Moden-Bereiche unterhalb der roten Geraden in Abbildung 5.19 werden nun für die anschließende Schätzung der Parameter des Dämpfungsmodells der Kompressionskomponenten genutzt. Diese erfolgt analog zu denen der Scherkomponente, allerdings nun mit einem nach Kompressions- und Scherbewegungen aufgeteilten fraktionalem Zener-Modell nach Gleichung 3.17. Die bereits zuvor verwendete statische Longitudinalwellengeschwindigkeit c_{L_0} sowie die Longitudinalwellengeschwindigkeit c_{L_∞} aus der elastischen Identifikation dienen der Schätzung des Zeitkonstanten-Verhältnisses, wenn das Modell eine Zerlegung nach Longitudinal- und Transversalbewegungen nutzt. Bei der hier verwendeten Zerlegung nach Kompressions- und Scherbewegungen hingegen wird die Longitudinalwellengeschwindigkeit c_{L_∞} in Kompressions- und Schereinflüsse zerlegt, sodass sich aus

$$c_L(\omega) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{K \gamma_K(\omega) + \frac{4}{3} \mu \gamma_\mu(\omega)}{\rho}} \right\} \quad (5.11)$$

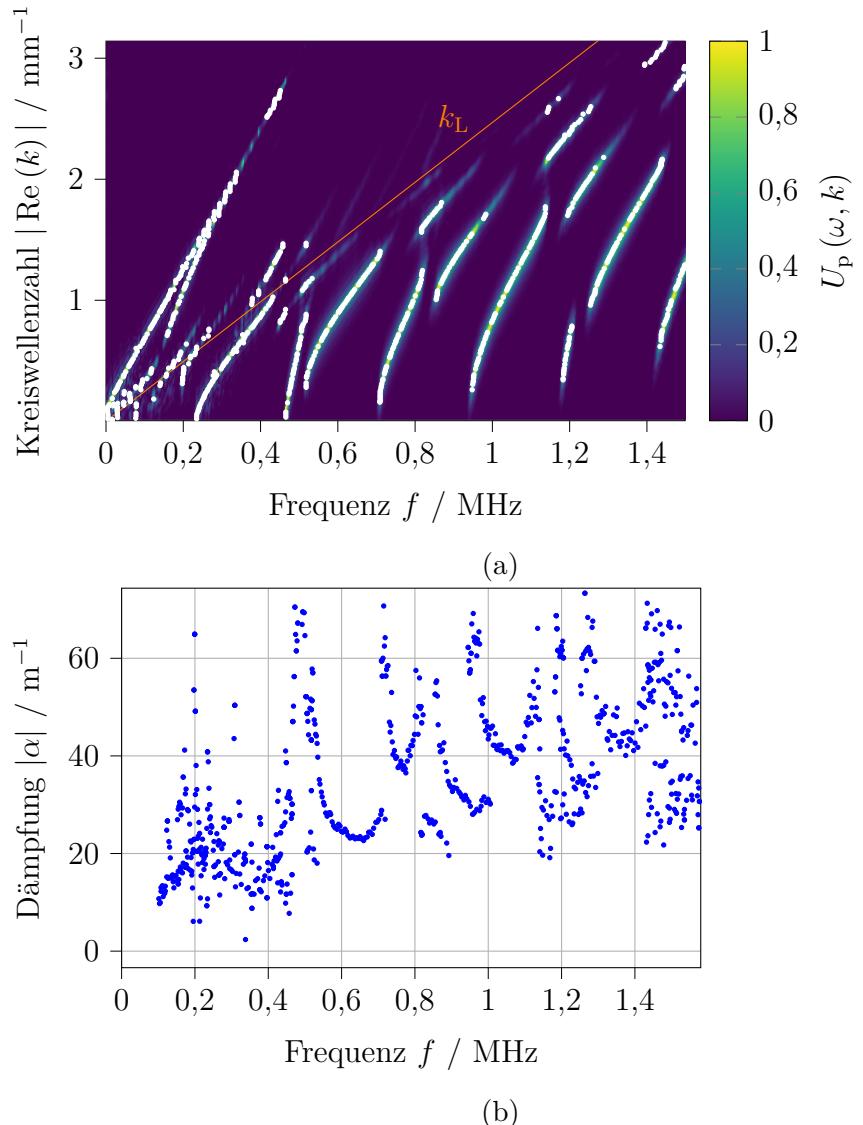


Abbildung 5.19: Detektierte Moden aus der Messung sowie deren Dämpfung

für $\omega \rightarrow \infty$

$$d_K = \frac{c_{L_\infty}^2 \rho - \frac{4}{3} \mu d_\mu}{K} \quad (5.12)$$

ergibt. Relaxationszeitkonstante τ_{σ_K} und Ableitungsordnung a_K werden analog zu den Scherkomponenten durch Minimierung des Betrags der Rayleigh-Lamb-Frequenz-Gleichung geschätzt. Während der Schätzung wird der Kompressionsmodul mit den zuvor geschätzten Scherkomponenten und Gleichung 5.11 durch

$$K = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho c_{L_\infty}^2 - \frac{4}{3} \mu \gamma_\mu(\omega)}{\gamma_K(\omega)} \right\} \quad (5.13)$$

aktualisiert. [JCH22]

Exemplarische Auswertung einer PEEK-Probe: Am Beispiel einer PEEK-Probe ergeben sich mit einem Elastizitätsmodul von $E = 4,1 \text{ GPa}$ [CD21; RBO07] und einer Poissonzahl von $\nu = 0,39$ [PPD21] aus der Literatur sowie der messtechnisch ermittelten Dichte $\rho = 1310 \text{ kg m}^{-3}$ die statischen Schallgeschwindigkeiten

$$c_{L_0} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = 2998 \text{ m s}^{-1} \quad (5.14)$$

$$c_{T_0} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = 1062 \text{ m s}^{-1}, \quad (5.15)$$

sowie der statische Kompressions- und Schermodul

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 6,21 \text{ GPa}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1,48 \text{ GPa}. \quad (5.16)$$

Aus der Identifikation eines ideal-elastischen Modells nach Kapitel 4 werden $c_{L_\infty} = 2558 \text{ m s}^{-1}$ und $c_{T_\infty} = 1110 \text{ m s}^{-1}$ bestimmt. Daraus ergibt sich mit Gleichung 5.7 das Zeitkonstanten-Verhältnis der Scherkomponente $d_\mu = c_{T_\infty}^2/c_{T_0}^2 = 1,09$. Minimierung des Betrags der Rayleigh-Lamb-Gleichung unter Verwendung der Moden oberhalb der roten Geraden in Abbildung 5.19a und der zugehörigen modalen Dämpfung liefern $\tau_{\sigma_\mu} = 0,59 \mu\text{s}$ und $a_\mu = 1$. Der Schermodul bleibt quasi unverändert. Mit dem statischen Kompressions- und Schermodul sowie den bestimmten Dämpfungsparametern der Scherkomponenten ergibt sich $d_K = 1,03$ aus Gleichung 5.12. Die zugehörige Relaxationszeitkonstante $\tau_{\sigma_K} = 0,21 \mu\text{s}$ und Ableitungs-

ordnung $a_K = 1$ ergeben sich durch die betragsmäßige Minimierung der Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung unter Verwendung des Dämpfungsmodells nach Gleichung 3.17 und der Moden unterhalb der roten Gerade in Abbildung 5.19a, wobei der Kompressionsmodul mittels Gleichung 5.13 zu $K = 6,23 \text{ GPa}$ aktualisiert wird. Damit ergibt sich eine gegenüber dem berechneten Literaturwert veränderte statische Longitudinalwellengeschwindigkeit von $c_{L_0} = 2502 \text{ m s}^{-1}$.

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Optimierungsstrategien zur Identifikation der Modellparameter eines fraktionalen Zener-Modells basierend auf dem Dämpfungsverhalten des Plattenwellenleiters am Beispiel von Polyetheretherketon (PEEK) verglichen. Während in Abschnitt 4.10 zur Identifikation der effektiven, elastischen Materialparameter die gesamte Dispersionsabbildung der Messdaten genutzt wird, führt die Nutzung der gesamten Dämpfungsabbildung zu Problemen, da nicht zwischen Moden mit einer modalen Dämpfung von nahezu null und nicht detektierten bzw. nicht angeregten Moden unterschieden werden kann. Darum werden die Frequenz-Wellenzahl-Paare der Moden aus der Dispersionsabbildung, wie bereits zur Startwertschätzung, mittels Maximumsuche extrahiert. Die zugehörige Dämpfung der Moden und somit der Imaginärteil der Wellenzahl wird der Dämpfungsabbildung (vgl. Abbildung 5.6) entnommen.

5.6.1 Aspekte der Optimierung

Die Verwendung des ableitungsfreien BOBYQA (*Bound Optimization BY Quadratic Approximation* [Pow09]) als Optimierungsalgorithmus ermöglicht die Berücksichtigung der physikalischen Parametergrenzen von $0 \leq a_K, a_\mu \leq 1$ und $d_K, d_\mu \geq 1$, ohne dass Informationen über Differenzierbarkeit der Kostenfunktion notwendig sind. Für die Kostenfunktion ergeben sich allein aufgrund der Komplexwertigkeit der Wellenzahlen verschiedene Varianten zur Bestimmung des Parametervektors $\mathbf{p} = [K, \mu, \tau_{\sigma_K}, d_K, \tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_K, a_\mu]$, welche im nachfolgenden Abschnitt beschrieben werden.

Kostenfunktionen

Da in Kapitel 4 eine Optimierung auf den Realteil der Kreiswellenzahl erfolgt, liegt es nahe hier den Imaginärteil zu betrachten, sodass zunächst die quadratische Differenz der Imaginärteile (Dämpfung) aller N detektierten Kreiswellenzahlen aus der Messung k_{Mes} und den simulativ berechneten k_{sim} als Kostenfunktion

$$\epsilon_{\text{Im}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \text{Im}\{k_{\text{Mes}_i}\} \right| - \left| \text{Im}\{k_{\text{Sim}_i}\} \right|^2 U_p(\omega_j, k_i) \quad (5.17)$$

verwendet wird. Dabei werden die Beträge der Imaginärteile betrachtet, weil das Vorzeichen die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt. Dieses ist irrelevant, da die Abstrahlung der Wellen symmetrisch zur Anregungslinie erfolgt. Der Faktor $U_p(\omega_j, k_i)$ entspricht dem Wert der Dispersionsabbildung (vgl. Abbildung 4.17) an dem entsprechenden Frequenz-Wellenzahl-Paar und dient der Regularisierung der Optimierung. Frequenz-Wellenzahl-Paare mit hohen Werten $U_p(\omega_j, k_i)$ in der vorverarbeiteten Dispersionsabbildung werden stärker berücksichtigt als solche mit niedrigen. Dadurch wird die Gewichtung falsch detekтирter kleiner, lokaler Maxima in der Dispersionsabbildung in Abbildung 5.19a, die keine Mode repräsentieren, geringer. Auf den Verlauf der Kostenfunktion hat der Wert der Dispersionsabbildung $U_p(\omega_j, k_i)$ als Regularisierungsfaktor dementsprechend kaum Einfluss, wenn die Moden aus der Dispersionsabbildung leicht extrahiert werden können. Auch werden, aufgrund der spaltenweisen Normierung in der Vorverarbeitung (vgl. Abschnitt 4.6) zur Modendetektion, Moden höherer Ordnung nicht weniger gewichtet als Moden niedriger Ordnung, obwohl letztere in den Rohdaten weitaus höhere Energien und somit höhere Werte $|U(\omega_j, k_i)|$ in der unverarbeiteten Dispersionsabbildung aufweisen. Damit wird die höhere Sensitivität von Moden höherer Ordnung auf die Materialparameter nicht aufgehoben.

Alternativ können z.B. die Verhältnisse $\text{Im}\{k\}/\text{Re}\{k\}$ miteinander verglichen werden, um die Sensitivität auf bestimmte Parameter z.B. der Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_μ} zu erhöhen. So ist eine Änderung der Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_μ} um $\pm 5\%$ aufgrund ihres kleinen absoluten Wertebereichs kaum in den detektierten Moden im niederfrequenten Bereich bis 1 MHz bemerkbar (vgl. Abbildung 5.15 und 5.19), bei Betrachtung des Verhältnisses von Imaginär- zu Realteil jedoch schon (vgl. Abbildung 5.18).

In dem Fall dient mit

$$\epsilon_V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\text{Im}\{k_{\text{Mes}_i}\}}{\text{Re}\{k_{\text{Mes}_i}\}} \right\|^2 - \left\| \frac{\text{Im}\{k_{\text{Sim}_i}\}}{\text{Re}\{k_{\text{Sim}_i}\}} \right\|^2 \quad (5.18)$$

die mittlere quadratische Differenz der Verhältnisse als Kostenfunktion. Auf den Wert der Dispersionsabbildung $U_p(\omega_j, k_i)$ als Faktor in der Kostenfunktion wie in Gleichung 5.17 wird aufgrund des kleinen Wertebereichs in Gleichung 5.18 verzichtet. Da alle Wellenzahlen mit $\text{Im}\{k_i\} > \text{Re}\{k_i\}$ nicht betrachtet werden (vgl. Gleichung 5.3), ergibt sich ein Wertebereich für das Verhältnis $\text{Im}\{k_i\}/\text{Re}\{k_i\}$ zwischen 0 und 1. Die Werte der verarbeiteten Dispersionsabbildung $U_p(\omega_j, k_i)$ liegen aufgrund dessen Normierung ebenfalls im Wertebereich zwischen 0 und 1. Eine Multiplikation beider würde die Werte der Kostenfunktion weiter verkleinern, was zu einer Verringerung des Gradienten der Kostenfunktion führen würde. Existieren im Bereich abseits der Moden zu viele detektierte lokale Maxima, kann der Regularisierungsfaktor U_p trotzdem hinzugezogen werden oder der Gradient durch Multiplikation der Kostenfunktion mit einem Faktor > 1 vergrößert werden. Aufgrund der Verwendung eines ableitungsfreien Optimierungsalgorithmus ist dies jedoch nicht notwendig.

Aufteilung des Dispersionsdiagramms

Neben der Verwendung unterschiedlicher Kostenfunktionen kann der betrachtete Frequenz- und Wellenzahl-Bereich im Dispersionsdiagramm am Vorbild der Startwertschätzung aufgeteilt werden. Wie bereits bei der Startwertschätzung wird in dem Fall der Bereich oberhalb der Geraden $k_L = \omega/c_{L\infty}$ (vgl. Abbildung 5.19a) genutzt, um zunächst die Scherkomponenten und der Bereich unterhalb dieser Geraden um die Kompressionskomponenten, zu bestimmen.

Rückrechnung auf die statischen Parameter

Bisher enthält der Parametervektor \mathbf{p} acht Parameter, welche stark miteinander verkoppelt sind. Um die Anzahl der Optimierungsparameter zu reduzieren gibt es zwei Möglichkeiten: Zum einen kann auf a priori Wissen wie z.B. zusätzliche Messungen mit anderen Messverfahren oder Literaturdaten zurückgegriffen werden. Die (ausgewählten) Literaturdaten sind jedoch nur Beispiele für Varianten eines Polymers. Die tatsächlichen Eigenschaften und somit auch die Materialparameter des Polymers hängen stark vom jeweiligen Herstellungsprozess ab, was zu einem weiten

Wertebereich der Materialparameter führt. Hinzu kommt zusätzlich die Temperaturabhängigkeit der Parameter.

Daher werden Kompressions- und Schermodul über die Schallgeschwindigkeiten aus der Identifikation des elastischen Modells (vgl. Kapitel 4) mit Gleichung 5.10 und 5.13 in jedem Iterationsschritt in Abhängigkeit des aktuellen Parametervektors berechnet. Anders als bei der Startwertschätzung für d_K und d_μ wird die angenommene Frequenz der Schallgeschwindigkeiten $c_L(\omega)$ und $c_T(\omega)$ nicht als Grenzwert $\omega \rightarrow \infty$ angenommen, sondern bei der höchsten in der elastischen Identifikation berücksichtigten Frequenz, welche am Beispiel der PEEK-Probe $f = 2,5 \text{ MHz}$ entspricht. Somit ergibt sich ein reduzierter Parametervektor von $\mathbf{p}_\alpha = [\tau_{\sigma_K}, d_K, \tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_K, a_\mu]$, welcher nur die Dämpfungsparameter enthält.

5.6.2 Beschreibung der Optimierungsstrategien

Im Folgenden werden drei unterschiedliche mehrstufige Optimierungsstrategien am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte betrachtet. Während in Verfahren 1 sowohl Dämpfungs- als auch statische Parameter optimiert werden, nutzen Verfahren 2 und 3 jeweils die Approximation des statischen Kompressions- und Schermoduls während des Optimierungsprozesses am Vorbild der Startwertschätzung. Zusätzlich nutzen Verfahren 1 und 3 unterschiedliche Bereiche der Moden aus der Dispersionsabbildung zur Bestimmung der Scher- und Kompressionsparameter, während Verfahren 2 in jedem Iterationsschritt alle detektierten Moden berücksichtigt.

Verfahren 1: Optimierung ohne Approximation der statischen Parameter

Aufgrund der vorausgesetzten Annahmen zur Berechnung der statischen Parameter, ist es wünschenswert, diese möglichst mit zu optimieren, was jedoch die Komplexität erhöht. Daher werden zur Sensitivitätssteigerung alle Parameter einzeln nacheinander in der in Tabelle 5.5 aufgeführten Reihenfolge optimiert. Als Kostenfunktion zur Bestimmung der Dämpfungsparameter dient ϵ_V nach Gleichung 5.18. Zudem wird das Dispersionsdiagramm im betrachteten Frequenzbereich bis 1 MHz entlang der Geraden $k_L(\omega) = \omega/c_{L_\infty}$ aufgeteilt.

Frequenz-Wellenzahl-Paare mit $\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$ werden zur Identifikation der Scherkomponenten, Frequenz-Wellenzahl-Paare mit $\text{Re}\{k\} \leq \omega/c_{L_\infty}$ zur Identifikation der Kompressionskomponenten genutzt. Da sich die Scherkomponenten auf alle Moden des Dispersionsdiagramms auswirken (vgl.

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Abschnitt 4.8 und 5.4), werden diese als Erste bestimmt, während die Kompressionskomponenten abhängig von den Scherkomponenten nachfolgend optimiert werden. Außerdem stellen die Zeitkonstanten-Verhältnisse d_μ und d_K die sensitivsten Parameter der modalen Dämpfung (vgl. Abbildung 5.14) dar, weshalb diese zunächst vor allen anderen Dämpfungsparametern optimiert werden. Demzufolge ergibt sich aus Abbildung 5.14 bis 5.18 die in Tabelle 5.5 angegebene Optimierungsreihenfolge.

Tabelle 5.5: Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen und Moden bei Verfahren 1

Schritt	Parameter	Kostenfunktion	Aufteilung Moden
1	d_μ	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$
2	μ	Kapitel 4	-
3	d_K	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} \leq \omega/c_{L_\infty}$
4	K	Kapitel 4	-
5	τ_{σ_μ}	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$
6	a_μ	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$
7	μ	Kapitel 4	-
8	τ_{σ_K}	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} \leq \omega/c_{L_\infty}$
9	a_K	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} \leq \omega/c_{L_\infty}$
10	K	Kapitel 4	-

Gleichzeitig sei erwähnt, dass sich zwar die Aufteilung des Dispersionsdiagramms anhand der Geraden $k_L(\omega) = \omega/c_{L_\infty}$ auf den Realteil der Kreiswellenzahl bezieht, die Kostenfunktion nutzt jedoch nach Gleichung 5.18 sowohl Imaginär- als auch Realteil der komplexen Kreiswellenzahl für die Optimierung der Dämpfungsparameter. Die Optimierung von Kompressions- und Schermodul nutzt das Verfahren aus Kapitel 4, welches ausschließlich auf den Realteil der Kreiswellenzahl basiert, jedoch nun unter Annahme eines komplexen, frequenzabhängigen Materialmodells.

Die berechnete Dämpfung unter Verwendung der bestimmten Materialparameter aus Tabelle 5.6 ist in Abbildung 5.20 gezeigt.

Abgesehen von der S5-Mode, wird die Dämpfung tendenziell unterschätzt. Somit stimmen zwar insgesamt die modalen Verläufe überein, trotzdem liegt die berechnete Dämpfung immer leicht neben der der Messung, sodass für eine genauere Beschreibung weitere Optimierungsschritte notwendig sind. Anders als bei der Dämpfung stimmt der Realteil der berechneten Kreiswellenzahl mit den Moden aus der Messung in Abbildung 5.21 überein.

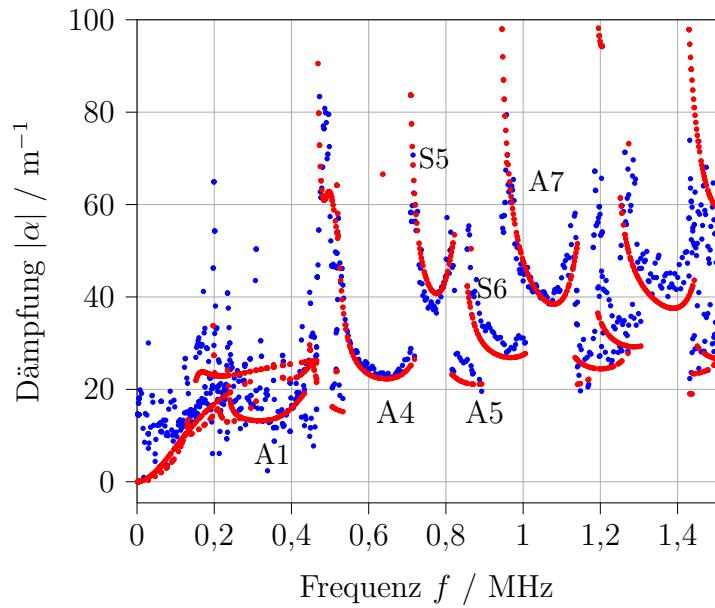


Abbildung 5.20: Berechnete Dämpfung (rot) unter Verwendung der optimalen Materialparameter nach Tabelle 5.6 im Vergleich zur Dämpfung aus der Messung (blau)

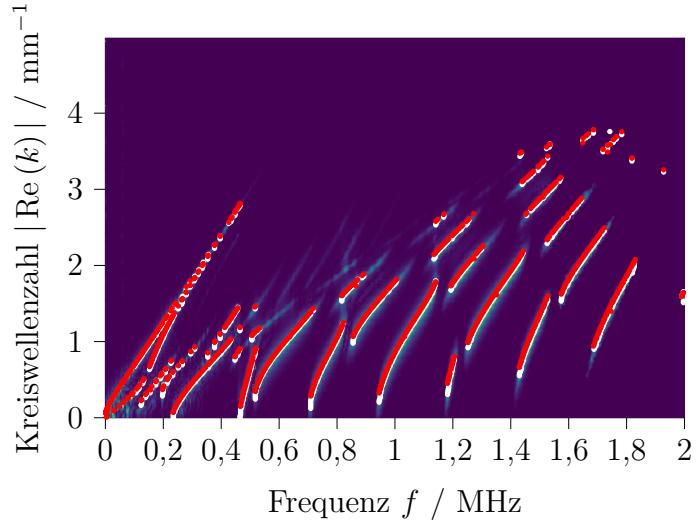


Abbildung 5.21: Berechneter Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der bestimmten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.6 (rot) im Vergleich zu den detektierten Moden aus der Messung (weiß)

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Tabelle 5.6: Identifizierte viskoelastische Materialparameter nach schrittweiser Optimierung aller Parameter (Verfahren 1)

Optimierungsschritt	τ_{σ_K} / μs	τ_{σ_μ} / μs	d_K	d_μ	a_K	a_μ
Startwerte	0,20	0,59	1,034	1,093	1	1
Ergebnis	0,28	0,98	1,035	1,063	1	1
Optimierungsschritt	K / GPa	μ / GPa	c_{L_0} / m s^{-1}	c_{T_0} / m s^{-1}		
Startwerte	6,23	1,48	2502	1062		
Ergebnis	6,19	1,52	2504	1076		

Konvergenz von Verfahren 1 Die Konvergenz der einzelnen Materialparameter lässt sich Abbildung 5.22 entnehmen. Abbildung 5.22 zeigt die Optimierungsparameter p_i normiert auf deren Startwert $p_{i,0}$ im jeweiligen Iterationsschritt. Aufgrund des kleinen absoluten Werts ergeben sich große relative Änderungen der Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_K} und τ_{σ_μ} . Trotz der großen relativen Änderungen konvergieren sie ebenso wie die übrigen Parameter zügig. Gleichzeitig zeigt Abbildung 5.22 die Verkopplung der Parameter: Nachdem zu Beginn das Zeitkonstanten-Verhältnis der Scherkomponenten d_μ verringert wird, wird der Schermodul μ entsprechend vergrößert. Gleiches gilt für das Zeitkonstanten-Verhältnis d_K und den Kompressionsmodul K , jedoch fällt hier die resultierende relative Änderung geringer aus.

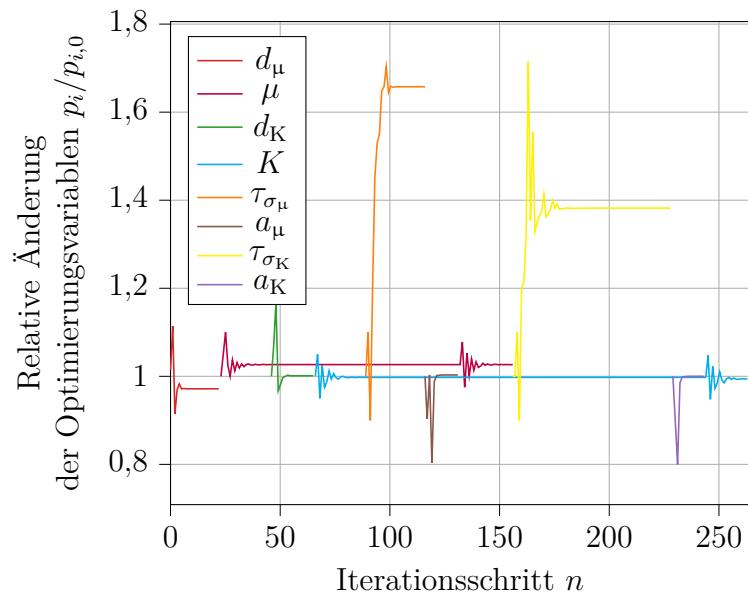


Abbildung 5.22: Konvergenz der Materialparameter bei schrittweiser Optimierung der einzelnen Parameter

Verfahren 2: Optimierung mit Berechnung der statischen Parameter und ohne Aufteilung des Dispersionsdiagramms

Durch die Berechnung des Scher- und Kompressionsmoduls über Gleichung 5.10 und 5.13 während der Optimierung, entfallen diese als Optimierungsparameter, sodass sich der Parametervektor zu $\mathbf{p}_\alpha = [\tau_{\sigma_K}, d_K, \tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_K, a_\mu]$ vereinfacht. In diesem mehrschrittigen Optimierungsverfahren werden im Gegensatz zur Startwertschätzung alle Moden bis 1 MHz in jedem Optimierungsschritt berücksichtigt. Die nicht enthaltenden statischen Module μ und K werden während des Optimierungsprozesses unter Annahme der Dämpfungsparameter des aktuellen Optimierungsschritts über Gleichung 5.10 und 5.13 berechnet.

Demzufolge werden die Optimierungsschritte in Tabelle 5.7 durchgeführt.

Mit Annahme der in Abschnitt 5.5 berechneten Startwerte liefern die Optimierungsschritte am Beispiel einer 5,45 mm dicken PEEK-Platte den in Tabelle 5.8 angegebenen Parametersatz. Abbildung 5.23 zeigt die modale Dämpfung aus der Messung sowie die berechnete Dämpfung unter Verwendung sowohl der Startwerte als auch der im ersten Schritt optimierten Parameter nach Tabelle 5.8.

Im Frequenzbereich bis 0,5 MHz zeigt sich eine bessere Übereinstim-

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Tabelle 5.7: Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen bei Verfahren 2

Schritt	Parameter	Kostenfunktion
1	$\tau_{\sigma_K}, d_K, \tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_K, a_\mu$	ϵ_{Im}
2	$\tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_\mu$	ϵ_V
3a	τ_{σ_K}	ϵ_V
3b	a_K	ϵ_V
4	K, μ	Kapitel 4

mung zwischen Messung und Simulationsergebnis unter Verwendung der Startwerte, da dieser Bereich im Wesentlichen von den Scherkomponenten der Parameter beeinflusst wird. Zur Schätzung der Startwerte der Scherparameter wird ausschließlich dieser Bereich verwendet. Moden höherer Ordnung mit $Re\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$ werden in der Messung nicht detektiert (vgl. Abbildung 5.19a). Die Dämpfung der Moden unterhalb dieser Geraden nähern sich nach dem ersten Optimierungsschritt an die Messdaten an. Die niederfrequenten Moden unter $f < 0,5$ MHz entfernen sich dadurch jedoch von der Messung. Während die Dämpfung unter Verwendung der Startwerte im Bereich $f \geq 0,5$ MHz zu groß gegenüber der Messung ist, ergibt das Simulationsergebnis unter Verwendung der im ersten Schritt optimierten Materialparameter eine zu geringe Dämpfung entlang des gesamten Frequenzbereiches. Zurückzuführen ist dies im Wesentlichen auf eine Verminderung des Parameters d_μ .

Aufgrund ihres kleinen absoluten Wertebereichs ist eine Änderung der Relaxationszeit τ_{σ_μ} um $\pm 5\%$ im niederfrequenten Bereich bis 1 MHz auf Basis der detektierten Moden kaum bemerkbar (vgl. Abbildung 5.15 und 5.19), bei Betrachtung des Verhältnisses von Imaginär- zu Realteil jedoch schon (vgl. Abbildung 5.18). Da die Dämpfungsparameter untereinander verkoppelt sind, werden im zweiten Schritt nur die Scherkomponenten mit dem Parametervektor $\mathbf{p}_\mu = [\tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_\mu]$ variiert. Als Kostenfunktion dient mit ϵ_V die quadratische Differenz des Verhältnisses von Imaginär- zu Realteil gemäß Gleichung 5.18.

Abbildung 5.24 zeigt die akustische Dämpfung unter Verwendung der Dämpfungsparameter mit den aktualisierten Scherparametern nach dem zweiten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.8 im Vergleich zum Ergebnis des vorherigen Optimierungsschritts sowie den Messdaten. Es zeigt sich eine bessere Annäherung an die Messdaten. Der niederfrequente Bereich bis $f = 0,5$ MHz wird wesentlich besser repräsentiert als nach dem ersten

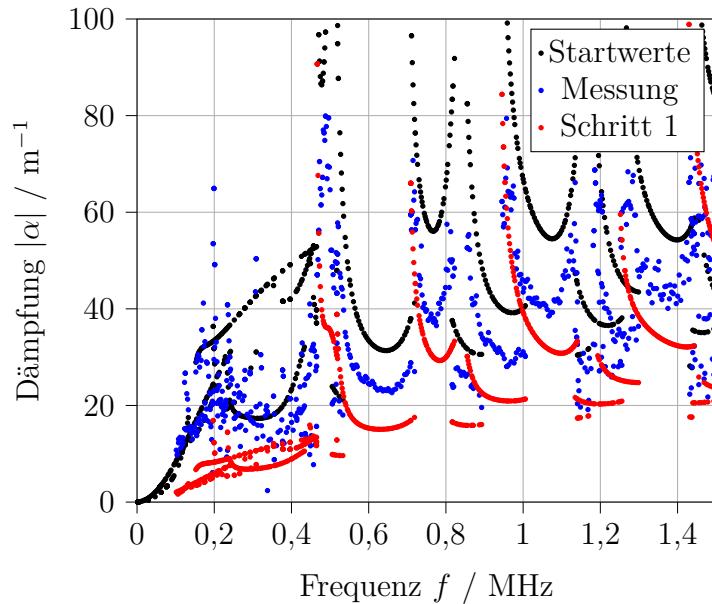


Abbildung 5.23: Dämpfung aus Messung (blau), Simulation unter Verwendung der Startwerte (schwarz) bzw. der bestimmten Parameter im ersten Iterationsschritt nach Tabelle 5.8 (rot)

Optimierungsschritt. Hier nähert sich das Ergebnis dem der Startwerte an. Dies ergibt Sinn, da dieser Bereich sensitiv auf die Parameter der Scherkomponenten ist, jedoch kaum auf die der Kompressionskomponenten. Die dargestellten Moden höherer Ordnung sind ebenfalls sensitiv auf die Parameter der Scherkomponenten (vgl. Abschnitt 5.4) und wurden in diesem Optimierungsschritt mit berücksichtigt. Diese nähern sich weiter der Messung. Bei einigen wenigen Moden zeigt sich jedoch auch eine Überanpassung, sodass die unterschätzte Dämpfung nach dem vorherigen Optimierungsschritt nun zu einer Überschätzung der Dämpfung führt.

Folglich ergibt sich als nächster Optimierungsschritt eine weitere Optimierung der Kompressionsparameter. Da der Parameter d_K einen sehr großen Einfluss sowohl auf die Dämpfung als auch auf die Rückrechnung der statischen Materialparameter hat, führen bereits kleine Parametervariationen zu großen Änderungen der Dämpfung. Daher werden im nächsten, dritten Schritt nur die Parameter τ_{σ_K} und a_K nacheinander variiert, sodass sich dieser Schritt in zwei Einzeloptimierungen unterteilt. Die Dämpfung, berechnet unter Annahme der Materialparameter nach diesem bzw. diesen

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

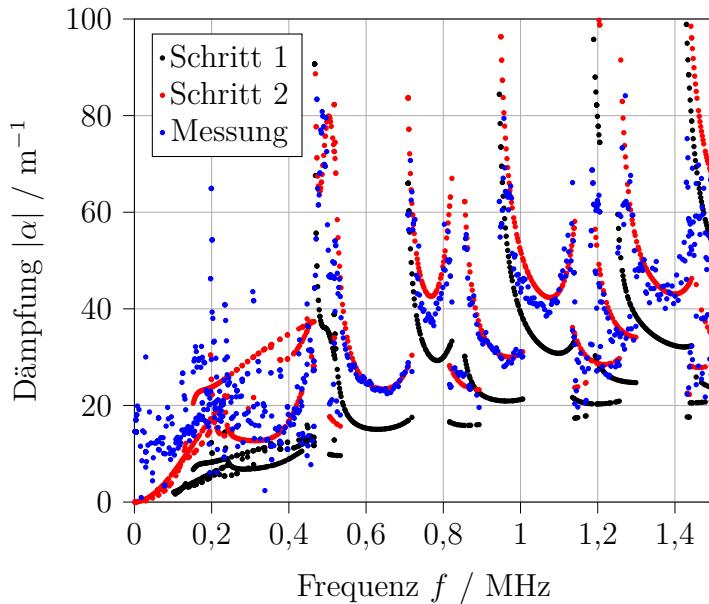


Abbildung 5.24: Dämpfung nach Optimierung der Scherparameter (rot), Kostenfunktion nach Gleichung 5.18 im Vergleich zum vorherigen Optimierungsschritt (schwarz) und der Dämpfung aus der Messung (blau)

beiden Schritten (vgl. Tabelle 5.8), ist im Vergleich zum vorherigen Schritt und der Messung in Abbildung 5.25 abgebildet. Während der niederfrequente Bereich erwartungsgemäß unverändert bleibt, verringert sich die Dämpfung im höherfrequenten Bereich. Im Fall z.B. der S5- und A7-Mode führt dies zu einer besseren Übereinstimmung mit den Messdaten, während es gleichzeitig z.B. bei der A4-, S6- und A7-Mode zu einer leicht höheren Abweichung von den Messdaten führt.

Da der statische Scher- und Kompressionsmodul, μ und K , während der Optimierung mittels Gleichung 5.10 und 5.13 am Beispiel PEEK für 2,5 MHz berechnet worden sind, wird am Ende eine Optimierung des statischen Kompressions- und Schermoduls, wie in Kapitel 4 unter Annahme des viskoelastischen Modells mit den bestimmten Dämpfungsparametern, durchgeführt. Aufgrund des angenommenen frequenzabhängigen Materialmodells werden dafür die komplexen Kreiswellenzahlen $k(\omega)$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenzen berechnet. Aufgrund der geringen Parameteränderungen (vgl. Tabelle 5.8) ruft dieser Schritt keine wesentlichen Änderungen in der Dämpfung hervor. Die Übereinstimmung zwischen berechnetem

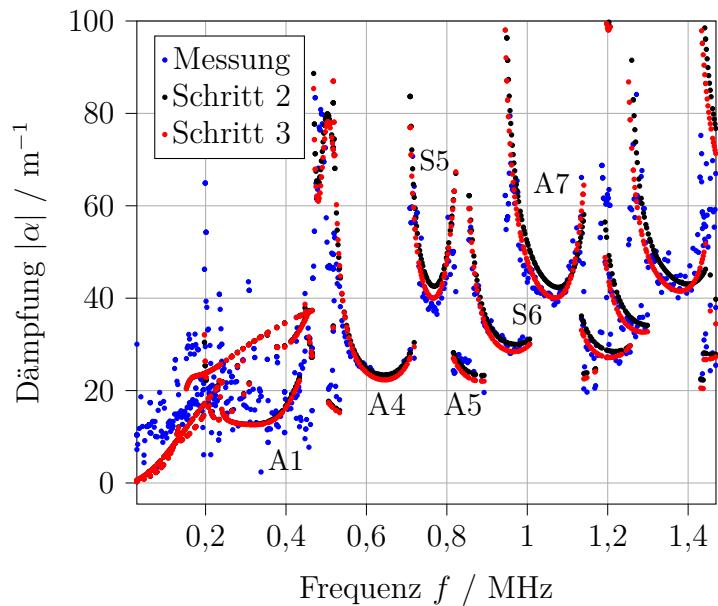


Abbildung 5.25: Dämpfung nach Optimierung von τ_{σ_K} und a_K , Kostenfunktion nach Gleichung 5.18

Dispersionsdiagramm unter Annahme der optimierten viskoelastischen Materialparameter und der Dispersionsabbildung aus der Messung ist in Abbildung 5.27 dargestellt. Die zugehörige Dämpfung bzw. der Imaginärteil der Kreiswellenzahlen ist in Abbildung 5.26 dargestellt, welche gute Übereinstimmungen zwischen Messung und Simulation zeigt.

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Tabelle 5.8: Mittels Verfahren 2 identifizierte viskoelastische Materialparameter

Optimierungsschritt	τ_{σ_K} / μs	τ_{σ_μ} / μs	d_K	d_μ	a_K	a_μ
Startwerte	0,2	0,59	1,034	1,093	1	1
Schritt 1	0,19	0,60	1,029	1,022	0,96	1
Schritt 2	-	0,61	-	1,068	-	0,98
Schritt 3	0,19	-	-	-	0,88	-
Optimierungsschritt	K / GPa	μ / GPa	c_{L_0} / m s^{-1}	c_{T_0} / m s^{-1}		
Startwerte	6,23	1,48	2502	1062		
Schritt 1	6,26	1,58	2527	1098		
Schritt 2 & 3	6,27	1,51	2516	1075		
Schritt 4	6,25	1,52	2515	1078		

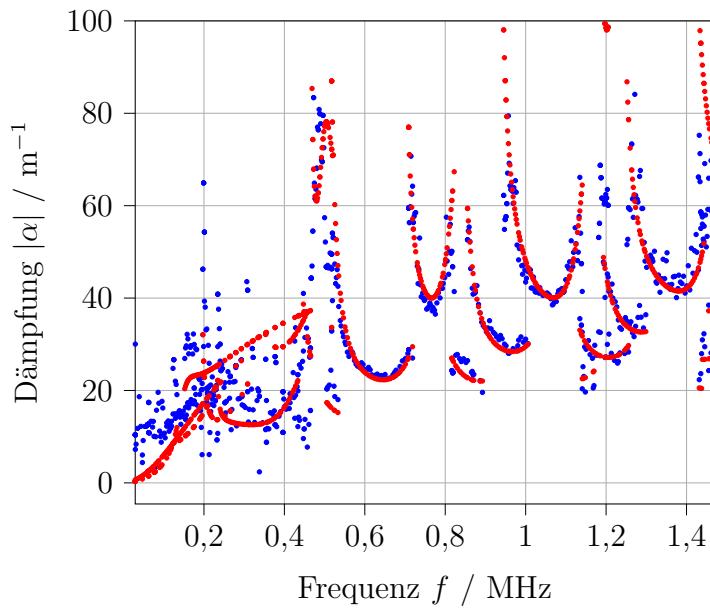


Abbildung 5.26: Dämpfung unter Nutzung der identifizierten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.8 (rot) sowie Dämpfung aus der Messung (blau)

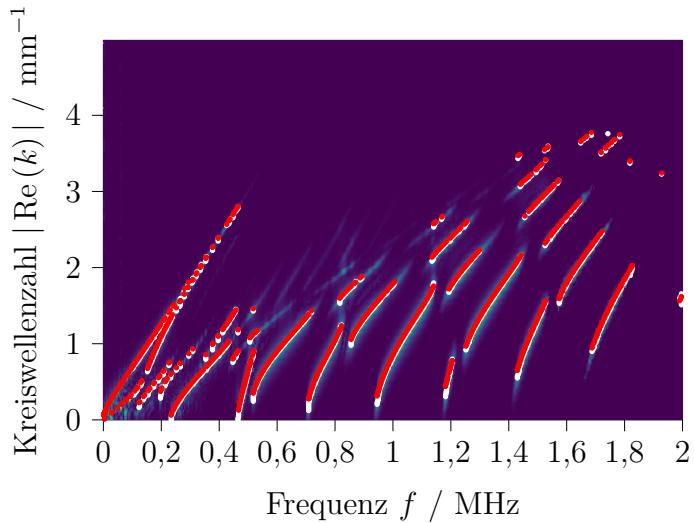


Abbildung 5.27: Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der bestimmten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.8 (rot), detektierte Moden aus der Messung (weiß)

Konvergenz: Die relative Änderung der Dämpfungsparameter dieses Optimierungsverfahrens ist in Abbildung 5.28 dargestellt. Dort zeigt sich bereits im ersten Schritt aufgrund der Verkopplung der Parameter, dass eine relative Änderung der Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_μ} und τ_{σ_K} immer eine Veränderung der Verhältnisse der Zeitkonstanten d_K und d_μ , oder umgekehrt, und im Fall der Scherkomponenten ebenfalls eine Änderung der fraktionalen Ableitungsordnung a_μ nach sich zieht.

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

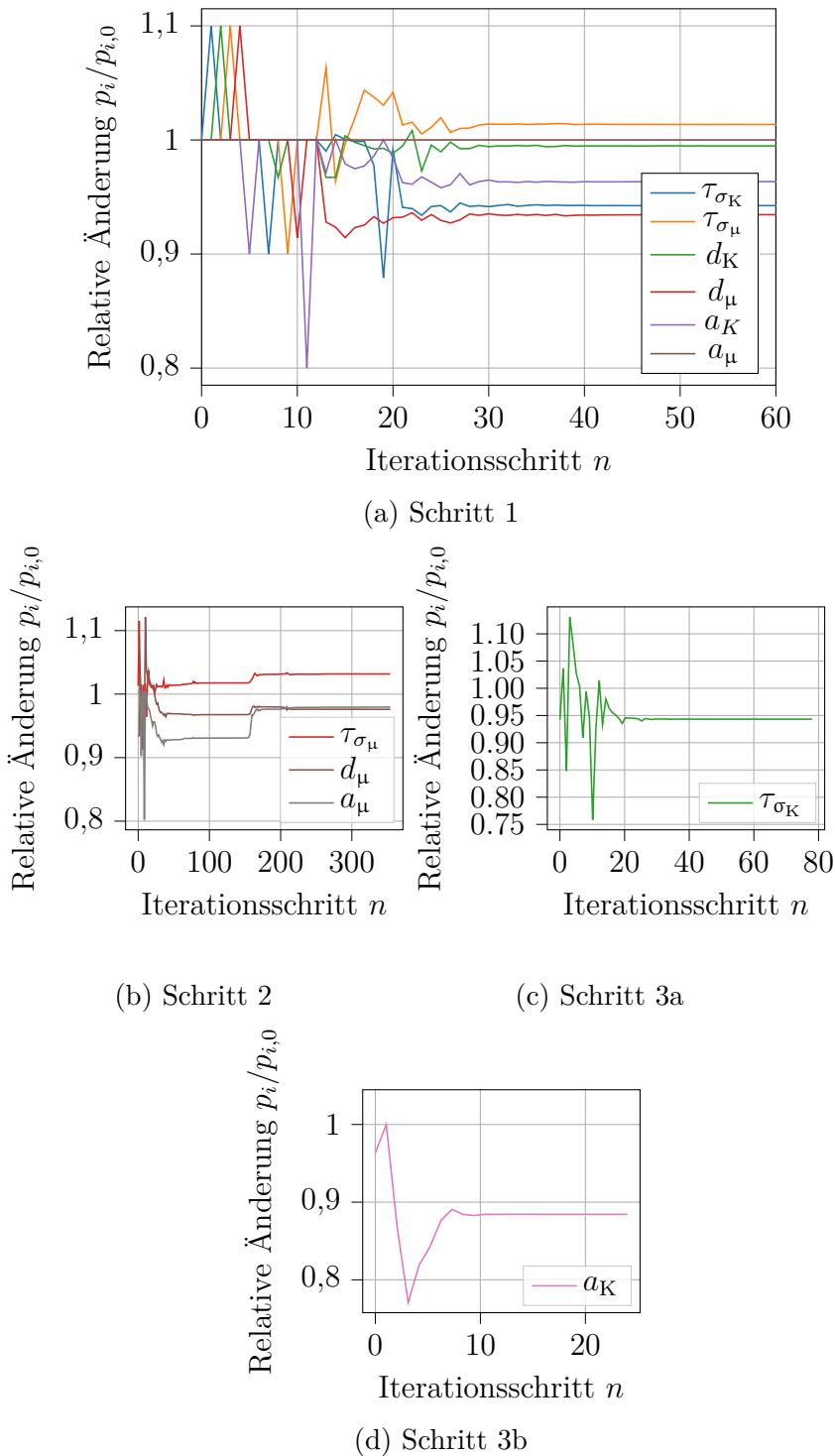


Abbildung 5.28: Konvergenz der Dämpfungsparameter während Optimierungsverfahren 2 ($p_{i,0}$ entspricht in jedem Schritt den Startwerten aus Tabelle 5.8)

Verfahren 3: Optimierung mit Berechnung der statischen Parameter und mit Segmentierung des Dispersionsdiagramms

Zusätzlich zur Verwendung unterschiedlicher Kostenfunktionen, wird der Frequenzbereich am Vorbild der Startwertschätzung aufgeteilt. Wie bereits bei der Startwertschätzung wird der Bereich oberhalb der Geraden $k_L = \omega/c_{L_\infty}$ (vgl. Abbildung 5.19a) genutzt, um zunächst die Scherkomponenten, der Bereich unterhalb dieser Geraden um die Kompressionskomponenten, zu bestimmen. Der erste Optimierungsschritt aus Verfahren 2 mit der Kostenfunktion ϵ_{Im} nach Gleichung 5.17 und der Berücksichtigung aller aus der Messung extrahierter Moden, wird beibehalten, da dies zu besseren Übereinstimmungen nach den darauffolgenden Schritten führt. Demnach ergeben sich die Optimierungsschritte in Tabelle 5.9.

Tabelle 5.9: Optimierungsreihenfolge sowie jeweilige verwendete Kostenfunktionen und Moden bei Verfahren 3

Schritt	Parameter	Kostenfunktion	berücksichtigte Moden
1	$\tau_{\sigma_K}, d_K, \tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_K, a_\mu$	ϵ_{Im}	alle
2	$\tau_{\sigma_\mu}, d_\mu, a_\mu$	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$
3	$\tau_{\sigma_K}, d_K, a_K$	ϵ_V	$\text{Re}\{k\} \leq \omega/c_{L_\infty}$
4	K, μ	Kapitel 4	alle

Wie bereits im vorherigen Verfahren 2 werden die statischen Materialparameter K und μ über Gleichung 5.10 und Gleichung 5.13 in allen Optimierungsschritten in Abhängigkeit des aktuellen Parametervektors berechnet.

Abbildung 5.29 zeigt die Dämpfung unter Verwendung der bestimmten Materialparameter aus Tabelle 5.10 nach dem letzten Optimierungsschritt. Dort wird eine Unterschätzung der Dämpfung unter Verwendung der optimierten Materialparameter im Frequenzbereich von 0,5 MHz bis 0,7 MHz sichtbar. Im höherfrequenten Bereich ab 0,7 MHz erscheint die berechnete Dämpfung gegenüber der Messung entlang der Frequenzachse leicht verschoben, was auf eine Diskrepanz des Kompressionsmoduls K hindeutet (vgl. Abbildung 5.14).

Bei Betrachtung der Dämpfungsparameter in Tabelle 5.10 fällt auf, dass die Relaxationszeitkonstante τ_{σ_μ} im Vergleich zu den Startwerten und der Optimierung aus den vorherigen Abschnitten um mehr als das vierfache erhöht ist. Gleichzeitig wird die Ableitungsordnung a_μ geringer, die in dem Optimierungsprozess aus den vorherigen Abschnitten unangetastet blieb.

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

Tabelle 5.10: Mittels Verfahren 3 identifizierte viskoelastische Materialparameter

Optimierungsschritt	τ_{σ_K} / μs	τ_{σ_μ} / μs	d_K	d_μ	a_K	a_μ
Startwerte	0,2	0,591	1,034	1,093	1	1
Schritt 1	0,19	0,599	1,029	1,022	0,96	1
Schritt 2	-	2,64	-	1,13	-	0,87
Schritt 3	0,21	-	1,034	-	0,96	-
Optimierungsschritt	K / GPa	μ / GPa	c_{L_0} / m s^{-1}	c_{T_0} / m s^{-1}		
Startwerte	6,23	1,48	2502	1062		
Schritt 1	6,26	1,58	2527	1098		
Schritt 2	6,27	1,43	2498	1046		
Schritt 3	6,23	1,43	2492	1043		
Schritt 4	6,23	1,43	2492	1045		

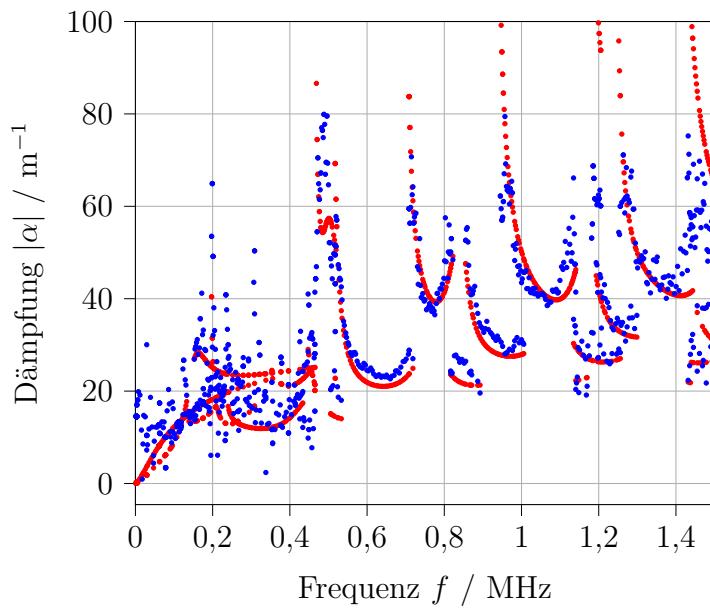


Abbildung 5.29: Dämpfung unter Nutzung der resultierenden Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.10 und Dämpfung aus der Messung (blau)

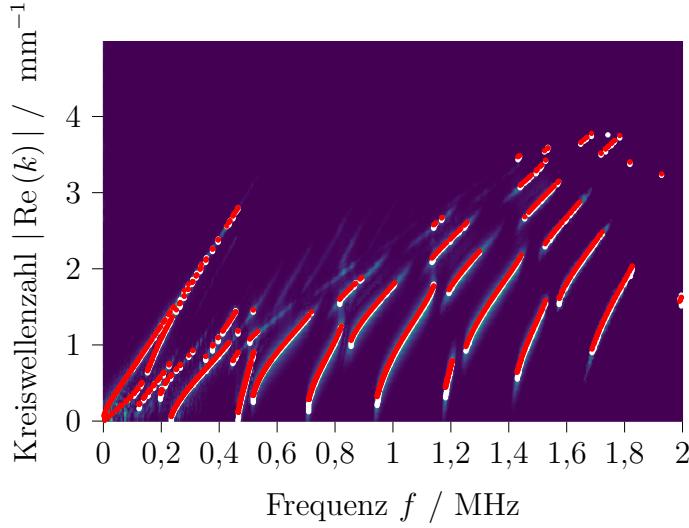


Abbildung 5.30: Realteil der Kreiswellenzahlen unter Nutzung der bestimmten Materialparameter nach dem letzten Optimierungsschritt aus Tabelle 5.10 und detektierte Moden aus der Messung (weiß)

Ebenso erhöht sich der Parameter d_μ , welcher einen großen Einfluss auf das Dispersionsdiagramm und die Dämpfung hat (vgl. Abbildung 5.14). Dementsprechend führt bereits eine Änderung in der ersten Nachkommastelle des Parameters d_μ zu großen Änderungen der modalen Dämpfung. Eine Vergrößerung von τ_{σ_μ} führt zu einer geringeren Dämpfung der Moden (Abbildung 5.15), eine Verringerung der Ableitungsordnung a_μ führt ebenfalls zu einer Verringerung der Dämpfung (Abbildung 5.15), sodass sich beide Effekte verstärken und zu einer Unterschätzung der Dämpfung führen, obwohl die gleichzeitige Erhöhung des Parameters d_μ dem entgegen wirkt. In dem Parameter d_μ selbst wirkt sich die Erhöhung aufgrund des Wertebereichs und der großen Sensitivität der Kostenfunktion auf diesen nur in den Nachkommastellen aus. Zusammenfassend bewirkt die Änderung der Relaxationszeitkonstanten τ_{σ_μ} eine Verschiebung des Arbeitspunkts bzw. des Maximums des Verlustfaktors des fraktionalen Zener-Modells bezogen auf die Scherkomponenten zu kleinen Frequenzen (vgl. Abbildung 3.4). Dies ergibt sich durch die ausschließliche Betrachtung niederfrequenter Moden mit $\operatorname{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$ zur Bestimmung der Dämpfungsparameter der Scherkomponenten, da in diesem Wellenzahl-Bereich Moden höherer Ordnung in der Messung nicht detektiert werden. Da dies aufgrund der

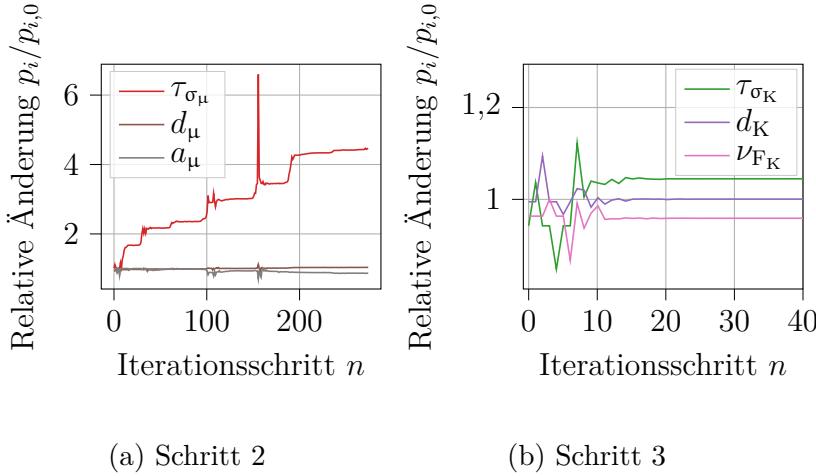


Abbildung 5.31: Konvergenz des zweiten und dritten Optimierungsschritts.
Die Konvergenz des ersten Optimierungsschritts ist Abbildung 5.28a zu entnehmen.

Parametrisierung des Modells zu einer geringen Dämpfung führt (vgl. Abbildung 3.3), gleichen die Erhöhung des Zeitkonstanten-Verhältnisses d_μ und der fraktionalen Ableitungsordnung a_μ diesen Effekt aus.

Konvergenz: Während der erste Optimierungsschritt identisch zum vorherigen Abschnitt ist (vgl. Abbildung 5.28a), zeigt Abbildung 5.31 die Konvergenz der nachfolgenden Schritte. Obwohl die Relaxationszeitkonstante τ_{σ_μ} gegen einen vierfach höheren Wert gegenüber ihrem Startwert strebt, ändern sich d_μ und a_μ vergleichsweise gering. Diese variieren aufgrund ihrer Verkopplung miteinander in den jeweils gleichen Iterationsschritten, jedoch unabhängig von τ_{σ_μ} . Ähnliches zeigt sich in dem darauffolgenden Schritt bei den Kompressionsparametern. Sobald ein Parameter variiert wird, folgen die anderen Parameter im ähnlichen oder entgegen gesetzten Maß in den nachfolgenden Schritten. Aufgrund dieser starken Kopplung ist es kaum möglich Optimierungen einzelner Parameter durchzuführen, ohne die Änderungen der übrigen. Das führt möglicherweise zu uneindeutigen Materialparametersätzen. Um die Eindeutigkeit zu erhöhen bzw. zu gewährleisten ist es entweder notwendig den zu betrachteten Frequenzbereich zu erhöhen oder die Anzahl der zu bestimmenden Modellparameter zu verringern.

Tabelle 5.11: Zusammenfassung aller identifizierten viskoelastischen Materialparameter für PEEK

	τ_{σ_K} / μs	τ_{σ_μ} / μs	d_K	d_μ	a_K	a_μ
Startwerte	0,2	0,59	1,034	1,093	1	1
Verfahren 1	0,28	0,98	1,035	1,063	1	1
Verfahren 2	0,19	0,61	1,029	1,068	0,88	0,98
Verfahren 3	0,21	2,64	1,034	1,13	0,96	0,87
Optimierungsschritt	K / GPa	μ / GPa	c_{L_0} / m s^{-1}	c_{T_0} / m s^{-1}		
Startwerte	6,23	1,48	2502	1062		
Verfahren 1	6,19	1,52	2504	1076		
Verfahren 2	6,25	1,52	2515	1078		
Verfahren 3	6,23	1,43	2492	1045		

5.6.3 Vergleich der Optimierungsergebnisse

Zum Vergleich sind die identifizierten Parameter in Tabelle 5.11 zusammengefasst. Auffällig ist, dass sich die Ableitungsordnungen im ersten Verfahren gegenüber den Startwerten nicht verändern. Gleichzeitig ergibt sich bei allen Verfahren, insbesondere bei denen, die eine Segmentierung des betrachteten Dispersionsdiagramms nutzen, ein Anstieg der Relaxationszeitkonstante τ_{σ_μ} , bei Verfahren 3 sogar um mehr als den vierfachen Wert. Dies lässt sich durch die Segmentierung des Dispersionsdiagramms erklären: Da kaum Moden höherer Ordnung mit $\text{Re}\{k\} > \omega/c_{L_\infty}$ in der Messung detektiert werden, beschränkt sich der berücksichtigte Frequenzbereich bei der Optimierung der Scherkomponenten auf unter 0,6 MHz, sodass bei der Optimierungsstrategie 1 und 3 der Arbeitspunkt zu sehr kleinen Frequenzen $f = 1 / (2\pi\sqrt{\tau_{\varepsilon_\mu}\tau_{\sigma_\mu}}) = 1 / (2\pi\tau_{\sigma_\mu}d_\mu^{1/(2a_\mu)})$ verschoben wird. Die statischen Parameter in Tabelle 5.11 werden maßgeblich durch die Zeitkonstanten-Verhältnisse d beeinflusst. Erhöhen sich diese, verringern sich die entsprechenden statischen Moduln K und μ .

Für eine Transversalwelle werden Schallgeschwindigkeit und Absorption nach Gleichung 3.7 und 3.8 über

$$c_T = c_{T_0} \text{Re} \left\{ \sqrt{\gamma_\mu(\omega)} \right\} \quad (5.19)$$

$$\alpha_{F_T} = -\frac{\omega}{c_{T_0}} \text{Im} \left\{ \sqrt{\gamma_\mu(\omega)^{-1}} \right\} \quad (5.20)$$

direkt berechnet. Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit und Absorpti-

5.6 Vergleich verschiedener Optimierungsstrategien

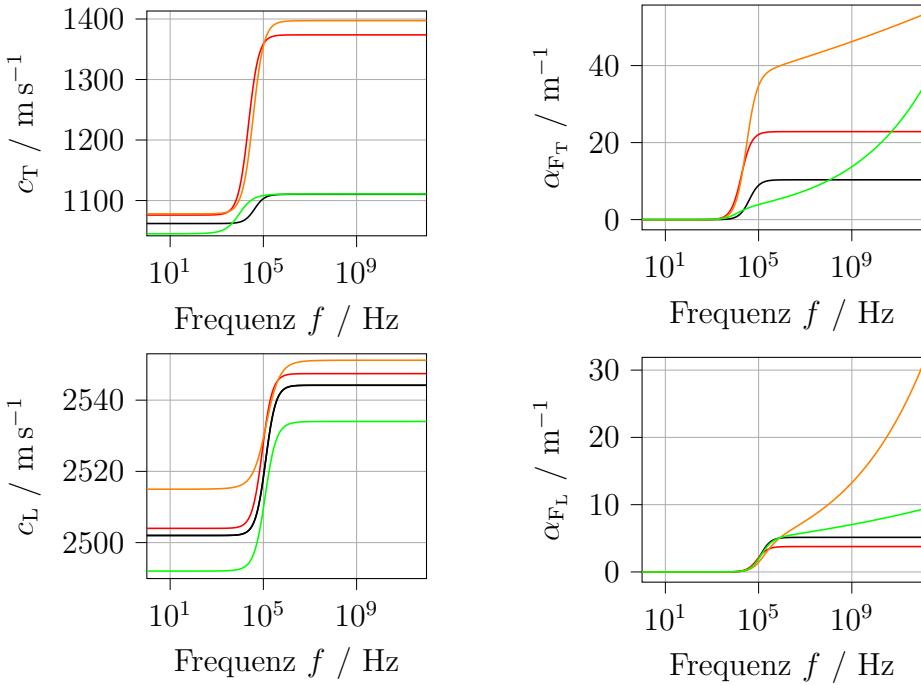


Abbildung 5.32: Frequenzabhängige Schallgeschwindigkeit und Absorption unter Annahme der Optimierungsergebnisse von PEEK aus Tabelle 5.11, Startwerte (schwarz), Verfahren 1 (rot), Verfahren 2 (orange), Verfahren 3 (grün)

on einer Longitudinalwelle wird der Dämpfungsterm der Longitudinalwelle $\gamma_L(\omega)$ aus den Dämpfungstermen der Kompressions- und Scherkomponenten $\gamma_K(\omega)$ und $\gamma_\mu(\omega)$ bestimmt:

$$\gamma_L = \frac{K\gamma_K + \frac{4}{3}\mu\gamma_\mu}{K + \frac{4}{3}\mu} \quad (5.21)$$

Damit können analog zu den Gleichungen 5.19 und 5.20 Schallgeschwindigkeit und Absorption einer Longitudinalwelle berechnet werden. Sowohl die frequenzabhängige Schallgeschwindigkeit als auch die Absorption einer Longitudinal- und Transversalwelle sind für die Optimierungsergebnisse der drei Verfahren aus Tabelle 5.11 in Abbildung 5.32 dargestellt.

Die zuvor genannte Verschiebung des Arbeitspunktes durch die große Relaxationszeitkonstante in Verfahren 3 wird bei der Transversalwellengeschwindigkeit in Abbildung 5.32 deutlich, da dort der lineare Bereich zu tieferen Frequenzen verschoben ist.

Da die genaue Messfrequenz der effektiven Schallgeschwindigkeiten c_{L_∞} und c_{T_∞} aufgrund der breitbandigen Messung nicht bekannt ist, wird die maximale, in der Identifikation der effektiven, elastischen Schallgeschwindigkeiten berücksichtigte Frequenz als Messfrequenz der Schallgeschwindigkeiten angenommen, um während der Optimierung in Verfahren 2 und 3 die statischen Schallgeschwindigkeiten bzw. Kompressions- und Schermodul zu berechnen. Die Annahme der größten Frequenz bei der Bestimmung der effektiven, elastischen Schallgeschwindigkeiten als Messfrequenz setzt für eine gelingende Bestimmung viskoelastischer Materialparameter voraus, dass die effektiven, elastischen Schallgeschwindigkeiten, den Endwerten der frequenzabhängigen Schallgeschwindigkeiten, wie sie in Abbildung 3.1 bis 3.3 bei hohen Frequenzen ab 1 MHz zu sehen sind, entsprechen.

Andernfalls hat die Annahme der Messfrequenz im mittleren, Segment in Tabelle 3.1 einen großen Einfluss auf die ansteigenden Schallgeschwindigkeiten, da diese mit der Frequenz linear steigen und es somit zu großen Abweichungen kommt.

Im dritten Segment nach Tabelle 3.1 hingegen ergibt sich für diesen Bereich z.B. eine Transversalwellengeschwindigkeit von $c_T(\omega \rightarrow \infty) = c_{T_0} \sqrt{d_\mu}$, welche mit $c_{T_0} = c_{T_\infty} / \sqrt{d_\mu}$ gerade der Näherung für $f \rightarrow \infty$ entspricht (vgl. Tabelle 3.1). Für eine als bekannt angenommene Frequenz entspricht diese Rechnung gerade $c_{T_0} = c_T(\omega) / \text{Re}\{\sqrt{\gamma_\mu(\omega)}\}$, womit in den Verfahren 2 und 3 die statische Transversalwellengeschwindigkeit und auch analog der statische Schermodul mit $\mu = \mu_\infty / \text{Re}\{\gamma_\mu(\omega)\}$ und statische Kompressionsmodul mit $K = K_\infty / \text{Re}\{\gamma_K(\omega)\}$ berechnet werden. Als Scher- und Kompressionsmodul μ_∞ und K_∞ für $\omega \rightarrow \infty$ wird jeweils der in der ideal-elastischen Identifikation in Kapitel 4 identifizierte Kompressions- und Schermodul, welcher sich jeweils unter Annahme eines ideal-elastischen Materialmodells aus den effektiven, elastischen Schallgeschwindigkeiten berechnen lässt, angenommen.

Diese Annahme sehr kleiner Änderungen der Schallgeschwindigkeiten lässt sich in Abbildung 5.32 ablesen. Dort ändern sich die Schallgeschwindigkeiten ab einer Frequenz von 1 MHz nur geringfügig.

Die leicht besseren Übereinstimmungen der modalen Dämpfung unter Berücksichtigung der viskoelastischen Materialparameter aus Verfahren 2 und 3 gegenüber Verfahren 1 (vgl. Abbildung 5.20, 5.26 und 5.29) scheinen diese Annahmen zur Berechnung der statischen Parameter zur Vereinfachung des Optimierungsproblems zu bestätigen.

Dies ist jedoch nur eine Annahme, die möglicherweise für PEEK im betrachteten Frequenzbereich gültig ist, jedoch nicht für andere Polymere

5.7 Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse im Transmissionsmessverfahren

im gleichen Frequenzbereich gelten muss.

Zur Vermeidung dieser Annahme und gleichzeitig guten Übereinstimmungen zwischen berechneter Dämpfung sowohl aus der Messung als auch dem Simulationsmodell könnten z.B. ergänzende Schallgeschwindigkeitsmessungen bei einer bestimmten Frequenz, eine Dynamisch-Mechanische-Analyse oder gar eine Bestimmung der statischen Parameter aus mechanischen Messungen (bei zerstörenden Verfahren z.B. an Proben aus der selben Charge) dienen. Somit könnten die statischen Parameter als bekannt vorausgesetzt werden, sodass diese weder optimiert noch über zusätzliche Annahmen (Annahme kleiner Änderungen der Schallgeschwindigkeit vgl. Unterabschnitt 3.3.1) berechnet werden müssten.

Gleichzeitig ändern sich die Schallgeschwindigkeiten aus Verfahren 1 ebenfalls nur geringfügig in Abbildung 5.32, obwohl die zuvor genannte Annahme dort nicht getroffen wurde.

Insgesamt zeigt Abbildung 5.32 deutlich größere Abweichungen der jeweiligen Schallgeschwindigkeit und Absorption unter Freiraumbedingungen als die Validierungen der modalen Dämpfung in Abbildung 5.20, 5.26 und 5.29 vermuten lassen. Dies lässt darauf schließen, dass die untersuchten Moden nicht ausreichen, um die Modellparameter eindeutig zu identifizieren. Demzufolge muss entweder das Dämpfungsmodell vereinfacht werden oder der untersuchte Frequenzbereich deutlich vergrößert werden.

5.7 Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse im Transmissionsmessverfahren

Zur Plausibilitätsprüfung werden simulierte Zeitsignale unter Annahme der identifizierten, viskoelastischen Materialparameter mit Messungen an einem Transmissionsmessplatz nach [Rau12; Bau16] verglichen. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 5.33 dargestellt. Über den Sendeschallwandler wird das verstärkte Sendesignal in die zylinderförmige Probe eingekoppelt. Nach Passieren der Probe wird die Ultraschallwelle vom Empfangsschallwandler empfangen. Das anschließend verstärkte Empfangssignal wird von einem Handyscope HS5 [TP21] aufgenommen.

Unter Annahme eines linearen, zeitinvarianten Systems wird jede Komponente im System in Abbildung 5.34 über ihre Impulsantwort $g(t)$ charakterisiert. Während das Übertragungsverhalten der Verstärker durch Messung des Ausgangs- und Eingangsverhaltens bestimmt wird, basieren die Impulsantworten der Schallwandler auf Impedanzmessungen und anschließender

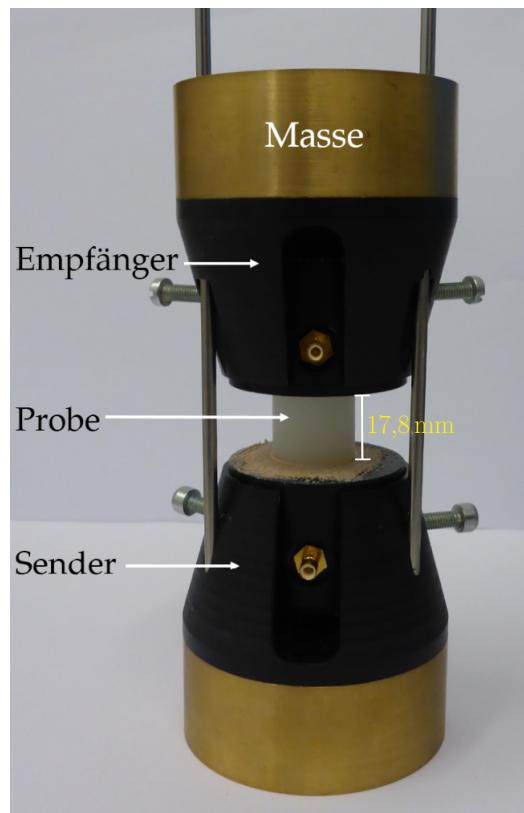


Abbildung 5.33: Aufbau des Transmissionsmessplatzes [Bau16]

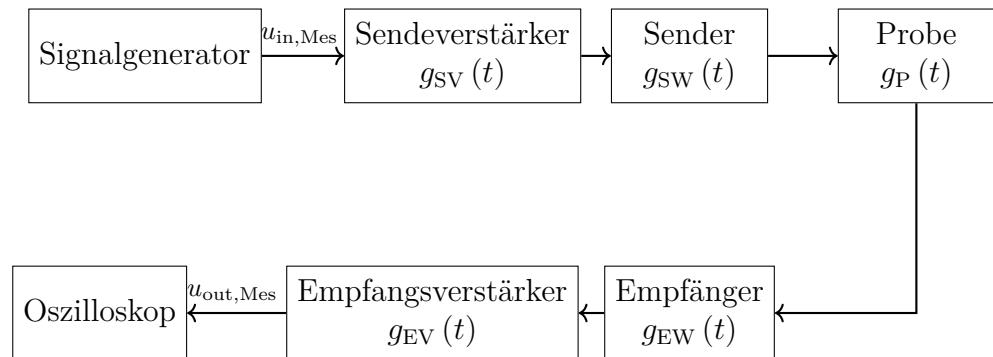


Abbildung 5.34: Blockschaltbild des Messsystems

5.7 Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse im Transmissionsmessverfahren

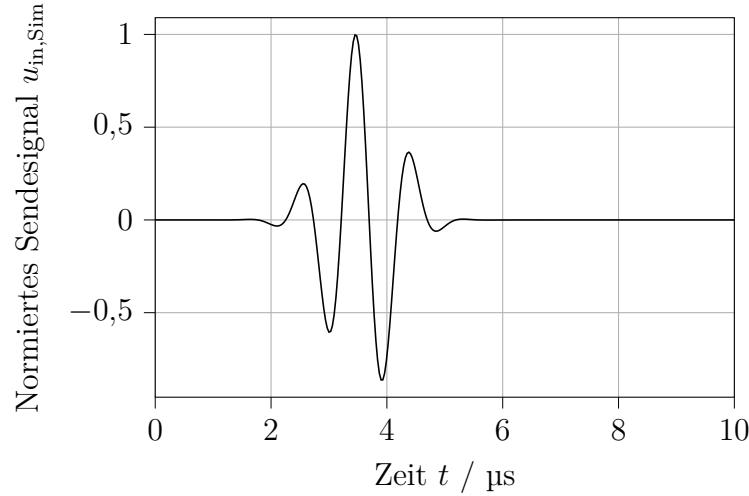


Abbildung 5.35: Normiertes Sendesignal

Identifikation eines Mason-Modells [Mas64]. Somit wird mit bekannten Modellparametern die Übertragungsfunktion berechnet. Die akustischen Koppelschichten werden mittels Siebdruck so dünn aufgetragen, dass ihr Einfluss minimiert wird. Das Empfangssignal am Oszilloskop $u_{out,Mes}(t)$ ergibt sich nach Abbildung 5.34 aus dem Sendesignal $u_{in,Mes}(t)$ über

$$u_{out,Mes}(t) = u_{in,Mes}(t) * g_P(t) * \underbrace{[g_{SV}(t) * g_{SW}(t) * g_{EW}(t) * g_{EV}(t)]}_{g_{System}}. \quad (5.22)$$

Die Probe wird im Vorwärtsmodell, basierend auf einem halbanalytischen FEM-Modell [IGD21], mit dem Sendesignal

$$u_{in,Sim}(t) = u_{in,Mes}(t) * g_{System}(t) \quad (5.23)$$

angeregt, um das Empfangssignal $u_{out,Sim}(t)$ zu prädizieren. Als Anregungssignal $u_{in,Mes}$ wird ein mit einer Sinusfunktion modulierter Gaußpuls mit einer Mittenfrequenz von $f = 1$ MHz genutzt. Das aus Gleichung 5.23 resultierende Eingangssignal für die Simulation $u_{in,Sim}$ ist in Abbildung 5.35 dargestellt. Wird das Signal durch eine hohlzylindrische PEEK-Probe (Länge 17,8 mm, Innendurchmesser 6,03 mm, Außendurchmesser 19,08 mm) transmittiert, wird das in Abbildung 5.36 blau abgebildete Signal gemessen. [JCF22] Die andersfarbigen, gestrichelten Signalverläufe in Abbildung 5.36 entsprechen den simulierten Empfangssignalen unter Annahme der zuvor identifizierten viskoelastischen Materialparameter. Dort zeigen sich gleiche

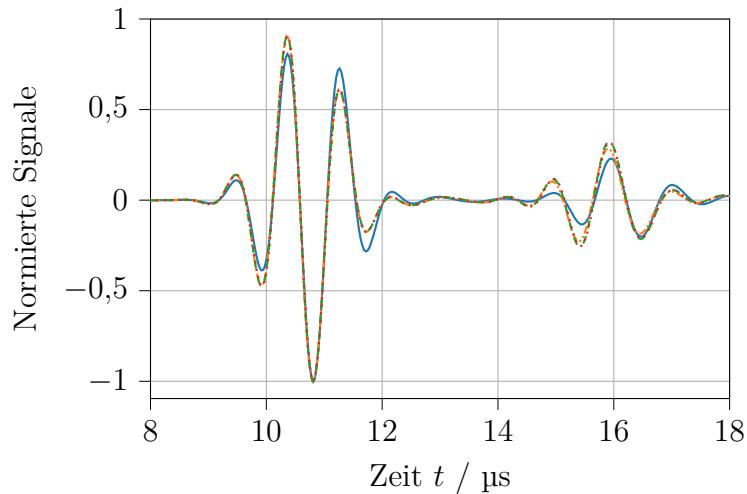


Abbildung 5.36: Mess- und Simulationssignale unter Annahme der identifizierten viskoelastischen Materialparameter: Messsignal (blau), identifizierte Parameter nach Verfahren 1 (rot), identifizierte Parameter nach Verfahren 2 (orange), identifizierte Parameter nach Verfahren 3 (grün)

Zeitpunkte des Auftretens aller Extrema sowohl der Simulationssignale als auch des Messsignals und somit übereinstimmende Laufzeit bzw. effektive Schallgeschwindigkeiten zwischen allen Simulationssignalen und Messsignal.

Wurde bei der Bestimmung der Materialparameter der betrachtete Frequenz-Wellenzah-Bereich für die Optimierung wie in Verfahren 1 und 3 aufgeteilt, ergeben sich zu Beginn des hinteren Wellenpakets ab $15 \mu\text{s}$ in Abbildung 5.36 betragsmäßig leicht höhere Extremwerte in den Signalen, was auf eine kleinere Absorption der Transversalwelle bzw. der Scherbewegungen (vgl. Abbildung 5.32) gegenüber der Messung schließen lässt.

Der Verzicht auf die Aufteilung des Frequenz-/Wellenzahlbereichs bei Verfahren 2 führt zu einer leicht größeren Annäherung an das Messsignal bei den zuvor genannten Stellen, die jedoch ab $16 \mu\text{s}$ wieder abnimmt. Dies legt nahe, dass es insgesamt sinnvoll ist, möglichst alle Moden in der Optimierung zu berücksichtigen. Im ersten Wellenpaket zwischen $9 \mu\text{s}$ und $13 \mu\text{s}$ stimmen alle drei Simulationssignale überein. Daher lässt sich zusammenfassen, dass bezogen auf das Zeitsignal alle drei Optimierungsvarianten ähnliche Ergebnisse liefern. Die Unterschiede in den Materialparameter-

sätzen der Verfahren untereinander sind im Zeitsignal kaum erkennbar. Demzufolge ist es grundsätzlich unerheblich welche Optimierungsstrategie tatsächlich genutzt wird.

Im globalen Minimum bei $10,8 \mu\text{s}$ sind alle Simulationssignale identisch zum Messsignal. An den anderen Extrema im ersten Wellenpaket wird die Messung von allen Simulationssignalen leicht über- bzw. unterschätzt. Dies ist insgesamt nicht verwunderlich, denn zwar handelt es sich bei der Zylinderprobe um das gleiche Grundmaterial (PEEK) wie die zuvor untersuchte Platte, jedoch haben beide Proben einerseits unterschiedliche Herstellungsprozesse erfahren, andererseits unterscheiden sich bereits die Datenblätter beider Materialproben geringfügig beim Elastizitätsmodul. Das Material der Zylinderprobe ist unter dem Handelsnamen Ketron 1000 bekannt [Bau16] und weist laut Datenblatt [Qua] einen Elastizitätsmodul von $E = 4,3 \text{ GPa}$ auf, während sich das Datenblatt der plattenförmigen Probe [Gmb] mit $4,4 \text{ GPa}$ bereits geringfügig unterscheidet. Aufgrund der Verkopplung der statischen Parameter mit den Dämpfungsparametern sind daher ebenfalls Unterschiede bei den Dämpfungsparametern zwischen plattenförmiger und zylinderförmiger Probe zu erwarten, was bereits zu Abweichungen bei den Zeitsignalen beider PEEK-Werkstoffe führt.

5.8 Anwendung des Verfahrens auf Polyamid 6

Zur Schätzung von Startwerten viskoelastischer Parameter von PA6 nach Abschnitt 5.5 wird ein Elastizitätsmodul von $E = 3,5 \text{ GPa}$ [Pol] und eine Poissonzahl von $\nu = 0,38$ [MC] zugrunde gelegt. Nach Schätzung der Startwerte für ein fraktionales Zener-Modell werden mithilfe von Optimierungsverfahren 2 (vgl. Unterabschnitt 5.6.2) Modellparameter einer $8,8 \text{ mm}$ dicken PA6-Platte bestimmt. Sowohl Startwerte als auch die resultierenden Parameter sind in Tabelle 5.12 angegeben.

Basierend auf den optimierten, statischen Parametern aus Tabelle 5.12 ergibt sich ein statischer Elastizitätsmodul von $E = 3,2 \text{ GPa}$, welcher in den in [Läp12] angegebenen Bereich von $E = 1,5 \text{ GPa}$ bis $E = 3,2 \text{ GPa}$ fällt und eine Poissonzahl von $\nu = 0,4$, die ebenfalls mit dem in der Literatur angegebenen Wertebereich übereinstimmt. So geben z.B. Cerjak und Haider [CH] einen Wertebereich für die Poissonzahl von $\nu = 0,38$ bis $0,42$ an.

Während Abbildung 5.38 gute Übereinstimmungen zwischen Messung und Simulation zeigt, stimmt die Dämpfung aus Messung und Simulation in Abbildung 5.37 nur für den niederfrequenten Bereich überein. Da die Moden im niederfrequenten Bereich oberhalb von $k_L(\omega) = \omega/c_{L\infty}$ liegen,

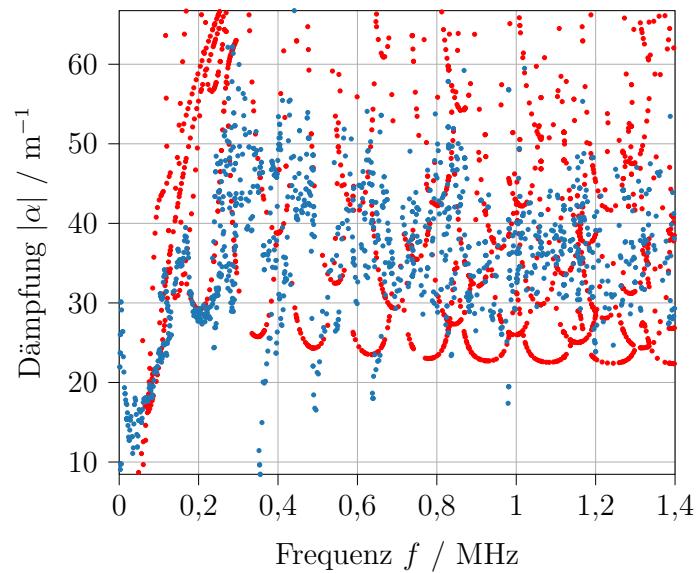


Abbildung 5.37: Dämpfung aus der Messung an PA6 (blau) und der Dämpfung berechnet unter Verwendung der identifizierten Materialparameter in Tabelle 5.12 (rot)

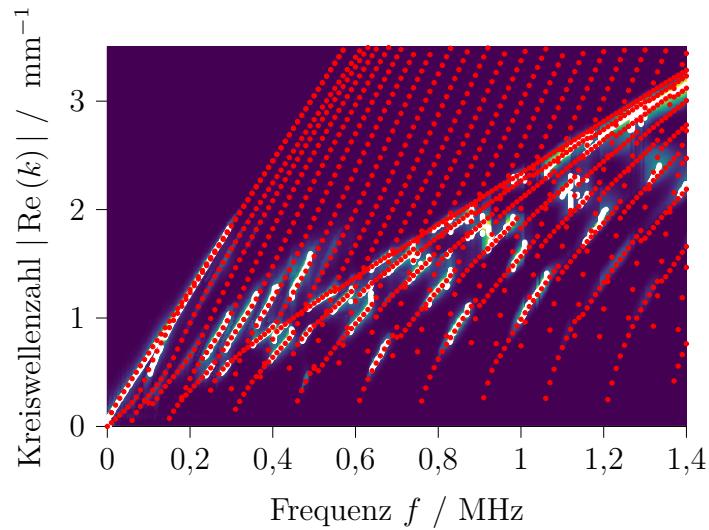


Abbildung 5.38: Dispersionsabbildung der Messung an PA6, daraus extrahierte Moden (weiß) und Dispersionsdiagramm berechnet unter Verwendung der identifizierten Materialparameter in Tabelle 5.12 (rot)

Tabelle 5.12: Zusammenfassung der identifizierten viskoelastischen Materialparameter für PA6

	τ_{σ_K} / μs	τ_{σ_μ} / μs	d_K	d_μ	a_K	a_μ
Startwerte	0,10	0,92	1,304	1,066	0,99	0,99
Ergebnis	1,37	0,95	1,141	1,224	1,0	0,96
Optimierungsschritt	K / GPa	μ / GPa	c_{L_0} / m s^{-1}	c_{T_0} / m s^{-1}		
Startwerte	5,14	1,27	2502	1062		
Ergebnis	5,48	1,14	2504	1076		

lässt dies auf eine hinreichend gute Schätzung der Dämpfungsparameter der Scherkomponenten und damit der Absorption der Transversalwelle in Abbildung 5.39 schließen.

Zudem nimmt die Qualität der Moden-Extraktion in Abbildung 5.38 mit steigender Frequenz ab. Gleichzeitig unterliegen die Werte für die aus der Messung extrahierten Dämpfung einer zunehmend mit der Frequenz steigenden Streuung, was die optische Erkennung von modalen Verläufen, wie sie in der Simulation zu sehen ist, erschwert und somit die Bestimmung der Modellparameter unsicher werden lässt. Daher sind hier insbesondere in Abbildung 5.37 alle simulativ berechneten Moden mit dargestellt, um die Dämpfungskurven aus der Simulation erkennen zu können. In den entsprechenden Abbildungen zuvor in diesem Kapitel wurden hingegen nur die simulativ berechneten Moden mit dargestellt, die auch in der Optimierung berücksichtigt wurden.

Die aus den Parametersätzen aus Tabelle 5.12 berechneten Verläufe der Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie der Dämpfung von Longitudinal- und Transversalwelle sind in Abbildung 5.39 dargestellt. Dabei fällt auf, dass bei PA6 die Absorption α_{F_L} kleiner gegenüber der Absorption der Longitudinalwelle α_{F_L} bei PEEK (vgl. Abbildung 5.32) ist, während α_{F_L} , berechnet mit den Startwerten bei PA6 noch deutlich darüber liegt.

Die berechnete Absorption der Transversalwelle α_{F_T} in Abbildung 5.39 unter Nutzung der optimierten Parameter aus Tabelle 5.12 ist hingegen größer geworden gegenüber der Absorption unter Nutzung der Startwerte. Dabei liegt erstere im gleichen Wertebereich wie die entsprechende Absorption α_{F_T} von PEEK.

Beides ist verwunderlich, da PEEK im Vergleich zu PA6 als schwach absorbierender Kunststoff gilt. Auch der direkte Vergleich der Dispersionsabbildungen spricht für eine höhere modale Dämpfung bei PA6. Zusätzlich stimmen modale Dämpfung aus Simulation und Messung in Abbildung 5.37

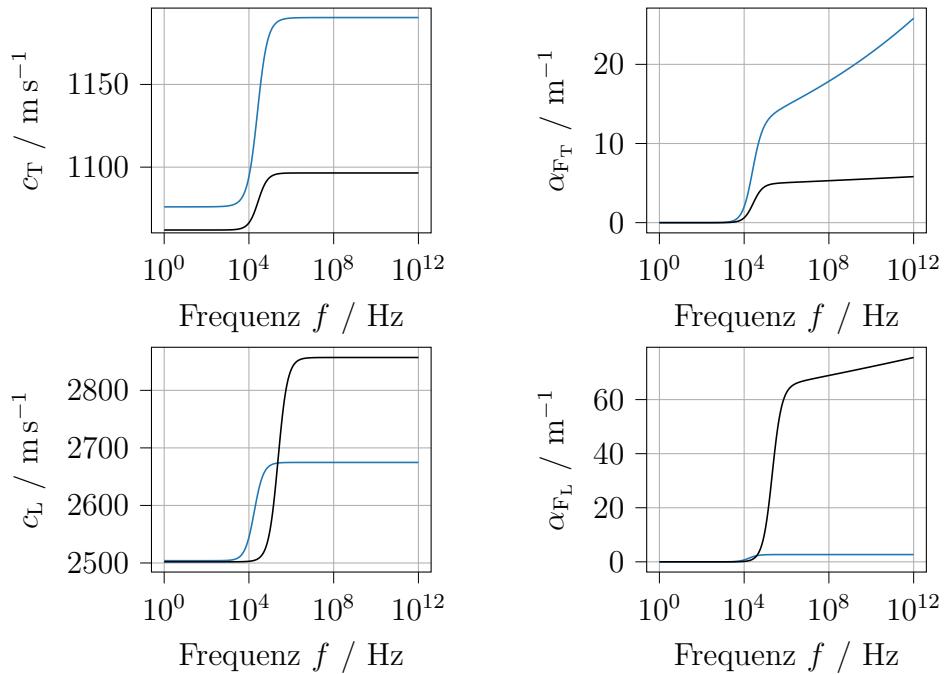


Abbildung 5.39: Frequenzabhängige Schallgeschwindigkeit und Absorption unter Annahme des Optimierungsergebnisses von PA6 aus Tabelle 5.12 (blau) sowie der Startwerte (schwarz)

nur bedingt überein, woraus sich schließen lässt, dass die Optimierung für PA6 nicht optimal konvergiert und somit die bestimmten Materialparameter das Materialverhalten nur bedingt repräsentieren.

Fazit

Aufgrund der Frequenzabhängigkeit viskoelastischer Materialmodelle werden zur modalen Analyse mit dem Vorwärtsmodell aus Abschnitt 4.2 die Kreiswellenzahlen unter Vorgabe der Kreisfrequenzen berechnet (Fragestellung VII). Daraus resultierend, u.a. aufgrund der Komplexwertigkeit des viskoelastischen Materialmodells, ergeben sich komplexe Kreiswellenzahlen, deren Realteil im Zusammenhang mit den Kreisfrequenzen das Dispersionsdiagramm repräsentiert. Der Imaginärteil stellt hingegen die modale Dämpfung dar. Aus den Messdaten kann durch eine örtliche Unterteilung des Datensatzes und Approximation einer Exponentialfunktion die modale Dämpfung ermittelt werden (Fragestellung VIII). Beide können über eine

Kostenfunktion z.B. eine (quadratische) Differenz miteinander verglichen werden. Da der Realteil der Kreiswellenzahl durch das Materialmodell ebenfalls beeinflusst wird, ist es sinnvoll neben der Differenz der Dämpfung bzw. dem Imaginärteil der Kreiswellenzahlen auch jeweils das Verhältnis von Imaginär- zu Realteil zu betrachten. Wichtig dabei ist, dass die Dämpfung der in der Messung detektierten Mode mit der Dämpfung der zugehörigen Mode aus der Simulation verglichen wird. Die Zuordnung zur entsprechenden simulierten Mode erfolgt über den Realteil der Kreiswellenzahl. Die Variation der Modellparameter, bis die Werte der modalen Dämpfung der jeweiligen Moden aus Simulation und Messung möglichst übereinstimmen (inverses Verfahren), liefert die viskoelastischen Materialparameter, die den Modell-Eingangsparametern bei Übereinstimmung entsprechen. Startwerte für die Dämpfungsparameter werden u.a. durch numerisches Lösen der Rayleigh-Lamb-Gleichung unter Annahme komplexer Kreiswellenzahlen geschätzt.

Dabei lassen sich die zu berücksichtigenden (komplexen) Kreiswellenzahl-Frequenz-Paare anhand der effektiven Longitudinalwellengeschwindigkeit zur Schätzung von Scher- und Kompressionsparametern aufteilen. Diese Aufteilung kann weiterhin in der Optimierungsstrategie für das inverse Verfahren genutzt werden. Zudem finden unterschiedliche Varianten der Kostenfunktion in den unterschiedlichen Optimierungsschritten Verwendung, um die Sensitivität von einzelnen Parametern optimal zu nutzen. Insgesamt zeigt sich, dass auch eine Optimierungsstrategie ohne Aufteilung des Dispersionsdiagramms und mehrstufiger Optimierung der Parameter gute Übereinstimmungen der berechneten Dämpfung aus Messung und Simulation liefert (Fragestellung IX). Alle untersuchten Optimierungsstrategien liefern ähnliche, jedoch leicht unterschiedliche Parametersätze, wobei alle drei Verfahren gute Übereinstimmungen mit der Messung liefern. Bei Betrachtung von Zeitsignalen in einem Transmissionsmesssystem unterscheiden sich die drei Verfahren kaum. Zur weiteren Bewertung der Parametersätze und der Optimierungsstrategien untereinander müssten daher weitere Moden untersucht werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Bestimmung effektiver, akustischer Materialparameter basierend auf Dispersionsmessungen von Plattenwellenleitern entwickelt. Die optische Anregung mittels gepulstem Laser ermöglicht eine reproduzierbare Anregung in unterschiedlichen Abständen zum Empfänger, was in zeit- und ortsaufgelösten Messsignalen resultiert. Durch 2D-Fourier-Transformation werden Moden in dann frequenz- und wellenzahlauflösten Messdaten sichtbar. Dabei erhöhen speziell auf Polymere abgestimmte Signalverarbeitungsschritte die auswertbare Bandbreite der Messsignale. Die Fourier-transformierten Messdaten werden in einem inversen Verfahren mit berechneten Dispersionsdiagrammen verglichen. Die Eingangsparameter des semi-analytischen Finite-Elemente-Modells zur Berechnung der Lamb-Moden werden solange variiert bis diese auf den Moden der Messdaten liegen. Startwerte werden dafür im Zeit-Orts-Bereich oder Frequenz-Wellenzahl-Bereich geschätzt. Die verwendete Kostenfunktion verzichtet dabei auf eine Extraktion der einzelnen Moden aus den Messdaten, was die Robustheit bei stark verrauschten Messsignalen erhöht.

Beim semi-analytischen Finite-Elemente-Modell wird die Welle in Ausbreitungsrichtung analytisch betrachtet, während die Dickenrichtung der Platte durch ein eindimensionales Finite-Elemente-Gitter diskretisiert wird, wodurch eine effiziente Berechnung der Lamb-Moden ermöglicht wird. Dadurch, dass im Modell somit insgesamt nur zwei Raumrichtungen betrachtet werden, vereinfacht sich die Elastizitätsmatrix auf den zweidimensionalen ebenen Verzerrungszustand. Zur Bestimmung der effektiven Materialparameter isotroper oder transversal-isotroper Materialproben ist dies ausreichend. Die Bestimmung der Materialparameter der dritten Raumrichtung von nicht-isotropen Werkstoffen ist durch Rotation der Probe im Messplatz und winkelabhängige Identifikation der Materialparameter möglich. Abhängig vom Grad der Anisotropie sind unterschiedlich viele

6 Zusammenfassung und Ausblick

winkelabhängige Einzelmessungen notwendig. Die einzelnen identifizierten, winkelabhängigen Parametersätze werden im Anschluss zusammengefasst, um mittels Moore-Penrose-Pseudoinverse schließlich die 6×6 -große Elastizitätsmatrix zur Beschreibung der Probe für den dreidimensionalen Fall zu identifizieren.

Die bis dahin unberücksichtigt gebliebene Dämpfung, wird durch eine Aufteilung der Messsignale entlang der örtlichen Achse bestimmt. Dazu wird für jeden der unterteilten Abschnitte durch 2D-Fourier-Transformation die Dispersionsabbildung berechnet. Durch Approximation einer ortsabhängigen Exponentialfunktion an allen Fourier-transformierten Signalwerten wird als Exponent der Funktion die modale Dämpfung bestimmt. Somit kann nun zusätzlich zum Realteil auch die Dämpfung als Imaginärteil der Kreiswellenzahl zur Identifikation eines viskoelastischen Materialmodells genutzt werden. Bei der Validierung der Dämpfungsbestimmung an einer synthetisch mittels FEM im Zeitbereich erzeugten Dispersionsabbildung unter Berücksichtigung von Rayleigh-Dämpfung zeigen sich gute Übereinstimmungen zwischen der Extraktion der Dämpfung und dem Imaginärteil der komplexen Wellenzahl aus der entsprechenden SAFE-Simulation.

Nach einer Startwertschätzung basierend auf der Minimierung des Betrags der Rayleigh-Lamb-Gleichung werden mithilfe unterschiedlicher Optimierungsstrategien, die Parameter eines fraktionalen Zener-Modells, wie es Bause [Bau16] nutzt, identifiziert und durch Transmissionsmessungen nach [DIF21; Bau16; Rau12] verifiziert.

6.2 Ausblick

Während bereits effektive Materialparameter für faserverstärkte Kunststoffe bestimmt werden können, sollte deren Viskoelastizität mit berücksichtigt werden. Dazu ist das Verfahren zur Identifikation viskoelastischer Materialparameter auf orthotrope Werkstoffe zu generalisieren z.B. am Beispiel von Bause [Bau16] mittels Eigenwertzerlegung der Elastizitätsmatrix orthotroper Materialien. Werden alle Eigenrichtungen mit einem eigenen fraktionalen Zener-Modell modelliert, ergeben sich 6×3 Dämpfungsparameter zusätzlich zu den neun Elastizitätskoeffizienten. Aufgrund der hohen Anzahl an Parametern sollten Vereinfachungen des Modells in Betracht gezogen werden. Trotzdem erhöht sich die Zahl der Parameter deutlich, weshalb die Optimierungsstrategie und insbesondere die Kostenfunktion anzupassen ist. Diese könnte so angepasst werden, dass Real- und Imaginärteile der Wellenzahlen durch Gewichtung in einen gleichen

6.2 Ausblick

Wertebereich gebracht werden, um beide gleichwertig berücksichtigen zu können. Zusätzlich gewährleistet eine gezielte selektive Anregung sensitiver Frequenz-Wellenzahl-Bereiche die Sensitivität einzelner Modellparameter. Auch die Resonanzfrequenzen bei $\text{Re}\{k\} = 0$ zeigen sich sensitiv auf die Schallgeschwindigkeiten bei isotropen Werkstoffverhalten. Diese haben weiterhin den Vorteil, dass in diesem Bereich die Dämpfung besonders hoch ist und sich somit leichter Dämpfungsparameter auf Basis dieser bestimmten lassen sollten, sofern die Mode in dem Bereich ausreichend detektiert wird.

Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach dem Nachnamen des ersten Autors, der nachfolgenden Autoren, und anschließend nach dem Erscheinungsjahr sortiert.

- [Ach76] J. D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. 1. ed., 2. printing. Bd. 16. North-Holland series in applied mathematics and mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1976. ISBN: 0720423678.
- [AC90] D. Alleyne und P. Cawley. „A 2-dimensional Fourier transform method for the quantitative measurement of Lamb modes“. In: *IEEE Symposium on Ultrasonics*. IEEE, 1990, S. 1143–1146. doi: 10.1109/ULTSYM.1990.171541.
- [AC91] D. Alleyne und P. Cawley. „A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.3 (1991), S. 1159. ISSN: 00014966. doi: 10.1121/1.400530.
- [Alt18] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Aufl. 2018. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 9783662575048. URL: <http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-epflicht-1556318>.
- [AL06] R. J. Asaro und V. A. Lubarda. *Mechanics of solids and materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9780521166119. doi: 10.1017/CBO9780511755514.
- [Aul90a] B. A. Auld. *Acoustic Fields and waves in solids*. 2. ed. Bd. 2. Krieger, 1990. ISBN: 089874783X.
- [Aul90b] B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. 2. ed. Bd. 1. Acoustic fields and waves in solids. Krieger, 1990. ISBN: 0-89874-782-1.

Literaturverzeichnis

- [BT86] R. L. Bagley und P. J. Torvik. „On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior“. In: *Journal of Rheology* 30.1 (1986), S. 133–155. ISSN: 0148-6055. DOI: 10.1122/1.549887.
- [Bäk02] M. Bäker. *Numerische Methoden in der Materialwissenschaft*. 1. Aufl. Bd. 8. Braunschweiger Schriften zum Maschinenbau. Braunschweig: Fachbereich Maschinenbau der TU Braunschweig, 2002. ISBN: 3936148082.
- [BDF05] I. Bartoli, F. Di Lanza Scalea, M. Fateh und E. Viola. „Modeling guided wave propagation with application to the long-range defect detection in railroad tracks“. In: *NDT & E International* 38.5 (2005), S. 325–334. ISSN: 09638695. DOI: 10.1016/j.ndteint.2004.10.008.
- [BMD06] I. Bartoli, A. Marzani, F. Di Lanza Scalea und E. Viola. „Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section“. In: *Journal of Sound and Vibration* 295.3-5 (2006), S. 685–707. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.01.021.
- [Bat96] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1996. ISBN: 0-13-301458-4.
- [Bau16] F. Bause. „Ein ultraschallbasiertes inverses Messverfahren zur Charakterisierung viskoelastischer Materialparameter von Polymeren“. Dissertation. Universität Paderborn, 2016.
- [BRF16] F. Bause, J. Rautenberg, N. Feldmann, M. Webersen, L. Claes, H. Gravenkamp und B. Henning. „Ultrasonic transmission measurements in the characterization of viscoelasticity utilizing polymeric waveguides“. In: *Measurement Science and Technology* 27.10 (2016). DOI: 10.1088/0957-0233/27/10/105601.
- [BRH13] F. Bause, J. Rautenberg und B. Henning. „Design, modeling and identification of an ultrasonic composite transducer for target impedance independent short pulse generation“. In: *AMA Conferences*. 2013, S. 68–73. DOI: 10.5162/sensor2013/A3.2.
- [Ber54] L. Bergmann. *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*. 1954.

- [BRH98] T. Bergmann, J. O. A. Robertsson und K. Holliger. „Finite-difference modeling of electromagnetic wave propagation in dispersive and attenuating media“. In: *GEOPHYSICS* 63.3 (1998), S. 856–867. DOI: 10.1190/1.1444396.
- [Bes87] D. E. Beskos. „Boundary Element Methods in Dynamic Analysis“. In: *Applied Mechanics Reviews* 40.1 (1987), S. 1–23. ISSN: 00036900. DOI: 10.1115/1.3149529.
- [BT58] R. B. Blackman und J. W. Tukey. „The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering - Part II“. In: *The Bell System Technical Journal* 37.2 (1958), S. 485–569. ISSN: 0005-8580. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1958.tb01530.x.
- [BLB18] N. Bochud, J. Laurent, Bruno, Francois, Royer, Daniel und C. Prada. „Towards real-time assessment of anisotropic plate properties using elastic guided waves“. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 143 (2018), S. 1138–1147.
- [Bon09a] Bond Laminates. *Tepex dynalite 102-RG600(x)*. Jan. 2009.
- [Bon22a] Bond Laminates. *Tepex dynalite 102-RG600(x)*. Feb. 2022.
URL: <https://lanxess.com/-/media/Project/Lanxess/Corporate-Internet/Products-and-Solutions/Brands/Tepex/Data-sheets/MDS102RG600x47.pdf>.
- [Bon22b] Bond Laminates. *Tepex® dynalite 102-RGUD600(x)*. Feb. 2022.
- [BO12] D. Bonefeld und C. Obermann. „Spriform: A hybrid technique for serial production of 3D parts of continuous fiber reinforced thermoplastics“. In: *European Conference on Composite Materials*. Feb. 2012.
- [Bon09b] M. Bonnet. *Kunststoffe in der Ingenieuranwendung: Verstehen und zuverlässig auswählen*. SpringerLink Bücher. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2009. ISBN: 9783834893031. DOI: 10.1007/978-3-8348-9303-1.
- [Bor09] R. D. Borcherdt. *Viscoelastic Waves in Layered Media*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780511580994. DOI: 10.1017/CBO9780511580994.

Literaturverzeichnis

- [Bra18] R. M. Brannon. *Rotation, Reflection, and Frame Changes*. 2053-2563. IOP Publishing, 2018. ISBN: 978-0-7503-1454-1. DOI: 10.1088/978-0-7503-1454-1. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/978-0-7503-1454-1>.
- [CD21] *CAMPUS Datasheet, CELAPEX CL 100G-PEEK*. zuletzt abgerufen am 11.02.2021. URL: <https://www.campusplastics.com/material/pdf/118887/CELAPEXCL100G?sLg=en>.
- [CKK88] J. M. Carcione, D. Kosloff und R. Kosloff. „Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium“. In: *Geophysical Journal International* 95.3 (1988), S. 597–611. ISSN: 1520-8524. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1988.tb06706.x.
- [CvS03] J. E. Carlson, J. van Deventer, A. Scolan und C. Carlander. „Frequency and temperature dependence of acoustic properties of polymers used in pulse-echo systems“. In: *IEEE Symposium on Ultrasonics, 2003*. IEEE, Okt. 2003, S. 885–888. ISBN: 0-7803-7922-5. DOI: 10.1109/ULTSYM.2003.1293541.
- [CC96] M. Castaings und P. Cawley. „The generation, propagation, and detection of Lamb waves in plates using air-coupled ultrasonic transducers“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 100.5 (1996), S. 3070–3077. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.417193.
- [CH01] M. Castaings und B. Hosten. „Lamb and SH waves generated and detected by air-coupled ultrasonic transducers in composite material plates“. In: *NDT & E International* 34.4 (2001), S. 249–258. ISSN: 09638695. DOI: 10.1016/S0963-8695(00)00065-7.
- [CHK00] M. Castaings, B. Hosten und T. Kundu. „Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties“. In: *NDT & E International* 33.6 (2000), S. 377–392. ISSN: 09638695. DOI: 10.1016/S0963-8695(00)00004-9.
- [CH] H.-H. Cerjak und T. Haider. *FWF-Projekt P9007: Entwicklung eines hybriden Auswahlsystems für Konstruktionswerkstoffe*. URL: wiki.epfl.ch/%20fournisseurs/documents/werkstoffgruppen.xls.

- [CWZ00] J. C. Cheng, T. H. Wang und S. Y. Zhang. „Normal mode expansion method for laser-generated ultrasonic Lamb waves in orthotropic thin plates“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 70.1 (2000), S. 57–63. ISSN: 0946-2171. DOI: 10.1007/s003400050008.
- [Cla21] L. Claes. „Messverfahren für die akustische Absorption in reinen Fluiden zur Bestimmung der Volumenviskosität“. Dissertation. Universität Paderborn, 2021.
- [CHB19] L. Claes, L. M. Hülskämper, E. Baumhögger, N. Feldmann, R. Spencer Chatwell, J. Vrabec und B. Henning. „Acoustic absorption measurement for the determination of the volume viscosity of pure fluids / Messverfahren für die akustischen Absorption zur Bestimmung der Volumenviskosität reiner Fluide“. In: 86.s1 (2019), S. 2–6. ISSN: 0171-8096.
- [CMB16] L. Claes, T. Meyer, F. Bause, J. Rautenberg und B. Henning. „Determination of the material properties of polymers using laser-generated broadband ultrasound“. In: *Journal of Sensors and Sensor Systems* 5.1 (2016), S. 187–196. ISSN: 2194-878X. DOI: 10.5194/jsss-5-187-2016.
- [CSG21] L. Claes, H. Schmiegel, C. Grünsteidl, S. Johannesmann, M. Webersen und B. Henning. „Investigating peculiarities of piezoelectric detection methods for acoustic plate waves in material characterisation applications“. In: *tm - Technisches Messen* aop (2021). ISSN: 0171-8096.
- [CPR10] D. Clorennec, C. Prada und D. Royer. „Laser ultrasonic inspection of plates using zero-group velocity lamb modes“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 57.5 (2010), S. 1125–1132. DOI: 10.1109/TUFFC.2010.1523.
- [Coh18] Coherent. *Flare NX*. 2018. URL: <https://www.coherent.com/>.
- [CGH92] H. Coufal, R. Grygier, P. Hess und A. Neubrand. „Broadband detection of laser-excited surface acoustic waves by a novel transducer employing ferroelectric polymers“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 92.5 (1992), S. 2980. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.404363.

Literaturverzeichnis

- [DPV97] V. Deutsch, M. Platte und M. Vogt. *Ultraschallprüfung: Grundlagen und industrielle Anwendungen*. reprint von 1997. VDI-Buch. Berlin: Springer, 1997. ISBN: 9783642638640.
- [DB10] R. Dhayalan und K. Balasubramaniam. „A hybrid finite element model for simulation of electromagnetic acoustic transducer (EMAT) based plate waves“. In: *NDT & E International* 43.6 (2010), S. 519–526. ISSN: 09638695. DOI: 10.1016/j.ndteint.2010.05.008.
- [DIN 527] *DIN EN ISO 527-1. Kunststoffe – Bestimmung der Zugeigenschaften – Teil 1: Allgemeine Grundsätze*. Norm. Jan. 2019.
- [DIN 53441] *DIN EN ISO 53441. Prüfung von Kunststoffen - Spannungsrelaxationsversuch*. Norm. zurückgezogen. Jan. 1984.
- [DIN 899] *DIN EN ISO 899-1. Kunststoffe – Bestimmung des Kriechverhaltens – Teil 1: Zeitstand-Zugversuch*. Norm. März 2018.
- [Dom12] H. Dominghaus. *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen*. Hrsg. von P. Elsner, P. Eyerer und T. Hirth. 8. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-16172-8.
- [DEE08] H. Dominghaus, P. Elsner, P. Eyerer und T. Hirth. *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen*. 7., neu bearb. und erw. Aufl. VDI-Buch. Berlin und Heidelberg: Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-72400-1. DOI: 10.1007/978-3-540-72401-8. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10223740>.
- [DIF21] D. Dreiling, D. Itner, N. Feldmann, C. Scheidemann, H. Gravenkamp und B. Henning. „Application and modelling of ultrasonic transducers using 1-3 piezoelectric composites with structured electrodes“. In: *DAGA 2021 - 47. Jahrestagung für Akustik*. Hrsg. von Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. Berlin: Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2021, S. 83–86. ISBN: 978-3-939296-18-8.
- [Ed18] Edmung Optics. *Scorpii Nd:YAG Beam Expanders*. 2019. URL: <https://www.edmundoptics.de/f/scorpii-ndyag-beam-expanders/38637/>.

- [Ehr06] G. W. Ehrenstein. *Faserverbund-Kunststoffe: Werkstoffe-Verarbeitung-Eigenschaften*. 2nd. München: Carl Hanser Verlag, 2006. ISBN: 978-3-446-22716-3.
- [Esl14] M. R. Eslami. *Finite elements methods in mechanics*. Bd. 216. Solid mechanics and its applications. Cham: Springer, 2014. ISBN: 9783319080369. doi: 10.1007/978-3-319-08037-6.
- [Fel21] N. Feldmann. „Ein modellbasiertes Messverfahren zur Charakterisierung von Piezokeramiken unter Verwendung eines einzelnen scheibenförmigen Probekörpers“. Dissertation. Universität Paderborn, 2021.
- [FSC21] N. Feldmann, V. Schulze, L. Claes, B. Jurgelucks, L. Meihost, A. Walther und B. Henning. „Modelling damping in piezoceramics: A comparative study“. In: *tm - Technisches Messen* (2021). ISSN: 0171-8096. doi: 10.1515/teme-2020-0096. URL: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/teme-2020-0096/html>.
- [Fem18] Femto Messtechnik GmbH. *Datasheet HQA-15M-10T*. 2018. URL: <https://www.femto.de/images/pdf-dokumente/de-hqa-15m-10t.pdf>.
- [FHA10] D. A. Fitch, B. K. Hoffmeister und J. de Ana. „Ultrasonic evaluation of polyether ether ketone and carbon fiber-reinforced PEEK“. In: *Journal of Materials Science* 45.14 (2010), S. 3768–3777. ISSN: 0022-2461. doi: 10.1007/s10853-010-4428-1.
- [Gmb] C. E. P. GmbH. *CENTROPEEK/PEEK. Technisches Datenblatt*. URL: <https://dock.centroplast.de/de/download/data-sheet/technical-data>.
- [Gol12] D. E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. 30. print. Boston: Addison-Wesley, 2012. ISBN: 0201157675.
- [Gra91] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. New York: Dover Publications, 1991. ISBN: 0-486-66745-6. URL: <http://www.loc.gov/catdir/description/dover033/91009350.html>.
- [GBS14] H. Gravenkamp, C. Birk und C. Song. „The computation of dispersion relations for axisymmetric waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method“. In: *Ultrasonics* 54.5 (2014), S. 1373–1385. doi: 10.1016/j.ultras.2014.02.004.

Literaturverzeichnis

- [GMS13] H. Gravenkamp, H. Man, C. Song und J. Prager. „The computation of dispersion relations for three-dimensional elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method“. In: *Journal of Sound and Vibration* (2013). ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.02.007.
- [Gre28] G. Green. „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“. In: (1828). DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325074.003>.
- [GS15] W. Grellmann und S. Seidler. *Kunststoffprüfung*. München: Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2015. ISBN: 978-3-446-44350-1. DOI: 10.3139/9783446443907.
- [GBH18] C. Grünsteidl, T. Berer, M. Hettich und I. Veres. „Determination of thickness and bulk sound velocities of isotropic plates using zero-group-velocity Lamb waves“. In: *Applied Physics Letters* 112.25 (2018), S. 251905. ISSN: 00036951. DOI: 10.1063/1.5034313.
- [GVR13] C. Grünsteidl, I. A. Veres, J. Roither, P. Burgholzer, T. W. Murray und T. Berer. „Spatial and temporal frequency domain laser-ultrasound applied in the direct measurement of dispersion relations of surface acoustic waves“. In: *Applied Physics Letters* 102.1 (2013), S. 011103. ISSN: 00036951. DOI: 10.1063/1.4773234.
- [Gua10] C. Guardasoni. *Wave propagation analysis with boundary element method*. Leditizioni, 2010. ISBN: 9788895994154. URL: <https://directory.doabooks.org/handle/20.500.12854/62535>.
- [Hab89] P. Haberäcker. *Digitale Bildverarbeitung: Grundlagen und Anwendungen mit 26 Übungen und 29 PASCAL-Algorithmen*. 3. Aufl. Hanser-Studienbücher. München: Hanser, 1989. ISBN: 3446156445.
- [Har78] F. J. Harris. „On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform“. In: *Proceedings of the IEEE* 66.1 (1978), S. 51–83. ISSN: 0018-9219. DOI: 10.1109/PROC.1978.10837.

- [Has53] N. A. Haskell. „The dispersion of surface waves on multi-layered media*“. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 43.1 (1953), S. 17–34. ISSN: 1943-3573. DOI: 10.1785/BSSA0430010017.
- [HN19] T. Hayashi und S. Nakao. „Defect imaging for plate-like structures using diffuse acoustic wave generated by modulated laser“. In: AIP Conference Proceedings. Author(s), 2019, S. 050003. DOI: 10.1063/1.5099769.
- [Hew60] E. Hewitt. „Integration by Parts for Stieltjes Integrals“. In: *The American Mathematical Monthly* 67.5 (1960), S. 419. ISSN: 00029890. DOI: 10.2307/2309287.
- [HPP] High Performance Plastics GmbH. *PEEK*. zuletzt abgerufen am 06.07.2023. URL: <https://www.hpp-performance.com/peek.html>.
- [Hil00] M. C. Hill. „Methods and Guidelines for Effective Model Calibration“. In: *Building partnerships*. Hrsg. von R. H. Hotchkiss. Reston, Va.: ASCE American Society of Civil Engineers, 2000, S. 1–10. ISBN: 9780784405178. DOI: 10.1061/40517(2000)18.
- [Hit22] Hitachi High-Tech Analytical Science. zuletzt abgerufen am 31.10.2022. URL: <https://hha.hitachi-hightech.com/de/produktangebot/products/thermische-analysegeraete/dynamisch-mechanische-analyse-dma7100>.
- [HN11] S. Holm und S. P. Näsholm. „A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 130.4 (2011), S. 2195–2202. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.3631626. URL: <http://link.aip.org/link/?JAS/130/2195/1>.
- [IGD21] D. Itner, H. Gravenkamp, D. Dreiling, N. Feldmann und B. Henning. „Efficient semi-analytical simulation of elastic guided waves in cylinders subject to arbitrary non-symmetric loads“. In: *Ultrasonics* 114 (2021), S. 106389. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106389. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0041624X21000317>.

Literaturverzeichnis

- [JJ01] Y. Jing und C. Jian-Chun. „A New Inverse Method of Elastic Constants for a Fibre-Reinforced Composite Plate from Laser-Based Ultrasonic Lamb Waves“. In: *Chinese Physics Letters* 18.12 (Nov. 2001), S. 1620–1623. DOI: 10.1088/0256-307x/18/12/324. URL: <https://doi.org/10.1088%2F0256-307x%2F18%2F12%2F324>.
- [JCF22] S. Johannesmann, L. Claes, N. Feldmann, H. Zeipert und B. Henning. „Lamb wave based approach to the determination of acoustic material parameters“. In: *tm - Technisches Messen* 0.0 (2022). ISSN: 0171-8096. DOI: 10.1515/teme-2021-0134. URL: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/teme-2021-0134/html>.
- [JCH21] S. Johannesmann, L. Claes und B. Henning. „Lamb wave based approach to the determination of elastic and viscoelastic material parameters“. In: *tm - Technisches Messen* 88.s1 (2021), s28–s33. ISSN: 0171-8096. DOI: 10.1515/teme-2021-0070. URL: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/teme-2021-0070/html>.
- [JCH22] S. Johannesmann, L. Claes und B. Henning. „Estimation of viscoelastic material parameters of polymers using Lamb waves“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2022*. 2022.
- [JCW17] S. Johannesmann, L. Claes, M. Webersen und B. Henning. „Inverser Ansatz zur akustischen Charakterisierung plattenförmiger Materialproben“. In: *Deutsche Gesellschaft für Akustik e. V. 2017–Fortschritte der Akustik*. Berlin: Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2017, S. 999–1002. ISBN: 9783939296126.
- [JDW18] S. Johannesmann, J. Düchting, M. Webersen, L. Claes und B. Henning. „An acoustic waveguide-based approach to the complete characterisation of linear elastic, orthotropic material behaviour: Ein Wellenleiter-basierter Ansatz zur akustischen Charakterisierung des kompletten linear-elastischen, orthotropen Materialverhaltens“. In: *tm - Technisches Messen* 85.7-8 (2018), S. 478–486. ISSN: 0171-8096. DOI: 10.1515/teme-2017-0132.
- [JWD19] S. Johannesmann, M. Webersen, J. Düchting, L. Claes und B. Henning. „Characterization of the Linear-Acoustic Material Behavior of Fiber-Reinforced Composites using Lamb

- Waves“. In: *AIP Conference Proceedings 2102*. Bd. 2102. 2019. doi: 10.1063/1.5099742.
- [KHL07] M. Kaltenbacher, A. Hauck und R. Lerch. „Hierarischische Finite-Elemente für die numerische Berechnung von akustischen Feldproblemen“. In: *Fortschritte der Akustik 2007*. Bd. 37. 2007, S. 207–208.
- [Kal07] M. Kaltenbacher. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. 2. Aufl. Springer-Verlag, 2007. ISBN: 354071359X. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10187423>.
- [KLT11] H. Kannajosyula, C. J. Lissenden, D. O. Thompson und D. E. Chimenti. „Lamb-like wave mode selection algorithm for multilayer plate NDE“. In: AIP Conference Proceedings. AIP, 2011, S. 191–198. doi: 10.1063/1.3591856.
- [KMD16] M. Kersemans, A. Martens, J. Degrieck, K. Van Den Abeele, S. Delrue, L. Pyl, F. Zastavnik, H. Sol und W. Van Paepegem. „The Ultrasonic Polar Scan for Composite Characterization and Damage Assessment: Past, Present and Future“. In: *Applied Sciences* 6.2 (2016). ISSN: 2076-3417. doi: 10.3390/app6020058. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/6/2/58>.
- [KST05] M. Kohandel, S. Sivaloganathan, G. Tenti und K. Darvish. „Frequency dependence of complex moduli of brain tissue using a fractional Zener model“. In: *Physics in Medicine and Biology* 50.12 (März 2005), S. 2799–2805. doi: 10.1088/0031-9155/50/12/005. URL: <https://doi.org/10.1088/0031-9155/50/12/005>.
- [Kra28] H. A. Kramers. „La diffusion de la lumière par les atomes“. In: *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*. N. Zanichelli, 1928.
- [KK86] J. Krautkraemer und H. Krautkraemer. *Werkstoffprüfung mit Ultraschall*. Berlin: Springer, 1986. ISBN: 3-540-15754-9.
- [Kro26] R. d. L. Kronig. „On the Theory of Dispersion of X-Rays“. In: *Journal of the Optical Society of America* 12.6 (1926), S. 547. ISSN: 0030-3941. doi: 10.1364/JOSA.12.000547.
- [Ku23] Kunststoffedirekt. *PA-Polyamide*. <https://kunststoffedirekt.de/werkstoffe/pa-polyamide>.

Literaturverzeichnis

- [Lak04] R. S. Lakes. „Viscoelastic measurement techniques“. In: *Review of Scientific Instruments* 75.4 (2004), S. 797–810. ISSN: 0034-6748. DOI: 10.1063/1.1651639.
- [Lam17] H. Lamb. „On Waves in an Elastic Plate“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 93.648 (1917), S. 114–128. ISSN: 1364-5021. DOI: 10.1098/rspa.1917.0008.
- [Läp12] V. Läpple. *Einführung in die Festigkeitslehre: Lehr- und Übungsbuch*. 3., verbesserte und erweiterte Auflage, 2011. Studium. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden, 2012. ISBN: 978-3834882813. DOI: 10.1007/978-3-8348-8281-3.
- [LTB16] Lasertechnik Berlin. *MNL 100 Mini-Nitrogen-Laser*. 2016. URL: <https://www.ltb-berlin.de/produkte/laser/mnl-100/>.
- [LSW09] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf. *Technische Akustik*. Springer, 2009. ISBN: 9783540234302.
- [LMH] L. Li, H. Mei, M. F. Haider, D. Rizos, Y. Xia und V. Giurgiutiu. „Guided wave field calculation in anisotropic layered structures using normal mode expansion method“. In: *Smart Structures and Systems*. Bd. 26, S. 157–174.
- [Lin14] M. Link. *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. 4. korrigierte Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-527-355-63. DOI: 10.1007/978-3-658-03557-0.
- [LP13] M. Lowe und B. Pavlakovic. *Disperse: A system for Generating Dispersion Curves: User's Manual: Version 2.0.20a*. 2013.
- [LJH19] Y. Lugovtsova, S. Johannesmann, B. Henning und J. Prager. „Analysis of Lamb wave mode repulsion and its implications to the characterisation of adhesive bonding strength“. In: *2019 International Congress on Ultrasonics*. Proceedings of Meetings on Acoustics. ASA, 2019, S. 030005. DOI: 10.1121/2.0001074.
- [MDB05] B. R. Mace, D. Duhamel, M. J. Brennan und L. Hinke. „Finite element prediction of wave motion in structural waveguides“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 117.5 (2005), S. 2835–2843. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.1887126.

- [MWG06] M. Maess, N. Wagner und L. Gaul. „Dispersion curves of fluid filled elastic pipes by standard FE models and eigenpath analysis“. In: *Journal of Sound and Vibration* 296.1-2 (2006), S. 264–276. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.005.
- [Mai94] F. Mainardi. „Fractional relaxation in anelastic solids“. In: *Journal of Alloys and Compounds* 211-212 (1994), S. 534–538. ISSN: 09258388. DOI: 10.1016/0925-8388(94)90560-6.
- [Mai10] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. London: Imperial College Press, 2010. ISBN: 978-1-84816-329-4.
- [MH13] H. A. Mang und G. Hofstetter. *Festigkeitslehre*. 4., aktualisierte Aufl. 2013. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-40752-9.
- [MC] *Manifattura Cattaneo PA 6 Nylon*. zuletzt abgerufen am 21.07.23. URL: <https://www.matweb.com/search/datasheet.aspx?matguid=7985336ccd2e4627bfadd6f680bd9aa5&ckck=1>.
- [Mar19] C. C. Margossian. „A review of automatic differentiation and its efficient implementation“. In: *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery* 9.4 (2019). ISSN: 1942-4787. DOI: 10.1002/widm.1305.
- [MKD19] A. Martens, M. Kersemans, J. Daemen, E. Verboven, W. van Paepeghem, S. Delrue und K. van den Abeele. „Characterization of the orthotropic viscoelastic tensor of composites using the Ultrasonic Polar Scan“. In: *Composite Structures* 230 (2019), S. 111499. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111499.
- [MW05] W. Martienssen und H. Warlimont, Hrsg. *Springer Handbook of Condensed Matter and Materials Data*. Heidelberg und New York: Springer, 2005. ISBN: 9781280625947.
- [MM12] A. Marzani und L. d. Marchi. „Characterization of the elastic moduli in composite plates via dispersive guided waves data and genetic algorithms“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* (2012). ISSN: 1045-389X. DOI: 10.1177/1045389X12462645.
- [Mas64] W. P. Mason, Hrsg. *Physical acoustics: Principles and methods*. New York: Academic Press, 1964. ISBN: 0124779018.

Literaturverzeichnis

- [Mat] MathWorks. *tukeywin*. zuletzt abgerufen am 27.07.2023. URL: <https://de.mathworks.com/help/signal/ref/tukeywin.html>.
- [MMD09] G. Mavko, T. Mukerji und J. Dvorkin. *The rock physics handbook: Tools for seismic analysis of porous media*. 2nd ed. Cambridge, UK und New York: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 0511650620. URL: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=304721>.
- [MT11] *MCP9808*. Microchip Technology. 2011. URL: <https://www.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/25095A.pdf>.
- [MA71] H. J. McSkimin und P. Andreatch. „A Water Immersion Technique for Measuring Attenuation and Phase Velocity of Longitudinal Waves in Plastics“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 49.3B (1971), S. 713–722. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.1912407.
- [MHM11] G. Menges, E. Haberstroh, W. Michaeli und E. Schmachtenberg. *Menges Werkstoffkunde Kunststoffe*. 2011.
- [MÖ10] M. Merkel und A. Öchsner. *Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode*. Heidelberg: Springer, 2010. ISBN: 9783642049927.
- [MBG04] J. C. F. Millett, N. K. Bourne und G. T. GrayIII. „The response of polyether ether ketone to one-dimensional shock loading“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 37.6 (Feb. 2004), S. 942–947. DOI: 10.1088/0022-3727/37/6/021. URL: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/37/6/021>.
- [Mit21] Mitutoyo. *Digitale Bügelmessschraube*. zuletzt abgerufen am 12.01.2021. URL: https://shop.mitutoyo.de/web/mitutoyo/de_DE/mitutoyo/PR/293-821-30/datasheet.xhtml.
- [MJQ99] F. Moser, L. J. Jacobs und J. Qu. „Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method“. In: *NDT & E International* 32.4 (1999), S. 225–234. ISSN: 09638695. DOI: 10.1016/S0963-8695(98)00045-0.
- [NM65] J. A. Nelder und R. Mead. „A simplex method for function minimization“. In: *Computer journal* 7.4 (1965), S. 308–313.

- [N23] Netzsch. *Dynamisch-mechanische Analysatoren*. zuletzt abgerufen am 01.09.2023. URL: <https://analyzing-testing.netzschi.com/de/auftragsmessungen/methoden/dynamisch-mechanische-analyse-dma>.
- [NZL22] M. Nicolai, H. Zeipert, Y. Lugovtsova, J. Bulling, S. Johannesmann, J. Prager und B. Henning. „Quantification of the adhesive coupling of layered structures using guided ultrasonic waves“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2022*. 2022.
- [Nye12] J. F. Nye. *Physical properties of crystals: Their representation by tensors and matrices*. Reprinted. Oxford science publications. Oxford: Clarendon Press, 2012. ISBN: 0198511655.
- [PT55] R. Penrose und J. A. Todd. „A generalized inverse for matrices“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51.03 (1955), S. 406–413. ISSN: 0305-0041. DOI: 10.1017/S0305004100030401.
- [PB19] D. Pereira und P. Belanger. „Inverse characterization of adhesive shear modulus in bonded stiffeners using ultrasonic guided waves“. In: AIP Conference Proceedings. Author(s), 2019, S. 050006. DOI: 10.1063/1.5099772.
- [PI20] *Piezomaterialien auf Basis von Blei-Zirkonat-Titanat*. Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG. Lindenstraße 07589 Lederhose, 2020. URL: <https://www.piceramic.de/de/produkte/piezoelektrische-materialien>.
- [Poi08a] B. I. des Poids et Mesures. *Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM): Evaluation of measurement data*. 2008.
- [Poi08b] B. I. des Poids et Mesures. *Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM): Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” —Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. 2008.
- [PKB07] R. Poli, J. Kennedy und T. Blackwell. „Particle swarm optimization“. In: *Swarm Intelligence* 1.1 (2007), S. 33–57. ISSN: 1935-3812. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.

Literaturverzeichnis

- [PAE22] *Polyaryletherketone (PAEK) – Eigenschaften und Anwendung.* zuletzt abgerufen am 16.03.2022. URL: <https://www.kunststoffe.de/a/grundlagenartikel/polyaryletherketone-paek-eigenschaften-u-285534>.
- [PET22] *Polyethylenterephthalat (PET).* abgerufen am 19.01.2022. URL: <https://www.kunststoffe.de/a/grundlagenartikel/polyethylenterephthalat-pet-285552>.
- [Pol] Polymehr. *Produktinformation PA6.* zuletzt abgerufen am 16.02.2021. URL: <https://www.polymehr.com/wp-content/uploads/technisches-datenblatt-pa-6.pdf>.
- [PPD21] *Polymer Properties Database.* zuletzt abgerufen am 11.02.2021. URL: <http://polymerdatabase.com/polymer%20physics/Poisson%20Table2.html>.
- [PKR19] M. Ponschab, D. A. Kiefer und S. J. Rupitsch. „Towards an Inverse Characterization of Third Order Elastic Constants Using Guided Waves“. In: *2019 IEEE International Ultrasonics Symposium*. IEEE, 2019. DOI: 10.1109/ultsym.2019.8926294.
- [Pow94] M. J. D. Powell. „A Direct Search Optimization Method That Models the Objective and Constraint Functions by Linear Interpolation“. In: *Advances in Optimization and Numerical Analysis*. Springer, Dordrecht, 1994, S. 51–67. DOI: 10.1007/978-94-015-8330-5_4. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-015-8330-5_4.
- [Pow09] M. J. D. Powell. *The BOBYQA algorithm for bound constrained optimization without derivatives*. Cambridge, 2009. URL: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NA_papers/NA2009_06.pdf.
- [PCR08] C. Prada, D. Clorennec und D. Royer. „Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 124.1 (2008), S. 203–212. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.2918543.
- [PLS05] K. V. Price, J. A. Lampinen und R. M. Storn. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Natural Computing Series. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN: 9783540313069. DOI: 10.1007/3-540-31306-0.

- [Pri96] T. Pritz. „Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials“. In: *Journal of Sound and Vibration* 195.1 (1996), S. 103–115. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0406.
- [Pri03] T. Pritz. „Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials“. In: *Journal of Sound and Vibration* 265.5 (2003), S. 935–952. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01530-4. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X02015304>.
- [Qua] Quadrant Engineering Plastic Products. *Ketron 1000 PEEK*. zuletzt abgerufen am 22.01.2022. URL: https://media.mcam.com/fileadmin/quadrant/documents/QEPP/EU/Product_Data_Sheets_PDF/AEP/Ketron_1000_PEEK_PDS_D_28042011.pdf.
- [RBO07] P. J. Rae, E. N. Brown und E. B. Orler. „The mechanical properties of poly(ether-ether-ketone) (PEEK) with emphasis on the large compressive strain response“. In: *Polymer* 48.2 (2007), S. 598–615. ISSN: 00323861. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032386106012742>.
- [Rau12] J. Rautenberg. „Ein wellenleiterbasiertes Verfahren zur Bestimmung von Materialdaten für die realitätsnahe Simulation von Schallausbreitungsphänomenen am Beispiel stark absorbernder Kunststoffe“. Dissertation. Universität Paderborn, 2012.
- [Ray85] J. W. S. Rayleigh. „On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 17.1 (1885). ISSN: 00246115. DOI: 10.1112/plms/s1-17.1.4.
- [RDC11] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq und R. Lemaire. „A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.3 (2011), S. 991–1010. ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.09.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327010003079>.
- [Rie03] A. Rieder. *Keine Probleme mit inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg, 2003. ISBN: 9783528031985.

Literaturverzeichnis

- [Rog83] L. Rogers. „Operators and Fractional Derivatives for Viscoelastic Constitutive Equations“. In: *Journal of Rheology* 27.4 (1983), S. 351–372. ISSN: 0148-6055. DOI: 10.1122/1.549710.
- [RFK12] L. Romoli, F. Fischer und R. Kling. „A study on UV laser drilling of PEEK reinforced with carbon fibers“. In: *Optics and Lasers in Engineering* 50.3 (2012), S. 449–457. ISSN: 0143-8166. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2011.10.008. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816611002971>.
- [Ros04] J. L. Rose. *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521548892. URL: <https://books.google.de/books?id=DEtHDJJ-RS4C>.
- [Ros88] J. F. Rosenbaum. *Bulk acoustic wave theory and devices*. 1. print. The Artech House acoustics library. Boston u.a.: Artech House, 1988. ISBN: 0-89006-265-X.
- [RM13] T. K. Roy und M. Morshed. „Performance analysis of low pass FIR filters design using Kaiser, Gaussian and Tukey window function methods“. In: *2013 2nd International Conference on Advances in Electrical Engineering (ICAEE)*. IEEE, 2013, S. 1–6. ISBN: 978-1-4799-2465-3. DOI: 10.1109/ICAEE.2013.6750294.
- [RD96] D. Royer und E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids 1-Free and Guided Propagation*. Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer, 1996. ISBN: ISBN 978-3-540-65932-7.
- [SRM11] M. Sale, P. Rizzo und A. Marzani. „Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.6 (2011), S. 2241–2256. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymssp.2011.02.004.
- [Sch15] K. Schiebold. *Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung - Ultraschallprüfung*. Berlin: Springer Vieweg, 2015. ISBN: 97-836-624-469-97. DOI: 10.1007/978-3-662-44700-0.
- [Sch07] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2., bearb. und erw. Aufl. VDI. Berlin, Heidelberg und New York: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-72189-5.

- [Sha49] C. E. Shannon. „Communication in the Presence of Noise“. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 37.1 (1949).
- [SML14] F. Singer, C. Meier und G. Lindner. „Laser-Acoustic Measurement of Anisotropic Material Parameters“. In: *Beiträge der 17. ITG/GMA-Fachtagung*. Nürnberg, 2014.
- [SD08] S. N. Sivanandam und S. N. Deepa. *Introduction to Genetic Algorithms*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540731894. DOI: 10.1007/978-3-540-73190-0.
- [SON] SONGHAN. *Bond Laminates TEPEX dynalite 102-RG600(x) Roving Glass*. zuletzt abgerufen am 08.06.2022. URL: http://www.lookpolymers.com/polymer_Bond-Laminates-TEPEX-dynalite-102-RG600x47-Roving-Glass-PA-6-Consolidated-Composite-Laminate.php.
- [SCG11] S. Sorohan, N. Constantin, M. Găvan und V. Anghel. „Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes“. In: *Ultrasonics* 51.4 (2011), S. 503–515. DOI: 10.1016/j.ultras.2010.12.003.
- [Ste98] R. Steinbuch. *Finite Elemente - Ein Einstieg*. Berlin und Heidelberg: Springer, 1998. ISBN: 3540631283. DOI: 10.1007/978-3-642-58750-4.
- [SP97] R. Storn und K. Price. „Differential Evolution“. In: *Journal of Global Optimization* 11.4 (1997), S. 341–359. ISSN: 09255001. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
- [Šut84] V. A. Šutilov. *Physik des Ultraschalls*. Wien: Springer, 1984. ISBN: 978-3-211-81798-8.
- [Tex] Texas Instruments. *DMA Q800 Specifications*. zuletzt abgerufen am 31.10.2022. URL: <https://www.tainstruments.com/wp-content/uploads/dma.pdf>.
- [The00] P. S. Theocaris. „Sorting out the elastic anisotropy of transversely isotropic materials“. In: *Acta Mechanica* 143 (2000), S. 129–140. ISSN: 0001-5970. DOI: 10.1007/BF01170943.

Literaturverzeichnis

- [TS99] P. S. Theocaris und D. P. Sokolis. „Spectral decomposition of the compliance fourth-rank tensor for orthotropic materials“. In: *Applied Mechanics* /. Bd. 70. 1999, S. 289–306. URL: <https://rd.springer.com/article/10.1007/s004199900066#citeas>.
- [Tho50] W. T. Thomson. „Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium“. In: *Journal of Applied Physics* 21.2 (1950), S. 89–93. ISSN: 1089-7550. DOI: 10.1063/1.1699629.
- [TP21] TiePie engineering. *Handyscope HS5 specifications*. 2021. URL: <https://www.tiepie.com/en/usb-oscilloscope/handyscope-hs5>.
- [Tre07] F. Treyssède. „Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides“. In: *Geophysical Journal International* 121.6 (2007), S. 3398–3408. ISSN: 1520-8524. DOI: 10.1121/1.2730741.
- [Tuk67] J. W. Tukey. „An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis“. In: *Spectral Analysis of Time Series*. Hrsg. von B. Harris. New York: Wiley, 1967, S. 25–46.
- [ÜHD94] H. Überall, B. Hosten, M. Deschamps und A. Gérard. „Repulsion of phase–velocity dispersion curves and the nature of plate vibrations“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 96.2 (1994), S. 908–917. ISSN: 00014966. DOI: 10.1121/1.411434.
- [VGO20] P. Virtanen et al. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [VKB07] J. Vishnuvardhan, C. V. Krishnamurthy und K. Balasubramaniam. „Genetic algorithm based reconstruction of the elastic moduli of orthotropic plates using an ultrasonic guided wave single-transmitter-multiple-receiver SHM array“. In: *Smart Materials and Structures* 16.5 (2007), S. 1639–1650. ISSN: 0964-1726. DOI: 10.1088/0964-1726/16/5/017.
- [Voi66] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik: Mit Ausschluß der Kristalloptik*. Wiesbaden und s.l.: Vieweg+Teubner Verlag, 1966. ISBN: 9783663158844. DOI: 10.1007/978-3-663-15884-4.

- [VD06] T. H. Vu und A. J. Deeks. „Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65.10 (2006), S. 1714–1733. DOI: 10.1002/nme.1517.
- [WH02] I. M. Ward und D. W. Hadley. *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. Repr. Chichester: Wiley, 2002. ISBN: 0471938742.
- [WMM05] K. R. Waters, J. Mobley und J. G. Miller. „Causality-imposed (Kramers-Kronig) relationships between attenuation and dispersion“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 52.5 (2005), S. 822–833. ISSN: 0885-3010. DOI: 10.1109/tuffc.2005.1503968.
- [Web21] M. Webersen. „Zerstörungsfreie Charakterisierung der elastischen Materialeigenschaften thermoplastischer Polymerwerkstoffe mittels Ultraschall“. Dissertation. Universität Paderborn, 2021.
- [WS00] J. P. Wolf und C. Song. „The scaled boundary finite-element method – a primer: derivations“. In: *Computers & Structures* 78.1-3 (2000), S. 191–210. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/S0045-7949(00)00099-7.
- [WL99] T.-T. Wu und Y.-H. Liu. „On the measurement of anisotropic elastic constants of fiber-reinforced composite plate using ultrasonic bulk wave and laser generated Lamb wave“. In: *Ultrasonics* 37.6 (1999), S. 405–412. DOI: 10.1016/S0041-624X(99)00025-6.
- [Zab18] Zaber Technologies. *X-LSM-E Series Datasheet*. 2018.
- [ZCJ21] H. Zeipert, L. Claes, S. Johannesmann, Y. Lugovtsova, M. Nicolai, J. Prager und B. Henning. „An approach to adhesive bond characterisation using guided acoustic waves in multi-layered plates“. In: *at - Automatisierungstechnik* 69.11 (2021), S. 962–969. ISSN: 0178-2312. DOI: 10.1515/auto-2021-0089.
- [ZJN21] H. Zeipert, S. Johannesmann, M. Nicolai, Y. Lugovtsova, J. Prager und B. Henning. „Quantifying the coupling strength of adhesively bonded materials by investigating mode repulsion regions“. In: *DAGA 2021 - 47. Jahrestagung für Akustik*. Hrsg. von Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V.

Literaturverzeichnis

- Berlin: Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2021, S. 1532–1535. ISBN: 978-3-939296-18-8.
- [Zen65] C. Zener. *Elasticity and anelasticity of metals*. 5. IMPR. CHICAGO (U. A.) : The University of Chicago Press, 1965.
- [ZS49] C. M. Zener und S. Siegel. „Elasticity and Anelasticity of Metals“. In: *The Journal of Physical Chemistry* 53.9 (1949), S. 1468–1468.
- [Zha17] G. Zhang. *Introduction to integrative engineering: A computational approach to biomedical problems*. Boca Raton, London und New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2017. ISBN: 9781315388465.
- [ZF21] S. Zhang und W. Fan. „An efficient semi-analytical formulation for the Lamb-like waves in layered waveguides based on global discretization“. In: *Computers & Structures* 249 (2021), S. 106514. ISSN: 00457949. doi: 10.1016/j.compstruc.2021.106514.

A Anhang

A.1 Ebener Spannungszustand

Beim ebenen Spannungszustand werden die Spannungen in eine Raumrichtung, in der die Schicht als sehr dünn angenommen wird, z.B. x_3 zu Null angenommen [KHL07]. Unter der Annahme, dass alle Spannungskomponenten, die nicht in der x_1 - x_2 -Ebene liegen zu Null werden, ergibt sich für den ebenen Spannungszustand

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{pl},\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}_{\text{pl},\sigma}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{pl},\sigma}} \quad (\text{A.1})$$

mit der elastischen Nachgiebigkeitsmatrix $\boldsymbol{S}_{\text{pl},\sigma}$. Inversion von $\boldsymbol{S}_{\text{pl},\sigma}$ ergibt schließlich die Elastizitätsmatrix $\boldsymbol{C}_{\text{pl},\sigma}$ für den ebenen Spannungszustand, wie sie z.B. in der Laminattheorie [Sch07] zur Modellierung von Faser-verstärkten Kunststoffen verwendet wird.

A.2 Herleitung der Rayleigh-Lamb-Gleichung

Allgemein werden akustische Wellen in einem Festkörper über die Wellengleichung (Gleichung 2.57) beschrieben. Ebenso nimmt Lamb [Lam17] bei seiner Herleitung ein isotropes Materialmodell an, sodass sich Gleichung 2.57 zu

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + (\lambda_{\text{La}} + \mu) \text{grad}(\text{div} \boldsymbol{\xi}) = \rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.2})$$

vereinfacht, wobei die Lamé-Konstanten λ_{La} , μ und die Dichte ρ Materialparameter des Mediums sind. Gleichung A.2 wird nun für eine unendlich ausgedehnte Platte im Vakuum gelöst. Dabei wird davon ausgegangen, dass keinerlei mechanische Verschiebung in die z -Richtung auftritt ($\xi_z = 0$) und die sonstige Feldverteilung unabhängig von der z -Koordinate ist ($\partial/\partial z = 0$), was der Annahme eines ebenen Verzerrungszustands (vgl. Unterabschnitt 2.1.4) entspricht.

A Anhang

Die Randflächen der Platten liegen im Koordinatensystem bei $x = \pm t_h/2$, wobei angenommen wird, dass sich eine Welle in y -Richtung ausbreitet. Da sich die Platte im Vakuum befindet, wirkt keine mechanische Spannung normal auf die Randfläche, sodass sich die entsprechenden Komponenten des Spannungstensors zu Null ergeben:

$$\sigma_{xy}|_{x=\pm t_h/2} = \sigma_{xz}|_{x=\pm t_h/2} = \sigma_{xx}|_{x=\pm t_h/2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Lösen lässt sich Gleichung A.2 mithilfe des Helmholtz Theorems. Demnach lässt sich die Lösung in ein Skalarpotential Φ und ein Vektorpotential Ψ , wobei für das Vektorpotential zusätzlich Quellenfreiheit gilt, zerlegen:

$$\boldsymbol{\xi} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi \quad \text{mit} \quad \Psi = 0. \quad (\text{A.4})$$

Mit den zuvor getroffenen Annahmen ergeben sich die x - und y -Komponenten der mechanischen Verschiebungen zu

$$\xi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}, \quad (\text{A.5})$$

$$\xi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}. \quad (\text{A.6})$$

Demnach genügt es die z -Komponente des Vektorpotentials sowie das Skalarpotential zu kennen, welche den jeweiligen Wellengleichungen

$$\frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial t^2} - \Delta \Psi_z = 0 \quad (\text{A.8})$$

genügen müssen [Gra91; Ach76]. Während Gleichung A.7 eine Longitudinalwelle beschreibt, handelt es sich in Gleichung A.8 um eine Transversalwelle [Ach76]. Zur Lösung der Wellengleichungen wird jeweils ein Exponentialansatz mit

$$\Phi = \Phi_0(x) e^{-j(ky - \omega t)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Psi_z = \Psi_0(x) e^{-j(ky - \omega t)} \quad (\text{A.10})$$

verwendet.

Durch Einsetzen von Gleichung A.9 in Gleichung A.7 bzw. Gleichung A.10

A.2 Herleitung der Rayleigh-Lamb-Gleichung

in Gleichung A.8 ergeben sich die Differentialgleichungen zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_0(x) = \left(\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \right) \Phi_0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_0(x) = \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \right) \Psi_0. \quad (\text{A.12})$$

Da Gleichung A.11 $\Phi_0(x)$ sowie dessen zweite Ableitung, jedoch nicht die erste Ableitung enthält, wird Gleichung A.11 durch eine trigonometrische Funktionen gelöst, was analog für Gleichung A.12 mit $\Psi_0(x)$ gilt:

$$\Phi_0(x) = A_L \sin(k_{L,L}x) + B_L \cos(k_{L,L}x), \quad (\text{A.13})$$

$$\Psi_0(x) = A_T \sin(k_{T,L}x) + B_T \cos(k_{T,L}x) \quad (\text{A.14})$$

mit

$$k_{L,L} = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{und} \quad k_{T,L} = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (\text{A.15})$$

Zur Berücksichtigung der Randbedingungen aus Gleichung A.3 werden die relevanten Komponenten der mechanischen Spannung σ unter Annahme eines isotropen Mediums aus den Potentialen und den Lamé-Konstanten mittels Hookeschem Gesetz (Gleichung 2.5) berechnet [Ach76]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda_{La} + 2\mu) \varepsilon_{xx} + \lambda_{La} \varepsilon_{yy} \\ &= (\lambda_{La} + 2\mu) \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \lambda_{La} \frac{\partial \xi_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} \\ &= \mu \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Nach den Randbedingungen aus Gleichung A.3 werden Gleichung A.16 und A.17 am Rand der Platte bei $x = \pm t_h/2$ zu Null, während die dritte Randbedingung $\sigma_{xz}|_{x=\pm t_h/2} = 0$ bereits durch die Annahme, dass die Feldverteilung nicht von der z -Komponente sowie deren Ableitungen abhängt, gegeben ist. Somit ergeben sich mit Gleichung A.16 und A.17 an den Stellen $x = \pm t_h/2$ vier Bedingungen bzw. Gleichungen, von denen jedoch nur zwei linear unabhängig sind. Aufgrund der enthaltenen trigonometrischen Funktionen lassen sich die Ansatzfunktionen der Potentiale (Gleichung A.13 und A.14) in Kosinus-Anteile und Sinus-Anteile zerlegen, welche getrennt

A Anhang

voneinander in Gleichung A.16 und A.17 eingesetzt werden [Ach76].

Werden dazu Gleichung A.5 und A.6 betrachtet, ergibt sich mit

$$\Phi_0 = A_L \sin(k_{L,L}x), \quad (A.18)$$

$$\Psi_0 = B_T \cos(k_{T,L}x), \quad (A.19)$$

eingesetzt in Gleichung A.5

$$\xi_x = [k_{L,L}A_L \cos(k_{L,L}x) + jk_B T \cos(k_{T,L}x)] e^{-j(ky - \omega t)} \quad (A.20)$$

eine rein symmetrische Verschiebung. Die y -Komponente (Ausbreitungsrichtung) ergibt sich durch Gleichung A.6 aus rein asymmetrischen Komponenten zu

$$\xi_y = [j k A_L \sin(k_{L,L}x) + k_{T,L} B_T \sin(k_{T,L}x)] e^{-j(ky - \omega t)}. \quad (A.21)$$

Da die Verschiebung in Ausbreitungsrichtung nur asymmetrische Komponenten enthält, werden die berechneten Moden als asymmetrische Moden bezeichnet. Einsetzen von Gleichung A.20 und A.21 in Gleichung A.16 und A.17 sowie Auswertung am Rand der Platte bei $x = \pm t_h/2$, ermöglicht die Bestimmung der Koeffizienten A_L und B_T . Somit ergibt sich die Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung für asymmetrische Moden zu

$$\frac{\tan(k_{T,L}t_h/2)}{\tan(k_{L,L}t_h/2)} = -\frac{(k_{T,L}^2 - k^2)^2}{4k^2 k_{L,L} k_{T,L}}. \quad (A.22)$$

Analog lassen sich die weiteren Koeffizienten B_L und A_T bestimmen. Mit

$$\Phi_0 = B_L \cos(k_{L,L}x), \quad (A.23)$$

$$\Psi_z = A_T \sin(k_{T,L}x) \quad (A.24)$$

sowie Gleichung A.5 und A.6 enthält die x -Komponente mit

$$\xi_x = [-k_{L,L}B_L \sin(k_{L,L}x) + jk_A T \sin(k_{T,L}x)] e^{-j(ky - \omega t)} \quad (A.25)$$

nur asymmetrische Elemente. Die y -Komponente als Ausbreitungsrichtung enthält mit

$$\xi_y = [j k B_L \cos(k_{L,L}x) - k_{T,L} A_T \cos(k_{T,L}x)] e^{-j(ky - \omega t)} \quad (A.26)$$

nur symmetrische Komponenten, weshalb diese Moden symmetrische Moden genannt werden. Einsetzen der Komponenten (Gleichung A.25 und A.26) in Gleichung A.16 und A.17, sowie Auswertung am Rand der Platte $x = \pm t_h/2$, liefert die Koeffizienten A_T und B_L . [Ach76]

Demzufolge ergibt sich die Rayleigh-Lamb-Gleichung für symmetrische Moden mit

$$\frac{\tan(k_{T,L}t_h/2)}{\tan(k_{L,L}t_h/2)} = -\frac{4k^2 k_{L,L} k_{T,L}}{(k_{T,L}^2 - k^2)^2}. \quad (\text{A.27})$$

Zusammenfassend lassen sich Gleichung A.22 und A.27 schließlich als die bekannte Rayleigh-Lamb-Gleichung in Gleichung 2.43 schreiben.

A.3 Ergänzende Abbildungen

A.3.1 Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 4.12

A Anhang

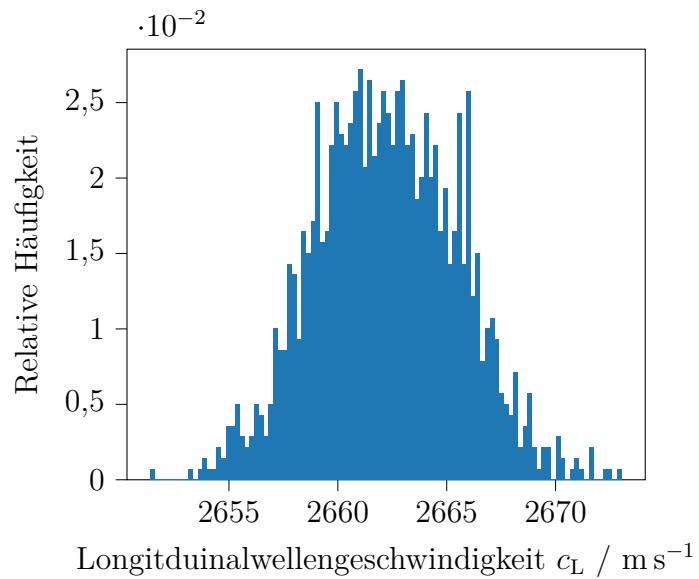


Abbildung A.1: Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von PA6

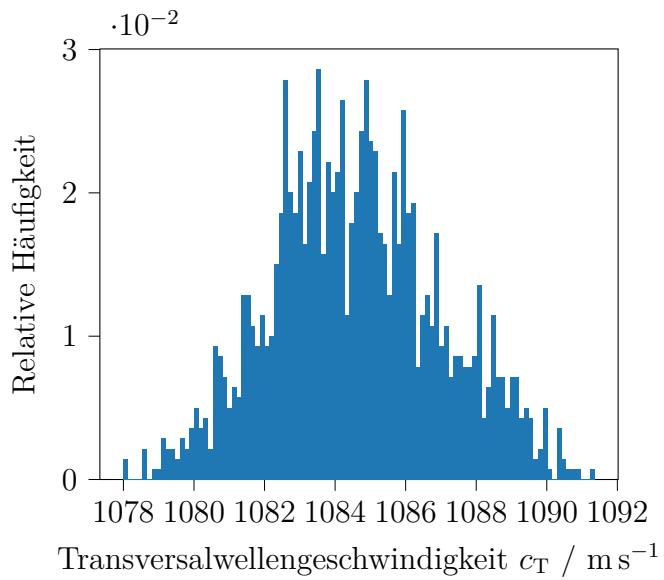


Abbildung A.2: Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von PA6

A.3 Ergänzende Abbildungen

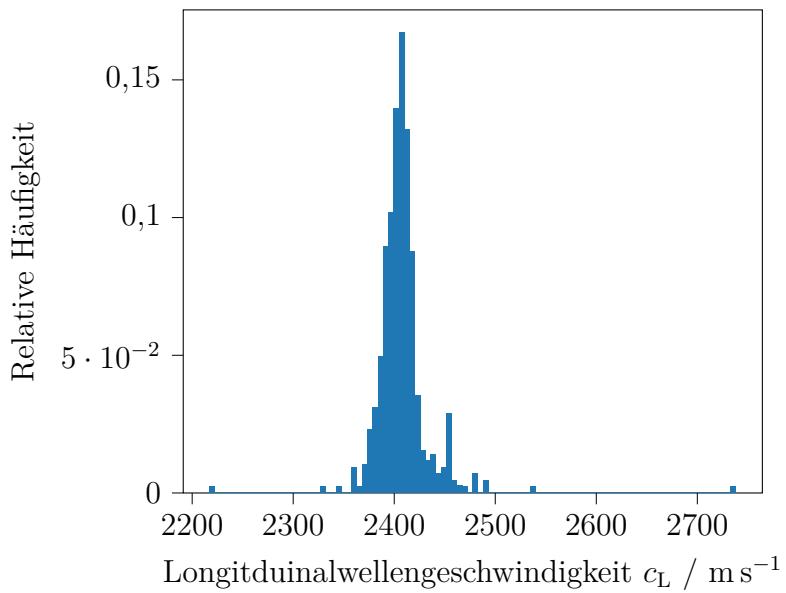


Abbildung A.3: Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von PET

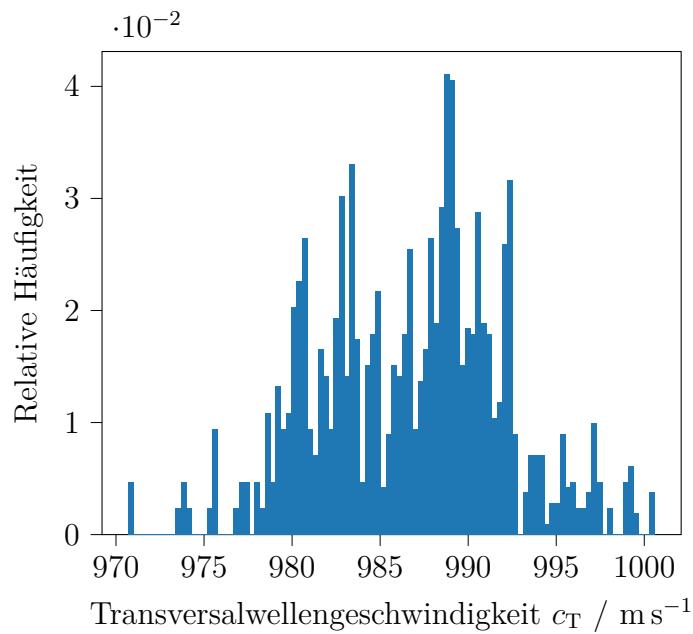


Abbildung A.4: Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von PET

A Anhang

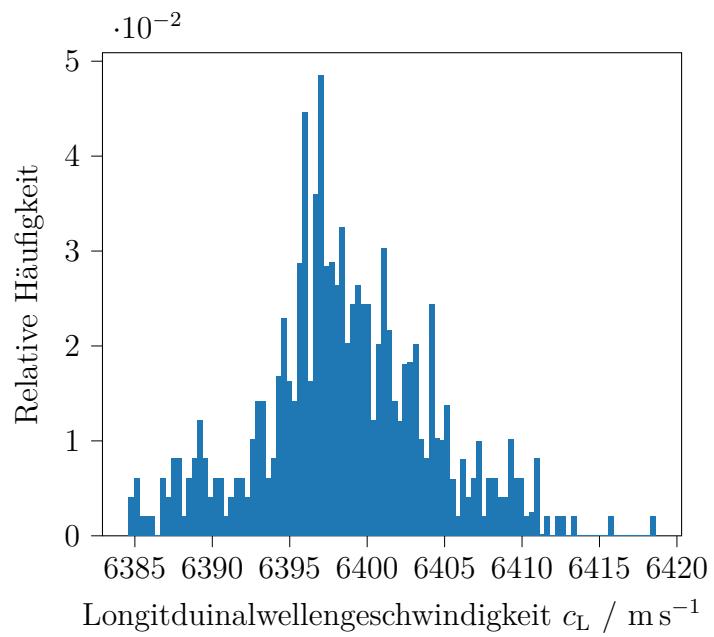


Abbildung A.5: Relative Häufigkeit der Longitudinalwellengeschwindigkeit von Aluminium

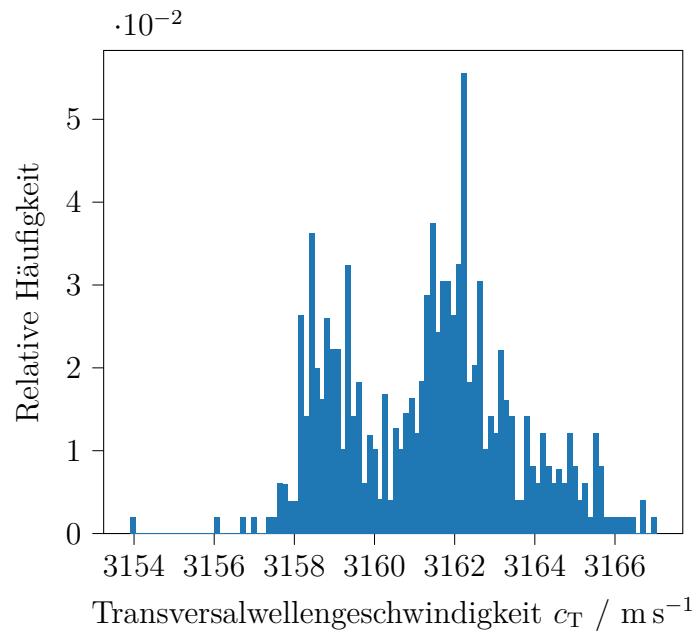


Abbildung A.6: Relative Häufigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von Aluminium

A.3.2 Ergänzende Abbildungen zu Abschnitt 5.4

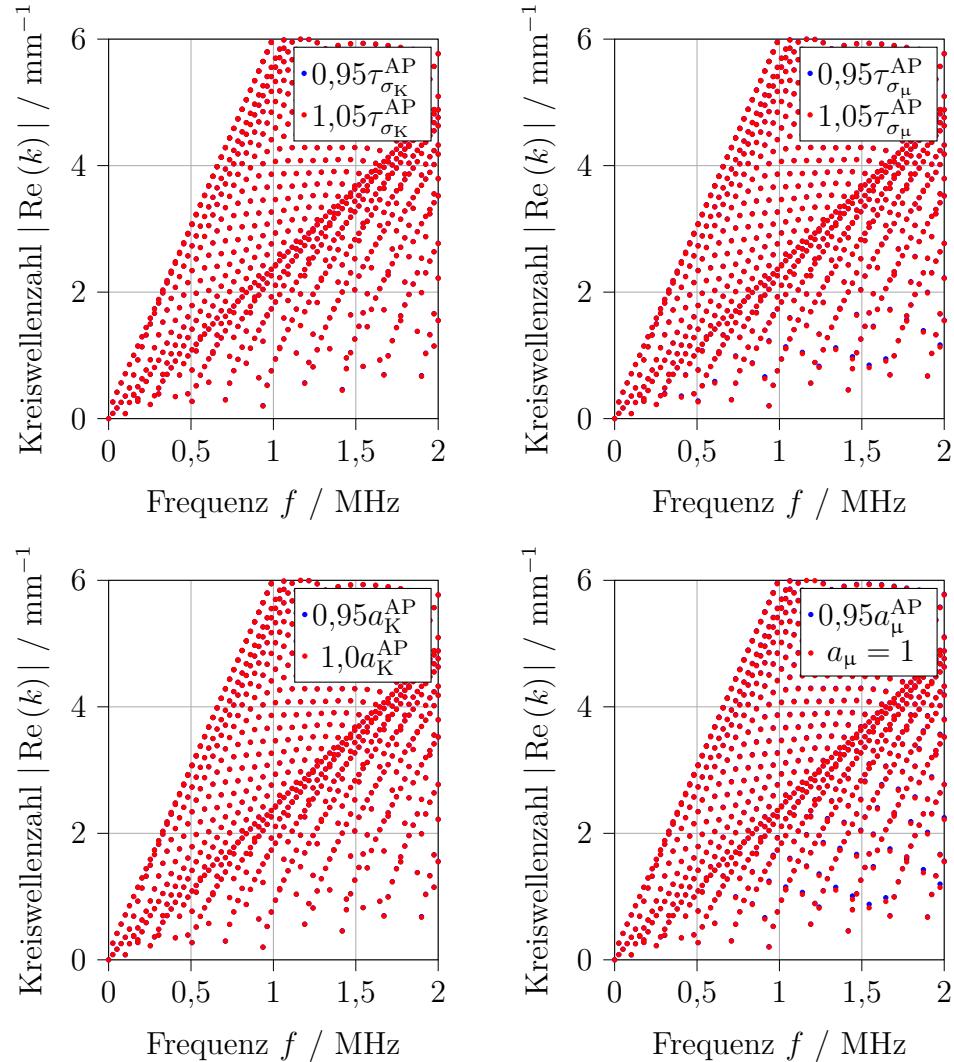


Abbildung A.7: Realteil der Kreiswellenzahl bei Änderung der Relaxationszeitkonstanten sowie der Ableitungsordnungen